21
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA ESPECTRAL DE OPERADORES QUE DEJAN CONOS INVARIANTES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

BERTA ZAVALA SANTANA

DIRECTOR DE TESIS: DRA. MARTHA TAKANE IMAY

1999

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Teoría espectral de operadores que dejan conos invariantes".

realizado por Zavala Santana Berta

con número de cuenta 8802158-4 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dra. Martha Takane Imay.	Martha Takane
Propietario	Dr. Roberto Martínez Villa.	
Propietario	Dr. José Antonio de la Peña Mena.	
Suplente	Dr. Francisco Marmolejo Rivas.	Marmolejo
Suplente	Dr. Max Neumann Coto.	

Consejo Departamental de Matemáticas
Mat. Julio César Guevara Bravo.

ÍNDICE

Esta tesis está dedicada al dulce recuerdo de mi abuela.

AGRADECIMIENTOS.

En primer lugar quiero agradecer a alguien que ya no está conmigo, a mi abuela, por enseñarme a hacer los sueños realidad.

A Geno y a Paz (también a mis tíos) por su cariño y apoyo siempre. A mis "hermanos", por su amor, por ser un motivo a mejorar cada día. A todos ustedes gracias los quiero mucho.

También quiero agradecer muy especialmente a: Dra. Martha Takane por ser la persona sin cuya ayuda este trabajo no sería hoy una realidad. Martha, a la hora de escribir estas líneas no encontré las palabras que expresaran todo mi agradecimiento, por esta razón sólo te digo SUPER GRACIAS POR TODO.

De manera especial debo agradecer a: Dr. Max Neumann sus comentarios, sugerencias y toda su ayuda directa e indirecta a lo largo del presente trabajo.

Por supuesto debo agradecer también a: Dr. Roberto Martínez, Dr. José Antonio de la Peña, Dr. Francisco Marmolejo por sus comentarios, sugerencias y su valioso tiempo, así como a: Dr. Oscar Palmas su tiempo.

Y por supuesto no puedo dejar de mencionar a los amigos y compañeros de siempre César y Gerardo. A Gabriel las sugerencias y los ánimos que siempre me ha dado.

Por último, a todos mis maestros, pues de cada uno siempre he tenido algo que aprender.

Gracias a todos ustedes, por lo que cada uno me ha dado.

Berta Zavala Santana.

Enero, 1999.

AGRADECIMIENTOS.

En primer lugar quiero agradecer a alguien que ya no está conmigo, a mi abuela, por enseñarme a hacer los sueños realidad.

A Geno y a Paz (también a mis tios) por su cariño y apoyo siempre. A mis "hermanos", por su amor, por ser un motivo a mejorar cada dia. A todos ustedes gracias los quiero mucho.

También quiero agradecer muy especialmente a: Dra. Martha Takane por ser la persona sin cuya ayuda este trabajo no seria hoy una realidad. Martha, a la hora de escribir estas líneas no encontré las palabras que expresaran todo mi agradecimiento, por esta razón sólo te digo SUPER GRACIAS POR TODO.

De manera especial debo agradecer a: Dr. Max Neumann sus comentarios, sugerencias y toda su ayuda directa e indirecta a lo largo del presente trabajo.

Por supuesto debo agradecer también a: Dr. Roberto Martínez, Dr. José Antonio de la Peña, Dr. Francisco Marmolejo por sus comentarios, sugerencias y su valioso tiempo, así como a: Dr. Oscar Palmas su tiempo.

Y por supuesto no puedo dejar de mencionar a los amigos y compañeros de siempre César y Gerardo. A Gabriel las sugerencias y los ánimos que siempre me ha dado.

Por último, a todos mis maestros, pues de cada uno siempre he tenido algo que aprender.

Gracias a todos ustedes, por lo que cada uno me ha dado.

Berta Zavala Santana.

Enero, 1999.

INTRODUCCIÓN.

En 1907, Perron [Pe] inició el estudio de matrices $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ con todas sus entradas positivas y Frobenius [F1,F2] llevó un poco más allá este estudio. Si $\rho = \rho(A) = \max\{|\ \lambda\ |;\ \lambda$ es un valor propio de $A\}$, el *radio espectral* de A, entonces sus resultados demostraron que ρ es un valor propio de A, el cual es una raíz simple del polinomio característico de A y tiene un vector propio asociado a ρ que tiene todas sus entradas positivas. En 1912, Frobenius [F3] demostró que estos resultados valían para una clase más amplia de matrices con entradas no negativas. Éstas son las que llamaron **matrices irreducibles**. Una matriz A, *con entradas no negativas,* es llamada **reducible** si existe una matriz de permutación P tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

donde B_{11}, B_{22} son matrices cuadradas. En otro caso se dice que A es **irreducible** .

El estudio de matrices no negativas permaneció inactivo hasta 1950, excepto para cierto tipo de matrices especiales, como las matrices estocásticas, que fueron investigadas durante este periodo. Pero en 1950, el artículo de Wielandt [W] atrajo de nuevo la atención en esta área.

Definición : *Sea V un K-espacio vectorial, $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, donde $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ denota al campo de los números reales (complejos). Sea $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$ una norma en V. Un subconjunto cerrado C en V es un* **cono** *si satisface*

a) $C + C \subseteq C$ *(i.e., $\forall v, w \in C, v + w \in C$).*

b) $\alpha C \subseteq C$ *si $\alpha \geq 0$, $\alpha \in K$ (i.e., $\forall v \in C, \alpha v \in C$).*

c) $C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$, *donde* $-C = \{-v \mid v \in C\}$.

Más aún, un cono $C \subseteq V$ es **sólido** *en V si $int_V C \neq \emptyset$.*

Definición : *Sea $A \in Hom(V, V)$. Si $AC \subseteq C$, se dice que A* **deja invariante** *al cono C (o C es A-***invariante***), y se escribe $A \geq 0$. Si $A \geq 0$ y $A \neq 0$ se escribe $A > 0$.*

En [Bi,V], Birkhoff y Vandergraft, respectivamente, dan una extensión del teorema de Perron-Frobenius para operadores que dejan conos sólidos invariantes, en el caso de dimensión finita. Resultados que tienen aplicaciones muy interesantes.

La teoría espectral de operadores que dejan conos invariantes está ahora bastante completa y ha sido resumida en el artículo de *Barker-Schneider* [BS]. El presente trabajo está dividido en dos partes principales: *una* dedicada a desarrollar y entender el artículo de Barker-Schneider, que tiene resultados del tipo Perron-Frobenius aún para espacios vectoriales de dimensión infinita. Hemos aclarado o completado argumentos, corregido algunas inexactitudes, así como agregado otros resultados que no están incluidos en dicho artículo. También incluimos algunos resultados que creimos importantes e interesantes, de teoría de conos y la teoría de Perron-Frobenius.

En el teorema (III.2.20), hemos demostrado que los conceptos de irreducibilidad (de operadores que dejan conos invariantes) de Vandergraft y Barker-Schneider son equivalentes, hecho que se menciona en [BS] para el caso de espacios vectoriales de dimensión finita, pero no encontramos la prueba en la literatura. También hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema III.2.16 *Sean $C \subseteq V$ cono sólido, $A \geq 0$, continua. Entonces A es irreducible si y sólo si A es fuertemente irreducible.*

La otra parte de este trabajo, es sobre la *teoría de conos*, donde damos los resultados necesarios para entender el artículo de Barker-Schneider y otros resultados que se nos hacen bonitos e interesantes, y dan un pequeño panorama de esta teoría . También incluimos algunas observaciones que creemos son originales, por ejemplo el siguiente teorema:

Teorema II.3.2. (**M. Takane**) *Si* $C \subseteq V = \mathbb{R}^n$ *cono entonces existe* $\widetilde{C}$ *cono poliédrico tal que* $C \subseteq \widetilde{C} \subseteq V$.

Para entender este trabajo se necesitan los cursos de álgebra lineal I y II de la licenciatura, así como ideas básicas de análisis y topología. Como ayuda para el lector, hemos incluido un apéndice con los resultados principales tanto de topología como de análisis, que se usan a lo largo del presente trabajo.

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

En los dos primeros capítulos se da lo concerniente a la teoría de conos. En el **capítulo I**,se dan las definiciones básicas de conos, así como ejemplos que usaremos a lo largo del trabajo o ejemplos sencillos que ilustran los conceptos y resultados.

En el **capítulo II**, se estudian los conos poliédricos, en donde se demuestra el teorema (II.3.2): Sean $V = \mathbb{R}^n$, $C \subseteq V$ cono, entonces existe un cono poliédrico $\widetilde{C} \subseteq V$ tal que $C \subseteq \widetilde{C}$. Que tiene consecuencias interesantes, ver (3.3),(3.5).

También en este capítulo se compara nuestra definición de cara [BS], con la dada por Vandergraft, que llamaremos V-cara. Damos ejemplos en donde ambos conceptos no coinciden y decimos cuándo si.

A pesar de que ambas definiciones de cara no coinciden, en el **capítulo III**, demostramos en el teorema (III.2.19), que nuestra definición de irreducibilidad y la de V-irreducibilidad sí coinciden. En este capítulo también demostramos bajo qué condiciones las definiciones de A irreducible y A fuertemente irreducible coinciden, teorema (III.2.16).

Y en el **capítulo IV**, damos los resultados tipo Perron-Frobenius para espacios vectoriales no necesariamente de dimensión finita.

Notación: Las referencias están puestas de la siguiente manera, por ejemplo si estamos fuera del capítulo I, escribiremos (I.2.11) que se refiere al capítulo I, sección 2, resultado 11. Y si estamos dentro del capítulo I, hacemos la referencia como (2.11), es decir, sección 2, resultado 11.

Capítulo I. Teoría de Conos.

§1. Conos. Generalidades.

En este capítulo, se darán las definiciones básicas para nuestro trabajo con conos, así como algunos resultados. que nos serán de gran utilidad más adelante.

Sea $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, donde $\mathbb{R}$ (respectivamente $\mathbb{C}$) denota al campo de los números reales (resp. complejos). Sea V un K-espacio vectorial, no necesariamente de dimensión finita y $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$ una norma de V (ver, A.3.1).

En adelante, si $V = K^n$, $n \in \mathbb{N}$ y no mencionamos qué topología le estamos asignando, supondremos que es la topología dada por la norma usual (i.e., $x = (x_i)_1^n$, $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, si $K = \mathbb{R}$ ó $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^n | x_i |^2}$, si $K = \mathbb{C}$, (ver (A.3.10)).

A lo largo del presente trabajo consideramos al vector $x \in K^n$ como un vector columna, a menos que se escriba lo contrario y x^t denota el vector transpuesto de x.

Iniciaremos dando la definición de cono.

Definición 1.1. *Sea $C \subseteq V$, cerrado (con respecto a la topología dada por $\|\cdot\|$). Se dice que C es un* **cono** *de V si:*

a) $C + C \subseteq C$ *(i.e., $\forall\, v, w \in C, v + w \in C$).*

b) $\alpha C \subseteq C$ *si $\alpha \geq 0$, $\alpha \in K$ (i.e., $\forall\, v \in C, \alpha v \in C$).*

c) $C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$, *donde $-C = \{-v \mid v \in C\}$.*

Definición 1.2. *Sea $C \subseteq V$ cerrado, si C satisface (a) y (b) de la definición anterior, a C se le llamará* **precono**.

Definición 1.3. *Un conjunto M se dice que es* **convexo** *si para toda $x, y \in M$, $t \in [0,1]$ entonces $(1-t)x + ty \in M$.*

Como consecuencia directa de la definición, tenemos el siguiente

Lema 1.4. *Sea $C \subseteq V$ cono.*

i) $C \neq \emptyset$.

ii) *C es convexo.*

iii) *$-C$ es cono.*

iv) *$int_V(-C) = -int_V(C)$. Donde $int_V C$ denota el* **interior de** *C en V. En caso de que no haya confusión, utilizaremos $intC = int_V C$.*

Demostración: **i)** $C \neq \emptyset$ ya que al menos $\bar{0} \in C$.

ii) Sean $x, y \in C$.

P.D. $tx + (1-t)y \in C$, $t \in [0,1]$.

Como C es cono, tenemos que $\lambda x, \mu y \in C$, $\forall \lambda, \mu \geq 0$ y $\lambda x + \mu y \in C$. En particular, $\forall t \in [0,1]$ se tiene $tx + (1-t)y \in C$.

Por lo tanto, C es convexo.

iii) P.D. $-C$ es cono, donde $-C = \{-v \mid v \in C\}$.

a) P.D. $-C$ es cerrado.

Sea $(-z_n)_{n\in\mathbf{N}} \subseteq (-C)$ una sucesión, donde $z_n \in C$, $\forall n \in \mathbf{N}$, tal que $\lim_{n\to\infty} -z_n = -z$ existe. P.D. $-z \in (-C)$.

Entonces, como cada $-z_n \in (-C)$ $\forall n \in \mathbf{N}$ y cada $z_n \in C$ implica que $(z_n)_{n\in\mathbf{N}} \subseteq C$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ y C es cerrado, así $z \in C$, por lo que $-z \in (-C)$.

Por lo tanto, $-C$ es cerrado.

b) P.D. $(-C) + (-C) \subseteq (-C)$.

Sean $-x, -y \in (-C)$ con $x, y \in C$. Demostremos pues, $-x + (-y) \in (-C)$. Pero $-x + (-y) = -(x+y)$, con $x + y \in C$ entonces $-(x+y) \in (-C)$, de donde $-x + (-y) \in (-C)$.

c) P.D. $\alpha(-C) \subseteq (-C)$.

Sean $\alpha \geq 0, \alpha \in K$, $-x \in (-C)$. Demostremos entonces que $\alpha(-x) \in (-C)$, pero $\alpha(-x) = -(\alpha x)$, pero $\alpha x \in C$ entonces $-(\alpha x) \in (-C)$, por lo que $\alpha(-x) \in (-C)$.

d) P.D. $(-C) \cap (-(-C)) = \{\bar{0}\}$.

Sabemos que $(-C) \cap (-(-C)) = (-C) \cap C = C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$ ya que C es cono.

Por lo tanto, $-C$ es cono.

iv) P.D. $int(-C) = -intC$.

Basta demostrar $v \in V$, $r > 0, -B_r(v) = B_r(-v)$. Entonces $w \in B_r(-v)$ si y sólo si $\| -w - v \| = \| w + v \| < r$ si y sólo si $-w \in B_r(v)$ si y sólo si $w \in -B_r(v)$. ∎

Observación 1.5. Si $S \subseteq V$, se escribe $\langle S \rangle$ para denotar al **subespacio vectorial de V generado por S**. Si C es un cono, obsérvese que $\langle C \rangle = C - C := \{x - y \mid x, y \in C\}$ si $K = \mathbb{R}$ ó $\langle C \rangle = (C - C) + i(C - C)$ si $K = \mathbb{C}$. Además, escribiremos $\dim_K C$ por $\dim_K \langle C \rangle$.

Definición 1.6. *Un cono $C \subseteq V$ es* **generador** *de V si el K-espacio vectorial generado por C es V. Es decir, $\langle C \rangle = V$.*

Definición 1.7. *Si C es un cono de V con interior no vacío, $intC \neq \emptyset$, se dice que C es un* **cono sólido**.

Daremos, a continuación ejemplos para las definiciones.

Ejemplo 1.8.

1.8.0. $\{\bar{0}\} \subseteq V$ es un cono. Es claro.

1.8.1. Sea $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$. Sea $v \in V$, $C = \{\lambda v \mid \lambda \geq 0\}$. Además, $\langle C \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in K\} \neq V$, por lo cual tenemos que C no es generador y C no es sólido, ver figura (1.8.1) y ver también (1.15).

1.8.2. Sean $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$. Sean $v, w \in V \setminus \{\bar{0}\}$, tal que $v \notin \mathbb{R}w$. $C = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \geq 0,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Entonces $\langle C \rangle = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

De donde C es generador, además, C es sólido, ver figura (1.8.2) y ver también (1.17).

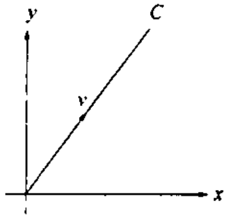

figura 1.8.1

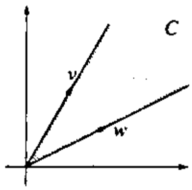

figura 1.8.2

1.9. El siguiente ejemplo lo usaremos constantemente a lo largo del presente trabajo.

Sea $V = \mathbb{R}^n$, $C = \{x = (x_i)_{i=1}^n \mid x_i \geq 0, \forall i\}$. Entonces C es un cono, llamado el **cono positivo** y denotado por V^+. Además, V^+ es un cono sólido. En adelante cuando nos estemos refiriendo a V^+ el cono positivo, sólo diremos V^+.

Demostración: a) P.D. V^+ es cerrado.

Sea $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en V^+ tal que existe $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = w$. P.D. $w \in V^+$.

Como $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = w$, entonces $\forall i$, $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = w_i$. Como $x^{(n)} \in V^+$, $\forall i$ $x_i^{(n)} \geq 0$ entonces $w_i \geq 0$ $\forall i$. Por lo tanto, $w \in V^+$.

Por lo tanto, V^+ es cerrado.

b) P.D. $V^+ + V^+ \subseteq V^+$.

Sean $x, y \in V^+$ entonces para $1 \leq i \leq n$, $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$ así $x_i + y_i \geq 0$ de donde $x + y \in V^+$.

c) P.D. $\alpha V^+ \subseteq V^+$, $\alpha \in K$, $\alpha \geq 0$.

Sean $\alpha \in K, \alpha \geq 0, x \in V^+$ entonces $x_i \geq 0$, así $\alpha x_i \geq 0$ por lo que

$\alpha x \in V^+$.

d) P.D. $\quad V^+ \cap (-V^+) = \{\bar{0}\}$

Sea $x \in V^+ \cap (-V^+)$ entonces $x \in V^+$ y $x \in (-V^+)$ entonces $x_i \geq 0$ y $x_i \leq 0$ para toda $i = 1, ..., n$, de donde, $x_i = 0$ para toda $i = 1, ..., n$. Así, $x = \bar{0}$.

Por lo tanto, V^+ es cono.

Además como la **base canónica** $\{e_i = (0, ..., 1_i, 0, ..., 0); \quad i = 1, ..., n\} \subseteq V^+$, entonces V^+ es sólido, por (1.17). ∎

Ahora para ilustrar geométricamente este ejemplo, sea $V = \mathbb{R}^2$ y $V^+ = \{\lambda e_1 + \mu e_2 \mid \lambda, \mu \geq 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

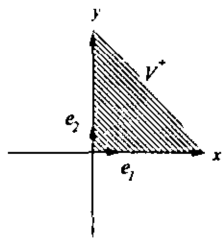

figura 1.9

1.9.1. Sea $V = K^n$. Si $I \subseteq \{1, ..., n\}$. Sea $F_I = \{x \in V^+ \mid x_i = 0, i \notin I\}$, recordemos que V^+ es el cono positivo definido en (1.9). Entonces F_I es cono.

Demostración: a) P.D. $\quad F_I$ es cerrado.

Sea $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F_I$ tal que $w = \lim_{n \to \infty} x^{(n)}$ existe. P.D. $w \in F_I$. Por (1.9), $w \in V^+$. Ahora como $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \notin I$, $x_i^{(n)} = 0$, entonces $\forall i \notin I$, $w_i = \lim_{n \to \infty} x_i = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$. Por lo tanto, $w \in F_I$.

Por lo tanto, F_I es cerrado.

b) P.D. $\quad F_I + F_I \subseteq F_I$.

Sean $x, y \in F_I$ entonces $x_i = 0$, $i \notin I$, $y_i = 0$, $i \notin I$, implica $x_i + y_i = 0$, $i \notin I$.

Por lo tanto, $x + y \in F_I$.

c) P.D. $\quad \alpha F_I \subseteq F_I$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \in K$.

Sea $x \in F_I$ entonces $x_i = 0$, $i \notin I$ de donde $\alpha x_i = 0$, $i \notin I$, por lo cual $\alpha x \in F_I$.

d) P.D. $F_I \cap (-F_I) = \{\bar{0}\}$.

Pues $\{\bar{0}\} \subseteq F_I \cap (-F_I) \subseteq V^+ \cap (-V^+) = \{\bar{0}\}$.

Por lo tanto, F_I es un cono. ∎

1.10. Sea $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} = \{x \in V \mid \exists \ell \text{ tal que } \forall n \geq \ell,\ x_n = 0\}$. También definamos $V^+ := \{x \in V \mid \forall i \in \mathbb{N},\ x_i \geq 0\} \subseteq V$. Entonces V^+ es un cono en V. Sea $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $\| x \| = \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2}$. (Observemos que $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2$ está bien definida debido a que para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $x_n = 0$).

Demostración: P.D. V^+ es cono. a) P.D. V^+ es cerrado. P.D. $V \setminus V^+$ es abierto.

Sea $x \in V \setminus V^+$ entonces $\exists t \in \mathbb{N}$ tal que $x_t < 0$. Sea $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = 0\ \forall i > \ell$. Como $(x_1, ..., x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell \setminus (\mathbb{R}^+)^\ell$, entonces $\exists r > 0$ tal que $B_r((x_1, ..., x_\ell)) \subseteq \mathbb{R}^\ell \setminus (\mathbb{R}^\ell)^+$, por ser abierto. Sin pérdida de generalidad tomemos $r < \| x \|$.

P.D. $B_r(x) \subseteq V \setminus V^+$.

Sea $y \in B_r(x)$ entonces $\sum_{i\leq\ell}(x_i - y_i)^2 + \sum_{i>\ell} y_i^2 < r^2$ (pues $\sqrt{\ }$ es creciente en $\mathbb{R}^+$) entonces definamos

$$z = (z_i), \quad z_i = \begin{cases} y_i & i \leq \ell, \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

entonces $(z_1, ..., z_\ell) \in B_r((x_1, ..., x_\ell)) \subseteq \mathbb{R}^\ell \setminus (\mathbb{R}^+)^\ell$.

Si $z \neq \bar{0}$ entonces existe i tal que $y_i < 0$ entonces $y \notin V^+$.

Si $z = \bar{0}$ entonces $r^2 > \| x - y \|^2 = \sum_{i\leq\ell} x_i^2 + \sum_{i>\ell} y_i^2 \geq \sum_{i\leq\ell} x_i^2 = \| x \|^2 > r^2$, contradicción.

Por lo tanto. $y \in V \setminus V^+$. Así $B_r(x) \subseteq V \setminus V^+$.

Por lo tanto, $V \setminus V^+$ es abierto.

Por lo tanto, V^+ es cerrado.

Más aún, $V^+ = \partial V^+$. Como V^+ es cerrado entonces $\partial V^+ \subseteq V^+$.

P.D. $V^+ \subseteq \partial V^+$.

Sea $x \in V^+$.

P.D. $\forall r > 0$ $B_r(x) \cap V^+ \neq \emptyset$ y $B_r(x) \cap (V \setminus V^+) \neq \emptyset$.

Basta demostrar $B_r(x) \cap (V \setminus V^+) \neq \emptyset$.

Si $x = \bar{0}$. Es claro.

Si $x \neq \bar{0}$, supongamos que $x_\ell \neq 0$ y $\forall n > \ell$, $x_n = 0$, entonces $y := x - \frac{r}{2}e_{\ell+1} \in B_r(x) \cap (V \setminus V^+)$, pues $\| x - y \| = \frac{r}{2} < r$, $y \notin V^+$.

Por lo tanto, $V^+ \subseteq \partial V^+$.

b) P.D. $V^+ + V^+ \subseteq V^+$.

Sean $x, y \in V^+$ entonces $x_i \geq 0, y_i \geq 0$, así $x_i + y_i \geq 0$ de donde tenemos $x + y \in V^+$.

c) P.D. $\alpha V^+ \subseteq V^+$.

Sea $\alpha \in K$, $\alpha \geq 0$, $x \in V^+$ entonces como $x_i \geq 0$, así tenemos que $\alpha x_i \geq 0$, por lo que se tiene $\alpha x \in V^+$.

d) P.D. $V^+ \cap (-V^+) = \{\bar{0}\}$.

Sea $x \in V^+ \cap (-V^+)$ entonces $x \in V^+$ y $x \in (-V^+)$, así $x_i \geq 0$ y $x_i \leq 0$ $\forall i = 1, ..., n$, de donde $x_i = 0$ $\forall i = 1, ..., n$, así $x = \bar{0}$.

Por lo tanto, V^+ es cono. ■

1.10.1. Sea $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$. Sean $V^+ = \{x \in V \mid \forall i \in \mathbb{N}, x_i \geq 0\}$ cono en V y $\| x \| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2}$ como en (1.10).

Si $I \subseteq \mathbb{N}$. Definamos $V_I^+ := \{v \in V \mid v_i = 0 \ \forall i \notin I\}$. Entonces, V_I^+ es cono de V^+ y $V_I^+ \subseteq V^+$.

Demostración: P.D. V_I^+ es cono.

a) P.D. V_I^+ es cerrado.

Sea $(v^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V_I^+$ sucesión tal que $\lim_{n \to \infty} v^{(n)} = v$ existe. P.D. $v \in V_I^+$.

Entonces tenemos que $(v^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V^+$ y así $\lim_{n \to \infty} v^{(n)} = v \in V^+$ (pues V^+ es cerrado). Ahora, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \notin I$, $v_i^{(n)} = 0$, entonces $v_i = \lim_{n \to \infty} v_i^{(n)} = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$ $\forall i \notin I$, por lo tanto, $v \in V_I^+$.

Por lo tanto, V_I^+ es cerrado.

b) P.D. $V_I^+ + V_I^+ \subseteq V_I^+$.

Sean $x, y \in V_I^+$ entonces $x_i = 0$, $y_i = 0\ \forall\, i \notin I$ entonces $x_i + y_i = 0\ \forall i \notin I$. Por lo tanto, $x + y \in V_I^+$.

c) P.D. $\alpha V_I^+ \subseteq V_I^+$.

Sean $\alpha \geq 0$, $\alpha \in K$, $x \in V_I^+$ entonces $x_i = 0\ \forall\, i \notin I$ entonces $\alpha x_i = 0\ \forall\, i \notin I$ entonces $\alpha x \in V_I^+$.

d) P.D. $V_I^+ \cap (-V_I^+) = \{\bar{0}\}$.

Como $\{\bar{0}\} \subseteq V_I^+ \cap (-V_I^+) \subseteq V^+ \cap (-V^+) = \{\bar{0}\}$.

Por lo tanto, V_I^+ es cono. ∎

1.11. En $V = \mathbb{R}^3$. Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2,\ x_3 \geq 0\}$. Entonces C es un cono. Además, a C se le llama el **cono de helado**, ver figura (1.11). Ejemplo tomado de [P].

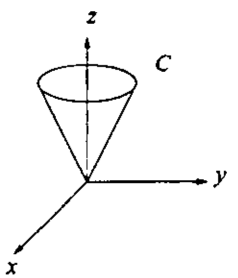

figura 1.11

Demostración: P.D. C es cono. a)P.D. C es cerrado. Observemos que $\partial C = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2,\ x_3 \geq 0\} \subseteq C$ entonces C es cerrado.

b)P.D. $C + C \subseteq C$.

Veamos que si $x = (x_1, x_2, x_3) \in C$ entonces $\| x' \| \leq x_3$, donde $x' = (x_1, x_2, 0)$ (es decir, $x' = x - x_3 e_3$).

Sean $x, y \in C$, entonces $\| x' + y' \| \leq \| x' \| + \| y' \| \leq x_3 + y_3$, con $x_3 + y_3 \geq 0$ pues $x_3, y_3 \geq 0$. Entonces, $\| x' + y' \|^2 = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \leq (x_3 + y_3)^2$.

Por lo tanto, $x + y \in C$.

c) P.D. $\alpha C \subseteq C$.

Sean $\alpha \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in C$.

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$ entonces $(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 = \alpha^2(x_1^2 + x_2^2)$. Por otro lado, sabemos que $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2$ pues $x \in C$ entonces $\alpha^2(x_1^2 + x_2^2) \leq \alpha^2 x_3^2$.

d) P.D. $C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$.

Sea $x \in (C \cap (-C))$ entonces $x \in C$ y $x \in (-C)$ entonces $\exists (w_1, w_2, w_3) = w \in C$ tal que $x = -w$ pero $0 \leq w_3 = -x_3 \leq 0$ de donde $x_3 = 0$ entonces $0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 0$ entonces $x_1 = x_2 = 0$.

Por lo tanto, $x = \bar{0}$.

Por lo tanto, C es un cono en $\mathbb{R}^3$. ■

Definición 1.12. *Para $x \in V$, el* **rayo generado por** x, *se define como:* $ray(x) := \{\alpha x \mid \alpha \geq 0\}$.

Lema 1.13. *Sea $x \in V$. El $ray(x)$ es un cono.*

Demostración: a) P.D. $ray(x)$ es cerrado.

Si $x = \bar{0}$, entonces $ray(x) = \{\bar{0}\}$ que es cerrado.

Sea $x \neq \bar{0}$.

Sea $\{\lambda_i x\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq ray(x)$ sucesión tal que $\lim_{i \to \infty} \lambda_i x = w$ existe. P.D. $w \in ray(x)$, (es decir, $w = \lambda x$ para alguna $\lambda \geq 0$).

Demostraremos que $\lambda := \lim_{i \to \infty} \lambda_i$ existe y $w = \lambda x \in ray(x)$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i \geq N$ $\| \lambda_i v - w \| < \varepsilon$. Entonces $\forall n, m \geq N$, $\| \lambda_n x - \lambda_m x \| = \| \lambda_n x - \lambda_m x + w - w \| \leq \| \lambda_n x - w \| + \| \lambda_m x - w \| < 2\varepsilon$, entonces $\forall n, m \geq N$ $| \lambda_n - \lambda_m | < \frac{2\varepsilon}{\|x\|}$.

Por lo tanto, $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy, entonces $\lim_{i \to \infty} \lambda_i =: \lambda$ existe, ver (A.3.13,14).

Por lo tanto, $w = \lambda x \in ray(x)$.

Por lo tanto, $ray(x)$ es cerrado.

b) P.D. $ray(x) + ray(x) \subseteq ray(x)$.

Sean $y, z \in ray(x)$ entonces $y = \alpha x$, $\alpha \geq 0$, $z = \mu x$, $\mu \geq 0$.

Ahora, $y + z = \alpha x + \mu x = (\alpha + \mu)x$ con $\alpha + \mu \geq 0$.

Por lo que, $y + x \in ray(x)$.

c) P.D. $\alpha ray(x) \subseteq ray(x)$.

Sea $\alpha \geq 0$, $\alpha \in K$, $y \in ray(x)$ entonces $y = \mu x$, $\mu \geq 0$. De donde, $\alpha y = \alpha(\mu x) = (\alpha\mu)x$ con $\alpha\mu \geq 0$.

Así, $\alpha ray(x) \subseteq ray(x)$.

d) P.D. $ray(x) \cap (-ray(x)) = \{\bar{0}\}$.

Si $x = \bar{0}$, entonces $ray(x) = \{\bar{0}\}$ y se tendría el resultado.

Supongamos que $x \neq \bar{0}$. Sea $y \in ray(x) \cap (-ray(x))$ entonces $y \in ray(x)$ y $y \in (-ray(x))$. Entonces $y = \alpha x$, $\alpha \geq 0$, $y = \beta x$, $\beta \leq 0$ implica $0 \leq \alpha = \beta \leq 0$, por lo cual, obtenemos $\alpha = 0$ entonces $y = \bar{0}$.

Y así, $ray(x) \cap (-ray(x)) = \{\bar{0}\}$.

Por lo tanto, $ray(x)$ es un cono. ∎

A continuación daremos ejemplos más generales de conos, con éstos podremos construir muchos otros.

Ejemplo 1.14.

1.14.1. Sea C_i cono $\forall i \in I$, entonces $\cap_{i \in I} C_i$ es cono.

Demostración: a) P.D. $\cap_{i \in I} C_i$ es cerrada.

Sabemos que intersección de cerrados es cerrado. (Ver A.1.3.).

b) P.D. $\cap_{i \in I} C_i + \cap_{i \in I} C_i \subseteq \cap_{i \in I} C_i$.

Sean $v, w \in \cap_{i \in I} C_i$ entonces $v, w \in C_i$, para toda $i \in I$. Como C_i es cono, $\forall i \in I$, $v + w \in C_i$ $\forall i \in I$. Entonces $v + w \in \cap_{i \in I} C_i$.

c) P.D. $\alpha(\cap_{i \in I} C_i) \subseteq \cap_{i \in I} C_i, \alpha \geq 0, \alpha \in K$.

Sean $\alpha \geq 0, \alpha \in K$, $v \in \cap_{i \in I} C_i$ entonces $v \in C_i$, $\forall i \in I$. Además, $\alpha v \in C_i$, $\forall i \in I$, pues C_i es cono para toda $i \in I$, por lo que $\alpha v \in \cap_{i \in I} C_i$.

d) P.D. $(\cap_{i \in I} C_i) \cap (- \cap_{i \in I} C_i) = \{\bar{0}\}$.

Sea $v \in (\cap_{i \in I} C_i) \cap (- \cap_{i \in I} C_i)$ entonces $v \in \cap_{i \in I} C_i$ y $v \in (- \cap_{i \in I} C_i)$, por lo que $v \in C_i$, $\forall i \in I$ y $v \in -C_i$, $\forall i \in I$ entonces $v = \bar{0}$ ya que $(C_i) \cap (-C_i) = \{\bar{0}\}$ $\forall i \in I$.

Por lo tanto, $\cap_{i \in I} C_i$ es cono. ∎

1.14.2. Para un conjunto, $S = \{v_i\}_{i \in I} \subseteq V$.

Definamos $C := \overline{\{\sum_{i\in I'} \lambda_i v_i \, ; \, \lambda_i \geq 0, \, I' \subseteq I \quad \text{finito}\}}$, (es decir, C es la cerradura del conjunto de todas las combinaciones lineales positivas de elementos de S). Si C satisface la condición (d) $C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$ en la definición de cono, entonces C es cono y diremos que C es el **cono generado por** S, y lo denotaremos por $con(S)$. Notemos que basta pedir sólo la condición (d), ya que las restantes tres condiciones de la definición de cono se tienen siempre. Es decir, C siempre es precono (ver (1.2)).

Demostración: a) C es cerrado, por definición.

b) P.D. $C + C \subseteq C$.

Sean $x, y \in C$, entonces existen $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{(n)} = \sum_{i\in I_n} \lambda_i^{(n)} v_i$, $y^{(n)} = \sum_{i\in J_n} \beta_i^{(n)} v_i$, con $I_n, J_n \subseteq I$ finitos, $v_i \in S$, $\alpha_i^{(n)}, \beta_i^{(n)} \geq 0$ $\forall i$, y $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$, $\lim_{n\to\infty} y^{(n)} = y$.

Entonces $x + y = \lim_{n\to\infty} x^{(n)} + y^{(n)} \in C$, pues C es cerrado y $\forall\, n$, $x^{(n)} + y^{(n)}$ es una combinación lineal positiva de elementos de S.

Por lo tanto, $x + y \in C$.

c) P.D. $\alpha C \subseteq C$.

Sean $\alpha \geq 0$, $x \in C$, entonces $x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$, donde $x^{(n)} = \sum_{i\in I_n} \lambda_i^{(n)} v_i$, $I_n \subseteq I$ finito y $\forall i$, $\lambda_i^{(n)} \geq 0$, $v_i \in S$. Entonces $\alpha x = \lim_{n\to\infty} \alpha x^{(n)} \in C$, pues C es cerrado y $\alpha x^{(n)} = \sum_{i\in I_n} (\alpha\lambda_i^{(n)}) v_i$, $\alpha\lambda_i^{(n)} \geq 0$.

De donde tenemos, $\alpha x \in C$. ∎

Observación 1.14.2.1. *i)* Si I es finito, entonces $C = \{\sum_{i\in I} \lambda_i v_i \, ; \, \lambda_i \geq 0\}$.

ii) $con(con(S)) = con(S)$.

iii) $con(S) = \cap_{F\in\mathcal{S}} F$, donde $\mathcal{S} = \{F \subseteq C \mid S \subseteq F \text{ subcono de } C\}$.

Observación 1.14.2.2. Veamos un ejemplo en el que no se tenga $C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$ y así $C = \{\sum_{i\in I} \lambda_i v_i \, ; \, \lambda_i \geq 0, \, I \,\text{finito}\}$ no es cono. Sin embargo, se tienen las restantes tres condiciones. Sea $S = \{e_1, e_2, v = (-1,-1)\}$, entonces $C = V = \mathbb{R}^2$ el cual no es cono, ya que $C \cap (-C) \neq \{\bar{0}\}$. Y C satisface las otras tres condiciones, ver figura (1.14.2.2).

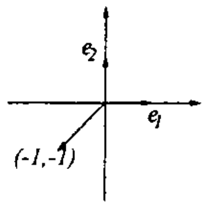

figura 1.14.2.2

Lema 1.15. *Sea $C \subseteq V$ cono sólido entonces C es generador.*

Demostración: C es sólido entonces $\exists\, z \in intC$. Sea $v \in V$.

P.D. $v \in C - C$ $(= \langle C \rangle$, ver (1.5.)).

Como $z \in intC$ entonces $\exists r > 0$ tal que $B_r(z) \subseteq C$. Sea $\lambda > 0$ tal que $\lambda v + z \in B_r(z)$ entonces $C \ni w := \lambda v + z$ entonces $v = \lambda^{-1}w - \lambda^{-1}z \in C - C$.

∎

De la demostración del lema anterior se tiene el siguiente

Corolario 1.15.1. *Sean $C \subseteq V$ cono sólido, $x \in int_V C$. entonces $\forall v \in V$, $\exists\, \lambda > 0$ tal que $x + \lambda v \in C$.*

Ejemplo 1.16. Ejemplo de un cono en V que es generador pero no es sólido. Sea $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$. $C = V^+$. Como en (1.10).

Demostración: Recordemos que ya se demostro que $V^+ \subseteq \partial V^+$, (es decir, $intV^+ = \emptyset$).

P.D. $V^+ - V^+ = V$.

Sea $v \in V$. Sean $w, z \in V$ tales que $w = (w_i)_{i \in \mathbb{N}}$, donde $w_i = \begin{cases} v_i & \text{si } v_i \geq 0 \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$

$z = (z_i)_{i \in \mathbb{N}}$, donde $z_i = \begin{cases} \mid v_i \mid & \text{si } v_i \leq 0 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

Entonces $v = w - z \in V^+ - V^+$.

Por lo tanto, V^+ es generador pero no es sólido. ∎

Pero si V es de dimensión finita, entonces se tiene:

Proposición 1.17. *Sea V de dimensión finita. Sea $C \subseteq V$ cono, C es sólido en V si y sólo si C contiene una base de V.*

Demostración: $\Longrightarrow$) Basta demostrar $\langle C \rangle = C - C = V$, donde $C - C = \{w - v \mid w, v \in C\}$. Supongamos que C es sólido.

Sea $v \in V$. Como C es sólido existe $z \in intC$ y existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subset C$. Además , existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda v \in B_r(\bar{0})$. Pero $\lambda v + z := w \in C$, entonces $v = \lambda^{-1}w - \lambda^{-1}z, (\lambda > 0)$ donde $\lambda^{-1}w \in C$ y $-\lambda^{-1}z \in (-C)$.

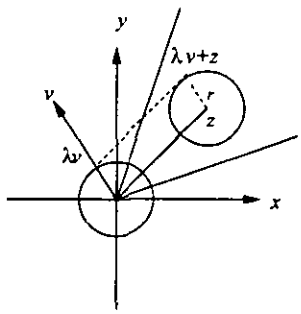

figura 1.17

Por lo tanto C genera a V, (es decir, C contiene una base de V).

$\Longleftarrow$) Sea $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^n$ base de V, $\mathcal{B} \subseteq C$. Como C es cono, $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in C$, $\lambda_i \geq 0$, sea $G = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\} \subset C$, entonces

$$intG = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid 0 < \lambda_i < 1\} \neq \emptyset,$$

pues $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} v_i \in intG$, y $\emptyset \neq intG \subseteq intC$, por (A.1.7).

Por lo tanto, C es sólido. ∎

Corolario 1.18. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $C \subseteq V$ cono. Entonces C es sólido (en V) si y sólo si C es generador de V.*

Demostración: Por (1.17) C es sólido si y sólo si C contiene una base si y sólo si (por definición (1.6)) C es generador de V. ∎

Corolario 1.19. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $C \subseteq V$ cono, W subespacio de V, donde $W = \langle C \rangle$. Entonces C es sólido en W.*

Demostración: Por definición de W, C es un cono generador de W entonces por (1.18), C es sólido en W. ∎

Antes de seguir con los ejemplos de conos, daremos ejemplos de no conos y algunas observaciones respecto a estos ejemplos.

1.20. Ejemplos de preconos y no conos.

1.20.1. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Sean $v \in V$, $C = \langle v \rangle$ entonces C no es cono ya que $v \in C$ y $-v \in C$. Pero C es un precono.

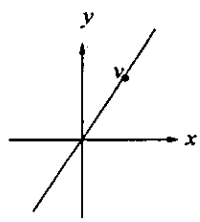

figura 1.20.1

Observación 1.20.2. De hecho cualquier subespacio vectorial $\{\bar{0}\} \neq W \subseteq V$ no es cono, pero es precono.

1.20.3. Sean C, C' conos. $C \cup C'$ no necesariamente es cono.

Sean $V = \mathbb{R}^2$, $u, v \in V$, con $u = (1,2), v = (2,0)$.

Definamos $C = \{\lambda u \mid \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $C' = \{\mu v \mid \mu \geq 0, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Ahora, $C \cup C' = \{x \in V \mid x \in C \text{ ó } x \in C'\}$.

Tenemos que $u, v \in C \cup C'$ pero $u + v = (1,2) + (2,0) = (3,2) \notin C \cup C'$, de donde, $C \cup C'$ no satisface la condición (a) de la definición por lo que la unión no es cono. De hecho, $C \cup C'$ tampoco es precono.

Respecto a este ejemplo se tiene la siguiente observación .

Observación 1.20.4. Si C, C' son conos en V tales que $C \subseteq C'$ ó $C' \subseteq C$ entonces $C \cup C'$ es cono. También, observemos que el regreso no se vale, ya que los conos pueden sólo estar traslapados, de este modo la unión es cono, aunque no necesariamente alguno de los conos contiene al otro.

Ejemplo 1.20.4.1. Sean $C = \{\lambda e_2 + \mu(1,1) \mid \lambda, \mu \geq 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, $C' = \{\lambda(1,2) + \mu e_1 \mid \lambda, \mu \geq 0,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. $C \cup C' = V^+$, pero $C \not\subseteq C'$ y $C' \not\subseteq C$.

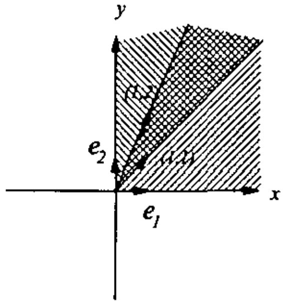

figura 1.20.4.1

1.20.5. Sean C, C' conos. $C + C'$ no necesariamente es cono.

Sean $V = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}$.

Sean $C = \{\lambda(1,0) + \mu(1,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \geq 0\}$, $C' = \{\alpha(-1,0) + \gamma(-1,-1) \mid \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha, \gamma \geq 0\}$. $C + C' = \mathbb{R}^2$, el cual no es cono, ya que para toda $v \in C + C', -v \in C + C'$, y así, no se satisface la condición (c) en la definición de cono.

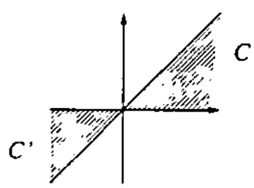

figura 1.20.5

Observemos que en este ejemplo las condiciones (a) y (b) siempre se satisfacen, pero no (c) además, si tenemos C_i cono para toda $i = 1, ..., n$ entonces

$\sum_{i=1}^{n} C_i$ es cerrado, pero, para $\sum_{i=1}^{\infty} C_i$ no siempre es cerrado.

1.20.6. Ejemplo de que suma infinita de conos puede ser no cerrada.

Sea $C_n = \mathbb{R}^+(1, \frac{1}{n})$ cono para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq con((1,1),(1,0)) \setminus \mathbb{R}^+(1,0)$$

que no es cerrado.

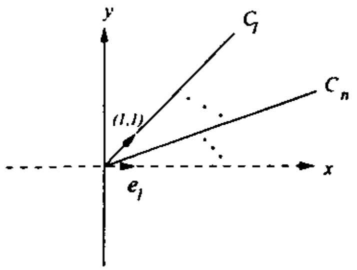

figura 1.20.6

§2. Ejemplos importantes de conos.

A continuación daremos ejemplos importantes de conos, con éstos, podremos construir muchos otros.

2.1. Conos generados por normas . Sea $K = \mathbb{R}$.

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, con una norma

$$\| \cdot \| \colon V \longrightarrow \mathbb{R},$$

y sea f una **funcional lineal** (i.e, $f \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal).

Sea $C = \{x \in V \mid \| x \| \leq f(x)\}$. Entonces C es un cono.

Demostración: a) P.D. C es cerrado.

P.D. $\forall \{v_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tal que $\lim_{i\to\infty} v_i$ existe, entonces $\lim_{i\to\infty} v_i \in C$.

Sea $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tal que $\lim_{i\to\infty} v_i =: v$ existe. (Es decir, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m \geq N$, $\|v_m - v\| < \varepsilon$).

P.D. $v \in C$.

P.D. $\|v\| \leq f(v)$.

Sabemos que $\| \cdot \|$ es continua (es decir, sea $x \in V$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\|x - y\| < \delta$ entonces $|\| x \| - \| y \|| < \varepsilon$, donde $| \cdot |$ es la norma usual en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Tomemos $\varepsilon = \delta$, ya que $|\| x \| - \| y \|| \leq \varepsilon$ ver A.3.5.(i)).

Por lo tanto, $\lim_{i\to\infty} \| v_i \| = \| v \|$. Ahora como f es continua (A.3.9), entonces $\lim_{i\to\infty} f(v_i) = f(v)$. Además, como $\forall i$, $v_i \in C$, $f(v_i) \geq \| v_i \|$. Entonces $f(v) = \lim_{i\to\infty} f(v_i) \geq \lim_{i\to\infty} \| v_i \| = \| v \|$ (pues, $\lim_{i\to\infty} \| v_i \| - f(v_i) = \| v \| - f(v) \leq 0$, ya que $\| v_i \| - f(v_i) \leq 0 \ \forall i$).

b) P.D. $\quad C + C \subseteq C$.

Sean $x, y \in C$ entonces $\| x \| \leq f(x)$, $\| y \| \leq f(y)$. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \leq f(x) + f(y) = f(x+y)$ ya que f es lineal. De donde, $\| x+y \| \leq f(x+y)$.

c) P.D. $\quad \alpha C \subseteq C$

Sea $x \in C$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \in K$. $\| \alpha x \| = \alpha \| x \| \leq \alpha f(x) = f(\alpha x)$, la primer igualdad se tiene por ser $\alpha \geq 0$ y la última igualdad por ser f lineal.

Así, $\| \alpha x \| \leq f(\alpha x)$.

d) P.D. $\quad C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$.

Sea $x \in C \cap (-C)$ entonces $x = -w$ con $w \in C$. $0 \leq \| x \| \leq f(x) = f(-w) = -f(w)$ implica $f(w) \leq - \| x \|$.

Por otro lado, como $w \in C$, $\| w \| \leq f(w)$ entonces $0 \leq \| x \| = \| w \| \leq f(w)$ y $\| x \| = \| w \| \leq -f(x)$, por lo que $0 \leq \| w \| \leq f(w), -f(w)$, entonces $0 \leq -f(w), f(w)$ así $f(w) = 0$ entonces $\| w \| = 0$, de aquí que $w = \bar{0}$ y así $x = \bar{0}$. Por lo tanto, $C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$.

Por lo tanto, C es cono. ■

Lema 2.2. *Sean $V = K^n$, $\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ norma y $f : V \longrightarrow K$ lineal. Sea $C = \{v \in V \mid f(v) \geq \| v \|\}$ el cono generado por f y $\| \cdot \|$. Entonces $\partial C \subseteq \{v \in V \mid f(v) = \| v \|\}$.*

Demostración: Sea $v \in \partial C$. P.D. $f(v) = \| v \|$.

Equivalentemente, P.D. $v \in C$ tal que $f(v) > \| v \|$ entonces $v \in intC$.

Sea $v \in C$ tal que $f(v) > \| v \|$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon \leq \frac{|f(v) - \| v \||}{2}$.

Como f es continua, entonces $\exists \delta' > 0$ tal que $\forall w \in B_{\delta'}(v)$ se tiene que $| f(v) - f(w) | < \varepsilon$. Es decir, $|\| v \| - \| w \|| \leq \| v - w \| < \delta'$.

Sea $0 < \delta \leq \delta'$ tal que $[\| v \| - \delta, \| v \| + \delta] = \bar{B}_\delta(\| v \|)$ y $\bar{B}_\delta(\| v \|) \cap \bar{B}_\varepsilon(f(v)) = \emptyset$. Entonces $\forall w \in B_\delta(v)$, $\| w \| < f(w)$, (pues $\| w \| \in [\| v \| - \delta, \| v \| + \delta]$ y $f(w) \in [f(v) - \varepsilon, f(v) + \varepsilon]$ y $\| v \| + \delta < f(v) - \varepsilon$) de donde $B_\delta(v) \subseteq C$, entonces $v \in intC$.

Por lo tanto, $\partial C = \{v \in V \mid f(v) = \| v \|\}$. ■

2.2.1. Una norma es llamada **estrictamente convexa** si para toda $x, y \in V$ tales que $\| x \| = \| y \| = \frac{1}{2} \| x + y \|$ entonces $x = y$. En (2.5.4.1), se demostrará que si la norma es estrictamente convexa y $\dim C > 1$, entonces $\partial C = \{v \in V \mid f(v) = \| v \|\}$.

2.2.2. Este ejemplo muestra que $\partial C \subset \{v \in V \mid f(v) = \| v \|\}$.

Sean $V = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Por (2.1) tenemos que $C = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Ahora $\{v \in V \mid f(v) = \| v \|\} = C$ y $\partial C = \{0\}$. Así, $\partial C \subset \{v \in V \mid f(v) = \| v \|\}$.

2.3. En el ejemplo anterior (2.1) se define un cono a partir de una norma y una funcional lineal. Ahora daremos distintas normas, para obtener ejemplos particulares de estos conos.

i) Sean $V = \mathbb{R}^n$, $\| \cdot \|: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la norma euclidiana definida mediante:

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Sea $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Si $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_1 + x_2$ entonces $x_1^2 + x_2^2 \leq x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, de donde $0 \leq 2x_1x_2$, entonces $x_1, x_2 \geq 0$ ó $x_1, x_2 \leq 0$. Pero $f(x) = x_1 + x_2 \geq 0$, así $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$ (es decir, $C = V^+$ el cono positivo).

ii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x + y$.

a) $\| \cdot \|$ euclidiana.

$\partial C = \{(x, y) \mid 2x + y = \sqrt{x^2 + y^2}\}$, $(x, y) \in \partial C$ si y sólo si $2x + y \geq 0$ y $4x^2 + 4xy + y^2 = x^2 + y^2$ si y sólo si $2x + y \geq 0$ y $x(3x + 4y) = 0$ si y sólo si para $x = 0$, $y \geq 0$; y para $x \neq 0$, $3x + 4y = 0$ y $2x + y \geq 0$ de donde, $x = -\frac{4}{3}y$ y $-\frac{8}{3}y + y \geq 0$ por lo que $-\frac{5}{3}y \geq 0$ si y sólo si $y \leq 0$.

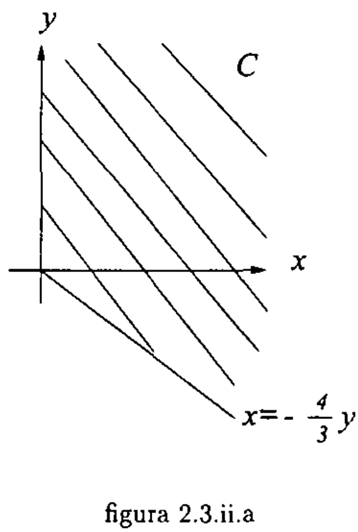

figura 2.3.ii.a

b) $\| \cdot \|_{\text{sup}}$, definida por $\| x \|_{\text{sup}} = \sup\{| x |, | y |\}$, $x \in \mathbb{R}^2$.

$\partial C' \subseteq \{(x,y) \mid x+y = \| (x,y) \|_{\sup}\}$.

b.1) $2x+y = \mid x \mid$ si y sólo si $\mid x \mid \geq \mid y \mid$ y si $x \geq 0$, $x+y=0$ si y sólo si $x=-y$, si $x \leq 0$, $2x+y=-x$ si y sólo si $3x+y=0$ si y sólo si $x=-\frac{y}{3}$.

b.2) $2x+y = \mid y \mid$ si y sólo si $\mid x \mid \leq \mid y \mid$ y si $y \geq 0$, $2x=0$ entonces $x=0$, si $y \leq 0$, $x+y=0$ si y sólo si $x=-y$, de donde $2x+y=-y$.

Ahora, $\mid x \mid \leq \mid y \mid$ si y sólo si $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{y^2}$ si y sólo si $x^2 \leq y^2$.

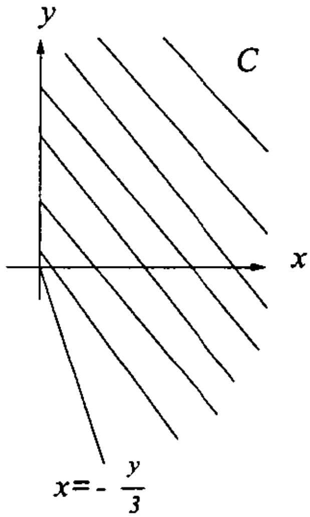

figura 2.3.ii.b

Observemos que $C := C_{(f,\|\cdot\|)} \neq C_{(f,\|\cdot\|_{\sup})} =: C'$.

2.4. Conos en $Hom(V,V)$.

Sean V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $Hom(V,V)$ el K-espacio vectorial de las funciones lineales sobre V (es decir,

$$Hom(V,V) = \{f \mid f : V \longrightarrow V \text{ lineal}\}).$$

Para un cono sólido C en V, se define $\Pi(C) := \{f \in Hom(V,V) \mid f(C) \subseteq C\}$ entonces $\Pi(C)$ es un cono en $Hom(V,V)$. $\Pi(C)$ es el **cono de las funciones lineales**, $f : V \longrightarrow V$, que dejan invariante a C.

Demostración: a) P.D. $\Pi(C)$ es cerrado.

A $Hom(V,V)$ se le asocia la siguiente norma:

$$f \in Hom(V,V), \ \| f \| = \sup\{\| f(x) \|; \| x \| = 1\}.$$

Sea $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \Pi(C)$ sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ existe.

P.D. $f \in \Pi(C)$.

Tenemos que $\forall n \in \mathbf{N}\ f_n(C) \subseteq C$. Sea $x \in C$. P.D. $f(x) \in C$.

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $f_n(x) \in C\ \forall n$ entonces como C es cerrado $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in C$. Por lo tanto, $f \in \Pi(C)$.

Por lo tanto, $\Pi(C)$ es cerrado.

b) P.D. $\Pi(C) + \Pi(C) \subseteq \Pi(C)$.

Sean $f, g \in \Pi(C)$. Sea $x \in C$. Entonces $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in C$, ya que $f(x) \in C, g(x) \in C$ y C es cono. Por lo tanto, $f + g \in \Pi(C)$.

c) P.D. $\alpha\Pi(C) \subseteq \Pi(C)$.

Sea $f \in \Pi(C)$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \in K$. $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)) \in \Pi(C)$ ya que $\alpha(f(x)) \in C$ porque $f(x) \in C$ y C es cono.

d) P.D. $\Pi(C) \cap (-\Pi(C)) = \{\bar{0}\}$.

Sea $f \in (\Pi(C) \cap (-\Pi(C)))$ entonces $f \in \Pi(C)$ y $f \in (-\Pi(C))$, donde $-\Pi(C) = \{-g \mid g \in \Pi(C)\}$, entonces existe $g \in \Pi(C)$ tal que $f = -g$, así que $\forall v \in C$, $g(v) \in C$, de donde $\forall v \in C$, $f(v) = -g(v) \in -C$, por lo que tenemos que $f(C) \subseteq C$ y $f(C) \subseteq -C$ (ya que, $f(v) = -g(v) \in -C$, pues $g(v) \in C$) entonces $f(C) \subseteq C \cap (-C)$, pero $C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$. Entonces $f(C) = \{\bar{0}\}$, y como C contiene una base de V (por ser sólido), entonces $f = \bar{0}$.

Por lo tanto, $\Pi(C) \cap (-\Pi(C)) = \{\bar{0}\}$.

De lo anterior, concluimos que, $\Pi(C)$ es un cono en $Hom(V,V)$. ∎

2.5. Conos ortogonales.

Sea C un cono sólido en V. Definamos $C^{\perp} := \{f \in V^* \mid f(x) \geq 0\ \forall x \in C\}$, donde $V^* = \{f \in V \mid f : V \longrightarrow K \text{ lineal}\}$, V^* es el **espacio dual** de V. Entonces $C^{\perp}$ es un cono (el **cono ortogonal** de C).

Demostración: a) P.D. $C^{\perp}$ es cerrado.

En V^* tenemos la norma: $f \in V^*$, $\| f \| = \sup\{| f(x) |; x \in V, \| x \| \leq 1\}$.

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^\perp$ tal que $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ existe. P.D. $f \in C^\perp$.

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in C$, $f_n(x) \geq 0$ entonces $f(x) \geq 0$ $\forall x \in C$ entonces $f \in C^\perp$. Por lo tanto, $C^\perp$ es cerrado.

b) P.D. $C^\perp + C^\perp \subseteq C^\perp$.

Sean $f, g \in C^\perp$. Veamos qué ocurre con $f + g$.

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, pero $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0 \forall x \in C$, ya que $f, g \in C^\perp$, de donde $f(x) + g(x) \geq 0$ $\forall x \in C$.

c) P.D. $\alpha C^\perp \subseteq C^\perp$.

Sean $\alpha \geq 0$, $\alpha \in K$, $f \in C^\perp$. $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$ como $f(x) \geq 0 \forall x \in C$, se concluye que $\alpha f(x) \geq 0$ $\forall x \in C$.

d) P.D. $C^\perp \cap (-C^\perp) = \{\bar{0}\}$.

Sea $f \in (C^\perp \cap (-C^\perp))$ entonces $f \in C^\perp$ y $f \in -C^\perp$, de donde tenemos $f(x) \geq 0$ $\forall x \in C$ y $f(x) \leq 0$ $\forall x \in C$, entonces $f(x) = 0$ $\forall x \in C$, y como C contiene una base de V, se tiene que $f = \bar{0}$. De aquí concluimos que $C^\perp \cap (-C^\perp) = \{\bar{0}\}$.

Por lo tanto, $C^\perp$ es un cono. ∎

2.5.1. Observemos que en (2.5) se pidió C cono sólido, ya que si no lo pedimos, tenemos lo siguiente: Si $C = \{\bar{0}\}$ entonces $\{\bar{0}\}^\perp = V^*$ que no es cono. De hecho, $C^\perp$ es precono, (ver(1.2)).

§3. El orden parcial $\geq^C$.

Un cono $C \subsetneq V$ define un orden parcial en V, que nos va a ser de mucha utilidad y una de ellas es que nos hace manejar cualquier cono sólido como si fuera el cono positivo V^+.

Definición 3.1. *Sean C un cono en V y $u, z \in V$. Decimos que: $u \geq^C z$ si $u - z \in C$. (Si no hay confusión escribiremos $u \geq z$). Esta relación define un* **orden parcial** *en V. Escribiremos $u > z$ si $u \geq z$ y $u \neq z$. Observemos que $u \in C$ si y sólo si $u \geq \bar{0}$.*

Ahora daremos la demostración de que $\leq^C$ es un orden parcial en V.

Proposición 3.2. *Sea C un cono en V. La relación dada por $\leq^C$ es un orden parcial.*

Demostración: Sean $x, y, z \in C$.

a) P.D. $x \leq x$.

$x \leq x$ pues $\bar{0} \in C$.

b) P.D. Si $x \leq y$, $y \leq x$ entonces $x = y$.

Como $x \leq y$ entonces $y - x \in C$ y de $y \leq x$ tenemos $x - y \in C$, pero $x - y = -(y - x) \in C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$ entonces como C es cono, $y - x = \bar{0}$ de donde $x = y$.

c) P.D. Si $x \leq y$, $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Tenemos $z - x = (z - y) + (y - x) \in C$ pues $z - y, y - x \in C$, ya que $z \geq y$, $y \geq x$ por hipótesis, entonces $z \geq x$. ∎

Definición 3.3. *Sean C un cono en V, $u, z \in V$. Decimos que $u \gg \bar{0}$ si $u \in intC$. Además, $u \gg z$ si $u - z \gg \bar{0}$.*

Observación 3.4. a) En $C = ray(v)$ se tiene que $\leq^C$ es un orden total.

b) La relación dada por $\leq^C$ puede no ser un orden total.

Ejemplo 3.5. Sea V^+ el cono positivo en $\mathbb{R}^2$. Tomemos $x, y \in V^+$, donde $x = (2,1)$, $y = (1,2)$, pero tenemos $x - y = (1,-1) \notin C$, $y - x = (-1,1) \notin C$, además $x \neq y$, es decir, $x \nleq y$ y $y \nleq x$. Así la relación de orden parcial dada por "$\leq$" no es un orden total.

Ahora daremos algunos resultados para el orden parcial que definimos y que nos serán de gran utilidad.

Lema 3.6. *Sea C un cono de V entonces,*

0) *Sea $x \in V$. Si $\bar{0} \leq x \leq \bar{0}$ entonces $x = \bar{0}$.*

1) *Sea $w \in V$.*

i) $v \geq z$ si y sólo si $v + w \geq z + w$,

ii) $v \gg z$ si y sólo si $v + w \gg z + w$.

2) *$u \gg \bar{0}$ si y sólo si $\forall \alpha > 0$, $\alpha u \gg \bar{0}$.*

3) *Sea $\alpha > 0$.*

i) $v \geq z$ si y sólo si $\alpha v \geq \alpha z$,

ii) $v \gg z$ si y sólo si $\alpha v \gg \alpha z$.

4) *Sea $\alpha < 0$.*

i) $v \geq z$ si y sólo si $\alpha z \geq \alpha v$,

ii) $v \gg z$ si y sólo si $\alpha z \gg \alpha v$.

5) *Si $\bar{0} \leq^C y \leq^C x$, $\bar{0} \leq^C w \leq^C z$ entonces $w + y \leq z + x$.*

Demostración: **0)** Por (3.2(b)).

1) Sea $w \in V$.

i) $v \geq z$ si y sólo si $v - z \in C$, pero $v - z = v - z + w - w = v + w - (z + w) \in C$ si y sólo si $v + w \geq z + w$.

ii) $v \gg z$ si y sólo si $v - z \gg \bar{0}$ (es decir, $v - z \in intC$). Pero $v - z = v + w - (z + w)$ si y sólo si $v + w \gg z + w$.

2) $\Longrightarrow)$ Sea $u \gg \bar{0}$.

P.D. $\forall \alpha > 0,\ \alpha u \gg \bar{0}$.

Sea $\alpha > 0$. Como $u \gg \bar{0}$, entonces existe $r > 0$, $B_r(u) \subseteq C$ entonces $B_{\alpha r}(\alpha u) \subseteq C$ pues $w \in B_{\alpha r}(\alpha u)$ entonces $\| w - \alpha u \| \leq \alpha r$ pero como $\alpha > 0$ entonces $\| \frac{w}{\alpha} - u \| < r$ entonces $\frac{u}{\alpha} \in B_r(u) \subseteq C$, nuevamente $\alpha > 0$ y como C es cono, entonces $w \in C$, de donde $B_{\alpha r}(\alpha u) \subseteq C$, así $\alpha u \gg \bar{0}$.

$\Longleftarrow)$ P.D. $u \gg \bar{0}$.

Por hipótesis tenemos que para toda $\alpha > 0$, $\alpha u \gg \bar{0}$. Sea $\alpha = 1 > 0$ entonces $\alpha u = u \gg \bar{0}$.

3) Sea $\alpha > 0$.

i) $v \geq z$ si y sólo si $v - z \in C$ si y sólo si $\alpha(v - z) \in C$, (ya que $\alpha > 0$), pero $\alpha(v - z) = \alpha v - \alpha z \in C$ si y sólo si $\alpha v \geq \alpha z$.

ii) $v \gg z$ si y sólo si $v - z \in intC$ si y sólo si (por (3(i))) $\alpha(v - z) \in intC$ si y sólo si $\alpha v \gg \alpha z$.

4) Sea $\alpha < 0$.

i) $v \geq z$ si y sólo si $v - z \in C$ si y sólo si $z - v \in (-C)$ si y sólo si $|\alpha|(z - v) \in (-C)$ (ya que $-C$ es cono) si y sólo si $-|\alpha|(z - v) = \alpha(z - v) \in C$ si y sólo si $\alpha z \geq \alpha v$.

ii) $v \gg z$ si y sólo si $v - z \in intC$ si y sólo si (por (1.4(iv))) $z - v \in int(-C)$ si y sólo si (por (3)) $|\alpha|(z - v) \in intC$ si y sólo si (nuevamente por (1.4(iv))) $-|\alpha|(z - v) = \alpha(z - v) \in intC$ si y sólo si $\alpha z \gg \alpha v$.

5) Como $\bar{0} \leq y \leq x$ entonces $x - y \geq \bar{0}$ (i.e., $x - y \in C$) y de $z \geq w \geq \bar{0}$ se tiene $z - w \geq \bar{0}$ (i.e., $z - w \in C$) de donde $z - w + x - y \in C$ (pues C es cono). Pero $z - w + x - y = z + x - (w + y)$ por lo que $z + x \geq w + y$. ∎

Lema 3.7. *Sea $C \subseteq V$ un cono.*

i) *Sean $u \geq \bar{0}$, $v \in V$. Supongamos que existe $\alpha > 0$ tal que $u + \alpha v \in C$ entonces para toda $0 \leq \beta \leq \alpha$, $u + \beta v \geq \bar{0}$.*

ii) *Sean $u \geq \bar{0}$, $v \in V$ y supongamos que existe $\alpha > 0$ tal que $u - \alpha v \geq \bar{0}$ entonces para toda $0 \leq \beta \leq \alpha$, $u - \beta v \geq \bar{0}$.*

Demostración: **i)** Como C es convexo y u, $u+\alpha v \geq \bar{0}$, entonces $\forall\, t \in [0,1]$, $(1-t)u + t(u+\alpha v) = u + t\alpha v \geq \bar{0}$. Sea $0 \leq \beta \leq \alpha$ entonces $0 \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq 1$, $t := \frac{\beta}{\alpha}$ entonces $u + \frac{\beta}{\alpha}\alpha v = u + \beta v \geq \bar{0}$.
ii) Sea $w := -v$ y luego aplicar (i). ∎

Proposición 3.8. *Sea $C \subseteq V$ cono sólido, con $V = K^n$. Entonces $z \in intC$ si y sólo si para toda $y \in V$ existe $\lambda_y > 0$, $z + \lambda_y y \in C$.*

Más aún, podemos escoger $\lambda_y > 0$ tal que $z + \lambda y \in intC$, $\forall\, 0 < \lambda \leq \lambda_y$.

Antes de demostrar la proposición veamos la siguiente

Observación 3.8.1. Supongamos $z \in C$ es tal que $\forall\, y \in V\ \exists\, \lambda_y > 0,\ z + \lambda_y y \in C$.

Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de V. Sean $\forall i = 1 \cdots n$, $\gamma_i, \lambda_i > 0$ tales que $\lambda_i e_i + z \geq \bar{0}$, $-\gamma_i e_i + z \geq \bar{0}$. Definimos $\tilde{\lambda} := \min_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i, \gamma_i\}$.

Por lo tanto, si $\bar{0} \neq v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ y $\alpha := \max_{1\leq i\leq n}\{|\ \alpha_i\ |\}$ entonces $\frac{\tilde{\lambda}}{n\alpha}v + z \in C$, $\frac{\tilde{\lambda}}{n\alpha} > 0$. Más aún, $\frac{\tilde{\lambda}}{n\alpha}(-v) + z \in C$.

Demostración: $\tilde{\lambda} > 0$, $n\alpha > 0$ entonces $\frac{\tilde{\lambda}}{n\alpha} > 0$. Observemos que $0 < \frac{\tilde{\lambda}|\alpha_i|}{\alpha} \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_i, \gamma_i$, si $\alpha_i \neq 0$. Entonces, si $\alpha_i > 0$, como $\lambda_i e_i + z \in C$ y como $0 < \frac{\tilde{\lambda}|\alpha_i|}{\alpha} \leq \lambda_i$ entonces (por (3.7.)) $\frac{\tilde{\lambda}|\alpha_i|}{\alpha}e_i + z \in C$.

Ahora si $\alpha_i < 0$, como $\gamma_i(-e_i) + z \in C$ y como $0 < \frac{\tilde{\lambda}|\alpha_i|}{\alpha} \leq \gamma_i$ entonces $\frac{\tilde{\lambda}|\alpha_i|}{\alpha}(-e_i) + z = \frac{\tilde{\lambda}\alpha_i}{\alpha}e_i + z \in C$.
Por lo tanto, $\frac{\tilde{\lambda}}{\alpha}\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + nz \in C$ entonces (ya que C es cono) $\frac{\tilde{\lambda}}{\alpha n}\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + z$ $= \frac{\tilde{\lambda}}{\alpha n}v + z \in C$.

Más aún, $\frac{\tilde{\lambda}}{\alpha n}(-v) + z \geq \bar{0}$. Pues, $-v = \sum_{i=1}^n -\alpha_i e_i$ y $\alpha_{-v} = \alpha$. ∎

Ahora sí, demostremos la proposición anterior (3.8).

Demostración: Basta verlo para el caso $K = \mathbb{R}$.

Pues si $C \subseteq \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ (como $\mathbb{R}$-espacio vectorial) y como el cono se comporta como "$\mathbb{R}$-cono" pues $v+iw, v'+iw' \in C$ entonces $(v+v')+i(w+w') \in$

C, $v, v', w, w' \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$ entonces $\alpha v + i\alpha w \in C$. Entonces tomemos $C \subseteq \mathbb{R}^{2n}$.

$\Longrightarrow$) Prueba canónica, ver (1.15.1).

$\Longleftarrow$) Sea $z \in C$ y supongamos que para toda $y \in V$ existe $\lambda_y > 0$ tal que $z + \lambda_y y \in C$. P.D. $z \in intC$.

1. Tomemos $S^{n-1} = \{v \in V \mid \| v \| = 1\}$. Observemos que para toda $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = x \in S^{n-1}$, $0 \leq | \alpha_i | \leq 1$, $\forall i$. Entonces $\alpha_x := \max\{| \alpha_i |;$ $i = 1, ..., n\} \leq 1$. Entonces siguiendo (3.8.1), $0 < \frac{\lambda}{n} \leq \frac{\lambda}{n\alpha_x}$, $\frac{\lambda}{n\alpha_x} x + z \in C$ y por (3.7), $\frac{\lambda}{n} x + z \in C$. Es decir, $\frac{\lambda}{n} S^{n-1} + z \subset C$. Como C es convexo (1.4.(ii)) y $\partial \bar{B}_{\frac{\lambda}{n}}(z) = \frac{\lambda}{n} S^{n-1} + z \subseteq C$, entonces $\bar{B}_{\frac{\lambda}{n}}(z) \subseteq C$.

Por lo tanto, $z \in int\bar{B}_{\frac{\lambda}{n}}(z) \subseteq intC$, ver(A.1.7).

Por lo tanto, $z \in intC$.

2. Ahora, sea $z \gg \bar{0}$ entonces $\forall y \in V$ $\exists \lambda_y > 0$ tal que $\forall 0 < \lambda \leq \lambda_y$, $\lambda y + z \in intC$.

Como $z \gg \bar{0}$ entonces $\exists r > 0$, $B_r(z) \subseteq intC$. Supongamos $y \neq \bar{0}$ entonces sea $\lambda_y := \frac{r}{\|y\|}$ entonces $\lambda_y y \in B_r(\bar{0})$ entonces $\lambda_y y + z \in B_r(z) \subseteq intC$.

Entonces (por (3.6.(3)) $\forall 0 < \lambda \leq \lambda_y$, $\lambda y + z \in intC$. ∎

Corolario 3.9. *Sea $C \subseteq V$ un cono.*

a) $u \gg \bar{0}$, $v \geq \bar{0}$ *entonces* $u + v \gg \bar{0}$,

b) $u \geq v \gg \bar{0}$ *entonces* $u \gg \bar{0}$,

c) $v, u \gg \bar{0}$ *entonces* $\forall 0 \leq t \leq 1$, $tv + (1-t)u \gg \bar{0}$,

d) *Si* $z \gg \bar{0}$, $z + \lambda y \geq \bar{0}$, *con* $\lambda > 0$ *entonces* $\forall 0 \leq \beta < \lambda$, $z + \beta y \gg \bar{0}$.

Demostración: **a)** Sean $u \gg \bar{0}$, $v \geq \bar{0}$.

P.D. $\forall y \in V$ $\exists \lambda_y > 0$, $\lambda_y y + (u + v) \in C$.

Sea $y \in V$ entonces existe $\lambda_y > 0$, $\lambda_y y + u \in C$ ya que $u \gg \bar{0}$, (ver (3.8)), así $\lambda_y y + (u + v) \in C$ pues C es cono y $v \geq \bar{0}$ entonces por la proposición (3.8) $u + v \gg \bar{0}$.

b) Por hipótesis, $u \geq v \gg \bar{0}$ entonces $v \gg \bar{0}$ y $u - v \geq \bar{0}$ pero por (a) $u = v + (u - v) \gg \bar{0}$.

c) Por lema (3.6.(3)), tv, $(1-t)u \gg \bar{0}$ y por (a), $tv + (1-t)u \gg \bar{0}$.

d) Sean $z \gg \bar{0}$, $z + \lambda y \geq \bar{0}$ entonces por el inciso (a) tenemos $2z + \lambda y \gg \bar{0}$ de donde por (3.6.(3)) $z + \frac{\lambda}{2}y \gg \bar{0}$ y por (c) se tiene $\forall\, 0 < \beta \leq \frac{\lambda}{2}$, $z + \beta y \gg \bar{0}$.

De la misma manera, como $z + \frac{\lambda}{2}y \gg \bar{0}$, $z + \lambda y \geq \bar{0}$ entonces $\forall\, 0 < \beta \leq \frac{3\lambda}{4}$, $z + \beta y \gg \bar{0}$ (pues $2z + (\lambda + \frac{\lambda}{3})y \gg \bar{0}$) de donde $z + \frac{3\lambda}{4}y \gg \bar{0}$.

Por inducción, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall\, 0 < \beta \leq \frac{m}{m+1}\lambda$, $u + \beta y \gg \bar{0}$.

Por lo tanto, $\forall\, 0 < \beta < \lambda$, $z + \beta y \gg \bar{0}$. (pues $\forall\, 0 < \beta < \lambda$, $\exists m$ tal que $0 < \beta \leq \frac{m}{m+1}\lambda$). ∎

Bien, ahora daremos otro ejemplo **importante** de conos.

Ejemplo 3.10. Sea C un cono de V (no necesariamente de dimensión finita) y $S \subseteq C$ un subconjunto de C. Definimos $F = \{y \in C \mid \exists\, z \in con(S), \bar{0} \leq y \leq z\}$. Entonces F es cono de V.

Recordemos que $con(S) = \overline{\{\sum_{i=1}^{n} \beta_i x^i \mid x^i \in S, \beta_i \geq 0, i = 1, ..., n\}}$.

Demostración: a) P.D. F es cerrado.

Tomemos $F' := (con(S) - C) \cap C$, donde $con(S) - C = \{v - w \mid v \in con(S), w \in C\}$.

Como $con(S), -C, C$ son conos, en particular cerrados. Entonces $con(S) + (-C)$ es cerrado, (ver A.1.4); entonces $(con(S) + (-C)) \cap C = F'$ es cerrado.

P.D. $F = F'$.

$\subseteq$) Sea $y \in F$ entonces $\exists\, z \in con(S)$ tal que $\bar{0} \leq^C y \leq^C z$ entonces $\bar{0} \leq^C z - y \in con(S) - C$ entonces $z - y \in F'$. Por lo tanto, $\bar{0} \leq^C y = z - (z - y) \in F'$, pues $z \in con(S)$, $-(z - y) \in -C$.

$\supseteq$) Sea $y \in F'$ entonces $\exists z \in con(S)$, $x \in C$, $y = z - x \geq^C \bar{0}$, entonces $y \in F$ pues $z \geq^C z - x = y \geq^C \bar{0}$, $x \geq^C \bar{0}$.

Por lo tanto, $F = F'$.

Por lo tanto, F es cerrado.

b) P.D. $F + F \subseteq F$.

Sean $x, y \in F$ entonces $\exists\, z, w \in con(S)$ tales que $\bar{0} \leq x \leq z$, $\bar{0} \leq y \leq w$, así $\bar{0} \leq x + y \leq z + w$, con $z, w \in con(S)$.

Por lo tanto, $x + y \in F$.

c) P.D. $\alpha \geq 0$, $\alpha \in K$, $x \in F$ entonces $\alpha x \in F$.

Sea $x \in F$, entonces $\exists\, z \in con(S)$ tal que $\bar{0} \leq x \leq z$, lo que implica que $\bar{0} \leq \alpha x \leq \alpha z$, $\alpha z \in con(S)$.

d) P.D. $F \cap (-F) = \{\bar{0}\}$.

Tomemos, $\{\bar{0}\} \subseteq F \cap (-F) \subseteq C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$.

Por lo tanto, F es cono. ■

Capítulo II. Conos poliédricos, Caras y Condiciones de Cadena.

En este capítulo estudiaremos lo relacionado con vectores extremales y conos poliédricos, por lo cual, se da el teorema siguiente (3.2.): Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $C \subseteq V$ un cono entonces existe $\widetilde{C}$ cono poliédrico tal que $C \subseteq \widetilde{C} \subseteq V$, este teorema resulta ser importante, pues con él se demuestran otros resultados, nosotros enunciaremos dos de ellos en la sección 3. Damos también algunos resultados relacionados con caras, las definiciones de cara-generado y finitamente cara-generado. Además, compararemos nuestra definición de cara con la dada por Vandergraft en [V]. También veremos algunas definiciones relacionadas con caras, como son: la condición de cadena ascendente (CCA) y longitud de cadena.

§1. Vectores extremales.

Sea V un K-espacio vectorial con $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ de dimensión no necesariamente finita.

Definición . *Decimos que C' es un* **subcono** *de C si C' es un cono contenido en C.*

Definición 1.1. *Sea C un cono en V. Un vector $x \in C$ se llama* **extremal** *si $x = y + z$, con $y, z \in C$, implica que y, z son múltiplos escalares reales de x. (i.e., $y, z \in \mathbb{R}^+ x$).*

Lema 1.1.1. *Sea $C \subseteq V$ cono, V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.*

a) $\bar{0} \in C$ extremal (entonces $\{v \in C \mid v$ extremal de $C\} \neq \emptyset$).

b) Si $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$, $C \neq \{\bar{0}\}$, entonces $\{z \in C \setminus \{\bar{0}\} \mid z$ extremal$\} \subseteq intC$.

c) Si $\dim_{\mathbb{R}} V \geq 2$, $\{z \in C \mid z$ extremal $\} \subseteq \partial C$.

Demostración: a) Sean $x, y \in C$, $x + y = \bar{0}$ entonces $y = -x \in C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$.

b) $C \neq \{\bar{0}\}$ entonces $C = \mathbb{R}^+ v$, $v \neq \bar{0}$, $intC = C \setminus \{\bar{0}\}$.

c) Sea v extremal. Si $v \in \partial C$, se tiene el resultado.

Supongamos $v \notin \partial C$ entonces $v \in intC$ entonces $\exists\, r > 0\, B_r(v) \subseteq C$. Como $v \notin \partial C$ entonces $v \neq \bar{0}$ y como $\dim V \geq 2$ entonces $\exists\, u \in V$ tal que u, v linealmente independientes entonces por (I.1.15.1) $\exists \min\{\gamma_u, \gamma_{-u}\} =: \gamma > 0$. $\gamma u + v,\ \gamma(-u) + v \in C$, de donde $v = \frac{1}{2}(\gamma u + v) + \frac{1}{2}(\gamma(-u) + v)$ contradicción (v es extremal).

Por lo tanto, $v \in \partial C$. ∎

Observación 1.1.2. Si $K = \mathbb{C}$ también vale el lema (1.1.1), para la demostración ver a V como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Observación 1.2. Si x es extremal y $\bar{0} < y \leq x$ entonces $\exists \alpha > 0$ tal que $\alpha y = x$.

Demostración: P.D. $\exists \alpha > 0$ tal que $\alpha y = x$.

Si $x = \bar{0}$ entonces $y = \bar{0}$ por observación (I.3.6.(0)) y $\forall \alpha > 0$ se tiene $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Supongamos $x \neq \bar{0}$. Por hipótesis $\bar{0} < y \leq x$ entonces $x - y \in C$, sea $v := x - y$ de donde $x = v + y$, pero x es extremal entonces $v = \lambda x$ y $y = \mu x,\ \lambda, \mu \geq 0$. Como $y \neq \bar{0},\ \mu \neq 0$, sea $\alpha = \mu^{-1}$ entonces $\alpha y = x$.

∎

Definición 1.3. *Sea C un cono en V. Decimos que C es* **poliédrico** *si a lo más tiene un número finito de vectores extremales. (Salvo múltiplos escalares).*

La demostración de la siguiente proposición sigue esencialmente a [P].

Proposición 1.4. *Sea $K = \mathbb{R}$. Sean $C \subseteq V = K^n$ un cono y $v \in C$, entonces $v = \sum_{i \in I} v_i$, v_i vector extremal de C, I finito. Más aún, podemos encontrar I tal que $\#I \leq \dim V$.*

Demostración: Haremos la demostración por inducción sobre n.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que C es sólido. (Si C no es sólido, entonces se puede suponer que $C \subsetneq K^{n-1}$ y el resultado se seguirá por inducción).

Si $n = 1$. entonces $\exists v$, $C = \mathbb{R}^+ v$ y todo vector en C es extremal.

Si $n = 2$, $\exists v, w \in C$ extremales tales que $C = con(v, w)$ y se latesigue el resultado. ver (1.1.14.2).

Sea $n \geq 3$. Primero demostraremos el caso:

Caso 1. $x \in \partial C$.

Si x es extremal. ya terminamos.

Entonces sea $x \in \partial C$ no extremal. Si $x = u + v$, donde $u, v \in C$ linealmente independientes. Si u ó $v \in intC$ también se tiene $x \in intC$ por el corolario (1.3.9.(a)); entonces $u, v \in \partial C$.

Sea $\mathcal{S} = \{F \subseteq \partial C \mid F \text{ es cono}, x \in F\}$, donde $\mathcal{S} \neq \emptyset$ pues $ray(x) \in \mathcal{S}$. Sea S un subcono de C maximal con la propiedad de que $x \in S \subseteq \partial C$ y sea $H = \langle S \rangle$ el espacio vectorial de dimensión mínima tal que $S \subset H$, entonces $\dim H \leq n - 1$ (pues si $\dim H = n$, entonces S sería cono sólido en V, pero $S \subseteq \partial C$ contradicción). Por hipótesis de inducción, x **está generado por a lo más $n-1$ vectores extremales de S.**

Basta demostrar que estos vectores son también extremales en C.

Sea y extremal en S y supongamos que y no es extremal en C. Ahora, sea $y = u + v$ con $u, v \in C$ linealmente independientes. Si $u \notin S$ podemos construir el cono $S' = \{w + \alpha u \mid w \in S, \alpha \geq 0\}$.

Observemos que $S \subseteq S'$. Como $w + \alpha u = w + \alpha(y - v) \leq^C w + \alpha y \in S \subset \partial C$, entonces $S' \subset \partial C$, contradicción al hecho de que S era un subcono de C maximal contenido en ∂C y que contiene a x. Así, $u, v \in S$ por lo que tenemos que y no es extremal en S, contradicción (y extremal en S).

Caso 2. Sea $x \in intC$ y sea $u \in C$, extremal en C y linealmente independiente de x, (pues $\dim C \geq 3$, $\partial C \neq \{0\}$). Consideremos el plano $\mathcal{P}$ generado por x y u ($\mathcal{P} = \langle x, u \rangle$). Definamos $C' := \mathcal{P} \cap C$ el cuál es un cono, con $x \in C'$. Así, $x = x_1 + x_2$ donde $x_1 \in ray(u)$ extremal en C y x_1, x_2 extremales en C' (por la base de inducción $n = 2$). Además, $x_1, x_2 \in \partial C$. ($x_i \in \partial C$ pues u es extremal en C. Observemos por (1.1.1.(c)) que $x_1, x_2 \in \partial_{C'} C' = \partial_{\mathcal{P}} C'$. $\mathcal{P} = \langle C' \rangle = \langle x, u \rangle$. Supongamos $x_2 \notin \partial C$. Entonces $\exists r > 0$ tal que $B_r(x_2) \subseteq C$.

Definamos $B_r^{\mathcal{P}}(x_2) := \{z \in \mathcal{P} \mid \| z - x_2 \| < r\} \subseteq B_r(z) \cap \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P} \cap C = C'$ contradicción, pues $x_2 \in \partial_{\mathcal{P}} C'$).

Entonces por (caso 1), $x_2 = \sum_{i \in I} v_i$, $\#I \leq n-1$, suma de extremales en C.

Por lo tanto, $x = x_1 + \sum_{i \in I} v_i$, suma de a lo más n extremales en C. ■

Observación 1.4.1. Sea $K = \mathbb{C}$. Sean $C \subseteq V = \mathbb{C}^n$ cono y $v \in C$, entonces $v = \sum_{i \in I} v_i$, v_i vector extremal de C, I finito. Más aún, podemos encontrar I tal que $\#I \leq 2 \dim V$.

Demostración: Como $C \subseteq V = \mathbb{C}^n$ entonces C es un cono en $\mathbb{R}^{2n}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, de donde $\forall v \in C$, $v = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i v_i$, $\lambda_i \geq 0$, v_i extremal, entonces $\forall v \in C \subseteq \mathbb{C}^n$, $v = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i v_i$, $\lambda_i \geq 0$, v_i extremal.

Por lo tanto, $\#I \leq \dim \mathbb{R}^{2n} = 2n$. ■

Corolario 1.5. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $C \subseteq V$ cono sólido entonces existe $\mathcal{B}$ base de V contenida en C que consta de vectores extremales.*

Demostración: Sea $K = \mathbb{R}$. Como C es sólido por la proposición (I.1.17) contiene una base $\mathcal{B}' = \{v_i\}_{i=1}^n$ de V, ahora, por la proposición anterior (1.4) tenemos que:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij},$$

donde w_{ij} es un vector extremal para $j = 1, \ldots, n$. Entonces $\mathcal{B}'' = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^n$ genera a V. Así, $\mathcal{B}''$ contiene una base $\mathcal{B}$ para V, de vectores extremales de C.

Si $K = \mathbb{C}$, $v_i = \sum_{j=1}^{2n} w_{ij}$ entonces $\mathcal{B}'' = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{2n}$ genera a V. Así, $\mathcal{B}''$ contiene una base para V, de vectores extremales de C. ■

Observación 1.6. En el teorema (I.1.17) ($C \subseteq V$ cono en un espacio vectorial de dimensión finita. C es sólido si y sólo si C contiene una base), observemos que podemos tomar la base $\mathcal{B} \subseteq C$ de vectores extremales. Así, en los ejemplos siguientes (1.7.2), (1.7.3) el conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ contiene una base de

$\mathbb{R}^3$. Por ejemplo en (1.7.2) los vectores v_1, v_2, v_3 forman una base de $\mathbb{R}^3$, así como v_2, v_3, v_4 en (1.7.3).

Ejemplo 1.7.

1.7.1. Sea $V = \mathbb{R}^2$, $C = \{\lambda e_1 + \mu e_2 \mid \lambda, \mu \geq 0\}$, el cono positivo en $\mathbb{R}^2$. En C los vectores extremales son e_1 y e_2, ver figura(1.7.1). Además, C es poliédrico, ver(1.3).

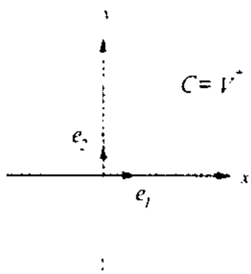

figura 1.7.1

1.7.2. Sea $V = \mathbb{R}^3$, $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\}$. C es llamado el *cono de helado*. Cada rayo de ∂C es un vector extremal, los cuales son un número infinito, ver figura (1.7.2). Así, C no es poliédrico.

1.7.3. Sean $V = \mathbb{R}^3$, $C = cono(v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1), v_4 = (0, -1, 1))$ en este cono v_1, v_2, v_3, v_4 son los vectores extremales de C (salvo múltiplos escalares), además C resulta ser un cono poliédrico, ver figura (1.7.3).

Observación 1.7.4. Todo cono en $\mathbb{R}^2$ es poliédrico. (Los conos en $\mathbb{R}^2$ son: $\{0\}$, $\mathbb{R}^+ u$, $cono(v, w)$, v, w linealmente independientes; en los cuales 0, u y v, w son los vectores extremales, respectivamente).

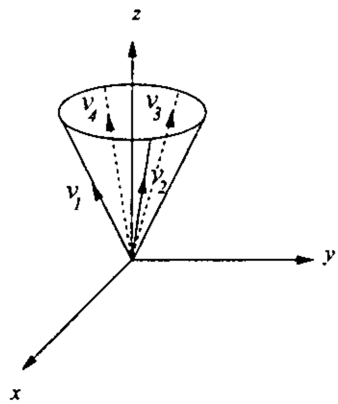

figura 1.7.2

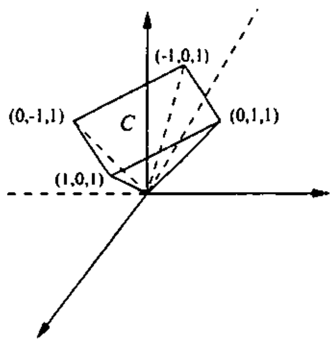

figura 1.7.3

§2. Caras.

Definición 2.1. *Un subconjunto F no vacío de un cono C es una* **cara** *de C si:*

a) *F es un cono.*

b) *$x \in F$, $y \in C$ y $x - y \in C$ entonces $y \in F$ (es decir, $\bar{0} \leq^F x$, $\bar{0} \leq^C y \leq^C x$ entonces $\bar{0} \leq^F y$).*

Observación 2.2. Vandergraft define cara de una manera un poco distinta. discutiremos ambas definiciones en la sección 5.

Observación 2.3. Observemos que $\{\bar{0}\}$ y C son caras de C, llamadas las **caras triviales** de C. Si F es una cara de C se escribe $F \trianglelefteq C$, y si la cara F es diferente de C, se escribe $F < C$. **El conjunto de todas las caras de C se denota por $\mathcal{F}(C)$.**

Lema 2.4. *Sea $F < C$, es decir, F es cara con $F \neq C$, entonces $F \subseteq \partial C$.*

Demostración: Sean $F \trianglelefteq C$, $x \in F \cap intC$.

P.D. $F = C$. Sea $y \in C$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $x - \lambda y \in C$ (pues, $x \in intC$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq C$, ver (I.1.15.1)) entonces como $x \in F$, $\lambda y \in C$, $x - \lambda y \in C$ entonces $\lambda y \in F$, de donde $y \in F$, así $C \subseteq F$, por lo tanto $F = C$. ∎

A continuación daremos algunos ejemplos de caras, usando los conos dados anteriormente.

Ejemplo 2.5.

2.5.1. Sea C cono. Entonces $\{\bar{0}\}$ es una cara de C.

Demostración: P.D. 1) $\{\bar{0}\}$ es cono. Es claro.

2) P.D. $x \in \{\bar{0}\}$, $\bar{0} \leq y \leq x$ entonces $y \in \{\bar{0}\}$.

Sea $\bar{0} = x \in \{\bar{0}\}$, $\bar{0} \leq y \leq \bar{0}$, de donde $y = 0$ por (I.3.6.(0)).

Por lo tanto, $\{0\}$ es una cara de C. Para todo C cono. ∎

Lema 2.5.2. *La intersección de una colección de caras es otra vez una cara.*

Demostración: Sea $\{F_i\}_{i \in I}$ caras de C.

P.D. 1) $\cap_{i \in I} F_i$ es cono.

2) Si $x \in \cap_{i \in I} F_i$, $y \in C$ y $x - y \in C$ entonces $y \in \cap_{i \in I} F_i$.

Para 1) como F_i es cara de C $\forall i \in I$, entonces F_i es un cono $\forall i \in I$ y por (I.14.1), $\cap_{i \in I} F_i$ es cono.

Ahora, probemos 2). Sea $x \in \cap_{i\in I} F_i$, $y \in C$ y $x - y \in C$. (*)

De $x \in \cap_{i\in I} F_i$ se tiene $x \in F_i \quad \forall i \in I$, además por (*) $y \in F_i \ \forall i \in I$, de donde $y \in \cap_{i\in I} F_i$.

Por lo tanto, $\cap_{i\in I} F_i$ es cara. ∎

Definición 2.5.3. *Una norma es llamada* **estrictamente convexa** *si para toda $x, y \in V$ tales que $\| x \| = \| y \| = \frac{1}{2} \| x + y \|$ entonces $x = y$.*

Por ejemplo, las normas euclidianas son estrictamente convexas.

Lema 2.5.4. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $C = \{x \in V \mid \| x \| \leq f(x)\}$ cono por (I.2.1). Si $\| \cdot \|$ es estrictamente convexa y $\bar{0} \neq x \in C$ tal que $\| x \| = f(x)$, entonces $ray(x)$ es una cara de C. (Más aún, x es extremal de C).*

Demostración: P.D. $ray(x)$ es una cara de C.

1) P.D. $ray(x)$ es un cono. Se demostró en (I.1.13).

2) P.D. Si $z \in ray(x)$, $y \in C$, $z - y \in C$ entonces $y \in ray(x)$.

Sea $z \in ray(x)$, $y \in C$, $z - y \in C$ entonces $z = \lambda x$, $\lambda \geq 0$, $\| y \| \leq f(y)$ y $\| z - y \| \leq f(z - y)$. Si $y = \bar{0}$ entonces $y \in ray(x)$. Por lo tanto, podemos suponer $y > \bar{0}$. Entonces, $z \geq y > \bar{0}$.

P.D. $y \in ray(x)$, (es decir, $y = \mu x$, $\mu \geq 0$).

Definamos, $v := z - y$ de donde $v + y = z$.

Si $v = \bar{0}$ entonces $y = z \in ray(x)$ y ya terminamos. Entonces podemos suponer $v \neq \bar{0}$. Observemos que como $f(x) = \| x \|$ y $z = \lambda x$, $f(z) = \| z \|$.

Así, tenemos $f(z) = \| z \| = \| v + y \| \leq \| v \| + \| y \| \leq f(v) + f(y) = f(v + y) = f(z)$ por propiedades de norma y por ser f lineal. Entonces $\| v + y \| = \| v \| + \| y \|$. (*)

Como $v \neq \bar{0} \neq y$, entonces tomemos $\frac{v}{\|v\|}, \frac{y}{\|y\|}$ los cuales tienen norma igual a 1, así, $2 \geq \left\| \frac{v}{\|v\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \left| \| \frac{y}{\|y\|} + \frac{v}{\|y\|} \| - \| \frac{v}{\|y\|} - \frac{v}{\|v\|} \| \right| =$
$\left| \frac{\|y+v\|}{\|y\|} - \| v \| \| \frac{1}{\|y\|} - \frac{1}{\|v\|} \| \right| = \left| \frac{\|y\|+\|v\|}{\|y\|} - \| v \| \| \frac{1}{\|y\|} - \frac{1}{\|v\|} \| \right| =$

$$\begin{cases} \left|\frac{\|y\|}{\|y\|} + \frac{\|v\|}{\|y\|} - \frac{\|v\|}{\|y\|} + \frac{\|v\|}{\|v\|}\right| = 2 & \text{si } \| v \| \geq \| y \| \\ \left|\frac{\|y\|}{\|y\|} + 2\frac{\|v\|}{\|y\|} - \frac{\|v\|}{\|v\|}\right| = 2\frac{\|v\|}{\|y\|} > 2 & \text{si } \| v \| < \| y \| \text{ (contradicción).} \end{cases}$$

Ahora tenemos que $\left\|\frac{v}{\|v\|}\right\| = \left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\frac{v}{\|v\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|$.

Por ser la norma estrictamente convexa $\frac{v}{\|v\|} = \frac{y}{\|y\|}$ entonces $y \in ray(v) = ray(x)$.

Por lo tanto, $ray(x)$ es cara. Además, x es extremal en C pues si $x = z + y$, $z, y \in C$, entonces $z = x - y$, como $ray(x)$ es cara, entonces $z \in ray(x)$. De la misma manera, $y \in ray(x)$. Por lo tanto, x es extremal. ∎

Corolario 2.5.4.1. *Sea* $C = \{x \in V \mid \| x \| \leq f(x)\}$. *Si* $\| \cdot \|$ *es estrictamente convexa y* $\dim C > 1$ *entonces* $\partial C = \{v \in V \mid f(v) = \| v \|\}$. *Ver (I.2.2).*

Demostración: Por (I.2.2), $\partial C \subseteq \{v \in V \mid f(v) = \| v \|\}$.

Sea $v \in V$ tal que $f(v) = \| v \|$. P.D. $v \in \partial C$.

Tenemos que $ray(v) \trianglelefteq C$, como $\dim C > 1$, entonces $ray(v) \triangleleft C$ entonces $v \in ray(v) \subseteq \partial C$. ∎

2.5.5. Sea $V = \mathbb{R}^n$. Sea $I \subseteq \{1, ..., n\}$. Sea $F_I = \{x \in V^+ \mid x_i = 0, i \notin I\}$ como en (I.1.9.1). Entonces $F_I \trianglelefteq V^+$. Observemos que todas las caras de V^+ son de esta forma.

Demostración: Por (I.1.9.1) sabemos que F_I es cono, así que sólo nos falta probar que: Si $x \in F_I$, $y \in V^+$ y $x - y \in V^+$ entonces $y \in F_I$.

Como $x \in F_I$ implica $x_i = 0$, $i \notin I$ y de $y \in V^+$ se tiene para toda j, $y_j \geq 0$, además $x - y \in V^+$, de aquí que para $i \notin I$, $x_i - y_i \geq 0$ por lo que $y_i = 0 \; \forall i \notin I$ entonces $y \in F_I$.

Por lo tanto, F_I es cara de V^+. ∎

2.5.6. Sea $V = \oplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$. Sea $I \subseteq \mathbb{N}$. Sea $V_I^+ = \{v \in V \mid v_i = 0 \; \forall i \notin I\}$ como en (I.1.10.1). Entonces V_I^+ es cara de V^+. Observemos que todas las caras son de esta forma.

Demostración: P.D. V_I^+ es cara de V^+.

1) P.D. V_I^+ es cono, ya se tiene por (I.1.10.1).

2) P.D. Si $v \in V_I^+$, $w \in V^+$, $v - w \in V^+$ entonces $w \in V_I^+$.

Sean $v \in V_I^+$, $w \in V^+$, $v - w \in V^+$.

P.D. $w \in V_I^+$.

Como $v - w \in V^+$ entonces $v_i - w_i \geq 0\ \forall i \in \mathbf{N}$, $v_i = 0\ \forall i \notin I$ (ya que $v \in V_I^+$) entonces $w_i = 0\ \forall i \notin I$. Por lo tanto, $w \in V_I^+$.

Por lo tanto, V_I^+ es cara de V^+.

3) P.D. Si $F \trianglelefteq V^+$, entonces $\exists I \subseteq \mathbf{N}$ tal que $F = V_I^+$.

Sea $F \trianglelefteq V^+$. Definamos $I := \{i \in \mathbf{N} \mid \exists x = (x_j)_{j \in \mathbf{N}} \in F,\ x_i \neq 0\}$.

P.D. $F = V_I^+$.

$\subseteq$) Por definición de I.

$\supseteq$) Primero demostramos que $e_i \in F$, $\forall i \in I$.

Sea $i \in I$, entonces $\exists x = (x_j) \in F$ tal que $x_i \neq 0 (x_i > 0)$. Entonces $\bar{0} \leq x_i e_i \leq x$ y como $F \trianglelefteq V^+$, $x_i e_i \in F$. Entonces $e_i \in F$.

Por lo tanto, $e_i \in F \forall i \in I$.

Sea $y = (y_i) \in V_I^+$, $y = \sum_{i \in I} y_i e_i$ suma finita entonces por ser F cono $y \in F$.

Por lo tanto, $F = V_I^+$.

■

2.5.7. Sean C un cono en V y $S \subseteq C$ un conjunto. Definimos

$$F = \{y \in C \mid \bar{0} \leq y \leq z,\ z \in con(S).\}.$$

Entonces F es una cara de C.

Demostración: Por (I.3.10), tenemos que F es un cono. Así, sólo nos falta probar que, si $x \in F$, $y \in C$, $x - y \in C$ entonces $y \in F$.

Como $x \in F$ entonces $\exists z \in con(S)$ tal que $\bar{0} \leq x \leq z$. Como $\bar{0} \leq y \leq x \leq z$ entonces por transitividad $\bar{0} \leq y \leq z$ entonces $y \in F$.

Por lo tanto, F es una cara de C. ■

Proposición 2.6. *Sean C un cono en V, $F \trianglelefteq C$, $v \in F$. Entonces, v es extremal en C si y sólo si v es extremal en F.*

Demostración: $\Longrightarrow$) Sea $v \in F$, v extremal en C.

P.D. v es extremal en F.

Supongamos que $v = z + w$, $z, w \in F$ entonces $z, w \in C$, de donde $z, w \in \mathbb{R}^+ v$.

Entonces v es extremal en F.

$\Longleftarrow$) Sea v extremal en F. Supongamos que v no es extremal en C.

Sean $z, w \in C$ tales que $v = z + w$, como $v \in F$, $z, w \in C$ y $v - z = w \in C$ entonces $z \in F$ ya que F es cara. De la misma manera $z = v - w \in C$, y como F es cara entonces $w \in F$, pero v es extremal en F entonces $z, w \in \mathbb{R}^+ v$.

Por lo tanto, v es extremal en C. ∎

Proposición 2.7. *Sea C un cono en V. Si $v \in V$ extremal en C entonces $ray(v)$ es cara de C. (Ver definición de $ray(v)$ en (I.1.12)). Observemos que $ray(v) = con(v)$.*

Demostración: P.D Si $x \in con(v)$, $y \in C$, $x - y \in C$ entonces $y \in con(v)$.

Como $x \in con(v)$ se tiene que $\exists \lambda > 0$, $x = \lambda v = (\lambda v - y) + y$, entonces $z := x - y = \lambda v - y \in C$, entonces $x = z + y \in C$, $z, y \in C$ como v es extremal entonces x es extremal, de donde $y \in con(v)$. ∎

§3. Conos poliédricos.

En la presente sección daremos algunos resultados para conos poliédricos.

Recordemos que $C \subseteq V$ cono es poliédrico si a lo más tiene un número finito de vectores extremales. (ver (1.3)).

Proposición 3.1. *Sea V de dimensión finita. Sea $C \subseteq V$ un cono. C es poliédrico si y sólo si C contiene un número finito de caras.*

Demostración: $\Longrightarrow$) Sea C cono poliédrico, es decir, C tiene sólo un número finito de rayos extremales, digamos r.

P.D. C tiene un número finito de caras.

Por (2.6), si F es una cara de C, entonces los extremales de F lo son de C y por (1.4), F está generado por sus extremales. Entonces (como C es poliédrico), el número de caras de C es a lo más $\sum_{j=1}^{r} C_j^r$, donde $C_j^r = \frac{j(j-1)\cdots(j-r+1)}{r!} = \#$ de combinaciones de r elementos en j.

Así, C contiene un número finito de caras.

$\Longleftarrow$) Por la proposición (2.7) tenemos que para todo vector $v \in C$ extremal, el $con(v)$ es cara de C y por hipótesis sabemos que C contiene un número finito de caras, entonces C tiene un número finito de vectores extremales. ∎

Teorema 3.2. **(M. Takane)** *Si $C \subsetneq V = \mathbb{R}^n$ cono entonces existe $\widetilde{C}$ cono poliédrico tal que $C \subsetneq \widetilde{C} \subsetneq V$.*

Demostración: Por $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$ denotaremos a la norma euclidiana y por $\langle -, - \rangle : V \mathrm{x} V \longrightarrow \mathbb{R}$ el producto interno asociado a $\|\cdot\|$.

Demostraremos el teorema en varios pasos. La **idea** es encontrar un hiperplano H tal que $C \cap H$ es compacto, entonces $C \cap H \subseteq Cub^{n-1}$ cubo $n-1$-dimensional. Entonces $C \subsetneq \widetilde{C} = con\langle Cub^{n-1} \rangle$ poliédrico.

Podemos suponer que C es sólido, si no trabajamos con $\langle C \rangle$.

I. Sea $D := conv(y \in C \mid \| y \| = 1)$ la envolvente convexa de $\{y \in C \mid \| y \| = 1\}$.
P.D. $\bar{0} \notin D$. Supongamos que $\bar{0} \in D$ entonces $\bar{0} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_i$ con $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum \alpha_i = 1$, $\| x_i \| = 1$, ver figura (I).

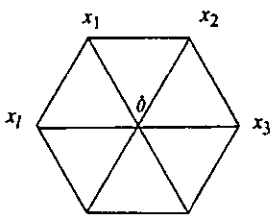

Figura I

P.D. $\forall i, \alpha_i = 0$. Se demostrará por inducción sobre ℓ.

Si $\ell = 1$, entonces $\alpha_1 x_1 = 0$ entonces (como $x_1 \neq \bar{0}$), $\alpha_1 = 0$.

Si $\ell > 1$, si $\exists\, 1 \leq i \leq \ell$ tal que $\alpha_i = 0$ entonces por hipótesis de inducción se tiene $\forall j\,, \alpha_j = 0$. Entonces podemos suponer $\forall j\,, \alpha_j \neq 0$ entonces $-C \ni -\alpha_\ell x_\ell = \sum_{i=1}^{\ell-1} \alpha_i x_i \in C$ entonces (como $C \cap (-C) = \{\bar{0}\}$) $\alpha_\ell x_\ell = \bar{0}$, entonces (como $x_\ell \neq \bar{0}$) $\alpha_\ell = 0$, contradicción (pues $\alpha_\ell \neq 0$).

Por lo tanto $\bar{0} \notin D$.

II. Es sabido:

Lema 3.2.1. *[E] Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto cerrado convexo. Para cada $z \in \mathbb{R}^n$, existe un único $w_z \in D$ tal que $\| w_z - z \| = \inf_{y \in D}\{\| y - z \|\}$. Definimos $p_D(z) := w_z$.*

Sea $H = \{y \in V \mid \langle y, u\rangle = 1\}$, donde $u = \frac{x}{\langle x,x\rangle} = \frac{-x-x}{\langle x,-x-x\rangle}$ y $x := p_D(\bar{0})$, el hiperplano que contiene a x y es ortogonal a la línea que une a x y $-x$, que es también la línea que une a x y $\bar{0}$, (pues $H = H_0 + x$), ver figura (II).

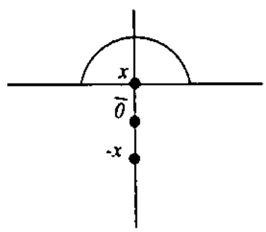

figura II

Observemos que $\bar{0} \in H_0 := \{y \in V \mid \langle y, u\rangle = 0\}$.

P.D. $H = H_0 + x$.

$\subseteq$) Sea $z \in H$. P.D. $z \in H_0 + x$.

Como $z \in H$ entonces $\langle z, u\rangle = 1$ entonces $\langle z - x, u\rangle = \langle z, u\rangle - \langle x, u\rangle = 0$ entonces $z - x \in H_0$ entonces $z \in H_0 + x$.

$\supseteq$) Sea $z \in H_0 + x$. P.D. $z \in H$.

Como $z \in H_0 + x$ entonces $\exists\, y \in H_0$ tal que $z = y + x$ entonces $\langle z, u\rangle = 1$ entonces $z \in H$.

Recordemos que

$$H^+ := \{y \in V \mid \langle y, u\rangle \geq 1\}, \qquad H^- := \{y \in V \mid \langle y, u\rangle \leq 1\}.$$

III. P.D. $D \subseteq H^+$.

Por construcción de H, $x \in H$.

Supongamos que $D \not\subseteq H^+$ entonces $\exists z \in (H^- \setminus H) \cap D$. Como $x, z \in D$ entonces (ya que D es convexo) $\mathcal{L}(=$ segmento que une a x con $z)$ $\subseteq D$, además $\mathcal{L} \subseteq \Pi :=$ plano generado por $(z, x, \bar{0})$.

Si tomamos $\bar{B}_{\|x\|}(\bar{0}) \cap \Pi =: B \subset H^-$. Esto es pues de hecho $\bar{B}_{\|x\|}(\bar{0}) \subseteq H^-$: sea $y \in \bar{B}_{\|x\|}(\bar{0})$ entonces $\| y \| \leq \| x \|$ entonces $\langle y, y\rangle \leq \langle x, x\rangle$. Tomemos $0 \leq \langle y - x, y - x\rangle = \langle y, y\rangle - 2\langle y, x\rangle + \langle x, x\rangle$ entonces $2\langle y, x\rangle \leq \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle \leq 2\langle x, x\rangle$ entonces $1 \geq \frac{\langle y,x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \langle y, u\rangle$. Por lo tanto $y \in H^-$.

Entonces $\mathcal{L}$ corta a B en dos puntos (pues $z \notin H$ entonces $\mathcal{L}$ no es tangente a B y como $z \in H^-$ entonces $\mathcal{L}$ corta a B), entonces $\exists w \in \mathcal{L} \subseteq D$ tal que $\| w \| < \| x \|$ entonces $\| w - \bar{0} \| < \| x - \bar{0} \|$ contradicción $(x = p_D(\bar{0}))$, ver figura (III.a).

Por lo tanto, $D \subseteq H^+$.

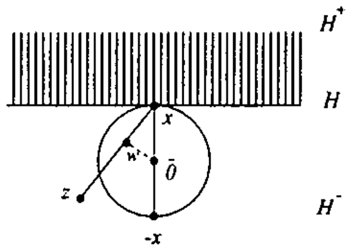

figura III.a

Observemos que también, $D \subseteq H_0^+$. De hecho en $H_0^+ \setminus H_0$ pues $H^+ \subseteq H_0^+ \setminus H_0$, ver figura (III.b).

IV. P.D. $H_0 \cap C = \{\bar{0}\}$.

Supongamos que $\exists\, z \in H_0 \cap C$.

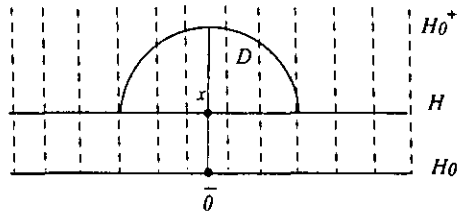

figura III.b

Si $z \neq \bar{0}$, entonces $\frac{z}{\|z\|} \in H_0 \cap C$ (pues C es cono entonces $\frac{z}{\|z\|} \in C$ y H_0 es espacio vectorial), esto implica que $\frac{1}{\|z\|}\langle z, u\rangle = 0$. Por otro lado, $\frac{z}{\|z\|} \in D \subseteq H^+$, es decir, $\langle z, u\rangle \geq 1$, contradicción.

Por lo tanto, $H_0 \cap C = \{\bar{0}\}$.

Observación: Esto nos dice también que $C \subseteq H_0^+$.

V. P.D. $H \cap C$ es compacto.

a) $H \cap C$ es cerrado, pues es intersección de cerrados.

b) Supongamos que no es acotado. Entonces $\exists\, \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq H \cap C$ tal que $\| x_m \| \geq m$ entonces $\langle x_m, u\rangle = \frac{1}{\langle x,x\rangle}\langle x_m, x\rangle = 1$ entonces $\frac{1}{\|x_m\|}\langle x_m, u\rangle = \frac{1}{\|x_m\|} \leq \frac{1}{m}$.

Como $\{\frac{x_m}{\|x_m\|}\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq S^{n-1}$ compacto entonces tiene una subsucesión que converge. Entonces $\exists\, \{\frac{x_{m_i}}{\|x_{m_i}\|}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{i\to\infty} \frac{x_{m_i}}{\|x_{m_i}\|} = \tilde{x}$, $\| \tilde{x} \| = 1$, $\tilde{x} \in C$ (pues C es cerrado) con $\| x_{m_i} \| \geq m_i$. Ahora por continuidad $\langle \tilde{x}, u\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle \frac{x_{m_i}}{\|x_{m_i}\|}, u\rangle = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{\|x_{m_i}\|}\langle x_{m_i}, u\rangle = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{\|x_{m_i}\|} = 0$, ($\| x_{m_i} \| \geq m_i$, $0 \leq \frac{1}{\|x_{m_i}\|} \leq \frac{1}{m_i}$, con $\lim_{i\to\infty} \frac{1}{m_i} = 0$)entonces $\tilde{x} \in C \cap H_0 = \{\bar{0}\}$ contradicción (pues $\| \tilde{x} \| = 1$).

Por lo tanto, $C \cap H$ es compacto.

VI. Como $H \cap C$ es compacto y $\dim H := \dim H_0 = n-1$ entonces existe $Cub^{n-1} \subseteq H$ un cubo $n-1$-dimensional tal que $H \cap C \subseteq Cub^{n-1}$, ver figura (VI).

VII. Tomemos $\widetilde{C} := con\langle Cub^{n-1}\rangle$ cono poliédrico.

El conjunto de extremales de $\widetilde{C}$ está contenido en $\{\mathbb{R}^+ v\,;\ v$ "vértice" de $Cub^{n-1}\}$, $\widetilde{C} = \{\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i \mid \ell \in \mathbb{N},\ \alpha_i \geq 0,\ v_i \in Cub^{n-1}\}$.

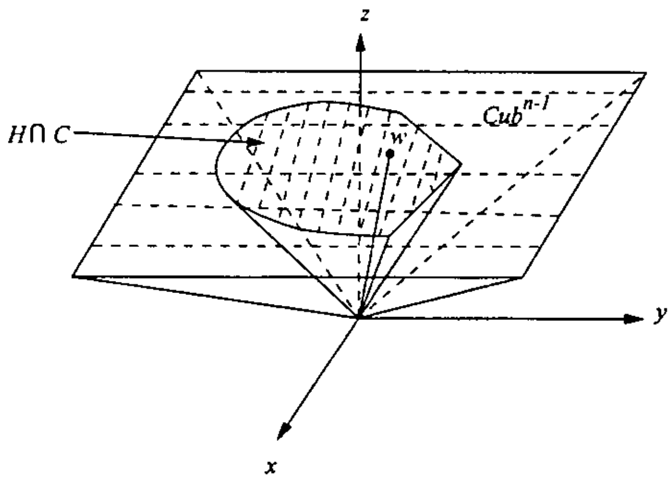

figura VI

Cub^{n-1} tiene finitos vértices pues tiene un número finito de aristas, donde, cada vértice es la intersección de aristas.

De hecho, demostraremos que si $\bar{0} \neq y \in \widetilde{C}$ entonces $\exists \lambda > 0,\ v \in Cub^{n-1}$ tales que $y = \lambda v$: sea $\bar{0} \neq y \in C$, entonces $\bar{0} < y = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i;\ \alpha_i \geq 0,\ v_i \in Cub^{n-1} \subseteq H$.

Como $\langle y, u\rangle = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \langle v_i, u\rangle = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \neq 0$, sea $\beta := \langle y, u\rangle > 0$, entonces $\beta^{-1} y \in H \cap C \subseteq Cub^{n-1}$ (pues $\langle \beta^{-1} y, u\rangle = 1$) $Cub^{n-1} \ni w := \beta^{-1} y$ con $y = \beta w$ entonces $\widetilde{C} \subseteq \cup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda Cub^{n-1}$ (es decir, $\widetilde{C} = \cup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda Cub^{n-1}$).

Por lo tanto, si $y \in \widetilde{C}$ extremal entonces $\exists \lambda > 0\ \lambda y \in$ vértice de Cub^{n-1}.

VIII. $C \subseteq \widetilde{C}$.

Sea $z \in C$ entonces $\beta := \langle z, u\rangle \geq 1$ entonces $\langle \beta^{-1} z, u\rangle = 1$ (ya que $\beta \neq 0$) entonces $\beta^{-1} z \in H \cap C \subseteq \widetilde{C}$ entonces como $\beta > 0,\ z \in \widetilde{C}$.

Por lo tanto, para todo C cono, $C \subseteq \widetilde{C}$ cono poliédrico.

■

El siguiente resultado es consecuencia de la demostración anterior.

Corolario 3.3. *Sean $C \subseteq V = \mathbb{R}^n$ cono y $w \in V$ tal que $w \notin C$. Entonces existe $\widetilde{C}$ cono poliédrico tal que $C \subseteq \widetilde{C}$ y $w \notin \widetilde{C}$.*

Demostración: Siguiendo la demostración del teorema anterior (3.2), construyamos H_0 hiperplano tal que $H_0 \cap C = \{\bar{0}\}$ y $\forall z \in C$, $(H_0+z)\cap C$ es compacto.

Caso 1. Si $w \in H_0^-$, entonces el cono poliédrico $\widetilde{C}$ del teorema sirve, es decir $w \notin \widetilde{C}$.

Caso 2. Si $\exists z \in C$ tal que $w \in (H_0+z)$ entonces $\exists P^{n-1} \subseteq H_0+z$ poliedro $n-1$ dimensional tal que $C \cap (H_0+z) \subseteq P^{n-1}$ y $w \notin P^{n-1}$, ver (A.3.7.(a)).

Sea $\widetilde{C} = con(P^{n-1})$, $C \subseteq \widetilde{C}$ y $w \notin \widetilde{C}$, ver figura (3.3.a).

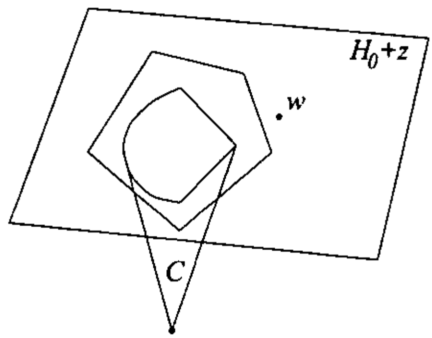

figura 3.3.a

Podemos, por ejemplo, construir a P^{n-1} de la siguiente manera. Por la demostración del teorema (3.2) existe $Cub^{n-1} \subseteq H_0+z$ tal que $(H_0+z)\cap C \subseteq Cub^{n-1}$. Como $(H_0+z)\cap C$ es compacto y $w \notin C$, entonces $\exists\, H'$ hiperplano en $\mathbb{R}^{n-1}$ tal que $w \in H'^{-}\backslash H'$ y $(H_0+z)\cap C \subseteq H'^{+}$ entonces $P^{n-1} = H'^{+}\cap Cub^{n-1}$ es un poliedro, ver figura (3.3.b).

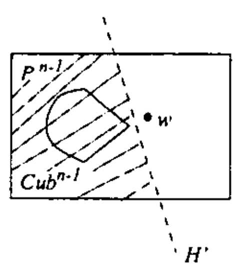

figura 3.3.b

$\blacksquare$

Lema 3.4. *Si* $C \subseteq \widetilde{C} \subseteq V$ *conos entonces* $\widetilde{C}^{\perp} \subseteq C^{\perp}$. *(Entonces,* $C^{\perp\perp} \subseteq \widetilde{C}^{\perp\perp}$*). Donde* $C^{\perp} = \{f \in V^{*} \mid f(x) \geq 0 \forall x \in C\}$, *ver (I.2.5).*

Demostración: Sea $f \in \widetilde{C}^{\perp}$. P.D. $f \in C^{\perp}$.

Como $f \in \widetilde{C}^{\perp}$ entonces $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \widetilde{C}$, pero $C \subseteq \widetilde{C}$ entonces $f(x) \geq 0$ $\forall x \in C$, así $f \in C^{\perp}$.

Por lo tanto, $\widetilde{C}^{\perp} \subseteq C^{\perp}$. $\blacksquare$

Daremos un ejemplo de cómo utilizar que todo cono está contenido en uno poliédrico.

Teorema 3.5. *Sea* $C \subseteq V = \mathbb{R}^n$ *cono. Sea* ψ *el isomorfismo natural*

$V \xrightarrow{\psi} V^{**}, \quad v \mapsto \psi(v) : V^{*} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g \in V^{*}, g \mapsto g(v).$

Entonces $C^{\perp\perp} = \psi(C)$.

Demostración: a) C poliédrico, ver [P].

b) $C \subseteq V$ cono no necesariamente poliédrico. Veamos primero que $\psi(C) \subseteq C^{\perp\perp}$.

Sea $v \in C$. P.D. $\psi(v) \in C^{\perp\perp}$.

Sea $g \in C^{\perp}$ entonces $\psi(v)(g) = g(v) \geq 0$ entonces $\psi(v) \in C^{\perp\perp}$.

P.D. $C^{\perp\perp} \subseteq \psi(C)$.

Sea $\eta \in C^{\perp\perp}$ entonces $\exists w \in V$ tal que $\psi(w) = \eta$ (pues ψ es isomorfismo y $C^{\perp\perp} \subseteq V^{**}$)

P.D. $w \in C$.

Supongamos que $w \notin C$, entonces por (3.3), existe $\widetilde{C}$ cono poliédrico tal que $C \subseteq \widetilde{C}$ y $w \notin \widetilde{C}$. Entonces $\psi(w) \in C^{\perp\perp} \subseteq \widetilde{C}^{\perp\perp} = \psi(\widetilde{C})$, (por (a)) entonces por ser ψ isomorfismo $w \in \widetilde{C}$ contradicción, (pues $w \notin \widetilde{C}$).

Por lo tanto, $w \in C$.

Por lo tanto, $C^{\perp\perp} = \psi(C)$. $\blacksquare$

§4. Conos finitamente cara-generados.

Ahora, daremos las definiciones relacionadas con caras.

Definición 4.1. *Sea $C \subseteq V$ un cono. Sea $S \subseteq C$. Se define*

$$\varphi(S) = \cap\{F \mid F \in \mathcal{F}(C), S \subseteq F\},$$

es decir, $\varphi(S)$ es la cara más pequeña de C que contiene a S (pues intersección de caras es cara). Llamaremos a $\varphi(S)$ la **cara generada** *por S. (Como C es cara, $S \subseteq C$ entonces $\{F \mid F \in \mathcal{F}(C), S \subseteq F\} \neq \emptyset$).*

Definición 4.2. *Diremos que un cono C es* **finitamente cara-generado** *si $\exists\, S$ finito tal que $\varphi(S) = C$.*

Definición 4.3. *Sea $F \trianglelefteq C$. Si hay un conjunto finito $S = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq C$ tal que $F = \varphi(S)$, entonces F es llamado* **finitamente cara-generado**. *También se escribe $F = \varphi(x_1, ..., x_n)$.*

Definición 4.4. *Sea $F \trianglelefteq C$. Si existe $x \in C$ tal que $F = \varphi(x)$, decimos que F es una* **cara cíclica** *de C.*

Con lo siguiente se trata de ilustrar las definiciones antes dadas.

Ejemplo 4.5.

4.5.1. Sea $V = \mathbb{R}^3$, V^+ el cono positivo en $\mathbb{R}^3$ (ver (I.1.9)). Ahora, tomemos $F_1 = con(e_1, e_2)$, $F_2 = con(e_2, e_3)$ y$F_3 = con(e_1, e_3)$, F_i cara $i = 1, 2, 3$.

Sea $S \subseteq F_1$, S el paralelogramo cuyos vértices son $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,2,0)$, $v_3 = (2,1,0)$, $v_4 = (2,2,0)$, ver figura (4.5.1).

Así, $\varphi(S) = F_1$ (es decir, F_1 es la cara generada por S).

4.5.2. Sea C como en (4.5.1), $F = con(e_1, e_2)$ y $S = \{e_1, e_2\} \subseteq F$.

$F = \varphi(S) = \varphi(e_1, e_2)$. Así, F es finitamente cara-generado.

4.5.3. Sea $V = \mathbb{R}^2$.

Sea $C = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \geq 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, con u, v linealmente independientes. Sea $x \in C$, con $x \in intC$, entonces $C = \varphi(x)$, de este modo C es cíclico, pues si $F \lhd C$, entonces $F \subseteq \partial C$.

Por lo tanto, $C = \varphi(x)$.

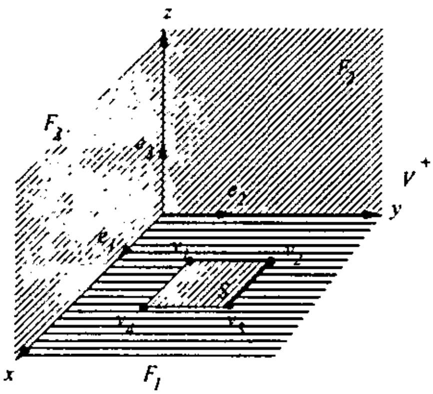

figura 4.5.1

4.5.4. Ahora daremos el ejemplo de un cono finitamente cara-generado, pero, que no es poliédrico.

Sea C el cono de helado en $\mathbb{R}^3$. (Ver (I.1.11)). Las caras de C son: $\{\bar{0}\}, C, F_v = con(v)$, $v \in \partial C$. Para $u \in intC$ se tiene $\varphi(u) = C$, ver figura (4.5.4).

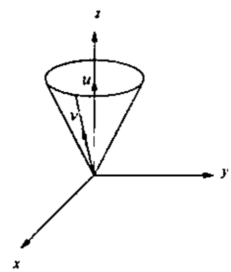

figura 4.5.4

Lema 4.6. *Sea V un K-espacio vectorial, $C \subseteq V$ un cono sólido entonces C es finitamente cara-generado. Más aún, es cíclico.*

Demostración: Como C es sólido $\exists x \in intC$ entonces por lema (2.4), la única cara de C que contiene a x es C, así $\varphi(x) = C$. ∎

En seguida daremos algunos resultados para el operador φ.

Proposición 4.7. *Sea C un cono en V.*

i) *φ es un* **operador cerrado** *(es decir, $S \subseteq \varphi(S)$).*

ii) $\varphi(\varphi(S)) = \varphi(S)$.

iii) *$S \subseteq T$ entonces $\mathfrak{F}_T \subseteq \mathfrak{F}_S$. Donde $\mathfrak{F}_S = \{F \mid F \in \mathfrak{F}(C), S \subseteq F\}$, denota el conjunto de caras de C que contienen a S. Entonces, $\varphi(S) \subseteq \varphi(T)$.*

iv) *$S = \varphi(S)$ si y sólo si S es una cara.*

Demostración: **i)** $\varphi(S) = \cap\{F \mid F \in \mathfrak{F}(C), S \subseteq F\}$.

Tomemos el conjunto $\mathfrak{F}_S = \{F \mid F \in \mathfrak{F}(C), S \subseteq F\}$, entonces $S \subseteq \cap_{F \in \mathfrak{F}_S} F = \varphi(S)$.

ii) $\subseteq$) P.D. $\varphi(\varphi(S)) \subseteq \varphi(S)$.

Sea F cara tal que $\varphi(S) \subseteq F$ y por (i) $S \subseteq \varphi(S)$, entonces $S \subseteq F$, es decir, $\mathfrak{F}_{\varphi(S)} \subseteq \mathfrak{F}_S$, así $\varphi(\varphi(S)) \subseteq \varphi(S)$.

$\supseteq$) P.D. $\varphi(S) \subseteq \varphi(\varphi(S))$.

Por (i), se tiene $S \subseteq \varphi(S)$. Hagamos $\varphi(S) = S'$, de donde $S' \subseteq \varphi(S')$. Es decir, $\varphi(S) \subseteq \varphi(\varphi(S))$.

iii) Si $S \subseteq T$, entonces $\mathfrak{F}_T \subseteq \mathfrak{F}_S$, donde $\mathfrak{F}_S = \{F \mid F \in \mathfrak{F}(C), S \subseteq F\}$. Tenemos $S \subseteq T \subseteq F \; \forall F \in \mathfrak{F}_T$ entonces $F \in \mathfrak{F}_S$, así $\mathfrak{F}_T \subseteq \mathfrak{F}_S$. Notemos que si $\mathfrak{F}_T \subseteq \mathfrak{F}_S$ entonces $\cap_{F \in \mathfrak{F}_S} F \subseteq \cap_{F \in \mathfrak{F}_T} F$ es decir, $\varphi(S) \subseteq \varphi(T)$.

iv) $\Longrightarrow$) $S = \varphi(S)$ entonces S es cara.

$\Longleftarrow$) Si $S \in \mathfrak{F}(C)$ significa $S \in \mathfrak{F}_S$, de donde $S \subseteq \cap_{F \in \mathfrak{F}_S} F \subseteq S$, pero $\cap_{F \in \mathfrak{F}_S} F = \varphi(S)$.

Por lo tanto, $S = \varphi(S)$. ∎

Ahora probaremos más resultados, relacionados con el orden definido anteriormente en (I.3.1) sobre caras y conos.

Teorema 4.8. *Sea $F \trianglelefteq C \subseteq V$. F cara de C cono (por definición F es cono de V). Entonces*

i) *Si* $F \trianglelefteq C$, $\bar{0} \leq^F y$; $\bar{0} \leq^C x \leq^C y$ *entonces* $\bar{0} \leq^F x \leq^F y$.

ii) *Si* $G \trianglelefteq F$, $F \trianglelefteq C$ *[i.e.,* $G \in \mathfrak{F}(F)$*] entonces* $G \trianglelefteq C$ *(transitividad).*

Demostración: **i)** P.D. $x \leq^F y$, ($\bar{0} \leq^F x$ si y sólo si $x \in F$, ver (I.3.1)).

Por hipótesis $y \in F$, $y - x \in C$, $y - (y - x) = x \in C$, entonces $y - x \in F$ ya que $F \trianglelefteq C$, es decir, $0 \leq^F x \leq^F y$.

ii) P.D. Si $G \trianglelefteq F$, $F \trianglelefteq C$, entonces $G \trianglelefteq C$.

P.D. $\forall x, y \in V$ tales que $x \in G$, $y \in C$, $x - y \in C$, entonces $y \in G$.

Sean $x, y \in V$ tales que $x \in G$, $y \in C$, $x - y \in C$. Como $G \trianglelefteq F$ y $x \in G$, entonces $x \in F$. Como $F \trianglelefteq C$ y $x \in F$, $y \in C$, $x - y \in C$, entonces $y \in F$. Además, por (i), $x - y \in F$ entonces como ($x \in G$, $y \in F$, $x - y \in F$) y $G \trianglelefteq F$ entonces $y \in G$. ∎

Observación 4.8.1. Para que el inciso (i) del teorema (4.8) ocurra es necesario que $F \trianglelefteq C$, no basta que $F \subseteq C$, con F, C conos, como veremos en el siguiente:

Ejemplo 4.9. Veamos que existen F, C conos, $F \subseteq C$ y $x, y \in F$, tales que $x - y \in C$, pero $x - y \notin F$.

Sean V^+ en $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ y

$$F = \{\lambda e_2 + \mu(1,1) \mid \lambda, \mu \geq 0,\ \lambda, \mu \in K\},\ F \subseteq C\,.$$

Sean $x = (1,1)$, $y = e_2$, $x, y \in F$. Entonces $x - y = e_1$, por lo que tenemos $x - y = e_1 \in C$, pero $e_1 \notin F$, ver figura (4.9).

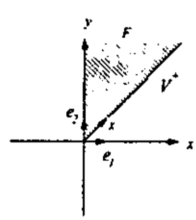

figura 4.9

Lema 4.10. *Sean $C \subseteq V$ cono y $S \subseteq C$ subconjunto. Entonces $\varphi(S) = \{y \in V \mid \exists\, z \in con(S),\ \bar{0} \leq y \leq z\} = (con(S) - C) \cap C$, donde $con(S) - C = \{z - w \mid z \in con(S), w \in C\}$.*

Demostración: Recordemos que $F \trianglelefteq C$ por (2.5.7).

Demostraremos que $\varphi(S) = F$. Observemos que $S \subseteq F$. Demostraremos que si $S \subseteq C' \trianglelefteq C$, entonces $F \subseteq C'$.

Sea $C' \trianglelefteq C$ tal que $S \subseteq C'$. Como $S \subseteq C'$, entonces $con(S) \subseteq C'$.

Sea $y \in F$, entonces $\exists\, z \in con(S) \subseteq C'$ con $\bar{0} \leq y \leq z$. Como $y \in C$, $z \in C'$ y $C' \trianglelefteq C$, entonces $y \in C'$.

Por lo tanto, $F \subseteq C'$ y $\varphi(S) = F$. ∎

Del lema anterior se desprende el siguiente resultado.

Corolario 4.11. *Sea $x \in C \subseteq V$ cono. Entonces:*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \{y \in V \mid \exists\, \beta \geq 0,\ \bar{0} \leq y \leq \beta x\} && (i) \\ &= \{y \in V \mid \exists\, \beta > 0,\ \bar{0} \leq y \leq \beta x\} && (ii) \\ &= \{y \in V \mid \exists\, \alpha > 0,\ \bar{0} \leq \alpha y \leq x\} && (iii) \end{aligned}$$

Demostración: Sea $x \in C$.

i) P.D. $\varphi(x) = \{y \in V \mid \exists\, \beta \geq 0,\ \bar{0} \leq y \leq \beta x\}$.

Sea $S = \{x\}$. Entonces por lema (4.10), se tiene $\varphi(S) = \{y \in V \mid \exists\, z \in con(x),\ \bar{0} \leq y \leq z\}$, recordemos $con(x) = \mathbb{R}^+ x$, con lo que se tiene el resultado.

ii) P.D. $\varphi(x) = \{y \in V \mid \exists\, \beta > 0,\ \bar{0} \leq y \leq \beta x\}$.

$\supseteq$) Por el inciso (i).

$\subseteq$) Otra vez por (i), $\varphi(x) = \{y \in V \mid \exists\, \beta \geq 0,\ \bar{0} \leq y \leq \beta x\}$.

Por lo tanto, basta demostrar que $\bar{0} \in \{y \mid \exists\, \beta > 0,\ \bar{0} \leq y \leq \beta x\}$. Pero $\bar{0} \leq x$, pues $x \in C$. Entonces $\forall \beta > 0,\ \bar{0} \leq \beta x$.

iii) P.D. $\varphi(x) = \{y \in V \mid \exists\, \alpha > 0,\ 0 \leq \alpha y \leq x\}$.

Por (ii) se tiene que para $y \in \varphi(x)$, $\exists\, \beta > 0$ tal que $\bar{0} \leq y \leq \beta x$, como $\beta \neq 0$ y $\beta > 0$, entonces $\bar{0} \leq \alpha y \leq x$, donde $\alpha = \beta^{-1}$.

Por lo tanto, $\varphi(x) = \{y \in V \mid \exists\, \alpha > 0,\ \bar{0} \leq \alpha y \leq x\}$. ∎

Lema 4.12. *Sea $C \subseteq V$ cono. Cada cara finitamente cara-generada de C es cíclica.*

Demostración: Sea $F = \varphi(x_1, ..., x_n)$, y $z = x_1 + ... + x_n$, así, $z \in F$, por lo que $\varphi(z) \subseteq F$. Para $i = 1, ..., n$, $\bar{0} \leq x_i \leq z$, de donde $x_i \in \varphi(z)$, y por (4.1), $F \subseteq \varphi(z)$. Entonces $F = \varphi(z)$.

Por lo tanto, F es cíclica. ∎

Ejemplo 4.13. Sea $V^+ \subseteq \mathbb{R}^2$ el cono positivo. Sea $x \in V^+$, con $x = (1,1)$ y tenemos $\varphi(e_1, e_2) = \varphi((1,1)) = V^+$.

4.14. En seguida, daremos un ejemplo de un cono que no es finitamente cara-generado.

Sea $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \{x \in V \mid \exists\, \ell \text{ tal que } \forall n \geq \ell,\ x_n = 0\}$.

Recordemos que $V^+ = \{x \in V \mid \forall i \in \mathbb{N},\ x_i \geq 0\} \subseteq V$, es un cono en V, ver (1.1.10). Entonces V^+ no es finitamente cara-generado.

Demostración: Supongamos que V^+ es finitamente cara-generado, entonces por el lema (4.12) existe $x \in V^+$ tal que $\varphi(x) = V^+$, pero para $x \in V^+$ se tiene que $\exists\, \ell$ tal que $\forall n > \ell, x_n = 0$, entonces por (4.11.(i)) $\varphi(x) = \{y \in V \mid \exists \beta \geq 0,\ \bar{0} \leq y \leq \beta x\}$ pero $\forall \beta > 0,\ \bar{0} \leq e_{\ell+1} \not\leq \beta x$.

Por lo tanto, V^+ no es finitamente cara-generado. ∎

§5. Caras vs. V-caras.

En esta sección compararemos nuestra definición de cara con la dada por Vandergraft en [V].

Recordemos de (2.1) la definición de cara.

Definición 5.1. *Un subconjunto F no vacío de un cono C es una* **cara** *de C si:*

a) *F es un cono.*

b) *$x \in F$, $y \in C$ y $x - y \in C$ entonces $y \in F$ (es decir, $x \in F$, $\bar{0} \leq^C y \leq^C x$ entonces $y \in F$).*

5.2. Subconos y definición de cara de Vandergraft.

Definición 5.2. *Decimos que C' es un* **subcono** *de C si C' es un cono contenido en C.*

Ejemplo 5.2.1. Sea $C = con((1,1),(1,0))$ y definamos, $C' = con((2,1))$ el cual sabemos es un cono, además $C' \subseteq C$ ya que $\forall x \in C'$ se tiene que $x = \lambda(2,1) \in C$. Entonces C' es un subcono de C.

Definición 5.2.2. *Un* **subcono extremal** *de C es un subcono generado por algún subconjunto de vectores extremales de C.*

Ejemplo 5.2.3. En los siguientes ejemplos tomamos $V = \mathbb{R}^3$, $V^+ \subseteq \mathbb{R}^3$ el cono positivo.

5.2.4. Sea $F = con(e_1)$ que sabemos es un cono y $F \subseteq V^+$, así F es un subcono, además e_1 es un vector extremal, así $con(e_1)$ es un subcono extremal de V^+, ver figura (5.2.4).

5.2.5. Sea $F = con(e_2, e_3)$, el cual sabemos es un cono tal que $F \subseteq V^+$, así F es un subcono de V^+, también tenemos que e_2, e_3 son vectores extremales de V^+, de este modo F es un subcono extremal de V^+, ver figura (5.2.5).

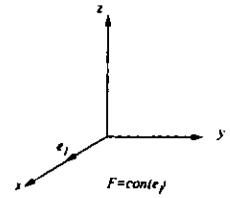

figura 5.2.4

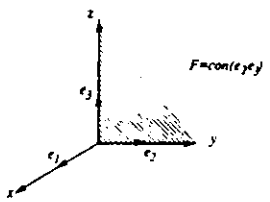

figura 5.2.5

5.2.6. Sea $F = con(e_1, (1,1,0))$ el cual es un subcono de V^+, pero no es un subcono extremal, ya que e_1 no genera a F, e_1 es el único vector extremal contenido en F y $(1,1,0)$ no es extremal, ver figura (5.2.6).

5.2.7. En este ejemplo, sea $V = \mathbb{R}^3$, $C = con((\pm 1, 0, 1), (0, \pm 1, 1))$, y tomemos $F = con((1,0,1), (-1,0,1))$. Entonces F es un subcono extremal, ver figura (5.2.7).

Siguiendo a Vandergraft, [V], daremos la siguiente definición.

Definición 5.3. *Una* **V-cara** *de C es un subcono extremal de C contenido en ∂C.*

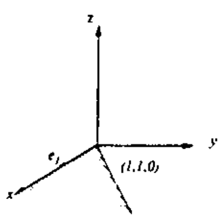

figura 5.2.6

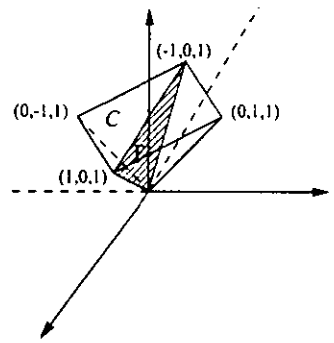

figura 5.2.7

5.4. En el ejemplo que sigue se ilustra la definición de V-cara.

5.4.1. Sea $V = \mathbb{R}^3$, $V^+ \subseteq \mathbb{R}^3$ el cono positivo.

a) Sabemos que $F = con(e_1)$ es un subcono extremal de V^+, además $F \subseteq \partial V^+$ así F es una V-cara de V^+.

b) Sea $F = con(e_2, e_3)$ el cual por (5.2.5) es un subcono extremal de V^+, además, $F \subseteq \partial V^+$ así, F es una V-cara.

5.4.2. Sean $C = con((\pm 1, 0, 1), (0, \pm 1, 1))$, $F = con((1, 0, 1), (-1, 0, 1))$. Entonces por (5.2.7) sabemos que F es un subcono extremal, sin embargo, $F \nsubseteq \partial C$. Por lo tanto, F no es V-cara.

Observación 5.5. La razón por la cual dimos la definición de cara dada por Vandergraft, es que queremos comparar dicha definición con la nuestra, (dada por H. Schneider). En (5.7) demostraremos que si $F \lhd C$ cara propia de C, entonces F es V-cara. Pero, como se verán en los ejemplos siguientes, $C \subseteq V$ puede o no ser cara del mismo C.

Ejemplo 5.6.

5.6.1. Sea $V = \mathbb{R}^2$, $C = con((1, 1), e_1)$ cono en V.

Sabemos que C es una cara, con nuestra definición. ahora, C está generado por $(1, 1), e_1$ que son vectores extremales, así C es un subcono extremal, pero $C \nsubseteq \partial C$ de este modo C no es una V-cara, ver figura (5.6.1).

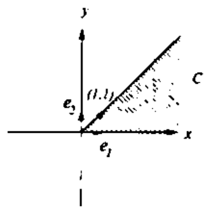

figura 5.6.1

5.6.2. Sea $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$. $V^+ = \{v \in V \mid v_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}\}$ cono de V, además V^+ es cara de V^+, con nuestra definición. Ahora $V^+ = con(e_1, e_2, ...)$ donde cada e_i es extremal, $e_i = (0, ..., 1_i, 0, ...)$, así, V^+ es un cono extremal, además se demostró que $V^+ = \partial V^+$ entonces $V^+ \subseteq \partial V^+$ y V^+ es una V-cara.

Demostremos pues, lo siguiente:

Lema 5.7. *Sea V de dimensión finita. Sea $F \neq C$. Si F es cara de C entonces F es V-cara.*

Demostración: Supongamos que F es cara, es decir, F es cono y si $x \in F$, $y \in C$, $x - y \in C$ entonces $y \in F$.

P.D. F es V-cara.

P.D. F es subcono extremal y $F \subsetneq \partial C$.

Como F es cara entonces F es un cono, así F es generado por sus vectores extremales, ver(1.4). Ahora, por (2.6), como F es cara entonces todo vector extremal de F lo es de C, entonces F es un subcono extremal. Además por lema (2.4) sabemos que si F es cara propia entonces $F \subsetneq \partial C$. Por lo tanto, F es una V-cara. ∎

5.8. Este ejemplo fue tomado de [BS], que nos muestra $F \subseteq C$ conos tales que F es una V-cara de C pero no es cara con nuestra definición.

Sea $V = \mathbb{R}^4$, $C = con((\pm 1, 0, 1, 0), (0, \pm 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

Sea $F = con((1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 0))$. El hecho de ser C, F conos, es claro, así como F es un subcono extremal.

Veamos que F no es cara con nuestra definición. Recordemos que F es cara si $x \in F$, $y \in C$, $x - y \in C$ entonces $y \in F$.

Sean $x = (0,0,4,0) = \alpha(1,0,1,0) + \beta(-1,0,1,0) \in F$, con $\alpha = \beta = 2$, $y = (0,-1,3,0) = (0,1,1,0) + 2(0,-1,1,0) \in C$.

De donde $x - y = (0,1,1,0) \notin F$, es decir, $x - y \in C \setminus F$. Por lo tanto, F no es cara.

Ahora veamos que F es V-cara, para esto necesitamos que $F \subseteq \partial C$, es decir, si $v \in F$ entonces $v \in \partial C$ (es decir,$\forall r > 0$, $B_r(v) \cap C \neq \emptyset$ y $B_r(v) \cap (\mathbb{R}^4 \setminus C) \neq \emptyset$). Sea $r > 0$, tomemos $v \in F$, $v = (\lambda - \mu, 0, \lambda + \mu, 0)$, $\lambda, \mu \geq 0$ y sea $w := v - \frac{r}{2}e_4 \notin C$. Calculemos $\| v - w \| = \| (0,0,0,\frac{r}{2}) \| = \frac{r}{2} < r$. Así, $w \in B_r(v)$ (es decir, $B_r(v) \cap (\mathbb{R}^4 \setminus C) \neq \emptyset$). Por lo tanto, $F \subseteq \partial C$.

Por lo tanto, F es V-cara.

Ahora, veamos cuándo C es cara con la definición de Vandergraft. Antes, observemos que, C siempre es generado por sus vectores extremales (proposición 1.4), pero no siempre ocurre que $C \subseteq \partial C$.

Lema 5.9. *Sean V de dimensión finita y $C \subseteq V$ cono.*

a) *Si C es sólido entonces $C \not\subseteq \partial C$, así C no es V-cara.*

b) *Si C no es sólido entonces $C \subseteq \partial C$, así C es V-cara.*

Demostración: **a)** Como C es sólido entonces $intC \neq \emptyset$, es decir, $\exists\, x \in C$, $\exists\, r > 0$ tales que $B_r(x) \subset C$.

Por lo tanto, $C \not\subseteq \partial C$.

b) Por hipótesis C no es sólido entonces $intC = \emptyset$.

P.D. $C \subseteq \partial C$.

Sea $x \in C$. Demostremos que $x \in \partial C$, (es decir. $\forall r > 0$, $B_r(x) \cap (V \setminus C) \neq \emptyset$).

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap (V \setminus C) = \emptyset$ entonces $x \in B_r(x) \subseteq C$ entonces $x \in intC$ contradicción, ya que $intC = \emptyset$. ■

§6. Condiciones de Cadena Ascendente.

Definición 6.1. *Sea C un cono en V. El cono C tiene la* **condición de cadena ascendente en caras**, *CCA, si no existe cadena infinita de caras $F_0 \lhd F_1 \lhd \ldots \lhd C$.*

Definición 6.2. *Sea C un cono en V. Sea $p \in \mathbf{N}$. Se dice que C tiene* **longitud de cadena** *p si hay una cadena de caras en C de longitud p (i.e., $F_0 \lhd F_1 \lhd \ldots \lhd F_p$), y no hay cadena de caras de longitud $p+1$.*

Ejemplo 6.3. Sean $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$. Sea $C = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \geq 0,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, con v, w linealmente independientes.

Sean $F_0 = \{\bar{0}\}$, $F_1 = \{\lambda v \mid \lambda \geq 0,\ \lambda \in K\}$ y $F_2 = C$. Cada F_i, $i = 0, 1, 2$ es cara, con $F_0 \lhd F_1 \lhd F_2$.

C tiene CCA en caras, por el lema (6.5). Además, C tiene longitud de cadena 2, ya que no existe F_3 tal que $F_0 \lhd \cdots \lhd F_3$. (Por corolario (6.8).

Ejemplo 6.4. A continuación daremos el ejemplo de un cono sin CCA.

Sea $V = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathbb{R}$. Sean $V^+ = \{v \in V \mid v_i \geq 0, \forall i \in \mathbf{N}\}$ cono de V y $V_I^+ = \{v \in V^+ \mid v_i = 0,\ \forall i \notin I\}$ cara de V^+, donde $I \subseteq \mathbf{N}$. Demostraremos que V^+ no tiene CCA.

Demostración: Definamos $I_i := \{1, \ldots, i\}$, $i \in \mathbf{N}$, $I_i \subset I_{i+1}, \forall i \in \mathbf{N}$, de donde tenemos $V_{I_i}^+ = \{v \in V^+ \mid v_i = 0,\ \forall i \notin I\}$ cara de $V^+, \forall i \in \mathbf{N}$ tal que $V_{I_i}^+ \lhd V_{I_{i+1}}^+$, entonces:

$$V_{I_1}^+ \lhd V_{I_2}^+ \lhd \cdots$$

Así, V^+ no tiene CCA. ∎

Lema 6.5. *Sea C un cono en V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) *C tiene CCA en caras.*

b) *Cada cara de C es finitamente cara-generada.*

Demostración: a) $\Longrightarrow$ b) Sean C con CCA en caras y $F \trianglelefteq C$.

P.D. F es finitamente cara-generada.

Supongamos que F no es finitamente cara-generada.

Entonces construiremos por inducción una cadena infinita de caras de F.

$$F_1 \lhd F_2 \lhd \cdots \lhd F\,.$$

Como F no es finitamente cara-generada implica que si $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq F$, $\varphi(x_1, ..., x_n) \lhd F$.

Sea $x_1 \in F$, definamos $F_1 := \varphi(x_1) \lhd F$.

Sea $x_2 \in F \setminus F_1$, definamos $F_2 := \varphi(x_1, x_2)$ de tal manera que $F_1 \lhd F_2 \lhd F$.

Supongamos que tenemos definido $F_n := \varphi(x_1, ..., x_n)$, tal que $F_1 \lhd F_2 \lhd \cdots \lhd F_n \lhd F$. Como $F_n \lhd F$ entonces existe $x_{n+1} \in F \setminus F_n$, sea $F_{n+1} := \varphi(x_1, ..., x_{n+1})$.

De esta manera tenemos, $F_1 \lhd F_2 \lhd \cdots$ cadena infinita de caras de F, pero para toda i, $F_i \lhd F \trianglelefteq C$, entonces, por (4.8.(ii)), $F_i \lhd C$ pero C tiene CCA para caras. Contradicción.

Por lo tanto, cada cara de C es finitamente cara-generada.

b) $\Longrightarrow$ a) P.D. C tiene CCA en caras.

Si $F \trianglelefteq C$, se tiene que F es finitamente cara-generada, es decir, $F = \varphi(x_1, ..., x_n) = \varphi(S)$, para algún conjunto finito $S = \{x_1, ..., x_n\}$.

Sea $F_1 \trianglelefteq F_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq C$ cadena ascendente de caras en C. Entonces para toda i existe S_i finito tal que $F_i = \varphi(S_i)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$.

Sea $F := \varphi(\cup_{i \in \mathbb{N}} S_i)$ entonces existen $x_1, \ldots, x_\ell \in \cup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ tales que $F = \varphi(x_1, \ldots, x_\ell)$. Además $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x_1, \ldots, x_\ell \in S_n$, de donde para toda $m \geq n$, $F \supseteq F_m = \varphi(S_m) \supseteq \varphi(S_n) \supseteq F$. Entonces para toda $m \geq n$, $F_m = F$.

Por lo tanto, C tiene CCA en caras. ■

El siguiente corolario es inmediato del lema anterior.

Corolario 6.6. *Sea C un cono en V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1) *C tiene CCA en caras.*

2) *Cada cara de C es cíclica.*

Demostración: **1) $\Longrightarrow$ 2)** Por hipótesis C tiene CCA en caras, entonces por el lema (6.5) cada cara de C es finitamente cara-generada y por el lema (4.12) cada cara de C es cíclica.

2) $\Longrightarrow$ 1) Sea $F \trianglelefteq C$. Como F es cíclica, se tiene que existe $x \in C$ tal que $F = \varphi(x)$, donde $S = \{x\}$, así F es finitamente cara-generada y por el lema (6.5), C tiene CCA en caras. ∎

Lema 6.7. *Sea $F \trianglelefteq C$. Entonces $F = C \cap \langle F \rangle$, donde $\langle F \rangle$ denota al $\mathbb{R}$-subespacio vectorial de V generado por F. Ver (1.5).*

Demostración: $\subseteq$) Se tiene $F \subseteq C$ y $F \subseteq \langle F \rangle$ entonces $F \subseteq C \cap \langle F \rangle$.

$\supseteq$) Sea $x \in C \cap \langle F \rangle$, entonces $\bar{0} \leq^C x = y - z$, con $y, z \in F$. De donde $\bar{0} \leq^C x \leq^C y$, entonces $x \in F$, por ser F cara.

Por lo tanto, $F = C \cap \langle F \rangle$. ∎

Corolario 6.8. *Si $K = \mathbb{R}$. Sean C un cono en V,* $\dim V = n$. *Entonces C tiene longitud de cadena menor o igual a n. En particular, C tiene CCA en caras.*

Demostración: Sea $F_1 \triangleleft F_2 \triangleleft \cdots \triangleleft C$ una cadena de caras, además para cada F_i se tiene que $F_i = C \cap \langle F_i \rangle$, por (6.7) y como $F_i \triangleleft F_{i+1}$ se tiene que $C \cap \langle F_i \rangle \subseteq C \cap \langle F_{i+1} \rangle \, \forall\, i \in \mathbb{N}$.

Entonces $\langle F_1 \rangle \subseteq \langle F_2 \rangle \subseteq \cdots \subseteq \langle C \rangle$, lo que implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, i \geq N$, $\langle F_i \rangle = \langle F_{i+1} \rangle$, de donde $F_i = C \cap \langle F_i \rangle = C \cap \langle F_{i+1} \rangle = F_{i+1}$.

Por lo tanto, la longitud de cadena es a lo más la dimensión de C y $\dim C \leq \dim V$, ver definición de $\dim C$ en (I.1.5). ∎

Ejemplo 6.9. El siguiente es un ejemplo de cono de dimensión infinita con la CCA.

Sea $V = \{(x_i)_{i\geq 0} \mid x_i \in \mathbb{R},\ \exists \ell \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall i \geq \ell,\ x_i = c\}$, que es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

1) Definamos $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera $\| (x_i)_{i\geq 0} \| := \sqrt{\sum_{i\geq 0} \frac{x_i^2}{2^i}}$. En (A.3.4), se demuestra que $\|\cdot\|$ es una norma.

2) Tomemos $C := \{(x_i)_{i\geq 0} \in V \mid x_0 \geq 0,\ x_0^2 \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{x_i^2}{2^i}\}$. Demostraré que C es cono. El **cono de helado infinito.**

3) $\partial C = \{(x_i)_{i\geq 0} \in V \mid x_0 \geq 0, \sum_{i\geq 1} \frac{x_i^2}{2^i} = x_0^2\}$.

3.1) Corolario: Sea $x \in C$ tal que $\| x' \| < x_0$, donde $x' = (0, x_1, x_2, ...)$ entonces $x \in intC$.

4) Para todo $v \in \partial C$, v es extremal.

5) Las únicas caras son $\{\tilde{0}\}$, C y $ray(v)$, $\forall v \in \partial C$.

6) C tiene CCA.

Demostración: Antes, observemos que: $x = (x_i)_{i\geq 0} \in C$ entonces $\| x' \| \leq x_0$, donde $x' = (0, x_1, x_2, ...)$ (es decir, $x' = x - x_0 e_0$, $e_0 := (1, 0, ...)$).

2) P.D. C es un cono.

a) P.D. C es cerrado.

Por (A.2.2), basta demostrar que si $(z^{(n)} = (z_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ sucesión tal que $(w_i)_{i\geq 0} = w = \lim_{n\to\infty} z^{(n)}$ existe, entonces $w \in C$.

P. D. $w \in C$. Como $w = \lim_{n\to\infty} z^{(n)}$ entonces $w_0 = \lim_{n\to\infty} z_0^{(n)} \geq 0$ pues $\forall n, z_0^{(n)} \geq 0$. Además, $w' = \lim_{n\to\infty} z^{(n)'}$ entonces $\| w' \|^2 = \lim_{n\to\infty} \| z^{(n)'} \|^2$.

Ahora, $\forall n \in \mathbb{N}, \| z^{(n)'} \|^2 \leq (z_0^{(n)})^2$.

P.D. $w_0^2 \geq \| w' \|^2$. Si $\| w' \|^2 > w_0^2$, sea $r \leq \frac{\|w'\|^2 - w_0^2}{2}$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \ell \geq N$, $|\| z^{(\ell)'} \|^2 - \| w' \|^2| < r$. Entonces $\forall \ell \geq N$, $| z_0^{(\ell)} - w_0 | > r$ contradicción (pues $w_0 = \lim_{n\to\infty} z_0^{(n)}$).

Por lo tanto, $\| w' \|^2 \leq w_0^2$. Por lo tanto, $w \in C$. Por lo tanto, C es cerrado.

b) P.D. $C + C \subseteq C$.

Sean $x = (x_i)_{i\geq 0}$, $y = (y_i)_{i\geq 0} \in C$. P.D. $x + y \in C$.

Como $x, y \in C$, entonces $\| x' + y' \| \leq \| x' \| + \| y' \| \leq x_0 + y_0$, entonces $\| x' + y' \|^2 = \sum_{i\geq 1} \frac{(x_i + y_i)^2}{2^i} \leq (x_0 + y_0)^2$ y como $x_0, y_0 \geq 0$ entonces $x_0 + y_0 \geq 0$ entonces $x + y \in C$.

c) P.D. $\alpha C \subseteq C$.

Sea $x = (x_i)_{i\geq 0} \in C$, $\alpha \geq 0$. P.D. $\alpha x \in C$.

Como $x_0 \geq 0$ entonces $\alpha x_0 \geq 0$. $\sum_{i\geq 1} \frac{x_i^2}{2^i} \leq x_0^2$ entonces $\sum_{i\geq 1} \frac{(\alpha x_i)^2}{2^i} = \alpha^2 \sum_{i\geq 1} \frac{x_i^2}{2^i} \leq \alpha^2 x_0^2 = (\alpha x_0)^2$. entonces $\alpha x \in C$.

d) P.D. $-C \cap C = \{\bar{0}\}$.

$\supseteq$) Es claro.

$\subseteq$) Sea $(x_i)_{i\geq 0} = x \in C \cap (-C)$ entonces $\exists\, w = (w_i)_{i\geq 0} \in C$ tal que $x = -w$, entonces $0 \leq x_0 = -w_0 \leq 0$ entonces $x_0 = 0$ de donde $0 \leq \sum_{i\geq 1} \frac{x_i^2}{2^i} \leq 0$ entonces $x_i = 0\,, \forall i$ (ya que $x_i^2 \geq 0$).

Por lo tanto $x = \bar{0}$.

3) Por demostrar, $\partial C = \{(x_i)_{i\geq 0} \in V \mid x_0 \geq 0,\ x_0^2 = \sum_{i\geq 1} \frac{x_i^2}{2^i}\}$.

$\supseteq$) Sea $v \in C$ tal que $\sum_{i\geq 1} \frac{v_i^2}{2^i} = v_0^2$ entonces (como $v_0 \geq 0$) , $\| (0, v_1, ...) \| = v_0$.

Si $v = \bar{0}$, entonces $v \in \partial C$.

Supongamos que $v \neq \bar{0}$. Sea $r > 0$.

P.D. $\emptyset \neq B_r(v) \cap (V \setminus C)$.

Como $v \neq \bar{0}$ entonces $\| v \| > 0$ y $v_0 > 0$. Sea ℓ suficientemente grande tal que $v_o - \frac{r}{\ell} \geq 0$. Ahora definamos $x = (x_i)_{i\geq 0}$, donde

$$x_i = \begin{cases} v_i & \text{si } i \geq 1 \\ v_0 - \frac{r}{\ell} & \text{si } i = 0 \end{cases} .$$

Entonces $\| v - x \| = \frac{r}{\ell} < r$ y $\sum_{i\geq 1} \frac{x_i^2}{2^i} = \sum_{i\geq 1} \frac{v_i^2}{2^i} = v_0^2 > (v_0 - \frac{r}{\ell})^2$, es decir, $x \in V \setminus C$.

$\subseteq$) Es equivalente a demostrar que si $v = (v_i)_{i\geq 0} \in C$ es tal que $\sum_{i\geq 1} \frac{v_i^2}{2^i} < v_0^2$, entonces $\exists\, r > 0$, $B_r(v) \subseteq C$.

Sea $v \in C$ tal que $\sum_{i\geq 1} \frac{v_i^2}{2^i} < v_0^2$.

Sea $v' := (0, v_1, ..., v_i, ...)$ entonces $\| v' \| < v_0$. Sea $r := \frac{v_0 - \| v' \|}{2}$.

Sea $x \in B_r(v)$, como $\| v - x \| < r$ entonces $(x_0 - v_o)^2 + \sum_{i\geq 1} \frac{(x_i - v_i)^2}{2^i} < r^2$.

Entonces $| x_0 - v_0 | < r$, $\| x' - v' \| < r$, donde $x' = (0, x_1, ..., x_i, ...)$.

Entonces $0 \leq \| x' \| < x_0$ y $\sum_{i\geq 1} \frac{x_i^2}{2^i} < x_0^2$, $x_0 \geq 0$.

Por lo tanto, $B_r(v) \subseteq C$. Es decir, $v \in intC$.

Por lo tanto, $\partial C = \{v = (v_i)_{i\geq 0} \mid \sum_{i\geq 1} \frac{v_i^2}{2^i} = v_0^2\}$.

3.1) Si $x \in C$, tal que $\| x' \| < x_0$ entonces $x \in intC$.

Tenemos que $x \in C$ y $x \notin \partial C$ pues $\| x' \| < x_0$ entonces $x \in intC$ (pues C es cerrado).

4) Para todo $v \in \partial C$, v es extremal.

Sea $v = (v_i)_{i\geq 0} \in \partial C$ entonces $v_0^2 = \sum_{i\geq 1} \frac{v_i^2}{2^i}$ entonces (como $v_0 \geq 0$) $v_0 = \| (0, v_1, ...) \|$.

Supongamos que existen $x = (x_i)_{i\geq 0}$, $y = (y_i)_{i\geq 0} \in C$ tales que $v = x + y$.

P.D. $x, y \in \mathbb{R}v$.

Como $x, y \in C$ entonces (como $x_0, y_0 \geq 0$), $x_0 \geq \| (0, x_1, ...) \|$, $y_0 \geq \| (0, y_1, ...) \|$. Definamos $x' := (0, x_1, ...)$, $y' := (0, y_1, ...)$.

Ahora, $(x_0 + y_0) = v_0 = \| x' + y' \| \leq \| x' \| + \| y' \| \leq x_0 + y_0$. Entonces $\| x' + y' \| = \| x' \| + \| y' \|$ y por (A.3.5(ii)), $x' \in \mathbb{R}^+ y'$, es decir, $\exists \lambda \geq 0$, $x' = \lambda y'$.

Falta demostrar que $x_0 = \lambda y_0$.

Como $0 \leq x_0 + y_0 = \| x' + y' \| = (\lambda + 1) \| y' \| \leq (\lambda + 1) y_0$ entonces $x_0 \leq \lambda y_0$.

Supongamos que $x_0 < \lambda y_0$, entonces $\lambda \| y' \| = \| x' \| \leq x_0 < \lambda y_0$, entonces $\| y' \| < y_0$. Además, $x_0 + y_0 = \| x' + y' \| = (\lambda + 1) \| y' \| = \| x' \| + \| y' \| < x_0 + y_0$ contradicción.

Por lo tanto, $x = \lambda y$ entonces $x, y \in \mathbb{R}v$.

Por lo tanto, $C \subseteq V$ es un cono, donde $\forall x \in \partial C$, x es extremal.

5) P.D. Las únicas caras son $\{\bar{0}\}$, C y $ray(v)$, $\forall v \in \partial C$.

Sea $F \lhd C$ entonces por (2.4) $F \subsetneq \partial C$, entonces (por (4)) $\forall v \in F$, v es extremal.

P.D.$\exists\, v \in C$ tal que $F = ray(v)$.

Supongamos que $\exists\, x, y \in F$ linealmente independientes (donde $x \neq \bar{0} \neq y$). Entonces $x + y \in con(x, y) \subseteq F$ y como $x + y$ es extremal (ya que $F \subsetneq \partial C$), entonces $x \in \mathbb{R}^+ y$ contradicción, (pues x, y son linealmente independientes).

Por lo tanto. $\exists\, v \in C$, $F = ray(v)$.

Por otro lado, por (2.7), si $v \in C$ extremal, entonces $ray(v)$ es cara de C.

6) P.D. C tiene CCA.

Por (5), las únicas caras de C son $\{\bar{0}\}$, C, y $ray(v)$, $v \in \partial C$, entonces las cadenas más largas son $\{\bar{0}\} \lhd ray(v) \lhd C$.

Otra demostración de (6): demostramos que $\forall F \trianglelefteq C$, F es cíclico.

a) C es cíclico, sea $v = (3, 1, ...1, ...) \in intC$, pues $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{2^i} = 1 < 3$. Por lo tanto, $v \in C$, y por (3), $v \in intC$.

Por lo tanto, $C = \varphi(v)$.

b) Si $x \in \partial C$, entonces $ray(x) \lhd C$.

Por lo tanto, $ray(x) = \varphi(x)$.

Por lo tanto, C tiene CCA y $\dim V$ es infinita. ∎

Capítulo III. Teoría topológica para conos y operadores positivos.

En este capítulo estudiaremos lo relacionado a la topología algebraica relativa a conos, la cual en algunos casos no coincide con la topología usual (euclidiana), también veremos, cuando estas topologías coinciden. Además, estudiaremos lo relacionado con los operadores (positivos, irreducibles y fuertemente irreducibles). Daremos algunos resultados para estos operadores, uno de ellos es que bajo ciertas hipótesis, los operadores irreducibles y fuertemente irreducibles son los mismos. Demostraremos también que nuestra definición de irreducibilidad y la de Vandergraft coinciden, a pesar de que las definiciones de cara y V-cara son distintas.

§1. Teoría topológica algebraica relativa a conos.

En la presente sección, estudiaremos la teoría topológica algebraica relativa a conos, también, haremos algunas observaciones de cuándo ésta coincide con la topología usual (euclidiana).

Iniciemos dando las siguientes definiciones.

Definición 1.1. *Sea C un cono en V. El* **interior algebraico relativo** *de C es denotado por $rai_V C$ y está definido de la siguiente manera:*

$$rai_V C = \{x \in C \mid \forall y \in \langle C \rangle \; \exists \varepsilon_y > 0, \; x + \varepsilon_y y \in C\}.$$

Si no hay confusión utilizaremos $raiC$.

Definición 1.2. *Sea C un cono en V. La* **cerradura algebraica** *de C, denotada por $aclC$ y está definida como:*

$$aclC = \{y \in V \mid \exists x_y \in V, \; y + \alpha x_y \in C, \; \forall \alpha \in (0, 1]\}.$$

Definición 1.3. *Sea C un cono en V. La* **frontera algebraica relativa** *de C es denotada por $rab_V C$ y está definida por:*

$$rab_V C = aclC \setminus raiC.$$

Si no hay confusión utilizamos $rabC$.

Observación 1.4. Sea $C \subseteq V$ cono, como C es cerrado, entonces $aclC = C$. En particular, $rabC = C \setminus raiC$.

Demostración: $\subseteq$) Demostremos $aclC \subseteq C$.

Sea $y \in aclC$ entonces existe $x_y \in V$ tal que para toda $\alpha \in (0,1]$ se tiene $y + \alpha x_y \in C$ entonces $\lim_{n\to\infty} y + \frac{1}{n}x_y = y \in C$, pues C es cerrado.

Por lo tanto, $aclC \subseteq C$.

$\supseteq$) Ahora, probemos $C \subseteq aclC$. Es claro, (pues para toda $y \in C$, tomamos $x_y = \bar{0}$). ∎

1.5. Ejemplos de las definiciones anteriores. Sea C cono, $C \subseteq \mathbb{R}^2$.

1.5.1. Sea $C = \{\lambda v | \lambda \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq \bar{0}$. Entonces, $\langle C \rangle = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Entonces, $raiC = C \setminus \{\bar{0}\}$, $aclC = C$ y $rabC = \{\bar{0}\}$, ver las figuras (1.5.1.a,b y c).

Demostración: P.D. $raiC = C \setminus \{\bar{0}\}$.

Primero probemos $\bar{0} \notin raiC$. Sea $y = \mu v \in \langle C \rangle$ con $\mu < 0$ entonces para toda $\varepsilon_y > 0$, $\bar{0} + \varepsilon_y y < \bar{0}$, de donde para toda $\varepsilon_y > 0$ se tiene $\bar{0} + \varepsilon_y y \notin C$. Así, $\bar{0} \notin raiC$.

Por lo tanto, $raiC \subseteq C \setminus \{\bar{0}\}$.

Ahora, probemos $C \setminus \{\bar{0}\} \subseteq raiC$. Sean $x \in C \setminus \{\bar{0}\}$ y $y \in \langle C \rangle$ entonces existe $\lambda > 0, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $x = \lambda v$, $y = \mu v$, si $\mu \geq 0$ entonces sea $\varepsilon_y = 1$. Si $\mu < 0$ se tiene que para toda $0 < \varepsilon_y \leq -\frac{\lambda}{\mu}$, $\lambda v + \varepsilon_y \mu v \in C$.

Por lo tanto, $raiC = C \setminus \{\bar{0}\}$.

Tenemos, $aclC = C$ por (1.4) y $rabC = aclC \setminus raiC = C \setminus \{C \setminus \{\bar{0}\}\} = \{\bar{0}\}$. ∎

1.5.2. Sea $C = \{\lambda v + \mu w | \lambda, \mu \geq 0,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $v, w \in \mathbb{R}^2$, con v, w linealmente independientes. Donde, $\langle C \rangle = \mathbb{R}^2$. Entonces $raiC = C \setminus \{\lambda v, \lambda w | \lambda \geq 0\}$, es decir, $raiC = intC$, $aclC = C$ nuevamente por (1.4). Y $rabC = \{\lambda v, \lambda w | \lambda \geq 0\} = \partial C$.

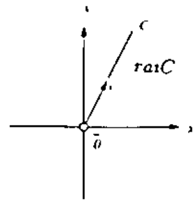

figura 1.5.1.a

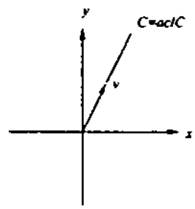

figura 1.5.1.b

Demostración: P.D. $raiC = C \setminus \{\lambda v,\ \lambda w | \lambda \geq 0\}$.

$\supseteq$) Sean $x \in C \setminus \{\lambda v,\ \lambda w | \lambda \geq 0\}$, $y \in \langle C \rangle$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq C$, y existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda y \in B_r(\bar{0})$, sea $\varepsilon_y = r$ entonces $x + \varepsilon_y y \in C$.

De donde, $C \setminus \{\lambda v,\ \lambda w | \lambda \geq 0\} \subseteq raiC$.

$\subseteq$) P.D. $\forall \lambda \geq 0$, λv, $\lambda w \notin raiC$ (es decir, $raiC \subseteq C \setminus \{\lambda v, \lambda w\}_{\lambda \geq 0}$).

Primero, probemos que $\lambda v \notin raiC$. Para toda $\lambda \geq 0$, para toda $\varepsilon_w > 0$, $\lambda v - \varepsilon_w w \notin C$ (ya que v y w son linealmente independientes y extremales) entonces para toda $\lambda \geq 0$, $\lambda v \notin raiC$.

Similarmente $\lambda w \notin raiC$, $\forall \lambda \geq 0$.

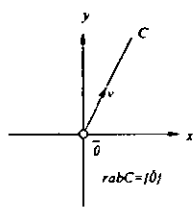

figura 1.5.1.c

Por lo tanto, $raiC = C \setminus \{\lambda v, \lambda w | \lambda \geq 0\}$.

Por último, $rabC = aclC \setminus raiC = C \setminus (C \setminus \{\lambda v, \lambda w | \lambda \geq 0\}) = \{\lambda v, \lambda w | \lambda \geq 0\} = \partial C$. ∎

1.5.3. El siguiente ejemplo muestra un cono $C \subseteq V$ tal que $raiC = \emptyset$, $rabC = C \setminus raiC = C$ y $aclC = C$.

Demostración: Sean $V = \oplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$. $V^+ = \{v \in V \mid v_i \geq 0 \; \forall i \in \mathbf{N}\}$ cono de V.

Sólo demostraremos, $raiV^+ = \emptyset$, pues $aclC = C$ por (1.4), y $rabC = C$ por ser $raiC = \emptyset$.

Sea $x \in V^+$, $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ entonces $\exists \ell \in \mathbf{N}$ tal que $x_i = 0 \; \forall i \geq \ell$, sea $y = x - e_\ell \in \langle V^+ \rangle$. Entonces $\forall \lambda > 0$, $x + \lambda y = x + \lambda x - \lambda e_\ell = (x_1 + \lambda x_1, ..., x_{\ell-1} + \lambda x_{\ell-1}, -\lambda, 0, ...) \notin V^+$. Por lo tanto, $x \notin raiV^+$.

Por lo tanto, $raiV^+ = \emptyset$. ∎

Proposición 1.6. *Sea V un K-espacio vectorial con* $\dim V = n$. *Si C es un cono sólido en V, entonces $raiC = intC$.*

Demostración: $\supseteq$) P.D. $intC \subseteq raiC$.

Sea $v \in intC$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(v) \subseteq C$.

P.D. $v \in raiC$.

Sea $z \in \langle C \rangle$ entonces (ver (I.3.8)) existe $\varepsilon_z > 0$ tal que $v + \varepsilon_z z \in C$ de donde, $v \in raiC$.

$\subseteq$) P.D. $raiC \subseteq intC$.

Supongamos $V = K^n$, $C \subseteq V$, $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Para la demostración basta ver a V como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Si $n = 0$ entonces $V = \{\bar{0}\} = C = intC = raiC$.

P.D. $\forall v \in \partial C$ entonces $v \notin raiC$ (entonces, $raiC \subseteq C \setminus \partial C = intC$).

Si $n \geq 1$. Sea $v \in \partial C$. Supongamos que $v \in raiC$. Como C es sólido y por corolario (II.1.5), C contiene una base de vectores extremales, $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^n$.

Como $v \in raiC$ entonces para toda $i = 1, ..., n$ existe $\varepsilon_{-v_i} =: \delta_{v_i} > 0$ tales que $v - \delta_{v_i} v_i \in C$ de donde $nv - \sum_{i=1}^n \delta_{v_i} v_i \in C$.

Otra vez por (II.1.5), $nv - \sum_{i=1}^{n} \delta_{v_i} v_i = \sum_{j=1}^{\ell} w_j$, para todo $j = 1, ..., \ell$, $w_j \neq 0$ extremal, $\ell \leq n$ entonces $v = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\ell} w_j + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{v_i} v_i$ entonces $v \in int\, con(\{v_i\}_{i=1}^{n}, \{w_j\}_{j=1}^{\ell}) \subseteq intC$ (pues $\mathcal{B}$ es base) contradicción (pues $v \in \partial C$).

Por lo tanto, $intC = raiC$. ■

Corolario 1.7. *Sea V de dimensión finita. Sea $C \subsetneq V$, C cono. Entonces $rai_V C = int_{\langle C\rangle} C$.*

Demostración: Por (I.3.8), $rai_{\langle C\rangle} C = \{x \in C \mid \forall y \in \langle C\rangle;\ \exists \varepsilon_y > 0,\ x + \varepsilon_y y \in C\} = \{x \in C \mid x \in int_{\langle C\rangle} C\} = int_{\langle C\rangle} C$. Por definición $rai_{\langle C\rangle} C = rai_V C$. ■

Corolario 1.8. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Si $C \subsetneq V$ cono sólido entonces $rabC = \partial C$.*

Demostración: Como C es cerrado entonces por (1.4) $aclC = C$ y por (1.6) $raiC = intC$, de donde $rabC = C \setminus raiC = C \setminus intC = \partial C$. ■

Corolario 1.9. *Para todo cono C en V, se tiene que $rabC \subseteq \partial C$.*

Demostración: Por la demostración de (1.6) se tiene que $intC \subseteq raiC$ entonces $rabC = C \setminus raiC \subseteq C \setminus intC = \partial C$. ■

Recordemos de (II.4.11(i)), $\forall x \in C$, $\varphi(x) = \{y \in V \mid \exists \beta \geq 0, \tilde{0} \leq y \leq \beta x\}$ y si F es cara de C lo denotaremos por $F \trianglelefteq C$, ver(II.2.3).

Lema 1.10. *Sea $F \trianglelefteq C$. Si $x \in F \cap raiC$, entonces $C = F = \varphi(x)$.*

Demostración: Sea $y \in C$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $x - \varepsilon y \in C$, de donde $\tilde{0} \leq^C \varepsilon y \leq^C x$, así por (II.4.11.(iii)) se tiene que $y \in \varphi(x)$.

Por lo tanto, $C \subseteq \varphi(x) \subseteq F \subseteq C$.

Así, $C = F = \varphi(x)$. ■

Corolario 1.11. *Sea $F \triangleleft C$. Entonces $F \subseteq rabC$. Comparar con lema (II.2.4).*

Demostración: Como $F \lhd C$, entonces $F \neq C$ y por (1.10), $\emptyset = F \cap raiC$, entonces $F \subsetneq C \setminus raiC = rabC$. ∎

Lema 1.12. *Sea $F \trianglelefteq C$ y sea $x \in V$. Entonces $x \in raiF$ si y sólo si $F = \varphi(x)$.*

Demostración: $\Longrightarrow$) Sea $x \in raiF = F \cap raiF$, entonces por (1.10), $F = \varphi(x)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos $F = \varphi(x)$.

P.D. $x \in raiF = \{z \in F \mid \forall y \in \langle F \rangle\ \exists \varepsilon_y > 0,\ z + \varepsilon_y y \in F\}$.

Sea $F = \varphi(x)$. Sea $z \in \langle F \rangle$. Supongamos $z = u - v$, $u, v \in F$. Entonces existen $\varepsilon_u > 0$, $\varepsilon_v > 0$ tales que $\bar{0} \leq \varepsilon_u u \leq \frac{1}{2}x$, $\bar{0} \leq \varepsilon_v v \leq \frac{1}{2}x$. Sea $\varepsilon := \min\{\varepsilon_u, \varepsilon_v\}$.

De donde $\bar{0} \leq \varepsilon u \leq \frac{1}{2}x$, $\bar{0} \leq \varepsilon v \leq \frac{1}{2}x$. Por lo que se tiene, $\bar{0} \leq \frac{1}{2}x - \varepsilon v \leq \frac{1}{2}x + \varepsilon(u - v) \leq \frac{1}{2}x + \varepsilon u \leq x$.

Así, $\frac{1}{2}x + \varepsilon z \in \varphi(x)$, entonces $x + (2\varepsilon)z \in \varphi(x)$.

Por lo tanto, $x \in raiF$. ∎

Corolario 1.13. *Sea $F \trianglelefteq C$. Entonces $raiF \neq \emptyset$ si y sólo si F es cíclico.*

Demostración: $\Longrightarrow$) Como $raiF \neq \emptyset$ entonces existe $x \in raiF$ y por lema (1.12) $F = \varphi(x)$ de donde F es cíclico.

$\Longleftarrow$) Como F es cíclico entonces $F = \varphi(x)$ que por lema (1.12) $x \in raiF$, así, $raiF \neq \emptyset$. ∎

Teorema 1.14. *Sea V un K-espacio vectorial y C un cono en V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *C tiene CCA en caras.*

ii) *Cada cara de C es cíclica.*

iii) *Cada cara de C es finitamente cara-generada.*

iv) *Para cada $F \trianglelefteq C$, $raiF \neq \emptyset$.*

Demostración: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Por (II.6.6).

(ii)$\Leftrightarrow$ (iii) Por (II.4.12).

(ii)$\Leftrightarrow$ (iv) Por (1.12). ∎

§2. Operadores positivos, operadores irreducibles y fuertemente irreducibles.

En esta sección daremos las definiciones de operadores positivos, irreducibles y fuertemente irreducibles y algunos resultados que relacionan conos con los operadores positivos. También daremos la definicion de Vandergraft de irreducibilidad (operadores V-irreducibles). Aquí demostraremos que a pesar de que nuestra definición de cara y la de V-cara no necesariamente coinciden, las definiciones de irreducibilidad sí son equivalentes.

Consideraremos a C como un cono sólido en el K-espacio vectorial V. Recordemos que si $x \in intC$, se escribe $x \gg \bar{0}$.

Definición 2.1. *Sea $A \in Hom(V, V)$. Si $AC \subseteq C$, se dice que A* **deja invariante** *al cono C (o C es A-***invariante***), y se escribe $A \geq 0$. Si $A \geq 0$ y $A \neq 0$ se escribe $A > 0$.*

Definición 2.2. *Sea $A \in Hom(V, V)$. Si $A(C \backslash \{\bar{0}\}) \subseteq intC$, se escribe $A \gg 0$.*

Definición 2.3. *Sean $A \in Hom(V, V)$. Si $A \geq 0$ y ninguna cara no trivial de C es A-invariante, decimos que A* **es irreducible**. *Notemos que depende de C, realmente sería C-***irreducible***, pero si no hay ambiguedad usaremos sólo irreducible.*

Observación 2.3.1. Para la definición de irreducibilidad, basta con considerar $C \subseteq V$ cono generador de V.

(Recordemos de (I.1.17), si $\dim V < \infty$ y $C \subseteq V$cono, entonces C es generador si y sólo si C es sólido).

Entonces la definición quedaría así:

Sean $C \subseteq V$ cono generador de V y $A \geq 0$. Decimos que A es **irreducible** si ninguna cara no trivial de C es A-invariante.

Definición 2.4. *Sean $C \subseteq V$ cono y $A \in Hom(V, V)$ tal que $A \geq 0$. Si para toda $x > \bar{0}$, existe $p = p(x) \in \mathbb{Z}^+$ tal que $(I + A)^p x \gg \bar{0}$, entonces se dice que*

A **es fuertemente irreducible**. *Observemos nuevamente que la definición depende de* C, *es decir,* C-**fuertemente irreducible** *y si no hay ambiguedad sólo diremos fuertemente irreducible.*

Ejemplo 2.5.

2.5.1. Sea $C = \{\lambda(1,1) + \mu e_1 | \lambda, \mu \geq 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+\}$.

Sea $x = (x_1, x_2)^t \in C$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (3x_1 + 2x_2, x_1)^t = \lambda(1,1)^t + \mu e_1 = (\lambda + \mu, \lambda)^t,$$

de donde $\lambda = x_1 \geq 0$ y $\mu = 2x_1 + 2x_2 \geq 0$, así $(3x_1 + 2x_2, x_1) = x_1(1,1) + (2x_1 + 2x_2)e_1 \in C$ ya que $x_1 \geq 0$, $2x_1 + 2x_2 \geq 0$.

Por lo tanto, C es A-invariante.

2.5.2. Sean $C = \{\lambda(1,2) + \mu(2,1) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \geq 0\}$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Veamos que C es A-invariante. Sea $x = (x_1, x_2) \in C$, entonces:

$Ax^t = (x_2, x_2)^t = \frac{x_2}{3}(1,2)^t + \frac{x_2}{3}(2,1)^t \in C$, ya que $\frac{1}{3}x_2 \geq 0$ y C es cono.

Además, $A \gg 0$ ya que $(x_2, x_2) \in intC$ si $(x_2, x_2) \neq (0,0)$. Ahora sean $F_0 = \{\bar{0}\}$, $F_1 = \{\lambda(1,2) | \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $F_2 = \{\lambda(2,1) | \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $F_3 = C$ las caras de C, donde F_1, F_2 son las caras no triviales, pero $AF_1 \not\subseteq F_1$, ya que $A(\lambda, 2\lambda)^t = 2\lambda(1,1)^t \notin F_1$ y $AF_2 \not\subseteq F_2$ pues $A(2\lambda, \lambda)^t = (\lambda, \lambda)^t = \lambda(1,1)^t \notin F_2$, por lo que ninguna cara no trivial de C es A-invariante.

Por lo tanto, A es irreducible.

2.5.3. El siguiente ejemplo muestra una función que es irreducible pero no es fuertemente irreducible.

Sean $V = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$, $V^+ = \{v \in V \mid \forall i\; v_i \geq 0\}$ cono (generador de V), $\| v \| = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n^2}$ y $f : V \longrightarrow V$ lineal, definida por $e_i \mapsto \sum_{j=1}^{i+1} e_j$, $f((v_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (\sum_{j\geq i} v_j)_{i\in\mathbb{N}} = (\sum_{j\geq 1} v_j, \sum_{j\geq 1} v_j, \sum_{j\geq 2} v_j, ...) \in V$. Entonces f es irreducible pero no fuertemente irreducible.

Demostración: **1.-** Los vectores extremales de V^+ son $\{\lambda e_i \mid i \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, (donde $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es la base canónica), es decir, los rayos extremales= $\{\mathbb{R}^+ e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

$\supseteq$) e_i es extremal pues si $e_i = v + w$ entonces $\forall j \neq i,\ v_j + w_j = 0$ pero $v, w \in V^+$ (entonces $v_j, w_j \geq 0$) entonces $\forall j \neq i\ v_j = 0 = w_j$. Entonces $v, w \in \mathbb{R}^+ e_i$.

$\subseteq$) Sea $\bar{0} \neq v$ vector extremal de V^+.

P.D. $\exists i \in \mathbb{N}$ tal que $v \in \mathbb{R}^+ e_i$.

$v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n e_n$, $v_n \geq 0 \forall n$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $v_j \neq 0$ y $\forall i < j\ v_i = 0$. Entonces $v = v_j e_j + \sum_{n>j} v_n e_n$, con $v_j e_j$, $\sum_{n>j} v_n e_n \in V^+$, entonces como v es extremal $e_j \in \mathbb{R}^+ v$ por lo que $v \in \mathbb{R}^+ e_j$.

2.- En (I.2.5.6) se prueba que $F \trianglelefteq V^+$ si y sólo si $\exists I \subseteq \mathbb{N}$ tal que $F = F_I = \{v \in V^+ \mid v_i = 0\ \forall i \notin I\}$.

Observemos que si $\bar{0} \neq F \vartriangleleft V^+$ entonces $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{N}$.

Observación: Sea $F = F_I \trianglelefteq V^+$. Sea $v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in F$ entonces $\forall i \in \mathbb{N}$ tal que $v_i \neq 0$, se tiene que $e_i \in F$. Es decir, $F = con\{e_i \mid i \in I\}$.

Sea $v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in F$. Supongamos que $v_i \neq 0$. Entonces $\bar{0} \leq v_i e_i \leq v$. Como $F \trianglelefteq V^+$, $v_i e_i \in F$, entonces $e_i \in F$.

3.- Sea $f : V \longrightarrow V$ lineal, definida por $e_i \mapsto \sum_{j=1}^{i+1} e_j$, $f((v_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (\sum_{j\geq i} v_j, \sum_{j\geq 1} v_j, \sum_{j\geq 2} v_j, ...) \in V$.

3.a) $f(V^+) \subseteq V^+$ (pues si $v \in V^+$ entonces $\forall j \in \mathbb{N}\ v_j \geq 0$ entonces $\infty > \sum_{j\geq i} v_j \geq 0$).

3.b) P.D. f es irreducible.

P.D. $\forall \{\bar{0}\} \neq F \vartriangleleft V$, $f(F) \nsubseteq F$ (es decir, ninguna cara no trivial de V^+ es f-invariante).

Supongamos $\exists\ \{\bar{0}\} \neq F \lhd V$ tal que $f(F) \subseteq F$. Como $\{\bar{0}\} \neq F \lhd V^+$ entonces (por (2), F no trivial) $\exists \emptyset \neq I \subseteq \mathbb{N}$. $F = F_I = con(\{e_i \mid i \in I\})$.

Caso 1. Si $1 \in I$, entonces sea $j \in \mathbb{N} \setminus I$ tal que $\forall i < j,\ i \in I$. Entonces (por $1 \leq j-1$, $f(F) \subseteq F \lhd V^+$) se tiene que $f(e_{j-1}) = \sum_{i=1}^{j} e_i \in F$, $e_j \in V^+$ y $\sum_{i=1}^{j} e_i - e_j = \sum_{i=1}^{j-1} e_i \in V^+$, entonces como F es cara se tiene $e_j \in F$ contradicción $(j \in \mathbb{N} \setminus I)$.

Entonces $f(F) \not\subseteq F$.

Caso 2. Supongamos que $1 \notin I$. Como $\emptyset \neq I$, sea $i \in I$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\forall j < i,\ j \notin I$. Ahora $F \ni f(e_i) = \sum_{j=1}^{i+1} e_j$ (pues $f(F) \subseteq F$) entonces $\forall j = 1, ..., i+1$, $e_j \in F$ por la observación. En particular $e_1 \in F$ entonces $1 \in I$ contradicción. $(1 \notin I)$.

Por lo tanto, f es irreducible.

4.- P.D. f no es fuertemente irreducible.

Demostramos en (I.1.10) que $intV^+ = \emptyset$. Por lo tanto, f no es fuertemente irreducible. ■

Teorema 2.6. *Sea C un cono sólido y $K = \mathbb{R}$. Si $A > 0$ y $x \gg \bar{0}$, entonces $Ax > \bar{0}$. (i.e., $Ax \in C \setminus \{\bar{0}\}$).*

Demostración: Supongamos $A > 0$, $x \gg \bar{0}$ y $Ax = \bar{0}$. Por (III.1.10), (C es cara, $x \in intC$) se tiene $C = \varphi(x)$, entonces por (II.4.11(iii)), para toda $y \in C$ existe $\alpha > 0$ tal que $\bar{0} \leq \alpha y \leq x$. Entonces $\bar{0} \leq \alpha Ay \leq Ax = \bar{0}$, la primer desigualdad, se tiene ya que $A > 0$, y la segunda porque $\bar{0} \leq x - \alpha y$ entonces $\bar{0} \leq Ax - \alpha Ay$.

Por lo tanto, $Ay = \bar{0}$ entonces $A(C) = \{\bar{0}\}$ y como C contiene una base de V (por ser sólido). Así $A = 0$ contradicción ya que $A > 0$. Por lo que $Ax > \bar{0}$.

■

Lema 2.7. *Sean $V = \mathbb{R}^n$, $C \subseteq V$ cono y $A : V \longrightarrow V$ lineal.*

a) Supongamos que $A \geq 0$ irreducible. Entonces $\forall \lambda > 0$, $\lambda A \geq 0$ es irreducible.

b) Supongamos que $A \geq 0$ fuertemente irreducible. Entonces $\forall \lambda > 0$, $\lambda A \geq 0$ es fuertemente irreducible.

Demostración: **a)** Como $A \geq 0$ irreducible y para toda $F \trianglelefteq C$, $\lambda F = F$, entonces λA es irreducible.

b) P.D. λA es fuertemente irreducible.

Sea $A \geq 0$ fuertemente irreducible. Sea $x > \bar{0}$, entonces existe $p = p(x)$ tal que $(I + A)^p x \gg \bar{0}$. Sin pérdida de generalidad, $\lambda \neq 1$.

Caso 1. Si $\lambda > 1$. Entonces $(I + \lambda A)^p x \geq (I + A)^p x \gg \bar{0}$, pues $(I + \lambda A)^p x = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} \lambda^n A^n x$, entonces $(I + \lambda A)^p x - (I + A)^p x = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} (\lambda^n - 1) A^n x \geq \bar{0}$ pues $\lambda^n - 1 \geq 0$.

Caso 2. $0 \leq \lambda < 1$. Recordemos por (I.3.6.(2)), si $z \gg \bar{0}$, entonces para toda $\mu > 0$, $\mu z \gg \bar{0}$. Análogo al caso 1, $(I + \lambda A)^p x > \lambda^p (I + A)^p x \gg \bar{0}$, pues $(I + \lambda A)^p x - \lambda^p (I + A)^p x = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} (\lambda^n - \lambda^p) A^n x \geq \bar{0}$, pues $\lambda^n - \lambda^p \geq 0$. ∎

Observación 2.8. Si C es el **cono positivo** en $\mathbb{R}^n$ y $A \in Hom(V, V)$. Veamos a A como la matriz de la función que define asociada a $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces $A \geq 0$ si y sólo si $a_{ij} \geq 0$, $\forall i, j = 1, ..., n$. (es decir, C es A-invariante si y sólo si $a_{ij} \geq 0$, $\forall i, j = 1, ..., n$.)

Demostración: $\Longrightarrow$) Por hipótesis $AC \subseteq C$ (es decir, para toda $x \in C$, $Ax \in C$). Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

Para e_i se tiene $Ae_i = (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni})^t \in C$, $\forall i, j = 1, ..., n$. Entonces $a_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j = 1, ..., n$.

$\Longleftarrow$) P.D. $\forall x \in C$, $Ax \in C$.

Por hipótesis $a_{ij} \geq 0$ $\forall i, j = 1, ..., n$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sea $e_i \in \mathcal{C}$, entonces $Ae_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})^t$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Pero $(a_{1i}, \ldots, a_{ni}) = a_{1i}e_1 + \cdots + a_{ni}e_n \in C$, entonces para toda $x \in C$, $Ax \in C$.

Por lo tanto, C es A-invariante ■

Observación 2.9. Sea $V^+ \subseteq \mathbb{R}^n$. A es irreducible si y sólo si no existe una matriz de permutación P (esto es, P se obtiene de I_n por medio de una permutación de columnas y la misma permutación en los renglones) tal que $P^{-1}AP$ tenga la forma

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

donde B_{11}, B_{22} son matrices cuadradas.

Demostración: 1) Recordemos que las caras propias de V^+ son las $F_J = \{(v_i) \in V^+ \mid v_i = 0 \; \forall i \notin J\}$, $\emptyset \neq J \subset \{1, \ldots, n\}$.

2) Recordemos que una matriz de permutación P es composición de matrices $P(i,j)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, donde

$$P(i,j) = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & I & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & I \end{bmatrix},$$

(es decir,

$$P(i,j)_{k\ell} = \begin{cases} I_{k\ell} & (k,\ell) \notin \left\{ \begin{array}{c} (i,i) \\ (j,j) \\ (i,j) \\ (j,i) \end{array} \right\} \\ 0 & (k,\ell) = (i,i) \\ 0 & (k,\ell) = (j,j) \\ 1 & \{k,\ell\} = \{i,j\} \end{cases}$$

donde, I es la matriz identidad.

Observemos también que $P^{-1}(i,j) = P(i,j)$.

$\Longrightarrow$) Sea A irreducible.

Supongamos que $\exists\, P$ matriz de permutación tal que

$$P^{-1}AP = B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

donde B_{11}, B_{22} son matrices cuadradas, de $\ell \times \ell$ y $(n-\ell) \times (n-\ell)$ respectivamente. Entonces, $A = PBP^{-1}$.

Observemos que $\forall i$ $P(e_i) = e_h$, para alguna $h \in \{1,...,n\}$. Entonces, supongamos que B_{11} es una matriz de $\ell \times \ell$, $1 \leq \ell \leq n$.

Sea $J := \{i \in \{1,...,n\} \mid P^{-1}(e_i) = e_h,\ \ell+1 \leq h \leq n\} = \{1 \leq i \leq n \mid e_i = P(e_h),\ \ell+1 \leq h \leq n\}$, $\emptyset \neq J \subsetneq \{1,...,n\}$, pues P^{-1} es invertible. (De hecho, $\#J = n - \ell$).

Definamos $F := \{v \in V^+ \mid v_i = 0\ \forall i \notin J\}$, como $\emptyset \neq J \subsetneq \{1,...,n\}$ entonces $F \lhd V^+$.

P.D. $A(F) \subseteq F$ (lo que daría una contradicción a que A es irreducible).

Sea $v \in F$ entonces $v = \sum_{i\in J} \lambda_i e_i$, $\lambda_i \geq 0$, de donde $A(v) = \sum_{i\in J} \lambda_i A(e_i)$. Basta demostrar que $\forall i \in J$, $A(e_i) \in F$.
Para $\ell+1 \leq h \leq n$, $A(e_i) = (PBP^{-1})(e_i) = PB(e_h)$ donde $P^{-1}(e_i) = e_h$. Entonces $A(e_i) = PB(e_h) = \sum_{j=\ell+1}^{n} B(j,h)P(e_j) = \sum_{t(j)\in J,\, P(e_j)=e_{t(j)}} B(j,h)e_{t(j)} \in F$ (pues $\ell+1 \leq j \leq n$ y $P(e_j) = e_{t(j)}$ entonces por definición de J, $t(j) \in J$).

Por lo tanto, $A(F) \subseteq F$, $\{\bar{0}\} \neq F \lhd V^+$ contradicción (pues A es irreducible).

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\nexists\, P$ matriz de permutación tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

donde B_{11}, B_{22} son matrices cuadradas.

P.D. A es irreducible.

Supongamos que A no es irreducible entonces $\exists\{\bar{0}\} \neq F \lhd V^{+}$ tal que $A(F) \subseteq F$ entonces (por (1)) $\exists\emptyset \neq J \subsetneq \{1, ..., n\}$ tal que $F = F_J$. Sea $\ell > 1$ tal que $J = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-\ell}\}$. Entonces $\exists h$ tal que $i_1 < i_2 < \cdots < i_h \leq \ell < \ell + 1 \leq i_{h+1} < \cdots < i_{h-\ell}$.

Tomemos $\{j_1 < j_2 < \cdots < j_h\} = \{\ell+1, ..., n\} \setminus \{i_{h+1}, ..., i_{n-\ell}\}$ (es decir. $\{j_1, ..., j_h\} \cup \{i_{h+1}, ..., i_{n-\ell}\} = \{\ell+1, ..., n\}$)

Definamos $P = P(i_1 j_1) \cdots P(i_h j_h)$. De hecho, $P^{-1} = P$. Basta ver que para $t \neq q \quad P(i_t j_t)P(i_q j_q) = P(i_q j_q)P(i_t j_t)$ y esto sucede pues $\{i_t, j_t\} \neq \{i_q, j_q\} \quad \forall t \neq q$.

$$\forall 1 \leq h \leq n \quad (P(i_t j_t)P(i_q j_q))(e_h) = \left\{ \begin{array}{ll} e_h & h \notin \{i_q, i_t, j_q, j_t\} \\ e_{i_q} & h = j_q \\ e_{i_t} & h = j_t \\ e_{j_q} & h = i_q \\ e_{j_t} & h = i_t \end{array} \right\} = (P(i_q j_q)P(i_t j_t))(e_h).$$

Ahora demostremos,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

donde B_{11} matriz de $\ell \times \ell$. B_{22} matriz de $(n-\ell) \times (n-\ell)$.

Es decir. P.D. $\forall 1 \leq r \leq \ell$. $\forall \ell + 1 \leq s \leq n$. $(P^{-1}AP)_{rs} = 0$.

Sean $1 \leq r \leq \ell$, $\ell + 1 \leq s \leq n$.

$(P^{-1}AP)_{rs} = [(P^{-1}AP)(\epsilon_s)]_r = [(P^{-1}A)(\epsilon_s)]_r$.

donde

$$\epsilon_t = \begin{cases} e_s & s \in J \\ e_{i(s)} & i(s) \in \{i_1, ..., i_h\} \text{ si } s \notin J \end{cases}$$

Como $e_t \in F$ en ambos casos, entonces como $A(F) \subseteq F$, $\sum_{m \in J} \lambda_m e_m = A(\epsilon_t) \in F$. Entonces

$[(P^{-1}A)(e_s)]_r = [P^{-1}(\sum_{m \in J} \lambda_m \epsilon_m)]_r = [\sum_{m \in J} \lambda_m P^{-1}(\epsilon_m)]_r$

$= (\sum_{m \in J} \lambda_m \epsilon_{q(m)})_r =_{1 \leq r \leq \ell} 0 \ \forall m \in J \ P^{-1}(\epsilon_m) = \epsilon_{q(m)}$ con $\ell + 1 \leq q(m) \leq n$.

∎

Ejemplo 2.9.1. Observemos que (2.9) no pasa aún para subconos propios de V^+, por ejemplo, sean $C = con((1,2),(2,1))$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces $A(C) \subseteq C$ y A es C-irreducible, pero la matriz de permutación

$$P = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que la última parte nos dice que A no es V^+-irreducible. De hecho, $F_1 = con(e_1)$ cara de V^+ entonces $Ae_1 = \bar{0} \in F_1$, es decir, F_1 es A-invariante.

Lema 2.10. *Sea C un cono sólido en V un K-espacio vectorial. Si A es fuertemente irreducible entonces A es irreducible.*

Demostración: Supongamos que A es fuertemente irreducible. Sea $F \lhd C$, $F \neq \{\bar{0}\}$. También supongamos que $AF \subseteq F$. Sea $\bar{0} \neq x \in F$, como A es fuertemente irreducible existe $p \in \mathbb{Z}^+$ tal que $(I + A)^p x \gg \bar{0}$. Pero por (III.1.10), $\varphi((I + A)^p x) = C$. Ahora de $AF \subseteq F$ tenemos $(I+A)^p x \in F$, de donde $\varphi((I+A)^p x) \subseteq F$. Por lo que $F = C$ contradicción, ya que $F \lhd C$. Así A es irreducible. ∎

Observación-ejemplo 2.10.1. El lema anterior no se tendría si no pidiéramos $A \geq 0$ en la definición de fuertemente irreducible como lo muestra el siguiente ejemplo:

Sean $C \subseteq \mathbb{R}^2$, $v, w \in \mathbb{R}^2$, donde $v = (2,1)$, $w = (1,2)$, $C = \{\lambda v + \mu w | \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \geq 0\}$.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A no deja invariante a C, $x = (2,1)^t \in C$, $Ax \notin C$. Pero sí cumple que $\forall x \geq \bar{0}$, $\exists p = p(x) \in \mathbb{Z}^+$ tal que $(I + A)^p x \gg \bar{0}$. Sea

$$A' = A + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

para $x = (x_1, x_2)^t \in C$, se tiene $(A + I)x = A'x = (x_1, x_1)^t = x_1(1,1)^t \in C$. Además, $(x_1, x_1) \gg \bar{0}$ (es decir, $(x_1, x_1) \in intC$).

Es decir, para toda $x \in C$, y $p = 1$ se tiene $(I + A)^p x \gg \bar{0}$. Es más, $(A + I)^n = A + I$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, $(I + A)^p x \gg \bar{0}$ para toda $p \in \mathbb{Z}^+$.

Teorema 2.11. *Sea C un cono sólido en el K-espacio vectorial V. Supongamos que C tiene CCA en caras. Si $A \geq 0$, entonces A es irreducible si y sólo si A es fuertemente irreducible.*

Demostración: $\Longleftarrow$) Por lema (2.10).

$\Longrightarrow$) P.D. A es fuertemente irreducible.

P.D.: Para $x > \bar{0}$ existe $p \in \mathbb{Z}^+$ tal que $(I + A)^p x \gg \bar{0}$.

Caso a. Sea $x \gg \bar{0}$. $(I + A)x = Ax + x \geq x \gg \bar{0}$, $Ax \geq \bar{0}$ ya que A deja invariante a C. Por lo tanto, para $p = 1$ se cumple.

Caso b. Si $x \in \partial C$.

Definamos $F_\ell := \varphi((I + A)^{\ell-1}x)$, $F_0 := \{\bar{0}\}$. Sea $(I + A)^0 := I$.

P.D. $F_0 \trianglelefteq F_1 \trianglelefteq \cdots$ una cadena de caras. Demostremos primero que $F_1 = \varphi(x) \trianglelefteq \varphi((I + A)x) = F_2$. Sea $y \in \varphi(x)$ entonces por (II.4.11.(ii)), existe $\beta > 0$ tal que $\bar{0} \leq y \leq \beta x$.

Por otro lado, $\beta x \leq (I + A)(\beta x)$ pues $\bar{0} \leq \beta(Ax)$.

Por lo tanto, $\bar{0} \leq y \leq \beta x \leq \beta(I + A)x$. Entonces $y \in \varphi((I + A)x)$.

Si $\ell \geq 1$

P.D. $\varphi((I + A)^\ell x) \trianglelefteq \varphi((I + A)^{\ell+1}x)$.

Sea $y \in \varphi((I + A)^\ell x)$, entonces por (II.4.11.(ii)), existe $\beta > 0$, $\bar{0} \leq y \leq \beta(I + A)^\ell x$.

Por otro lado, $(I + A)^\ell x \leq (I + A)^{\ell+1}x$ pues:

$$\bar{0} \leq (I+A)^{\ell}Ax = (I+A)^{\ell}((I+A)x - x) = (I+A)^{\ell+1}x - (I+A)^{\ell}x$$

entonces $\bar{0} \leq y \leq \beta(I+A)^{\ell}x \leq \beta(I+A)^{\ell+1}x$.

Por lo tanto, $F_\ell \trianglelefteq F_{\ell+1}$, es decir, $F_0 \trianglelefteq F_1 \trianglelefteq \cdots$ es una cadena de caras, pero por hipótesis C tiene CCA, así existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_0 \trianglelefteq F_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq F_n$ y $\forall m \geq n$, $F_m = F_n$, es decir, $F_n = \varphi((I+A)^{n+1}x)$.

Sea $y \in F_n$, entonces $Ay \leq (I+A)y \in F_{n+1} = F_n$ (por definición de F_ℓ). Así, $AF_n \subseteq F_n$ y $F_n = C$, A es irreducible y $F_n \neq \bar{0}$ entonces $F_n = C$, entonces por (1.12) tenemos que $(I+A)^{n+1}x \gg \bar{0}$.

Por lo tanto, A es fuertemente irreducible.

■

Ejemplo 2.12. Sean $V = \mathbb{R}^3$, $C = V^+ \subseteq \mathbb{R}^3$. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Las caras de V^+ son: $F_0 = \{\bar{0}\}$, $F_1 = con(e_1)$, $F_2 = con(e_2)$, $F_3 = con(e_3)$, $F_4 = con(e_1, e_2)$, $F_5 = con(e_1, e_3)$, $F_6 = con(e_2, e_3)$, $F_7 = V^+$.

P.D. A es irreducible (fuertemente irreducible.)

C tiene condición de cadena ascendente (CCA), y por corolario (II.6.9), sabemos que la longitud de cadena es menor o igual a $n = 3$.

$Ae_1 = (1,2,0)^t \notin F_1$, $Ae_2 = (0,1,1)^t \notin F_2$, $Ae_3 = (3,0,2)^t \notin F_3$. Sea $x \in F_4$, $Ax = A(\lambda e_1 + \mu e_2) = \lambda Ae_1 + \mu Ae_2 = (\lambda, 2\lambda + \mu, \mu)^t \notin F_4$. Para $x \in F_5$, $Ax = A(\lambda e_1 + \mu e_3) = \lambda Ae_1 + \mu Ae_3 = (\lambda + 3\mu, 2\lambda, 2\mu)^t \notin F_5$, por último, sea $x \in F_6$ entonces $Ax = A(\lambda e_2 + \mu e_3) = \lambda Ae_2 + \mu Ae_3 = (3\mu, \lambda, \lambda + 2\mu)^t \notin F_6$.

De este modo A es irreducible. Además para $p = 2$ se tiene $(I+A)^2 x \gg \bar{0}$, $x > \bar{0}$ (es decir, A es fuertemente irreducible).

$$(I+A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (I+A)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 15 \\ 8 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ahora, sea $x > \bar{0}$, $(I + A)^2 x = (4x_1 + 3x_2 + 15x_3, 8x_1 + 4x_2 + 6x_3, 2x_1 + 5x_2 + 9x_3)^t \gg \bar{0}$, que es lo que queríamos.

Teorema 2.13. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y C un cono sólido en V. Si C tiene longitud de cadena N y $A \geq 0$, entonces A es irreducible si y sólo si $(I + A)^{N-1} \gg \bar{0}$.*

Demostración: $\Longleftarrow$) Por hipótesis $(I + A)^{N-1} \gg \bar{0}$, es decir A es fuertemente irreducible ya que para toda $x > \bar{0}$, $(I + A)^{N-1}x \gg \bar{0}$, entonces por (2.10) se tiene que A es irreducible.

$\Longrightarrow$) Se sigue de la demostración de (2.11), con $F_\ell := \varphi((I+A)^{\ell-1}x)$, $F_0 := \{\bar{0}\}$, $(I + A)^0 := I$. Donde la cadena de caras es $\{\bar{0}\} = F_0 \trianglelefteq F_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq F_N$ y $\forall m \geq N$, $F_m = F_N = \varphi((I + A)^{N-1}x) = C$. ∎

Nuestro siguiente resultado nos da una equivalencia entre irreducibilidad y fuertemente irreducible, si $A \geq 0$ es continua. Para demostrar esto se da lo siguiente.

Lema 2.14. *Si $F \subsetneq C$ subcono, $F \subseteq \partial C$. Entonces $\varphi(F) \subseteq \partial C$.*

Demostración: $\varphi(F) = \{y \in V \mid \exists\, z \in F,\ \bar{0} \leq y \leq z\}$.

Supongamos $\exists\, y \in \varphi(F)$, $y \gg \bar{0}$.

Sea $z \in F$ tal que $\bar{0} \leq y \leq z$ de donde $\bar{0} \ll y \leq z$ pues $y \gg \bar{0}$, entonces por (I.3.9(b)) $z \gg \bar{0}$ contradicción $(F \subseteq \partial C)$. ∎

Lema 2.15. *Si $S \subseteq C$ entonces $\varphi(S) = \varphi(conS)$.*

Demostración: Por definición $\varphi(S) = \{y \in V \mid \exists\, z \in con(S), \bar{0} \leq y \leq z\}$, entonces $\varphi(S) = \varphi(con(S))$, (pues $con(con(S)) = con(S)$). ∎

Teorema 2.16. *Sean $C \subsetneq V$ cono sólido, $A \geq 0$, continua. Entonces A es irreducible si y sólo si A es fuertemente irreducible.*

Demostración: $\Longleftarrow$) Por lema (2.10).

$\Longrightarrow$) Sea $x \in C \setminus \{\bar{0}\}$.

P.D. $\forall x \, \exists n \geq 1$ tal que $(I+A)^n x \gg \bar{0}$.

Caso 1. Si $x \gg \bar{0}$ entonces por (I.3.9(a)), $\forall n \; \bar{0} \ll \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i x = (I+A)^n x$.

Caso 2. Supongamos que $x \in \partial C$.

Si $\exists n$ tal que $(I+A)^n x \gg \bar{0}$, ya terminamos.

Supongamos $\forall n \geq 0$, $(I+A)^n x \in \partial C$.

a) P.D. $F := con(\{A^i x\}_{i \geq 0}) \subseteq \partial C$.

Observación: $\forall i \geq 0 \; A^i x \in \partial C$, pues si $\exists i \geq 1$, $A^i x \gg \bar{0}$ entonces $(I+A)^i x = A^i x + \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} A^i x \gg \bar{0}$ por (I.3.9(a)), contradicción.

Supongamos $\exists z \in con(\{A^i x\}_{i \geq 0}) = F$, $z \gg \bar{0}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $z = \sum_0^n \lambda_i A^i x \gg \bar{0}$, (pues $z = \lim_{i \to \infty} z_i$, z_i combinaciones lineales positivas de $\{A^i x\}_{i \geq 0}$. Como $z \gg \bar{0} \; \exists r > 0$, $B_r(z) \subseteq intC$ entonces $\exists N$, $i \geq N \; z_i \in B_r(z) \subseteq intC$).

También sin pérdida de generalidad $\forall 0 \leq i \leq n$, $\lambda_i > 0$ (si no, como $z \gg \bar{0}$, entonces si $\lambda = 0$, $\exists \mu_i > 0$ tal que $z + \mu z_i \gg \bar{0}$).

Sea $\alpha := \sup_{0 \leq i \leq n} \{\alpha_i\} > 0$, donde $\alpha_i := \frac{\lambda_i}{\binom{n}{i}} > 0$, $\binom{n}{i} \geq 1$, $\binom{n}{0} = 1$ (i.e., $\alpha \binom{n}{i} = \lambda_i$).

Entonces $\bar{0} \ll \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A^i x \leq \alpha (\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i x)$ pues $\sum_{i=0}^{n} (\alpha \binom{n}{i} - \lambda_i) A^i x \geq 0$, $\alpha \binom{n}{i} - \lambda_i \geq \alpha_i \binom{n}{i} - \lambda_i = 0$, entonces $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i x = \sum_{i=0}^{n} (I+A)^n x \gg \bar{0}$ contradicción ($(I+A)^n x \in \partial C$).

Por lo tanto, $con(\{A^i x\}_{i \geq 0}) \subseteq \partial C$.

b) Por lemas (2.14, 2.15) tenemos: $\varphi(\{A^i x\}_{i \geq 0}) = \varphi(con\{A^i x\}_{i \geq 0}) \subseteq \partial C$.

Entonces (pues C es sólido), $\varphi(\{A^i x\}_{i \geq 0}) \lhd C$.

P.D. $A(\varphi(\{A^i x\}_{i \geq 0})) \subseteq \varphi(\{A^i x\}_{i \geq 0})$, (lo cual daría una contradicción a que A es fuertemente irreducible).

Sea $y \in \varphi(\{A^i x\}_{i \geq 0})$ entonces $\exists z \in con(\{A^i x\}_{i \geq 0})$ tal que $\bar{0} \leq y \leq z$ por lo que $\bar{0} \leq Ay \leq Az$ (pues $z - y \geq \bar{0}$, $A \geq 0$ entonces $A(z-y) \geq \bar{0}$).

Por otro lado, $z = \lim_{i \to \infty} z_j$, z_j es combinación lineal positiva de $\{A^i x\}_{i \geq 0}$.

Como A es continua entonces $Az = \lim_{j \to \infty} Az_j$. Az_j combinación lineal positiva de $\{A^i x\}_{i\geq 0}$.

Por lo tanto, $Az \in con(\{A^i x\}_{i\geq 0})$.

Entonces $Ay \in \varphi(\{A^i x\}_{i\geq 0})$.

Por lo tanto, $A(\varphi(\{A^i x\}_{i\geq 0})) \subseteq \varphi(\{A^i x\}_{i\geq 0}) \lhd C$ contradicción (A es irreducible).

Por lo tanto, $\forall x\ \exists n$ tal que $(I + A)^n x \gg \tilde{0}$.

Por lo tanto A es fuertemente irreducible. ∎

2.16.1. Del teorema anterior, también se deduce el siguiente resultado (ver (II.6.8) y (2.13)).

Corolario : *Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $C \subsetneq V$ cono sólido y $A \geq 0$. Entonces A es irreducible si y sólo si A es fuertemente irreducible.*

Demostración: Toda función lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita es continua, ver (A.3.9). ∎

2.17. Ahora compararemos las definiciones de matriz irreducible, la dada por Vandergraft (a la cual denotaremos por V-irreducible) y nuestra definición de irreducibilidad.

Definición . *Sean V de dimensión finita, $C \subsetneq V$ cono sólido. La matriz $A \geq^C 0$ es* **V-irreducible** *si A no tiene V-caras propias A-invariantes.*

Lema 2.18. *Sean V de dimensión finita, $C \subsetneq V$ cono sólido y $A \geq 0$. Si A es V-irreducible entonces A es irreducible.*

Demostración: Sean $A \geq 0$ y $F \lhd C$ cara propia de C. Por (II.5.7), F es V-cara propia de C. Entonces (por ser A, V-irreducible), $A(F) \not\subseteq F$.

Por lo tanto, A es irreducible. ∎

Veamos ahora que si V es de dimensión finita y $C \subsetneq V$ cono sólido, ambas definiciones de irreducibilidad son equivalentes. Para esto, necesitamos del siguiente

Lema 2.19. *Sea V un K-espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita). Sean $C \subseteq V$ cono, $S \subseteq C$ y $A \geq 0$, A continua.*

Si $AS \subseteq S$ entonces $A(\varphi(S)) \subseteq \varphi(S)$.

Demostración: P.D. $A(\varphi(S)) \subseteq \varphi(S)$.

Recordemos de (II.4.10), que $\varphi(S) = \{y \in V \mid \exists\, z \in con(S), \bar{0} \leq y \leq z\}$.

1. $A(con(S)) \subseteq con(S)$. Denotemos por $\mathcal{C}_S := \{\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i) \mid n \in \mathbf{N}, \forall i\, \beta_i \geq 0, x_i \in S\}$ el conjunto de combinaciones lineales positivas de elementos de S.

Sea $z \in con(S)$. Entonces $\exists (z_i)_{i \in \mathbf{N}} \subseteq \mathcal{C}_S$ tal que $z = \lim_{i \to \infty} z_i$. Como $A(S) \subseteq S$ y A lineal, se tiene que $Az_i \in \mathcal{C}_S$ entonces por ser A continua $Az = \lim_{i \to \infty} Az_i \in con(S)$.

2) $A(\varphi(S)) \subseteq \varphi(S)$.

Sea $y \in \varphi(S)$ entonces $\exists\, z \in con(S)$, $\bar{0} \leq y \leq z$ de donde $\bar{0} \leq Ay \leq Az \in con(S)$ pues $A \geq 0$ entonces $Ay \in \varphi(S)$.

Por lo tanto, $A(\varphi(S)) \subseteq \varphi(S)$. ∎

Teorema 2.20. *Sea V de dimensión finita. Sean $C \subseteq V$ un cono sólido y $F \subseteq C$ una V-cara. Entonces:*

a) Si $F \subseteq C$ es una V-cara propia entonces $F \subseteq \varphi(F) \lhd C$.

b) $A \geq 0$, $AF \subseteq F$ entonces $A(\varphi(F)) \subseteq \varphi(F)$. (Observemos que esto vale aunque C no sea sólido, ver (2.19)).

c) Si $A \geq 0$ irreducible entonces A es V-irreducible. Por lo tanto, por (2.18) A es irreducible si y sólo si A es V-irreducible.

Demostración: a) Como F es V-cara propia, entonces $F \subseteq \partial C$, por definición (II.5.3.)

Supongamos que $\varphi(F) = C$. Sea $y \in intC$, entonces $\exists\, z \in F$ tal que $\bar{0} \ll^C y \leq z$. Por (I.3.9.(b)), $\bar{0} \ll^C z$, contradicción ($F \subseteq \partial C$). Por lo tanto, $\varphi(F) \lhd C$.

b) Por el lema anterior (2.19).

c) Sea $A \geq 0$ irreducible.

P.D. A es V-irreducible.

Sea $F \subseteq C$ una V-cara propia entonces por (a), $\varphi(F) \lhd C$.

P.D. F no es A-invariante.

Si $AF \subseteq F$ entonces por (b), $A(\varphi(F)) \subsetneq \varphi(F)$ contradicción (A es irreducible). Por lo tanto, $AF \not\subseteq F$.

Por lo tanto, A es V-irreducible. ■

Capítulo IV. Teoría de Perron-Frobenius.

En el presente capítulo desarrollaremos la teoría que relaciona a los conos sólidos A-invariantes con los valores propios de A. Veremos algunos resultados del tipo del Teorema de Perron-Frobenius (1.1), varios de los resultados son ciertos también para espacios de dimensión infinita (ver sección 2).

§1. Teoremas importantes.

Iniciaremos dando las siguientes definiciones básicas, que usaremos a lo largo del capítulo.

Definición . *Sean V un K-espacio vectorial, $A : V \longrightarrow V$ función lineal. Los* **valores propios** *de A, son los $\lambda \in K$ para los que $\exists \bar{0} \neq v \in V$ tal que $Av = \lambda v$. Entonces, decimos que v es un* **vector propio** *asociado a λ.*

Empezaremos recordando el teorema de Perron-Frobenius y el de Birkhoff-Vandergraft.

Sean $V = \mathbb{R}^n$ y $A : V \longrightarrow V$ lineal. Definamos el **radio espectral** $\rho(A) := \max\{| \lambda | ; \lambda \text{ es valor propio de } A\}$.

Teorema 1.1. *(***Perron-Frobenius***)[Gm]. Si $A = (a_{ij})$ $1 \leq i, j \leq n$ es una matriz con $a_{ij} > 0$ $\forall i, j$, entonces A tiene un vector propio $v = (v_i)_{i=1}^n$, $v_i > 0$ con valor propio $\rho > 0$. donde ρ es el radio espectral de A.*

Teorema 1.2. *(***Birkhoff-Vandergraft***)[Bi, V]. Sea $V = \mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Sea $C \subseteq V$ un cono sólido y $A \geq 0$. Entonces $\exists\, v \neq \bar{0}$, $v \in C$ tal que $Av = \rho v$, donde ρ es el radio espectral de A.*

Aquí demostraremos parte de (1.2), usando el **teorema del punto fijo.**

Teorema 1.3. *(***Teorema del punto fijo***). Sea $V = \mathbb{R}^n$, $B^n = \{x \in V \mid \| x \| \leq 1\}$. Cada función continua $f : B^n \longrightarrow B^n$, tiene un punto fijo, (es decir, $\exists\, x \in B^n$ tal que $f(x) = x$).*

Teorema 1.3.1. *Sean $n \geq 1$, $C \subsetneq V = \mathbb{R}^n$ un cono sólido y $A : V \longrightarrow V$ lineal tales que $A(C) \subseteq C$. Entonces existen $\lambda \geq 0$, $\bar{0} \neq v \in C$ tales que $A(v) = \lambda v$.*

Demostración: Si $A = 0$, entonces $\rho(A) = 0$ es valor propio de A y $\forall v \in C$, $Av = \bar{0}$.

Sea $A \neq 0$.

Caso 1. $n = 1$, $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}v$, $v \neq \bar{0}$ (pues C es sólido). Como $A(C) \subseteq C$ entonces $A(v) = \lambda v$ para alguna $\lambda \geq 0$. Por lo tanto, $\lambda = \rho(A)$ es valor propio de A y $v \in C$ tal que $A(v) = \lambda v$.

Caso 2. $n \geq 2$. $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $A(C) \subsetneq C$.

Tomemos $C' := \{v \in C \mid \| v \| = 1\}$. Entonces

0.- Si existe $v \in C'$ tal que $A(v) = \bar{0}$ entonces v es vector propio de A.

1.- Supongamos $\forall z \in C'$, $A(z) \neq \bar{0}$, definimos $f : C' \longrightarrow C'$, $z \longmapsto \frac{A(z)}{\|A(z)\|}$, f es continua.

2.- Observemos que $C' \overset{\varphi}{\cong} B^{n-1}$ (homeomorfismo), $B^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \| x \| \leq 1\}$.

Por lo tanto, $B^{n-1} \xrightarrow{\varphi^{-1}} C' \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{\varphi} B^{n-1}$ continua entonces (por el teorema del punto fijo) $\exists w \in B^{n-1}$ tal que $\varphi f \varphi^{-1}(w) = w$. Sea $v := \varphi^{-1}(w)$, entonces $\frac{A(v)}{\|A(v)\|} = f(v) = v$, por lo tanto, $A(v) = \| A(v) \| v$ donde $v \in C' \subseteq C$ es vector propio de A. ∎

Para ver la demostración completa del teorema (1.2) recomendamos [P,T2].

Ahora enunciaremos el teorema principal de este capítulo, el cual es una generalización del teorema de Birkhoff-Vandergraft.

Teorema 1.4. *(**Barker-Schneider**)[BS]. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita). Sean $C \subsetneq V$ un cono sólido y $A : V \longrightarrow V$ un operador fuertemente irreducible. Definamos $\Sigma = \{\sigma \geq 0 | \exists\, x > \bar{0},\ \sigma x \geq Ax\}$, $\rho := \inf \Sigma$. Si $\rho \in \Sigma$, entonces:*

0) *Existe un vector $u > \bar{0}$ tal que $Au = \rho u$,*

1) $\rho > 0$,

2) $u \gg \bar{0}$,

3) *u es el único vector propio asociado a ρ (salvo múltiplos escalares),*

4) *u es el único vector propio de A en C (salvo múltiplos escalares),*

5) $((\rho I - A)(V)) \cap C = \{\bar{0}\}$,

6) *Cada valor propio λ de A satisface $|\lambda| \leq \rho$.*

§2. El caso real (del teorema (1.4)).

En esta sección, sea $K = \mathbb{R}$. En adelante tomaremos C cono sólido en V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial no necesariamente de dimensión finita y $A : V \longrightarrow V$ función lineal.

Iniciemos dando la:

Definición 2.1. *Sea $A \geq 0$. Se define:*

a) $\Omega_1 = \{w \geq 0 | \exists\, y \gg \bar{0},\ wy \leq Ay\}$,

b) $\Omega = \{w \geq 0 | \exists\, y > \bar{0},\ wy \leq Ay\}$,

c) $\Sigma_1 = \{\sigma \geq 0 | \exists\, x \gg \bar{0},\ \sigma x \geq Ax\}$,

d) $\Sigma = \{\sigma \geq 0 \mid \exists\, x > \bar{0},\ \sigma x \geq Ax\}$.

Tenemos ahora la siguiente:

Observación 2.2. Recordemos que C es un cono sólido, en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V y $A : V \longrightarrow V$ tal que $A \geq 0$. Entonces $\emptyset \neq \Omega_1 \subseteq \Omega$ y $\emptyset \neq \Sigma_1 \subseteq \Sigma$.

Se tiene que $\Sigma_1 \neq \emptyset$: sea $x \gg \bar{0}$, como $A \geq 0$, entonces $Ax \geq \bar{0}$. Como $x \gg \bar{0}$, sea $\delta > 0$ tal que $\bar{0} \leq x - \delta Ax$ (ver demostración de (I.1.15.1), entonces $\bar{0} \leq \delta^{-1}x - Ax$, es decir, $\delta^{-1}x \geq Ax$. Por lo tanto, $\delta^{-1} \in \Sigma_1$. También, $\Omega_1 \neq \emptyset$ ya que para toda $y \gg \bar{0}$, $\bar{0} = 0 \cdot y \leq Ay$. Así , $0 \in \Omega_1$.

Daremos dos ejemplos de la definición anterior.

Ejemplo 2.3.1. Sea V^+ el cono positivo contenido en $\mathbb{R}^2$. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontremos el conjunto Ω_1. Supongamos que $w \in \Omega_1$ entonces existe $(a,b)^t = x \gg \bar{0}$, (es decir, $a > 0, b > 0$) tal que $wx \leq Ax$. De donde, $Ax - wx = (a + 2b - wa, b - wb)^t \geq 0$ entonces $(1-w)a + 2b \geq 0$, $(1-w)b \geq 0$, basta $1 - w \geq 0$, por lo que tenemos $1 \geq w \geq 0$. Por lo tanto, $\Omega_1 \subseteq [0,1]$. Ahora, sea $w \in [0,1]$, sea $x = (1,1)^t$ entonces $Ax \geq wx$.

Por lo tanto, $\Omega_1 = [0,1]$.

Para encontrar Ω tomemos $w \in \Omega$ entonces existe $x = (a,b)^t > \bar{0}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, así, $Ax - wx \geq \bar{0}$ entonces $(1-w)a + 2b \geq 0$, $(1-w)b \geq 0$, de donde $1 \geq w \geq 0$. Así, $\Omega \subseteq [0,1]$, pero $\Omega_1 \subseteq \Omega$. Entonces $\Omega_1 = \Omega = [0,1]$.

Bien, ahora encontremos el conjunto Σ_1. Sea $\sigma \in \Sigma_1$, entonces existe $x = (a,b)^t \gg \bar{0}$ tal que $\bar{0} \leq \sigma x - Ax = ((\sigma-1)a + 2b, (\sigma-1)b)^t$, de donde obtenemos $(\sigma-1)a + 2b \geq 0$, $(\sigma-1)b \geq 0$, basta con $\sigma - 1 \geq 0$ entonces $\sigma \geq 1$. De donde, $\Sigma_1 \subseteq [1,\infty)$.

Sean $\sigma \geq 1$, $x = (1,1)$ entonces $\sigma(1,1)^t - A(1,1)^t = (\sigma+1, \sigma-1)^t \geq \bar{0}$. Por lo tanto, $\Sigma_1 = [1,\infty)$.

Ahora para encontrar Σ. Supongamos que $\sigma \in \Sigma$ entonces existe $x = (a,b) > \bar{0}$ tal que $(\sigma-1)a + 2b \geq 0$, $(\sigma-1)b \geq 0$ entonces $\sigma \geq 1$. Así, $\Sigma \subseteq \{\sigma \geq 1\} = [1,\infty)$. Por lo tanto, $\Sigma = [1,\infty)$. Observemos que $\Sigma_1 = \Sigma$.

Ejemplo 2.3.2. En este ejemplo observaremos que la contención de los conjuntos puede ser propia.

Sean $V = \mathbb{R}^3$, $C = V^+$ el cono positivo y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primero encontremos $\Omega_1 = \{w \geq 0 \mid \exists y \gg \bar{0},\ wy \leq Ay\}$. Sea $w \geq \bar{0}$ y supongamos que existe $y \gg \bar{0}$ (es decir, $y_1, y_2, y_3 > 0$) tal que $wy \leq Ay$.

Entonces $\bar{0} \leq Ay - wy = (2y_2, 2y_1, 0)^t - (wy_1, wy_2, wy_3)^t = (2y_2 - wy_1, 2y_1 - wy, -wy_3)^t$, de donde $2y_2 - wy_1 \geq 0$, $2y_1 - wy_2 \geq 0$ y $-wy_3 \geq 0$ y tenemos $y_3 > 0$, entonces $w = 0$. Por lo tanto, $\Omega_1 \subseteq \{0\}$.

Ahora veamos que $\{0\} \subseteq \Omega_1$. Sean $w = \bar{0}$, $y = (1,1,1)^t$ entonces $\bar{0} \leq Ay - wy = (2,2,0)^t \in V^+$. Por lo tanto, $\Omega_1 = \{0\}$.

Encontremos ahora $\Omega = \{w \geq 0 \mid \exists y > \bar{0},\ wy \leq Ay\}$. Sea $w \geq \bar{0}$, supongamos que $\exists y > \bar{0}$ (es decir, $y_1, y_2, y_3 \geq 0$) tal que $wy \leq Ay$. Supongamos que $w > \bar{0}$. Entonces $(wy_1, wy_2, wy_3) \leq (2y_2, 2y_1, 0)$ entonces $y_3 = 0$, $wy_1 \leq 2y_2$, $wy_2 \leq 2y_1$, entonces $w(y_1 + y_2) \leq 2(y_1 + y_2)$ como $(y_1, y_2, y_3) > \bar{0}$ y $C = V^+$ entonces $y_1 + y_2 > 0$ entonces $w \leq 2$. Así, $\Omega \subseteq [0,2]$.

Ahora, sea $0 \leq w \leq 2$ entonces $w(1,1,0)^t \leq A(1,1,0)^t = (2,2,0)^t$. Por lo tanto, $w \in \Omega$.

Por lo tanto, $\Omega = [0,2]$.

Encontremos ahora el conjunto $\Sigma = \{\sigma \geq 0 \mid \exists x \geq \bar{0},\ \sigma x \geq Ax\}$.

Sea $\sigma \geq 0$ y supongamos que existe $x > \bar{0}$ tal que $\sigma x \geq Ax$. Entonces $(\sigma x_1, \sigma x_2, \sigma x_3) \geq (2x_2, 2x_1, 0)$, de donde $\sigma x_1 \geq 2x_2$, $\sigma x_2 \geq 2x_1$, $\sigma x_3 \geq 0$ entonces $\sigma \geq 0$. Entonces, $\Sigma \subseteq [0, \infty)$.

Ahora veamos que $[0,\infty) \subseteq \Sigma$. Sean $\sigma \in [0,\infty)$ y $x = (0,0,1)$ entonces $(0,0,\sigma) \geq (0,0,0)$.

Por lo tanto, $\Sigma = [0,\infty)$.

Obtengamos $\Sigma_1 = \{\sigma \geq 0 \mid \exists x \gg \bar{0},\ \sigma x \geq Ax\}$. Supongamos que $\sigma \geq 0$ y que existe $x = (x_1, x_2, x_3)^t \gg \bar{0}$ tal que $\sigma x \geq Ax$. Entonces $(\sigma x_1, \sigma x_2, \sigma x_3) \geq (2x_2, 2x_1, 0)$ de donde tenemos que $\sigma x_1 \geq 2x_2$, $\sigma x_2 \geq 2x_1$ entonces $\sigma(x_1 + x_2) \geq 2(x_1, x_2)$. Como $x \gg \bar{0}$ entonces $x_1 + x_2 > 0$. De donde $\sigma \geq 2$. Entonces $\Sigma_1 \subseteq [0, \infty)$.

Sea $x = (1,1,1)$ entonces $(\sigma, \sigma, \sigma) \geq (2,2,0)$. Por lo tanto, $\forall \sigma \geq 3$, $\sigma \in \Sigma_1$.

Por lo tanto, $\Sigma_1 = [2, \infty)$.

Observemos que en este ejemplo se tienen las contenciones propias $\Omega_1 \subset$

Ω; $\Sigma_1 \subset \Sigma$.

A continuación se enuncia un lema, que nos será de utilidad más adelante.

Proposición 2.4. *Sean* $u \gg \bar{0}$, $-v \notin C$. *Definimos* $\varepsilon := \sup\{\alpha > 0 | u - \alpha v \geq \bar{0}\}$. *Entonces* $0 < \varepsilon < \infty$, $u - \varepsilon v \in \partial C$.

De hecho, $\forall\, 0 < \alpha < \varepsilon$, $u - \alpha v \gg \bar{0}$.

Demostración: Observemos que si $-v \in C$ entonces $\forall\, \alpha > 0$, $u - \alpha v \geq \bar{0}$.

Supongamos que $-v \notin C$.

P.D. **1)** $0 < \varepsilon < \infty$.

2) $u - \varepsilon v \in \partial C$.

3) $\forall\, 0 < \alpha < \varepsilon$, $u - \alpha v \gg \bar{0}$.

Sea $E = \{\alpha > 0 | u - \alpha v \geq \bar{0}\}$. Como $u \gg \bar{0}$, $E \neq \emptyset$, ver demostración (**1**).

1) Primero probemos que $0 < \varepsilon$.

Como $u \gg \bar{0}$ entonces existe $\ell > 0$ tal que $B_\ell(u) \subset C$, de donde, para $-v$ existe $\alpha > 0$ tal que $u - \alpha v \in B_\ell(u)$, así, existe $\alpha > 0$ tal que $u - \alpha v \geq \bar{0}$, esto implica que $\alpha \in E$ y como $\varepsilon = \sup E$ entonces $0 < \alpha \leq \varepsilon$.

Por lo tanto, $\varepsilon > 0$.

P.D. $\varepsilon < \infty$.

Supongamos que $\varepsilon = \infty$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, \alpha_n \geq n$ tal que $u - \alpha_n v \geq \bar{0}$, así por (I.3.7.(ii)) $u - \lambda v \geq \bar{0}\ \forall\, \lambda \geq 0$, (pues si $\lambda \geq 0$ entonces $\exists n$ tal que $\lambda \leq n \leq \alpha_n$).

Como $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u - nv \geq \bar{0}$ se tiene $\frac{u}{n} - v \geq \bar{0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces ya que C es cerrado el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{u}{n} - v = -v \in C$ contradicción (pues $-v \notin C$).

Por lo tanto, $\varepsilon < \infty$.

2) Como $\varepsilon < \infty$, observemos que $u - \varepsilon v \in C$. Sea $\varepsilon = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$, $\alpha_n \in E$ (pues $\varepsilon = \sup E$), entonces $\forall\, n$ $u - \alpha_n v \geq \bar{0}$. Por lo tanto, por ser C cerrado, $u - \varepsilon v = \lim_{n\to\infty} u - \alpha_n v \geq \bar{0}$.

Supongamos que $u - \varepsilon v \notin \partial C$ entonces $u - \varepsilon v \in intC$, por lo que existe $r > 0$ tal que $B_r(u - \varepsilon v) \subset C$, así, para $-v$ existe $\beta > 0$ tal que $u - \varepsilon v - \beta v \in C$, también ver (I.1.15.1).

Pero $u - \varepsilon v - \beta v = u - (\varepsilon + \beta)v$, con $\varepsilon + \beta > \varepsilon$, contradicción, ya que ε es el supremo de E.

Por lo tanto, $u - \varepsilon v \in \partial C$.

3) Por corolario (I.3.9.(d)). ■

Para ilustrar este resultado daremos los ejemplos siguientes:

Ejemplo 2.5. Sea V^+ en $\mathbb{R}^2$. Sean $u, v \in V^+$, $u \gg \bar{0}$, donde $u = (1,1)$, $v = e_2$ entonces $-v = -e_2$, $-v \notin V^+$. Sea $\varepsilon = \sup\{\alpha > 0 | u - \alpha v \geq \bar{0}\}$. Ahora, $u - \alpha v = (1, 1-\alpha) \in V^+$, implica que $1 - \alpha \geq 0$, así $\alpha \in (0,1]$ (es decir, $0 < \alpha \leq 1$). Entonces $\varepsilon = 1$ y $0 < 1 < \infty$, de donde $u - v \in \partial V^+ = \{\lambda e_1, \lambda e_2 | \lambda \geq 0\}$, pues $u - v = (1,0) \in \partial V^+$, ver figura (2.5).

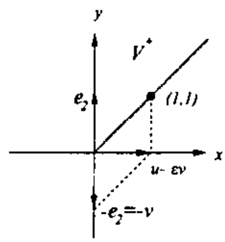

figura 2.5

Ejemplo 2.5.1. Sea $C = \{\lambda(1,3) + \mu(3,1) \mid \lambda, \mu \geq 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Sean $u, v \in C$, $u \gg \bar{0}$, donde $u = (2,2)$, $v = (4,2)$ entonces $-v = (-4,-2) \notin C$. $\varepsilon := \sup\{\alpha > 0 \mid u - \alpha v \geq \bar{0}\}$, $u - \alpha v = (2 - 4\alpha, 2 - 2\alpha) \in C$, de donde $(2 - 4\alpha, 2 - 2\alpha) = \lambda(1,3) + \mu(3,1)$ con $\lambda, \mu \geq 0$, por lo que $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha$, $\mu = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}\alpha$, de aquí se sigue que $\alpha \in (0, \frac{2}{5}]$. Entonces $\varepsilon = \frac{2}{5}$, $0 < \frac{2}{5} < \infty$, además, $u - \frac{2}{5}v \in \partial C$, pues $u - \varepsilon v = \frac{2}{5}(1,3) \in \partial C$, ver figura (2.5.1).

El siguiente lema relaciona los conjuntos Ω y Σ_1.

Lema 2.6. *Sea* $A > 0$. *Entonces* $\sup \Omega \leq \inf \Sigma_1$.

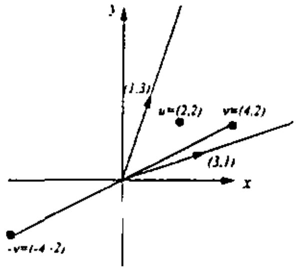

figura 2.5.1

Demostración: Por (2.2), Ω, $\Sigma_1 \neq \emptyset$. Sean $w \in \Omega$ y $\sigma \in \Sigma_1$, entonces existe $y > \bar{0}$ tal que $wy \leq Ay$ y existe $x \gg \bar{0}$ tal que $\sigma x \geq Ax$.

Entonces, de $wy \leq Ay$ tenemos que $-Ay \leq -wy$, de donde $A(-y) \leq w(-y)$. Ahora $-y \notin C$ y por (2.4) como $x \gg \bar{0}$, $-y \notin C$ entonces $x - \varepsilon y \in \partial C$ para $\varepsilon = \sup\{\alpha > 0 | \, x - \alpha y \geq \bar{0}\}$.

Así, $\bar{0} \leq A(x-\varepsilon y) = Ax - \varepsilon Ay = Ax + \varepsilon(-Ay) \leq \sigma x + \varepsilon(-wy) = \sigma(x - \varepsilon\frac{w}{\sigma}y)$, pues $A > 0$ y $\sigma > 0$. Entonces $\bar{0} \leq x - \frac{\varepsilon w}{\sigma}y$. Y por definición de ε, $\varepsilon(\frac{w}{\sigma}) \leq \varepsilon$. Pero $\varepsilon > 0$ entonces $\frac{w}{\sigma} \leq 1$ entonces $w \leq \sigma$, para toda $w \in \Omega$ y $\sigma \in \Sigma_1$. ∎

Lema 2.7. *Si A es fuertemente irreducible, entonces $\Sigma = \Sigma_1$ y $\Omega = \Omega_1$.*

Demostración: P.D. $\Sigma = \Sigma_1$.

$\supseteq$) $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, por definición.

$\subseteq$) $\Sigma \subseteq \Sigma_1$.

Sean $\sigma \in \Sigma$, $x > \bar{0}$ tales que $\sigma x \geq Ax$. Como A es fuertemente irreducible, existe $p \in \mathbb{Z}^+$ tal que $(I + A)^p x \gg \bar{0}$.

Llamemos $x^1 = (I+A)^p x$, entonces $\sigma x^1 \geq Ax^1$ (es decir, $\sigma(I+A)^p x \geq A(I+A)^p x$, pues $\sigma x - Ax \geq \bar{0}$ y como $(I + A)^p \geq 0$ entonces $(I + A)^p(\sigma x - Ax) \geq \bar{0}$, de donde $\sigma(I + A)^p x \geq (I + A)^p Ax = A(I + A)^p x$, ya que conmutan). Así $\sigma \in \Sigma_1$.

Por lo tanto, $\Sigma = \Sigma_1$.

Sólo nos falta demostrar, $\Omega = \Omega_1$.

$\supseteq$) $\Omega_1 \subseteq \Omega$, por definición.

$\subseteq$) Sea $w \in \Omega$, entonces existe $x > \bar{0}$, tal que $wx \leq Ax$.

Por hipótesis tenemos que A es fuertemente irreducible, entonces existe $p \in \mathbb{Z}^+$ tal que $(I + A)^p x \gg \bar{0}$. Sea $x^1 = (I + A)^p x$, así $x^1 \gg \bar{0}$ entonces $wx^1 \leq Ax^1$, ya que $w(I + A)^p x \leq A(I + A)^p x$, entonces $w \in \Omega_1$.

Por lo tanto, $\Omega = \Omega_1$. ∎

Lema 2.8. *Sean A fuertemente irreducible y $\rho := \inf \Sigma$. Si A tiene un vector propio $u \geq \bar{0}$, entonces $\{\rho\} = \Sigma \cap \Omega$ y ρ es el valor propio asociado a u.*

Demostración: Como u es vector propio de A se tiene que $Au = \lambda u$, $u > \bar{0}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ (pues $\lambda u \geq \bar{0}$). Ahora $\lambda \in \Sigma \cap \Omega$ ya que $\lambda u \geq Au$ y $Au \leq \lambda u$.

Por otro lado, tenemos que A es fuertemente irreducible entonces por lema (2.7) $\Sigma = \Sigma_1$ y por lema (2.6), $\sup \Omega \leq \inf \Sigma_1$, entonces $\inf \Sigma_1 \leq \lambda \leq \sup \Omega \leq \inf \Sigma_1$. De donde $\lambda = \inf \Sigma = \sup \Omega$, pero por hipótesis $\rho = \inf \Sigma$ entonces $\lambda = \rho$, de donde $\Sigma \cap \Omega = \{\lambda\} = \{\rho\}$.

Por lo tanto, ρ es el valor propio asociado a u. ∎

Corolario 2.8.1. *Sean V de dimensión finita, $C \subseteq V$ cono sólido, $A \geq 0$ fuertemente irreducible y $\rho = \inf \Sigma$. Entonces $\rho \in \Sigma$.*

Demostración: Por (1.3.1), existen $\lambda \geq 0$, $\bar{0} \neq v \in C$ tales que $Av = \lambda v$. Entonces por (2.8), $\rho \in \Sigma$. ∎

El siguiente lema es el converso del lema (2.8). (Para el caso en que V de dimensión finita y $C = V^+$, el lema se debe a H. Wielandt).

Lema 2.9. *Sean A fuertemente irreducible, $\rho = \inf \Sigma$. Si $\rho \in \Sigma$, entonces ρ es un valor propio positivo y para $u > \bar{0}$ que cumpla $Au \leq \rho u$ se tiene que $Au = \rho u$ (es un vector propio asociado a ρ). Además, $u \gg \bar{0}$.*

Demostración: Sea $\rho \in \Sigma$, entonces $Au \leq \rho u$, para algún $u > \bar{0}$. Así $\rho u - Au \geq \bar{0}$. Pero $\rho u - Au = (\rho I - A)u \geq \bar{0}$.

Hagamos $z := (\rho I - A)u$. Supongamos que $z > \bar{0}$. Como A es fuertemente irreducible, existe $p \in \mathbb{Z}^+$ tal que $(I + A)^p z \gg \bar{0}$. Ahora, sea $z^1 := (I + A)^p z$.

Tenemos, $z^1 = (I+A)^p z = (I+A)^p(\rho I - A)u = (\rho I - A)(I+A)^p u = (\rho I - A)u^1 = \rho u^1 - Au^1$, donde $u^1 := (I+A)^p u > \bar{0}$, ya que $u > \bar{0}$, $A \geq 0$ implican que $u^1 \geq \bar{0}$, pero $u^1 \neq 0$ pues $(\rho I - A)u^1 \gg \bar{0}$ y $\bar{0} \ll (I+A)^p(\rho I - A)u = (\rho I - A)u^1$. Entonces nuevamente por $A \geq 0$, $Au^1 \geq \bar{0}$, entonces $-Au^1 \leq \bar{0} \ll z^1 = \rho u^1 - Au^1$, entonces $\bar{0} \leq \rho u^1$ y como $u^1 > \bar{0}$, se tiene que $\rho > 0$.

Sea $\alpha > 0$ tal que $\alpha u^1 \leq (\rho I - A)u^1$, donde $\alpha > 0$ existe ya que $(\rho I - A)u^1 \gg \bar{0}$ (ver (I.1.15.1)), entonces $\alpha u^1 \leq \rho u^1 - Au^1$, así $Au^1 \leq (\rho - \alpha)u^1$, lo cual contradice que $\rho = \inf \Sigma$.

Por lo tanto, $\bar{0} = z = (\rho I - A)u = \rho u - Au$, entonces $Au = \rho u$.

Ahora demostraremos que $u \gg \bar{0}$. Como $u > \bar{0}$ y A es fuertemente irreducible entonces para alguna $p \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $\bar{0} \ll (I + A)^p u = (1 + \rho)^p u$, (la igualdad se da ya que u es vector propio de A con valor propio ρ), de donde $u \gg \bar{0}$.

Por (III.2.6), como $u \gg \bar{0}$, $A \geq 0$ fuertemente irreducible, entonces $\rho u = Au > \bar{0}$, esto implica que $\rho \neq 0$. Es decir, $\rho > 0$. ∎

Corolario 2.10. *Sea A fuertemente irreducible. Entonces A tiene un vector propio $u \in C$ si y sólo si* $\inf \Sigma \in \Sigma$.

Demostración: $\Longrightarrow$) Por lema (2.8).

$\Longleftarrow$) Por lema (2.9). ∎

2.11. Ahora demostraremos el teorema (1.4):

Teorema . *Sea $C \subseteq V$ un cono sólido. Sean A un operador fuertemente irreducible, $\Sigma = \{\sigma \geq 0 | \exists\, x > \bar{0},\ \sigma x \geq Ax\}$, $\rho = \inf \Sigma$. Si $\rho \in \Sigma$, entonces:*

0) *Existe un vector $u > \bar{0}$ tal que $Au = \rho u$,*

1) $\rho > 0$,

2) $u \gg \bar{0}$,

3) *u es el único vector propio asociado a ρ (salvo múltiplos escalares),*

4) *u es el único vector propio de A en C (salvo múltiplos escalares),*

5) $((\rho I - A)(V)) \cap C = \{\bar{0}\}$,

6) *Cada valor propio λ de A satisface $|\lambda| \leq \rho$.*

Demostración: Veamos que **0)**, **1)** y **2)** ya se tienen por (2.9).

3)P.D. u es el único vector propio asociado a ρ (salvo múltiplos escalares).

Supongamos que existe un vector $v \neq \bar{0}$, el cuál también es un vector propio asociado a ρ, es decir, $Av = \rho v$. Como $v \neq \bar{0}$, tenemos que $v \notin C$ ó $-v \notin C$. Supongamos que $-v \notin C$.

Ahora, por la proposición (2.4), $u - \varepsilon v \in \partial C$, con $\varepsilon > 0$ definida en (2.4). Si $u - \varepsilon v \neq \bar{0}$ entonces $A(u - \varepsilon v) = Au - \varepsilon Av = \rho u - \varepsilon \rho v = \rho(u - \varepsilon v)$, entonces por (2.9), $u - \varepsilon v \gg \bar{0}$, que contradice que $u - \varepsilon v \in \partial C$.

Por lo tanto, $u = \varepsilon v$.

Por lo tanto, u es el único vector propio asociado a ρ.

De la misma manera se hace el caso $v \notin C$.

4) P.D. u es el único vector propio de A en C.

Supongamos que existe $v \in C$, $v > \bar{0}$ y $Av = \lambda v$, para alguna λ. Entonces por (2.8), $\lambda \geq 0$ y $\lambda = \rho$ y por (3), v es un múltiplo de u.

Por lo tanto, u es el único vector propio de A en C.

5) P.D. $(((\rho I - A)V) \cap C) = \{\bar{0}\}$.

Supongamos que existe $x \in V$ tal que $(\rho I - A)x \geq \bar{0}$.

Sea $u \gg \bar{0}$ tal que $Au = \rho u$, como en el inciso (0) y (2). Como $u \gg \bar{0}$, existe $\beta > 0$ tal que $y := x + \beta u > \bar{0}$, es decir, $y \in C$. Entonces

$(\rho I - A)y = (\rho I - A)(x + \beta u) = \rho x + \rho\beta u - Ax - A\beta u = \rho x + \beta\rho u - Ax - \beta\rho u = (\rho I - A)x \geq \bar{0}$,

(pues u es vector propio de A).

Es decir, $\rho y \geq Ay$ y por (2.9), $(\rho I - A)y = \bar{0}$. así $(\rho I - A)x = \bar{0}$.

Por lo tanto, $(\rho I - A)V \cap C = \{\bar{0}\}$.

6) P.D. Cada valor propio λ de A satisface $|\lambda| \leq \rho$.

Recordemos que estamos trabajando en esta parte con $K = \mathbb{R}$.

Sea λ un valor propio de A, $\lambda \neq \rho$, así, existe $v \neq \bar{0}$ tal que $Av = \lambda v$. Por (4), $v \notin C$ y $-v \notin C$ y por (2.4), existen enteros positivos máximos ε_1 y ε_2 para los cuales $u - \varepsilon_1 v \geq \bar{0}$ y $u + \varepsilon_2 v \geq \bar{0}$. Sea $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Caso a. Si $\varepsilon = \varepsilon_1$, entonces $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ y $\bar{0} \leq A(u - \varepsilon_1 v) = Au - \varepsilon_1 Av = \rho u - \varepsilon_1 \lambda v = \rho(u - \frac{\lambda}{\rho}\varepsilon_1 v)$, (por (1), $\rho > 0$).

Como ε_1 es maximal con la propiedad de que $u - \varepsilon_1 v \geq \bar{0}$, entonces $\frac{\lambda}{\rho}\varepsilon_1 \leq \varepsilon_1$. Además, por la maximalidad de ε_2 y $u + (-\frac{\lambda}{\rho})\varepsilon_1 v \geq \bar{0}$, se tiene que $-\frac{\lambda}{\rho} \leq \varepsilon_2$, es decir, $-\varepsilon_2 \leq \frac{\lambda}{\rho}$. Además, $-\varepsilon_1 \leq -\varepsilon_2 \leq (\frac{\lambda}{\rho})\varepsilon_1 \leq \varepsilon_1$. De este modo $\frac{|\lambda|}{\rho} \leq 1$, entonces $|\lambda| \leq \rho$.

Caso b. Si $\varepsilon = \varepsilon_2$ entonces $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ y $-\varepsilon_2 \leq -\varepsilon_1$, además, $\bar{0} \leq A(u+\varepsilon_2 v) = Au + \varepsilon_2 Av = \rho u + \varepsilon_2 \lambda v = \rho(u + \frac{\lambda}{\rho}\varepsilon_2 v)$.

Ahora $\frac{\lambda}{\rho}\varepsilon_2 \leq \varepsilon_2$, además $u - (-\frac{\lambda}{\rho}\varepsilon_2)v \geq \bar{0}$ entonces $-\frac{\lambda}{\rho}\varepsilon_2 \leq \varepsilon_2$, por lo que $-\varepsilon_2 \leq -\varepsilon_1 \leq \frac{\lambda}{\rho}\varepsilon_2 \leq \varepsilon_2$. Entonces $\frac{|\lambda|}{\rho} \leq 1$, entonces $|\lambda| \leq \rho$. ■

Corolario 2.12. *Supongamos V de dimensión finita. Con las hipótesis del teorema (1.4), ρ es un cero simple del polinomio característico de A.*

Demostración: Por (3) del teorema (1.4), se tiene que la multiplicidad geométrica de ρ es 1 (es decir, en la descomposición de Jordan de A, existe un único bloque de Jordan asociado a ρ, digamos de tamaño $\ell \times \ell$).

Lo que vamos a demostrar es que $\ell = 1$, es decir, la multiplicidad algebraica de ρ también es 1. Sea $\mathcal{B}_\rho = \{u, v_2, ..., v_\ell\} \subseteq \mathcal{B}_J$ base de Jordan tal que $\mathcal{B}_\rho$ es la parte asociada al bloque de Jordan de ρ, que es como sigue:

$$[A]_{\mathcal{B}_\rho} = \begin{bmatrix} \rho & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \rho & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

Supongamos $\ell > 1$, entonces tenemos, $Av_2 = u + \rho v_2$, entonces $(\rho I - A)(-v_2) = -\rho v_2 + u + \rho v_2 = u \geq \bar{0}$, ahora por (5), $(\rho I - A)(-v_2) = \bar{0}$, de donde $u = \bar{0}$ contradicción, ya que $u \gg \bar{0}$. Por lo tanto, $\ell = 1$. ∎

Ejemplo 2.13. Matriz con valores propios complejos que deja invariante un cono sólido real. Este ejemplo fue tomado de [P].

Sean $V = \mathbb{R}^3$, $\quad C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, \quad x_3 \geq 0\}$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Demostración: P.D. C es A-invariante. P.D. $\forall x \in C$, $Ax \in C$.

Sea $x \in C$, $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ entonces $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2$, $x_3 \geq 0$. Entonces, $Ax = (3x_1 + x_2, -x_1 + 3x_2, 4x_3)^t$, ahora, $(3x_1 + x_2)^2 + (-x_1 + 3x_2)^2 = 10(x^2 + y^2)$, $\quad (4x_3)^2 = 16x_3^2$. Por hipótesis $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2$, además $10 < 16$.

Por lo tanto, $10(x_1^2 + x_2^2) \leq 16x_3^2$.

Por lo tanto, C es A-invariante.

P.D. A tiene valores propios complejos.

Calculemos el polinomio característico. $f_A(x) = det(\lambda I - A) =$
$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 6\lambda + 10) = (\lambda - 4)(\lambda - 3 + i)(\lambda - 3 - i)$.

Encontremos $\Omega_1 = \{w \geq 0 \mid \exists y \gg \bar{0}, \quad wy \leq Ay\}$. Sea $w \in \Omega_1$, supongamos que $\exists\, y \gg \bar{0}$, $\quad y \in C$ tal que $wy \leq Ay$, entonces $\bar{0} \leq Ay - wy = (3y_1 + y_2, -y_1 + 3y_2, 4y_3)^t - (wy_1, wy_2, wy_3)^t = ((3-w)y_1 + y_2, (3-w)y_2 - y_1, (4-w)y_3)^t$, entonces $(4 - w)y_3 \geq 0$, de donde $4 \geq w$ pues $y_3 > 0$. Así, $\Omega_1 \subseteq [0, 4]$.

Ahora, demostraremos que $[0, 4] \subseteq \Omega_1$. Sea $w \in [0, 4]$ entonces tomemos $y = (0, 0, 1)$ de donde sustituyendo nos queda $(0, 0, (4 - w)) \in C$.

Encontremos $\Omega = \{w \geq 0 \mid \exists y > \bar{0}, \quad wy \leq Ay\}$. De lo hecho anteriormente para Ω_1 tenemos nuevamente $\bar{0} \leq Ay - wy = ((3-w)y_1 + y_2, (3-w)y_2 - y_1, (4-w)y_3)$, otra vez $(4 - w)y_3 \geq 0$, de donde $4 \geq w$ ahora con $y_3 \leq 0$. Por lo tanto, $\Omega \subseteq [0, 4]$.

Veamos que $[0,4] \subseteq \Omega$. Tomemos nuevamente $y = e_3$. Por lo tanto, $\Omega = [0,4] = \Omega_1$.

Obtengamos ahora $\Sigma_1 = \{\sigma \geq 0 \mid \exists x \gg \bar{0},\ \sigma x \geq Ax\}$. Sea $\sigma \in \Sigma_1$, supongamos que existe $x \in C$, $x \gg \bar{0}$, tal que $\sigma x \geq Ax$, entonces $\bar{0} \leq \sigma x - Ax = (\sigma x_1, \sigma x_2, \sigma x_3)^t - (3x_1 + x_2, -x_1 + 3x_2, 4x_3)^t = ((\sigma-3)x_1 - x_2, (\sigma-3)x_2 + x_1, (\sigma-4)x_3)^t$. Pero de $(\sigma - 4)x_3 \geq 0$ se tiene $\sigma \geq 4$ ya que $x_3 \geq 0$. De este modo $\Sigma_1 \subseteq [4,\infty)$, veamos ahora que $[4,\infty) \subseteq \Sigma_1$.

Sea $w \in [4,\infty)$. Sea $y = e_3$, donde y sirve $\forall w \in [4,\infty)$. Observemos también que $\Sigma_1 = \Sigma = [4,\infty)$. De este modo se cumple (2.6) ya que $4 = \sup\Omega \leq \inf\Sigma_1 = 4$, más aún, $\sup\Omega = \inf\Sigma_1$. Para el resultado (2.7), probemos que A es fuertemente irreducible.

P.D. $\forall x > \bar{0}$, $\exists p = p(x)$ tal que $(I + A)^p x \gg \bar{0}$.

Sea $x \in C$, $x \neq \bar{0}$. Tenemos que

$$(I + A) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Proponemos $p = 1$. Entonces obtenemos lo siguiente,
$(I + A)x = (4x_1 + x_2, -x_1 + 4x_2, 5x_3)^t$.

P.D. $(4x_1 + x_2)^2 + (-x_1 + 4x_2)^2 < (5x_3)^2$.

Entonces $17(x_1^2 + x_2^2) \leq 25x_3^2$. De hecho, como $17 < 25$ y $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2$ pues $x \in C$, además $x \neq \bar{0}$. Entonces $17(x_1^2 + x_2^2) < 25x_3^2$. Por lo tanto, $(I + A)x \gg \bar{0}$. Por lo tanto, A es fuertemente irreducible.

Por el lema (2.8) se cumplen las hipótesis y sea e_3 un vector propio de A entonces $\{4\} = \Sigma \cap \Omega$, donde 4 es el valor propio asociado a e_3 (es decir, $Ae_3 = 4e_3$).

Pero también tenemos que se cumple el lema (2.9), pues A es fuertemente irreducible, además $4 = \inf\Sigma$, $4 \in \Sigma$ entonces ρ es un valor propio positivo y para u que cumpla $Au \leq \rho u$ se tiene que $Au = \rho u$. Además, $u \gg \bar{0}$.

Tenemos que $4 \in \Sigma$, ahora sea un vector u tal que $Au \leq 4u$, entonces $\bar{0} \leq 4u - Au = ((4-3)u_1 - u_2, (4-3)u_2 + u_1, (4-4)u_3)^t = (u_1 - u_2, u_2 + u_1, 0)^t$. De donde $u_1 = u_2 = 0$. Por lo tanto, $u = (0,0,\lambda)^t$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea $z = (4I - A)u = \bar{0}$. Como $z = \bar{0} = (4I - A)u$ entonces sea $p \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\bar{0} \ll (I + A)^p u = (1+4)^p u$. Sea $p = 1$ entonces $(I + A)u = (0,0,5\lambda)^t = 5u = (1+4)u$, además $(0,0,5\lambda) \gg \bar{0}$. ∎

§3. El caso complejo, K=$\mathbb{C}$.

Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita), $C \subseteq V$ un cono sólido y $A : V \longrightarrow V$ lineal.

3.1. Ahora hablaremos de valores propios complejos. Para esto, definamos el conjunto $V + iV := \{x + iy | x, y \in V\}$, con las siguientes operaciones:

Suma:$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$, $x + iy$, $x' + iy' \in V + iV$.

Producto por un escalar: $\lambda(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y)$, $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $x + iy \in V + iV$.

Observemos que $V + iV$ resulta ser un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, donde $\bar{0} = \bar{0} + i\bar{0}$, $-v = -x - iy \in V + iV$ son respectivamente el cero de $V + iV$ y el inverso aditivo de $v = x + iy \in V + iV$. Además, a $V + iV$ se le llama la **complexificación de** V.

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado, donde $\|\cdot\|$ está definida por un producto interior $\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces $(V + iV, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, si definimos

$$\| x + iy \| := \sqrt{\| x \|^2 + \| y \|^2} \qquad (= \|\| x \| + \| y \|\|).$$

Observación 3.2. Sea $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ una $\mathbb{R}$-base de V, entonces $\mathcal{B}$ es una $\mathbb{C}$-base de $V + iV$. En particular, $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V + iV$.

3.3. Hay una forma natural de extender cada transformación lineal A sobre V a una transformación lineal A sobre $V + iV$, de la siguiente manera

$$A(x + iy) := Ax + iAy\,.$$

3.3.1. Ahora, si C es un cono sólido de V, entonces $C + iC$ es un cono sólido en $V + iV$.

Demostrar que $C + iC$ es cono de $V + iV$ es muy sencillo.

Verifiquemos que $C + iC$ es sólido.

Como C es sólido en V, $\exists z \in int_V C$ y $\exists r > 0$ tal que $B_r(z) \subseteq C$.

P.D. $B_r(z + iz) \subseteq C + iC$.

Sea $x + iy \in B_r(z + iz)$, entonces $r > \| (z + iz) - (x + iy) \| = \| (z - x) + i(z - y) \| = \sqrt{\| z - x \|^2 + \| z - y \|^2} \geq \| z - x \|, \| z - y \|$.

Entonces $x, y \in B_r(z) \subseteq C$. Por lo tanto, $x + iy \in C + iC$.

Es decir, $C + iC$ es un cono sólido en $V + iV$.

3.3.2. Además, si $\lambda = \mu + i\delta$, $\delta \neq 0$, es un valor propio complejo de A con vector propio $z = x + iy$, $z \neq 0$, entonces x, y son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$:

$Az = A(x + iy) = (\mu + i\delta)(x + iy) = \mu x + i\mu y + i\delta x - \delta y = (\mu x - \delta y) + i(\delta x + \mu y)$. Supongamos que x, y no son linealmente independientes.

Caso 1. Si $x = \bar{0}$ (resp. $y = \bar{0}$), entonces $iAy = -\delta y + i\mu y$ (resp. $Ax = \mu x + i\delta x$) entonces $\delta = 0$ contradicción ($\delta \neq 0$). Por lo tanto, $x \neq \bar{0}$, $y \neq \bar{0}$.

Caso 2. Si $\bar{0} \neq y \in \mathbb{R}x$. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ tal que $y = \varepsilon x$, entonces $Ax + iAy = Ax + i\varepsilon Ax = (\mu - \delta\varepsilon)x + i(\delta + \mu\varepsilon)x$, de donde $Ax = (\mu - \delta\varepsilon)x$, $i\varepsilon Ax = i(\delta + \mu\varepsilon)x$. Entonces $Ax = (\mu - \delta\varepsilon)x = (\frac{\delta}{\varepsilon} + \mu)x$ entonces $(x \neq \bar{0})$ $\quad \mu - \delta\varepsilon = \frac{\delta}{\varepsilon} + \mu$ entonces $\varepsilon^2 = -1$ contradicción ($\varepsilon \in \mathbb{R}$).

Por lo tanto, x, y son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

3.3.3. Finalmente, si λ es un valor propio de A con vector propio $v = x + iy$, entonces $\bar{\lambda}$ es un valor propio con $\bar{v} = x - iy$ como vector propio asociado:

Probaremos que $\bar{v} = x - iy$ es vector propio de A, asociado a $\bar{\lambda}$.

Como $A(x + iy) = (\mu + i\delta)(x + iy)$, entonces $Ax = \mu x - \delta y$, $Ay = \delta x + \mu y$. Por lo tanto, $A(x - iy) = (\mu - i\delta)(x - iy) = \overline{\lambda}(x - iy)$.

Por lo tanto, $x - iy$ es un vector propio asociado a $\bar{\lambda}$.

Lema 3.4. *Con las hipótesis de (3.3). Sea* $A \geq 0$, $\lambda = \mu + i\delta \in \mathbb{C}$, $\delta \neq 0$ *un valor propio de* A *con* $z = x + iy$ *como vector propio asociado (es decir,* $Az = Ax + iAy = \lambda z$*). Por (3.3.2),* x, y *son linealmente independientes sobre*

$\mathbb{R}$. *Definamos el plano generado por* x, y, $\Pi =< x, y >$ *en el espacio real* V. *Entonces* $\Pi \cap C = \{\bar{0}\}$.

Demostración: Primero probemos que Π y $\Pi \cap C$ son A-invariantes.

P.D. $A(\Pi) \subseteq \Pi$ (es decir, Π es A-invariante).

Sea $w \in \Pi$, entonces $w = \lambda_1 x + \lambda_2 y$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Como $Ax + iAy = (\mu x - \delta y) + i(\delta x + \mu y)$. Entonces $Ax = \mu x - \delta y \in \Pi$, $Ay = \delta x + \mu y \in \Pi$, de donde $\lambda_1 Ax + \lambda_2 Ay = Aw \in \Pi$.

Por lo tanto, Π es A-invariante.

Tenemos que $\Pi \cap C$ es A-invariante, pues $\Pi \cap C \subseteq C$ y $\Pi \cap C \subseteq \Pi$, en cualquier caso $\Pi \cap C$ es A-invariante.

Ahora, sea $A_\Pi = A\lceil_\Pi$ (es decir, A_Π es A restringido a Π).

Observemos que aunque V no sea de dimensión finita, $\dim_{\mathbb{R}} \Pi = 2$. Es decir, $A_\Pi : \Pi \longrightarrow \Pi$ es una función lineal entre espacios de dimensión finita .

Si A tiene un valor propio real, A_Π deberá tener tres vectores propios linealmente independientes (ya que por hipótesis tenemos que λ es un valor propio complejo, con $x + iy$ como vector propio asociado y por la observación hecha en (3.3.3) $\bar{\lambda}$ y $x - iy$ son también un valor y un vector propio para A_Π respectivamente), en el espacio vectorial complejo $\Pi + i\Pi$ de dimensión dos sobre $\mathbb{C}$, lo cuál no es posible, ya que en un espacio vectorial de dimensión dos a lo más hay dos vectores linealmente independientes. Por lo que A_Π no tiene valores propios reales.

Si $\dim(\Pi \cap C) = 1$, entonces existe $w \in \Pi \setminus \{\bar{0}\}$ tal que $\Pi \cap C = \mathbb{R}^+ w$. Como $\Pi \cap C$ es A-invariante, entonces $A(w) = A_\Pi(w) = \varepsilon w$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, contradicción ($A_\Pi$ no tiene valores propios reales).

Si $\dim(\Pi \cap C) = 2$, entonces $\Pi \cap C$ es un cono sólido en Π que es A_Π-invariante. Entonces por (1.3.1), A_Π tiene un valor propio real, contradicción.

Así, en ambos casos, $\Pi \cap C = \{\bar{0}\}$. ∎

A continuación, definiremos una función sobre Π y demostraremos que es "casi" una norma, así mismo daremos un ejemplo que muestra que no necesariamente es una norma. Esta función la utilizaremos para demostrar el resultado principal de esta sección, el teorema (3.9).

Recordemos que C es un cono sólido en V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita).

Lema 3.5. *Sea $u \gg \bar{0}$ fijo y $\Pi = \langle x, y\rangle$, como en el lema (3.4). Definamos para toda $w \in \Pi$, $q(w) = \inf\{\lambda > 0 | u + \lambda^{-1}w \in C\}$. Entonces:*

i) $0 \leq q(w) < \infty \quad \forall\, w \in \Pi$,

ii) $q(w) = 0$ *si y sólo si* $w = \bar{0}$,

iii) $q(w + w') \leq q(w) + q(w')$, $\forall\, w, w' \in \Pi$,

iv) $q(\alpha w) = \alpha q(w)$ *si* $\alpha \geq 0$, $\forall\, w \in \Pi$,

v) $\forall\, w \neq \bar{0}$, $u + \frac{w}{q(w)} \in \partial C$,

vi) *Sea $S = \{w \in \Pi | q(w) \leq 1\}$. Entonces S es un subconjunto compacto y convexo de Π con $\bar{0} \in intS$. De hecho, $u + S = C \cap (u + \Pi)$.*

Demostración: **i)** P.D. $\quad q(w) \geq 0\ \forall\ w \in \Pi$, $\Pi = \langle x, y\rangle$, $x, y \in V$.

Sea $w \in \Pi$. Sea $G = \{\lambda > 0 | u + \lambda^{-1}w \in C\}$, $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^+$, entonces $\inf G \geq 0$, así $q(w) \geq 0$.

P.D. $q(w) < \infty$.

Por (I.1.15.1), si $\bar{0} \neq w \in \Pi$ entonces $\exists\, \lambda > 0$ tal que $u + \lambda w \in C$ entonces $q(w) \leq \frac{1}{\lambda} < \infty$.

ii) P.D. $\quad q(w) = 0$ si y sólo si $w = \bar{0}$.

$\Longrightarrow$) Sea $w \in \Pi$. $q(w) = \inf\{\lambda > 0 | u + \frac{1}{\lambda}w \in C\}$.

Como $q(w) = 0$, existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ y además $u + \frac{1}{\lambda_n}w \in C$, de donde, $x_n := \lambda_n u + w \in C$ ya que $\lambda_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, entonces $\|w - x_n\| = \|\lambda_n u\| = \lambda_n\|u\|$, con $\lim_{n\to\infty} \lambda_n\|u\| = 0$.

Por lo tanto, $x_n \to w$, $x_n \in C$. Pero C es cerrado, entonces $w \in C$ así, $w \in C \cap \Pi = \{\bar{0}\}$, por (3.4).

Por lo tanto, $w = \bar{0}$.

$\Longleftarrow$) P.D. $q(w) = 0$. Si $w = \bar{0}$.

Como $w = \bar{0}$ entonces $q(\bar{0}) = \inf\{\lambda > 0 | u + \lambda^{-1}w = u \in C\}$.

Sea $\varepsilon \in G$, $\varepsilon > 0$, entonces $u + \varepsilon\bar{0} \in C$. Entonces $\inf G \leq \varepsilon$, por lo tanto $\inf G = 0$.

iii) P.D. $q(w + w') \leq q(w) + q(w')$.

Como C es convexo, entonces $C - u$ es convexo. (Donde $C - u = \{v - u | v \in C\}$ es una translación).

Sean $\lambda, \lambda' > 0$ tales que:

$$u + \frac{1}{\lambda}w \in C \text{ y } u + \frac{1}{\lambda'}w' \in C\,, \qquad (*)$$

entonces $\frac{1}{\lambda}w \in C - u$ y $\frac{1}{\lambda'}w' \in C - u$, entonces $w \in \lambda(C - u)$, $\quad w' \in \lambda'(C - u)$ de donde $w + w' \in \lambda(C - u) + \lambda'(C - u) = (\lambda + \lambda')(C - u)$, donde la igualdad se cumple ya que $C - u$ es convexo, ver (3.6).

Ahora, $\frac{1}{\lambda+\lambda'}(w + w') \in C - u$, de donde $u + \frac{1}{\lambda+\lambda'}(w + w') \in C$. Por lo tanto, $q(w + w') \leq \lambda + \lambda' \quad \forall \lambda, \lambda'$ que cumplen (*).

Por lo tanto, $q(w + w') \leq q(w) + q(w')$.

iv) P.D. $q(\alpha w) = \alpha q(w)$ si $\alpha \geq 0$ y $w \in \Pi$.

P.D. $q(\alpha w) \geq \alpha q(w)$.

$q(\alpha w) = \inf\{\mu > 0 | u + \frac{1}{\mu}\alpha w \in C\}$. Si $\mu > 0$ es tal que $u + (\frac{1}{\mu}\alpha)w \in C$, y como $\frac{1}{\mu}\alpha = \frac{1}{\mu\alpha^{-1}}$ entonces $\mu\alpha^{-1} \geq q(w)$, pero $\alpha > 0$, así $\mu \geq \alpha q(w)$, de donde $q(\alpha w) \geq \alpha q(w)$.

Ahora, sólo nos falta demostrar la siguiente desigualdad.

P.D. $q(\alpha w) \leq \alpha q(w)$.

Sea $\lambda > 0$ tal que $u + \frac{1}{\lambda}w \in C$, entonces $C \ni u + \frac{1}{\lambda}w = u + \frac{1}{\lambda\alpha}\alpha w$, de donde $\lambda\alpha \geq q(\alpha w)$ entonces $\alpha q(w) \geq q(\alpha w)$.

Por lo tanto, $q(\alpha w) = \alpha q(w)$.

v) P.D. $\forall w \in \Pi \setminus \{\bar{0}\}$, $u + \frac{w}{q(w)} \in \partial C$.

a) $u + \frac{w}{q(w)} \in C$.

Como $\infty > q(w) = \inf\{\lambda > 0 \mid u + \frac{w}{\mu} \in C\} > 0$, entonces sea $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u + \frac{w}{\mu_n} \in C$ y $\lim_{n\to\infty} \mu_n = q(w)$. Como $q(w) \neq 0$, podemos suponer que $\mu_n \neq 0 \, \forall \, n$. Entonces $u + \frac{w}{q(w)} = \lim_{n\to\infty} u + \frac{w}{\mu_n} \in C$ (pues C es cerrado).

b) $u + \frac{w}{q(w)} \in \partial C$.

Supongamos que no, entonces $u + \frac{w}{q(w)} \in intC$ entonces por (I.1.15.1) $\exists \, \mu > 0$ tal que $u + \frac{w}{q(w)} + \mu\frac{w}{q(w)} = u + (\frac{q(w)}{1+\mu})^{-1}w \in C$, entonces $q(w) \leq \frac{q(w)}{1+\mu}$ entonces $1 + \mu \leq 1$ contradicción, $(\mu > 0)$.

Por lo tanto, $u + \frac{w}{q(w)} \in \partial C$.

vi) P.D. S es un conjunto convexo, compacto en Π, con $\bar{0} \in intS$.

$S = \{w \in \Pi | q(w) \leq 1\}$. Sean $w, w' \in S$.

P.D. S es convexo.

P.D. $tw + (1-t)w' \in S$, $t \in [0,1]$

P.D. $q(tw + (1-t)w') \leq 1$.

$q(tw + (1-t)w') \leq q(tw) + q((1-t)w') = tq(w) + (1-t)q(w') \leq t + (1-t)$, lo cual se tiene por (iii), (iv) ya que $t, (1-t) \geq 0$, y que $q(w) \leq 1$, $q(w') \leq 1$.

Por lo tanto, $q(tw + (1-t)w') \leq 1$.

Por lo tanto, $tw + (1-t)w' \in S$, es decir, S es convexo en Π.

P.D. S es compacto y $\bar{0} \in intS$. Recordemos que $\Pi = \langle x, y \rangle$.

Definamos $a := q(x), b := q(y), a' := q(-x), b' := q(-y)$. Por (i) y (ii), $a, b, a', b' > 0$. Además, por (iv), $q(\frac{x}{a}) = q(\frac{y}{b}) = q(\frac{-x}{a'}) = q(\frac{-y}{b'}) = 1$.

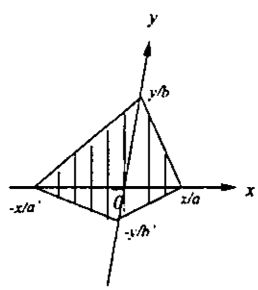

figura 1

Entonces, por ser S convexo.

$P := \{\lambda_1 \frac{x}{a} + \lambda_2 \frac{y}{b} + \lambda_3 (\frac{-x}{a'}) + \lambda_4 (\frac{-y}{b'}); \, 0 \leq \lambda_i \forall i, \, \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1\} \subseteq S$.

Observación:

a) $\forall v \in S$, $u+v \in S$ (pues por (v), $u+\frac{w}{q(w)} \in C$ y como $u \in C$, C convexo y $q(w) \leq 1$, entonces $\forall \alpha \in [0, \frac{1}{q(x)}]$, $u+\alpha x \in C$, en particular para $\alpha = 1$).

b) $\bar{0} \in intP \subseteq intS$.

c) $\forall v \in S$, $\exists w \in P$, $\lambda \geq 0$ tales que $v = \lambda w$.

d) $u+S = C \cap (u+\Pi)$ y S son cerrados.

P.D. $u+S = C \cap (u+\Pi)$.

$\subseteq$) Sea $w \in S$, entonces $q(w) \leq 1$. Como en la demostración de (a), $\forall\ \alpha \in [0, \frac{1}{q(w)}]$, $u+\alpha w \in C$, en particular, $u+w \in C \cap (u+\Pi)$. Observemos que $\forall w \in \Pi$, $\forall \alpha \in [0, \frac{1}{q(w)}]$, $\alpha w \in S$.

$\supseteq$) Sea $u+w \in C \cap (u+\Pi)$, $w \in \Pi$. Entonces (por definición de $q(w)$), $q(w) \leq 1$.

Por lo tanto, $w \in S$.

Como C y $u+\Pi$ son cerrados, entonces $C \cap (u+\Pi) = u+S$ es cerrado. Por lo tanto, S es cerrado.

e) S es acotado.

Recordemos que P es compacto y que $\bar{0} \in intP$. Supongamos que S no es compacto, entonces existe $(z_n)_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \partial P$ tal que $\| \frac{z_n}{q(z_n)} \| \geq n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Como P es compacto, por (A.2.4), existe $(z_{n_i})_{i\in\mathbf{N}} \subseteq (z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tal que el límite $P \ni z := \lim_{i\to\infty} z_{n_i}$ existe.

Tomemos el plano $u+\Pi$, entonces tenemos la figura 2.

Sea $\mathcal{L}$=línea que genera u y $u+z$. Llamemos $\mathcal{L}^+$ a uno de los semiplanos de $u+\Pi$ que contiene un número infinito de $u+z_{n_i}$'s, es decir, $u+z_{n_i} \in \mathcal{L}^+ \setminus \mathcal{L}$. Ahora, como $\bar{0} \in intP$, tomemos $w \in \partial P$ tal que $u+w \in \mathcal{L}^- \setminus \mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}^-$ es el otro semiplano definido por $\mathcal{L}$, ver figura 2. Como $\lim_{i\to\infty} u+z_{n_i} = u+z$ y $\| z_{n_i} \| \geq n_i$, entonces para i suficientemente grande, se tiene

$$u+\frac{z}{q(z)} \in int(conv(u, u+w, u+\frac{z_{n_i}}{q(z_{n_i})})) \subseteq intC$$

pues $u, u+w, u+\frac{z_{n_i}}{q(z_{n_i})} \in C$ y C es convexo, además, (si $A \subseteq B$ entonces $intA \subseteq intB$). Esto es una contradicción a $u+\frac{z}{q(z)} \in \partial C$.

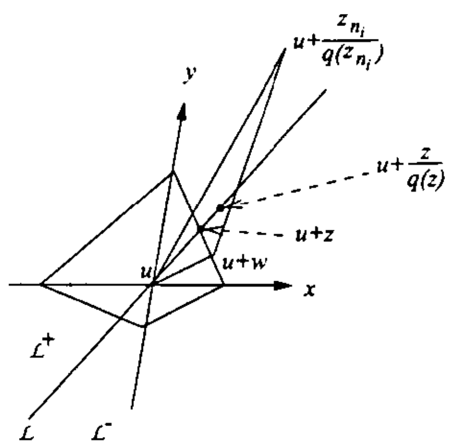

figura 2

Por lo tanto, S es compacto.

$\bar{0} \in intP \subseteq intS$. ■

Observemos que para demostrar (iii) usamos lo siguiente:

Proposición 3.6. *Sea $E \subseteq V$.*

1) *E es convexo si y sólo si para toda $s, t \geq 0$, $(s+t)E = sE + tE$.*

2) *Sea $T : V \longrightarrow W$ lineal. E convexo entonces $T(E)$ es convexo en W.*

Demostración: **1)** $\Longrightarrow$) Sean $s, t \geq 0$.

$\subseteq$) Sea $x \in (s+t)E$.

P.D. $x \in sE + tE$.

Si $x \in (s+t)E$, se tiene $x = (s+t)a$, $a \in E$, entonces $x = sa + ta$, de donde $x \in sE + tE$.

$\supseteq$) Sean $x \in sE$, $y \in tE$.

P.D. $x + y \in (s+t)E$.

Como $x \in sE$, $x = sa_1$ y $y \in tE$, $y = ta_2$, $a_1, a_2 \in E$, $x + y = \frac{s+t}{s+t}(sa_1 + ta_2) = (s+t)(\frac{s}{s+t}a_1 + \frac{t}{s+t}a_2) \in (s+t)E$ ya que $\frac{s}{s+t}, \frac{t}{s+t} \leq 1$, entonces $\frac{s}{s+t}a_1 + \frac{t}{s+t}a_2 \in E$, pues E es convexo.

$\Longleftarrow$) P.D. E es convexo.

P.D. Si $x, y \in E$, entonces $tx + (1-t)y \in E$, $\forall t \in [0,1]$.

Poniendo $s = 1 - t$, además por hipótesis sabemos que $tE + sE = (t+s)E$, entonces $tx + (1-t)y \in E$.

Por lo tanto, E es convexo.

2) Sean $x, y \in E$, como E es convexo, entonces $tx + (1-t)y \in E$, $t \in [0,1]$.

P.D. $T(E)$ es convexo.

Sean $T(x), T(y) \in T(E)$, con $x, y \in E$.

P.D. $tT(x) + (1-t)T(y) \in T(E)$.

$tT(x) + (1-t)T(y) = T(tx + (1-t)y) \in T(E)$, ya que T es lineal y E convexo.

Por lo tanto, $T(E)$ es convexo en W. ∎

Ejemplo 3.7.

3.7.1. Sean $V = \mathbb{R}^3$, $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2,\ x_3 \geq 0\}$. Por (2.13), sabemos que $v_1 = e_3$, $v_2 = e_1 + ie_2$, $v_3 = e_2 + ie_1$ son los vectores propios de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sea $\Pi = \langle e_1, e_2 \rangle$. P.D. $C \cap \Pi = \{\bar{0}\}$.

$\supseteq$) $\{\bar{0}\} \subseteq C \cap \Pi$. Es claro, (pues, $\bar{0} \in C$ y $\bar{0} = 0e_1 + 0e_2 \in \Pi$).

$\subseteq$) $C \cap \Pi \subseteq \{\bar{0}\}$. Supongamos que existe $x \neq \bar{0}$ tal que $x \in C \cap \Pi$. Entonces $x = (\lambda, \mu, 0)$ (pues $x \in \Pi$) entonces $\lambda^2 + \mu^2 \leq 0$ (pues $x \in C$) por lo que $\lambda = \mu = 0$ entonces $x = \bar{0}$, contradicción.

Por lo tanto, $C \cap \Pi = \{\bar{0}\}$.

Ahora, encontremos $q(w) = \inf\{\lambda > 0 \mid u + \lambda^{-1}w \in C\}$. Tomemos $u = e_3 \gg \bar{0}$.

Si $w = e_1$. Si $\lambda > 0$ tal que $u + \lambda^{-1}w = (0,0,1) + (\lambda^{-1}, 0, 0) = (\lambda^{-1}, 0, 1) \in C$, entonces $\lambda^{-1} \leq 1$ de donde $\lambda \geq 1$, así $q(w) = \inf\{\lambda \geq 1\} = 1$.

Si $w = (x_1, x_2, 0)$ y $\lambda > 0$ tal que $u + \lambda^{-1}w = (0,0,1) + (\lambda^{-1}x_1, \lambda^{-1}x_2, 0) = (\lambda^{-1}x_1, \lambda^{-1}x_2, 1) \in C$ entonces $(\lambda^{-1})^2(x_1^2 + x_2^2) \leq 1$ de donde $(\lambda^{-1})^2 \leq \frac{1}{x_1^2+x_2^2}$ entonces $\lambda^{-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$, así $\| w \| \leq \lambda$.

De donde, $q(w) = \inf\{\lambda \geq \| w \|\} = \| w \|$.

Si $u = e_3$, $S = \{w \in \Pi \mid q(w) \leq 1\} = \{w \mid \| w \| \leq 1\}$, $u + S = C \cap (u + \Pi)$.

Tomemos ahora, $u = (0, 1, 2) \gg \bar{0}$.

Si $w = e_1$, $u + \lambda^{-1}w = (0,1,2) + (\lambda^{-1}, 0, 0) = (\lambda^{-1}, 1, 2)$, de donde $(\lambda^{-1})^2 + 1 \leq 4$, entonces $(\lambda^{-1})^2 \leq 3$ entonces $\lambda^{-1} \leq \sqrt{3}$ entonces $\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

De donde, $q(w) = \inf\{\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$u + S = \{(x_1, x_2 + 1, 2) \in C \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, donde $\partial S = \{(x_1, x_2 + 1, 2) \mid x_1^2 + (x_2^2 + 1)^2 = 4\} = C \cap (u + \Pi)$.

3.7.2. Ejemplo de que $q(w)$ puede ser distinta a $q(-w)$.

Sean $V = \mathbb{R}^3$, $C = V^+$, $\Pi = \langle(-1,-1,1), (-1,1,-1)\rangle$, $V^+ \cap \Pi = \{\bar{0}\}$. Sea $u = (1,1,2) \gg \bar{0}$, sea $w = (-1,-1,1)$ entonces si $\lambda > 0$, $u + \lambda^{-1}w = (1 - \lambda^{-1}, 1 - \lambda^{-1}, 2 + \lambda^{-1}) \geq \bar{0}$, si y sólo si $1 - \lambda^{-1} \geq 0$ si y sólo si $1 \geq \lambda^{-1}$ si y sólo si $\lambda \geq 1$ entonces $q(w) = 1$.

Ahora, calculemos $q(-w)$, donde $-w = (1,1,-1)$. Así, $u - \lambda^{-1}w = (1 + \lambda^{-1}, 1 + \lambda^{-1}, 2 - \lambda^{-1}) \geq 0$ lo cual ocurre si y sólo si $2 - \lambda^{-1} \geq 0$ si y sólo si $2 \geq \lambda^{-1}$ si y sólo si $\lambda \geq 1/2$.

Por lo tanto, $q(-w) = 1/2 \neq 1 = q(w)$.

3.7.3. Este es un ejemplo en donde se muestra que es necesario que $x + iy$ sea un vector propio de A, pues existe $w \neq \bar{0}, q(w) = 0$.

Sea $u = (1,1,1)$. Sea $z \in \Pi = \langle(-1,-1,1), (-1,1,-1)\rangle$, $z = (-\alpha - \beta, -\alpha + \beta, -(-\alpha + \beta)) \in \Pi$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Entonces para $q(z)$ se tiene, $u + \lambda^{-1}z = (1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\beta}{\lambda}, 1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda}, 1 + \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\beta}{\lambda}) \geq 0$ si y sólo si $1 \geq \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda}$ y $1 \geq \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\beta}{\lambda}$ y $1 \geq \frac{\beta}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda}$ si y sólo si $\lambda \geq \alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\beta - \alpha$ si y sólo si $\lambda \geq \max\{\alpha + \beta, \alpha - \beta, \beta - \alpha(= -(\alpha - \beta))\} \geq 0$, pues si $\alpha - \beta \leq 0$ entonces $\beta - \alpha \geq 0$.

Así. $q(z) = \max\{\alpha + \beta, \alpha - \beta, \beta - \alpha\}$, $q(-z) = \max\{-\alpha - \beta, \alpha - \beta, \beta - \alpha\}$. Sea $\alpha = 1 = \beta$ entonces $q(z) = 2, q(-z) = 0$.

3.8. Sea $\Pi = \langle x, y\rangle$ de dimensión dos. Definamos $\mathcal{X}$ sobre Π por $\mathcal{X}(ax+by) = (a^2+b^2)^{1/2}$ la cual resulta ser una norma. En lo que sigue todas las nociones de topología sobre Π se refieren a esta topología.

Lema 3.8. *Como en (3.4), recordemos que $\Pi = \langle x, y\rangle$, con $z = x+iy$ vector propio de A asociado a $\lambda = \mu + i\delta$ valor propio complejo ($\delta \neq 0$) de A. Se define $\mathcal{X}$ sobre Π de la siguiente manera.*

$\forall\, v \in \Pi$, $v = \alpha x + \beta y$, $\quad \mathcal{X}(\alpha x + \beta y) = (\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$, *una norma. Observemos que $\mathcal{X}(\alpha x+\beta y) = \| (\alpha,\beta) \| =$ la norma euclidiana de (α,β).*

Demostración: P.D. $\mathcal{X}$ es una norma. Es decir,

1. P.D. $\mathcal{X}(v) \geq 0\, \forall v \in \Pi$,
2. P.D. $\mathcal{X}(v) = 0$ si y sólo si $v = \bar{0}$, $v \in \Pi$,
3. P.D. $\mathcal{X}(\lambda v) = \mid \lambda \mid \mathcal{X}(v)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \Pi$,
4. P.D. $\mathcal{X}(v+w) \leq \mathcal{X}(v) + \mathcal{X}(w)$, $v, w \in \Pi$.

Sea $v \in \Pi$, $v = \alpha x + \beta y$.

1. $\mathcal{X}(v) = \mathcal{X}(\alpha x+\beta y) = (\alpha^2+\beta^2)^{1/2} \geq 0$.
2. $0 = \mathcal{X}(v) = (\alpha^2+\beta^2)^{1/2} = 0$ si y sólo si $\alpha^2+\beta^2 = 0$ si y sólo si $\alpha = \beta = 0$.
3. $\mathcal{X}(\lambda v) = \mathcal{X}(\lambda\alpha x + \lambda\beta y) = ((\lambda\alpha)^2 + (\lambda\beta)^2)^{1/2} = \mid \lambda \mid (\alpha^2+\beta^2)^{1/2} = \mid \lambda \mid \mathcal{X}(v)$.
4. Sean $v = \alpha x + \beta y$, $w = \alpha' x + \beta' y \in \Pi$.

$\mathcal{X}(v+w) = \mathcal{X}((\alpha+\alpha')x + (\beta+\beta')y) = ((\alpha+\alpha')^2 + (\beta+\beta')^2)^{1/2}$
$= \| (\alpha+\alpha', \beta+\beta') \| = \| (\alpha,\beta) + (\alpha',\beta') \| \leq \| (\alpha,\beta) \| + \| (\alpha',\beta') \|$
$= (\alpha^2+\beta^2)^{1/2} + ((\alpha')^2 + (\beta')^2)^{1/2} = \mathcal{X}(v) + \mathcal{X}(w)$, donde $\| (\alpha,\beta) \|$ denota la norma euclidiana de $\mathbb{R}^2$. ∎

Teorema 3.9. *Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita), $C \subseteq V$ un cono sólido y $A : V \longrightarrow V$ un operador fuertemente irreducible, sea $\Sigma = \{\sigma \geq 0 \mid \exists x > 0, \sigma x \geq Ax\}$ y sea $\rho = \inf\Sigma$. Si $\rho \in \Sigma$ y $Az = \lambda z$ para $z \in V + iV$, $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\mid \lambda \mid \leq \rho$.*

Demostración: Sean $z = x+iy \in V+iV$, $\quad \lambda \in \mathbb{C}$ tales que $Az = \lambda z$.

Por demostrar que $\mid \lambda \mid \leq \rho$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces, por (2.11), se tiene que $|\lambda| \leq \rho$. Supongamos $\lambda \notin \mathbb{R}$, sea $\lambda = \mu + i\delta \in \mathbb{C}$.

Como A es fuertemente irreducible, entonces $\rho > 0$. Por lema (III.2.7), podemos suponer que $\rho = 1$.

Como en (3.5), sean $u \gg \bar{0}$ tal que $Au = \rho u$ y $S = \{w \in \Pi \mid q(w) \leq 1\}$, que es un conjunto convexo y compacto de Π, con $\bar{0} \in intS$, donde $\Pi = \langle x, y \rangle$.

Para demostrar que $|\lambda| \leq \rho$, primero probaremos:

1) Por (3.5.(vi)), tenemos que $u + S = (u + \Pi) \cap C$.

2) P.D. $AS \subseteq S$. Sea $w \in S$.

P.D. $Aw \in S$.

Por (1), $u + w \in C$ y como C es A-invariante, entonces

$C \ni A(u + w) = Au + Aw = \rho u + Aw = u + Aw$.

Por otro lado, como $w \in \Pi$, $Aw \in \Pi$. Entonces $u + Aw \in (u+\Pi) \cap C = u + S$. Es decir, $Aw \in S$. Por lo tanto, $AS \subseteq S$.

3) Sean $z = x + iy \in V + iV$ y $\lambda = \mu + i\delta \in \mathbb{C}$ tales que $Az = \lambda z$.

P.D. $|\lambda| \leq \rho$.

Como $Az = \lambda z$, es decir, $Ax + iAy = (\mu + i\delta)(x + iy)$, entonces $Ax = \mu x - \delta y$ y $Ay = \delta x + \mu y$, de donde se obtiene que $\forall\, w = \alpha x + \beta y \in S$, $Aw = A(\alpha x + \beta y) = (\alpha\mu + \beta\delta)x + (-\alpha\delta + \beta\mu)y$.

Ahora $\forall\, \alpha x + \beta y = w \in S$, definamos $\mathcal{X}(w) = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$. Entonces

$\mathcal{X}(Aw) := ((\alpha\mu + \delta\beta)^2 + (-\alpha\delta + \beta\mu)^2)^{1/2} = (\alpha^2\mu^2 + 2\alpha\delta\mu\beta + \delta^2\beta^2 + \alpha^2\delta^2 - 2\alpha\delta\beta\mu + \beta^2\mu^2)^{1/2} = (\mu^2(\alpha^2 + \beta^2) + \delta^2(\alpha^2 + \beta^2))^{1/2} = ((\mu^2 + \delta^2)(\alpha^2 + \beta^2))^{1/2} = (\mu^2 + \delta^2)^{1/2}(\alpha^2 + \beta^2))^{1/2} = |\lambda|\, \mathcal{X}(w)$.

Como $\mathcal{X}$ es una función continua sobre S que es compacto, entonces $\mathcal{X}$ alcanza su máximo en S. Sea $w_0 \in S$ tal que $\mathcal{X}(w_0)$ es un máximo en S. Además, como $AS \subseteq S$, $Aw_0 \in S$.

Entonces, $|\lambda|\, \mathcal{X}(w_0) = \mathcal{X}(Aw_0) \leq \mathcal{X}(w_0)$, por ser $\mathcal{X}(w_0)$ máximo y $\mathcal{X}(w_0) \neq 0$.

Así, $|\lambda| \leq 1 = \rho$. ∎

APÉNDICE

En lo que sigue veremos las definiciones y los resultados básicos sobre espacios topológicos, espacios métricos, normas y espacios normados, que son los que usaremos a lo largo del presente trabajo. Ver [Ba], [BN], [Ch], [Sc], [R], [W].

1. Espacios topológicos.

Definición A.1.1. *Sea X un conjunto y $\mathfrak{U}$ es una colección de subconjuntos de X. Decimos que la pareja $(X, \mathfrak{U})$ es un* **espacio topológico** *si se cumplen las siguientes condiciones:*

i) $\emptyset \in \mathfrak{U}$, $X \in \mathfrak{U}$;

ii) Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ *es una colección de elementos de* $\mathfrak{U}$ *entonces* $\cup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha \in \mathfrak{U}$;

iii) Si $U_1, \ldots, U_n$ *es una colección finita de elementos de* $\mathfrak{U}$ *entonces* $\cap_{i=1}^{n} U_i \in \mathfrak{U}$.

A la colección $\mathfrak{U}$ *de subconjuntos de* X *se le llama una* **topología** *en* X. *Los elementos* $U \in \mathfrak{U}$ *son llamados los conjuntos* **abiertos** *de* X *y los elementos de* X *son llamados* **puntos**.

Definición A.1.2. *Un subconjunto E de un espacio topológico X se dice que es* **cerrado** *si $X \setminus E$ es abierto.*

Teorema A.1.3. *Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos cerrados, entonces $\cap_{i\in I} S_i$ es cerrado.*

Teorema A.1.4. *Si A, B son cerrados, entonces $A + B$ es cerrado.*

Definición A.1.5. *Sea X un espacio topológico y $E \subseteq X$. Decimos que la* **cerradura** *de E en X es el conjunto*

$$\bar{E} = \cap\{G \subset X \mid G \text{ es cerrado y } E \subset G\}.$$

Además, es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a E.

Definición A.1.6. *Si X es un espacio topológico y $E \subset X$, el* **interior** *de E en X es el siguiente conjunto*

$$intE = \cup\{H \subset X \mid H \text{ es abierto y } H \subset E\}$$

Además, el $intE$ es el conjunto abierto más grande contenido en E.

Teorema A.1.7. *Sean A, $B \subseteq X$. Si $A \subseteq B$ entonces $intA \subseteq intB$.*

Definición A.1.8. *Sea X un espacio topológico y $E \subset X$, la* **frontera** *de E es el conjunto*

$$\partial E = \bar{E} \cap (\overline{X \setminus E}).$$

Otra forma: la **frontera** *de E consiste de todos los puntos $x \in X$ tales que $\forall U$ abierto de X tal que tiene a x se tiene $U \cap E \neq \emptyset$ y $U \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$.*

Teorema A.1.9. *Sea X un espacio topológico y $E \subseteq X$. M es cerrado si y sólo si $\partial M \subseteq M$.*

Demostración: $\Longrightarrow$) Por hipótesis M es cerrado.

P.D. $\partial M \subseteq M$. Sea $x \in \partial M$ P.D. $x \in M$.

Supongamos que $x \notin M$ entonces $x \in (X \setminus M)$. Como M es cerrado se tiene que $(X \setminus M)$ es abierto, entonces $x \in int(X \setminus M)$ (es decir, $\exists U$ abierto, $x \in U$ y tal que $U \subseteq (X \setminus M)$). Entonces $U \cap M = \emptyset$ contradicción, (pues $x \in \partial M$).

Por lo tanto, $\partial M \subseteq M$.

$\Longleftarrow$) Por hipótesis $\partial M \subseteq M$.

P.D. M es cerrado (es decir, $(X \setminus M)$ es abierto).

Sea $x \in (X \setminus M)$. Como $\partial(X \setminus M) = \partial M \subseteq M$, entonces $\exists U$ abierto tal que $x \in U \subseteq X \setminus M$, es decir. x es punto interior de $(X \setminus M)$, así $(X \setminus M)$ es abierto.

Por lo tanto, M es cerrado. ∎

2. Espacios métricos.

A continuación se dará la definición de espacio métrico y se enunciarán algunos resultados para dichos espacios, los cuales se han utilizado a lo largo del presente trabajo.

Definición A.2.1. *Sea X un conjunto. Una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama una* **métrica** *en X si satisface:*

i) $d(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$;

ii) $d(x,y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$;

iii) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in X$;

iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x, y, z \in X$.

Un conjunto X con una métrica determinada se llama un **espacio métrico** *y se denota por (X,d) o simplemente X.*

Teorema A.2.2. *Sea V un espacio métrico y $M \subseteq V$. M es cerrado si y sólo si $M = \{v \in V \mid \exists\ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq M,\ \lim_{i\to\infty} x_i = v\}$.*

Demostración: $\Longrightarrow)$ Por hipótesis M es cerrado.

P.D. $M = \{v \in V \mid \exists\ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq M,\ \lim_{i\to\infty} x_i = v\}$.

$\subseteq)$ Sea $x \in M$, entonces la sucesión constante $x = x_i\ \forall i \in \mathbb{N}$ nos sirve.

$\supseteq)$ Sea $v \in \{v \in V \mid \exists (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq M,\ \lim_{i\to\infty} x_i = v\}$, v tal que $\lim_{i\to\infty} x_i = v$, con $x_i \in M$. Supongamos $v \notin M$, entonces $\forall r > 0\ B_r(v) \cap (V \setminus M) \neq \emptyset$.

P.D.$\forall r > 0\ B_r(v) \cap M \neq \emptyset$.

Sabemos que $\exists N \in \mathbb{N},\ x_i \in B_r(v),\ \forall i > N$ entonces $x_i \in B_r(v) \cap M \neq \emptyset$. Por lo tanto, $v \in \partial M \subseteq M$ (por (A.1.9)), contradicción.

Por lo tanto, $v \in M$.

$\Longleftarrow)$ P.D. $V \setminus M$ es abierto.

Sea $v \in V \setminus M$. Si $\forall r > 0\ B_r(v) \cap M \neq \emptyset$ entonces en particular, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(v) \cap M$ entonces $v = \lim_{n\to\infty} x_n$, entonces $v \in M$ contradicción.

■

Definición A.2.3. (Teorema: Heine-Borel). *Sea X un espacio métrico, $M \subseteq X$. M es* **compacto** *si y sólo si M es cerrado y acotado.*

Teorema A.2.4. *[R] Sean X un espacio métrico. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ sucesión entonces existe $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{x_{n_i}\}_{n_i\in\mathbb{N}}$ converge.*

3. Espacios normados.

Definición A.3.1. *Sea V un K-espacio vectorial, entonces una* **norma** *en V es una función de V a $\mathbb{R}$ denotada por $\| \cdot \|$ (es decir, $\| \cdot \|: V \longrightarrow \mathbb{R}$) la cual satisface las siguientes condiciones:*

i) $\| x \| \geq 0, \ \forall x \in V$;

ii) $\| x \| = 0$ *si y sólo si* $x = \bar{0}$;

iii) $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ x \in V$;

iv) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \ \ \forall x, y \in V$.

Un espacio vectorial en el que se ha definido una norma es llamado un **espacio normado.**

Algunas normas están definidas por productos internos:

Definición A.3.2. *Si V es un K-espacio vectorial, un* **producto interior** *es una función de $V \times V$ en $\mathbb{R}$, denotado por $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$, que satisface las siguientes propiedades:*

i) $\langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in V$;

ii) $\langle x, x \rangle = 0$ *si y sólo si* $x = \bar{0}$;

iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \ \forall x, y \in V$;

iv) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \ \forall x, y, z \in V$;

v) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ x, y \in V$.

Un espacio vectorial en el que se ha definido un producto interior es llamado **espacio con producto interior.**

Teorema A.3.3. *[Ba] Sea V un espacio con producto interior, defínase $\| \cdot \|$ mediante $\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in V$. Entonces $\| \cdot \|$ es una norma en V y satisface $\langle x, y \rangle \leq \| x \| \| y \|$.*

En seguida se da el ejemplo de un producto interno que define una norma, la cual se usa en (II.6.9).

Ejemplo A.3.4. Sea $V = \{x = (x_i)_{i\geq 0} \mid x_i \in \mathbb{R},\ \exists \ell \in \mathbb{N},\ \exists c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall i \geq \ell,\ x_i = c\}$, un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Definamos $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$\| (x_i)_{i\geq 0} \| := \sqrt{\sum_{i\geq 0} \frac{x_i^2}{2^i}}$$

(donde $2^0 = 1$).

Entonces $\|\cdot\|$ es una norma en V, que viene del producto interno $\langle x, y\rangle = \sum_{i\geq 0} \frac{x_i y_i}{2^i}$.

Demostración: Antes, veamos que $\sum_{i\geq 0} \frac{x_i^2}{2^i}$ está bien definida. Como $x \in V$, $\exists \ell, \exists c$ tales que $\forall i \geq \ell$, $x_i = c$. Entonces

$$\sum_{i\geq 0} \frac{x_i^2}{2^i} = \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{x_i^2}{2^i} + \sum_{i=\ell}^{\infty} \frac{c_i^2}{2^i} = \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{x_i^2}{2^i} + c^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i},$$

donde $\sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{x_i^2}{2^i}$ es finita (pues es una suma finita) y para $c^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ tenemos que $\sum_{i=\ell}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2$ entonces $c^2 \sum_{i=\ell}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2c^2$.

Así, $\sum_{i\geq 0} \frac{x_i^2}{2^i}$ está bien definida.

i) P.D. $\| (x_i)_{i\geq 0} \| \geq 0$.

Sea $x \in V$, $x = (x_i)_{i\geq 0}$. $\| (x_i)_{i\geq 0} \| = \sqrt{\sum_{i\geq 0} \frac{x_i^2}{2^i}} \geq 0$.

ii) P.D. $\| (x_i)_{i\geq 0} \| = 0$ si y sólo si $x = \bar{0}$.

$\| (x_i)_{i\geq 0} \| = \sqrt{\sum_{i\geq 0} \frac{x_i^2}{2^i}} = 0$ si y sólo si $\sum_{i\geq 0} \frac{x_i^2}{2^i} = 0$ si y sólo si $x_i = 0\ \forall i \geq 0$ si y sólo si $x = \bar{0}$.

iii) P.D. $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$.

$\| \alpha x \| = \| (\alpha x_i)_{i\geq 0} \| = \sqrt{\sum_{i\geq 0} \frac{(\alpha x_i)^2}{2^i}} = \sqrt{\alpha^2 \sum_{i\geq 0} \frac{x_i^2}{2^i}} = | \alpha | \| x \|$.

iv) P.D $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

$\| x + y \|^2 = \sum_{i\geq 0} \frac{(x_i + y_i)^2}{2^i} = \sum_{i\geq 0} \frac{x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2}{2^i} = \sum_{i\geq 0} \frac{x_i^2}{2^i} + 2\sum_{i\geq 0} \frac{x_i y_i}{2^i} + \sum_{i\geq 0} \frac{y_i^2}{2^i} = \| x \|^2 + 2\langle x, y\rangle + \| y \|^2 \leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2$.

Notemos, que la desigualdad se obtiene pues $\langle x, y\rangle \leq \| x \| \| y \|$).

Por lo tanto, $\| x + y \| \leq \| x \| \| y \|$. ■

Ahora, daremos algunas propiedades para la función norma.

Teorema A.3.5. *Sea V un espacio en el que se tiene definida una norma. Entonces dicha norma satisface lo siguiente:*

i) $| \| x \| - \| y \| | \leq \| x \pm y \|$.

ii) Sean $x, y \in V \setminus \{\bar{0}\}$. Entonces $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$ si y sólo si $x \in \mathbb{R}^{+} y$.

iii) Si $\lim_{n\to\infty} z_n = w$ entonces $\lim_{n\to\infty} \| z_n \| = \| w \|$.

Demostración: Sólo se demostrará (ii).

$\Longrightarrow$) Supongamos que $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$. Entonces en el plano generado por x y y tenemos el siguiente triángulo

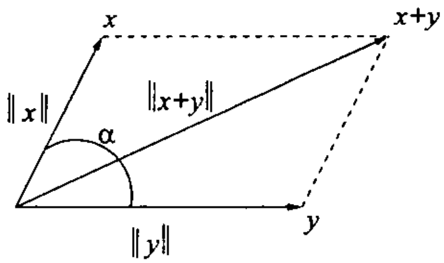

figura ii

entonces por la ley de los cosenos:

$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \| - 2 \| x \| \| y \| \cos\gamma$.

Por otro lado. $(\| x \| + \| y \|)^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \| x \| \| y \|$. Entonces $\cos\gamma = -1$ entonces $\gamma = \pi$ (pues $\gamma = \pi$ entonces $\alpha = 0$). Entonces $x \in \mathbb{R}^{+} y$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $x \in \mathbb{R}^{+} y$ (es decir, $x = \lambda y$, $\lambda \geq 0$).

P.D. $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$.

$\| x + y \| = \| \lambda y + y \| = \| (\lambda + 1) y \| = (\lambda + 1) \| y \| = \lambda \| y \| + \| y \| =$
$\| \lambda y \| + \| y \| = \| x \| + \| y \|$. ■

Observación A.3.6. Sea $(V, \|\cdot\|)$ normado entonces $(V, \|\cdot\|)$ es métrico. Definimos $d(x, y) = \| x - y \|$.

A.3.7. Bien, en nuestro caso los espacios en los que trabajamos son espacios vectoriales normados (por lo tanto, espacios topológicos), en los cuales, los conjuntos abiertos con los que trabajaremos son de la forma $B_r(x) = \{y \in V \mid \| x - y \| < r\}$ y diremos que $B_r(x)$ es la **bola abierta** con centro x y radio r. Además, al conjunto $\overline{B_r(x)} = \{y \in V \mid \| x - y \| \leq r\}$ lo llamaremos la **bola cerrada** con centro en x y radio r.

a) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ con, $\|\cdot\|$ la norma euclidiana, es un espacio **normal** . (es decir, para cada pareja de subconjuntos cerrados y ajenos A, B de $\mathbb{R}^n$ existen abiertos U, V de $\mathbb{R}^n$ tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Si además, se tienen V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita, tenemos el siguiente resultado importante, que también usamos a lo largo del presente trabajo.

Definición A.3.8. *[BN] Sea V un K-espacio vectorial, decimos que $\mathcal{B}$ es* **base** *de V si $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, (i.e., $\forall S \subset \mathcal{B}$, S finito, S es linealmente independiente) y $\mathcal{B}$ genera, (i.e., $\forall v \in V$, $v = \sum \lambda_i v_i$, suma finita).*

Teorema A.3.9. *Sean V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita. Sea $f : V \longrightarrow W$ lineal entonces f es continua.*

A.3.10. También, a lo largo de nuestro trabajo y muy frecuentemente se usa la **norma euclidiana** (o usual) que se define como sigue:

Si $V = \mathbb{R}^n$. Sea $x \in V$, entonces,

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Además, para $V = \mathbb{R}^n$ se tiene el siguiente lema:

Lema A.3.11. *[E] Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M es cerrado y convexo. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe un único $x' \in M$ tal que*

$$\| x - x' \| = \inf_{y \in M} \| x - y \| . \qquad (*)$$

Demostración: La existencia de x' que cumple (*) se tiene, pues M es cerrado.

Para la unicidad, supongamos que existe $x'' \in M$, $x'' \neq x'$ tal que

$$\| x - x'' \| = \inf_{y \in M} \| x - y \| .$$

Tomemos el triángulo isósceles cuyos vértices son: x, x', x''.

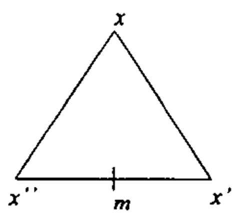

figura A.3.11

Como $x' \neq x''$, $d(x', x'') := \| x' - x'' \| \geq 0$ entonces sea $m = \frac{1}{2}(x' + x'')$ el punto medio del segmento de línea entre x', x'', el cual, está en M, pues es conexo. Pero m cumple con $\| x - m \| < \inf_{y \in M} \| x - y \|$, contradicción.

Por lo tanto, $x' = x''$. ■

Teorema A.3.12. (Jordan) *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $f : V \longrightarrow V$ lineal. Entonces $\exists \mathcal{B}$ base de V tal que la matriz asociada a f respecto a la base $\mathcal{B}$ es una matriz de Jordan.*

Definición A.3.13. *[Ba] Sea V un espacio vectorial normado. Se dice que una sucesión $\{x_n\} \subseteq V$ es una* **sucesión de Cauchy** *si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$ tal que $\forall m, n \geq N(\varepsilon)$, $\| x_m - x_n \| < \varepsilon$.*

Teorema A.3.14. *(***Criterio de convergencia de Cauchy***). [Ba] Una sucesión en V es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

BIBLIOGRAFÍA.

[Ba] R.G. Bartle. Introducción al análisis matemático. Limusa, México, (1992).

[Bi] G. Birkhoff, Linear transformations with invariant cones, Am. Math. Monthly 74:274-276 (1967).

[BN] G. Bachman. L. Narici. Functional Analysis, Academic Press. New York, (1966).

[BS] G.P. Barker and H. Schneider. Algebraic Perron-Frobenius theory, Linear Algebra and Appl. 11:219-233 (1975).

[BTu] G.P. Barker and R.E.L. Turner. Some Observations on the Spectra of cone Preserving Maps, Linear Algebra and Appl. 6:149-153 (1973).

[Ch] Chistenson. Aspects of topology. Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, (1977).

[E] G. Ewald. Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry, Springer, New York, (1996).

[F1] G. Frobenius. Über Matrizen aus positiven Elementen. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. 1908, pp. 471-476.

[F2] G. Frobenius. Über Matrizen aus positiven Elementen. II. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1909, pp. 514-518.

[F3] G. Frobenius, Über Matrizen aus nicht negative Elementen, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. 1912. pp. 456-477.

[Gm] F.R. Gantmacher, The theory of matrices, Vol. I y II. Chelsea, New York (1959).

[H] P.R. Halmos. Finite-Dimensional Vector Spaces, Van Nostrand, Princeton. (1958).

[LTa] D.C. Lay and A.E. Taylor. Introduction to functional analysis. John Wiley & sons. New York. (1980).

[P] J.A. de la Peña. Álgebra lineal avanzada. UNAM. fondo de cultura económica. México. (1996).

[Pe] O. Perron. Zur Theorie der Matrices. Math. Ann. 63:248-263 (1907).

[T1] M. Takane, Conos en Teoría de Representaciones de Algebras, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 7, Soc. Mat. Mexicana, 157-174 (1989).

[T2] M. Takane, Propiedades espectrales de las matrices de Coxeter y las matrices de adyacencia de las álgebras hereditarias de tipo salvaje. Tesis de doctorado, UNAM, México, (1992).

[R] W. Rudin, Principles of mathematical Analysis, McGraw-Hill, Inc. New Yorw, (1976).

[Sc] H.H. Schaefer, Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, New York, (1986).

[W] H. Wielandt, Unzerlebare nicht-negative Matrizen, Math. Zeitsch. 52:642-648 (1950).

[Wi] S. Willard, General Topology, Addison-Wesley, Reading Mass., (1970).

[V] J.S. Vandergraft, Spectral properties of matrices which have invariant cones, SIAM J. Appl. Math. 16:1208-1222 (1968).