18
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"AMPLIACION DE UN ESQUEMA DEDUCTIVO MINIMO"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

CLAUDIA AMERICA SERRANO LICEAGA

DIRECTOR DE TESIS MAT. GONZALO ZUBIETA RUSSI

1999

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFN°MA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"AMPLIACION DE UN ESQUEMA DEDUCTIVO MINIMO"

realizado por CLAUDIA AMERICA SERRANO LICEAGA

con número de cuenta 9251885-2 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	MAT. GONZALO ZUBIETA RUSSI	
Propietario	M. en C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO	
Propietario	M. en C. CARMEN ROCIO VITE GONZALEZ	
Suplente	MAT. MARICELA SOLORZANO AUDIFFRED	Maricela Solórzano A.
Suplente	M. en I. de O. NORMA ELVIRA PERALTA MARQUEZ	

Consejo Departamental de Matemáticas

MAT. JULIO CESAR GUEVARA BRAVO

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A DIOS que con su amor, me lleno de optimismo para realizar y terminar mi tesis.

A mi padre, que algo impaciente esperaba está tesis, aquí la tienes y es para ti.

A mi madre que es su regalo a tantos años que me ha brindado y espero me siga dando.

A mis hermanos que quiero muchisimo y que saben que cuentan conmigo en todo momento.

AGRADECIMIENTOS

Profesor Gonzalo Zubieta Russi, le agradezco todas las enseñanzas y consejos tanto en la carrera como en la elaboración de la presente tesis.

A los sinodales por su apoyo y disponibilidad para presentar la tesis, Gracias.

A Belegui que con cariño, optimismo y apoyo me animó en todo momento.

A Rafael un compañero excepcional, a Maricela por brindarme su amistad, a Juan por todos sus consejos.

A Don Mario, a Claudio y a Marthita por confiar en mi y por su cariño incondicional.

AMPLIACIÓN DE UN ESQUEMA DEDUCTIVO MÍNIMO

CLAUDIA AMÉRICA SERRANO LICEAGA

PRÓLOGO

El propósito de esta tesis es el dar a conocer algunas alternativas al hacer demostraciones.

El interés de mostrar el esquema deductivo se basa en que no sabemos demostrar, cuantas veces carecemos de nociones para poder comenzar y esto nos causa confusión, por ello, se pretende poner a su alcance este material, esperando sea de gran utilidad.

En el transcurso de la tesis se desarrollará el esquema deductivo que conocemos y posteriormente agregar lo que llamaremos nuevos modos descendentes , los cuales nos facilitarán o harán más sencillas muchas de las demostraciones que vemos en la carrera de matemáticas.

Los nuevos modos descendentes tienen como fin principal corroborar que al utilizarlos en las demostraciones es sencillo y toda se va encauzando de una manera más fácil.

En esta tesis, estos nuevos modos descendentes se aplican en demostraciones de la Teoría de Filtros.

Demostraremos cada uno de los nuevos modos descendentes de una manera clara y precisa.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo veremos qué es y cómo se aplica el esquema deductivo en algunas áreas de las matemáticas.

Llamaremos esquema deductivo mínimo a aquel que consta de cinco modos descendentes (De lo idéntico, de la conjunción a la parte, de la parte a la disyunción, de lo general a lo particular y de lo específico a lo inespecífico) y de tres modos hipotéticos, para inferir (Por exclusión, por casos y por contradicción); mínimo se debe a que los ochos modos bastan para hacer una demostración sencilla y clara; este esquema será la herramienta principal a lo largo del trabajo.
En algunas de las demostraciones se verán dos puntos antes del paréntesis indicándonos una contradicción.

Se trabajará con algunos de los silogismos categóricos que nos legó Aristóteles, aplicándoles el esquema deductivo en sus demostraciones.

Adam Balsham estudiando sus acertijos les vió gran utilidad; la veremos en el repertorio de parvipontanos.

Como en todo trabajo de lógica no podía faltar la parte de conjuntos, la cual a grandes rasgos nos recuerda algunos de los conceptos que en este trabajo abordaremos.

Una de las aplicaciones más importantes se hace a la Teoría de Filtros; en la cual el lenguaje, es un poco confuso, trataremos de mostrar en forma fácil y accesible utilizando el esquema deductivo la demostración de cada una de las propiedades del filtro.

A partir de la definición de filtro se entra a lo que llamaremos Casi totalidad y demostraremos algunas leyes distributivas y lemas que se utilizarán sobre la marcha.

Veremos los nuevos modos descendentes que son aquellos que ayudarán a facilitar algunas demostraciones confusas, en esta tesis hago mención a seis nuevos modos y los demuestro de manera agradable para el lector.

Otra aplicación se tiene en Base de filtro que es una colección no vacía de subconjuntos de I.

La ampliación del esquema deductivo mínimo, es el hecho de agregar a los ocho modos que se tienen estos seis nuevos modos que contribuyen a facilitar o agilizar la realización de una demostración.

C.A.S.L.

ABREVIATURAS

Def : Definición

Hpt : Hipótesis

Excl : Exclusión

Dem : Demostrado

Desc : Descendente

Equiv : Equivalencia

Trad : Traducción

tlq : tal que

tlqs tales que

alg : algún

ning : ningún

idént : idéntico

conj : conjunción

ent : entonces

mit : mitómano

ssi : si, y sólo si,

elm : elemento

SÍMBOLOS

$\forall$ Para todo

$\dot{\forall}$ Para casi todo

$\exists$ Existe

$\in$ pertenece a

$\notin$ no pertenece a

$=$ igual a

$\cup$ unión

$\cap$ intersección

$\subset$ contenido en

$\bigcup_{i \in I}$ unión de familia

ÍNDICE

ESQUEMA DEDUCTIVO

El esquema deductivo mínimo es una estructura carente de contenido que se utiliza en ciertos contextos. Consta de cinco modos descendentes y de tres modos hipotéticos , para inferir.

Definición: Modo descendente, es toda condicional válida.
Condicional válida es la frase que afirma que si sucede tal cosa entonces sucede la otra cosa.

Modos descendentes:

De lo idéntico	Si P ent P
De la conjunción a la parte	Si P y Q ent P
De la parte a la disyunción	Si P ent P o Q
De lo general a lo particular	Si, $\forall$x P(x) ent P(c)
De lo específico a lo inespecífico	Si P(c) ent $\exists$x tlq P(x)

Modos hipotéticos:

Si P o Q,
y si no P,
ent Q. Por exclusión

Si P o Q,
si, si P ent R,
y si, si Q ent R,
ent R. Por casos

Si, si P ent Q,
y si, si P ent no Q,
ent no P. Por contradicción

Ejemplo de demostración utilizando el esquema deductivo:

Si algún actor es mago
y ningún mago es poeta
ent algún actor no es poeta:

(1) Alg actor es mago Hpt
(2) Existe x tlq x es actor y x es mago (1)Trad
(3) z es actor y z es mago Def de z
(4) Ning mago es poeta Hpt
(5) Para todo x, si x es mago ent x no es poeta (4)Trad
(6) Si z es mago ent z no es poeta (5)De lo gral
(7) z es mago (3)De la conj
(8) z no es poeta (7) Por (6)
(9) z es actor (3)De la conj
(10) z es actor y z no es poeta (9)(8)De lo idént
(11) Existe x tlq x es actor y x no es poeta (10)De lo específico
(12) Alg actor no es poeta (11)Trad

Aparte de los ocho modos del esquema, se puede inferir por traducción, por giro (se dice que una proposición es **giro** de otra si ambas tienen la misma negación), o por algo demostrado antes. Tal es el caso del paso (8) que se infiere de (7), por (6).

Deducción de P es una cadena $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de afirmaciones, llamadas **pasos,** tales que P_n es P, y cada paso es un axioma o algo demostrado antes, o se infiere de pasos anteriores mediante un axioma o algo demostrado antes.

Son **axiomas ordinarios** los integrantes de una definición implícita. Estos axiomas son válidos por su contenido. Son **axiomas lógicos** los modos descendentes, los modos hipotéticos y las afirmaciones de la forma P o no P. estos axiomas son válidos por su forma.

AXIOMAS ORDINARIOS

Si x es veraz, y x dice que sucede tal cosa,
entonces sucede tal cosa — Def de veraz

Si x es mitómano, y x dice que sucede tal cosa,
entonces no sucede tal cosa — Def de mitómano

Si x es veraz entonces x no es mitómano
Si x es mitómano entonces x no es normal
Si x es normal entonces x no es veraz — Def común

x es veraz o x es mitómano o x es normal — Def común

Si x dice que sucede tal cosa, y no sucede tal cosa,
entonces x no es veraz — Def de veraz, girada

Si x dice que sucede tal cosa, y sucede tal cosa,
entonces x no es mitómano — Def de mitómano, girada

Si x dice que sucede tal cosa, y x miente,
entonces no sucede tal cosa

Si x dice que sucede tal cosa, y no sucede tal cosa,
entonces x miente

Def de mentir

Giros

Si x dice que sucede tal cosa, y x no miente,
entonces sucede tal cosa

Si x dice que sucede tal cosa, y sucede tal cosa,
entonces x no miente

Si, no P(x) ssi no Q(x), ent si P(x) ent Q(x)

Otros ejemplos de demostración:

A dice que B es veraz
B dice que A es mitómano   Datos

B <u>no es veraz</u>:

(1) B dice que A es mit   Dato
(2) A es mit o A no es mit   Axioma lógico
(3) Si A es mit ent B no es veraz:

    (a) A es mit   Hpt
    (b) A dice que B es veraz   Dato
    (c) B no es veraz   (a)(b)Def de mit

(4) Si A no es mit ent B no es veraz:

    (a) A no es mit   Hpt
    (b) B dice que A es mit   Dato
    (c) B no es veraz   (b)(a)Def de veraz, girada

(5) B no es veraz   (2)(3)(4)Por casos

Los datos son válidos por definición, es decir, son axiomas.

Ejemplos de la Teoria de Conjuntos:

$x \in A \cap B$ ssi $x \in A$ y $x \in B$ <u>Def de</u> $\cap$

$x \in \bigcup_{i \in I} Bi$ ssi existe i tal que $i \in I$ y $x \in Bi$ <u>Def de</u> $\bigcup$

Demostración algebraica:

$$A \cap \bigcup_{i \in I} Bi = \bigcup_{i \in I} (A \cap Bi):$$

(1) Si $x \in A \cap \bigcup Bi$ ent $x \in \bigcup (A \cap Bi)$:

(a) $x \in A \cap \bigcup Bi$ Hpt
(b) $x \in A$ y $x \in \cup Bi$ (a)Def de $\cap$
(c) $x \in A$
(d) $x \in \bigcup Bi$ (b)De la conj
(e) $\exists i$ tlq $i \in I$ y $x \in Bi$ (d)Def de $\bigcup$
(f) $i \in I$
(g) $x \in Bi$ Def de i
(h) $x \in A$ y $x \in Bi$ (c)(g)De lo idént
(i) $x \in A \cap Bi$ (h)Def de $\cap$
(j) $i \in I$ y $x \in A \cap Bi$ (f)(i)De lo idént
(k) $\exists i$ tlq $i \in I$ y $x \in A \cap Bi$ (j)De lo específico
(l) $x \in \bigcup (A \cap Bi)$ (k)Def de $\bigcup$

(2) Si $x \in \bigcup (A \cap Bi)$ ent $x \in A \cap \bigcup Bi$:

(a) $x \in \bigcup (A \cap Bi)$ Hpt
(b) $\exists i$ tlq $i \in I$ y $x \in A \cap Bi$ (a)Def de $\bigcup$
(c) $i \in I$
(d) $x \in A \cap Bi$ Def de i
(e) $x \in A$ y $x \in Bi$ (d)Def de $\cap$
(f) $x \in A$
(g) $x \in Bi$ (e)De la conj
(h) $i \in I$ y $x \in Bi$ (c)(g)De lo idént
(i) $\exists i$ tlq $i \in I$ y $x \in Bi$ (h)De lo específico
(j) $x \in \bigcup Bi$ (i)Def de $\bigcup$
(k) $x \in A$ y $x \in \bigcup Bi$ (f)(j)De lo idént
(l) $x \in A \cap \bigcup Bi$ (k)Def de $\cap$

(3) $A \cap \bigcup_{i \in I} Bi = \bigcup_{i \in I} (A \cap Bi)$ (1)(2)Def de =

TABLA DE ARISTOTÉLICOS

Aristóteles nos legó sus silogismos categóricos, los cuales se agrupan por figuras de la siguiente forma:

1a. figura	2a. figura	3a. figura	4a. Figura
MB	BM	MB	BM
AM	AM	MA	MA
AB	AB	AB	AB
Barbara	Cesare	Darapti	Bamalip
Celarent	Camestres	Felapton	Camenes
Darii	Festino	Disamis	Dimatis
Ferio	Baroco	Datisi	Fesapo
		Bocardo	Fresiso
		Ferison	

Estos nombres son fórmulas cuyas vocales juegan un papel determinante: **a** significa todo, **e** ninguno, **i** alguno, **o** alguno no. Para formar un silogismo, a partir del nombre, se toman en cuenta las vocales y la figura que está arriba del nombre. Ejemplos:

Disamis (alguno,todo,alguno)

Si algn M es B
y todo M es A
ent algn A es B

Fresiso (ninguno,alguno,alguno no)

Si ning B es M
y algn M es A
ent algn A no es B

Los silogismos que incluyen en su nombre la letra **p** son válidos per accidens (por accidente), y requieren de una hipótesis adicional, llamada accidente, para su demostración.

EJEMPLOS ARISTOTÉLICOS

Si ningún marino es buzo
y todo aviador es marino
ent ningún aviador es buzo: **Celarent**

(1) Ning marino es buzo Hpt
(2) Para todo x, si x es marino ent x no es buzo (1)Trad
(3) Todo aviador es marino Hpt
(4) Para todo x, si x es aviador ent x es marino (3)Trad
(5) Para todo z, si z es aviador ent z no es buzo:

(a) z es aviador Hpt
(b)Si z es aviador ent z es marino (4)De lo gral
(c) z es marino (a) Por (b)
(d)Si z es marino ent z no es buzo (2)De lo gral
(e) z no es buzo (c)Por (d)

(6) Ning aviador es buzo (5)Trad

Si todo beato es mártir
y todo mártir es apóstol
ent algún apóstol es beato: **Bamalip**

(1) Todo beato es mártir Hpt
(2) Para todo x, si x es beato ent x es mártir (1)Trad
(3) Todo mártir es apóstol Hpt
(4) Para todo x, si x es mártir ent x es apóstol (3)Trad
(5) Existe x tlq x es beato Hpt adicional
(6) z es beato Def de z
(7) Si z es beato ent z es mártir (2)De lo gral
(8) z es mártir (6) Por (7)
(9) Si z es mártir ent z es apóstol (4)De lo gral
(10) z es apóstol (8) Por (9)
(11) z es apóstol y z es beato (10)(6)De lo idént
(12) Existe x tlq x es apóstol y x es beato (11)De lo específico
(13) Alg apóstol es beato (12)Trad

Si ningún moro es beduino
y algún árabe es moro
ent algún árabe no es beduino: **Ferio**

(1) Ning moro es beduino Hpt
(2) Para todo x, si x es moro ent x no es beduino (1)Trad
(3) Alg árabe es moro Hpt
(4) Existe x tlq x es árabe y x es moro (3)Trad
(5) z es árabe y z es moro Def de z
(6) z es moro (5)De la conj
(7) Si z es moro ent z no es beduino (2)De lo gral
(8) z no es beduino (6) Por (7)
(9) z es árabe (5)De la conj
(10) z es árabe y z no es beduino (9)(8)De lo idént
(11) Existe x tlq x es árabe y x no es beduino (10)De lo específico
(12) Alg árabe no es beduino (11)Trad

REPERTORIOS DE PARVIPONTANOS

Adam Balsham, conocido como **Parvipontano,** llamado asi porque profesaba en el Petit Pont de París, fue el primero en ocuparse de acertijos que datan del siglo XII y que mostraremos a continuación:

Con **dos** variables:

A dice que B es veraz B dice que A miente	A no es veraz Si A es mit ent B es normal B no es veraz B no es mit
A dice que B no es mit B dice que A miente	A no es mit Si A es veraz ent B es normal B no es veraz B no es mit
A dice que B es normal B dice que A miente	Si A es mit ent B es veraz B no es mit
A dice que B no es normal B dice que A miente	Si A es veraz ent B es mit B no es veraz
A dice que B no es veraz B dice que A no miente	A no es mit Si A es veraz ent B es normal B no es veraz B no es mit
A dice que B es mit B dice que A no miente	A no es veraz Si A es mit ent B es normal B no es veraz B no es mit

A dice que B es normal B dice que A no miente	Si A es mit ent B es mit B no es veraz
A dice que B no es normal B dice que A no miente	Si A es veraz ent B es veraz B no es mit

Con **tres** variables:

A dice que B es veraz B dice que C miente C dice que A no miente	A no es veraz Si A es mit ent B es normal B no es veraz B no es mit C no es veraz
A dice que B es veraz B dice que C no miente C dice que A miente	A no es veraz Si A es mit ent B es normal B no es veraz B no es mit C no es mit Si C es veraz ent B es normal
A dice que B es mit B dice que C miente C dice que A miente	A no es veraz Si A es mit ent B es normal B no es veraz B no es mit C no es mit Si C es veraz ent B es normal
A dice que B es mit B dice que C no miente C dice que A no miente	A no es veraz Si A es mit ent B es normal B no es veraz B no es mit C no es veraz Si C es mit ent B es normal

A dice que B es normal B dice que C miente C dice que A miente	Si A es mit ent B es mit B no es veraz Si C es veraz ent B es mit
A dice que B es normal B dice que C miente C dice que A no miente	Si A es mit ent B es veraz B no es mit Si C es mit ent B es veraz
A dice que B es normal B dice que C no miente C dice que A miente	Si A es mit ent B es veraz B no es mit Si C es veraz ent B es veraz
A dice que B es normal B dice que C no miente C dice que A no miente	Si A es mit ent B es mit B no es veraz Si C es mit ent B es mit
A dice que B no es veraz B dice que C miente C dice que A miente	A no es mit Si A es veraz ent B es normal B no es veraz B no es mit C no es veraz Si C es mit ent B es normal
A dice que B no es veraz B dice que C no miente C dice que A no miente	A no es mit Si A es veraz ent B es normal B no es veraz B no es mit C no es mit Si C es veraz ent B es normal

A dice que B no es mit
B dice que C miente
C dice que A no miente

A no es mit
Si A es veraz ent B es normal
B no es veraz
B no es mit
C no es mit
Si C es veraz ent B es normal

A dice que B no es mit
B dice que C no miente
C dice que A miente

A no es mit
Si A es veraz ent B es normal
B no es veraz
B no es mit
C no es veraz
Si C es mit ent B es normal

A dice que B no es normal
B dice que C miente
C dice que A no miente

Si A es veraz ent B es mit
B no es veraz
Si C es veraz ent B es mit

A dice que B no es normal
B dice que C no miente
C dice que A miente

Si A es veraz ent B es mit
B no es veraz
Si C es mit ent B es mit

A dice que B no es normal
B dice que C no miente
C dice que A no miente

Si A es veraz ent B es veraz
B no es mit
Si C es veraz ent B es veraz

EJEMPLOS DE PARVIPONTANOS

Presentamos algunas demostraciones de parvipontanos utilizando el esquema deductivo:

A dice que B es veraz
B dice que C miente
C dice que A no miente: **Datos**

A <u>no es veraz</u>:

(1) A dice que B es veraz Dato
(2) B es veraz o B no es veraz Axioma

(3) Si B es veraz ent A no es veraz:

(a) B es veraz Hpt
(b) B dice que C miente Dato
(c) C miente (a)(b)Def de veraz
(d) C dice que A no miente Dato
(e) A miente (c)(d)Def de mentir
(f) A dice que B es veraz Dato
(g) B no es veraz (e)(f)Def de mentir
(h) A no es veraz (f)(g)Def de veraz, girada

(4) Si B no es veraz ent A no es veraz:

(a) B no es veraz Hpt
(b) A dice que B es veraz Dato
(c) A no es veraz (b)(a)Def de veraz, girada

(5) A no es veraz (2)(3)(4)Por casos

Si A es mitómano ent B es normal:

(1) A es mitómano Hpt
(2) A dice que B es veraz Dato
(3) B no es veraz (1)(2)Def de mit
(4) B es mitómano o B es normal (3)Def. común
(5) B no es mitómano:

(a) B dice que C miente Dato
(b) C dice que A no miente Dato
(c) A miente (2)Def de mentir
(d) C miente (b)(c)Def de mentir
(e) B no es mit (a)(d)Def de mit, girada

(6) B es normal (4)(5)Exclusión

NUEVOS MODOS DESCENDENTES

Si $\exists x$ tlq $P(x)$ y $Q(x)$ ent $\exists x$ tlq $P(x)$

Si $\exists x$ tlq $P(x)$ ent $\exists x$ tlq $P(x)$ o $Q(x)$

Si, $\forall x$, valen $P(x)$ y $Q(x)$, ent $\forall x$, vale $P(x)$

Si, $\forall x$, vale $P(x)$ ent $\forall x$, vale $P(x)$ o $Q(x)$

DEMOSTRACIONES

<u>Si</u> $\exists x$ <u>tlq</u> $P(x)$ <u>y</u> $Q(x)$ <u>ent</u> $\exists x$ <u>tlq</u> $P(x)$:

(1) $\exists x$ tlq $P(x)$ y $Q(x)$ Hpt
(2) $P(w)$ y $Q(w)$ Def de w
(3) $P(w)$ (2)Desc
(4) $\exists x$ tlq $P(x)$ (3)Desc

<u>Si</u> $\exists x$ <u>tlq</u> $P(x)$ <u>ent</u> $\exists x$ <u>tlq</u> $P(x)$ <u>o</u> $Q(x)$:

(1) $\exists x$ tlq $P(x)$ Hpt
(2) $P(w)$ Def de w
(3) $P(w)$ o $Q(w)$ (2)Desc
(4) $\exists x$ tlq $P(x)$ o $Q(x)$ (3)Desc

Si, $\forall x$, valen $P(x)$ y $Q(x)$, ent $\forall x$, vale $P(x)$:

(1) $\forall x$, valen $P(x)$ y $Q(x)$
(2) $\exists x$ tlq no vale $P(x)$ Neg
•(3) No vale $P(w)$ Def de w
(4) $P(w)$ y $Q(w)$ (1)Desc
•(5) $P(w)$ (4)Desc

Si, $\forall x$, vale $P(x)$ ent $\forall x$, vale $P(x)$ o $Q(x)$:

(1) $\forall x$, vale $P(x)$ Hpt
(2) $\exists x$ tlq no vale $P(x)$ y no vale $Q(x)$ Neg
(3) No vale $P(w)$ y no vale $Q(w)$ Def de w
•(4) Vale $P(w)$ (1)Desc
•(5) No vale $P(w)$ (3)Desc

CONJUNTOS

A continuación se nombrarán algunas propiedades de conjuntos que se utilizarán en la presente tesis.

Utilizaremos las letras A, B, C, . . . para denominar los conjuntos y las variables x, y, z, . . . como elementos de estos conjuntos.

Ejemplo:

$x \in A$ se lee x está en A,
x pertenece a A,
x es elemento de A.

Definición: $A \subset B$ ssi todo elm de A es elm de B <u>Def de</u> $\subset$

$A \subset B$ se lee A está contenido en B.

Propiedades:

$A \subset A$: **Reflexiva**

(1) $\forall x$, si $x \in A$ ent $x \in A$:
(a) $x \in A$ Hpt
(b) $x \in A$ (a)De lo idéntico

(2) Todo elm de A es elm de A (1)Trad
(3) $A \subset A$ (2)Def de $\subset$

Si $A \subset B$ y $B \subset C$ ent $A \subset C$: **Transitiva**

(1) $A \subset B$
(2) $B \subset C$ Hpt
(3) Todo elm de A es elm de B (1)
(4) Todo elm de B es elm de C (2)Def de $\subset$
(5) $\forall x$, si $x \in A$ ent $x \in B$ (3)
(6) $\forall x$, si $x \in B$ ent $x \in C$ (4)Trad
(7) $\forall x$, si $x \in A$ ent $x \in C$:

(a) $x \in A$ Hpt
(b) Si $x \in A$ ent $x \in B$ (5)De lo gral
(c) $x \in B$ (a) Por (b)
(d) Si $x \in B$ ent $x \in C$ (6)De lo gral
(e) $x \in C$ (c)Por (d)

(8) Todo elm de A es elm de C (7)Trad
(9) $A \subset C$ (8)Def de $\subset$

Si $A \subset B$ y $B \subset A$ ent $A = B$: **Antisimétrica**

(1) $A \subset B$
(2) $B \subset A$ Hpt
(3) Todo elm de A es elm de B (1)
(4) Todo elm de B es elm de A (2)Def de $\subset$
(5) $A = B$ (3)(4)Ax. de extensionalidad

Nota: El axioma de extensionalidad dice que:
Si A y B tienen los mismos elementos entonces A y B son el mismo conjunto.

No existe x tlq $x \in \varnothing$ Def de $\varnothing$

$\forall B,\ \varnothing \subset B$:

(1) No existe x tlq $x \in \varnothing$ Def de $\varnothing$
(2) No existe x tlq $x \in \varnothing$ y $x \notin B$ (1)Desc, girado
(3) $\forall x$, si $x \in \varnothing$ ent $x \in B$ (2)Giro
(4) $\varnothing \subset B$ (3)Def de $\subset$

Si no $\exists x$ tlq $x \in B$ ent $B = \varnothing$: **Lema**

(1) No $\exists x$ tlq $x \in B$ Hpt
(2) No $\exists x$ tlq $x \in B$ y $x \notin \varnothing$ (1)Desc, girado
(3) $\forall x$, si $x \in B$ ent $x \in \varnothing$ (2)Giro
(4) $B \subset \varnothing$ (3)Def de $\subset$
(5) $\varnothing \subset B$ Dem
(6) $B = \varnothing$ (4)(5)Def de $=$

FILTROS

Dado un conjunto I, un **filtro de I** es una colección f de subconjuntos de I tales que:

$I \in f$, $\varnothing \notin f$,
si $Y_1, Y_2 \in f$ ent $Y_1 \cap Y_2 \in f$,
si $Y \in f$ y $Y \subset Y' \subset I$ ent $Y' \in f$.

f se llama **ultrafiltro** de I ssi f es filtro de I y, para todo U,
si $U \subset I$ ent $U \in f$ o $I - U \in f$.

Ejemplo:

Si I es un conjunto infinito, el <u>filtro</u> <u>de</u> <u>Frechet</u> <u>de</u> I, consta de los conjuntos cofinitos en I.

Dado I infinito se define f tlq, para todo U, $U \in f$ ssi $U \subset I$ e $I-U$ es finito

Def de f

f es filtro de I:

(1) $I \in f$:

(a) $I \in f$ ssi $I \subset I$ e $I-I$ es finito Def de f
(b) $I \subset I$ Dem
(c) $I-I$ es finito:

(c_1) $I-I = \varnothing$ Alg
(c_2) $\varnothing$ es finito Dem
(c_3) $I-I$ es finito (c_2)(c_1)Def de =

(d) $I \subset I$ e $I-I$ es finito (b)(c)Desc
(e) $I \in f$ (d) Por (a)

(2) $\varnothing \notin f$:

(a) $\varnothing \in f$ Neg
(b) $\varnothing \in f$ ssi $\varnothing \subset I$ e $I-\varnothing$ es finito Def de f
(c) $\varnothing \subset I$ e $I-\varnothing$ es finito (a) Por (b)
(d) $I-\varnothing$ es finito (c)Desc
(e) $I-\varnothing = I$ Dem
• (f) I es finito (d)(e)Def de =
• (g) I no es finito Dato

(3) Si $Y_1, Y_2 \in f$ ent $Y_1 \cap Y_2 \in f$:

(a) $Y_1 \in f$
(b) $Y_2 \in f$ Hpt

(c) $Y_1 \in f$ ssi $Y_1 \subset I$ e $I-Y_1$ es finito

(d) $Y_2 \in f$ ssi $Y_2 \subset I$ e $I-Y_2$ es finito Def de f

(e) $Y_1 \subset I$ e $I-Y_1$ es finito (a) Por (c)

(f) $Y_2 \subset I$ e $I-Y_2$ es finito (b) Por (d)

(g) $Y_1 \subset I$

(h) $I-Y_1$ es finito (e)Desc

(i) $Y_2 \subset I$

(j) $I-Y_2$ es finito (f)Desc

(k)$Y_1 \cap Y_2 \in f$ ssi $Y_1 \cap Y_2 \subset Y$ e $I-(Y_1 \cap Y_2)$ es finito Def de f

(l)$Y_1 \cap Y_2 \subset I$ (g)(i)Alg

(m) $I - (Y_1 \cap Y_2)$ es finito:

  (m_1) $I - (Y_1 \cap Y_2) = (I-Y_1) \cup (I-Y_2)$ Alg

  (m_2) $(I-Y_1) \cup (I-Y_2)$ es finito (h)(j)Dem

  (m_3) $I - (Y_1 \cap Y_2)$ es finito (m_2)(m_1)Def de =

(n)$Y_1 \cap Y_2 \subset I$ e $I - (Y_1 \cap Y_2)$ es finito (l)(m)Desc

(o)$Y_1 \cap Y_2 \in f$ (n) Por (k)

(4) Si $Y \in f$ y $Y \subset Y' \subset I$ ent $Y' \in f$:

(a) $Y \in f$ Hpt

(b) $Y \in f$ ssi $Y \subset I$ e $I\text{-}Y$ es finito Def de f

(c) $Y \subset I$ e $I\text{-}Y$ es finito (a) Por (b)

(d)$Y \subset I$

(e) $I - Y$ es finito (c) Desc

(f)$Y \subset Y'$

(g)$Y' \subset I$ Hpt

(h)$Y' \in f$ ssi $Y' \subset I$ e $I\text{-}Y'$ es finito Def de f

(i) $I\text{-}Y'$ es finito:

  (i_1)$Y \subset Y'$ (f) Desc

  (i_2) $I\text{-}Y' \subset I\text{-}Y$ (i_1)Alg

  (i_3) $I\text{-}Y$ es finito (e) Desc

  (i_4) $I\text{-}Y'$ es finito (i_3)(i_2) Dem

(j)$Y' \subset I$ e $I\text{-}Y'$ es finito (g)(i) Desc

(j)$Y' \in f$ (j) Por (h)

(5)f es filtro de I (1)(2)(3)(4) Def de Filtro

CASI TOTALIDAD

Dado I, y un ultrafiltro $\underline{\mathbf{D}}$ de I, se define el cuantificador $\dot{\forall}i$, según $\underline{\mathbf{D}}$, como sigue:

$\dot{\forall}i$, según $\underline{\mathbf{D}}$, vale P(i) ssi $\exists V$ tlq $V \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in V$, P(i) **Def de $\dot{\forall}$**

<u>Si</u> $\forall i \in I$, P(i) <u>ent</u> $\dot{\forall}i$, <u>según</u> $\underline{\mathbf{D}}$ <u>,vale</u> P(i):

(1) $\forall i \in I$, P(i) Hpt
(2) $\dot{\forall}i$, según $\underline{\mathbf{D}}$, vale P(i) ssi $\exists V$ tlq $V \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in V$, P(i) Def de $\dot{\forall}$
(3) $\exists V$ tlq $V \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in V$, P(i):

(a) $I \in \underline{\mathbf{D}}$ Def de $\underline{\mathbf{D}}$
(b) $\forall i \in I$, P(i) (1)Desc
(c) $I \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in I$, P(i) (a)(b)Desc
(d) $\exists V$ tlq $V \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in V$, P(i) (c)Desc

(4) $\dot{\forall}i$, según $\underline{\mathbf{D}}$, vale P(i) (3) Por (2)

Si $\dot{\forall}$i, según **D**, vale P(i) ent $\exists$i tlq i$\in$I y P(i):

(1) $\dot{\forall}$i, según **D**, vale P(i) Hpt
(2) $\exists$V tlq V$\in$**D** y $\forall$i$\in$V, P(i) (1)Def de $\dot{\forall}$
(3) V$\in$**D**
(4) $\forall$i$\in$V, P(i) Def de V
(5) V $\neq \emptyset$ (3)Def de ultrafiltro
(6) $\exists$i tlq i$\in$V (5)Dem
(7) i$\in$V Def de i
(8) P(i) (7) Por (4)
(9) V $\subset$ I (3)Def de ultrafiltro
(10) i$\in$I (7)(9)Def de $\subset$
(11) i$\in$I y P(i) (10)(8)Desc
(12)$\exists$i tlq i$\in$I y P(i) (11)Desc

Nota: En lo sucesivo en lugar de escribir $\dot{\forall}$i, según **D**, se escribirá unicamente $\dot{\forall}$i.

NUEVOS MODOS DESCENDENTES PARA CASI TOTALIDAD

Si $\dot{\forall}$i, P(i) y Q(i), ent $\dot{\forall}$i P(i)

Si $\dot{\forall}$i P(i) ent $\dot{\forall}$i, P(i) o Q(i)

Demostraciones

<u>Si</u> $\dot{\forall}$i, P(i) <u>y</u> Q(i), <u>ent</u> $\dot{\forall}$i P(i):

(1) $\dot{\forall}$i, P(i) y Q(i) Hpt
(2) $\exists$V tlq V$\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall$i$\in$V, P(i) y Q(i) (1)Def de $\dot{\forall}$
(3) V$\in\underline{\mathbf{D}}$
(4) $\forall$i$\in$V, P(i) y Q(i) Def de V
(5) $\forall$i$\in$V, P(i) (4)Desc
(6) V$\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall$i$\in$V, P(i) (3)(5)Desc
(7) $\exists$V tlq V$\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall$i$\in$V, P(i) (6)Desc
(8) $\dot{\forall}$i P(i) (7)Def de $\dot{\forall}$

<u>Si</u> $\dot{\forall}$i P(i) <u>ent</u> $\dot{\forall}$i, P(i) <u>o</u> Q(i):

(1) $\dot{\forall}$i P(i) Hpt
(2) $\exists$V tlq V$\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall$i$\in$V, P(i) (1)Def de $\dot{\forall}$
(3) V$\in\underline{\mathbf{D}}$
(4) $\forall$i$\in$V, P(i) Def de V
(5) $\forall$i$\in$V, P(i) o Q(i) (4)Desc
(6) V$\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall$i$\in$V, P(i) o Q(i) (3)(5)Desc
(7) $\exists$V tlq V$\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall$i$\in$V, P(i) o Q(i) (6)Desc
(8) $\dot{\forall}$i, P(i) o Q(i) (7)Def de $\dot{\forall}$

$\dot{\forall}$i vale P(i) o $\dot{\forall}$i no vale P(i): **Lema**

(1) $\forall$i, $i\in U$ ssi $i\in I$ y P(i) Def de U

(2) Si $i\in U$ ent $i\in I$ y P(i) (1)Desc

(3) Si $i\in U$ ent $i\in I$:

(a) $i\in U$ Hpt

(b) $i\in I$ y P(i) (a) Por (2)

(c) $i\in I$ (b)Desc

(4) $U\subset I$ (3)Def de $\subset$

(5) $U\in\underline{\mathbf{D}}$ o $I-U\in\underline{\mathbf{D}}$ (4)Def de ultrafiltro

(6) Si $U\in\underline{\mathbf{D}}$ ent $\dot{\forall}$i vale P(i):

(a) $U\in\underline{\mathbf{D}}$ Hpt

(b) $\forall i\in U$, P(i):

(b_1) $i\in U$ Hpt

(b_2) $i\in I$ y P(i) (b_1) Por (1)

(b_3) P(i) (b_2)Desc

(c) $U\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i\in U$, P(i) (a)(b)Desc

(d) $\exists U$ tlq $U\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i\in U$, P(i) (c)Desc

(e) $\dot{\forall}$i vale P(i) (d)Def de $\dot{\forall}$

(7) Si $I-U\in\underline{\mathbf{D}}$ ent $\dot{\forall}$i no vale P(i):

(a) $I-U\in\underline{\mathbf{D}}$ Hpt

(b) $\forall i\in I-U$, no vale P(i):

(b_1) $i\in I-U$ Hpt

(b_2) $i\in I$ e $i\notin U$ (b_1)Def de $-$

(b_3) $i\in I$

(b_4) $i\notin U$ (b_2)Desc

(b_5) $i\notin U$ ssi $i\notin I$ o no vale P(i) (1)Giro

(b_6) $i\notin I$ o no vale P(i) (b_4) Por (b_5)

(b_7) no vale P(i) (b_6)(b_3)Excl.

(c) $I-U\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i\in I-U$, no vale P(i) (a)(b)Desc

(d) $\exists V$ tlq $V\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i\in V$, no vale P(i) (c)Desc

(e) $\dot{\forall}$i no vale P(i) (d)Def de $\dot{\forall}$

(7) $\dot{\forall}$i vale P(i) o $\dot{\forall}$i no vale P(i) (5)(6)(7)Por casos

$\dot{\forall}i$, P(i) $\underline{y}$ Q(i), <u>ssi</u> $\dot{\forall}i$ P(i) $\underline{y}$ $\dot{\forall}i$ Q(i):

(1) Si, $\dot{\forall}i$, P(i) y Q(i), ent $\dot{\forall}i$ P(i) y $\dot{\forall}i$ Q(i):

(a) $\dot{\forall}i$, P(i) y Q(i) Hpt
(b) $\dot{\forall}i$ P(i) (a)
(c) $\dot{\forall}i$ Q(i) (a)Dem
(d) $\dot{\forall}i$ P(i) y $\dot{\forall}i$ Q(i) (b)(c)Desc

(2) Si, $\dot{\forall}i$ P(i) y $\dot{\forall}i$ Q(i) ent $\dot{\forall}i$, P(i) y Q(i):

(a) $\dot{\forall}i$ P(i)
(b) $\dot{\forall}i$ Q(i) Hpt
(c) $\exists V$ tlq $V \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in V$, P(i) (a)
(d) $\exists V$ tlq $V \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in V$, Q(i) (b)Def de $\dot{\forall}$
(e) $U \in \underline{\mathbf{D}}$
(f) $\forall i \in U$, P(i) Def de U
(g) $V \in \underline{\mathbf{D}}$
(h) $\forall i \in V$, Q(i) Def de V
(i) $U \cap V \in \underline{\mathbf{D}}$ (e)(g)Def de ultrafiltro
(j) $\forall i \in U \cap V$, P(i) y Q(i):

(j_1) $i \in U \cap V$ Hpt
(j_2) $i \in U$ e $i \in V$ (j_1)Def de $\cap$
(j_3) $i \in U$
(j_4) $i \in V$ (j_2)Desc
(j_5) P(i) (j_3) Por (f)
(j_6) Q(i) (j_4) Por (h)
(j_7) P(i) y Q(i) (j_5)(j_6)Desc

(k) $U \cap V \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in U \cap V$, P(i) y Q(i) (i)(j)Desc
(l) $\exists W$ tlq $W \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in W$, P(i) y Q(i) (k)Desc
(m) $\dot{\forall}i$, P(i) y Q(i) (l)Def de $\dot{\forall}$

(3) $\dot{\forall}i$, P(i) y Q(i) ssi $\dot{\forall}i$ P(i) y $\dot{\forall}i$ Q(i) (1)(2)Def de ssi

$\dot{\forall}$i, P(i) <u>o</u> Q(i) <u>ssi</u> $\dot{\forall}$i P(i) <u>o</u> $\dot{\forall}$i Q(i):

(1) Si $\dot{\forall}$i, P(i) o Q(i), ent $\dot{\forall}$i P(i) o $\dot{\forall}$i Q(i):

(a) $\dot{\forall}$i, P(i) o Q(i) Hpt
(b) $\dot{\forall}$i P(i) o $\dot{\forall}$i no P(i) Lema
(c) Si $\dot{\forall}$i P(i) ent $\dot{\forall}$i P(i) Desc
(d) Si $\dot{\forall}$i no P(i) ent $\dot{\forall}$i Q(i):

(d_1) $\dot{\forall}$i no P(i) Hpt
(d_2) $\dot{\forall}$i, P(i) o Q(i), pero no P(i) (a)(d_1)Dem
(d_3) $\dot{\forall}$i Q(i):

(α)$\exists$V tlq V$\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall$i$\in$V, P(i) o Q(i), pero no P(i) (d_2)Def de $\dot{\forall}$
(β)U$\in\underline{\mathbf{D}}$
(γ)$\forall$i$\in$U, P(i) o Q(i), pero no P(i) Def de U
(δ)$\forall$i$\in$U, Q(i):

(δ_1) i$\in$U Hpt
(δ_2) P(i) o Q(i), pero no P(i) (δ_1) Por (γ)
(δ_3) Q(i) (δ_2)Excl

(ε) U$\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall$i$\in$U, Q(i) (β)(δ)Desc
(ζ) $\exists$V tlq V$\in\underline{\mathbf{D}}$ y $\forall$i$\in$V, Q(i) (ε)Desc
(η) $\dot{\forall}$i Q(i) (ζ)Def de $\dot{\forall}$

(e) $\dot{\forall}$i P(i) o $\dot{\forall}$i Q(i) (b)(c)(d)Por casos

(2) Si $\dot{\forall}$i P(i) o $\dot{\forall}$i Q(i) ent $\dot{\forall}$i, P(i) o Q(i):

(a) $\dot{\forall}$i P(i) o $\dot{\forall}$i Q(i) Hpt
(b) Si $\dot{\forall}$i P(i) ent $\dot{\forall}$i, P(i) o Q(i) Desc
(c) Si $\dot{\forall}$i Q(i) ent $\dot{\forall}$i, P(i) o Q(i) Desc
(d) $\dot{\forall}$i, P(i) o Q(i) (a)(b)(c)Por casos

(3) $\dot{\forall}$i, P(i) o Q(i) ssi $\dot{\forall}$i P(i) o $\dot{\forall}$i Q(i) (1)(2)Def de ssi

No $\dot{\forall}$i P(i) ssi $\dot{\forall}$i no P(i):

(1)Si no $\dot{\forall}$i P(i) ent $\dot{\forall}$i no P(i):

(a) No $\dot{\forall}$i P(i) Hpt
(b) $\dot{\forall}$i P(i) o $\dot{\forall}$i no P(i) Dem
(c) $\dot{\forall}$i no P(i) (b)(a)Excl

(2) Si $\dot{\forall}$i no P(i) ent no $\dot{\forall}$i P(i):

(a) $\dot{\forall}$i no P(i)
(b) $\dot{\forall}$i P(i) Neg
(c) $\dot{\forall}$i, P(i) y no P(i) (b)(a)Dem
(d) $\exists$i tlq P(i) y no P(i) (c)Dem
• • (e) P(i) y no P(i) Def de i

(3)No $\dot{\forall}$i P(i) ssi $\dot{\forall}$i no P(i) (1)(2)Def de ssi

$\dot{\forall}$i, <u>si</u> P(i) <u>ent</u> Q(i) <u>ssi</u> <u>si</u> $\dot{\forall}$i P(i) <u>ent</u> $\dot{\forall}$i Q(i):

(1) $\dot{\forall}$i, si P(i) ent Q(i), ent si $\dot{\forall}$i P(i) ent $\dot{\forall}$i Q(i):

(a) $\dot{\forall}$i, si P(i) ent Q(i) Hpt
(b) $\exists V$ tlq $V \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in V$, si P(i) ent Q(i) (a)Def de $\dot{\forall}$
(c) $U \in \underline{\mathbf{D}}$
(d) $\forall i \in U$, si P(i) ent Q(i) Def de U
(e) Si, $\dot{\forall}$i P(i) ent $\dot{\forall}$i Q(i):

(e_1) $\dot{\forall}$i P(i) Hpt
(e_2) $\exists V$ tlq $V \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in V$, P(i) (e_1)Def de $\dot{\forall}$
(e_3) $W \in \underline{\mathbf{D}}$
(e_4) $\forall i \in W$, P(i) Def de W
(e_5) $U \cap W \in \underline{\mathbf{D}}$ (e_3)Def de $\underline{\mathbf{D}}$
(e_6) $\forall i \in U \cap W$, Q(i):
(α) $i \in U \cap W$ Hpt
(β) $i \in U$ e $i \in W$ (α)Def de $\cap$
(γ) $i \in W$ (β)Desc
(δ) P(i) (γ) Por (e_4)
(ε) $i \in U$ (β)Desc
(η) Si P(i) ent Q(i) (ε) Por (d)
(ζ) Q(i) (δ) Por (η)

(e_7) $U \cap W \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in U \cap W$, Q(i) (e_5)(e_6)Desc
(e_8) $\exists V$ tlq $V \in \underline{\mathbf{D}}$ y $\forall i \in V$, Q(i) (e_7)Desc
(e_9) $\dot{\forall}$i Q(i) (e_8)Def de $\dot{\forall}$

(2) Si, si $\dot{\forall}$i P(i) ent $\dot{\forall}$i Q(i), ent $\dot{\forall}$i, si P(i) ent Q(i):

(a) Si $\dot{\forall}$i P(i) ent $\dot{\forall}$i Q(i) Hpt
(b) No $\dot{\forall}$i P(i) o $\dot{\forall}$i Q(i) (a)Giro
(c) $\dot{\forall}$i no P(i) o $\dot{\forall}$i Q(i) (b)Dem
(d) $\dot{\forall}$i no P(i) o Q(i) (c)Dem
(e) $\dot{\forall}$i, si P(i) ent Q(i) (d)Giro

(3) $\dot{\forall}$i, si P(i) ent Q(i) ssi si $\dot{\forall}$i P(i) ent $\dot{\forall}$i Q(i) (1)(2)Def de ssi

BASE DE FILTRO

Base de filtro de I es una colección no vacía $\underline{\mathbf{B}}$ de subconjuntos de I tales que

$\varnothing \notin \underline{\mathbf{B}}$

Si $U_1, U_2 \in \underline{\mathbf{B}}$ ent $U_1 \cap U_2 \in \underline{\mathbf{B}}$. **Def de base**

Proposición:

Si $\underline{\mathbf{B}}$ es base de filtro de I ent $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en algún filtro de I :

(1) B es base de filtro de I Hpt

(2) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ Porque $\underline{\mathbf{B}} \neq \varnothing$

(3) $\forall U$, si $U \in \underline{\mathbf{B}}$ ent $U \subset I$

(4) $\varnothing \notin \underline{\mathbf{B}}$

(5) Si $U_1, U_2 \in \underline{\mathbf{B}}$ ent $U_1 \cap U_2 \in \underline{\mathbf{B}}$ (1)Def de base

(6) $\exists f$ tlq f es filtro de I y $\underline{\mathbf{B}} \subset f$:

(a)$\forall U, U \in f$ ssi $U \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ esta contenido en U Def de f

(b)$I \in f$:

(b_1) $I \in f$ ssi $I \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ esta contenido en I (a)Desc

(b_2) $I \subset I$ Alg

(b_3) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U \subset I$:

(α) $\exists$ U tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ (2)Desc

(β) $U_o \in \underline{\mathbf{B}}$ Def de U_o

(γ) Si $U_o \in \underline{\mathbf{B}}$ ent $U_o \subset I$ (3)Desc

(δ) $U_o \subset I$ (β) Por (γ)

(ε) $U_o \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U_o \subset I$ (β)(δ)Desc

(η) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U \subset I$ (ε)Desc

(b_4) Alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en I (b_3)Trad

(b_5) $I \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ esta contenido en I (b_2)(b_4)Desc

(b_6) $I \in f$ (b_5) Por (b_1)

(c) $\varnothing \notin f$:

(c_1) $\varnothing \in f$ Neg

(c_2) $\varnothing \in f$ ssi $\varnothing \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en $\varnothing$ (a)Desc

(c_3) $\varnothing \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en $\varnothing$ (c_1)Por (c_2)

(c_4) Alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en $\varnothing$ (c_3) Desc

(c_5) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U \subset \varnothing$ (c_4)Trad

(c_6) $U \in \underline{\mathbf{B}}$

(c_7) $U \subset \varnothing$ Def de U

(c_8) $U = \varnothing$ (c_7)Alg

• (c_9) $\varnothing \in \underline{\mathbf{B}}$ (c_6)(c_8)Def de =

•(c_{10}) $\varnothing \notin \underline{\mathbf{B}}$ (4)Desc

(d) Si $Y_1, Y_2 \in f$ ent $Y_1 \cap Y_2 \in f$:

(d_1) $Y_1 \in f$

(d_2) $Y_2 \in f$ Hpt

(d_3) $Y_1 \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en Y_1 (d_1)

(d_4) $Y_2 \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en Y_2 (d_2) Por (a)

(d_5) $Y_1 \subset I$

(d_6) Alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en Y_1 (d_3)

(d_7) $Y_2 \subset I$

(d_8) Alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en Y_2 (d_4)Desc

(d_9) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U \subset Y_1$ (d_6)

(d_{10}) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U \subset Y_2$ (d_8)Trad

(d_{11}) $U_1 \in \underline{\mathbf{B}}$

(d_{12}) $U_1 \subset Y_1$ Def de U_1

(d_{13}) $U_2 \in \underline{\mathbf{B}}$

(d_{14}) $U_2 \subset Y_2$ Def de U_2

(d_{15}) $Y_1 \cap Y_2 \in f$ ssi $Y_1 \cap Y_2 \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en $Y_1 \cap Y_2$ (a)Desc

(d_{16}) $Y_1 \cap Y_2 \subset I$ (d_5)(d_7)Alg
(d_{17}) $U_1 \cap U_2 \in \underline{\mathbf{B}}$ (d_{11})(d_{13}) Por (5)
(d_{18}) $U_1 \cap U_2 \subset Y_1 \cap Y_2$ (d_{12})(d_{14}) Alg
(d_{19}) $U_1 \cap U_2 \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U_1 \cap U_2 \subset Y_1 \cap Y_2$ (d_{17})(d_{18})Desc
(d_{20}) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U \subset Y_1 \cap Y_2$ (d_{19})Desc
(d_{21}) Alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en $Y_1 \cap Y_2$ (d_{20})Desc
(d_{22}) $Y_1 \cap Y_2 \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en $Y_1 \cap Y_2$ (d_{16}) (d_{21}) Desc
(d_{23}) $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{f}$ (d_{22})Por (d_{15})

(e) Si $Y \in \mathcal{f}$ y $Y \subset Y' \subset I$ ent $Y' \in \mathcal{f}$:

(e_1) $Y \in \mathcal{f}$ Hpt
(e_2) $Y \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en Y (e_1)Por (a)
(e_3) $Y \subset I$
(e_4) Alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en Y (e_2)Desc
(e_5) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U \subset Y$ (e_4)Trad
(e_6) $U \in \underline{\mathbf{B}}$
(e_7) $U \subset Y$ Def de U
(e_8) $Y \subset Y'$
(e_9) $Y' \subset I$ Hpt
(e_{10}) $Y' \in \mathcal{f}$ ssi $Y' \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ esta contenido en Y' (a)Desc
(e_{11}) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U \subset Y'$:

(α) $U \in \underline{\mathbf{B}}$ (e_6)Desc
(β) $U \subset Y'$ (e_7)(e_8)Alg
(γ) $U \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U \subset Y'$ (α)(β)Desc
(δ) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U \subset Y'$ (γ)Desc

(e_{12}) Alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en Y' (e_{11})Trad
(e_{13}) $Y' \subset I$ y alg elm $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en Y' (e_9)(e_{12})Desc
(e_{14}) $Y' \in \mathcal{f}$ (e_{13})Por (e_{10})

(f) $\mathcal{f}$ es filtro de I (b)(c)(d)(e)Def de filtro

(g) $\underline{\mathbf{B}} \subset f$:

$\forall Y$, si $Y \in \underline{\mathbf{B}}$ ent $Y \in f$:

(g_1) $Y \in \underline{\mathbf{B}}$ Hpt

(g_2) $Y \in f$ ssi $Y \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en Y (a)Desc

(g_3) Si $Y \in \underline{\mathbf{B}}$ ent $Y \subset I$ (3)Desc

(g_4) $Y \subset I$ (g_1)Por (g_3)

(g_5) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U \subset Y$:

(α) $Y \in \underline{\mathbf{B}}$ (g_1) Desc

(β) $Y \subset Y$ Alg

(γ) $Y \in \underline{\mathbf{B}}$ y $Y \subset Y$ (α)(β)Desc

(δ) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{B}}$ y $U \subset Y$ (γ) Desc

(g_6) Alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en Y (g_5)Trad

(g_7) $Y \subset I$ y alg elm de $\underline{\mathbf{B}}$ está contenido en Y (g_4)(g_6)Desc

(g_8) $Y \in f$ (g_7)Por (g_2)

Corolario :

Si $\underline{\mathbf{A}}$ es una colección no vacía de subconjuntos de I tal que toda intersección finita de elementos de $\underline{\mathbf{A}}$ es no vacía entonces existe $\underline{\mathbf{B}}$ tal que $\underline{\mathbf{B}}$ es base de filtro de I y $\underline{\mathbf{A}} \subset \underline{\mathbf{B}}$:

(1) $\underline{\mathbf{A}}$ es no vacía
(2) $\forall$ U , si $U \in \underline{\mathbf{A}}$ ent $U \subset I$
(3) $\forall U_1, \ldots, U_n \in \underline{\mathbf{A}}$, $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \neq \varnothing$ Hpt
(4) $\exists$ $\underline{\mathbf{B}}$ tlq $\underline{\mathbf{B}}$ es base de filtro I y $\underline{\mathbf{A}} \subset \underline{\mathbf{B}}$:

(a) $Y \in \underline{\mathbf{B}}$ ssi $\exists U_1, \ldots, U_n \in \underline{\mathbf{A}}$ tlsq $Y = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ Def de $\underline{\mathbf{B}}$
(b) $\exists Y$ tlq $Y \in \underline{\mathbf{B}}$:
(b_1) $\exists U$ tlq $U \in \underline{\mathbf{A}}$ (1)Def de vacío
(b_2) $U \in \underline{\mathbf{A}}$ Def de U
(b_3) $U = U \cap U$ Alg
(b_4) $U, U \in \underline{\mathbf{A}}$ y $U = U \cap U$ (b_2)(b_2)(b_3)Desc
(b_5) $\exists U_1, U_2$ tlsq $U_1, U_2 \in \underline{\mathbf{A}}$ y $U = U_1 \cap U_2$ (b_4)Desc
(b_6) $U \in \underline{\mathbf{B}}$ (b_5) Def de $\underline{\mathbf{B}}$
(b_7) $\exists Y$ tlq $Y \in \underline{\mathbf{B}}$ (b_6)Desc

(c) $\forall Y$, si $Y \in \underline{\mathbf{B}}$ ent $Y \subset I$:
(c_1) $Y \in \underline{\mathbf{B}}$ Hpt
(c_2) $\exists U_1, \ldots, U_n \in \underline{\mathbf{A}}$ tlsq $Y = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ (c_1)Por (a)
(c_3) $U_1, \ldots, U_n \in \underline{\mathbf{A}}$
(c_4) $Y = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ Def de $U_1, \ldots, U_n$
(c_5) $U_1, \ldots, U_n \subset I$ (c_3)Por (2)
(c_6) $U_1 \cap \ldots \cap U_n \subset I$ (c_5) Alg
(c_7) $Y \subset I$ (c_6)(c_4)Def de =

(d) $\varnothing \notin \underline{\mathbf{B}}$:
(d_1) $\varnothing \in \underline{\mathbf{B}}$ Neg
(d_2) $\exists U_1, \ldots, U_n \in \underline{\mathbf{A}}$ tlsq $\varnothing = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ (d_1)Def de $\underline{\mathbf{B}}$
(d_3) $U_1, \ldots, U_n \in \underline{\mathbf{A}}$
• (d_4) $\varnothing = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ Def de $U_1, \ldots, U_n$
• (d_5) $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \neq \varnothing$ (d_3)Por (3)

(e) Si $Y', Y'' \in \underline{\mathbf{B}}$ ent $Y' \cap Y'' \in \underline{\mathbf{B}}$:

(e_1) $Y' \in \underline{\mathbf{B}}$
(e_2) $Y'' \in \underline{\mathbf{B}}$ Hpt
(e_3)$\exists\ U'_1, \ldots, U'_n \in \underline{\mathbf{A}}$ tlsq $Y' = U'_1 \cap \ldots \cap U'_n$ (e_1)
(e_4)$\exists\ U''_1, \ldots, U''_m \in \underline{\mathbf{A}}$ tlsq $Y'' = U''_1 \cap \ldots \cap U''_m$ (e_2)Def de B
(e_5) $U'_1, \ldots, U'_n \in \underline{\mathbf{A}}$
(e_6) $Y' = U'_1 \cap \ldots \cap U'_n$ Def de $U'_1, \ldots, U'_n$
(e_7) $U''_1, \ldots, U''_m \in \underline{\mathbf{A}}$
(e_8) $Y'' = U''_1 \cap \quad \cap U''_m$ Def de $U''_1, \ldots, U''_m$
(e_9) $U'_1 \ldots U'_n , U''_1 \ldots U''_m \in \underline{\mathbf{A}}$ (e_5)(e_7)Desc
(e_{10}) $Y' \cap Y'' = U'_1 \cap \ldots \cap U'_n \cap U''_1 \cap \ldots \cap U''_m$ (e_6)(e_8)Alg
(e_{11}) $Y' \cap Y'' \in \underline{\mathbf{B}}$ (e_9)(e_{10})Def de B

(f) $\underline{\mathbf{B}}$ es base de filtro de I (b)(c)(d)(e)Def de base
(g) $\forall Y$, si $Y \in A$ ent $Y \in B$:

(g_1)$Y \in \underline{\mathbf{A}}$ Hpt
(g_2) $Y = Y \cap Y$ Alg
(g_3) $Y, Y \in \underline{\mathbf{A}}$ y $Y = Y \cap Y$ (g_1)(g_1)(g_2)Desc
(g_4) $\exists\ Y_1, Y_2$ tlsq $Y_1, Y_2 \in \underline{\mathbf{A}}$ y $Y_1 \cap Y_2$ (g_3)Desc
(g_5) $Y \in \underline{\mathbf{B}}$ (g_4)Def de $\underline{\mathbf{B}}$

(h) $\underline{\mathbf{A}} \subset \underline{\mathbf{B}}$ (g)Def de $\subset$
(i) $\underline{\mathbf{B}}$ es base de filtro de I y $\underline{\mathbf{A}} \subset \underline{\mathbf{B}}$ (f)(h)Desc
(j) $\exists\ \underline{\mathbf{B}}$ tlq $\underline{\mathbf{B}}$ es base de filtro de I y $\underline{\mathbf{A}} \subset \underline{\mathbf{B}}$ (i)Desc

BIBLIOGRAFÍA

[1] Topologie general
Bourbaki, N.
Hermann, París.

[2] Teoría intuitiva de los conjuntos
Halmos, Paul Richard
1965.
Continental, México.

[3] Topology
Kelley
Van Nostrand, N.York.

[4] Aportaciones matemáticas
Serie comunicaciones 20
Sélem Avila Elías
S.M.M. 1997.

[5] Taller de lógica matemática
Zubieta Russi Gonzalo
1992.
Graw-Hill.

[6] Notas de clase
Zubieta Russi Gonzalo
Sin publicar.