9

2ei

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VALUACION DE OPCIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

Ma. del Rocío Elizondo Camejo

DIRECTOR DE TESIS:

DR. PABLO PADILLA LONGORIA

269778

1 9 9 9

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

PAGINACION
DISCONTINUA

[illegible]

[illegible]

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Valuación de Opciones

realizado por Ma. del Rocío Elizondo Camejo

con número de cuenta 9133865-5 , pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Pablo Padilla Longoria	
Propietario	Dr. Mogens Bladt Petersen	
Propietario	M.en A.P. Ma. del Pilar Alonso Reyes	
Suplente	M.en C. José Antonio Flores Díaz	
Suplente	M.en Ec. Rafael Enrique Gomez-Tagle Morales	

Consejo Departamental de Matemáticas
M. en A.P. Ma. del Pilar Alonso Reyes

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Pablo Padilla Longoria por su gran apoyo, tiempo y confianza al dirigir mi tesis.

Al Dr. Gilberto Flores Gallegos por su interés, consejos y ayuda a lo largo de mi carrera.

A todos los investigadores del IIMAS por su apoyo brindado.

A M. en Econ. Rafael Gomez-Tagle Morales por sus consejos, interés, sugerencias y comentarios.

Al Dr. Daniel Garcés Díaz por su confianza y comentarios.

A M. en A.P. Ma. del Pilar Alonso Reyes por su apoyo, confianza, comentarios y sugerencias.

A M. en C. José Antonio Flores Díaz por su apoyo comentarios y sugerencias.

Al Dr. Mogens Bladt Petersen por sus comentarios y sugerencias.

Al Dr. Jesús López Estrada por su confianza y apoyo.

A todos los Maestros de la Facultad de Ciencias que me impartieron clases por sus conocimientos compartidos.

Al Banco de México por el apoyo brindado.

A mis amigos por todo su apoyo, confianza, preocupación comentarios y sugerencias.

Contenido

INTRODUCCION

En el capítulo I, se desarrolla una breve historia de como surgen las opciones, como repercutieron en el pasado y como se utilizan hasta hoy en día; es decir, las opciones surgen por la necesidad de cubrirse del riesgo, tanto natural como humano (variación en el precio del mercado del arroz) a partir de 1600, las cuales se han ido modificando de acuerdo al desarrollo económico y político de los diversos países.

En el capítulo II se introducen dos modelos básicos para entender un poco más el desarrollo matemático de las opciones. Del segundo modelo se introduce naturalmente el lema de Itô, por medio del cual se desarrolla el modelo básico para valuar opciones que es el de Black-Scholes, cabe mencionar que este modelo desde 1973 muestra una fórmula exacta para encontrar el valor de una opción. Además que el modelo es aplicable a cualquier institución financiera, ajustándo simplemente sus parámetros los cuales son: el activo subyacente, tasa de interés (o dividendo), la tasa de interés en el mercado y su volatilidad. En este mismo capítulo se manejan dos definiciones muy importantes para valuar opciones que son los *calls* y *puts*.

Para poder encontrar el valor de una opción es necesario resolver la ecuación de Black-Scholes, pero para ello se recurre a una herramienta muy práctica que es la ecuación de calor, la cual tiene soluciones conocidas, es decir, lo que se hace es reducir la ecuación de Black-Scholes a la ecuación de calor y por consiguiente encontrar una solución conocida para Black-Scholes.

En este capítulo también se proporciona un enfoque actuarial para valuar opciones, el cual concuerda con los resultados en Black-Scholes. Lo que se hace con este enfoque es transformar el problema de opciones, a un problema de seguros, considerando sólo herramientas de probabilidad.

En el capítulo III se describen las opciones exóticas más comunes, este tipo de opcio-

nes son más complicadas que las vainilla de acuerdo a su estructura. Se dan las fórmulas explícitas para valuarlas en cada caso descrito. Es importante mencionar que aunque tienen estructuras un poco más complejas, siempre se puede aplicar Black-Scholes para obtener sus respectivos valores.

El capítulo IV es el más importante de toda la tesis, ya que es el tema de interés. Aquí se describen con detalle a las opciones asiáticas, que la única diferencia con las vainilla radica en que su precio de ejercicio depende de la historia de la opción, es decir, está dado mediante el promedio del activo subyacente. En este tipo de opciones se introduce una nueva variable I, que es la que representa la historia de la opción. Lo que se desea hacer con este tipo de opciones, es poder aplicar el lema de Itô y después Black-Scholes para encontrar el valor de las opciones asiáticas.

Para ello lo que se hace es reducir de tres a dos variables el problema , de tal forma que todo quede en términos conocidos. Las nuevas variables a manipular son S/I y t. De aquí se repite el mismo análisis que se hizo para Black-Scholes en el capítulo II.

Por último en el apéndice I se desarrolla el análisis para determinar la procedencia de la ecuación de calor o difusión. Y en el apéndice II se hace la comparación del método actuarial con la fórmula de Black-Scholes, de forma numérica, basado en generar trayectorias aleatorias por medio de Matemática.

Capítulo 1

ANTECEDENTES

Algunos instrumentos derivados como las opciones y futuros, tienen una larga y venerable historia. El primer uso de contratos *forward*[1] (mercado a plazos) en Europa fue posiblemente en Francia en las ferias regionales organizadas bajo los auspicios de los condes de Champagne, mientras que el primer caso conocido de futuros organizado fue en Japón hacia 1600. Este último debió su desarrollo a un clásico problema de desajuste de activo y pasivo entre las rentas y los gastos de los señores feudales japoneses, con muchas de las características que tienen hoy en día las empresas.

Los señores feudales percibían rentas de sus propiedades en forma de una fracción de la cosecha, estas rentas estaban sujetas a fluctuaciones irregulares en función de la estación del año y de factores como el clima, los desastres naturales, así como del precio de mercado y del arroz, mientras que las necesidades de la vida en la corte imperial obligaban a los señores a tener dinero líquido disponible en todo momento. Durante este período se hizo frecuente en las ciudades enviar a los almacenes el arroz sobrante de las cosechas, que quedaba así disponible para satisfacer necesidades de liquidez a corto plazo. El siguiente adelanto consistió en emitir recibos contra arroz depositado tanto en almacenes rurales como en las ciudades, dando así más liquidez a las reservas de arroz. Estos recibos se podían comprar y vender, motivo por el cual ganaron aceptación como otra forma de divisas.

Las opciones como instrumentos de control y modificación de riesgo, se iniciaron en los países anglosajones, aunque la primera referencia escrita que se tiene es en español. En 1688 un judío español asentado en Amsterdam José de la Vega, en su libro *"Confusión*

[1]Un contrato "forward" (a plazo), es aquel cuya liquidación se difiere hasta una fecha posterior estipulada en el mismo.

de Confusiones", describe costumbres y prácticas de la Bolsa de Amsterdam, en donde proporciona la etimología de la palabra opción:

"Llamáronle los flamencos *opsie*, derivado del verbo latino *optio, optionis*, que significa elección, por quedar a elección de quien lo da el poder pedir o entregar la partida al que lo recibe... pues desea el que desembolsa el premio elegir lo que más le convenga, y en falta siempre puede dejar de elegir lo que desea."[3]

Un ejemplo básico que proporciona José de la Vega es el siguiente: "Están las acciones al presente precio de 580; parece que por el gran retorno que se espera de la India, aumento de la Compañía, reputación de los géneros, repartición (dividendo) que se promete, y paz de la Europa subirán a mucho mayor número del que logran. No me delibero, sin embargo, a comprar partidas efectivas, por que me temo que si me faltaran estos designios podrá alcanzarme un despeño o sucederme un desaire. Llégome pues a los que dicen que toman estas opciones, propóngoles cuánto quieren por quedarme obligados a entregar cada partida a 600; hasta tal plazo, ajusto el premio, escríbolo luego en el banco y sé que no puedo perder más de lo que desembolso, con que todo lo que suben de 600, gano, y lo que bajen no me sirve de ansia para el juicio, ni de inquietud para la honra, ni de sobresalto para el sosiego; llegando a 600, poco más o menos, mudo de opinión y penetro que no se halla todo tan pomposo como se entendía, vendo las partidas sin peligro, porque todo lo que bajan es ganancia, y como el que recibió el dinero está obligado a entregármelas al precio acordado, aunque suban de él, no puedo sentir otra pérdida que la de la opción, ni llorar otro castigo que el del premio".

Por más que José de la Vega trató de influenciar a la población española a dar más auge a las opciones, sus esfuerzos fueron inútiles, ya que por esas fechas se desarrolló un sistema financiero moderno en países como Inglaterra, Holanda y posteriormente Estados Unidos con tendencias mucho más mercantilistas.

Sin embargo, el problema de fijar el precio de una opción, es decir de valuarla, no fue atacado desde el punto de vista matemático sino hasta finales del siglo pasado.

Para el año de 1900 en Francia, el matemático Louis Bachelier presenta la primera fórmula seria para calcular el precio de una opción.

No fue sino hasta 1973, cuando **Black-Scholes y Merton** publicaron los artículos fundamentales en el Modelo del Precio de una Opción [5]. Esto se dió porque en esta fecha comenzó rápidamente el cambio con la apertura de opciones comerciales en el intercambio de opciones en la bolsa de Chicago y la llegada de los contratos de futuros financieros basados en las corrientes extranjeras en el Mercado Monetario Internacional de Intercambio Mercantil de Chicago.

Posteriormente al modelo de Black-Scholes surge otro modelo desarrollado por Linter, Sharpe y Treynor, el "CAPM" (Capital Asset Pricing Model), cuyas predicciones son muy generales, imprecisas, sujetas a grandes funciones macro y microeconómicas de difícil parametrización exacta. Por lo cual el modelo más conveniente en la práctica hasta la fecha es Black-Scholes.

1.1 ¿Qué es una Opción?

Considérese a las opciones más sencillas de estudiar, las EUROPEAS. Para definirlas se verá como se pone en funcionamiento un contrato de opciones mediante el siguiente ejemplo:

Primero. Supóngase que un inversionista le da instrucciones a su agente de bolsa para que compre un contrato de opciones de compra de una acción de GCARSO con un precio de ejercicio de $150 y vencimiento de octubre (se está en julio).

En este primer paso, se habla de un *precio de ejercicio*, el cual no es más que el precio del bien o activo subyacente al cual se ejercerá una opción, que en este caso es de $150. También se habla de un *vencimiento* que es mejor conocido como fecha de expiración.

El *activo subyacente*, es la emisión de un buen número de valores, siendo los más comunes las acciones, los índices de mercados accionarios, las divisas extranjeras, los futuros[2], los certificados de la tesorería y hasta los swaps[3].

Segundo. Este agente le pasará estas instrucciones al agente de piso de la Bolsa de Opciones y Futuros (MMOF). Así este último tratará de encontrar a otro agente o in-

[2] Un futuro no es más que una especie de forward estándarizado y negociable; es un mercado organizado, con dispositivos de márgenes y capital para respaldar su integridad.

[3] Un swap es un contrato entre dos partes, mediante el cual se establece la obligación bilateral de intercambiar uno o más pagos en un periodo de tiempo determinado.

versionista que esté dispuesto a vender un contrato de opción de compra de acciones de GCARSO a un precio de $150.

Tercero. Una vez que los dos se han identificado, el precio del contrato será negociado; supóngase aquí que éste fue de $6 por opción: el contrato tendrá 100 opciones cada una de las cuales será respaldada por una acción.

En este caso se lleva a cabo una *posición abierta al riesgo*, la cual consiste en el acto de comprar (en el ejemplo sería el primer agente) o vender (segundo agente) instrumentos financieros derivados con el objeto de mitigar el *riesgo de mercado*[4] de una transacción o conjunto de transacciones.

El agente que desea obtener las opciones de GCARSO, lleva consigo una *posición larga*, ya que por definición es aquella que contrae la entidad al adquirir la opción de compra (o venta) y tiene el derecho de recibir (o entregar) el bien pactado, de acuerdo a su conveniencia.

El agente que vende las opciones lleva una *posición corta*, ya que es la posición que asume la entidad al vender la opción, ya sea de compra (o venta), puesto que se obliga a entregar (o recibir) el bien pactado.

Cuarto. El comprador de la opción de compra entrega al vendedor de la misma $600 ($6x100), cantidad que es transferida a nombre del vendedor a la Cámara de Compensación como parte del margen que él debe constituir.

Obsérvese que el precio de la acción no tiene necesariamente que ser igual al precio de ejercicio. El precio de la acción, justo al momento en que se efectuó el trato, pudo haber sido de $152. En el ejemplo, el inversionista ha obtenido a un costo de $600 el derecho a comprar 100 acciones de GCARSO por $150 cada una durante un período predeterminado. El otro inversionista (el vendedor) ha recibido $600 y se ha comprometido a vender 100 acciones a $150 cada una si el otro inversionista lo desea.

Como se puede ver del ejemplo anterior, el precio de una opción tiene un bajo grado de certidumbre, ya que está expuesto a diversos cambios y esto es debido a que dicho

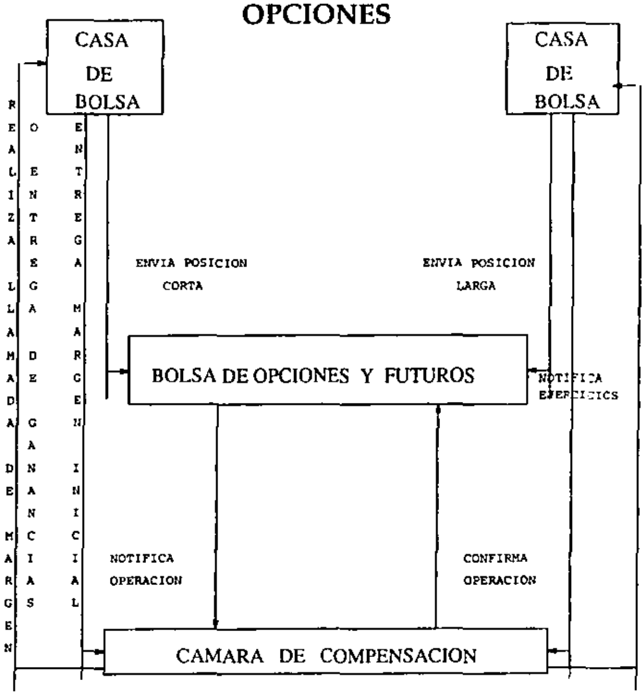
[4]Es el riesgo que enfrentan las instituciones de crédito, resultante de movimientos en los precios de mercado.

precio depende del tiempo de expiración, de una propiedad de aleatoriedad comunmente conocida como volatilidad[5] y de las tasas de interés prevalecientes en el banco.

Quinto. El vendedor deposita en la Cámara de Compensación un margen, es decir, una garantía por una cantidad igual a la prima más otro monto definido por la cámara.

A continuación se muestra un diagrama de como están constituidas las operaciones del mercado de opciones.

ESQUEMA DE OPERACION DEL MERCADO DE OPCIONES



De acuerdo al precio de la opción y al precio de ejercicio se tienen cuatro posiciones:

[5]La volatilidad es una medida de la variabilidad del activo subyacente, es decir, proporciona la dispersión de los posibles precios futuros de una opción; a mayor dispersión de los precios, mayor será el precio de la opción de compra.

Dentro del dinero ("in the money"). Se dice que una opción está dentro del dinero, cuando el precio de mercado del bien subyacente se encuentra por arriba del precio de ejercicio en el caso de opciones de compra ($S > E$, con S el activo subyacente y E el precio de ejercicio), o cuando esté por abajo de dicho precio en el caso de opciones de venta ($S < E$).

En el dinero ("at the money"). Se dice que una opción está en el dinero, cuando el precio de mercado del bien subyacente es igual al precio de ejercicio en el caso de opciones de compra y venta ($S = E$).

Fuera del dinero ("out of the money"). Se dice que una opción está fuera del dinero, cuando el precio de mercado del bien subyacente se encuentra por debajo del precio de ejercicio en el caso de opciones de compra ($S < E$), o por arriba de dicho precio en el caso de opciones de venta ($S > E$). Y por lo tanto la opción no tiene posibilidad de ejercerse.

Si se deseara ejercer la opción, existen dos formas de hacerlo:

Liquidación en efectivo. Se da cuando al ser ejercida la opción, el emisor de ésta entrega en efectivo la diferencia entre el precio de ejercicio y el valor de mercado del bien subyacente[6].

Liquidación en especie. Se da cuando al ser ejercida la opción, el emisor de ésta recibe o entrega la diferencia entre el precio de ejercicio y el valor del mercado del bien subyacente, de acuerdo con lo establecido en el contrato de la opción.

Al realizar la operación del ejemplo, hay que considerar que lleva consigo un riesgo, el cual es considerado un *riesgo de crédito*, ya que éste se refiere a la probabilidad de que los suscriptores o contrapartes de los contratos de derivados no cumplan con la obligación pactada originalmente en estos.

Al invertir en opciones, el poseedor de ellas (el inversionista, en el ejemplo) adquiere consigo un gran riesgo, el cual es clasificado de la siguiente manera:

---

[6]El valor de mercado es el valor o precio de un bien indicado por las cotizaciones de mercado. Para los efectos del presente criterio, el valor de mercado de un título cotizado en el mercado mexicano, será aquel que se publique en el Boletín Bursátil de la BMV. En el caso de valores cotizados en bolsas internaionales, será el que se de a publicar por dichos organismos. En lo que se refiere a divisas, el valor de mercado será publicado en el "Movimiento diario del Mercado de Valores", en la fecha que se trate.

Riesgo específico. Es la componente del riesgo asociada con una posición simple, es decir, afecta sólo a un sector del mercado.

Riesgo no específico. Se le llama también riesgo sistémico, el cual es asociado con factores que afectan a todo el mercado en general.

Riesgo de portafolio. Es la varianza de la ganancia, es decir, es la diferencia entre la ganancia real y la ganancia esperada.

En resumen, del ejemplo anterior, la opción es un contrato realizado bajo las siguientes condiciones:

1) Concede al poseedor un derecho, más no una obligación,

2) El poseedor obtiene una garantía, es decir, un activo subyacente,

3) Posee una fecha de vencimiento establecida de antemano, conocida como fecha de expiración, y

4) Al expirar lleva consigo un precio de ejercicio establecido de antemano.

En los contratos de opciones intervienen dos partes:

a) La parte que compra la opción es quien paga una prima por la adquisición de ésta, y a su vez obtiene un derecho; y,

b) La parte que emite o vende la opción es quien recibe una prima por este hecho, y a su vez adquiere una obligación.

1.2 Tipo de Opciones

Existen dos principales tipos de opciones:

1) Opciones de Compra (*CALL*).- Da al tenedor el derecho, mas no la obligación, de comprar un valor en una fecha determinada.

2) Opciones de Venta (*PUT*).- Le da al tenedor el derecho, mas no la obligación, de vender un valor en una fecha preestablecida.

También las opciones se clasifican de acuerdo al tiempo en que pueden ser ejercidas:

a) Opciones Europeas.- Sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento.

b) Opciones Americanas.- Pueden ejercerse durante la vida de la opción, es decir, en cualquier momento antes de expirar.

Además de las opciones Americanas y Europeas, existe una familia de opciones con características un poco más complejas que han sido diseñadas para cubrir riesgos más complicados, las llamadas OPCIONES EXÓTICAS, este tipo de opciones se desarrollarán con detalle a partir del capítulo III, por lo cual aquí sólo mencionaremos los tipos que existen, así como un caso específico:

1) Opciones sobre el precio medio de un activo durante un período determinado (OPCIONES ASIÁTICAS).

Este tipo de opciones se generan a partir de un promedio, es decir, no importa el valor del activo subyacente o precio de ejercicio en un momento determinado, sino que interesa el promedio de todos los valores del activo subyacente o precio de ejercicio en un intervalo de tiempo. Para ello, considere los dos tipos de promedio:

a) Promedio sobre el activo subyacente.

Una opción *call* asiática paga la diferencia (si es positiva) entre el precio medio de un activo determinado en un período preestablecido y el precio de ejercicio (*strike*), es decir, $Max[(S_M - k)]$ donde S_M es el valor medio del activo subyacente S durante la vida de la opción.

De todas las opciones exóticas, las opciones asiáticas son quizás las que más utilidad encuentran los usuarios comerciales, un ejemplo claro para ver su aplicación sería el siguiente:

Ejemplo 1 *Una línea aérea es afectada si el precio medio que paga por el keroseno de aviación sube durante el año, pero le importa muy poco si hoy el* *precio es $220\,USD/ton$, mañana 225 y pasado mañana 215. Cualquier productor y consumidor de materias primas suele encontrarse en la misma situación; su riesgo es sobre el precio medio y no sobre cada precio spot[7] individual diario.*

Los términos típicos de una opción asiática sobre el keroseno de aviación podrían ser los siguientes:

Opción call asiática sobre keroseno de aviación.

Activo subyacente: keroseno CIF NWE(Platt's)

Nominal: 10,000 toneladas

Strike: 225 USD/tonelada

Comienzo de la media: Dentro de un mes

Final de la media: Dentro de 7 meses (6 meses en total)

Frecuencia de la media: Diaria

Funcionamiento de la media: A partir de la fecha del comienzo de la media se anotará cada día laborable el precio por tonelada del activo subyacente publicado en Platt's Oilgram Price Report, y al llegar a la fecha del final de la media se calculará el precio medio dividiendo la suma de los precios anotados por el número de días laborables entre el comienzo y el final de la media. La cantidad así obtenida será el; "precio medio" a efectos de calcular el valor terminal de la opción.

Mecanismo de la opción: Si el "precio medio" definido en el párrafo anterior es superior al strike al término de la opción el vendedor de la opción pagará al comprador una suma en USD calculada del modo siguiente:

$$Nominal * (preciomedio - strike)$$

Si el precio medio definido en el párrafo anterior es inferior al strike (precio de ejercicio), al término de la opción el vendedor de la opción no deberá pagar

[7] Un contrato "spot" (al contado) es aquel cuya liquidación ("settlement") es inmediata o a muy corto plazo.

nada al comprador.

Prima: En consideración de prima por la presente opción el comprador pagará al vendedor USD (dólares) 10 por tonelada (por ejemplo: evidentemente los precios varían enormemente según cambie el precio de mercado), es decir, un total de USD 100 000.

Con la opción anterior el comprador consigue asegurarse un precio de compra de keroseno por debajo de USD 235 (225 de strike y 10 de prima), pero conservando la posibilidad de beneficiarse de bajas en el precio de keroseno.

b) Promedio sobre el precio de ejercicio.

Una opción *call* asiática paga la diferencia (si es positiva) entre el precio del activo S y el precio de ejercicio E, este último es reemplazado por $\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau$. Por lo tanto el pago al expirar queda como

$$max\left(S - \frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau, 0\right)$$

.

De aquí en adelante, el inciso b) es el que se utilizará para definir a una opción asiática.

2) Opciones que sólo llegan a existir (aparecen), o dejan de existir (desaparecen) si ocurre algún evento que las afecte (OPCIONES BARRERA).

Ejemplo 2 *Considere una compañía española que está compitiendo por un contrato en Estados Unidos. El tipo de cambio es actualmente de 120 ESP/USD (pesetas sobre dólar) y la compañía tiene confianza en poder ganar el contrato porque puede expotar con beneficios suficientes a los niveles actuales del dólar, pero si la peseta se revalúa con respecto al dólar la compañía sería incapaz de competir por el contrato sin perder dinero, ya que sus rivales en E.U.A. podrían ganar el precio. Por otra parte, si la peseta bajase contra el dólar hasta un nivel de 130, por ejemplo, la Compañía estaría completamente segura de poder ganar el contrato porque sus competidores serían mucho más caros. El contrato va a ser adjudicado dentro de seis meses. ¿Qué puede hacer la Compañía?*

La solución más adecuada a este problema es comprar una opción "con barrera", con las siguientes características:

Opción USD put/ESP call "over-and-out".

Plazo: *6 meses*

Strike: *120*

Barrera: *130*

Mecanismo de barrera: La opción se comporta a todos los efectos como una opción europea normal que da derecho al comprador a vender dólares al precio de ejercicio en la fecha de vencimiento, pero con la siguiente excepción:

Si en cualquier momento entre el comienzo de la opción y su vencimiento el tipo de cambio ESP/USD alcanza o sobrepasa el nivel de barrera ($ESP/USD \geq 130$), la presente opción queda automáticamente anulada y deja por lo tanto de existir.

Una opción de este tipo es evidentemente, más barata que una opción europea normal porque existe una posibilidad de que desaparezca. El comprar esta opción cuesta mucho menos, por lo que tiene menor efecto sobre la competitividad de la empresa (y por lo tanto sus beneficios), pero existe un riesgo de que desaparezca. El riesgo es más aparente que real, por otra parte, porque la única circunstancia en la que la opción puede desaparecer es si el dólar sube mucho, y si la opción desaparece es tan sólo porque la Compañía puede vender sus dólares a un nivel mucho más ventajoso que antes.

3) Opciones sobre el precio máximo o mínimo de un activo durante un período determinado (OPCIONES LOOKBACK).

Ejemplo 3 *Un ejemplo sería el funcionamiento de una opción call USD/ put JPY lookback, con un plazo de un año. Supóngase que la opción empieza hoy y el tipo de cambio está a 120 JPY/USD. El precio de ejercicio de la opción es 125. Durante la vida de la opción se observa constantemente el precio spot USD/JPY, y se anota su nuevo precio máximo cada vez que rebasa el precio máximo anterior. Al vencimiento de la opción se compara el máximo así observado, por ejemplo 134.25 con el* *precio de ejercicio, y se calcula la cantidad que el comprador recibe del vendedor de la opción al vencimiento:* $134.25 - 125 = 9.25$ *yen.*

Las opciones lookback tienen un valor más elevado que las europeas normales porque pagan con más seguridad. En el ejemplo anterior la opción lookback paga 9.25 yen aún si el subyacente acaba por debajo de 125 al vencimiento (empieza a 120, sube hasta el máximo de 134.25 y baja de nuevo por debajo de 125), mientras que una opción europea sólo paga si el precio spot está por encima del strike únicamente al vencimiento. Una opción lookback suele valer aproximadamente el doble de una opción europea si el precio forward y el precio spot son iguales.

El número de aplicaciones de las opciones lookback es menor que el de las opciones con barrera (y mucho menor que el de las opciones asiáticas, muy frecuentes en mercados de materias primas), esto es porque muy pocas empresas tienen riesgos en sus negocios que dependen del precio máximo o mínimo de un activo durante un período determinado. El uso principal de las opciones lookback es directo; dado que su valor es muy alto, es frecuente que sean vendidas para generar una prima elevada, que es luego utilizada por el vendedor para comprar otras opciones que sí necesita para su negocio.

4) Opciones sobre opciones (OPCIONES COMPOUND).

Las opciones sobre opciones encuentran su utilidad en los casos en que no está claro si va a hacer falta una opción y que no se desea desembolsar una prima muy fuerte, por ejemplo, en el caso de una empresa compitiendo por un contrato de varios años en el extranjero. Si gana el contrato necesitará protección contra el riesgo de tipos de cambio, luego tendrá que comprar opciones, pero si no gana no necesitará opción alguna. Comprar opciones que puede que no hagan falta jamás es demasiado caro, pero una opción compuesta puede resultar aceptablemente barata.

5) Opciones que dan el derecho de elegir sobre un *put o un call* (OPCIONES CHOOSER).

Este tipo de opciones han aparecido esporádicamente en el mercado y da el derecho al poseedor como su nombre lo dice, a escoger en una fecha determinada si la opción deseada es un *put* o un *call*.

Ejemplo 4 *Podría ser la emisión de warrants*[8] *lanzada por Bankers Trust poco después de la invasión a Kuwait por Iraq.*

La situación en aquel momento no era clara; el aumento en el precio del petróleo spot había sido muy alto, por lo que era posible pensar al principio de la confrontación que podría haber una solución negociada, que volvería a bajar tan rápido como subió y un put sería una opción adecuada. Por otra parte, también era fácil imaginar una escalada del conflicto que podría hacer subir fuertemente el precio del petróleo (hubo incluso un personaje público en un país de la OPEC que dijo que el petróleo podría subir hasta 100 dólares por barril o más aún si las cosas se complicaban). Una situación de tal naturaleza necesitaria evidentemente un call. La situación fácil (comprar un put y un call) era poco interesante debido a su elevado costo.

La solución de Bankers Trust fue bastante ingeniosa y consistió en lanzar una emisión de warrants (esencialmente opciones) call sobre futuros de petróleo, con un plazo de aproximadamente nueve meses que daba el derecho al poseedor a comprar un barril de petróleo a un precio fijo próximo al precio en el mercado de entonces, lo que representaba buena protección contra aumentos en el precio del petróleo. Al cabo de unos pocos meses el comprador tenía el derecho de convetir sus calls en puts, con lo que si la situación se resolvía en los primeros meses, el poseedor de la opción podría beneficiarse de la esperada baja del precio del petróleo.

6) Opciones sobre más de un activo (OPCIONES BINARIAS).

Ejemplo 5 *Se puede definir una opción sobre la diferencia entre la variación de dos índices bursátiles distintos (Nikkei y S&P 500), sobre dos índices bursátiles donde la opción paga el que más haya subido de los dos. También es posible definir opciones como los llamados "quantos", donde la apreciación de un índice bursátil se paga en otra divisa; por ejemplo, una opción sobre el Nikkei en la que cada punto del Nikkei vale un dólar (en lugar de valorar el Nikkei en yen), pase lo que pase con el tipo de cambio USD/JPY. El concepto de una opción sobre dos activos se puede extender fácilmente a opciones con barrera; se puede definir, por ejemplo, una opción sobre un activo A que desaparece si otro activo B alcanza un nivel determinado.*

---

[8] Un warrant es un valor corporativo parecido a un *call*. Este instrumento le otorga al tenedor el derecho, mas no la obligación, de comprarle directamente a la compañía emisora acciones a un precio preestablecido (precio de ejercicio) y durante un período de tiempo predeterminado. Cada warrant especifica el número de acciones que el tenedor tiene derecho a comprar, el precio de ejercicio y la fecha de expiración.

7) Opciones sobre la suma, diferencia, producto u otras operaciones entre uno o más activos (OPCIONES COMBINADAS).

En este caso se pueden definir opciones más complejas como son: opciones sobre el cuadrado del precio de un activo, o sobre cualquier otra función (cubo, raíz, cuadrada, etc.) del mismo.

En este capítulo sólo se mencionó a qué se refiere cada tipo de opción exótica y se dio un ejemplo concreto en cada caso. Como ya se mencionó anteriormente, en el capítulo III se explicará como valuarlas, pero con muchisimo más detalle se desarrollará el objetivo central de esta tesis que es la valuación de las *opciones asiáticas*.

1.3 Objetivo de las Opciones

Las opciones son instrumentos financieros que tienen básicamente los siguientes objetivos:

1.3.1 Nivel Microeconómico

a) Es un producto con el cual un inversionista puede protegerse del riesgo.

Para entender mejor el concepto anterior se dará a continuación un ejemplo:

Ejemplo 6 *Considérese un inversionista que en agosto tiene 100 acciones de GFB. El precio actual de cada una de ellas es de $52. Este inversionista está preocupado porque presiente que el precio de la acción puede bajar abruptamente en los próximos dos meses, sin embargo, no desea vender las acciones, por lo que quiere nada más protegerse. La manera como lo puede hacer es la siguiente:*

El inversionista podría comprar opciones de venta al mes de octubre (recuérdese que se está en agosto) para vender las 1000 acciones a un precio de ejercicio de $50. Debido a que el contrato de opción ampara 100 acciones, él necesitará comprar 10 contratos de opciones. El precio de la opción fue pactado en $200, por tanto, si quiere protegerse necesita invertir $2000 ($200 x *$10 contratos de opciones).*

Esta estrategia de protección o cobertura le cuesta \$200, pero le garantiza que las acciones pueden ser vendidas por \$50 cada una. Si las opciones son ejercidas entonces se obtienen \$50,000 (1000 x \$50), aunque tomando el costo en cuenta obtenemos \$48,000. Sin embargo, si el precio de la acción permanece arriba de \$50, entonces las opciones no son ejercidas y expiran sin valor.

Como se puede observar, las opciones proveen un seguro, ya que protege de fluctuaciones en los precios de las acciones en el futuro pero manteniendo la posibilidad de beneficiarse de movimientos favorables en los mismos.

b) Un inversionista las puede utilizar para invertir o especular.

Como ya se mencionó una opción también puede ser usada con el propósito de especular, es decir, para tratar de hacer una ganancia cuando se tiene la creencia de un movimiento favorable en los precios. A continuación se presenta un ejemplo de este motivo.

Ejemplo 7 *Supóngase que en septiembre, una inversionista quiere especular tomando una posición donde ella ganará si el precio de una acción (suponga ALFA) se incrementa. Actualmente, esta inversionista tiene \$3,900 para sus operaciones de especulación.*

Ahora, supóngase que el precio actual de la acción ALFA es de \$39 y que una opción de compra con vencimiento a 30 días tiene un precio de ejercicio de \$40. Se está vendiendo por \$1.50.

Con esta información la inversionista tiene las siguientes dos alternativas:

1) *Comprar 100 acciones, y*

2) *Comprar 2600 opciones.*

Supóngase que existen únicamente dos escenarios posibles dentro de 30 días: a)que el precio de la acción ALFA se incremente a \$45 y, b)que el precio de la acción baje a \$35. Los resultados en cada uno de los dos escenarios son los siguientes:

Escenario (a): el precio de ALFA se eleva a \$45.

1) *Bajo la alternativa 1 (comprar 100 acciones). La inversionista tendrá una ganancia equivalente a la diferencia de los precios multiplicada por el número de acciones que compró en septiembre. Esto es:*

$$100 \times (\$45 - 39) = \$600.$$

2) *Bajo la alternativa 2 (comprar 2600 opciones). La inversionista podría ejercer sus 2600 opciones ya que le dan el derecho de comprar las acciones de ALFA a \$40 cuando en realidad valen \$45. Así , al ejercerlas tendrá 2600 acciones y su ganancia por acción será de \$5, por lo que la ganancia total es:*

$$\begin{aligned} 2,600 \times \$5 &= \$13,000 \\ menos: costo\ de\ las\ opciones &= \$3,900(2,600 \mathrm{x} \$1.50) \\ Ganancia\ Total &= \$9,100. \end{aligned}$$

Escenario (b): el precio de ALFA baja a \$35.

1) *Bajo la alternativa 1 (comprar 100 acciones). Esta alternativa arroja una pérdida de \$4 por acción, por lo que la pérdida es de \$400, es decir:*

$$100 \times (\$39 - \$35) = \$400.$$

2) *Bajo la alternativa 2 (comprar 2,600 opciones). La opción no se va a ejercer ya que carece de valor. La pérdida aquí es el costo de las opciones, esto es, \$3,900. Se dice que una opción de compra, el día de expiración, carece de valor si el precio de ejercicio es mayor al precio de la acción ese mismo día, es decir, está "Out of the money"..*

En conclusión: La alternativa de usar las opciones para especular en lugar de las acciones, hace que las ganancias sean mucho mayores (\$600 vs \$9,100); pero también el uso de opciones trae como consecuencia que en caso de que la acción baje de precio, las pérdidas se magnifican (\$400 vs \$3,900). Sin embargo, si la reducción en el precio es muy profunda, entonces la opción de hecho limita la pérdida a \$3,900. Por este motivo los especuladores prefieren más el uso de las opciones.

1.3.2 Nivel Macroeconómico

1) Formación más eficiente de precios de valores subyacentes,

2) Mejorar los niveles de liquidez en el mercado,

3) Ampliar oportunidades de arbitraje [3], y

4) Permitir perfiles de riesgo y rendimientos controlables.

1.4 Uso de la Opciones

Las opciones son utilizadas de la siguiente manera:

a) Para ajustar el riesgo y rendimientos de una posición determinada a un costo muy bajo.

b) Para cubrirse de los riesgos de movimientos en los precios y en las cantidades, en otras palabras, las opciones son mejores que los futuros cuando la cantidad que uno desea proteger es incierta.

De todo lo anterior, lo que interesa es calcular el precio de una opción, así como el tiempo exacto en que es conveniente ejercerla. Para ello es importantísimo el modelo de Black-Scholes, el cual se describirá en esta tesis en el siguiente capítulo.

Aquí se mencionará únicamente sus ventajas y desventajas para su aplicación.

El modelo de Black-Scholes ofrece una fórmula precisa para calcular con un alto grado de exactitud el valor de las opciones, al igual que ofrece una estrategia que permite cubrir el riesgo en una posesión de opciones, a base de su función de pagos (*"Payoff Function"*).

1.5 Ventajas del modelo de Black-Scholes

a) Es aplicable a cualquier institución financiera, al cambiar sólo los parámetros requeridos por la fórmula, de acuerdo a los requerimientos de la institución.

b) No es totalmente exacto, pero resulta muy fácil adecuarlo para que se ajuste a la realidad.

c) Requiere poca información sobre el mercado para el cálculo del precio de opciones, pues únicamente es necesario conocer: el activo subyacente, su tasa de interés (o dividendo), la tasa de interés en el mercado y cuanto se mueve la varianza del activo subyacente.

Capítulo 2

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS.

Para entender un poco más a las opciones, es necesario desarrollar algunos elementos matemáticos para formular los modelos que permiten su descripción cuantitativa. Este capítulo se refiere al cálculo del precio de una opción, así como cuál es el mejor tiempo para ejercerla, considerando siempre, mientras no se indique lo contrario, que las opciones son europeas (ya que son las más fáciles de estudiar).

Para llevar a cabo un buen análisis de cuál es el precio de ejercicio (*strike) de una opción, primeramente se mencionarán dos modelos básicos.*

2.1 Modelos para Opciones

2.1.1 Modelo del Valor Presente

Uno quisiera saber cuánto se tendría que pagar ahora, para garantizar un monto E en un tiempo futuro T, en otras palabras, cuál es el valor presente. Para dar respuesta a esta pregunta se realiza el siguiente análisis:

Sean

$r=$ tasa de interés constante,

$M(t)$= dinero en el banco al tiempo t,

E= valor futuro al tiempo T.

Aplicando las definiciones anteriores para determinar cuál es el valor del pago al tiempo t , se puede obtener el modelo siguiente:

Si el monto al tiempo t es $M(t)$, uno desearía saber cuál es el incremento del monto al tiempo $t + \Delta t$. Como se sabe, toda cantidad invertida un cierto tiempo en el banco, está sujeto a una tasa de interés, r, por lo cual, a primer orden, el incremento en $M(t)$ es:

$$\Delta M = M(t) r \Delta t,$$

lo que implica ($\Delta t \to 0$):

$$\frac{dM}{dt} = rM(t). \tag{2.1}$$

Como se puede ver el modelo es lineal, ya que se tiene derivadas sólo de primer orden. Si se resuelve la ecuación diferencial por medio del método de variables separables , se encuentra la siguiente solución:

$$M = Ce^{rt},$$

con C = constante de integración.

Como $M = E$ al tiempo $t = T$, entonces el valor del pago al tiempo t es:

$$M = Ee^{-r(T-t)}.$$

Ahora se considera un caso más general en donde la tasa de interés es una función del tiempo, $r(t)$, de donde se obtiene de manera análoga la solución:

$$M = Ee^{-\int_t^T r(s)\,ds}.$$

2.1.2 Modelo para Valuar Opciones

Las condiciones de cambio constantes en el mercado, afectan el comportamiento del activo subyacente y es necesario incorporarlas en los modelos para valuar opciones. Supóngase que procesos estocásticos de tipo markoviano[1][10] son los adecuados para describir el comportamiento de productos financieros[13].

El cambio absoluto en el precio de la opción no es en si mismo una cantidad útil[2]. Con cada cambio en el precio se asocia una ganancia normalizada, definida como el cambio en el precio dividido por el valor original, dS/S.

Ahora se dará un modelo para el cálculo de la ganancia.

Sean

t= *tiempo,*

S= *precio del activo subyacente.*

Si se consideran pequeños intervalos de tiempo dt, en los cuales S cambia como $S+dS$, se desea saber a qué corresponde la ganancia de la opción normalizada dS/S.

La ganancia del modelo se descompone en dos partes:

1) *$\mu\, dt$ corresponde a la ganancia que se obtiene al invertir el dinero en el banco libre de riesgo , donde μ es la tasa media de interés en el crecimiento del precio de la opción y es por lo tanto considerada constante, y*

---

[1] Un proceso markoviano es un proceso estocástico para $X(t)$, es decir, la distribución de probabilidad condicional para un valor futuro de X y la incorporación de la nueva información que se genere, no debe afectar la probabilidad condicional ya calculada. Dicha probabilidad condicional para X depende sólo de una cantidad finita de información pasada, por lo tanto se puede escribir la probabilidada para $X(t) = X$ al tiempo T y con condición $X(t) = x$ como $p(x,t) = P(x,t : X.T) = prob X(T) = x/x(t) = x$ con $t < t$

[2] Las cantidades absolutas no son útiles, ya que si se compara, por ejemplo, en dos monedas distintas el aumento de cualquier producto, dicho aumento depende claramente de la moneda escogida. Pero si se comparan sus porcentajes (o cantidad normalizada), éstos son independientes de la moneda escogida.

2) *el cambio aleatorio en el precio de la opción en respuesta a efectos externos. Esto se representa al sumar el término σdX a dS/S, en donde dX representa el movimiento browniano o proceso de Wiener[10].*

σ es la volatilidad, es decir, mide la desviación estándar del activo subyacente, y

dX_t es una variable aleatoria que se distribuye como una normal $N(0, dt)$.

De acuerdo a los dos factores que conforman la descomposición, se obtiene la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE):

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt \tag{2.2}$$

Considérese el caso en el que $\sigma = 0$, es decir, el activo subyacente está libre de riesgo. La ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt, \quad o \quad \frac{dS}{S} = \mu S$$

Si μ es constante, se obtiene la solución explícita de la ecuación, usando el método de variables separables:

$$S = S_0 e^{\mu(t-t_0)}$$

con S_0 el valor de S al tiempo $t = t_0$.

Por lo tanto, si $\sigma = 0$, el precio es determinístico y se puede predecir en un futuro con certeza.

Ahora, si se considera el término de la ecuación σdX, el problema resulta más complejo, pues se tiene en efecto una EDE cuya solución es a su vez un proceso estocástico. (No tiene sentido visualizar a la solución como una única curva. Es más útil pensar en las diferentes realizaciones de este proceso).

Como se mencionó con anterioridad dX representa un proceso de Wiener o movimiento Browniano, que queda completamente caracterizado por $dX_t \sim N(0, dt)$. Por lo tanto su función de densidad es:

$$f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\phi^2}.$$

Se define al operador E por:

$$E[F(\cdot)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\phi) e^{-\frac{1}{2}\phi^2} d\phi, \tag{2.3}$$

para alguna función F. Se tienen las siguientes propiedades:

$E[\phi] = 0$, *y*

$E[\phi^2] = 1$.

Ahora considérense las propiedades de dS/S y la propiedad markoviana, entonces $S + dS$ depende sólo del precio de hoy y

$$E[dS] = E[\sigma S dX + \mu S dt] = \mu S dt$$

pues $E[dX] = 0$. Además

$$var[dS] = E[dS^2] - E[dS]^2 = E[\sigma^2 S^2 dX^2] = \sigma^2 S^2 dt.$$

A partir de lo anterior, se genera el resultado más importante para la manipulación de variables aleatorias.

2.2 Lema de Itô

Lema 1 *Este lema representa para funciones que dependen de una variable aleatoria, el análogo de la expansión en series de Taylor.*

Para poder desarrollar el lema de Itô, se introducirán los siguientes resultados:

Con probabilidad uno $dX^2 > dt$ cuando $dt > 0$.

Supóngase que $f(S)$ es una función continua de S y por el momento se olvidará que S es estocástica. Si S varía en pequeñas cantidades de dS, entonces claramente $f(S)$ varía para pequeños montos provistos.

Aplicando Taylor se obtiene:

$$\Delta f = \frac{df}{dS}\Delta S + \frac{d^2 f}{2dS^2}(\Delta S)^2 + \ldots \tag{2.4}$$

Considerando la ecuación (2.2) y elevándola al cuadrado se obtiene:

$$dS^2 = S^2\sigma^2 dX^2 + 2S\sigma\mu\, dt\, dX + \mu^2 S^2 dt^2. \tag{2.5}$$

Tomando la magnitud de cada término como $dX = O(\sqrt{dt})$, obsérvese que:

El primer término $\sigma^2 S^2 dX^2$, es grande para dt pequeña, por lo cual domina a los otros dos términos restantes que son del orden de $dt^{3/2}$ y dt^2 respectivamente, los cuales son más pequeños para dt pequeñas.

Por lo tanto $dS^2 \approx \sigma^2 S^2 dt$.

Por la conclusión anterior y utilizando el resultado($dX^2 > dt$), se obtiene una vez sustituyendo en la ecuación (2.4) que a primer orden:

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{dS}(\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2}dt \\ &= \sigma S \frac{df}{dS}dX + \left(\mu S\frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2}\right)dt. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Este es el lema de Itô relativo a cambios pequeños en una función de variables aleatorias.

2.2.1 Generalización del Lema de Itô

Se considera una función $F(S,t)$ con variables S y t.

Se puede expander $f(S+dS, t+dt)$ en series de Taylor como:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial f}{\partial dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\Delta S)^2 + \ldots,$$

usando la expresión (2.2) para dS y los resultados para dX^2, se encuentra que:

$$df = \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dX + \left(\mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)dt. \tag{2.7}$$

2.3 Valuación de una Opción

En esta sección se introducirá la siguiente notación:

Sea V el valor de una opción, donde V es una función del valor actual del activo subyacente S y el tiempo t, es decir, $V = V(S,t)$.

El valor de la opción depende de los siguientes parámetros:

1) *σ= la volatilidad del activo subyacente.*

2) *E= el precio de ejercicio determidado de antemano.*

3) *T= tiempo de expiración.*

4) *r= tasa de interés prevaleciente en el banco.*

Como se vio en el capítulo I, existen dos tipos de opciones call y put. Ahora se considerará la valuación de un call y un put.

2.3.1 Valor de un Call

Definición 1 *Una opción call (o de compra) le da al poseedor el derecho, mas no la obligación de comprar un valor en una fecha determinada a un precio preestablecido.*

La valuación debe hacerse en un tiempo específico, en este caso se tomará a $t = T$.

De aquí se derivan dos casos:

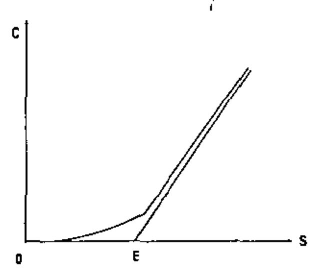
1) *Si $S > E$, al expirar, tiene sentido financiero ejercer la opción call (ya que se esta "in the money", dentro del dinero), tomándola sobre un monto E, de donde se obtiene una ganancia del activo subyacente. Por lo cual el beneficio obtenido para cada transacción es entonces $S - E$.*

2) *Si $S < E$ al expirar, no debería ejercerse (se encuentra "out of the money, fuera del dinero) la opción pues existiría una pérdida de $E - S$. En este caso la opción al expirar tiene un valor nulo.*

Tomando los dos casos anteriores, se tiene como resultado la valuación de un call escrita como:

$$C(S,T) = max(S - E, 0). \tag{2.8}$$

La siguiente figura muestra el diagrama de pago para un call, $C(S,T)$ y el valor de la opción $C(S,t)$ antes de expirar, como una función de S.



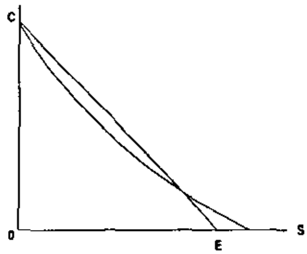
2.3.2 Valor de un Put

Definición 2 *Una opción put (o de venta), da al tenedor el derecho mas no la obligación de vender un valor en una fecha determinada, a un precio establecido de antemano.*

Cada opción y portafolio tiene un pago al expirar. En este caso si $S > E$ la opción put carece de valor, pero si su valor es positivo cuando $S < E$, entonces el beneficio está dado por $E - S$.

De la misma forma que un call se obtiene el pago al expirar como:

$$P(S,T) = max(E - S, 0),$$



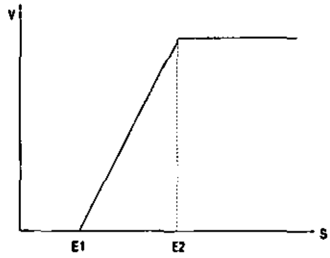
Como en el caso de un call, la figura anterior muestra el diagrama de pago de un put, $P(S,T)$, y el valor de la opción $P(S,t)$ antes de expirar, como función de S.

De acuerdo a estas dos definiciones, se pueden hacer diversas combinaciones.

Ejemplo 8 *Considérese una opción call, con dos precios de ejercicio, E_1 que expira al tiempo t_1 y E_2 que expira al tiempo t_2, en donde $E_1 < E_2$ al expirar, siguiendo las definiciones de un call se obtiene la valuación:*

$$B = max(S - E_1, 0) - max(S - E_2, 0),$$

y su gráfica está dada por:



2.3.3 Paridad entre un *Call* y un *Put*

Supóngase que se tiene un activo largo, un put largo y un call corto, ambos tienen la misma fecha de expiración, T, y el mismo precio de ejercicio, E. Se denota por π el valor del portafolio.

Sea

$$\pi = S + P - C,$$

donde P y C son los valores del put y call respectivamente.

El pago para el portafolio es:

$$S + max(E - S, 0) - max(S - E, 0),$$

la expresión anterior puede simplificarse como:

$$\pi = \begin{cases} S + (E - S) - 0 = E, & si\ S < E, \\ S + 0 - (S - E) = E, & si\ S \geq E, \end{cases}$$

por lo tanto si $S > E$ o $S < E$ al expirar, el pago para este portafolio siempre será E.

Si se desea garantizar E al tiempo $t = T$, ¿Cuánto se debería pagar por el portafolio?

Para contestar la pregunta, se requiere del siguiente resultado:$M = Ee^{-r(T-t)}$, lo que garantiza un monto E al tiempo $t = T$. Por lo tanto el portafolio nuevo es: $\pi = Ee^{-r(T-t)}$.

De lo anterior se llega a lo que se llama put-call parity, lo cual está dado por la siguiente fórmula:

$$S + P - C = Ee^{-r(T-t)}. \tag{2.9}$$

En esta fórmula existe la eliminación del riesgo, pues los términos aleatorios se cancelan.

2.4 Ecuación de Black-Scholes

Como ya se mencionó en el primer capítulo, la solución a esta ecuación ofrece con un alto índice de confiabilidad el precio de una opción, por lo cual en ésta sección se discutirá con más detalle.

Se presentan a continuación algunos hechos, para poder entender mejor la ecuación de Black-Scholes.

1) *El precio del activo subyacente, S, es un proceso lognormal que satisface la EDE(2.2).*

2) *El interés libre de riesgo, r, y la volatilidad del activo, σ, son conocidas como funciones del tiempo sobre la vida de la opción (por simplicidad se considerarán en lo que sigue constantes).*

3) *No hay costos de transacción asociados con las inversiones de portafolio. En general son bastante altos durante la vida de una opción para un inversionista privado, pero para un participante institucional en el mercado son mucho menores, porque la mayoría de las posiciones que tiene abiertas se neutralizan, por lo que la necesidad de equilibrar frecuentemente la posición se reduce. Además, los participantes institucionales tienen costos de negociación mucho menores por su gran volumen.*

4) *El pago del activo subyacente no tiene dividendos durante la vida de la opción.*

5) *No existe posibilidad de arbitraje[1].*

6) *Las transacciones del activo subyacente, pueden efectuarse de manera continua en el tiempo.*

7) *Ventas cortas son permitidas y los activos cuentan con dividendos. Se supone que se puede comprar y vender un número (no necesariamente entero) de activos subyacentes.*

Ahora se construirá detalladamente la ecuación de Black-Scholes, utilizando como base el lema de Itô.

Supóngase que se tiene una opción con valor $V(S,t)$, que depende de S y t. V puede ser un call o un put.

Usando el lema de Itô (2.7), se puede escribir a V como:

$$dV = \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dX + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt. \tag{2.10}$$

Esto da el camino aleatorio seguido por V. Se construirá un portafolio de tal forma que se elimine cierta componente aleatoria mediante la elección adecuada de cierto número Δ.

El valor del portafolio es:

$$\pi = V - \Delta S. \tag{2.11}$$

Por consiguiente el incremento en la valuación de este portafolio en cada paso del tiempo es:

$$d\pi = dV - \Delta dS. \tag{2.12}$$

Aquí Δ se mantiene fijo en cada paso del tiempo.

Sustituyendo (2.10)y (2.2) en (2.12) se obtiene:

$$d\pi = \sigma S\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)dX + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu\Delta S\right)dt, \tag{2.13}$$

y escogiendo a

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \tag{2.14}$$

la ecuación anterior se reduce a:

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt. \tag{2.15}$$

Existe una forma alternativa de deducir la ecuación de Black-Scholes, por medio de consideraciones actuariales simples, la cual se presenta con detalle en la última sección de este capítulo [Sección 2.6].

Si se considera ahora la ganancia libre de riesgo del mismo monto π, se tendría $r\pi dt$ en un tiempo dt.

En ausencia de arbitraje, no es posible garantizar un riesgo menor al invertir el monto π en el portafolio. Por lo tanto se tiene:

$$r\pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt, \tag{2.16}$$

sustituyendo (2.11) y (2.14) en (2.16) se tiene:

$$\begin{aligned} r(V - \Delta S)dt &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt, \\ rV - r\frac{\partial V}{\partial S}S &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene :

$$\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \tag{2.17}$$

que se conoce como Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes.

De la ecuación (2.17), se observa que:

a) Δ *es la tasa de cambio en el valor de una opción, en un portafolio de opciones con respecto a* S.

b) *El operador lineal diferencial* L_{BS} *dado por:*

$$L_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + r\frac{\partial}{\partial S} - r,$$

tiene una interpretación financiera: es una medida de la diferencia entre la ganancia si se invierte en el portafolio (2.11) y la ganancia al depositarlo en el banco.

c) *La ecuación de Black-Scholes no contiene a* μ, *es decir, el valor de una opción es independiente de que tan rápidamente crece un activo.*

d) *La ecuación es de tipo parabólico[1].*

Ahora se determinarán las condiciones frontera para un put y un call:

2.4.1 Condiciones Frontera y Final para Opciones Europeas

Para un call el pago al expirar se denota por $C(S,T)$ *con* E=*precio de ejercicio y* T=*fecha de expiración.*

La condición final puede ser determinada fácilmente en $t = T$, *pues está dada por:*

$$C(S,T) = max(S - E, 0).$$

Las condiciones de frontera son determinadas por el precio del activo cuando $S = 0$ *y* $S \to \infty$. *Se puede ver que para (2.2) se tienen los casos siguientes:*

1) *Si* $S = 0 \Rightarrow dS = 0$, *por lo tanto* S *no cambia*

2) *Si* $S = 0 \Rightarrow$ *al expirar el pago es* $C(0,t) = 0$.

3) *Si* $S \to \infty$ *la valuación es* $C(S,t) = S - E \sim S$.

Análogamente para una opción put, la condición final sería el pago

$$P(S,T) = max(E - S, 0).$$

En el caso límite en el que $S = 0$, el pago final debe ser ciertamente E y por consiguiente:

$$P(0,t) = Ee^{-r(T-t)},$$

más generalmente se obtiene:

$$P(0,t) = Ee^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}.$$

Si $S \to \infty$, el valor de la opción $P(S,t) \to 0$.

2.4.2 Opciones con Pago de Dividendos sobre el Activo

El precio de una opción generalmente es afectado en su activo subyacente por dividendos, por lo cual la ecuación de Black-Scholes debe ser modificada. Por lo tanto en donde el pago aporta dividendos, se requieren las siguientes propiedades:

1) *Los pagos pueden ser determinísticos o estocásticos.*

2) *Los pagos en el tiempo pueden hacerse de manera continua o discreta.*

Supóngase que en un tiempo dt el activo subyacente paga dividendos D_0Sdt con D_0 =cte. Este pago es independiente del tiempo, excepto a través de la dependencia de S. El dividendo es definido como la razón de pago de dividendos, en el cual el cambio en el precio del activo es:

$$dS = \sigma SdX + (\mu - D_0)Sdt. \tag{2.18}$$

Se recibe D_0Sdt de un activo determinado por Δ, para un portafolio de cambios por un monto

$$-D_0S\Delta dt, \tag{2.19}$$

el cual representa el dividendo proporcionado por el activo.

Análogamente a la ecuación (2.12), se define el nuevo portafolio como:

$$d\pi = dV - \Delta dS - D_0 S \Delta dt,$$

y por consiguiente la ecuación de Black-Scholes es:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D_0) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{2.20}$$

Para poder encontrar el precio de una opción es necesario entonces resolver la ecuación de Black-Scholes. Para ello se tiene una herramienta muy útil que es la ecuación de calor (ver Apéndice I), ya que después de hacer una serie de transformaciones adecuadas, la ecuación de Black-Scholes se reduce a la ecuación de calor, que es posible resolver explícitamente.

Esto permite encontrar entonces una fórmula para el precio de las opciones conocida también como fórmula de Black-Scholes (Ver Apéndice I).

2.5 Solución Explícita de la Ecuación de Black-Scholes

La ecuación de Black-Scholes y sus condiciones de frontera para un call europeo con valor $C(S,t)$ son como siguen:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \tag{2.21}$$

donde $C(0,t) = 0$, $C(S,t) \sim S$ cuando $S \to \infty$ y $C(S,T) = max(S - E, 0)$.

Lo que se desea es hacer un cambio de variable en (2.21), para pasar de la ecuación de Black-Scholes a una ecuación diferencial, la cual se puede resolver fácilmente por métodos tradicionales (en este caso por la ecuación de calor).

Por lo cual se lleva a cabo el siguiente cambio de variables.

Sean:

$$S = Ee^x, \; t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad y \quad C = Ev(x, \tau)$$

Haciendo las sustituciones de varibles correspondientes en la ecuación (2.10), se obtiene la nueva ecuación:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k_1 - 1)\frac{\partial v}{\partial x} - k_1 v, \tag{2.22}$$

donde $k_1 = r/\frac{1}{2}\sigma^2$ *y la condición inicial cambia a* $v(x, 0) = max(e^x - 1, 0)$.

Una observación, es que al hacer el cambio de variable la nueva ecuación contiene sólo un parámetro, k_1, *mientras que en el problema original se tienen 4 parámetros* (E,T,σ^2 *y* r).

El factor esencial que controla la valuación de la opción es $r/\frac{1}{2}\sigma^2$, *el cual es el único parámetro en el problema.*

La ecuación (2.22) tiene mucho parecido con la ecuación de difusión y se puede transformar en ésta mediante un cambio de variable si se toma a $v = e^{\alpha x + \beta\tau} u(x, \tau)$, *para algunas constantes* α *y* β.

Haciendo el cambio de variables y sustituyendo en la ecuación (2.22), se obtiene:

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k_1 - 1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - k_1 u.$$

Se tiene una ecuación sin término $\partial u/\partial x$, *resolviendo el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha^2 + (k_1 - 1)\alpha - k_1 \\ 0 &= 2\alpha + (k_1 - 1). \end{aligned}$$

De donde

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k_1 - 1) \qquad (2.23)$$

$$\beta = -\frac{1}{4}(k_1 + 1)^2. \qquad (2.24)$$

Por lo tanto se obtiene sustituyendo (2.23) y (2.24)

$$V = e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x-(k_1+1)^2\tau}u(x,\tau),$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty \quad y \quad \tau > 0,$$

con $u(x,0) = u_0(x) = max\left(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0\right).$

La solución del problema haciendo la analogía con la solución explícita de la ecuación de difusión o de calor (5.23) sería:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}ds, \qquad (2.25)$$

donde $u_0(x)$ *es* $u(0,x)$.

Si en la integral (2.25) se hace el cambio de variable $x' = \frac{(x-s)}{\sqrt{2\tau}}$, *se obtiene la siguiente ecuación.*

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x'\sqrt{2\tau}+x)e^{-\frac{1}{2}x'^2}dx' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+x'\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}x'^2}dx' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+x'\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}x'^2}dx' \\
&= I_1 - I_2,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+x'\sqrt{2\tau})-\frac{1}{2}x'^2}dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}e^{-\frac{1}{2}(x'-\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau})^2}dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}N(d_1), \end{aligned}$$

con

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds$$

y

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}.$$

$N(d_1)$, es la función de distribución acumulativa para una distribución normal.

El cálculo para I_2 es igual que al de I_1 excepto que (k_1+1) es reemplazado por (k_1-1). Por lo tanto:

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x-\frac{1}{4}(k_1-1)^2\tau}u(x,\tau)$$

Si consideramos los cambios de variables

$$x = log(\frac{S}{E}), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \quad y \quad C = Ev(x,\tau),$$

se tiene que:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{log(\frac{S}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}}$$

y

$$d_2 = \frac{log(\frac{S}{E}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{((T - t)}}.$$

2.6 Enfoque Actuarial para la Valuación de Opciones

Como su título lo indica, en esta subsección sólo se utilizarán conceptos probabilísticos y actuariales para el cálculo del precio de una opción. No hay consideraciones económicas, este enfoque es válido aún cuando la medida de equilibrio no es única (incompletez). Sólo se hace uso de medidas físicas que generan las distribuciones del "pay-out" (pago). Dicho enfoque no se generaliza siempre a productos derivados arbitrarios, puesto que se emplean interpretaciones de dichos derivados como pérdidas potenciales o reclamaciones desde el punto de vista de quien los expide. Bajo esta interpretación se calcula el precio del derivado como la prima justa necesaria para asegurar la pérdida potencial. Como un caso especial de la fórmula se deriva la fórmula binomial y la de Black-Scholes, la cual es consistente con la teoría financiera.

De hecho, se transforma el problema actual de valuar una opción en un problema equivalente de seguros, a saber la determinación de una prima justa . Este enfoque utiliza el carácter de una opción como una reclamación contingente y no se extiende a la valuación de productos derivados generales. Se obtiene una fórmula general para el precio de una opción europea, que como caso particular contiene a la fórmula de Black- Scholes. Como no hay consideraciones económicas involucradas, entonces los resultados son en principio válidos también para cuando no existe equilibrio o completez en los mercados.

Esto es importante para los métodos tradicionales, ya que la incompletez implica que no todos los procesos de consumo son alcanzables y se pueden definir derivados los cuales no pueden ser duplicados de acuerdo a las consideraciones en el mercado. Por lo tanto un precio de este derivado, no puede ser obtenido como una consecuencia de dicha duplicación. La incompletez ocurre cuando no exista una medida equivalente de equilibrio (medida del precio de equilibrio) y no es única.

2.6.1 Precio Usando la Ganancia Justa

La idea básica de esta subsección es que en el descuento libre de riesgo en los precios futuros acordados, influyen las tasas de interés libres de riesgo y los precios estocásticos acordados con su tasa esperada. Con este descuento en los precios, se puede calcular el precio de una opción call, como el valor esperado de la diferencia entre el precio actual y el precio de ejercicio (en valor presente) cuando sea tiempo de ejercer. Esto coincide con consideraciones simples de derivados, es decir, la prima justa (la prima más alta con probabilidad de ruina de 1) debería ser el valor esperado de la reclamación. La diferencia cuando se considera una opción call, es cuando las tasas esperadas y las tasas de interés están involucradas, por lo cual se hace necesario el descuento en todo valor futuro del valor presente.

Considérese un mercado financiero en el cual se tienen 2 activos: un bono (activo 1) con tasa (instantánea) de interés r, la cual es sólo interpretada como la tasa de interés libre de riesgo y un activo, descrito por un proceso estocástico S_t con $t \in [0, T]$, donde cero es el tiempo inicial o presente y T el tiempo final. El precio del activo dos al tiempo cero es denotado por S_0. Se desea calcular el precio de una opción call (europea o americana), $C(E, T)$, cuyo activo subyacente es S_t y con un precio de jercicio E.

Antes de derivar la fórmula general, obsérvese que la fórmula de Black-Scholes admite la siguiente representación simple.

Proposición 1 *La fórmula de Black-Scholes puede ser representada en términos de los procesos generados por S_t como sigue:*

$$C(E,T) = S_0 P(S_T > Ee^{(\mu-r-\sigma^2)T}) - Ee^{-rT} P(S_T > Ee^{(\mu-r)T})$$

El lado derecho de esta representación sugiere que la fórmula de Black-Scholes puede ser más general, en el sentido de que puede ser válida para una clase más amplia de procesos S_t, es decir, el precio de una opción call europea debería estar dada por el lado derecho para una rango amplio del precio subyacente del proceso S_t.

Para desarrollar este principio, se convierte el problema de valuar una opción en un problema de seguros. Supóngase que se tiene un portafolio de opciones las cuales son *independientes e idénticamente distribuidas. Considérese una opción como una pérdida potencial sobre las reclamaciones (cuando se ejerce) desde el punto de vista del inversionista, es decir, la compañía de seguros. Si se pudiera hacer un seguro contra dicha pérdida usando la prima justa, entonces esta prima sería la misma que el valor o precio de una opción call.*

La situación es distinta a la correspondiente en las reclamaciones tradicionales de seguros contra riesgo, en el sentido de que ahora se tiene un proceso estocástico subyacente S_t*, que determina el precio de la opción. Además se tiene predefinido el rango de tiempo terminal,* T*, que se puede ejercer en el momento que el inversionista lo desee (para opciones europeas), lo que complica determinar los precios en término de valor presente y valor futuro.*

Supóngase que el proceso S_t *determina una tasa esperada de interés (instantánea)* μ*, al tiempo* T *definida como:*

$$e^{\mu T} = \frac{\mathbb{E}S_T}{S_0},$$

con $\mathbb{E}$ *la esperanza.*

Entonces nada ha sido supuesto acerca del proceso S_t*, ya que en general* μ *depende de* T*. La razón de esta definición es hacer la siguiente exposición clara en términos de notación.*

La prima del derivado con pérdida potencial causada por el ejercicio de la opción, está dada como la pérdida esperada cuando se ejerce en valor presente. Entonces la tasa de ganancia esperada de S_T *es* $e^{\mu T}$*, que en valor presente es* $e^{-\mu T}S_T$ *y el valor presente del nivel de ejercicio de* E *es* $e^{-rT}E$*, entonces* E *está libre de riesgo en el nivel de ejercicio futuro.*

En otras palabras, se mueve la variación aleatoria de S_T *con respecto al valor medio al tiempo cero para* E*. De hecho el principio de descuento que se usa generaliza el principio de descuento determinístico usual: si* E *es un valor fijo se puede considerar como una variable aleatoria degenerada y su valor presente es* E *descontado con la tasa de interés esperada, que es* e^{-rT}*, porque* E *está libre de riesgo. Similarmente* S_T *ha sido descontada por* e^{-rT} *debido al desarrollo ordinario de los precios (inflación) y por esto la tasa neta de interés o tasa esperada es* $e^{-(\mu-r)T}$*, así el factor de descuento total es* $e^{-\mu T}$*. Es en* *dicho principio de decuento en donde este enfoque difiere de principios financieros previos.*

Es importante señalar que el precio inicial S_0 y el valor presente de S_T son, en general, diferentes si este es aleatorio y sus respectivos valores presentes dependen del valor actual o de la realización de S_t. Al tiempo cero se puede dar el valor futuro de S_T como $\mathbb{E}S_T$, independientemente de como se define S_t (lognormal, Levy, etc.) y así la tasa de interés esperada, como se definió más arriba, es elegida de manera natural como el factor de descuento.

Teorema 1 *La prima justa y por lo tanto el precio de la opción call, $C(E,T)$ de una opción call europea con tiempo final T y precio de ejercicio E, está dada por:*

$$C(E,T) = \mathbb{E}((e^{-\mu T}S_T - e^{-rT}E)I(e^{-\mu T}S_T > e^{-rT}E)). \tag{2.26}$$

Proposición 2 *La opción puede ser ejercida en valor presente si y sólo si:*

$$e^{-\mu T}S_T > e^{-rT}E,$$

y la correspondiente pérdida es $e^{-\mu T}S_T - e^{-rT}E$. Así la prima justa es simplemente la pérdida esperada que será ejercida, la cual inmediatamente esta dada por la formula(6.1).

Teorema 2 *El teorema anterior es equivalente a la fórmula de Black-Scholes cuando S_t es log-normal.*

Corolario 1 *Suponga que el proceso S_t está dado por:*

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t,$$

con valor inicial S_0, donde W_t denota el proceso estándar de Wiener. Entonces (6.1) es consistente con la fórmula de Black-Scholes.

Proposición 3 *La ecuación diferencial estocástica tiene solución*

$$S_t = S_0 exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right), \tag{2.27}$$

la cual es equivalente a

$$log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T, \sigma^2 T\right).$$

La distribución de S_t al tiempo $t = T$ es lo único que se necesita, pues sólo importa el precio al tiempo final. Entonces la restricción de $e^{-\mu T} S_T > e^{-rT} E$ es equivalente a

$$W_T > -\frac{log\frac{S_0}{E} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma}.$$

Si se considera a $y = -\frac{log\frac{S_0}{E} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(e^{-\mu T} S_T I(e^{-\mu t} S_T > e^{-rT} E)) && (2.28)\\
&\quad = e^{-\mu T} \int_y^\infty S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \\
&\quad = S_0 \int_y^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{(x - T\sigma)^2/(2T)} dx \\
&\quad = S_0 P(Z > y) \\
&\quad = S_0 P(S_T > a e^{(\mu - r - \sigma^2)T}),
\end{aligned}$$

donde $Z \sim N(T\sigma, T)$ y se puede escribir como

$$Z = \frac{log\frac{S_0}{E} + \frac{3}{2}\sigma^2 - \mu T}{\sigma},$$

la cual se usa en el siguiente segundo paso. Así

$$\begin{aligned}
C(E,T) &= \mathbb{E}((e^{-\mu T} S_T - e^{-rT} E) I(e^{-\mu T} S_T > e^{-rT} E)) \\
&= S_0 P(S_T > E e^{(\mu - r - \sigma^2)T}) - \mathbb{E}(E e^{-rt} I(e^{-\mu T} S_T > e^{-rT} E)) \\
&= S_0 P(S_T > E e^{(\mu - r - \sigma^2)T}) - \frac{E}{e^{rT}} P(S_T > E e^{(\mu - r)T}),
\end{aligned} \tag{2.29}$$

(2.29) se identifica, entonces, como la fórmula de Black-Scholes usando la ecuación (6.1) de la proposición. •

Capítulo 3

OPCIONES EXÓTICAS

3.1 Introducción

En este capítulo se describen algunas de las opciones exóticas más comunes, entre ellas algunas que dependen del camino o trayectoria del activo subyacente (path-dependent).

Una opción dependiente del camino (path-dependent), se caracteriza porque su pago y ejercicio pueden depender de la historia del precio del activo subyacente.

En general, en el contrato de una opción el tipo de ejercicio puede ser especificado como europeo o americano, en este sentido se puede pensar en opciones americanas como aquellas en las que se tiene el derecho de ejercicio en cualquier momento.

Una opción exótica, es una opción que no es un put o call vainilla.

Las opciones exóticas se clasifican en (ver capítulo I):

1) *Opciones sobre el precio medio de un activo durante un período determinado (OPCIONES ASIÁTICAS).*

2) *Opciones que sólo llegan a existir (aparecen), o dejan de existir (desaparecen) si ocurre algún evento que las afecte (OPCIONES BARRERA).*

3) *Opciones sobre el precio máximo o mínimo de un activo durante un periodo determi-*

nado (OPCIONES LOOKBACK).

4) *Opciones sobre opciones (OPCIONES COMPUESTAS).*

5) *Opciones que dan a elegir sobre un put o un call (OPCIONES CHOOSER).*

6) *Opciones sobre la suma, diferencia, producto u otras operaciones entre uno o más activos (OPCIONES BINARIAS).*

A continuación se describirá cada clase con más detalle.

3.2 Opciones Binarias

Las opciones binarias o digitales son del tipo más simple de opciones exóticas y no dependen de la realización, pueden tener un ejercicio temprano o una barrera futura.

Una opción binaria difiere de una opción vainilla en que el pago y la expiración pueden ser funciones arbitrarias no negativas del precio del activo subyacente, S.

Si el pago al tiempo T *está dado por la función de pago* $\Lambda(S)$, *entonces por medio de la solución explícita de la ecuación de Black-Scholes (vista en el capítuloII sección 2.5), se obtiene una solución similar para las opciones binarias:*

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^\infty \Lambda(S')e^{-\frac{log(\frac{S'}{S})-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)^2}{2\sigma^2(t-t)}}\frac{dS'}{S'} \tag{3.1}$$

Para el valor de una opción binaria europea, la fórmula incluye los calls y puts vainilla como un caso particular. La delta es dada por la derivada de la ecuación (2.2) con respecto a S. *Al derivar (3.1) se supone que* σ *y* r *son constantes y que el activo subyacente no tiene dividendos.*

Ejemplo 9 *Considérense las siguientes opciones binarias determinadas por:*

$$BH(S-E), \quad y \quad \frac{1}{d}(H(S-E)-H(S-E-d)),$$

que pueden ser interpretadas como una forma simple de apuesta en el precio del activo.

Por consiguiente escribiendo explícitamente las funciones de pago se tiene:

$$\phi = \begin{cases} B, & si\ S \geq E, \\ 0, & en\ cualquier\ otro\ caso(c.o.c.). \end{cases}$$

Esta opción es conocida como **cash-or-nothing call**, *la cual corresponde al primer caso.*

En el segundo caso se tiene:

$$p = \begin{cases} \frac{1}{d}, & si\ E < S < E + d, \\ 0, & c.o.c., \end{cases}$$

que se conoce con el nombre de supershare.

3.3 Opciones Compuestas

Una opción compuesta puede ser descrita simplemente como una opción sobre una opción.

En esta sección sólo se considera el caso donde la opción es un put o call vainilla y la opción compuesta puede ser descrita como un put o un call vainilla sobre el activo subyacente.

Se pueden construir cuatro clases diferentes de opciones compuestas básicas:

1) *calls sobre calls,*

2) *calls sobre puts,*

3) *puts sobre calls y*

4) *puts sobre puts.*

3.3.1 Un Caso Particular

Sea T_1 el tiempo al cual se puede ejercer la opción compuesta, es decir, se puede adquirir una opción vainilla por la cantidad E_1.

La opción subyacente, puede ser ejercida al tiempo T_2 por un monto E_2, siendo S el activo subyacente correspondiente. Esta opción call sobre una opción call es muy simple de valuar con Black-Scholes.

Al tiempo T_1, se puede calcular el valor de la opción call subyacente como $C(S, T_1)$. Si al tiempo T_1 el precio del activo es tal que $C(S, T_1) > E_1$ entonces se ejerce la opción.

Si al tiempo T_1 el $C(S, T_1) < E_1$, entonces no se ejerce la opción compuesta.

El pago para la opción al tiempo T_1 es:

$$max(C(S, T_1) - E_1, 0). \tag{3.2}$$

El valor de la opción compuesta está determinado sólo por el camino aleatorio del precio del activo subyacente S y también satisface la ecuación de Black-Scholes. La única diferencia para una opción vainilla radica en la condición final. Usando (3.2) como dato final se resuelve una opción compuesta con $t < T_1$.

3.4 Opciones Chooser

Son ligeramente más complicadas que las opciones compuestas. Estrictamente hablando son path-dependent, pero pueden ser valuadas resolviendo la ecuación de Black-Scholes.

Una opción chooser da al propietario el derecho a comprar por un monto E_1 al tiempo T_1, una opción call o put con precio de ejercicio E_2 al tiempo T_2.

Estas opciones son valuadas de modo similar a las opciones compuestas, primero se resuelven problemas de opciones subyacentes o fundamentales. En este caso existen dos, una para un call subyacente y otra para un put subyacente.

Ahora se denotan a las soluciones por $C(S,t)$ y $P(S,t)$, respectivamente y se usa como dato final para el problema de la primera opción.

Claramente se debe de ejercer la opción chooser si $C(S,t) > E_1$, o $P(S,t) > E_1$, eligiéndose la más valiosa de las dos. La opción chooser satisface la ecuación de Black-Scholes con dato final al tiempo T_1 dado por :

$$max(C(S,T_1) - E_1, P(S,T_1) - E_1, 0)$$

3.5 Opciones Barrera

Las opciones barrera, difieren de las vainilla en el contrato de la opción, ya que tiene o deja de tener validez dependiendo del precio del activo y de alguna barrera, $S = X$ en algún tiempo de expiración.

De acuerdo a calls y puts las opciones barrera son caracterizadas por sus formas básicas que son:"down-and-out", "down-and-in", "up-and-out" y "up-and-in".

3.5.1 Opciones Fuera de la Barrera (An out Barrier)

Considérese primero el caso de una opción call europea del estilo "down-and-out", con pago al expirar de $max(S - E, 0)$ con tal que S nunca quede por debajo de X durante la vida de la opción. Si S está siempre por debajo de X entonces la opción queda sin valor. Considérese sólo el caso donde $E > X$. Esta opción tiene entonces una fórmula explícita.

Para S más grande que X, el valor de la opción $V(S,t)$ satisface la ecuación de Black-Scholes. Como antes, la condición final de esta ecuación es $V(S,t) = max(S - E, 0)$.

Cuando S es muy grande, la probabilidad de estar por debajo de la barrera se hace insignificante y queda que $V(S,t) \sim S$ cuando $S \to \infty$.

Para resolver el problema se procede de la misma forma que para una opción call vainilla. Sin embargo, el problema de la valuación difiere en que la segunda condición frontera es aplicada en $S = X$, es decir, cuando $S = 0$. Si S nunca alcanza X enton-

ces la opción no tiene valor; así en este sentido el valor de la opción es cero ($V(X,t) = 0$).

Para definir la solución explícita se usará el cambio de variable siguiente:

$$S = Ee^x, \qquad t = T - r/\frac{1}{2}\sigma^2, \qquad V = Ee^{\alpha x + \beta r}u(x,r),$$

con $\alpha = -\frac{1}{2}(k_1 - 1)$, $\beta = -\frac{1}{4}(K_1 + 1)$ *y* $k_1 = r/\frac{1}{2}\sigma^2$. *En estas nuevas variables el problema de la opción barrera cambia a*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.3}$$

con

$$u(x,0) = max(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0) = u_0(x), \qquad log(X/E) \leq x,$$

$$u(x,t) \sim e^{(1-\alpha)x - \beta r} \qquad \text{cuando } x \to \infty,$$

y

$$u(log(X/E), t) = 0. \tag{3.4}$$

Se tienen varios tiempos relacionados entre el problema de valuar opciones call y put simples en el flujo de calor en una barra infinita. La condición de frontera es, sin embargo, impuesta en un valor finito de x y la analogía es ahora con el flujo de calor en una barra semi-infinita, con temperatura $x = log(X/E)$ en el extremo izquierdo.

El flujo de calor en una barra no depende del sistema coordenado usado. La ecuación (3.4) es invariante bajo traslaciones, desde x hasta $x + x_0$, o reflexiones, desde x hasta $-x$. Así, si $u(x,r)$ es una solución de (4.18), también lo son $u(x + x_0, r)$ y $u(-x + x_0, r)$ para alguna constante x_0. Con el método de imágenes[11] se resuelve el problema seminfinito, resolviendo primero el problema infinito dividiéndolo en dos problemas iguales semi-infinitos, con distribuciones iniciales de temperaturas opuestas: una mitad es caliente y la otra es fria. El efecto neto es cancelado en el salto: la temperatura es garantizada como cero.

Se puede aplicar este método en el problema de las opciones barrera. Se refleja el dato inicial cerca del punto $x_0 = log(X/E)$, al mismo tiempo cambiando de signo, lo que satisface la ecuación (3.4). Así, en lugar de resolver (3.3)-(3.4) en el intervalo $log(X/E) < x < \infty$, se resuelve (3.3) sujeta a

$$u(x,0) = u_0(x) - u_0(2log(X/E) - x),$$

esto es,

$$u(x,0) = \begin{cases} max(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0), & para \quad x > log(X/E), \\ -max(e^{(k_1+1)(log(X/E)-\frac{1}{2}x)} - e^{(k_1-1)(log(X/E)-\frac{1}{2}x)}, 0) & para \quad x < log(X/E). \end{cases}$$

para toda x. En este sentido se puede garantizar que $u(log(X/E),0) = 0$.

Se escribe la solución del problema de un call europeo (sin barrera) como:

$$C(S,t) = Ee^{\alpha x+\beta r}u_1(x,r),$$

donde $u_1(x,r)$ es la solución apropiada de la ecuación de calor. Así se tiene

$$u_1(x,r) = e^{-\alpha x-\beta r}C(S,t)/E,$$

donde $C(S,t)$ está dado por la fórmula de Black-Scholes. Posteriormente se puede escribir la solución del valor de la opción barrera como

$$V(S,t) = Ee^{\alpha x+\beta r}(u_1(x,r) + u_2(x,r)),$$

en donde $u_2(x,r)$ es la solución del problema con dato inicial antisimétrico. La solución a este problema puede ser encontrada en términos de u_1 usando la invarianza de la ecuación (4.18) bajo la traslaciones y cambios de signo. Se debe tener

$$\begin{aligned} u_2(x,r) &= -u_1(2log(X/E) - x, r) \\ &= e^{-\alpha(log(X/E)-log(S/E))-\beta r}C(X^2/S,t)/E, \end{aligned}$$

entonces reemplazar x por $2log(X/E) - x$ es equivalente a reemplazar S por X^2/S. Finalmente, efectuando las sustituciones necesarias y escribiendo la solución en términos de S y t, se tiene

$$V(S,t) = C(S,t) - \left(\frac{S}{X}\right)^{-(k_1-1)} C(X^2/S,t).$$

3.5.2 Opciones Dentro de la Barrera (An in Barrier)

Una opción "in" expira sin valor a menos que el precio subyacente alcance la barrera antes de expirar. Si el valor subyacente cruza la línea $S = X$ en algún tiempo antes de expirar, entonces la opción se vuelve una opción vainilla con el pago apropiado.

Considésere una opción call europea "down-and-in". El valor de la opción $V(S,t)$ satisface la ecuación de Black-Scholes, la cual es determinada por la condiciones final y frontera. Se usa la notación $C(S,t)$ para denotar a un call vainilla europeo con la misma fecha de expiración y precio de ejercicio que un call barrera.

La opción no tiene valor si $S \to \infty$, es decir

$$V(S,t) \to 0 \quad \text{cuando} \quad S \to \infty.$$

Si S ha sido más grande que X al expirar, entonces la opción expira sin valor. La condición final, para $S > X$, es $V(S,t) = 0$.

Finalmente, el precio subyacente debería alcanzar $S = X$ en algún tiempo antes de expirar la opción inmediatamente dentro de un call vainilla y debería tener el mismo valor que este call. La segunda condición de frontera es entonces:

$$V(X,t) = C(X,t)$$

Si $S < X$ en algún punto donde la barrera ha sido cruzada, la opción es activada y el valor de la opción es exactamente el mismo que un call vainilla. Así,se tiene sólo la solución para el valor en $S > X$. Esto completa la formulación de un call barrera europeo down-and-in.

Para resolver el down-and-in explícitamente, se escribe primero

$$V(S,t) = C(S,t) - \bar{V}(S,t).$$

Como la ecuación de Black-Scholes y las condiciones frontera son lineales, se conoce que $\bar{V}$ debería satisfacer la ecuación de Black-Scholes con condición final

$$\bar{V}(S,T) = C(S,T) - V(S,T) = C(S,T) = max(S - E, 0);$$

y condiciones frontera

$$\bar{V}(S,t) = C(S,t) - V(S,t) \sim S - 0 = S, \quad \text{cuando } S \to \infty$$

$$\bar{V}(X,t) = C(X,t) - V(X,t) = C(X,t) - C(X,t) = 0.$$

Este es el problema para una opción barrera down-and-out. En otras palabras, una europea "in" más una europea "out" es igual a una vainilla. Esto es obvio desde el punto de vista financiero, como el valor de un portafolio que consiste de una opción in y una opción out que resulta ser igual que un call vainilla. Ya que sólo una de las dos opciones barrera puede tener actividad al expirar con el valor de un call vainilla.

3.6 Opciones Lookback

Una opción lookback, tiene un pago el cual no depende sólo del precio del activo al expirar, sino que depende del máximo o mínimo del precio del activo sobre algún tiempo antes de expirar. Usualmente el pago es estructuralmente muy similar a las opciones vainilla. Por ejemplo una opción put puede tener pago:

$$max\ P(J - S, 0)$$

donde J es convenientemente definido como el máximo.

Capítulo 4

UNA ESTRUCTURA UNIFICADA

La estructura que se introducirá es útil para las opciones que dependen de la trayectoria del activo, que ya se han mencionado con anterioridad y que sólo pueden ser valuadas fácilmente mediante Black-Scholes.

Tómese una clase muy general de opciones europeas con pagos dependientes de S y

$$\int_0^T f(S(\tau),\tau)d\tau, \tag{4.1}$$

(que es la cantidad que posteriormente se relaciona con el promedio de S que corresponde al precio de ejercicio), donde f es una función que depende de las variables S y t. La integración en (4.1) es tomada sobre el camino de S, con tiempo inicial $t = 0$ y expiración en $t = T$.

Un ejemplo claro es una opción call cuyo precio de ejercicio es el promedio de S, es decir, donde el pago al expirar es

$$max\left(S - \frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau, 0\right).$$

Se introduce la nueva variable

$$I = \int_0^t f(S(\tau),\tau)d\tau. \tag{4.2}$$

El precio actual S no depende de su historia, es decir, de los cambios que tuvo con anterioridad. Se pueden tomar a I, S y t como variables independientes; diferentes en las realizaciones del camino aleatorio lo que conduce a diferentes valores de I. Obsérvese que la definición de (4.2) es simplemente la ecuación (4.1) con fecha de expiración T la cual es reemplazada por t.

El valor de la opción exótica dependiente de su trayectoria, puede ser escrita como $V(S, I, t)$, es decir, el valor de la opción es una función de tres variables independientes: el tiempo t, el precio subyacente actual S y la historia del precio subyacente I. Se intenta aplicar el lema de Itô a V para determinar la ecuación diferencial estocástica para I. Esta última es encontrada considerando un cambio en I como función de S y t.

Por definición se ve que

$$\begin{aligned} I(t+dt) = I(t) + dI &= \int_0^{t+dt} f(S(\tau),\tau)d\tau. \\ &= \int_0^{t} f(S(\tau),\tau)d\tau + \int_t^{t+dt} f(S(\tau),\tau)d\tau, \end{aligned}$$

por consiguiente

$$I + dI = \int_0^t f(S(\tau),\tau)d\tau + f(S(t),t)dt,$$

por lo tanto

$$dI = f(S,t)dt. \tag{4.3}$$

En otras palabras la ecuación diferencial estocástica para I, no tiene componentes aleatorias. Se está ahora en posición de valuar una opción que depende de I.

Primero se aplica el lema de Itô en la función $V(S, I, t)$ para mostrar que

$$dV = \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dX + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial I}\right)dt. \tag{4.4}$$

Esto es la derivada de V. Hay que notar que el nuevo término $(f(S,t)\partial V/\partial I)$ es proporcional a la tasa de cambio en V con respecto a I. No se introducen nuevos términos estocásticos dentro del camino aleatorio seguido por V.

Retomando el hecho de que la opción es europea, ahora se abrirá un portafolio libre de riesgo, que consiste de una opción, una posición en corto con un número Δ del subyacente y un dividendo que afecta al activo subyacente. Este portafolio está dado de la siguiente manera

$$\pi = V - \Delta S - D_0 S \Delta t,$$

con $D_0 = D(S,I,t)$ el dividendo sobre el activo.

El incremento en el valor de este portafolio en cada paso del tiempo es:

$$d\pi = dV - \Delta dS - D_0 S \Delta dt. \tag{4.5}$$

hay que recordar que Δ se mantiene fijo en cada paso del tiempo.

Sustituyendo (4.4) y (2.2) en (4.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} d\pi &= \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX \\ &+ \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S - D_0 \Delta S \right) dt, \end{aligned} \tag{4.6}$$

eligiendo a

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

la ecuación (4.6) se reduce a:

$$d\pi = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial I} - D_0 S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt.$$

Considérese la ganancia libre de riesgo del mismo monto π como $r\pi dt$ en un tiempo dt.

En ausencia de arbitraje se tiene:

$$r\pi dt = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial I} - D_0 S \frac{\partial V}{\partial S}\right) dt, \qquad (4.7)$$

sustituyendo el valor de π y Δ, se tiene:

$$r(V - \Delta S) = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial I} - D_0 S \frac{\partial V}{\partial S},$$

$$rV - \frac{\partial V}{\partial S} S = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial I} - D_0 S \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Por lo tanto se obtiene:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (rS - D(S,I,t))\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \qquad (4.8)$$

Si se tiene una estructura de dividendo arbitrario: D puede ahora también ser una función de la variable I.

Se puede, sin embargo, dar la condición final general. Al expirar se conoce la forma exacta del pago y por lo tanto el valor de la opción como una función de S e I. Por lo tanto

$$V(S,I,T) = \Lambda(S,I,T),$$

donde la función Λ es la función de pago conocida. En el caso de que el precio de ejercicio (la media del activo subyacente) de un call se tomara como $I = \int_0^T S(\tau)d\tau$, entonces

$$\Lambda(S,I,T) = max(S - \frac{I}{T}, 0).$$

Extendiendo el análisis para opciones americanas, supóngase que se quiere el valor en versión americana de una opción con precio medio de ejercicio. En el contrato de opciones americanas siempre se especifica el pago, aunque se ejerza la opción antes de expirar. Supóngase que el pago de la opción antes de expirar para el precio medio de ejercicio de un call es de la siguiente forma

$$max(S - \frac{I}{t}, 0).$$

La expresión anterior es natural para el caso particular en que la opción depende del precio medio del activo subyacente, es decir, importa la historia de la opción. Para algunas opciones, especialmente si éstas dependen de medidas discretas, el pago no es obvio. Sin embargo, si se supone una estructura general, el pago es de la forma

$$\Lambda(S, I, T),$$

donde Λ *es una función conocida y especificada de antemano en el contrato de la opción.*

El problema de valuar opciones americanas dependientes de la trayectoria, es una simple modificación del caso europeo. Para ello se introduce el operador diferencial parcial

$$L_{EX} = \frac{\partial}{\partial t} + f(S, t)\frac{\partial}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + (rS - D(S, I, t))\frac{\partial}{\partial S} - r,$$

este operador es una generalización del operador de Black-Scholes.

La diferencia entre la tasa esperada de un portafolio libre de riesgo y el depósito en el banco tienen un valor equivalente. Como para el caso de opciones vainilla, la tasa esperada para la cobertura del portafolio no debe exceder la tasa esperada para el depósito en el banco, pero no necesariamente tienen que ser iguales, es decir

$$L_{EX} \leq 0.$$

Para consideraciones de arbitraje, se debe cumplir siempre que

$$V(S, I, t) \geq \Lambda(S, I, t)$$

De acuerdo a la expresión anterior se tienen las siguientes conclusiones:

1) *Si la tasa esperada para el portafolio es igual a la tasa esperada del depósito en el banco, entonces* $L_{EX} = 0$, *por lo cual no es el óptimo para ejercer la opción. Esto es el caso en el cual el valor de la opción es mayor al momento de ejercerla, es decir,* $V > \Lambda$.

2) *Si la tasa esperada para el portafolio es menor que la tasa esperada para el depósito en el banco,* $LEX < 0$, *entonces es el momento óptimo para ejercer la opción. Esto sólo se da si* $V = \Lambda$ *(si* $V > \Lambda$ *debería traer mayor beneficio vender la opción y nunca se tendría* $V < \Lambda$*). De este modo se tendría que cumplir conjuntamente:*

$$L_{EX} = 0 \quad \text{y} \quad V - \Lambda > 0,$$

o

$$L_{EX} < 0 \quad \text{y} \quad V - \Lambda = 0,$$

considerando cualquiera de las dos formas, siempre se tiene que

$$L_{EX}(V) \cdot (V - \Lambda) = 0.$$

Así el problema para la versión americana de la clase de opciones exóticas con camino dependiente, puede ser escrito en forma lineal complementaria como:

$$L_{EX}(V) \cdot (V - \Lambda) = 0, \quad L_{EX}(V) \leq 0; \quad (V - \Lambda) \geq 0,$$

con V *y* $\partial V/\partial S$ *continuas (considerando* Λ *continua) y con condición final*

$$V(S, I, T) = \Lambda(S, I, t).$$

4.1 Opciones Asiáticas

4.1.1 Opciones que dependen de la media

Como ya se mencionó en el capítulo I, las opciones asiáticas son quizás las que más útiles encuentran los usuarios comerciales, porque cubren una necesidad muy real para muchos de ellos. Esto es porque muy frecuentemente una compañía está expuesta al precio medio *de algo durante un período determinado en lugar de su precio spot en cada momento.*

Un ejemplo de un usuario típico podría ser cualquier compañía que importe o exporte en moneda extranjera, o una compañía con filiales extranjeras. La mayoría de los flujos de dinero serán en moneda extranjera por lo que se estará expuesta al tipo de cambio. Dado que los flujos ocurrirán de manera regular y predecible, el riesgo que la compañía tendrá será sobre el tipo medio de cambio más que sobre el precio spot.

El precio medio de algo durante un período de tiempo, por ejemplo, seis meses es una cantidad que fluctúa mucho más despacio que el precio spot y dado que el precio de las opciones depende de la volatilidad del subyacente, no resulta sorprendente descubrir que el precio de una opción sobre el precio medio suele ser más bajo que el precio de una opción europea normal con características similares.

Cabe mencionar que en el caso en el que el promedio se hace con respecto al activo subyacente, se tiene el hecho de que el activo subyacente de una opción asiática es menos volátil que el subyacente de una opción normal, una opción asiática es por lo demás esencialmente idéntica a una opción europea, dado que paga al final y el poseedor no tiene que tomar ninguna decisión sobre el ejercicio de la opción sino hasta el final de la misma. El problema de valuar las opciones asiáticas se reduce por lo tanto a encontrar una fórmula para la distribución del precio medio final cuando se conoce el precio de hoy. Una vez conocida la distribución se puede utilizar la fórmula de Black-Scholes y valuar la opción como si fuera una europea normal.

En esta subsección se tratará con detalle el tema central de esta tesis.

4.1.2 Medias de Muestras Continuas

Media Aritmética

El modelo básico para valuar opciones asiáticas se discutió anteriormente, y la forma general de la ecuación diferencial parcial que determina el valor de la opción es (4.8). En particular, para una opción dependiente de la media aritmética de una muestra continua

$$\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)d\tau.$$

se introduce la variable

$$I = \int_0^t S(\tau)d\tau.$$

Siguiendo el análisis descrito arriba, la ecuación diferencial parcial para el valor de una opción es

$$\frac{\partial V}{\partial t} + S\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (rS - D(S,I,t))\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{4.9}$$

Media Geométrica

La media geométrica de una muestra continua está definida por:

$$exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t logS(\tau)d\tau\right);$$

esto es el límite cuando $n \to \infty$ de la usual media geométrica discreta

$$\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Cuando está determinado el pago de la opción, se define

$$I = \int_0^t logS(\tau)d\tau,$$

y la ecuación diferencial parcial para el valor de la opción es

$$\frac{\partial V}{\partial t} + logS\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (rS - D(S,I,t))\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

4.1.3 Medias de Muestras Discretas

En la práctica puede ser difícil calcular la media del precio del activo subyacente por medio de series de tiempo; ya que los precios pueden cambiar en 30 seg, lo que provoca en ocasiones cifras incorrectas en los precios. Sin embargo, esto es más común en contratos *de opciones donde se determina la media del activo subyacente mediante series de tiempo completas para pequeñas subcolocaciones, por ejemplo el cálculo de la media sobre el precio de cierre diario o semanal.*

Se tiene la modelación de la media de muestras continuas como una integral, consistentemente con la suposición de que el activo y el valor de la opción están en tiempos continuos cuantitativamente. Para una media discreta significa la suma de un número finito de valores del activo durante la vida de la opción.

La media de una muestra discreta conlleva a un problema con soluciones de similitud con el pago discreto de dividendos.

Condiciones de Salto

¿El valor actual de una opción tiene saltos a través de los tiempos muestrales?

La respuesta a esta pregunta como para el caso de pagos con dividendos discretos, puede ser si o no, dependiendo de como es visto el valor de la opción en relación al camino del activo subyacente. Ciertamente $V(S,I,t)$ *no necesita ser continuo para* S *e* I *fijos y* t *variable. En este sentido hay un salto en* V *y la respuesta a la pregunta es sí. De cualquier modo, en el curso de una realización en el precio del activo subyacente en donde todos varían,* S*,* I *y* t*, el precio de la opción no tiene saltos y la respuesta es no. Esta última conclusión es una consecuencia simple de la ausencia de oportunidad de arbitraje; si el valor de la opción tiene saltos a través de los tiempos muestrales conocidos, se podrían presentar obvias oportunidades de arbitraje.*

Esta aparente contradicción, puede ser explicada después de que se reconoce que a través de los tiempos muestrales, la media de una muestra discreta cambia discontinuamente. La media cambia discontinuamente porque I *es medida discretamente. La discontinuidad de* I *y la continuidad de* $V(S(t),I(t),t)$ *para una realización en el camino aleatorio, fuerza a* $V(S,I,t)$ *(vista como una función de* t *con* S *e* I *fijos) a cambiar discontinuamente a través de los tiempos muestrales.*

A continuación se determinarán las condiciones de salto para una opción asiática con media aritmética discreta; esta derivación es fácilmente generalizada a una opción asiática con medias discretas más complicadas, por ejemplo medias geométricas discretas y look-

backs.

La suma aritmética corrida de una muestra discreta puede ser definida como

$$I = \sum_{i=1}^{j(t)} S(t_i),$$

donde t_i *son los tiempos de la muestra y* $j(t)$ *es el mayor entero tal que* $t_j(t) < t$. *En términos de* I *y* $j(t)$, *la media aritmética de una muestra discreta es* $I/J(t)$.

Se introduce la notación I_i, *que denota el valor de la suma corrida de* I *para* $t_i < t < t_{i+1}$. *Asi* I_i *representa el valor (constante) de* I *para el período inmediatamente después de que la muestra es tomada en* t_i *hasta que la próxima muestra es tomada en* t_{i+1}. *Se puede escribir*

$$I_i = I_{i-1} + S(t_i), \tag{4.10}$$

y sólo I *es actualizado al tiempo* t_i *para sumarlo al valor de* S *al mismo tiempo. Entonces* I_i *es constante para el periodo* t_i^+ *(justo después de que la muestra es tomada) hasta* t_{i+1}^- *(inmediatamente antes de la próxima muestra), esto es efectivamente un parámetro en el valor de la opción durante este tiempo, al igual que el precio de ejercicio es un parámetro en el valor de una opción vainilla. Durante este período la única variable aleatoria que cambia es* S *y el precio de la opción debería de satisfacer la ecuación de Black-Scholes. Para (4.10) es claro que* I *es discontinua en* t_i. *Sin embargo, la realización en el precio de la opción es continuo a través de* t_i. *Por lo tanto se tiene*

$$V(S(t_i^+), I_i, t_i^+) = V(S(t_i^-), I_{i-1}, t_i^-), \tag{4.11}$$

donde $S(t_i^-)$ *e* I_{i-1} *son los valores de* S *e* I *inmediatamente antes de la muestra y* $S(t_i^+)$ *e* I_i *son los valores inmediatamente después de la muestra. Usando (4.10) esto puede ser escrito como*

$$V(S, I_{i-1}, t_i^-) = V(S, I_{i-1} + S, t_i^+), \tag{4.12}$$

si I_{i-1} *no cambia de* t_{i-1}^+ *a* t_i^- *se puede dejar fijo* $i-1$ *en (4.12) con no posibilidad de confusión y con la condición de salto*

$$V(S, I, t_i^-) = V(S, I + S, t_i^+). \qquad (4.13)$$

Esta es la condición de salto para la media aritmética de una una muestra discreta de una opción asiática.

En (4.11) se puede pensar a S e I siguiendo una realización en el camino aleatorio (sólo que ellos varían en el tiempo) y en (4.13) se piensan a estos como fijos.

Esta derivación puede ser aplicada a una opción que depende de un parámetro discreto actualizado. Por ejemplo, si la opción depende de I, determinado por una ecuación de la forma

$$I_i = w_i(S(t_i), I_{i-1}),$$

(donde las funciones w_i son conocidas) la condición de salto es simplemente

$$V(S, I, t_i^-) = V(S, w_i(S, I), t_i^+).$$

En particular, para la media geométrica de una muestra discreta se tiene:

$$I = \sum_{i=1}^{j(t)} log S(t_i),$$

se define la condición de salto

$$V(S, I, t_i^-) = V(S, I + log S, t_i^+).$$

Se puede ver que la definición particular de la media discreta, afecta en detalle la condición de salto por medio de los tiempos muestrales, pero esto no afecta los procedimientos generales para la solución. Esto es porque las cantidades que siguen un camino dependiente de la trayectoria, I, es actualizada discretamente y es por lo tanto constante entre los tiempos de la muestra. La ecuación diferencial parcial para el valor de la opción entre los tiempos de la muestra, es justamente la ecuación básica de Black-Scholes con I tratada como parámetro. La estrategia para el valor de alguna opción asiática es la siguiente:

1) *Resolver*

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(rS-D(S,I,t))\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0,$$

entre los tiempos de la muestra, usando el valor de la opción inmediatamente antes de la próxima fecha de la muesta como dato final. Esto da el valor de la opción hasta inmediatamente después de la presente fecha de la muestra.

2) *Entonces se aplican las condiciones de salto apropiadas a través de la fecha actual de la muestra que deduce el valor de la opción inmediatamente antes de la presente fecha de la muestra.*

3) *Repetir este proceso las veces necesarias para llegar al valor actual de la opción.*

Medias Aritméticas

La media aritmética discreta es definida como:

$$\frac{1}{j(t)}\sum_{i=1}^{j(t)} S(t_i),$$

la cual puede ser escrita de la forma

$$\frac{1}{\int_0^t \sum_{i=1}^{N}\delta(\tau-t_i)d\tau}\int_0^t \sum_{i=1}^{N} S(\tau)\delta(t-t_i)d\tau.$$

Cuando la media del precio de una opción es sólo actualizada en tiempos discretos debe satisfacer las condiciones de salto a través de los tiempos de la muestra. Se tienen que encontrar las condiciones de salto para argumentos financieros. La condición de salto puede ser derivada por argumentos puramente matemáticos.

Se define

$$I=\int_0^t \sum_{i=1}^{N}\delta(\tau-t_i)S(\tau)d\tau.$$

Con esta definición, el valor de I en $t=T$ es simplemente la suma de los valores de S de los N tiempos t_i. Entonces I esta dada por

$$I = \sum_{i=1}^{j(t)} S(t_i).$$

Esto es, la definición de la suma corrida que fue usada anteriormente. El resto del análisis es similar al de la discusión anterior de una opción simple con dividendos discretos.

Como se vio la ecuación (4.8), el valor de la opción satisface la ecuación

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_i) S \frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (rS - D(S, I, t))\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \qquad (4.14)$$

En el camino para los tiempos de la muestra, t_i, la ecuación diferencial de la opción es simplemente la ecuación de Black-Scholes y sólo I es considerada como parámetro. Ahora, a través de los tiempos de la muestra t_i, la ecuación puede ser aproximada por

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \delta(t - t_i) S \frac{\partial V}{\partial I} = 0.$$

La característica de esta ecuación a primer orden está dada por:

$$I - SH(t - t_i) = constante.$$

Esto es equivalente a (4.10): I es incrementada por S al tiempo t_i. Entonces V es constante a lo largo de estas características. Por lo tanto se tiene como antes

$$V(S, I, t_i^-) = V(S, I + S, t_i^+),$$

Medias Geométricas

La media geométrica discreta es definida como

$$exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{j(t)} logS(t_i)}{j(t)}\right).$$

Se puede escribir como

$$exp\left(\frac{\int_0^t\sum_{i=1}^N\delta(\tau-t_i)logS(\tau)d\tau}{\int_0^t\sum_{i=1}^N\delta(\tau-t_i)d\tau}\right).$$

Con esta elección de la media corrida, ésta es sólo actualizada en cada t_i.

Se comenzará brevemente a demostrar el argumento que induce a la condición de salto a través de los tiempos de la muestra. Se define la variable corrida I por

$$I=\int_0^t\sum_{i=1}^N\delta(\tau-t_i)logS(\tau)d\tau.$$

A través de los tiempos de la muestra, t_i, la ecuación diferencial parcial para el valor de la opción es aproximada por la ecuación hiperbólica de primer orden

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\delta(t-t_i)logS\frac{\partial V}{\partial I}=0.$$

(Un camino para los tiempos de la muestra es simplemente la ecuación de Black-Scholes). Usando el método de características, la solución general de esta ecuación de primer orden, es fácil encontrar lo que implica la condición de salto

$$V(S,I,t_i^-)=V(S,I+logS,t_i^+).$$

Esto es, la misma condición que se encontró con razonamientos financieros.

4.1.4 Soluciones de Similitud de Opciones Asiáticas con Medias Aritméticas

El valor de una opción asiática depende de tres variables S, I y t. Esto es verdadero si I es medida aritmética o geométricamente, continua o discretamente. Típicamente el valor de estas opciones debe ser calculado numéricamente. En casos donde el problema de valuar una opción sea genuinamente en tres dimensiones, un programa en computadora podría ser mucho más lento que para una opción vainilla. Sin embargo, algunas opciones tienen una particular estructura matemática que permite una reducción en la dimensión del problema usando una variable de similitud. En el caso de una muestra aritmética de una opción asiática, el problema puede reducirse de tres a dos dimensiones con las siguientes condiciones:

1) *El pago tiene la forma $I^\alpha F(S/I,t)$ para alguna constante α y alguna función F.*

2) *El dividendo tiene la forma $D = S\widehat{D}\left(\frac{S}{I},t\right)$.*

Aquí como siempre en el caso de la media aritmética de opciones asiáticas,

$$I = \int_0^t S(\tau)d\tau.$$

Para estas dos condiciones sólo se necesita encontrar la solución del problema en dos dimensiones. En efecto, para medias continuas se encuentra que:

$$V = I^\alpha W(\epsilon, t),$$

donde $\epsilon = S/I$, y

$\frac{\partial V}{\partial t} = I^\alpha \frac{\partial W}{\partial t}$,

$S\frac{\partial V}{\partial I} = \epsilon I\left[\alpha I^{\alpha-1}W(S/I,t) + I^\alpha \frac{\partial W}{\partial \epsilon}\left(\frac{-S}{I^2}\right)\right]$,

$\frac{\partial V}{\partial S} = I^{\alpha-1}\frac{\partial W}{\partial \epsilon}\frac{1}{I}$,

$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = I^{\alpha-2}\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon^2}$;

sustituyendo en (4.8) con $f(S,t) = S$, se tiene

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\epsilon^2\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon^2} + ((r - \widehat{D} + \alpha)\epsilon - \epsilon^2)\frac{\partial W}{\partial \epsilon} + rW = 0.$$

Para la media discreta $V = I^\alpha W(\epsilon,t)$, donde de nuevo $\epsilon = S/I$, y

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\epsilon^2\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon^2} + (r - \widehat{D})\epsilon\frac{\partial W}{\partial \epsilon} + rW = 0,$$

con la condición de salto

$$W(\epsilon, t_i^-) = (1+\epsilon)^\alpha W((1+\epsilon)^{-1}, t_i^-).$$

Entonces este problema sólo tiene dos dimensiones. En la práctica puede evaluarse rápidamente como una opción vainilla.

4.1.5 Opciones con Media en el Precio de Ejercicio para Muestras Continuas

Un principal ejemplo de una opción asiática se examina en camino de una opción con media en el precio de ejercicio, donde el pago depende de la media aritmética del precio del activo. La opción es nombrada así porque el pago al expirar para la versión europea es el mismo que para opciones simples, pero con el precio de ejercicio constante E, reemplazado por

$$\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau.$$

Por lo tanto el pago al expirar es

$$max\left(S - \frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau, 0\right),$$

para un call y

$$max\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau - S, 0\right),$$

para un put.

Se darán los detalles sólo para un call.

El valor superficial de la opción, depende de las tres variables S, I y t, donde I es

$$I = \int_0^t S(\tau)d\tau.$$

Como ya se mencionó, el valor actual de la opción sólo depende de dos variables, S/I y t. Esto es porque la media del precio de ejercicio de la opción admite una reducción de similitud: si no hay dividendos se satisface el criterio anterior.

Para valuar la versión americana, primero se debe decidir el pago para un ejercicio temprano, ya que la media no es conocida antes de expirar. Por lo tanto es natural que para un call se tenga:

$$max\left(S - \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)d\tau, 0\right); \tag{4.15}$$

lo que representa la media continua para el intervalo de tiempo de 0 a t. Esto sólo da el pago correcto al expirar.

Se puede escribir el pago para una opción call como:

$$S \cdot max\left(1 - \frac{1}{St}\int_0^t S(\tau)d\tau, 0\right).$$

Con esto en mente se realiza el cambio de variable siguiente:

$$R = \frac{1}{S}\int_0^t S(\tau)d\tau, \tag{4.16}$$

también el pago para un ejercicio temprano y al expirar puede ser escrito respectivamente como:

$$S \cdot max\left(1 - \frac{R}{t}, 0\right), \qquad S \cdot max\left(1 - \frac{R}{T}, 0\right).$$

Ahora se encuentra la ecuación diferencial estocástica que R satisface. Como t se incrementa, $t + dt$, R cambia a

$$R + dR = \frac{1}{S + dS}\int_0^{t+dt} S(\tau)d\tau.$$

Usando (2.2), esto puede ser expandido a $O(dt)$, y da

$$dR = -\sigma R dX + (1 + R(\sigma^2 - \mu))dt. \tag{4.17}$$

Esto es el camino aleatorio seguido por R y que no depende de S explícitamente. En vista de la forma de la función de pagos, se induce el postulado que el valor de la opción toma la forma

$$V(S,R,t) = SH(R,t).$$

Se puede encontrar la ecuación diferencial parcial para $H(R,t)$ en uno o dos caminos equivalentes. Una forma es colocar un portafolio con media del precio de ejercicio de una opción con un número de activos y la derivada de la ecuación que cumpla con los principios básicos. La otra forma es sustituir $V = SH$ dentro de (4.9) lo que hace la derivada simple. Después tratar de buscar una solución de H que sea independiente de S. Por medio de las dos formas se puede encontrar que

$$\Delta = H - R\frac{\partial H}{\partial R}$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR)\frac{\partial H}{\partial R} \leq 0, \tag{4.18}$$

considerando que los pagos no tienen dividendos. Si la opción es europea se tiene la igualdad extricta en (4.18). Si ésta es americana se puede tener la desigualdad en (4.18). Pero el contraste

$$H(R,t) \geq max\left(1 - \frac{R}{t}, 0\right) = \Lambda(R,t), \tag{4.19}$$

debe cumplirse. Además si el precio de la opción siempre tiene un pago de ejercicio antes de expirar, éste debe ser continuo, es decir, la función $H(R,t)$ y la primera derivada de R deben ser continuas siempre.

Condiciones de Frontera para Opciones Europeas

Para la opción europea, se deben imponer como condiciones iniciales y de frontera respectivamente $R = 0$ y $R \to \infty$. La condición de frontera cuando $R \to \infty$ es simple. Si S es la frontera para un tiempo finito t, la única manera de que R tienda a infinito es que S tienda a cero. En este caso la opción no debería ser ejercida, y se tiene

$$H(\infty, 0) = 0.$$

Para determinar la condición de frontera en $R = 0$, se necesita tomar la ecuación (4.18) cuando $R \to 0$. Recalcando la condición de frontera en $S = 0$ para la opción vainilla. Siguiendo esto, si S es cero entonces seguirá siendo cero para todo tiempo y en este caso el pago es conocido con certeza. Esto sin embargo, no es el caso para un camino aleatorio de R. Sustituyendo $R = 0$ en (4.17) se encuentra que $dR = dt > 0$, también la variable R inmediatamente se mueve lejos en $R = 0$ dentro de $R > 0$. Si ahora $R = 0$, no hay razón porque esto debería seguir siendo cero hasta expirar. Por lo tanto no se conoce un valor largo de la opción con certeza cuando $R = 0$. Todo lo que se conoce es que el valor de la opción debe ser finito.

Se puede usar la condición de que el valor de la opción es finito en $R = 0$, lo que deduce una condición de frontera para la ecuación diferencial. Primero, note que para R pequeña el término $R\partial H/\partial R$ es insignificante comparado con $\partial H/\partial R$, se puede ignorar este término (de hecho, este es independiente del valor que tome H, sin importar que sea infinita). Por lo tanto sólo se ignorara el término $R^2\partial^2 H/\partial R^2$ cuando $R \to 0$ por la siguiente razón: supóngase que $R^2\partial^2 H/\partial R^2$ no tiende a cero en el límite cuando $R \to 0$; se puede considerar sin pérdida de generalidad que

$$\lim_{R\to 0} R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} = O(1).$$

Para R pequeña se debería tener

$$\frac{\partial^2 H}{\partial R^2} = O(\frac{1}{R^2}),$$

la cual puede ser integrada fácilmente para mostrar que $H = O(logR)$ cuando $R \to 0$. Esto es inconsistente cuando H es finita. Por lo tanto se concluye que el término $\partial H/\partial t$ y $\partial H/\partial R$ contribuyen cuando $R = 0$.

En otras palabras

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} = 0 \quad \text{cuando} \quad R = 0.$$

Esta es la segunda condición de frontera.

La ecuación (4.18), con condición final y de frontera $R = 0$ y $R = \infty$ son suficientes para determinar el valor de H de una opción europea únicamente.

Es posible escribir una expresión analítica exacta para el problema como una suma finita de funciones hipergeométricas. No se da esta solución exacta porque la función hipergeométrica no es muy conocida, por lo tanto la solución es representada en términos de una suma infinita porque, desde el punto de vista práctico, el valor es obtenido rápidamente aplicando métodos numéricos a la ecuación diferencial parcial.

En el caso de opciones americanas, se tiene que resolver la desigualdad diferencial parcial en (4.18) sujeta a la restricción (4.19), la condición final y la condición que $H \to 0$ *cuando* $R \to \infty$. *No se puede hacer analíticamente por lo cual se debe encontrar una solución numérica.*

Paridad entre un un Put y un Call para la media del Preciode Ejercicio de Opciones Europeas

El pago al expirar para un portafolio de la media del precio de ejercicio de opciones europeas de un call largo y un put corto es

$$S \cdot max(1 - R/T, 0) - S \cdot max(R/T - 1, 0).$$

Por lo tanto R es mayor o menor que T al expirar, este pago es simplemente

$$S - \frac{RS}{T}.$$

El valor de este portafolio es idéntico al que consiste de un activo y un producto financiero cuyo pago es

$$-\frac{RS}{T}.$$

Para valuar este producto se busca una solución de la ecuación de la media del precio de ejercicio de la forma

$$H = a(t) + b(t)R, \tag{4.20}$$

con $a(T) = 0$ *y* $b(T) = -1/T$; *cada solución debe de tener el pago requerido de* $-RS/T$. *Sustituyendo (4.20) en (4.18) y cumpliendo las condiciones frontera, se encuentra que*

$$a(t) = -\frac{1}{rT}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right), \qquad b(t) = \frac{1}{T}e^{-r(T-t)}.$$

Se concluye que

$$C - P = S - \frac{S}{rT}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right) - \frac{1}{T}e^{-r(T-t)}\int_0^t S(r)dr,$$

donde C y P son los valores de la media aritmética europea del precio de ejercicio de uncall y un put. Esto es la paridad entre un put-call para las opciones europeas con media en el precio de ejercicio.

4.1.6 Análisis de la Media del Precio de Ejercicio para Opciones Americanas

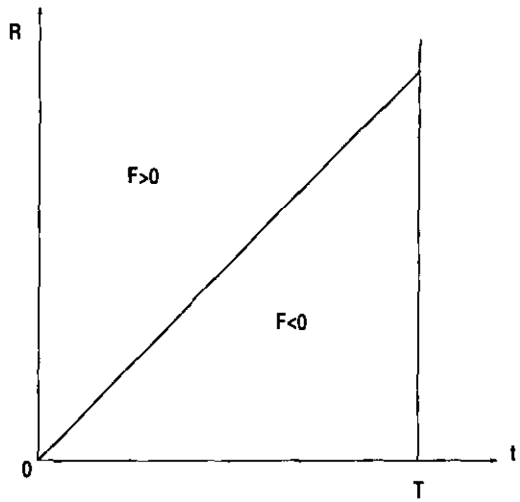
La limitación en el caso de la media del precio de ejercicio de opciones americanas, se escribe en términos del precio escalado del activo R, como sigue

$$\Lambda(R,t) = max\left(1 - \frac{R}{t}, 0\right). \tag{4.21}$$

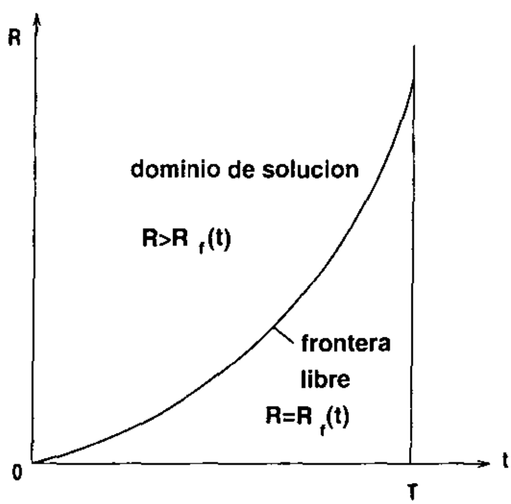
Para determinar donde y cuando la función $\Lambda(R,t)$ en (4.21) satisface la desigualdad en (4.18), se pueden hacer conclusiones cualitativas acerca de la posición de la frontera libre. Sustituyendo (4.21) en (4.18), se encuentra que para $R < t$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 R^2\frac{\partial^2\Lambda}{\partial R^2} + (1 - rR))\frac{\partial\Lambda}{\partial R} = \frac{R}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{rR}{t} = F(R,t).$$

En la siguiente figura se muestran las regiones en (R,t) espacio donde $F(R,t)$ es positiva y negativa.



Entonces en la versión de opciones americanas se satisface (4.18) con la desigualdad, la frontera libre $R = R_f(t)$ debe estar contenida enteramente dentro de la región donde $F(R,t) \leq 0$. En comparación con el análisis de opciones americanas vainilla se mostró que , en particular, la frontera libre proviene del punto $R = T/(1+rT)$ al tiempo $t = T$, entonces $F = 0$ y $R_f(T) = T/(1+rT)$. Se anticipa que el problema para $H(R,t)$ es como se muestra sistemáticamente en la siguiente figura.



Análisis Local de la Frontera Libre próxima a expirar

Se desea determinar el comportamiento de la frontera libre al cierre del tiempo al expirar, es decir, cuando este próximo $t = T$ y $R = R_f(T)$.

Es conveniente cambiar a nuevas variables dependientes

$$\bar{H} = H - 1 + \frac{R}{t}.$$

Para $(T-t)/T << 1$ y $|R - T/(1+rT)| << 1$, la ecuación (4.18) es válida por encima de la frontera libre como se muestra en la figura anterior, puede ser aproximada por

$$\frac{1}{2}\sigma^2 R_f(T)^2 \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial R^2} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = (R - R_f(T))\frac{1+rT}{T^2}.$$

Próxima a expirar, los otros términos en (4.18) son más pequeños que estos retenidos.

Este problema local es idéntico al modelo para opciones americanas vainilla. El comportamiento de la frontera libre cerrada al expirar, es determinado por la solución de la ecuación de difusión con términos originales. Para el análisis se ve que la frontera libre próxima a expirar está dada por

$$R_f(t) = \frac{T}{1+rT} + \epsilon_0 \frac{\sigma T}{\sqrt{2}(1+rT)}\sqrt{(T-t)},$$

donde $\epsilon_0 = 0.9034$. En la figura se muestra la función H conta R.

4.1.7 Opciones con Media en el Precio de Ejercicio con Intercambio Extranjero

Como un segundo ejemplo se consideran opciones con media en el precio de ejercicio con intercambio extranjero, para europeas y americanas. La opción específica a considerar es aquella que da el derecho a comprar una unidad de corriente extranjera para la media del precio doméstico sobre algún período de tiempo. En este contexto S denota la tasa de cambio y el pago es

$$max\left(1-\frac{1}{ST}\int_0^T S(\tau)d\tau,0\right), \tag{4.22}$$

medido en la corriente extranjera.

Este problema, puede ser escrito en términos de dos variables R y t donde

$$R=\frac{1}{S(t)}\int_0^t S(\tau)d\tau.$$

El pago al expirar puede ser escrito como

$$max(1-R/T,0)$$

y tomando el pago con ejercicio temprano se tiene

$$max(1-R/t,0).$$

Como antes, se puede ver que para el valor de la opción $V(R,t)$, S no ocurre explícitamente. Considerando esta forma para la solución y sustituyendo dentro de (4.9) se encuentra que

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2R^2\frac{\partial^2 V}{\partial R^2}+\frac{\partial V}{\partial R}-rV+(\sigma^2-r+r_f)R\frac{\partial V}{\partial R}\leq 0, \tag{4.23}$$

con igualdad estricta para opciones europeas. La Δ está dada por

$$\Delta=-\frac{R}{S}\frac{\partial V}{\partial R}.$$

Se tiene que considerar que la corriente extranjera recibe un interés continuo y la tasa r_f constante, es decir, se tiene que tomar $D(S,I,t)=r_f$.

Ahora, se deben determinar las condiciones correctas de frontera y final. La condición final es la que se encuentra más fácilmente

$$V(R,t)=max\left(1-\frac{R}{T},0\right),$$

la cual es la función de pago. La primera condición de frontera es obvia; cuando $R \to \infty$ la opción no debería ser ejercida y

$$V(R,t) \to 0 \qquad cuando \qquad R \to \infty.$$

El comportamiento local del precio de la opción cuando $R = 0$, determina la correcta condición de frontera. Para el precio finito de la opción, se necesita

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial R} - rV = 0$$

en $R = 0$.

Si la opción es americana entonces no se requiere la igualdad extricta en (4.23), pero se requiere de la restricción

$$V(R,t) \geq max\left(1 - \frac{R}{t}, 0\right).$$

La opción-FX americana con media en el precio de ejercicio induce al problema de la frontera libre $R = R_f(t)$ en la cual V y $\partial V/\partial R$ deben ser continuas.

4.1.8 Opciones con Tasa Media

La típica opción de tasa media es muy similar a las opciones con media en el precio de ejercicio en el que el pago depende de la media del precio del activo definida convenientemente. La diferencia es en la forma estructural del pago. La media del precio de ejercicio es la misma que una opción vainilla, excepto que el precio de ejercicio es reemplazado por la media, la tasa media tiene el mismo pago como la vainilla pero con el precio del activo reemplazado por la media. Esto es, la tasa media aritmética de una opción call tiene pago

$$max\left(\frac{I}{T} - E, 0\right),$$

al expirar. Opciones semejantes son usualmente más complicadas de valuar que las opciones con media en el precio de ejercicio, porque en general, ellas no admiten reducción de similitudes: típicamente, no es posible reducir el número de variables independientes de tres a dos. Esto es cierto cuando la media es medida aritméticamente. De cualquier modo cuando la media es medida geométricamente, es posible reducir el problema a dos *variables y se puede encontrar la fórmula explícita.*

Medias Geométricas y Muestras Discretas

Es conocido que existen soluciones explícitas para el valor de tasas medias de opciones cuando la media es medida geométricamente [14]. Esto es porque el logaritmo del precio del activo subyacente sigue un camino aleatorio con varianza independiente del precio del activo subyacente. Existe una íntima relación entre la suma de los logaritmos y la media geométrica.

La fórmula explícita sólo existe para opciones europeas. Si se considera una opción europea con tasa media con pago al expirar dado por

$$V(S, I, T) = \Lambda(I).$$

Obsérvese que el pago sólo esta en función de I y no de S; esto hace posible una solución explícita.

La ecuación es

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_i) log(S) \frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \tag{4.24}$$

esto es, la ecuación (4.8) con

$$f(S, t) = \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_i) log(S).$$

Es usual, que t_i denota el tiempo al cual la muestras discretas son tomadas para la media y N denota el número total de muestras tomadas.

Se busca una solución de (4.24) de la forma

$$V(S, I, t) = F(y, t),$$

donde

$$y = \frac{I + l(t)log(S)}{N},$$

donde $l(t)$ puede ser determinado. Con y y t como variables independientes, se puede escribir (4.24) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &+ \frac{dl/dt\ log(S)}{N}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{N}\sum_i \delta(t - t_i)log(S)\frac{\partial F}{\partial y} \\ &+ \frac{\sigma^2 l^2(t)}{2N^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{l(t)}{N}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial F}{\partial y} - rF = 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Se elije

$$l(t) = \int_t^T \sum_i \delta(\tau - t_i)d\tau,$$

eliminando $log(S)$ para la ecuación. Entonces los tiempos t_i son conocidos, por lo tanto la función es conocida. Esto es un paso de la función la cual incrementa su valor por uno en cada tiempo de la muestra. El límite superior en la integral ha sido tomado como T, al expirar $l = 0$ y $y = I$, el pago es una función de y solamente.

Cuando los términos del logaritmo han sido eliminados, lo que sigue es modificar la ecuación de difusión con coeficientes que son independientes de la variable y. Estos coeficientes son, de cualquier modo, funciones del tiempo,t. Por lo tanto, después de eliminar los términos del logaritmo en (4.26) lo que queda es simplemente la ecuación de Black-Scholes, sobre una transformación logarítmica con tiempo dependiente de la volatilidad, con tasa de interés distintas de cero y tiempo dependiente de los dividendos dados. En particular, la volatilidad efectiva está dada por

$$\frac{\sigma l(t)}{N}.$$

Las siguientes reglas muestran exactamente como se modifica la fórmula de Black-Scholes para valuar opciones similares con tasa media geométrica:

1) *Tomar la fórmula de Black-Scholes para una opción vainilla, teniendo los mismos pagos que una asiática, pero en términos de $e^{I/N}$ en lugar de S; por ejemplo*

$$max(e^{I/N} - E, 0) \quad \text{en lugar de} \quad max(S - E, 0).$$

El call de esta fórmula se describe como $V_{BS}(S, t, \sigma)$.

2) *Dondequiera que σ aparezca en la fórmula de V_{BS}, es reemplazada por*

$$\frac{1}{N^2(T-t)}\int_t^T \sigma^2 l^2(\tau)d\tau.$$

3) *Dondequiera que r aparezca en la fórmula, es remplzada por*

$$\frac{1}{T-t}\int_t^T \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{l(\tau)}{N} + \frac{\sigma^2}{2N^2}l^2(\tau)d\tau.$$

4) *Multiplicar el resultado de la fórmula por*

$$exp\left(-\int_t^T r - \frac{l(\tau)}{N}(r - \frac{1}{2}\sigma^2) - \frac{\sigma^2}{2N^2}l^2(\tau)d\tau.\right)$$

5) *Reemplazar a S por $e^{I/N}S^{l(t)/N}$.*

Medias Geométricas y Muestras Continuas

Cuando la media geométrica es obtenida de una muestra continua, I está dada por

$$I = \int_0^t log(S(\tau))d\tau$$

y para una opción europea se debe resolver

$$\frac{\partial V}{\partial t} + log(S)\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

De nuevo, si el pago es una función de I solamente, se puede buscar una solución de la forma $F(y,t)$, donde

$$y = \frac{I + (T-t)log(S)}{T}.$$

Con esta variable independiente la ecuación diferencial regresa una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico, con coeficientes que son independientes de y.

De igual manera, la fórmula explícita puede ser encontrada y se puede ver que esta para una opción vainilla, se transforma dentro de la fórmula explícita para una opción con tasa media geométrica:

1) *Tomar la ecuación de Black-Scholes para una opción vainilla, teniendo el mismo pago que una asiática, pero en términos de $e^{I/T}$ en lugar de S; por ejemplo*

$$max(e^{I/T} - E, 0) \quad \text{en lugar de} \quad max(S - E, 0).$$

El call de esta fórmula es de la forma $V_{BS}(S, t, r, \sigma)$.

2) *Dondequiera que σ^2 aparezca en la fórmula para V_{BS}, es reemplazada por*

$$\frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2 \frac{(T-\tau)^2}{T^2} d\tau.$$

Cuando σ es contante, la volatilidad efectiva es por lo tanto $\sigma^2(T-t)^2/3T^2$.

3) *Dondequiera que r aparezca en la fórmula, es reemplazada por*

$$\frac{1}{T-t}\int_t^T \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{T-\tau}{T}\right) d\tau.$$

Cuando r y σ son constantes, la tasa efectiva de interés es $(\frac{1}{2}\sigma^2 - r)(T-t)/2T$.

4) *Multiplicar el resultado de la fórmula por*

$$exp\left(-\frac{1}{T-t}\int_t^T \left(r - \frac{(T-\tau)}{T}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\right) d\tau\right).$$

Cuando r y σ son constantes, este factor es

$$exp\left(-r - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)/2T\right).$$

5) *Reemplazar S por $e^{I/T}S^{(T-t)/T}$.*

Medias Aritméticas

La media aritmética de una opción con tasa media, es difícil de evaluar ya que es equivalente a la media geométrica. Generalmente, no es posible eliminar una de las varibles independientes y el problema debe resolverse en tres dimensiones. Sin embargo, el problema de la tasa media aritmética es fácil de resolver numéricamente, ya que es posible encontrar una ecuación diferencial parcial.

Cada opción tiene pagos de la forma

$$V(S,I,T) = max(E - I/N, 0),$$

donde, en este ejemplo,

$$I = \sum_{i=1}^{N} S(t_i).$$

Este valor de la opción, genuinamente depende de los tres valores independientes S, I y t. En este ejemplo no se consideran dividendos. Se debe resolver la ecuación básica de Black-Scholes con I como un parámetro, siempre con las condiciones de frontera

$$V(0,I,t) = e^{-r(T-t)} max(E - I/N, 0),$$

$$V(S,I,t) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad S \to \infty.$$

Las condiciones de salto aplicadas a través de los tiempos de la muestra son de la siguiente manera

$$V(S,I,t_i^-) = V(S,I+S,t_i^+).$$

4.2 Conclusiones Generales

En conclusión se puede decir que el tipo de opciones exóticas, en particular las asiáticas, que se describen en esta tesis puede tener diversas aplicaciones en el ámbito económico y político del país.

Las opciones fueron creadas para cubrir riesgos muy específicos, así como para disminuir incertidumbre en los mercados. Un ejemplo muy claro y real se tiene en el país con el manejo del petróleo, en donde el uso de opciones y principalmente asiáticas pueden ser de gran utilidad para disminuir la volatilidad del mismo.

Así como la incertidumbre juega un papel muy importante en la conducción política en el país, también las opciones deberían de ser el instrumento fundamental de inversión del mismo. Ya que garantiza la cobertura y protección de dicha incertidumbre.

En conclusión se puede afirmar que el enfoque actuarial para encontrar el precio de una opción, es razonable, pero más óptimo resulta ser la aplicación de Black-Scholes para encontrar el precio de una opción. Ya que por el método actuarial se pueden necesitar desde 100 hasta miles de trayectorias aleatorias para poder aproximar el precio de la opción (Ver apéndice II). Cabe mencionar que ahora ya existen paquetes especializados y eficientes que calculan el precio de una opción mediante algunos datos específicos.

También el enfoque actuarial, puede ser aplicado para opciones exóticas de tipo asiático, con la única diferencia de que en lugar de tener el precio de ejercicio E, se cambia por el promedio del activo subyacente para cada trayectoria generada.

El que un individuo no adquiera un seguro para proteger el valor de su propiedad no es criticable porque el resto de la sociedad no se ve afectada si algo sale mal. Pero esto no se aplica a nivel macroeconómico porque una mala decisión afecta a todo el país. Por tal motivo suena razonable el promover la aplicación de instrumentos de inversión como las opciónes exóticas.

La ventaja de estas opciones es que ya han sido aplicadas en diversos países, en los cuales les ha dado resultado para cubrir un sin fin de riesgos. Hay que desaparecer el tabú de que por ser un país de tercer mundo, no se deben o pueden aplicar instrumentos más sofisticados como lo son las opciones exóticas. Si esta garantizado que este tipo de intrumentos nos va a cubrir de los riesgos, lo cual disminuiría considerablemente la incertidumbre (en el caso de la incertidumbre en el precio del petróleo) al igual que la volatilidad, bien vale la pena arriesgarse a utilizar este tipo de opciones y así llegar a ser un país muchísimo más competitivo.

Hay que aprovechar el hecho, de que este tipo de instrumentos de cobertura para reducir la volatilidad de los ingresos fiscales, no es desconocida en México. Esta experiencia *previa puede resultar muy valiosa.*

Capítulo 5

APENDICE I

5.1 Ecuación de Difusión o de Calor

Problema lineal de la propagación del calor. *Tómese una barra homogénea de longitud l, térmicamente aislada por los lados y lo suficientemente fina como para que en cualquier momento del tiempo se pueda considerara la temperatura igual en todos los puntos de un corte transversal. Si se mantienen los extremos de la barra a temperaturas constantes u_1 y u_2 entonces, a lo largo de la barra se establece la distribución lineal de temperatura, dada de la siguiente manera:*

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x.$$

En este caso, pasará el calor del extremo más caliente al más frio. La cantidad de calor que pasa por una sección de la barra de superficie S por la unidad de tiempo, se expresa por la fórmula

$$Q = -k \frac{u_1 - u_2}{l} B = -k \frac{\partial u}{\partial x} B, \tag{5.1}$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica, que depende del material de la barra.

La magnitud del flujo calorífico se considera positiva, si el calor pasa en dirección del crecimiento de x.

Analizando el proceso de distribución de la temperatura en la barra, se tiene que este proceso puede ser descrito mediante la función $u(x,t)$, que representa la temperatura en el corte x al tiempo t. Para encontrar la ecuación que debe satisfacer la función $u(x,t)$, se formularán las leyes físicas que determinan los procesos relacionados con la propagación del calor.

1) *Ley de Fourier. Si la temperatura del cuerpo no es homogénea, en éste aparecen flujos caloríficos, dirigidos desde los lugares de mayor temperatura hasta los lugares de menor temperatura.*

La cantidad de calor que pasa por la sección x durante el intervalo de tiempo $(t, t+dt)$, es igual a

$$dQ = qBdt, \tag{5.2}$$

donde

$$q = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{5.3}$$

es la densidad del flujo calorífico, igual a la cantidad de calor que pasa en la unidad de tiempo por una superficie de $1cm^2$. Esta ley es la generalización de la fórmula (5.1). Se le puede dar la forma integral como

$$Q = -B\int_{t_1}^{t_2} k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt, \tag{5.4}$$

donde Q es la cantidad de calor que pasa durante el intervalo de tiempo (t_1, t_2) por la sección x. Si la barra no es homogénea, k es una función de x.

2) *La cantidad de calor que es necesario dar a un cuerpo homogéneo para elevar su temperatura en Δu, es igual a*

$$Q = cm\Delta u = c\rho V\Delta u, \tag{5.5}$$

donde c en el calor específico, m la masa del cuerpo, ρ su densidad y V el volumen.

Si la variación de temperatura tiene una magnitud diferente en distintas partes de la barra, o si ésta no es homogénea, entonces

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho B \Delta u(x) dx. \tag{5.6}$$

3) *Dentro de la barra puede surgir o absorberse calor. La emisión de calor se puede caracterizar por la densidad de las fuentes térmicas $F(x,t)$ en el punto x en el momento t. Como resultado de la acción de estas fuentes en el intervalo de la barra $(x, x+dx)$ durante un intervalo de tiempo $(t, t+dt)$ se emitirá una cantidad de calor.*

$$dQ = BF(x,t)dxdt, \tag{5.7}$$

o en forma integral,

$$Q = B\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,t)dxdt, \tag{5.8}$$

donde Q es la cantidad de calor que se emite en el intervalo de la barra (x_1, x_2) durante el tiempo (t_1, t_2).

La ecuación de conducción de calor se obtiene al calcular el balance de calor en cierto segmento (x_1, x_2) durante cierto intervalo de tiempo (t_1, t_2). Aplicando la ley de conservación de la energía y las fórmulas (5.4), (5.6) y (5.8), se puede escribir la igualdad

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_1}\right]d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi,\tau)d\xi d\tau \\ = \int_{x_1}^{x_2} c\rho[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]d\xi,\end{aligned} \tag{5.9}$$

que es precisamente la ecuación de la conducción del calor en forma integral.

Para poner la ecuación de la conducción del calor en forma diferencial, supóngase que la función $u(x,t)$ posee las derivadas continuas u_{xx} y u_t.

Aplicando el teorema del valor medio, se obtiene la igualdad

$$\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_1}\right]_{\tau=t_3}\Delta t + F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t$$
$$= c\rho[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]_{\xi=x_3}\Delta x, \tag{5.10}$$

la cual, en virtud del teorema del valor medio, se puede transformar como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_{x=x_5,t=t_3}\Delta t\Delta x + F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t$$
$$= \left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_{x=x_3,t=t_5}\Delta x\Delta t, \tag{5.11}$$

donde t_3, t_4, t_5 y x_3, x_4, x_5 son puntos intermedios de los intervalos (t_1,t_2) y (x_1,x_2).

De aquí después de simplificar entre el producto $\Delta x\Delta t$, se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=x_5,t=t_3} + F(x,t)\Big|_{x=x_4,t=t_4} = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_5,x=x_3}. \tag{5.12}$$

Todos estos razonamientos son aplicables a intervalos cualesquiera (x_1,x_2) y (t_1,t_2). Pasando al límite cuando x_1, $x_2 \to x$ y t_1, $t_2 \to t$, se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{5.13}$$

que se llama ecuación de la conducción del calor.

Para el caso en que no existan fuentes térmicas y $c\rho = 1$ y $k = 1$, se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5.14}$$

de aquí en adelante, será la definición que se manejará para la ecuación de calor o difusión.

5.1.1 Valor del Problema Inicial en un Intervalo Finito

Supóngase que se desea resolver $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$*, en un intervalo finito* $-L < x < L$ *y* $t > 0$ *con una longitud finita de* $2L$*.*

Si se considera una temperatura inicial de $u(x,0) = u_0(x)$ *para* $-L < x < L$ *entonces se obtienen los siguientes casos:*

$$a)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para} \quad -L < x < L,$$

$$\text{con} \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u(-L,t) = g_(t) \quad \text{y} \quad u(L,t) = g_L(t),$$

y

$$b)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para} \quad -L < x < L,$$

$$\text{con} \quad u(x,0) = u_0(x), \quad -\frac{\partial u}{\partial x}(-L,t) = h_{(-)}(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = h_{(+)}(t).$$

El primer caso corresponde a determinar la temperatura en los extremos de la barra, lo que se reduce a resolver un problema de Dirichlet y el segundo corresponde a especificar el flujo de calor a través de los extremos, que se convierte en un problema de Neumann.

5.1.2 Valor del Problema Inicial en un Intervalo Infinito

Se considera el problema de una barra cuando $L \to \infty$ *, es decir:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ para } -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{5.15}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty \tag{5.16}$$

donde:

i) $u(x,0)$, *es suficientemente bien comportada[12],*

ii) $\lim_{|x|\to\infty} u(x,0)e^{-ax^2} = 0$ *para alguna* $a > 0$, *y finalmente*

$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t)e^{-ax^2} = 0$, *para alguna* $a > 0$ *y* $t > 0$.

Se toma la solución del problema definido en un intervalo seminfinito,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{para} \quad 0 < x < \infty \quad \text{y} \quad t > 0,$$

$$\text{con} \quad u_0(x) \quad \text{para} \quad 0 < x < \infty,$$

y límites continuos con valores $x = 0$ *y* $u(0,t) = g_0(t)$.

La solución fundamental[12] de la ecuación de difusión es al tiempo T:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi T}} e^{-\frac{x^2}{4T}},$$

la cual es diferenciable y bien comportada.

Si se utiliza la función anterior como dato inicial de la ecuación de difusión, la solución es:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(T-t)}} e^{-\frac{x^2}{4(T-t)}},$$

que tiene una singularidad en $T = t$, *correspondiente a una función delta,* $\delta(x)$.

5.2 Soluciones Explícitas de la Ecuación de Difusión en Dominios Fijos

5.2.1 Soluciones Autosimilares

Lo que se quiere es obtener soluciones a la Ecuación Diferencial Parcial (EDP) que dependan de x y t de una manera particular. Esto permite reducir la EDP a una ecuación diferencial ordinaria (EDO). Para ello se puede pensar que la solución $u(x,t)$ de una EDP, sólo depende de una combinación especial de x y t. La solución de la EDO es llamada una solución de similitud de la EDP original.

Ejemplo 10 *Supóngase que $u(x,t)$ satisface el siguiente problema en un intervalo seminfinito para $x > 0$ y*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ x, t > 0, \tag{5.17}$$

con condición incial

$$u(x,0) = 0, \tag{5.18}$$

y condición de frontera $x = 0$,

$$u(0,t) = 1, \tag{5.19}$$

para lo cual sólo se requiere

$$u \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty. \tag{5.20}$$

Supóngase que se modela la evolución de la temperatura a lo largo de una barra con temperatura inicial cero y que en el transcurso del tiempo asciende hasta 1.

Como $u(x,t)$ sólo depende de x y de t, dadas las propiedades de reescalamiento de la ec.(5.17)[12], se toma la combinación:

$$\epsilon = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \text{con } u(x,t) = U(\epsilon).$$

Al derivar usando la regla de la cadena se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2t}\epsilon U'(\epsilon), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{t}U''(\epsilon). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de difusión (5.14), se muestra que todos los términos que involucran a t se cancelan, y $U(\epsilon)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria de 2^{do} orden.

$$\frac{1}{t}U''(\epsilon) + \frac{1}{2t}\epsilon U'(\epsilon) = 0.$$

Por lo tanto se concluye que:

$$U''(\epsilon) + \frac{1}{2}\epsilon U'(\epsilon) = 0, \tag{5.21}$$

con condiciones iniciales y de frontera $U(0) = 1$ y $U(\infty) = 0$. Si se multiplican ambos lados de la ecuación (5.21) por el factor integrante $e^{\epsilon^2/4}$, se obtiene la derivada exacta

$$U'(\epsilon) = Ce^{\frac{\epsilon^2}{4}}, \tag{5.22}$$

para alguna constante C. Si se integran ambos lados de la encuación (5.22) se tiene que:

$$U(\epsilon) = C\int_0^{\epsilon} e^{-\frac{s^2}{4}} ds + D,$$

con D otra constante de integración.

Ahora si se aplican las condiciones de frontera, la propiedad $\int_0^\epsilon = \int_0^\infty - \int_\epsilon^\infty$ *y el resultado* $\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} ds = \sqrt{\pi}$, *finalmente se obtiene:*

$$U(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\epsilon^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} ds.$$

Regresando a las variables originales se concluye que:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} ds. \tag{5.23}$$

5.2.2 Solución del Problema con Valores Iniciales

La solución fundamental del problema con valores iniciales, puede ser usada para obtener la solución explícita de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{con} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

en el cual se tiene que resolver la ecuación de difusión con dato inicial

$$u(x,0) = u_0(x) \quad y \quad \text{condiciones} \quad x = \pm\infty \quad y \quad t > 0.$$

La clave es tratar de escribir a la solución como una superposición de soluciones fundamentales [12] que puede escribirse como:

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^\infty u_0(\epsilon)\delta(\epsilon - x)\delta\epsilon,$$

donde $\delta(\cdot)$ *es una función delta de Dirac.*

Se denota la solución fundamental de la ecuación de difusión de la siguiente manera:

$$u_\delta(\epsilon,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}, \tag{5.24}$$

con valor inicial $u_\delta(\epsilon, 0) = \delta(\epsilon)$.

Si se considera la propiedad

$$u_\delta(\epsilon - x, t) = u_\delta(x - \epsilon, t),$$

y se sustituye en (5.24) se obtiene la ecuación

$$u_\delta(\epsilon - x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\epsilon - x)^2}{4t}},$$

la cual es una solución de la ecuación de difusión usando a ϵ *como variable independiente, a* x *como parámetro y con valor inicial*

$$(u_0(\epsilon) - x, 0) = \delta(\epsilon - x).$$

Así para cada ϵ *la función* $u_0(\epsilon)u_\delta(\epsilon - x, t)$, *es vista como una función de* x *y* t *con* ϵ *el calor puntual, que satisface la ecuación de difusión* $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ *con dato inicial* $u_0(\epsilon)\delta(\epsilon - x)$. *Las soluciones se pueden suponer de esta forma, dado que la ecuación de calor es lineal.*

Haciendo el mismo análisis para toda ϵ, *e integrando para* $\epsilon = -\infty$ *y* $\epsilon = 0$, *se obtiene la solución a la ecuación de calor*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\epsilon) e^{-(x-\epsilon)^2/4t} d\epsilon, \tag{5.25}$$

con dato inicial

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\epsilon)\delta(\epsilon - x) d\epsilon = u_0(x).$$

La ecuación (5.25), representa la solución explícita del problema con valor inicial. Esta misma ecuación puede ser interpretada físicamente como sigue, la solución fundamental de la ecuación de calor describe el espaciamiento de las unidades o paquetitos en $t = 0$, *es decir, dichos paquetitos están concentrados en el origen.*

Matemáticamente, estos paquetitos son representados por la función delta. Ahora imagínense la distribución de la temperatura inicial $u_0(x)$ como la construcción de pequeños paquetes, en donde el paquete en $x = \epsilon$ tiene magnitud $u_0(x)$. Cada uno de estos paquetes involucrados da una distribución igual a la solución fundamental, multiplicada por $u_0(\epsilon)$ y con x reemplazada por $x - \epsilon$. Dado que la ecuación de calor es lineal, se obtiene toda la distribución de la temperatura por superposición de las evoluciones de dichos paquetitos, que en el límite la suma es reemplazada por la integral.

5.2.3 La Función Delta y la Función Heaviside

La función delta de Dirac, es una función generalizada[1].

Supóngase por ejemplo, que se recibe dinero y que la tasa de interés al tiempo t es $f(t)$. Por lo tanto el incremento en el intervalo t y $t + dt$ es $f(t)dt$, donde f es definida como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & si,\ -\epsilon \leq t \leq \epsilon; \\ 0 & si,\ |t| > \epsilon. \end{cases}$$

Es claro que el pago está dado por $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ y es igual a 1 independientemente de ϵ, para toda $t \neq 0$.

De acuerdo a la definición anterior de $f(t)$, se generan las siguientes propiedades:

1) *Para cada ϵ, $\delta_\epsilon(t)$ es continua,*

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t)dt = 1$,

3) *Para cada $t \neq 0$, $\lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t) = 0$.*

Las sucesión de funciones cuando $\epsilon \to 0$ es llamada una sucesión delta.

Ahora, si se tiene una función continua $\phi(x)$ y una sucesión delta, se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x)\phi(x)dx = \phi(0).$$

Este factor define a la función delta, como el mapeo continuo para funciones continuas $\phi(x)$ *de números reales, que tienen el valor* $\phi(0)$. *Usualmente se escribe como* $<\delta, \phi>= \phi(0)$.

Si se considera la expresión anterior para algunas $a, b > 0$, *se obtiene:*

$$\int_{-a}^{b} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0).$$

Análogamente para x_0*:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\phi(x)dx = \phi(x_0). \tag{5.26}$$

Si se integra a $\delta(x - x_0)$ *entre* $-\infty$ *y* x, *se tiene:*

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(\epsilon)d\epsilon,$$

donde $H(x)$ *es la función Heaviside definida por:*

$$H(x) = \begin{cases} 0 & si,\ x < 0, \\ 1 & si,\ x > 0. \end{cases}$$

Este par de relaciones muestran, que una función delta puede interpretarse con saltos.

Capítulo 6

APENDICE II

Se hará una comparación entre la fórmula de Black-Scholes y el método actuarial, tanto para opciones call europeas.

Suponga que se quiere asegurar el precio de materia prima dentro de 10 años a un costo de \$45.00, *dado que en este momento su valor es de* \$50.00, *con una tasa de interés libre de riesgo del* 5%. *El inversionista desea saber cual será su ganancia si adquiere un call y put, si se sabe que la volatilidad esta aproximadamente al* 1%.

Datos:

$S_0 = 50$

$E = 45$

$r = 5\%$

$\sigma = 1\%$

$T = 10$ *años*

6.1 Método de black-Scholes con cálculos a mano

La fórmula de Black-Scholes para un call es:

$$C(E,T) = SN(d_1) - Ee^{-rT}N(d_2).$$

Haciendo los cálculos respectivos tenemos

$$\begin{aligned} d_1 &= [ln(S/E) + (r + 0.5\sigma^2)T]/(\sigma\sqrt{T}) \\ &= [ln(50/45) + (0.05 + (0.5)(0.01)^2)(10)]/(0.01\sqrt{10}) \\ &= (0.1053605 + 0.5005)/(0.0316227) \\ &= 19.159038 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \\ &= 19.159038 - (0.01)\sqrt{10} \\ &= 19.127415 \end{aligned}$$

De aquí se determinaran a $N(d_1)$ y $N(d_2)$ por medio de tablas de normales.

$$N(d_1) = N(19.159038) = 1$$
$$N(d_2) = N(19.127415) = 1$$

Sustituyendo en $C(E,T)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} C(E,T) &= 50(1) - 45(1)e^{-0.05(10)} \\ &= 50 - 27.29 \\ &= 22.71 \end{aligned}$$

Para un put tenemos

En este caso se esperaría que $P(S,T) = 0$, dado que $S > E$.

$$N(-d_1) = 0 \quad y \quad N(-d_2) = 0$$

Por consiguiente su pago está dado por :

$$\begin{aligned} P(S,T) &= Ee^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \\ &= 45e^{-0.05(10)}(0.0) - 50(0.0) \\ &= 0.0 \end{aligned}$$

En este caso resultó que sólo obtiene una ganancia de \$22.7 si adquiere un call.

6.2 Comprobación con el paquete DERIVA-GEM

En este caso se introducieron los mismos datos y la salida del paquete fue la siguiente.

.	*call*	*put*
Precio	*22.706*	*0.000*
Delta	*1.000*	*0.000*
Gamma	*0.000*	*0.000*
Theta	*-0.004*	*0.000*
Vega	*0.000*	*0.000*
Rho	*2.729*	*0.000*

A continuación se explicará que significan los términos anteriores:

Delta.- *Se define como la tasa de cambio del precio de una opción con respecto al precio de la opción. Generalmente se le dan tres interpretaciones:*

1) *Es la sensibilidad de la prima a las variaciones del precio del subyacente,*

2) *es el equivalente en el subyacente de la opción, y*

3) *es la probabilidad de que la opción sea ejercida o acabe dentro del dinero.*

En términos matemáticos, la delta es la razón de cambio del precio de una opción entre el cambio en el precio de la acción, es decir,

$$\delta_c = \frac{\Delta C}{\Delta S} = N(d_1),$$
$$\delta_p = \frac{\Delta P}{\Delta S} = -N(-d_1) = N(d_1) - 1,$$

donde δ_c es la delta para un call y δ_p es la delta para un put respectivamente.

En el ejemplo como la $\Delta = 1$ implica que la opcióncambia 100

Gamma.- *Se define como la delta de la delta, es decir, es la sensibilidad de la delta a los cambios de los precios del activo subyacente. En términos algebraicos es la razón de los cambio entre la delta y el precio del activo subyacente.*

$$\gamma = \frac{\Delta \delta}{\Delta S}.$$

Para un call y un put se tiene respectivamente

$$\gamma_c = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \quad \gamma_p = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}.$$

La gama indica lo que aumenta o disminuye la delta de la opción si el precio del subyacente cambia. Si la γ es pequeña, entonces la delta cambia muy poco. En el caso contrario en el que la γ sea muy alta, entonces la delta es muy sensible al precio del activo por lo que es muy riesgoso dejar un portafolio sin cambios o rebalanceos por un período de tiempo *largo.*

En este caso como la gamma = 0, implica que el precio del subyacente no sufre cambios, y es lógico ya que S es considerada constante.

Teta.- *Mide la sensibilidad del precio de la opción al paso del tiempo hasta que la opción expire. Esto es:*

$$\theta_c = \frac{\Delta C}{\Delta T},$$

$$\theta_p = \frac{\Delta P}{\Delta T}.$$

Donde θ es un número negativo. Este signo obedece al hecho de que el valor en el tiempo de la opción decrece al paso del tiempo. Entre mayor sea el valor absoluto de teta, mayor será la pérdida por día del valor de la opción proveniente de mantener una opción debido al decaimiento del tiempo de la opción.

En el ejemplo como la $\theta = -.004$, indica que la opción decrece muy poco con el paso del tiempo, por lo cual la pérdida en el valor de la opción es despreciable.

Vega.- *Mide el cambio en el precio de la opción ante un cambio en la volatilidad de la opción:*

$$\nu_c = \frac{\Delta C}{\Delta \sigma},$$

$$\nu_p = \frac{\Delta P}{\Delta \sigma}.$$

Si la volatilidad aumenta y el activo se encuentra exactamente en el dinero ($S = E$), entonces las posibilidades de que acabe dentro del dinero son más altas ya que el precio del activo es muy variable. Por esto si el precio del activo tiene que subir, la vega disminuye cuando se aleja del dinero o se adentra mucho en el dinero. De esta manera, opciones muy dento del dinero o muy fuera del dinero tienen menos sensibilidad al cambio de volatilidad.

Compra de opciones genera vegas y gamas positivas, mientras que la venta de las mismas genera vegas y gamas negativas.

En este caso como $\nu = 0$, quiere decir que no hay cambio de la opción debido a la volatilidad, esto también es lógico dado que la volatilidad es constante.

Rho.- *Mide el cambio del precio de la opción ante un cambio en la tasa libre de riesgo.*

$$ro = \frac{\Delta C}{\Delta r}.$$

En general, esta sensibilidad no ha captado mayor atención entre los inversionistas debido a que la historia ha mostrado que estos cambios son generalmente muy pequeños.

6.3 Cálculos con el Enfoque Actuarial

La prima justa y por lo tanto el precio de la opción call europea $C(E, T)$, con tiempo final T y precio de ejercicio E, está dada por:

$$C(E,T) = \mathbb{E}((e^{-\mu T} S_T - e^{-rT} E) I(e^{-\mu T} S_T > e^{-rT} E)). \tag{6.1}$$

con

$$e^{\mu T} = \frac{\mathbb{E} S_T}{S_0},$$

Si se desea aplicar esta formula, como S_T es un proceso estocástico, es necesario generar m caminatas o trayectorias aleatorias. Para ello la mejor opción fue utilizar Matemática con el programa "diffuse".

El programa utilizado en matemática fue el siguiente:

1) *diffuse (esta instrucción abre el programa dentro de matemática).*

2) *Clear[W], Clear[S] (limpia las variables a utilizar).*

3) *WeinerProcessMake[W] (genera un proceso de Weinner o movimiento browniano).*

4) *DiffusionMake[S,W,1 S,.01 S,50] (genera las difusiones con $\mu = 1$, $\sigma = .01$ y $S_0 = 50$), por lo tanto la difusión es de la forma:*

$$dS = Sdt + 0.01SdX; \quad con \quad S_0 = 50$$

5) *Do[d[i] = (simS = DiffusionSimulate[S, n, .2])[[n]][[2]], i, m] (genera las m simulaciones que uno desee).*

En la variable d[i] se guardará el último valor de la i-ésima simulación que corresponde a $S_T = S_{50}$. La n representa el número del activo subyacente que se está considerando S_t y el $dt = 0.2$ representa el tamaño en cada paso del tiempo.

6) $Sum[d[i]/m, i, 1, m]$ *(proporciona el promedio de las S_T,).*

Con esta relación se obtienco $\mathbb{E}(S_T)$.

7) *Posteriormente se calcula*

$$e^{\mu T} = \frac{\mathbb{E}S_T}{S_0},$$

8) *Se desarrolla la fórmula para encontrar el valor de una opción.*

a) $Do[c[i] = e^{-\mu T} * d[i], i, m]$, *en cada e[i] se guarda el valor de*

$$e^{-\mu T} S_{T_i}.$$

b) $Do[a[i] = e[i] - 27.29, i, m]$, *en cada a[i] se desarrolla*

$$e^{-\mu T} S_T - e^{-rT} E.$$

c) $Do[b[i] = Max[a[i], 0], i, m]$, *en esta parte sólo se consideran las cantidades que cumplan con la siguiente restricción.*

$$e^{-\mu T} S_T > e^{-rT}$$

d) *Sum[b[i]/m, i, 1, m], por último se determina la esperanza para encontrar el valor del call.*

$$C(E,T) = \mathbb{E}((e^{-\mu T}S_T - e^{-rT}E)I(e^{-\mu T}S_T > e^{-rT}E)).$$

Siguiendo toda la metodología para encontra el valor de un call, para el ejemplo que se tiene, se encontraron los siguientes resultados:

Recuerde que m representa el No. de simulaciones que se necesitan para aproximar el modelo actuarial con el de Black-Scholes.

Eligiendo los siguientes valores de m, se obtiene:

m	$C(S,T)$
20	*21.52*
50	*22.25*
100	*22.706*
200	*22.701*

Se puede ver fácilmente que para igualar el valor de $C(S,T)$ con Black-Scholes, se necesitan máximo generar 100 trayectorias (m=100) y así comprobar la relación matemática, de que los dos métodos convergen al mismo valor.

En este caso, el método actuarial resultó ser razonablemente óptimo, ya que sólo se necesitaron 100 trayectorias. Pero en general para poder aproximar el método actuarial a Black-Scholes son necesarias cientos o miles de trayectorias, por tal motivo lo más eficiente para este cálculo es indudablemente Black-Scholes.

Bibliografía

[1] *Wiltott Paul, Dewynne Jeff, Howison Sam, Option Pricing: Mathematical Models and Computation,*
Oxford Financial Press, 1993.

[2] *Díaz Tinoco, Hernández Trillo, Futuros y Opciones Financieras,*
BMV, Limusa, México, 1996.

[3] *Rodriguez Castro J., Introducción al análisis de productos financieros derivados: futuros, opciones, forwards y swaps,*
BMV, Limusa, Noriega editores, México, 1997.

[4] *Gastineau Gary L., The Options Manual,*
Salomon Brothers Inc., Mc. Graw Hill, Book Company.

[5] *Petzel Tood E., Financial futures and options: a guide to markets, applications, and strategies,*
New York, 1989.

[6] *Figlewski Stephen, Silber Williams L., Subrajmanyam Marti G., Financial options: from theory to practice,*
Homewood, Illinois, Bussines One Irwin, 1990.

[7] *Mongens Bladt, Tina Hviid Rydberg, An actuaria approach to opcion pricing under the physical measure and without market assumptions, IIMAS and University of Aarhus, 1-7.*

[8] *Mongens Bladt, Derivate securyte pricing using Risk-free Future Values for risky assets, Department of statistics IIMAS-UNAM, México, D¿F.*

[9] *Didi Lund, Stochastic Model and Option Values: and Introduction, Deparment of Economics, University of Oslo, North-Holland, 1991.*

[10] *Siryayev*

[11] *A. Tijonov, A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Editorial MIR, Moscu. Segunda edición 1980.*

[12] *Fritz John, Partial Diferential Equations, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin. 1982.*

[13] *Merton, Robert C. Continous Time Finance. Editorial Black-Well. Cambridge Mai Oxford uk. 1988.*

[14] *Rubinstein M. Alternative Paths to Portfolio Insurance Financial analisists juornal. 1985.*