UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA DE EXISTENCIA Y RELAJAMIENTO EN CONTROL OPTIMO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

CARLOS ALBERTO TRENADO COLIN

DIRECTOR DE TESIS: DR. JAVIER F. ROSENBLUETH LAGUETTE.

MEXICO, D. F. 1999.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Teoría de existencia y relajamiento en control óptimo".

realizado por CARLOS ALBERTO TRENADO COLIN

con número de cuenta 9455956-5 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Javier Rosenblueth Laguette	
Propietario	Dr. Juan González Hernández	Juan González Hernández
Propietario	M. en C. Apolinar Calderón Segura	
Suplente	Dr. Luis B. Morales Mendoza	
Suplente	Dr. Jean Pierre Hennart Bodet	

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. Julio César Guevara Bravo

Teoría de existencia y relajamiento en control óptimo

Carlos A. Trenado Colín

Enero, 1999

AGRADECEMIENTOS.

Para la realizacón de mi carrera profesional ha sido fundamental la ayuda de mi familia, mi tia Tere, mi tio Marcos, mi mamá Leonor son parte importante, debo decir que ellos me han dado todo su apoyo, han estado conmigo en todo momento, realmente no encuentro palabras para expresarles mi gratitud.
También quiero mencionar a mis hermanos Delia, Marcos, Rodrigo, Daniel, Fernando a quienes de igual forma esta dedicado el presente trabajo.
A la memoria de mi abuelita Paula, a quién recuerdo con mucho amor y respeto.

De manera especial agradezco al Dr. Javier Rosenblueth, por permitirme compartir la aventura de la investigación, por permitirme aprender algo más que matemáticas.

El apoyo del Instituto de Investigación en Matematicas Aplicadas y en Sistemas de la UNAM ha sido muy valioso, donde la colaboración de Anita y Margarita realmente me ha sacado de problemas en muchas ocasiones.
Por último y no menos importante, deseo dedicar también esta tesis a todas las personas que observo diariamente en mi andar, y que siempre me recuerdan el gran compromiso que tengo con México y mi familia, a todos aquellos que se esfuerzan por alcanzar ideales honestos, a los trabajadores que hacen posible la existencia de las Universidades.

Contenido

1 Teoría clásica de relajamiento. 3

1.1 Introducción. 3

1.2 Problema básico y conceptos. 5

1.3 Soluciones original, aproximada y relajada. 8

1.3.1 Problema sin U-solución minimizante. 8

1.3.2 Problema con U-solución aproximada minimizante. 8

1.3.3 Problema con solución relajada. 9

1.3.4 Técnica de relajamiento clásica para problemas sin retardos en los controles. 12

1.4 Conceptos básicos para la teoría de relajamiento en control óptimo. 13

1.4.1 Isomorfismo entre $B(T,R)$ y $L^1(T,C(R))$. 16

1.4.2 Isomorfismo entre $frm(R)$ y $C(R)^*$. 17

1.4.3 Sumergimiento de R en $frm(R)$. Extensión de funciones continuas de R a $frm(R)$. 17

1.4.4 Definición de los espacios $N(T,R), M(T,R)$ y $U(T,R)$. Sumergimiento de $U(T,R)$ en $\zeta(= M(T,R))$. 18

1.4.5 Los espacios isomorfos $B(T,R)^*$, $N(T,R)$ y sus subconjuntos $M(T,R)$, $U(T,R)$ con la topología de la norma débil. 18

2 Teoría de relajamiento para problemas con retardos en las funciones de control. 21

2.1 Introducción. 21

2.2 Relajamiento vía el problema reducido. 23

2.3 Relajamiento débil y reformulación de problemas. 24

2.4 Modelos de relajamiento para el espacio de controles ordinarios retardados. . 26

2.5 Relaciones entre los procedimientos de relajamiento para problemas con retardos en los controles. 28

2.6 Solución de la conjetura de Warga. 29

2.7 Un nuevo modelo de relajamiento para problemas con retardos en los controles. 40

3 Aplicación de la teoría de relajamiento 45

3.1 Un problema en economía. 45

CAPITULO 1

Teoría clásica de relajamiento.

1.1 Introducción.

El objetivo de este trabajo consiste en presentar una recopilación de los principales resultados que se han obtenido recientemente en la teoría de relajamiento en control óptimo, así como ilustrar posibles aplicaciones de esa teoría.
En [13] Warga desarrolla con detalle la teoría clásica de relajamiento para sistemas de control que no involucran retardos en las dinámicas. El caso de sistemas con retardos ha sido estudiado principalmente por Rosenblueth, Vinter, Warga y Zhu y en este trabajo incluimos por primera vez un resumen global de la teoría que han desarrollado. En particular, explicamos detalladamente un modelo propio para problemas con dos retardos en las variables de control y comparamos distintos procedimientos de relajamiento que se han propuesto.
La importancia de relajar sistemas de control óptimo está explicada de manera precisa y clara en [13] donde se hace referencia a los orígenes de la teoría (en particular en los trabajos de Young y McShane) y se presentan distintos ejemplos prácticos. Clarke (ver [5]) resume dicha importancia con la siguiente frase: "Un problema relajado es, en general, el único para el cual teoremas de existencia pueden probarse y, por esta razón, hay muchos que lo consideran el único problema razonable que puede considerarse en la práctica".
En el capítulo 1 resumimos los principales aspectos de la teoría clásica basados principalmente en [13]. Incluimos los conceptos básicos, así como un ejemplo concreto que ayuda a entender la técnica clásica para aproximar un minimizador relajado a través de controles ordinarios.
En el capítulo 2 presentamos un resumen de los resultados que se han obtenido recientemente al tratar de definir un modelo que resulte propio para sistemas con retardos. Dicho resumen reúne por primera vez los distintos modelos que se han propuesto e incluye explicaciones de las principales dificultades que se presentan al tratar de caracterizar la cerradura del espacio de controles ordinarios con retardos. Asimismo damos una demostración sencilla del resultado que afirma que uno de dichos modelos es en efecto propio. Por último, en el capítulo 3, incluimos posibles aplicaciones de dicha teoría.
Con la idea de situar las ideas básicas de la teoría de relajamiento consideremos brevemente

el siguiente problema de control óptimo: Supongamos que tenemos dados $\xi \in \Re^n, \Omega \subset \Re^m$ compacto y funciones $g: \Re^n \to \Re$, $f: [0,1] \times \Re^n \times \Re^m \to \Re^n$. Sea $T = [0,1]$ y consideremos el problema de minimizar $g(y(1))$ sujeto a
$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t))$ c.s. en T
$y(0) = \xi$
$u(t) \in \Omega$ c.s. en T.
Denotemos por $U(T,\Omega)$ el conjunto de funciones medibles $u: T \to \Re^m$ que satisfacen $u(t) \in \Omega$ c.s. en T. Los elementos de $U(T,\Omega)$ son llamados controles ordinarios.
Un par (y,u) formado por un control ordinario u y una función absolutamente continua $y: T \to \Re^n$ la cual satisfface la ecuación diferencial es llamado un proceso ordinario.
Si $y(0) = \xi$, el proceso ordinario es llamado admisible. El problema de optimización sobre todos los procesos ordinarios admisibles es llamado el problema original $(P_{original})$.
Dos preguntas surgen ahora: ¿Cuándo el problema original tiene un minimizador? y, en el caso de que no exista un minimizador, ¿Cómo podemos complementar a la clase de procesos ordinarios admisibles para asegurar la existencia de un minimizador?
Ambas tienen respuesta satisfactoria. Para la primera pregunta, una simple condición geométrica

$$f(t,y,\Omega) \text{ es convexa } \forall (t,y) \in T \times \Re^n,$$

asegura la existencia de minimizadores para el problema original, o sea, la existencia de un proceso ordinario admisible óptimo. Para la segunda pregunta, una teoría de existencia aplicable a conjuntos de velocidad no convexos $f(t,y,\Omega)$ considera la noción de proceso relajado.
Un control relajado es una función medible esencialmente acotada μ definida en T, cuya imagen está contenida en el espacio de las medidas de probabilidad de Radón (medidas de Borel regular finitas) en Ω, donde medible significa que $t \to \int c(r)\mu(t)(dr)$ es medible para todo $c \in C(\Omega)$, el espacio de Banach de las funciones de valor real continuas en Ω con la norma del supremo.
Denotemos por $M(T,\Omega)$ el conjunto de controles relajados, el cual puede ser considerado como un subespacio del espacio dual topológico de $L^1(T, C(\Omega))$ actuando en elementos φ en el espacio primal de acuerdo con

$$\varphi \to \int \varphi(t, \mu(t))dt = \int dt \int \varphi(t,r)\mu(t)(dr),$$

y a $M(T,\Omega)$ le asignamos la topología débil estrella de $L^1(T, C(\Omega))^*$.
Un proceso relajado es un par (y,μ) compuesto por un control relajado μ y una función absolutamente continua y la cual es solución de la ecuación diferencial

$$\dot{y}(t) = \int f(t, y(t), r)\mu(t)(dr).$$

Tal proceso es admisible si $y(0) = \xi$, y el problema sobre todos los procesos relajados admisibles es llamado el problema relajado $(P_{relajado})$.

En [13] se muestra que si consideramos al conjunto $U(T,\Omega)$ como un subespacio de $M(T,\Omega)$, identificando cada $u \in U(T,\Omega)$ con la función $t \to \delta_{u(t)}$, donde δ_a es la medida de Dirac en a (medida unitaria concentrada en el punto a), entonces $M(T,\Omega)$ es un conjunto compacto el cual coincide con la cerradura de $U(T,\Omega)$.
Con las hipótesis usuales impuestas en las funciones que delimitan el problema, tal resultado implica la existencia de un minimizador relajado y el hecho de que este pueda ser aproximado con controles ordinarios. En el caso de tener estas condiciones decimos que: "El conjunto de controles relajados es una extensión propia del conjunto de controles originales".
Para este tipo de problemas se tiene otra caracterización equivalente para que la técnica de relajamiento sea propia, esta es, que "el mínimo costo para el problema relajado coincida con el ínfimo costo del problema original":

$$inf\{P_{original}\} = min\{P_{relajado}\}$$

aunque, como observaremos con un ejemplo concreto, para problemas con restricciones en el punto final las dos caracterizaciones pueden no ser equivalentes.
Como se menciona en [9], tener una extensión propia del conjunto de controles originales es deseable por varias razones. Significa que existe una relación estrecha entre el problema "original" y el problema "relajado". Además, sugiere una metodología para encontrar procesos ordinarios admisibles cuyo costo (valor de la función a minimizar) se acerca al costo ínfimo en situaciones donde la existencia de procesos ordinarios admisibles minimizantes no está asegurada, esto es, podría resolverse el problema relajado y aproximar el minimizador relajado a través de controles ordinarios.
En general para problemas como el que tratamos al inicio, el conjunto de controles u para los cuales existe y tal que (y,u) es un proceso ordinario admisible, coincide con el conjunto de controles ordinarios, lo cual implica que el relajamiento propio cumplirá el objetivo de encontrar procesos ordinarios admisibles cuyo costo converge al costo ínfimo.
La noción de relajamiento propio toma en cuenta que ciertas restricciones pueden ser satisfechas de manera aproximada por pares (y,u), los cuales producen un valor de la función de costo menor que las correspondientes soluciones ordinarias minimizantes (las cuales posteriormente definiremos), por lo cual el objetivo de encontrar procesos ordinarios admisibles los cuales logren el ínfimo costo del problema, es reemplazado por el de encontrar procesos ordinarios no necesariamente admisibles, los cuales logren el mínimo costo para el problema relajado.
La situación anterior se tiene en un número considerable de problemas de control óptimo por medio de la técnica de relajamiento estándar, lo cual ejemplificaremos en el presente trabajo. Tales ideas son ampliamente discutidas en [5, 13].

1.2 Problema básico y conceptos.

Una función $g: S \to \Re$ tiene un mínimo m en S_1, $S_1 \subset S$ y s_1 minimiza g en S_1, si $g(s_1) = min\{g(s) \mid s \in S_1\} = m$. Denominamos a s_1 como un punto minimizante de g en S_1.

Un problema básico en control óptimo consiste en la investigación de un mínimo y un punto minimizante de una función dada sujeta a restricciones.
Un problema de optimización es uno en el cual se tienen dados conjuntos

$$W,\ X_1,\ C_1 \subset X_1 \text{ y funciones } g_0\colon W \to \Re,\ g_1\colon W \to X_1$$

y se desea minimizar g_0 en el conjunto

$$g_1^{-1}(C_1) = \{w \in W \mid g_1(w) \in C_1\}.$$

La función g_0 es llamada función objetivo. En algunos problemas se considera que W y X_1 tienen alguna estructura topológica o algebraica, en tanto que g_0 y g_1 se consideran continuas, diferenciables, etc.
Usualmente en control óptimo $W \subset Y \times U \times B$ donde:
Y ={funciones de estado definidas en algún espacio vectorial},
U ={funciones de control definidas en algún espacio de medida T } y
B ={parámetros de control con alguna estructura topológica o algebraica}.
Veamos la formulación del siguiente problema lo cual nos permitirá entender la naturaleza de los conjuntos Y, U, B.
Ejemplo:
Supóngase que una nave espacial está en órbita alrededor de la tierra, y decidimos transferir nuestra nave a la vecindad de la luna en un período de tiempo previamente asignado, de manera que se queme la menor cantidad de combustible posible.
Nosotros elegimos el tiempo inicial. Designemos por $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ el estado del vehículo al tiempo t (observando que el vector $y(t)$ considera, además, la velocidad, la masa del combustible sobrante, inclinación del vehículo, duración del vuelo, etc.).
Definamos:

- t_1 como el tiempo de duración del vuelo (preasignado).
- B_0 como la colección conocida de estados al orbitar en la tierra.
- B_1 como los estados permitidos al tiempo t_1 (localización y componentes de velocidad en su llegada a la órbita lunar).
- $u(t)$ como la configuración de control al tiempo t (orientación de la máquina, magnitud de la energía).

En este caso la función de control u es una función medible arbitraria en $[0, t_1]$ con valores en $\Re$ ($u\colon [0, t_1] \to \Re$).
De las leyes básicas de la mecánica

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)) \tag{i.i}$$

donde la ecuación se satisface c.s. en $T = [0, t_1]$.
Si se activan las máquinas en el tiempo del estado $b_0 \in B_0$ y se elige la configuración $u(t)$ con $t \in [0, t_1]$, se tiene que $y(0) = b_0$, la condición inicial de (i.i), y si y es absolutamente continua

$$y(t) = b_0 + \int_0^t f(s, y(s), u(s))ds \text{ con } t \in T,$$

la cual tiene solución única para cada $b_0 \in B_0$ y cada control u.
Consideremos ahora las tripletas (y, u, b_0), donde $y: T \to \Re^n$, $u: T \to \Re$ y $b_0 \in B_0$. La tripleta será admisible si $y(t_1) \in B_1$. Considerando $\bar{g}_0(y(t))$ como el gasto de combustible en $[0, t]$, entonces $(\bar{y}, \bar{u}, \bar{b}_0)$ es óptima si

$$\bar{g}_0(\bar{y}(t_1)) \leq \bar{g}_0(y(t_1)), \forall (y, u, b_0) \in Y \times U \times B.$$

Expresamos el problema descrito como uno de control óptimo:
Sean $Y = C(T, \Re^n)$ la clase de las funciones continuas y acotadas de T a $\Re^n$, U la clase de las funciones medibles de T a $\Re$, $B = B_0$, y $W = Y \times U \times B$. Entonces

$$X_1 = \Re^n \times C(T, \Re^n),\ C_1 = B_1 \times \{0\} \subset X_1$$
$$g_0(y, u, b) = \bar{g}_0(y(t_1)),\ g_1(y, u, b) = y(t_1)$$
$$g_2(y, u, b)(t) = y(t) - b - \int_0^t f(s, y(s), u(s))ds.$$

El problema consiste en minimizar g_0 en el conjunto:

$$\begin{aligned} \{(y, u, b) &\in Y \times U \times B \mid g_1(y, u, b) \in B_1,\ g_2(y, u, b)(t) = 0\ (t \in T)\} \\ &= \{(y, u, b) \in Y \times U \times B \mid (g_1, g_2)(y, u, b) \in C_1\}. \end{aligned}$$

Siguiendo el ejemplo del problema anterior, podemos establecer la definición del problema de control óptimo siguiente.
Dados conjuntos $T, R, B, Y, X_1, C_1 \subset X_1$ y U donde T es un conjunto medible y Y, B, U son definidos como en el problema de la nave espacial, y dadas las funciones

$$F: Y \times U \times B \to Y,\ g_0: Y \times U \times B \to \Re \text{ y } g_1: Y \times U \times B \to X_1$$

definamos los conjuntos

$$\begin{aligned} H(U) &= \{(y, u, b) \in Y \times U \times B \mid y = F(y, u, b)\} \\ A(U) &= \{(y, u, b) \in H(U) \mid g_1(y, u, b) \in C_1\}. \end{aligned}$$

El problema original consiste en encontrar un punto $(y, u, b) \in A(U)$ que minimize g_0 en $A(U)$ y al cual llamaremos una U-solución minimizante.
Definición 1: Una sucesión $(y_n, u_n, b_n) \in H(U)$ es una U-solución aproximada si $\forall G$ vecindad de $0 \in X_1$, $\exists K \in N$ tal que si $n \geq K \Rightarrow g_1(y_n, u_n, b_n) \in C_1 + G$.

Definición 2: Una U-solución aproximada $(\bar{y}_n, \bar{u}_n, \bar{b}_n)$ es una U-solución aproximada minimizante si

$$\lim_n g_0(\bar{y}_n, \bar{u}_n, \bar{b}_n) \leq \lim_n inf\{g_0(y_n, u_n, b_n)\}$$

para toda U-solución aproximada $\{(y_n, u_n, b_n)\}$.

1.3 Soluciones original, aproximada y relajada.

En la presente sección analizaremos algunos problemas de control óptimo que nos permitirán diferenciar el tipo de solución involucrada. Asimismo estudiaremos un problema para el cual podemos construir una extensión del espacio de controles originales y tal extensión solo satisface la primera de las dos caracterizaciones con respecto a ser propia que fueron mencionadas, y justificaremos de forma heurística la teoría de relajamiento en control óptimo para su posterior formalización.

1.3.1 Problema sin U-solución minimizante.

Sean U la clase de todas las funciones medibles de $T = [0,1]$ a $R = [-1,1]$, $Y = C(T)$ la clase de las funciones continuas en T, y definamos:

$$\begin{aligned} F(y,u)(t) &= \int_0^t u(s)ds, \ \forall y \in Y, u \in U, t \in T \text{ y} \\ g_0(y,u) &= \int_0^1 (y(t)^2 - u(t)^2)dt, \ \forall y \in Y, u \in U. \end{aligned}$$

Consideremos el problema de minimizar g_0 en $H(U) = \{(y,u) \in Y \times U \mid y = F(y,u)\}$. Si $\forall n \in N$, definimos

$$\bar{u}_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}] \\ -1 & \text{si } t \in [\frac{2k+1}{2n}, \frac{k+1}{n}] \end{cases}$$

$$\text{donde } k = 0, \ldots, n-1$$

y $\bar{y}_n(t) = \int_0^t \bar{u}_n(s)ds$, $\forall t \in T$, entonces $(\bar{y}_n, \bar{u}_n) \in H(U)$ y $0 \leq \int_0^t \bar{u}_n(s)ds \leq (2n)^{-1}$.
Como $u(t) \in [-1,1]$, $u(t)^2 \leq 1$ y por lo tanto $g_0(y,u) \geq -1$, $\forall (y,u) \in Y \times U$.
Luego tenemos que $-1 \leq g_0(\bar{y}_n, \bar{u}_n) \leq (2n)^{-2} - 1$.
Por lo tanto

$$\lim_n g_0(\bar{y}_n, \bar{u}_n) = -1 = inf\{g_0(H(U))\}.$$

Supongamos ahora que existe $(\bar{y}, \bar{u}) \in H(U)$, tal que $g_0(\bar{y}, \bar{u}) = -1$. Entonces $|\bar{u}(t)| = 1$ c.s. en $[0,1]$ y $\bar{y}(t) = \int_0^t \bar{u}(s)ds = 0$ con $t \in [0,1]$, lo cual implica que $\bar{u}(t) = 0$ c.s. en T.
De la contradicción se sigue que $g_0(H(U))$ no contiene su ínfimo.

1.3.2 Problema con U-solución aproximada minimizante.

Sean T, R, Y, U, F y g_0 definidos como en el problema 1.3.1 y sea $g_1(y,u) = \int_0^1 (y(t))^2 dt$, $\forall (y,u) \in Y \times U$. Consideremos el problema de minimizar g_0 en $A(U)$ definido como

$$A(U) = \{(y,u) \in Y \times U | y = F(y,u), g_1(y,u) = 0\}.$$

Si $(y,u) \in A(U)$ entonces $y(t) = \int_0^t u(s)ds = 0, \forall t \in T$ y por lo tanto $u(t) = 0$ c.s. en T. Se tiene entonces que $(y,u) = (0,0)$ produce el mínimo $g_0(y,u) = 0$ en $A(U)$.
Por otro lado, considerando $\bar{y}_n$ y $\bar{u}_n$ como en el problema 1.3.1,

$$g_0(\bar{y}_n, \bar{u}_n) \leq (2n)^{-2} - 1, \forall n \in N \text{ y}$$

$$0 \leq \int_0^t \bar{u}_n(s)ds = \bar{y}_n(t) \leq (2n)^{-1}, \forall n \in N \text{ y } t \in T.$$

Nótese que $g_1(\bar{y}_n, \bar{u}_n) \leq (2n)^{-2}$. Así, mientras el mínimo restringido de g_0 existe y es igual a 0, podemos disminuir el valor de g_0 cercano a -1 eligiendo $y = \bar{y}_n$ y $u = \bar{u}_n$ para n suficientemente grande, aunque violamos la restricción de que $g_1(y, u) = 0$ por una cantidad arbitrariamente pequeña (acotada por $(2n)^{-2}$), con lo cual hemos encontrado un proceso ordinario el cual mejora el costo ínfimo del problema, y no es admisible en sentido estricto.

1.3.3 Problema con solución relajada.

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$y(t) = F(y, u)(t) = \int_0^t f(s, y(s), u(s))ds, \forall t \in T \text{ con } T = [0, 1]$$

donde $f: T \times \Re^n \times R \to \Re^n$ es continua y acotada, $R = [-1, 1]$ y la ecuación tiene una solución única $\hat{y}(u)(\cdot)$ para cada $u \in U$ conjunto de funciones medibles de T a R.
Si se define $\bar{u}_n$ $\forall n \in N$ como en 1.3.1, la función $\bar{y}_n = \hat{y}(\bar{u}_n)$ satisface la ecuación

$$y(t) = F(y, \bar{u}_n)(t) = \int_0^t f(s, y(s), \bar{u}_n(s)), \forall t \in T.$$

Sean los intervalos $T_i' = [t_i', t_i'')$ y $T_i'' = [t_i'', t_{i+1}')$, donde t_i'' es el punto medio del intervalo $T_i = [t_i', t_{i+1}']$ de longitud $\frac{1}{n}$ (estos son tomados sucesivamente), y definamos

$$\bar{u}_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in T_i' \\ -1 & \text{si } t \in T_i''. \end{cases}$$

Para n grande, T_i es de longitud pequeña y $\bar{y}_n$ es aproximadamente constante en cada T_i.
Por lo tanto, si $f_i(r) = f(t_i', \bar{y}_n(t_i'), r)$ $\forall r \in R$, entonces

$$\begin{aligned} \bar{y}_n(t_{i+1}') - \bar{y}_n(t_i') &\approx \int_{T_i} f_i(\bar{u}_n(s))ds = \int_{t_i'}^{t_i''} f_i(1)ds + \int_{t_i''}^{t_{i+1}'} f_i(-1)ds \\ &= (t_{i+1}' - t_i') \left[\frac{f_i(1)}{2} + \frac{f_i(-1)}{2} \right] \end{aligned}$$

para $i = 0, \ldots, n-1$.
Se sigue que $\bar{y}_n$ aproximadamente satisface la ecuación diferencial

$$y(t) = \int_0^t \left\{ \frac{f(s, y(s), 1)}{2} + \frac{f(s, y(s), -1)}{2} \right\} ds, \ \forall t \in T. \qquad \text{(i.ii)}$$

En situaciones más complicadas donde u_n puede tomar un número infinito de valores en cualquier subintervalo de T, dividimos T en subintervalos iguales $T_{n,i}$ $(i = 0, \ldots, m(n))$ donde $m(n) \to \infty$.

En cada subintervalo $T_{n,i}$ estudiamos la distribución de los valores de u_n determinando para cada i y cada $A \in \sum_B(R)$ (conjuntos de Borel de R), la fracción $\sigma_{n,i}(A)$ del tiempo $T_{n,i}$ que $u_n(\cdot)$ toma de A.
Entonces definimos:

$$\begin{aligned} T_{n,i}(A) &= u_n^{-1}(A) \cap T_{n,i}, \\ \sigma_{n,i}(A) &= \frac{\int_{T_{n,i}(A)} dt}{\int_{T_{n,i}} dt}. \end{aligned}$$

Cada $\sigma_{n,i}: \sum_B(R) \to [0,1]$ es una medida de probabilidad ($\sigma_{n,i}(R) = 1$). Cuando $m(n) = n-1$ y $u_n = \bar{u}_n$, tenemos $\forall s \in T_{n,i}$

$$\frac{f(s, y(s), 1)}{2} + \frac{f(s, y(s), -1)}{2} = \int f(s, y(s), r)\sigma_{n,i}(dr)$$

y por lo tanto las medidas de probabilidad $\sigma_{n,0}, \sigma_{n,1}, \ldots, \sigma_{n,n-1}$ son todas iguales a $\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_{-1}}{2}$ donde δ_r es la medida de Dirac en r.
En el caso en que u_n toma un número infinito de valores obtenemos de forma similar a (i.ii)

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m(n)} \int_{T_{n,i} \cap [0,t]} ds \int f(s, y(s), r)\sigma_{n,i}(dr)$$

$\forall t \in T$, lo cual podemos escribir como

$$y(t) = \int_0^t ds \int f(s, y(s), r)\sigma_n(s)(dr) \tag{i.iii}$$

$\forall t \in T$, donde $\sigma_n(s) = \sigma_{n,i}$ $\forall s \in T_{n,i}$.
De esta manera reemplazamos una sucesión $\{\bar{u}_n\}$ de funciones de T a R en (i.i) con una sucesión $\{\sigma_n\}$ de funciones constantes por partes en T, cuyos valores son medidas de probabilidad en $\sum_B(R)$ en (i.iii).
También hemos redefinido la función

$$(y, u) \to F(y, u): C(T, \Re^n) \times U \to C(T, \Re^n)$$

donde $C(T, \Re^n)$ es el espacio de funciones acotadas y continuas de T a $\Re^n$, la cual satisface

$$F(y, u)(t) = \int_0^t f(s, y(s), u(s))ds \ \forall t \in T$$

como una función $(y, \sigma) \to F(y, \sigma)$, que satisface

$$F(y, \sigma)(t) = \int_0^t ds \int f(s, y(s), r)\sigma(s)(dr) \ \forall t \in T$$

donde $y \in C(T, \Re^n)$ y σ es una función constante por partes en T y sus valores medidas de probabilidad.
En particular si $u \in U$ y $\delta_u(t) = \delta_{u(t)}$ es la medida de Dirac en $u(t)$, entonces

$$\begin{aligned} F(y, \delta_u)(t) &= \int_0^t ds \int f(s, y(s), r)\delta_u(s)(dr) \\ &= \int_0^t f(s, y(s), u(s))ds, \ \forall t \in T. \end{aligned}$$

De lo último observamos que podemos identificar la función $u: T \to R$ con la función $t \to \delta_u(t)$ en T.
En el caso del problema 1.3.2, el procedimiento ya descrito nos genera un límite para la sucesión $\bar{u}_n$.
Si denotamos por y^2 la función previamente designada como y en el problema 1.3.2 entonces este queda definido como

$$y^1(t) = \int_0^t([y^2(s)]^2 - [u(s)]^2))ds, \ y^2(t) = \int_0^t u(s)ds, \ y^3(t) = \int_0^t[y^2(s)]^2 ds$$

donde $y = (y^1, y^2, y^3)$, $g_0(y, u) = y^1(1)$ y $g_1(y, u) = y^3(1)$. Para

$$\sigma_n = \bar{\sigma} = \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_{-1}}{2},$$

obtenemos

$$y^1(t) = \int_0^t([y^2(s)]^2 - 1)ds, \ y^2(t) = 0, \ y^3(t) = \int_0^t [y^2(s)]^2 ds$$

lo cual implica que $y^1(t) = -t$, $y^2(t) = 0$ y $y^3(t) = 0$ $\forall t \in T$; $g_0(y, \bar{\sigma}) = -1$ y $g_1(y, \bar{\sigma}) = 0$.
Resumiendo el resultado de los problemas 1.3.2 y 1.3.3 observamos que

$$min\{P_{original}\} = 0 > -1 = min\{P_{relajado}\},$$

lo cual muestra que para este problema las dos caracterizaciones de relajamiento propio mencionadas no son equivalentes. Esto es consecuencia del hecho que el conjunto de controles u cuyos procesos asociados son admisibles está estrictamente contenido en el conjunto de controles originales.
Observamos que $\bar{\sigma}$ corresponde a una función (que llamaremos de control relajada), tal que

$$\lim_j u_j = \bar{\sigma}$$

y $\bar{y}$ una solución de la ecuación $y(t) = \int_o^t(ds) \int f(s, y(s), r)\bar{\sigma}(s)dr$ que satisface

$$\lim_j y_j(t) = \bar{y},$$

donde (y_j, u_j) es la U-solución aproximada minimizante del problema original.
Al tener estas condiciones, hemos encontrado un relajamiento propio del espacio de controles

originales, de acuerdo con la primera de las caracterizaciones definidas en la introducción. La convergencia de u_j es en el sentido de que para valores grandes de j, u_j y $\bar{\sigma}$ tienen el mismo efecto en la ecuación diferencial.
Así consideramos a las funciones de control original u_j como una covergencia a una función de control relajada $\bar{\sigma}$, si la solución de la ecuación diferencial correspondiente a u_j converge a la solución para $\bar{\sigma}$ en la topología de $C(T, \Re^n)$, es decir

$$\lim \int_T f(s, y(s), u_n(s))(ds) = \int_T ds \int f(s, y(s), r)\bar{\sigma}(s)(dr)$$

$\forall y \in C(T, \Re^n)$.

1.3.4 Técnica de relajamiento clásica para problemas sin retardos en los controles.

Ahora enunciaremos la técnica de relajamiento clásica para problemas sin retardos en los controles, la cual es desarrollada en [13].

1. Primero sumergimos U (espacio de funciones de control original) en un espacio topológico ζ del cual U es un subconjunto denso.
   Así extendemos la definición de F, g_0 y g_1 a $Y \times \zeta \times B$ de tal manera que
   $$H(\zeta) = \{(y, \sigma, b) \in Y \times \zeta \times B \mid y = F(y, \sigma, b)\}$$
   es secuencialmente compacto, con F, g_0 y g_1 secuencialmente continuas, al restringirse a $H(\zeta)$.
   Entonces bajo condiciones compatibles existe un punto $(\bar{y}, \bar{\sigma}, \bar{b})$ en $H(\zeta)$ que minimiza g_0 en
   $$A(U) = \{(y, u, b) \in H(U) \mid g_1(y, u, b) \in C_1\}.$$
   Determinamos relaciones que deben ser satisfechas por una U-solución minimizante $(\bar{y}, \bar{\sigma}, \bar{b})$.

2. El siguiente paso es determinar una sucesión $\{u_n\}$ en U que corresponde a $\bar{\sigma}$ y una sucesión $\{y_n\}$ en Y que corresponde a $\{u_n\}$ y $\bar{b}$ tal que
   $\{(y_n, u_n, \bar{b})\}$ es una U-solución aproximada minimizante y
   $$\lim_{n\to\infty} g_i(y_n, u_n, \bar{b}) \to g_i(\bar{y}, \bar{\sigma}, \bar{b}),\ i = 0, 1.$$

El conjunto ζ es el conjunto de controles relajados y su topología es métrica y compacta.

1.4 Conceptos básicos para la teoría de relajamiento en control óptimo.

En la presente sección formalizaremos la técnica de relajamiento ya enunciada en la sección 1.3.4 para lo cual daremos algunos conceptos y resultados necesarios que pueden ser encontrados en la literatura (ver, por ejemplo, [13]).
Sean un conjunto $S \neq \emptyset$, $\sum$ una familia de subconjuntos de S, y μ una función $\mu: \sum \to \bar{\Re}$, donde $\bar{\Re} = \Re \cup \{-\infty, \infty\}$ es el conjunto de los reales extendidos.

Definición 3: $\sum$ es álgebra en S si i) $\emptyset \in \sum$, ii) $A \in \sum \Rightarrow A^c \in \sum$, iii) Si $A, B \in \sum$ entonces $A \cup B \in \sum$.

Definición 4: $\sum$ es σ-álgebra en S si i) $\sum$ es un álgebra en S, ii) $\{A_i\}_i^\infty \subset \sum \Rightarrow \cup_{i=1}^\infty A_i \in \sum$.

Definición 5: Si $\sum$ es álgebra en S, entonces μ es aditiva si i) $\mu(\emptyset) = 0$, ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, $\forall A, B \in \sum$ siempre que $A \cap B = \emptyset$.

Definición 6: μ es numerablemente aditiva en $\sum$ si i) μ es aditiva, ii) $\mu(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ donde $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ es cualquier colección numerable de elementos disjuntos de $\sum$ tal que $\cup_{i=1}^\infty A_i \in \sum$.

Definición 7: μ es una medida si i) $\sum$ es σ-álgebra, ii) μ es numerablemente aditiva.

Definición 8: Si $\sum$ es una σ-álgebra de S con una medida μ, definimos i) $(S, \sum)$ es un espacio medible, ii) $(S, \sum, \mu)$ es un espacio de medida.

Definición 9: Una medida positiva μ es medida de probabilidad si $\mu(S) = 1$.

Definición 10: Sea (S, τ) espacio topológico. Entonces i) El álgebra de conjuntos de Borel $\sum_B$, es la mínima σ-álgebra que contiene a τ. Los elementos de $\sum_B$ son llamados conjuntos de Borel. Una medida definida en $\sum_B$ se llama una medida de Borel.

Definición 11: Una medida de Borel μ es la medida de Dirac en $s \in S$ si i) μ es medida de probabilidad, ii) $\mu(\{s\}) = 1$.

Definición 12: Sea $\sum$ un álgebra y $\mu: \sum \to \bar{\Re}$ aditiva. La variación de μ es la función no negativa $|\mu|: \sum \to \bar{\Re}$ definida, $\forall E \in \sum$, por

$$|\mu|(E) = sup\{\sum_{i=1}^{k} |\mu(E_i)| \mid k \in N, E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j,\ E_i \in \sum, E_i \subset E\}.$$

Definición 13: Sea (S, τ) un espacio topológico , $\sum$ un álgebra en S y $\mu: \sum \to \Re$ aditiva. Entonces μ es regular si

$\forall E \in \sum$ y $\epsilon > 0$, $\exists A, B \in \sum$ tal que i) $\bar{A} \subset E \subset B^0$ y ii) $|\mu|(B - A) \leq \epsilon$.

Definición 14: Una medida de Radón en S es una medida de Borel regular finita. Ahora definamos los siguientes conjuntos, los cuales utilizaremos en la siguiente sección.

$frm(S)$ como el espacio de las medidas de Radón en S.
$rpm(S)$ como el conjunto de las medidas de probabilidad de Radón en S.

Definición 15: Si $(S, \sum, \mu)$ es un espacio de medida, Z es un conjunto μ-nulo si $\exists A \in \sum$ tal que $Z \subset A$ y $|\mu|(A) = 0$. La medida μ es completa si todo conjunto μ-nulo pertenece a $\sum$.

Definición 16: Una relación que involucra a $s \in S$ es válida μ-c.s. (casi siempre) si existe un conjunto Z μ-nulo tal que la relación se satisface $\forall s \notin Z$. Si $E \subset S$ y la relación se satisface $\forall s \in E - Z$, decimos que se satisface μ-c.s. en E.

Definición 17: Un espacio de medida $(S, \sum, \mu)$ es positivo, finito, de probabilidad, regular, etc., si la medida μ tiene la propiedad correspondiente.

Definición 18: Sea $(S, \sum, \mu)$ un espacio de medida finito,

$$\sum^* = \{E \cup Z \mid E \in Z \text{ y } Z \text{ es un conjunto } \mu\text{-nulo}\}.$$

Sea $\mu^*(E \cup Z) = \mu(E)$ $\forall E \in Z$ y Z conjunto μ-nulo. Entonces $(S, \sum^*, \mu^*)$ es un espacio de medida finito (llamado la extensión de Lebesgue de $(S, \sum, \mu)$), μ^* es completa (llamada la extensión de Lebesgue de μ) y $\mu = \mu^*|_{\sum}$.
Un conjunto $A \in \sum^*$ se llama μ-medible. Nótese que un conjunto es μ-medible $\Leftrightarrow$ es μ^* medible .

Definición 19: Sea $(S, \sum)$ un espacio medible, (X, τ) un espacio topológico y $f: S \rightarrow X$ una función. Entonces i) f es $\sum$-medible si $f^{-1}(A) \in \sum$ $\forall A \in \tau$.
ii) f es $\sum$-medible en B si $B \in \sum$ y $f^{-1}(A) \cap B \in \sum$ $\forall A \in \tau$.
Si $(S, \sum, \mu)$ es un espacio de medida finito y $(S, \sum^*, \mu^*)$ su extensión de Lebesgue, decimos que f es μ-medible si es $\sum^*$-medible. Así, f es μ-medible si y sólo si es μ^*-medible.

Definición 20: Sea $(S, \sum, \mu)$ un espacio de medida positivo finito y X un espacio de Banach separable.
i) $f: S \rightarrow X$ es μ-simple si $\exists k \in N$, $x_i \in X$ y conjuntos μ-medibles S_i disjuntos en S para $i = 1, 2, \ldots, k$ tales que

$$f(s) = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \chi_{S_i}(s) x_i \ \forall s \in S, \text{ donde}$$

$$\chi_{S_i}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in S_i \\ 0 & \text{si } s \in S - S_i. \end{cases}$$

ii) La integral de f con respecto a μ es

$$\int f(s)\mu(ds) = \sum_{i=1}^{k} \mu(S_i)x_i.$$

iii) Si E es un conjunto μ-medible, se define

$$\int_E f(s)\mu(ds) = \int \chi_E(s)f(s)\mu(ds).$$

Teorema 1: Si $f: S \to R$, es una función μ-medible no negativa, entonces existe $\{f_n\}$ una sucesión de funciones μ-simples no negativas, tales que $\{f_n(s)\}$ es no decreciente y converge a $f(s)$ $\forall s \in S$. Más aún, $\lim \int f_n(s)\mu(ds)$ existe en $\bar{\Re}$ y es el mismo para todas las sucesiones $\{f_n\}$ con dicha propiedad. Definimos

$$\int f(s)\mu(ds) := \lim \int f_n(s)\mu(ds) \text{ en } \bar{\Re}.$$

Decimos que f es μ-integrable si f es μ-medible y $\int f(s)\mu(ds) < \infty$.

Definición 21: Sean X un espacio de Banach separable, $1 \leq p < \infty$ y $(S, \sum, \mu)$ un espacio de medida positivo finito. Dos funciones μ-medibles $f, g: S \to X$ son equivalentes si $f(s) = g(s)$ μ-c.s. Si f es μ-medible,

$$s \to |f(s)|^p \text{ es } \mu\text{-medible}$$

$$f \sim g \Rightarrow \int |f(s)|^p \mu(ds) = \int |g(s)|^p \mu(ds).$$

Definición 22: Denotamos por $L^p(S, \sum, \mu, X)$ el conjunto de todas las (clases de equivalencia de) funciones μ-medibles $f: S \to X$ tales que

$$\int |f(s)|^p \mu(ds) < \infty, \text{ y escribimos } |f|_p = \{\int |f(s)|^p \mu(ds)\}^{\frac{1}{p}}.$$

Decimos que $\{f_n\}$ converge a f en $L^p(S, \sum, \mu, X)$ si

$$\lim |f - f_n|_p = 0.$$

Teorema 2: Sean X un espacio de Banach separable y $(S, \sum, \mu)$ un espacio de medida positivo finito. Dados E un conjunto μ-medible y $f \in L^1(S, \sum, \mu, X)$, existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones μ-simples en S tales que $\lim |f - f_n|_1 = 0$ y $\lim \int_E f_n(s)\mu(ds)$ existe en X y es el mismo para cualquier sucesión $\{f_n\}$ con dicha propiedad. Definimos la integral de f en E con respecto a μ como

$$\int_E f(s)\mu(ds) = \lim \int_E f_n(s)\mu(ds).$$

Decimos que $f \in L^1(S, \sum, \mu, X)$ es una función μ-integrable.

Si X es un espacio vectorial y Γ una colección de funcionales lineales en X, definimos la topología débil estrella generada por Γ como la mínima topología tal que cada f en Γ es continua. Una sucesión $\{x_n\}$ converge a x en esta topología si y sólo si $f(x_n) \to f(x)$ para cada $f \in \Gamma$.
Si X es un espacio normado, el dual de X, denotado por X^*, es el espacio de todas las funcionales lineales acotadas en X. Si consideramos el dual X^{**} de X^* entonces a cada $x \in X$ le corresponde un elemento φx en X^{**} definido por $(\varphi x)(f) = f(x)$. La función φ es un isomorfismo isométrico de X en un subespacio lineal $\varphi(X)$ de X^{**}.
La topología débil de X^* generada por $\varphi(X)$ es llamada la topología débil estrella de X^*.

Definición 23: Si $(X, |\cdot|)$ es un espacio vectorial normado separable y X^* su dual entonces:
i) Definimos la norma fuerte en X^* por

$$|l|_s = sup\{|l(x)| \mid x \in X, |x| \leq 1\}.$$

ii) Definimos la norma débil en X^* por

$$|l|_w = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{l(x_i)}{1 + |x_i|}$$

donde $\{x_1, x_2, \dots\}$ es un subconjunto denso numerable de X.
Esta última norma está bien definida en virtud del siguiente resultado:

Teorema 3 (Bishop): Si X es un espacio vectorial normado separable y consideramos $\beta(X^*) = \{l \in X^* \mid |l|_s \leq 1\}$ entonces
i) $|\cdot|_w$ es una norma en X^*.
ii) $\lim |l - l_j|_w = 0$ con $l, l_j \in \beta(X^*) \iff \lim l_j(x) = l(x)\ \forall x \in X$.
iii) La topología relativa de $\beta(X^*)$ en $(X^*, |\cdot|_w)$ es la misma para cualquier elección de $\{x_1, x_2, \dots\}$ y coincide con la topología débil estrella relativa.

1.4.1 Isomorfismo entre $B(T, R)$ y $L^1(T, C(R))$.

Sean $T \subset \Re$ compacto y R un espacio métrico compacto. Definimos el espacio $B := B(T, R)$ como el espacio vectorial de (clases de equivalencia de) funciones $\varphi: T \times R \to \Re$ tal que $\varphi(\cdot, r)$ es medible $\forall r \in R$, $\varphi(t, \cdot) \in C(R)\ \forall t \in T$ el espacio de funciones continuas en R,
y para cada $\varphi \in B(T, R)$ $\exists \psi_\varphi$, integrable con

$$|\varphi(t, \cdot)|_{sup} \leq \psi_\varphi(t)\ \forall t \in T.$$

Decimos que $\varphi_1, \varphi_2 \in B(T, R)$ son equivalentes y escribimos

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \iff \varphi_1(t, \cdot) = \varphi_2(t, \cdot)$$

c.s. en T. Entonces $|\varphi|_B := \int |\varphi(s,\cdot)|_{sup}\mu(ds)$ es una norma en B y $(B, |\cdot|_B)$ es isométricamente isomorfo a $L^1(T, C(R))$, asignando a cada $\varphi \in B$ la función $t \to \varphi(t,\cdot): T \to C(R)$, de tal forma que $(B, |\cdot|_B)$ es de Banach, separable y el conjunto

$$B_1 = C(T) \otimes C(R) = \{(t,r) \to \sum_1^k f_i(t)c_i(r) | k \in N, f_i \in C(T), c_i \in C(R)\}$$

es denso en $B(T, R)$.

1.4.2 Isomorfismo entre $frm(R)$ y $C(R)^*$.

Teorema 4 (Riesz): Sea R un espacio métrico compacto. Entonces existe un isomorfismo $I: frm(R) \to C(R)^*$ dado por

$$I(s)(c) = \int c(r)s(dr),$$

donde $s \in frm(R)$ y $c \in C(R)$ y satisface $|I(s)|_* = |s|(R)$.
Como $C(R)$ es un espacio vectorial normado separable estos pueden ser tomados como espacios normados con una norma débil, lo cual se sigue del teorema de Bishop.

Teorema 5: El espacio vectorial normado $(frm(R), |\cdot|_w)$ es separable y sus subconjuntos $rpm(R)$ y $\beta(frm(R)) = \{s \in frm(R) \mid |s|(R) \leq 1\}$ son compactos.

1.4.3 Sumergimiento de R en $frm(R)$. Extensión de funciones continuas de R a $frm(R)$.

El espacio métrico compacto R se sumerge en $frm(R)$ identificando cada $r \in R$ con la medida de Dirac δ_r en r (o, de manera equivalente, identificando $r \in R$ con $l_r \in C(R)^*$ tal que $l_r(f) = f(r)\ \forall f \in C(R)$).
Cualquier función continua real $f: R \to \Re$ puede ser extendida a $frm(R)$ si definimos

$$f(s) = \int f(r)s(dr),\ \forall s \in frm(R).$$

En particular se tiene $f(\delta_r) = f(r)\ \forall r \in R$. Como $\lim f(s_j) = f(s)$ si $s, s_j \in \beta(frm(R))$ y $\lim |s_j - s|_w = 0$ y dado que $(frm(R), |\cdot|_w)$ es métrico entonces f es continua en $(frm(R), |\cdot|_w)$.

Teorema 6: Sea $v: T \to (frm(R), |\cdot|_w)$ tal que

$$sup - es|v(t)|(R) := inf\{c > 0 : |v(s)|(R) \leq c \text{ c.s. en } T\} < \infty.$$

Entonces son equivalentes
i) v es medible.
ii) $t \to f(v(t)) = \int f(r)v(t)(dr)$ es medible $\forall f \in C(R)$.
Estas afirmaciones implican que la función $t \to \varphi(t, (v(t))$ es integrable $\forall \varphi \in L^1(T, C(R))$.

1.4.4 Definición de los espacios $N(T,R), M(T,R)$ y $U(T,R)$. Sumergimiento de $U(T,R)$ en $\zeta(= M(T,R))$.

Denotemos por $N(T,R)$ al conjunto de (clases de equivalencia de) funciones medibles $v: T \to (frm(R), |\cdot|_w)$ tales que $sup-es|v(t)|(R) < \infty$, y de igual manera los siguientes conjuntos

$M(T,R) = \{v \in N(T,R) | v(t) \in rpm(R)$ c.s. en T $\}$.
$U(T,R) = \{\rho: T \to R | \rho$ es medible $\}$.
$M_U(T,R) = \{v \in M(T,R) | v(t) = \delta_{\rho(t)}$ c.s. en T para alguna $\rho: T \to R\}$.

Por el teorema 6, si $v \in M_U(T,R)$ y $v(t) = \delta_{\rho(t)}$ c.s. en T entonces $t \to f(v(t)) = f(\rho(t))$ es medible $\forall f \in C(R)$, y así $t \to \rho(t)$ es medible.
Por otro lado si $\rho \in U(T,R)$ entonces $t \to f(\rho(t)) = f(\delta_{\rho(t)})$ es medible y $sup-es|\delta_{\rho(t)}|(R) = 1$. Por consiguiente, $t \to \delta_{\rho(t)}$ pertenece a $M_U(T,R)$.
Lo anterior prueba que existe una correspondencia uno a uno entre $M_U(T,R)$ y $U(T,R)$. Identificamos cada $\rho \in U(T,R)$ con la función $t \to \delta_{\rho(t)}$ en $M_U(T,R)$, y de esta manera sumergimos $U(T,R)$ como un subconjunto de $M(T,R)$.
El siguente teorema afirma que $B(T,R)^*(\cong L^1(T,C(R))^*)$ es algebraicamente isomorfo a $N(T,R)$.

Teorema 7 (Dunford-Pettis): Existe un isomorfismo $I: N(T,R) \to B(T,R)^*$ definido por

$$I(v)(\varphi) = \int \varphi(t,v(t))dt = \int dt \int \varphi(t,r)v(t)(dr)$$
$$\forall v \in N(T,R) \text{ y } \varphi \in B(T,R)$$

y, además,

$$|I(v)| = sup_{\{|\varphi|_B \leq 1\}} |I(v)(\varphi)| = sup - es|v(t)|(R).$$

1.4.5 Los espacios isomorfos $B(T,R)^*$, $N(T,R)$ y sus subconjuntos $M(T,R)$, $U(T,R)$ con la topología de la norma débil.

Como hicimos con $C(R)^*$ y $frm(R)$, identificamos ahora los espacios isomorfos $B(T,R)^*$ $(\cong L^1(T,C(R))^*)$ y $N(T,R)$ por el isomorfismo definido en el teorema 7, identificando $v \in N(T,R)$ con la funcional lineal continua $I(v)$ en $B(T,R)$.

Teorema 8: El espacio $(N(T,R), |\cdot|_w)$ es separable y su subconjunto $\beta(N) = \{v \in N(T,R) \mid |v|_s \leq 1\}$ es compacto. Más aún, $\lim v_n = v$ para $v, v_n \in \beta(N) \Leftrightarrow \lim I(v_n,\varphi) = I(v,\varphi)$ $\forall \varphi \in B(T,R)$ donde I es el isomorfismo del teorema 7. Por último, $M(T,R)$ es convexo, compacto, y la cerradura de $U(T,R)$ en $N(T,R)$.
Por razones de comparación con sistemas que involucran retardos y que estudiaremos en el siguiente capítulo, incluimos ahora la demostración de la última afirmación del teorema 8.

Teorema 9: $\zeta(= M(T,R))$ coincide con la cerradura débil estrella de $U(T,R)$.
Demostración:
Debemos mostrar que dado $\rho \in M(T,R)$, existe una sucesión $\{u_i\} \subset U(T,R)$ la cual converge a ρ.
Sea $\rho \in M(T,R)$. Como R es un conjunto compacto, $\forall i \in N$ podemos cubrir R por una colección finita de conjuntos abiertos $\hat{R}^i_k$ $(k = 1,\ldots,k(i))$ de diámetro a lo más $\frac{1}{i}$. Haciendo

$$R^i_k := \hat{R}^i_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} \hat{R}^i_j \ (k = 1,\ldots,k(i))$$

y eliminando los conjuntos vacíos R^i_k, partimos R en conjuntos R^i_k $(k = 1,\ldots,k(i))$ que son diferencias de conjuntos abiertos.
Similarmente partimos $T = [0,1]$ en subconjuntos no vacíos disjuntos de Borel T^i_j $(j = 1,\ldots,j(i))$ de diámetro a lo más $\frac{1}{i}$. Sea

$$\alpha^i_{j,k} := \int_{T^i_j} \rho(t)(R^i_k)dt.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{k(i)} \alpha^i_{j,k} = m(T^i_j)$$

donde m denota la medida de Lebesgue en $\Re$, podemos partir cada T^i_j en subconjuntos $T^i_{j,k}$ tales que $m(T^i_{j,k}) = \alpha^i_{j,k}$. Ahora, para cada $k \in \{1,\ldots,k(i)\}$ elegimos un punto $r^i_k \in R^i_k$ y definimos

$$u_i(t) := r^i_k \ \forall t \in \bigcup_{j=1}^{j(i)} T^i_{j,k} \ (k = 1,\ldots,k(i)).$$

Probaremos que esta sucesión de controles converge a ρ.
Como se mencionó en 1.4.1, el conjunto $C(T) \otimes C(R)$ es denso en $L^1(T, C(R)$, por lo cual es suficiente demostrar que

$$\lim_i \int f(t)c(u_i(t))dt = \int f(t)c(\rho(t))dt,$$

para $f \in C(T)$ y $c \in C(R)$ arbitrarios. Sean M_f y M_c módulos de continuidad de $f \in C(T)$ y $c \in C(R)$ respectivamente, y sea t^i_j un punto arbitrario de T^i_j $(i \in N, j = 1,\ldots,j(i))$. Tenemos

$$|\int f(t)dt \int c(r)\rho(t)(dr) - \int f(t)c(u_i(t))dt|$$

$$\leq |\int f(t) \sum_{k=1}^{k(i)} c(r^i_k)\rho(t)(R^i_k)dt - \sum_{k=1}^{k(i)} c(r^i_k) \sum_{j=1}^{j(i)} \int_{T^i_{j,k}} f(t)dt| + M_c(\frac{1}{i}) \int |f(t)|dt$$

$$= |\sum_{k=1}^{k(i)} \sum_{j=1}^{j(i)} c(r^i_k)\{\int_{T^i_j} f(t)\rho(t)(R^i_k)dt - \int_{T^i_{j,k}} f(t)dt\}| + Mc(\frac{1}{i}) \int |f(t)|dt$$

$$\leq |\sum_{k=1}^{k(i)}\sum_{j=1}^{j(i)} c(r_k^i)f(t_j^i)\{\int_{T_j^i}\rho(t)(R_k^i)dt - m(T_{j,k}^i)\}| + 2M_f(\frac{1}{i})m(T)|c|_{sup} + M_c(\frac{1}{i})|f|_1$$

$$= 2M_f(\frac{1}{i})m(T)|c|_{sup} + M_c(\frac{1}{i})|f|_1 \to 0, i \to \infty.$$

Q.E.D

CAPITULO 2

Teoría de relajamiento para problemas con retardos en las funciones de control.

2.1 Introducción.

En este capítulo estudiaremos problemas de control óptimo con retardos en las funciones de control. El siguiente problema generaliza el que consideramos en 1.1 (las definiciones de control ordinario, proceso ordinario, proceso admisible, etc., son extendidas de manera obvia) y presenta las principales dificultades que existen al tratar de generalizar el concepto de relajamiento clásico.

Sea $T = [0, 1]$ y supongamos que tenemos dados números reales $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_k < 1$, un punto $\xi \in \Re^n$, un conjunto compacto $\Omega \subset \Re^m$ y funciones

$$g: \Re^n \to \Re,\ f: T \times \Re^n \times \Re^{m(k+1)} \to \Re^n.$$

Sea $\hat{T} = [-\theta_k, 1]$ y consideremos el problema **(P)** de minimizar $g(y(1))$ sujeto a

$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t), u(t-\theta_1), \ldots, u(t-\theta_k))$ c.s. en T

$y(0) = \xi$

$u(t) \in \Omega$ c.s. en $\hat{T}$.

A pesar de la atención que problemas de control óptimo que involucran retardos han recibido en las últimas décadas, para problemas de control óptimo con retardos en los controles pocos intentos se habían realizado para encontrar técnicas de relajamiento propias.

Warga [13] fue el primero en buscar un relajamiento propio, para el caso en el que a) los retardos aparecen en las funciones de control, con la condición de que las funciones de control fuesen separables (aditivamente acopladas), es decir, que f del problema anterior tuviese la forma

$$\sum_{i=0}^{k} f_i(t, y(t), u(t-\theta_i))$$

con $\theta_0 = 0$, b) para el caso en el que los retardos aparecen en las funciones de estado y c) cuando los retardos en los controles son constantes y conmensurados (el cociente de cualesquiera dos retardos es racional).
En los casos a) y b), un relajamiento propio se obtuvo por una adaptación directa de la técnica clásica de relajamiento para problemas sin retardos, donde las hipótesis impuestas en el problema anterior fueron

(i) $f(\cdot, y, r)$ es medible y $f(t, \cdot, \cdot)$ continua $\forall(t, y, r) \in T \times \Re^n \times \Omega^{k+1}$.
(ii) g es continua.
(iii) Ω es compacto.
(iv) Existe una constante c tal que, $\forall(t, y, r) \in T \times \Re^n \times \Omega^{k+1}$,

$$|f(t, y, r)| \leq c(1 + |y|).$$

(v) Existe una función integrable $\varphi: T \to \Re$ tal que, $\forall(t, r) \in T \times \Omega^{k+1}$ y $x, y \in \Re^n$,

$$|f(t, y, r) - f(t, x, r)| \leq \varphi(t)|y - x|.$$

Para el caso c) Warga [13] utiliza una técnica frecuente para problemas con retardos conmensurados que llamaremos "relajamiento vía el problema reducido", la cual reduce un problema de control óptimo con retardos de tiempo conmensurados en las funciones de control, a un problema libre de retardos en las dinámicas.
Los retardos para este problema reducido aparecen en las restricciones inicial y final de las trayectorias. Por varias razones que explicaremos posteriormente dicha técnica tuvo que ser reemplazada.
En [14],Warga propuso una técnica de relajamiento llamada "relajamiento débil" demostrando la existencia de minimizadores débilmente relajados, aunque varios ejemplos encontrados en [4, 9] mostraron que tal relajamiento no es propio para el caso de retardos conmensurados.
El caso conmensurado fue resuelto por la introducción de un "modelo fuerte" en [9] propuesto por Rosenblueth y Vinter, el cual da un relajamiento propio para el espacio de controles ordinarios retardados conmensurados. Por cierto, tal técnica coincide con la de relajamiento débil para sistemas con un retardo en los controles.
También se introdujo un modelo abstracto aplicable a retardos conmensurados y no conmensurados. En [15] fue demostrado que tal extensión del espacio de controles ordinarios retardados es propia aunque, como se menciona en [10], determinar los controles relajados de dicho modelo para problemas específicos es una tarea en general imposible de llevar a cabo, por lo cual existe la necesidad de encontrar una caracterización más concreta de la cerradura del espacio de controles ordinarios retardados.
Para tratar de resolver el problema anterior, Rosenblueth [11] introduce una nueva técnica de relajamiento, aplicable a problemas de control óptimo con dos retardos conmensurados o no conmensurados en las funciones de control, demostrando que tal relajamiento es propio.
En este capítulo explicaremos con detalle estos resultados y unificaremos los intentos recientemente publicados para encontrar un relajamiento propio de sistemas de controles con retardos.

2.2 Relajamiento vía el problema reducido.

Como se mencionó en 2.1, en [13] se utilizó una técnica la cual reduce un problema de control óptimo con retardos conmensurados a un problema sin retardos en las dinámicas. Por conmensurado se entiende que $\frac{\theta_i}{\theta_{i+1}}$ es racional $\forall i = 1, \ldots, k-1$ o, equivalentemente, que θ_i es un múltiplo entero de un retardo simple θ, esto es, $\theta_i = i\theta \ \forall i = 1, \ldots, k$.

La idea básica de esta técnica de relajamiento consiste en seccionar los controles ordinarios y las trayectorias correspondientes en segmentos de longitud θ, apilando estos segmentos para formar funciones de valor vectorial de dimensión mayor en el intervalo $[0, \theta]$.

Las funciones resultantes satisfacen una ecuación diferencial sin retardos, y están sujetas a restricciones de frontera donde se involucra la igualdad de una componente de las funciones de estado, extendidas en los extremos con el valor inicial de la siguiente componente para obtener la continuidad de la trayectoria original.

Veamos la formulación de la técnica:

Sean $N = max\{i \in N \mid i\theta < 1\}$, $p = N+1, q = p+k$ y

$$\lambda_i(t) = t + i\theta \ \forall t \in [0, \theta], \ i = -k, \ldots, 0, \ldots, N.$$

Extendemos f a $[0, p\theta] \times \Re^n \times \Re^{m(k+1)}$ haciendo

$$f(t, y, r) = 0 \ \forall t \in (1, p\theta] \text{ y } (y, r) \in \Re^n \times \Re^{m(k+1)},$$

y definimos la función $\hat{f}\colon [0, \theta] \times \Re^{np} \times \Re^{mq} \to \Re^{np}$ como sigue:

$$\begin{gathered} \hat{f}_i(t, \hat{y}, \hat{u}) = f(\lambda_i(t), \hat{y}_i, \hat{u}_i, \hat{u}_{i-1}, \ldots, \hat{u}_{i-k}) \\ \forall t \in [0, \theta], \ i = 0, 1, \ldots, N, \\ \hat{y} = (\hat{y}_0, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_N) \in \Re^{np}, \ \hat{u} = (\hat{u}_{-k}, \hat{u}_{-k+1}, \ldots, \hat{u}_N) \in \Re^{mp}, \end{gathered}$$

donde

$$\hat{f} = (\hat{f}_0, \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_N).$$

Sean

$$\hat{\Omega} = \Omega^q, \ \hat{g}\colon \Re^{np} \to \Re \text{ y } C\colon \Re^{np} \to \Re^{np}$$

tales que

$$\hat{g}(\hat{y}) = g(\hat{y}_N) \text{ y } C(\hat{y}) = (\xi, \hat{y}_0, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{N-1}).$$

Dadas las definiciones anteriores, reformulamos el problema **(P)** en un problema reducido que llamamos **(PR)** el cual consiste en minimizar $\hat{g}(\hat{y}(\theta))$ sujeto a

$\hat{y}'(t) = \hat{f}(t, y(t), \hat{u}(t))$ c.s. en $[0, \theta]$

$\hat{y}(0) = C(\hat{y}(\theta))$

$\hat{u}(t) \in \hat{\Omega}$ c.s. en $[0, \theta]$.

Se demuestra en [8] que **(PR)** y **(P)** son equivalentes, dando una función inyectiva de los

procesos ordinarios admisibles para **(P)** a los procesos ordinarios admisibles para **(PR)**, tal que el proceso ordinario para **(PR)** satisfaga condiciones mixtas de frontera $\hat{y}(0) = C(\hat{y}(\theta))$ y el valor del costo sea preservado en ambos problemas.
A este problema reducido se le puede aplicar la teoría estándar de relajamiento aunque, como se aprecia al reducir el problema, la dimensión de los dominios de definición así como de los espacios involucrados aumenta considerablemente, lo cual es un inconveniente para el uso de esta técnica.
Además, esta técnica está definida solo para problemas con retardos conmensurados y no presenta un relajamiento del problema original sino del reducido.

2.3 Relajamiento débil y reformulación de problemas.

Con el fin de encontrar un relajamiento propio aplicable a problemas con retardos en los controles, Warga propuso en [14] una nueva técnica de relajamiento la cual se llamó "relajamiento débil", aplicable a retardos en los controles no necesariamente separables o conmensurados.
Esta técnica, como las siguientes desarrolladas hasta hoy, se basa en el hecho de tratar a las funciones de control como variables independientes que satisfagan condiciones de compatibilidad en términos de los retardos.
Para esta técnica se consideró el espacio de controles ordinarios como

$$W(\theta_1,\ldots,\theta_k) = \{(u_0,u_1,\ldots,u_k) \in U(\hat{T},\Omega^{k+1}) \mid u_i(t) = u_0(t-\theta_i) \text{ c.s. en } T\ (i=1,\ldots,k)\}.$$

Consideremos el problema **(W)** de minimizar $g(y(1))$ sujeto a
$\dot{y}(t) = f(t,y(t),\hat{u}(t))$ c.s. en T
$y(0) = \xi$
$\hat{u} \in W(\theta_1,\ldots,\theta_k)$.
Probemos que **(P)** y **(W)** son equivalentes.
Proposición 1: **(P)** y **(W)** son equivalentes.
Demostración:
Sea (y,u) un proceso ordinario para **(P)**, tal que $u \in U(\hat{T},\Omega)$ y

$$\dot{y}(t) = f(t,y(t),u(t),u(t-\theta_1),\ldots,u(t-\theta_k)) \text{ c.s. en } T.$$

Para $w \in \Omega$ fija, sea $u_0(t) = u(t)\ \forall t \in \hat{T}$ y definamos

$$u_i(t) = \begin{cases} w & \text{si } t \in [-\theta_k,0] \\ u(t-\theta_i) & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

para $i = 1,\ldots,k$.
Entonces $\hat{u} = (u_0,u_1,\ldots,u_k) \in W(\theta_1,\ldots,\theta_k)$ y $\dot{y}(t) = f(t,y(t),\hat{u}(t))$ c.s. en T.
Conversamente sea $(y,\hat{u})$ un proceso ordinario para **(W)** de manera que

$$\hat{u} = (u_0,u_1,\ldots,u_k) \in W(\theta_1,\ldots,\theta_k) \text{ y } \dot{y}(t) = f(t,y(t),\hat{u}(t)) \text{ c.s. en } T.$$

Sea $u(t) = u_0(t)\ \forall t \in \hat{T}$. Tenemos $\forall i = 1, \ldots, k$,

$$\begin{aligned} u(t-\theta_i) &= u_0(t-\theta_i)\ \forall t \in [-\theta_k + \theta_i, 1 + \theta_i] \\ u_0(t-\theta_i) &= u_i(t) \text{ c.s. en } [0,1]. \end{aligned}$$

Así tenemos $u(t-\theta_i) = u_i(t)$ c.s. en $[0,1]$. Por lo tanto $u \in U(\hat{T}, \Omega)$ con

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t), u(t-\theta_1), \ldots, u(t-\theta_k)) \text{ c.s. en } T.$$

Q.E.D

La extensión de $W(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ dada por Warga [14] a la cual se ha llamado "procedimiento de relajamiento débil" se define por

$$S_w(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \{\mu \in M(\hat{T}, \Omega^{k+1}) \mid P_i\mu(t) = P_0\mu(t-\theta_i) \text{ c.s. en } T\ (i = 1, \ldots, k)\}.$$

Recordemos que $M(\hat{T}, \Omega^{k+1})$ es el espacio de las funciones medibles de $\hat{T}$ a $rpm(\Omega^{k+1})$. Si $\mu \in M(\hat{T}, \Omega^n)$ para alguna $n \in N$ y $S \subset \{0, \ldots, n-1\}$ denotemos por $P_S\mu(t)$ la proyección de $\mu(t)$ sobre el conjunto de coordenadas S de $\mu(t)$.
Así decimos que $\mu(t)$ es un control débilmente relajado si y sólo si $P_i\mu(t) = P_0\mu(t-\theta_i)$ c.s. en T. Equivalentemente, $\mu \in M(\hat{T}, \Omega^{k+1})$ es un control débilmente relajado si y sólo si

$$\int_T dt \int \varphi(t, r_i)\mu(t)(dr) = \int_T dt \int \varphi(t, r_0)\mu(t-\theta_i)(dr)$$

para toda $i = 1, \ldots, k$ y $\varphi \in L^1(T, C(\Omega))$, donde $r = (r_0, \ldots, r_k)$.

Tal como se ha mencionado, para el caso de retardos conmensurados sabemos por varios ejemplos dados en [4, 9] que $S_w(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ puede no coincidir con la cerradura débil estrella de $W(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ y así el modelo de ralajamiento débil no es propio en el caso conmensurado. Otra caracterización del espacio de controles ordinarios fue introducida en [9], con el fin de buscar mejores condiciones de compatibilidad.
Haciendo $\theta_0 = 0$, $\Delta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ y $T_i = [\Delta_i, 1]$ con $i = 1, \ldots, k$, el conjunto de controles ordinarios retardados es

$$U(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \{(u_0, u_1, \ldots, u_k) \in U(T, \Omega^{k+1}) \mid u_i(t) = u_{i-1}(t-\Delta_i) \text{ c.s. en } T_i\ (i = 1, \ldots, k)\}.$$

Consideremos ahora el problema que llamamos **(RV)** en el cual se busca minimizar $g(y(1))$ sujeto a
$\dot{y}(t) = f(t, y(t), \hat{u}(t))$ c.s. en T
$y(0) = \xi$
$\hat{u} \in U(\theta_1, \ldots, \theta_k)$.
En esta reformulación los controles ordinarios son funciones medibles definidas en el intervalo $T = [0,1]$ el cual contiene toda la información de la dinámica.

Proposición 2: **(P)** y **(RV)** son equivalentes.
Demostración:
Sea (y,u) un proceso ordinario para **(P)** de manera que $u \in U(\hat{T},\Omega)$ y

$$\dot{y}(t) = f(t,y(t),u(t),u(t-\theta_1),\ldots,u(t-\theta_k)) \text{ c.s. en } T.$$

Sea $\theta_0 = 0$ y definamos $u_i(t) = u(t-\theta_i)\ \forall t \in T$, $i = 0,1,\ldots,k$. Notemos que

$$u_i(t) = u(t-\theta_i)\ \forall t \in [0,1],$$
$$u(t-\theta_i) = u_{i-1}(t-(\theta_i-\theta_{i-1})) \text{ c.s. en } [\theta_i-\theta_{i-1}, 1+\theta_i-\theta_{i-1}]$$

$\forall i = 1,\ldots,k$ y por lo tanto $u_i(t) = u_{i-1}(t-\Delta_i)$ c.s. en $[\Delta_i, 1]$.
Luego tenemos

$$\hat{u} = (u_0,\ldots,u_k) \in U(\theta_1,\ldots,\theta_k) \text{ y } \dot{y}(t) = f(t,y(t),\hat{u}(t)) \text{ c.s. en } T.$$

Conversamente sea $(y,\hat{u})$ un proceso ordinario para **(RV)**, de manera que

$$\hat{u} = (u_0,\ldots,u_k) \in U(\theta_1,\ldots,\theta_k) \text{ y } \dot{y}(t) = f(t,y(t),\hat{u}(t)) \text{ c.s. en } T.$$

Sea

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t) & \text{si } t \in [0,1] \\ u_i(t+\theta_i) & \text{si } t \in [-\theta_i, -\theta_{i-1}],\ i = 1,2,\ldots,k \end{cases}$$

de manera que $u \in U(\hat{T},\Omega)$.
El resultado se tiene si probamos que $u(t-\theta_i) = u_i(t)$ c.s. en T $\forall i = 0,\ldots,k$ ya que, en este caso,

$$\dot{y}(t) = f(t,y(t),u(t),u(t-\theta_1),\ldots,u(t-\theta_k)) \text{ c.s. en } T.$$

Notemos primero que $u(t) = u_0(t)\ \forall t \in [0,1]$. Supongamos que $u(t-\theta_i) = u_i(t)$ c.s. en $[0,1]$.
Por construcción, $u(t-\theta_{i+1}) = u_{i+1}(t)\ \forall t \in [0, \theta_{i+1}-\theta_i)$.
Además, como $(u_0,\ldots,u_k) \in U(\theta_1,\ldots,\theta_k)$ entonces

$$u_{i+1}(t) = u_i(t-(\theta_{i+1}-\theta_i)) \text{ c.s. en } [\theta_{i+1}-\theta_i, 1].$$

Por suposición $u_i(t-(\theta_{i+1}-\theta_i)) = u(t-\theta_{i+1})$ c.s. en $[\theta_{i+1}-\theta_i, 1+\theta_{i+1}-\theta_i]$.
Por lo tanto $u(t-\theta_{i+1}) = u_{i+1}(t)$ c.s. en $[0,1]$.

Q.E.D

2.4 Modelos de relajamiento para el espacio de controles ordinarios retardados.

Para problemas de control óptimo con retardos en los controles, ahora resumimos los modelos que se han propuesto para encontrar procedimientos de relajamiento propios. El objetivo que se tiene es encontrar un subconjunto de $M(T,\Omega^{k+1})$ que coincida con la cerradura del espacio de controles ordinarios.

Procedimiento de relajamiento débil

-Espacio de controles ordinarios retardados

$$U(\theta_1,\ldots,\theta_k) = \{(u_0,\ldots,u_k) \in U(T,\Omega^{k+1}) \mid u_i(t) = u_{i-1}(t-\Delta_i) \text{ c.s. en } T_i \ (i=1,\ldots,k)\}$$

donde $\theta_0 = 0$, $\Delta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ y $T_i = [\Delta_i, 1]$.

-Espacio de controles relajados retardados

$$M_w(\theta_1,\ldots,\theta_k) = \{\mu \in M(T,\Omega^{k+1}) \mid P_i\mu(t) = P_{i-1}\mu(t-\Delta_i) \text{ c.s. en } T_i \ (i=1,\ldots,k)\}.$$

Así $\mu \in M(T,\Omega^{k+1})$ es un control débilmente relajado si y sólo si

$$\int_{T_i} dt \int \varphi(t,r_i)\mu(t)(dr) = \int_{T_i} dt \int \varphi(t,r_{i-1})\mu(t-\Delta_i)(dr)$$

$\forall i = 1,\ldots,k$ y $\varphi \in L^1(T,C(\Omega))$, donde $r = (r_0,\ldots,r_k)$.

Para el caso conmensurado un proceso de relajamiento fuerte fue introducido en [9].

Procedimiento de relajamiento fuerte

-Espacio de controles ordinarios retardados

$$U_s(\theta,2\theta,\ldots,k\theta) = \{(u_0,\ldots,u_k) \in U(T,\Omega^{k+1}) \mid (u_1,\ldots,u_k)(t) = (u_0,\ldots,u_{k-1})(t-\theta) \text{ c.s. en } [\theta,1]\}.$$

-Espacio de controles relajados retardados

$$M_s(\theta,2\theta,\ldots,k\theta) = \{\mu \in M(T,\Omega^{k+1}) \mid P_{1,\ldots,k}\mu(t) = P_{0,\ldots,k-1}\mu(t-\theta) \text{ c.s. en } [\theta,1]\}.$$

Así $\mu \in M(T,\Omega^{k+1})$ es un control fuertemente relajado si y sólo si

$$\int_\theta^1 dt \int \varphi(t,r_1,\ldots,r_k)\mu(t)(dr) = \int_\theta^1 dt \int \varphi(t,r_0,\ldots,r_{k-1})\mu(t-\theta)(dr)$$

$\forall \varphi \in L^1(T,C(\Omega^k))$, donde $r = (r_0,\ldots,r_k)$.

La característica de ser propio para tal relajamiento fue probada en [9] mostrando que $min\{P_{s-relajado}\} = inf\{P_{original}\}$ y en [3] tal propiedad fue demostrada dando una metodología explícita como en el teorema 9.

Un modelo abstracto aplicable a retardos no conmensurados fue también introducido en [9].

Modelo M_D

-Espacio de controles relajados retardados

$$M_D(\theta_1,\ldots,\theta_k) = \{\mu \in M(T,\Omega^{k+1}) \mid \textstyle\int_0^1 dt \int \varphi(t,r_0,\ldots,r_k)\mu(t)(dr) \leq 0$$

$\forall \varphi \in L^1(T,C(\Omega^{k+1}))$ tal que

$$\textstyle\int_0^1 \varphi(t,u(t),u(t-\theta_1),\ldots,u(t-\theta_k))dt \leq 0 \quad \forall u \in U([-\theta_k,1],\Omega)\}.$$

Los tres tipos de extensión mencionados contienen al conjunto de los controles ordinarios considerándolos como subespacios de $M(T,\Omega^{k+1})$ y, con la topología débil estrella, todos ellos son compactos [9].

2.5 Relaciones entre los procedimientos de relajamiento para problemas con retardos en los controles.

En los tres modelos mencionados anteriormente, para el caso de retardos conmensurados se tiene la siguiente relación

$$M_D(\theta, 2\theta, \ldots, k\theta) \subset M_s(\theta, 2\theta, \ldots, k\theta) \subset M_w(\theta, 2\theta, \ldots, k\theta).$$

En [9] fue demostrada la siguiente
Proposición 3: El conjunto de los M_D-controles relajados retardados coincide con el conv $U(\theta_1, \ldots, \theta_k)$, la cerradura débil estrella de la cubierta convexa de $U(\theta_1, \ldots, \theta_k)$.
Lo cual hace posible tener el siguiente resultado:
Proposición 4: cl $U(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ está totalmente caracterizada para el caso conmensurado.
Demostración:
Por las relaciones mencionadas así como por la proposición 3 tenemos

$$\begin{aligned} \text{cl } U(\theta, 2\theta, \ldots, k\theta) \subset \text{cl } \check{\text{conv}}\, U(\theta, 2\theta, \ldots, k\theta) &= M_D(\theta, 2\theta, \ldots, k\theta) \\ \subset M_s(\theta, 2\theta, \ldots, k\theta) &= \text{cl } U(\theta, 2\theta, \ldots, k\theta). \end{aligned}$$

Por lo tanto en el caso conmensurado el espacio de controles fuertemente relajados y el de los M_D-controles dan una caracterización de la cerradura del espacio de controles ordinarios retardados.

Q.E.D

También es probado en [15] el siguiente resultado:
Proposición 5: cl $U(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ es un subconjunto convexo de $M(T, \Omega^{k+1})$.
Este último resultado es crucial y con él podemos establecer la siguiente proposición en el caso del M_D-modelo.
Proposición 6: El M_D-modelo es un procedimiento de relajamiento propio para $U(\theta_1, \ldots, \theta_k)$.
Demostración:
Como

$$\text{cl conv } U(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \bigcap \{U_i \text{ convexos cerrados} \mid U(\theta_1, \ldots, \theta_k) \subset U_i\},$$

se sigue de la proposición 3 que $M_D(\theta_1, \ldots, \theta_k) =$cl $U(\theta_1, \ldots, \theta_k)$.

Q.E.D

Así se demuestra que el M_D-modelo es un procedimiento de relajamiento propio para el espacio de controles ordinarios con retardos.
Como se menciona en [10], determinar los M_D-controles relajados para problemas específicos es muy difícil y tal vez una tarea no realizable en la práctica.
Lo anterior mostró la necesidad de encontrar caracterizaciones más concretas de la cerradura del espacio de controles retardados ordinarios.
Como mencionamos, el caso conmensurado está resuelto a través del modelo fuerte. Un candidato para el caso no conmensurado puede ser precisamente el modelo débil.

2.6 Solución de la conjetura de Warga.

Tal como hemos mencionado Warga propuso el modelo débil buscando una extensión propia del espacio de controles retardados ordinarios. Su afirmación aparece por vez primera en [14] la cual en forma simplificada es:

Para cualquier $\Omega \subset \Re^m$ compacto y $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, $M_w(\theta_1, \theta_2) =$cl $U(\theta_1, \theta_2)$.

Esta conjetura fue resuelta en [9], para el caso conmensurado, mostrando un elemento de $M_w(\theta, 2\theta)$, con $\Omega = [0,1]$, el cual no pertenece a cl $U(\theta, 2\theta)$.
Se consideró el siguiente problema:
Supongamos que son dados $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$ y una función continua $h: \Re^3 \to \Re$ tal que $h(1,1,0) = h(0,0,1) = 0$ y $h(u,v,w) > 0$ en otro caso.
Sea $T = [0,1]$ y consideremos el problema de minimizar $y_1(1)$ sujeto a
$\dot{y_1}(t) = (y_0(t) - \frac{t}{2})^2 + h(u(t), u(t-\theta), u(t-2\theta))$ c.s. en T
$\dot{y_0}(t) = u(t)$
$y_0(0) = y_1(0) = 0$
$u(t) \in [0,1]$ c.s. en $[-2\theta, 1]$.
Sea $\mu(t) = \frac{1}{2}\delta(1,1,0) + \frac{1}{2}\delta(0,0,1)$. Como $P_i\mu(t) = P_{i-1}\mu(t-\theta) = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_0$ para $i = 1,2$ con $t \in [0,1]$ μ es débilmente relajado.
La trayectoria de estado asociada está dada por $(y_0(t), y_1(t)) = (\frac{t}{2}, 0)$ $\forall t \in T$ y el correspondiente costo es cero. Como el costo no puede ser negativo, tenemos $min\{P_{w-relajado}\} = 0$.
Supongamos que (y_0, y_1, σ) es cualquier proceso admisible fuertemente relajado con costo cero.
Esto se tiene si $y_0(t) = \frac{t}{2}$ con $t \in T$, y el soporte de $\sigma(t)$ está contenido en $\{1,1,0\} \cup \{0,0,1\}$ c.s. en T. Lo último significa que existe una función medible $\alpha: T \to T$ tal que

$$\sigma(t) = \alpha(t)\delta(1,1,0) + (1-\alpha(t))\delta(0,0,1) \text{ c.s. en } T.$$

De la dinámica tenemos, como $y_0(t) = \frac{t}{2}$, que

$$\tfrac{1}{2} = \alpha(t)\cdot 1 + (1-\alpha(t))\cdot 0 \Rightarrow \alpha(t) = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \sigma(t) = \mu(t) \text{ c.s. en } T$$

pero $\mu(t)$ no satisface las condiciones fuertes de compatibilidad

$$P_{12}\mu(t) = \frac{1}{2}\delta(1,0) + \frac{1}{2}\delta(0,1) \neq \frac{1}{2}\delta(1,1) + \frac{1}{2}\delta(0,0) = P_{01}\mu(t-\theta).$$

Por lo tanto, como $\{P_{s-relajado}\}$ tiene una solución y un proceso admisible relajado fuertemente define un proceso admisible relajado débilmente se tiene

$$min\{P_{s-relajado}\} > min\{P_{w-relajado}\},$$

pero el problema $\{P_{s-relajado}\}$ es una extensión del problema original y por lo tanto

$$inf\{P_{original}\} \geq min\{P_{s-relajado}\} > min\{P_{w-relajado}\}.$$

Por lo tanto μ no puede ser aproximado por controles originales.

Considerando el ejemplo anterior, en [2] se intentó probar que la conjetura era verdadera para retardos conmensurados, excepto para el caso $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1}{2}$, utilizando argumentos geométricos.
En [4] se probó que este resultado es falso, al extender la relación $M_w(\theta_1, \theta_2) \neq$cl $U(\theta_1, \theta_2)$ a pares diferentes de $(\theta, 2\theta)$ cuyo cociente es un número racional.
Por ejemplo si se consideran problemas similares al problema desarrollado, como minimizar $y_1(1)$ sujeto a
$\dot{y}_1(t) = (y_0(t) - \frac{t}{2})^2 + h(u(t), u(t-2\theta), u(t-3\theta))$ c.s. en T
$\dot{y}_0(t) = u(t)$
$y_0(0) = y_1(0) = 0$
$u(t) \in \{0,1\}$ c.s. en $[-3\theta, 1]$
donde $\theta = \frac{3}{10}$ y $h(u,v,w) =$min$\{|(u-1, v, w-1)|, |(u, v-1, w)|\}$.
De la misma forma se verifica que $min\{P_{w-relajado}\} = 0$ aunque $inf\{P_{original}\} > 0$.
Consideremos ahora el caso no conmensurado. Supongamos que $\Omega = \{0,1\}$ y tenemos dados $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ no conmesurados. Sea $\mu \in M_w(\theta_1, \theta_2)$.
La pregunta es: ¿Podemos aproximar a μ con elementos de $U(\theta_1, \theta_2)$?
Como $\mu \in M(T, \Omega^3)$ y $\Omega = \{0,1\}$,

$$\mu(t) = \sum_{k,l,m=1}^{2} \mu(t)(R_k \times R_l \times R_m)\delta(r_k, r_l, r_m)$$

donde $R_1 = \{0\}$, $R_2 = \{1\}$, $r_1 = 0$ y $r_2 = 1$. Por lo tanto, si definimos

$$\begin{array}{ll} c_1(t) = \mu(t)(R_1 \times R_1 \times R_1), & c_2(t) = \mu(t)(R_1 \times R_1 \times R_2) \\ c_3(t) = \mu(t)(R_1 \times R_2 \times R_1), & c_4(t) = \mu(t)(R_1 \times R_2 \times R_2) \\ c_5(t) = \mu(t)(R_2 \times R_1 \times R_1), & c_6(t) = \mu(t)(R_2 \times R_1 \times R_2) \\ c_7(t) = \mu(t)(R_2 \times R_2 \times R_1), & c_8(t) = \mu(t)(R_2 \times R_2 \times R_2) \end{array}$$

μ puede expresarse como

$$\begin{array}{c} \mu(t) = c_1(t)\delta(0,0,0) + c_2(t)\delta(0,0,1) + c_3(t)\delta(0,1,0) + c_4(t)\delta(0,1,1) \\ +c_5(t)\delta(1,0,0) + c_6(t)\delta(1,0,1) + c_7(t)\delta(1,1,0) + c_8(t)\delta(1,1,1). \end{array}$$

Las condiciones de compatibilidad

$$\begin{array}{c} P_1\mu(t) = P_0\mu(t-\theta_1) \text{ c.s. en } [\theta_1, 1] \\ P_2\mu(t) = P_1\mu(t-(\theta_2-\theta_1)) \text{ c.s. en } [\theta_2-\theta_1, 1] \end{array}$$

son equivalentes a

$$(1)\left\{\begin{array}{l} c_1(t) + c_2(t) + c_5(t) + c_6(t) = c_1(t-\theta_1) + c_2(t-\theta_1) + c_3(t-\theta_1) + c_4(t-\theta_1) \\ c_3(t) + c_4(t) + c_7(t) + c_8(t) = c_5(t-\theta_1) + c_6(t-\theta_1) + c_7(t-\theta_1) + c_8(t-\theta_1) \end{array}\right.$$

c.s. en $[\theta_1, 1]$,

$$(2)\left\{\begin{array}{l} c_1(t) + c_3(t) + c_5(t) + c_7(t) = c_1(t-\alpha) + c_2(t-\alpha) + c_5(t-\alpha) + c_6(t-\alpha) \\ c_2(t) + c_4(t) + c_6(t) + c_8(t) = c_3(t-\alpha) + c_4(t-\alpha) + c_7(t-\alpha) + c_8(t-\alpha) \end{array}\right.$$

c.s. en $[\alpha, 1]$, donde $\alpha = \theta_2 - \theta_1$, $c_i(t) \geq 0$ c.s. en T, $c_1(t) + \ldots + c_8(t) = 1$.

El caso constante.

En [7, 8] se consideró el conjunto de controles ordinarios retardados como

$$U'(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \{(u_0, \ldots, u_k) \in U(T, \Omega^{k+1}) \mid u_i(t) = u_0(t - \theta_i) \text{ c.s. en } [\theta_i, 1] \ (i = 1, \ldots, k)\},$$

definiéndose el conjunto de controles débilmente retardados como

$$M'_w(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \{\mu \in M(T, \Omega^{k+1}) \mid P_i\mu(t) = P_0\mu(t - \theta_i) \text{ c.s. en } [\theta_i, 1] \ (i = 1, \ldots, k)\}.$$

La introducción de este modelo (el cual corresponde a un problema similar pero no equivalente a **(P)**), dio ideas fundamentales ya que fue demostrado que $\mu \in M'_w(\theta_1, \theta_2)$ puede ser aproximado por $\{(u_i, v_i, w_i)\} \in U'(\theta_1, \theta_2)$ en el caso en que μ es constante, es decir, $c_i(t)$ es constante para toda i.
Para nuestro problema este resultado también resultó válido. Veamos la manera en que se procedió con $M'_w(\theta_1, \theta_2)$ y cómo se extiende el resultado para nuestro problema.
Al estudiar en [7, 8] el problema similar, dado $\mu \in M'_w(\theta_1, \theta_2)$, es decir, $\mu \in M(T, \Omega^3)$ satisfaciendo

$$\begin{aligned} P_1\mu(t) &= P_0\mu(t - \theta_1) \text{ c.s. en } [\theta_1, 1] \\ P_2\mu(t) &= P_0\mu(t - \theta_2) \text{ c.s. en } [\theta_2, 1], \end{aligned}$$

se buscó ver si existe una sucesión $\{(u_i, v_i, w_i)\} \in U(T, \Omega^3)$ que converge a μ y satisface

$$\begin{aligned} v_i(t) &= u_i(t - \theta_1) \text{ c.s. en } [\theta_1, 1] \\ w_i(t) &= u_i(t - \theta_2) \text{ c.s. en } [\theta_2, 1]. \end{aligned}$$

Para este caso se siguió una metodología análoga a la del teorema 9, para aproximar cualquier $\mu \in M(T, \Omega^3)$ con elementos de $U(T, \Omega^3)$, eligiendo conjuntos T^i_j los cuales son intervalos sucesivos de longitud a lo más $\frac{1}{i}$, y tal que, con algún orden de sus subconjuntos $T^i_{j,k,l,m}$, la condición de compatibilidad $v_i(t) = u_i(t - \theta_1)$ c.s. en $[\theta_1, 1]$ se satisfaga. Al definir

$$E_i = \{t \in [\theta_2, 1] \mid w_i(t) \neq \hat{w}_i(t)\}$$

donde

$$\hat{w}_i(t) = \begin{cases} w_i(t) & \text{si } t \in [0, \theta_2) \\ u_i(t - \theta_2) & \text{si } t \in [\theta_2, 1], \end{cases}$$

se prueba que en el caso en que $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ sea irracional, uno puede asegurar la existencia de una sucesión creciente η de enteros positivos tal que $mE_i \to 0$, $i \in \eta$. Esto implica que $\{(u_i, v_i, \hat{w}_i)\}_{i \in \eta}$, la cual pertenece a $U'(\theta_1, \theta_2)$, converge a μ.

En [8], se considera primero el caso particular $c_1 = c_8 = 0$, donde se observa que la característica en la construcción de los conjuntos T^i_j y $T^i_{j,k,l,m}$, que hace posible aproximar un control

relajado por controles ordinarios, es que los conjuntos $T^i_{j,k,l,m}$ sean definidos de tal manera que, para cada $i \in N$, u_i, v_i y w_i sean traslaciones de cada una.
En el caso de cualquier control relajado constante, en [8] se procedió de la siguiente manera: Supongamos primero que los coeficientes $c_2, \ldots, c_7$ son racionales. Sean

$$p = \frac{c_2 + \ldots + c_7}{d}, \; x = (\frac{c_5 + c_6}{d})(\frac{c_1 + c_8}{p}), \; y = (\frac{c_2 + c_4}{d})(\frac{c_1 + c_8}{p})$$

donde d es el máximo común divisor de $c_2, \ldots, c_7$. $\forall i \in N$ sea

$$T^i_j = [\frac{(j-1)(\theta_1)}{i - (x + c_5 + c_6)}, \frac{j\theta_1}{i - (x + c_5 + c_6)})$$

y definamos $T^i_{j,k,l,m}$ tal que, para cada $i \in N$, tengan el mismo orden que en el caso $c_1 = c_8 = 0$, pero insertando p intervalos equidistantes de longitud $\frac{c_1 + c_8}{p}$ en cada intervalo T^i_j.
Por construcción $v_i(t) = u_i(t - \theta_1)$ c.s. en $[\theta_1, 1]$, y w_i es una traslación de u_i en un intervalo de longitud $(c_2 + c_4 + y)\theta_1/(i - (x + c_5 + c_6))$, por lo cual se sigue que, para alguna sucesión creciente η de enteros positivos, $mE_i \to 0, \; i \in \eta$.

El caso de posibles coeficientes irracionales, puede ser resuelto de manera similar, al considerar $\{c^i_n \mid i \in N\}$ una sucesión de racionales que converge a c_n $(n = 2, \ldots, 7)$, y satisfaciendo las condiciones de convexidad y compatibilidad.
La sucesión correspondiente de controles $\{(u_i, v_i, \hat{w}_i)\}$ con coeficientes racionales satisface las condiciones requeridas $v_i(t) = u_i(t - \theta_1)$ c.s. en $[\theta_1, 1]$ y $\hat{w}_i(t) = u_i(t - \theta_2)$ c.s. en $[\theta_2, 1]$ y, para alguna subsucesión, converge a μ.

Para nuestro problema original, en vez de la condición $w_i(t) = u_i(t - \theta_2)$ c.s. en $[\theta_2, 1]$ requerimos que $w_i(t) = v_i(t - \alpha)$ c.s. en $[\alpha, 1]$. Argumentos similares pueden ser aplicados si las tres funciones son, en cada iteración, traslaciones de cada una, de tal manera que si definimos

$$F_i = \{t \in [\alpha, 1] \mid w_i(t) \neq \hat{w}_i(t), \alpha = \theta_2 - \theta_1\}$$

donde

$$\hat{w}_i(t) = \begin{cases} w_i(t) & \text{si } t \in [0, \alpha) \\ v_i(t - \alpha) & \text{si } t \in [\alpha, 1], \end{cases}$$

entonces existe una sucesión creciente η de enteros positivos tal que $mF_i \to 0, \; i \in \eta$, lo cual implica que $\{(u_i, v_i, \hat{w}_i)\}_{i \in \eta}$, la cual pertenece a $U(\theta_1, \theta_2)$, converge a μ.
Tales ideas son resumidas en el siguiente resultado:

Teorema 10: Sean $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ retardos no conmensurados y $\Omega = \{0, 1\}$. Si $\mu \in M_w(\theta_1, \theta_2)$ es constante entonces $\mu \in \text{cl}\, U(\theta_1, \theta_2)$.

Este resultado podría hacer pensar que, para el caso no conmensurado, el procedimiento débil es en efecto propio, o sea,

$$M_w(\theta_1, \theta_2) = \text{cl } U(\theta_1, \theta_2) \text{ si } \theta_1/\theta_2 \text{ es irracional .}$$

Aunque esta conjetura, como veremos después, fue resuelta en [11], resulta ilustrativo comparar primero con cierto detalle los conjuntos $M_w(\theta_1, \theta_2)$ y $M'_w(\theta_1, \theta_2)$ así como sus correspondientes espacios de controles ordinarios.
Claramente

$$U(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \subset U'(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

ya que, como se puede fácilmente verificar,

$$U'(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \{(u_0, \ldots, u_k) \in U(T, \Omega^{k+1}) \mid u_i(t) = u_{i-1}(t - \Delta_i) \text{ c.s. en } [\theta_i, 1] \ (i = 1, \ldots, k)\}.$$

En [11] se prueba, a través del control relajado

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\delta(1,0,1) + \frac{1}{2}\delta(0,1,0) \ (t \in T)$$

y suponiendo que $\Omega = \{0,1\}$, $\theta_1 = 3/5$ y $\theta_2 = 9/10$, que existe un elemento tanto de $M_w(\theta_1, \theta_2)$ como de $M'_w(\theta_1, \theta_2)$ el cual pertenece a cl $U'(\theta_1, \theta_2)$ pero no a cl $U(\theta_1, \theta_2)$.
Más aún, para ciertos retardos, el modelo débil para $U'(\theta_1, \theta_2)$ sí puede ser propio.

Esta última afirmación pudo probarse llevando a cabo algunas extensiones del ejemplo, al utilizar en vez del control relajado constante anterior, cualquier control μ que pertenece a $M'_w(\theta_1, \theta_2)$, y suponiendo primero que $\theta_1 \geq 1/2$ y $1 - \theta_2 < \theta_2 - \theta_1$.
Siguiendo la misma construcción de los conjuntos T_j^i para el ejemplo en [11], pudo mostrarse que μ pertenece a cl $U'(\theta_1, \theta_2)$. En efecto, definiendo los conjuntos $T_{j,k,l,m}^i$ (para $j = 1, \ldots i$, y $k, l, m \in \{1,2\}$) como intervalos disjuntos (en cualquier orden) de T_j^i y cuya longitud es

$$m(T_{j,k,l,m}^i) = \int_{T_j^i} \mu(t)(R_k \times R_l \times R_m)dt,$$

se puede encontrar una partición de $T_j^i + \theta_1$, $T_j^i + \theta_2$ y $T_j^i + \theta_2 - \theta_1$ tal que las condiciones de compatibilidad con respecto a $U'(\theta_1, \theta_2)$ se tengan. Es decir, se consideró la posibilidad de partir T en intervalos que sean traslaciones de cada uno en términos de $\pm\theta_1$ y $\pm\theta_2$.
En el caso en que θ_1 y θ_2 sean conmensurados o no conmensurados, se muestra que cualquier $\mu \in M'_w(\theta_1, \theta_2)$ pertenece a cl $U'(\theta_1, \theta_2)$. Así, la pregunta acerca de si $M'_w(\theta_1, \theta_2)$ es una extensión propia de $U'(\theta_1, \theta_2)$, fue resuelta para cualquier $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ satisfaciendo $\theta_1 \geq \frac{1}{2}$ y $1 - \theta_2 < \theta_2 - \theta_1$. Tal resultado pudo extenderse de dos maneras.
Primero, se removió la condición $1 - \theta_2 < \theta_2 - \theta_1$, al suponerse que $\theta_1 \geq \frac{1}{2}$ y $\theta_1 < \theta_2 < 1$. Se consideró una división del intervalo $T = [0,1]$ con el conjunto de puntos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_p\}$, donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = 1$, y $P = P_0 \cup P_1$,

$$P_0 = \{0, \theta_1\} \cup \{n\theta_2 - (n-1)\theta_1, n\theta_2 - n\theta_1 \mid n = 1, \ldots, N\}$$

$$P_1 = 1 - P_0 = \{1 - p \mid p \in P_0\}$$

y $N = min\{n \in N \mid n(\theta_2 - \theta_1) > 1 - \theta_2\}$.
La segunda restricción que se removió fue que Ω tuvíera solo dos puntos, y el resultado pudo ser extendido a cualquier Ω subconjunto compacto de $\Re^m$. Procediendo con argumentos similares a los usados en [6] para el caso conmensurado, esto es, partiendo Ω en conjuntos R_k^i $(k = 1, \ldots, k(i))$ de diámetro a lo más $\frac{1}{i}$, los cuales son diferencias de conjuntos abiertos, de manera que

$$\Omega^3 = \bigcup_{k,l,m,j=1}^{k(i)} R_k^i \times R_l^i \times R_m^i,$$

definimos T_j^i $(j = 1, \ldots j(i))$ como antes, elegimos para cada $k \in \{1, \ldots, k(i)\}$ un punto $r_k^i \in R_k^i$, y definimos

$$(u_i(t), v_i(t), w_i(t)) := (r_k^i, r_l^i, r_m^i) \; \forall t \in \bigcup_{j=1}^{j(i)} T_{j,k,l,m}^i \; (k, l, m \in \{1, \ldots, k(i)\})$$

donde $\{T_{j,k,l,m}^i\}_{k,l,m}$ es una partición de T_j^i, que satisface

$$m(T_{j,k,l,m}^i) = \alpha_{j,k,l,m}^i := \int_{T_j^i} \mu(t)(R_k^i \times R_l^i \times R_m^i)dt \; (k, l, m \in \{1, \ldots, k(i)\}).$$

Una prueba similar al teorema 9 muestra que $(u_i, v_i, w_i) \to \mu,\ i \to \infty$.
Si ahora se construyen los conjuntos $T_{j,k,l,m}^i$ de tal manera que las condiciones de compatibilidad con respecto a θ_1 y θ_2 se satisfagan, se sigue que (u_i, v_i, w_i) pertenece a $U'(\theta_1, \theta_2)$.

Para el caso $\theta_1 < \frac{1}{2}$, se muestra en [11] que, suponiendo que $\theta_2 = q\theta_1$ para alguna $q \in \{2, 3, \ldots, \}$, el control relajado

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\delta(0, 0, 1) + \frac{1}{2}\delta(1, 1, 0) \; (t \in T).$$

es tal que no existe una sucesión $\{(u_i, v_i, w_i)\}$ en $U(T, \Omega^3)$ que satisfaga las condiciones de compatibilidad

$$\begin{aligned} v_i(t) &= u_i(t - \theta_1) \text{ c.s. en } [\theta_1, 1] \\ w_i(t) &= u_i(t - \theta_2) \text{ c.s. en } [\theta_2, 1], \end{aligned}$$

y tal que $(u_i, v_i, w_i) \to \mu,\ i \to \infty$.
En resumen, de los resultados anteriores tenemos:

Teorema 11: Sean $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ y $\Omega \subset \Re^m$ compacto. Si $\theta_1 \geq \frac{1}{2}$ entonces $M_w'(\theta_1, \theta_2) =$ cl $U'(\theta_1, \theta_2)$. Si $\theta_1 < \frac{1}{2}$ y θ_1 y θ_2 son conmensurados entonces cl $U'(\theta_1, \theta_2)$ puede estar estrictamente contenida en $M_w'(\theta_1, \theta_2)$.

El caso no constante.

Al estudiar controles relajados en $M'_w(\theta_1, \theta_2)$, se pudieron obtener algunos resultados, como los enunciados en el teorema anterior. La pregunta ahora es: ¿Podemos decir algo similar para nuestro problema, es decir, en términos de $M_w(\theta_1, \theta_2)$ y $U(\theta_1, \theta_2)$?
Ya sabemos que incluso si $\theta_1 \geq \frac{1}{2}$, en el caso de retardos conmensurados, los conjuntos $M_w(\theta_1, \theta_2)$ y cl $U(\theta_1, \theta_2)$ pueden no coincidir. Pero, ¿podemos encontrar al menos dos retardos no conmensurados $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ para los cuales $M_w(\theta_1, \theta_2)$ y la cerradura débil estrella de $U(\theta_1, \theta_2)$ coincidan?
Con el fin de contestar tales preguntas, consideremos el caso en que $\mu \in M_w(\theta_1, \theta_2)$ sea no constante, con $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ no conmensurados, recordando que μ puede expresarse como

$$\mu(t) = c_1(t)\delta(0,0,0) + c_2(t)\delta(0,0,1) + c_3(t)\delta(0,1,0) + c_4(t)\delta(0,1,1)$$
$$+c_5(t)\delta(1,0,0) + c_6(t)\delta(1,0,1) + c_7(t)\delta(1,1,0) + c_8(t)\delta(1,1,1)\ (t \in T).$$

En [11] se estudió el comportamiento de dos controles relajados particulares:

(1) $\mu(t) = c_1(t)\delta(0,0,0) + c_8(t)\delta(1,1,1)$ $(t \in T)$ donde $c_1(t) + c_8(t) = 1$.

(2) $\mu(t) = c_3(t)\delta(0,1,0) + c_4(t)\delta(0,1,1) + c_5(t)\delta(1,0,0) + c_6(t)\delta(1,0,1)$ $(t \in T)$ donde $c_3(t) + c_4(t) + c_5(t) + c_6(t) = 1$.

En ambos controles, se intentó usar las ideas del caso constante, es decir, definir conjuntos T_j^i de tal manera que la relación $v_i(t) = u_i(t - \theta_1)$ se satisfaga c.s. en $[\theta_1, 1]$, y w_i sea una traslación de v_i, pero como se muestra tal construcción no es posible.
Sin embargo, en [11] se prueba que, dados dos números $a, b \in (0,1)$ con $a + b \leq 1$ y $\frac{a}{b}$ irracional, y una función medible $f: [0,1] \to \Re$ que satisface

$$f(x) = f(x-a) \text{ c.s. en } [a,1] \text{ y } f(x) = f(x-b) \text{ c.s. en } [b,1],$$

entonces necesariamente f es constante c.s. en $[0,1]$.
Si usamos este resultado y suponemos que, para el control (1), $\mu \in M_w(\theta_1, \theta_2)$, tenemos que, como $\theta_1 + \alpha = \theta_2 < 1$ y $\frac{\theta_1}{\alpha}$ es irracional, entonces c_1 y c_8 son constantes c.s. en T.
Por lo tanto, aplicando ahora la técnica usada en el caso constante, podemos concluir que μ pertenece a cl $U(\theta_1, \theta_2)$. De lo cual se sigue que, si θ_1/θ_2 es irracional y $\mu \in M(T, \Omega^3)$ está dado por

$$\mu(t) = c_1(t)\delta(0,0,0) + c_8(t)\delta(1,1,1)\ (t \in T),$$

entonces $\mu \in M_w(\theta_1, \theta_2) \Leftrightarrow c_1$ y c_8 son constantes c.s. en $T \Leftrightarrow \mu \in$ cl $U(\theta_1, \theta_2)$.
Este resultado es válido para estos coeficientes específicos. En general, μ podría no ser constante y, de hecho, la técnica usada en el caso constante puede no ser aplicada. Esto mostró la necesidad de buscar otras ideas en el caso de controles no constantes.
La "técnica de subsucesiones", aplicada al caso constante, tiene su origen al considerar el caso $c_1 = c_8 = 1/2$, y pensar en el hecho de que, si $\{(u_i, v_i, w_i)\} \subset U(\theta_1, \theta_2)$ converge a μ, entonces tal sucesión no puede tener solamente los valores $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$. Esto se obtuvo

con base en el siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en [1].

Teorema 12: Sean $\Omega = \{0,1\}$, $T = [0,1]$, $a, b \in (0,1)$ con a/b irracional, y supóngase que $\{(u_i, v_i, w_i)\}$ es una sucesión de funciones medibles de $\Re$ a Ω^3 tal que, restringida a T, converge a

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\delta(0,0,0) + \frac{1}{2}\delta(1,1,1) \ (t \in T),$$

y las condiciones $v_i(t) = u_i(t-a)$ y $w_i(t) = v_i(t-b)$ se tienen para toda $t \in \Re$. Si $A_i = (u_i, v_i, w_i)^{-1}(\{1,1,1\})$ y $B_i = (u_i, v_i, w_i)^{-1}(\{0,0,0\})$, entonces no puede tenerse que $A_i \cup B_i = \Re$ para toda $i \in N$.

Ahora, para el caso no constante, esta técnica puede no ser aplicable. Un ejemplo es el control descrito en (2). Terminaremos esta sección resumiendo brevemente la dificultad principal que presenta el relajamiento débil al tratar de aproximar un control débilmente relajado a través de controles ordinarios.
Análogamente al caso de $M'_w(\theta_1, \theta_2)$ descrito, construyamos un conjunto P, el cual divide al intervalo $T = [0,1]$. Si $a, b \in (0,1)$, sea $P_0 = \{0\}$ y definamos recursivamente

$$P_{i+1} = P_i \cup \{p \pm a, p \pm b \mid p \in P_i\} \cap [0,1), \ i \in N \cup \{0\}.$$

Si P_i tiene $j(i)$ elementos, sea

$$t^i_j := min(P_i - \{t^i_1, \ldots, t^i_{j-1}\}) \ (j = 1, \ldots, j(i)),$$

y nótese que $t^i_1 = 0$ y $t^i_{j(i)} = max\{P_i\}$. Definamos $t^i_{j(i)+1} = 1$, con lo cual tenemos la partición

$$T^i_j = [t^i_j, t^i_{j+1}) \ (j = 1, \ldots, j(i)).$$

Para cada $i \in N$, $\{T^i_j\}$ es una familia de intervalos disjuntos por pares cuya unión es T. Se afirma que, si $a + b \leq 1$ y a/b es irracional, entonces $m(T^i_j) \to 0$, $i \to \infty$.
Esto es consecuencia del siguiente resultado demostrado en [11].
Proposición 7: Sean $a, b \in (0,1)$ con $a + b \leq 1$ y $\frac{a}{b}$ irracional. Entonces

$$P = \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i$$

es denso en $[0,1)$.
Esta proposición se puede aplicar a la partición $\{T^i_j\}$ haciendo $\alpha = a$ y $\theta_1 = b$, ya que $\alpha + \theta_1 = \theta_2 < 1$ y $\frac{\alpha}{\theta_1}$ es irracional.
Contrario a las particiones previas de T (por ejemplo intervalos sucesivos de longitud θ_1/i) esta nueva partición (al menos para ciertos controles), permite tener las condiciones de compatibilidad con respecto a ambos α y θ_1 en $[\alpha, 1]$ y $[\theta_1, 1]$ respectivamente, excepto posiblemente en intervalos cuya longitud tiende a cero, cuando i tiende a infinito.
Para construir los conjuntos $\{T^i_{j,k,l,m}\}$, recordemos antes que tenemos dadas funciones medibles $c_i: T \to T$ $(i = 1, \ldots, 8)$ tal que $\sum_{i=1}^{8} c_i(t) = 1$ c.s. en T y

$$c_1(t)+c_2(t)+c_5(t)+c_6(t) = c_1(t-\theta_1)+c_2(t-\theta_1)+c_3(t-\theta_1)+c_4(t-\theta_1) \text{ c.s. en } [\theta_1,1],$$

$$c_1(t)+c_3(t)+c_5(t)+c_7(t) = c_1(t-\alpha)+c_2(t-\alpha)+c_5(t-\alpha)+c_6(t-\alpha) \text{ c.s. en } [\alpha,1],$$

y queremos ver si estas condiciones nos permiten definir $\{T^i_{j,k,l,m}\}$, una partición de T^i_j, de tal manera que haciendo $r_1 := 0$ y $r_2 := 1$, entonces

$$v_i(t) = u_i(t-\theta_1) \text{ c.s. en } [\theta_1,1] \text{ y } w_i(t) = v_i(t-\alpha) \text{ c.s. en } [\alpha,1]$$

donde $m(T^i_{j,k,l,m}) = \alpha^i_{j,k,l,m}$,

$$\begin{array}{ll} \alpha^i_{j,1,1,1} = \int_{T^i_j} c_1(t), & \alpha^i_{j,1,2,2} = \int_{T^i_j} c_2(t) \\ \alpha^i_{j,1,2,1} = \int_{T^i_j} c_3(t), & \alpha^i_{j,1,2,2} = \int_{T^i_j} c_4(t) \\ \alpha^i_{j,2,1,1} = \int_{T^i_j} c_5(t), & \alpha^i_{j,2,1,2} = \int_{T^i_j} c_6(t) \\ \alpha^i_{j,2,2,1} = \int_{T^i_j} c_7(t), & \alpha^i_{j,2,2,2} = \int_{T^i_j} c_8(t) \end{array}$$

y

$$(u_i(t), v_i(t), w_i(t)) = (r_k, r_l, r_m), \ \forall t \in \bigcup_{j=1}^{j(i)} T^i_{j,k,l,m} \ (k,l,m \in \{1,2\}). \tag{ii.i}$$

La idea de la construcción es la siguiente. Primero se observa que si T^i_j es tal que

$$T^i_j + \alpha = T^i_p \text{ y } T^i_j + \theta_1 = T^i_q \text{ para algunos enteros } p \text{ y } q \tag{ii.ii}$$

entonces las condiciones en $c_1, \ldots, c_8$ implican que

$$\sum_{k,m} \alpha^i_{j,k,l,m} = \sum_{k,m} \alpha^i_{p,k,m,l} \text{ y } \sum_{l,m} \alpha^i_{j,k,l,m} = \sum_{l,m} \alpha^i_{q,l,k,m}.$$

Para $i \in N$, elegimos conjuntos medibles disjuntos $T^i_{1,k,l,m}$ que satisfagan las condiciones requeridas (en este caso ejemplificaremos la construcción para $j = 1$)

$$m(T^i_{j,k,l,m}) = \alpha^i_{j,k,l,m} \text{ y } \bigcup_{k,l,m} T^i_{j,k,l,m} = T^i_j. \tag{ii.iii}$$

Supongamos que (ii.ii) se tiene para $j = 1$. Definamos

$$A_{1,l} := \bigcup_{k,m} T^i_{1,k,l,m} \text{ y } B_{p,l} := A_{1,l} + \alpha.$$

Entonces

$$m(B_{p,l}) = m(A_{1,l}) = \sum_{k,m} \alpha^i_{1,k,l,m} = \sum_{k,m} \alpha^i_{p,k,m,l}$$

y podemos partir $B_{p,l}$ en subconjuntos $\{T^i_{p,k,m,l}\}_{k,m}$ tal que

$$m(T^i_{p,k,m,l}) = \alpha^i_{p,k,m,l}.$$

Además,

$$\bigcup_l B_{p,l} = \bigcup_l (A_{1,l} + \alpha) = T_1^i + \alpha = T_p^i$$

y así las condiciones de (ii.iii) se tienen para $j = p$. Ahora, sea $t \in T_p^i$, por lo cual $t \in B_{p,l} = \bigcup_{k,m} T^i_{p,k,m,l}$ para alguna l. Como $t - \alpha \in A_{1,l} = \bigcup_{k,m} T^i_{1,k,l,m}$ por (ii.i) tenemos $w_i(t) = r_l = v_i(t - \alpha)$.
Para el caso de θ_1 se procede de manera similar. Definiendo

$$C_{1,k} := \bigcup_{l,m} T^i_{1,k,l,m} \text{ y } D_{q,k} := C_{1,k} + \theta_1$$

entonces

$$m(D_{q,k}) = m(C_{1,k}) = \sum_{l,m} \alpha^i_{1,k,l,m} = \sum_{l,m} \alpha^i_{q,l,k,m}$$

y podemos partir $D_{q,k}$ en subconjuntos $\{T^i_{q,l,k,m}\}_{l,m}$ tal que

$$m(T^i_{q,l,k,m}) = \alpha_{q,l,k,m}$$

Además,

$$\bigcup_k D_{q,k} = \bigcup_k (C_{1,k} + \theta_1) = T_1^i + \theta_1 = T_q^i$$

y así las condiciones de (ii.iii) se tienen para $j = q$. Ahora, sea $t \in T_q^i$, por lo cual $t \in D_{q,k} = \bigcup_{l,m} T^i_{q,l,k,m}$ para alguna k. Como $t - \theta_1 \in C_{1,k} = \bigcup_{l,m} T^i_{1,k,l,m}$ por (ii.i) tenemos $v_i(t) = r_k = u_i(t - \theta_1)$.

En el primer paso de la construcción de $T^i_{j,k,l,m}$, se consideraron aquellos intervalos cuyos puntos iniciales pertenecen a $Q_1 = \{\alpha, \theta_1\}$. En el segundo paso se consideran elementos de $Q_2 = \{p \pm \alpha, p \pm \theta_1 \mid p \in \{\alpha, \theta_1\}\} \cap ([0,1) - \{0\})$ y así sucesivamente.
Como $P_i = \bigcup_{n=1}^{i} Q_n$, de esta manera cubrimos todo el intervalo

$$[0, t^i_{j(i)}) = \bigcup_{j=1}^{j(i)} T^i_j.$$

Como P es denso en $[0,1)$, tenemos $t^i_{j(i)} \to 1$ cuando $i \to \infty$.
Basados en la manera de elegir $T^i_{1,k,l,m}$, y suponiendo (ii.ii) para $j = 1$, se pudieron definir $T^i_{p,k,l,m}$ y $T^i_{q,k,l,m}$ en los intervalos $T^i_p = T^i_1 + \alpha$ y $T^i_q = T^i_1 + \theta_1$ respectivamente, de tal manera que $v_i(t) = u_i(t - \theta_1)$ $(t \in T^i_q)$ y $w_i(t) = v_i(t - \alpha)$ $(t \in T^i_p)$.
De manera similar, basados en la manera en que $T^i_{p,k,l,m}$ y $T^i_{q,k,l,m}$ fueron definidos, determinamos en el segundo paso la correspondiente partición de T^i_j, para aquellas $j \in \{1, \ldots, j(i)\}$ tal que $t^i_j \in Q_2$.
Se observa que, por definición, si $t^i_j \in Q_2$ entonces $t^i_j \pm \alpha \in Q_1$ o $t^i_j \pm \theta_1 \in Q_1$.

Para aquellos puntos iguales a α, $T^i_{j,k,l,m}$ está determinado por $T^i_{p,k,l,m}$ y, para aquellos iguales a θ_1, la definición de $T^i_{j,k,l,m}$ está basada en $T^i_{q,k,l,m}$.
Como tratamos con dos retardos, una dificultad aparece en esta construcción:
¿Qué pasa con un punto $t^i_j \in Q_2$ si, digamos, ambos $t^i_j - \alpha$ y $t^i_j - \theta_1$ pertenecen a Q_1?
Al considerar, por ejemplo, el punto $t^i_j = \alpha + \theta_1 = \theta_2 \in Q_2$, procedamos como antes suponiendo que $T^i_q + \alpha = T^i_r$ para alguna r.
Definiendo $A_{q,l} := \bigcup_{k,m} T^i_{q,k,l,m}$ y $B_{r,l} := A_{q,l} + \alpha$, los argumentos anteriores implican que $w_i(t) = r_l = v_i(t-\alpha)$, si $t \in T^i_r$.
Ahora, también se tiene $T^i_p + \theta_1 (= T^i_1 + \alpha + \theta_1) = T^i_q + \alpha = T^i_r$. Definiendo $C_{p,k} := \bigcup_{l,m} T^i_{p,k,l,m}$ y $D_{r,k} := C_{p,k} + \theta_1$, nuevamente usando las ideas anteriores tendremos $v_i(t) = u_i(t-\theta_1)$ con $t \in T^i_r$, en caso de que las particiones de T^i_r coincidan.
Pero, ¿las condiciones en $c_1, \ldots, c_8$ son suficientes para que estas dos particiones coincidan?
Las ideas anteriores fueron aplicadas a varios problemas en [11]. En particular las aplicaremos al siguiente problema, a partir del cual finalmente resolvemos la conjetura de Warga. Con esto se descarta que el espacio de controles débilmente relajados pueda ser una extensión propia en el caso no conmensurado.

Sean
$$c_4(t) = c_5(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t \in [0, \theta_2) \\ 0 & \text{si } t \in [\theta_2, 1] \end{cases}, c_2(t) = c_7(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \theta_2) \\ \frac{1}{2} & \text{si } t \in [\theta_2, 1]. \end{cases}$$
Claramente $c_2(t) + c_4(t) + c_5(t) + c_7(t) = 1 \ \forall t \in T$ y
$$c_2(t) + c_5(t) = c_2(t-\theta_1) + c_4(t-\theta_1) \ \forall t \in [\theta_1, 1]$$
$$c_5(t) + c_7(t) = c_2(t-\alpha) + c_5(t-\alpha) \ \forall t \in [\alpha, 1].$$
Así el control relajado
$$\mu(t) = c_2(t)\delta(0,0,1) + c_4(t)\delta(0,1,1) + c_5(t)\delta(1,0,0) + c_7(t)\delta(1,1,0) \ (t \in T)$$
es un control débilmente relajado.
Si elegimos cualesquiera conjuntos medibles disjuntos $T^i_{1,k,l,m}$ que satisfacen (ii.iii) para $j = 1$, y siguiendo la construcción descrita antes, tenemos
$$T^i_{p,2,1,1} = T^i_{1,2,1,1} + \alpha,\ T^i_{q,2,1,1} = T^i_{1,1,2,2} + \theta_1$$
$$T^i_{p,1,2,2} = T^i_{1,1,2,2} + \alpha,\ T^i_{q,1,2,2} = T^i_{1,2,1,1} + \theta_1,$$
y así
$$v_i(t) = u_i(t-\theta_1) \ (t \in T^i_q = T^i_1 + \theta_1)$$
$$w_i(t) = v_i(t-\alpha) \ (t \in T^i_p = T^i_1 + \alpha).$$
Para tener la relación $v_i(t) = u_i(t-\theta_1)$ en $T^i_r = T^i_1 + \theta_2$ se requiere

$$T^i_{r,1,1,2} = T^i_{p,1,2,2} + \theta_1 = T^i_{1,1,2,2} + \theta_2$$
$$T^i_{r,2,2,1} = T^i_{p,2,1,1} + \theta_1 = T^i_{1,2,1,1} + \theta_2,$$

y para la relación $w_i(t) = v_i(t-\alpha)$ en $T^i_r = T^i_1 + \theta_2$ se requiere

$$T^i_{r,1,1,2} = T^i_{q,1,2,2} + \alpha = T^i_{1,2,1,1} + \theta_2$$
$$T^i_{r,2,2,1} = T^i_{q,2,1,1} + \alpha = T^i_{1,1,2,2} + \theta_2.$$

Aunque es posible encontrar una partición de T^i_1, $T^i_1+\alpha$, $T^i_1+\theta_1$ y $T^i_1+\theta_2$, que satisfaga

$$v_i(t) = u_i(t-\theta_1)\ (t \in T^i_1 + \theta_1 \cup T^i_1 + \theta_2))\ \text{y}\ w_i(t) = v_i(t-\alpha)\ (t \in T^i_1 + \alpha),$$

se tiene que $w_i(t) \neq v_i(t-\alpha)$ $(\forall t \in T^i_1 + \theta_2)$.
Y al invertir la partición de $T^i_1 + \theta_2 = T^i_r$ se tiene

$$T^i_{r,2,2,1} = [t^i_r, t^i_r + \alpha^i_{r,2,2,1})\ \text{y}\ T^i_{r,1,1,2} = [t^i_r + \alpha^i_{r,2,2,1}, t^i_{r+1}),$$

de manera que

$$v_i(t) = u_i(t-\theta_1)\ (t \in T^i_1 + \theta_1)\ \text{y}\ w_i(t) = v_i(t-\alpha)\ (t \in T^i_1 + \alpha \cup T^i_1 + \theta_2),$$

pero $v_i(t) \neq u_i(t-\theta_1)$ $(\forall t \in T^i_1 + \theta_2)$.
Así, basados en este último ejemplo, podemos enunciar el siguiente resultado cuya demostración formal puede verse en [11].

Teorema 13: Para cualquier $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ existe $\mu \in M_w(\theta_1, \theta_2)$ tal que $\mu \notin$ cl $U(\theta_1, \theta_2)$.

2.7 Un nuevo modelo de relajamiento para problemas con retardos en los controles.

En [11], Rosenblueth propone un nuevo modelo de relajamiento el cual citamos ahora.
Sea Ω un espacio métrico compacto y, para cualquier $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, definamos

$$\begin{aligned} M_{NC}(\theta_1,\theta_2) = \{\mu \in M_w(\theta_1,\theta_2) |\ & \text{para alguna } \sigma \in M(T,\Omega^3), \\ & P_{01}\mu(t) = P_{12}\sigma(t) \text{ c.s. en } [0,1], \\ & P_{02}\mu(t) = P_{02}\sigma(t-\alpha) \text{ c.s. en } [\alpha,1], \\ & P_{12}\mu(t) = P_{01}\sigma(t-\theta_2) \text{ c.s. en } [\theta_2,1]\} \end{aligned}$$

donde $\alpha = \theta_2 - \theta_1$. Si $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in N$, sean $\theta = \frac{\theta_1}{p} = \frac{\theta_2}{q}$, y

$$M_C(\theta_1,\theta_2) = \{\mu \in M(T,\Omega^3) \mid \text{para alguna } \sigma \in M_q(\theta),\ \mu(t) = P_{0,p,q}\sigma(t) \text{ c.s. en } [0,1]\}$$

donde $M_q(\theta) = M_s(\theta, 2\theta, \ldots, q\theta)$.
Definamos

$$M_P(\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} M_{NC}(\theta_1,\theta_2) & \text{si } \frac{\theta_1}{\theta_2} \text{ es irracional} \\ M_C(\theta_1,\theta_2) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las letras C, NC, P tienen el significado de conmensurado, no conmensurado y propio respectivamente.

Teorema 14: Para cualquier $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, cl $U(\theta_1,\theta_2) = M_P(\theta_1,\theta_2)$.

Ahora daremos las ideas principales para probar este resultado.
Observemos primero que un elemento $\mu \in M_w(\theta_1,\theta_2)$ pertenece a $M_{NC}(\theta_1,\theta_2)$ si y sólo si existe $\sigma \in M(T,\Omega^3)$ tal que

$$\int_0^1 dt \int \varphi(t,r_0,r_1)\mu(t)(dr) = \int_0^1 dt \int \varphi(t,r_1,r_2)\sigma(t)(dr),$$

$$\int_\alpha^1 dt \int \varphi(t,r_0,r_2)\mu(t)(dr) = \int_\alpha^1 dt \int \varphi(t,r_0,r_2)\sigma(t-\alpha)(dr),$$

$$\int_{\theta_2}^1 dt \int \varphi(t,r_1,r_2)\mu(t)(dr) = \int_{\theta_2}^1 dt \int \varphi(t,r_0,r_1)\sigma(t-\theta_2)(dr)$$

$\forall\varphi \in L^1(T,C(\Omega^2))$, donde $r = (r_0,r_1,r_2)$.
Utilizando argumentos similares a los que utiliza Warga en [14] para probar que $M_w(\theta_1,\theta_2)$ es compacto, no es difícil ver, a través de esta caracterización, que también $M_{NC}(\theta_1,\theta_2)$ lo es.
Proposición 8: Supongamos que $\mu \in M(T,\Omega^3)$ es tal que, para alguna $\sigma \in \Omega^3$,

$$\begin{cases} P_{01}\mu(t) = P_{12}\sigma(t) & \text{c.s. en } [0,1], \\ P_{02}\mu(t) = P_{02}\sigma(t-\alpha) & \text{c.s en } [\alpha,1], \\ P_{12}\mu(t) = P_{01}\sigma(t-\theta_2) & \text{c.s en } [\theta_2,1]. \end{cases}$$

Entonces $\theta_2 \leq 1-\alpha \Rightarrow \mu \in M_w(\theta_1,\theta_2)$ y, si $1-\alpha < \theta_2$, son equivalentes
1) $\mu \in M_w(\theta_1,\theta_2)$.
2) $P_1\mu(t) = P_0\mu(t-\theta_1)$ c.s. en $[1-\alpha,\theta_2]$.
3) $P_1\mu(t) = P_1\sigma(t-\theta_1)$ c.s. en $[1-\alpha,\theta_2]$.

Proposición 9: Para cualquier $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, $U(\theta_1,\theta_2) \subset M_{NC}(\theta_1,\theta_2)$.

Proposición 10: Si $p < q$ son enteros positivos y $0 < \theta < \frac{1}{q}$, entonces cl $U(p\theta,q\theta) = M_C(p\theta,q\theta)$.

El resultado crucial para probar el Teorema 14 es el siguiente.

Proposición 11: Sean $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, $\alpha := \theta_2 - \theta_1$, $\mu \in M(T, \Omega^3)$, y supongamos que T_1 es un intervalo en $[0,1)$ tal que

$$T_p := T_1 + \alpha,\ T_q := T_1 + \theta_1,\ T_r := T_1 + \theta_2$$

son disjuntos y pertenecen a $[0,1)$. Haciendo $R_1 := \{0\}$, $R_2 := \{1\}$, $r_1 := 0$, $r_2 := 1$,

$$\alpha_{j,k,l,m} := \int_{T_j} \mu(t)(R_k \times R_l \times R_m)dt \ (k,l,m \in \{1,2\},\ j \in \{1,p,q,r\})$$

y supongamos que existe $\sigma \in M(T_1, \Omega^3)$ tal que, c.s. en T_1,

$$P_{12}\sigma(t) = P_{01}\mu(t) \tag{ii.iv}$$

$$P_{02}\sigma(t) = P_{02}\mu(t+\alpha) \tag{ii.v}$$

$$P_{01}\sigma(t) = P_{12}\mu(t+\theta_2). \tag{ii.vi}$$

Entonces existen conjuntos medibles disjuntos $\{T_{j,k,l,m}\}$ para $j = 1, p, r$ tal que

$$m(T_{j,k,l,m}) = \alpha_{j,k,l,m} \text{ y } \bigcup_{k,l,m} T_{j,k,l,m} = T_j \tag{ii.vii}$$

y, si definimos

$$(u(t), v(t), w(t)) = (r_k, r_l, r_m),\ \forall t \in \bigcup_{j=1,p,r} T_{j,k,l,m} \ (k,l,m \in \{1,2\}) \tag{ii.viii}$$

entonces

$$v(t) = u(t-\theta_1),\ w(t) = u(t-\theta_2)\ (t \in T_r) \text{ y } w(t) = v(t-\alpha)\ (t \in T_p). \tag{ii.ix}$$

Si además

$$P_1\sigma(t) = P_1\mu(t+\theta_1) \text{ c.s. en } T_1 \tag{ii.x}$$

entonces existen conjuntos medibles disjuntos $\{T_{q,k,l,m}\}$ que satisfacen (ii.vii) para $j = q$ y tales que, si definimos (u,v,w) como en (ii.viii) para $j = q$, entonces

$$v(t) = u(t-\theta_1),\ (t \in T_q \cup T_r) \text{ y } w(t) = v(t-\alpha)\ (t \in T_p \cup T_r). \tag{ii.xi}$$

Nota 1: Si suponemos que, en el enunciado de la proposición 11: a) Tenemos dados de antemano conjuntos medibles disjuntos $\{T_{j,k,l,m}\}$ para $j = 1$, tales que (ii.vii) se tiene para $j = 1$, entonces existen conjuntos medibles disjuntos $\{T_{j,k,l,m}\}$ para $j = p, r$, tales que (ii.vii) se tiene para $j = p, r$ y, definiendo (u,v,w) como en (ii.viii) para $j = p, r$, (ii.ix) se satisface. b) Similarmente, si tenemos dados de antemano conjuntos medibles disjuntos $\{T_{j,k,l,m}\}$ para $j = p$, tales que (ii.vii) se tiene para $j = p$, entonces existen conjuntos medibles disjuntos $\{T_{j,k,l,m}\}$ para $j = 1, r$, tales que (ii.vii) se tiene para $j = 1, r$ y, definiendo (u,v,w) como en (ii.viii) para $j = 1, r$, (ii.ix) se satisface.

c) Y de igual forma, si tenemos dados de antemano conjuntos medibles disjuntos $\{T_{j,k,l,m}\}$ para $j = r$, tales que (ii.vii) se tiene para $j = r$, entonces existen conjuntos medibles disjuntos $\{T_{j,k,l,m}\}$ para $j = 1, p$, tales que (ii.vii) se tiene para $j = 1, p$ y, definiendo (u, v, w) como en (ii.viii) para $j = 1, p$, (ii.ix) se satisface.
Se observa finalmente que, en los tres casos anteriores, si (ii.x) se tiene, entonces existen conjuntos medibles disjuntos $\{T_{j,k,l,m}\}$ que satisfacen (ii.vii) para $j = q$ y tales que, si definimos (u, v, w) como en (ii.viii) para $j = q$, entonces (ii.xi) se satisface.
Más aún, si se supone que en los casos a) y c) tenemos dados de antemano conjuntos medibles disjuntos $\{T_{j,k,l,m}\}$ para $j = q$ tales que (ii.vii) se tiene para $j = q$ y, definiendo (u, v, w) como en (ii.viii) para $j = 1, q$ (respectivamente, para $j = q, r$), entonces $v(t) = u(t-\theta_1)$ para $t \in T_q$ (respectivamente, para $w(t) = v(t - \alpha)$ para $t \in T_r$). Y en este caso también puede probarse la existencia de $\{T_{j,k,l,m}\}$ para $j = p, r$ (respectivamente, para $j = 1, p$) tales que, (ii.xi) es satisfecha.
Ahora veamos la idea de la demostración en el caso no conmensurado:

Sean $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ con θ_1/θ_2 irracional. Debemos mostrar que cualquier elemento de $M_{NC}(\theta_1, \theta_2)$ pertenece a cl $U(\theta_1, \theta_2)$.
Sean $P_0 = \{0\}$, y definamos recursivamente

$$P_{i+1} := P_i \cup \{p \pm \alpha, p \pm \theta_1 \mid p \in P_i\} \cap [0, 1) \ (i \in N \cup \{0\})$$

donde $\alpha = \theta_2 - \theta_1$.
Si P_i tiene $j(i)$ elementos hacemos

$$t_j^i := min(P_i - \{t_1^i, \ldots, t_{j-1}^i\}), \ j = 1, \ldots, j(i).$$

Sea $t_{j(i)+1}^i = 1$ y definamos

$$T_j^i := [t_j^i, t_{j+1}^i), \ (j = 1, \ldots, j(i)).$$

Para cada $i \in N$, $\{T_j^i\}$ es una familia de intervalos disjuntos cuya unión es T. Como $\alpha + \theta_1 = \theta_2 < 1$ y α/θ_1 es irracional, la proposición 7 implica que $P := \cup_{i=0}^{\infty} P_i$ es denso en $[0, 1)$ y así $m(T_j^i) \to 0$, cuando $i \to \infty$.
Como hemos mencionado antes, esta partición permite obtener las condiciones de compatibilidad con respecto a α y θ_1 en $[\alpha, 1]$ y $[\theta_1, 1]$ respectivamente, excepto posiblemente en intervalos cuya longitud tiende a cero al hacer tender i a infinito.
Ahora, sea $\mu \in M_{NC}(\theta_1, \theta_2)$. Dado $i \in N$, supongamos que

$$T_p^i = T_j^i + \alpha, \ T_q^i = T_j^i + \theta_1 \text{ y } T_r^i = T_j^i + \theta_2$$

para alguna $p, q, r \in N$ y $j = 1$.
Por la proposición 11 existen particiones $\{T_{j,k,l,m}^i\}_{k,l,m}$ de T_j^i para $j = 1, p, q, r$ tales que

$$m(T_{j,k,l,m}^i) = \int_{T_j^i} \mu(t)(R_k \times R_l \times R_m)dt \ (k, l, m \in \{1, 2\}),$$

y, definiendo

$$(u_i(t), v_i(t), w_i(t)) := (r_k, r_l, r_m), \ \forall t \in \bigcup_{j=1,p,q,r} T^i_{j,k,l,m}, \ (k, l, m \in \{1,2\}) \qquad \text{(ii.xii)}$$

entonces

$$v_i(t) = u_i(t - \theta_1) \ (t \in T^i_q \cup T^i_r) \text{ y } w_i(t) = v_i(t - \alpha) \ (t \in T^i_p \cup T^i_r).$$

Para toda otra $j \in \{1, 2, \ldots, j(i)\}$, aplicamos el correspondiente caso descrito en la Nota 1, para construir particiones $\{T^i_{j,k,l,m}\}_{k,l,m}$ de T^i_j de tal manera que, si definimos (u_i, v_i, w_i) como en (ii.xii) para $j \in \{1, 2, \ldots, j(i)\}$ entonces, para todos aquellos intervalos $T^i_j \subset [\alpha, t^i_{j(i)})$ tales que $T^i_j - \alpha$ es de la forma T^i_k tendremos $w_i(t) = v_i(t - \alpha)$ y, similarmente, $v_i(t) = u_i(t - \theta_1)$ en aquellos intervalos $T^i_j \subset [\theta_1, t^i_{j(i)})$ tales que $T^i_j - \theta_1$ es de la forma T^i_k.
Como el conjunto de puntos donde esto no ocurre tiende a cero, la sucesión $\{(u_i(t), \hat{v}_i(t), \hat{w}_i(t))\} \subset U(\theta_1, \theta_2)$ donde

$$\hat{v}_i(t) = \begin{cases} v_i(t) & \text{si } t \in [0, \theta_1] \\ u_i(t - \theta_1) & \text{si } t \in [\theta_1, 1], \end{cases} \quad \hat{w}_i(t) = \begin{cases} w_i(t) & \text{si } t \in [0, \alpha] \\ v_i(t - \alpha) & \text{si } t \in [\alpha, 1], \end{cases}$$

converge a μ.
El resultado anterior puede ser generalizado a un espacio métrico compacto arbitrario Ω. Primero partimos el conjunto Ω en conjuntos no vacios R^i_k $(k = 1, \ldots, k(i))$ de diámetro a lo más $1/i$, los cuales son diferencias de conjuntos abiertos de manera que

$$\Omega^3 = \bigcup_{k,l,m=1}^{k(i)} R^i_k \times R^i_l \times R^i_m.$$

Como antes $\{T^i_j\}$ $(j = 1, \ldots, j(i))$ es cualquier partición de T de conjuntos de Borel disjuntos y no vacíos de diámetro a lo más $1/i$.
Dado $\mu \in M(T, \Omega^3)$, elegimos para cada $k \in \{1, 2, \ldots, k(i)\}$ un punto $r^i_k \in R^i_k$, y hacemos

$$(u_i(t), v_i(t), w_i(t)) := (r^i_k, r^i_l, r^i_m), \ \forall t \in \bigcup_{j=1}^{j(i)} T^i_{j,k,l,m}$$

donde $\{T^i_{j,k,l,m}\}_{k,l,m}$ es una partición de T^i_j tal que

$$m(T^i_{j,k,l,m}) = \alpha^i_{j,k,l,m} := \int_{T^i_j} \mu(t)(R_k \times R_l \times R_m) dt \ (k, l, m \in \{1, 2, \ldots, k(i)\}).$$

Una prueba similar a la que se da para el teorema 9, muestra que $(u_i, v_i, w_i) \to \mu$, $i \to \infty$. Supongamos ahora que $\mu \in M_{NC}(\theta_1, \theta_2)$ con θ_1/θ_2 irracional. Al elegir una familia de conjuntos $\{T^i_j\}$ como en el teorema 14, esencialmente los mismos argumentos usados antes, reemplazando el conjunto $\{1,2\}$ por $\{1, 2, \ldots, k(i)\}$, muestran que μ puede ser aproximado por elementos de $U(\theta_1, \theta_2)$.

CAPITULO 3

Aplicación de la teoría de relajamiento

Existe un gran número de problemas de control óptimo del tipo tratado en los cuales no se tiene la condicion de convexidad que se mencionó en la sección 1.1. Las técnicas de relajamiento para problemas con retardos o sin retardos que se explicaron anteriormente pueden ayudar a estudiar tales problemas.

3.1 Un problema en economía.

Describiremos ahora un modelo de crecimiento económico propuesto en [3], el cual es conocido como el "Modelo de Ramsay".
Consideremos una economía en la cual un bien es producido con la ayuda de un capital $K(t)$ y en la cual la ganacia total $Y(t)$ es parcialmente consumida y parcialmente invertida.
Si $C(t)$ denota el consumo total e $I(t)$ la inversión, la relación básica entre estos está dada por

$$Y(t) = C(t) + I(t),\ \dot{K}(t) = I(t)$$

suponiendo que no hay ningún deterioro o depreciación del capital. Se supone que la producción $Y(t)$ es una función conocida del capital, digamos

$$Y(t) = \psi(K(t)).$$

Además, una función de utilidad U es conocida, la cual mide el bienestar instantáneo de la economía bajo la presencia de $C(t)$, y supongamos que, con cualquier tipo de planeación buscamos maximizar la utilidad global

$$J = \int_{t_0}^{t_1} U(C(t))dt$$

en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ finito. Es decir, tenemos el problema concerniente al máximo de

$$J = \int_{t_0}^{t_1} U(\psi(K(t)) - \dot{K}(t))dt.$$

Quizá, parecería más razonable suponer que la producción total puede depender no solo del capital en un tiempo presente, sino de un periodo de tiempo anterior θ, por lo cual nuestro problema consiste en maximizar

$$J = \int_{t_0}^{t_1} U(\psi(K(t-\theta)) - \dot{K}(t))dt$$

sujeto a $K(0) = M$ en el periodo de tiempo $[t_0 - \theta, t_1]$, donde M es una constante positiva.
Ahora, consideremos un caso particular del modelo descrito.
Sean $T = [0,1]$, $\theta = 1/4$, y definamos

$$\psi(K(t-1/4)) = K(t)K(t-1/4) \text{ y } U(\psi(K(t-\theta)) - \dot{K}(t)) = \beta\{K(t)K(t-\theta) - I(t)^2\}$$

donde, β es una constante positiva, con lo cual consideramos el problema de maximizar
$J = \int_0^1 \beta\{K(t)K(t-1/4) - I(t)^2\}dt$ sujeto a
$I(t) = \int_0^t M\{K(\tau)\}d\tau$ con $t \in [0,1]$
$K(t) \in [-1,1]$ c.s. en $[-1/4, 1]$,
donde M es una constante positiva que afecta a la inversión de capital.

Tal problema es equivalente al de minimizar
$J = \int_0^1 \beta\{I(t)^2 - K(t)K(t-1/4)\}dt$ sujeto a
$I(t) = \int_0^t M\{K(\tau)\}d\tau$ con $t \in [0,1]$
$K(t) \in [-1,1]$ c.s. en $[-1/4, 1]$.
Como $K(t) \in [-1,1]$, entonces $J \geq -\beta$, y más aún, esta cota puede ser aproximada definiendo

$$K_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [\frac{k}{4n}, \frac{2k+1}{8n}] \\ -1 & \text{si } t \in [\frac{2k+1}{8n}, \frac{k+1}{4n}], \end{cases}$$

donde $k = 0, \ldots, n-1$.
Al reemplazar $K(t)$ por $K_n(t)$, tenemos

$$I_n(t) = \int_0^t MK_n(\tau)d\tau \leq M(8n)^{-1} \text{ y por lo tanto } I_n(t)^2 \leq M^2(8n)^{-2}.$$

Considerando lo anterior, y sustituyendo $K_n(t)$ en J, tenemos

$$J = \int_0^1 \beta\{I_n(t)^2 - k_n(t)k_n(t-1/4)\}dt \leq \beta M^{-2}(8n)^{-2} - \beta$$

y por lo tanto

$$-\beta \leq J \leq \beta M^{-2}(8n)^{-2} - \beta.$$

Así, $min\{J\} = -\beta$ haciendo tender n a infinito.
Si utilizamos las ideas de la técnica clásica de relajamiento para problemas sin retardos en los controles, podemos observar a la sucesión $K_n(t)$ como convergente al control relajado

$$v(t) = \frac{1}{2}\delta(1) + \frac{1}{2}\delta(-1) \text{ c.s. en } [1/4, 1].$$

Aunque el uso de este control podría reemplazar $K(\tau)K(\tau - 1/4)$ c.s. en $[0, 1]$ por

$$\int r_1 r_2 v(\tau)(dr_1) \times v(\tau - 1/4)(dr_2) = \int r_1 v(\tau)(dr_1) \int r_2 v(t - 1/4)(dr_2) = 0$$

y producir para J el valor de 0 en vez del esperado de $-\beta$.
Este ejemplo muestra que, en problemas de este tipo, no es suficiente con restringir por sí misma la versión relajada de la función $K(t)$.
Podemos proceder a una reformulación del problema en la cual

$$K: [-1/4, 1] \to [-1, 1] \text{ sea reemplazada por } (K_0, K_1): [-1/4, 1] \to [-1, 1]^2$$

y ahora, consideremos el problema de minimizar
$J = \int_0^1 \beta\{I(t)^2 - K_0(t)K_1(t)\}dt$ sujeto a
$I(t) = \int_0^t M\{K_0(\tau)\}d\tau$ con $t \in [0, 1]$
$(K_0(t), K_1(t)) \in [-1, 1]^2$ c.s. en $[-1/4, 1]$,
y sujeto a la restricción adicional

$$K_1(t) = K_0(t - 1/4) \text{ c.s. en } [0, 1].$$

Entonces, un control óptimo relajado está dado por la función σ, donde $\sigma(t)$ es una medida de probabilidad en $[-1, 1]^2$, definida por

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}\delta(1, 1) + \frac{1}{2}\delta(-1, -1) \text{ c.s. en } [1/4, 1],$$

y este control relajado produce el valor de $-\beta$ para la función de costo J.

REFERENCIAS

[1] Alonso A, Rosenblueth JF (1995) Measurability of unions of certain dense sets, Proceedings of the American Mathematical Society, 123: 2667-2675.

[2] Andrews T (1989) An existence theory for optimal control problems with time delays, PhD thesis, Imperial College, University of London.

[3] Luenberger DG (1979) Introduction to Dynamic Systems, John Wiley & Sons, New York.

[4] Rosenblueth JF (1992) Strongly and weakly relaxed controls for time delay systems, SIAM Journal on Control and Optimization, 30: 856-866.

[5] Rosenblueth JF (1992) Proper relaxation of optimal control problems, Journal of Optimization Theory and Applications, 74: 509-526.

[6] Rosenblueth JF (1995) Approximation of strongly relaxed minimizers with ordinary delayed controls, Applied Mathematics and Optimization, 32: 33-46.

[7] Rosenblueth JF (1995) Relaxation of delayed controls: a review, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 12: 181-206.

[8] Rosenblueth JF (1996) Constant relaxed controls with noncommensurate delays, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 13: 195-209.

[9] Rosenblueth JF, Vinter RB (1991) Relaxation procedures for time delay systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 162: 542-563.

[10] Rosenblueth JF, Warga J, Zhu QJ (1997) On the characterization of properly relaxed delayed controls, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 209: 274-290.

[11] Rosenblueth JF (1998) The search of a proper relaxation procedure for delayed controls, circulación privada.

[12] Royden HL (1989) Real Analysis, Macmillan Publishing Co. New York.

[13] Warga J (1972) Optimal control of differential and functional equations, Academic Press, New York.

[14] Warga J (1986) Nonadditively coupled delayed controls, circulación privada.

[15] Warga J, Zhu QJ (1992) A proper relaxation of shifted and delayed controls, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 169: 546-561.