

5
2 ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

La Conjetura de Borsuk

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

Óscar Chávez López



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Director de tesis:
Dr. Carlos Bosch Giral



FACULTAD DE CIENCIAS
DIRECCIÓN ESCOLAR

270342

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

La conjetura de Borsuk

realizado por Oscar CHávez López

con número de cuenta 8351597-4 , pasante de la carrera de Matemático

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dr. Carlos Bosch Giral

Carlos Bosch Giral

Propietario

Dr. Luis Montejano Peimbert

Luis Montejano Peimbert

Propietario

M. en C. Ana Irene Ramirez Galarza

Ana Irene Ramirez Galarza

Suplente

Dra. María de la Paz Alvarez Scherer

María de la Paz Alvarez Scherer

Suplente

Dr. Alejandro Díaz Barriera Casales

Alejandro Díaz Barriera Casales

Consejo Departamental de Matemáticas

[Signature]

LA CONJETURA DE BORSUK

Óscar Chávez López

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Let $X = X$. You know, it could be you.

LAURIE ANDERSON

Die folgende Frage bleibt offen: *Lässt sich jede beschränkte Teilmenge E des Raumes R^n in $(n + 1)$ Mengen zerlegen, von denen jede einen kleineren Durchmesser als E hat?*

KAROL BORSUK

Índice

1. Introducción	1
2. Conceptos preliminares	3
3. La conjetura de Borsuk en E^2	7
4. La conjetura de Borsuk en E^3	11
5. La conjetura de Borsuk en E^n	24
6. El contraejemplo de Kahn–Kalai	26
6.1. Descripción de la construcción	28
6.2. Un ejemplo	30
6.3. El teorema de Frankl–Wilson y la conjetura de Borsuk . . .	32

1. Introducción

Imaginemos un conjunto en el plano tal que la mayor distancia entre dos de sus puntos sea igual a d . Supongamos, por simplicidad, que el conjunto es conexo. ¿Cómo podemos partirlo en conjuntos *más pequeños*? La respuesta depende, desde luego, de la forma del conjunto. Si los puntos de este conjunto forman un rectángulo, por ejemplo, bastará un corte perpendicular al lado más largo para dividir al conjunto original en dos subconjuntos de tamaño menor. Si los puntos de este conjunto forman un círculo de diámetro d , será imposible dividirlo en dos conjuntos de menor tamaño, pues siempre habrá dos puntos antípodas en los subconjuntos (o en la cerradura de éstos). Por tanto, necesitaremos hacer una partición del círculo en tres subconjuntos para garantizar que en cada uno de ellos los puntos distan unos de otros una distancia menor que d . Aparentemente, siempre es posible dividir un conjunto acotado de puntos en el plano en tres subconjuntos de más pequeños.

En 1933, Karol Borsuk [2] se preguntaba si un conjunto de diámetro d (más adelante formalizaremos el concepto de *diámetro*) en el espacio euclidiano de dimensión n se podría dividir en $n + 1$ subconjuntos de diámetro menor que d . Aunque él no expresó esto como una conjetura, sino sólo como una pregunta abierta, este problema es conocido como la *conjetura de Borsuk*.

Conjetura 1 *Todo conjunto de diámetro d en E^n se puede dividir en $n + 1$ subconjuntos cerrados de diámetro menor que d .*

Esta conjetura fue considerada cierta durante muchos años. Grünbaum [7] describió con precisión el reto principal: «Uno de los aspectos más interesantes de esto es la gran discrepancia entre la formulación elemental del problema y las insuperables dificultades de su solución».

Muy pronto se demostró esta conjetura en el caso bidimensional. El caso tridimensional permaneció abierto hasta 1955, cuando Eggleston [3] dio una demostración para cualquier conjunto de diámetro 1 en E^3 .

En este trabajo presentaremos la demostración de esta conjetura en E^2 y E^3 , así como en casos particulares para dimensiones mayores. Considerare-

mos conjuntos de diámetro 1, ya que no se pierde generalidad al hacerlo y la exposición resulta más clara. Expondremos también un contraejemplo, construido por Kahn y Kalai [8] en 1992, que invalida el caso general.

En la primera parte, se utilizan técnicas y conceptos de geometría elemental y de la teoría de conjuntos convexos, principalmente. Sin embargo, para encontrar un contraejemplo, Kahn y Kalai [8] tuvieron que recurrir a métodos de combinatoria. La construcción de Kahn-Kalai requiere de conjuntos finitos de puntos en espacios de dimensión muy grande, así como de formas diferentes de medir la distancia entre puntos de estos conjuntos. Las «insuperables dificultades» que esta conjetura presentaba fueron finalmente superadas gracias a un enfoque radicalmente distinto de aquellos que se utilizaron en dimensiones bajas. El mérito de Kahn-Kalai fue valerse de un resultado de Frankl y Wilson [4] que aparentemente no tenía relación alguna con la conjetura de Borsuk.

2. Conceptos preliminares

Algunos conceptos y técnicas de la teoría de conjuntos convexos se utilizan en este trabajo. Para formalizar los términos empleados será necesario dar algunas definiciones.

Definición 2.1 Sean x y y puntos en E^n , el espacio euclidiano de dimensión n , el **segmento** \overline{xy} que une x y y es el conjunto de todos los puntos de la forma $\alpha x + \beta y$ donde $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ y $\alpha + \beta = 1$.

Definición 2.2 Para cualquier $x \in E^n$ y $\delta > 0$, la **bola abierta** $B(x, \delta)$ con centro en x y radio δ está dada por

$$B(x, \delta) \equiv \{y \in E^n : d(x, y) < \delta\}.$$

Definición 2.3 Decimos que un punto x es un **punto interior** del conjunto S si existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset S$.

Definición 2.4 Un conjunto S es **abierto** si cada uno de sus puntos es un punto interior de S .

Definición 2.5 Un conjunto S es **cerrado** si su complemento $S^c = \{x : x \in E^n \text{ y } x \notin S\}$ es abierto.

Definición 2.6 Decimos que un conjunto S es **acotado** si existe $\delta > 0$ tal que $S \subset B(\theta, \delta)$.

Definición 2.7 Un subconjunto S de E^n es **compacto** si es cerrado y acotado.

Definición 2.8 El **interior** de un conjunto S , $\text{int } S$, es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en S . La **cerradura** de S , \overline{S} , es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a S .

Definición 2.9 La **frontera** de un conjunto S es

$$\text{fr } S \equiv \overline{S} \cap \overline{S^c}.$$

Si $x \in \text{fr } S$, decimos que x es un **punto frontera** de S .

Definición 2.10 Un conjunto S es **convexo** si para cada par de puntos x y y en S se tiene que $\overline{xy} \subset S$.

Dado cualquier conjunto en E^n , podemos construir un conjunto convexo que lo contenga. Por ejemplo, si el conjunto dado es acotado, basta una bola de dimensión n con radio suficientemente grande. Si entre todos los conjuntos convexos que contienen a un conjunto dado tomamos el más pequeño posible, tenemos el *casco convexo* de dicho conjunto.

Definición 2.11 El **casco convexo** de un conjunto es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen al conjunto dado.

Son subespacios lineales de E^3 las rectas por el origen (de dimensión 1) y los planos por el origen (de dimensión 2). Las rectas y planos en E^3 son trasladados de estos subespacios. En general, en E^n , la dimensión de un trasladado de un subespacio es la dimensión del subespacio correspondiente. La dimensión de un conjunto S es la dimensión del trasladado del subespacio más pequeño que lo contenga. A un trasladado de un subespacio de dimensión $n - 1$ se le llama **hiperplano**.

Definición 2.12 El **casco convexo** de un conjunto finito de puntos es un **politopo** (o **politopo convexo**). Si $S = \{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ y la dimensión de S es k , entonces se dice que el casco convexo de S es un **simplejo de dimensión k** (o un **k -simplejo**). Los puntos x_1, \dots, x_{k+1} son los **vértices**.

Una recta tangente a un círculo en el plano tiene un punto en común con la circunferencia y además divide al plano en dos semiplanos con la propiedad de que el círculo queda enteramente contenido en uno de ellos. Este concepto puede extenderse a dimensiones mayores y a conjuntos diferentes de círculos (o esferas).

Una recta en E^2 y un plano en E^3 pueden representarse por ecuaciones de las formas $\alpha x_1 + \beta x_2 = \delta$ y $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$, respectivamente. Un hiperplano en E^n puede representarse por una ecuación análoga, una funcional lineal, i.e. una función de E^n en \mathbb{R} , $f(x) = \alpha$. Para tal función, denotaremos el conjunto $\{x \in E^n : f(x) = \alpha\}$ por $[f : \alpha]$.

El hiperplano $H \equiv [f : \alpha]$ divide a E^n en dos conjuntos: $\{x \in E^n : f(x) \geq \alpha\}$ y $\{x \in E^n : f(x) \leq \alpha\}$, cuya intersección es H mismo. Decimos que H **acota** a $S \subset E^n$ si S está enteramente contenido en uno de estos dos conjuntos.

Definición 2.13 Decimos que un hiperplano H es un **hiperplano soporte** de un conjunto S en un punto $x \in S$ si $x \in H$ y H acota S .

Si H_1 es un hiperplano soporte de F y H_2 es un hiperplano paralelo a H_1 y es un hiperplano soporte de $G \subset E^n$, decimos que F y G están *del mismo lado* de sus respectivos hiperplanos soporte si el semiespacio donde se encuentra contenido uno de los dos conjuntos está enteramente contenido en el semiespacio que contiene al otro.

El diámetro de un círculo puede verse como la distancia entre dos tangentes al mismo paralelas entre sí. Un conjunto compacto cualquiera en E^n no necesariamente es convexo o de frontera suave (sin *picos*). Sin embargo podemos medirlo en forma análoga, usando el concepto de hiperplano soporte.

Definición 2.14 Sea S un subconjunto de E^n compacto no vacío y sea ℓ una recta en E^n . El **ancho de S en la dirección de ℓ** es la distancia entre dos hiperplanos soporte de S que son perpendiculares a ℓ y que contienen a S entre ellos.

Definición 2.15 Sea S un subconjunto de E^n acotado no vacío. Decimos que d es el **diámetro** de S si

$$d = \sup_{\substack{x \in S \\ y \in S}} \|x - y\|$$

Aunque el ancho en una dirección dada no necesariamente corresponde a la distancia entre dos puntos de S , el diámetro sí está definido en términos de las distancias entre puntos de S . Sin embargo, existe una relación importante entre el diámetro de un conjunto y su ancho, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *El diámetro de un conjunto compacto no vacío S en E^n es igual al ancho máximo de S .*

En general, el ancho de un conjunto varía según la dirección. Sin embargo, existen conjuntos en los cuales el ancho es el mismo en cualquier dirección. Estos conjuntos, que se denominan conjuntos de **ancho constante**, han sido fuente de muy importantes resultados, particularmente en E^2 .

Las demostraciones de la conjetura de Borsuk en E^2 y E^3 que se dan en este trabajo se basan en la idea de encontrar un conjunto que contenga al conjunto dado. Así, basta con hacer explícita una división del conjunto mayor que induzca una división del conjunto original. El concepto fundamental detrás de este método es el de *cubierta universal*.

Definición 2.16 *Un subconjunto compacto $K \subset E^n$ es una **cubierta universal** en E^n si cualquier subconjunto S de E^n que tenga diámetro igual a 1 puede ser cubierto por una copia congruente de K .*

Finalmente, para hablar de *dividir* un conjunto o de las partes en las que se divide un conjunto, necesitamos formalizar este concepto.

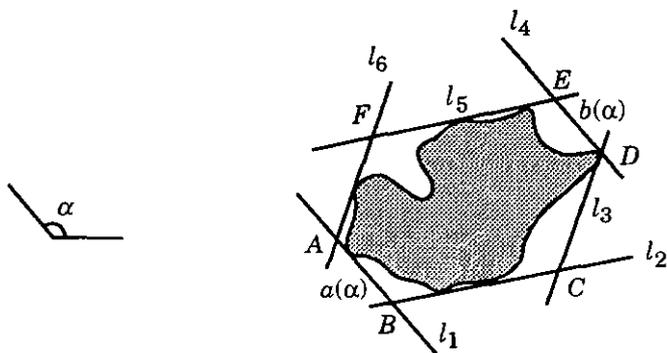
Definición 2.17 *Una **partición** de un conjunto S es una familia de subconjuntos disjuntos de S tal la unión de todos ellos es igual a S . Decimos que tales subconjuntos son los **elementos de la partición**.*

3. La conjetura de Borsuk en E^2

La demostración que presentamos aquí para el caso bidimensional se basa en el concepto de cubierta universal y en un resultado obtenido por Pál en 1920.

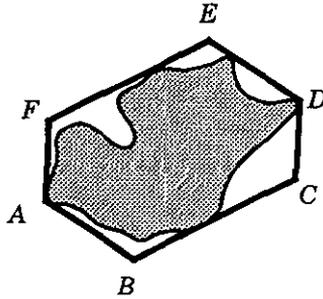
Lema 3.1 *El hexágono regular cuyos lados miden $1/\sqrt{3}$ es una cubierta universal en E^2 .*

Demostración Sea S un conjunto de diámetro 1. Para alguna dirección α , inscribimos S en un hexágono equiangular tal que uno de sus lados sea paralelo a dicha dirección. Para ello, consideremos dos rectas soporte de S , l_1 y l_4 , paralelas entre sí y paralelas a la dirección α . Por hipótesis, la distancia d entre ambas rectas soporte es menor o igual que 1. Consideremos las rectas soporte l_2 y l_5 , tales que formen un ángulo de 60° con l_1 , como se indica en la figura, y sean l_3 y l_6 dos rectas soporte que formen un ángulo de 120° con l_1 . De acuerdo con la figura, sean A, B, C, D, E y F los vértices del hexágono formado por las rectas l_1, l_2, \dots, l_6 .

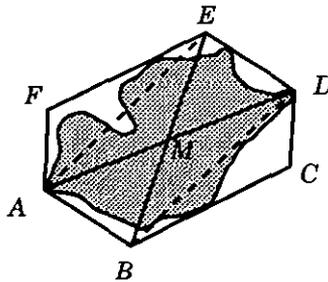


Sean $a(\alpha)$ la longitud de AB y $b(\alpha)$ la de su lado opuesto. Si $a(\alpha) \neq b(\alpha)$, supongamos que $a(\alpha) - b(\alpha) > 0$. Entonces $a(\alpha + 180^\circ) - b(\alpha + 180^\circ) < 0$ ya que $a(\alpha + 180^\circ) = b(\alpha)$ y $b(\alpha + 180^\circ) = a(\alpha)$ pues para la dirección dada por $\alpha + 180^\circ$ la recta soporte l_1 ocupará el lugar de l_4 . Así, dado que la diferencia $a(\alpha + 180^\circ) - b(\alpha + 180^\circ)$ varía en forma continua desde un

valor positivo a uno negativo, por el *Teorema del Valor Intermedio* existe alguna dirección $\alpha_0 \in (\alpha, \alpha + 180^\circ)$ tal que $a(\alpha_0) = b(\alpha_0)$, i.e. $AB = DE$.

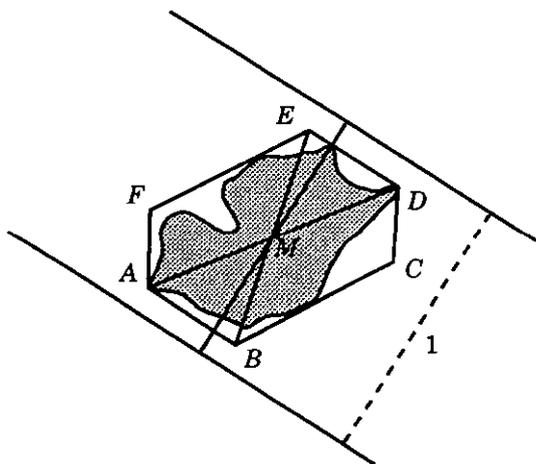


Consideremos ahora las diagonales AD y BE . Sea M su intersección. Por la forma en la que el hexágono fue construido, tenemos que $AB \parallel DE$ y, como acabamos de demostrar, $AB = DE$, entonces $\triangle AMB \cong \triangle DME$. Por lo tanto, $\triangle AME \cong \triangle DMB$ y así $BD = EA$. Como $BC \parallel EF$ y $CD \parallel FA$ entonces tenemos que $\angle DBC = \angle AEF$ y $\angle BDC = \angle EAF$. Por lo tanto $\triangle BCD \cong \triangle EFA$ y por lo tanto $BC = EF$ y $CD = FA$, i.e. los lados opuestos del hexágono $ABCDEF$ son iguales.

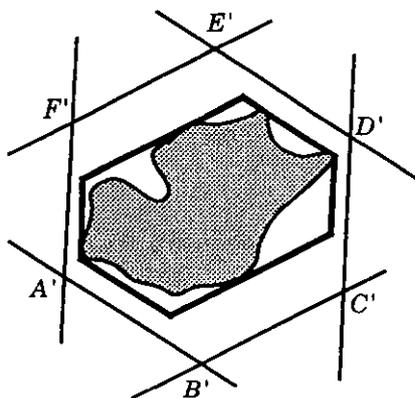


Además, puede verse que la diagonal FC debe ser concurrente con AD y BE , por lo que el hexágono es simétrico respecto del punto M .

Trazamos un segmento de longitud 1 perpendicular a AB y cuyo punto medio sea M . Por los extremos de este segmento trazamos paralelas a AB .



De manera análoga construimos pares de paralelas a los lados restantes del hexágono $ABCDEF$ de modo que la distancia entre cada par de ellas sea 1. Sean A' , B' , C' , D' , E' y F' sus intersecciones, como se indica en la figura.



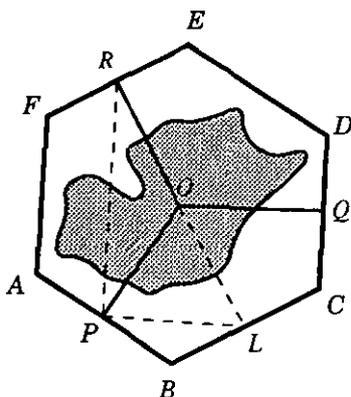
El hexágono $A'B'C'D'E'F'$ así construido es simétrico respecto de M y por lo tanto sus lados opuestos son iguales. Por construcción, las distancias entre cada par de lados opuestos son iguales, por lo que el hexágono $A'B'C'D'E'F'$ es regular y cada uno de sus lados mide $1/\sqrt{3}$.

El hexágono $A'B'C'D'E'F'$ contiene a S , es una cubierta universal. Ningún hexágono regular más pequeño puede ser una cubierta universal, ya que no cubriría un círculo de diámetro 1. ■

Teorema 3.1 *Todo conjunto de diámetro 1 en E^2 puede verse como la unión de tres subconjuntos disjuntos de diámetro menor que 1.*

Demostración Sea S de diámetro 1. Por el lema anterior, existe un hexágono regular $ABCDEF$ de lado $1/\sqrt{3}$ que cubre a S .

Sean P , Q y R los puntos medios de AB , CD y EF , respectivamente, y sea O el centro de simetría del hexágono $ABCDEF$.



Los pentágonos congruentes $PBCQO$, $QDERO$ y $RFAP O$ dividen al hexágono y cada uno de ellos tiene diámetro menor que el de S , ya que en el triángulo RPL el ángulo en P es recto, por lo que $RP < RL = 1$. De hecho, $RP = \sqrt{3}/2$.

Para cada uno de los pentágonos consideremos el subconjunto de S que queda contenido en él. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los puntos de la frontera $S \cap (PO \cup OQ)$ pertenecen al subconjunto determinado por el pentágono $PBCQO$ y los de $S - \{O\} \cap RO$ al subconjunto determinado por el pentágono $QDERO$.

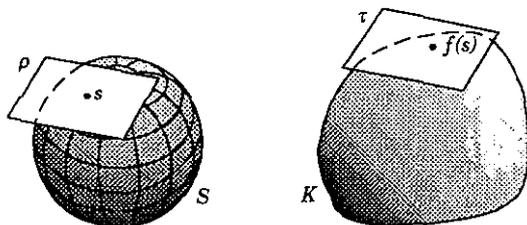
Los subconjuntos de S así determinados tienen diámetro menor o igual a $\sqrt{3}/2$. ■

4. La conjetura de Borsuk en E^3

Como la demostración de Eggleston [3] de la conjetura de Borsuk para conjuntos en E^3 es laboriosa, sólo expondremos aquí las ideas principales de su trabajo.

La demostración de Eggleston se basa en el hecho de que dos puntos de un conjunto convexo X de diámetro 1 están a una distancia 1 sólo si ambos están en la frontera de X y existen planos soporte paralelos que pasan por cada uno de dichos puntos.

Dado que todo conjunto de diámetro 1 está contenido en un conjunto de ancho constante igual a 1, es suficiente establecer la validez del resultado para dichos conjuntos. Eggleston define una función continua f de una esfera S sobre un conjunto K de ancho constante igual a 1 haciendo corresponder planos soporte paralelos. Si ρ es el plano tangente a S en s , definimos $f(s)$ como el punto sobre la superficie de K en el cual el plano soporte τ correspondiente es paralelo a ρ y es tal que K se encuentra del mismo lado de τ que S de ρ . Dado que K es de ancho constante, cada plano soporte toca un sólo punto de la superficie de K , por lo que $f(s)$ está bien definido.

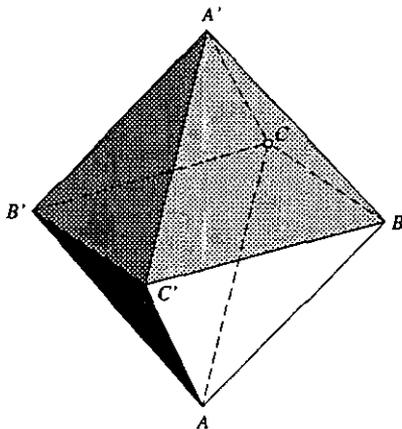


Las propiedades de esta función permiten definir una partición de K inducida por una partición de S . Eggleston ofrece un método para dividir S en cuatro conjuntos S_1, S_2, S_3, S_4 cerrados y tales que cada uno de los conjuntos $f^{-1}(f(S_i)), i = 1, 2, 3, 4$ no contenga puntos antípodas de S . De esta manera, y gracias a las propiedades de la función, los conjuntos $f(S_i) \subset K$ son cerrados y $d(f(S_i)) < 1$. Así, los cuatro conjuntos $f(S_i)$ dividen a K en la forma requerida.

Grünbaum [6] demostró la conjetura de Borsuk construyendo una cubierta universal en E^3 . Para ello usa un resultado que Gale [5] probó en el caso general y que aquí demostraremos sólo para el caso correspondiente a E^3 por ser el que necesitamos.

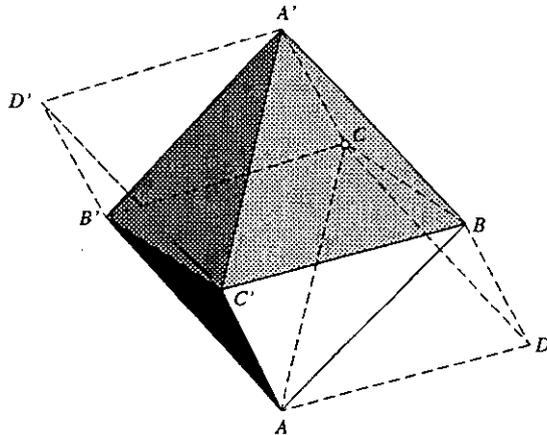
Lema 4.1 *Sea S un subconjunto de E^3 de diámetro 1. Entonces S puede ser inscrito en un octaedro regular cuyas caras opuestas están a una distancia 1.*

Demostración Consideremos el octaedro regular $ABCA'B'C'$ —con A y A' , B y B' , C y C' pares de vértices opuestos— en el cual las caras opuestas están a una distancia igual a 1.

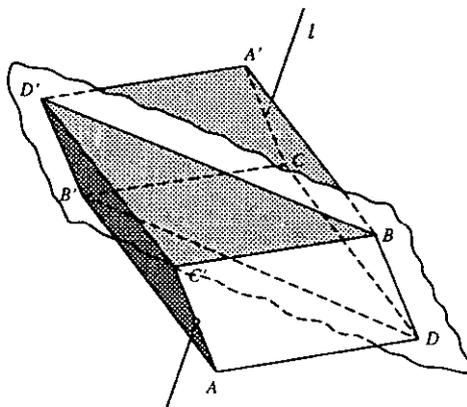


Cada una de las ocho caras del octaedro tiene una cara opuesta paralela. Considérense los planos ABC' y $A'B'C$, $AB'C$ y $A'BC'$, $A'BC$ y $AB'D'C'$. Estos tres pares de planos paralelos determinan el paralelepípedo $AB'CDA'BC'D'$, como se muestra en la figura siguiente (las caras de este paralelepípedo son $ADBC'$, $A'D'B'C$, $A'BC'D'$, $ADCB'$, $A'BDC$ y $AB'D'C'$). Sea Φ este paralelepípedo. La distancia entre los lados opuestos de Φ es 1. Además, la diagonal DD' es perpendicular a los planos ABC y $A'B'C'$, no tomados en cuenta para la construcción de Φ . Así, un paralelepípedo congruente con Φ tiene la propiedad de que, si dos planos son

perpendiculares a la diagonal correspondiente a DD' y están a una distancia de $1/2$ del centro del paralelepípedo, éstos cortan dos pirámides de base triangular con vértices en los correspondientes a D y D' , respectivamente, formándose así un octaedro congruente con el octaedro $ABCA'B'C'$.



El plano $BDB'D'$ es un plano de simetría de Φ y la línea l , perpendicular a este plano y que pasa por el centro de la diagonal DD' , es su eje de simetría. Por tanto, si el paralelepípedo se rota 180° alrededor de l , quedará en la misma posición.



Sea S un conjunto en E^3 de diámetro 1. Consideremos dos planos soporte paralelos a la cara $AB'CD$ del paralelepípedo Φ , de modo que S quede entre ellos. Construyamos dos pares más de planos soporte, paralelos a las otras caras del paralelepípedo. Así tenemos un paralelepípedo que cubre a S y cuyas caras son paralelas a las de Φ . Denotémoslo por Π , y a su diagonal correspondiente a DD' por EE' . Construyamos otros dos planos soporte de S perpendiculares a la diagonal DD' de Φ , sean α y β dichos planos. Sean M y M' los puntos en α y β , respectivamente, tales que EM y $E'M'$ sean las perpendiculares desde E y E' a estos dos planos, y sea $y = EM - E'M'$.

Supongamos que $EM \neq E'M'$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $EM < E'M'$, de modo que y es negativa. Si rotamos Φ en forma continua alrededor de l , la diferencia $y = EM - E'M'$ también varía continuamente. Cuando hemos rotado 180° , E y E' han intercambiado lugares, de modo que $y > 0$. Por el *Teorema del Valor Intermedio*, existe un ángulo de rotación para el cual $y = 0$, i.e. $EM = E'M'$. Supondremos que ésta es la posición inicial de Φ , y por lo tanto de Π .

Si la distancia entre dos de las caras opuestas de Π es menor que 1, moveremos los planos alejándolos del centro del paralelepípedo la misma distancia hasta que la distancia entre ellos sea igual a 1. Procedemos análogamente con los tres pares de caras opuestas de Π y con los planos α y β . De esta manera, obtenemos un nuevo paralelepípedo Π^* , congruente con el paralelepípedo inicial Φ , así como dos planos α^* y β^* perpendiculares a la diagonal DD' , a una distancia igual a $1/2$ del centro de Π^* . Estos planos cortan dos pirámides de Π^* y la parte restante es un octaedro regular. Por la forma en la que fue construido, es claro que S está contenido dentro de este octaedro. ■

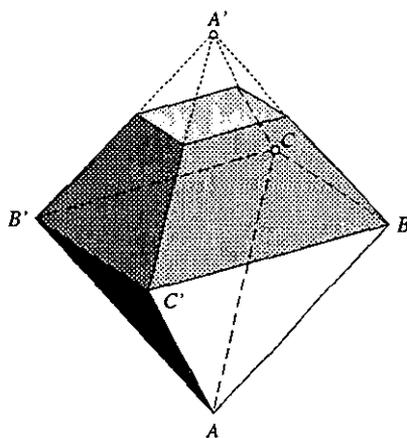
A partir de este octaedro, construiremos una cubierta universal en E^3 , para probar la conjetura de Borsuk en el caso tridimensional.

Teorema 4.1 *Sea S un subconjunto de E^3 con diámetro 1, entonces S puede ser representado como la unión de cuatro conjuntos de diámetro menor que 1.*

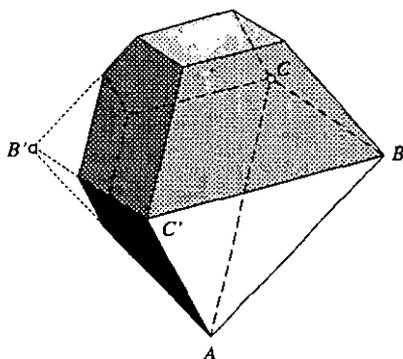
Demostración Sea S un subconjunto de E^3 con diámetro igual a 1. Por el

lema anterior, existe un octaedro $ABCA'B'C'$ regular cuyas caras opuestas distan 1, que contiene al conjunto S . Consideremos los planos γ y γ' , perpendiculares a la diagonal AA' y situados a una distancia $1/2$ del centro del octaedro. Estos planos cortan dos pirámides (cuyos vértices son A y A') del octaedro. El interior de una de ellas no contiene puntos de S , ya que si x y y son puntos interiores de cada una de estas pirámides, la distancia entre ellos sería mayor que 1, pues la distancia entre los planos γ y γ' es 1. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el interior de la pirámide con vértice en A' no contiene puntos de S .

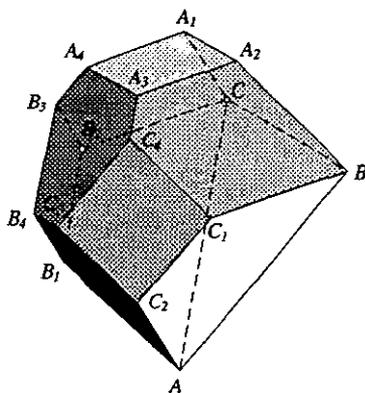
El conjunto S queda enteramente contenido dentro del octaedro trunca- do, es decir, dentro del poliedro formado una vez que hemos removido la pirámide con vértice en A' .



Construyamos dos planos perpendiculares a la diagonal BB' , situados a una distancia $1/2$ del centro del octaedro. De nuevo tenemos dos pirámides, una de las cuales no contiene puntos de S . Sin pérdida de generalidad, supongamos que es la pirámide con vértice en B' aquella cuyo interior no contiene puntos de S . El nuevo poliedro que se obtiene al eliminar esta pirámide contiene al conjunto S .



Construyendo de manera análoga pirámides con vértices en C y C' , eliminamos aquella cuyo interior no contiene puntos de S . Sin pérdida de generalidad, supongamos que ésta sea la que tiene vértice en C' . V , el poliedro así construido, es un octágono truncado en tres de sus vértices. Tiene 11 caras: un hexágono (que podríamos llamar la *base superior*) $C_3C_4A_3A_4B_3B_4$; tres cuadrados $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ y $C_1C_2C_3C_4$; tres pentágonos $AC_2C_3B_4B_1$, $BA_2A_3C_4C_1$ y $CB_2B_3A_4A_1$; tres trapecios ABC_1C_2 , BCA_1A_2 y CAB_1B_2 y un triángulo ABC (la *base inferior*).



Más adelante —cuando presentemos en detalle la división de V en cuatro partes— describiremos el poliedro V usando un sistema de coordenadas, por ahora daremos las dimensiones de cada una de las caras de V :

Los ángulos del hexágono $C_3C_4A_3A_4B_3B_4$ miden $2\pi/3$, y además $A_3A_4 = B_3B_4 = C_3C_4 = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2}$ y $C_4A_3 = A_4B_3 = B_4C_3 = (2 - \sqrt{3})/\sqrt{2}$.

Los pentágonos son congruentes con $BA_2A_3C_4C_1$, en el cual $BA_2 = BC_1 = 1/\sqrt{2}$, el ángulo en B es $\pi/3$ y los demás $2\pi/3$.

Los trapecios son congruentes con ABC_1C_2 , en el cual los ángulos en A y B miden $\pi/3$ y los otros dos $2\pi/3$.

El triángulo ABC , única cara del octaedro original que queda igual, es equilátero y sus lados miden $\sqrt{3}/\sqrt{2}$.

El diámetro de V es $d = \sqrt{2}$, que es la distancia del vértice A a cualquiera de los cuatro vértices del cuadrado $A_1A_2A_3A_4$. Por la forma en que fue construido, es claro que es una cubierta universal.

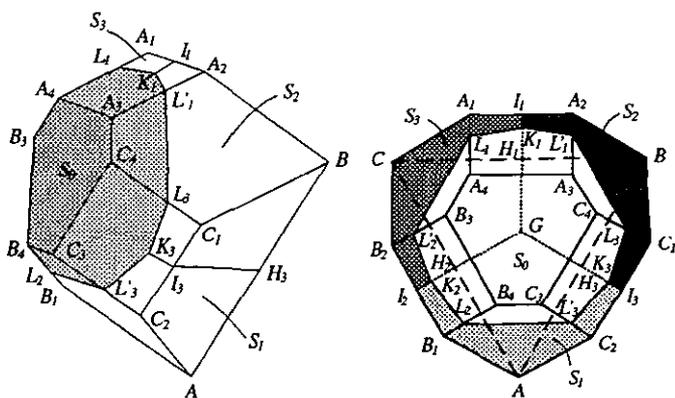
Ahora debemos dividir V en cuatro partes, cada una con diámetro menor a d . Para ello bastará con dividir la superficie de V . Las partes en las que dividiremos el poliedro V son: una *tapa*, cortando V con un plano paralelo al hexágono $C_3C_4A_3A_4B_3B_4$, y tres poliedros correspondientes a cada uno de los tres vértices de la cara ABC .

Sea G el centro del triángulo equilátero ABC , H_1 , H_2 y H_3 los puntos medios de los lados de dicho triángulo y sean I_1 , I_2 e I_3 los puntos medios de las bases menores de los trapecios. Sean K_1 , K_2 y K_3 puntos en las caras cuadradas, cuya posición exacta daremos después, al igual que la de los puntos L_1 , L'_1 , L_2 , L'_2 , L_3 y L'_3 , los cuales están en las aristas A_1A_4 , A_2A_3 , B_1B_4 , B_2B_3 , C_1C_4 y C_2C_3 .

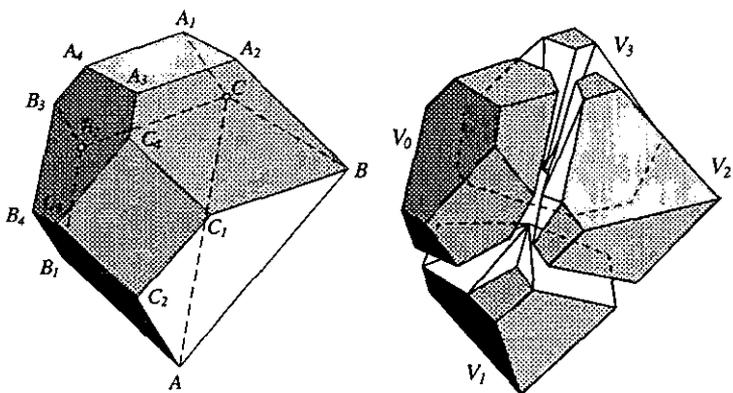
Ahora dividiremos la superficie de V en cuatro partes S_0 , S_1 , S_2 y S_3 , determinadas, respectivamente, por los vértices

$$L'_1K_1L_1L'_2K_2L_2L'_3K_3L_3L'_1 \quad GH_2I_2K_2L_2L'_3K_3I_3H_3G$$

$$GH_3I_3K_3L_3L'_1K_1I_1H_1G \quad GH_1I_1K_1L_1L'_2K_2I_2H_2G$$



Sea O el centro del octaedro del que obtuvimos el poliedro V . Sea V_0 el poliedro cuyas aristas son aquellas que determinan la región S_0 y las que resultan al unir O con cada uno de los vértices de S_0 . Sean V_1, V_2 y V_3 definidos en forma análoga. Puede decirse que estos cuerpos son parecidos a pirámides que tuvieran su vértice en O y su "base" en cada una de las regiones S_i (abusando un poco del término, ya que estas "bases" no son planas, son regiones sobre la superficie de V).



Éstas son las cuatro partes en las que podemos dividir V . Dado que el diámetro de un conjunto es igual al de su cerradura, no es importante a quién pertenecen los puntos de las caras comunes. Sin pérdida de genera-

lidad, podemos suponer que los cuatro cuerpos son cerrados. Por la forma en la que han sido construidos, es claro que V es la unión de los cuatro V_i .

Para poder determinar las posiciones de los puntos K_i , L_i y L'_i es necesario describir V usando un sistema de coordenadas. Las posiciones de dichos puntos deberán ser aquellas que nos permitan demostrar que el diámetro de cada una de las cuatro partes construidas sea menor que 1.

Sean los puntos

$$\begin{array}{ccc} A \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0 \right) & B \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) & C \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ A' \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0 \right) & B' \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) & C' \left(0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{array}$$

Estos seis puntos son los vértices de un octaedro regular. La ecuación del plano donde está la cara ABC es $x + y + z = \sqrt{3}/2$. Este plano está a una distancia igual a $1/2$ del centro del octaedro, i.e. del origen. Así, tenemos que la distancia entre las caras opuestas de este octaedro es igual a 1.

El plano que corta la pirámide con vértice en A' es un plano paralelo a $x = 0$ y a una distancia $1/2$ en dirección de A' , por lo que su ecuación es $x = -1/2$. De la misma manera, puede verse que los planos que cortan las pirámides correspondientes a B' y C' son, respectivamente $y = -1/2$ y $z = -1/2$.

Los vértices A_i están en el plano $x = -1/2$ y A_1 está en las caras $A'BC$ y $A'B'C$ del octaedro original, las cuales están en los planos cuyas ecuaciones son, respectivamente, $x - y - z = -\sqrt{3}/2$ y $x + y - z = -\sqrt{3}/2$. Por lo tanto, las coordenadas de A_1 son:

$$A_1 \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$$

De manera análoga, tenemos que las coordenadas de los vértices A_i restantes son:

$$A_2 \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, 0 \right) \quad A_3 \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \quad A_4 \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 0 \right)$$

Los vértices B_1 están en el plano $y = -1/2$, el vértice B_1 está en las caras $AB'C$ y $AB'C'$ cuyos planos tienen ecuaciones $x - y + z = \sqrt{3}/2$ y $x - y - z = \sqrt{3}/2$, respectivamente, por lo que sus coordenadas son:

$$B_1 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$$

Análogamente, tenemos:

$$B_2 \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) B_3 \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right) B_4 \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$$

Los vértices C_i están en el plano $z = -1/2$, el vértice C_1 está en las caras ABC' y $A'BC'$, es decir, en los planos $x+y-z = \sqrt{3}/2$ y $x-y+z = -\sqrt{3}/2$, respectivamente. Sus coordenadas son:

$$C_1 \left(0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

Análogamente:

$$C_2 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right) C_3 \left(0, -\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{1}{2} \right) C_4 \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

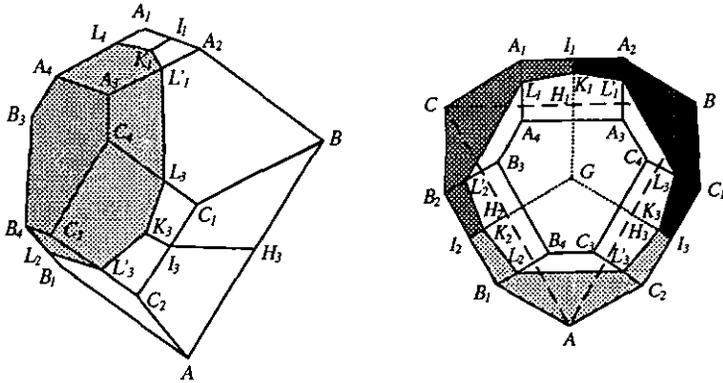
Ahora podemos determinar las coordenadas de los vértices de los poliedros V_0, V_1, V_2 y V_3 .

El punto G tiene coordenadas $x = y = z = (\sqrt{3}/2)/3 = 1/2\sqrt{3}$:

$$G \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$$

Los puntos H_1, H_2 y H_3 son los puntos medios de BC, CA y AB :

$$H_1 \left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \quad H_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \quad H_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 0 \right)$$



I_1, I_2 y I_3 , los puntos medios de A_1A_2, B_1B_2 y C_1C_2 son:

$$I_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \quad I_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \quad I_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2} \right)$$

Ahora determinaremos la posición de L_1 y L'_1 . Colocaremos L_1 y L'_1 sobre A_1A_4 y A_2A_3 , respectivamente, de tal manera que:

$$A_1L_1 = A_2L'_1 = \frac{15\sqrt{3} - 10}{46\sqrt{2}}$$

Sea $a = \frac{15\sqrt{3} - 10}{46\sqrt{2}}$. Entonces tenemos que:

$$L_1 \left(-\frac{1}{2}, -\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \quad L'_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$

De manera análoga podemos determinar los puntos L_i y L'_i restantes:

$$L_2 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{a}{\sqrt{2}} \right) \quad L'_2 \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$

$$L_3 \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right) \quad L'_3 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right)$$

Determinaremos ahora las coordenadas de los puntos K_i :

Para simplificar la notación, sea

$$b = \frac{1231\sqrt{3} - 1986}{1518\sqrt{2}}.$$

Colocaremos K_1 en el segmento que une I_1 con el punto medio de A_3A_4 , de tal manera que $I_1K_1 = b$.

Así, tenemos que

$$K_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{b}{\sqrt{2}} \right)$$

Análogamente,

$$K_2 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{b}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{b}{\sqrt{2}} \right)$$

$$K_3 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{b}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right)$$

Así, tenemos también determinados los vértices de los poliedros V_0 , V_1 , V_2 y V_3 , ya que el único vértice que nos falta es el vértice que tienen en común, que está en el origen.

Para calcular el diámetro de V_i es necesario calcular la máxima distancia entre dos de sus vértices. Ésta se da entre los vértices K_1 y L_2 :

$$K_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{b}{\sqrt{2}} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1227 - 472\sqrt{3}}{3036}, \frac{1227 - 472\sqrt{3}}{3036} \right)$$

$$L_2 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{a}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{31\sqrt{3}-36}{92}, -\frac{1}{2}, \frac{15\sqrt{3}-10}{92} \right)$$

De donde:

$$K_1 L_2 = \frac{\sqrt{6\,129\,030 - 937\,419\sqrt{3}}}{1518\sqrt{2}} \approx 0.9887$$

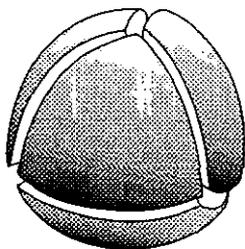
Los diámetros de los tres poliedros restantes pueden calcularse en forma similar.

Esta partición de V induce una partición de S en cuatro partes cuyo diámetro es menor o igual que 0.9887. ■

5. La conjetura de Borsuk en E^n

Hadwiger demostró la conjetura de Borsuk en E^n para cuerpos convexos con frontera suave, i.e. aquellos que tienen un solo hiperplano soporte para cada punto de su frontera.

Es necesario, en la demostración de Hadwiger, considerar la división en $n + 1$ partes de la esfera n -dimensional de diámetro 1. Para dividir una esfera n -dimensional unitaria, podemos considerar el n -simplejo inscrito en la esfera. El n -simplejo puede dividirse en $n + 1$ partes. Cada una de ellas es un politopo con vértices en el centro del n -simplejo y los n vértices de cada cara. Claramente, son $n + 1$ partes congruentes las que resultan de esta construcción. La partición de la esfera n -dimensional naturalmente inducida por la partición del n -simplejo inscrito en ella consta de $n + 1$ partes, ninguna de las cuales contiene puntos antípodos, por lo que el diámetro de cada una es menor que 1. La figura ilustra el caso $n = 3$:

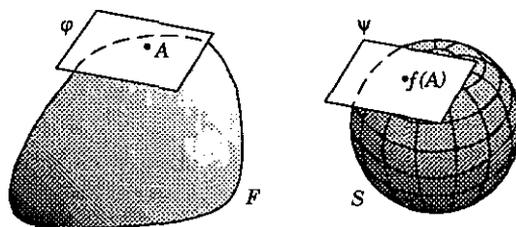


Teorema 5.1 *Todo cuerpo convexo n -dimensional con frontera suave y diámetro 1 puede dividirse en $n + 1$ partes de diámetro menor que 1.*

Demostración Sea F un cuerpo convexo con frontera suave y diámetro 1. Sea S la esfera n -dimensional de diámetro 1 y hagamos una partición de la misma en $n + 1$ partes de diámetro menor que 1. Sean M_0, M_1, \dots, M_n los elementos de la partición de S . A partir de ésta construiremos una partición de F en $n + 1$ conjuntos N_0, N_1, \dots, N_n . Sea A un punto frontera arbitrario de F .

Por hipótesis, existe un único hiperplano soporte de F por A . Sea φ tal hiperplano. Sea ψ un hiperplano soporte de S paralelo a φ tal que F y S

están del mismo lado de ambos hiperplanos.



Sea $f(A)$ el punto en el que ψ toca a S . Así, consideraremos que A está en N_i si $f(A)$ está en M_i ($i = 0, 1, \dots, n$). De esta manera definimos una partición de la frontera de F en $n + 1$ conjuntos N_0, N_1, \dots, N_n .

Cada N_i tiene diámetro menor que 1. Para probarlo, supongamos que no es así. Existe un conjunto N_k cuyo diámetro es 1 (evidentemente no puede ser mayor). Sean A y B dos puntos en N_k tales que $AB = 1$. Sean Γ_A y Γ_B los hiperplanos perpendiculares a AB que pasan por A y B , respectivamente. F está dentro de la región determinada por ambos hiperplanos, pues de lo contrario tendría diámetro mayor que 1. Por lo tanto, Γ_A y Γ_B son hiperplanos soporte de F que pasan por A y B . El hecho de que ambos hiperplanos soporte sean paralelos implica que los puntos correspondientes $f(A)$ y $f(B)$ en S son diametralmente opuestos, i.e. la distancia entre ellos es igual a 1. Por otro lado, dado que A y B pertenecen a N_k , tenemos que $f(A)$ y $f(B)$ pertenecen a M_k y por lo tanto la distancia entre ellos es menor que 1. Nuestra suposición inicial es, entonces, falsa. No es posible que uno de los conjuntos N_i tenga diámetro igual a 1.

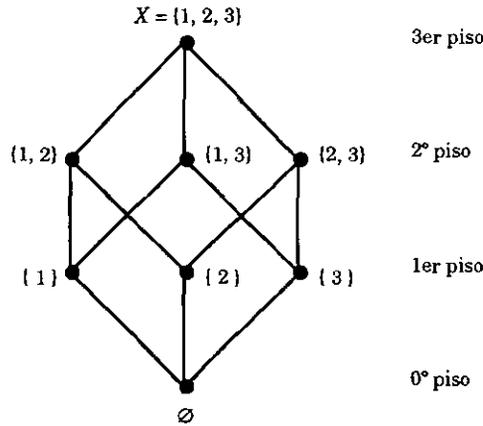
Sea O un punto interior de F . Sea P_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) el cono con vértice O y base el conjunto N_i . Es decir, P_i es la cerradura convexa de $\{O\} \cup N_i$. Por la forma en la que fueron construidos, la unión de los conjuntos P_i es igual a F y además el diámetro de cada P_i es menor que uno, ya que el de N_i lo es. Así, hemos construido una partición de F en $n + 1$ conjuntos de diámetro menor que 1. ■

6. El contraejemplo de Kahn–Kalai

En 1993, Jeff Kahn y Gil Kalai [8] propusieron un contraejemplo que invalida la conjetura de Borsuk en el caso general. Para demostrar la conjetura de Borsuk en el caso general o encontrar un contraejemplo que la invalidara fue necesario recurrir a conceptos y técnicas esencialmente diferentes de los utilizados anteriormente. Kahn y Kalai, como lo hicieron otros matemáticos antes de ellos, buscaron métodos combinatorios que ofrecieran la posibilidad de explorar conjuntos que permitieran estudiar la conjetura desde otro punto de vista. El contraejemplo de Kahn y Kalai se basa en la construcción de una función entre conjuntos de subconjuntos de un conjunto dado. Para representar esta función es necesario crear un modelo que utiliza el lenguaje y algunos conceptos de la teoría de gráficas. Por ello, el tratamiento que daremos a partir de este momento a la conjetura de Borsuk tiene muy poco en común con la forma en que se presentaron los casos correspondientes a dimensiones menores.

Para este contraejemplo construiremos un conjunto finito de puntos en un espacio de dimensión 1326 y probaremos que no existe una partición de este conjunto en menos de 1561 partes de diámetro menor que el del conjunto original.

Primero construiremos un modelo para representar el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado. Sea $F = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. El conjunto de todos sus subconjuntos tiene 2^n elementos. Ordenaremos éstos por “pisos”, disponiendo en un mismo “piso” los subconjuntos que tengan el mismo número de elementos. El piso 0 estará formado por el conjunto vacío, el primer piso por los subconjuntos de un elemento, el piso k -ésimo por los subconjuntos de k elementos y el n -ésimo piso por el conjunto F . El número de subconjuntos en cada piso es $\binom{n}{k}$. Si representamos cada subconjunto con un punto y unimos con aristas aquellos subconjuntos que difieren en sólo un elemento, la gráfica que obtenemos es una representación de los vértices y aristas de un cubo n -dimensional. En la figura se muestra el cubo correspondiente a $n = 3$.



Usaremos este cubo para representar el conjunto de subconjuntos de un conjunto dado, y nos referiremos a los vértices del cubo n -dimensional como subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Así, podemos asignar coordenadas para identificar cada uno de los subconjuntos. Por ejemplo, si $F = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces el subconjunto $A = \{1, 2, 4\}$ estará representado por $(1, 1, 0, 1)$. De esta manera, para calcular la distancia entre dos subconjuntos podemos simplemente calcular la distancia euclidiana entre los vértices correspondientes. Sin embargo, dado que las coordenadas de cada punto son siempre 1 o 0, las diferencias entre las coordenadas son siempre 1, cuando son distintas, o 0, cuando son iguales (y lo mismo ocurre con sus cuadrados). De modo que si dos puntos tienen r coordenadas diferentes (i.e. cuando dos subconjuntos tienen r elementos diferentes, r elementos que pertenezcan a sólo uno de los dos subconjuntos) su distancia euclidiana será igual a \sqrt{r} . Por ejemplo, consideremos los subconjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4\}$ del conjunto $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. La distancia euclidiana entre los vértices correspondientes, $(1, 0, 1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0, 1, 0)$ es $\sqrt{5}$. El número de elementos diferentes, es decir, aquellos que sólo pertenecen a uno de los subconjuntos, es 5. Por ello utilizaremos la *distancia de Hamming*.

Definición 6.1 Sean $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y $y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ dos puntos en \mathbb{R}^n tales que $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1\}$. La **distancia de Hamming** entre x y y es

$$d(x, y) = |\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_2 - \beta_2| + \dots + |\alpha_n - \beta_n|$$

Es claro que si la distancia euclidiana entre x y y es \sqrt{r} , entonces la distancia de Hamming es r . En términos de subconjuntos, la distancia de Hamming es igual al número de elementos que pertenecen exactamente a uno de los subconjuntos dados. El conjunto formado por estos elementos es la *diferencia simétrica* de los subconjuntos. La distancia de Hamming es la cardinalidad de dicha diferencia simétrica, $|(A \cup B) - (A \cap B)|$. En el modelo de la figura anterior, la distancia de Hamming es la longitud del camino más corto entre dos puntos, siguiendo las aristas del cubo.

6.1. Descripción de la construcción

El contraejemplo de Kahn-Kalai se construye a partir de la definición de una función de cierta familia de subconjuntos de un conjunto en una familia de subconjuntos de parejas de elementos de dicho conjunto. Por ello fue necesario tener una forma simple de medir distancias entre subconjuntos. Ahora necesitamos precisar el dominio de la función que definiremos.

Definición 6.2 *Sea F un conjunto de n elementos. Una familia de subconjuntos de F es **incomparable** si no hay en dicha familia un subconjunto que esté contenido en otro de la misma familia.*

Los subconjuntos de F que tienen el mismo número de elementos, es decir, aquellos que están en un mismo piso, forman una familia incomparable. El número de subconjuntos en una familia tal es $\binom{n}{k}$, donde k es el número de elementos en cada subconjunto. Este número es máximo cuando $k = \lfloor n/2 \rfloor$, la parte entera de $n/2$. Es decir, la mayor familia incomparable es la que corresponde al $\lfloor n/2 \rfloor$ -ésimo piso del cubo asociado al conjunto de subconjuntos de F .

La forma natural de visualizar las relaciones entre los elementos de un conjunto y los subconjuntos formados por subconjuntos de dos elementos del mismo es pensar en vértices de una gráfica y subconjuntos de aristas de dicha gráfica.

Para cualquier número par m , consideremos S , un conjunto de m elementos. Consideremos también una gráfica con m vértices, y establezcamos

una correspondencia entre ésta y el conjunto S . En esta gráfica asociada a S , los vértices corresponden a los elementos de S , las aristas, a parejas de elementos de S . Así, los subconjuntos de aristas de la gráfica corresponden a conjuntos de parejas de elementos de S . Dado un subconjunto de S , decimos que una arista es *saliente*, con respecto a este subconjunto, si uno de sus vértices está en el subconjunto y el otro no lo está. Sea q el cubo m -dimensional que representa a todos los subconjuntos de S .

Sea P el conjunto de pares de elementos de S , es decir, el conjunto de aristas de la gráfica asociada a S en el párrafo anterior. P tiene $m(m-1)/2$ elementos. Consideremos el conjunto de todos los subconjuntos de P y sea Q el cubo $m(m-1)/2$ -dimensional que representa al conjunto de los subconjuntos de P .

Sea $f : q \rightarrow Q$ tal que, para cada $A \subset S$ (i.e. A es un vértice de q), $f(A) \subset P$ (i.e. $f(A)$ es un vértice de Q) es el conjunto formado por pares de elementos de S tales que sólo uno de sus elementos está en A . Es decir, $f(A)$ es el conjunto de aristas salientes de A . El número de aristas salientes de un subconjunto de S que tenga k elementos es $k(m-k)$. Por lo tanto, si A está en el piso k -ésimo de q , $f(A)$ estará en el piso $k(m-k)$ -ésimo.

Para la construcción de Kahn-Kalai consideraremos la imagen bajo f de la mayor familia incomparable de subconjuntos de S . Para valores grandes de m , el conjunto así construido nos dará un contraejemplo para la conjetura de Borsuk.

Sea X la imagen bajo f de los puntos que están en el $m/2$ -ésimo piso de q . X está en el $m^2/4$ -ésimo piso de Q .

Si $B = S - A$, i.e. si B es el complemento de A , entonces $f(A) = f(B)$, ya que las aristas que tienen un solo extremo en A también tienen un solo extremo en B . Por esta razón, si tenemos $\binom{m}{m/2}$ elementos en el $m/2$ -ésimo piso de q , la imagen de ellos bajo f tendrá la mitad de elementos. Es decir,

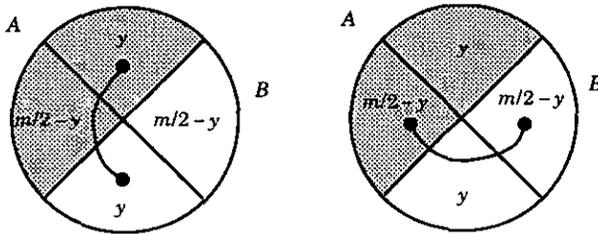
$$|X| = \frac{1}{2} \binom{m}{m/2}$$

Para calcular la distancia entre $f(A)$ y $f(B)$ necesitamos encontrar su diferencia simétrica, el conjunto de aristas que: a) están en $f(A)$ pero no

ESTA TESIS NO DEBE
 SALIR DE LA BIBLIOTECA

en $f(B)$, y b) las que están en $f(B)$ pero no en $f(A)$.

Veamos cuántas aristas corresponden al caso (a). Para que una arista esté en $f(A)$ es necesario que sólo uno de sus extremos esté en A . Para que no esté en $f(B)$ es necesario que ambos de sus extremos estén en B o ninguno de ellos lo esté. Por lo tanto, uno de sus extremos debe estar en $A \cap B$ mientras que el otro está en $B - A$ (si $y = |A \cap B|$, hay $y(m/2 - y)$ de estas aristas) o debe ocurrir que uno de los extremos pertenece a $A - B$ y el otro extremo no pertenece a A ni a B (hay $(m/2 - y)y$ de estas aristas). Así, tenemos $2y(m/2 - y)$ aristas en el caso (a). Análogamente, puede verse que hay $2y(m/2 - y)$ aristas en el caso (b).



El número total de aristas así calculado es $|(A \cup B) - (A \cap B)| = 4y(m/2 - y)$, la distancia de Hamming entre $f(A)$ y $f(B)$. Este valor es máximo para $y = m/4$ y es igual a $m^2/4$, es decir, el diámetro de X es $m^2/4$.

6.2. Un ejemplo

Si $m = 12$, entonces q es un cubo de dimensión 12 y Q es un cubo de dimensión 66 (pues K_{12} , la gráfica completa con 12 vértices, tiene 66 aristas). Un punto de q será entonces un subconjunto de $S = \{1, 2, \dots, 12\}$. Un vértice del piso $m/2$ -ésimo, sexto piso en este caso, es entonces un punto con seis coordenadas iguales a 1 y las seis restantes iguales a 0. Por ejemplo, $A = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ es el subconjunto $\{1, 5, 6, 10, 11, 12\}$. Por comodidad representaremos a A como (100011000111) . ¿Cuál es el punto $f(A) \in Q$? Pues el subconjunto de pares de elementos de S que tienen exactamente un elemento de A (i.e. de aristas de K_{12} salientes, respecto del conjunto A de vértices). Este subconjunto puede ser visto como

un punto de Q con 36 de sus coordenadas iguales a 1 y las restantes iguales a 0. Para describir un subconjunto de aristas con estas coordenadas, necesitamos hacer explícito el orden que les asignaremos:

{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 6}, {1, 7}, {1, 8}, {1, 9}, {1, 10}, {1, 11}, {1, 12},
 {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {2, 6}, {2, 7}, {2, 8}, {2, 9}, {2, 10}, {2, 11}, {2, 12}, {3, 4},
 {3, 5}, {3, 6}, {3, 7}, {3, 8}, {3, 9}, {3, 10}, {3, 11}, {3, 12}, {4, 5}, {4, 6}, {4, 7},
 {4, 8}, {4, 9}, {4, 10}, {4, 11}, {4, 12}, {5, 6}, {5, 7}, {5, 8}, {5, 9}, {5, 10}, {5, 11},
 {5, 12}, {6, 7}, {6, 8}, {6, 9}, {6, 10}, {6, 11}, {6, 12}, {7, 8}, {7, 9}, {7, 10}, {7, 11},
 {7, 12}, {8, 9}, {8, 10}, {8, 11}, {8, 12}, {9, 10}, {9, 11}, {9, 12}, {10, 11}, {10, 12},
 {11, 12}

Así, si $A = (100011000111)$, entonces

$$f(A) = (111001110000011000111011000111110001110111000111000001110111111000)$$

De la misma manera, si $B = (110000110011)$, entonces

$$f(B) = (0111100110011110011000001100110011001101100111100110110011000111110)$$

$|A \cap B| = 3$ por lo que $d(f(A), f(B)) = 4(3)(6 - 3) = 36$. Este es el diámetro de X para $m = 12$. Si la intersección de A y B no tuviera exactamente 3 elementos, la distancia entre $f(A)$ y $f(B)$ sería menor:

Sea $C = (110011001100)$,

$$f(C) = (011001100111100110011011001100110011000110011110011011001100011110)$$

$|A \cap C| = 4$, de donde $d(f(A), f(C)) = 4(4)(6 - 4) = 32$.

En este caso, cuando $m = 12$, el dominio de f tiene 924 elementos, la imagen, 462, el número de elementos de X .

Este no es el contraejemplo construido por Kahn-Kalai, simplemente es un ejemplo que muestra cómo se comporta la función f y cómo se calcula la distancia entre elementos distintos de X . Una partición de X en conjuntos de menor diámetro, debe dejar en partes distintas a $f(A)$ y $f(B)$ si $|A \cap B| = 3$ (o si $|A \cap B| = m/4$, en el caso general).

6.3. El teorema de Frankl–Wilson y la conjetura de Borsuk

Si la distancia entre $f(A)$ y $f(B)$ es igual al diámetro de X , entonces $f(A)$ y $f(B)$ deben quedar separados al hacer una partición de X en conjuntos de diámetro menor. Si el conjunto F es la preimagen de uno de los elementos de la partición de X , entonces en F no debe haber vértices de q (i.e. subconjuntos de S) con exactamente $m/4$ elementos en común.

La construcción de X fue hecha para satisfacer las condiciones del siguiente teorema de Frankl y Wilson [4]:

Teorema 6.1 *Sea F una familia de subconjuntos distintos de $m/2$ elementos de un conjunto de m elementos de tal manera que en F no hay dos subconjuntos con exactamente $m/4$ elementos comunes. Si $m = 4p^\alpha$, donde p es un primo mayor que 2 y α es un entero no negativo, entonces el número de subconjuntos en F no es mayor que*

$$2 \binom{m-1}{m/4-1}.$$

Si el conjunto F es la preimagen de una parte de X , entonces en F no debe haber subconjuntos con exactamente $m/4$ elementos comunes. Sea $P = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ una partición de X en N partes con diámetro menor que el diámetro de X . Por el teorema de Frankl–Wilson, el número de subconjuntos en cada elemento de la partición cumple

$$|X_i| \leq 2 \binom{m-1}{m/4-1}.$$

Y por lo tanto,

$$N \geq \frac{\binom{m}{m/2}}{2 \binom{m-1}{m/4-1}}$$

Y para valores grandes de m , con $m = 4p^\alpha$ tenemos entonces que

$$N > \frac{m(m-1)}{2} + 1$$

En particular para $m = 52$, tenemos un conjunto de dimensión 1326 para el cual

$$N \geq \frac{\binom{52}{26}}{2\binom{51}{12}} > 1561$$

Es decir, el conjunto $X \subset \mathbb{R}^{1326}$ construido en la forma descrita, no puede ser dividido en menos de 1561 partes, lo cual contradice la conjetura de Borsuk.

La tabla siguiente ilustra cómo cambia, para diferentes valores de $m = 4p^\alpha$, el valor de N , la cota mínima del número de elementos en la partición de X .

p^α	$m = 4p^\alpha$	$m(m-1)/2$	$N \geq \dots$
1	4	6	3
3	12	66	8
5	20	190	23
7	28	378	67
3^2	36	630	192
11	44	946	548
13	52	1326	1561
17	68	2278	12 659
19	76	2850	36 043
23	92	4186	292 207
5^2	100	4950	832 027
3^3	108	5778	2 369 133
29	116	6670	6 745 998

Referencias

- [1] Boltjansky V., I. Gohberg, *Results and problems in combinatorial geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
- [2] Borsuk, Karol, *Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. **20** (1933), 177–190.
- [3] Eggleston, H.G., *Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter*, J. London Math. Soc. **30** (1955), 11–24.
- [4] Frankl, P., R. M. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica **1** (1981), 357–368.
- [5] Gale, David, *On inscribing n -dimensional sets in a regular n -simplex*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 222–225.
- [6] Grünbaum, Branko, *A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **53** (1957), 776–778.
- [7] Grünbaum, Branko, *Borsuk's problem and related questions*, Am. Math. Soc. Symp. on Convexity, Proc. Symp. Pure Math. **7** (1963), 271–284.
- [8] Kahn, Jeff, Gil Kalai, *A counterexample to Borsuk's conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. **29** (1993), 60–62.
- [9] Lay, Steven R., *Convex Sets and their Applications*, John Wiley & Sons, 1982.
- [10] Prieto de Castro, Carlos, *Apuntes de conjuntos convexos*, Miscelánea Matemática **8**, Sociedad Matemática Mexicana.
- [11] Skopenkov, Arkady, *Borsuk's problem*, Quantum **7** (1996), 17–21.