

33  
2ej



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ingeniería

ASPECTOS EXPERIMENTALES DE  
ANALISIS DINAMICO DE MAQUINARIA:  
CORRELACION DE DATOS DE EQUIPO  
EXPERIMENTAL.

T E S I S

Que para obtener el título de:

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

p r e s e n t a

GABRIEL GARCIA MONROY



Director de Tesis:

Dr. Angel Rojas Salgado

México, D.F.

1999

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

269974 1



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## AGRADECIMIENTOS

A mis padres por su amor y el inmenso apoyo que me han brindado para lograr culminar mis estudios de licenciatura. Gracias por su guía, su ejemplo y su comprensión.

A mi hermano Arturo por su valiosa compañía, ayuda y estímulo en estos años de estudio. Gracias por soportarme y por tu gran amistad.

A mi tío Pepe por ayudarme en la revisión de la redacción de la tesis. Gracias por tu colaboración.

A mi novia Linda por su amor y por estar cerca de mí en momentos determinantes para la terminación de la tesis. Gracias por tu cariño y motivación.

## RECONOCIMIENTOS

Al Dr. Angel Rojas Salgado por su imprescindible apoyo y su asesoría para encausar este trabajo de la mejor manera, y por compartir generosamente sus amplios conocimientos sobre la materia.

Al Ing. Francisco Alonzo Romero por su entusiasmo en la creación del laboratorio de Análisis Dinámico de Maquinaria, aportando ideas, equipo y material de gran valía.

Al Ing. Ignacio Martínez Bernal por su valiosa colaboración en la creación y adaptación de equipo, y por su participación activa en el laboratorio.

A la Facultad de Ingeniería, UNAM, por darnos una formación profesional integral que nos ayude para ser hombres de provecho para México y la sociedad.

## INDICE GENERAL

	págs.
<b>INTRODUCCION GENERAL.</b>	
<b>1. CINEMATICA.</b>	
OBJETIVOS.	11
1.1 INTRODUCCION TEORICA.	11
1.1.1 Movimiento curvilíneo de partículas.	11
1.1.2 Movimiento general de una partícula.	11
1.1.3 Movimiento relativo de una partícula.	11
1.2 DESARROLLO TEORICO.	12
1.2.1 Análisis cinemático de un brazo de robot.	12
1.2.2 Análisis cinemático del sistema giratorio con rodamiento sin deslizamiento.	14
1.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL Y COMPROBACION TEORICA.	15
1.3.1 Sistema de brazo de robot.	15
1.3.2 Sistema giratorio con rodamiento sin deslizamiento.	16
1.3.3 Equipo y material utilizado.	17
CONCLUSIONES.	17
<b>2. CENTROIDES Y MOMENTOS DE INERCIA DE PLACAS PLANAS.</b>	
OBJETIVOS.	18
2.1 INTRODUCCION TEORICA.	18
2.1.1 Determinación del centroide de una placa plana y homogénea utilizando dos ejes de equilibrio estático distintos.	19
2.1.2 Momentos de área y determinación de centroides de áreas (placas planas).	20
2.1.3 Péndulo compuesto y su aplicación a la obtención del momento de inercia de una placa plana.	22
2.1.4 Momentos de inercia de un área.	23
2.1.5 Momentos de inercia de masa de placas planas delgadas y homogéneas.	24
2.2 DESARROLLO EXPERIMENTAL.	25
2.2.1 Determinar el centroide de una placa plana para dos figuras compuestas.	25
2.2.2 Obtener experimentalmente los momentos de inercia de masa de distintas placas planas.	26
2.2.3 Equipo y material utilizado.	26

	págs.
<b>2.3 COMPROBACION TEORICA.</b>	27
2.3.1 Centroides de varias placas planas de formas compuestas.	27
2.3.2 Momentos de inercia centroidales de las placas planas.	28
<b>CONCLUSIONES.</b>	29
<b>3. COEFICIENTE DE FRICCION Y FUERZA DE FRICCION.</b>	
<b>OBJETIVOS.</b>	30
<b>3.1 INTRODUCCION TEORICA.</b>	30
<b>3.2 DESARROLLO TEORICO.</b>	31
3.2.1 Análisis dinámico del sistema de masa y plato rotatorio.	31
3.2.2 Análisis dinámico del sistema de bloque y rampa rotatoria.	32
<b>3.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL.</b>	33
3.3.1 Sistema de masa y plato rotatorio.	33
3.3.2 Sistema de bloque y rampa rotatoria.	34
3.3.3 Equipo y material utilizado.	34
<b>CONCLUSIONES.</b>	35
<b>4. MOMENTOS DINAMICOS (1ª Parte).</b>	
<b>OBJETIVOS.</b>	36
<b>4.1 INTRODUCCION TEORICA.</b>	36
4.1.1 Sistema de partículas en movimiento.	36
4.1.2 Momentum lineal y momentum angular de un sistema de partículas.	37
4.1.3 Cantidad de movimiento angular y su derivada, de un cuerpo rígido en movimiento, definidas respecto a su centro de masa.	38
<b>4.2 DESARROLLO TEORICO Y EXPERIMENTAL.</b>	39
4.2.1 Análisis de la conservación del momentum.	39
4.2.2 Análisis de los momentos dinámicos (efectos giroscópicos).	40
4.2.3 Equipo y material utilizado.	42
<b>CONCLUSIONES.</b>	42

	págs.
<b>5. MOMENTOS DINAMICOS (2ª Parte).</b>	
OBJETIVOS.	43
5.1 INTRODUCCION TEORICA.	43
5.1.1 Cinética del cuerpo rígido en tres dimensiones.	43
5.2 DESARROLLO TEORICO.	44
5.2.1 Análisis dinámico de un dispositivo indicador de giro utilizado en aeronaves.	44
5.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL.	46
5.3.1 Simulador de indicador de giro del laboratorio.	46
5.3.2 Verificación de las especificaciones de diseño y análisis del modelo matemático que rige el movimiento del simulador del indicador de giro.	47
5.3.3 Equipo y material utilizado.	48
CONCLUSIONES.	49
<b>6. PRECESION DE UN GIROSCOPIO.</b>	
OBJETIVOS.	50
6.1 INTRODUCCION TEORICA.	50
6.2 DESARROLLO TEORICO.	51
6.2.1 Análisis dinámico del giroscopio.	51
6.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL.	53
6.3.1 Obtener la gráfica del giroscopio $\dot{\phi} = f\left(\frac{1}{\dot{\psi}}\right)$ para cualquier valor determinado de la distancia d, ya sea esta positiva o negativa.	53
6.3.2 Obtener la gráfica del giroscopio dada por $\dot{\phi} \dot{\psi} = F(d)$ .	55
6.3.3 Obtención del momento de inercia del giroscopio por el método del péndulo compuesto y su verificación con el valor obtenido con la pendiente de la gráfica de $\dot{\phi} \dot{\psi} = F(d)$ .	56
6.3.4 Equipo y material utilizado.	58
CONCLUSIONES.	59

	págs.
<b>7. APLICACION DEL PRINCIPIO DE LA CONSERVACION DE LA ENERGIA AL MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL DE UN CUERPO RIGIDO.</b>	
OBJETIVOS.	60
7.1 INTRODUCCION TEORICA.	60
7.1.1 Método de la energía para obtener las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido.	60
7.1.2 Energía Potencial y Energía Cinética de un cuerpo rígido o de un sistema de cuerpos rígidos en movimiento espacial.	61
7.2 DESARROLLO TEORICO.	62
7.2.1 Análisis del sistema de masa giratoria por el Método de la energía.	62
7.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL Y COMPROBACION TEORICA.	65
7.3.1 Determinar las tablas de valores del sistema de masa giratoria.	65
7.3.2 Equipo y material utilizado.	67
7.4 DEDUCCION TEORICA DE LA ECUACION DEL MOVIMIENTO DEL SISTEMA DE MASA GIRATORIA (DETALLADA).	67
CONCLUSIONES.	69
<b>8. APLICACION DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGIA AL MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE CUERPOS RIGIDOS.</b>	
OBJETIVOS.	70
8.1 INTRODUCCION TEORICA.	70
8.1.1 Método del trabajo y la energía aplicado a un sistema de cuerpos rígidos.	70
8.1.2 Fuerzas que no realizan trabajo.	71
8.1.3 Trabajo de las fuerzas no conservativas.	71
8.2 DESARROLLO TEORICO.	72
8.2.1 Análisis del sistema de volante de inercia y contrapeso por el Método del trabajo y la energía.	72
8.2.2 Forma de evaluar las pérdidas de energía por fricción.	74
8.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL Y COMPROBACION TEORICA.	74
8.3.1 Sistema de volante de inercia y masa acoplados por una cuerda.	74
8.3.2 Equipo y material utilizado.	76
CONCLUSIONES.	76



<b>9. BALANCEO.</b>	págs.
OBJETIVO.	77
9.1 INTRODUCCION TEORICA.	77
9.1.1 Balanceo Estático.	78
9.1.2 Balanceo Dinámico.	78
9.2 DESARROLLO TEORICO.	79
9.2.1 Análisis del Balanceo.	79
9.2.2 Problema de Balanceo.	81
9.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL Y COMPROBACION TEORICA.	82
9.3.1 Realizar las tablas de valores que contengan los valores experimentales y la verificación mediante las expresiones teóricas.	82
9.3.2 Equipo y material utilizado.	83
9.4 EJEMPLOS RESUELTOS DE PROBLEMAS DE BALANCEO PARA EL LABORATORIO.	83
CONCLUSIONES.	85
<b>10. INTRODUCCION A LAS VIBRACIONES MECANICAS.</b>	
OBJETIVOS.	86
10.1 INTRODUCCION TEORICA.	86
10.1.1 Análisis de un sistema masa-resorte suspendido en un soporte rígido. Vibración libre.	87
10.1.2 Análisis de un sistema masa-resorte. Vibración forzada.	90
10.1.3 Fenómenos de Resonancia y Pulsación en un sistema vibratorio.	91
10.1.4 Resortes en paralelo y en serie.	93
10.2 DESARROLLO EXPERIMENTAL Y COMPROBACION TEORICA.	94
10.2.1 Para el sistema vibratorio del laboratorio calcular teóricamente los valores de las frecuencias.	94
10.2.2 Realizar las mediciones experimentales de las frecuencias.	96
10.2.3 Equipo y material utilizado.	96
CONCLUSIONES.	96
CONCLUSIONES GENERALES.	97
BIBLIOGRAFIA.	98

## INTRODUCCION GENERAL

El principal objetivo para la realización de la tesis fue elaborar un compendio de experimentos didácticos, siguiendo los temas más importantes de un curso de análisis dinámico de maquinaria, para estudiar y comprender conceptos de dinámica y ampliar su conocimiento, con base en complementar los aspectos teóricos con experimentos prácticos que enriquezcan la didáctica para asimilar los conceptos fundamentales. Como los elementos teóricos de la dinámica son, en cierta forma, abstractos: matemáticas superiores, ecuaciones vectoriales, teorías fundamentales, etc., se requieren elementos complementarios que refuercen el conocimiento y su entendimiento de manera práctica, como dispositivos mecánicos funcionando, instrumentos de medición, métodos simplificados de análisis con datos y resultados lógicos y reales.

Como se pretende una mejor comprensión de los conceptos de dinámica a nivel licenciatura, los temas de la teoría se abordarán de forma conjunta con las prácticas propuestas en este compendio de experimentos didácticos, para lo cual se elaboraron los temas y experimentos con el apoyo de dispositivos didácticos y aparatos de medición confiables. Creemos que el reforzar estos conocimientos es de vital importancia en el diseño de elementos de máquinas y de sistemas mecánicos móviles. El temario de la tesis se basa en el curso de análisis dinámico de maquinaria, buscando que se lleven de manera simultánea el estudio de las teorías y la práctica en el laboratorio.

La realización de este trabajo se basó en mi preparación con respecto a los temas de la mecánica, principalmente en dinámica de la partícula y dinámica del cuerpo rígido; además, se recurrió a la consulta de material bibliográfico relacionado con estos temas como libros, apuntes, así como la asesoría del director de la tesis.

Entre las dificultades que se tuvieron que enfrentar, para la elaboración de la tesis, podemos mencionar el hecho de que no se tenía material de apoyo para la impartición de prácticas sobre temas de dinámica de maquinaria, también se tuvo la necesidad de implementar equipos que se tenían de proyectos de alumnos de cursos anteriores, así como la utilización de nuevos equipos didácticos y de medición adquiridos por el laboratorio.

Por otra parte, la tesis está dividida en 10 capítulos, que tratan los diversos temas de la dinámica de maquinaria de manera práctica. Cada capítulo comienza tratando lo relacionado con los conceptos fundamentales, a manera de repaso, y reafirmando los elementos teóricos más importantes, explicándolos con el detalle necesario. El desarrollo de cada capítulo comprende desde mencionar los objetivos de estudio, los conceptos fundamentales, que se describen a manera de introducción del tema, las partes del desarrollo teórico y experimental de la práctica, que incluyen el análisis del sistema mecánico en estudio, el modelo matemático y las tablas de resultados teóricos y experimentales y, por último, las conclusiones obtenidas.

Entre los temas de estudio está la cinemática, en donde se trata de reafirmar conceptos como vector de posición, vector velocidad en sistemas inerciales y sistemas auxiliares, por ejemplo, en un brazo mecánico o en otros dispositivos giratorios.

También, en los estudios de mecánica, se requiere aplicar métodos prácticos que ayuden en la determinación de centroides o centros de masa y momentos de inercia de piezas mecánicas diversas, pues en un análisis dinámico es fundamental determinar la posición en el espacio de un cuerpo en movimiento, así como, conocer el efecto que se pueda tener en el movimiento, dependiendo del momento de inercia y del eje de referencia con respecto al cual se defina.

Otro tema de interés se tiene al evaluar el valor del coeficiente de fricción entre dos superficies, además de la fuerza de fricción que se produzca cuando un objeto móvil se deslice sobre una superficie con fricción.

Los conceptos de moméntum o cantidad de movimiento lineal o angular, en partículas y cuerpos rígidos, y su derivada, se analizarán en sistemas mecánicos móviles que de forma práctica nos permitan apreciarlos, de tal manera, que podamos predecir los efectos y aprovecharlos o minimizarlos según su aplicación. De aquí es posible conocer algunos dispositivos giroscópicos y analizarlos dinámicamente, como un giroscopio o un dispositivo indicador de giro, pudiéndose estudiar el movimiento de precesión de forma detallada y la manera de diseñar los dispositivos giroscópicos, con base en la dinámica del movimiento y relacionando los efectos que se producen en sus partes mecánicas móviles.

Por otro lado, se observará la utilidad que tiene el método de la energía en el desarrollo de modelos matemáticos de sistemas mecánicos que involucren fuerzas, desplazamientos y velocidades. Este método puede ser aplicado para evaluar las pérdidas por fricción, cuando se produce un intercambio de energía entre dos posiciones del movimiento del sistema, la inicial y la final, y así, obtener funciones matemáticas más sencillas de utilizar y analizar.

También se estudiarán métodos analíticos relacionados con el equilibrado o compensado de ejes o árboles rotatorios y, de esta manera, eliminar las reacciones y momentos desequilibrados perjudiciales en el sistema, que pudieran causar fallas en las piezas móviles o en la estructura de soporte. Entonces se desarrollarán los métodos del balanceo estático y el balanceo dinámico.

Finalmente, se analizarán sistemas mecánicos vibratorios con un grado de libertad, que oscilan en torno a una posición de equilibrio, bajo la acción de fuerzas de restitución o por la aplicación de una fuerza periódica. Aquí, será primordial conocer el valor de la frecuencia y el modo de la vibración, para poder saber si el sistema puede entrar en pulsación o en resonancia y controlar, con anticipación, la vibración del sistema oscilatorio.

## 1. CINEMATICA

### OBJETIVOS:

- 1) Comprender los conceptos de vector de posición y vector velocidad en los sistemas mecánicos propuestos para su análisis cinemático.
- 2) Determinar las coordenadas (x,y,z) del brazo de un robot mediante un análisis cinemático en el espacio. Manipular el brazo a través de instrucciones dadas desde un controlador.
- 3) Obtener la velocidad angular de una rueda que gira sin deslizar como función de la velocidad angular de un sistema de referencia giratorio.

### 1.1 INTRODUCCION TEORICA.

#### 1.1.1 Movimiento curvilíneo de partículas.

Cuando una partícula no se desplaza en línea recta, decimos que dicha partícula describe un movimiento curvilíneo. Para definir la posición que ocupa la partícula para un cierto tiempo  $t$ , seleccionamos un sistema de referencia fijo  $oxyz$ . El vector  $\mathbf{r}$  que une al origen  $O$  y al punto móvil  $P$  está caracterizado por su magnitud  $r$  y su dirección respecto de los ejes de referencia define completamente la posición de la partícula respecto de los ejes; el vector  $\mathbf{r}$  se llama Vector de Posición del Punto  $P$ .

El Vector Velocidad Instantánea de la partícula respecto al tiempo  $t$  está dado por:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{donde la magnitud } v \text{ del vector } \mathbf{v} \text{ es la rapidez de la partícula.}$$

#### 1.1.2 Movimiento general de una partícula.

La posición  $P$  de una partícula está definida, en cualquier instante, por sus coordenadas rectangulares  $x,y,z$ , es decir, por el vector de posición:  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Además, el vector velocidad de la partícula puede expresarse en función de sus componentes rectangulares:  $\mathbf{v} = x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}} + z\dot{\mathbf{k}}$  donde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  representan a los vectores unitarios en la dirección de los ejes  $x, y, z$  respectivamente, de magnitud constante e igual a 1 y direcciones fijas.

#### 1.1.3 Movimiento relativo de una partícula.

Cuando una partícula se mueve en el espacio su posición  $P$  está definida por el vector  $\mathbf{r}_p$  referido a un sistema fijo, que puede considerarse como un sistema rígidamente unido a la tierra, en tanto que cualquier sistema de referencia diferente que no esté rígidamente vinculado a tal sistema fijo se considerará como un sistema en movimiento o móvil.

Por lo tanto la posición de una partícula se puede definir auxiliándose de un sistema de referencia móvil. Sea  $OXYZ$  el sistema de referencia fijo y  $Axyz$  el sistema de referencia móvil que se mueve en forma conocida pero arbitraria con respecto al sistema fijo. Entonces la posición de  $P$  está definida por el vector  $r_p = r_A + r_{p/A}$  donde  $r_A$  es el vector de posición de  $A$  (origen del sistema móvil) con respecto al sistema fijo, y  $r_{p/A}$  define la posición de  $P$  con respecto al sistema en movimiento.

La velocidad absoluta  $v_p$  de la partícula es:  $v_p = v_A + v_{p/A}$  donde  $v_A$  es la velocidad del origen  $A$  del sistema móvil referida al sistema fijo  $OXYZ$ , y  $v_{p/A}$  es la velocidad de la partícula con respecto al sistema móvil  $Axyz$ . Finalmente estas derivadas deberán definirse con respecto al sistema fijo  $OXYZ$ .

## 1.2 DESARROLLO TEORICO.

### 1.2.1 Análisis cinemático de un brazo de robot.

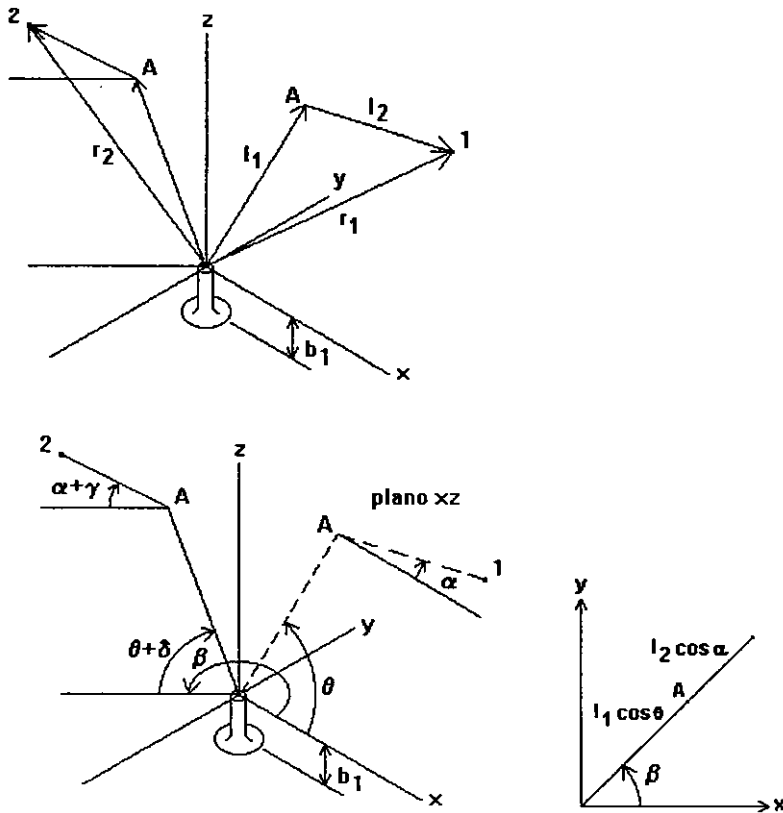


fig. 1.1 Brazo de robot

VECTOR DE POSICION:

$$\mathbf{r} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 \quad \text{donde} \quad \mathbf{l}_1 = (l_1 \cos\theta)\cos\beta\mathbf{i} + (l_1 \cos\theta)\text{sen}\beta\mathbf{j} + l_1 \text{sen}\theta\mathbf{k}$$

$$\mathbf{l}_2 = (l_2 \cos\alpha)\cos\beta\mathbf{i} + (l_2 \cos\alpha)\text{sen}\beta\mathbf{j} + l_2 \text{sen}\alpha\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = (l_1 \cos\theta + l_2 \cos\alpha)\cos\beta\mathbf{i} + (l_1 \cos\theta + l_2 \cos\alpha)\text{sen}\beta\mathbf{j} + (l_1 \text{sen}\theta + l_2 \text{sen}\alpha)\mathbf{k} \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

Para la posición inicial 1 y sustituyendo en (1.1):  $\beta = 0^\circ, \theta = \theta$  y  $\alpha = \alpha$

$$\mathbf{r}_1 = (l_1 \cos\theta + l_2 \cos\alpha)\mathbf{i} + (l_1 \text{sen}\theta + l_2 \text{sen}\alpha)\mathbf{k} \quad \dots\dots\dots (1.2)$$

Para la posición final 2 en (1.1):  $\beta = \beta, \theta = \theta + \delta$  y  $\alpha = \alpha + \gamma$  donde  $\delta$  y  $\gamma$  son los incrementos de  $\theta$  y  $\alpha$ .

$$\mathbf{r}_2 = [l_1 \cos(\theta + \delta) + l_2 \cos(\alpha + \gamma)] \cos\beta\mathbf{i} + [l_1 \cos(\theta + \delta) + l_2 \cos(\alpha + \gamma)] \text{sen}\beta\mathbf{j} +$$

$$+ [l_1 \text{sen}(\theta + \delta) + l_2 \text{sen}(\alpha + \gamma)]\mathbf{k} \quad \dots\dots\dots (1.3)$$

Si se considera la altura  $b_1$  de la base del robot, las coordenadas x, y, z del robot en sus posiciones inicial y final, de las ecuaciones (1.2) y (1.3), serán:

$x_1 = l_1 \cos\theta + l_2 \cos\alpha$	$x_2 = [l_1 \cos(\theta + \delta) + l_2 \cos(\alpha + \gamma)] \cos\beta$
$y_1 = 0$	$y_2 = [l_1 \cos(\theta + \delta) + l_2 \cos(\alpha + \gamma)] \text{sen}\beta \quad \dots\dots\dots (1.4)$
$z_1 = l_1 \text{sen}\theta + l_2 \text{sen}\alpha + b_1$	$z_2 = l_1 \text{sen}(\theta + \delta) + l_2 \text{sen}(\alpha + \gamma) + b_1$

Por lo tanto, con las ecuaciones (1.4), las posiciones del brazo de robot se podrán determinar conociendo las longitudes  $l_1$  y  $l_2$  de los miembros, la base  $b_1$ , los ángulos iniciales  $\theta$  y  $\alpha$ , así como los giros finales  $\beta, \delta$  y  $\gamma$ .

1.2.2 Análisis cinemático del sistema giratorio con rodamiento sin deslizamiento.

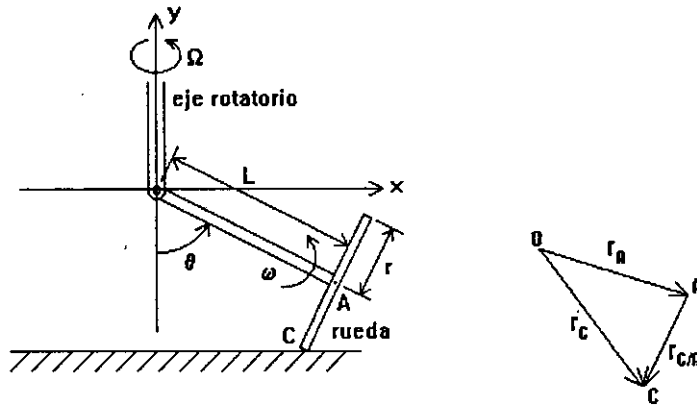


fig. 1.2 Rueda rotatoria

De la figura 1.2, se tienen los siguientes vectores:

Vector de posición del punto de contacto C de la rueda:  $r_C = r_A + r_{C/A}$

Velocidad en el punto de contacto C de la rueda:  $v_C = v_A + v_{C/A}$

Velocidad del punto A del centro de la rueda:  $v_A = \Omega \times r_A$

Pero , además:  $v_{C/A} = -v_{A/C} = -\omega \times r_{A/C} = \omega \times r_{C/A}$

Entonces:

$$\begin{aligned} v_C &= \Omega \times r_A + \omega \times r_{C/A} \\ &= \Omega j \times L (\text{sen}\theta i - \text{cos}\theta j) + \omega (-\text{sen}\theta i + \text{cos}\theta j) \times r (-\text{cos}\theta i - \text{sen}\theta j) \\ &= -\Omega L \text{sen}\theta k + \omega r \text{sen}^2\theta k + \omega r \text{cos}^2\theta k \end{aligned}$$

$$v_C = (r\omega - \Omega L \text{sen}\theta)k \dots\dots\dots(1.5)$$

Para un rodamiento perfecto:  $v_C = 0 \dots\dots\dots(1.6)$

Entonces de las ecs. (1.5) y (1.6):

$$r\omega - \Omega L \text{sen}\theta = 0$$

$$\omega = L\Omega(\text{sen}\theta)/r \dots\dots\dots(1.7)$$

- L = longitud del eje de la rueda
- r = radio de la rueda
- $\Omega$  = vel. angular del eje rotatorio
- $\omega$  = vel. angular de la rueda

donde  $\theta$  es la inclinación del eje de la rueda: para  $\theta=90^\circ$   $\omega = L\Omega/r$  y para  $\theta = 0^\circ$   $\omega = 0$

### 1.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL Y COMPROBACION TEORICA.

#### 1.3.1 Sistema de brazo de robot.

Aquí se muestran los movimientos del extremo de un robot desde una posición inicial 1 en el plano xz hasta una posición final 2 cualquiera. Las mediciones experimentales se realizan con el auxilio de un flexómetro, un transportador para ubicar las posiciones angulares y una plomada, ver fig. 1.1.

#### EJEMPLO 1:

Datos:  $l_1=242$ ,  $l_2=224$ ,  $b_1=412$ ,  $\theta=60^\circ$ ,  $\alpha=0^\circ$ ,  $\beta=120^\circ$ ,  $\gamma=-30^\circ$ ,  $\delta=-20^\circ$  (dim. en mm)

1	teor	exp	2	teor	exp
x	345	320	x	-189	-83
y	0	0	y	329	287
z	622	605	z	455	410

#### EJEMPLO 2:

Datos:  $\theta=75^\circ$ ,  $\alpha=50^\circ$ ,  $\beta=90^\circ$ ,  $\gamma=-20^\circ$ ,  $\delta=-10^\circ$

1	teor	exp	2	teor	exp
x	206	195	x	0	-34
y	0	0	y	296	302
z	817	802	z	743	702

#### EJEMPLO 3:

Datos:  $\theta=0^\circ$ ,  $\alpha=0^\circ$ ,  $\beta=60^\circ$ ,  $\gamma=-45^\circ$ ,  $\delta=-10^\circ$

1	teor	exp	2	teor	exp
x	466	465	x	198	155
y	0	0	y	343	320
z	412	405	z	212	220

#### EJEMPLO 4:

Datos:  $\theta=75^\circ$ ,  $\alpha=75^\circ$ ,  $\beta=60^\circ$ ,  $\gamma=-45^\circ$ ,  $\delta=-20^\circ$

1	teor	exp	2	teor	exp
x	121	142	x	166	115
y	0	0	y	288	296
z	862	843	z	722	685



### 1.3.2 Sistema giratorio con rodamiento sin deslizamiento.

a) Demostrar que para el rodamiento perfecto, fig. 1.2, se debe cumplir que:

$$r_{C/A} = r_C - r_A = (\omega \times v_A)/\omega^2$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} r_{C/A} &= [\omega(-\text{sen}\theta i + \text{cos}\theta j) \times (-\Omega L \text{sen}\theta k)]/\omega^2 \\ &= \omega(-\Omega L \text{sen}^2 \theta j - \Omega L \text{sen}\theta \text{cos}\theta i)/\omega^2 \end{aligned}$$

y sustituyendo (3):

$$r_{C/A} = (-\Omega L \text{sen}^2 \theta j - \Omega L \text{sen}\theta \text{cos}\theta i) / (L \Omega \text{sen}\theta)$$

$$r_{C/A} = -\text{rcos}\theta i - \text{rsen}\theta j$$

lo que queda comprobado.

b) Mostrar la tabla de valores experimentales del sistema giratorio, fig. 1.2. Se verifican los valores experimentales con los obtenidos por medio de la expresión teórica deducida, ecuación (1.7).

$\theta$ (°)	N	$\Omega$ (rpm)	L (cm)	$\omega$ exp (rpm)	$\omega$ teor (rpm)
80	2.5	68	16.5	213	209
80	2.8	79	16.5	251	242
80	3.0	87	16.5	278	267
75	2.5	68	17	208	211
75	2.8	79	17	244	245
75	3.0	87	17	266	270

r : radio de la rueda = 5.3 cm    L : longitud del eje de la rueda.

$\theta$  : ángulo de inclinación del eje de la rueda.

N : es un valor de referencia de frecuencia indicado en la carátula del dispositivo controlador de velocidad de rotación del plato giratorio.

$\Omega$  : se toma la medición de velocidad angular (rpm) con el tacómetro acoplado la barra de extensión al centro del plato giratorio.

$\omega$  : se mide la velocidad angular (rpm) de la rueda con la lámpara estroboscópica.

### 1.3.3 Equipo y material utilizado.

- Robot manipulador y controlador remoto.
- Sistema de Rueda rotatoria.
- Flexómetro.
- Transportador.
- Plomada e hilo.
- Lámpara estroboscópica.
- Tacómetro y barra de extensión.

### CONCLUSIONES.

Pudimos observar que con la ayuda de la cinemática podemos analizar sistemas mecánicos en operación y así controlar las diferentes variables como la posición y la velocidad de un elemento mecánico del sistema.

Se demostró que los sistemas de referencia auxiliares son muy útiles en los sistemas mecánicos con movimiento general, ya que esto permite el control del movimiento de los diferentes elementos del sistema mecánico, mediante el estudio del comportamiento de los vectores de posición, que en el caso del robot pueden ser definidos a través de posiciones angulares (incoders) y entonces conocer sus coordenadas espaciales  $x$ ,  $y$ ,  $z$  o, en sentido inverso, definiendo un punto conocido en el espacio  $Oxyz$  y posteriormente determinar los ángulos de referencia para localizar la ubicación en el espacio, que en el caso del robot la información es almacenada para ser utilizada cuando se desea definir una trayectoria de uno de sus elementos móviles.

Finalmente, para controlar la velocidad en un sistema mecánico se requiere conocer el comportamiento cinemático de los elementos móviles y manejar los valores de cada variable para definir el movimiento adecuado del sistema.

## 2. CENTROIDES Y MOMENTOS DE INERCIA DE PLACAS PLANAS.

### OBJETIVOS:

- 1) Determinar el centroide de una placa plana empleando dos ejes de equilibrio estático. Comprobar analíticamente mediante los primeros momentos de área con respecto a los ejes  $x$  e  $y$ .
- 2) Obtener el momento de inercia para placas planas de área irregular utilizando el péndulo compuesto. Realizar la verificación teórica calculando los momentos de inercia de áreas compuestas con respecto a los ejes coordenados.

### 2.1 INTRODUCCION TEORICA.

Las fuerzas en ingeniería se distribuyen de alguna manera sobre una línea, un área, o un volumen. La resultante de estas fuerzas distribuidas debe actuar en el centro de gravedad del sistema. Así, el centro de gravedad es un punto en el que se puede considerar que está concentrado el sistema de fuerzas de gravedad, produciéndose el mismo efecto.

Para determinar el centro de gravedad (centroide) de una placa plana y homogénea se tienen varios métodos como el método de los ejes de equilibrio estático y el método analítico mediante los primeros momentos de masa o de área con respecto a dos ejes fijos y perpendiculares  $x$ ,  $y$ .

Cuando se tienen cuerpos de forma compleja es muy difícil determinar el momento de inercia por métodos analíticos; por lo que cuando tenemos cuerpos de este tipo se puede obtener el momento de inercia con respecto a un eje del cuerpo rígido si se observa el comportamiento dinámico del cuerpo en respuesta a una entrada conocida. Cuerpos rígidos como placas planas, bielas, manivelas, levas, engranes rectos, etc., son de forma tal que se puede suponer que sus masas están contenidas en un solo plano. Luego, aplicando el método del Péndulo Compuesto es factible suspenderlos como un péndulo y hacerlos oscilar, de esta forma se obtiene el momento de inercia de masa, con base en la observación de su frecuencia de oscilación, conociendo su masa y su centroide.

### 2.1.1 Determinación del centroide de una placa plana y homogénea utilizando dos ejes de equilibrio estático distintos.

Consideraciones acerca de las características de simetría de un área con relación al centroide:

Si un área posee un eje de simetría, su centroide se localiza sobre ese eje ( $Q_i=0$ , es el 1er. momento de área respecto al eje  $i$ ).

Si un área posee dos ejes de simetría, su centroide debe localizarse en la intersección de esos dos ejes ( $Q_a=Q_b=0$ , son los primeros momentos de área respecto a los ejes  $a$  y  $b$ ).

Un área es simétrica con respecto a un centro  $O$  (como el origen de un sistema de ejes coordenados) si a cada elemento de área  $\Delta A$  de coordenadas  $x$  e  $y$  le corresponde un elemento  $\Delta A'$  de coordenadas  $-x$  e  $-y$ . Entonces el centroide del área coincide con su centro de simetría  $O$  ( $Q_x=Q_y=0$ , para los primeros momentos de área resp. de  $x$  e  $y$ ).

Debe saberse que una figura que posee un centro de simetría no necesariamente posee un eje de simetría, mientras que un área que posee dos ejes de simetría no necesariamente tiene un centro de simetría.

Sea un área en la cual se definen un mínimo de dos ejes de equilibrio estático distintos. Es comprobable físicamente que un eje de equilibrio estático de un área (placa plana) pasa por el centroide; por lo tanto, es de aceptarse que la ubicación del centroide de la placa plana se encuentra en la intersección de dos de los distintos ejes de equilibrio estático que se hayan definido, ver fig. 2.1.

Ejemplo: Sea la figura

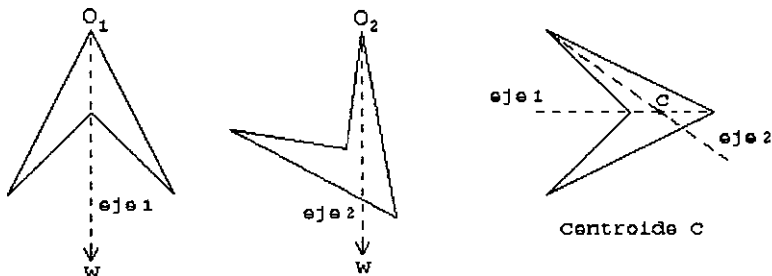


fig. 2.1

### 2.1.2 Momentos de área y determinación de centroides de áreas (placas planas).

Sea una placa plana homogénea de espesor uniforme  $t$ , para la cual el peso de un elemento diferencial de la placa, dividida en  $n$  elementos pequeños, viene dado por  $\Delta w = \gamma t \Delta A$

donde  $\gamma$  = peso específico del material de la placa  
 $t$  = espesor de la placa  
 $\Delta A$  = área del elemento

El peso de la placa completa es  $w = \gamma t A$  y  $A$  es el área total de la placa.

Las coordenadas del centro de gravedad de la placa de área  $A$  se obtienen al igualar los momentos del peso  $w$  con respecto a los ejes  $x$  e  $y$  con la suma de los momentos de los pesos elementales respecto a los mismos ejes, es decir

$$\Sigma M_y: \quad \bar{x} w = x_1 \Delta w_1 + x_2 \Delta w_2 + \dots + x_n \Delta w_n \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\Sigma M_x: \quad \bar{y} w = y_1 \Delta w_1 + y_2 \Delta w_2 + \dots + y_n \Delta w_n \dots\dots\dots (2.2)$$

Si se dividen las ecs. (2.1) y (2.2) entre  $\gamma t$ , se tendrá que

$$\Sigma M_y: \quad \bar{x} A = x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + \dots + x_n \Delta A_n \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\Sigma M_x: \quad \bar{y} A = y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2 + \dots + y_n \Delta A_n \dots\dots\dots (2.4)$$

Después de aumentar el número de elementos para dividir el área y disminuyendo a la vez el tamaño de cada elemento, se obtienen en el límite las siguientes expresiones, de (2.3) y (2.4):

$$\bar{x} A = \int x dA \quad \bar{y} A = \int y dA$$

que definen el centroide  $G$  de la placa plana y homogénea de coordenadas  $G(\bar{x}, \bar{y})$  y área  $A$ ; además se tienen los primeros momentos del área  $A$  con respecto a los ejes coordenados, que son:

$$Q_y = \int x dA \quad \text{1er. momento de área respecto al eje } y \dots\dots\dots (2.5)$$

$$Q_x = \int y dA \quad \text{1er. momento de área respecto al eje } x \dots\dots\dots (2.6)$$

Obtención del centroide de figuras o áreas compuestas.

Cuando es posible dividir una placa plana en formas geométricas comunes, cuyos centroides se dan calculados en tablas, entonces las coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  del centroide de la figura compuesta puede obtenerse a partir de las coordenadas  $\bar{x}_i, \bar{y}_i$  de los centroides de las diferentes formas comunes.

Considerando que el momento del peso de la placa compuesta con respecto a un eje es igual a la suma de los momentos de los pesos de las diferentes partes con respecto al mismo eje, se tiene, de (2.1) y (2.2), que

$$\Sigma M_y: \quad \bar{x} (w_1+w_2+\dots+w_n) = \bar{x}_1 w_1 + \bar{x}_2 w_2 + \dots + \bar{x}_n w_n \dots\dots\dots (2.7)$$

$$\Sigma M_x: \quad \bar{y} (w_1+w_2+\dots+w_n) = \bar{y}_1 w_1 + \bar{y}_2 w_2 + \dots + \bar{y}_n w_n \dots\dots\dots (2.8)$$

Si se tiene una placa plana compuesta y homogénea de espesor uniforme, los primeros momentos con respecto a los ejes x e y serán, de (2.3) y (2.4):

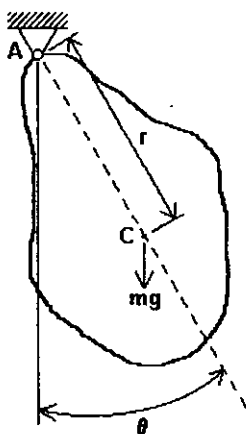
$$Q_y = \bar{x} \Sigma A_i = \Sigma(\bar{x}_i A_i) \quad Q_x = \bar{y} \Sigma A_i = \Sigma(\bar{y}_i A_i) \dots\dots\dots (2.9)$$

Al resolver las expresiones anteriores, (2.9), se obtienen las coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  del centroide G del área total de la figura compuesta.

Debe tenerse en cuenta que los primeros momentos de las áreas de formas comunes pueden ser positivos o negativos, dependiendo de la ubicación del centroide; además en el caso de un agujero cualquiera el área deberá considerarse con signo negativo.

### 2.1.3 Péndulo compuesto y su aplicación en la obtención del momento de inercia de una placa plana.

De un análisis de vibraciones de un cuerpo rígido que posee un sólo grado de libertad, en la variable  $\theta$  que define la posición del cuerpo, se obtiene la ecuación diferencial que relaciona la variable y la derivada de su variación con respecto al tiempo.



$$\Sigma M_A = I_A \ddot{\theta} = (I_c + mr^2) \ddot{\theta} \dots\dots\dots (2.10)$$

$$I_A \ddot{\theta} = -mgr \text{sen}\theta \dots\dots\dots (2.11)$$

Simplificando y considerando que para oscilaciones pequeñas  $\theta \leq 10^\circ$  ( $\text{sen}\theta = \theta$ ), de (2.11):

$$\ddot{\theta} + (mgr/I_A)\theta = 0$$

ec. que representa un movimiento armónico simple. Aquí se definen:

$$\text{frecuencia circular } \omega^2 = mgr/I_A \dots\dots\dots (2.12)$$

$$\text{período } \tau = 2\pi/\omega \text{ (s)}$$

$$\text{frecuencia } f = \omega/2\pi \text{ (Hz)} \dots\dots\dots (2.13)$$

$$f = \text{ciclos por min}/60 \text{ (Hz)}$$

$$\text{vel. angular } \omega = 2\pi f \text{ (rad/s)}$$

fig. 2.2

El momento centroidal de inercia se obtiene del teorema de Steinner y de la relación de la frecuencia circular, de las ecuaciones (2.10), (2.12) y (2.13):

$$I_c = I_A - mr^2 = mgr/\omega^2 - mr^2$$

$$I_c = (gr/\omega^2 - r^2)m = [gr/(4\pi^2 f^2) - r^2] m \dots\dots\dots (2.14)$$

donde:

$r$  = distancia radial del centro de giro al centro de masa

$f$  = frecuencia del movimiento vibratorio en Hz

$m$  = masa de la placa plana en gr

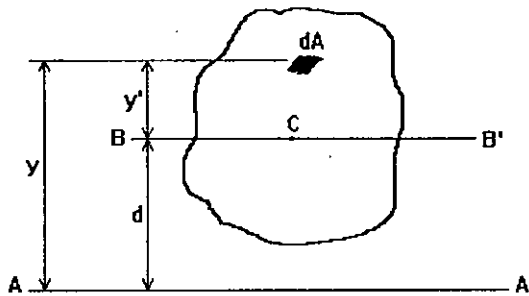
### 2.1.4 Momentos de inercia de un área.

Los momentos de inercia de área de un área o de una placa plana definidos con respecto a los ejes coordenados  $x$  e  $y$  en el plano del área de la placa y  $z$  perpendicular al mismo, vienen dados por

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad I_z = I_0 = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

Teorema de Steinner de los ejes paralelos.

Sea  $I$  el momento de inercia con respecto a un eje  $AA'$ . El eje centroidal  $BB'$  es un eje paralelo al eje  $AA'$  y que pasa por el centroide del área. De la figura 2.3 se tiene



Como  $I = \int y^2 dA$   $y = y' + d$

fig. 2.3

$$I = \int (y' + d)^2 dA = \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA \quad \text{donde}$$

$\int y'^2 dA =$  que es el momento de inercia del área respecto del eje centroidal  $BB'$  paralelo al eje  $AA'$ .

$\int y' dA = 0$  debido a que el centroide está sobre el eje centroidal  $BB'$ .

$\int dA = A$  que es el área total  $A$ .

Luego, entonces

$I = \bar{I} + Ad^2$  que es la ec. que define el teorema.

$\bar{I}$  = momento de inercia centroidal (respecto del eje  $BB'$ ).

$d$  = distancia entre el eje centroidal y el eje paralelo.

$A$  = área total.



Momento de inercia de áreas compuestas.

Cuando un área compuesta está formada por varias áreas comunes  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , la integral que define el momento de inercia del área  $A$  puede dividirse en integrales calculadas sobre cada área  $A_i$ ; el momento de inercia de  $A$  respecto a un eje dado se obtendrá sumando los momentos de inercia de cada una de las áreas  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , respecto al mismo eje. Es posible obtener los momentos de inercia de áreas comunes de tablas calculadas de libros. En ocasiones será necesario aplicar el teorema de los ejes paralelos para obtener el momento de inercia respecto al eje dado. Cuando un área común esté dada por un hueco, el momento de inercia de éste será de signo negativo y se restará en la suma.

2.1.5 Momentos de inercia de masa de placas planas delgadas y homogéneas.

Sea una placa plana delgada de espesor uniforme  $t$  y de un material homogéneo de densidad  $\rho$ , ver fig. 2.4. El momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje  $AA'$  contenido en el plano de la placa es

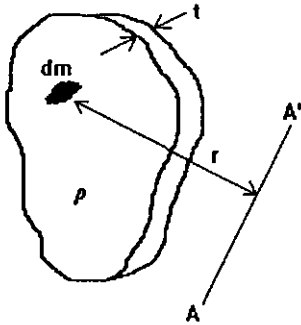


fig. 2.4

$$I_{AA'}(masa) = \int r^2 dm \dots\dots\dots (2.15)$$

como  $dm = \rho dV = \rho t dA$ , luego

$$I_{AA'}(masa) = \rho t \int r^2 dA$$

$$I_{AA'}(masa) = \rho t I_{AA'}(área)$$

$$I_{AA'}(masa) = (m/A) I_{AA'}(área) \dots\dots (2.16)$$

donde  $m$  = masa de la placa  
 $A$  = área plana de la placa

También, aplicando el teorema de Steinner de los ejes paralelos se tendrá que

$$I = \bar{I} + md^2$$

donde  $\bar{I}$  = momento de inercia de masa centroidal de la placa  
 $d$  = distancia entre el eje centroidal y el eje paralelo dado

## 2.2 DESARROLLO EXPERIMENTAL.

### 2.2.1 Determinar el centroide de una placa plana para dos figuras compuestas.

Se aplica el método de los ejes de equilibrio estático. Entonces, al suspender cada placa en dos puntos distintos se trazan los ejes de equilibrio utilizando una plomada, encontrándose el centroide en la intersección de ambos ejes. Se puede comprobar su certeza suspendiendo nuevamente la placa en otro punto y viendo que el nuevo eje de equilibrio pasa por el centroide, ver figuras 2.5 y 2.6.

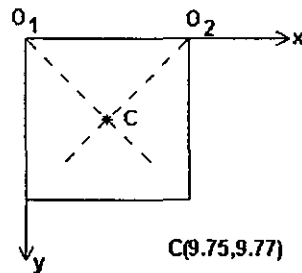


fig. 2.5. Placa 1

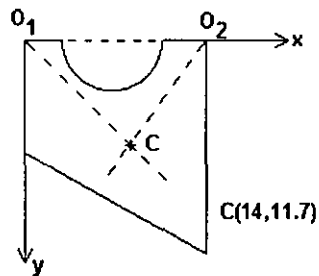


fig. 2.6. Placa 2

### 2.2.2 Obtener experimentalmente los momentos de inercia de masa de distintas placas planas.

Esta parte experimental consiste en dejar que cada placa plana funcione como un Péndulo Compuesto. Luego, se define la posición  $r$  del centroide con respecto al punto de giro; se mide la frecuencia en Hz, así como la masa de cada placa, ver fig. 2.2.

Tabla de valores experimentales.

Placa	$r(\text{cm})$	$f(\text{Hz})$	$m(\text{gr})$	$I_c(\text{gr cm}^2)$	$\epsilon\%$ (2.3.2)
1	13.5	1.166	170	10921.16	1.4
2	15.5	1.081	170	15132.69	0.6

Resumen de operaciones de  $I_c$  (experimentales):

$$I_c = [gr / (4\pi^2 f^2) - r^2] m \quad (\text{gr cm}^2)$$

$$\text{Placa 1: } I_c = [980(13.5) / (4\pi^2 1.166^2) - 13.5^2](170) = 10921.16$$

$$\text{Placa 2: } I_c = [980(15.5) / (4\pi^2 1.081^2) - 15.5^2](170) = 15132.69$$

### 2.2.3 Equipo y material utilizado.

- 3 placas planas y homogéneas
- Soporte universal
- Pinzas de sujeción con aguja de apoyo
- Plomada
- Plumín de agua de cualquier color
- Flexómetro
- Frecuencímetro (Contador digital)
- Báscula

## 2.3 COMPROBACION TEORICA.

### 2.3.1 Centroides de varias placas planas de formas compuestas.

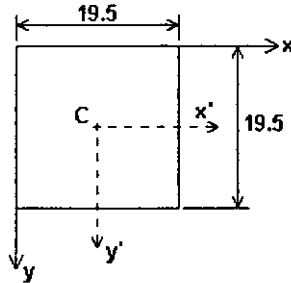


fig. 2.7. Placa 1

Las coordenadas del centroide son:

$$\bar{x} = 9,75 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = 9,75 \text{ cm}$$

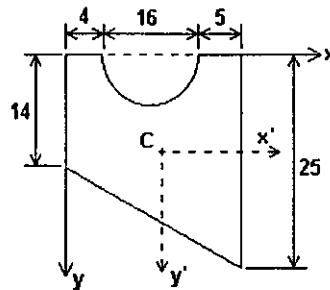


fig. 2.8. Placa 2

Area	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}A$	$\bar{y}A$
(1) 350	12.5	7	4375	2450
(2) 137.5	16.67	17.67	2292.13	2429.63
(3) -100.53	12	3.40	-1206	-341.80
$\Sigma A$ 386.97			$\Sigma \bar{x}A$ 5460.77	$\Sigma \bar{y}A$ 4537.83

El centroide está en el punto:

$$\bar{x} = \Sigma \bar{x}A / \Sigma A = 14.11 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \Sigma \bar{y}A / \Sigma A = 11.73 \text{ cm}$$

### 2.3.2 Momentos de inercia centroidales de las placas planas.

Placa 1: Figura cuadrada, fig. 2.7.

El momento centroidal de inercia  $I_c$  para la placa 1 es igual al momento de inercia con respecto al eje  $z'$ , perpendicular a los ejes centroidales  $x'$  e  $y'$ .

$$\text{Momento de inercia de masa: } I_c = \bar{I}_{z'(masa)}$$

$$\bar{I}_{x'} = \bar{I}_{y'} = 1/12(bh^3) = 1/12(L^4) = 1/12(19.5)^4$$

$$\bar{I}_{z'} = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'} = 2\bar{I}_{x'} = 1/6(19.5)^4$$

$$\bar{I}_{z'} = 24098.34 \text{ cm}^4$$

Luego, de la ec. (2.16):

$$I_c = \bar{I}_{z'(masa)} = (m/A) \bar{I}_{z'(área)}$$

$$I_c = (170/19.5^2)(24098.34)$$

$$I_c = 10773.75 \text{ gr cm}^2$$

Placa 2: Considerando que dicha placa está compuesta por 3 áreas comunes, se calculará para cada área y se sumará, fig. 2.8

Area	$\bar{x}^2 A$	$\bar{y}$	$I_y$	$\bar{y}^2 A$	$\bar{x}$	$I_x$
(1) 350	54687.5	18229.17	72916.67	17150	5716.67	22866.67
(2) 137.5	38209.72	4774.31	42984.03	42931.47	924.31	43855.78
(3) -100.53	-14476.3	-1608.50	-16084.8	-1162.13	-	-1608.50
			$\Sigma 99815.9$			$\Sigma 65113.9$

$$I_y = \bar{I}_y + A \bar{x}^2 \quad I_x = \bar{I}_x + A \bar{y}^2 \quad I_z = I_x + I_y = 164929.83$$

$$\text{Pero } I_z = \bar{I}_{z'} + \Sigma A (\bar{X}^2 + \bar{Y}^2)$$

$$\text{luego } \bar{I}_{z'} = I_z - \Sigma A (\bar{X}^2 + \bar{Y}^2) = 164929.83 - 386.97(14.11^2 + 11.73^2)$$

$$\bar{I}_{z'} = 34642.84 \text{ cm}^4$$

$$\text{Entonces, de (2.16): } I_c = \bar{I}_{z'}(masa) = (m/A) \bar{I}_{z'}(\text{área})$$

$$I_c = (170/386.97)(34642.84)$$

$$I_c = 15218.97 \text{ gr cm}^2$$

## CONCLUSIONES.

Es muy importante comprender que las fuerzas distribuidas, debidas a la acción de las fuerzas de gravedad de las partículas que constituyen el peso del cuerpo, pueden ser sustituidas por una resultante que actúa en el centro de gravedad del cuerpo con el mismo efecto. Para esto se utilizan métodos muy eficaces como el de los Ejes de Equilibrio que con facilidad ubican la posición de los centroides. En este método únicamente se necesita conocer dos ejes de equilibrio para localizar el centroide, sin importar la forma que tenga el cuerpo rígido.

Cuando se desea obtener el momento de inercia de una placa plana o de un cuerpo rígido con sección transversal constante, basta con utilizar el Péndulo Compuesto y observar la frecuencia de oscilación durante su movimiento pendular. También existen otros péndulos físicos para determinar los momentos de inercia de piezas mecánicas como el Péndulo Filiar, así como Bifiliares, Trifiliares y Cuadrafiliares, además del Péndulo de Torsión, en donde midiendo la frecuencia del Péndulo Filiar o la frecuencia del movimiento de vibración torsional, alrededor de un eje de giro, se puede encontrar el momento de inercia de diversos cuerpos rígidos.

### 3. COEFICIENTE DE FRICCIÓN Y FUERZA DE FRICCIÓN.

#### OBJETIVOS:

- 1) Obtener experimentalmente el coeficiente de fricción estática entre dos superficies, utilizando una superficie rotatoria de diversos materiales y varios bloques metálicos.
- 2) Analizar el movimiento de un bloque de masa  $m$  y su comportamiento a lo largo de una rampa rotatoria. Determinar la magnitud de la fuerza de fricción ejercida entre las superficies e identificar los casos en que la masa se encuentre en equilibrio o en movimiento de deslizamiento.

#### 3.1 INTRODUCCION TEORICA.

En realidad no existen superficies libres de fricción; ya que cuando se tienen dos superficies en contacto, el movimiento de una superficie con respecto de la otra produce fuerzas de fricción, las cuales son tangentes al movimiento relativo de ambas superficies.

El tipo de fricción que se estudia en problemas de sistemas mecánicos de cuerpos rígidos en movimiento es la llamada Fricción en Seco o Fricción de Coulomb, es decir, de cuerpos rígidos en contacto a través de superficies no lubricadas.

En este capítulo será importante conocer la manera de determinar el Coeficiente de Fricción Estática  $\mu_s$  entre dos superficies en contacto por medio de un dispositivo que consta de un plato giratorio de metal y un bloque metálico que empezará a deslizarse con respecto al plato, fig.3.1.

También observaremos otro problema dinámico, en el cual la Fuerza de Fricción juega un importante papel en el movimiento de un bloque. En este problema se tienen todas las fuerzas aplicadas y se conoce el coeficiente de fricción estático  $\mu_s$  entre las superficies; aquí se desea determinar si el cuerpo en consideración va a permanecer en equilibrio o si se desplazará a lo largo de un plano inclinado que gira. Entonces, la fuerza de fricción  $F_f$  (necesaria) que se requiere para mantener el equilibrio se desconoce y debe ser determinada junto con la fuerza normal  $N$  a las superficies en contacto, ver fig. 3.3.

### 3.2 DESARROLLO TEORICO.

#### 3.2.1 Análisis dinámico del sistema de masa y plato rotatorio.

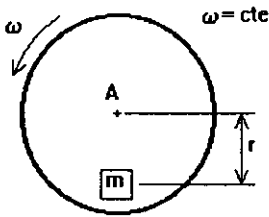


fig. 3.1

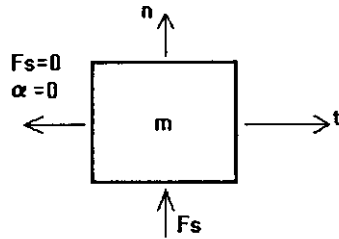


fig. 3.2

COEFICIENTE DE FRICCIÓN ESTÁTICO  $\mu_s$ , fig. 3.1 y fig. 3.2.

$$\Sigma F_n = ma_n$$

$$\text{Pero } F_s = \mu_s N = \mu_s mg \dots\dots(3.2)$$

$$F_s = ma_n \dots\dots(3.1)$$

$$a_n = r\omega^2 \dots\dots(3.3)$$

Sustituyendo (3.2) y (3.3) en (3.1):

$$\mu_s mg = mr\omega^2 \dots\dots(3.4)$$

Luego de la ecuación (3.4), el coeficiente de fricción estática  $\mu_s$  es:

$$\mu_s = r\omega^2/g \quad \text{con } \omega \text{ en rad/s}$$

$$\mu_s = r N^2/g (2\pi/60)^2 = r/g (N/9.549)^2 \quad \text{con } N \text{ en rpm} \dots\dots(3.5)$$

donde  $r$  = distancia radial del centro del plato rotatorio a la masa  
 $N$  = velocidad angular en rpm del plato rotatorio



### 3.2.2 Análisis dinámico del sistema de bloque y rampa rotatoria.

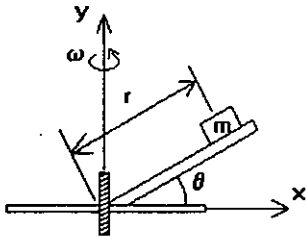


fig. 3.3

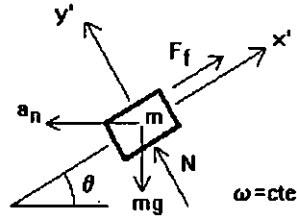


fig. 3.4

Obtención de las fuerzas normal y fuerza de fricción ejercida, fig. 3.3. Haciendo un análisis de las fuerzas involucradas, fig. 3.4, las ecuaciones dinámicas son:

$$\Sigma F_y = m a_y$$

$$\text{Pero } \mathbf{a} = \mathbf{a}_n = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = -r \cos\theta \omega^2 \mathbf{i}$$

$$N - mg \cos\theta = m(a_n \sin\theta)$$

$$N = (g + r \sin\theta \omega^2) m \cos\theta \quad \dots\dots (3.6) \text{ (fuerza normal)}$$

$$\Sigma F_{x'} = m a_{x'}$$

$$F_f - mg \sin\theta = -m(a_n \cos\theta)$$

$$F_f = (g \sin\theta - r \cos^2\theta \omega^2) m \quad \dots\dots (3.7) \text{ (fuerza de fricción necesaria de equilibrio)}$$

Por otro lado, la fuerza de fricción de las superficies es:

$$F_f(\text{superficie}) = \mu_s N \quad \dots\dots (3.8) \text{ (fricción máxima de las superficies)}$$

donde:

$\omega$  = velocidad angular de la rampa rotatoria en rpm

$r$  = distancia del centro del plato rotatorio a la posición de la masa medida a lo largo de la rampa

$\theta$  = ángulo de inclinación de la rampa rotatoria

$m$  = masa del bloque

Entonces, un análisis del movimiento del bloque de masa  $m$  se podrá realizar si comparamos los valores de la fuerza de fricción (necesaria para el equilibrio) y de la fricción máxima (fricción de la superficie), ecuaciones (3.7) y (3.8), es decir:

Si  $F_f(\text{superficie}) \geq F_f(\text{necesaria})$  entonces la masa  $m$  "no resbala"

Si  $F_f(\text{superficie}) < F_f(\text{necesaria})$  entonces la masa  $m$  "si resbala"

Cuando la masa resbala se tendrá que:

La fuerza es  $F_f$  (positiva +) cuando la masa resbala hacia abajo

La fuerza es  $F_f$  (negativa -) cuando la masa resbala hacia arriba

### 3.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL.

#### 3.3.1 Sistema de masa y plato rotatorio.

Realizar una tabla de valores experimentales con la ayuda de un flexómetro para medir las distancias radiales en cm, así como un tacómetro para medir la velocidad angular en rpm del plato rotatorio, al momento en que el bloque comience a deslizarse. Luego, con la ecuación deducida (3.5), encontrar el valor del coeficiente de fricción  $\mu_s$ , ver fig. 3.1.

Tabla de valores experimentales:

Superficie	N(rpm)	r(cm)	$\mu_s$
Aluminio en Aluminio	64	6	0.28
	51	10	0.29
	40	15	0.27
Bronce en Hierro	63	5.8	0.26
	48	10	0.26
	40	15	0.27
Latón en Acrílico	81	5.6	0.41
	52	10	0.30
	42	15	0.30

### 3.3.2 Sistema de bloque y rampa rotatoria.

- 1) Determinar 3 puntos a lo largo de la rampa en donde la masa permanezca en equilibrio (sin deslizar).
- 2) Determinar la velocidad angular mínima en rpm de deslizamiento hacia arriba.
- 3) Determinar la velocidad angular máxima en rpm de deslizamiento hacia abajo.

Para esto se utilizan las ecuaciones deducidas (3.6), (3.7) y (3.8) y la fig. 3.3.

Tabla de valores experimentales.

Ejemplo 1.

$r$ (cm)	$\omega$ (rpm)	$F_f$ (N)	$F_f(\text{sup})$ (N)	$\mu_s = 0.16$ lámina y Al. $\theta = 24^\circ$ $m = 0.064$ kg
20	40	0.068	< 0.105	sin deslizamiento
15	46	0.069	< 0.105	
10	58	0.058	< 0.106	
10	82	-0.139	> 0.120	deslizamiento hacia arriba
10	48	0.120	> 0.101	deslizamiento hacia abajo

Ejemplo2.

$r$ (cm)	$\omega$ (rpm)	$F_f$ (N)	$F_f(\text{sup})$ (N)	$\mu_s = 0.20$ lámina y latón $\theta = 24^\circ$ $m = 0.226$ kg
20	40	0.239	< 0.464	sin deslizamiento
15	40	0.404	< 0.449	
10	52	0.342	< 0.454	
15	70	-0.619	> 0.540	deslizamiento hacia arriba
15	31	0.603	> 0.431	deslizamiento hacia abajo

### 3.3.3 Equipo y material utilizado.

- Sistema de masa y plato rotatorio
- Flexómetro
- Tacómetro y barra de extensión
- Bloques de masa de diversos materiales: aluminio, bronce y latón
- Platos de diversos materiales: aluminio, hierro y acrílico
- Rampa de lámina (hierro) y masa de aluminio o latón
- Plumón marcador
- Transportador
- Báscula

### CONCLUSIONES.

Por medio de un análisis de la dinámica de un bloque que se mueve, en teoría estricta, radialmente en el plato giratorio, es posible determinar el coeficiente de fricción estático  $\mu_s$ , si se considera un deslizamiento a velocidad angular constante,  $\omega = \text{cte}$ . Se observa que  $\mu_s$  es independiente de la masa  $m$  que contiene el bloque, pues sólo depende de las características de rugosidad de las superficies en contacto.

Para el caso del bloque que se mueve a lo largo de la rampa giratoria, se pudo constatar que para saber si el bloque permanecerá en equilibrio o si este se deslizará, únicamente es necesario comparar los valores de la fuerza de fricción (necesaria para el equilibrio) con los valores de la fuerza de fricción máxima (fricción de las superficies); así, la masa resbalará sólo cuando se cumple que

$$F_f(\text{superficies}) < F_f(\text{necesaria para el equilibrio})$$

y la fuerza de fricción real será  $F_f = \mu_k N$ , que es la fricción dinámica que se tiene cuando la masa se desliza sobre la superficie de la rampa giratoria.

## 4. MOMENTOS DINAMICOS (1ª Parte).

### OBJETIVOS:

- 1) Comprender los conceptos de Momentum Lineal y Momentum Angular de un sistema de partículas. Analizar un caso físico de la Conservación del Momentum.
- 2) Analizar los conceptos de Cantidad de Movimiento Angular y su derivada con respecto al tiempo, para el caso del movimiento espacial de un cuerpo rígido. Observar algunos efectos dinámicos en sistemas giratorios.

### 4.1 INTRODUCCION TEORICA.

#### 4.1.1 Sistema de partículas en movimiento.

El movimiento de un sistema de partículas, fig. 4.1 puede simplificarse si consideramos que el sistema de fuerzas inerciales, el momentum lineal y el momentum angular correspondientes de cada una de las partículas del sistema, es equivalente a un sistema que consta de una fuerza resultante, dada por la sumatoria de fuerzas externas  $\Sigma \mathbf{F}$ , un vector momentum lineal  $\mathbf{p}$  y un vector momentum angular  $\mathbf{h}$ , respectivamente.

También, en un sistema de partículas es factible realizar un análisis de la conservación del momentum lineal y del momentum angular, por medio de las ecuaciones de conservación aplicadas a un problema práctico que se analizará más adelante.

Para el caso de los cuerpos rígidos es importante, dentro del análisis dinámico, determinar el vector cantidad de movimiento angular  $\mathbf{H}_G$  y su vector derivada con respecto a su centro de masa, pues este vector derivada  $\dot{\mathbf{H}}_G$ , nos define la magnitud y dirección en la cual se tendrá un efecto dinámico externo sobre un sistema mecánico en movimiento; dicho efecto es también conocido como efecto giroscópico.

#### 4.1.2 Momento lineal y momento angular de un sistema de partículas.

Sea un sistema de partículas en movimiento espacial.

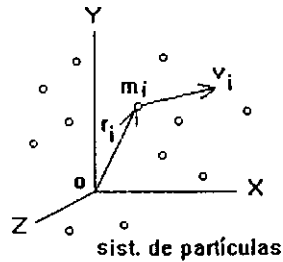


fig. 4.1

a) El Momento (Cantidad de Movimiento) Lineal

de un sistema de partículas está dado por:  $\mathbf{p} = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum m_i \mathbf{v}_i$

b) El Momento (Cantidad de Movimiento) Angular

de un sistema de partículas está definido por:  $\mathbf{h} = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$

c) La Fuerza Resultante y el Momento Resultante con respecto a un punto fijo de las fuerzas externas del sistema de partículas es:

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \quad \Sigma \mathbf{M} = \dot{\mathbf{h}}$$

que representan a las ecs. generales del movimiento del sistema de partículas.

d) Conservación del Momento (Cantidad de Movimiento) para un sistema de partículas.

Si sobre un sistema de partículas la resultante del sistema de fuerzas externas es nula, se tendrá que:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \text{ y } \Sigma \mathbf{M} = 0 \text{ ó } \dot{\mathbf{p}} = 0 \text{ y } \dot{\mathbf{h}} = 0$$

por lo tanto  $\mathbf{p} = \text{cte}$  y  $\mathbf{h} = \text{cte}$  (se conservan). Solamente para el caso de un sistema de fuerzas centrales se tendría que  $\Sigma \mathbf{F} \neq 0$ .

**4.1.3 Cantidad de movimiento angular y su derivada, de un cuerpo rígido en movimiento, definidos respecto a su centro de masa.**

a) Cantidad de Movimiento Angular respecto a su centro de masa, fig. 4.2.

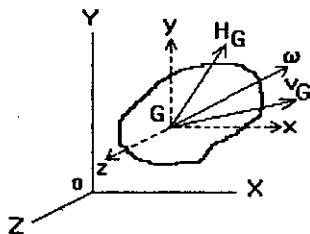


fig. 4.2

$$\mathbf{H}_G = \bar{I} \omega = \begin{bmatrix} (H_G)_x \\ (H_G)_y \\ (H_G)_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_x & -\bar{I}_{xy} & -\bar{I}_{xz} \\ -\bar{I}_{yx} & \bar{I}_y & -\bar{I}_{yz} \\ -\bar{I}_{zx} & -\bar{I}_{zy} & \bar{I}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

b) Derivada de la Cantidad de Movimiento Angular con respecto a su centro de masa.

Se define un vector  $\mathbf{r}$ , cuya derivada se obtiene de la expresión:

$$\dot{\mathbf{r}} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)_{\text{sis}} + \Omega_s \times \mathbf{r} \quad \text{en donde}$$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)_{\text{sis}} = \text{rapidez de cambio de } \mathbf{r} \text{ respecto al sistema giratorio auxiliar } Gxyz.$$

$\Omega_s$  = velocidad angular del sistema giratorio auxiliar  $Gxyz$ .

Luego, para el vector  $\mathbf{H}_G$  se tiene:

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \left( \frac{\partial \mathbf{H}_G}{\partial t} \right)_{\text{sis}} + \Omega_s \times \mathbf{H}_G$$

Por lo tanto, las ecs. generales del movimiento de un Cuerpo Rígido en el espacio son:

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= m \mathbf{a}_G \\ \Sigma \mathbf{M}_G &= \dot{\mathbf{H}}_G \quad \text{ó} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \end{aligned}$$

## 4.2 DESARROLLO TEORICO Y EXPERIMENTAL

### 4.2.1 Análisis de la conservación del momento.

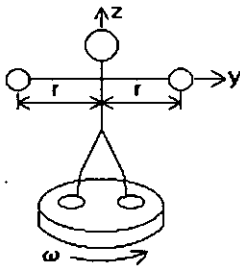


fig. 4.3

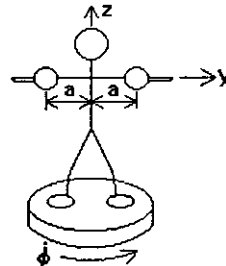


fig. 4.4

Desarrollo teórico: Ver figura 4.3

$$\mathbf{r} = r \mathbf{j}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega \mathbf{k} \times r \mathbf{j} = -r\omega \mathbf{i}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{r}} = r \mathbf{j} \times m(-r\omega \mathbf{i}) = m r^2 \omega \mathbf{k} \dots\dots\dots(4.1)$$

De la conservación del momento (verificación):

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{r}}) = (\dot{\mathbf{r}} \times m \dot{\mathbf{r}}) + (\mathbf{r} \times m \ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times m \mathbf{a}$$

$$\dot{\mathbf{h}} = r \mathbf{j} \times m (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t) \quad \text{pero } \mathbf{a}_t = 0 \text{ porque } \alpha = 0 \text{ si } \omega = \text{cte}$$

$$\dot{\mathbf{h}} = r \mathbf{j} \times m (-r\omega^2 \mathbf{j}) = 0$$

Entonces,  $\mathbf{h} = \text{cte}$  (se conserva). Luego de la figura 4.4 se tiene que

$$\mathbf{h} = m a^2 \dot{\phi} \mathbf{k} \dots\dots\dots(4.2)$$

De las ecs. (4.1) y (4.2) se deduce que:

$$r^2 \omega = a^2 \dot{\phi}$$

entonces  $\dot{\phi} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \omega$  donde  $\dot{\phi} > \omega$

$\omega$  y  $\dot{\phi}$  = vel. angular de la base giratoria  
 $r$  y  $a$  = distancia del eje de giro a la masa



4.2.2 Análisis de los momentos dinámicos (efectos giroscópicos). Ejemplo 1.

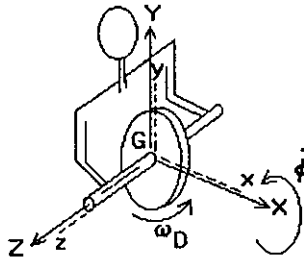


fig. 4.5

Momentos Dinámicos, fig. 4.5:

$$\mathbf{H}_G = \bar{I} \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ \omega_D \end{bmatrix} = I_x \dot{\phi} \mathbf{i} + I_z \omega_D \mathbf{k}$$

La derivada de  $\mathbf{H}_G$  es:  $\dot{\mathbf{H}}_G = \left( \frac{\partial \mathbf{H}_G}{\partial t} \right)_{\text{sis}}$  +  $\boldsymbol{\Omega}_s \times \mathbf{H}_G$

$$\dot{\mathbf{H}}_G = 0 + \boldsymbol{\Omega}_s \times \mathbf{H}_G \quad \text{donde } \omega_D = \text{cte}, \dot{\phi} = \text{cte} \text{ y } \boldsymbol{\Omega}_s = \dot{\phi} \mathbf{i}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \dot{\phi} \mathbf{i} \times \mathbf{H}_G = \dot{\phi} \mathbf{i} \times (I_x \dot{\phi} \mathbf{i} + I_z \omega_D \mathbf{k}) = -I_z \dot{\phi} \omega_D \mathbf{j}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_G = -I_z \dot{\phi} \omega_D \mathbf{j}$$

donde:

$\dot{\mathbf{H}}_G$  = derivada de la cantidad de movimiento angular  $\mathbf{H}_G$

$I_z$  = momento de inercia centroidal de la rueda con respecto al eje z

$\omega_D$  = velocidad angular de la rueda giratoria

$\dot{\phi}$  = velocidad angular del sistema giratorio auxiliar alrededor de x

Así, se observa que los vectores  $\omega_D \mathbf{k}$ ,  $\dot{\phi} \mathbf{i}$  y  $\dot{\mathbf{H}}_G \mathbf{j}$  son mutuamente perpendiculares.

El efecto dinámico que se presenta, fig. 4.5, es un momento de reacción  $\dot{\mathbf{H}}_G$  sobre los brazos que sostienen la rueda. Esto se puede comprobar repitiendo el efecto de giro, colocándonos sobre una base giratoria, en donde la reacción dinámica ejercerá un movimiento de giro sobre la base giratoria, en la dirección del vector  $\mathbf{j}$ , en el eje  $y$ .

**Efectos giroscópicos. Ejemplo 2.**

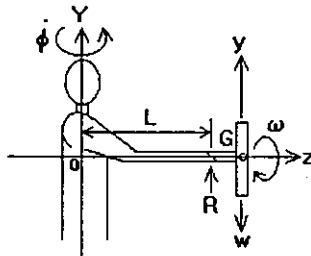


fig. 4.6

De un análisis de momentos, fig. 4.6:

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{H}}_G \dots\dots\dots (4.3) \quad \text{cuando } \dot{\phi} = \text{cte}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{r}_G \times m \mathbf{a}_G + \dot{\mathbf{H}}_G$$

$$\dot{\mathbf{H}}_O = L \mathbf{k} \times m (L \dot{\phi}^2 (-\mathbf{k})) + \dot{\mathbf{H}}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \dots\dots\dots (4.4) \quad (\text{verificación de la hipótesis})$$

Sustituyendo los momentos y (4.4) en la ec. (4.3):

$$(w - R)L = \dot{\mathbf{H}}_G$$

Entonces la reacción de soporte de nuestra mano, ver fig. 4.6, es:

$$R = w \pm \frac{\dot{\mathbf{H}}_G}{L}$$

- R = reacción resultante soportada por las manos
- w = peso de la rueda rotatoria
- L = distancia del eje vertical de giro Y al punto de apoyo de la mano (puede considerarse en G)

donde el signo de la ecuación dependerá del signo del vector  $\dot{\mathbf{H}}_G$ .

#### 4.2.3 Equipo y material utilizado.

- Base rotatoria
- Banco rotatorio
- 2 masas
- Rueda giratoria de plomo
- Rueda giratoria de hule

#### CONCLUSIONES.

Por medio de la observación de experimentos muy sencillos pudimos apreciar un caso de la Conservación del Momentum Angular de un sistema de partículas, que tiene aplicación práctica en el patinaje artístico, durante las evoluciones de giros alrededor de un eje vertical.

Por otro lado, el analizar y sentir los efectos dinámicos (giroscópicos) es de capital importancia en el diseño de elementos mecánicos que tienen varios movimientos de giro; pues si se desconocieran dichos efectos dinámicos en el sistema mecánico, se podrían producir daños en la estructura de soporte de los elementos rotatorios.

## 5. MOMENTOS DINAMICOS (2ª Parte).

### OBJETIVOS:

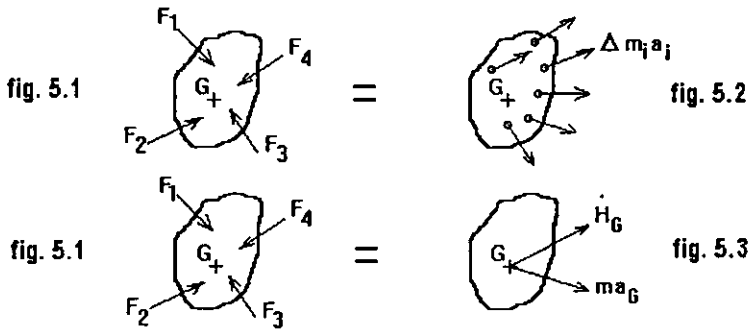
- 1) Identificar algunos efectos que generan los momentos dinámicos en un dispositivo indicador de giro.
- 2) Obtener un modelo matemático que relacione las características de diseño del dispositivo indicador de giro con las velocidades angulares de los dos ejes de giro.

### 5.1 INTRODUCCION TEORICA.

#### 5.1.1 Cinética del cuerpo rígido en tres dimensiones.

Sea un sistema de fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido, fig. 5.1, para el cual se tiene un sistema de fuerzas inerciales asociadas con las partículas que forman el cuerpo rígido, fig. 5.2. Así, se puede establecer, por el Principio de D'Alembert, que los dos sistemas son equipolentes y también equivalentes a un sistema fuerza par situado en el centro de masa G.

Entonces, si las fuerzas inerciales se sustituyen por un sistema fuerza par equivalente, el sistema de fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido en movimiento tridimensional es equivalente al sistema formado por el vector  $ma_G$  unido al centro de masa G del cuerpo y el par de momento  $\dot{H}_G$ , fig. 5.3.



Las ecuaciones generales del movimiento tridimensional de un cuerpo rígido son:

$$\Sigma F = ma_G \quad \Sigma M_G = \dot{H}_G \quad \text{ó} \quad \Sigma M_O = \dot{H}_O$$

Por otro lado, seguiremos observando y analizando el movimiento giroscópico en sistemas mecánicos que realizan varios movimientos de giro, así como el efecto dinámico que se produce y que en la práctica puede ser aplicado para el funcionamiento de un Dispositivo Indicador de Giro que se utiliza en las aeronaves, el cual se verá a continuación.

## 5.2 DESARROLLO TEORICO.

### 5.2.1 Análisis dinámico de un dispositivo indicador de giro utilizado en aeronaves.

Un dispositivo indicador de giro sirve para determinar con exactitud el radio de curvatura  $R$ , que deberá tomar el avión durante un movimiento en trayectoria curva, al virar el avión hacia otra dirección, fig. 5.5. Esto se logra con base en el análisis del giro circular del disco del indicador a una velocidad angular  $\omega_D$ , fig. 5.4.

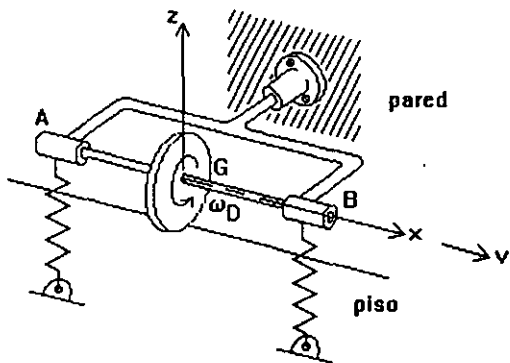


fig. 5.4

$$v = R\Omega = \text{cte}$$

$$\omega_D = f(R) = f(\Omega)$$

$R$  = radio de curvatura

$\Omega$  = vel. angular del avión

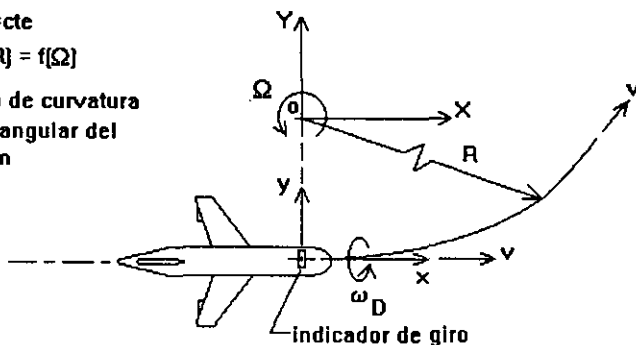


fig. 5.5

Determinación de la magnitud de la velocidad angular  $\omega_D = f(\Omega)$  del disco del indicador de giro, fig. 5.4.

$$\mathbf{H}_G = \bar{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega + \omega_D = \Omega \mathbf{k} + \omega_D \mathbf{i}$$

donde:  $\Omega$  = vel. angular del avión  
 $\omega_D$  = vel. angular del disco

$$\mathbf{H}_G = \begin{bmatrix} \bar{I}_x & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_D \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_x \omega_D \mathbf{i} + \bar{I}_z \Omega \mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \left( \frac{\partial \mathbf{H}_G}{\partial t} \right)_{\text{sis}} + \Omega_{\text{sis}} \times \mathbf{H}_G = 0 + \Omega \times \mathbf{H}_G = \Omega \mathbf{k} \times (\bar{I}_x \omega_D \mathbf{i} + \bar{I}_z \Omega \mathbf{k})$$

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I}_x \omega_D \Omega \mathbf{j} \dots \dots \dots (5.1)$$

Luego, se suman los momentos con respecto al centro de masa G de las fuerzas que ejercen los resortes sobre el eje giratorio. Además, se observa que durante el movimiento de giro del avión se verifica un desplazamiento angular del eje del disco con respecto al plano horizontal. Una vista frontal del dispositivo se muestra en la siguiente figura 5.6.

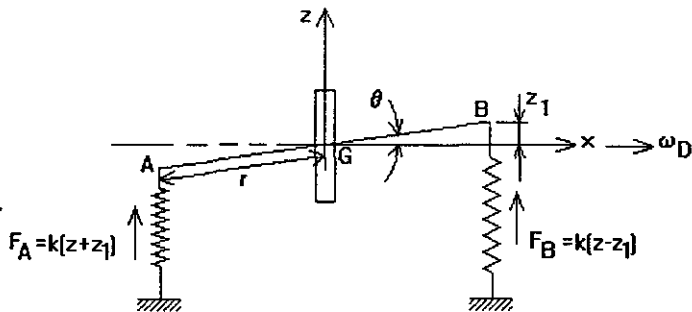


fig. 5.6

NOTA: Podemos considerar en el análisis dinámico que los resortes están inicialmente comprimidos una deformación z.

**Ecuación de momentos:** Considerando un valor de  $\theta$  pequeño, es decir,  $\theta \leq 10^\circ$ , entonces  $\cos\theta \rightarrow 1$

$$\Sigma M_G = k(z + z_1)r j - k(z - z_1)r j = (kzr + kz_1 r - kzr + kz_1 r) j$$

$$\Sigma M_G = 2 k z_1 r j \dots\dots\dots (5.2)$$

$k$ =constante del resorte

Igualando las ecuaciones (5.1) y (5.2):  $\Sigma M_G = \dot{H}_G$

$r$ =distancia del resorte al centro de momentos  $G$

$$2 k z_1 r = \bar{I}_x \omega_D \Omega$$

$z_1$ =distancia de desplazamiento del resorte

$$\omega_D \Omega = 2 k z_1 r / \bar{I}_x \dots\dots\dots (5.3)$$

Esta expresión nos relaciona las velocidades angulares  $\omega_D$  y  $\Omega$  con las características del dispositivo indicador de giro.

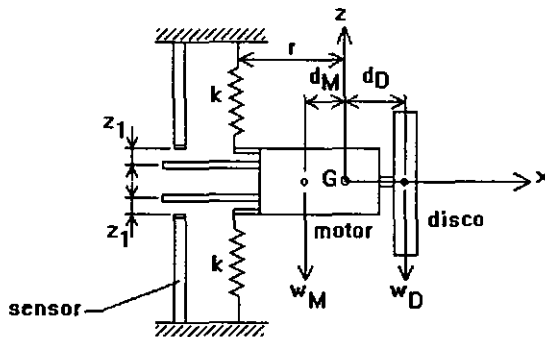
### 5.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL.

#### 5.3.1 Simulador de indicador de giro del laboratorio.

El funcionamiento del dispositivo simulador de giro se basa en el indicador de giro utilizado en aeronaves analizado anteriormente. En este caso, el giro introducido en el eje Z está simulando el movimiento de giro horizontal del avión; el giro del disco lo proporciona un pequeño motor acoplado al mismo. Por otro lado, un sistema de luces indicadoras se encienden por el accionamiento de un par de sensores de contacto, durante el movimiento de giro, de tal manera que en ese momento se realizarán las mediciones pertinentes para conocer las características de diseño del simulador de giro, ver figura 5.7.

Constantes de diseño:  $k, r, \bar{I}_x$  (dado con  $m_D, r_D, m_M, r_M$ ),  $z_1, d_D$  y  $d_M$ .

Velocidades del simulador:  $\Omega$  y  $\omega_D$  (se consideran constantes durante la prueba).



$d_M = 1.7 \text{ cm}$   
 $d_D = 1.9 \text{ cm}$

fig. 5.7

### 5.3.2 Verificación de las especificaciones de diseño y análisis del modelo matemático que rige el movimiento del simulador del indicador de giro.

1) Constante k de los resortes.

$$x_0 = 3.7 \text{ cm} = 0.037 \text{ m} \quad x_f = 5.3 \text{ cm} = 0.053 \text{ m}$$
$$F = 22 \text{ N}$$

como  $F = k(\Delta x) = k(x_f - x_0)$ , entonces

$$k = F/\Delta x = 22 / (0.053 - 0.037) = 1375 \text{ N/m}$$

2) Datos de disco y motor.

$$\text{Disco: Peso: } W_D = 4.165 \text{ N}$$
$$\text{Radio: } r_D = 3 \text{ cm}$$

$$\text{Motor: Peso: } W_M = 0.833 \text{ N}$$
$$\text{Radio: } r_M = 2 \text{ cm}$$

3) Distancia r de los resortes al centro de momentos G del sistema.

$$r = 6.5 \text{ cm} = 0.065 \text{ m}$$

4) Distancia  $z_1$  de desplazamiento del resorte durante el movimiento del simulador de giro.

$$z_1 = 0.4 \text{ cm} = 0.004 \text{ m}$$

5) Momentos centroidales de inercia.

Tanto el disco como el motor son dos masas en forma de cilindro circular recto, donde  $\bar{I}_x = \frac{1}{2} m r^2$  y el momento de inercia total será:

$$\bar{I}_x = \frac{1}{2} m_D r_D^2 + \frac{1}{2} m_M r_M^2 = \frac{1}{2} (m_D r_D^2 + m_M r_M^2)$$

Sustituyendo valores:

$$\bar{I}_x = \frac{1}{2} [0.425(0.03)^2 + 0.085(0.02)^2] = 208.25 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

6) Ecuación de momentos para el simulador de giro.

$$\Sigma M_G = 2 k z_1 r j + (W_D d_D - W_M d_M) j$$

$$\text{pero } \Sigma M_G = \dot{H}_G = \bar{I}_x \omega_D \Omega j$$



Por lo tanto se obtiene la siguiente expresión:

$$\omega_D \Omega = [2 k z_1 r + (W_D d_D - W_M d_M)] / \bar{I}_x \dots\dots\dots (5.4)$$

sustituyendo datos en (4):

$$\omega_D \Omega = [2(1375)(0.004)(0.065) + 4.165(0.019) - 0.833(0.017)] / 208.25 \times 10^{-6}$$



### 7) Resultados experimentales y porcentaje de error.

Se miden las velocidades angulares del simulador en funcionamiento con un tacómetro:

$$\Omega = 120 \text{ rpm}$$

$$\omega_D = 2850 \text{ rpm}$$

$$\Rightarrow \omega_D \Omega = 120(2850) / 9.549^2 = 3750.7 \text{ s}^{-2}$$



$$\% \varepsilon (\omega_D \Omega) = |(3745.4 - 3750.7) / 3745.4| \times 100 = 0.14 \%$$

### 5.3.3 Equipo y material utilizado.

- Simulador de un dispositivo indicador de giro
- Dinamómetro
- 2 pesas de 11 N
- Vernier
- Tacómetro
- Flexómetro

## CONCLUSIONES.

Con base en un análisis simplificado del vuelo de un avión durante una trayectoria curva, al momento de virar en un cambio de la dirección del vuelo, es posible comprender la utilidad que tiene un dispositivo giroscópico como el indicador de giro, que funcionando como un sistema auxiliar, permite determinar y controlar el radio de curvatura que deberá seguir el avión en un momento particular del vuelo.

La anterior es una de diversas aplicaciones del movimiento giroscópico como instrumento de navegación. Otra aplicación es un dispositivo que funcione como un sistema de referencia móvil que indique el nivel horizontal en la navegación, esto es que funcione como un horizonte artificial.

## 6. PRECESION DE UN GIROSCOPIO.

### OBJETIVOS:

- 1) Determinar una ecuación que relacione la velocidad de precesión  $\dot{\phi}$  de un giroscopio, con la velocidad de rotación  $\dot{\psi}$ .
- 2) Obtener el momento de inercia  $I$  de un giroscopio, y compararlo con el valor obtenido por medio de la pendiente de la gráfica  $\dot{\phi} \dot{\psi} = F(d)$ .

### 6.1 INTRODUCCION TEORICA.

En este capítulo se analizará el movimiento giroscópico y, en particular, de un giroscopio o giro. Lo importante será ver el papel que juegan cada una de las velocidades de giro en el movimiento del giroscopio, es decir, saber si son directa o inversamente proporcionales una con respecto a la otra; para esto analizaremos el caso de la precesión de un giroscopio, fig.6.1.

La precesión de un giroscopio es un caso particular del movimiento giroscópico en el que el ángulo  $\alpha$ , la velocidad de precesión  $\dot{\phi}$  y la velocidad de rotación permanecen constantes.

Sea un giroscopio apoyado en un punto fijo de su eje en torno al cual se produce el movimiento giroscópico. El movimiento de un giroscopio bajo la influencia de fuerzas externas lleva a la precesión uniforme del giroscopio. Si se efectúa un momento de giro sobre el eje del giroscopio, el eje no sigue este momento, sino que lo evade en ángulo recto.

Dentro del análisis del movimiento giroscópico es interesante conocer la relación que tienen las velocidades angulares del giroscopio, como la de precesión y la de rotación, con una característica física importante en la dinámica del movimiento giroscópico, el momento de inercia  $I$  del giroscopio con respecto a su eje de simetría. Luego, para poder determinar el valor del momento de inercia  $I$ , se requiere de obtener el valor de la pendiente de la gráfica que relaciona el producto de las dos velocidades de giro con la distancia  $d$  que va del centro de masa al centro instantáneo de rotación, es decir, para la función  $\dot{\phi} \dot{\psi} = F(d)$ . Entonces se deberán realizar mediciones simultáneas de  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\psi}$  y  $d$  y, por último, ajustar la gráfica por cualquier método conocido.

## 6.2 DESARROLLO TEORICO.

### 6.2.1 Análisis dinámico del giroscopio.

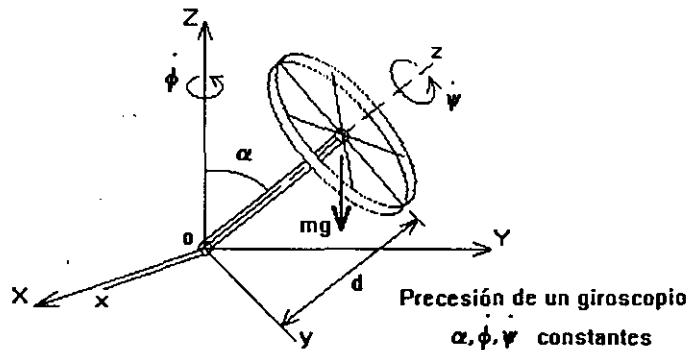


fig. 6.1

La velocidad angular  $\omega$  del giroscopio es:  $\omega = \dot{\phi} + \dot{\psi}$

pero  $\dot{\phi} = \dot{\phi} \cos \alpha \mathbf{k} - \dot{\phi} \sin \alpha \mathbf{j}$  entonces se tendrá que

$$\omega = -\dot{\phi} \sin \alpha \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad \text{donde} \quad \omega_z = (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \alpha) \mathbf{k}$$

La cantidad de movimiento angular  $\mathbf{H}_O$  es:

$$\mathbf{H}_O = I_O \omega = \begin{bmatrix} \Gamma' & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma' & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\phi} \sin \alpha \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

donde  $\Gamma'$  = momento de inercia respecto de un eje transversal que pasa por o.

$I$  = momento de inercia respecto de un eje de simetría que pasa por o.

$$\mathbf{H}_O = -\Gamma' \dot{\phi} \sin \alpha \mathbf{j} + I \omega_z \mathbf{k}$$

$$\text{Luego} \quad \dot{\mathbf{H}}_O = \left( \frac{\partial \mathbf{H}_O}{\partial t} \right)_{\text{sis}} + \boldsymbol{\Omega}_{\text{sis}} \times \mathbf{H}_O$$

Considerando que el sistema giratorio gira a una velocidad de  $\Omega_{\text{sis}} = \dot{\phi}$  y, además  $\dot{\phi}$  y  $\omega_z$  son constantes en magnitud y dirección con respecto al sistema giratorio oxyz:

De la ecuación de momentos:  $\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\phi} \times \mathbf{H}_O$

$$\dot{\mathbf{H}}_O = (\dot{\phi} \cos \alpha \mathbf{k} - \dot{\phi} \sin \alpha \mathbf{j}) \times (-I' \dot{\phi} \sin \alpha \mathbf{j} + I \omega_z \mathbf{k})$$

$$\dot{\mathbf{H}}_O = -(I \omega_z - I' \dot{\phi} \cos \alpha) \dot{\phi} \sin \alpha \mathbf{i} \dots\dots\dots (6.1)$$

De la suma de momentos de las fuerzas externas que actúan sobre el giroscopio, tenemos que

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{d} \times m \mathbf{g} = -mg d \sin \alpha \mathbf{i} \dots\dots\dots (6.2)$$

De (6.1) y (6.2):

$$mg d = \dot{\phi} (I \omega_z - I' \dot{\phi} \cos \alpha) \dots\dots\dots (6.3)$$

Si consideramos un giroscopio veloz, donde  $\dot{\phi} \ll \dot{\psi}$ , entonces  $\omega_z \approx \dot{\psi}$  por lo tanto de la ec. (6.3) se tendrá:

$$mg d = I \dot{\phi} \dot{\psi} \dots\dots\dots (6.4)$$

De (6.4) se pueden considerar dos relaciones interesantes para su análisis, las cuales son:

$$\dot{\phi} = \left( \frac{mgd}{I} \right) \frac{1}{\dot{\psi}}, \text{ es decir, } \dot{\phi} = f \left( \frac{1}{\dot{\psi}} \right) \dots\dots\dots (6.5)$$

$$\dot{\phi} \dot{\psi} = \left( \frac{mg}{I} \right) d, \text{ es decir, } \dot{\phi} \dot{\psi} = F(d) \dots\dots\dots (6.6)$$

donde:

- I = momento de inercia del giroscopio respecto del eje de simetría que pasa por o
- mg = peso del giroscopio
- d = distancia del origen o al centro de masa del giroscopio
- $\dot{\psi}$  = velocidad de rotación del giroscopio
- $\dot{\phi}$  = velocidad de precesión del giroscopio

## 6.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL.

**6.3.1 Obtener la gráfica del giroscopio  $\dot{\phi} = f\left(\frac{1}{\dot{\psi}}\right)$  para cualquier valor determinado de la distancia  $d$ , ya sea esta positiva o negativa.**

Sabemos que para una posición cualquiera del centro de gravedad  $G$  del giroscopio, la distancia  $d$ , medida del origen del sistema móvil al centro de gravedad  $G$ , está dada por:  $d = S_0 - S$  donde  $S_0 = 4$  cm. Dicha distancia  $d$  se mide desde la marca en la parte extrema superior del eje hasta la cara superior del collarín de ajuste del eje; en tanto que  $S$  se mide desde la parte más extrema superior del eje al mismo punto del collarín ya indicado.

Para una distancia  $d$  (+), cuando  $S < S_0$ , el sentido de giro de  $\dot{\phi}$  es el mismo que el de  $\dot{\psi}$ , fig. 6.1.

Para una distancia  $d$  (-), cuando  $S > S_0$ , el sentido de giro de  $\dot{\phi}$  cambia con respecto al sentido de giro de  $\dot{\psi}$ .

a) Medición de la velocidad de rotación  $\dot{\psi}$  con la barrera de luz.

Seleccionar en el contador p la escala de frecuencia en Hz y realizar una medición de frecuencia de valor  $N$ ; entonces la velocidad será:

$\dot{\psi} = 2\pi f = 2\pi (N/18)$  rad/s donde  $\dot{\psi} \leq 3$  Hz ( $N \leq 50$ ) y 18 es el número de rayos de la rueda del giro.

b) Medición de la velocidad de precesión  $\dot{\phi}$  con la barrera de luz.

Seleccionar en el contador digital la escala de tiempo en segundos. Luego, considerando un movimiento de precesión uniforme, la velocidad de precesión será:

$$\dot{\phi} = \Delta\phi / T = 2\pi / T \text{ rad/s}$$

c) Tablas de valores experimentales.

EJEMPLO 1.- Con  $S = 3 \text{ cm}$   $d = S_0 - S = 4 - 3 = 1 \text{ cm (+)}$

N(Hz)	T(s)	$1/\psi$ (s)	$\phi$ (s)
29	22.78	0.099	0.276
27	20.99	0.106	0.299
25	19.01	0.114	0.330
23	17.58	0.124	0.357
21	15.65	0.136	0.401
20	14.28	0.143	0.440
18	13.71	0.159	0.458

Al aplicar la regresión lineal se obtiene la ecuación de la recta:  $\dot{\phi} = 3.22 (1/\dot{\psi}) - 0.04$

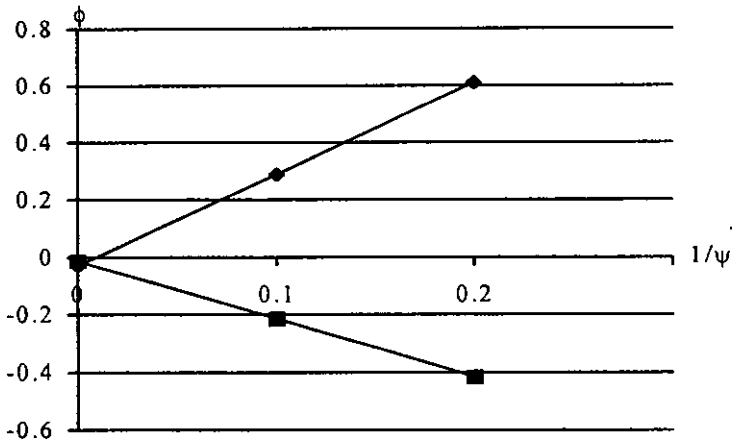
EJEMPLO 2.- Con  $S = 5 \text{ cm}$   $d = S_0 - S = 4 - 5 = -1 \text{ cm (-)}$

N(Hz)	T(s)	$1/\psi$ (s)	$\phi$ (s)
22	22.32	0.130	-0.281
20	20.40	0.143	-0.308
18	18.91	0.159	-0.332
17	17.81	0.168	-0.353
16	16.86	0.179	-0.373
15	15.31	0.191	-0.410

Para este caso, la ecuación que se obtiene es:  $\dot{\phi} = -2.03 (1/\dot{\psi}) - 0.01$

NOTA: Para la realización de las tablas de valores y las gráficas del movimiento se utilizó un giroscopio como el mostrado en la figura 6.1.

GRAFICAS DE LOS EJEMPLOS 1 Y 2.



6.3.2 Obtener la gráfica del giroscopio dada por  $\dot{\phi} \dot{\psi} = F(d)$ .

EJEMPLO 3.- Para esta gráfica las distancias  $d$  deben ser positivas ( $S < S_0$ ), fig. 6.1, y también negativas ( $S > S_0$ ).

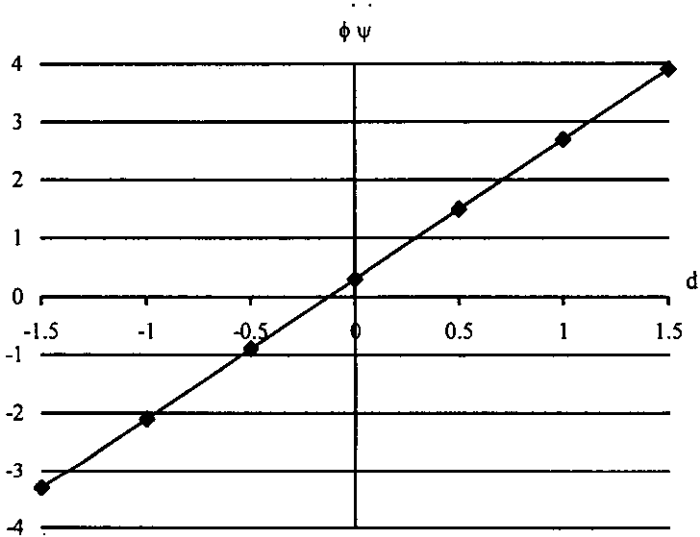
Considerando para este ejemplo que  $S_0 = 4 \text{ cm}$ , la tabla de valores es:

valores de $S < S_0$				
S(cm)	N(Hz)	T(s)	d(cm)	$\dot{\phi} \dot{\psi} (s^{-2})$
3.8	15	51.25	0.2	0.642
3.5	16	29.11	0.5	1.205
3.0	19	14.86	1.0	2.800
2.5	20	10.78	1.5	4.070
valores de $S > S_0$				
S(cm)	N(Hz)	T(s)	d(cm)	$\dot{\phi} \dot{\psi} (s^{-2})$
4.5	15	27.55	-0.5	-1.194
5.0	21	20.20	-1.0	-2.280
5.3	19	15.99	-1.3	-2.606
5.5	19	12.74	-1.5	-3.271

Después de realizar el ajuste de la gráfica mediante la regresión lineal, la ecuación de la recta es:  $\dot{\phi} \dot{\psi} = (2.415) d + 0.253$



GRAFICA DEL EJEMPLO 3.



6.3.3 Obtención del momento de inercia del giroscopio por el método del péndulo compuesto y su verificación con el valor obtenido con la pendiente de la gráfica de  $\dot{\phi} \dot{\psi} = F(d)$ .

a) Método del Péndulo Compuesto (visto en la práctica de momentos de inercia).

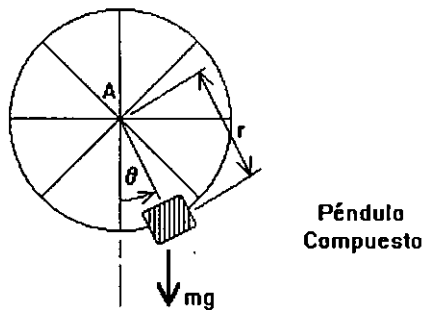


fig. 6.3

Después de realizar un análisis dinámico similar al desarrollado en el Método del Péndulo Compuesto, ver fig. 6.3, la expresión que nos permite determinar el momento de inercia centroidal  $I$  de un giroscopio, con respecto a su eje de simetría es:

$$I = \left( \frac{g \tau^2}{4 \pi^2} - r \right) m \quad (\text{kg m}^2) \dots\dots\dots (6.7)$$

Para la medición, se sujeta una masa adicional  $m = 200 \text{ gr}$  en un punto de la periferia de la rueda del giroscopio, y se mide la distancia  $r$  de la masa adicional al eje de giro, así como la duración del periodo de la oscilación  $\tau$  del péndulo, con el contador digital en la escala de tiempo en segundos y la barrera de luz, fig. 6.3.

**MEDICIONES:**

- $m = 200 \text{ gr} = 0.2 \text{ kg}$  (son dos masitas de 100 gr c/u)
- $\tau = 3.40 \text{ s}$
- $r = 23.6 \text{ cm} = 0.236 \text{ m}$
- medidos para valores de  $\theta \leq 10^\circ$

Sustituyendo los valores en la ecuación (6.7), el momento de inercia  $I$  del giroscopio es:

$$I = 0.124 \text{ kg m}^2$$

b) Verificación del momento de inercia  $I$  mediante la pendiente de la gráfica de  $\dot{\phi} \dot{\psi} = F(d)$ .

De la recta ajustada obtenida:  $\dot{\phi} \dot{\psi} = (2.415) d + 0.253$ , la pendiente es:

$$\frac{\Delta(\dot{\phi} \dot{\psi})}{\Delta d} = 241.5 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

De la ec. (6.6) se tiene que  $\frac{\Delta(\dot{\phi} \dot{\psi})}{\Delta d} = \frac{mg}{I}$

Por lo tanto,

$$I = \frac{m_G g}{\frac{\Delta(\dot{\phi} \dot{\psi})}{\Delta d}} \quad \text{donde } m_G = \text{masa del giroscopio} \dots\dots\dots (6.8)$$

Entonces, para el momento centroidal de inercia  $I$  con respecto al eje del giroscopio, se tiene, de (6.8):

Para una masa  $m_G = 3 \text{ kg}$

$$I = \frac{3(9.8)}{241}$$

$$I = 0.122 \text{ kg.m}^2$$

De los valores obtenidos para el momento de inercia  $I$ , el porcentaje de error es:

$$\% \varepsilon_1 = \left| \frac{0.124 - 0.122}{0.124} \right| = 1.6 \%$$

#### **6.3.4 Equipo y material utilizado.**

- Giroscopio de 3 Kg
- Frecuencímetro (contador p)
- Cronómetro digital (contador digital)
- Transformador de 12 V de c. a.
- 2 caimanes
- Vernier
- Péndulo compuesto con base
- Masa adicional (2 masas de 100 gr)
- Flexómetro
- Báscula

#### **CONCLUSIONES.**

Después de haber observado el movimiento de un giroscopio a través de la experimentación, se pudo comprobar que su movimiento depende de la existencia de dos velocidades de giro, la velocidad de precesión y la velocidad de rotación; analizándose también el caso en que solamente exista la velocidad de rotación, lo que sucede cuando el centro instantáneo de rotación coincide con el centro de masa del giroscopio en su movimiento espacial. En este último caso, podemos darnos cuenta de que dicho movimiento giroscópico conlleva la aparición de un gran momento de giro, que mantiene fijo en una sola dirección el eje del giroscopio, es decir, se produce un efecto estabilizador, que para moverlo de esa dirección se requeriría de aplicar un par mayor del que lo ubica en dicha posición y dirección en el espacio.

Esta cualidad estabilizadora del giroscopio permite su utilización en varias aplicaciones como: Brújula giroscópica, horizonte artificial, indicador de giro, estabilizador de proyectiles y como sistema estabilizador en barcos.

## 7. APLICACION DEL PRINCIPIO DE LA CONSERVACION DE LA ENERGIA AL MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL DE UN CUERPO RIGIDO.

### OBJETIVOS:

- 1) Determinar la ecuación del movimiento para el sistema de masa giratoria por el método de la energía.
- 2) Obtener los valores de la velocidad angular  $\Omega$  para diferentes posiciones angulares  $\theta$  del sistema giratorio, incluyendo el valor para  $\theta = 0$ , donde  $\Omega = \Omega_{\text{máx}}$  para la posición vertical. Comparar los valores medidos con los valores obtenidos con la expresión teórica.

### 7.1 INTRODUCCION TEORICA.

La aplicación del principio del trabajo y la energía simplifica mucho la solución de problemas dinámicos que relacionan fuerzas, desplazamientos y velocidades. Entre las ventajas del método se tiene que la determinación de la aceleración no es necesaria, además de que todas las magnitudes que intervienen son escalares, considerando que en ocasiones se requiere determinar la velocidad para, posteriormente, sólo utilizar el valor del módulo o magnitud  $v$ , en el caso de problemas espaciales. También las fuerzas que no realizan trabajo se eliminan de la solución.

Al aplicar el método de la energía a sistemas mecánicos conservativos es posible determinar el modelo matemático del sistema en cuestión, y así generalizar el movimiento para poder estudiarlo en cualquier instante o para una determinada posición del sistema en estado estable.

#### 7.1.1 Método de la energía para obtener las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido.

Este método se fundamenta en la Ley de la Conservación de la Energía para el cuerpo rígido. Esta dice así:

“Cuando un cuerpo rígido o un sistema de cuerpos rígidos se mueven bajo la acción de fuerzas conservativas, la suma de la energía cinética y la energía potencial del sistema permanece constante”.

En el caso de los sistemas mecánicos, se llaman sistemas conservativos aquéllos que carecen de fricción, la cual disipa la energía en forma de calor.

Considérese un sistema conservativo en el cual la energía esté en la forma de energía cinética y/o potencial. Las ecuaciones de conservación para la energía mecánica son:

Sea  $EM = T + V$  la energía mecánica, donde  $T$  es la energía cinética y  $V$  la energía potencial. Entonces tendremos que

$$T + V = \text{cte} \quad \dots\dots\dots (7.1)$$

$$\frac{d(T + V)}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (7.2)$$

**7.1.2 Energía Potencial y Energía Cinética de un cuerpo rígido o de un sistema de cuerpos rígidos en movimiento espacial.**

**Energía Potencial.-** Es la energía que posee un cuerpo en razón de su posición. Se mide siempre con referencia a un nivel dado (nivel de energía potencial nula o n.e.p.n.) y es relativa respecto a este nivel. Se define por la ecuación:

$$V = m g y_G \quad \text{donde } y_G \text{ es relativa al n.e.p.n.}$$

**Energía Cinética.-** Es la energía que tiene un cuerpo rígido debido a su velocidad, ya sea ésta angular, lineal o ambas.

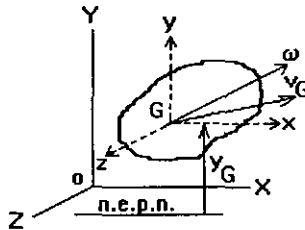


fig. 7.1

Para un cuerpo rígido en movimiento tridimensional la energía cinética del cuerpo, relativa a los ejes centroidales  $Gxyz$ , está dada por

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} (\bar{I}_x \omega_x^2 + \bar{I}_y \omega_y^2 + \bar{I}_z \omega_z^2 - 2 \bar{I}_{xy} \omega_x \omega_y - 2 \bar{I}_{yz} \omega_y \omega_z - 2 \bar{I}_{zx} \omega_z \omega_x)$$

$$T = E. C. \text{ debida al movimiento lineal} + E.C. \text{ debida a la rotación}$$

Si los ejes centroidales son también ejes principales de inercia del cuerpo, de la fig. 7.1, la energía cinética se reduce a

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} (\bar{I}_x \omega_x^2 + \bar{I}_y \omega_y^2 + \bar{I}_z \omega_z^2)$$

donde  $v_G$  = velocidad lineal del centro de masa del cuerpo rígido

$\omega$  = velocidad angular del cuerpo rígido

$m$  = masa del cuerpo rígido

$\bar{I}_x, \bar{I}_y, \bar{I}_z$  = momentos de inercia centroidales principales

En particular, para el caso del movimiento plano, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$$

## 7.2 DESARROLLO TEORICO.

### 7.2.1 Análisis del sistema de masa giratoria por el Método de la Energía.

#### EJEMPLO 1.- Sistema de barra y esfera

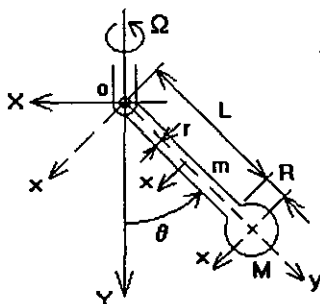


fig. 7.2

1) Energía Potencial:  $V = V_m + V_M$

$$V_m = mg y_{Gm} \quad y_{Gm} = -r_m (1 - \cos\theta)$$

$$V_M = Mg y_{GM} \quad y_{GM} = -r_M (1 - \cos\theta)$$

$$V = -mg r_m (1 - \cos\theta) - Mg r_M (1 - \cos\theta)$$

$$V = -(mg r_m + Mg r_M) (1 - \cos\theta) \dots\dots\dots (E. \text{ potencial del sistema})$$

donde  $r_m = L/2$  y  $r_M = L + R$

2) Energía Cinética:  $T = T_m + T_M$

$$T = \frac{1}{2} m v_{GM}^2 + \frac{1}{2} [\bar{I}_x \omega_x^2 + \bar{I}_y \omega_y^2 + \bar{I}_z \omega_z^2]_m + \frac{1}{2} M v_{GM}^2 + \frac{1}{2} [\bar{I}_x \omega_x^2 + \bar{I}_y \omega_y^2 + \bar{I}_z \omega_z^2]_M \dots\dots\dots (E. \text{ cinética del sistema})$$

donde  $v_{mi} = \omega \times r_{mi}$  y  $\omega = \Omega + \dot{\theta} = (-\Omega \text{ sen}\theta \mathbf{i} - \Omega \text{ cos}\theta \mathbf{j}) + \dot{\theta} \mathbf{k}$

3) A partir de la conservación de la energía:

- Sumar:  $T + V$

- Luego, derivar:  $\frac{d(T+V)}{dt}$

- Después, considerando que en la derivada anterior para  $\theta > 0$  se tiene que:

$\dot{\theta}$  (+) es positivo y  $\ddot{\theta}$  (-) es negativo, entonces se deberá sustituir el término de  $\ddot{\theta}$  por el término de  $(-\ddot{\theta})$ , ya que cuando  $\theta$  crece, el valor de  $\dot{\theta}$  tiende a cero cuando  $\theta$  tiende a  $90^\circ$ .

- Luego de sustituir lo anterior, se iguala a cero la expresión de la derivada resultante:

$$\frac{d(T+V)}{dt} = 0$$

Entonces se obtiene la ecuación del movimiento para el sistema de masa giratoria:

$$(\ddot{\theta} - \Omega^2 \text{ sen}\theta \text{ cos}\theta) [m r_m^2 + M r_M^2 + 1/12 m(3r^2 + L^2)] + \frac{1}{2} m r^2 \Omega^2 \text{ sen}\theta \text{ cos}\theta + 2/5 MR^2 \ddot{\theta} + (mg r_m + Mg r_M) \text{ sen}\theta = 0$$



4) Se realiza un análisis de ecuaciones de estado para hallar  $\Omega = f(\theta)$ :

- Primero, se determinan las posiciones de equilibrio del sistema, haciendo  $\ddot{\theta} = 0$  en la ecuación del movimiento del sistema de masa giratoria. Esto se logra resolviendo la ecuación final cuya solución es:

$$\theta = 0 \text{ para } \Omega = 0 \quad \dots\dots\dots (7.3)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left\{ \frac{mg \frac{L}{2} + Mg(L+R)}{\left[ \frac{1}{12} m(4L^2 - 3r^2) + M(L+R)^2 \right] \Omega^2} \right\}$$

y despejando  $\Omega$  de (7.3), se encuentra la expresión para la función  $\Omega = f(\theta)$ .

**EJEMPLO 2.- Sistema de barra y cilindro**

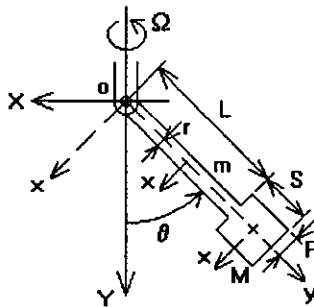


fig. 7.3

Para este ejemplo, la ecuación del movimiento y la expresión de la función  $\Omega = f(\theta)$  se obtienen siguiendo los mismos pasos que en el ejemplo 1. Para este caso, las expresiones serán respectivamente:

$$(\ddot{\theta} - \Omega^2 \text{sen}\theta \text{cos}\theta) [m r_m^2 + M r_M^2 + 1/12 m(3r^2 + L^2) + 1/12 M(3R^2 + S^2)] + 1/2 \Omega^2 \text{sen}\theta \text{cos}\theta (mr^2 + MR^2) + (mg r_m + Mg r_M) \text{sen}\theta = 0$$

La función  $\Omega = f(\theta)$  es:

$$\theta = 0 \text{ para } \Omega = 0 \dots\dots\dots (7.4)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left\{ \frac{mg \frac{L}{2} + Mg(L + \frac{S}{2})}{\left[ \frac{1}{12} m(4L^2 - 3r^2) + \frac{1}{12} M(S^2 + 12 \left[ L + \frac{S}{2} \right]^2 - 3R^2) \right] \Omega^2} \right\}$$

donde  $r_m = L/2$  y  $r_M = L + S/2$

### 7.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL Y COMPROBACION TEORICA.

#### 7.3.1 Determinar las tablas de valores del sistema de masa giratoria.

Para la parte experimental se utilizarán dos dispositivos de medición de velocidad angular en revoluciones por minuto, como el tacómetro y la lámpara estroboscópica; así, se tomarán los valores de las carátulas en rpm para las velocidades y, utilizando una escala graduada en grados se determinará la posición angular de la masa giratoria, con respecto a la vertical que se tiene cuando el sistema no se mueve. Entonces:

- 1) Se determinará el intervalo de valores que puede tomar la velocidad angular  $\Omega$ , hasta llegar a alcanzar un valor máximo  $\Omega_{m\acute{a}x}$  en la posición en la cuál el sistema permanezca vertical o con una inclinación  $\theta \leq 10^\circ$  con la vertical. Para esta medición se utilizará el tacómetro, ya que puede cubrir un amplio rango de velocidades a partir de las 40 rpm.
- 2) Se determinarán diferentes valores de la velocidad angular  $\Omega$ , para varias posiciones angulares  $\theta$  del sistema de masa giratoria, mayores de  $20^\circ$ . Las mediciones se realizarán mediante la lámpara estroboscópica, que puede medir velocidades a partir de las 65 rpm aproximadamente.
- 3) La expresión matemática que se utilizará para realizar los cálculos teóricos es:

EJEMPLO 1.- De (7.3):

$$\Omega = \sqrt{\frac{mg \frac{L}{2} + Mg(L + R)}{\left[ \frac{1}{12} m(4L^2 - 3r^2) + M(L + R)^2 \right] \cos \theta}} = \sqrt{\frac{53.70}{\cos \theta}}$$

Las magnitudes del sistema son:

L = 16.8 cm            m = 207 gr  
 R = 2.5 cm            M = 610 gr  
 r = 0.95 cm

Tabla de valores experimentales y teóricos, fig. 7.2. EJEMPLO 1.

$\theta$ (°)	$\Omega$ exp (rpm)	$\Omega$ teo (rpm)	% $\varepsilon_{\Omega}$
0	68	69.97	2.8
60	97	98.96	2.0
73	133	129.4	2.8

EJEMPLO 2.- De (7.4):

$$\Omega = \sqrt{\frac{mg\frac{L}{2} + Mg(L + \frac{S}{2})}{\left[\frac{1}{12}m(4L^2 - 3r^2) + \frac{1}{12}M(S^2 + 12\left[L + \frac{S}{2}\right]^2 - 3R^2)\right] \cos\theta}} = \sqrt{\frac{94.60}{\cos\theta}}$$

Las magnitudes del sistema son:

L = 11.4 cm            S = 1.8 cm  
 r = 0.95 cm            R = 1.9 cm  
 m = 193.9 gr            M = 132.7 gr

Tabla de valores experimentales y teóricos, fig. 7.3. EJEMPLO 2.

$\theta$ (°)	$\Omega$ exp (rpm)	$\Omega$ teo (rpm)	% $\varepsilon_{\Omega}$
0	90	92.89	3.11
26	98	97.98	0.02
45	110	110.47	0.00

### 7.3.2 Equipo y material utilizado.

- Sistema de masa giratoria: barra y esfera o barra y cilindro
- Lámpara estroboscópica
- Tacómetro
- Aparato de control de velocidad angular (rpm)
- Escala de grados ( $^{\circ}$ )
- Vernier
- Flexómetro
- Báscula
- Llaves allen

### 7.4 DEDUCCION TEORICA DE LA ECUACION DEL MOVIMIENTO DEL SISTEMA DE MASA GIRATORIA (DETALLADA).

Esta sección incluye el desarrollo del análisis dinámico por el método de la energía para obtener el modelo matemático del sistema de masa giratoria. Este desarrollo detallado no debe darse a los alumnos, ya que lo deberán realizar individualmente y lo entregarán en el reporte de la práctica; como ocurre para la mayoría de las deducciones teóricas que se obtienen.

Deducción Teórica.- EJEMPLO 1.

Sea el sistema giratorio de barra y esfera, fig. 7.2.

1) La energía potencial del sistema es:

$$V = - (mg r_m + Mg r_M) (1 - \cos\theta)$$

$$\text{donde } r_m = L/2 \text{ y } r_M = L + R$$

2) La energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2} m v_{GM}^2 + \frac{1}{2} [ \bar{I}_x \omega_x^2 + \bar{I}_y \omega_y^2 + \bar{I}_z \omega_z^2 ]_m + \frac{1}{2} M v_{GM}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} [ \bar{I}_x \omega_x^2 + \bar{I}_y \omega_y^2 + \bar{I}_z \omega_z^2 ]_M$$

$$v_m = \omega \times r_m = (-\Omega \operatorname{sen}\theta \mathbf{i} - \Omega \operatorname{cos}\theta \mathbf{j} + \dot{\theta} \mathbf{k}) \times (r_m \mathbf{j}) = -\dot{\theta} r_m \mathbf{i} - \Omega r_m \operatorname{sen}\theta \mathbf{k}$$

$$v_m^2 = r_m^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta)$$

$$\mathbf{v}_M = \omega \times \mathbf{r}_M = -\dot{\theta} r_M \mathbf{i} - \Omega r_M \sin\theta \mathbf{k}$$

$$v_M^2 = r_M^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta)$$

$$\omega = -\Omega \sin\theta \mathbf{i} - \Omega \cos\theta \mathbf{j} + \dot{\theta} \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m r_m^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} M r_M^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + \\ & + \frac{1}{2} [1/12 m(3r^2 + L^2) \Omega^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} m r^2 \Omega^2 \cos^2 \theta + 1/12 m(3r^2 + L^2) \dot{\theta}^2] + \\ & + \frac{1}{2} (2/5 MR^2) [\Omega^2 \sin^2 \theta + \Omega^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2] \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) [m r_m^2 + M r_M^2 + 1/12 m(3r^2 + L^2)] + \frac{1}{4} m r^2 \Omega^2 \cos^2 \theta + \\ & + 1/5 MR^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2) \end{aligned}$$

De la conservación de la energía:

$$\begin{aligned} T + V = & \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) [m r_m^2 + M r_M^2 + 1/12 m(3r^2 + L^2)] + \frac{1}{4} m r^2 \Omega^2 \cos^2 \theta + \\ & + 1/5 MR^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2) - (mg r_m + Mg r_M) (1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

Derivando la suma de las energías:

$$\begin{aligned} \frac{d(T+V)}{dt} = & (\dot{\theta} \ddot{\theta} + \Omega^2 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta) [m r_m^2 + M r_M^2 + 1/12 m(3r^2 + L^2)] - \\ & - \frac{1}{2} m r^2 \Omega^2 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta + 2/5 MR^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - (mg r_m + Mg r_M) \dot{\theta} \sin\theta \end{aligned}$$

Pero, cuando  $\dot{\theta} > 0$  se tiene que  $\ddot{\theta} < 0$  entonces, se sustituye  $\ddot{\theta}$  por  $(-\ddot{\theta})$ :

$$\begin{aligned} \frac{d(T+V)}{dt} = & (\dot{\theta} \ddot{\theta} - \Omega^2 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta) [m r_m^2 + M r_M^2 + 1/12 m(3r^2 + L^2)] + \\ & + \frac{1}{2} m r^2 \Omega^2 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta + 2/5 MR^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + (mg r_m + Mg r_M) \dot{\theta} \sin\theta \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se iguala a cero la derivada, se tiene la ecuación del movimiento del sistema de masa giratoria:

$$(\ddot{\theta} - \Omega^2 \sin\theta \cos\theta)[m r_m^2 + M r_M^2 + 1/12 m(3r^2 + L^2)] + \frac{1}{2} m r^2 \Omega^2 \sin\theta \cos\theta + 2/5 MR^2 \ddot{\theta} + (mg r_m + Mg r_M) \sin\theta = 0$$

## CONCLUSIONES.

Se pudo conocer la utilidad que tiene el método de la energía para establecer modelos matemáticos de los sistemas mecánicos conservativos, mediante los cuales es posible obtener funciones matemáticas muy sencillas que relacionen las variables para sistemas en estado estacionario.

En lo que respecta al sistema giratorio utilizado fue muy fácil su análisis dinámico, y vemos que se puede relacionar con algunos dispositivos o juegos utilizados en centros de diversiones, de tal forma que es posible predecir el comportamiento dinámico del dispositivo con base en conocer una función matemática de dos variables.

## 8. APLICACION DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGIA AL MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE CUERPOS RIGIDOS.

### OBJETIVOS:

- 1) Observar la transferencia de energía entre una masa que cambia de posición y un volante de inercia.
- 2) Aplicar el método del trabajo y la energía entre dos posiciones del sistema, la inicial y la final, y así obtener una ecuación que permita evaluar la velocidad angular final del volante de inercia.
- 3) Evaluar las pérdidas de energía, por fricción, en el sistema mecánico y determinar una ecuación real que involucre estas pérdidas.

### 8.1 INTRODUCCION TEORICA.

#### 8.1.1 Método del trabajo y la energía aplicado a un sistema de cuerpos rígidos.

Cuando se analiza un sistema mecánico formado por varios cuerpos rígidos, unidos por medio de elementos flexibles inextensibles y de peso despreciable (pasadores, bloques, poleas, engranajes encastrados o resortes elásticos y lineales), resulta que estos elementos se consideran interiores al sistema y, por lo tanto, el trabajo total realizado por ellos es nulo.

Entonces, al aplicar el método del trabajo y la energía en el sistema de cuerpos rígidos es posible considerar cada uno de los cuerpos rígidos por separado. Luego, al sumar las energías cinéticas de todos los cuerpos y considerando el trabajo de todas las fuerzas externas presentes, la ecuación del sistema es:

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

donde  $T$  es la suma aritmética de las energías cinéticas de los cuerpos rígidos que forman el sistema y  $U_{1 \rightarrow 2}$  es el trabajo realizado por las fuerzas externas.

### 8.1.2 Fuerzas que no realizan trabajo.

En el método del trabajo y la energía, las fuerzas que no trabajan no entran en la ecuación. Como ejemplos de estas fuerzas, tenemos:

a) Fuerzas aplicadas a puntos que no se mueven (puntos fijos):

- Cuando una rueda gira sin deslizar sobre una superficie fija, la fuerza de fricción en el punto de contacto no trabaja.
- La reacción en un pasador sin rozamiento cuando el cuerpo soportado gira sobre el pasador.

b) Fuerzas que actúan perpendiculares al movimiento:

- La fuerza normal que actúa sobre un cuerpo que desliza o la reacción en una superficie sin rozamiento cuando el cuerpo en contacto con ella se mueve, no trabaja.
- El peso de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve horizontalmente.

### 8.1.3 Trabajo de las fuerzas no conservativas.

Como sucede para el caso de una partícula, en un cuerpo rígido es posible considerar, mediante otra forma del trabajo y la energía las fuerzas no conservativas,  $U_{1 \rightarrow 2}^{(n.c.)}$ . Luego, considerando el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas se tiene la siguiente ecuación del sistema:

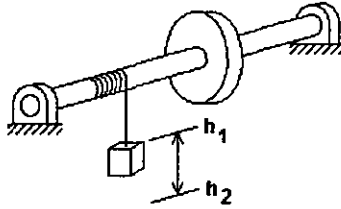
$$T_1 + V_1 + U_{1 \rightarrow 2}^{(n.c.)} = T_2 + V_2$$

El principio del trabajo y la energía puede ser utilizado en conjunto con la 2ª ley de Newton donde todas las fuerzas y momentos externos tienen que ser mostrados en un diagrama de cuerpo libre junto con las fuerzas y momentos que trabajan.



## 8.2 DESARROLLO TEORICO.

### 8.2.1 Análisis del sistema de volante de inercia y contrapeso por el método del trabajo y la energía.



sistema de volante de inercia  
y masa acoplados por una cuerda

fig. 8.1

El sistema mecánico consta de un eje y un volante de inercia montado sobre una estructura metálica. En el eje del volante se ata un contrapeso enrollando la cuerda que lo sostiene. Posteriormente, el contrapeso se suelta desde una altura fija descendiendo hasta el suelo al perder tensión la cuerda de acoplamiento, dejando de estar unida la masa al eje al final del movimiento, fig. 8.1.

De la ecuación de la energía entre dos posiciones, la inicial y la final del sistema mecánico, se tiene:

1) Trabajo de las fuerzas no conservativas.

$$U_{1 \rightarrow 2}^{(n.c.)} = (T_2 - T_1) + (V_2 - V_1) = E(P) \dots\dots\dots (\text{Trabajo de las fuerzas de fricción})$$

$V_1$  y  $V_2$  son las energías potenciales en las posiciones inicial y final, 1 y 2.

$T_1$  y  $T_2$  son las energías cinéticas en 1 y 2.

$U_{1 \rightarrow 2}^{(n.c.)}$  es un trabajo negativo igual a la energía perdida debida a las fuerzas de fricción, es decir,  $E(P)$ .

2) Como el sistema parte del reposo y de un altura h desde el suelo:

$$T_1 = 0 \text{ y } V_1 = m_f g h \quad \text{donde } m_f \text{ es la masa de la pesa}$$

lo que se cumple para la pesa, ya que el centro de masa del volante permanecerá en la misma posición espacial.

3) Para la posición final la masa desciende hasta el suelo, dejando de estar unida al eje:

$$V_2 = 0 \text{ en el nivel del suelo}$$

$$T_2 ]_{\text{volante}} = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2$$

$$T_2 ]_{\text{masa}} = \frac{1}{2} m_f v_f^2 \quad \text{donde } v_f \text{ es la velocidad final de la masa al llegar al suelo}$$

$$\text{Luego } T_2 = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} m_f v_f^2$$

Momento de inercia del volante:

$$I_x = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} (\text{volumen})(\text{densidad}) r^2$$

$$I_x = \frac{1}{2} (\pi r_v^2 e_v)(\rho_v) r_v^2 = \frac{1}{2} \pi r_v^4 e_v \rho_v$$

donde  $r_v$  = radio del volante

$e_v$  = espesor del volante

$\rho_v$  = densidad del material del volante (acero)

Velocidad final de la masa (pesa):

$$v_f = r_e \omega \quad r_e = \text{radio del eje del volante}$$

$$\omega = \text{velocidad angular final del volante}$$

4) Simplificando la ecuación de la energía, tendremos:

$$E(P) = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \pi r_v^4 e_v \rho_v) \omega^2 + \frac{1}{2} m_f (r_e \omega)^2 = (\frac{1}{4} \pi r_v^4 e_v \rho_v + \frac{1}{2} m_f r_e^2) \omega^2$$

$$\Rightarrow m_f g h + E(P) = (\frac{1}{4} \pi r_v^4 e_v \rho_v + \frac{1}{2} m_f r_e^2) \omega^2$$

Finalmente la velocidad angular final queda:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_f g h + E(P)}{\frac{1}{4} \pi r_v^4 e_v \rho_v + \frac{1}{2} m_f r_e^2}} \quad \dots\dots\dots (8.1)$$

**ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA**

**8.2.2 Forma de evaluar las pérdidas de energía por fricción.**

Las pérdidas de energía se pueden evaluar con base en la diferencia de alturas, de  $h_1$  cuando se suelta el contrapeso, y de  $h_2$  al momento de volver a subir la masa si se encuentra atada todavía. Se considerará como pérdidas de altura a las pérdidas que se produzcan solamente durante el movimiento a la caída, fig. 8.1. Entonces se cuantificará la mitad del valor de esas pérdidas:

$$P = \frac{1}{2} \left[ \frac{h_1 - h_2}{h_1} \right] \dots\dots\dots \text{(factor de pérdidas por fricción)}$$

$$E(P) = - P (m_f g h) \dots\dots\dots \text{(pérdidas por fricción)}$$

Si sustituimos las pérdidas por fricción en la ecuación (8.1) de la velocidad angular, esta queda como:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_f g h - P(m_f g h)}{\frac{1}{4} \pi r_v^2 e_v \rho_v + \frac{1}{2} m_f r_c^2}}$$

Finalmente, la velocidad angular será:

$\omega = \sqrt{\frac{m_f g h (1 - P)}{\frac{1}{4} \pi r_v^2 e_v \rho_v + \frac{1}{2} m_f r_c^2}} \dots\dots\dots (8.2)$
--

**8.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL Y COMPROBACION TEORICA.**

**8.3.1 Sistema de volante de inercia y masa acoplados por una cuerda.**

Se requiere determinar el valor de la velocidad angular  $\omega$  que llevará el sistema giratorio, constituido por el eje y volante de inercia, después de que se suelte el contrapeso al llegar al suelo, fig. 8.1. Para tal efecto, se medirá la frecuencia del movimiento de rotación uniformemente acelerada del sistema, partiendo desde el reposo y hasta que el sistema rotatorio alcance su velocidad angular máxima  $\omega$ . La verificación teórica se realizará considerando los valores de las magnitudes del sistema giratorio junto con el valor de P obtenido para el factor de pérdidas por fricción en la cuerda, y substituyendo los valores en la ecuación despejada para la velocidad angular  $\omega$  máxima del movimiento del volante.

Las magnitudes del sistema son:

$$r_v = 15 \text{ cm}$$

$$e_v = 7.38 \text{ cm}$$

$$\rho_v = 7580 \text{ kg/m}^3$$

$$m_f = \text{masa de la pesa} = 1.235 \text{ kg}$$

$$r_e = \text{radio del eje} = 1.92 \text{ cm}$$

$$h_1 = \text{altura inicial donde se suelta la masa de contrapeso} = 68 \text{ cm}$$

$$h_2 = \text{altura final a donde regresa la masa de contrapeso al seguir atada al eje} = 62 \text{ cm}$$

$$h = \text{medida de la longitud de la cuerda que sostiene al contrapeso} = 40 \text{ cm}$$

La ecuación teórica (8.2) es:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_f g h (1 - P)}{\frac{1}{4} \pi r_e^2 e_v \rho_v + \frac{1}{2} m_f r_e^2}}$$

donde el valor de las pérdidas es:

$$P = \frac{1}{2} \left[ \frac{h_1 - h_2}{h_1} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{68 - 62}{68} \right] = 0.044$$

Sustituyendo los valores en la ecuación, el valor teórico de  $\omega$  es:

$$\omega = \sqrt{\frac{4.62819}{0.22265}} = 4.559 \text{ rad/s} = 43.53 \text{ rpm}$$

$$\omega = 43.53 \text{ rpm}$$

La ecuación experimental es:

$$\omega = 2\pi f$$

donde el valor medido para la frecuencia es:

$$f = 0.7 \text{ Hz}$$

Entonces el valor experimental de la velocidad angular  $\omega$  es:

$$\omega = 2\pi (0.7) = 4.398 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 42 \text{ rpm}$$

y el porcentaje de error es:  $\% \varepsilon_\omega = 3.5 \%$

### 8.3.2 Equipo y material.

- Sistema de volante de inercia y masa acoplada.
- Flexómetro
- Frecuencímetro.
- Báscula

### CONCLUSIONES.

Cuando aplicamos el principio del trabajo y la energía a un cuerpo rígido se tienen las mismas ventajas y limitaciones que en el caso cuando se aplica a una sola partícula en movimiento. La principal ventaja está en que el principio del trabajo y la energía relaciona las velocidades lineal y angular, así como los pares de fuerzas que trabajan en el cuerpo rígido durante su movimiento. La limitación principal es que la ecuación escalar resultante no puede ser resuelta más que para una sola incógnita.

Es posible combinar el método del trabajo y la energía con la cinemática y la 2ª ley de Newton; sin embargo se puede utilizar cualquiera de los dos métodos, siendo usualmente el del trabajo y la energía el método más sencillo de aplicar.

## 9. BALANCEO.

### OBJETIVO:

Conocer físicamente un sistema giratorio elemental formado por el eje, contrapesos y chumaceras. Obtener el balanceo estático y el balanceo dinámico del sistema giratorio propuesto.

### 9.1 INTRODUCCION TEORICA.

Cuando se tiene un cuerpo rígido en rotación, como un árbol montado sobre cojinetes, se tendrá un sistema balanceado o equilibrado dinámicamente si las reacciones externas, ejercidas por los cojinetes sobre el cuerpo rotatorio, son lo único que se requiere para soportar el peso del cuerpo; en cambio, cuando se tiene un sistema desbalanceado, se producirán reacciones desequilibradas, perjudiciales para el sistema; por lo tanto, es importante conocer los métodos de estudio relacionados con el equilibrado o compensado de ejes o árboles rotatorios, ver fig. 9.1.

**Balanceo:** Es un procedimiento que se utiliza para corregir o eliminar fuerzas o momentos desequilibrados en sistemas sometidos a movimientos rotatorios. Estas fuerzas pueden provocar la aparición de vibraciones con amplitudes peligrosas, que aumentan los esfuerzos de los componentes, provocando desgaste, y someten a los cojinetes a cargas repetidas que pueden provocar la falla por fatiga de las piezas.

Por lo tanto es necesario evitar que las piezas giren a velocidades críticas (a su frecuencia natural de vibración), y reducir las fuerzas de inercia (fuerzas dinámicas) que producen vibraciones mediante el balanceo.

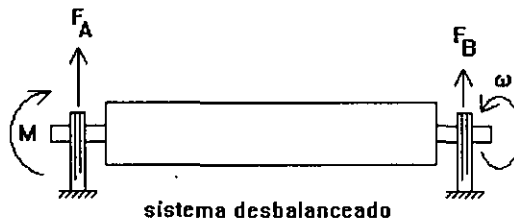


fig. 9.1

Balanceo en la producción de piezas mecánicas.

En la producción de piezas de revolución, por ejemplo, las tolerancias dimensionales de fabricación se ajustan tan cerradas como sea posible de acuerdo con un balance costo/ beneficio; ya que generalmente resulta mejor la producción de piezas que no sean tan perfectas en su acabado, para posteriormente someterlas a procesos de balanceo para su corrección.

### 9.1.1 Balanceo Estático.

Es un proceso de pesado (balanceado) en el que se aplica a la pieza una fuerza de gravedad o una fuerza centrífuga.

Balanceo: a) se aplica una fuerza de gravedad,  $m g$ , en sistemas sin movimiento rotatorio,  
b) se aplica una fuerza centrífuga,  $m r \omega^2$ , en sistemas con movimiento rotatorio.

En este proceso de balanceo se puede suponer que la masa existe en un solo plano de balanceo (balanceo en un solo plano).

Entre los dispositivos que se utilizan para balanceo estático tenemos:

- Dispositivo de disco y eje.- Para balancear discos y piezas similares.
- Péndulo de balanceo estático.- Para balancear ruedas, ventiladores o hélices y engranes.

### 9.1.2 Balanceo Dinámico.

Es un proceso aplicado para balancear piezas alargadas como ejes. El objetivo es medir el momento dinámico desbalanceado y agregar un nuevo par que equilibre el sistema (de la misma magnitud y dirección opuesta). Este nuevo par se introduce agregando masa en los dos planos de corrección determinados para esto, elegidos según la conveniencia en nuestra solución. Esta masa que se agrega o se quita, según sea al caso, son las masas (o perforaciones) de corrección en cada uno de los planos de corrección.

En este proceso de balanceo se tienen dos planos de corrección (balanceo en varios planos).

Algunos dispositivos para balanceo dinámico son:

- Máquina de cuna pivotada.
- Absorbedores de vibraciones.
- Cabeza de balanceo.
- Máquina balanceadora Thearle.

Estas máquinas, además de balancear ejes, se emplean para balancear rotores de turbinas, armaduras de motores y cigüeñales.

## 9.2 DESARROLLO TEORICO.

### 9.2.1 Análisis del Balanceo.

a) Balanceo Estático.- Equilibrio de fuerzas inerciales (dinámicas).

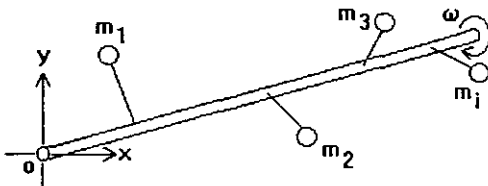


fig. 9.2 Vista isométrica.

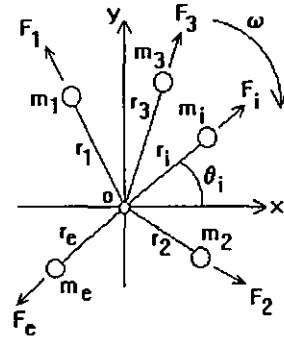


fig. 9.3 Vista frontal.

De la figura 9.3:

$$\Sigma F = 0, \text{ es decir, } \Sigma m_i r_i \omega^2 = 0 :$$

$$\Sigma m_i r_i + m_e r_e = 0 \quad \text{ó} \quad \Sigma m_i r_i e^{i\theta_i} + m_e r_e e^{i\theta_e} = 0$$

Separando las componentes en x e y:

$$\Sigma m_i r_i \cos\theta_i + m_e r_e \cos\theta_e = 0$$

$$\Sigma m_i r_i \sen\theta_i + m_e r_e \sen\theta_e = 0$$

La corrección estática es:

$$\tan\theta_e = \frac{-\Sigma m_i r_i \sen\theta_i}{-\Sigma m_i r_i \cos\theta_i} \quad \dots\dots\dots (9.1)$$

$$m_e = \frac{-\Sigma m_i r_i \sen\theta_i}{r_e \sen\theta_e}$$

- $m_i$  = masa iésima
- $r_i$  = distancia radial de la masa iésima
- $\theta_i$  = ángulo de inclinación de  $m_i$
- $m_e$  = masa de corrección estática
- $\theta_e$  = ángulo de inclinación de  $m_e$



b) Balanceo Dinámico.- Equilibrio de Momentos.

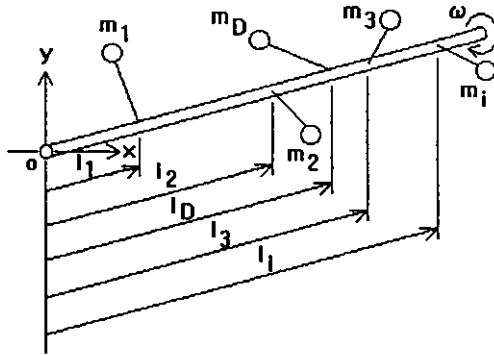


fig. 9.4

De la figura 9.4:

$$\Sigma M_o = 0, \text{ es decir, } \Sigma m_i r_i l_i \omega^2 = 0 :$$

$$\Sigma m_i r_i l_i + m_D r_D l_D = 0 \quad \text{ó} \quad \Sigma m_i r_i l_i e^{i\theta_i} + m_D r_D l_D e^{i\theta_D} = 0$$

Separando las componentes en x e y:

$$\Sigma m_i r_i l_i \cos\theta_i + m_D r_D l_D \cos\theta_D = 0$$

$$\Sigma m_i r_i l_i \sin\theta_i + m_D r_D l_D \sin\theta_D = 0$$

La corrección dinámica es:

$\tan\theta_D = \frac{-\Sigma m_i r_i l_i \sin\theta_i}{-\Sigma m_i r_i l_i \cos\theta_i}$	..... (9.2)
$m_D = \frac{-\Sigma m_i r_i l_i \sin\theta_i}{r_D l_D \sin\theta_D}$	

\$l\_i\$ = distancia de \$m\_i\$ a lo largo del eje rotatorio

\$m\_D\$ = masa de la corrección dinámica

\$\theta\_D\$ = ángulo de inclinación de \$m\_D\$

### 9.2.2 Problema de Balanceo.

Para la configuración del sistema rotatorio mostrado, fig. 9.5, realizar el balanceo estático y el balanceo dinámico.

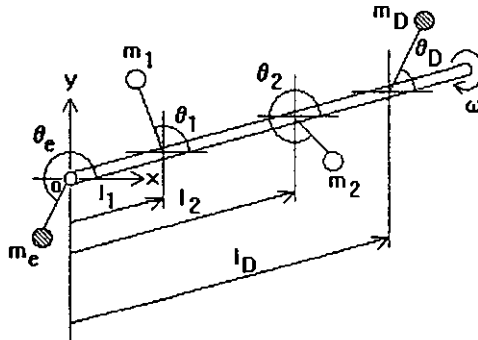


fig. 9.5

Pasos a seguir:

- Primeramente se determinará la corrección dinámica por medio de la tabla de cálculos. Así, se obtendrán los valores de  $\theta_D$  y  $l_D$  para un valor dato de  $m_D = m_3$ .
- Después de lo anterior y tomando todas las masas, incluyendo la masa de corrección dinámica  $m_D$ , se realizan los cálculos con la tabla para determinar la corrección estática; entonces, se obtienen los valores de  $\theta_e$  y  $m_e$ . Posteriormente, se comparan los valores obtenidos de tal forma que se cumpla lo siguiente:

$$m_e \approx m_4 \text{ y } r_e \approx r_4$$

Si no se cumple, se deberá ajustar el valor de  $m_e$  con el valor de masa de  $m_4$  mediante la adición de pequeñas masas de contrapeso por medio de cinta adhesiva.

### 9.3 DESARROLLO EXPERIMENTAL Y COMPROBACION TEORICA.

#### 9.3.1 Realizar las tablas que contengan los valores experimentales y la verificación mediante las expresiones teóricas.

Como se mencionó en la sección anterior, el análisis teórico del balanceo se puede simplificar si se utiliza para ello una tabla que contenga los datos del problema y los cálculos.

Se utilizarán dos tablas de valores: La primera contendrá los valores de las masas  $m_i$  de los cuatro contrapesos y el valor de la distancia radial  $r_i$  del centro de giro al centro de masa de cada uno de los contrapesos; la segunda tabla corresponde al balanceo completo, incluyendo la parte del balanceo dinámico y la del balanceo estático, así como los valores de los datos y las correspondientes correcciones dinámica y estática del problema de balanceo, fig. 9.5.

Tabla de valores de las masa de contrapeso a utilizar.

	masa $m_i$ (gr)	distancia al centro de masa $r_i$ (mm)
1	197	18.11
2	205.5	19.12
3	199	18.29
4	174.7	16.51

Tabla de Balanceo

	Datos y Correcciones				B. Dinámico		B. Estático	
	$m_i$ (gr)	$r_i$ (mm)	$l_i$ (mm)	$\theta_i$ (°)	$m_i r_i l_i \sin \theta_i$	$m_i r_i l_i \cos \theta_i$	$m_i r_i \sin \theta_i$	$m_i r_i \cos \theta_i$
1	197	18.11	$l_1$	$\theta_1$				
2	205.5	19.12	$l_2$	$\theta_2$				
C. Dinámica	$m_D$	$r_D$	$l_D$	$\theta_D$	$\Sigma =$	$\Sigma =$		
3	199	18.29						
C. Estática	$m_e$	$r_e$	$l_e$	$\theta_e$			$\Sigma =$	$\Sigma =$
4		16.51	0					

### 9.3.2 Equipo y material utilizado.

- Máquina de balanceo
- 4 masas de contrapeso
- Pequeñas masas para el equilibrado
- Cinta adhesiva
- Llaves allen

### 9.4 EJEMPLOS RESUELTOS DE PROBLEMAS DE BALANCEO PARA EL LABORATORIO.

Estos son ejemplos propuestos para ser resueltos en el laboratorio; mediante el desarrollo experimental, con la máquina de balanceo, se pueden resolver problemas de sistemas desbalanceados en los rangos de la máquina, es decir, para las dimensiones de trabajo de la máquina; pues las soluciones ya han sido probadas en la máquina.

Es recomendable resolver solamente un problema de balanceo durante la práctica con sus respectivas soluciones teórica y experimental, ya que el tiempo del laboratorio es limitado para desarrollar los conceptos fundamentales del balanceo y que el alumno comprenda con claridad las partes del método de balanceo utilizado en esta práctica. Así, se tomará un problema diferente por cada grupo de laboratorio para ser resuelto por los alumnos y que entre todos cotejen sus resultados, para darle agilidad a la solución; además los alumnos deberán también colaborar en el montaje del sistema desbalanceado y verificar su balanceo al agregar el par de masas de corrección.

Después, se sugiere que al final de la práctica, cuando ya se haya solucionado correctamente el problema de balanceo, se proponga a los alumnos un problema adicional diferente, que puede ser algún otro de los problemas de ejemplo para que lo traigan resuelto en su reporte de la práctica, indicándoles que la solución del problema cumple con las mismas condiciones que el resuelto en el laboratorio, es decir, que se puede verificar con esta máquina.

Ejemplos de problemas de Balanceo, fig. 9.5.

#### EJEMPLO 1:

Valores Dato		Balanceo	
Contrapeso 1	Contrapeso 2	Corrección Dinámica	Corrección Estática
$\theta_1 = 230$	$\theta_2 = 160$	$\theta_D = -8.8$	$\theta_e = 39.17$
$l_1 = 30$	$l_2 = 120$	$l_D = 142.3$	$m_e = 186.6$

EJEMPLO 2:

Valores Dato		Balanceo	
Contrapeso 1	Contrapeso 2	Corrección Dinámica	Corrección Estática
$\theta_1 = 260$	$\theta_2 = 205$	$\theta_D = 58.6$	$\theta_e = 42.2$
$l_1 = 50$	$l_2 = 30$	$l_D = 72.6$	$m_e = 186.6$

EJEMPLO 3:

Valores Dato		Balanceo	
Contrapeso 1	Contrapeso 2	Corrección Dinámica	Corrección Estática
$\theta_1 = 240$	$\theta_2 = 170$	$\theta_D = 44.4$	$\theta_e = -2.6$
$l_1 = 100$	$l_2 = 30$	$l_D = 113.3$	$m_e = 185.1$

EJEMPLO 4:

Valores Dato		Balanceo	
Contrapeso 1	Contrapeso 2	Corrección Dinámica	Corrección Estática
$\theta_1 = 280$	$\theta_2 = 210$	$\theta_D = 43.2$	$\theta_e = 87.5$
$l_1 = 30$	$l_2 = 100$	$l_D = 121.2$	$m_e = 181.1$

EJEMPLO 5:

Valores Dato		Balanceo	
Contrapeso 1	Contrapeso 2	Corrección Dinámica	Corrección Estática
$\theta_1 = 280$	$\theta_2 = 130$	$\theta_D = 72.2$	$\theta_e = -74.96$
$l_1 = 160$	$l_2 = 80$	$l_D = 92.7$	$m_e = 185.8$

EJEMPLO 6:

Valores Dato		Balanceo	
Contrapeso 1	Contrapeso 2	Corrección Dinámica	Corrección Estática
$\theta_1 = 250$	$\theta_2 = 130$	$\theta_D = 54.5$	$\theta_e = -58$
$l_1 = 160$	$l_2 = 40$	$l_D = 140.3$	$m_e = 187.2$

EJEMPLO 7:

Valores Dato		Balanceo	
Contrapeso 1	Contrapeso 2	Corrección Dinámica	Corrección Estática
$\theta_1 = 280$	$\theta_2 = 150$	$\theta_D = 82.2$	$\theta_e = -41.95$
$l_1 = 100$	$l_2 = 30$	$l_D = 81.1$	$m_e = 186.4$

## CONCLUSIONES.

Como pudimos apreciar es muy importante conocer los métodos de balanceo o equilibrado de sistemas rotatorios, como ejes o árboles, ya que es indispensable minimizar la aparición de momentos dinámicos desbalanceados, para evitar desgastes, y que las piezas fallen al momento de estar realizando alguna función en una máquina. Además, para el caso de sistemas rotatorios que funcionen a altas velocidades, se deberá prever que a mayor velocidad es probable que aparezcan momentos desbalanceados de gran magnitud, como en turbinas desbalanceadas de gran longitud, lo que causaría una situación desastrosa.

Por otro lado, en el laboratorio se observó con bastante claridad tanto el desbalanceo dinámico como el desbalanceo estático, lo que fue corregido oportunamente, eliminándose los momentos y las fuerzas indeseables, para lo cual se recurrió a los métodos teóricos simplificándolos mediante una tabla muy práctica de cálculos y resultados.

## 10. INTRODUCCION A LAS VIBRACIONES MECANICAS.

### OBJETIVOS:

- 1) Identificar los sistemas mecánicos con vibración libre y los sistemas mecánicos con vibración forzada.
- 2) Determinar la frecuencia natural de un sistema vibratorio y su importancia en relación con los fenómenos de Resonancia y Pulsación.

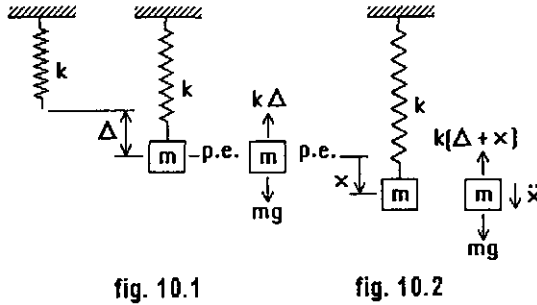
### 10.1 INTRODUCCION TEORICA.

Cuando mencionamos las vibraciones mecánicas, nos referimos al movimiento de una partícula o de un cuerpo rígido que oscila en torno de una posición de equilibrio. Como ejemplos tenemos el movimiento del péndulo simple, el de un péndulo compuesto o el movimiento de un sistema de masa-resorte unido a un soporte fijo, fig. 10.1.

En este capítulo se tratará el análisis de las vibraciones mecánicas con un grado de libertad. Este tipo de vibración se produce cuando un sistema es desplazado desde una posición de equilibrio estable, fig. 10.2. Luego, bajo la acción de fuerzas de restitución (elásticas o gravitacionales), el sistema tiende a regresar a su posición de equilibrio. Así, el sistema logrará alcanzar su posición de equilibrio y continuará el proceso indefinidamente, mientras el sistema permanezca moviéndose de una posición límite o extrema a la otra, atravesando la posición de equilibrio. Entonces, hay tres cantidades importantes correspondientes al movimiento vibratorio: el período de la vibración, el cual es el tiempo necesario para que el sistema efectúe un ciclo completo de movimiento; la frecuencia de la vibración, que corresponde al número de ciclos por cada segundo, y la amplitud de la vibración, que se refiere al desplazamiento lineal o angular máximo.

Estudiaremos dos casos sencillos del movimiento vibratorio sin amortiguamiento: la vibración libre, cuyo movimiento es mantenido por las fuerzas de restitución, sin la aplicación de fuerzas por el exterior, fig. 10.1, y la vibración forzada, cuyo movimiento se describe por la aplicación de una fuerza periódica al sistema, donde el movimiento periódico también se repite a sí mismo en intervalos de tiempo regulares, fig. 10.3.

**10.1.1 Análisis de un sistema masa-resorte suspendido en un soporte rígido. Vibración libre.**



Ecuación de equilibrio estático y ecuación dinámica del sistema vibratorio:

$\Sigma F = 0:$                       donde     $m =$  masa del sistema vibratorio  
 $-k \Delta + mg = 0$                        $k =$  constante del resorte  
     $\Delta =$  deformación del resorte

entonces  $k \Delta = mg$  ..... (10.1)      equilibrio estático (fig. 10.1)

$\Sigma F = m \ddot{x}$   
 $-k (\Delta + x) + mg = m \ddot{x}$  ..... (10.2)      ec. dinámica (fig. 10.2)

De (10.1) y (10.2) se tiene:

$-k x = m \ddot{x}$

entonces, la ecuación del movimiento resultante es:

$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$	..... (10.3)
--	--------------



Luego, de (10.3) se tiene:

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad \dots\dots\dots (10.4)$$

ecuación del movimiento armónico simple del sistema

donde  $p^2 = \frac{k}{m}$  es la frecuencia circular de vibración

**Solución del sistema con vibración libre.**

Sea la E. D. de 2º orden de coeficientes constantes del movimiento del sistema:

$$\ddot{x} + p^2 x = 0$$

Sea la ecuación auxiliar:  $D^2 + p^2 = 0$

entonces  $D^2 = -p^2$  ó  $D = \pm \sqrt{-p^2} = \pm i p$

y la solución general es:

$$x(t) = c_1 e^{i pt} + c_2 e^{-i pt} \quad \text{pero } e^{\pm i pt} = \cos pt \pm i \sin pt$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 (\cos pt + i \sin pt) + c_2 (\cos pt - i \sin pt) \\ &= (c_1 + c_2) \cos pt + (c_1 i - c_2 i) \sin pt \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene:

$$x(t) = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt \quad \dots\dots\dots (10.5)$$

donde  $T = \frac{2\pi}{p}$  (s) es el periodo

y  $f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi}$  (Hz) es la frecuencia

Si consideramos como condiciones iniciales:  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = 0$   
y sea  $\dot{x}(t) = -C_1 p \sin pt + C_2 p \cos pt$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

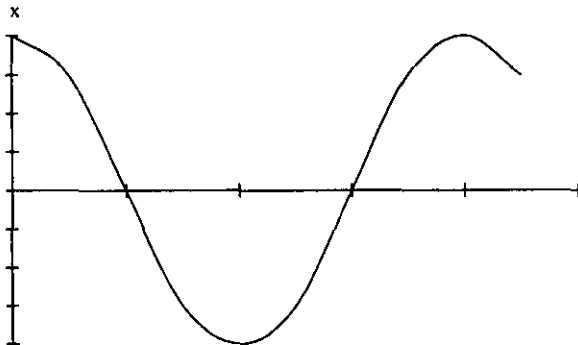
$$x(0) = x_0 = C_1 \Rightarrow C_1 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0 = C_2 p \Rightarrow C_2 = 0$$

por lo tanto, la ecuación particular del movimiento es:

$x(t) = x_0 \cos pt$ ..... (10.6)
-----------------------------------

Gráfica de la función  $x(t)$ .



10.1.2 Análisis de un sistema masa-resorte. Vibración forzada.

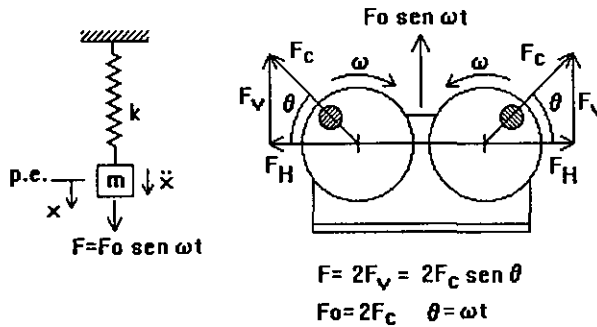


fig. 10.3

Como se ve en la figura 10.3 de la fuerza de excitación, la resultante es una fuerza en la dirección vertical como producto de un desbalanceo de fuerzas de dos contrapesos simétricos e iguales. Luego, las ecuaciones de la vibración forzada son:

$F = F_o \text{ sen } \omega t$  es la fuerza de excitación del sistema

$-k x + F_o \text{ sen } \omega t = m \ddot{x}$  es la ecuación dinámica

$$\Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = \frac{F_o}{m} \text{ sen } \omega t$$

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{F_o}{m} \text{ sen } \omega t \dots\dots\dots (10.7)$$

**Solución particular de la E. D. del movimiento forzado.** Método de los coeficientes indeterminados.

Considerando como solución particular de (10.7) una expresión de la forma:

$$x_p = A \text{ sen } \omega t \dots\dots\dots (10.8)$$

derivando dos veces (10.8):

$$\dot{x}_p = A \omega \text{ cos } \omega t$$

$$\ddot{x}_p = -A \omega^2 \text{ sen } \omega t$$

sustituyendo la solución particular  $x_p$  en (10.7):

$$-A \omega^2 \text{sen } \omega t + p^2 A \text{sen } \omega t = \frac{F_0}{m} \text{sen } \omega t$$

de donde  $A = \frac{F_0/m}{(p^2 - \omega^2)}$ , luego

$x_p = \frac{F_0/m}{(p^2 - \omega^2)} \text{sen } \omega t \dots\dots\dots (10.9)$
--

es la solución particular buscada.

### 10.1.3 Fenómenos de Resonancia y Pulsación en un sistema vibratorio.

Estos fenómenos ocurren cuando el valor de la frecuencia de excitación (fuerza impulsora)  $\omega/2\pi$  se aproxima al valor de la frecuencia natural (de las oscilaciones libres), que es  $p/2\pi$ .

Entonces, en el caso límite cuando  $\omega \rightarrow p$ , la amplitud de las oscilaciones aumenta rápidamente en el tiempo, así cuando  $t \rightarrow \infty$  el valor  $x_p \rightarrow \infty$ , presentándose la resonancia.

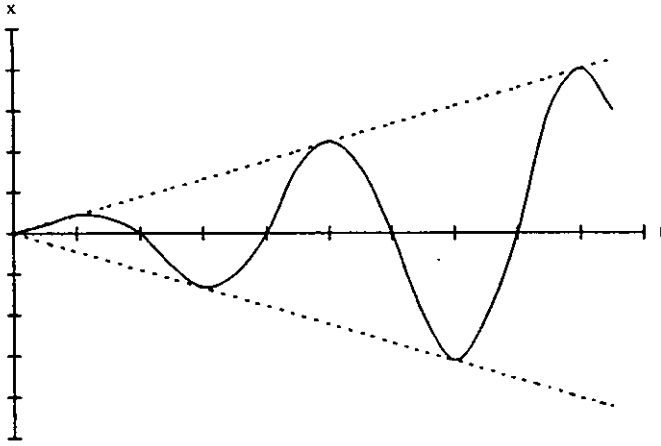
Otro caso similar ocurre cuando la diferencia entre el valor de  $\omega$  y la frecuencia  $p$  es muy pequeña, es decir  $(p - \omega) \rightarrow 0$ . Cuando esto se presenta el movimiento oscilatorio se conoce como pulsación, pues las oscilaciones toman la forma de pulsos.

Como ejemplos de estos fenómenos tenemos:

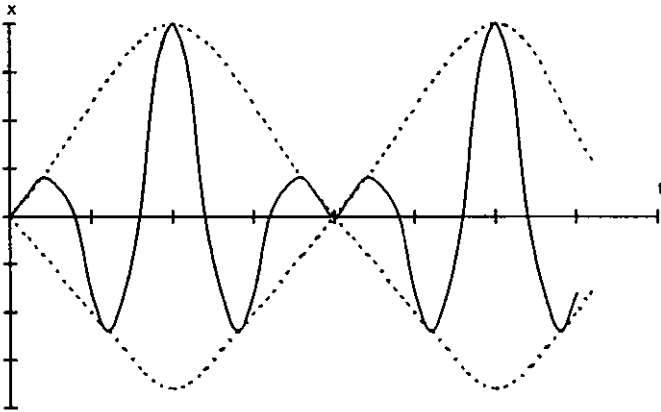
- Resonancia: la caída de edificios en los terremotos; la destrucción de puentes colgantes como el de Tacoma en E. U. por los fuertes vientos; cuando un cantante de ópera rompe una copa de vidrio con la voz; el rompimiento del ala de un avión durante su vuelo; el movimiento oscilatorio que realiza una persona para poder jugar en un columpio, y en la sintonización de canales de audio y video por medio de un aparato receptor.

- Pulsación: se presenta cuando un músico afina algún instrumento musical por medio de un patrón de frecuencias como un diapasón; en la puesta en marcha de un generador de una planta eléctrica pueden oírse las pulsaciones entre el generador y la línea por la diferencia de frecuencias entre estos, y en las pulsaciones en las tuberías de carga de una turbina hidráulica por las vibraciones de la estructura de la turbina.

Gráfica de Resonancia.



Gráfica de Pulsación.



### 10.1.4 Resortes en paralelo y en serie.

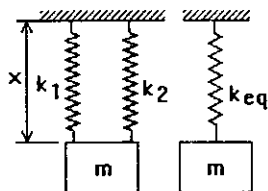


fig. 10.4

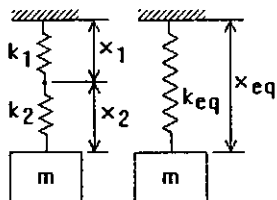


fig. 10.5

Resortes en paralelo.- Cuando se tiene un conjunto de resortes en paralelo con diferentes constantes, el valor de la constante equivalente se obtiene por:

Del equilibrio de fuerzas, fig. 10.4:

$$k_1 x + k_2 x = mg = k_{eq} x$$

$$\Rightarrow \boxed{k_1 + k_2 = k_{eq} \dots\dots\dots (10.10) \text{ (resortes en paralelo)}}$$

Resortes en serie.- Si se tienen resortes con diferentes valores de constante conectados en serie, la constante equivalente se determina:

De la igualdad de la suma de las deformaciones individuales de los resortes y la deformación equivalente, fig. 10.5:

$$x_{eq} = x_1 + x_2 \quad \text{ó} \quad \frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \dots\dots\dots (10.11) \text{ (resortes en serie)}}$$

## 10.2 DESARROLLO EXPERIMENTAL Y COMPROBACION TEORICA.

Para el sistema vibratorio del laboratorio se analizarán el movimiento vibratorio libre y el movimiento forzado, así como los fenómenos de pulsación y resonancia, de manera cualitativa y cuantitativa, comparando los valores teóricos y experimentales de la frecuencia circular y la frecuencia natural de la vibración con las frecuencias de pulsación y resonancia, ver figuras 10.1 y 10.3.

### 10.2.1 Para el sistema vibratorio del laboratorio calcular teóricamente los valores de las frecuencias.

- 1) Medir el valor de la masa del sistema (este valor puede ser dado como dato).
- 2) Medir la constante equivalente del sistema de 3 resortes en paralelo.
- 3) Determinar teóricamente las frecuencias circular  $p$  (rpm) y la frecuencia natural  $f$  (Hz).

Cálculos teóricos y mediciones experimentales.

El valor de la masa es:

$$m = 1.850 \text{ kg}$$

La constante equivalente se determina sumando el valor de las 3 constantes medidas de cada resorte:

Cada constante se determina resolviendo la gráfica del resorte  $F(\text{kgf}) - x(\text{mm})$ .

Gráfica del resorte.

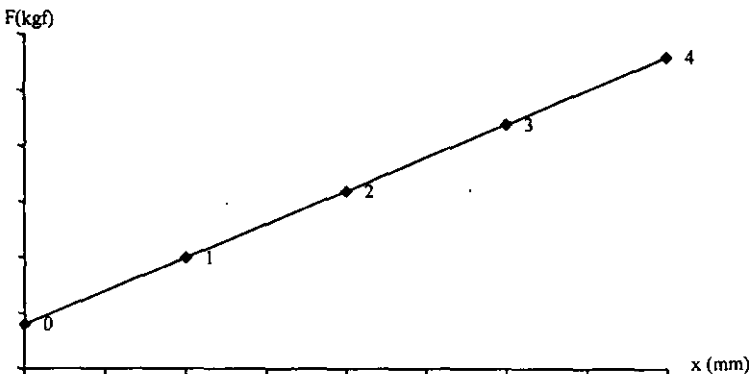


Tabla de valores del resorte

	x (mm)	F (kgf)
1	19.5	1.130
2	27	1.570
3	39	2.260

Si consideramos que los 3 resortes fueran iguales (pudiendo cambiar por el uso), de la gráfica se tiene:

$k$  = pendiente de la recta ajustada

$$k = 0.057906 \text{ kgf/mm} = 0.057906 (1000) (9.81) = 567.42 \text{ N/m}$$

$$k = 567.42 \text{ N/m}$$

$F_0$  = fuerza mínima para deformar al resorte (ordenada al origen)

$$F_0 = 0.002984 \text{ kgf}$$

La frecuencia circular  $p$  de (10.4) y (10.10) es:

$$p = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{567.42 \times 3}{11.850}} = 11.985 \text{ rad/s}$$

$$p = 114.45 \text{ rpm}$$

La frecuencia natural  $f$  es:

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{11.985}{2\pi}$$

$$f = 1.907 \text{ Hz}$$



### 10.2.2 Realizar las mediciones experimentales de las frecuencias.

Medir experimentalmente los valores de la frecuencia de pulsación (Hz), la frecuencia natural o frecuencia de resonancia (Hz) y la frecuencia circular (rpm).

$\omega = 114 \text{ rpm}$  ..... (frecuencia circular)

$f(\text{pulsación}) = 1.750 \text{ Hz}$  ..... (frecuencia de pulsación)

$f = 1.908 \text{ Hz}$  ..... (frecuencia natural o de resonancia)

### 10.2.3 Equipo y material utilizado.

- Sistema de masa-resorte suspendido en un soporte rígido
- Sistema de excitación formado por dos masas simétricas desbalanceadas
- Frecuencímetro (contador digital)
- Tacómetro
- Juego de masas
- Soporte metálico de masas
- Flexómetro
- Plumín
- Cinta adhesiva
- Báscula

### CONCLUSIONES.

Hemos conocido los métodos teóricos y experimentales para el análisis de los sistemas vibratorios, y vemos que son imprescindibles en la mecánica, ya que actualmente existe un auge por la utilización de máquinas herramientas y dispositivos mecánicos que trabajan a altas velocidades, contruidos sobre estructuras o carcazas cada vez más ligeras. Por tal razón, es muy importante eliminar las vibraciones indeseables en máquinas y estructuras para evitar los esfuerzos de las partes componentes, desgastes prematuros de las piezas y pérdidas de energía; por tanto en el diseño se debe poner más en práctica el análisis de las vibraciones de los sistemas mecánicos móviles.

Como ejemplos de sistemas vibratorios, podemos mencionar: el movimiento de un péndulo simple o compuesto, el balanceo de un árbol con el viento, el cabeceo y los bandazos de un barco en el mar, el movimiento vibratorio constante que causa zumbidos en las máquinas mecánicas industriales, el movimiento de los edificios en los temblores y las vibraciones de las alas de los aviones.

## CONCLUSIONES GENERALES.

El haber realizado un trabajo relacionado con aspectos experimentales de temas de dinámica de maquinaria nos permite tener una guía didáctica, pues en el estudio de las teorías de dinámica resultan ser un gran apoyo, para que los alumnos de licenciatura se interesen más y comprendan mejor dichos conocimientos. Este trabajo sigue los temas de forma ordenada y con base en el programa de la materia de análisis dinámico de maquinaria, para que las explicaciones prácticas que contiene cada capítulo se estudien de forma simultánea con los temas vistos en la clase teórica, y así, reforzar su comprensión. Es indudable, después de tener una sesión experimental, que el alumno comprenderá de manera más tangible la dinámica de algunos sistemas físicos, y podrá relacionarlos con elementos de máquinas o dispositivos mecánicos que están a su alrededor.

Pienso que este trabajo es una pequeña pero valiosa aportación en el área de la dinámica de maquinaria, que facilite su comprensión y proporcione una visión más real sobre la importancia que tiene la dinámica experimental en el diseño mecánico, dando un estudio más profundo de los sistemas mecánicos móviles, y de esta manera, tener los elementos básicos necesarios para controlar el sistema en cuestión, evitando así, comportamientos indeseables y perjudiciales del sistema, y utilizando ciertas características de la dinámica de los sistemas en forma benéfica.

Entonces cuando se diseña un sistema mecánico siempre será mucho mejor aplicar el análisis dinámico al sistema, además de los métodos de diseño, con lo cual se puedan crear sistemas mecánicos más seguros, para diferentes condiciones de funcionamiento, y así, se eviten accidentes por no haber considerado oportunamente la aparición inesperada de efectos dinámicos en el sistema mecánico.

## BIBLIOGRAFIA

- Beer, Ferdinand y Johnston, E. Russell. (1985). **Mecánica Vectorial para Ingenieros, Dinámica**. 4ª edición. México. McGraw-Hill.
- Hibbeler, R. C. (1989). **Engineering Mechanics, Statics and Dynamics**. 5<sup>th</sup> edition. Macmillan Publishing Company.
- Hutton, David. (1981). **Applied Mechanical Vibrations**. McGraw-Hill.
- Martin, George H. (1996). **Kinematics and Dynamics of Machines**. McGraw-Hill.
- McGill, David y King, Wilton. (1991). **Mecánica para Ingeniería y sus Aplicaciones Vol. 2, Dinámica**. México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Meriam, J. L. and Kraige, L. G. (1987). **Engineering Mechanics Volume 2, Dynamics**. 2<sup>nd</sup> edition. John Wiley and Sons.
- Ogata, Katsuhiko. (1987). **Dinámica de Sistemas**. México. Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Ordoñez Reyna, Luis. (1989). **Mecánica Vectorial para Ingenieros, Dinámica**. México. Cía. Editorial Continental.
- Rao, Singiresu S. (1990). **Mechanical Vibrations**. 2<sup>nd</sup> edition. Addison-Wesley Publishing Company.
- Riley, William. (1993). **Engineering Mechanics, Dynamics**. John Wiley and Sons.
- Seto, William W. (1975). **Vibraciones Mecánicas**. Serie Shaum's. México. McGraw-Hill.
- Shames, Irving H. (1997). **Engineering Mechanics, Statics and Dynamics**. 4<sup>th</sup> edition. Prentice-Hall.
- Shigley, Joseph y Uicker, John. (1988). **Teoría de Máquinas y Mecanismos**. México. McGraw-Hill.
- Steidel, Robert F. (1981). **Introducción al Estudio de las Vibraciones Mecánicas**. México. Cía. Editorial Continental.
- Targ, S. (1980). **Curso Breve de Mecánica Teórica**. México. Mir.
- Zill, Dennis G. (1987). **Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones**. México. Grupo Editorial Iberoamérica.