00365
3
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Σ-ESPACIOS LINDELÖF

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRIA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

MANUEL IBARRA CONTRERAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ANGEL TAMARIZ MASCARÚA

1999

270288

A Cintli, Atziri y Hortensia.

CONTENIDO

INTRODUCCION

La definición del concepto de espacio Lindelöf fué dada por Alexandroff y Urysohn en 1929 en su Mémoire sur les espaces topologiques compacts [AU] y el orígen del nombre viene de la propiedad que probó Lindelöf en 1903 para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ [Li]: Cualquier familia de abiertos en $\mathbb{R}^n$ contiene una subfamilia numerable que cubre a la unión de la familia original.

La noción de Σ-espacio la introdujo Nagami en 1969 [Na] y vino a unificar algunas de las investigaciones que se hicieron en esa década alrededor del problema que representaba el encontrar una clase de espacios topológicos que tuviera las suficientes propiedades topológicas como para que, entre otras cosas, la paracompacidad fuera preservada bajo productos de elementos de la clase.

Como es sabido, la propiedad de Lindelöf es una propiedad que no se preserva bajo productos. Este problema se resuelve en la clase de los Σ-espacios al probar que el producto numerable de Σ-espacios Lindelöf sigue teniendo esta propiedad. También se sabe que la propiedad de Lindelöf es una propiedad difícil de percibir en la clase de los espacios C_p. Uno de los objetivos de esta Tesis es el de esbozar algunas de esas dificultades y el de mostrar también algunos resultados que se tienen en relación a este problema. Otro de los objetivos es mostrar que la clase de los Σ-espacios Lindelöf, al ser una clase "estable" ba jo ciertas propiedades topológicas (es una clase que es invariante bajo productos numerables, subespacios cerrados e imágenes continuas) proporciona ventajas importantes para el estudio de las propiedades de los espacios C_p, en particular aquellas relacionadas con la propiedad de Lindelöf.

En el Capítulo 0 se establece la notación, terminología, nociones y resultados básicas que se usan a lo largo del trabajo. Todos ellos se enuncian sin demostración y en cada Teorema se da la referencia en donde puede ser consultado.

En el Capítulo 1 iniciamos el estudio de la propiedad de Lindelöf en los espacios C_p. Se muestra que trabajando en la clase de los espacios normales es posible encontrar allí algunas condiciones necesarias para que $C_p(X)$ sea Lindelöf. En este Capítulo también se prueba el Teorema de Asanov que, en particular, nos da una condición necesaria para que $C_p(X)$ sea Lindelöf.

En el Capítulo 2 se estudia la clase de los Σ-espacios y se prueba que es una clase que generaliza los conceptos de M-espacio y σ-espacio. Se prueba que las definiciones que dan [Na], [Bu] y [Gr] de Σ-espacio son equivalentes y que, entre otras propiedades, tiene la particularidad de que el producto numerable de Σ-espacios paracompactos es un Σ-espacio paracompacto.

En el Capítulo 3 se define la clase $\mathcal{S}il$ como la sub-clase de los Σ-espacios que son Lindelöf. Además de otras caracterizaciones de esta clase, se prueba que es la mínima clase que contiene a todos los espacios metrizables separables, a todos los compactos y es invariante con respecto a productos finitos, subespacios cerrados e imágenes continuas, y que cada elemento de esta clase es la imágen continua de un espacio emplumado Lindelöf.

En el Capítulo 4 se demuestran algunos resultados en espacios de funciones $C_p(X)$, suponiendo que X es un elemento de la clase $\mathcal{Sil}$. Se prueba el Teorema de Baturov y como consecuencia de él se encuentran condiciones suficientes para que $C_p(X)$ sea Lindelöf. También se da una respuesta a la pregunta ¿Cuándo $C_p(X)$ es un Σ-espacio Lindelöf? suponiendo que X es un espacio topológico compacto.

Finalizamos este trabajo comentando algunos resultados sobre los espacios $C_{p,n}(X)$ y mencionando otros más sobre la propiedad de Lindelöf y la amplitud en los espacios C_p.

Cada definición o resultado en cada capítulo está identificado con dos números, el número de sección y el número de resultado que le corresponde en orden creciente en esa misma sección. En el caso exclusivo del Capítulo 0 los dos números corresponden al capítulo y al número de resultado. Las referencias que se hacen de estos últimos siempre serán citados de esta manera. En el caso de los capítulos restantes, si es un resultado del mismo capítulo, se identifican de esta manera y si son de otro capítulo entonces además del número de sección y resultado aparecerá en primer término el número de capítulo; por ejemplo, si en el Capítulo 4 se hace referencia al primer teorema de la segunda sección de ese mismo capítulo se dirá: "por el Teorema 2.1...". Pero si en el mismo Capítulo 4 se hace referencia al Teorema 2.27 del Capítulo 3 entonces se escribirá: "por el Teorema 3.2.27..."

Los conceptos no definidos en la Tesis así como las demostraciones de la mayoría de los resultados básicos enunciados en los Preliminares pueden ser consultadas en [En] o

[GMT]. Las demostraciones de los teoremas restantes del Capítulo 0 se pueden encontrar en [Ho] o [TCH]. Aunque esta última referencia contiene la parte correspondiente al estudio de los espacios C_p, la referencia básica obligada en este tema es [Ark]. Los resultados del Capítulo 1 se pueden encontrar en [Ark] pero la presentación de ellos y las demostraciones de 1.3.5, 1.3.10, 1.3.12, 1.3.20, 1.3.21 y 1.3.22 fueron desarrolladas por nosotros.

El Capítulo 2 contiene algunos de los resultados de [Na] y [Gr], pero las demostraciones de 2.3.4 y 2.3.5 son nuestras. Estas, junto con las demostraciones de 3.2.4 y 3.2.8 hasta 3.2.12 también obra nuestra, motivaron en parte la orientación de este trabajo. Posteriormente conocimos el trabajo de O. Okunev [Ok] en donde desarrolla también estos resultados del Capítulo 3 en donde seguimos, en buena medida, el esquema que se presenta allí. Las demostraciones de 3.2.22, 3.2.26 y 3.2.27 también fueron desarrolladas por nosotros.

En los Capítulos 4 y 5 la referencia básica es [Ark] siendo nuestra la demostración de 4.3.10.

Es importante resaltar que el trabajo que aquí se presenta es uno de los frutos del trabajo colectivo realizado en el Seminario que desde mayo de 1996 se ha venido realizando ininterrumpidamente por los Profesores Angel Tamariz y Fidel Casarrubias de la Facultad de Ciencias de la UNAM y Juan Angoa, Agustín Contreras, Armando Martínez y el autor de esta Tesis de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, bajo la dirección del Dr. Angel Tamariz.

Finalmente, aunque preferiría que los agradecimientos quedaran a nivel personal, la fuerza de la costumbre me empuja a hacer referencia explícita de algunos de ellos. En primer término, al maestro, al amigo incansable Angel Tamariz quien con sus conocimientos, enseñanzas, dedicación y paciencia inagotables hizo posible la realización de este trabajo. Por supuesto que las deficiencias son exclusiva responsabilidad del que esto escribe. Asimismo, mil gracias a Agustín, Armando, Fidel y Juan que permitieron el acoso de mi ignorancia en todo momento. Mi agradecimiento y amor infinito para Atziri, Cintli y Hortensia que han tenido que soportar mis locuras y desvaríos (más de lo normal) durante este tiempo; en buena medida también a ellas corresponde el mérito de este trabajo. También deseo expresar mi reconocimiento a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, en especial a la Academia de Matemáticas ya que durante el tiempo de realización de este trabajo el autor gozó de una descarga parcial de trabajo a través de un permiso por Superación Académica. Finalmente, agradezco a los Profesores A. García-Máynez, O. Okunev, F. Casarrubias, V. Tkachuk, A. Contreras y J. Páez por el tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo así como sus comentarios y sugerencias que ayudaron a mejorar la presentación final de esta Tesis.

Manuel Ibarra Contreras. Otoño 1998.[1]

[1] Al término de este trabajo fuí comunicado, a través de la BUAP, del otorgamiento de una beca PROMEP, así que: esta Tesis contó con el financiamiento parcial de estos recursos.

CAPITULO 0
Preliminares

La intención de este capítulo es la de establecer la notación y terminología así como las nociones y resultados básicos que serán usados a través de este trabajo. La clase de espacios topológicos que serán considerados será la de los espacios Tychonoff, a menos que se diga otra cosa. Esta clase la denotaremos por $\mathcal{T}$. La clase de los números cardinales infinitos será denotada por $\mathcal{C}ard$ y la cardinalidad de un conjunto A la denotaremos indistintamente como $|A|$ o $card(A)$. La clase de los números ordinales será denotada por Ord y así $\mathcal{C}ard = \{\aleph_\alpha : \alpha \in Ord\}$ de tal manera que $\aleph_0$ es el mínimo cardinal infinito y $\aleph_1 = \aleph_0^+$ es el primer cardinal no numerable. En general, para $\kappa \in \mathcal{C}ard$, κ^+ será el primer cardinal mayor que κ. También, si $\alpha \in Ord$ entonces $\alpha+1$ será el primer ordinal mayor que α. El mínimo ordinal infinito numerable, denotado por ω, lo identificaremos con $\aleph_0$ y ω_1 denotará al mínimo ordinal de cardinalidad $\aleph_1$.

Usaremos $\mathbb{N}$ para denotar al conjunto $\{1, 2, 3, \cdots\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ será el espacio topológico con la topología Euclidiana; cualquier subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ será considerado como subespacio de $\mathbb{R}^n$ con esta topología a menos que digamos otra cosa. Si X es un espacio topológico y $A \subseteq X$, la cerradura de A será denotada indistintamente como $cl_X(A)$ o $\overline{A}$. $Int A$ será el interior de A.

De aquí en adelante $X, Y, Z, \ldots$ con o sin subíndices denotaran espacios topológicos arbitrarios.

Uno de los conceptos fundamentales dentro de la Topología General es el de función continua que está en estrecha relación con la noción de conjunto abierto.

0.1.- DEFINICION. Una función $f: X \to Y$ es continua si $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X para cualquier conjunto abierto U en Y.

Precisamente debido a su importancia es que resulta de utilidad el tener algunos criterios para saber cuándo una función es continua. El siguiente teorema resuelve en buena medida esa necesidad.

0.2. TEOREMA. (cit. pos. [En], Proposición 1.4.1). Para una función $f: X \to Y$ son equivalentes las siguientes afirmaciones.

(1) f es continua.

(2) Si $\mathcal{P}$ es una sub-base para la topología en Y entonces $f^{-1}(P)$ es un abierto en X para todo $P \in \mathcal{P}$.

(3) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología en Y entonces $f^{-1}(B)$ es un abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

(4) Para todo subconjunto cerrado $F \subseteq Y$, $f^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en X.

(5) Para todo subconjunto $A \subseteq X$: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

(6) Para todo subconjunto $B \subseteq Y$: $f^{-1}(Int B) \subseteq Int(f^{-1}(B))$.

Dentro de la clase de funciones continuas hay varias subclases importantes de funciones. Algunas de ellas son, la clase de las funciones abiertas, la clase de las funciones cerradas, la clase de las funciones cocientes y por supuesto, la clase que permite que dos espacios sean topológicamente indistinguibles, la clase de los homeomorfismos.

0.3. DEFINICION. Sea $f: X \to Y$ una función continua.

(1) f es abierta (cerrada) si para todo subconjunto abierto (respectivamente, cerrado) en X, A, $f(A)$ es un conjunto abierto (cerrado) en Y.

(2) f es un homeomorfismo si f es una biyección y su función inversa, $f^{-1}: Y \to X$ es continua.

(3) f es una función cociente si se satisface la propiedad: Un subconjunto $V \subseteq Y$ es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en X.

(4) f es una condensación si f es biyectiva.

Cuando exista un homeomorfismo entre X y Y diremos que estos espacios son homeomorfos y lo denotaremos como $X \cong Y$. Para un espacio topológico X y $A \subseteq X$ diremos que un subconjunto V de X es una vecindad de A si existe un conjunto abierto $G \subseteq X$ tal que $A \subseteq G \subseteq V$. Los siguientes teoremas nos proporcionan criterios para decidir si una función pertenece a alguna de las clases definidas arriba.

0.4. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 1.4.12). Una función continua $f: X \to Y$ es cerrada (abierta) si y sólo si para todo $B \subseteq Y$ y todo conjunto abierto (respectivamente, cerrado) $A \subseteq X$ que contiene a $f^{-1}(B)$, existe un conjunto abierto (resp. cerrado) $G \subseteq Y$ tal que $B \subseteq G$ y $f^{-1}(G) \subseteq A$.

0.5. TEOREMA. (cit. pos. [En], Proposición 1.4.18). Si $f: X \to Y$ es una función biyectiva, entonces son equivalentes:

(1) f es un homeomorfismo.

(2) f es cerrada.

(3) f es abierta.

(4) $f(A)$ es un conjunto cerrado en Y si y sólo si A es un conjunto cerrado en X.

(5) $f(A)$ es un conjunto abierto en Y si y sólo si A es un conjunto abierto en X.

0.6. TEOREMA. (Cit. pos. [En], Proposición 2.4.3 y Corolario 2.4.8)

(1) Una función sobre $f: X \to Y$ es una función cociente si y sólo si $f^{-1}(F)$ es cerrado en X cuando y sólo cuando F es cerrado en Y.

(2) Si $f: X \to Y$ es una función sobre, cerrada o abierta entonces f es una función cociente.

Dado un espacio topológico X, la familia de conjuntos de Borel en X es definida como la mínima familia de subconjuntos de X que contiene a todos los conjuntos abiertos de X, que es cerrada bajo uniones numerables y bajo complementos. La definición original fué esbozada por Borel [Bo] para subconjuntos de $\mathbb{R}$ y ampliamente estudiada por Lebesgue para espacios Euclidianos en 1905 [L] y por Hausdorff para espacios métricos en 1914 [Ha]. Además de los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados, los conjuntos de Borel más comunes son los que definimos a continuación. Este tipo de conjuntos apareceran en capítulos posteriores.

0.7. DEFINICION. Sea X un espacio topológico

(1) Diremos que un subconjunto G de X es un conjunto G_δ si G es la intersección de una familia numerable de conjuntos abiertos en X.

(2) Un subconjunto F de X es un conjunto F_σ si F es la unión de una familia numerable de conjuntos cerrados en X.

Observemos que si $f: X \to Y$ es una función continua y $B \subseteq Y$

es un conjunto G_δ (F_σ) en Y entonces $f^{-1}(B)$ es un conjunto G_δ (F_σ) en X.

Dada la generalidad de la definición de espacio topológico es conveniente restringirse a clases de ellos que permitan obtener resultados más interesantes. Algunas de esas restricciones están dadas por los siguientes axiomas de separación.

0.8. DEFINICION. Sea X un espacio topológico.

(1) X es un espacio T_0 si para todos $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ existe un abierto que contiene a uno de los puntos pero no al otro.

(2) X es un espacio T_1 si para todos $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ existe un abierto U tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$.

(3) X es un espacio T_2 o Hausdorff si para todos $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ existen conjuntos abiertos ajenos en X, U_1 y U_2 tales que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$.

(4) X es un espacio T_3 o regular si X es T_1 y para todo $x \in X$ y todo cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existen conjuntos abiertos ajenos en X, U_1 y U_2 tales que $x \in U_1$ y $F \subseteq U_2$.

(5) X es un espacio Tychonoff ($X \in \mathcal{T}$) si X es T_1 y para todo subconjunto cerrado de X, F, y $x \in X$ tal que $x \notin F$ existe una función continua $f: X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) \subseteq \{1\}$.

(6) X es normal o T_4 si X es T_1 y para toda pareja de cerrados ajenos $F_1, F_2 \subseteq X$ en X existen abiertos ajenos U_1 y U_2 tales que $F_1 \subseteq U_1$ y $F_2 \subseteq U_2$.

El siguiente teorema enuncia algunas propiedades importantes para las clases de espacios regulares y Tychonoff.

0.9. TEOREMA. (cit. pos. [En], Proposiciones 1.5.5 y 1.5.8).

Sea X un espacio topológico T_1.

(1) X es regular si y sólo si para todo $x \in X$ y para toda vecindad V de x en X existe una vecindad U de x en X tal que $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

(2) $X \in \mathcal{T}$ si y sólo si para todo $x \in X$ y para toda vecindad V de x en una sub-base fija $\mathcal{P}$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in X \setminus V$.

Observemos, en relación al Teorema 0.9.(2) que, en particular, $X \in \mathcal{T}$ si y sólo si X es T_1 y además para todo $x \in X$ y para toda V, vecindad de x, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus V) \subseteq \{1\}$.

Comparada con otras operaciones sobre espacios topológicos, la operación del producto Cartesiano nos lleva a problemas, ejemplos y teoremas más interesantes. Fréchet es el primero en discutir en un artículo de 1910 [F] (cit. pos. [En], p. 87) productos Cartesianos finitos sobre espacios abstractos. Los productos Cartesianos, finitos e infinitos, de espacios métricos forman parte del lenguaje topológico de la década de los 30's. El producto Cartesiano arbitrario de espacios topológicos, que definimos a continuación, fué definido por Tychonoff en 1930 [T].

Si se tiene una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$, se puede considerar el producto Cartesiano de estos espacios, $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \ : \ f(\alpha) \in X_\alpha$ para cada $\alpha \in I\}$ y la familia de proyecciones asociadas a él, $\{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$, tales que, para cada $\alpha \in I$, $P_\alpha(f) = f(\alpha)$ para toda $f \in X$. Entonces, la mínima topología sobre X que hace continuas a todas las proyecciones es la topología producto y a X con esta topología se le llama producto topológico de los espacios X_α con $\alpha \in I$. Con esta misma notación enunciamos los siguientes teoremas.

0.10.- TEOREMA. (cit. pos. [En], Proposición 2.3.1). La familia

$\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in I} W_\alpha : W_\alpha$ es abierto en X_α y $W_\alpha \neq X_\alpha$ sólo para un número finito de α's $\}$

es una base para el producto topológico X. De aquí en adelante $\mathcal{B}$ será llamada base canónica de X.

Además, si para todo $\alpha\in I$, $\mathcal{B}_\alpha$ es una base para X_α, entonces $\{\prod_{\alpha\in I} W_\alpha \in \mathcal{B} : W_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ siempre que $W_\alpha \neq X_\alpha\}$ también es una base para el producto topológico X.

0.11. TEOREMA. (cit. pos. [En], Proposición 2.3.6). Una función f, definida en un espacio Y y con valores en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es continua si y sólo si $p_\alpha \circ f$ es continua para todo $\alpha\in I$.

0.12. DEFINICION. Una función $f: X \to Y$ es un encaje si y sólo si $f: X \to f(X)$ es un homeomorfismo.

Si para un espacio topológico X existe un encaje $f: X \to Y$ entonces diremos que X se encaja en Y. Precisamente, una de las técnicas importantes para encajar espacios en espacios producto consiste en definir funciones con ciertas características, del espacio a cada uno de los factores del producto.

0.13. DEFINICION. Sean X y X_α espacios topológicos para cada $\alpha\in I$ y $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de funciones tales que para cada $\alpha\in I$, $f_\alpha : X \to X_\alpha$.

(1) $\mathcal{F}$ separa puntos de X si para cualquier $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe $\alpha \in I$ tal que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

(2) $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados si para todo $x\in X$ y para todo cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existe $\alpha\in I$ con la propiedad de que $f_\alpha(x) \notin cl_{X_\alpha}(f_\alpha(F))$.

(3) Se define la función producto diagonal como $\Delta_{\alpha\in I} f_\alpha = f : X \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ tal que $f(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\in I}$

Como una consecuencia del Teorema 0.11 se tiene lo siguiente.

0.14. TEOREMA. Sean X, X_α espacios topológicos para cada $\alpha \in I$ y $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ familia de funciones tales que $f_\alpha : X \to X_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Si f_α es continua para cada $\alpha \in I$, entonces la función producto diagonal $f = \underset{\alpha\in I}{\Delta} f_\alpha$ es una función continua.

0.15. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 2.3.20). Si $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de funciones continuas que separa puntos de X entonces la función producto diagonal $f = \underset{\alpha\in I}{\Delta} f_\alpha$ es inyectiva. Más aún, si $\mathcal{F}$ separa puntos de conjuntos cerrados en X, entonces f es un encaje.

Supongamos ahora que se tienen $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ familias de espacios topológicos y $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de funciones continuas tales que $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$. Entonces, por el Teorema 0.11, la función $\prod_{\alpha\in I} f_\alpha : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ definida por $(\prod_{\alpha\in I} f_\alpha)((x_\alpha)_{\alpha\in I}) = (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in I}$ es continua. Esta función es llamada producto Cartesiano de las funciones $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Si suponemos además que $X_\alpha = X$ para todo $\alpha \in I$ entonces notemos que la diagonal $\underset{\alpha\in I}{\Delta} f_\alpha$ es la composición de la función diagonal $i = \underset{\alpha\in I}{\Delta}\, id_{X_\alpha} : X \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y la función producto Cartesiano $\prod_{\alpha\in I} f_\alpha : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$. La imágen $i(X) = \Delta \subseteq X^{|I|}$ es llamada diagonal del producto Cartesiano $X^{|I|}$. En un espacio Hausdorff X, la diagonal $\Delta = \bigcap_{\alpha_1 \neq \alpha_2} \{x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha : p_{\alpha_1}(x) = p_{\alpha_2}(x)\}$ es un conjunto cerrado en el producto $X^{|I|}$.

A continuación presentaremos algunas de las propiedades de una de las clases más importantes de espacios topológicos, la de los espacios compactos. La génesis de este concepto está íntimamente relacionada con el Teorema de Borel que enuncia que toda cubierta abierta numerable de un intervalo cerrado de la recta real tiene una subcubierta finita y con la observación de Lebesgue en el sentido de que este resultado es válido para toda cubierta abierta del intervalo cerrado. Cabe destacar que en 1903 Borel [Bo] generalizó este resultado a todos los subconjuntos cerrados y acotados de cualquier espacio Euclidiano. En los inicios de la Topología General era muy frecuente el definir una nueva clase de espacios a través de una propiedad del intervalo $[0,1]$ o de la recta real $\mathbb{R}$. Esto fué lo que sucedió con la clase de espacios topológicos compactos y aunque por algún tiempo existió la duda de si la extensión de la clase de espacios métricos compactos era la clase de espacios compactos, la clase de los espacios numerablemente compactos o la clase de los espacios secuencialmente compactos, ahora es claro que es la primera de estas pues tiene un mejor comportamiento con respecto a las operaciones sobre espacios topológicos y lleva a problemas más interesantes.

0.16. DEFINICION. Sea X un espacio topológico.

(1) $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de conjuntos abiertos de X y $X = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$.

(2) Una familia de conjuntos, $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita si para todo $I_0 \subseteq I$ y $|I_0| < \aleph_0$ se satisface que $\bigcap\{F_\alpha : \alpha \in I_0\} \neq \phi$

(3) X es compacto si X es Hausdorff y toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita o equivalentemente si toda familia $\mathcal{F}$, de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tiene una intersección no vacía, es decir $\bigcap \mathcal{F} \neq \phi$.

0.17. TEOREMA. (cit. pos. [En], Corolario 3.1.5). Sean X un espacio topológico y $U \subseteq X$ un conjunto abierto en X. Si $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X en donde al menos uno de ellos es compacto (en particular, si X es compacto) y si $\bigcap \{F_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq U$ entonces existe $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq I$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \subseteq U$.

0.18. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 3.1.6). Sean X un espacio regular y $A \subseteq X$ compacto. Entonces para todo conjunto cerrado $B \subseteq X$ tal que $A \cap B = \emptyset$ existen conjuntos abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Si además B es compacto entonces es suficiente suponer que X sea Hausdorff.

0.19. TEOREMA. (cit. pos. [En] p. 125).

(1) Todo subespacio compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.

(2) Todo espacio compacto es normal.

(3) La imágen continua de un espacio compacto sobre un espacio Hausdorff es compacta.

(4) Toda función continua de un espacio compacto sobre un espacio Hausdorff es cerrada.

0.20. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 3.1.16). Sea X un espacio T_2. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

(1) X es compacto.

(2) Para todo espacio topológico Y, la proyección $p: X \times Y \to Y$ es una función cerrada.

0.21. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 3.2.4). Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Entonces el producto topológico $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es compacto si y sólo si X_α es compacto para todo $\alpha \in I$.

Usando el Teorema 0.15 se puede probar el siguiente resultado

0.22. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 2.3.23). Si $X \in \mathcal{T}$ y $w(X)$ es el peso de X (ver Definición 0.59 más adelante), entonces X se puede encajar en el producto $[0,1]^{w(X)}$.

0.23. DEFINICION. Una función continua $f: X \to Y$ es una función perfecta si X es Hausdorff, f es cerrada y para cada $y \in Y$ $f^{-1}(y)$ es compacto en X. En el caso de que las fibras, $f^{-1}(y)$, sean conjuntos numerablemente compactos en X se dirá que f es una función casi-perfecta.

La clase de las funciones perfectas en la categoría de los espacios métricos fué introducida por Vaĭnšteĭn en 1947 [V] y de manera independiente en la categoría de los espacios localmente compactos por Leray en 1950 [Le] y Bourbaki en 1951 [Bou1] (cit. pos. [En] p. 190).

0.24. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 3.7.1). Si X es compacto y Y es Hausdorff entonces la proyección $p: X \times Y \to Y$ es perfecta.

0.25. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 3.7.2). Si $f: X \to Y$ es una función perfecta, entonces para todo subespacio compacto $Z \subseteq Y$, $f^{-1}(Z)$ es compacto.

La parte (2) del siguiente teorema muestra que las funciones perfectas juegan, entre las funciones continuas, un papel similar al que juegan los espacios compactos entre los espacios topológicos. Fué probada por Frolík en 1960 [Fr] y por Bourbaki en 1961 [Bou 2] (cit. pos. [En] p. 190).

0.26. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teoremas 3.7.3, 3.7.9 y 3.7.10).

(1) La composición de dos funciones perfectas es perfecta.

(2) El producto Cartesiano $f = \prod_{\alpha \in I} f_\alpha$, donde $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ y $X_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in I$, es perfecta si y sólo si f_α es perfecta para todo $\alpha \in I$.

(3) La función producto diagonal de una familia arbitraria de funciones perfectas es una función perfecta.

0.27. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 3.7.11). Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de funciones continuas donde $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Si existe $\alpha_0 \in I$ tal que f_{α_0} es una función perfecta y Y_α es Hausdorff para todo $\alpha \in I - \{\alpha_0\}$ entonces la diagonal $\underset{\alpha \in I}{\Delta} f_\alpha$ es una función perfecta.

El siguiente concepto fué introducido por Alexandroff en 1923 [A].

0.28. DEFINICION. Un espacio topológico X es localmente compacto si para todo $x \in X$ existe una vecindad de x, U, tal que $cl_X U$ es un conjunto compacto en X.

0.29. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 3.3.1). Si X es un espacio localmente compacto entonces X es de Tychonoff.

0.30. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 3.3.2). Sean X un espacio localmente compacto y $A \subseteq X$ compacto. Si V es un abierto en X tal que $A \subseteq V$ entonces existe un abierto U tal que $A \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V$ y $\bar{U}$ es compacto.

En 1930 Tychonoff [T] descubrió que los espacios topológicos que pueden ser encajados en un espacio compacto son precisamente los espacios que ahora llevan su nombre. Este fué, esencialmente el inicio del estudio general de las compactaciones aunque quién primero estudió el concepto de compactación fué Carathéodory para subconjuntos abiertos del plano en el contexto de funciones analíticas [C]. Construcciones similares fueron usadas antes, en diferentes teorías de números reales (cit. pos. [En] p. 171).

0.31. DEFINICION. Sea X un espacio topológico. Una compactación del espacio X es una pareja (Y, c) tal que Y es un espacio compacto y $c: X \to Y$ es un encaje con la propiedad de que $\overline{c(X)} = Y$.

De aquí en adelante, la frase "Y es una compactación de X" quiere decir que existe $c: X \to Y$ encaje tal que (Y, c) es una compactación de X.

Los siguientes resultados aparecen en el artículo de Tychonoff de 1930 [T].

0.32. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teoremas 3.5.1 y 3.5.2).

(1) Un espacio topológico X tiene una compactación si y sólo si X es un espacio Tychonoff.

(2) Si $X \in \mathcal{T}$ entonces existe una compactación Y de X tal que $w(Y) = w(X)$. (Ver Definición 0.58).

Si $\mathcal{C}om(X) = \{Y \in \mathcal{T} : Y$ es una compactación de $X\}$ entonces se puede probar (vid. [En], Teorema 3.5.9) que si $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}om(X)$ entonces $\mathcal{C}_0$ tiene una mínima cota superior con respecto al orden determinado por la contención.

El siguiente teorema es debido a Cěch [Cé] y a Stone [St].

0.33. TEOREMA. (cit. pos. [En], Corolario 3.5.10). Si $X \in \mathcal{T}$ entonces existe en $\mathcal{C}om(X)$ un elemento maximal con respecto al orden definido por la relación de contención en $\mathcal{C}om(X)$.

0.34. DEFINICION. Al elemento maximal en $\mathcal{C}om(X)$ garantizado por el Teorema 0.33 le llamaremos la compactación de Stone-Čech y será denotada por βX.

El siguiente teorema resume algunas de las propiedades de esta compactación. Antes de enunciarlo necesitaremos de la definición de conjuntos completamente separados. Dos subconjuntos A y B de un espacio topológico X son completamente separados si existe una función continua $f: X \to [0,1]$ tal que $f(x)=0$ para todo $x \in A$ y $f(x)=1$ para todo $x \in B$.

0.35. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teoremas 3.6.1, 3.6.2, 3.6.3). Si $X \in \mathcal{T}$ entonces en la compactación de Stone-Čech las siguientes propiedades son equivalentes.

(1) Toda función continua $f: X \to Z$ con Z compacto tiene una extensión continua a βX.

(2) Si $f: X \to [0,1]$ es una función continua entonces f tiene una extensión continua a βX.

(3) Si A y B son completamente separados en X, entonces
$$cl_{\beta X}(A) \cap cl_{\beta X}(B) = \emptyset.$$

Además, si αX es una compactación de X que satisface alguna de las condiciones enunciadas arriba entonces existe un homeomorfismo de βX en αX que deja fijos a los elementos de X.

La siguiente clase de espacios topológicos fué introducida por Alexandroff y Urysohn en 1929 [AU] y tuvo su origen en la propiedad que Lindelöf probó en 1903: Toda familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ contiene una subfamilia numerable con la misma unión [Li].

0.36. DEFINICION. Un espacio topológico X es Lindelöf si X es regular y toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

En el siguiente teorema se resumen algunas de las propiedades que satisfacen esta clase de espacios topológicos. Antes de enunciarlo daremos la siguiente definición.

0.37. DEFINICION. Una familia de subconjuntos de un conjunto X, $\mathcal{F}$, tiene la propiedad de la intersección numerable (p.i.n) si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\bigcap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ para toda $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ subfamilia numerable.

0.38. TEOREMA. (cit. pos. [En] pp. 192-193.).

(1) Todo espacio regular y segundo numerable es Lindelöf.

(2) Todo espacio Lindelöf es normal.

(3) Un espacio regular X es Lindelöf si y sólo si toda familia de subconjuntos cerrados de X que tiene la p.i.n tiene intersección no vacía.

(4) Todo subespacio cerrado de un espacio Lindelöf es Lindelöf.

(5) Todo espacio regular que se puede expresar como unión numerable de subespacios Lindelöf es Lindelöf

(6) Si X es un espacio Lindelöf, Y es un espacio regular y $f: X \to Y$ es continua y sobre entonces Y es Lindelöf.

0.39. DEFINICION. Diremos que un espacio topológico X es numerablemente compacto si X es Hausdorff y toda cubierta abierta numerable tiene una subcubierta finita.

Esta clase de espacios topológicos fué definida y estudiada antes que los espacios compactos. Al principio pareció ser la clase más relevante. En cierto sentido esto se debió al hecho de que en la clase de los espacios métricos ambas definiciones son equivalentes. La principal razón de que haya predominado la clase de los espacios compactos es que ésta es una clase multiplicativa mientras que la clase de los espacios numerablemente compactos no lo es.

0.40. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 3.10.1). Un espacio X es compacto si y sólo si X es numerablemente compacto y es Lindelöf.

0.41. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teoremas 3.10.2 y 3.10.3). Si X es un espacio Hausdorff entonces son equivalentes.

(1) X es numerablemente compacto.

(2) Toda familia numerable de subconjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de la intersección finita (p.i.f) tiene intersección no vacía.

(3) Para toda sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ se tiene que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \emptyset$.

(4) Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.

(5) Todo subconjunto infinito numerable de X tiene un punto de acumulación.

0.42. TEOREMA. (cit. pos. [En]. p 203.).

(1) Todo subespacio cerrado de un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto.

(2) Si X es numerablemente compacto, Y es Hausdorff y $f: X \to Y$ es continua y sobre entonces Y es numerablemente compacto.

(3) Toda función continua con valores reales definida sobre un espacio numerablemente compacto es acotada y alcanza sus cotas.

El siguiente concepto fué introducido por Hewitt en 1948 [He 2] y Nachbin en 1950 [N] quién definió de manera independiente a estos espacios en términos de uniformidades. Esta clase de espacios juega el mismo papel en la teoría de las funciones continuas de un espacio topológico X en $\mathbb{R}$ que los espacios compactos en la teoría de las funciones continuas y acotadas definidas en un espacio topológico y con valores en $\mathbb{R}$. (ver Teorema 0.46)

0.43. DEFINICION. $X \in \mathcal{T}$ es realcompacto si no existe $\tilde{X} \in \mathcal{T}$ tal que se satisfagan las siguientes condiciones:

(1) Existe $r: X \to \tilde{X}$ encaje tal que $r(X) \neq \overline{r(X)} = \tilde{X}$

(2) Para toda $f: X \to \mathbb{R}$, función continua, existe una función continua $\tilde{f}: \tilde{X} \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f} \circ r = f$.

0.44. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teorema 3.11.1). Un espacio X es compacto si y sólo si X es seudocompacto[1] y realcompacto.

0.45. TEOREMA. (cit. pos. [En] pp 214-217.).

(1) $X \in \mathcal{T}$ es realcompacto si y sólo si existe $m \in \mathcal{C}ard$ tal que X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^m$.

(2) Todo subespacio cerrado de un espacio realcompacto es realcompacto.

(3) $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es realcompacto si y sólo si X_α es realcompacto para todo $\alpha \in I$.

(4) Todo espacio Lindelöf es realcompacto.

(5) Sean $X \in \mathcal{T}$ y Y realcompacto. Si existe $f: X \to Y$ una función perfecta entonces X es realcompacto.

Una pareja (h, Y) es una realcompactación de X si Y es realcompacto y $h: X \to Y$ es un encaje tal que $Cl_Y(h(X)) = Y$. De aquí en adelante solamente escribiremos: Sea Y una realcompactación en lugar de "sea (h, Y) una realcompactación".

0.46. TEOREMA. (cit. pos. [GJ], Teorema 8.7.). Para todo $X \in \mathcal{T}$ existe

---

[1] $X \in \mathcal{T}$ es seudocompacto si toda función continua definida sobre X y con valores reales es acotada. Es conocido que $X \in \mathcal{T}$ es seudocompacto si X es numerablemente compacto.

una realcompactación υX que satisface las siguientes propiedades equivalentes:

(1) Si Y es realcompacto entonces para toda función continua $f: X \to Y$ existe una función continua $f^{\circ}: \upsilon X \to Y$ tal que $f^{\circ}|_X = f$.

(2) Para toda función continua $f: X \to \mathbb{R}$ existe $f^{\upsilon}: \upsilon X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f^{\upsilon}|_X = f$.

Además, υX es único en el siguiente sentido: si (h, T) es una realcompactación de X que satisface (2), entonces existe un homeomorfismo $H: \upsilon X \to T$ tal que $H(x) = h(x)$ para todo $x \in X$.

0.47. DEFINICION. Al espacio υX del Teorema anterior se le llamará la realcompactación de Hewitt de X.

0.48. DEFINICION.

(1) Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas de un conjunto X. Diremos que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ si para todo $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.

(2) Una colección de subconjuntos de un espacio topológico X, $\mathcal{U}$, es discreta (localmente finita) si para todo $x \in X$ existe una vecindad de x, W, tal que W intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{U}$ (respectivamente a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$).

(3) Una familia de subconjuntos de un espacio X, $\mathcal{U}$, es σ-discreta (σ-localmente finita) si $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{U}_n$ donde cada familia $\mathcal{U}_n$ es discreta (localmente finita).

(4) (Dieudonné, 1944 [D]) Un espacio X es paracompacto si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

(5) X es subparacompacto si toda cubierta abierta de X

tiene un refinamiento cerrado σ-discreto.

(6) (Bing, 1951 [Bi].). Un espacio X es colectivamente normal si para toda familia discreta $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de subconjuntos cerrados de X existe una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ para todo $\alpha\in I$ y si $\alpha\neq\beta$ entonces $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$

(7) (Chittenden y Pitcher, 1919 [ChP].). Un desarrollo para un espacio X es una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\omega}$ tal que para todo $x\in X$, $\{St(x,\mathcal{G}_n)\}_{n\in\omega}$ es una base local para x, donde $st(x,\mathcal{G}_n) = \bigcup\{G\in\mathcal{G}_n : x\in G\}$.

(8) Un espacio desarrollable será un espacio topológico que tenga un desarrollo. Si un espacio desarrollable X es regular diremos que X es un espacio de Moore.

(9) Un espacio topológico (X,τ) es metrizable si existe una métrica d sobre X tal que la topología generada por d coincide con τ.

Con respecto a (9) de ésta última definición existen muchos resultados que dan condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico sea metrizable. Aquí solo enunciaremos aquellas propiedades de estos espacios que serán útiles para este trabajo.

0.49. TEOREMA (cit. pos. [En], Teoremas 5.1.18, 5.1.28, 5.1.20.).

(1) Todo espacio paracompacto es colectivamente normal.

(2) La paracompacidad es hereditaria con respecto a conjuntos F_σ.

(3) Todo espacio paracompacto y numerablemente compacto es compacto.

0.50. TEOREMA. (Worrel y Wicke, 1965 [WW]. cit. pos. [Bu], Teorema 4.16)

X es paracompacto si y sólo si X es colectivamente normal y subparacompacto.

0.51. TEOREMA. (Bing, 1951 [Bi]. cit. pos. (1) [Gr], Teorema 1.2 y (2) [En], Teorema 4.4.8). (1) X es colectivamente normal y es un espacio de Moore si y sólo si X es metrizable.

(2) X es metrizable si y sólo si X es regular y tiene una base σ-discreta.

0.52. TEOREMA. (cit. pos. [En], Teoremas 4.1.17, 4.2.8, 4.2.9 y 4.2.2).

(1) Sea X un espacio metrizable. X es compacto si y sólo si X es numerablemente compacto.

(2) Un espacio compacto es metrizable si y sólo si es un espacio segundo numerable.

(3) Un espacio segundo numerable es metrizable si y sólo si es un espacio regular

(4) El producto topológico numerable de espacios metrizables es metrizable.

0.53. DEFINICION.

(1) (Morita, 1964 [Mo]). Un espacio topológico X es un M-espacio si existe una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\omega}$ tal que:

(i) Si $x_n \in st(x, \mathcal{G}_n)$ entonces $\{x_n\}_{n\in\omega}$ tiene un punto de acumulación.

(ii) Para cada $n\in\omega$ $\mathcal{G}_{n+1}$ refina con estrellas a $\mathcal{G}_n$. (es decir, para todo $G \in \mathcal{G}_{n+1}$ existe $H \in \mathcal{G}_n$ tal que $st(G, \mathcal{G}_{n+1}) \subseteq H$.).

(2) (Arkhangel'skiĭ, 1963 [Ark7].). $X \in \mathcal{T}$ es un espacio emplumado (p-espacio) si existe una sucesión de familias $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos abiertos de βX tal que:

(i) Para cada $n\in\omega$ $\mathcal{U}_n$ cubre a X.

(ii) Para cada $x\in X$, $\bigcap_{n\in\omega} St(x, \mathcal{U}_n) \subseteq X$.

0.54. TEOREMA. ([Mo] , Teorema 6.1). Un espacio X es un M-espacio si y sólo si existe un espacio métrico Y y una función casi-perfecta y sobre $f: X \to Y$.

0.55. TEOREMA. ([Gr] , Corolarios 3.7, 3.8 y 3.20).

(1) Sea X un espacio paracompacto. X es M-espacio si y sólo si X es la preimágen perfecta de un espacio métrico.

(2) X es metrizable si y sólo si X es un M-espacio con diagonal G_δ.

(3) Sea X un espacio paracompacto. X es un M-espacio si y sólo si X es un p-espacio.

Por lo tanto, de (1) y (3) del Teorema anterior podemos caracterizar a los espacios emplumados paracompactos como las pre-imágenes perfectas de espacios métricos.

Otro de los conceptos importantes usados en esta Tesis es el de función cardinal, concepto que viene a extender ciertas propiedades topológicas importantes como la separabilidad, la de ser segundo numerable o primero numerable, a cardinalidades mayores. Este concepto también ha resultado ser una herramienta poderosa para hacer comparaciones cuantitativas precisas entre ciertas propiedades topológicas y ha permitido formular, generalizar y probar resultados ya establecidos de manera sistemática y elegante.

0.56. DEFINICION. Una función cardinal es una función f, definida en la clase de espacios topológicos tomando valores en la clase de todos los cardinales infinitos y tal que si $X \cong Y$ entonces $f(X) = f(Y)$.

Acaso el ejemplo más inmediato de función cardinal sea el de la función cardinalidad, denotada por $|X|$, y que es igual al número de elementos de X mas $\aleph_0$. A continuación definiremos aquellas funciones cardinales que se basan en alguna propiedad topológica que da información global acerca del espacio. Antes de esto daremos algunas definiciones.

0.57. DEFINICION. Sea X un espacio topológico.

(1) Una familia celular en X es una colección de conjuntos abiertos no vacíos y ajenos por parejas.

(2) Una red para X es una colección $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X tal que todo conjunto abierto en X es la unión de elementos de $\mathcal{N}$.

0.58. DEFINICION. Sea X un espacio topológico. Se define la función cardinal:

(1) peso de X como $w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ es una base para $X\} + \omega$.

(2) densidad de X como $d(X) = \min\{|D| : D \subseteq X$ y $\overline{D} = X\} + \omega$.

(3) celularidad de X como

$c(X) = \sup\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es una familia celular en $X\} + \omega$.

(4) amplitud de X como

$s(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X$ y D es discreto$\} + \omega$.

(5) el grado de Lindelöf de X como

$\ell(X) = \min\{\kappa \in Card :$ toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta de cardinalidad $\leq \kappa\}$.

(6) extensión de X como

$e(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X$, D es cerrado y discreto$\} + \omega$.

(7) peso red de X como

$nw(X) = \min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N}$ es una red para $X\} + \omega$

(8) $o(X) =$ número de conjuntos abiertos en X $+ \omega$.

0.59. DEFINICION. Una función cardinal f es monótona si $f(Y) \leq f(X)$ para todo subespacio Y de X.

Dentro de las funciones cardinales monótonas tenemos el peso, el peso red, la cardinalidad y la amplitud, mientras que la densidad, la celularidad, el grado de Lindelöf y la extensión no lo son. Sin embargo, la celularidad es monótona para subconjuntos abiertos o subconjuntos densos; la densidad es monótona para subconjuntos abiertos y el grado de Lindelöf y la extensión son monótonas para subconjuntos cerrados.

0.60. DEFINICION. Si f es una función cardinal que no es monótona se define la función cardinal $hf(X) = \sup\{f(Y) : Y \subseteq X\}$.

Las relaciones entre las funciones cardinales definidas hasta aquí se resumen en el siguiente cuadro (ver [Ho] p. 15.). La flecha $\alpha \longrightarrow \beta$ indica que $\alpha \leq \beta$.

$$\begin{tikzcd}
 & & o(X) & & \\
 & w(X) \arrow[ur] & & |X| \arrow[ul, "\text{si } X \text{ es } T_1"'] & \\
 & & nw(X) \arrow[ul] \arrow[ur] & & \\
 & hd(X) \arrow[ur] & & hl(X) \arrow[ul] & \\
d(X) \arrow[ur] & & s(X) \arrow[ul] \arrow[ur] & & l(X) \arrow[ul] \\
 & c(X) \arrow[ul] \arrow[ur] & & e(X) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Las definiciones de las siguientes funciones cardinales están basadas en propiedades topológicas locales. Antes daremos la siguiente definición.

0.61. DEFINICION. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{V}$ una colección de conjuntos abiertos no vacíos en X y $p \in X$. Diremos que $\mathcal{V}$ es una seudobase para p si $\bigcap \mathcal{V} = \{p\}$.

0.62. DEFINICION. Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Se definen

(1) $\chi(p, X) = \min \{ |\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es una base local para $p \}$

(2) $\psi(p, X) = \min \{ |\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es una seudobase para $p \}$

(3) $t(p, X) = \min \{ \kappa \in Card :$ para todo $Y \subseteq X$ con $p \in \overline{Y}$ existe $A \subseteq Y$ con $|A| \leq \kappa$ y $p \in \bar{A} \}$.

Estas definiciones dan lugar a las funciones cardinales carácter, seudocarácter y estrechez de X definidas como sigue:

(4) $\chi(X) = \sup \{ \chi(p, X) : p \in X \} + \omega$.

(5) $\psi(X) = \sup \{ \psi(p, X) : p \in X \} + \omega$.

(6) $t(X) = \sup \{ t(p, X) : p \in X \} + \omega$.

Todas estas funciones cardinales resultan ser monótonas. El siguiente teorema proporciona algunas desigualdades útiles.

0.63. TEOREMA. (cit. pos. [Ho], Teoremas 3.8 y 3.9). Sean X un espacio topológico y $S \subseteq X$ denso en X. Entonces

(1) $\chi(X) \leq w(X) \leq \chi(X)\,|X|$.

(2) $t(X) \leq hd(X)$.

(3) Si X es Hausdorff entonces $\psi(X) \leq h\ell(X)$.

(4) $d(X) \leq d(S) \leq d(X) \cdot t(X)$.

Dada la importancia de la clase de espacios compactos y de la clase de espacios metrizables, en el siguiente teorema se enuncia el comportamiento de algunas funciones cardinales sobre estos espacios.

0.64. TEOREMA. (cit. pos. [Ho], Teoremas 7.1, 7.4 y 7.17). Sea X un espacio topológico compacto. Entonces

(1) (Alexandroff) $\psi(X) = \chi(X)$.

(2) (Arkhangel'skiĭ, [ArkO], 1959) $nw(X) = w(X)$.

(3) (Šapirovskiĭ, [Sa], 1974). $hd(X) \le s(X)^+$.

0.65. TEOREMA. (cit. pos. [Ho], Teorema 8.1). Sea X un espacio metrizable infinito. Entonces

(1) $\Psi(X) = t(X) = \chi(X) = \omega$

(2) $\omega(X) = nw(X) = hd(X) = hl(X) = l(X) = s(X) = d(X) = c(X) = e(X)$.

También el siguiente teorema tiene muchas aplicaciones.

0.66. TEOREMA. (Hewitt [He1], Marczewski [Mar] (para $\kappa = \aleph_0$), Pondiczery [Pon]. cit. pos. [Ho], Teorema 11.2). Sean $\kappa \in Card$, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos y X su producto topológico. Si $|I| \le 2^\kappa$ y $d(X_\alpha) \le \kappa$ para todo $\alpha \in I$, entonces $d(X) \le \kappa$.

Para $X \in \mathcal{T}$, el espacio $Cp(X)$ es uno de los objetos de estudio en este trabajo. A continuación damos una breve descripción de esta clase de espacios. Si $X, Y \in \mathcal{T}$, consideremos sobre $Y^X = \{ f : X \to Y \;/\; f$ es función$\}$ la topología producto y entonces al subespacio $\{ f \in Y^X : f$ es continua$\}$, lo denotaremos como $Cp(X,Y)$ y a la topología relativa sobre este conjunto le llamaremos topología de la convergencia puntual. En el caso de que $Y = \mathbb{R}$, entonces a $Cp(X,Y)$ lo denotaremos simplemente como $Cp(X)$. Este espacio es, en general, diferente del espacio X, lo que permite que, en especial, sea útil en la búsqueda de ejemplos. Esta no es la única razón para estudiar este tipo de espacios; entre otras, está el hecho de que la topología de la convergencia puntual es la más gruesa de las topologías que se definen de manera natural en $C(X)$ (la topología de la convergencia uniforme o la topología compacto-abierta); este hecho permite que $Cp(X)$ contenga a todos los conjuntos compactos que pueda tener $C(X)$ al ser considerado con alguna de éstas otras topologías.

Si definimos el conjunto $W(x_1,\dots,x_n ; U_1,\dots,U_n) = \{ f\in C(X,Y) : f(x_i)\in U_i$ para $i=\overline{1,n}\}$ para cada $n\in\mathbb{N}$ fijo, $\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq X$ y $U_1,\dots,U_n$ abiertos en Y, entonces, de la definición de topología producto sabemos que la familia $\mathcal{B}=\{W(x_1,\dots,x_n ; U_1,\dots,U_n) : n\in\mathbb{N}, \{x_1,\dots,x_n\}\subseteq X$ y $U_1,\dots,U_n$ abiertos en $Y\}$ es una base para $C_p(X,Y)$ (Teorema 0.10). De aquí en adelante a $\mathcal{B}$ le llamaremos base canónica para $C_p(X,Y)$. También del Teorema 0.10, es conocido que basta considerar una base $\mathcal{V}$ en Y para que la familia $\{W(x_1,\dots,x_n ; U_1,\dots,U_n) : n\in\mathbb{N}, \{x_1,\dots,x_n\}\subseteq X$ y $\{U_1,\dots,U_n\}\subseteq\mathcal{V}\}$ sea una base para $C_p(X,Y)$. De esta manera, si $Y=\mathbb{R}$ entonces bastará considerar los intervalos abiertos y así la familia de conjuntos $W(x_1,\dots,x_n ; \epsilon)=\{g\in C_p(X,Y) : |g(x_i)-f(x_i)|<\epsilon$, para todo $i=\overline{1,n}\}$ resulta ser una base para $C_p(X)$.

Los siguientes resultados resumen algunas de las propiedades básicas de $C_p(X,Y)$ que usaremos en capítulos posteriores. Los resultados fueron tomados de [TCH] pero también pueden ser encontrados en [Ark].

0.67. TEOREMA. (cit. pos. [TCH], Proposición 1.6). Si Y está encajado en Z en forma cerrada entonces $C_p(X,Y)$ se encaja en forma cerrada en $C_p(X,Z)$.

0.68. TEOREMA. (cit. pos. [TCH], Teorema 1.9). Si $X\in\mathcal{T}$ entonces $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$.

Si $Y\subseteq X$ se define la función restricción $\pi_Y : C_p(X)\to C_p(Y)$ como $\pi_Y(f)=f|Y$. De aquí en adelante denotaremos al subespacio de $C_p(Y)$, $\pi_Y(C_p(X))$ como $C_p(Y|X)$.

0.69. TEOREMA. (cit. pos. [TCH], Proposición 1.14). Sea Y un subespacio de X. Entonces:

(1) π_Y es continua y $\overline{\pi_Y(C_p(X))} = C_p(Y)$

(2) si Y es cerrado en X entonces π_Y es una función abierta sobre su imágen.

(3) Si Y está C-encajado en X entonces π_Y es sobre

(4) Si Y es denso en X entonces π_Y es una condensación.

También se tiene la siguiente construcción: si $f: X \to Y$ es una función, se define $f^{\#}: \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$ como $f^{\#}(h) = h \circ f$. Los siguientes dos teoremas enuncian algunas de las propiedades de $f^{\#}$.

0.70. TEOREMA. (cit. pos. [TCH], Proposiciones 1.15 y 1.16). $f^{\#}$ es continua y si $f(X) = Y$ entonces $f^{\#}$ es un homeomorfismo sobre el subespacio cerrado de $\mathbb{R}^X$, $f^{\#}(\mathbb{R}^Y)$.

0.71. TEOREMA. (cit. pos. [TCH], Proposición 1.17 y Corolario 1.18).

Sean $f: X \to Y$ y $g: X \to Z$ funciones sobreyectivas. Entonces

(1) $f^{\#}(C(Y)) \subseteq g^{\#}(C(Z))$ si y sólo si existe $h: Z \to Y$ continua tal que $f = h \circ g$.

(2) f es continua si y sólo si $f^{\#}(C(Y)) \subseteq C(X)$

(3) Si f es una función cociente entonces $f^{\#}(C(Y))$ es cerrado en $C_p(X)$

(4) f es una condensación si y sólo si $f^{\#}(C(Y))$ es denso en $C_p(X)$.

(5) f es un homeomorfismo si y sólo si $f^{\#}(C(Y)) = C(X)$.

Ahora, dado un conjunto X y una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$ se define para cada $x \in X$ la función $e_x: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ dada por $e_x(f) = f(x)$, que resulta ser una función continua del subespacio de $\mathbb{R}^X$, $\mathcal{F}$, a $\mathbb{R}$. Entonces, se define la función evaluación canónica $\psi_{\mathcal{F}}: X \to \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ como $\psi_{\mathcal{F}}(x) = e_x$. Las propiedades de esta función se resumen en el siguiente teorema.

0.72. TEOREMA. (cit. pos. [TCH], Proposiciones 1.18, 1.20, 1.21 y 1.22).

(1) Para cada $X \in \mathcal{T}$ y cada subespacio $\mathcal{F} \subseteq C_p(X)$, la función $\Psi_{\mathcal{F}}$ es continua

(2) Para cada conjunto X y cualquier familia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$, la familia $\Psi_{\mathcal{F}}(X)$ es una familia que separa puntos de $\mathcal{F}$.

(3) Si $\mathcal{F}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^X$ entonces

(a) Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones continuas que separa puntos de X entonces $\Psi_{\mathcal{F}}: X \to C_p(\mathcal{F})$ es una condensación sobre su imágen.

(b) Si $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$ es una familia que separa puntos de X y puntos de cerrados entonces $\Psi_{\mathcal{F}}$ es un encaje.

(4) Si $X \in \mathcal{T}$ entonces X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(C_p(X))$.

El siguiente teorema también será de utilidad.

0.73. TEOREMA. (cit. pos. [TCH], Proposiciones 1.2.4 y 1.2.5). Sean X, Y, X_α y Y_α espacios topológicos y $\alpha \in I$.

(1) El espacio $C_p(X, \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha)$ es homeomorfo a $\prod_{\alpha \in I} C_p(X, Y_\alpha)$

(2) El espacio $C_p(\sum_{\alpha \in I} X_\alpha, Y)$ es homeomorfo a $\prod_{\alpha \in I} C_p(X_\alpha, Y)$ donde $\sum_{\alpha \in I} X_\alpha$ es la suma topológica ajena de los espacios X_α.

Para concluir este capítulo, haciendo uso de la estructura algebraica de $\mathbb{R}$ y definiendo para cada $f, g \in \mathbb{R}^X$, para cada $x \in X$ y para cada $r \in \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; $fg(x) = f(x)g(x)$ y $(rf)(x) = rf(x)$

obtenemos, sobre $\mathbb{R}^X$, la estructura de grupo, anillo o espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Además, observemos que si $p_x : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ es la x-ésima proyección entonces para cada $x \in \mathbb{R}$, la composición $p_x \circ + : \mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ resulta ser una función continua tal como lo muestra el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X & \xrightarrow{+} & \mathbb{R}^X \\ {\scriptstyle P_x \times P_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_x} \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{+} & \mathbb{R} \end{array}$$

es decir, la suma definida en $\mathbb{R}^X$ es una función continua. De manera similar, el producto y el producto por un escalar en $\mathbb{R}^X$ resultan ser funciones continuas, así que $\mathbb{R}^X$ puede ser considerado como grupo topológico, anillo topológico o espacio vectorial topológico. Además, dado que las operaciones están definidas allí de manera puntual entonces si aplicamos estas operaciones a funciones continuas obtenemos también funciones continuas así que $C_p(X)$ también puede ser considerado como grupo topológico, anillo topológico o espacio vectorial topológico.

CAPITULO 1

El grado de Lindelöf en espacios de funciones $C_p(X)$

1- Introducción.

En este capítulo se verá que algunas funciones cardinales, tales como el peso, la densidad o el carácter, no representan problemas mayores para poder calcularlas en los espacios C_p. Sin embargo, el panorama es diferente cuando se trata el grado de Lindelöf sobre estos espacios. Para muestra de ello basta recordar dos de los problemas abiertos más importantes en la teoría de los espacios C_p:

(i) Encontrar propiedades topológicas en el espacio X que sean necesarias y suficientes para garantizar que $C_p(X)$ sea Lindelöf.

(ii) Si $C_p(X)$ es Lindelöf entonces ¿$C_p(X)\times C_p(X)$ es Lindelöf?

Para ir comprendiendo el tipo de dificultades que se presentan al estudiar la propiedad de Lindelöf en los espacios C_p trataremos algunos resultados que involucran esta propiedad. En especial encontraremos que bajo ciertas restricciones en la clase de los espacios normales es posible dar algunas condiciones necesarias para que $C_p(X)$ sea Lindelöf siempre que X sea un elemento de esa clase. Finalmente se verá que si la estrechez de X^n es numerable para todo $n\in\mathbb{N}$ entonces $C_p(X)$ es Lindelöf (Teorema de Asanov).

2. Funciones cardinales elementales en los espacios C_p.

En esta sección se calcularán algunas funciones cardinales básicas en $C_p(X)$ que serán de utilidad posteriormente. Antes de ver cómo calcular el peso y el carácter de $C_p(X)$ para cualquier espacio topológico X probaremos el siguiente teorema, que es consecuencia inmediata de la definición de topología de la convergencia puntual.

2.1. TEOREMA. *Sean $X, Y \in \mathcal{T}$. Entonces*

$$\omega(C_p(X,Y)) \leq |X|\,\omega(Y) \quad y \quad \chi(C_p(X,Y)) \leq |X|\,\chi(Y).$$

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base de Y tal que $|\mathcal{B}| \leq \omega(Y)$. Entonces, dado que $\mathcal{A} = \{W(x_1,\ldots,x_n; B_1,\ldots,B_n) : \{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq X$ y $\{B_1,\ldots,B_n\} \subseteq \mathcal{B}\}$ es una base para $C_p(X,Y)$ y $|\mathcal{A}| \leq |\{F \subseteq X : |F| < \aleph_0\}| \cdot |\{\mathcal{B}_f \subseteq \mathcal{B} : |\mathcal{B}_f| < \aleph_0\}| \leq |X|\,\omega(Y)$ obtenemos que $\omega(C_p(X,Y)) \leq |X| \cdot \omega(Y)$.

Ahora, consideremos $f \in C_p(X,Y)$ y para cada $y \in Y$ sea $\mathcal{B}_Y(y)$ una base local para y con $|\mathcal{B}_Y(y)| = \chi(y, Y)$. Entonces $\mathcal{A}_1 = \{W(x_1,\ldots,x_n; B_1,\ldots,B_n) : n \in \mathbb{N}, \{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq X$ y $B_i \in \mathcal{B}_Y(f(x_i))$ para cada $i = \overline{1,n}\}$ es una base local para f y

$|\mathcal{A}_1| \leq |\{F \subseteq X : F \text{ es finito}\}|\,|\{\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_Y(f(x)) : |\mathcal{F}| < \aleph_0\}|$.

Por lo tanto $\chi(f, C_p(X,Y)) \leq |X|\,\chi(Y)$ y así obtenemos que $\chi(C_p(X,Y)) \leq |X|\,\chi(Y)$. $\dagger$

2.2. TEOREMA. *Para $X \in \mathcal{T}$ y X infinito*

$$|X| = \omega(C_p(X)) = \chi(C_p(X)).$$

Demostración. Sabemos que $\chi(C_p(X)) \leq \omega(C_p(X)) \leq |X|\,\omega(\mathbb{R}) = |X|\,\aleph_0 = |X|$. Entonces, para demostrar el teorema bastará probar que $|X| \leq \chi(C_p(X))$. Supongamos que $\chi(C_p(X)) < |X|$ y consideremos $\mathcal{B}(\bar{0})$ una base local de $\bar{0}$ en $C_p(X)$ con $|\mathcal{B}(\bar{0})| < |X|$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los elementos de $\mathcal{B}(\bar{0})$ son de la forma $W(\bar{0}; x_1,\ldots,x_n; \epsilon)$ con $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq X$

y $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Para cada $W(\bar{o}; x_1, \ldots, x_n; \epsilon) \in \mathcal{B}(\bar{o})$ sea $K(W) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y defínase $Y = \bigcup\{K(W) : W \in \mathcal{B}(\bar{o})\}$. Entonces $|Y| < |X|$ y por lo tanto se puede elegir $x^* \in X \setminus Y$ y considerar la vecindad de $\bar{o}$ en $C_p(X)$, $W(\bar{o}; x^*; 1)$. Sea $W = W(o; x_1, \ldots, x_n; \epsilon)$ un elemento arbitrario de $\mathcal{B}(\bar{o})$; entonces $x^* \neq x_i$ para todo $i = \overline{1,n}$ y como X es Tychonoff existe una función $g \in C_p(X)$ tal que $g(x_i) = 0$ para todo $i = \overline{1,n}$ y $g(x^*) = 1$. Por lo tanto $g \in W \setminus W(\bar{o}; x^*; 1)$ y así $W \nsubseteq W(\bar{o}; x^*; 1)$ lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{B}(\bar{o})$ es una base local de $\bar{o}$ en $C_p(X)$. Por lo tanto $|X| \leq \chi(C_p(X))$. †

Observemos que este Teorema implica que un espacio topológico X es numerable si y sólo si $C_p(X)$ es segundo numerable y que, en consecuencia, cada vez que X sea más que numerable $C_p(X)$ no es segundo numerable y por lo tanto tampoco metrizable. En particular $C_p(\mathbb{R})$ y $C_p(I)$ no son metrizables y tampoco segundo numerables. En estos casos $w(C_p(X)) > w(X)$ y si X es un erizo numerable (no metrizable) entonces $w(C_p(X)) < w(X)$. Es decir, en general, el peso de X y el peso de $C_p(X)$ no están relacionados. El siguiente teorema muestra que el peso red tiene un comportamiento completamente distinto.

2.3.-TEOREMA. Para $X \in \mathcal{T}$. $nw(X) = nw(C_p(X))$.

Demostración. (i) $nw(C_p(X)) \leq nw(X)$.

Sea $\mathcal{P}$ una red en X y $\mathcal{B}$ una base numerable de $\mathbb{R}$. Se construirá una red en $C_p(X)$, de cardinalidad menor o igual que $|\mathcal{P}|$. Para cada pareja de colecciones $\{S_1, \ldots, S_k\} \subseteq \mathcal{P}$ y $\{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq \mathcal{B}$ se define $W(S_1, \ldots, S_k; U_1, \ldots, U_k) = \{f \in C(X) : f(S_i) \subseteq U_i \text{ para todo } i = \overline{1,k}\}$. Consideremos $\mathcal{N} = \{W(S_1, \ldots, S_k; U_1, \ldots, U_k) : \{S_1, \ldots, S_k\} \subseteq \mathcal{P}, \{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq \mathcal{B}\}$. Entonces $|\mathcal{N}| \leq |[\mathcal{P}]^{<\omega}| \, |[\mathcal{B}]^{<\omega}| = |\mathcal{P}| \, |\mathcal{B}| = |\mathcal{P}| \cdot \aleph_0 = |\mathcal{P}|$. Bastará probar que $\mathcal{N}$ es una red en $C_p(X)$. Para ver esto, sea $f \in C_p(X)$ y $W(f; x_1, \ldots, x_k; \epsilon)$ una vecindad básica canónica de f en $C_p(X)$. Supongamos que $x_i \neq x_j$ para cada $i \neq j$. Elijamos $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{B}$ tal que $f(x_i) \in U_i \subseteq (f(x_i)-\epsilon, f(x_i)+\epsilon)$ para cada $i = \overline{1,k}$. Como f es continua existen $s_1, \ldots, s_k \in \mathcal{P}$ tales que $x_i \in s_i$ y $f(s_i) \subseteq U_i$ para todo $i = \overline{1,k}$. Entonces $f \in \tilde{W}_1 = W(s_1, \ldots, s_k; U_1, \ldots, U_k) \subseteq W(f; x_1, \ldots, x_k; \epsilon) = W$. En efecto, si $g \in \tilde{W}_1$, como $x_i \in s_i$ entonces $g(x_i) \in U_i \subseteq (f(x_i)-\epsilon, f(x_i)+\epsilon)$ lo cual implica que $|f(x_i) - g(x_i)| < \epsilon$ para todo $i = \overline{1,k}$, es decir, $g \in W$. Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es una red en $C_p(X)$.

(ii) $nw(X) \leq nw(C_p(X))$.

Como $X \subseteq C_p(C_p(X))$ (Teorema 0.72(4)) entonces $nw(X) \leq nw(C_p(C_p(X))) \leq nw(C_p(X))$, es decir, $nw(X) \leq nw(C_p(X))$.

Por lo tanto, de (i) y (ii) concluimos que $nw(X) = nw(C_p(X))$. $\dagger$

Como en general el peso red acota superiormente al grado de Lindelöf (ver Cap. 0, p. 30) el Teorema 2.3 dice, en particular, que cada vez que X tenga una red numerable entonces $C_p(X)$ es Lindelöf.

2.4. TEOREMA. Para todo $X \in \mathcal{T}$: $d(X) = iw(C_p(X)) = \Psi(C_p(X))$.

Demostración. Primero recordemos que el i-peso de $C_p(X)$ es: $iw(C_p(X)) = \min\{w(Y) : \text{existe una condensación } f : C_p(X) \to Y\}$.

(i) $\Psi(C_p(X)) \leq iw(C_p(X))$.

Para probar esta desigualdad mostraremos que $iw(C_p(X))$ es una cota superior del conjunto $\{\Psi(f; C_p(X)) : f \in C_p(X)\}$. Para probarlo sean $Y \in \mathcal{T}$, $g : C_p(X) \to Y$ biyectiva y continua y $\mathcal{B}$ una base de Y tal que $|\mathcal{B}| \leq iw(C_p(X))$. Veremos que para $f \in C_p(X)$, $\mathcal{N} = \{g^{-1}(B) : f \in g^{-1}(B) \text{ y } B \in \mathcal{B}\}$ es una seudobase para f en $C_p(X)$ y, por lo tanto $\Psi(f; C_p(X)) \leq |\mathcal{N}| \leq |\mathcal{B}| \leq iw(C_p(X))$. Primero obsérvese que $\bigcap\{B \in \mathcal{B} : g(f) \in B\} = \{g(f)\}$. Entonces, si $h \in \bigcap \mathcal{N}$ obtenemos que $g(h) \in B$ para todo $B \in \mathcal{B}$ con $f \in g^{-1}(B)$, lo cual implica que $g(h) = g(f)$ y como g es biyectiva entonces $h = f$, es decir, $\bigcap \mathcal{N} = \{f\}$ y por lo tanto $\mathcal{N}$ es una seudobase para f

en $C_p(X)$.

ii) $iw(C_p(X)) \leq d(X)$.

Sean $\tau = d(X)$ y $Y \subseteq X$ denso en X con $|Y| \leq \tau$. La función restricción $\pi_Y : C_p(X) \to Z \subseteq C_p(Y)$ es una condensación de $C_p(X)$ sobre $Z = \pi_Y(C_p(X)) \subseteq C_p(Y)$ (Teorema 0.69 (4)) y por lo tanto $w(Z) \leq w(C_p(Y)) = |Y| \leq \tau$ y esto implica que $iw(C_p(X)) \leq w(Z) \leq \tau = d(X)$.

iii) $d(X) \leq \psi(C_p(X))$.

Sea $\mathcal{B}$ una seudobase formada por vecindades básicas canónicas de $\bar{o}$ en $C_p(X)$ con $|\mathcal{B}| \leq \psi(C_p(X))$. Para cada $W(\bar{o}; x_1, \dots, x_k; \epsilon) \in \mathcal{B}$ sea $K(W) = \{x_1, \dots, x_k\}$ y defínase $Y = \bigcup\{K(W) : W \in \mathcal{B}\} \subseteq X$. Entonces $|Y| \leq |\mathcal{B}|$ y $\overline{Y} = X$. En efecto $|Y| \leq \sum_{W \in \mathcal{B}} K(W) \leq |\mathcal{B}| \cdot \aleph_0 = |\mathcal{B}|$ y si existiera $x^* \in X \setminus \overline{Y}$ entonces existiría $g \in C_p(X)$ tal que $g(x^*) = 1$ y $g(\overline{Y}) = \{0\}$. Entonces para todo $x \in Y$ se tendría que $g(x) - \bar{o}(x) = 0$ y esto implicaría que $g \in \bigcap \mathcal{B}$, pero $g \neq \bar{o}$ lo cual sería una contradicción. Por lo tanto $\overline{Y} = X$. En consecuencia $d(X) \leq |Y| \leq |\mathcal{B}| \leq \psi(C_p(X))$.

Las desigualdades (i), (ii) y (iii) prueban el Teorema. T.

2.5. TEOREMA. Para todo $X \in \mathcal{T}$: $iw(X) = d(C_p(X))$.

Demostración. (i) $iw(X) \leq d(C_p(X))$.

Como $X \subseteq C_p(C_p(X))$, entonces $iw(X) \leq iw(C_p(C_p(X))) = d(C_p(X))$.

(ii) $d(C_p(X)) \leq iw(X)$.

Sean $Y \in \mathcal{T}$ y $f : X \to Y$ una condensación tal que $w(Y) \leq iw(X)$. Entonces por el Teorema 2.3, $nw(C_p(Y)) = nw(Y) \leq w(Y)$ y como $nw(C_p(Y)) = nw(f^{\#}(C_p(Y)))$ donde $f^{\#} : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$ está dada por $f^{\#}(h) = h \circ f$ (ver Teorema 0.70), entonces se tiene que $nw(f^{\#}(C_p(Y))) \leq w(Y)$ y como f es una condensación si y sólo si $f^{\#}(C_p(Y))$ es denso en $C_p(X)$ (Teorema 0.71) se sigue que $\overline{f^{\#}(C_p(Y))} = C_p(X)$, es decir $d(C_p(X)) \leq d(f^{\#}(C_p(Y))) \leq$

$nw(f^{\#}(C_p(Y))) \leq w(Y) \leq iw(X)$ (ver p. 30 y Teorema 0.63 (4)).
Por lo tanto $d(C_p(X)) \leq iw(X)$.

De (i) y (ii) se sigue el Teorema. †

2.6. COROLARIO. Si $C_p(X)$ es homeomorfo a $C_p(Y)$ entonces

(1) $nw(X) = nw(Y)$.

(2) $d(X) = d(Y)$.

(3) $iw(X) = iw(Y)$.

(4) $|X| = |Y|$.

Demostración. (1) $nw(X) = nw(C_p(X)) = nw(C_p(Y)) = nw(Y)$

(2) $d(X) = iw(C_p(X)) = iw(C_p(Y)) = d(Y)$

(3) $iw(X) = d(C_p(X)) = d(C_p(Y)) = iw(Y)$

(4) $|X| = w(C_p(X)) = w(C_p(Y)) = |Y|$. †

3.- La propiedad de Lindelöf en los espacios $C_p(X)$.

Uno de los objetivos centrales en esta Tesis es la discusión de la propiedad de Lindelöf en los espacios $C_p(X)$. En esta sección iniciamos esta análisis. Una de las subclases importantes de la clase de espacios Lindelöf es la de los espacios σ-compactos. El siguiente teorema muestra que los espacios $C_p(X)$ tienen esta propiedad únicamente en casos triviales: sólo cuando X es finito. Para la demostración del Teorema necesitaremos del siguiente concepto.

3.1. DEFINICION. X es un P-espacio si y sólo si todo conjunto G_δ es un conjunto abierto en X.

3.2.-TEOREMA. (N.V. Velichko). $C_p(X)$ es σ-compacto si y sólo si X es finito.

Lo que haremos enseguida será probar un teorema más general que tendrá como consecuencia inmediata al Teorema de Velichko.

3.3.-TEOREMA. Sea Y denso en X. Si $C_p(Y|X)$ es σ-numerablemente compacto, entonces X es seudocompacto y Y es un P-espacio.

Demostración. Como $C_p(Y|X)$ es σ-numerablemente compacto entonces $C_p(Y|X)=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Z_i$ con Z_i numerablemente compacto para todo $i\in\mathbb{N}$. Para mostrar que X es seudocompacto será suficiente con probar que no existe una familia discreta infinita de conjuntos abiertos no vacíos en X.[1]

Supongamos que sí existe tal familia $\mathcal{E}=\{U_i : i\in\mathbb{N}\}$. Entonces $U_i\cap Y\neq\phi$ para todo $i\in\mathbb{N}$ pues Y es denso en X. Elijamos $y_i\in U_i\cap Y$ para cada $i\in\mathbb{N}$. Tenemos entonces que $B_i=\{f(y_i) : f\in Z_i\}=\pi_{y_i}(Z_i)$ donde $\pi_{y_i}: C_p(Y)\longrightarrow\mathbb{R}$ está dada por $\pi_{y_i}(f)=f(y_i)$ y es una función continua (ver p.34). Como Z_i es numerablemente compacto entonces $B_i\subseteq\mathbb{R}$ es acotado (Teorema 0.42 (3)) lo cual implica que $B_i\neq\mathbb{R}$ y, por consiguiente, podemos elegir $a_i\in\mathbb{R}\setminus B_i$ para cada $i\in\mathbb{N}$. Como $\mathcal{E}$ es una familia discreta en X entonces existe $g\in C_p(X)$ tal que $g(y_i)=a_i$ para $i\in\mathbb{N}$, es decir, $g|_Y\notin\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Z_i=C_p(Y|X)$ lo cual es una contradicción pues $g|_Y=\pi_Y(g)$. Por lo tanto X es seudocompacto.

Probaremos ahora que Y es un P-espacio. Supongamos que no lo es. Entonces existe un conjunto F_σ, F, que no es cerrado. Podemos suponer que $F=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ con $F_i\subseteq F_{i+1}$ y F_i cerrado en Y para todo $i\in\mathbb{N}$. Entonces existe $y^*\in\bar{F}\setminus F$, es decir, existe $y^*\in\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i}$ y $y^*\notin F_i$ para todo $i\in\mathbb{N}$. Como $\pi_{y^*}: C_p(Y)\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $\pi_{y^*}(f)=f(y^*)$ es continua, entonces $\pi_{y^*}^{-1}(\{0\})=Z'$ es cerrado en $C_p(Y|X)$, lo cual implica que Z' es σ-numerablemente compacto, es decir, existen $\{Z'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ conjuntos numerablemente compactos tales que $Z'=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Z'_k$. Se asegura lo siguiente:

(α) Para cada $\epsilon>0$ y $k\in\mathbb{N}$ existe $i_k\in\mathbb{N}$ tal que para cada $f\in Z'_k$ existe $y_f\in F_{i_k}$ tal que $f(y_f)<\epsilon$.

Supongamos que (α) no se satisface, entonces existen $\epsilon>0$ y $k\in\mathbb{N}$ tales que para cada $i\in\mathbb{N}$ existe $f_i\in Z'_k$ con la propiedad

---

[1] X es seudocompacto si y sólo si no contiene una copia C-encajada de $\mathbb{N}$. ([GJ], Corolario 1.21).

de que $f_i(y) \geq \epsilon$ para todo $y \in F_i$. Como Z'_k es numerablemente compacto entonces existe una función $f \in Z'_k \subseteq C_p(Y)$, que es un punto de acumulación de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y esto implica que $f(y) \geq \epsilon$ para todo $y \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$. En efecto, si existiera $y_0 \in F_{j_0}$ para algún $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(y_0) < \epsilon$, entonces $W(f; y_0; \epsilon - f(y_0)) \cap \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$ y por lo tanto existe $f_{i_0} \in W(f; y_0; \epsilon - f(y_0))$; si $i_1 = \max\{i_0, j_0\}$ entonces $y_0 \in F_{i_1}$ y $f_{i_1}(y_0) - f(y_0) < \epsilon - f(y_0)$, es decir, $f_{i_1}(y_0) < \epsilon$ y $y_0 \in F_{i_1}$ lo cual es una contradicción. Ahora bién, como f es continua y $y^* \in \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i}$ entonces $f(y^*) \geq \epsilon > 0$, pero $f \in Z'_k \subseteq Z'$, así que $f(y^*) = 0$ lo cual no puede ser. Por lo tanto, se satisface (α).

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\epsilon = 2^{-k}$ existen $i_k \in \mathbb{N}$ y $g_k \in C_p(X)$ tales que $g_k(y^*) = 0$, $|g_k(x)| \leq 2^{-k}$ para todo $x \in X$ y $g_k(x) = 2^{-k}$ para todo $x \in F_{i_k}$. Definamos la función continua $g: X \to \mathbb{R}$ como $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(x)$ para cada $x \in X$. En particular $g(y^*) = \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(y^*) = 0$ lo que implica que $g|_Y \in Z'$. También, para cada $k \in \mathbb{N}$, $g(y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(y) \geq 2^{-k}$ para todo $y \in F_{i_k}$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, $g|_Y \in Z'_k$ por la forma en que elegimos a i_k. Por lo tanto $g|_Y \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Z'_k = Z'$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto Y es un P-espacio. †

Demostración del Teorema 3.2. Necesidad. Supongamos que $C_p(X)$ es σ-compacto, entonces $C_p(X)$ es σ-numerablemente compacto y, considerando $Y = X$ como en el Teorema 3.3 obtenemos que X es un P-espacio seudocompacto, lo cual implica que X es finito. ([GJ], 4K2)

Suficiencia. Si $|X| = n$ entonces X es discreto y por lo tanto $C_p(X) = \mathbb{R}^n$ que es σ-compacto. †

Como se mencionó antes, no se conocen hasta ahora condiciones necesarias y suficientes de la propiedad de Lindelöf en $C_p(X)$ en términos de propiedades topológicas de X. Sin embargo, sí se conocen resultados parciales en esta dirección. Las siguientes proposiciones enuncian algunas condiciones necesarias o suficientes sobre X para obtener la propiedad de Lindelöf en $C_p(X)$. El primer teorema proporciona una condición suficiente bajo la cual $C_p(Y)$ es Lindelöf cuando $Y \subseteq X$ y $C_p(X)$ es Lindelöf.

3.4. TEOREMA. Si Y es C-encajado en X y $C_p(X)$ es Lindelöf, entonces $C_p(Y)$ es de Lindelöf.

Demostración. Como Y es C-encajado en X entonces $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$ dada por $\pi_Y(h) = h|_Y$ es una función continua y sobre (Teorema 0.69). Por lo tanto, por el Teorema 0.38 $C_p(Y)$ es Lindelöf. $\dagger$

En los próximos resultados se verán algunas condiciones necesarias que debe satisfacer un espacio normal X para que $C_p(X)$ sea Lindelöf. Veremos que varias clases de familias discretas en X deben ser numerables. Antes de enunciar el próximo teorema necesitaremos del lema siguiente.

3.5. LEMA. Si Y es no numerable entonces $\mathbb{R}^Y$ no tiene la propiedad de Lindelöf.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{R}^Y$ es de Lindelöf. Entonces, como $|Y| \geq \aleph_1$, $\mathbb{R}^{\omega_1}$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^Y$ y como $\omega \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto cerrado se tiene que ω^{ω_1} es cerrado en $\mathbb{R}^{\omega_1}$ y por lo tanto en $\mathbb{R}^Y$. Por lo tanto, ω^{ω_1} es normal pero

$K_0 = \{(n_\alpha)_{\alpha\in\omega_1} :$ para todo $j \in \omega\setminus\{0\}$ existe a lo más un $\alpha < \omega_1$ tal que $n_\alpha = j\}$

$K_1 = \{(n_\alpha)_{\alpha\in\omega_1} :$ para todo $j \in \omega\setminus\{1\}$ existe a lo más un $\alpha < \omega_1$ tal que $n_\alpha = j\}$

son conjuntos cerrados ajenos no vacíos en ω^{ω_1} que no se pueden separar ([SS] Ejemplo 103). $\dagger$

3.6. TEOREMA. Si X es normal y $C_p(X)$ es Lindelöf, entonces todo subespacio cerrado y discreto en X es numerable, es decir $e(X) = \aleph_0$.

Demostración. Sea $Y \subseteq X$ cerrado y discreto. Como Y es cerrado en X y X es normal entonces Y es C-encajado en X (ver [GJ]. 3D).

Por lo tanto, del Teorema 3.4 obtenemos que $C_p(Y)$ es de Lindelöf, pero como Y es discreto entonces $\mathbb{R}^Y = C_p(Y)$, es decir, $\mathbb{R}^Y$ es de Lindelöf y por el Lema 3.5 se tiene que $|Y| \leq \aleph_0$. $\dagger$.

Se puede probar aún más (veáse por ejemplo [Ark], Corolario I.6.3): Si $C_p(X)$ y X son normales entonces $e(X) = \aleph_0$. E.A. Reznichenko demostró en [R] que normalidad y normalidad colectiva son equivalentes en espacios de la forma $C_p(X)$ y en [WSS] hay un ejemplo de un espacio con $e(X) = \aleph_0$ y tal que $C_p(X)$ no es normal.

A continuación veremos que el Teorema 3.6 puede ser refinado. Para ello necesitamos del siguiente concepto.

3.7. DEFINICION. Para $X \in \mathcal{T}$ se define la $\mathbb{R}$-extensión de X como

$$e_{\mathbb{R}}(X) = \min\{\kappa \in \text{Card} : \text{si } A \text{ es discreto y } C\text{-encajado en } X \text{ entonces } |A| \leq \kappa\}.$$

3.8. TEOREMA. Si $C_p(X)$ es Lindelöf entonces $e_{\mathbb{R}}(X) = \aleph_0$.

Demostración. Sea $Y \subseteq X$ discreto y C-encajado en X. Entonces por el Teorema 3.4, $C_p(Y)$ es Lindelöf, es decir, $\mathbb{R}^Y = C_p(Y)$ es Lindelöf y por el Lema 3.5, $|Y| \leq \aleph_0$. $\dagger$.

Si ahora consideramos la clase de los espacios Tychonoff, entonces obtenemos la siguiente versión del Teorema 3.6.

3.9. TEOREMA. Si $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf, entonces toda familia discreta de abiertos en X es numerable.

Demostración. Sea $\mathcal{D} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia discreta de abiertos no vacíos en X. Para cada $\alpha \in I$, sea $x_\alpha \in U_\alpha$ y consideremos $Y = \{x_\alpha : \alpha \in I\}$. Entonces Y es C-encajado en X. En efecto, sea $f : Y \to \mathbb{R}$ continua. Para cada $\alpha \in I$ existe $g_\alpha \in C_p(X)$ tal que $g_\alpha(x_\alpha) = f(x_\alpha)$ y $g_\alpha(X \setminus U_\alpha) \subseteq \{0\}$. Definamos $g : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} g_\alpha(x) & \text{si } x \in U_\alpha \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \end{cases}.$$

Observemos que si $\alpha \in I$ entonces $g(x_\alpha) = g_\alpha(x_\alpha) = f(x_\alpha)$, es decir,

$g|_Y = f$. Probaremos que g es continua en X. Sea $x \in X$. Como $\mathcal{D}$ es discreta existe V_x, vecindad de x en X tal que V_x intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{D}$. Sea $\epsilon > 0$

i) Supongamos que $x \in U_\alpha$ para alguna $\alpha \in I$. Como g_α es continua en X entonces existe W_x, vecindad de x en X tal que $g_\alpha(W_x) \subseteq (g_\alpha(x)-\epsilon, g_\alpha(x)+\epsilon) = (g(x)-\epsilon, g(x)+\epsilon)$. Por lo tanto, $W_x \cap U_\alpha$ es una vecindad de x en X y $g(W_x \cap U_\alpha) = g_\alpha(W_x \cap U_\alpha) \subseteq g_\alpha(W_x) \subseteq (g(x)-\epsilon, g(x)+\epsilon)$.

ii) Supongamos que $x \notin \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in I\}$. Si $V_x \cap \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \emptyset$, entonces $g(V_x) = \{0\} \subseteq (-\epsilon, \epsilon)$. Si $V_x \cap \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \neq \emptyset$ entonces existe un único $\alpha \in I$ tal que $V_x \cap U_\alpha \neq \emptyset$ y como g_α es continua en X entonces existe W_x, vecindad de x tal que $g_\alpha(W_x) \subseteq$ $\subseteq (g_\alpha(x)-\epsilon, g_\alpha(x)+\epsilon) = (-\epsilon, \epsilon)$. Por lo tanto $g(W_x \cap V_x) = g_\alpha(W_x \cap V_x) \subseteq (-\epsilon, \epsilon)$. Así, como Y es discreto y C-encajado en X, entonces por el Teorema 3.8, $|Y| \leq \aleph_0$ y en consecuencia $|\mathcal{D}| = |Y| \leq \aleph_0$. †

3.10.- TEOREMA. Si X es normal y $C_p(X)$ es Lindelöf entonces toda red σ-discreta en X es numerable.

Demostración. Sea $\mathcal{N}$ una red σ-discreta en X. Entonces $\mathcal{N} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{D}_n$ donde para cada $n \in \omega$ $\mathcal{D}_n$ es una familia discreta en X. Probaremos que para cada $n \in \omega$, $|\mathcal{D}_n| \leq \aleph_0$. Sean $n \in \omega$, $\mathcal{D}_n = \{N_\alpha : \alpha \in I\}$ y para cada $\alpha \in I$ elijamos $x_\alpha \in N_\alpha$. Si $E = \{x_\alpha : \alpha \in I\}$ entonces para cada $\alpha \in I$ existe una vecindad V_α de x_α que intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{D}_n$. Como $x_\alpha \in N_\alpha$, N_α es tal elemento y en consecuencia $V_\alpha \cap E = \{x_\alpha\}$. Por lo tanto E es discreto. Además E es cerrado en X. En efecto, si $x \in X \setminus E$ entonces existe V_x, vecindad de x en X que intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{D}_n$; si V_x no intersecta a ningún elemento de $\mathcal{D}_n$ entonces $V_x \subseteq X \setminus E$ y si V_x intersecta a un único N_{α_0} entonces $V_x \cap (X \setminus \{x_{\alpha_0}\}) \subseteq X \setminus E$ y $V_x \cap (X \setminus \{x_{\alpha_0}\})$ es vecindad de x. Por lo tanto, tenemos que E es cerrado y discreto en X y por el Teorema 3.6 obtenemos que $|E| \leq \aleph_0$ y por lo tanto $|\mathcal{D}_n| = |E| \leq \aleph_0$. $\dagger$

Como veremos en el siguiente capítulo un espacio topológico X es un σ-espacio si X tiene una red σ-discreta. Por lo tanto, del Teorema 3.10 se obtiene el siguiente resultado.

3.11.- TEOREMA. Si X es un σ-espacio normal y $C_p(X)$ es Lindelöf entonces X tiene una red numerable. En particular $nw(X)=\aleph_0$.

Los σ-espacios normales es una clase de espacios que tiene propiedades muy parecidas a las propiedades de los espacios metrizables. Como se ve en el Teorema anterior, la condición adicional de que $C_p(X)$ sea Lindelöf implica que X tenga propiedades muy cercanas a la metrizabilidad. Siguiendo en esta línea de ideas si consideramos espacios X con propiedades más cercanas a la metrizabilidad y $C_p(X)$ Lindelöf entonces X debe ser metrizable y separable.

Como es sabido, todo espacio métrico es de Moore (Ver Definición 0.48 y [Gr], Teorema 1.2) y como probaremos en el Teorema 2.1.10, todo espacio de Moore es un σ-espacio. Un problema abierto sobre este tipo de espacios consiste en saber si todo espacio de Moore y normal es metrizable. El siguiente teorema da una respuesta parcial.

3.12.- TEOREMA. Si X es de Moore, normal y $C_p(X)$ es Lindelöf entonces X es metrizable y separable.

Demostración. Supongamos que X es un espacio de Moore, entonces X es un σ-espacio, y si además X es normal y $C_p(X)$ es Lindelöf, entonces por el Teorema 3.11 tenemos que $nw(X) = \aleph_0$. Como $\ell(X) \leq nw(X)$ y $d(X) \leq nw(X)$ entonces $\ell(X) = \aleph_0$ y $d(X) = \aleph_0$, es decir, X es Lindelöf y separable. Para ver que X es metrizable probaremos que X tiene una base σ-discreta (Teorema 0.51(2)). Sea $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_n : n\in\omega\}$ un desarrollo para X. Como X es Lindelöf entonces para todo $n\in\omega$ $\mathcal{U}_n$ tiene una subcubierta numerable $\mathcal{U}_n'$. Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{U}_n'$. Probemos que $\mathcal{B}$ es base para X. Si $x\in X$ y V es un abierto en X con $x\in V$, entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $st(x,\mathcal{U}_{n_0}) \subseteq V$ y como $\mathcal{U}_{n_0}'$ es cubierta de X existe $U\in \mathcal{U}_{n_0}'$ tal que $x\in U$. Por lo tanto $x\in U\subseteq st(x,\mathcal{U}_{n_0}') \subseteq st(x,\mathcal{U}_{n_0}) \subseteq V$ y $U\in\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base numerable y por lo tanto σ-discreta. $\dagger$

3.13.- COROLARIO. Si X es metrizable y $C_p(X)$ es de Lindelöf entonces X es separable.

Demostración. Se sigue del hecho de que todo espacio metrizable es de Moore. $\dagger$

Lo que se demostrará enseguida es que para espacios no necesariamente normales, X, con $C_p(X)$ Lindelöf y cuyos subespacios numerables están C-encajados se obtiene la conclusión del Teorema 3.6. Probaremos antes unos lemas.

3.14.- LEMA. Sean $Z \subseteq C_p(X)$, Z un espacio Lindelöf, $Y\subseteq X$ y $f: Y\to\mathbb{R}$ una función que satisface la condición:

(α) Para todo $A\subseteq Y$ numerable existe $g\in Z$ tal que $g|_A = f|_A$.

Entonces existe $\tilde{f}\in Z$ tal que $\tilde{f}|_Y = f$.

Demostración. Sea $\mathcal{N} = \{A\subseteq Y : A \text{ es numerable}\}$ y para cada $A\in\mathcal{N}$ sea $F_A = \{g\in Z : g|_A = f|_A\}$. Definamos $\mathcal{E} = \{F_A : A\in\mathcal{N}\}$. Veamos que $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de la intersección numerable. Sea $\mathcal{N}'\subseteq\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N}'$ es numerable. Entonces $B = \bigcup\{A : A\in\mathcal{N}'\}$ es numerable y $B\subseteq Y$, así que por la propiedad (α) existe $g\in Z$ tal que $g|_B = f|_B$. Por lo tanto $g\in Z$ y para todo $A\in\mathcal{N}'$, $g|_A = f|_A$, es decir $g\in\bigcap\{F_A : A\in\mathcal{N}'\}$. Probemos ahora que para todo $A\in\mathcal{N}$, F_A es cerrado en Z. Sea $h\in Z\setminus F_A$. Entonces

$h|_A \neq f|_A$, es decir, existe $y \in A$ tal que $h(y) \neq f(y)$ y por consiguiente existe $\epsilon > 0$ tal que $f(y) \notin (h(y)-\epsilon, h(y)+\epsilon)$. Consideremos $W = W(h; y; \epsilon) \cap Z$. Entonces W es una vecindad de h en Z y $W \subseteq Z - F_A$ así que $Z - F_A$ es abierto en Z y por lo tanto F_A es cerrado en Z. Por lo tanto, como Z es Lindelöf, $\cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ (Teorema 0.38). Sea $\tilde{f} \in \cap \mathcal{E}$. Entonces $\tilde{f} \in Z$ y si $y \in Y$, $F_{\{y\}} \in \mathcal{E}$ y por eso $\tilde{f} \in F_{\{y\}}$, es decir, $\tilde{f}|_{\{y\}} = f|_{\{y\}}$. Por lo tanto $\tilde{f}(y) = f(y)$, es decir, $\tilde{f}|_Y = f$. $\dagger$

3.15.- LEMA. Sean $C_p(X)$ un espacio Lindelöf, $Y \subseteq X$ y supongamos que todo subconjunto numerable en Y es C-encajado en X. Entonces Y está C-encajado en X.

Demostración. Supongamos que $f: Y \to \mathbb{R}$ es continua. Sea $Z = C_p(X)$ y veamos que f satisface la propiedad (α) del Lema anterior. Sea $A \subseteq Y$ numerable. A es C-encajado en X y $f|_A \in C_p(A)$ lo cual implica que existe $g \in C_p(X)$ tal que $g|_A = f|_A$. Por lo tanto f satisface la condición (α) del Teorema anterior y por consiguiente Y está C-encajado en X. $\dagger$

3.16.- TEOREMA. Sea $C_p(X)$ un espacio Lindelöf y supongamos que todo subespacio cerrado, discreto y numerable de X está C-encajado en X. Entonces $e(X) = \aleph_0$.

Demostración. Sean Y un subespacio discreto y cerrado en X y $A \subseteq Y$ numerable. Por lo tanto A es un subespacio cerrado, discreto y numerable de X y por hipótesis A está C-encajado en X. Por lo tanto, todo subconjunto numerable de Y está C-encajado en X, lo que implica, por el Lema 3.15, que Y está C-encajado en X. Por lo tanto, la función restricción $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$ es sobreyectiva (Teorema 0.69) y en consecuencia $C_p(Y)$ es Lindelöf. Pero Y es discreto así que $C_p(Y) = \mathbb{R}^Y$ y entonces por el Lema 3.5, $|Y| \leq \aleph_0$. Por lo tanto $e(X) = \aleph_0$. $\dagger$

En el siguiente teorema veremos que la propiedad de Lindelöf en $C_p(X)$ implica la normalidad de X cuando pedimos condiciones extras para X.

3.17.- TEOREMA. Supongamos que $C_p(X)$ es Lindelöf y que el espacio X satisface la condición:

(β) Para dos conjuntos numerables arbitrarios A y B en X tales que $\bar{A} \cap \bar{B} = \phi$ hay una función $g \in C_p(X)$ tal que $g(A) \subseteq \{0\}$ y $g(B) \subseteq \{1\}$.

Entonces X es normal.

Demostración. Sean A_1 y B_1 cerrados ajenos en X, $Y = A_1 \cup B_1$ y $f: Y \to \mathbb{R}$ tal que $f|_{A_1} \equiv 0$ y $f|_{B_1} \equiv 1$. Entonces f es continua en Y. Si $A \subseteq Y$ es numerable, entonces $A = A \cap Y = (A \cap A_1) \cup (A \cap B_1)$ y $cl_X(A \cap A_1) \cap cl_X(A \cap B_1) \subseteq cl_X(A_1) \cap cl_X(B_1) = A_1 \cap B_1 = \emptyset$. Por lo tanto $A \cap A_1$ y $A \cap B_1$ son dos conjuntos numerables cuyas cerraduras en X son ajenas. Por (β) existe $g \in C_p(X)$ tal que $g(A \cap A_1) \subseteq \{0\}$ y $g(A \cap B_1) \subseteq \{1\}$. Por lo tanto $g|_A = f|_A$. Entonces se satisface la condición (α) del Lema 3.14 para $Z = C_p(X)$ y por consiguiente existe $\tilde{f} \in C_p(X)$ tal que $\tilde{f}|_Y = f$. Entonces $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(A_1) \subseteq \{0\}$ y $f(B_1) \subseteq \{1\}$, es decir, X es normal. †

3.18.- DEFINICION. $X \in \mathcal{T}$ es $\aleph_0$-acotado si la cerradura de todo conjunto numerable en X es compacto.

Del Teorema 3.17 y la Definición anterior obtenemos el siguiente corolario

3.19.- TEOREMA. Si $C_p(X)$ es Lindelöf y X es $\aleph_0$-acotado entonces X es normal.

Demostración. Sean A y B dos conjuntos numerables en X, tales que $cl_X(A) \cap cl_X(B) = \phi$. Entonces $cl_X(A)$ y $cl_X B$ son compactos ajenos en X. Entonces como X es Tychonoff existe $f \in C_p(X)$

tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$. Por lo tanto X cumple la condición (β) del Teorema 3.17, es decir, X es normal. $\dagger$

La siguiente serie de resultados tiene la intención de probar que la paracompacidad es lo mismo que la propiedad de Lindelöf en los espacios C_p.

3.20.- TEOREMA. Para cualquier espacio $X \in \mathcal{T}$, $c(C_p(X)) = \aleph_0$.

Demostración. Como la celularidad es una función cardinal monótona para subespacios densos, bastará probar que $c(\mathbb{R}^X) = \aleph_0$, para $X \in \mathcal{T}$. Supongamos que no es así y sea $\{V_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una familia celular en $\mathbb{R}^X$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que V_α es un abierto básico canónico de $\mathbb{R}^X$. Sean $F_\alpha = \{x \in X : P_x(V_\alpha) \neq \mathbb{R}\}$, $A = \bigcup\{F_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ y $Y = \mathbb{R}^A$. $|A| = |\bigcup_{\alpha \in \omega_1} F_\alpha| \leq \sum_{\alpha \in \omega_1} |F_\alpha| \leq \omega_1 \cdot \omega = \omega_1 \leq 2^\omega$. Entonces por el Teorema 0.66 $d(Y) = \aleph_0$. Por otro lado, si V_α^* es la proyección de V_α en Y entonces $\{V_\alpha^*\}_{\alpha \in \omega_1}$ es una familia celular en Y de cardinalidad ω_1, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $c(\mathbb{R}^X) = \aleph_0$. Por ende $c(C_p(X)) = \aleph_0$. $\dagger$

3.21.- LEMA. Si $\mathcal{B}$ es una base para X y U es un abierto en X, entonces existe una familia $\xi^* \subseteq \mathcal{B}$ de conjuntos ajenos dos a dos y tal que $\bigcup\{V : V \in \xi^*\} \subseteq U \subseteq cl(\bigcup\{V : V \in \xi^*\})$.

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{\xi \subseteq \mathcal{B} : \xi$ es celular y $\bigcup\{V : V \in \xi\} \subseteq U\}$ ordenado por la inclusión. Por el Lema de Zorn, existe $\xi^* \in \mathcal{P}$ elemento maximal. Entonces $\bigcup\{V : V \in \xi^*\} \subseteq U$ y $U \subseteq \overline{\bigcup \xi^*}$ pues si no fuera así $W = U \cap (X \setminus \overline{\bigcup \xi^*})$ sería un conjunto abierto no vacío y por lo tanto existiría $V^* \in \mathcal{B}$, $V^* \neq \emptyset$ tal que $V^* \subseteq W$. Entonces $V \cap V^* = \emptyset$ para todo $V \in \xi^*$ lo cual implicaría que $V^* \notin \xi^*$ y por lo tanto $\xi^{**} = \xi^* \cup \{V^*\} \in \mathcal{P}$ y $\xi^* \subsetneq \xi^{**}$ contradiciendo la maximalidad de ξ^* en $\mathcal{P}$. $\dagger$

3.22.- TEOREMA. Si $c(X) = \aleph_0$ entonces toda familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos abiertos no vacíos y localmente finita es numerable.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia de abiertos no vacíos en X que es localmente finita. Definamos $\mathcal{B} = \{U \subseteq X : U$ es abierto en X y $|\{V \in \mathcal{A} : V \cap U \neq \emptyset\}| < \aleph_0\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para X. En efecto, si G es un abierto no vacío y $x \in G$, entonces, como $\mathcal{A}$ es localmente finita, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$. Pero $U \cap G \in \mathcal{B}$ y $x \in U \cap G \subseteq G$. Por lo tanto, por el Lema 3.21 existe $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}$ familia celular tal que $X = cl(\bigcup\{V : V \in \mathcal{L}\})$. Como $c(X) = \aleph_0$ se tiene que $|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$ y como $\bigcup\{V : V \in \mathcal{L}\}$ es denso en X entonces todo elemento de $\mathcal{A}$ intersecta a algún elemento de $\mathcal{L}$. Como $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}$ entonces, de la definición de $\mathcal{B}$ se tiene que $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$. †

3.23.- TEOREMA. Si X es paracompacto y $c(X) = \aleph_0$ entonces X es Lindelöf.

Demostración. Es inmediata del Teorema 3.22. †

3.24.- TEOREMA. $C_p(X)$ es paracompacto si y sólo si $C_p(X)$ es de Lindelöf.

Demostración. Bastará probar la necesidad. Por el Teorema 3.20, $c(C_p(X)) = \aleph_0$ y $C_p(X)$ es paracompacto, entonces por el Teorema 3.23 se obtiene que $C_p(X)$ es Lindelöf. †

4.- Teorema de Asanov.

Se sabe que la estrechez de un espacio topológico da información topológica local, que el número de Lindelöf es una función cardinal basada en una propiedad global y que en general estas dos funciones cardinales no están relacionadas. El siguiente teorema muestra que $\ell(C_p(X))$ acota no solo la estrechez del espacio X sino también la de todos los espacios X^n con $n \in \mathbb{N}$. En particular, una condición necesaria para que $C_p(X)$ sea Lindelöf es que $t(X^n) = \aleph_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.1.- TEOREMA. Si $X \in \mathcal{T}$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $t(X^n) \leq \ell(C_p(X))$.

Demostración. Recordemos que $t(X^n) = \sup\{t(x, X^n) : x \in X^n\}$ donde $t(x, X^n) = \min\{\kappa \in Card$: para todo $A \subseteq X^n$, si $x \in \bar{A}$ entonces existe $B \subseteq A$ con $|B| \leq \kappa$ y $x \in \bar{B}\}$. Sean $\tau = \ell(C_p(X))$, $n \in \mathbb{N}$ y $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$. Probaremos que $t(x, X^n) \leq \tau$. Sea $A \subseteq X^n$ y supongamos que $x \in \bar{A}$. Como X es T_2 podemos escoger conjuntos abiertos $U_1, U_2, \dots, U_n$ tales que para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i \in U_i$; si $x_i = x_j$ entonces $U_i = U_j$ y si $x_i \neq x_j$ entonces $U_i \cap U_j = \emptyset$. De aquí que $U = U_1 \times \dots \times U_n$ sea una vecindad de x en X^n. Por otro lado, si W es un abierto de X^n y $x \in W$, entonces $W \cap U$ es una vecindad de x y como $x \in \bar{A}$ entonces $W \cap U \cap A \neq \emptyset$ lo cual implica que $x \in \overline{A \cap U}$. Sean $A' = A \cap U$ y $\Phi = \bigcap_{i=1}^{n} e_{x_i}^{-1}(\{1\})$ donde para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $e_{x_i} : C_p(X) \to \mathbb{R}$ es la función evaluación en x_i. Entonces Φ es cerrado en $C_p(X)$ y $\Phi = \{f \in C_p(X) : f(x_i) = 1$ para toda $i = \overline{1,n}\}$. Como $\ell(C_p(X)) = \tau$ y Φ es cerrado en $C_p(X)$ entonces $\ell(\Phi) \leq \tau$. Ahora, para todo $y = (y_1, \dots, y_n) \in A'$ sea $V_y = \{g \in C_p(X) : g(y_i) > 0$ para todo $i = \overline{1,n}\}$. Mostraremos que $\Phi \subseteq \bigcup_{y \in A'} V_y$. Sean $f \in \Phi$ y $\epsilon > 0$ tal que $(1-\epsilon, 1+\epsilon) \subseteq \mathbb{R}^+$. f es continua en x_i y $f(x_i) = 1$ lo que implica que existe V_i, abierto en X tal que $f(V_i) \subseteq (1-\epsilon, 1+\epsilon)$. Como $x \in \overline{A'}$ y $V = V_1 \times \dots \times V_n$ es una vecindad de x en X^n entonces existe $y = (y_1, \dots, y_n) \in A' \cap V$. Por lo tanto, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f(y_i) \in (1-\epsilon, 1+\epsilon) \subseteq \mathbb{R}^+$, es decir, $f \in V_y$ y por consiguiente $\Phi \subseteq \bigcup_{y \in A'} V_y$. Así que del hecho que $\ell(\Phi) \leq \tau$ se tiene que existe $B \subseteq A'$, $|B| \leq \tau$ y $\Phi \subseteq \bigcup_{y \in B} V_y$. Probaremos que $x \in \bar{B}$.

Supongamos que $x \notin \bar{B}$. Entonces existen $W_1, \dots, W_n$ abiertos en X con W_i vecindad de x_i y $W_1\times\cdots\times W_n \cap B = \phi$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que si $x_i = x_j$ entonces $W_i = W_j$. Para cada $i\in\{1,2,\dots,n\}$ sea $U_i' = U_i \cap W_i$. Por lo tanto $x \in U_1'\times\cdots\times U_n'$, $(U_1'\times\cdots\times U_n')\cap B = \phi$; $x_i = x_j$ implica que $U_i' = U_j'$ y $x_i \neq x_j$ implica que $U_i' \cap U_j' = \phi$. Consideremos el conjunto de todas las coordenadas distintas de x, $\{x_{n_1},\dots,x_{n_m}\}$. Como X es Tychonoff existen $\{f_1,\dots,f_m\} \subseteq C_p(X)$ tales que para cada $j\in\{1,\dots,m\}$, $f_j(x_{n_j}) = 1$ y $f_j(X\setminus U'_{n_j}) = \{0\}$. Si definimos $f_0 = f_1+\cdots+f_m$ entonces $f_0 \in C_p(X)$, $f_0(X\setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i') = \{0\}$ y para todo $i\in\{1,\dots,n\}$, $f_0(x_i) = 1$. Por consiguiente $f_0 \in \Phi \subseteq \bigcup\{V_y : y\in A'\}$, así que $f_0 \in V_{y'}$ para alguna $y' = (y_1',\dots,y_n') \in B$. Como $f_0 \in V_{y'}$, para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ $f_0(y_i) > 0$ y entonces $y_i' \in \bigcup_{i=1}^{n} U_i'$. Así que $y_i' \in U_j'$ para $j\in\{1,\dots,n\}$, pero como $y' \in B \subseteq A' \subseteq U$, $y_i' \in U_i$ y dado que $U_i \cap U_j = \phi$ si $i\neq j$ entonces $j = i$, es decir $y_i' \in U_i'$. Por lo tanto $y' \in (U_1'\times\cdots\times U_n')\cap B \subseteq (W_1\times\cdots\times W_n)\cap B$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x \in \overline{B}$. Por consiguiente $t(x, X^n) \leq \tau$, es decir $t(X^n) \leq \ell(C_p(X))$. $\top$

Observemos que este Teorema no tiene un resultado inverso directo pues si X es un espacio discreto no numerable entonces, para $n\in\omega$, X^n es discreto y por lo tanto $t(X^n) = \aleph_0$. Sin embargo, $C_p(X) = \mathbb{R}^X$ no es Lindelöf (Lema 3.5). Afortunadamente tenemos el siguiente teorema dual debido a Arkhangel'skiĭ [Ark 2] y E.G. Pytkeev [Py], el cual presentamos sin demostración.

4.2. TEOREMA. $\ell(X^n) \leq \tau$ para todo $n\in\mathbb{N}$ si y sólo si $t(C_p(X)) \leq \tau$.

CAPITULO 2
Σ- espacios

1- Introducción.

El estudio de los Σ-espacios lo podemos ubicar dentro de las investigaciones que se han hecho alrededor de la paracompacidad en espacios producto, problema que surge en 1947, cuando R.H. Sorgenfrey describe el espacio que hoy conocemos como la línea de Sorgenfrey que tiene la peculiaridad de ser un espacio paracompacto, hereditariamente Lindelöf, hereditariamente separable, primero numerable, no metrizable y cuyo cuadrado no es paracompacto. Este es el comportamiento de una clase importante de espacios topológicos. Es de interés el buscar propiedades topológicas que permitan definir clases $\mathcal{P}$, de espacios topológicos, tan amplias como sea posible, de tal forma que si $X_1, X_2 \in \mathcal{P}$ y ambos son paracompactos entonces $X_1 \times X_2$ es paracompacto o, mejor aún, si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}$ es una sucesión de espacios paracompactos, entonces $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es paracompacto. Afortunadamente, la búsqueda de tales clases ha dado buenos resultados y en la década de los 60's se definieron varias clases de espacios que han mostrado sus bondades, y de los cuales mencionaremos algunos. En 1960 Frolík prueba que si $\mathcal{P}$ es la clase de los espacios Čech-completos entonces el producto numerable de espacios paracompactos que pertenecen a $\mathcal{P}$ es paracompacto; en 1963 Arkhangel'skiĭ generalizó el resultado de Frolik considerando $\mathcal{P}$ como la clase de los espacios emplumados (p-espacios); Morita, en 1964, obtuvo un resultado equivalente siendo $\mathcal{P}$ la clase de los M-espacios, que en general es diferente a la clase de los p-espacios pero que en presencia de la paracompacidad coinciden. En 1967, en una dirección completamente diferente Okuyama mostró que si $\mathcal{P}$ es la clase de los σ-espacios entonces también el producto numerable de σ-espacios paracompactos es paracompacto; en 1969 Nagami introduce la noción de Σ-espacio y prueba que en esta clase el resultado para producto numerable de espacios paracompactos sigue siendo válido. Lo interesante de esta nueva clase es que generaliza a la de los M-espacios y a la de los σ-espacios unificando así el trabajo de las investigaciones previas. Lo que se hará en este capítulo será estudiar algunas de las propiedades de los σ-espacios y los Σ-espacios.

2.- σ- espacios.

Como se sabe, dentro de la topología general, uno de los conceptos importantes y fundamentales es el de espacio topológico metrizable. Dentro de la teoría de estos espacios, uno de los teoremas principales es el de Bing - Nagata - Smirnov que enuncia que un espacio X es metrizable si y sólo si X es regular y tiene una base σ-discreta (σ-localmente finita) (Teorema 0.51). Basandose en este Teorema y con la idea de obtener una clase de espacios topológicos más amplia que la de los espacios metrizables parece natural debilitar el concepto de base al de red.

2.1. DEFINICION. $X \in \mathcal{T}$ es un σ-espacio si X tiene una red σ-discreta.

Directamente de la definición tenemos que todos los espacios métricos, todos los espacios con una red numerable (en particular si $|\mathbb{X}| \leq \aleph_0$) así como también todo espacio topológico que es unión numerable de σ-espacios cerrados, son σ-espacios. También, a partir de la definición obtenemos las siguientes observaciones.

2.2. PROPOSICION. (1) Si $\mathbb{X}$ es un σ-espacio entonces $\mathbb{X}$ es subparacompacto.

(2) Si $\mathbb{X}$ es un σ-espacio y $H \subseteq \mathbb{X}$ es cerrado entonces H es un conjunto G_δ.

Demostración. (1) Sea $\mathcal{N} = \bigcup_{k\in\omega} \mathcal{N}_k$ una red de cerrados σ-discreta para $\mathbb{X}$ (es posible elegirla de esta manera pues $\mathbb{X}$ es regular) y sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\mathbb{X}$; entonces dada $u \in \mathcal{U}$ existe $\mathcal{N}_u \subseteq \mathcal{N}$ tal que $u = \bigcup \mathcal{N}_u$. Para cada $n\in\omega$ definamos $\mathcal{F}_n = \{ M \in \mathcal{N}_u : u \in \mathcal{U}$ con $M \in \mathcal{N}_n \}$. Si $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$ entonces $\mathcal{F}$ es un refinamiento cerrado σ-discreto para $\mathcal{U}$, es decir, $\mathbb{X}$ es subparacompacto.

(2). Si $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$ es una red de cerrados σ-discreta para $\mathbb{X}$ y definimos $U_n = \mathbb{X} \setminus \bigcup \{ F \in \mathcal{F}_n : F \cap H = \emptyset \}$ entonces U_n es abierto y $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcap_{n\in\omega} (\mathbb{X} \setminus \bigcup \{F \in \mathcal{F}_n : F\cap H = \emptyset\}) = \mathbb{X} \setminus \bigcup_{n\in\omega} (\bigcup \{F \in \mathcal{F}_n : F \cap H = \emptyset\})$ $= \mathbb{X} \setminus (\mathbb{X} \setminus H) = H$ ya que $\mathcal{F}$ es red y por lo tanto $\mathbb{X} = \bigcup \mathcal{F}$. †.

Como una consecuencia de la Proposición 2.2(1) y dado que todo espacio subparacompacto y colectivamente normal es paracompacto (Teorema 0.50) obtenemos que todo σ-espacio colectivamente normal es paracompacto.

La clase de los σ-espacios también se comporta bién en términos de varias operaciones topológicas. Por ejemplo, para probar que la propiedad de ser σ-espacio es una propiedad hereditaria, basta hacer notar que si $\mathbb{X}$ es un σ-espacio, $\mathcal{N}$ es una red σ-discreta para $\mathbb{X}$ y $A \subseteq \mathbb{X}$, entonces $\mathcal{N}_A = \{ A\cap N : N \in \mathcal{N} \}$ es una red σ-discreta para A. También se tiene que el producto de una fa milia numerable de σ-espacios es un σ-espacio. En la siguiente sección probaremos un resultado más general. En el siguiente teorema veremos que los σ-espacios paracompactos tienen un buen comportamiento.

2.3. TEOREMA. Si X es un σ-espacio paracompacto entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

(a) $\ell(X) = \aleph_0$.

(b) $d(X) = \aleph_0$.

(c) $c(X) = \aleph_0$.

(d) $nw(X) = \aleph_0$.

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ una colección discreta de subconjuntos cerrados en X. Como X es colectivamente normal existe una familia de abiertos ajenos no vacíos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ tal que $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ para cada $\alpha \in I$.

(i) Supongamos que X es Lindelöf. Si $\mathcal{G} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \cup \{X \setminus \bigcup\mathcal{F}\}$ entonces $\mathcal{G}$ es una cubierta abierta de X y por lo tanto existe una subcubierta numerable de $\mathcal{G}$, sin embargo $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia celular y $U_\alpha \nsubseteq X \setminus \bigcup\mathcal{F}$ para cada $\alpha \in I$. Entonces $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es numerable, lo cual implica que $\mathcal{F}$ es numerable.

(ii) Supongamos que X es separable. Si $D \subseteq X$ es un conjunto denso numerable, entonces $U_\alpha \cap D \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in I$ y como $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia celular entonces $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es numerable y, en consecuencia, $\mathcal{F}$ es numerable.

(iii) Si $c(X) = \aleph_0$ entonces dado que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia celular se tiene que I es numerable, es decir, $\mathcal{F}$ es numerable.

Por lo tanto, se ha probado que si X es Lindelöf, o separable o satisface la c.c.c y es colectivamente normal entonces toda familia discreta de cerrados en X es numerable. Supongamos ahora que X es un σ-espacio paracompacto; entonces existe una red $\mathcal{N} = \bigcup_{k\in\omega}\mathcal{N}_k$ para X, de conjuntos cerrados en X y tal que, para cada $k \in \omega$, $\mathcal{N}_k$ es discreta. Si $\mathbb{X}$ satisface (a), (b) o (c) obtenemos que $\mathcal{N}$ es numerable por lo dicho en (i), (ii) y (iii) lo cual probaría (a) $\Rightarrow$ (d), (b) $\Rightarrow$ (d) y (c) $\Rightarrow$ (d). Ahora bién, si probamos que cada vez que $nw(\mathbb{X}) = \aleph_0$ entonces $\mathbb{X}$ es Lindelöf, separable y satisface la c.c.c., habremos probado el teorema. Sin embargo esto se sigue ya que $\ell(\mathbb{X}) \leq nw(\mathbb{X})$ y $c(\mathbb{X}) \leq d(\mathbb{X}) \leq nw(\mathbb{X})$. (ver p. 30). †

Ahora, observemos que si $\mathcal{F}$ es una red σ-discreta formada por conjuntos cerrados en un espacio topológico $(\mathbb{X}, \tau)$, entonces $\mathcal{B} = \{\cap \mathcal{F}' : \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ y $|\mathcal{F}'| < \aleph_0\}$ es una base para una nueva topología τ' sobre $\mathbb{X}$, más fina que $\mathbb{X}$. Además $\mathcal{B}$ sigue siendo una familia σ-discreta en $(\mathbb{X}, \tau)$ y como los elementos de $\mathcal{F}$ son cerrados en $(\mathbb{X}, \tau)$, entonces $\mathcal{B}$ es una familia de abiertos y cerrados en $(\mathbb{X}, \tau')$; es decir, $(\mathbb{X}, \tau')$ es regular y $\mathcal{B}$ es una base σ-discreta, lo que nos asegura que $(\mathbb{X}, \tau')$ es metrizable (Teorema de Bing). Por lo tanto obtenemos el siguiente resultado.

2.4. TEOREMA. $\mathbb{X}$ tiene una red numerable si y sólo si existe un espacio métrico separable $\mathbb{Y}$ y una función continua y sobre $f: \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$. En particular todo espacio métrico separable tiene una red numerable.

Demostración. Necesidad. Si $(\mathbb{X}, \tau)$ tiene una red numerable entonces, de la discusión anterior, existe τ' con $\tau \leq \tau'$. Si $\mathbb{Y} = (\mathbb{X}, \tau')$ entonces $\mathbb{Y}$ es un espacio métrico y $\aleph_0 = nw(\mathbb{Y}) = d(\mathbb{Y})$, es decir, $\mathbb{Y}$ es separable. Bastará entonces definir $f: \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ como la función identidad.

Suficiencia. Es suficiente observar que si $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Y})$ es una red en $\mathbb{Y}$, entonces $f(\mathcal{N})$ es una red en $\mathbb{X}$. †

Más aún, nuestros comentarios previos al Teorema 2.4 prueban el siguiente teorema.

2.5. TEOREMA. Si $(\mathbb{X},\tau)$ es un σ-espacio con $nw(\mathbb{X})\leq\kappa$ entonces existe una topología τ' sobre $\mathbb{X}$ tal que $\tau\leq\tau'$, $(\mathbb{X},\tau')$ es metrizable y $w((\mathbb{X},\tau'))\leq\kappa$.

Ahora bién, como una función continua no preserva las propiedades de discretez o finitud local de una familia de conjuntos (por ejemplo, basta considerar la función identidad definida sobre $\mathbb{R}$ con la topología discreta y que toma valores en $\mathbb{R}$ considerado con la topologiá usual, y $\mathcal{F}=\{\{x\}:x\in\mathbb{R}\}$) es natural pensar que la imágen continua de un espacio métrico no separable no es nesesariamente un σ-espacio. El siguiente teorema muestra, entre otras cosas, que la imágen cerrada y continua de un σ-espacio es un σ-espacio. Antes de enunciarlo introducimos el siguiente concepto.

2.6. DEFINICION. Sea $\mathbb{X}\in\mathcal{T}$. Una colección $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{X})$ es preservadora de cerraduras si para todo $\mathcal{H}'\subseteq\mathcal{H}$, $\overline{\bigcup\mathcal{H}'}=\bigcup\{\overline{H}:H\in\mathcal{H}'\}$.

Obsérvese que si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{X}$ que es preservadora de cerraduras en $\mathbb{X}$ entonces $\mathcal{F}'=\{\overline{F}:F\in\mathcal{F}\}$ es también preservadora de cerraduras. Para probarlo bastará mostrar que $\overline{\bigcup\mathcal{F}'}=\bigcup\{\overline{H}:H\in\mathcal{F}'\}$ pero $\overline{\bigcup\mathcal{F}'}=\overline{\bigcup\{\overline{F}:F\in\mathcal{F}\}}=\overline{\overline{\bigcup\{F:F\in\mathcal{F}\}}}$
$=\overline{\bigcup\{F:F\in\mathcal{F}\}}=\bigcup\{\overline{F}:F\in\mathcal{F}\}=\bigcup\{\overline{\overline{F}}:F\in\mathcal{F}\}=\bigcup\{\overline{H}:H\in\mathcal{F}'\}$.

2.7. TEOREMA. Sea $(\mathbb{X},\tau)\in\mathcal{T}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

(1) $\mathbb{X}$ es un σ-espacio.

(2) $\mathbb{X}$ tiene una red σ-localmente finita.

(3) $\mathbb{X}$ tiene una red σ-preservadora de cerraduras.

(4) Existe una función $g:\omega\times\mathbb{X}\to\tau$ tal que

(a) $x\in g(n,x)$ para todo $n\in\omega$ y para todo $x\in\mathbb{X}$.

(b) $y\in g(n,x)$ implica que $g(n,y)\subseteq g(n,x)$.

(c) $x\in g(n,x_n)$ implica que $x_n\to x$.

(5) Existe una función $g : \omega \times X \to \tau$ tal que

(a) $x \in g(n, x)$ para todo $n \in \omega$ y para todo $x \in X$.

(b) $x \in g(n, x_n)$ y $x_n \in (n, y_n)$ implica que $y_n \to x$.

Demostración. (1) implica (2) y (2) implica (3) se siguen directamente de la definición y de que una familia localmente finita es preservadora de cerraduras.

(3) implica (4). Por la observación anterior podemos considerar una red $\mathcal{F}' = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}'_n$ para X tal que, para cada $n \in \omega$, $\mathcal{F}'_n$ es una familia de cerrados y es preservadora de cerraduras. Definamos $g : \omega \times X \to \tau$ como $g(n, x) = X \setminus \bigcup \{F \in \mathcal{F}'_i : i \leq n, x \notin F\}$. g está bién definida pues $\bigcup \{F \in \mathcal{F}'_i : i \leq n, x \notin F\} = \bigcup \{F \in \mathcal{F}'_1 : x \notin F\} \cup \cdots \cup \bigcup \{F \in \mathcal{F}'_n : x \notin F\}$ y cada una de estas uniones es cerrada pues $\mathcal{F}'_i$ es preservadora de cerraduras, es decir $g(n, x) \in \tau$. Además g satisface (4) ya que:

(a) $x \in g(n, x)$ para todo $n \in \omega$ y para todo $x \in X$ por la definición de g.

(b) $y \in g(n, x)$ implica que $g(n, y) \subseteq g(n, x)$. En efecto, si $z \in g(n, y)$ entonces $z \notin F$ para todo $F \in \mathcal{F}'_i$ con $i \leq n$ y $y \in F$. En particular $z \notin F$ con $F \in \mathcal{F}'_i$, $i \leq n$ y $x \notin F$, pues cada uno de estos F's tiene la propiedad de que $y \notin F$ ya que $y \in g(n, x)$.

(c) $x \in g(n, x_n)$ implica que $x_n \to x$. Supongamos que $x \in g(n, x_n)$ pero que $x_n \not\to x$. Entonces existe una subsucesión $S = \{x_{n_k}\}_{k \in \omega}$ tal que $x \notin \overline{S}$ y esto implica que existe $F_0 \in \mathcal{F}'$ tal que $x \in F_0 \subseteq X \setminus \overline{S}$, es decir, $x \in F_0$ y $F_0 \cap S = \emptyset$. Supongamos que $F_0 \in \mathcal{F}'_{n_0}$, entonces si $n_k \geq n_0$ se tiene que $g(n, x_{n_k}) \cap F_0 = \emptyset$. En efecto, $x_{n_k} \notin F_0$ y $n_0 \leq n_k$ implican que $F_0 \subseteq \bigcup \{F \in \mathcal{F}'_i : i \leq n_k$ y $x_{n_k} \notin F\}$ y $g(n, x_{n_k}) = X \setminus \bigcup \{F \in \mathcal{F}'_i : i \leq n_k$ y $x_{n_k} \notin F\}$. Sin embargo $x \in g(n, x_{n_k}) \cap F_0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto cada vez que $x \in g(n, x_n)$ se tiene que $x_n \to x$.

(4) implica (5). Si g satisface (4) entonces g satisface 5(a) y si $x \in g(n, x_n)$ y $x_n \in g(n, y_n)$ entonces por 4(b) $x \in g(n, x_n)$

$\subseteq g(n, y_n)$ y esto implica, por 4(c), que $y_n \to x$.

(5) implica (1). Supongamos que $g : \omega \times X \to \tau$ satisface (5). Se puede suponer que $g(n+1, x) \subseteq g(n, x)$ para cada $n \in \omega$ y cada $x \in X$, (En efecto: $g' : \omega \times X \to \tau$ definida por $g'(n, x) = \bigcap_{k \leq 1}^{n} g(k, x)$ satisface las propiedades dadas en (5) y además $g'(n+1, x) \subseteq g'(n, x)$ para cada $n \in \omega$ y cada $x \in X$.) Sea $<$ un buen orden sobre X. Para $x \in X$ e $i, n \in \omega$ se define

$H(x, i, n) = X \setminus [(\bigcup \{g(i, y) : y < x\}) \cup (\bigcup \{g(n, y) : y \notin g(i, x)\})]$.

Entonces $H(x, i, n) \subseteq g(i, x)$, pues si $y \notin g(i, x)$ entonces $y \in g(n, y) \subseteq \bigcup \{g(n, y) : y \notin g(i, x)\}$ lo cual implica que $y \notin H(x, i, n)$. Sea ahora $\mathcal{H}(i, n) = \{H(x, i, n) : x \in X\}$; mostraremos que $\mathcal{H}(i, n)$ es una familia discreta. Sean $z \in X$ y $y = \min \{w \in X : z \in g(i, w)\}$. Entonces $g(i, y) \cap H(x, i, n) = \emptyset$ si $y < x$ y como $g(n, z) \subseteq \bigcup \{g(n, y) : y \notin g(i, x)\}$ para $x < y$, entonces, para estos x's, $g(n, z) \cap H(x, i, n) = \emptyset$. Por consiguiente $g(i, y) \cap g(n, z)$ es una vecindad abierta de z que intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{H}(i, n)$, a saber, $H(y, i, n)$. Por lo tanto $\mathcal{H}(i, n)$ es discreta.

Se define ahora $F(x, i, n, m) = \{y \in H(x, i, n) : x \in g(m, y)\}$ y $\mathcal{F}(i, n, m) = \{F(x, i, n, m) : x \in X\}$. Entonces, como $\mathcal{H}(i, n)$ es discreta se tiene que $\mathcal{F}(i, n, m)$ es una familia discreta. Lo que probaremos enseguida es que $\mathcal{F} = \bigcup \{\mathcal{F}(i, n, m) : i, n, m \in \omega\}$ es una red para X.

Supongamos que U es un abierto en X y $p \in U$. Para cada $i \in \omega$, sea $x_i = \min \{v \in X : p \in g(i, v)\}$. Entonces existe $n(i) \in \omega$ con $p \notin \bigcup \{g(n(i), y) : y \notin g(i, x_i)\}$. En efecto, si no fuera así, para cada $n \in \omega$, existiría $y_n \notin g(i, x_i)$ con $p \in g(n, y_n)$ y $y_n \in g(n, y_n)$, y esto implica, por 5(b), que $y_n \to p$, pero $p \in g(i, x_i)$ que es una vecindad de p y $y_n \notin g(i, x_i)$ para todo $n \in \omega$, lo cual es una contradicción. Note también que $p \in H(x_i, i, n(i)) \subseteq g(i, x_i)$. Por lo tanto $p \in g(i, x_i)$ y $x_i \in g(i, x_i)$ lo cual implica, por 5(b), que $x_i \to p$, así que para cada $m \in \omega$ existe $i(m) \geq m$ tal que

$x_{i(m)} \in g(m,p)$. También tenemos que $p \in F(x_{i(m)}, i(m), n(i(m)), m) = F_m$ pues $p \in H(x_{i(m)}, i(m), n(i(m)))$ y $x_{i(m)} \in g(m,p)$. Finalmente probaremos que existe $m \in \omega$ tal que $F_m \subseteq U$. Supongamos que no es el caso y entonces para cada $m \in \omega$ elijamos $y_m \in F_m \setminus U$. Entonces $p \in g(i(m), x_{i(m)})$ y como $y_m \in F_m$, $x_{i(m)} \in g(m, y_m)$ y también $i(m) \geq m$ obtenemos que $p \in g(m, x_{i(m)})$ pues $p \in g(i(m), x_{i(m)}) \subseteq g(m, x_{i(m)})$. Por lo tanto, $p \in g(m, x_{i(m)})$ y $x_{i(m)} \in g(m, y_m)$, lo cual implica que $y_m \to p$, pero U es una vecindad de p y $U \cap \{y_m\} = \phi$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $F_m \subseteq U$ para alguna $m \in \omega$, es decir, $\mathcal{F}$ es una red σ-discreta para X. †.

2.8. COROLARIO. La imágen cerrada de un σ-espacio es un σ-espacio.

Demostración. Sea $f: X \to Y$ una función sobre, continua y cerrada con X un σ-espacio. Si $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$ es una red para X tal que para cada $n \in \omega$ $\mathcal{F}_n$ es preservadora de cerraduras, entonces, como f es continua, $f(\mathcal{F})$ es una red en Y, y como f es cerrada, entonces $f(\mathcal{F}_n)$ es preservadora de cerraduras. Por lo tanto $f(\mathcal{F})$ es una red σ-preservadora de cerraduras y por lo tanto Y es un σ-espacio. †.

En los teoremas siguientes probaremos que la clase de los espacios de Moore y la clase de los espacios estratificables son subclases de la clase de los σ-espacios.

2.9. TEOREMA. Si X es un espacio de Moore entonces X es un σ-espacio.

Demostración. Si X es un espacio de Moore entonces X es subparacompacto ([Gr], p. 428) y si $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \omega}$ es un desarrollo para X entonces podemos considerar para cada $n \in \omega$ un refinamiento σ-discreto $\mathcal{F}_n$, de $\mathcal{G}_n$, y lo que obtenemos es que $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$ es una red σ-discreta para X ya que si U es un abierto en X y $x \in U$ entonces existe $n \in \omega$ tal que $st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq U$ y bastará considerar $F \in \mathcal{F}_n$ tal que $x \in F$, pues esto implica que $F \subseteq st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq U$. †.

2.10. DEFINICION. (Ceder, 1961). X es un espacio estratificable si existe una función G que asigna a cada $n \in \omega$ y cada conjunto cerrado $H \subseteq X$, un conjunto abierto $G(n,H)$ que contiene a H y tal que

(i) $H = \bigcap_{n \in \omega} G(n,H)$.

(ii) $H \subseteq K$ implica que $G(n,H) \subseteq G(n,K)$.

(iii) $H = \bigcap_{n\in\omega} \overline{G(n,H)}$.

Si solamente se cumplen (i) y (ii) entonces se dirá que el espacio X es semi-estratificable (Creede, 1970).

2.11. TEOREMA. Si X es un espacio estratificable entonces X es un σ-espacio.

Demostración. Supongamos que (X,τ) es estratificable; entonces existe una función $g : \omega \times X \to \tau$ que satisface (i) $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} g(n,x)$; (ii) $y \in g(n,x_n)$ implica que $x_n \to y$; si H es cerrado y $y \notin H$ entonces $y \notin \overline{\bigcup\{g(n,x) : x \in H\}}$ para alguna $n \in \omega$ y (iv) $g(n+1,x) \subseteq g(n,x)$ para todo $n \in \omega$. (Teorema 5.8 [Gr]). Esta función g satisface las condiciones del Teorema 2.7.(5). En efecto, la parte (a) se sigue de (i); para demostrar la parte (b) supongamos que $x \in g(n,x_n)$ y que $x_n \in g(n,y_n)$. Para probar que $y_n \to x$ será suficiente probar que dada cualquier subsucesión S de $\{y_n\}_{n\in\omega}$ se satisface que $x \in \overline{S}$. Supongamos que existe una subsucesión $S = \{y_{n_k}\}_{k\in\omega}$ tal que $x \notin \overline{S}$. Entonces, por (iii), $x \notin \overline{\bigcup\{g(n_0,z) : z \in \overline{S}\}}$ para alguna $n_0 \in \omega$; como $x_{n_k} \in g(n_k, y_{n_k})$ entonces $x \notin \overline{\{x_{n_k} : n_k \geq n_0\}}$ pero $x_{n_k} \to x$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $y_n \to x$ y así X es un σ-espacio. †

Ahora, supongamos que X es un σ-espacio y consideremos una función $g : \omega \times X \to \tau$ que satisface (a), (b) y (c) del Teorema 2.7.(4), entonces $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} g(n,x)$ pues si $y \neq x$ y $y \in g(n,x)$ para todo $n \in \omega$ entonces $y_n \to x$ con $y_n = y$ para todo $n \in \omega$ lo cual es una contradicción. 4(c) es ii) de la definición 2.10: $y \in g(n, x_n)$ implica $x_n \to y$, es decir X es semi-estratificable. De aquí y el Teorema 2.11 se obtiene que los σ-espacios están ubicados entre la clase de los espacios estratificables y la clase de los espacios semiestratificables. Desgraciadamente estos últimos no preservan la paracompacidad cuando consideramos productos, aún cuando el producto numerable de espacios topológicos semiestratificables sigue siendo semiestratificable.

El siguiente teorema nos permitirá obtener una caracterización de metrizabilidad para los σ-espacios.

2.12. TEOREMA. Todo σ-espacio tiene diagonal G_δ.

Demostración. Si X es un σ-espacio entonces X^2 es un σ-espacio Hausdorff, es decir, la diagonal es un subconjunto cerrado en X^2 y por lo tanto, por la Proposición 2.2, la diagonal es un conjunto G_δ. $\dagger$

2.13. TEOREMA. X es metrizable si y sólo si X es un M-espacio y un σ-espacio.

Demostración. Si X es metrizable entonces X es M y σ-espacio lo cual muestra la necesidad. Para la suficiencia, si X es un M-espacio y σ-espacio entonces X es un M-espacio con diagonal G_δ y por el Teorema 0.55(2), X es metrizable. $\dagger$

Como un corolario inmediato tenemos que todo σ-espacio numerablemente compacto y por lo tanto para todo $\alpha \in Ord$ no numerable, $[0,\alpha)$ no es σ-espacio pues $[0,\alpha)$ no es metrizable.

También, como en la clase de los espacios paracompactos el concepto de M-espacio y espacio emplumado coinciden (Teorema 0.55) entonces se obtiene el siguiente resultado

2.14. TEOREMA. X es metrizable si y sólo si X es un espacio emplumado paracompacto y σ-espacio.

Finalmente, como habíamos comentado en la introducción, la clase $\mathcal{P}$ de los espacios paracompactos que son pre-imágenes perfectas de los σ-espacios es una clase cuyos productos numerables son paracompactos. Además, $\mathcal{P}$ contiene a la clase de los p-espacios paracompactos que están caracterizados como las pre-imágenes perfectas de espacios métricos. Para tratar de dar una caracterización de esta clase $\mathcal{P}$ se puede intentar reemplazar, en la definición de σ-espacio, puntos por conjuntos compactos, o más generalmente, por conjuntos numerablemente compactos. En la siguiente sección veremos que al hacer esto último lo que se obtiene es una clase más amplia: la clase de los Σ-espacios.

3. Σ- espacios.

Antes de probar algunas de las propiedades de los Σ-espacios veremos que las definiciones que aparecen en [Na], [Bo] y [Gr] son equivalentes; para esto necesitaremos de algunas notaciones y definiciones. Para una cubierta $\mathcal{F}$ de un espacio topológico X y $x \in X$ consideraremos el conjunto

$$C(x,\mathcal{F}) = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : x \in F\}.$$

3.1. DEFINICION. Una Σ-red para un espacio topológico X es una sucesión de cubiertas cerradas y localmente finitas, $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\omega}$ tales que: si $\{K_i\}_{i\in\omega}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos de X tal que $K_i \subseteq C(x,\mathcal{F}_i)$ para alguna $x \in X$ y para todo $i \in \omega$, entonces $\bigcap_{i\in\omega} K_i \neq \emptyset$

Observemos que si $C(x) = \bigcap_{i\in\omega} C(x,\mathcal{F}_i)$ entonces $C(x)$ es cerrado y numerablemente compacto siempre que $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\omega}$ sea una Σ-red.

3.2. DEFINICION. Sea X un espacio topológico.

(1) Una Σ-red fuerte para X es una Σ-red para X en donde $C(x)$ es compacto para todo $x \in X$.

(2) [Na] Un espacio Hausdorff X es un Σ-espacio (fuerte) si X tiene una Σ-red (fuerte).

Notemos que en la clase de los espacios paracompactos las clases de los Σ-espacios y los Σ-espacios fuertes coinciden pues todo subespacio cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto y un espacio topológico paracompacto y numerablemente compacto es compacto.

3.3. DEFINICION. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta de un espacio X. Una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X es una red para X módulo $\mathcal{C}$ si para todo $C \in \mathcal{C}$ y toda vecindad W de C existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subseteq N \subseteq W$.

3.4. TEOREMA. Sea X un espacio regular. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) X es un Σ-espacio (fuerte)

(2) ([Gr]) Existen una cubierta cerrada $\mathcal{C}$ de X cuyos elementos son conjuntos numerablemente compactos (compactos) y una red σ-discreta modulo $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$.

(3) ([Bu]) Existen, una cubierta cerrada $\mathcal{C}$ de X formada por conjuntos numerablemente compactos (compactos) y una red de cerrados módulo $\mathcal{C}$ y σ-localmente finita, $\mathcal{F}$.

En la prueba de este Teorema será necesario el siguiente lema.

3.5. LEMA. Sea $\mathcal{F}$ una cubierta cerrada localmente finita de X. Entonces existe una sucesión de familias discretas $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$.

Demostración del Lema. Consideremos un buen orden sobre X. Entonces existe $\alpha \in Ord$ con $X = \{x_\lambda : \lambda < \alpha\}$ y tal que $x_\lambda \neq x_\mu$

si $\lambda \neq \varkappa$. Como $\mathcal{F}$ es localmente finita para $x_0 \in X$ existe V_0, vecindad de x_0 tal que V_0 intersecta sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{F}$, digamos a $F_0^0, F_1^0, \ldots, F_{n_0}^0$. Se define $\mathcal{L}_0 = \{F_0^0, F_1^0, \ldots, F_{n_0}^0, F_{n_0+1}^0, \ldots, F_\ell^0, \ldots\}$ en donde $F_\ell^0 = \emptyset$ para todo $\ell > n_0$. En general, para $\lambda < \alpha$, sean V_λ una vecindad de x_λ que intersecta sólo a los conjuntos $F_0^\lambda, F_1^\lambda, \ldots, F_{n_\lambda}^\lambda$ de la familia $\mathcal{F}$, y $\mathcal{L}_\lambda = \{F_0^\lambda, F_1^\lambda, \ldots, F_{n_\lambda}^\lambda, F_{n_\lambda+1}^\lambda, \ldots, F_\ell^\lambda, \ldots\}$ con $F_\ell^\lambda = \emptyset$ para todo $\lambda > n_\lambda$. Ahora, construyamos $\mathcal{H}_0 = \{H_\varkappa^0 : \varkappa < \alpha_0\}$ de la siguiente forma: $H_0^0 = F_0^0$; $H_1^0 = F_0^{\lambda_1^0}$ donde $\lambda_1^0 = \min\{\lambda \in \mathrm{Ord} : \lambda > 0$ y $F_0^\lambda \notin \mathcal{L}_0\}$; $H_2^0 = F_0^{\lambda_2^0}$ donde $\lambda_2^0 = \min$ $\{\lambda \in \mathrm{Ord} : \lambda > 0, \lambda > \lambda_1^0$ y tal que $F_0^\lambda \notin \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_{\lambda_1^0}\}$; ... ; en general, para $\beta < \alpha_0$, si ya se tienen construidos los $H_\varkappa^0$ para todo $\varkappa < \beta$, sea $H_\beta^0 = F_0^{\lambda_\beta^0}$ donde $\lambda_\beta^0 = \min\{\lambda \in \mathrm{Ord} : \lambda > \lambda_\varkappa^0$ para todo $\varkappa < \beta$ y $F_0^\lambda \notin \bigcup_{\varkappa<\beta} \mathcal{L}_{\lambda_\varkappa^0}\}$. Observemos que el proceso anterior se lleva a lo más α pasos, es decir $\alpha_0 \leq \alpha$.

De manera similar se define $\mathcal{H}_1 = \{H_\varkappa^1 : \varkappa < \alpha_1\}$, es decir, $H_0^1 = F_1^{\lambda_0^1}$ con $\lambda_0^1 = 0$; $H_1^1 = F_1^{\lambda_1^1}$ siendo $\lambda_1^1 = \min\{\lambda \in \mathrm{Ord} : \lambda > 0$ y tal que $F_1^\lambda \notin \mathcal{L}_0\}$; $H_2^1 = F_1^{\lambda_2^1}$ con $\lambda_2^1 = \min\{\lambda \in \mathrm{Ord} : \lambda > 0, \lambda > \lambda_1^1$ y $F_1^\lambda \notin \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_{\lambda_1^1}\}$; ... ; para $\beta < \alpha_1$ si ya se tienen definidas las $H_\varkappa^1$ para todo $\varkappa < \beta$, se define $H_\beta^1 = F_1^{\lambda_\beta^1}$ donde $\lambda_\beta^1 = \min\{\lambda \in \mathrm{Ord} : \lambda < \lambda_\varkappa^1$ para todo $\varkappa < \beta$ y $F_1^\lambda \notin \bigcup_{\varkappa<\beta} \mathcal{L}_{\lambda_\varkappa^1}\}$. De esta manera, supongamos que para cada $k<n$ se han definido $\mathcal{H}_k = \{H_\varkappa^k : \varkappa < \alpha_k\}$. Si para $\lambda < \alpha$, $F_n^\lambda = \emptyset$, entonces definamos $\mathcal{H}_n = \emptyset$; en caso contrario definamos $H_0^n = F_n^{\lambda_0^n}$ con $\lambda_0^n = \min\{\lambda \in \mathrm{Ord} : F_n^\lambda \neq \emptyset\}$; ... ; si ya se tienen definidos los $H_\varkappa^n$ para todo $\varkappa < \beta < \alpha_n$ se define $H_\beta^n = F_n^{\lambda_\beta^n}$ con $\lambda_\beta^n = \min\{\lambda \in \mathrm{Ord} :$ $\lambda > \lambda_\varkappa^n$ para todo $\varkappa < \beta$ y tal que $F_n^\lambda \neq \emptyset$ y $F_n^\lambda \notin \bigcup_{\varkappa<\beta} \mathcal{L}_{\lambda_\varkappa^n}\}$. Así $\mathcal{H}_n = \{H_\varkappa^n : \varkappa < \alpha_n\}$ y por lo tanto si definimos $\mathcal{H} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{H}_n$ entonces se tiene que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ y si $F \in \mathcal{F}$ entonces existe $\varkappa < \alpha$ tal que $F \in \mathcal{L}_\mu$ y $\varkappa = \min\{\lambda \in \mathrm{Ord} : F \in \mathcal{L}_\lambda\}$ el cual existe pues $F \neq \emptyset$ y por lo tanto existe $\lambda < \alpha$ tal que $x_\lambda \in F$ lo cual quiere decir que $F \in \mathcal{L}_\lambda$ o en algún nivel anterior. Entonces $F = F_i^\mu$ para algún

$i \le n_k$ lo cual implica que $F \in \mathcal{H}_i$ pues en $\mathcal{H}_i$ se encuentran los F_i^σ no vacíos y que no pertenecen a $\mathcal{F}_\lambda$ para todo $\lambda < \sigma$. Por lo tanto $\mathcal{H} = \mathcal{F}$ y por construcción, para todo $n \in \omega$, $\mathcal{H}_n$ es una familia discreta. Esto termina la demostración del Lema. †

Demostración del Teorema 3.4. (2) implica (3). Sea $\mathcal{C}$ una cubierta cerrada de X formada por subconjuntos de X numerablemente compactos y $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{F}_i$ una red σ-discreta módulo $\mathcal{C}$ (para cada $i \in \omega$, $\mathcal{F}_i$ es discreta). Definamos $\mathcal{L} = \{(C,U) : C \in \mathcal{C}$, U abierto en X con $C \subseteq U$ y tal que para todo $F \in \mathcal{F}$ con $C \subseteq F \subseteq U$, $\bar{F} \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}$. Para cada $(C,U) \in \mathcal{L}$ elijamos $F(C,U) \in \mathcal{F}$ con $C \subseteq F(C,U) \subseteq U$ y $\overline{F(C,U)} \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Si definimos $A(C,U) = X \setminus C$ y $H(C,U) = C$ entonces $H(C,U)$ es un cerrado que contiene a C y está contenido en $\overline{F(C,U)} \cap U$. Por lo tanto, si definimos $\mathcal{G}_i = \{\bar{F} : F \in \mathcal{F}_i\}$ y $\mathcal{H}_i = \{H(C,U) : F(C,U) \in \mathcal{F}_i$ y $(C,U) \in \mathcal{L}\}$, entonces para todo $i \in \omega$, $\mathcal{G}_i$ y $\mathcal{H}_i$ son familias discretas y formadas por subconjuntos cerrados. En consecuencia $\mathcal{G} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{G}_i \cup \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{H}_i$ es una familia σ-localmente finita formada por conjuntos cerrados. Bastará probar que $\mathcal{G}$ es una red para X módulo $\mathcal{C}$. Sean $C \in \mathcal{C}$ y U un conjunto abierto en X tal que $C \subseteq U$; si no existiera $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que $C \subseteq \bar{F_0} \subseteq U$ entonces para todo $F \in \mathcal{F}$ tal que $C \subseteq F \subseteq U$ se tiene que $\bar{F} \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ lo cual implica que $(C,U) \in \mathcal{L}$ y por lo tanto existe $H(C,U) \in \mathcal{H} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{H}_i$ tal que $C \subseteq H(C,U) \subseteq U$.

(3) implica (1). Sea $\mathcal{C}$ una cubierta cerrada de X formada por conjuntos numerablemente compactos y sean, para cada $i \in \omega$, $\mathcal{F}_i$, una familia de cerrados, localmente finita y tal que $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{F}_i$ es una red para X módulo $\mathcal{C}$. Si definimos $\mathcal{G}_i = \mathcal{F}_i \cup \{\overline{X \setminus \bigcup \mathcal{F}_i}\}$ entonces $\mathcal{G}_i$ es una cubierta de X, localmente finita y todos sus elementos son cerrados. Probaremos que $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in \omega}$ es una Σ-red para X. Sea $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ una sucesión decreciente

de cerrados no vacíos de $\mathfrak{X}$ tal que $K_i \subseteq C(x, \mathcal{G}_i)$ para todo $i \in \omega$ y para algún $x \in \mathfrak{X}$ y consideremos $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Si $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i = \emptyset$ entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C \subseteq \mathfrak{X} - K_{i_0}$ ya que $\mathfrak{X} = \mathfrak{X} \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\mathfrak{X} \setminus K_i)$ y $\mathfrak{X} - K_1 \subseteq \mathfrak{X} - K_2 \subseteq \cdots$. Como $\mathfrak{X} - K_{i_0}$ es un abierto que contiene a C entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $C \subseteq F \subseteq \mathfrak{X} \setminus K_{i_0}$, pero $x \in C \subseteq F$ y $F \in \mathcal{F}_j$ para alguna $j \in \omega$, lo cual implica que $K_j \subseteq C(x, \mathcal{G}_j) \subseteq F$ y se tiene que $K_j \subseteq K_{i_0}$ o $K_{i_0} \subseteq K_j$; en ambos casos se obtiene que $K_{i_0} \cap F \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$, es decir, $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in \omega}$ es una Σ-red para $\mathfrak{X}$.

(1) implica (3). Sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \omega}$ una Σ-red para $\mathfrak{X}$. Definamos $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_0$; $\mathcal{G}_1 = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$; $\cdots$; $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_n$; $\cdots$. Entonces $\mathcal{G}_n$ es localmente finita y sus elementos son conjuntos cerrados en $\mathfrak{X}$ pues cada $\mathcal{F}_i$ tiene estas propiedades. También, si $n < m$ entonces $C(x, \mathcal{G}_m) \subseteq C(x, \mathcal{G}_n)$ pues $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{G}_m$. De manera similar $C(x, \mathcal{G}_n) \subseteq C(x, \mathcal{F}_n)$. Además $D(x) = \bigcap_{n \in \omega} C(x, \mathcal{G}_n)$ es un conjunto cerrado que contiene a x y tal que $D(x) \subseteq C(x) = \bigcap_{n \in \omega} C(x, \mathcal{F}_n)$ y como $C(x)$ es numerablemente compacto y $D(x)$ es un cerrado en $C(x)$ entonces $D(x)$ es numerablemente compacto. Por lo tanto $\mathcal{D} = \{D(x) : x \in \mathfrak{X}\}$ es una cubierta cerrada de $\mathfrak{X}$ formada por conjuntos numerablemente compactos y si para cada $n \in \omega$ tomamos $\mathcal{G}_n' = \{C(x, \mathcal{G}_n) : n \in \omega\}$, entonces $\mathcal{G} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{G}_n'$ es una red para $\mathfrak{X}$ módulo $\mathcal{D}$ y σ-localmente finita. En efecto, sea $D(x) \in \mathcal{D}$ y $\mathcal{U}$ un abierto en $\mathfrak{X}$ con $D(x) \subseteq \mathcal{U}$. Si para todo $n \in \omega$, $K_n = C(x, \mathcal{G}_n) \cap (\mathfrak{X} \setminus \mathcal{U}) \neq \emptyset$ entonces $K_0 \supseteq K_1 \supseteq \cdots$ es una sucesión de cerrados no vacíos y $K_n \subseteq C(x, \mathcal{G}_n) \subseteq C(x, \mathcal{F}_n)$. Por consiguiente, como $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \omega}$ es una Σ-red para $\mathfrak{X}$, $\bigcap_{n \in \omega} K_n \neq \emptyset$, lo cual implica que $\bigcap_{n \in \omega} C(x, \mathcal{G}_n) \cap (\mathfrak{X} \setminus \mathcal{U}) \neq \emptyset$ es decir $D(x) \cap (\mathfrak{X} \setminus \mathcal{U}) \neq \emptyset$ lo cual no es posible. Por lo tanto existe $n_0 \in \omega$ tal que $D(x) \subseteq C(x, \mathcal{G}_{n_0}) \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto se satisface (3).

(3) implica (2) es una consecuencia inmediata del Lema 3.5 ⊥.

Como un corolario inmediato de este Teorema tenemos que si $\mathfrak{X}$ es un σ-espacio, entonces para una red σ-discreta de $\mathfrak{X}$, $\mathcal{N}$, se tiene que $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in \mathfrak{X}\}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{N}$ satisfacen el Teorema 3.4 (2), es decir, $\mathfrak{X}$ es un Σ-espacio. Además, si $\mathfrak{X}$ es numerablemente compacto entonces $\mathcal{C} = \{\mathfrak{X}\} = \mathcal{F}$ también satisfacen la definición de Σ-espacio. Por lo tanto, si α es un ordinal no numerable entonces $[0,\alpha)$ es un ejemplo de un Σ-espacio que no es σ-espacio. De manera similar tenemos que si $\mathfrak{X}$ es σ-compacto entonces $\mathfrak{X}$ es un Σ-espacio.

En lo que resta de esta sección probaremos algunas de las propiedades de los Σ-espacios.

3.6. LEMA. Sean $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathcal{T}$, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ una función casi-perfecta y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de $\mathfrak{X}$ que es localmente finita. Entonces $f(\mathcal{F})$ es localmente finita.

Demostración. Sea $y \in \mathfrak{Y}$ y definamos $\mathcal{F}^* = \{F \in \mathcal{F} : F \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset\}$. Entonces $\mathcal{F}^*$ es una familia finita. En efecto, elijamos para $F \in \mathcal{F}^*$ un elemento $x_F \in F \cap f^{-1}(y)$. Si $\mathcal{F}^*$ es infinita entonces el conjunto $M = \{x_F : F \in \mathcal{F}^*\}$ es infinito y dado que $f^{-1}(y)$ es numerablemente compacto entonces M tiene un punto de acumulación en $f^{-1}(y)$, digamos x^*, lo cual implica que toda vecindad de x^* intersecta a un número infinito de elementos de $\mathcal{F}$ que es una contradicción al hecho de que esta familia es localmente finita. Por lo tanto $\mathcal{F}^*$ es finita.

Ahora bién, como $\mathcal{F}$ es localmente finita, el conjunto $W = \mathfrak{X} \setminus \bigcup\{F \in \mathcal{F} : F \notin \mathcal{F}^*\}$ es una vecindad abierta de $f^{-1}(y)$ y, por lo tanto, dado que f es una función cerrada, existe una vecindad V de y en $\mathfrak{Y}$ tal que $f^{-1}(V) \subseteq W$ (Teorema 0.4), y así tenemos que V es una vecindad de y que intersecta a lo más a un número finito de elementos de $f(\mathcal{F})$, a saber, a lo más a los elementos de $f(\mathcal{F}^*)$. $\dagger$

3.7. LEMA. Si $f: X \to Y$ es una función continua y $\mathcal{G}$ es una familia localmente finita de subconjuntos de Y, entonces $f^{-1}(\mathcal{G})$ es una familia localmente finita de subconjuntos de X.

Demostración. Sea $x \in X$. Como $\mathcal{G}$ es localmente finita, entonces existe una vecindad V_x, de $f(x)$, en Y que intersecta a lo más a un número finito de elementos de $\mathcal{G}$. Dado que f es continua existe U_x, vecindad de x en X tal que $f(U_x) \subseteq V_x$. Obsérvese que U_x sólo puede intersectar a un número finito de elementos de $f^{-1}(\mathcal{G})$. $\dagger$

3.8. TEOREMA. Sean $X, Y \in \mathcal{T}$ y $f: X \to Y$ una función casi-perfecta y sobre. Entonces X es un Σ-espacio si y sólo si Y es un Σ-espacio.

Demostración. Necesidad. Como X es un Σ-espacio, entonces existe una cubierta cerrada $\mathcal{C}$ de X formada por conjuntos numerablemente compactos y $\mathcal{F}$ una red de conjuntos cerrados de X, módulo $\mathcal{C}$ que es σ-localmente finita. Como la propiedad de ser numerablemente compacto se preserva bajo funciones continuas y f es casi-perfecta y sobre, entonces $f(\mathcal{C})$ es una cubierta cerrada de Y formada por subconjuntos de Y que son numerablemente compactos. Por el Lema 3.6, $f(\mathcal{F})$ es una familia σ-localmente finita. Por lo tanto, para probar que Y es un Σ-espacio bastará probar que $f(\mathcal{F})$ es una red módulo $f(\mathcal{C})$. Para probar esto último, sea $C \in \mathcal{C}$ y V un abierto en Y tal que $f(C) \subseteq V$; entonces $f^{-1}(V)$ es un abierto en X tal que $C \subseteq f^{-1}(V)$, y dado que $\mathcal{F}$ es una red para X módulo $\mathcal{C}$ se tiene que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $C \subseteq F \subseteq f^{-1}(V)$ lo cual implica que $f(C) \subseteq f(F) \subseteq V$. Por lo tanto $f(\mathcal{F})$ es una red para Y módulo $f(\mathcal{C})$.

Suficiencia. Supongamos ahora que Y es un Σ-espacio. Entonces existe una cubierta cerrada $\mathcal{C}$ de Y tal que todos sus elementos son numerablemente compactos y también existe $\mathcal{F}$, una red de cerrados en Y módulo $\mathcal{C}$, siendo $\mathcal{F}$ una familia σ-localmente finita. Como f es casi-perfecta entonces $f^{-1}(\mathcal{C})$ es una cubierta cerrada de X y tal que todos sus elementos son numerablemente compactos. Por el Lema 3.7, $f^{-1}(\mathcal{F})$ es una familia σ-localmente finita de subconjuntos de X. Para probar que X es un σ-espacio será suficiente probar que $f^{-1}(\mathcal{F})$ es una red para X módulo $f^{-1}(\mathcal{C})$. Para esto, sea $C \in \mathcal{C}$ y U un abierto en X tal que $f^{-1}(C) \subseteq U$. Entonces existe un subconjunto abierto V en Y tal que $C \subseteq V$ y $f^{-1}(V) \subseteq U$ (Teorema 0.4). Por hipótesis existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $C \subseteq F \subseteq V$, y por lo tanto existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(F) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq U$, es decir, $f^{-1}(\mathcal{F})$ es una red para X módulo $f^{-1}(\mathcal{C})$. †

3.9. COROLARIO. Si X es un Σ-espacio y Y es un espacio compacto entonces $X \times Y$ es un Σ-espacio.

Demostración. Como la proyección $p: Y \times X \longrightarrow X$ es una función sobre y perfecta (Teorema 0.24), el corolario se sigue directamente del Teorema 3.8. †

3.10. COROLARIO. Si $X \in \mathcal{T}$ y $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta cerrada localmente finita de subespacios de X en donde cada X_α es un Σ-espacio, entonces X es un Σ-espacio.

Demostración. Sea $Y = \bigoplus_{\alpha \in I} Y_\alpha$ la suma topológica ajena de los espacios $Y_\alpha = X_\alpha \times \{\alpha\}$ y sea $f: Y \to X$ la función dada por $f(x,\alpha) = x$. Entonces Y es un Σ-espacio pues basta elegir una Σ-red en cada uno de los sumandos y ésta será una Σ-red en Y. También f es una función casi-perfecta pues si $F \subseteq Y$ es cerrado entonces $F \cap X_\alpha$ es cerrado en X_α y por lo tanto también en X. Además $f(F) = \bigcup_{\alpha \in I} (F \cap X_\alpha)$ que es un cerrado en X por ser $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección localmente finita. Por esto mismo, si $x \in X$ entonces x pertenece sólo a un número finito de elementos de $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y por lo tanto $f^{-1}(x)$ es numerablemente compacto. Finalmente la continuidad de f se si-que del hecho de que $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es localmente finita en Y. Por lo tanto, del Teorema anterior se obtiene que X es un Σ-espacio. †

Ahora bién, se sabe que un espacio topológico X es un M-espacio si y sólo si existen un espacio métrico Y y una función casi-perfecta y sobre $f: X \to Y$ (Teorema 0.54). Entonces, por el Teorema 3.8 y dado que todo espacio métrico es un Σ-espacio, se tiene que todo M-espacio es un Σ-espacio. Más aún, si Y es un σ-espacio y $f: X \to Y$ es una función casi-perfecta y sobre entonces X es un Σ-espacio. La siguiente serie de ejemplos mostrará que la clase de los Σ-espacios es más grande que la clase de las pre-imágenes casi-perfectas de los σ-espacios que, trivialmente, contiene a los σ-espacios y a los M-espacios.

3.11. EJEMPLOS. (1) Sean $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ y $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$. Se define sobre X la siguiente topología: los puntos sobre $X \setminus A$ heredan la topología usual de $\mathbb{R}^2$ y una base de vecindades para $p \in A$ consistirá de todos los conjuntos $M_r(p)$ ($r \in \mathbb{R}_+$), donde $M_r(p)$ es el conjunto que contiene a p y a todos los puntos en $B_r(p) = \{q \in X : d(p,q) < r\}$ (siendo d la distancia Euclidiana sobre $\mathbb{R}^2$) que están por abajo de la unión de las semirectas en X con punto inicial en p y pendiente r y $-r$ respectivamente. A cada uno de los conjuntos $M_r(p)$ se le llamará una vecindad mariposa de p.

Dado que A y $X \setminus A$ heredan la topología usual de $\mathbb{R}^2$ entonces A y $X \setminus A$ son metrizables separables y por lo tanto tienen cada uno de ellos una red numerable (Teorema 0.65) y en consecuencia X tiene una red numerable, y por lo tanto X es un σ-espacio. Además, cualquier base para X debe contener vecindades mariposa para cada $p \in A$ y por lo tanto X no puede ser segundo numerable y dado que es separable ($X \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ es un denso) entonces X no es metrizable. Sin embargo, X sí es paracompacto pues $\ell(X) \leq nw(X)$.

Finalmente, como todo σ-espacio que es M-espacio paracompacto es métrico (Okuyama, cit. pos. [Na] p. 174) entonces $\mathfrak{X}$ no es un M-espacio.

(2) Sea $Y = [0,1]^{\mathfrak{m}}$ con $\mathfrak{m} > \aleph_0$. Como Y es numerablemente compacto entonces Y es un M-espacio. Además, para $f \in Y$, $\{f\}$ no es G_δ. En efecto, sea $\{G_n\}_{n \in \omega}$ una sucesión de abiertos canónicos tal que $f \in \bigcap_{n \in \omega} G_n$. Para cada $n \in \omega$ sea $K(G_n) = \{\alpha \in \mathfrak{m} : P_\alpha(G_n) \neq [0,1]\}$. Si $L = \bigcup_{n \in \omega} K(G_n)$ entonces $|L| \leq \aleph_0$ y por lo tanto existe $\alpha_0 \in \mathfrak{m} \setminus L$. Elijamos $a_0 \in [0,1]$ tal que $f(\alpha_0) \neq a_0$ y definamos $g : \mathfrak{m} \to [0,1]$ como $g(m) = f(m)$ si $m \in L$ y $f(m) = a_0$ si $m \notin L$. Entonces $g \neq f$ y $g \in \bigcap_{n \in \omega} G_n$. Por lo tanto $\{f\}$ no es G_δ. Como todo conjunto cerrado de un σ-espacio es un conjunto G_δ (Proposición 2.2), entonces Y no es un σ-espacio.

(3). Sean $\mathfrak{X}$ y Y como en los ejemplos (1) y (2). Como Y es compacto, la proyección $p : Y \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ es una función perfecta y por lo tanto $\mathfrak{X} \times Y$ es la pre-imágen perfecta de un σ-espacio. Sin embargo $\mathfrak{X} \times Y$ no es un M-espacio pues todo subespacio cerrado de un M-espacio es un M-espacio ([Gr] p. 440) y $\mathfrak{X}$ no es M-espacio. Análogamente, como Y no es σ-espacio entonces $\mathfrak{X} \times Y$ no es σ-espacio. Pero, por el Corolario 3.9, $\mathfrak{X} \times Y$ sí es un Σ-espacio.

(4) Sea $P = [0, \omega_1]$ con la topología del orden. Para cada $i \in \omega$ consideremos P_i una copia de P, Q la suma topológica ajena de los P_i y J el espacio cociente de Q que resulta de "pegar" ω_1 de todas y cada una de las copias de P. Sea $\tilde{\omega}_1$ la clase de equivalencia de los puntos ω_1. Entonces, si para cada $\alpha < \omega_1$, definimos $P_i(\alpha) = \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta > \alpha\}$ y $U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \bigcup_{i \in \omega} P_i(\alpha_i)$ se tiene que la familia $\{U(\alpha) = \bigcup_{i \in \omega} P_i(\alpha) : \alpha \in \mathrm{Ord}, \alpha < \omega_1\}$ es una base de vecindades para $\tilde{\omega}_1$ en J. Ahora bién, dado que P es compacto, J es σ-compacto y por lo tanto es un Σ-espacio (paracompacto). Dado que para cada $i \in \omega$, $P_i \subseteq J$ es un cerrado y es una pre-imágen perfecta de un σ-espacio (basta considerar $k : P_i \to \{0\}$ una

función constante), entonces $\mathcal{J}$ es la unión numerable de subespacios cerrados que son pre-imágenes perfectas de σ-espacios. Probaremos que $\mathcal{J}$ no es pre-imágen casi-perfecta de algún σ-espacio. Para esto, supongamos que sí existen un σ-espacio X y una función $f: \mathcal{J} \to X$ casi-perfecta y sobre. Como todo cerrado en un σ-espacio es un conjunto G_δ, entonces $f^{-1}(f(\tilde{\omega}_1))$ es un cerrado G_δ que contiene a $\tilde{\omega}_1$. Ahora bién, como $\{\omega_1\}$ no es un G_δ en P_i, entonces existe $\{\alpha_i : i \in \omega\}$ tal que $U(\alpha_1, \alpha_2, \dots) \subseteq f^{-1}(f(\tilde{\omega}_1))$, y por lo tanto $\{\alpha_1+1, \alpha_2+1, \dots\}$ es un subespacio cerrado del espacio numerablemente compacto $f^{-1}(f(\tilde{\omega}_1))$ que no es numerablemente compacto, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{J}$ es un Σ-espacio que no es pre-imágen casi-perfecta de un σ-espacio.

Como las pre-imágenes perfectas de un espacio métrico y con diagonal G_δ son metrizables (Teorema 0.55) el siguiente teorema ya no resulta tan inesperado.

3.12. TEOREMA. *Un espacio topológico X es un σ-espacio si y sólo si X es un Σ-espacio con diagonal G_δ.*

Para la demostración de este Teorema necesitaremos del siguiente lema que da una condición necesaria y suficiente para que un Σ-espacio sea un Σ-espacio fuerte.

3.13. LEMA. *Un espacio topológico X es un Σ-espacio fuerte si y sólo si X es un Σ-espacio subparacompacto.*

Demostración del Lema. Necesidad. Sea X un Σ-espacio fuerte. Probaremos que X es subparacompacto, es decir, para una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X hallaremos un refinamiento cerrado σ-discreto. Por hipótesis, existe una cubierta cerrada $\mathcal{C}$ de X formada por conjuntos compactos y existe una red σ-discreta $\mathcal{F}$, de subconjuntos de X módulo $\mathcal{C}$. Supongamos que $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$ donde para cada $n\in\omega$, $\mathcal{F}_n$ es discreta. Para cada $F\in\mathcal{F}$ elijamos $\mathcal{U}(F) \subseteq \mathcal{U}$

finita con $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}(F)$ si es que tal familia existe, en cuyo caso también existe $k(F) \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U}(F) = \{u_i(F) : i \leq k(F)\}$. Si definimos $\mathcal{H}(n,i) = \{F \cap u_i(F) : F \in \mathcal{F}_n$ y $u_i(F)$ está definida$\}$ entonces, como $\mathcal{F}_n$ es discreta, se tiene que $\mathcal{H}(n,i)$ es discreta. Además, si $x \in X$ entonces existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$ y como C es compacto existe una subfamilia finita $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ tal que $C \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$, y dado que $\mathcal{F}$ es una red módulo $\mathcal{C}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \in C \subseteq F \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$. Es decir $\mathcal{H} = \bigcup_{n,i \in \omega} \mathcal{H}(n,i)$ cubre a X y por lo tanto es un refinamiento σ-discreto de $\mathcal{U}$.

Suficiencia. Como un espacio topológico numerablemente compacto y subparacompacto es compacto (que es una consecuencia del Teorema 9.2 de [Bu]) se tiene que todo Σ-espacio subparacompacto es un Σ-espacio fuerte. +

Demostración del Teorema 3.12. Por el Teorema 2.12, si X es un σ-espacio, entonces X tiene diagonal G_δ y también sabemos que todo σ-espacio es un Σ-espacio. Esto prueba la necesidad del Teorema.

Suficiencia. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta cerrada de X formada por subconjuntos de X numerablemente compactos, sea $\mathcal{F} = \bigcup_{p \in \omega} \mathcal{F}_p$ una red σ-discreta de subconjuntos de X módulo $\mathcal{C}$ y $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \omega}$ una sucesión de cubiertas abiertas tal que para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{n \in \omega} st(x, \mathcal{G}_n)$ ([Gr], Teorema 2.2) y con $\mathcal{G}_{n+1}$ refinando a $\mathcal{G}_n$. Como todo espacio numerablemente compacto que tiene diagonal G_δ es compacto ([Gr], Teorema 2.14) entonces los elementos de $\mathcal{C}$ son compactos y por lo tanto X es un Σ-espacio fuerte, y por el Lema 3.13, X es subparacompacto, y así podemos suponer que $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \omega}$ satisface la propiedad de que para todo $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{n \in \omega} \overline{st(x, \mathcal{G}_n)}$ ([Gr], Teorema 2.11). También, por la misma subparacompacidad, para cada $n \in \omega$ podemos considerar un refinamiento cerrado $\mathcal{H}_n = \bigcup_{m \in \omega} \mathcal{H}_{nm}$ de $\mathcal{G}_n$, que es σ-discreto, es decir, para cada $m \in \omega$, $\mathcal{H}_{nm}$ es una familia discreta. Si para cada $m, n, p \in \omega$ definimos $\mathcal{K}(n,m,p) = \{H \cap F : H \in \mathcal{K}_{nm},\ F \in \mathcal{F}_p\}$, entonces $\mathcal{K}(n,m,p)$ es discreta pues $\mathcal{F}_p$ lo es, y por lo tanto $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}(n,m,p) : n,m,p \in \omega\}$ es una familia σ-discreta. Para probar que X es un σ-espacio, bastará mostrar que $\mathcal{K}$ es una red para X. Sean $x \in X$ y U un abierto en X tal que $x \in U$. También existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$ y como $\{U\} \cup \{X \setminus \overline{st(x, \mathcal{G}_n)} : n \in \omega\}$ es una cubierta abierta de C que es compacto entonces existen $n_1, \ldots, n_k \in \omega$ tales que $C = C \cap [U \cup (X \setminus \overline{st(x, \mathcal{G}_{n_1})}) \cup \cdots \cup (X \setminus \overline{st(x, \mathcal{G}_{n_k})})]$. Como para cada $n \in \omega$, $\mathcal{G}_{n+1}$ refina a $\mathcal{G}_n$ entonces $C \setminus U \subseteq X \setminus \overline{st(x, \mathcal{G}_{n^*})}$ donde $n^* = \text{máx}\{n_i : i = \overline{1,k}\}$. De aquí que existe $n^* \in \omega$ tal que $\overline{st(x, \mathcal{G}_{n^*})} \cap C \subseteq U \cap C$, lo cual implica que para cada $y \in C \setminus U$ existe un abierto V_y que contiene a y y que $V_y \cap \overline{st(x, \mathcal{G}_{n^*})} = \emptyset$. Dado que $\mathcal{F}$ es una red de subconjuntos de X módulo $\mathcal{C}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $C \subseteq F \subseteq U \cup \bigcup\{V_y : y \in C \setminus U\}$ y como $\mathcal{K}_{n^*}$ es un refinamiento de $\mathcal{G}_{n^*}$ entonces existe $H \in \mathcal{K}_{n^*}$ tal que $x \in H \subseteq st(x, \mathcal{G}_{n^*})$. En consecuencia $H \cap F \in \mathcal{K}$ y para terminar la prueba bastará probar que $H \cap F \subseteq U$. Pero $H \subseteq \overline{st(x, \mathcal{G}_{n^*})}$ y $F \subseteq U \cup (\bigcup\{V_y : y \in C \setminus U\})$ lo cual implica que $H \cap F \subseteq \overline{st(x, \mathcal{G}_{n^*})} \cap [U \cup (\bigcup\{V_y : y \in C \setminus U \text{ y } V_y \cap \overline{st(x, \mathcal{G}_{n^*})} = \emptyset\})]$. Por lo tanto $H \cap F \subseteq U$. †

Como una consecuencia de este Teorema y del Teorema 2.3 obtenemos que si X es un Σ-espacio que satisface la propiedad de Lindelöf y tiene diagonal G_δ entonces X tiene una red numerable.

El siguiente teorema prueba lo dicho en la introducción de este capítulo referente al producto numerable de Σ-espacios paracompactos.

3.14. TEOREMA. Sea $\{X_i\}_{i\in\omega}$ una familia de espacios topológicos tales que para cada $i \in \omega$, X_i es un Σ-espacio fuerte (paracompacto). Entonces $X = \prod_{i\in\omega} X_i$ es un Σ-espacio fuerte (paracompacto).

Demostración. Como para cada $i\in\omega$ X_i es un Σ-espacio fuerte, podemos considerar $\mathcal{F}_i = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_{in}$ y $\mathcal{C}_i$ familias de subconjuntos de X_i que satisfacen el Teorema 3.4 (2). Ahora bién, si U es un abierto en X tal que $\prod_{i\in\omega} C_i \subseteq U$ con $C_i\in\mathcal{C}_i$ para cada $i\in\omega$, entonces existen conjuntos abiertos U_i en X_i y $n\in\omega$ tales que $C_i\subseteq U_i$, $\prod_{i\in\omega} U_i \subseteq U$ y $U_i = X_i$ para todo $i>n$ (cit. pos. [En], Teorema 3.2.10). Por lo tanto $\mathcal{F} = \{\prod_{i\leq n} F_i \times \prod_{i>n} X_i : F_i\in\mathcal{F}_i, n\in\omega\}$ es una red de subconjuntos de X módulo $\mathcal{C} = \{\prod C_i : C_i\in\mathcal{C}_i, i\in\omega\}$ que es una cubierta cerrada de compactos para X. Por lo tanto X es un Σ-espacio fuerte.

Si además X_i es paracompacto para cada $i\in\omega$ probaremos que X también es paracompacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X; sea $i\in\omega$, entonces para cada $F\in\mathcal{F}_{in}$ elijamos $V(F)$ un conjunto abierto tal que $F\subseteq V(F)$ y para cada $n\in\omega$ $\{V(F) : F\in\mathcal{F}_{in}\}$ es discreta. Esto siempre es posible pues basta considerar $V(F) = \bigcup_{x\in F} \{V_x : V_x$ intersecta solamente a F, de la familia $\mathcal{F}_{in}\}$. Ahora, para cada $F = \prod_{i\leq n} F_i \times \prod_{i>n} X_i \in \mathcal{F}$ elijamos una subcolección finita de $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}(F)$, si es que existe, tal que $F\subseteq \bigcup\mathcal{U}(F)$. Como en el Lema 3.13 podemos probar que $\{F\in\mathcal{F} : \mathcal{U}(F)$ está definida$\}$ es una cubierta de X. También como en el Lema 3.13, sea $\mathcal{U}(F) = \{U_j(F) : j\leq k(F)\}$. Entonces la colección

$\mathcal{W}(k_0,k_1,\dots,k_n,j) = \{U_j(F)\cap P_i^{-1}(V(F_i)) : F = \prod_{i\leq n} F_i \times \prod_{i>n} X_i,\ F_i\in\mathcal{F}_{ik_j}\}$

es discreta y por lo tanto $\mathcal{W} = \bigcup\{W(k_0,k_1,\dots,k_n,j) : n,j,k_i\in\omega\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ que es σ-discreto. Por lo tanto X es paracompacto. $\dagger$

3.15. COROLARIO. Si $\{X_i\}_{i\in\omega}$ es una familia de Σ-espacios paracompactos entonces $X = \prod_{i\in\omega} X_i$ es un Σ-espacio paracompacto.

CAPITULO 3

Σ-espacios Lindelöf

1.- Introducción.

Como se sabe, la propiedad de Lindelöf es una propiedad que no se preserva bajo productos, por ejemplo, si S es la línea de Sorgenfrey, entonces S es un espacio de Lindelöf pero $S\times S$ no satisface esta propiedad. Sin embargo hay algunas clases de espacios topológicos en donde sí preserva la propiedad de Lindelöf, aún para productos numerables. La clase de los espacios Čech-completos (Frolík en 1960 [Fr] y Engelking en 1966 [En1]. cit.pos. [En] p. 201) o bién la clase de los espacios regulares σ-compactos (Hager en 1969 [H]. cit.pos. [En] p. 195) tienen esta cualidad. En este capítulo generalizaremos estos resultados probando que la clase de los Σ-espacios también tiene esta característica, es decir, el producto numerable de Σ-espacios Lindelöf sigue siendo un Σ-espacio Lindelöf, y también probaremos que las dos clases anteriores están contenidas en ésta última, que denotaremos por $\mathcal{S}il$. Veremos que $\mathcal{S}il$ no sólo tiene este atributo sino que hereda el buen comportamiento de la clase de los Σ-espacios. También, entre otras caracterizaciones que serán útiles despues, probaremos que $\mathcal{S}il$ es la mínima clase de espacios topológicos que contiene a todos los espacios metrizables separables, a todos los compactos y es invariante con respecto a productos finitos, subespacios cerrados e imágenes continuas, y que sus elementos se pueden describir como las imágenes continuas de los espacios emplumados que son Lindelöf.

2. La clase $\mathfrak{Sil}$.

2.1. DEFINICION. *Un espacio topológico X será un elemento de la clase $\mathfrak{Sil}$ si y sólo si X es un Σ-espacio y es Lindelöf.*

Antes de dar algunas de las caracterizaciones de esta clase de espacios probaremos el siguiente lema.

2.2. LEMA. *Si X es Lindelöf y $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de X, que es localmente finita, entonces $\mathcal{F}$ es numerable.*

Demostración. Para cada $x \in X$ sea V_x una vecindad de x tal que $|\{F \in \mathcal{F} : F \cap V_x \neq \emptyset\}| = n$ para alguna $n \in \omega$. Como X es Lindelöf podemos elegir $\{x_n\}_{n\in\omega} \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{n\in\omega} V_{x_n}$. Entonces $|\mathcal{F}| \leq \sum_{n\in\omega} |\{F \in \mathcal{F} : F \cap V_{x_n} \neq \emptyset\}| \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ $\top$.

2.3. COROLARIO. *Si X es Lindelöf y $\mathcal{F}$ es una familia discreta de subconjuntos de X entonces $\mathcal{F}$ es numerable.*

2.4. TEOREMA. *Si X es un espacio topológico entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) $X \in \mathfrak{Sil}$.

(2) Existen $\mathcal{N}$, familia numerable de subconjuntos de X, y $\mathcal{C}$, una cubierta de compactos de X, tales que $\mathcal{N}$ es una red para X módulo $\mathcal{C}$.

(3) Si bX es una compactación de X entonces existe una familia numerable de subconjuntos cerrados de bX, $\mathcal{F}$, tal que para todo $x \in X$ y $y \in bX \setminus X$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \in F$ y $y \notin F$.

(4) Existen, una compactación bX de X y una familia numerable de conjuntos cerrados en bX, $\mathcal{F}$, tales que para todo $x\in X$ y todo $y\in bX\setminus X$ existe $F\in\mathcal{F}$ con la propiedad de que $x\in F$ y $y\notin F$.

(5) Existe un espacio topológico Z que contiene a X y a una familia numerable $\mathcal{H}$ de subconjuntos compactos en Z tal que para todo $x\in X$ y $y\in Z\setminus X$ existe $H\in\mathcal{H}$ con la propiedad de que $x\in H$ y $y\notin H$.

Demostración. (1) implica (2). Como X es un Σ-espacio, existe una cubierta cerrada de X, $\mathcal{C}$, formada por conjuntos numerablemente compactos, y una colección de subconjuntos de X, $\mathcal{N}$, que es σ-discreta, tales que $\mathcal{N}$ es una red módulo $\mathcal{C}$. Como X es Lindelöf entonces por el Corolario 2.3 $\mathcal{N}$ es numerable. También, si $C\in\mathcal{C}$ entonces C es Lindelöf pues X es Lindelöf y C es cerrado. Por lo tanto C es compacto ya que C es Lindelöf y numerablemente compacto. Es decir, $\mathcal{C}$ es una cubierta de compactos de X y $\mathcal{N}$ es una red numerable para X módulo $\mathcal{C}$.

(2) implica (3). Sean $\mathcal{C}$ una cubierta por compactos de X, $\mathcal{N}$ una red numerable para X módulo $\mathcal{C}$ y bX una compactación para X. Probaremos que $\mathcal{F}=\{cl_{bX}(N) : N\in\mathcal{N}\}$ satisface las condiciones enunciadas en (3). Sean $x\in X$ y $y\in bX\setminus X$. Entonces existe $C\in\mathcal{C}$ tal que $x\in C$ y como C es compacto, C es cerrado en bX y $y\notin C$. Entonces, como bX es regular, existe un abierto U en bX tal que $C\subseteq U$ y $y\notin cl_{bX}U$. Como $\mathcal{N}$ es una red para X módulo $\mathcal{C}$ existe $N\in\mathcal{N}$ tal que $C\subseteq N\subseteq U\cap X\subseteq U$. De aquí obtenemos que $F=cl_{bX}N\in\mathcal{F}$, $x\in F$, $F\subseteq cl_{bX}U$ y por lo tanto $y\notin F$.

(3) implica (4). es inmediata.

(4) implica (2). Sean bX y $\mathcal{F}$ como en (4). Definamos $\mathcal{F}_f = \{\bigcap\mathcal{F}' : \mathcal{F}'\subseteq\mathcal{F},\ \mathcal{F}'\neq\emptyset \text{ y } |\mathcal{F}'|<\aleph_0\}$, $\mathcal{N}=\{X\cap P : P\in\mathcal{F}_f\}$ y para cada $x\in X$, $\mathcal{F}_x=\{F\in\mathcal{F} : x\in F\}$ y $C_x=\bigcap\mathcal{F}_x$. Como para todo

$y\in b\mathfrak{X}\setminus\mathfrak{X}$ existe un elemento en $\mathcal{F}_x$ que no contiene a y entonces $C_x\subseteq\mathfrak{X}$ y como es un cerrado en el compacto $b\mathfrak{X}$ también es compacto. Por lo tanto $\mathcal{C}=\{C_x : x\in\mathfrak{X}\}$ es una cubierta para $\mathfrak{X}$ formada por conjuntos compactos. Probaremos enseguida que $\mathcal{N}$ es una red para $\mathfrak{X}$ módulo $\mathcal{C}$. Sean $C\in\mathcal{C}$ y W un abierto en $\mathfrak{X}$ tal que $C\subseteq W$. Entonces existe un abierto U en $b\mathfrak{X}$ tal que $W=U\cap\mathfrak{X}$. Como $C=C_x$ para alguna $x\in\mathfrak{X}$, $C=\bigcap\mathcal{F}_x\subseteq U$ y dado que los elementos de $\mathcal{F}_x$ son cerrados y $b\mathfrak{X}$ es compacto se sigue que existe una subfamilia finita de $\mathcal{F}_x$ cuya intersección, P, está contenida en U. En efecto, $\{U\}\cup\{b\mathfrak{X}\setminus F : F\in\mathcal{F}\}$ cubre a $b\mathfrak{X}$ y por lo tanto existen $F_1,\ldots,F_n\in\mathcal{F}$ tal que $\mathfrak{X}\setminus U\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(\mathfrak{X}\setminus F_i)=\mathfrak{X}-\bigcap_{i=1}^{n}F_i$, lo cual implica que $\bigcap_{i=1}^{n}F_i\subseteq U$. Entonces $N=P\cap\mathfrak{X}\in\mathcal{N}$ y $C\subseteq N\subseteq W$.

(2) implica (1). Supongamos que $\mathcal{C}$ es una cubierta de compactos y $\mathcal{N}$ es una red numerable para $\mathfrak{X}$ módulo $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{N}$ es numerable, es σ-discreta y por lo tanto $\mathcal{C}$ y $\mathcal{N}$ satisfacen la definición de Σ-espacio, así que sólo necesitamos probar que $\mathfrak{X}$ es Lindelöf. Sea $\mathcal{W}$ una cubierta abierta de $\mathfrak{X}$; probaremos que $\mathcal{W}$ tiene una subcubierta numerable. Si $\mathcal{W}(f)=\{\bigcup\mathcal{W}' : \mathcal{W}'\subseteq\mathcal{W}$ y $|\mathcal{W}'|<\aleph_0\}$ entonces $\mathcal{W}$ tiene una subcubierta numerable si y sólo si $\mathcal{W}(f)$ la tiene. Como los elementos de $\mathcal{C}$ son compactos entonces para todo $C\in\mathcal{C}$ existe $W\in\mathcal{W}(f)$ tal que $C\subseteq W$. Definamos $\mathcal{N}_0=\{N\in\mathcal{N} : N\subseteq W$ para algún $W\in\mathcal{W}(f)\}$, y para cada $N\in\mathcal{N}_0$ fijemos un $W_N\in\mathcal{W}(f)$ tal que $N\subseteq W_N$ y consideremos $\mathcal{W}_0=\{W_N : N\in\mathcal{N}_0\}$. Entonces $|\mathcal{W}_0|\leq|\mathcal{N}_0|\leq\aleph_0$ y $\mathcal{W}_0\subseteq\mathcal{W}(f)$. Además, como para todo $C\in\mathcal{C}$ existe $W\in\mathcal{W}(f)$ tal que $C\subseteq W$ y $\mathcal{N}$ es una red módulo $\mathcal{C}$ entonces existe $N\in\mathcal{N}$ tal que $C\subseteq N\subseteq W$ lo cual implica que $N\in\mathcal{N}_0$. Por lo tanto, obtenemos que $C\subseteq W_N$ y dado que $\mathcal{C}$ cubre a $\mathfrak{X}$ entonces $\mathcal{W}_0$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{W}(f)$, es decir, $\mathfrak{X}$ es Lindelöf.

(4) implica (5) es inmediato.

(5) implica (4). $b\mathfrak{X}=cl_{\beta\mathfrak{X}}\mathfrak{X}$ es una compactación de $\mathfrak{X}$. Enton-

ces $\mathcal{F}=\{H\cap b\mathbb{X} : H\in\mathcal{H}\}$, donde $\mathcal{H}$ es la familia numerable de compactos en Z proporcionada por (5), es una familia numerable de cerrados en $b\mathbb{X}$ que satisfacen (4). †

2.5. COROLARIO. Si $\mathbb{X}\in Sil$ entonces $\mathbb{X}$ es la unión de a lo más $\mathfrak{c}$ subespacios compactos.

Demostración. Por el Teorema 2.4(2) existe una cubierta de compactos $\mathcal{C}$ y una red numerable $\mathcal{N}$, módulo $\mathcal{C}$. Para cada $c\in\mathcal{C}$, definamos $\mathcal{N}_c=\{N\in\mathcal{N} : c\subseteq N\}$ y $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{N})\to\mathcal{C}\cup\{\phi\}$ como $\varphi(\mathcal{F})=c$ si $\mathcal{F}=\mathcal{N}_c$ para alguna $c\in\mathcal{C}$ y $\varphi(\mathcal{F})=\phi$ en otro caso. Entonces φ es sobre y por lo tanto $|\mathcal{C}|\leq|\mathcal{P}(\mathcal{N})|=2^{\aleph_0}=\mathfrak{c}$. †

2.6. OBSERVACIONES.

(1) Si $\mathbb{X}$ es metrizable y separable, entonces $\mathbb{X}$ es segundo numerable. Por lo tanto, si $\mathcal{N}$ es una base numerable y $\mathcal{C}=\{\{x\} : x\in\mathbb{X}\}$ entonces $\mathcal{C}$ es una cubierta de compactos y $\mathcal{N}$ una red numerable módulo $\mathcal{C}$. Por consiguiente $\mathbb{X}\in Sil$. De manera similar, si $\mathbb{X}$ tiene una red numerable entonces $\mathbb{X}\in Sil$

(2) Si $\mathbb{X}$ es σ-compacto entonces $\mathbb{X}\in Sil$ pues $\mathbb{X}=\bigcup_{i\in\omega}\mathbb{X}_i$ donde $\mathbb{X}_i$ es compacto para todo $i\in\omega$ y de esta manera $\mathcal{C}=\mathcal{N}=\{\mathbb{X}_i : i\in\omega\}$ satisfacen las condiciones del Teorema 2.4(2). De aquí concluimos que el concepto de Σ-espacio Lindelöf es una generalización del concepto de σ-compacidad.

2.7. TEOREMA. Sean $Z\in\mathcal{T}$ y $\mathbb{X}\subseteq Z$. Si existe una familia numerable de subespacios de Z, $\{F_i\}_{i\in\omega}$, tal que $F_i\in Sil$ para todo $i\in\omega$ y para cada $x\in\mathbb{X}$ y $y\in Z\setminus\mathbb{X}$ existe $i\in\omega$ con $x\in F_i$ y $y\notin F_i$, entonces $\mathbb{X}\in Sil$.

Demostración. Por el Teorema 2.4, para cada $i\in\omega$ existen $\mathcal{H}_i$ y $Z_i\in\mathcal{T}$ como en 2.4(5). Consideremos $\mathcal{H}=\bigcup_{i\in\omega}\mathcal{H}_i$ y $Z_0=Z\cap(\bigcup_{i\in\omega}Z_i)$. Entonces $\mathcal{H}$ es numerable y para cada $x\in\mathbb{X}$ y $y\in Z_0\setminus\mathbb{X}$ existe, por hipótesis, $i\in\omega$ con $x\in F_i$ y $y\notin F_i$. Usando la propiedad de $\mathcal{Z}_i$ y $\mathcal{K}_i$ se tiene que $x \in H$ y $y \notin H$ para algún $H \in \mathcal{K}$. Por lo tanto, del Teorema 2.4 (5), $X \in Sil$. †

2.8. TEOREMA. Si $f: X \to Y$ es una función continua y sobre y $X \in Sil$ entonces $Y \in Sil$.

Demostración. Sean $\mathcal{C}$ una cubierta de compactos de X y $\mathcal{N}$ una red numerable para X módulo $\mathcal{C}$. Definamos $\mathcal{C}_Y = \{f(C) : C \in \mathcal{C}\}$ y $\mathcal{N}_Y = \{f(N) : N \in \mathcal{N}\}$. Entonces $\mathcal{C}_Y$ es una cubierta de Y formada por conjuntos compactos. Bastará probar que la familia numerable $\mathcal{N}_Y$ es una red para Y módulo $\mathcal{C}_Y$. Para probarlo, sea $K \in \mathcal{C}_Y$ y U un abierto en Y con $K \subseteq U$. Por construcción existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $K = f(C)$ y, por lo tanto, $C \subseteq f^{-1}(U)$. Como $f^{-1}(U)$ es un abierto en X que contiene a C y $\mathcal{N}$ es una red para X módulo $\mathcal{C}$, entonces existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subseteq N \subseteq f^{-1}(U)$, lo cual implica que $K = f(C) \subseteq f(N) \subseteq U$ y $f(N) \in \mathcal{N}_Y$. Por lo tanto $\mathcal{N}_Y$ es una red para Y módulo $\mathcal{C}_Y$. †

2.9. TEOREMA. Si $f: X \to Y$ es una función perfecta de X sobre Y y $Y \in Sil$ entonces $X \in Sil$.

Demostración. Sean $\mathcal{C}$ una cubierta de compactos de Y y $\mathcal{N}$ una red numerable para Y módulo $\mathcal{C}$. Si definimos $\mathcal{C}_X = \{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}$ y $\mathcal{N}_X = \{f^{-1}(N) : N \in \mathcal{N}\}$ entonces por el Teorema 0.25, $\mathcal{C}_X$ es una cubierta de X formada por conjuntos compactos. Será suficiente probar que $\mathcal{N}_X$ es una red para X módulo $\mathcal{C}_X$. Sean $C \in \mathcal{C}$ y U un abierto en X tal que $f^{-1}(C) \subseteq U$; entonces, como f es cerrada existe un abierto V en Y tal que $C \subseteq V$ y $f^{-1}(V) \subseteq U$ (Teorema 0.4). Como $\mathcal{N}$ es una red para Y módulo $\mathcal{C}$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subseteq N \subseteq V$ lo cual implica que $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq U$ y como $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_X$ esto muestra que efectivamente $\mathcal{N}_X$ es una red para X módulo $\mathcal{C}_X$. †

2.10. TEOREMA. Si $\mathfrak{X} \in \mathcal{S}il$ y $Y \subseteq \mathfrak{X}$ es cerrado entonces $Y \in \mathcal{S}il$.

Demostración. Consideremos $\mathcal{C}$, una cubierta de compactos en $\mathfrak{X}$ y $\mathcal{N}$ una red numerable para $\mathfrak{X}$ módulo $\mathcal{C}$. Como $c \cap Y$ es compacto en Y para todo $c \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}_Y = \{c \cap Y : c \in \mathcal{C}\}$ y $\mathcal{N}_Y = \{N \cap Y : N \in \mathcal{N}\}$ satisfacen los requisitos del Teorema 2.4. En efecto, si $c \in \mathcal{C}$ y U es un abierto en $\mathfrak{X}$ tal que $c \cap Y \subseteq U \cap Y$ entonces $U \cup (\mathfrak{X} \setminus Y)$ es un abierto que contiene a c y por lo tanto, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $c \subseteq N \subseteq U \cup (\mathfrak{X} \setminus Y)$ y de aquí concluimos que $c \cap Y \subseteq N \cap Y \subseteq U \cap Y$. †

2.11. COROLARIO. Si $\mathfrak{X} \in \mathcal{S}il$, K es compacto y $Y \subseteq \mathfrak{X} \times K$ es cerrado, entonces $Y \in \mathcal{S}il$.

Demostración. Sabemos que la proyección $\pi_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \times K \to \mathfrak{X}$ es una función perfecta y por lo tanto $\pi_{\mathfrak{X}}|_Y : Y \to \mathfrak{X}$ es una función cerrada sobre un subespacio cerrado $Z = \pi_{\mathfrak{X}}(Y)$ de $\mathfrak{X} \in \mathcal{S}il$. Por el Teorema 2.10 $Z \in \mathcal{S}il$ y por el Teorema 2.9 $Y \in \mathcal{S}il$. †

2.12. TEOREMA. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

(1) $\mathfrak{X} \in \mathcal{S}il$

(2) Existen un espacio topológico metrizable y separable M, un espacio compacto K y $Y \subseteq K \times M$ cerrado tal que $\mathfrak{X}$ es imágen continua de Y.

(3) Existen espacios topológicos Y y M, con M metrizable y separable, y existen funciones continuas $f : Y \to \mathfrak{X}$ y $p : Y \to M$ tales que $f(Y) = \mathfrak{X}$ y p es perfecta.

(4) $\mathfrak{X}$ es la imágen continua de un espacio emplumado Lindelöf.

(5) $\mathfrak{X} \in \mathcal{P}$ donde $\mathcal{P}$ es la mínima clase de espacios topológicos que contiene a todos los espacios metrizables separables, a todos los compactos y es invariante con respecto a productos finitos, subespacios cerrados e imágenes continuas.

Demostración. (1) implica (2). Por el Teorema 2.4 (3) existe una familia numerable de subconjuntos cerrados de βX, $\mathcal{F}$, tal que para todo $x\in X$ y $y\in\beta X\setminus X$ existe $F\in\mathcal{F}$ con $x\in F$ y $y\notin F$. Enumeremos a los elementos de $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F}=\{F_n : n\in\omega\}$ y consideremos el subespacio M de ω^ω, con la topología producto, dado por

$$M=\{(n_1,n_2,\dots,n_i,\dots) : \bigcap_{i\in\omega} F_{n_i}\subseteq X\}.$$

Entonces como el producto numerable de espacios topológicos segundo numerables es segundo numerable y ésta es una propiedad hereditaria y también dado que el producto numerable de espacios topológicos metrizables es metrizable tenemos que M es un espacio metrizable separable. Ahora, para cada $m\in M$ con $m=(n_1,n_2,\dots,n_i,\dots)$ definamos $F_m=\bigcap_{i\in\omega} F_{n_i}$ y consideremos $Y\subseteq M\times\beta X$ dado por $Y=\{(m,x)\in M\times\beta X : x\in F_m\}$. Entonces Y es cerrado en $M\times\beta X$. En efecto, supongamos que $(m_0,x_0)\in(M\times\beta X)\setminus Y$ donde $m_0=(n_1^0,n_2^0,\dots,n_i^0,\dots)$. Entonces existe $k\in\omega$ tal que $x_0\notin F_{n_k^0}$. Definamos $W=\{(m,x)\in M\times\beta X$: la k-ésima coordenada de m es igual a n_k^0 y $x\in\beta X\setminus F_{n_k^0}\}=(\omega\times\dots\times\omega\times\{n_k^0\}\times\omega\times\cdots)\cap M\times(\beta X\setminus F_{n_k^0})$. Entonces W es una vecindad de (m_0,x_0) en $M\times\beta X$ cuya intersección con Y es vacía. Por lo tanto Y es cerrado. También, si $\pi_{\beta X}: M\times\beta X\to\beta X$ es la proyección de $M\times\beta X$ en βX, tenemos que $\pi_{\beta X}(Y)=X$. En efecto, como $Y=\{(m,x)\in M\times\beta X : x\in M\}$ entonces $\pi_{\beta X}(Y)=\bigcup\{F_m : m\in M\}$. Ahora bién, como $F_m\subseteq X$, para todo $m\in\mathbb{N}$, entonces $\pi_{\beta X}(Y)\subseteq X$. Además, si $x\in X$ elijamos $\{m_x\}$ como la sucesión creciente de todas las $i\in\omega$ tales que $x\in F_i$. Entonces $m_x\in M$, por la elección de la familia $\mathcal{F}$ y $x\in F_{m_x}$ así que $(m_x,x)\in Y$ y por lo tanto $x\in\pi_{\beta X}(Y)$.

(2) implica (3). Sean M un espacio metrizable separable y $Y\subseteq M\times\beta X$ cerrado tal que $\pi_{\beta X}(Y)=X$. Entonces $p=\pi_M$ es perfecta, $f=\pi_{\beta X}$ es continua y $f(Y)=X$.

(3) implica (4). Como un espacio emplumado Lindelöf es aquel que se puede mapear perfectamente sobre un espacio segundo nu-

merable entonces el espacio Y de (3) es un espacio emplumado Lindelöf y X es la imágen continua de Y.

(4) implica (1). Sean Y un espacio emplumado Lindelöf y $f: Y \to X$ una función continua y sobre. Entonces existe un espacio segundo numerable Z y una función perfecta y sobre $p: Y \to Z$. Como Z es regular entonces es metrizable y Lindelöf (Teoremas 0.52 y 0.65). Por lo tanto $Z \in \mathcal{S}il$ y del Teorema 2.9 $Y \in \mathcal{S}il$. Por lo tanto, por el Teorema 2.8, $X \in \mathcal{S}il$.

(2) implica (5) es trivial

(5) implica (2). Definamos las siguientes clases de espacios topológicos:

$\mathcal{K}_0 = \{X : X$ es compacto$\}$.

$\mathcal{M}_0 = \{X : X$ es metrizable separable$\}$.

$\mathcal{P}_0 = \{X : X$ es homeomorfo a algún producto de un compacto con un metrizable separable$\}$.

$\mathcal{S}_0 = \{X : X$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado de algún elemento en $\mathcal{P}_0\}$

$\mathcal{C}_0 = \{X : X$ es homeomorfo a una imágen continua de algún elemento en $\mathcal{S}_0\}$.

Si definimos $\mathcal{A}_0 = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{C}_0$ entonces $\mathcal{A}_0 = \mathcal{C}_0$. En efecto, por definición $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{A}_0$ y si $Z \in \mathcal{A}_0$ entonces como $\{1\} \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{K}_0$ cada vez que $Z \in \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{M}_0$ entonces $Z \times \{1\} \in \mathcal{P}_0$ y por lo tanto $Z \in \mathcal{P}_0$, es decir $\mathcal{K}_0 \cup \mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{C}_0$.

Ahora, si consideramos $\mathcal{P}_1 = \{X : X$ es homeomorfo al producto de dos elementos en $\mathcal{A}_0\}$ entonces $\mathcal{P}_1 = \mathcal{A}_0$. Probemos primero que $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{A}_0$. Si $X \in \mathcal{P}_1$ entonces $X \cong Z \times Y$ con $Z, Y \in \mathcal{A}_0 = \mathcal{C}_0$, es decir, existen espacios topológicos Z_1, Y_1 y funciones continuas y sobres $f_1 : Z_2 \to Z_1$ y $g_1 : Y_2 \to Y_1$ con $Z_1 \cong Z$, $Y_1 \cong Y$ y $Y_2, Z_2 \in \mathcal{S}_0$; así que existen homeomorfismos $h_1 : F_1 \to Y_2$ y $h_2 : F_2 \to Z_2$ siendo F_1 y F_2 subespacios cerrados de N_1 y N_2

respectivamente y donde $N_1 \cong K_1 \times M_1$ y $N_2 \cong K_2 \times M_2$ siendo K_1 y K_2 compactos y M_1 y M_2 espacios metrizables separables. Entonces $Z_1 \times Y_1 \cong Z \times Y$ y $Z_1 \times Y_1$ siendo imágen continua de $Z_2 \times Y_2 \in \mathcal{S}_0$. Por lo tanto $X \cong Z_1 \times Y_1$ lo cual implica que $X \in \mathcal{C}_0 = \mathcal{A}_0$.

Ahora bién, como la otra contención es obvia tenemos que $\mathcal{P}_1 = \mathcal{A}_0$. Entonces $\mathcal{C}_0$ contiene a $\mathcal{K}_0 \cup \mathcal{M}_0$ y es cerrada bajo productos finitos, subconjuntos cerrados e imágenes continuas. Por lo tanto $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}_0$ y como por hipótesis $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P} = \mathcal{A}_0 = \mathcal{C}_0$ lo cual prueba (2). $\dagger$

El siguiente resultado es análogo al Teorema 2.3.15 que fué probado para la clase de espacios paracompactos.

2.13. TEOREMA. Si para cada $i \in \omega$, $X_i \in \mathcal{S}il$ entonces $\prod_{i\in\omega} X_i \in \mathcal{S}il$.

Demostración. Se sigue del Teorema 2.12 (3) y de los hechos siguientes: el producto numerable de espacios metrizables separables es metrizable separable; el producto de una familia de funciones continuas es continua y el producto de una familia de funciones perfectas es perfecta. $\dagger$

Usando el Teorema 1.4.2 se obtiene el siguiente corolario.

2.14. COROLARIO. Si $X \in \mathcal{S}il$ entonces $t(C_p(X)) = \aleph_0$.

Demostración. Se sigue del Teorema anterior, del Teorema 1.4.2 y del hecho que $\ell(X^n) = \aleph_0$ para todo $n \in \omega$. $\dagger$

2.15. TEOREMA. Si $\{X_i\}_{i\in\omega}$ es una cubierta de subespacios de X tal que para cada $i \in \omega$, $X_i \in \mathcal{S}il$ entonces $X = \bigcup_{i\in\omega} X_i \in \mathcal{S}il$.

Demostración. Tenemos que el espacio discreto $\omega \in \mathcal{S}il$. Por lo tanto, por el Teorema 2.13, $Z = \prod_{i\in\omega} X_i \times \omega \in \mathcal{S}il$. Bastará probar que X es imágen continua de Z. Para ello definamos $f: Z \to X$ dada por $f((z_i), n) = x_n$. Entonces f es continua pues si $z \in Z$ y U es un abierto en X tal que $f(z) \in U$, entonces existe $n \in \omega$

tal que $f(z) \in X_n$ y entonces $W = \prod_{i\in\omega} B_i \times \{n\}$ donde $B_i = X_i$ si $i \neq n$ y $B_i = U \cap X_n$ si $i = n$, es un abierto en Z tal que $z \in W$ y $f(W) \subseteq U$. Además $f(Z) = X$. Por lo tanto $X \in Sil$. †

2.16. TEOREMA. Si para cada $i\in\omega$ X_i es un subespacio de $Z \in \mathcal{T}$ y $X_i \in Sil$ entonces $X = \bigcap_{i\in\omega} X_i \in Sil$.

Demostración. Si definimos $\varphi : X \to Z^\omega$ por $\varphi(x) = (x, \ldots, x, \ldots)$ entonces $\varphi(X) = \Delta \cap \prod_{i\in\omega} X_i$ y φ es un homeomorfismo sobre su imágen. Además como Δ es cerrado en Z^ω, $\varphi(X)$ es cerrado en $\prod_{i\in\omega} X_i$ y como $X_i \in Sil$ para todo $i\in\omega$ entonces $\prod_{i\in\omega} X_i \in Sil$ y por lo tanto $\varphi(X) \in Sil$ y, en consecuencia, $X \in Sil$. †

Finalmente, probaremos que la clase de los espacios K-analíticos es una subclase de Sil.

2.17. DEFINICION.

(1) X es un espacio $K_{\sigma\delta}$ si existe un espacio topológico Z tal que $X \subseteq Z$ y existe una familia $\{S_i\}_{i\in\omega}$ de subespacios σ-compactos de Z con la propiedad de que $X = \bigcap_{i\in\omega} S_i$.

(2) X es un espacio K-analítico si X es imágen continua de un espacio $K_{\sigma\delta}$.

2.18. TEOREMA. Si X es un espacio K-analítico entonces $X \in Sil$. En particular si X es $K_{\sigma\delta}$ entonces $X \in Sil$.

Demostración. Como la imágen continua de un Σ-espacio Lindelöf tiene esta propiedad será suficiente probar que todo espacio $K_{\sigma\delta}$ es un Σ-espacio Lindelöf.

Sea X un espacio $K_{\sigma\delta}$, entonces existe un espacio topológico Z con $X \subseteq Z$ y $\{S_i\}_{i\in\omega}$ colección de subespacios σ-compactos de Z tal que $X = \bigcap_{i\in\omega} S_i$. Como para todo $i\in\omega$, $S_i \in Sil$ entonces por el Teorema 2.16, $X \in Sil$. †

Recordemos que un espacio $X \in \mathcal{T}$ es un espacio Čech-completo si X es un conjunto G_δ en la compactación de Stone-Čech de X, βX. El siguiente teorema prueba que la clase de los espacios Čech-completos que satisfacen la propiedad de Lindelöf es una subclase de la clase $\mathcal{S}il$.

2.19. TEOREMA. Si X es un espacio Lindelöf y Čech-completo entonces X es un espacio $K_{\sigma\delta}$. En particular $X \in \mathcal{S}il$.

Demostración. Supongamos que X es Lindelöf y Čech-completo. Entonces existe una sucesión de conjuntos abiertos en βX, $\{G_i\}_{i\in\omega}$ tales que $X = \bigcap_{i\in\omega} G_i$. Ahora, para cada $x \in X$ e $i \in \omega$ sea U_{x_i} un conjunto abierto en βX tal que $x \in U_{x_i} \subseteq cl_{\beta X} U_{x_i} \subseteq G_i$. Entonces para cada $i \in \omega$, $\mathcal{U}_i' = \{U_{x_i} : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X y X tiene la propiedad de Lindelöf así que podemos escoger $\mathcal{U}_i$, una subcubierta numerable de $\mathcal{U}'$. Si se define, para cada $i \in \omega$, $S_i = \bigcup \{cl_{\beta X} U : U \in \mathcal{U}_i\}$ entonces S_i es σ-compacto para todo $i \in \omega$ y además $X = \bigcap_{i\in\omega} S_i$. En efecto, por construcción, $X \subseteq S_i$ para todo $i \in \omega$, así que $X \subseteq \bigcap_{i\in\omega} S_i$. También, si $x \in \bigcap_{i\in\omega} S_i$ entonces existe $U_i \in \mathcal{U}_i$ tal que $x \in U_i \subseteq G_i$ para todo $i \in \omega$, es decir, $x \in \bigcap_{i\in\omega} G_i = X$ lo que implica que $x \in X$. Por lo tanto X es un espacio $K_{\sigma\delta}$. ┼

Para los siguientes resultados necesitaremos del concepto de estabilidad.

2.20. DEFINICION. Sea $\tau \in \mathcal{C}ard$.

(1) X es τ-estable si para toda imágen continua Y de X las siguientes condiciones son equivalentes

(a) $iw(Y) \leq \tau$.

(b) $nw(Y) \leq \tau$.

(2) X es estable si X es τ-estable para todo $\tau \in \mathcal{C}ard$.

2.21. OBSERVACION. X es estable si y sólo si para toda imágen continua Y de X se tiene que $iw(Y) = nw(Y)$.

Demostración. Como la suficiencia es obvia bastará probar que si Y es imágen continua de X entonces $nw(Y) \le iw(Y)$ lo cual se sigue del hecho que X es $iw(Y)$-estable. $\dagger$.

Una propiedad de los espacios estables, que usaremos más adelante, está enunciada en el siguiente lema.

2.22. LEMA. Si $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, $|\Lambda| \le \tau$ y X_α es τ-estable para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces X es τ-estable.

Demostración. Sea $g : X \to Y$ una función continua y sobre y supongamos que $iw(Y) \le \tau$. Entonces, para cada $\alpha \in \Lambda$, $g|_{X_\alpha}$ es continua y si llamamos $g(X_\alpha) = Y_\alpha$ entonces Y_α es imágen continua de X_α y X_α es τ-estable con la propiedad de que $iw(Y) \le \tau$. Por lo tanto $nw(Y_\alpha) \le \tau$. Sea $\mathcal{N}_\alpha$ una red para Y_α tal que $|\mathcal{N}_\alpha| \le nw(Y_\alpha) \le \tau$. Entonces $\mathcal{N} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{N}_\alpha$ es una red para Y y $|\mathcal{N}| \le \sum_{\alpha\in\Lambda} |\mathcal{N}_\alpha| \le |\Lambda|\,\tau = \tau$. $\dagger$.

2.23. LEMA. Sean $f : X \to Y$, $g : X \to Z$ y $\phi : Z \to T$ funciones continuas y sobreyectivas. Si f es perfecta y ϕ es biyectiva entonces Z es la imágen continua de un subespacio cerrado de $Y \times T$.

Demostración. Sea $\Psi = \phi \circ g : X \to T$ y consideremos $\Psi^* = \Psi \Delta f : X \to T \times Y$ y $g^* = g \Delta f : X \to Z \times Y$ los productos diagonales respectivos, es decir, $\Psi^*(x) = (\Psi(x), f(x))$ y $g^*(x) = (g(x), f(x))$. Entonces Ψ^* y g^* son funciones perfectas (Teorema 0.27). Definamos ahora $p : Z \times Y \to T \times Y$ como $p(z,y) = (\phi(z), y)$. Entonces para $x \in X$, $(p \circ g^*)(x) = p(g^*(x)) = p(g(x), f(x)) = (\phi(g(x)), f(x)) = (\Psi(x), f(x)) = \Psi^*(x)$. Si $\pi = p|_{g^*(X)} : g^*(X) \to T \times Y$ entonces π es cerrada. En efecto, sea $F \subseteq g^*(X) \subseteq Z \times Y$ cerrado en $g^*(X)$; como g^* es perfecta entonces $g^*(X)$ es cerrado en $Z \times Y$ y por lo tanto F es cerrado en $Z \times Y$. Por consiguiente $(g^*)^{-1}(F)$ es un cerrado en X

y como Ψ^* es perfecta se tiene que $\Psi^*((g^*)^{-1}(F))$ es un cerrado en $T\times Y$. Bastará probar que $\Psi^*((g^*)^{-1}(F)) = \Pi(F)$. En efecto, si $(z,y)\in F$ entonces $\Pi(z,y) = (\phi(z), y)$ y existe $x\in X$ tal que $g^*(x) = (z,y)$ $= (g(x), f(x))$, es decir, $(g^*)^{-1}((z,y)) = x$. Por lo tanto $\Pi(z,y) = (\phi(z),y)$ $= (\phi(g(x)), f(x)) = (\Psi(x), f(x)) = \Psi^*(x) = \Psi^*((g^*)^{-1}(z,y))$ lo cual implica que $\Pi(z,y)\in \Psi^*((g^*)^{-1}(F))$. Por lo tanto $\Pi(F)\subseteq \Psi^*((g^*)^{-1}(F))$. De manera similar se prueba la otra contención. También, como ϕ es una condensación Π es una función continua y biyectiva. En efecto, si A_1 es un abierto en X y A_2 es un abierto en Y, entonces $\Pi^{-1}(A_1\times A_2) = \phi^{-1}(A_1)\times A_2$ ya que $(z,y)\in \Pi^{-1}(A_1\times A_2)$ si y sólo si $\Pi(z,y)\in A_1\times A_2$ si y sólo si $(\phi(z), y)\in A_1\times A_2$ si y sólo si $\phi(z)\in A_1$ y $y\in A_2$ si y sólo si $z\in \phi^{-1}(A_1)$ y $y\in A_2$ si y sólo si $(z,y)\in \phi^{-1}(A_1)\times A_2$. La biyectividad de Π se sigue de la biyectividad de ϕ.

Por lo tanto Π es un homeomorfismo de $g^*(X)$ sobre $\Psi^*(X)$, y como Ψ^* es cerrada, $\Psi^*(X)$ es cerrado en $T\times Y$. Además, si P_1 es la proyección de $Z\times Y$ sobre Z, dado que $g(X)=Z$ se tiene que $P_1(g^*(X)) = Z$. En consecuencia $Z = P_1(\Pi^{-1}(\Psi^*(X))) = P_1\circ\Pi^{-1}(\Psi^*(X))$, es decir, Z es la imágen del subespacio cerrado de $Y\times T$, $\Psi^*(X)$, bajo la función continua $P_1\circ\Pi^{-1}$. †

2.24. TEOREMA. Si $X\in Sil$ entonces X es estable.

Demostración. Como la imágen continua de un elemento de la clase Sil está en ésta misma clase, por la Observación 2.21 será suficiente probar que para X mismo $nw(X)\le iw(X)$. Sea $\tau = iw(X)$ y $\phi: X\to T$ una condensación tal que $w(T)\le\tau$. Como $X\in Sil$, por el Teorema 2.12 (3), existen espacios topológicos Y y Z con $w(Y) = \aleph_0$, una función perfecta $f: Z\to Y$ y una función continua $g: Z\to X$ tales que $f(Z) = Y$ y $g(Z) = X$. Entonces las funciones f, g y ϕ satisfacen las condiciones del Lema 2.23 y por lo tanto X es la imágen continua de un subespacio cerrado de $Y\times T$. De aquí concluimos que $nw(X) \leq nw(Y \times T)$. Pero $w(Y) = \aleph_0$ y $w(T) \leq \tau$ de tal forma que $nw(Y \times T) \leq \tau$, lo cual implica que $nw(X) \leq \tau$. Por lo tanto $nw(X) \leq iw(X)$ y así $nw(X) = iw(X)$. Así, X es estable †.

Antes de enunciar el siguiente corolario necesitaremos del concepto de Σ-producto. Consideremos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y $a \in X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Denotaremos por $\Sigma(a)$ al subespacio del producto topológico X que consiste de todos los puntos $x \in X$ tales que el conjunto $\{\alpha \in I : x(\alpha) \neq a(\alpha)\}$ es a lo más numerable. A $\Sigma(a)$ se le conoce como el Σ-producto de los espacios $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ basado en el punto a. También necesitaremos del siguiente resultado que es un caso particular del Teorema 12 de [Arh 1].

2.25. PROPOSICION. Sean $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, el producto topológico de los espacios $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $a \in X$ y $\tau \in Card$, tales que

(1) Para todo $K \subseteq I$ finito $\ell(X_K) \leq \tau$, siendo $X_K = \prod_{\alpha \in K} X_\alpha$

(2) Si $L \subseteq I$ y $|L| \leq \tau$ entonces X_L $(P_L(\Sigma(a)))$ es τ-estable, siendo P_L la proyección de X sobre X_L.

Entonces $X(\Sigma(a))$ es τ-estable.

2.26. COROLARIO (del Teorema 2.24). Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq Sil$ y $a \in X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$, entonces el Σ-producto de los espacios $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, basado en a, $\Sigma(a)$, es un espacio estable.

Demostración. Si $|\Lambda| \leq \aleph_0$ entonces $\Sigma(a) = X$ y por el Teorema 2.13, $X \in Sil$, y por el Teorema 2.24, $\Sigma(a)$ es un espacio estable. Supongamos entonces que $|\Lambda| > \aleph_0$. Observemos que

$$\Sigma(a) = \bigcup \{ (\prod_{\alpha \in J} X_\alpha)_a : J \subseteq \Lambda \text{ y } |J| \leq \aleph_0 \}$$

donde $(\prod_{\alpha \in J} X_\alpha)_a = \{ f \in X : f(\lambda) = a(\lambda) \text{ si } \lambda \notin J \}$. También observemos que $(\prod_{\alpha \in J} X_\alpha)_a$ es homeomorfo a $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ que es un miembro de la clase Sil. Por lo tanto, por el Teorema 2.24 $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es estable, en particular es $|\Lambda|$-estable. Por consiguiente, por el Lema 2.22 se tiene que $\Sigma(a)$ es $|\Lambda|$-estable.

Ahora, sea $\tau \in \mathscr{C}ard$. Para probar que $\Sigma(a)$ es τ-estable, por la Proposición 2.25 bastará probar que si $L \subseteq \Lambda$ con $|L| \leq \tau$ entonces $P_L(\Sigma(a))$ es un espacio τ-estable. Afortunadamente $P_L(\Sigma(a))$ es un Σ-producto en $\prod_{\alpha\in L} X_\alpha$ y entonces, por la observación anterior $P_L(\Sigma(a))$ es τ-estable. Entonces $\Sigma(a)$ es τ-estable para todo $\tau \in \mathscr{C}ard$, lo cual implica que $\Sigma(a)$ es estable. $\dagger$

2.27. TEOREMA. Si $X_\alpha \in \mathcal{S}il$ para toda $\alpha \in \Lambda$ y $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, entonces X es estable.

Demostración. Por la Proposición 2.25 será suficiente probar que si $\tau \in \mathscr{C}ard$ y $L \subseteq \Lambda$ con $|L| \leq \tau$ entonces $\prod_{\alpha\in L} X_\alpha$ es τ-estable.

Como para todo $\alpha \in \Lambda$, $X_\alpha \in \mathcal{S}il$ entonces, por el Teorema 2.17, existe un p-espacio Lindelöf Z_α, un espacio segundo numerable Y_α, una función perfecta y sobre $f_\alpha : Z_\alpha \to Y_\alpha$ y una función continua y sobre $g_\alpha : Z_\alpha \to X_\alpha$. Sea $h : \prod_{\alpha\in L} X_\alpha \to S$ una función continua y sobre tal que $iw(S) \leq \tau$. Probaremos que $nw(S) \leq \tau$. Si definimos las funciones $f = \prod_{\alpha\in L} f_\alpha : \prod_{\alpha\in L} Z_\alpha \to \prod_{\alpha\in L} Y_\alpha$, $G = \prod_{\alpha\in L} g_\alpha : \prod_{\alpha\in L} Z_\alpha \to \prod_{\alpha\in L} X_\alpha$ y $g = G \circ h$ entonces f es perfecta (Teorema 0.26) y g es continua. Como $iw(S) \leq \tau$ consideremos una función biyectiva y continua $\phi : S \to M$ con $w(M) \leq \tau$. Entonces f, g y ϕ satisfacen las hipótesis del Lema 2.21 y por lo tanto existe un subespacio cerrado F de $(\prod_{\alpha\in L} Y_\alpha) \times M$ y una función continua y sobre $\ell : F \to S$. Pero $(\prod_{\alpha\in L} Y_\alpha) \times M) \leq \tau$ pues $w(Y_\alpha) = \aleph_0$, $|L| \leq \tau$ y $w(M) \leq \tau$. Por consiguiente $w(F) \leq \tau$, y en consecuencia $nw(F) \leq \tau$. Como las funciones continuas no incrementan el peso red se tiene que $nw(S) \leq \tau$. Por lo tanto $\prod_{\alpha\in L} X_\alpha$ es τ-estable. Por consiguiente $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es estable. $\dagger$

Uno de los conceptos que está muy relacionado con el concepto de estabilidad es el concepto de monoliticidad ([Ar h2]) y es precisamente una de las propiedades más fuertes que relaciona estos dos conceptos, el de la C_p-dualidad, la que nos permitirá establecer un corolario importante de este Teorema.

2.28. DEFINICION. Sean X un espacio topológico y $\tau \in Card$.

(1) X es τ-monolítico si $nw(\bar{A}) \leq \tau$ para todo $A \subseteq X$ con $|A| \leq \tau$

(2) X es monolítico si X es τ-monolítico para todo $\tau \in Card$.

Observemos que X es $\aleph_0$-monolítico si y sólo si la cerradura de cualquier conjunto numerable en X es un espacio con una red numerable y que X es monolítico si y sólo si para todo $Y \subseteq X$, $d(Y) = nw(Y)$. Para probar esta última afirmación primero supongamos que existe $Y \subseteq X$ con $d(Y) < nw(Y)$ y sea $A \subseteq Y \subseteq X$ tal que $|A| \leq d(Y)$ y $Y \subseteq \bar{A}$. Entonces como X es $d(Y)$-monolítico se tiene que $nw(\bar{A}) \leq d(Y) < nw(Y) \leq nw(\bar{A})$ lo cual es una contradicción. Para probar la suficiencia de nuestra afirmación basta considerar $\tau \in Card$ y $A \subseteq X$ con $|A| \leq \tau$. Entonces $nw(\bar{A}) = d(\bar{A}) \leq |A| \leq \tau$ lo cual implica que X es τ-monolítico y por lo tanto X es monolítico.

Dado que el peso red es un invariante cardinal hereditario obtenemos también que la monoliticidad es una propiedad hereditaria. Otro resultado básico acerca de este concepto y que usaremos más adelante es el siguiente teorema.

2.29. TEOREMA. Si X es un compacto monolítico y $t(X) = \aleph_0$ entonces X es Fréchet-Urysohn.(1)

Demostración. Sean $x \in X$ y $A \subseteq X$ tal que $x \in \bar{A}$. Entonces existe $B \subseteq A$ numerable tal que $x \in \bar{B}$. Como X es monolítico entonces $\bar{B}$ tiene una red numerable. Pero $\bar{B}$ es compacto así que $w(\bar{B}) = nw(\bar{B})$ y por lo tanto $\bar{B}$ es segundo numerable lo cual implica que existe una sucesión de puntos en $B \subseteq A$ que converge a x. T.

(1) Un espacio topológico X es Fréchet-Urysohn si para todo $A \subseteq X$ y todo $x \in \bar{A}$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \omega}$ de puntos en A que converge a x.

Finalmente enunciaremos los teoremas, sin demostración, que muestran la propiedad de C_p-dualidad entre los conceptos de monoliticidad y estabilidad.

2.30. TEOREMA ([Ark 1], Teorema 22). $C_p(X)$ es monolítico si y sólo si X es estable.

2.31. TEOREMA ([Ark 1], Teorema 22). $C_p(X)$ es estable si y sólo si X es monolítico.

2.32. COROLARIO (Al Teorema 2.27). Si $X_\alpha \in Sil$ para todo $\alpha \in \Lambda$ y $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$, entonces $C_p(X)$ es monolítico.

Demostración. Se sigue de los Teoremas 2.27 y 2.30. †

CAPITULO 4

La clase Sil y espacios de funciones C_p

1. Introducción.

Una de las propiedades topológicas que ha originado mucha atención en lo que respecta al estudio de los espacios C_p es la propiedad de Lindelöf : ¿Cuándo $C_p(X)$ es Lindelöf ? . Como ya comentamos en el Capítulo 1 aún no se conocen condiciones necesarias y suficientes puramente topológicas sobre X que impliquen esta propiedad sobre $C_p(X)$. Allí mismo se dió una condición suficiente : que X tenga una red numerable (Teorema 1.2.3). En el mismo Capítulo 1 se vieron algunas condiciones necesarias para que $C_p(X)$ fuera Lindelöf (Teoremas 1.3.6 , 1.3.9, 1.3.10, 1.3.11 y 1.3.14) considerando a X en alguna clase especial de espacios topológicos (normal, metrizable o σ-espacio normal). Ya en el Capítulo 3 se vió que la clase Sil se comporta bién respecto a varias propiedades topológicas, en especial la propiedad de Lindelöf se preserva bajo productos numerables. En el presente Capítulo veremos que el suponer que $X \in$ Sil nos proporciona herramientas para obtener alguna información sobre la propiedad de Lindelöf en $C_p(X)$ (Teorema 2.1) y también condiciones suficientes para que $C_p(X)$ sea Lindelöf (Teorema 2.5).

También se probó que el concepto de Σ-espacio Lindelöf es una generalización del concepto de σ-compacidad. Entonces, dado que una de las características de los espacios C_p es que estos espacios casi nunca son σ-compactos (Teorema 1.3.2) es natural preguntarse ¿Cuándo $C_p(X) \in Sil$?. El Teorema 3.19 da una respuesta a esta pregunta cuando X es compacto.

2. Teorema de Baturov.

Grothendieck demostró en 1952 [G] que la cerradura en $C_p(X)$ de un subespacio numerablemente compacto Y es compacto cuando X es numerablemente compacto. También sabemos que si X es numerablemente compacto entonces X es un Σ-espacio (aunque no necesariamente de la clase Sil) así que el siguiente resultado notable debido a Baturov [B] está en estrecha relación con lo demostrado por Grothendieck pues si $A \subseteq C_p(X)$ es numerablemente compacto entonces $e(A) = \aleph_0$ y así, bajo las condiciones del Teorema de Baturov, A es compacto. En este teorema se puede apreciar la fuerza de la clase Sil.

2.1. TEOREMA (Baturov). Sea $X \in Sil$. Entonces para todo $Y \subseteq C_p(X)$ se satisface que $e(Y) = \ell(Y)$. En particular $e(C_p(X)) = \ell(C_p(X))$.

Demostración. Como la extensión de un espacio topológico siempre es menor o igual que el grado de Lindelöf obtenemos que si $Y \subseteq C_p(X)$ entonces $e(Y) \leq \ell(Y)$. Probaremos que $\ell(Y) \leq e(Y)$ para lo cual será suficiente demostrar que si $\ell(Y) > \tau$ entonces $e(Y) > \tau$. Por el Teorema 3.2.12 (4) y dado que la extensión y el número de Lindelöf no crecen bajo funciones continuas podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que X es un espacio emplumado Lindelöf, es decir, que X admite una función perfecta sobre un espacio de peso numerable.

Supongamos entonces que $\ell(Y) > \tau$. Esto implica que existe $\mathcal{U}$, cubierta abierta de Y que no admite subcubiertas de cardinalidad menor o igual que τ. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los elementos de $\mathcal{U}$ son básicos canónicos, es decir, que tienen la forma

$$W(x_1,\dots,x_k;O_1,\dots,O_k) = \{f\in C_p(X) : f(x_i)\in O_i \text{ para todo } i=\overline{1,k}\}$$

donde $x_i \in X$ para todo $i=\overline{1,k}$ y también para todo $i=\overline{1,k}$, O_i es un elemento de la base numerable estándar de $\mathbb{R}$. Por conveniencia, de aquí en adelante denotaremos a $W(x_1,\dots,x_k;O_1,\dots,O_k)$ como $W_k(x;O)$ donde $x=(x_1,\dots,x_k)$ es un elemento de X^k y $O=O_1\times\cdots\times O_k$ es un elemento de la base canónica numerable de $\mathbb{R}^k$. Entonces la cubierta abierta $\mathcal{U}$ la podemos representar como $\mathcal{U}=\bigcup\{\mathcal{U}_n : n\in\mathbb{N}\}$ donde todos los $W_k(x;O)\in\mathcal{U}_n$ corresponden a un solo $k=k_n$. Denotaremos al conjunto $O=O_1\times\cdots\times O_{k_n}\subseteq\mathbb{R}^{k_n}$ como O_n. Definamos para $n\in\mathbb{N}$, $A_n=\{x\in X^{k_n} : W_{k_n}(x;O)\in\mathcal{U}_n\}$ y también para cada $f\in C_p(X)$ y $k\in\mathbb{N}$ sea $f^k : X^k\to\mathbb{R}^k$ dada por $f^k((x_1,\dots,x_k))=(f(x_1),\dots,f(x_k))$. Usando esta notación, el hecho de que $\mathcal{U}$ cubre a Y se puede escribir como

(1) Para cada $f\in Y$ existe $n\in\mathbb{N}$ y $x\in A_n$ tal que $f^{k_n}(x)\in O_n$;

y el hecho de que ninguna subfamilia de $\mathcal{U}$ de cardinalidad menor o igual a τ cubre a Y se puede escribir como

(2) Si $B_n\subseteq A_n$ y $|B_n|\le\tau$ con $n\in\mathbb{N}$ entonces existe $g\in Y$ tal que $g^{k_n}(B_n)\cap O_n=\emptyset$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Construiremos por inducción transfinita un conjunto $F=\{f_\alpha : \alpha<\tau^+\}\subseteq Y$ que es cerrado y discreto en Y. Primero elijamos $f_0\in Y$ arbitrario y después consideremos $\alpha\in\tau^+$ y supongamos que para todo $\beta<\alpha$ ya hemos determinado todas las $f_\beta\in Y$. Fijemos $n\in\mathbb{N}$. Como $X\in \mathcal{S}il$ entonces $X^{k_n}\in\mathcal{S}il$ y por la observación hecha al inicio de la demostración será suficiente considerar que X^{k_n} es un espacio emplumado Lindelöf y así podemos considerar una función perfecta y sobre $\phi_{\kappa_n} : \mathfrak{X}^{\kappa_n} \to M_n$ siendo M_n algún espacio metrizable separable. Ahora, para cada colección finita $\beta_1, \dots, \beta_r < \alpha$ consideremos la función $f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)} = f^{\kappa_n}_{\beta_1} \Delta \cdots \Delta f^{\kappa_n}_{\beta_r} \Delta \phi_{\kappa_n} : \mathfrak{X}^{\kappa_n} \to \mathbb{R}^{\kappa_n \cdot r} \times M_n$. Entonces $\mathbb{R}^{\kappa_n \cdot r} \times M_n$ es separable y como ϕ_{κ_n} es perfecta tenemos que $f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}$ es perfecta (Teorema 0.27) y dado que para cualquier metrizable Z, $d(Z) = hd(Z)$ (Teorema 0.65) entonces $\mathbb{R}^{\kappa_n \cdot r} \times M_n$ es hereditariamente separable y por lo tanto podemos elegir en A_n un subconjunto numerable $S^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}$ cuya imágen $f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(S^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)})$ sea denso en $f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(A_n)$. Definamos $B^\alpha_n = \bigcup \{ S^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)} : \beta_1, \dots, \beta_r < \alpha \}$, entonces $|B^\alpha_n| \leq \tau$. Por lo tanto, de (2), existe $f_\alpha \in Y$ tal que $f^{\kappa_n}_\alpha(B^\alpha_n) \cap O_n = \phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, hemos terminado la construcción de $F = \{ f_\alpha : \alpha < \tau^+ \}$.

Enseguida mostraremos que F es discreto y cerrado en Y. Supongamos que no es el caso, entonces existe $g \in Y$ tal que $g \in Cl_Y(F) = (Cl_{C_p(\mathfrak{X})} F) \cap Y$, es decir, toda vecindad de g contiene una infinidad de funciones de F. Por (1) sabemos que existen $n \in \mathbb{N}$ y $\tilde{x} \in \mathfrak{X}^{\kappa_n}$ tales que $g \in W_{\kappa_n}(\tilde{x}; O_n)$. Ahora, como $\ell(\mathfrak{X}^n) = \aleph_0$ (pues $\mathfrak{X} \in Sil$) entonces por el Teorema 1.4.2 $t(C_p(\mathfrak{X})) = \aleph_0$ y por lo tanto $t(Y) = \aleph_0 \leq \tau$. De aquí concluimos que existe $\alpha' \leq \tau < \tau^+$ tal que $g \in Cl_Y\{ f_\alpha : \alpha < \alpha' \}$. Sea $\alpha_0 = \min\{ \alpha' : g \in cl\{ f_\alpha : \alpha < \alpha' \} \}$ y defínase $P = \{ f_\alpha \in W_{\kappa_n}(\tilde{x}; O_n) : \alpha < \alpha_0 \}$ entonces $(g^{\kappa_n})^{-1}(O_n) \cap (\bigcap \{ (f^{\kappa_n})^{-1}(f^{\kappa_n}(\tilde{x})) : f \in P \})$ es no vacío pues contiene a $\tilde{x}$. Definamos $T = \bigcap \{ (f^{\kappa_n})^{-1}(f^{\kappa_n}(\tilde{x})) : f \in P \} \setminus (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n)$.

Caso 1. Supongamos que $T = \phi$ y llamemos $\phi_{\kappa_n}(\tilde{x}) = \tilde{m}$. Como $\phi_{\kappa_n} : \mathfrak{X}^{\kappa_n} \to M_n$ es perfecta entonces $\phi^{-1}_{\kappa_n}(\tilde{m})$ es compacto y $(g^{\kappa_n})^{-1}(O_n)$ es un abierto. Por lo tanto, la familia $\{ F_f : f \in P \} \cup \{ \phi^{-1}_{\kappa_n}(\tilde{m}) \}$, donde para cada $f \in P$, $F_f = (f^{\kappa_n})^{-1}(f^{\kappa_n}(\tilde{x}))$, satisface las hipótesis del Teorema 0.17 y así, existen $\{ f_{\beta_1}, \dots, f_{\beta_r} \} \subseteq P$ tales que

$$\Phi = \bigcap_{i=1}^{r} (f^{\kappa_n}_{\beta_i})^{-1}((f^{\kappa_n}_{\beta_i})(\tilde{x})) \cap \phi^{-1}_{\kappa_n}(\tilde{m}) \subseteq (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n).$$

Tenemos entonces que $\Phi = (f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)})^{-1}((f^{\kappa_n}_{\beta_1}(\tilde{x}), \dots, f^{\kappa_n}_{\beta_r}(\tilde{x}), \tilde{m}))$ siendo $f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}$ perfecta y $(g^{\kappa_n})^{-1}(O_n)$ un abierto en $\mathfrak{X}^{\kappa_n}$ que contiene a Φ, es decir, $\mathfrak{X}^{\kappa_n} \setminus (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n)$ es un cerrado en $\mathfrak{X}^{\kappa_n}$ y por lo tanto $f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(\mathfrak{X}^{\kappa_n} \setminus (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n))$ es un cerrado en $\mathfrak{X}^{\kappa_n \cdot r} \times M_n$, lo cual implica que $(\mathbb{R}^{\kappa_n \cdot r} \times M_n) \setminus f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(\mathfrak{X}^{\kappa_n} \setminus (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n)) = G_n$ es un abierto en $\mathbb{R}^{\kappa_n \cdot r} \times M_n$ y tal que $G_n \cap f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(A_n) \neq \phi$ pues como $\tilde{x} \in A_n \cap \Phi$ entonces $f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(\tilde{x}) \in f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(A_n) \cap G_n$. En efecto, si $(f^{\kappa_n}_{\beta_1}(\tilde{x}), \dots, f^{\kappa_n}_{\beta_r}(\tilde{x}), \tilde{m}) = f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(\tilde{x}) \in f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(\mathfrak{X}^{\kappa_n} \setminus (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n))$ entonces existe $x'' \in \mathfrak{X}^{\kappa_n} \setminus (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n)$ tal que $(f^{\kappa_n}_{\beta_1}(\tilde{x}), \dots, f^{\kappa_n}_{\beta_r}(\tilde{x}), m) = f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(x'')$ lo cual implica que $x'' \in \Phi \subseteq (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n)$ que es una contradicción. Ahora, como $f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(S^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)})$ es denso en $f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(A_n)$ entonces existe $z' \in f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(S^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}) \cap G_n$, es decir, existe $x' \in S^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}$ con $f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(x') = z'$ lo cual implica que $x' \in (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n)$ pues $z' \in G_n$. En efecto, si $x' \notin (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n)$ entonces $x' \in \mathfrak{X}^{\kappa_n} \setminus (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n)$ y esto implica que $f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(x') = z' \in f^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)}(\mathfrak{X}^{\kappa_n} \setminus (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n))$ lo cual contradice el hecho de que $z' \in G_n$. Por lo tanto existe $x' \in S^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)} \cap (g^{\kappa_n})^{-1}(O_n)$. Esto implica que $f_\alpha \notin W_{\kappa_n}(x'; O_n)$ para $\alpha > \max\{\beta_i : i = \overline{1,r}\}$ pues $f_\alpha \in \mathfrak{Y}$ es tal que $f_\alpha^{\kappa_n}(B^\alpha_n) \cap O_n = \phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo $B^\alpha_n = \bigcup \{S^n_{(\beta_1,\dots,\beta_r)} : \beta_1, \dots, \beta_r < \alpha\}$, mientras que $g \in W_{\kappa_n}(x'; O_n)$. Definamos $\alpha^* = \max\{\beta_i : i = \overline{1,r}\}$. Entonces $\alpha^* < \alpha_0$ y como $g \in cl_{\mathfrak{Y}}\{f_\alpha : \alpha < \alpha_0\}$ entonces $g \in cl\{f_\alpha : \alpha < \alpha^*\}$ contradiciendo la elección de α_0.

Caso 2. $T \neq \phi$. Sea $x'' \in T$. Entonces $g^{\kappa_n}(x'') \neq g^{\kappa_n}(\tilde{x})$ ya que $g^{\kappa_n}(\tilde{x}) \in O_n$. Igualmente $f^{\kappa_n}(x'') = f^{\kappa_n}(\tilde{x})$ para cada $f \in P$, lo cual implica que $g \notin cl\, P$. Efectivamente, pues $g^{\kappa_n}(x'') \neq g^{\kappa_n}(\tilde{x})$ implica que $(g(x_1''), \dots, g(x_{\kappa_n}'')) \neq (g(x_1), \dots, g(x_{\kappa_n}))$ siendo $x'' = (x_1'', \dots, x_{\kappa_n}'')$ y $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{\kappa_n})$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $g(x_1'') \neq g(x_1)$. Sean A_1, A_2 abiertos ajenos en $\mathbb{R}$ tal que $g(x_1'') \in A_1$ y $g(x_1) \in A_2$. Entonces $W(x_1, x_1''; A_1, A_2) = W$ es un abierto en $C_p(\mathfrak{X})$ tal que $g \in W$ y si $f \in P$ entonces $f(x_1) = f(x_1'')$ y como $A_1 \cap A_2 = \phi$ entonces $f \notin W$. Por lo tanto $g \notin cl\, P$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto F es cerrado y discreto en $\mathfrak{Y}$ y así $e(\mathfrak{Y}) > \tau$. Por lo tanto $e(\mathfrak{Y}) \geq l(\mathfrak{Y})$ con lo cual terminamos la demostración del Teorema. $\dagger$

2.2. COROLARIO. Sea $X \in Sil$. Si $Y \subseteq C_p(X)$ es numerablemente compacto, entonces Y es compacto, monolítico y Fréchet-Urysohn.

Demostración. Como Y es numerablemente compacto entonces todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación y por lo tanto $e(Y) = \aleph_0$. Entonces por el Teorema 2.1 Y es un espacio Lindelöf y por consiguiente Y es compacto. Ahora bién, dado que $X \in Sil$, $\ell(X^n) = \aleph_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia, por el Teorema 1.4.2 $t(C_p(X)) = \aleph_0$ y como X es estable (Teorema 3.2.22) entonces $C_p(X)$ es monolítico (Teorema 3.2.28). Por lo tanto Y es un compacto monolítico con $t(Y) = \aleph_0$ lo cual implica que Y es Fréchet-Urysohn (Teorema 3.2.21). $\dagger$

Usando el resultado de Reznichenko ([Arh], Teorema I.5.8) que enuncia que para un subespacio de I^X denso y convexo, si éste es normal entonces es colectivamente normal y los hechos de que $C_p(X)$ es homeomorfo a $C_p(X,(0,1))$ y $C_p(X,(0,1))$ es convexo y denso en I^X, obtenemos que, siempre que $C_p(X)$ es normal, es colectivamente normal.

2.3. LEMA. Si X es colectivamente normal y $c(X) = \aleph_0$ entonces $e(X) = \aleph_0$.

Demostración. Supongamos que X es colectivamente normal y que $c(X) = \aleph_0$. Si $M = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ es discreto en X entonces dado que X es colectivamente normal existe $\{O_{x_\alpha} : \alpha \in A\}$ una familia discreta de vecindades de esos puntos (cit.pos. [En], Teorema 1.5.17). Como $c(X) = \aleph_0$ entonces $|A| \leq \aleph_0$ lo cual implica que M es numerable y así $e(X) = \aleph_0$. $\dagger$

De la observación anterior, el Lema 2.3 y Teorema 1.3.21 obtenemos el siguiente Teorema

2.4. TEOREMA. Si $C_p(X)$ es normal entonces $e(C_p(X)) = \aleph_0$.

y como consecuencia de éste y el Teorema de Baturov:

2.5. TEOREMA. Si $X \in Sil$ y $C_p(X)$ es normal entonces $C_p(X)$ es Lindelöf.

Demostración. Por el Teorema 2.1, $e(C_p(X)) = \ell(C_p(X))$ y como $C_p(X)$ es normal entonces $e(C_p(X)) = \aleph_0$. $\dagger$

El resultado que enuncia que si $A \subseteq C_p(X)$ es numerable y $C_p(X) \setminus A$ es normal entonces $C_p(X) \setminus A$ es colectivamente normal, debido a Arkhangelskiĭ ([Ark], Corolario 1.5.15) nos permite probar el siguiente teorema.

2.6.- TEOREMA: Sea $X \in Sil$, $g \in C_p(X)$ y $C_p(X) \setminus \{g\}$ es normal, entonces X es separable.

Demostración: Como $C_p(X) \setminus \{g\}$ es normal y $\{g\}$ es finito, entonces por la observación anterior, $Y = C_p(X) \setminus \{g\}$ es colectivamente normal y por lo tanto, como la celularidad es una función cardinal monótona para conjuntos abiertos, $c(Y) = \aleph_0$. Por consiguiente, por el Lema 2.3, $e(Y) = \aleph_0$ lo cual implica que $l(Y) = \aleph_0$ (Teorema 2.1). Por lo tanto $\{g\}$ es de tipo G_δ en $C_p(X)$ y en consecuencia, dado que $C_p(X)$ es un grupo topológico, $\Psi(C_p(X)) = \aleph_0$. Pero $d(X) = i\omega(C_p(X)) = \Psi(C_p(X))$ (Teorema 1.2.4), así que X es separable. ┼

2.7.- COROLARIO: Si $X \in Sil$ es monolítico y $C_p(X) \setminus \{g\}$ es normal para alguna $g \in C_p(X)$, entonces X tiene una red numerable.

Demostración: Del Teorema 2.6, X es separable y como X es monolítico, de la discusión que sigue a la Definición 3.2.26, obtenemos que X tiene una red numerable. ┼

En particular, si X es un compacto monolítico pero no metrizable entonces $C_p(X) \setminus \{g\}$ no es normal para cualquier $g \in C_p(X)$. En efecto, si existiera $g \in C_p(X)$ tal que $C_p(X) \setminus \{g\}$ es normal entonces X tiene una red numerable, pero X es compacto, así que X es segundo numerable, de donde X sería metrizable.

3.- Espacios de Funciones que son Σ-espacios Lindelöf

En esta sección daremos una condición necesaria y suficiente para que $C_p(X)$ sea un elemento de la clase Sil siempre que X sea compacto. Uno de los teoremas que usaremos para este fin será el

Teorema de Stone-Weierstrass que enunciamos a continuación:

3.1.- TEOREMA (cit. pos. [En] Teorema 3.2.21).- Sea P es un anillo de funciones continuas real-valuadas, definidas sobre un espacio compacto X, que contiene a todas las funciones constantes, separa puntos y es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^X$ con la topología de la convergencia uniforme. Entonces P coincide con el anillo de las funciones continuas con la topología de la convergencia uniforme.

También necesitaremos de algunos conceptos y resultados que nos permitirán establecer el resultado anunciado.

3.2.- DEFINICION:- (1) Para un espacio topológico X se define

$\mathcal{E}(X) = \{Y \in \mathcal{T}$: existen un espacio topológico compacto K y una función continua y sobre $f : X \times K \to Y\}$

(2) Una clase de espacios topológicos $\mathcal{P}$ es k-dirigida si

(a) $X, Y \in \mathcal{P}$ implica que $X \times Y \in \mathcal{P}$

(b) Si $X \in \mathcal{P}$ entonces $\mathcal{E}(X) \subseteq \mathcal{P}$.

3.3.- OBSERVACIONES: (1) Si K es compacto y $X \in \mathcal{T}$ entonces $K \in \mathcal{E}(X)$

(2) $\mathcal{P}$ es una clase de espacios topológicos k-dirigida si y sólo si $\mathcal{P}$ contiene a la clase de espacios topologicos compactos, al producto de dos espacios arbitrarios en $\mathcal{P}$ y a las imágenes continuas de cualquier miembro de $\mathcal{P}$.

Demostración.- (1) Se sigue del hecho que la proyección $P_2 : X \times K \to K$ es continua.

(2) La necesidad se sigue de (1) y la suficiencia es inmediata de la definición. $\dagger$

Como ejemplos de clases k-dirigidas tenemos a la clase de los espacios compactos, a la clase de los espacios σ-compactos y a la clase $\mathcal{Sil}$.

3.4.- TEOREMA:- Sean $\mathcal{P}$ una clase k-dirigida de espacios topológicos, $Y \in \mathcal{T}$,

$y_0 \in \tilde{Y}$ y $Y = \tilde{Y} - \{y_0\}$ un elemento de $\mathcal{P}$. Entonces $\tilde{Y} \in \mathcal{P}$.

Demostración: Definamos $f: Y \times \{0,1\} \to \tilde{Y}$ dada por $f(y,0) = y$ y $f(y,1) = y_0$. Entonces f es una función continua y sobre y dado que $Y \times \{0,1\} \in \mathcal{P}$ entonces por 3.3.(2) $\tilde{Y} \in \mathcal{P}$. †

Ahora, para $X \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$, $I_n = [-n,n] \subseteq \mathbb{R}$ y $A, B \subseteq C_p(X)$ definamos $\Psi(A,B) = \{fg : f \in A, g \in B\}$ y $\Phi_n(A) = \{af + bg : a,b \in I_n$ $f,g \in A\}$. Entonces, dado que la suma, el producto y el producto por escalares son funciones continuas en $\mathbb{R}^X$ (ver [TCH], pág 26-29) obtenemos que $\Psi(A,B)$ y $\Phi_n(A)$, como subespacios de $C_p(X)$ son imágenes continuas de $A \times B$ y $A^2 \times I_n^2$, respectivamente.

También, si $Y \subseteq C_p(X)$ definamos $S_1(Y) = \{Y\}$; $S_2(Y) = S_1(Y) \cup \{\Psi(A,B) : A,B \in S_1(Y)\} \cup \{\Phi_n(A) : A \in S_1(Y), n \in \mathbb{N}\}$; ...; Inductivamente para $k \in \mathbb{N}$ $S_{k+1}(Y) = S_k(Y) \cup \{\Psi(A,B) : A,B \in S_k(Y)\} \cup \{\Phi_n(A) : A \in S_k(Y), n \in \mathbb{N}\}$. Por inducción y usando la observación 3.3.(2) obtenemos que

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n(Y)$ es numerable

(b) Si $\mathcal{P}$ es una clase k-dirigida de espacios topológicos y $Y \in \mathcal{P}$ entonces $S_n(Y) \subseteq \mathcal{P}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

De aquí, obtenemos el siguiente teorema con respecto a la familia $S(Y) = \bigcup \{S_n(Y) : n \in \mathbb{N}\}$.

3.5.- TEOREMA. Si $\mathcal{P}$ es una clase k-dirigida de espacios topológicos, $Y \subseteq C_p(X)$ y $Y \in \mathcal{P}$, entonces $S(Y)$ es numerable y $S(Y) \subseteq \mathcal{P}$.

Además, usando el Teorema 3.1 obtenemos el siguiente resultado.

3.6.- TEOREMA. Sean X un espacio topológico compacto, $Y \in C_p(X)$ que separa puntos de X tal que $\hat{1} \in Y$. Entonces, el conjunto $M = \bigcup S(Y)$ es denso en $C(X)$ con la topología de la convergencia uniforme.

Demostración. La definición de $S(Y)$ implica que si $f,g \in M$ y $a,b \in \mathbb{R}$ entonces $fg \in M$ y $af + bg \in M$. Además, dado que $\hat{1} \in Y \subset M$

se tiene que M contiene a todas las funciones constantes y como $\mathfrak{Y}$ separa puntos de $\mathfrak{X}$, entonces M separa puntos de $\mathfrak{X}$. Por lo tanto si $P = Cl_{\mathbb{R}^{\mathfrak{X}}}(M)$ teniendo $\mathbb{R}^{\mathfrak{X}}$ la topología de la convergencia uniforme se tiene que P coincide con el anillo de funciones continuas definidas sobre $\mathfrak{X}$ con la topología de la convergencia uniforme (Teorema 3.1). †

En lo que sigue, para $\tau \in Card$, D_τ denotará el espacio discreto de cardinalidad τ.

3.7. DEFINICION. Sean $\mathfrak{X} \in \mathcal{T}$ y $\tau \in Card$.

(1) Se define el conjunto

$$O_\tau(\mathfrak{X}) = (\mathfrak{X} \times D_\tau)^\tau = \mathfrak{X}^\tau \times D_\tau^\tau .$$

(2) Diremos que $\mathfrak{X}$ es τ-invariante si $\mathfrak{X}$ es homeomorfo a $O_\tau(\mathfrak{X})$.

3.8. TEOREMA. Para todo $\mathfrak{X} \in \mathcal{T}$ y $\tau \in Card$, $O_\tau(\mathfrak{X})$ es τ-invariante.

Demostración. $(O_\tau(\mathfrak{X}) \times D_\tau)^\tau \cong (O_\tau(\mathfrak{X}))^\tau \times D_\tau^\tau \cong (\mathfrak{X}^\tau \times D_\tau^\tau) \times D_\tau^\tau \cong \mathfrak{X}^\tau \times D_\tau^\tau \cong O_\tau(\mathfrak{X})$. †

3.9. TEOREMA. Si $\mathfrak{X}$ es τ-invariante, entonces $\mathfrak{X}^\tau$ y $\mathfrak{X} \times D_\tau$ son homeomorfos a $\mathfrak{X}$.

Demostración. $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{X}^\tau \times D_\tau^\tau$ lo que implica que $\mathfrak{X}^\tau \cong (\mathfrak{X}^\tau \times D_\tau^\tau)^\tau \cong \mathfrak{X}^\tau \times D_\tau^\tau \cong \mathfrak{X}$ y también $\mathfrak{X} \times D_\tau \cong (\mathfrak{X}^\tau \times D_\tau^\tau) \times D_\tau \cong \mathfrak{X}^\tau \times D_\tau^\tau \cong \mathfrak{X}$. †

3.10. TEOREMA. Supongamos que $\mathfrak{X} \in \mathcal{T}$ es τ-invariante. Entonces

(a) Si $|M| \leq \tau$ y $\mathfrak{X}_\alpha \in \mathcal{E}(\mathfrak{X})$ para todo $\alpha \in M$, entonces el producto topológico $\prod_{\alpha \in M} \mathfrak{X}_\alpha \in \mathcal{E}(\mathfrak{X})$.

(b) Si $\mathcal{Y}$ es una familia de subespacios de $\mathfrak{Y} \in \mathcal{T}$ y $|\mathcal{Y}| \leq \tau$, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{X})$, entonces $\bigcup \mathcal{Y} \in \mathcal{E}(\mathfrak{X})$.

Demostración. (a) Recordemos que $\mathcal{E}(\mathfrak{X}) = \{ \mathfrak{Y} \in \mathcal{T} :$ existen K espacio topológico compacto y $f : \mathfrak{X} \times K \to \mathfrak{Y}$ continua y sobre$\}$. Entonces para cada $\alpha \in M$ existen K_α espacio compacto y $f_\alpha : \mathfrak{X} \times K_\alpha \to \mathfrak{X}_\alpha$

función continua y sobre. Por lo tanto $\prod f_\alpha : \prod_{\alpha\in M}(\mathbb{X}\times K_\alpha) \longrightarrow \prod_{\alpha\in M}\mathbb{X}_\alpha$ es una función continua y sobre. Pero $\prod_{\alpha\in M}(\mathbb{X}\times K_\alpha) \cong \mathbb{X}^{|M|}\times\prod_{\alpha\in M}K_\alpha \cong (\mathbb{X}^{\tau})^{|M|}\times\prod_{\alpha\in M}K_\alpha \cong \mathbb{X}^{\tau}\times\prod_{\alpha\in M}K_\alpha \cong \mathbb{X}\times\prod_{\alpha\in M}K_\alpha$ y $\prod_{\alpha\in M}K_\alpha$ es compacto. Por consiguiente $\prod_{\alpha\in M}\mathbb{X}_\alpha$ es imágen continua de $\mathbb{X}\times\prod_{\alpha\in M}K_\alpha$, lo cual implica que $\prod_{\alpha\in M}\mathbb{X}_\alpha \in \mathcal{E}(\mathbb{X})$.

(b) Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{H} = \{\mathbb{X}_\lambda : \lambda<\tau\}$. Bastará probar que la suma topológica ajena de $\mathcal{H}$ es un elemento de $\mathcal{E}(\mathbb{X})$.

Como $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{E}(\mathbb{X})$ entonces para cada $\lambda<\tau$ existe un espacio topológico compacto K_λ y una función continua y sobre $f_\lambda : \mathbb{X}\times K_\lambda \longrightarrow \mathbb{X}_\lambda$. Si para cada $\lambda<\tau$ $Y_\lambda = \mathbb{X}$ entonces definimos la siguiente función h:

$$\bigoplus_{\lambda<\tau}Y_\lambda\times\prod_{\lambda<\tau}K_\lambda \xrightarrow{h_1} \bigoplus_{\lambda<\tau}Y_\lambda\times\bigoplus_{\lambda<\tau}K_\lambda = \bigoplus_{\lambda<\tau}(\mathbb{X}\times K_\lambda) \longrightarrow \bigoplus_{\lambda<\tau}\mathbb{X}_\lambda$$
$$(x,\xi) \longmapsto (x,\xi(\lambda)) \longmapsto f_\lambda(x,\xi(\lambda))$$
$$\text{si } x\in Y_\lambda$$

Como f_λ es sobre para todo $\lambda<\tau$ entonces h es sobre. Si probamos que h es continua entonces $\bigoplus\mathcal{H}\in\mathcal{E}(\mathbb{X})$. Probaremos primero que h_1 es continua. Sean $(x,\xi)\in\bigoplus_{\lambda<\tau}Y_\lambda\times\prod_{\lambda<\tau}K_\lambda$ y W_1, W_2 abiertos en $\bigoplus_{\lambda<\tau}Y_\lambda$ y $\bigoplus_{\lambda<\tau}K_\lambda$, respectivamente, tales que $x\in Y_{\lambda_0}$ y $h_1(x,\xi) = (x,\xi(\lambda_0))\in W = W_1\times W_2$. Entonces $V = (W_1\cap Y_{\lambda_0})\times P_{\lambda_0}^{-1}(W_2\cap K_{\lambda_0})$ es un conjunto abierto en $\bigoplus_{\lambda<\tau}Y_\lambda\times\prod_{\lambda<\tau}K_\lambda$ que contiene a (x,ξ) y $h_1(V)\subseteq W$. Por lo tanto h_1 es una función continua.

Ahora, consideremos $(x,\xi)\in\bigoplus_{\lambda<\tau}Y_\lambda\times\prod_{\lambda<\tau}K_\lambda$ y V un conjunto abierto en $\bigoplus_{\lambda<\tau}\mathbb{X}_\lambda$ tales que $h((x,\xi))\in V$. Supongamos además que $x\in Y_\lambda$. Entonces $V\cap\mathbb{X}_\lambda$ es un abierto no vacío en $\mathbb{X}_\lambda$ y que contiene a $f_\lambda((x,\xi(\lambda)))$ y dado que f_λ es continua entonces existe un conjunto abierto W en $\mathbb{X}\times K_\lambda$ y por lo tanto en $\bigoplus_{\lambda<\tau}(\mathbb{X}\times K_\lambda)$, tal que $f_\lambda(W)\subseteq V\cap\mathbb{X}_\lambda$ y $(x,\xi(\lambda))\in W$. Ahora, como h_1 es continua existe un conjunto abierto $\mathcal{U}$ en $\bigoplus_{\lambda\in\Gamma} Y_\lambda \times \prod_{\lambda\in\Gamma} K_\lambda$ que contiene a (x,ξ) y tal que $h_1(\mathcal{U}) \subseteq W$. Por la definición de h, $h(\mathcal{U}) \subseteq V$, es decir, h es una función continua en (x,ξ). Por lo tanto $\bigoplus \mathcal{H} \in \mathcal{E}(X)$ y esto implica que $\bigcup \mathcal{H} \in \mathcal{E}(X)$ lo cual concluye la demostración del Teorema. $\dagger$

3.11.- DEFINICION. Si $\mathcal{P}$ es una clase de espacios topologicos entonces definimos $(\mathcal{P})_{\sigma\delta} = \{X \in \mathcal{T} : X = \bigcap \{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ con X_i siendo unión numerable de elementos de $\mathcal{P}\}$.

El siguiente teorema nos permitirá obtener la proposición enunciada al inicio de la sección así como otras relacionadas con ella, acerca de la clase Sil.

3.12.- *TEOREMA. Sean X un espacio topológico compacto y $\mathcal{P}$ una clase κ-dirigida de espacios topológicos. Si existe $Y \subseteq C_p(X)$ tal que $Y \in \mathcal{P}$ y Y separa puntos de X, entonces $C_p(X) \in (\mathcal{P})_{\sigma\delta}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.4, $\tilde{Y} = Y \cup \{\hat{1}\} \subseteq C_p(X)$ es un elemento de $\mathcal{P}$. Definamos $\tilde{M} = \bigcup S(\tilde{Y})$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \{g \in \mathbb{R}^X : \text{existe } f \in \tilde{M} \text{ tal que } |g(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \text{ para todo } x \in X\}$. Por el Teorema 3.6, $C_p(X) \subseteq M^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n$. En efecto, para $n \in \mathbb{N}$ y $h \in C_p(X)$ consideremos el siguiente conjunto abierto básico con respecto a la topología de la convergencia uniforme, $U_n(h) = \{\ell \in \mathbb{R}^X : \text{existe } a < \frac{1}{n} \text{ tal que } |h(x) - \ell(x)| < a \text{ para todo } x \in X\}$, que contiene a h. Entonces, dado que $\tilde{M}$ es denso en el anillo de funciones continuas con la topología de la convergencia uniforme, existe $f \in \tilde{M}$ tal que $f \in U_n(h)$, es decir, $|h(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$, lo cual implica que $h \in M_n$. Por otro lado, $M^* \subseteq C_p(X)$ pues si $g \in M^*$, entonces $g \in M_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in \tilde{M}$ tal que $|g(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ para todo $x \in X$, lo que significa que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a g y el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas es una función continua, es decir, $g \in C_p(X)$. Por lo tanto $C_p(X) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Ahora bién, si $I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, para cada $n \in \mathbb{N}$, el subespacio M_n de $\mathbb{R}^X$ (con la topología producto) es imágen continua del espacio $\tilde{M} \times (I_{1/n})^X$ donde $I_{1/n}^X$ es el producto topológico. En efecto, basta considerar $h : \tilde{M} \times I_{1/n}^X \longrightarrow M_n$ dada por $h(f,\xi) = f + \xi$ la cual es una función continua y sobre. Como $\tilde{Y} \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ es $\aleph$-dirigida entonces $S(\tilde{Y}) \subseteq \mathcal{P}$ (Teorema 3.5), así que $F \times I_{1/n}^X \in \mathcal{P}$ y $h(F \times I_{1/n}^X) \in \mathcal{P}$ para todo $F \in S(\tilde{Y})$. Por lo tanto $M_n = h(\tilde{M} \times I_{1/n}^X) = \bigcup\{h(F \times I_{1/n}^X) : F \in S(\tilde{Y})\}$ y $S(\tilde{Y})$ es numerable (Teorema 3.5), es decir, M_n es la unión de una familia numerable de elementos de $\mathcal{P}$. Por lo tanto $C_p(X) = \bigcap\{M_n : n \in \mathbb{N}\} \in (\mathcal{P})_{\sigma\delta}$. †

Recordemos que un espacio topológico es un espacio $K_{\sigma\delta}$ si, en algún espacio ambiente, es la intersección de una familia numerable de espacios σ-compactos. También recordemos que un espacio compacto X es un compacto de Eberlein si existe un espacio compacto F tal que X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(F)$ y que esto es equivalente a que exista un compacto $F \subseteq C_p(X)$ que separa los puntos de X ([Ark], Proposición IV.1.6).

3.13.- TEOREMA. Si X es un compacto de Eberlein, entonces $C_p(X)$ es un espacio de tipo $K_{\sigma\delta}$.

Demostración. Por el comentario hecho anteriormente existe un compacto $F \subseteq C_p(X)$ que separa los puntos de X y como la clase de espacios topológicos compactos es $\aleph$-dirigida, entonces el Teorema 3.12 implica que $C_p(X)$ es un espacio topológico de tipo $K_{\sigma\delta}$. †

Como ya probamos en el Teorema 3.2.17 todo espacio $K_{\sigma\delta}$ es un miembro de la clase $\mathcal{S}il$, así que tenemos el siguiente

3.14.- COROLARIO. Si X es un compacto de Eberlein entonces $C_p(X) \in \mathcal{S}il$.

3.15.- TEOREMA. Sean $X \in \mathcal{T}$ compacto y $Y \subseteq C_p(X)$ que separa puntos de X.

Entonces existe un compacto P y un subespacio cerrado B en $O_{\aleph_0}(Y)\times P$ tal que $C_p(X)$ es imágen continua de B.

Demostración. Por el Teorema 3.8 $O_{\aleph_0}(Y)$ es $\aleph_0$-invariante y entonces, por el Teorema 3.10.(a) obtenemos que $\mathcal{P}=\xi(O_{\aleph_0}(Y))$ es cerrada bajo productos finitos. Además, si $Z\in\mathcal{P}$ y $W\in\xi(Z)$ entonces existen K_1, espacio topológico compacto y $f: Z\times K_1\to W$ función continua y sobre y dado que Z y K_1 son elementos de $\mathcal{P}$, entonces $Z\times K_1\in\mathcal{P}$ y así, existen un espacio topológico K_2 y $g: O_{\aleph_0}(Y)\times K_2\to Z\times K_1$ función continua y sobre; Por lo tanto $f\circ g: O_{\aleph_0}(Y)\times K_2\longrightarrow W$ es una función continua y sobre, lo cual muestra que $W\in\mathcal{P}$. Por lo tanto $\mathcal{P}$ es una clase K-dirigida.

Ahora bién, el Teorema 3.12 implica que $C_p(X)\in\mathcal{P}_{\sigma\delta}$ y por el Teorema 3.10(b), si $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{P}$ y $|\mathcal{H}|\leq\aleph_0$ entonces $\bigcup\mathcal{H}\in\mathcal{P}$. Por lo tanto, existen $Z_i\in\mathcal{P}$ tal que $C_p(X)=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}Z_i$ y por consiguiente $C_p(X)$ es homeomorfo a la diagonal $\Delta=\{x\in\prod_{i\in\mathbb{N}}Z_i : x(i)=x(j)$ para toda $i,j\in\mathbb{N}\}$, que es un subespacio cerrado del producto topológico $\prod_{i\in\mathbb{N}}Z_i=T$. Por el Teorema 3.10(a) $T\in\mathcal{P}$ y, en consecuencia, existen un espacio topológico compacto P y una función continua y sobre $h: O_{\aleph_0}(Y)\times P\longrightarrow T$. Por lo tanto, $C_p(X)$ es imágen continua del conjunto cerrado $h^{-1}(\Delta)$. $\dagger$

3.16.- DEFINICION. Sean $\tau\in\mathcal{C}ard$ y $\mathcal{P}$ una clase de espacios topológicos. Diremos que $\mathcal{P}$ es τ-perfecta si para todo $X\in\mathcal{P}$

1) $O_\tau(X)\in\mathcal{P}$;
2) $\xi(X)\subseteq\mathcal{P}$;
3) $Y\subseteq X$ y Y cerrado en X implica que $Y\in\mathcal{P}$.

Del Teorema 3.15 obtenemos el siguiente teorema

3.17.- TEOREMA. Sean X un espacio topológico compacto y $\mathcal{P}$ una clase $\aleph_0$-perfecta de espacios. Entonces $C_p(X)\in\mathcal{P}$ si y sólo si existe $Y\subseteq C_p(X)$ tal que $Y\in\mathcal{P}$ y Y separa los puntos de X.

Demostración. Necesidad. Basta considerar $Y = C_p(X)$.
Suficiencia. Supongamos que existe $Y \subseteq C_p(X)$ con $Y \in \mathcal{P}$ y que separa los puntos de X. Entonces existen un espacio topológico compacto P y $B \subseteq O_{\aleph_0}(Y) \times P$ subespacio cerrado tal que $C_p(X)$ es imágen continua de B. Ahora, como $\mathcal{P}$ es $\aleph_0$-perfecta y $Y \in \mathcal{P}$ tenemos que $O_{\aleph_0}(Y) \in \mathcal{P}$, lo cual implica que $\mathcal{E}(O_{\aleph_0}(Y)) \subseteq \mathcal{P}$ y dado que la clase de espacios topológicos compactos está contenida en $\mathcal{E}(O_{\aleph_0}(Y))$ obtenemos que $O_{\aleph_0}(Y) \times P \in \mathcal{P}$, de donde $B \in \mathcal{P}$ y por lo tanto $C_p(X) \in \mathcal{P}$. †

Dado que la clase de espacios compactos y la clase de espacios discretos numerables son subclases de la clase $\mathcal{S}il$, por Teoremas 3.2.13 y 3.2.10, la clase $\mathcal{S}il$ es una clase $\aleph_0$-perfecta y por lo tanto obtenemos, usando el Teorema anterior, los siguientes resultados.

3.18.- TEOREMA. *Sea X compacto. Entonces $C_p(X) \in \mathcal{S}il$ si y sólo si existe $Y \subseteq C_p(X)$ que separa puntos de X y $Y \in \mathcal{S}il$*

3.19.- TEOREMA. *Sea X compacto. Entonces $C_p(X) \in \mathcal{S}il$ si y sólo si algún subespacio denso de $C_p(X)$ es elemento de la clase $\mathcal{S}il$.*

Demostración. Necesidad. Inmediata.
Suficiencia. Sea $D \subseteq C_p(X)$ denso. Por el Teorema 3.18 bastará probar que D separa puntos. Si $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, como X es Tychonoff existe $f \in C_p(X)$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sean O_1, O_2 abiertos en $\mathbb{R}$ tal que $f(x_1) \in O_1$, $f(x_2) \in O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Entonces $W(x_1, x_2; O_1, O_2) \cap D \neq \emptyset$ lo cual implica que existe $g \in D$ tal que $g(x_1) \neq g(x_2)$, es decir, D separa puntos de X. Por lo tanto $C_p(X) \in \mathcal{S}il$. †

Usando directamente el Teorema 3.17 tenemos la siguiente generalización del Teorema 3.19.

3.20.- TEOREMA. *Sean X un espacio compacto y $\mathcal{P}$ una clase $\aleph_0$-perfecta de espacios. Entonces $C_p(X) \in \mathcal{P}$ si y sólo si existe $Y \subseteq C_p(X)$ tal que $\overline{Y} = C_p(X)$ y $Y \in \mathcal{P}$.*

CAPITULO 5

La clase $\mathcal{S}i\ell$, propiedades de los espacios $C_{p,n}(X)$ y la propiedad de Lindelöf relacionada con la amplitud en los espacios C_p

1. Introducción.

En los Capítulos 3 y 4 hemos visto ya las ventajas que nos proporciona el trabajar con la clase $\mathcal{S}i\ell$. La intención de este último capítulo es la de mencionar algunos resultados adicionales referentes a espacios de funciones así como plantear algunas preguntas relacionadas a estas propiedades que están en íntima conexión con los Σ-espacios Lindelöf.

2. Los espacios $C_{p,n}(X)$.

Al considerar los espacios $C_p(X)$, $C_p(C_p(X)) = C_{p,2}(X), \ldots,$ $C_p(C_{p,n-1}(X)) = C_{p,n}(X)$, $C_{p,n+1}(X), \ldots$ existen ciertas propiedades topológicas que, a medida que n crece, éstas no se preservan. En especial, como se comenta en [Ark], si n se incrementa, $C_{p,n}(X)$ es menos compacto. Inclusive $C_p(X)$ posee propiedades de tipo compacidad muy débiles y ya $C_{p,2}(X)$, cuando $X \neq \emptyset$, nunca tiene la propiedad de Baire ni es σ-compacto. Una de las propiedades que es una generalización directa de la σ-compacidad es precisamente la de ser Σ-espacio Lindelöf, así que la pregunta natural es: ¿Cuándo $C_{p,n}(X) \in \mathcal{S}i\ell$?

Naturalmente, si X tiene una red numerable entonces, por el Teorema 1.2.3, $nw(C_{p,n}(X)) = \aleph_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $C_{p,n}(X)$ es un elemento de la clase $\mathcal{Sil}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O.V. Sipacheva mostró que el recíproco es falso (cit. pos. [Ark], p. 175).

Otro de los resultados en esta dirección es el siguiente teorema de V.V. Uspenskiĭ.

2.1. TEOREMA. Sea $X \in \mathcal{Sil}$. Entonces existe $Z \in \mathcal{Sil}$ tal que

$$C_p(X) \subseteq Z \subseteq \mathbb{R}^X.$$

Demostración. La idea de la demostración es considerar una familia $\mathcal{N} = \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ como en el Teorema 3.2.4 (2) y definir lo siguiente:

(i) $f \in \mathbb{R}^X$ es $\mathcal{N}$-acotada en un punto $x \in X$ si y sólo si existe $P_n \in \mathcal{N}$ tal que $x \in P_n$ y $f(P_n) \subseteq \mathbb{R}$ es acotado.

(ii) $f \in \mathbb{R}^X$ es $\mathcal{N}$-acotada si f es $\mathcal{N}$-acotada en $x \in X$ para todo $x \in X$.

(iii) $Z = \{f \in \mathbb{R}^X : f \text{ es } \mathcal{N}\text{-acotada}\}$.

Dado que si $f \in C(X)$ entonces $f \in Z$ se tiene que $C_p(X) \subseteq Z \subseteq \mathbb{R}^X$. Si consideramos $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ la compactación natural de $\mathbb{R}$ homeomorfa a un intervalo cerrado, entonces $\bar{\mathbb{R}}^X$ es compacto y $C_p(X) \subseteq Z \subseteq \bar{\mathbb{R}}^X$. En particular $\bar{\mathbb{R}}^X$ es una compactación de Z y si se definen para cada $n, k \in \mathbb{N}$ los conjuntos $F_{n,k} = \{g \in \bar{\mathbb{R}}^X : g(P_n) \subseteq [-k, k]\}$ entonces $\bar{\mathbb{R}}^X$ y $\mathcal{F} = \{F_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}$ satisfacen las condiciones del Teorema 3.2.4 (4), así que $Z \in \mathcal{Sil}$. $\dagger$

Este Teorema se puede generalizar de la siguiente manera

2.2. TEOREMA. Si $X \in \mathcal{T}$ y $\upsilon X \in \mathcal{Sil}$, siendo υX la realcompactación de Hewitt de X, entonces existe $Z \in \mathcal{Sil}$ tal que $C_p(X) \subseteq Z \subseteq \mathbb{R}^X$.

Demostración. Por el Teorema 2.1 existe $Z_1 \in \mathcal{Sil}$ tal que $C_p(\upsilon X) \subseteq Z_1 \subseteq \mathbb{R}^{\upsilon X}$. Si $\pi : \mathbb{R}^{\upsilon X} \to \mathbb{R}^X$ es el mapeo restricción, entonces, de la definición de υX (Teorema 0.46), se tiene que $\pi(C_p(\upsilon X)) = C_p(X)$ y así $C_p(X) = \pi(C_p(\upsilon X)) \subseteq \pi(Z_1) \subseteq \pi(\mathbb{R}^{\upsilon X}) = \mathbb{R}^X$. Como $Z_1 \in \mathcal{S}il$, por el Teorema 3.2.8, $Z = \pi(Z_1) \in \mathcal{S}il$. †

2.3. TEOREMA. Si $\upsilon(C_p(X)) \in \mathcal{S}il$ entonces $\upsilon X \in \mathcal{S}il$. En particular, si $C_p(X) \in \mathcal{S}il$ entonces $\upsilon X \in \mathcal{S}il$.

Demostración. Por el Teorema 2.2 existe $Z \in \mathcal{S}il$ tal que $C_p(C_p(X)) \subseteq Z \subseteq \mathbb{R}^{C_p(X)}$. Si $\Psi : X \longrightarrow C_p(C_p(X))$ es la función evaluación entonces X es homeomorfo a $X' = \Psi(X)$. Si consideramos $Y = cl_Z(X')$, entonces por el Teorema 3.2.10, $Y \in \mathcal{S}il$ y por lo tanto Y es realcompacto. Sin embargo, X' es C-encajado en $\mathbb{R}^{C_p(X)}$ y si $f \in C_p(X')$ entonces existe $g \in C_p(Y)$ tal que $g|_{X'} = f$. Por lo tanto $Y = \upsilon X'$ y $\upsilon X = \upsilon X'$, es decir $\upsilon X \in \mathcal{S}il$. †

El inverso de este Teorema es falso como lo prueba el siguiente ejemplo: sea $X = [0,1] \times \{0,1\}$ con la topología del orden lexicográfico. Entonces X es compacto, lo cual implica que $\upsilon X = X$ es un Σ-espacio Lindelöf. Como X es separable, entonces por el Teorema 1.2.4, $iw(C_p(X)) = \aleph_0$ y así $C_p(X)$ es realcompacto. De aquí que $\upsilon((C_p(X)) = C_p(X)$. Sin embargo $C_p(X)$ no es Lindelöf ya que si para cada $\alpha \in [0,1]$ definimos $f_\alpha \in C_p(X)$ tal que $f_\alpha(x) = 0$ si $x \leq (\alpha, 0)$ y $f_\alpha(x) = 1$ si $x \geq (\alpha, 1)$ entonces $A = \{f_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ es un conjunto cerrado y discreto en $C_p(X)$.

Las siguientes preguntas son problemas abiertos:

¿$C_p(X) \in \mathcal{S}il$ implica que $\upsilon(C_p(C_p(X))) \in \mathcal{S}il$? [1]

¿$\upsilon(C_p(X)) \in \mathcal{S}il$ implica que $\upsilon(C_p(C_p(X))) \in \mathcal{S}il$?

Lo que sabemos es que, en general, si $C_p(X) \in \mathcal{S}il$ entonces no necesariamente es cierto que $C_p(C_p(X)) \in \mathcal{S}il$: Reznichenko (cit.

—— o ——

[1] Al revisar esta Tesis los Profesores O. Okunev y F. Casarrubias comunicaron al autor que el Profesor V.V. Tkachuk recientemente probó que la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

pos. [Ark 6]) construyó un espacio topológico compacto X tal que $C_p(X)$ es K-analítico con un punto $x \in X$ tal que $X = \beta Y$ donde Y es el subespacio $X - \{x\} \subseteq X$. Entonces Y es seudocompacto y $C_p(Y)$ es imágen continua de $C_p(X)$ (mediante la función restricción). Por lo tanto $C_p(Y)$ es un espacio K-analítico y así, por el Teorema 3.2.18, $C_p(Y) \in Sil$. Por otro lado $C_p(C_p(Y))$ no es realcompacto, dado que Y es homeomorfo a un subespacio cerrado de $C_p(C_p(Y))$, y Y no es realcompacto (si lo fuera, al ser seudocompacto, sería también compacto). Por lo tanto $C_p(C_p(Y))$ no es Lindelöf.

El Teorema 2.3 tiene los siguientes importantes corolarios.

2.4. COROLARIO. Si para alguna $n \in \mathbb{N}$, $\upsilon C_{p,n}(X) \in Sil$ entonces $\upsilon X \in Sil$ y $\upsilon C_{p,m}(X) \in Sil$ para $m < n$.

2.5. COROLARIO. Si X es realcompacto y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\upsilon C_{p,n}(X) \in Sil$ entonces $X \in Sil$.

Demostración. En efecto, pues X realcompacto implica que $X = \upsilon X$. †

El siguiente teorema también ilustra la utilidad del Teorema 2.3.

2.6. TEOREMA. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\upsilon C_{p,n}(X) \in Sil$ entonces X es $\aleph_0$-monolítico.

Demostración. Por el Teorema 2.3 será suficiente probar que si $\upsilon C_p(X) \in Sil$ entonces X es $\aleph_0$-monolítico. Pero sabemos que si υY es $\aleph_0$-estable entonces Y es $\aleph_0$-estable ([Ark], Teorema II.6.33). Por lo tanto, si $\upsilon C_p(X) \in Sil$ entonces $\upsilon C_p(X)$ es estable (Teorema 3.2.24) y de aquí que $C_p(X)$ es $\aleph_0$-estable y entonces por el Teorema 3.2.31, X es $\aleph_0$-monolítico. †

2.7. COROLARIO. Si X es separable pero no tiene una red numerable entonces $\upsilon C_{p,n}(X) \notin Sil$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. En efecto, si para alguna $n \in \mathbb{N}$, $\upsilon C_{p,n}(X) \in Sil$

entonces $\mathbb{X}$ es $\aleph_0$-monolítico (Teorema 2.6) y por lo tanto $d(\mathbb{X}) = nw(\mathbb{X})$ (ver Definición 3.2.26). †

2.8. DEFINICION. Un espacio topológico compacto $\mathbb{X}$ es un compacto de Gul'ko si $C_p(\mathbb{X}) \in \mathcal{S}il$.

La siguiente proposición será esencial para probar el Teorema que se enuncia despues.

2.9. PROPOSICION. ([Ark], Proposición IV.9.10). Supongamos que $\upsilon \mathbb{Y} \in \mathcal{S}il$. Si $F \subseteq C_p(\mathbb{Y})$ es numerablemente compacto entonces F es un compacto de Gul'ko.

2.10. TEOREMA. Sea $\mathbb{X} \in \mathcal{T}$. Si $F \subseteq \mathbb{X}$ es numerablemente compacto y si para alguna $n \in \mathbb{N}$ $\upsilon C_{p,n}(\mathbb{X}) \in \mathcal{S}il$, entonces F es un compacto de Gul'ko.

Demostración. Por el Corolario 2.4, $\upsilon C_p(\mathbb{X}) \in \mathcal{S}il$. Sea $\mathbb{Y} = C_p(\mathbb{X})$. Entonces F es homeomorfo a un subespacio numerablemente compacto $F' \subseteq C_p(C_p(\mathbb{X})) = C_p(\mathbb{Y})$. Como $\upsilon \mathbb{Y} = \upsilon C_p(\mathbb{X}) \in \mathcal{S}il$, entonces por la Proposición 2.9, F' es un compacto de Gul'ko y por lo tanto F es un compacto de Gul'ko. †

Como un caso particular de este último Teorema obtenemos:

2.11. COROLARIO. Si $\mathbb{X}$ es numerablemente compacto y $\upsilon C_p(C_p(\mathbb{X})) \in \mathcal{S}il$ entonces $\mathbb{X}$ es un compacto de Gul'ko.

Las siguientes proposiciones dan como resultado un teorema de O. Okunev.

2.12. PROPOSICION. ([Ark], Proposición IV.9.15). Supongamos que $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathcal{S}il$ y $\mathbb{Y} \subseteq C_p(\mathbb{X})$. Entonces $C_p(\mathbb{Y}, [0,1]) \in \mathcal{S}il$.

2.13. PROPOSICION. ([Ark], Proposición IV.9.17). Si $\upsilon \mathbb{X} \in \mathcal{S}il$ y $C_p(\mathbb{Y}, [0,1]) \in \mathcal{S}il$ entonces $C_p(\mathbb{Y}) \in \mathcal{S}il$.

2.14. TEOREMA. ([Ok₁], Corolario 2.11). Si $X, Y \in Sil$ y $Y \in C_p(X)$ entonces $C_p(Y) \in Sil$.

Demostración. Por la Proposición 2.12, $C_p(Y, [0,1]) \in Sil$ y como $Y \in Sil$ entonces Y es realcompacto, así que $\upsilon Y \in Sil$ y por lo tanto, de la Proposición 2.13, obtenemos que $C_p(Y) \in Sil$. †

2.15. COROLARIO ([Ok₁], Teorema 2.12). Si $X \in Sil$ y $C_p(X) \in Sil$ entonces $C_{p,n}(X) \in Sil$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Dado que $X, C_p(X) \in Sil$ y $C_p(X) \subseteq C_p(X)$ entonces por el Teorema 2.14 $C_p(C_p(X)) \in Sil$. Además, si suponemos que $C_{p,k}(X) \in Sil$ para todo $k \leq n$ entonces $C_{p,n}(X), C_{p,n-1}(X) \in Sil$, $C_{p,n}(X) \subseteq C_p(C_{p,n-1}(X))$ y el Teorema 2.14 implican que $C_{p,n+1}(X) \in Sil$. Por lo tanto $C_{p,n}(X) \in Sil$ para todo $n \in \mathbb{N}$. †

2.16. COROLARIO. ([Ok₁], Teorema 4.1). Si X es un compacto de Gul'ko entonces $C_{p,n}(X) \in Sil$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por el Corolario 4.3.14, si X es un compacto de Eberlein, entonces $C_p(X) \in Sil$ así que el Corolario 2.15 nos proporciona el siguiente resultado de O.V. Sipacheva [Si].

2.17. COROLARIO. Si X es un compacto de Eberlein entonces $C_{p,n}(X)$ es un Σ-espacio Lindelöf para todo $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 4.7 de Okunev ([Ok₁]).

2.18. TEOREMA. Sea X numerablemente compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(1) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\upsilon C_{p,n}(X) \in Sil$.

(2) X es un compacto de Gul'ko.

(3) $C_{p,n}(X) \in Sil$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. (1) implica (2) es una consecuencia del Teorema 2.10.

(2) implica (3). Si X es un compacto de Gul'ko, entonces X es compacto y $C_p(X) \in Sil$. Por lo tanto. Por lo tanto, por el Corolario 2.16 se satisface (3).

(3) implica (1). Como $C_{p,n}(X) \in Sil$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $C_{p,n}(X)$ es realcompacto para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto se satisface (1). $\dagger$

3. La propiedad de Lindelöf y la amplitud en los espacios C_p.

Como ya comentamos en el Capítulo 4, la existencia de red numerable para X nos proporciona la propiedad de Lindelöf sobre $C_p(X)$. La siguiente serie de resultados nos dará una idea de las dificultades que se presentan en el momento de buscar esta propiedad sobre X. Necesitaremos de las siguientes afirmaciones.

3.1. PROPOSICION. ([Ark 4], Proposición 7). Si X es un espacio $\aleph_0$-monolítico y $s(X) = \aleph_0$ entonces $hl(X) = \aleph_0$.

3.2. PROPOSICION. ([Ark 4], Teorema 8). Si X es un espacio $\aleph_0$-monolítico y $\aleph_0$-estable y además $s(C_p(X)) = \aleph_0$, entonces X y $C_p(X)$ tienen una red numerable.

3.3. TEOREMA. ([Ark 4], Teorema 10). Si $C_p(X) \in Sil$ y $s(C_p(X)) = \aleph_0$ entonces X tiene una red numerable.

Demostración. Como $C_p(X) \in Sil$ entonces por el Teorema 3.2.24 $C_p(X)$ es estable. Por lo tanto X es monolítico (Teorema 3.2.31). Como $s(X \times X) \leq s(C_p(X))$ ([Ark 3], Proposición 2) y $s(C_p(X)) = \aleph_0$ entonces $s(X \times X) = \aleph_0$ y como $X \times X$ es $\aleph_0$-monolítico ([Ark], Teorema II.6.16) entonces $X \times X$ es hereditariamente Lindelöf (Proposición 3.1) y en consecuencia X es realcompacto. Por el Teorema 2.3 obtenemos que $X \in Sil$ y por consiguiente X es $\aleph_0$-estable. En resúmen: X es $\aleph_0$-monolítico y

$\aleph_0$- estable. Entonces por la Proposición 3.2 $\mathfrak{X}$ tiene una red numerable. †

Dado que la suposición de que $s(\mathfrak{X})=\aleph_0$ es más débil que suponer que $s(C_p(\mathfrak{X}))=\aleph_0$, es natural preguntar:

"Sea $\mathfrak{X}\in\mathcal{T}$ tal que $s(\mathfrak{X})=\aleph_0$ y $C_p(\mathfrak{X})\in \mathcal{S}il$. ¿ $\mathfrak{X}$ tiene una red numerable?"

Arkhangel'skiĭ comenta en [Ark 4] que desafortunadamente no se tiene una respuesta satisfactoria a esta pregunta pero sí presenta varios resultados parciales que damos enseguida.

3.4. TEOREMA. ([Ark 4], Proposición 12). Si $s(\mathfrak{X})=\aleph_0$ y $C_p(\mathfrak{X})\in\mathcal{S}il$ entonces $\mathfrak{X}\in\mathcal{S}il$.

Demostración. Es una parte de la prueba del Teorema 3.3. †

3.5. TEOREMA. ([Ark 4], Teorema 13). Si $s(\mathfrak{X}\times\mathfrak{X})=\aleph_0$ y $C_p(\mathfrak{X})\in\mathcal{S}il$ entonces $\mathfrak{X}$ tiene una red numerable.

Demostración. Por el Teorema 3.4, $\mathfrak{X}\in\mathcal{S}il$ y dado que $C_p(\mathfrak{X})\in\mathcal{S}il$ obtenemos que $\mathfrak{X}$ es $\aleph_0$-monolítico (Teoremas 3.2.24 y 3.2.31). Por lo tanto $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ también es $\aleph_0$-monolítico. Como $s(\mathfrak{X}\times\mathfrak{X})=\aleph_0$ entonces por la Proposición 3.1, $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ es hereditariamente Lindelöf. En consecuencia $\mathfrak{X}$ es un espacio con diagonal G_δ. Como todo elemento de la clase $\mathcal{S}il$ con diagonal G_δ tiene una red numerable hemos probado el Teorema. †

Antes de enunciar el siguiente teorema necesitaremos del concepto de sucesión libre.

3.6. DEFINICION. Sea $\kappa\in\mathcal{C}ard$. Diremos que una sucesión $\{x_\alpha:\alpha<\kappa\}$ en $\mathfrak{X}$ es una sucesión libre de longitud κ si para todo $\beta<\kappa$, $cl\{x_\alpha:\alpha<\beta\}\cap cl\{x_\alpha:\alpha\geq\beta\}=\emptyset$.

3.7. TEOREMA. ([Ark4], Teorema 14). $(MA + \neg CH)$[1]. Si $s(X) = \aleph_0$ y $C_p(X) \in Sil$, entonces X tiene una red numerable.

Demostración. Por el Teorema 3.4, $X \in Sil$ así que $X^n \in Sil$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Teorema 3.2.13). También, dado que $C_p(X) \in Sil$ obtenemos que $t(X^n) = \aleph_0$ para todo $n \in \omega$ (Teorema 1.4.1). Entonces por ([Ark5], Corolario 2.2.3) no existe una sucesión libre de longitud no numerable en X^n para cada $n \in \omega$. Dado que $s(X) = \aleph_0$ y $l(X) = \aleph_0$ entonces X es separable ([To], Teorema 12). Como $C_p(X) \in Sil$ entonces X es $\aleph_0$-monolítico y dado que esto último es equivalente a que la cerradura de cualquier conjunto numerable en X tenga una red numerable, basta tomar $D \subseteq X$ denso numerable para concluir que X tiene una red numerable. $\dagger$

---

[1] La definición topológica de MA es la siguiente: Todo espacio Hausdorff compacto con la condición de la cadena numerable es un espacio fuerte de Baire (es decir, la intersección de una familia $< 2^{\aleph_0}$ de densos abiertos es densa).

Bibliografía

[Ark]. A.V. Arkhangel'skiĭ. Topological function spaces. Kluwer Academic Publishers. 1992.

[Ark1]. A.V. Arkhangel'skiĭ. Continuous mappings, factorization theorems and function spaces. Trans. Moscow Math. Soc. (1985) pp 1-22.

[Ark2]. A.V. Arkhangel'skiĭ. On some topological spaces encountered in functional analysis. Russian Math. Surveys 31 (1976) pp. 14-30.

[Ark3]. A.V. Arkhangel'skiĭ. On spread and condensations. Proc. of the A.M.S. Vol 124. 11 (1996) pp. 3519-3527.

[Ark4]. A.V. Arkhangel'skiĭ. On Lindelof property and spread in C_p-theory. Topology and its. Appl. 74 (1996). pp 83-90

[Ark5]. A.V. Arkhangel'skiĭ. Structure and classification of topological spaces and cardinal invariants. Russian Math. Surveys. 33 (1978). pp 33-96.

[Ark6]. A.V. Arkhangel'skiĭ. C_p-theory. Recent progress in General Topology. M. Husek y J. van. Mill editores (1992). Elsevier Science Publishers B.V. pp 1-56.

[Bu]. D.K. Burke. Covering properties. Handbook of set theoretic topology. Elsevier Science Publishers B.V. 1984 pp. 347-422.

[Bu-Lu]. D.K. Burke y D.J. Lutzer. Recent advances in the theory of generalized metric spaces. Topology Proc. Memphis St. Univ. Conf. Lecture Notes in Pure and applied Mathematics. Marcel Dekker. New York. pp 1-70.

[En]. R. Engelking. General Topology. Heldermann Verlag, Berlin. 1989.

[GMT]. A. García-Máynez y A. Tamariz. Topología General. Porrúa. México 1988.

[GJ]. L. Gillman y M. Jerison. Rings of continuous functions. Princeton. 1960.

[Gr]. G. Gruenhage. Generalized metric spaces. Handbook of set theoretic topology. Elsevier Science Publishers B.V. 1984 pp 423-450.

[Ho]. R. Hodel. Cardinal functions. Handbook of set theoretic topology. Elsevier Science Publishers B.V. 1984 pp 1-61.

[Mo]. K. Morita. Products of normal spaces with metric spaces. Math. Ann. 154. (1964) pp. 365-382.

[Na]. K. Nagami. Σ-spaces. Fund. Math. 65 (2). (1969) pp 169-192.

[Ok]. O. Okunev. Notas sobre Σ-espacios Lindelöf. manuscrito.

[Ok1]. O. Okunev. On Lindelöf Σ-spaces of continuous functions in the pointwise topology. Top. and its Appl. 49 (1993) pp. 149-166.

[R] E.A. Reznichenko. Normality and collective normality of function spaces. Moscow Univ. Math. Bull. 45 (1990) No6. pp. 25-26.

[SS]. L. Steen y L. Seebach. Counterexamples in topology. Holt Rinehart and Winston Inc. 1970.

[TCH]. A. Tamariz, F. Casarrubias y F. Hernández. Notas sobre espacios de funciones continuas. manuscrito.

[To]. S. Todorčevič. Some applications of S and L combinatorics. Ann. New York Acad. Sci. 705 (1993). pp 130-167.

[WSS] J. Winfried, O. Sipacheva y P.J. Szeptycki. Non-normal spaces $C_p(X)$ with countable extent. Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1995) No4. pp 1227-1235.

Complementaria.

[A]. P. Alexandroff. Sur les propriétés locales des ensembles et la notion de compacité. Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Sér. A. (1923) pp. 9-12.

[AU] P. Alexandroff y P. Urysohn. Mémoire sur les espaces topologiques compacts. Verh. Akad. Wetensch. Amstrerdam 14 (1929)

[ArkD]. A.V. Arkhangel'skiĭ. An addition theorem for the weight of spaces lying in bicompacta. Dokl. Akad. Nauk. SSSR (1959).

126. pp. 239-241.

[Ark7]. A.V. Arkhangel'skiĭ. On a class of spaces containing all metric spaces and all locally bicompact spaces. Sov. Math. Dokl. 4. (1963) pp. 751-754.

[B]. D.P. Baturov. On Subspaces of function spaces. Vestn. M.C.U. Math. Mech. 4. (1987) pp. 66-69.

[Bi]. R.H. Bing. Metrization of topological spaces. Canadian J. Math. 3 (1951). pp 175-186.

[Bo]. E. Borel. Sur l'approximation des nombres par des nombres rationnels. C.R. Acad. Paris 163 (1903). pp 1054-1055.

[Bou1]. N. Bourbaki. Topologie générale. ch. I et II (2da. ed.) París 1951.

[Bou2]. N. Bourbaki. Topologie générale. ch I et II (3a. ed.) París 1961.

[C]. C. Carathéodory. Über die begrenzung einfach susammenhängender. Math. Ann. 73. (1913). pp 323-370.

[Cě]. E. Čech. On bicompact spaces. Ann. Math 38 (1937). pp 823-844.

[ChP]. E.W. Chittenden y A.D. Pitcher. On a theory of developments of an abstract class in relation to the calcul fonctionnel. Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919) pp. 213-233.

[D]. J. Dieudonné. Une généralisation des espaces compacts. J. de Math. Pures et Appl. 23 (1944) pp 65-76.

[En1]. R. Engelking. On functions defined on cartesian products. Fund. Math. 59 (1966). pp 221-231.

[F]. M. Fréchet. Les dimensions d'un ensemble abstrait. Math. Ann. 68 (1910). pp 145-168.

[Fr], Z. Frolík. On the topological product of paracompact spaces. Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 8 (1960). pp 747-750.

[G]. A. Grothendieck. Critéres de compacticité dans les espaces fonctionnels généraux. Amer. Jo Math. 74 (1952). pp 168-186.

[H]. A.W. Hager. Approximation of real continuous functions on Lindelöf spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1969) pp 156-163.

[Ha]. F. Hausdorff. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914.

[He 1]. E. Hewitt. On two problems of Urysohn. Ann. Math. 47 (1946). pp 503-509.

[He 2]. E. Hewitt. Rings of real-valued continuous functions I. Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948) pp 45-99.

[J1]. I. Juhász. Cardinal functions in topology. Matematisch Centrum. Amsterdam 1971.

[J2]. I. Juhász. Cardinal functions in topology - Ten years later. Matematisch Centrum, Amsterdam 1980.

[L]. H. Lebesgue. Sur les fonctions représentables analytiquement. J. de Math. Pures et Appl. 1 (1905). pp 139-216.

[Le] J. Leray. L'anneau spectral et l'anneau filtre d'homologié d'un espace localement compact et d'une application continue. J. de Math. Pures et Appl. 29 (1950) pp 1-80.

[Li]. E. Lindelöf. Sur quelques points de la théorie des ensembles. C.R. Acad. Paris 137 (1903). pp 697-700.

[Mar]. E. Marczewski. Séparabilite et multiplication cartésienne des espaces topologiques. Fund. Math. 34 (1947). pp 127-143.

[N]. L. Nachbin. On the continuity of positive linear transformations. Proc. of the Inter. Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass. 1950. Vol I. Prov. (1952). pp 464-465.

[Oku]. A. Okuyama. On metrizability of M-spaces. Proc. Japan Acad. 40 (1964). pp. 176-179.

[Pon]. E.S. Pondiczery. Power problems in abstract spaces. Duke Math. J. 11 (1944) pp 835-837.

[Py]. E.G. Pytkeev. The tightness of spaces of continuous functions. Russian Math. Surveys. 37, 1, (1982). pp 176-177.

[Sa]. B. Šapirovskiĭ. Canonical sets and character. Density and weight in compact spaces. Soviet Math. Dokl. 15 (1974) pp. 1282-1287

[Si]. O.V. Sipacheva. The structure of iterated function spaces in the topology of pointwise convergence for Eberlein compacta. Matem. Zametki. 47 (3). (1990). pp. 91-99.

[So]. R.H. Sorgenfrey. On the topological product of paracompact spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947). pp. 631-632.

[St]. M.H. Stone. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937) pp. 375-481.

[T]. A. Tychonoff. Über die topologische Erweiterung von Räumen. Math. Ann. 102 (1930). pp. 544-561.

[WW]. J.M. Worrel Jr. y H.H. Wicke. Characterizations of developable spaces. Canad. J. Math. 17 (1965). pp. 820-830.

[V]. I.A. Vaĭnšteĭn. On closed mappings of metric spaces. Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 57 (1947). pp 319-321.

INDICE ANALITICO

Fin...