UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Algunos Aspectos sobre la Función T de Jones

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE

Matemàtica

P R E S E N T A

María Antonieta Molina Garza Galindo

Director de Tesis

Dr. Sergio Macías Alvarez

1998

28
2 ejm

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Algunos Aspectos sobre la función T de Jones

realizado por María Antonieta Molina Garza Galindo

con número de cuenta 8262971-1, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Sergio Macías Alvarez	S. Macías
Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía	
Propietario	Dr. Isabel Puga Espinosa	
Suplente	Dr. Raúl Escobedo Conde	
Suplente	M. en C. Fernando Orozco Zitli	

Consejo Departamental de Matemáticas
Mat. Julio César Guevara Bravo

1999

Contenido

Introducción

Este trabajo es el resultado del análisis de las notas de las dos conferencias impartidas por el profesor David P. Bellamy en el IV Taller de Investigación en Topología celebrado en la ciudad de Oaxaca, Oax. en noviembre 1996, sobre la función T de F. B. Jones. Complementado por algunas aplicaciones de la función T a hiperespacios.

En el primer capítulo se establecen los preliminares sobre continuos e hiperespacios que se necesitarán para los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo introducimos la función T y la tomamos como un nuevo lenguaje para establecer algunas definiciones del primer capítulo, no sólo por ociosidad sino como una aplicación de la misma ya que facilita varias pruebas y unifica la visión de localmente conexo, conexo en pequeño, semilocalmente conexo, aposindesis y casi conexo en pequeño a través de la función T. Posteriormente, se establecen otras propiedades sobre la función T, como son el ser T–aditivo y T–simétrico, las cuales permiten probar algunas propiedades que poseen los espacios que las cumplen. Al final del capítulo se establece como se comporta la función T al "componerla" con funciones suprayectivas las cuales, además, son monótonas o abiertas.

En el tercer capítulo se dan algunas aplicaciones de la función T. Se define una noción más general de aposindesis y se utiliza la funición T para probar que tanto los productos de continuos como sus productos simétricos la satisfacen.

No siempre es posible conocer los orígenes de los conceptos matemáticos, en el caso de la aposindesis tenemos la suerte de que su autor lo platica en [J4], así que, a continuación transcribimos el nacimiento de la aposindesis en palabras de su autor. Los números que aparecen entre corchetes corresponden a las referencias que hace Jones en su artículo original.

"En 1938 fui a mi primer congreso de la Sociedad Matemática Americana y presenté un artículo [17][1] *sobre las fronteras de los dominios complementarios de continuos localmente conexos en espacios que satisfacen los axiomas 0–4 de R. L. Moore*[2]*. En el programa; antes de mí estaba G. T. Whyburn quien habló sobre continuos semilocalmente conexos en el plano [35]*[3]*. Durante el corto tiempo entre nuestras pláticas no pude adaptar su generalización de conexidad local a mi situación. Y, de hecho fue seis meses antes de que descubriera [18]*[4] *la noción requerida la cual fue realmente una generalización de conexidad local como una propiedad puntual –un tipo de noción complementaria a la semiconexidad local. La terminología de Whyburn no era muy buena pues un continuo podía ser localmente conexo en un punto sin ser semilocalmente conexo en dicho punto. También Whyburn había llamado previamente a esta noción (semiconexidad local en el punto p) "localmente divisible en p". Ya sea que a él no le gustó la terminología original o no era muy sugestiva por lo que la había olvidado. Yo estaba determinado a hacer un mejor trabajo. Así que, después de haber consultado exhaustivamente sin éxito un diccionario Webster grande, consulté al Dr. Leon en el Departamento de Letras Clásicas de la Universidad de Texas. No fue fácil explicarle a alguien que sabía casi nada de matemáticas lo que quería decir, que un continuo*

---

[1] véase [J2]

[2] véase [Mo]

[3] véase [Wh]

[4] véase [J1]

tenga a p en su interior pero no tuviera a q. Después de treinta minutos, sin embargo, él captó la idea y construyó la palabra 'aposindético' y he sufrido desde entonces de burlas y comentarios sarcásticos como: ¿cuándo vas a escribir otro artículo sobre 'apo... lo que sea'? De hecho la terminología es bastante buena. 'Deo' quiere decir 'envolver', 'sin' significa 'junto' y 'apo' quiere decir 'lejos'. El continuo M es aposindético en p con respecto a q significa 'M envuelve a p lejos de q' ".

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos algunas definiciones y resultados básicos de continuos, es una introducción que se necesita para comprender los siguientes capítulos, algunas definiciones son para espacios topológicos en general, a nosotros nos interesan en su versión para continuos y ésta es la que usaremos.

En la última parte de este capítulo daremos algunas definiciones básicas sobre hiperespacios y daremos algunos ejemplos de éstos.

1.1 Definición. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. A cualquier subconjunto de un espacio topológico que sea un continuo se le llama *subcontinuo.*

1.2 Ejemplos:

(1) Cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ es un continuo.

(2) Las bolas cerradas en $\mathbb{R}^n$, $\overline{B_\varepsilon(p)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,p) \leq \varepsilon\}$ son continuos.

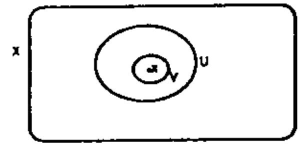
(3) Los arcos, imágenes homeomorfas del intervalo $[0,1]$, son continuos.

(4) La curva senoidal del topólogo;

$$T = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \right\} \cup \{\{0\} \times [-1,1]\}$$

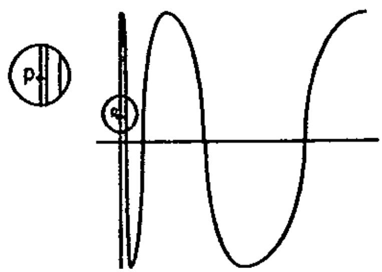
es un continuo.

1.3 Definición. Si X es un continuo y x es un punto de X entonces se dice que X es *localmente conexo en* x, si para cualquier abierto U de X que contenga a x, existe un abierto y conexo V de X que contiene a x y que está contenido en U.



Se dice que X es *localmente conexo* si lo es en cada uno de sus puntos. Si X es un continuo localmente conexo, también se le llama *espacio de Peano*.

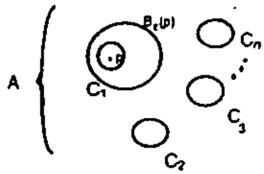
1.4 Ejemplo: La curva senoidal del topólogo definida en el ejemplo 1.2 (4) es un espacio conexo que no es localmente conexo ya que cualquier abierto suficientemente pequeño que contenga a algún punto del segmento $\{0\} \times [-1, 1]$ debe intersectar al complemento del segmento y, por tanto no es conexo.



1.5 Definición. Sean X un espacio métrico y C un subconjunto de X, se dice que C *es una componente* de X si C es conexo y tiene la propiedad de que si C está contenida en D y D es un conexo de X entonces $C = D$.

1.6 Lema. *Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado de X con un número finito de componentes. Si $p \in A^\circ$, donde A° denota al interior de A, entonces p está en el interior de la componente de A que lo contiene.*

Demostracion. Sean $C_1, \ldots, C_n$ las componentes de A. Como $p \in A^\circ$, existe $\varepsilon_1 > 0$, tal que $B_{\varepsilon_1}(p) \subset A$. Supongamos que $p \in C_1$. Sea $\delta = \min\{d(C_1, C_j) \mid j \in \{2, \ldots, n\}\} > 0$. Sea $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \delta\}$. Se afirma que $B_\varepsilon(p) \subset C_1$.



Sea $x \in B_\varepsilon(p)$, como $\varepsilon < \varepsilon_1$, $x \in A$. Si $x \in C_j$ para alguna $j \neq 1$ entonces $\varepsilon > d(p, x) \geq d(C_1, C_j) \geq \delta > \varepsilon$, lo cual es una contradicción y por lo tanto $x \in C_1$. **q.e.d.**

El siguiente resultado es conocido de topología general y lo ponemos ya que lo usaremos más adelante.

1.7 Lema. *Si X tiene una cantidad finita de componentes entonces las componentes son abiertas y cerradas.*

1.8 Proposición. *Un continuo es localmente conexo si y sólo si cada una de las componentes de un abierto es abierta.*

Demostración. Sea X un continuo localmente conexo, sean U un abierto de X y C una componente de U. Para cada punto x en C, existe un abierto conexo V_x de X que contiene a x y que está contenido en U. Se tiene entonces que $C \cup V_x$ es conexo y está contenido en U, por lo que se tiene que $V_x \subset C$. De aquí se concluye que $C = \bigcup_{x \in C} V_x$ es un abierto ya que es una unión de abiertos.

Inversamente, si U es un abierto que contiene a un punto x y C es la componente de U que contiene a x podemos utilizar a C como el abierto conexo de la definición de localmente conexo. q.e.d.

1.9 Definición. Sean X un continuo y x un punto de X, se dice que X es *conexo en pequeño en* x si para cada cerrado D de X contenido en $X \setminus \{x\}$, existe un continuo C tal que $x \in C^{\circ} \subset C \subset X \setminus D$.

En la siguiente proposición se establecen dos definiciones alternativas para conexo en pequeño.

1.10 Proposición. *Si X es un continuo y x es un punto de X entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) X es conexo en pequeño en x

(b) Para todo abierto U de X que contenga a x, se tiene que existe un abierto V de X que contiene a x y que está contenido en U tal que para todo punto y en V, distinto de x, existe un subconjunto conexo que contiene a $\{x, y\}$ y que está contenido en U.

(c) Para todo abierto U de X que contiene a x, existe un subcontinuo V de X tal que x está en el interior de V y V está contenido en U.

Demostración. Probaremos que (a) implica a (b): Sean $x \in X$ y U un abierto de X con $x \in U$, queremos demostrar que existe un abierto V de X que contiene a x contenido en U tal que para todo punto $y \in V$ distinto de x, existe un subconjunto conexo que contiene a $\{x, y\}$ y está contenido en U. Tenemos entonces que $X \setminus U$ es un cerrado de X contenido en $X \setminus \{x\}$, por hipótesis existe un subcontinuo C de X tal que $x \in C^{\circ} \subset C \subset X \setminus (X \setminus U) = U$. Sea $V = C^{\circ}$, para todo punto $y \in V$, C es un conexo que contiene a $\{x, y\}$ y está contenido en U.

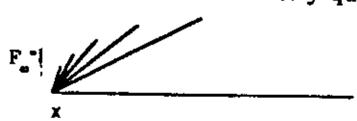
Mostraremos que (b) implica a (c): Sean $x \in X$ y U un abierto de X con $x \in U$. Veremos que existe un subcontinuo V de X tal que x está en el interior de V y V está contenido en U. Sea U' un abierto de X tal que $x \in U' \subset \overline{U'} \subset U$, por hipótesis existe W, un subconjunto abierto de X, tal que $x \in W \subset U'$ y para toda $y \in W$, existe un conjunto conexo C_y, tal que $x, y \in C_y \subset U'$. Sea $C = \bigcup_{y \in W \setminus \{x\}} C_y$, C es un conexo, de donde $\overline{C} = V$ es un continuo contenido en $\overline{U'} \subset U$ y tal que $x \in W \subset V$.

Por último veremos que (c) implica a (a): Sean $x \in X$ y D un cerrado de X tal que $D \subset X \setminus \{x\}$. Mostraremos que existe un continuo C tal que $x \in C^\circ \subset C \subset X \setminus D$. Se tiene que $X \setminus D$ es un abierto con $x \in X \setminus D$. Por hipótesis existe un continuo C, tal que $x \in C^\circ \subset C \subset X \setminus D$. q.e.d.

1.11 Observación. *Si en la definición 1.9, D sólo fuera cerrado en $X \setminus \{x\}$ entonces no necesariamente existiría el subcontinuo C ajeno a D y que contuviera a x en su interior, aún siendo el espacio conexo en pequeño en x.*

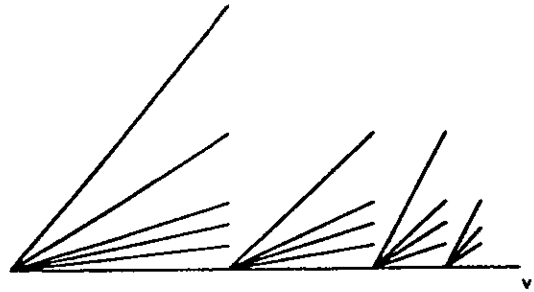
El siguiente ejemplo muestra la observación anterior.

1.12 Ejemplo: Sea F_ω el continuo que consta de los segmentos de recta en el plano que empiezan en el origen, x, tienen pendiente $n-1$ y longitud $\frac{1}{n}$. Sea D el conjunto de puntos extremos de F_ω, entonces resulta que F_ω es conexo en pequeño en x, de hecho es un continuo localmente conexo, y no existe ningún subcontinuo C con x en su interior y que sea ajeno a D.



Se puede observar que si un continuo es conexo en pequeño entonces no necesariamente es localmente conexo.

1.13 Ejemplo: El continuo mostrado en la siguiente figura es conexo en pequeño en v y no es localmente conexo en tal punto ya que todo abierto conexo que contenga a v contiene un continuo homeomorfo al total.



La siguiente proposición establece condiciones para la equivalencia entre conexo en pequeño y localmente conexo.

1.14 Proposición. *Un continuo es conexo en pequeño en todo punto de X si y sólo si es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es conexo en pequeño en todos sus puntos. Sean U un abierto de X, C una componente de U y $x \in C$. Por la parte (c) de la proposición 1.8, existe un subcontinuo V de X tal que $x \in V^{\circ} \subset V \subset U$, en particular V es un conexo contenido en U, entonces V está contenido en C, además, $x \in V^{\circ} \subset V \subset C$, por lo tanto $x \in C^{\circ}$, entonces todos los puntos de C son interiores, por lo que C es abierto y, por la proposición 1.8, se tiene que X es localmente conexo.

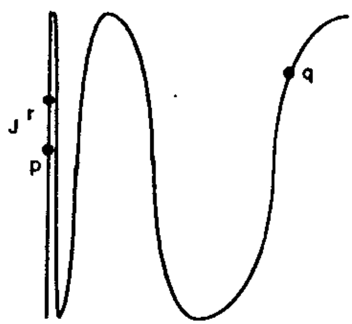
Si X es localmente conexo es claro que es conexo en pequeño en todo punto de X. q.e.d.

1.15 Definición. Si X es un continuo entonces se dice que X es *aposindético en x con respecto a y* si existe un subcontinuo K de X tal que x está en K° y

$y \in X \setminus K$. X *es aposindético en* x si X es aposindético en x con respecto a cualquier otro punto de X. Se dice que X es *aposindético* si es aposindético en todo punto de X.

La aposindesis es un tema muy importante a lo largo de este trabajo, en el siguiente ejemplo se indica en qué puntos es aposindética la curva del topólogo.

1.16 Ejemplo: Si X es la curva del topólogo, J es el intervalo $\{0\} \times [-1, 1]$, p y r son puntos de J y q no está en el intervalo J entonces X es aposindético en q y no es aposindético en p con respecto de r.



Claramente de la definición 1.9 se tiene el siguiente resultado.

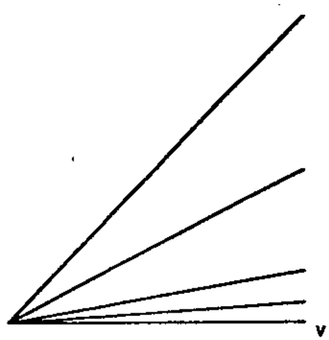
1.17 Proposición. *Si X es un continuo conexo en pequeño en x entonces X es aposindético en x.*

1.18 Definición. Un continuo X es *semilocalmente conexo en el punto* x si para todo abierto U de X con x en U, existe un abierto V de X que contiene a x y que está contenido en U tal que $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes. Si X es semilocalmente conexo en todos sus puntos, se dice que es *semilocalmente conexo.*

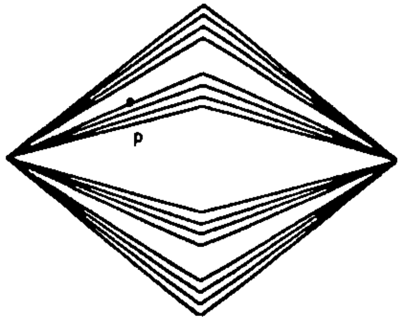
Un continuo semilocalmente conexo en p no es necesariamente localmente conexo en p, también se tiene que si un continuo es semilocalmente conexo en p entonces no es necesariamente conexo en pequeño en p, como lo muestran los siguientes ejemplos.

1.19 Ejemplos:

(a) Si tomamos a X como el cono sobre la sucesión armónica $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$, llamado *el abanico armónico,* éste resulta ser un continuo semilocalmente conexo en v y no es localmente conexo en v.



(b) La suspensión sobre el conjunto Cantor es semilocalmente conexo en p y no es conexo en pequeño en p.



1.20 Proposición. *Un continuo es semilocalmente conexo si y sólo si es aposindético.*

Demostración. Sea X un continuo semilocalmente conexo, probaremos que X es aposindético. Sean x y y dos puntos distintos de X, sea U un abierto de $X \setminus \{x\}$, que contiene a y, podemos tomar un abierto U_1 que contiene a y tal que $U_1 \subset U$, por ser X semilocalmente conexo existe un abierto V de X que contiene a y, contenido en $U_1 \subset U$ y tal que $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes. Por el lema 1.6, se tiene que x está en el interior de la componente de $X \setminus V$ que lo contiene, por lo tanto X es aposindético en y con respecto a x, como la elección de x fue arbitraria, podemos decir que lo es globalmente.

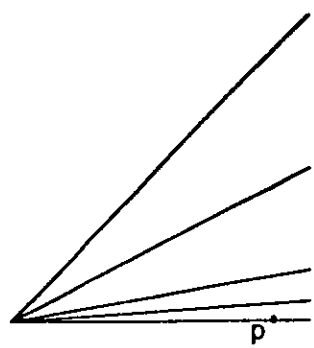
Sea X un continuo aposindético, por demostrar que es semilocalmente conexo. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X con $x \in U$, para todo punto $y \in X \setminus U$ se tiene que existe un subcontinuo K_y de X, tal que $y \in K_y^{\circ}$ y $x \in X \setminus K_y$. Observemos que $X \setminus U \subset \bigcup_{y \in X \setminus U} K_y^{\circ}$, por lo tanto existen $y_1, \ldots, y_n \in X \setminus U$ tal que $X \setminus U \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_{y_j}^{\circ} \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_{y_j}$. Sea $V = X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{y_j}$, entonces V es un abierto contenido en U, que contiene a x y $X \setminus V$

tiene un número finito de componentes, por lo tanto es semilocalmente conexo en x, como la elección de x fue arbitraria se tiene que X es semilocalmente conexo. q.e.d.

Los profesores H. S. Davis y P. H. Doyle establecen en su artículo [D-D] la siguiente propiedad de continuos que debilita la noción de conexidad en pequeño, ellos la utilizan para estudiar lo que se conoce como *continuos invertibles*, y a nosotros nos servirá, en el capítulo siguiente, como un ejemplo del uso de la función T.

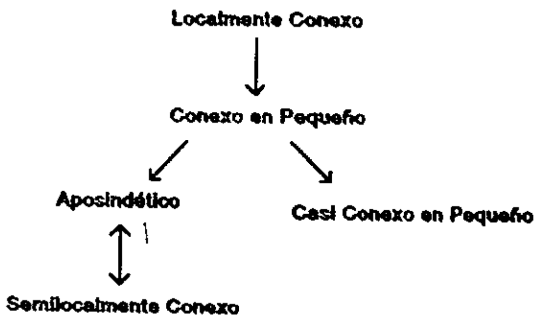
1.21 Definición. Se dice que un continuo X es *casi conexo en pequeño en un punto* x de X si para todo abierto U de X que contenga a x, existe un continuo con interior no vacío contenido en U.

1.22 Ejemplo: Si X es el abanico armónico como en el ejemplo 1.19, entonces X es casi conexo en pequeño en p y no es conexo en pequeño en p.



Observemos que la suspensión sobre el conjunto de Cantor es un ejemplo de un continuo que no es casi conexo en pequeño para ningún punto distinto de los vértices de la suspensión.

Podemos establecer un cuadro que contenga las implicaciones de algunas de las propiedades antes mencionadas.



1.23 Definición. Se dice que un continuo X es *descomponible* si es la unión de dos de sus subcontinuos propios. De otra manera diremos que X es *indescomponible*.

1.24 Definición. Un continuo X es *hereditariamente descomponible (indescomponible)* si todo subcontinuo no degenerado de él lo es.

Los continuos más familiares son descomponibles, de hecho no es fácil encontrar continuos indescomponibles. En [N2], 1.10 p.7, Nadler construye un continuo indescomponible no degenerado.

1.25 Lema. *Un continuo X es descomponible si y sólo si X contiene un subcontinuo propio con interior no vacío.*

Demostración. Si X es un continuo descomponible entonces X es la unión de dos subcontinuos propios Y y Z entonces $X \setminus Z$ es un abierto no vacío contenido en Y, de donde $Y^\circ = Int_X(Y) \neq \emptyset$.

Supongamos que X tiene un subcontinuo propio Y con interior no vacío. Si $X \setminus Y$ es conexo entonces $\overline{X \setminus Y}$ es un subcontinuo propio de X, de donde $X = Y \cup \overline{X \setminus Y}$ es una descomposición de X. Si $X \setminus Y$ no es conexo entonces $X \setminus Y = U \cup V$, donde U y V son abiertos ajenos no vacíos. Afirmamos que $Y \cup U$ y $Y \cup V$ son subcontinuos de X. Como $X \setminus (Y \cup U) = V$, se tiene que $Y \cup U$ es cerrado y por tanto compacto. Análogamente se ve que $Y \cup V$ es compacto.

Si $Y \cup U$ no fuera conexo entonces $Y \cup U = K \cup L$, donde K y L son cerrados ajenos y no vacíos de $Y \cup U$ y también son cerrados de X. Como Y es conexo, $Y \subset K$ o $Y \subset L$. Digamos que $Y \subset K$, entonces $L \subset U$, lo que implica que $L \cap Cl_X(V) = \emptyset$. Por lo anterior se tiene que $X = L \cup (K \cup Cl_X(V))$, pero L y $K \cup Cl_X(V)$ son cerrados ajenos de X, lo que contradice la conexidad de X. Por lo tanto $Y \cup U$ es conexo. De manera similar se prueba que $Y \cup V$ es conexo. Así que, en este caso, tenemos que $X = (Y \cup U) \cup (Y \cup V)$ es una descomposición de X. q.e.d.

1.26 Corolario. *Todo continuo de Peano es descomponible.*

1.27 Corolario *Un continuo X es indescomponible si y sólo si todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío.*

1.28 Definición. Un continuo X es *irreducible entre dos de sus puntos* si no existe un subcontinuo propio de X que contenga a ambos puntos.

1.29 Ejemplos:

(1) Cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ es irreducible entre a y b.

(2) La curva senoidal del topólogo es irreducible entre cualquier punto del segmento $\{0\} \times [-1, 1]$ y el punto $(1, \operatorname{sen} 1)$.

1.30 Teorema. *Sea X un continuo irreducible entre a y b y sea C un subcontinuo de X. Si C es tal que $X \setminus C$ no es conexo entonces $X \setminus C$ es la unión de dos subconjuntos abiertos y conexos, uno de los cuales contiene a a y el otro contiene a b. Además, si $a \in C$ entonces $X \setminus C$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X \setminus C$ no es conexo, entonces existen dos subconjuntos no vacíos, abiertos y ajenos, P y Q, de X tales que $X \setminus C = P \cup Q$. Se sigue de la demostración del lema 1.25 que tanto $A = P \cup C$ como $B = Q \cup C$ son subcontinuos de X. Además, $X = A \cup B$, $A \cap B = C$, $A \neq X$ y $B \neq X$.

Como X es un continuo irreducible entre a y b, se tiene que $a \notin C$, pues si $a \in C$ entonces $\{a, b\} \subset A$ o $\{a, b\} \subset B$, lo cual contradice la irreducibilidad de X entre a y b. Análogamente se demuestra que $b \notin C$. Por tanto, $\{a, b\} \subset X \setminus C = P \cup Q$. Podemos suponer que $a \in P$ y que $b \in Q$, pues $P \cap Q = \emptyset$.

Como A y B son subcontinuos propios de X, ni A ni B pueden contener a $\{a, b\}$.

Como A es un subcontinuo propio de X y $a \in A$, se tiene que $Q = X \setminus A$ es conexo. Pues de otro modo $X \setminus A = H \cup K$, con H y K abiertos ajenos y no vacíos. Como $b \in X \setminus A$, podemos suponer que $b \in H$ de donde $A \cup H$ sería un subcontinuo propio de X que contendría tanto a a como a b, lo que contradice la irreducibilidad entre a y b, lo que implica que Q es conexo. Análogamente se ve que P es conexo. Un argumento similar prueba que si $a \in C$ entonces $X \setminus C$ es conexo. q.e.d.

1.31 Teorema. *Del Cable cortado. Sea X un espacio métrico y compacto, sean A y B dos subconjuntos cerrados de X. Si no existe ningún subconjunto conexo de X que intersecte tanto a A como a B entonces existen X_1 y X_2,* *tales que $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 y X_2 son dos cerrados ajenos de X con $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

Una demostración se encuentra en [N2], 5.2, p.72.

1.32 Definición. Sean Z un espacio y U un subconjunto de Z, *la frontera de U en Z*, denotada por $Bd(U)$, está definida como:

$$Bd(U) = \overline{U} \cap \overline{(Z \setminus U)}.$$

1.33 Teorema. *De los golpes en la frontera.* *Sean X un continuo, U un subconjunto abierto y no vacío de X. Si K es una componente de $\overline{U}$ entonces $K \cap Bd(U) \neq \emptyset$.*

Una demostración se encuentra en [N2], 5.4, p.73.

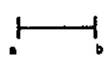
1.34 Definición. Un continuo X es *arco conexo* si para cualesquiera dos puntos x y y de X, existe una función continua e inyectiva $\alpha: \mathrm{I} \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

1.35 Ejemplos: Todo continuo de Peano es arco conexo (véase [H–Y], p.116).

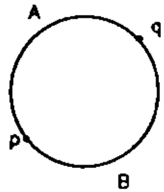
1.36 Definición. Un continuo X es *unicoherente* si cada vez que X se puede poner como la unión de dos subcontinuos propios se tiene que la intersección de dichos subcontinuos es conexa.

1.37 Ejemplos:

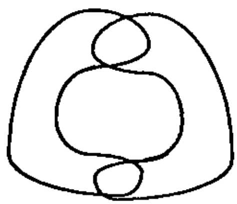
(1) Cualquier intervalo en $\mathbb{R}$ es unicoherente.



(2) El círculo no es un continuo unicoherente.



Tampoco es unicoherente ningún continuo que sea de "la forma" como se muestra en la siguiente figura.



1.38 Definición. Un continuo X es *hereditariamente unicoherente* si todo subcontinuo de X es unicoherente.

1.39 Ejemplo:

(1) Cualquier intervalo es hereditariamente unicoherente.

(2) El abanico armónico es hereditariamente unicoherente.

Dedicaremos la última parte de este capítulo para dar una introducción a los hiperespacios así como el cálculo de algunos de éstos.

1.40 Definición. Si X es un continuo con métrica d entonces los *hiperespacios* asociados a X se definen de la siguiente manera:

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo }\}$$

y para todo entero positivo n se define el *n-ésimo producto simétrico* de X de la siguiente manera:

$$F_n(X) = \{A \subset X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

1.41 Definición. Si X es un espacio métrico con métrica d entonces la *ε-Nube* de A se define como sigue:

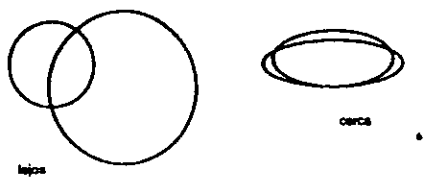
$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon \text{ para alguna } a \in A\}.$$

Para convertir a 2^X, $C(X)$ y a $F_n(X)$ en espacios topológicos definiremos una métrica, H, en 2^X como:

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

A H se le llama la *métrica de Hausdorff.*

Intuitivamente podemos observar, que dos conjuntos están cercanos con la métrica de Hausdorff si se parecen y están encimados.



1.42 Teorema. *H es una métrica para 2^X.*

Una demostaración se encuentra en [N1] (0.2).

1.43 Lema. *Sean A y B dos puntos de 2^X y $\varepsilon > 0$, $H(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

Demostración. Si $H(A,B) < \varepsilon$ entonces, es claro que, $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Si $A \subset N(\varepsilon, B)$ entonces, como $N(\varepsilon, B) = \cup_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, B)$ por compacidad de A, existe $\delta_0 < \varepsilon$ tal que $A \subset N(\delta_0, B)$, de la misma manera existe $\delta_1 < \varepsilon$ tal que $B \subset N(\delta_1, A)$, sea $\delta = \max\{\delta_0, \delta_1\} < \varepsilon$ por lo tanto $H(A,B) \leq \delta < \epsilon$. **q.e.d.**

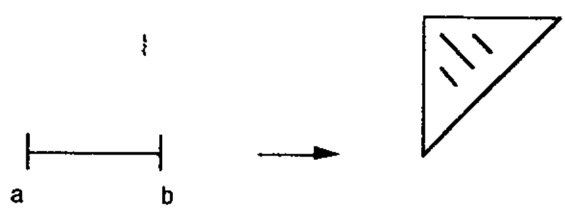
Veremos ahora algunos hiperespacios:

1.44 Ejemplos:

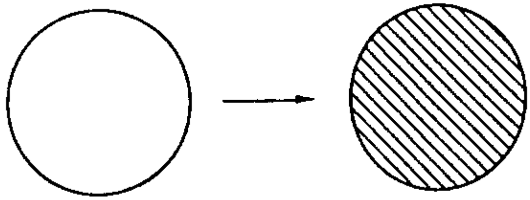
(1) Si $X = [0,1]$ entonces $C(X) = \{[x,y] \subset [0,1] \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Consideremos el conjunto $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$, notemos que la función

$$f : C([0,1]) \to \mathcal{E}$$

definida como $f([a,b]) = (a,b)$ es un homeomorfismo.



(2) Si $X = S^1$ entonces $C(X)$ es un disco.



Sea $X = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, para todo $p \in X$, definimos $J[p]$, el arco en $\mathbb{R}^3$ con puntos extremos p y $(0, 0, 2\pi)$.

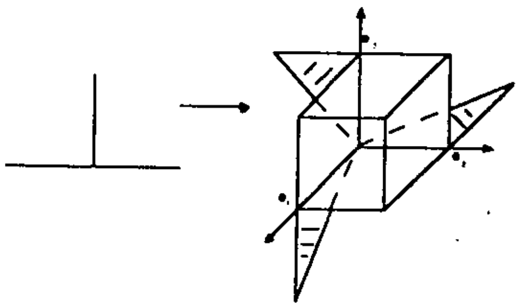
Sea $Q = \bigcup\{J[p] \mid p \in X\}$. Q es el cono sobre X en $\mathbb{R}^3$ con vértice en $(0, 0, 2\pi)$.

Si definimos $l: C(X) \setminus \{X\} \to [0, 2\pi)$ tal que si $A \in C(X) \setminus \{X\}$ entonces $l(A)$ es la longitud de arco, podemos también definir a $m: C(X) \setminus \{X\} \to X$ haciendo que para cada $A \in C(X) \setminus \{X\}$, $m(A)$ sea el único punto que divide a A en dos subarcos de igual longitud.

Definimos $h: C(X) \to Q$ tal que $h(X) = (0, 0, 2\pi)$ y para todo $A \in C(X) \setminus \{X\}$, $h(A)$ es el único punto en $J[m(A)]$ cuya tercera coordenada sea igual a $l(A)$. Se puede probar que h es un homeomorfismo de $C(X)$ sobre Q y éste, a su vez, es homeomorfo al disco.

(3) Si X es el triodo $A \cup B$, con $A = \{[-1, 1] \times \{0\}\} \subset \mathbb{R}^2$ y $B = \{\{0\} \times [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$ se puede mostrar que $C(X)$ es homeomorfo a un cubo con tres triángulos

"pegados" como se muestra en la siguiente figura.



Obervemos que $F_1(X)$ es una copia isométrica de X usando la métrica de Hausdorff y que $F_1(X) \subset F_2(X) \subset \ldots \subset F_n(X) \subset \ldots \subset 2^X$.

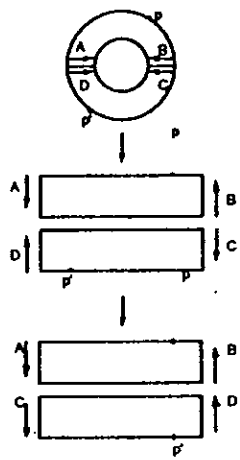
(4) Veamos quien es $F_2(X)$ para el intervalo, $X = [0,1]$. Si definimos $f: F_2(X) \to \mathbb{R}^2$ como $f(\{a,b\}) = (\frac{a+b}{2}, |b-a|)$ tenemos un homeomorfismo entre $F_2(X)$ y el triángulo, como muestra la siguiente figura.

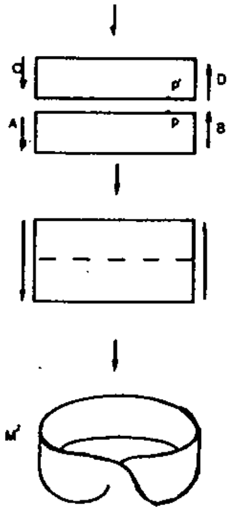
Observemos que $F_2([0,1])$ es homeomorfo a $C([0,1])$ y $F_1(X)$ es homeomorfo a X.

(5) Si $X = S^1$ mostraremos que $F_2(X)$ es homeomorfo a una banda de Möbius.

La siguiente descripción fue tomada de [I]. Para dar un modelo de $F_2(X)$, observemos que si $A = \{a,b\} \in F_2(X)$, entonces podemos asociar a A el punto que está situado en la dirección del punto medio (en el arco) de los puntos a y b y cuya distancia al origen es 1+ (longitud del arco más pequeño que une a a con b).

La imagen de esta asociación es el conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq d(x, y) \leq 1 + \pi\}$ y sería una representación perfecta para $F_2(X)$ si no fuera por que no es función, para las parejas de puntos antípodos. De manera que para obtener la representación correcta de $F_2(X)$ lo que tenemos que hacer es identificar las parejas de puntos antípodos en el círculo externo de B. Para hacer esto primero haremos un corte a B, corte que volveremos a pegar después en la misma manera en la que estaba para no alterar las propiedades topológicas de B. Esto se puede hacer siguiendo los pasos marcados a continuación:





Por tanto $F_2(X)$ es homeomorfo a una banda de Möbius.

Se puede probar que 2^X y $C(X)$ son compactos y arcoconexos, véase [N1] 1.13 y que $F_n(X)$ es un continuo, véase [B-U] p.877. De hecho se puede probar que 2^X siempre contiene a un subconjunto homeomorfo al cubo de Hilbert, (véase definición 1.45) lo que implica que tiene dimensión infinita y por esta razón no se pueden hacer dibujos de 2^X, mientras que $C(X)$ es muy variado como hemos visto en los ejemplos anteriores.

Mostraremos que 2^X contiene un cubo de Hilbert para el caso particular del intervalo.

1.45 Definición. Si I_n denota al intervalo $[0,1]$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces llamamos a $\prod_{n=1}^{\infty} I_n$ *el cubo de Hilbert*, al cual denotaremos como Q.

El cubo de Hilbert con la métrica dada por $d_Q(x,x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x_n - x'_n|$, donde x y x' son puntos de Q, resulta ser un continuo. (véase [Wi] 22.3 p.161)

1.46 Proposición. *Si* $\mathrm{I} = [0,1]$ *entonces* 2^{I} *contiene un cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea Q el cubo de Hilbert, $Q = \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n$, donde $\mathrm{I}_n = [0,1]$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sean $A_n = [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$, intervalos de I. Para cada n fija, definimos $\xi_n : \mathrm{I} \to [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$ como $\xi_n(t) = (1-t)\frac{1}{2n} + t\frac{1}{2n-1}$. ξ_n es un homeomorfismo para cada n. La sucesión $\{A_n\}$ converge a $\{0\}$ con la métrica de Hausdorff. Definamos una función $f: Q \to 2^{\mathrm{I}}$, de la siguiente manera, para cualquier punto $\{t_n\} \in Q$, $f(\{t_n\}) = \{\xi_n(t_n)\} \cup \{0\} \in 2^{\mathrm{I}}$. Queremos probar que f es un homeomorfismo, primero veamos que f es inyectiva, si $\{t_n\}, \{s_n\} \in Q$ y $\{t_n\} \neq \{s_n\}$ entonces $t_m \neq s_m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$, así que $\xi_m(t_m) \neq \xi_m(s_m)$. Observemos que f es continua. Sea $\varepsilon > 0$, por la convergencia de la sucesión, $\{A_n\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $H(A_n, \{0\}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $\{s_n\}$, $\{t_n\} \in Q$ y $n, m \geq N$ entonces $d(\xi_n(t_n), 0) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(\xi_m(s_m), 0) < \frac{\varepsilon}{2}$, por lo tanto, $d(\xi_n(t_n), \xi_m(s_m)) < \varepsilon$. Como $\xi_1, \ldots, \xi_N$ son continuas existen $\delta_1, \ldots, \delta_N$ tales que si $\frac{1}{2^j} \mid t_j - s_j \mid < \delta_j$ entonces $|\xi_j(t_j) - \xi_j(s_j)| < \varepsilon$, sea $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_N\}$. Queremos ver que si $d_Q(\{t_n\}, \{s_n\}) < \delta$ entonces $H(f(\{t_n\}), f(\{s_n\})) < \varepsilon$. De manera equivalente probemos que $f(\{t_n\}) \subset N(\varepsilon, f(\{s_n\}))$ y que $f(\{s_n\}) \subset N(\varepsilon, f(\{t_n\}))$. Si $m < N$ entonces $\frac{1}{2^m}|t_m - s_m| \leq d_Q(\{t_n\}, \{s_n\}) < \delta \leq \delta_m$ y como $\xi_m(t_m) \in f(\{t_n\})$, se tiene que, $|\xi_m(t_m) - \xi_m(s_m)| < \varepsilon$ y $\xi_m(s_m) \in f(\{s_n\})$ si $m \geq N$ y entonces $f(\{t_n\}) \subset N(\varepsilon, f(\{s_n\}))$. Análogamente se prueba que $f(\{s_n\}) \subset N(\varepsilon, f(\{t_n\}))$. q.e.d.

Capítulo 2

La Función T de Jones

En este capítulo estudiaremos la función T definida por F. Burton Jones en [J3]. Primero veremos cómo se pueden poner algunas propiedades de los continuos en términos de esta función. Posteriormente utilizaremos este nuevo enfoque para probar algunos resultados de una manera más simple. La noción de aposindesis fue la motivación de Jones para definir la función T.

Debido a la similitud existente entre la definición de la función T y la de la cerradura, incluimos ésta última.

2.1 Observación. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X, notemos que *la cerradura de A* satisface:

$$X \setminus \overline{A} = \{x \in X \mid \text{ existe un abierto } W \text{de } X \text{ tal que } x \in W \text{ y } W \cap A = \emptyset\}.$$

2.2 Definición. Sean X espacio métrico y compacto y A un subconjunto de X, definimos a $T(A)$ como el conjunto que satisface:

$$X \setminus T(A) = \{x \in X \mid \text{existe un subcontinuo } W \text{ de } X \text{ tal que } x \in W^{\circ} \text{ y } W \cap A = \emptyset\}.$$

A la función T se le llama *función T de Jones*. Utilizaremos la notación de $T(x)$ para $T(\{x\})$.

2.3 Obervación. *Si X es un espacio métrico y compacto entonces para todo subconjunto A de X, A está contenido en $T(A)$.*

2.4 Lema. *Dado un espacio métrico y compacto X, si A es un subconjunto de X entonces $T(A)$ siempre es un cerrado de X.*

Demostración. Probar que $T(A)$ es un cerrado es equivalente a probar que $X \setminus T(A)$ es un abierto. Sea $x \in X \setminus T(A)$, entonces existe un continuo W tal que $x \in W^{\circ} \subset W \subset X \setminus A$, de donde se tiene que $W^{\circ} \subset X \setminus T(A)$. q.e.d.

La siguiente afirmación establece el enlace entre la aposindesis y la función T.

2.5 Lema. *Sea X un espacio métrico y compacto, si x está en $X \setminus T(A)$ entonces X es aposindético en x con respecto a todos los puntos de A.*

Demostración. Sean x un punto de $X \setminus T(A)$ y a un punto de A, veremos que X es aposindético en x con respecto a. Por la definición 1.15, debemos de probar que existe un subcontinuo K de X tal que $x \in K^{\circ}$ y $a \in X \setminus K$. Por la definición de $T(A)$, se tiene que existe un subcontinuo K de X, que contiene a x en su interior y tal que $K \cap A = \emptyset$, por lo tanto $a \notin K$, de aquí que X es aposindético en x con respecto a cualquier punto de A. q.e.d.

2.6 Proposición. *Para un espacio métrico y compacto X, si A y B son subconjuntos de X tales que $A \subset B$ entonces se tiene que $T(A) \subset T(B)$.*

Demostración. Supongamos que $A \subset B$, si $x \in X \setminus T(B)$, entonces existe $W \in C(X)$ tal que $x \in W^{\circ} \subset W \subset X \setminus B \subset X \setminus A$, de donde $x \in X \setminus T(A)$, por lo que $X \setminus T(B) \subset X \setminus T(A)$ y por tanto $T(A) \subset T(B)$. q.e.d.

2.7 Corolario. *En cualquier espacio métrico y compacto X, si A y B son dos subconjuntos de X, entonces $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$.*

Demostración. Como $A \subset A \cup B$, por la proposición 2.6, $T(A) \subset T(A \cup B)$.

Análogamente $T(B) \subset T(A \cup B)$. Por tanto $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$. **q.e.d.**

2.8 Proposición. *Si X es un espacio métrico y compacto con una cantidad finita de componentes entonces $T(\emptyset) = \emptyset$.*

Demostración. Sean x un punto de X y C la componente de X que lo contiene. Por el lema 1.6, $x \in C^{\circ}$. Por el lema 1.7 C es un subcontinuo de X, por tanto $x \in X \setminus T(\emptyset)$. Como x fue un punto arbitrario de X, se tiene que $T(\emptyset) = \emptyset$. **q.e.d.**

Daremos algunos ejemplos para visualizar mejor la función T.

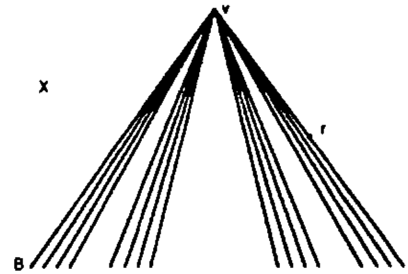
2.9 Ejemplos:

(a) Observemos que no siempre $T(\emptyset) = \emptyset$, si X es el conjunto de Cantor, $T(\emptyset) = X$. Para ver esto, supongamos que existe un punto $x \in X \setminus T(\emptyset)$, de donde existe un subcontinuo, W, de X tal que $x \in W^{\circ} \subset W \subset X \setminus \emptyset$. Por otra parte, X es totalmente disconexo y ninguno de sus puntos es abierto en él, por tanto, X no contiene subcontinuos con interior distinto del vacío. De lo anterior podemos concluir que no puede haber un punto x en $X \setminus T(\emptyset)$. Así que, $T(\emptyset) = X$.

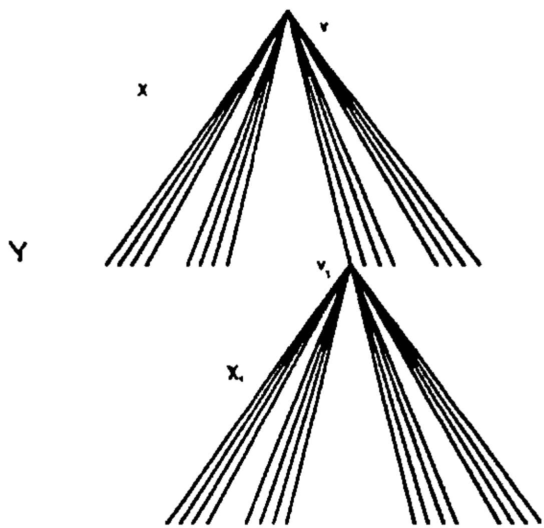
(b) Si $Y = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$ entonces $T(\emptyset) = \{0\}$. Un argumento similar al dado en (a), prueba este hecho.

(c) Sea X el cono sobre el conjunto de Cantor, con vértice en v y base B. Se puede ver que $T(v) = X$. Si r es un punto de X diferente de v entonces resulta que $T(r)$ es igual al segmento hacia B desde r. Además se tiene que

$T(B) = B$.

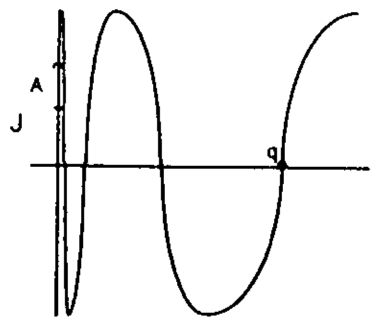


(d) Si construimos el espacio $Y = X \cup X_1$ con X el espacio del ejemplo anterior y X_1 otra copia del cono con vértice en un punto v_1 de la base B (véase figura de abajo). Se tiene en este caso que



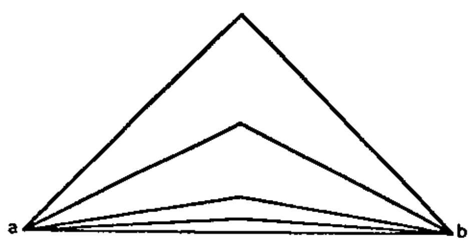
$T(v) = X$, $T(v_1) = Y$ y $T(T(v)) = T^2(v) = Y$, se puede observar en este ejemplo que, en general, la función T no es idempotente, $T^2 \neq T$.

(e) Si retomamos el ejemplo 1.16 de la curva senoidal del topólogo se puede calcular que si $A \neq \emptyset$ y $A \subsetneq J$ se tiene que $T(A) = J$, además $T(p) = J$, para todo punto $p \in J$ y $T(q) = \{q\}$, si $q = (x, \operatorname{sen} \frac{1}{x})$, para alguna $x \in (0, 1]$ en este caso sí se cumple que $T(q) = T^2(q)$.



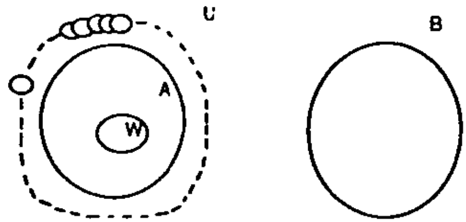
El siguiente ejemplo muestra que, en general, no es cierto que $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$.

(f) Sea X la suspensión sobre la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$ con vértices en a y b. Se tiene que para todo $x \in X$, $T(x) = \{x\}$. En particular, observemos que $T(a) = \{a\}$, $T(b) = \{b\}$ y $T(\{a, b\})$ es el segmento horizontal.



2.10 Teorema. *Si X es un continuo y W es un subcontinuo de X entonces $T(W)$ también lo es.*

Demostración. Por el lema 2.4, $T(W)$ es un cerrado. Supongamos que $T(W)$ no es conexo, entonces $T(W) = A \cup B$, con A y B dos cerrados ajenos, no vacíos. Sabemos que $W \subset T(W)$. Como W es conexo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $W \subset A$. Por lo tanto existe un abierto U de X tal que $A \subset U$ y $\overline{U} \cap B = \emptyset$.



Notemos que $Bd(U) \cap T(W) = \emptyset$, por tanto, para todo punto z de la frontera de U, existe $W_z \in C(X)$ tal que $z \in W_z^\circ \subset W_z \subset X \setminus W$, como la frontera de U es compacta, existen $z_1, ..., z_n \in Bd(U)$ tales que $Bd(U) \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{z_j}^\circ \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{z_j}$. Sean $V = U \setminus (\bigcup_{j=1}^{n} W_{z_j})$ y $Y = X \setminus V = (X \setminus U) \bigcup (\bigcup_{j=1}^{n} W_{z_j})$, por el teorema 1.33 (de los golpes en la frontera) se tiene que Y tiene un número finito de componentes y $B \subset X \setminus \overline{U} \subset X \setminus U \subset Y$. Sean $b \in B$ y C la componente de Y que lo contiene. Por el lema 1.6, se tiene que $b \in C^\circ$. Además, por otra parte $Y \cap W = \emptyset$, de donde resulta que $C \cap W = \emptyset$ y de aquí se concluye que $b \in X \setminus T(W)$ lo cual es una contradicción. q.e.d.

La función T, se puede utilizar para probar algunas propiedades de los continuos de manera más sencilla, es por esto que dedicaremos esta parte para establecer algunas equivalencias entre las definiciones clásicas para continuos vistas en el capítulo 1 y su versión en términos de la función T de Jones.

2.11 Proposición. *Sea X un continuo. X es conexo en pequeño en p si y sólo si para todo subconjunto cerrado A de X, si p pertenece a $T(A)$ entonces p pertenece a A.*

Demostración. Sea X un continuo y supongamos que es un espacio conexo en pequeño en el punto p. Sea A un subconjunto cerrado de X y supongamos que $p \notin A$, así A es un cerrado contenido en $X \setminus \{p\}$. Por ser X conexo en pequeño en p, existe $C \in C(X)$ tal que $p \in C^{\circ} \subset C \subset X \setminus A$ y por lo tanto $p \notin T(A)$.

Supongamos que para todo subconjunto cerrado, A, de X si $p \in T(A)$ entonces $p \in A$. Demostraremos que X es conexo en pequeño en p.

Sea D un subconjunto cerrado de X contenido en $X \setminus \{p\}$. Como $p \notin D$ se tiene que $p \notin T(D)$ lo que implica que existe $C \in C(X)$ tal que $p \in C^{\circ} \subset C \subset X \setminus D$. Por tanto X es conexo en pequeño en p. **q.e.d.**

2.12 Proposición. *Dado un continuo X, se tiene que X es localmente conexo si y sólo si para todo conjunto cerrado A de X se tiene que $T(A) = A$.*

Demostración. Primero supongamos que X es localmente conexo, mostraremos que $T(A) = A$ para cualquier subconjunto cerrado A de X. Sea A un subconjunto cerrado de X, entonces $X \setminus A$ es un abierto. Sea $p \in X \setminus A$, entonces existe un abierto U tal que $p \in U \subset \overline{U} \subset X \setminus A$, como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo, V, de X tal que $p \in V \subset U$, de donde $p \in V \subset \overline{V} \subset \overline{U} \subset X \setminus A$, por lo tanto $p \notin T(A)$. Esto demuestra que $T(A) \subset A$, por otro lado se tiene también que $A \subset T(A)$, por la proposición 2.3, de donde se concluye que $A = T(A)$.

Ahora, supongamos que $T(A) = A$ para cualquier cerrado de X, veremos que X es localmente conexo. Sean $p \in X$ y U subconjunto abierto de X con

$p \in U$. Tenemos que $X \setminus U$ es un cerrado que no contiene a p, por lo que $p \notin T(X \setminus U)$ entonces existe $C \in C(X)$ tal que $p \in C^\circ$ y $C \cap (X \setminus U) = \emptyset$, de donde $C \subset U$ y X es conexo en pequeño en p. Como p fue un punto arbitrario de X, X es conexo en pequeño en todos sus puntos. Por tanto, X es localmente conexo por la proposición 1.14. q.e.d.

2.13 Proposición. *Para un continuo X resulta que X es semilocalmente conexo en p si y sólo si $T(p) = \{p\}$.*

Demostración. Supongamos que X es semilocalmente conexo en p, probaremos que $T(p) = \{p\}$. Por la proposición 2.3 sabemos que $\{p\} \subset T(p)$. Sean $q \in X \setminus \{p\}$ y U un subconjunto abierto de X tales que $p \in U$ y $q \in X \setminus \overline{U}$. Como X es semilocalmente conexo en p, existe un subconjunto abierto V de X que contiene a p, tal que $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes y $V \subset \overline{U}$. Por la proposición 1.6 se tiene que q está en el interior de la componente de $X \setminus V$ que lo contiene con esto se concluye que $q \notin T(p)$ y por lo tanto $T(p) = \{p\}$.

Ahora veremos que X es semilocalmente conexo en p si $T(p) = \{p\}$. Sean $p \in X$ y U un subconjunto abierto de X con $p \in U$, como $T(p) = \{p\}$ para todo $q \in X \setminus \{p\}$ existe $C_q \in C(X)$, tal que $q \in C_q^\circ \subset C_q \subsetneq X \setminus \{p\}$, observemos que $X \setminus U \subset \bigcup_{q \in X \setminus U} C_q^\circ$ entonces existen $q_1, \ldots, q_n \in X \setminus U$ tal que $X \setminus U \subset \bigcup_{j=1}^{n} C_{q_j}^\circ \subset \bigcup_{j=1}^{n} C_{q_j}$. Sea $V = X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} C_{q_j}$, entonces V es un abierto, $V \subset U$, $p \in V$ y $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes ya que su complemento es una unión finita de conexos, por lo tanto X es semilocalmente conexo en p. q.e.d.

De la definición 1.15 se tiene el siguiente resultado.

2.14 Proposición. *Si X es un continuo entonces X es aposindético en p con respecto a q si y sólo si $p \notin T(q)$.*

La siguiente proposición es la versión global de la anterior.

2.15 Proposición. *Si X es un continuo entonces X es aposindético globalmente si y sólo si $T(p) = \{p\}$, para todo punto p de X.*

Demostración. Supongamos que X es aposindético, es claro que $X \setminus \{p\} = \{x \in X \mid \text{ existe } W \in C(X) \text{ tal que } x \in W^\circ \text{ y } W \subset X \setminus \{p\}\}$, por lo que $T(p) = \{p\}$.

Inversamente si p y $q \in X$ y $q \neq p$ entonces $q \notin T(p)$ por lo tanto se tiene que existe $W_q \in C(X)$ tal que $p \notin W_q$ y $q \in W_q^\circ$ lo que implica que X es aposindético en q, con respecto a p como p y q fueron arbitrarios, se tiene que X es globalmente aposindético. q.e.d.

2.16 Corolario. *Un continuo X es aposindético si y sólo si es semilocalmente conexo.*

2.17 Proposición. *Un continuo X es casi conexo en pequeño en p si y sólo si para cada $A \subsetneq X$ tal que $p \in T(A)^\circ$, también es cierto que $p \in \overline{A}$.*

Demostración. Sea $p \in T(A)^\circ$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(p) \subset T(A)^\circ$, para toda $n \geq N$. Por ser X casi conexo en pequeño en p, existe un continuo con interior no vacío, W_n, tal que $W_n \subset B_{\frac{1}{n}}(p) \subset \overline{B_{\frac{1}{n}}(p)} \subset T(A)$, de aquí que $W_n \cap A \neq \emptyset$ y $W_n \cap A \subset W_n \cap \overline{A}$, sea x_n un punto de $W_n \cap \overline{A}$, como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p, entonces $p \in \overline{A}$.

Sea V un subconjunto abierto de X tal que $p \in V \subset \overline{V} \subset U$. Si alguna componente de $\overline{V}$ tiene interior no vacío entonces esa componente nos sirve para comprobar la condición mencionada en la definición de casi conexidad en pequeño.

Supongamos que todas las componentes de $\overline{V}$ tienen interior vacío. Sea $A = Bd(V)$, observemos que A es cerrado y que $p \notin A$. Queremos ver que $V \subset T(A)$. Supongamos que existe $x \in V \setminus T(A)$, entonces existe $W \in C(X)$ tal que $x \in W^\circ \subset W \subset X \setminus A$ y, como ninguna componente de $\overline{V}$ tiene interior, debido a que W es un conjunto conexo con interior distinto del vacío, resulta que intersecta tanto a V como a $X \setminus V$, así que $W \cap Bd(V) \neq \emptyset$, pero esto es lo mismo que $W \cap A \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Por tanto, $V \subset T(A)$ y, como $p \in V \subset T(A)$, p es un punto interior de $T(A)$, pero $p \notin A = \overline{A}$, lo cual es una contradicción. **q.e.d.**

La siguiente proposición nos da otra equivalencia para casi conexo en pequeño en términos de la función T.

2.18 Proposición. *Un continuo X es casi conexo en pequeño si y sólo si para todo subconjunto cerrado F de X, se tiene que $F^\circ = T(F)^\circ$.*

Demostración. Supongamos que X es casi conexo en pequeño. Como $F \subset T(F)$ se tiene que Dada $x \in T(F)^\circ$, por la proposición 2.18, $x \in \overline{F} = F$. Por tanto $T(F)^\circ \subset F$. De manera que $T(F)^\circ \subset F^\circ$ y $F^\circ = T(F)^\circ$.

Ahora supongamos que para todo subconjunto cerrado F de X, $T(F)^\circ = F^\circ$. Sean x un punto de X y U un abierto de X que contiene a x. Como $(X \setminus U)^\circ \cap U = \emptyset$, se tiene que $T(X \setminus U)^\circ \cap U = \emptyset$. De donde existe $y \in U$ tal que $y \notin T(X \setminus U)$, de donde existe un subcontinuo K de X tal que $y \in K^\circ \subset K \subset X \setminus (X \setminus U) = U$, de donde X es casi conexo en pequeño.

q.e.d.

2.19 Proposición. *Si X es un continuo entonces X es indescomponible si* *y sólo si $T(p) = X$ para todo punto p de X.*

Demostración. Si X es indescomponible entonces por el corolario 1.27 todo subcontinuo propio tiene interior vacío, por lo tanto $T(p) = X$, para todo punto p de X. Inversamente, supongamos que X es descomponible, entonces existen A y B dos subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Sean a y b puntos de A y de B, respectivamente, tales que $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$, como $b \in B^{\circ} \subset B \subset X \setminus \{a\}$ entonces $b \notin T(a)$, por lo tanto $T(a) \neq X$. **q.e.d.**

2.20 Teorema. *Si X es un continuo tal que para cualquier subcontinuo Y de X se tiene que $T(Y) = Y$ entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sea Q un subconjunto abierto de X. Por la proposición 1.8, basta probar que todas las componentes de Q son abiertas. Sea $p \in Q$. Como $T(p) = \{p\}$ y $X \setminus Q$ es compacto, existe un número finito de continuos contenidos en $X \setminus \{p\}$ tales que el interior de dichos continuos cubre a $X \setminus Q$. Sea $\mathcal{W} = \{W_j\}_{j=1}^{m}$ una colección finita de subcontinuos de X contenidos en $X \setminus \{p\}$ tal que $X \setminus Q \subset \bigcup_{j=1}^{m} Int(W_j)$ y $\mathcal{W}$ tiene la menor cardinalidad posible. Sea $U = X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} W_j$ y sea P la componente de $\overline{U}$ que contiene a p. Mostraremos que $p \in Int(P) \subset P \subset Q$, de aquí se seguirá que las componentes de Q son abiertas. Por el teorema 1.33 (de los golpes en la frontera), cada componente de $\overline{U}$ intersecta a $\bigcup_{j=1}^{m} W_j$. Por la minimalidad de m se tiene que ninguna componente de $\overline{U}$, salvo P, puede intersectar a más de una W_j. Para probar esta afirmación, supongamos que P' es una componente de $\overline{U}$ diferente de P, tal que intersecta tanto a W_j como a W_k. Observemos que, en este caso, $P' \cup W_j \cup W_k$ es un continuo. De donde resulta que $\mathcal{W}' = \{W_1, ..., W_m, P' \cup W_j \cup W_k\} \setminus \{W_j, W_k\}$ tiene $m - 1$ elementos y

$X \setminus Q \subset \left(\bigcup_{l \neq j, l \neq k} W_l\right) \cup (P' \cup W_j \cup W_k)$, lo cual contradice la minimalidad de m. De lo anterior resulta que si para cada $j \in \{1, ..., m\}$, A_j denota a la unión de todas las componentes de $\overline{U}$ que intersectan a W_j entonces para cada $j \neq k$, $A_j \cap A_k \subset P$.

Por otra parte, como $p \notin T(W_j) = W_j$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subcontinuo K_j de X tal que $p \in Int(K_j) \subset K_j \subset X \setminus W_j$. Entonces también se tiene que $K_j \cap (A_j \setminus P) = \emptyset$. Para ver esto, supongamos que existe $x \in K_j \cap (A_j \setminus P)$. Sea L la componente de $K_j \cap \overline{U}$ que contiene a x. Por el teorema 1.33 (de los golpes en la frontera), se tiene que L intersecta a la frontera de $K_j \cap \overline{U}$ en K_j. Esta frontera está contenida en $\bigcup_{\ell=1}^{m} W_\ell$ (si $y \in Bd_{K_j}(K_j \cap \overline{U})$ entonces $y \in \overline{U}$. Si $y \in U$ entonces $y \in K_j \cap U \subset K_j \cap \overline{U}$ y $(K_j \cap U) \cap (K_j \setminus (K_j \cap \overline{U})) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto $y \in \overline{U} \setminus U \subset \bigcup_{\ell=1}^{m} W_\ell$). Por tanto, existe $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$ tal que $L \cap W_k \neq \emptyset$. Pero $L \subset M$, para alguna componente M de $\overline{U}$, $M \neq P$ y $M \subset A_j$, por lo que $M \cap W_k = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, $\bigcap_{j=1}^{m} K_j \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{m} (A_j \setminus P)\right) = \emptyset$, de donde se tiene que $\bigcap_{j=1}^{m} K_j \subset P$. Como $p \in Int\left(\bigcap_{j=1}^{m} K_j\right)$, resulta que $p \in Int(P)$. Por tanto P es una vecindad conexa de p contenida en Q. Como p fue un punto arbitrario de Q, se tiene que las componentes de Q son abiertas. **q.e.d.**

A continuación introducimos una noción un poco más general que continuo irreducible, la cual nos será de utilidad posteriormente.

2.21 Definición. Diremos que un continuo X es *débilmente irreducible* si el complemento de cualquier unión finita de subcontinuos de X tiene un número finito de componentes.

Observemos que la circunferencia unitaria del plano es un continuo débilmente irreducible que no es irreducible. Por otra parte, si en la curva del topólogo (ejemplo 1.16) identificamos el punto $(1, \text{sen}(1))$ con el punto $(0, -1)$, obtenemos un espacio llamado *Círculo de Varsovia*, el cual es un ejemplo de un continuo débilmente irreducible que no es irreducible y que no es localmente conexo.

2.22 Lema. *Si X es un continuo descomponible e irreducible y Y y Z son dos subcontinuos propios y ajenos de X entonces $X \setminus (Y \cup Z)$ tiene a lo más tres componentes.*

Demostración. Como X es irreducible, por el teorema 1.30, $X \setminus Y$ tiene a lo más dos componentes. Supongamos que $X \setminus Y = U \cup V$, donde U y V son subconjuntos abiertos y conexos de X, $Z \subset U$ y V puede ser vacío. Análogamente, podemos suponer que $X \setminus Z = H \cup K$, donde H y K son subconjuntos abiertos y conexos de X, $Y \subset H$ y K puede ser vacío . Sea $R = (U \setminus Z) \cap (H \setminus Y)$. Observemos que R es un subconjunto abierto de X, que $\overline{R} \cap Y \neq \emptyset$ y que $\overline{R} \cap Z \neq \emptyset$. Afirmamos que R es conexo. Supongamos que no lo es. Por el teorema 1.33 (de los golpes en la frontera), se tiene que si C es una componente de R entonces $\overline{C} \cap (Y \cup Z) \neq \emptyset$. Si existiera una componente C de R tal que $\overline{C} \cap Y \neq \emptyset$ y que $\overline{C} \cap Z \neq \emptyset$ entonces $V \cup Y \cup \overline{C} \cup Z \cup K$ sería un subcontinuo de X que contendría a sus puntos de irreducibilidad, de donde $X = V \cup Y \cup \overline{C} \subset Z \cup K$. Como $R \cap (V \cup Y \cup Z \cup K) = \emptyset$ resultaría que $R \subset \overline{C}$. De donde R sería conexo, pues $C \subset R \subset \overline{C}$, lo cual contradiría nuestra suposición. Por tanto, para toda componente C de R se tiene que

$\overline{C} \cap Y = \emptyset$ o $\overline{C} \cap Z = \emptyset$. Sean

$$\mathcal{A} = \{\overline{C} \mid C \text{es una componente de } R \text{ y } \overline{C} \cap Y \neq \emptyset\}$$

y

$$\mathcal{B} = \{\overline{C} \mid C \text{es una componente de } R \text{ y } \overline{C} \cap Z \neq \emptyset\}.$$

Afirmamos que tanto $\mathcal{A}$ como $\mathcal{B}$ son no vacíos. Supongamos que $\mathcal{B} = \emptyset$. Observemos que $V \cup Y \cup (\cup\mathcal{A})$ es un conjunto conexo y que $(\cup\mathcal{A})$ no lo es. Así que existen dos subconjuntos J y L de $V \cup Y \cup (\cup\mathcal{A})$, los cuales están separados en $V \cup Y \cup (\cup\mathcal{A})$ tales que $\cup\mathcal{A} = J \cup L$. Notemos que $V \cup Y \cup J$ y que $V \cup Y \cup L$ son conjuntos conexos (véase [K], p. 133). De esta manera se tiene que $(V \cup Y \cup \overline{J}) \cap Z \neq \emptyset$ o que $(V \cup Y \cup \overline{L}) \cap Z \neq \emptyset$. Supongamos que $(V \cup Y \cup \overline{J}) \cap Z \neq \emptyset$. Por lo anterior resulta que, $(V \cup Y \cup \overline{J}) \cup Z \cup K$ es un subcontinuo propio de X que contiene a sus puntos de irreducibilidad, lo cual es una contradicción. Por tanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Análogamente se tiene que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Observemos que, como X es un continuo, $(\overline{\cup\mathcal{A}}) \cap (\overline{\cup\mathcal{B}}) \neq \emptyset$. Sea $x \in (\overline{\cup\mathcal{A}}) \cap (\overline{\cup\mathcal{B}})$. Como $x \in (\overline{\cup\mathcal{A}})$, existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de $\cup\mathcal{A}$ que converge a x. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\overline{C_n} \in \mathcal{A}$ tal que $a_n \in \overline{C_n}$. Sin pérdida de generalidad podemmos suponer que la sucesión, $\{\overline{C_n}\}_{n=1}^{\infty}$, de subcontinuos de X, converge a un subcontinuo T de X, pues $C(X)$ es compacto. Notemos que $T \cap Y \neq \emptyset$ y que $x \in T$. De manera semejante podemos argumentar la existencia de un subcontinuo T' de X tal que $T' \cap Z \neq \emptyset$ y que $x \in T'$. De lo anterior se deduce que $V \cup Y \cup T \cup T' \cup Z \cup K$ es un subcontinuo propio de X que contiene a sus puntos de irreducibilidad, lo cual es una contradicción. Por tanto, R es conexo.

Por otra parte observemos que

$$
\begin{aligned}
X \setminus [(V \cup Y) \cup (Z \cup K)] &= (X \setminus V) \cap (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \cap (X \setminus K) \\
&= (U \cap Y) \cap (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \cap (H \cap Z) \\
&= U \cap H \\
&= U \cap (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \cap H \\
&= U \cap (X \setminus Z) \cap (X \setminus Y) \cap H \\
&= (U \setminus Z) \cap (H \setminus Y) \\
&= R.
\end{aligned}
$$

Como $V \cap (Y \cup Z \cup K) = \emptyset$ y $K \cap (Z \cup Y \cup V) = \emptyset$ se tiene que $X \setminus (Y \cup Z) = V \cup R \cup K$. **q.e.d.**

2.23 Proposición. *Si X es un continuo irreducible entonces X es débilmente irreducible.*

Demostración. Sea $\{Z_j\}_{j=1}^n$ una familia finita de subcontinuos de X, tal que $Z_j \cap Z_k = \emptyset$ si $j \neq k$. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por el teorema 1.30, podemos suponer que $X \setminus Z_j = U_j \cup V_j$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\bigcup_{j=2}^n Z_j \subset V_1$, por lo que U_1 puede ser vacío; $\bigcup_{j=1}^{n-1} Z_j \subset U_n$, por lo que V_n puede ser vacío; para cada $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, $\bigcup_{k=1}^{j-1} Z_k \subset U_j$ y $\bigcup_{k=j+1}^n Z_k \subset V_j$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, sea $R_j = (V_j \setminus Z_{j+1}) \cap (U_{j+1} \setminus Z_j)$. Por el lema 2.22 cada R_j es un subconjunto abierto y conexo de X. Observemos que $X \setminus (\bigcup_{j=1}^n Z_j) = U_1 \cup (\bigcup_{j=1}^{n-1} R_j) \cup V_n$, de donde $X \setminus (\bigcup_{j=1}^n Z_j)$ tiene, a lo más, $n+1$ componentes. Por tanto X es débilmente irreducible. **q.e.d.**

2.24 Definición. Se dice que un continuo X es *T–simétrico* si para toda pareja de subconjuntos cerrados de X, A y B, se tiene que $A \cap T(B) = \emptyset$ si y sólo si $B \cap T(A) = \emptyset$. Se dice que X es *T–simétrico puntualmente* si para cualesquiera dos puntos distintos de X, p y q, $p \notin T(q)$ si y sólo si $q \notin T(p)$.

2.25 Teorema. *Si X es un continuo débilmente irreducible entonces X es T–simétrico.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X y supongamos que $A \cap T(B) = \emptyset$. Como $A \cap T(B) = \emptyset$, para cada $a \in A$, existe un subcontinuo W_a de X tal que $a \in W_a^\circ \subset W_a \subset X \setminus B$. Como A es compacto, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^n W_{a_j}^\circ \subset \bigcup_{j=1}^n W_{a_j} \subset X \setminus B$. De lo anterior se tiene que $B \subset X \setminus (\bigcup_{j=1}^n W_{a_j}) \subset X \setminus (\bigcup_{j=1}^n W_{a_j}^\circ) \subset X \setminus A$. Sea $b \in B$, como X es débilmente irreducible, $X \setminus (\bigcup_{j=1}^n W_{a_j})$ tiene un número finito de componentes las cuales son subconjuntos abiertos de X. Sea C la componente de $X \setminus (\bigcup_{j=1}^n W_{a_j})$ que contiene a b. Entonces $b \in C \subset \overline{C} \subset X \setminus (\bigcup_{j=1}^n W_{a_j}^\circ) \subset X \setminus A$. Esto implica que $b \notin T(A)$. Por tanto $B \cap T(A) = \emptyset$. Análogamente se tiene que si $B \cap T(A) = \emptyset$ entonces $A \cap T(B) = \emptyset$. Por tanto X es T–simétrico. **q.e.d.**

La proposición 2.23 y el teorema 2.25 prueban el siguiente resultado.

2.26 Corolario. *Si X es un continuo irreducible entonces X es T–simétrico.*

2.27 Definición. Un continuo X es *T–aditivo* si para cualquier pareja de cerrados de X, $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$.

Se tiene entonces que el ejemplo 2.9 (f) no es T–aditivo.

2.28 Proposición. *Un continuo que es T–simétrico es T–aditivo.*

Demostración. Sabemos por el corolario 2.7 que $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$. Si $x \in T(A \cup B)$ entonces $\{x\} \cap T(A \cup B) \neq \emptyset$. Se tiene entonces que

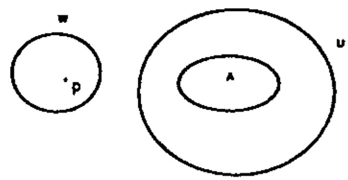
$T(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, por lo que, $T(x) \cap A \neq \emptyset$ o $T(x) \cap B \neq \emptyset$, aplicando la simetría tenemos que $\{x\} \cap T(A) \neq \emptyset$ o $\{x\} \cap T(B) \neq \emptyset$, de aquí que $x \in T(A)$ o $x \in T(B)$ por lo que $x \in T(A) \cup T(B)$. **q.e.d.**

2.29 Proposición. *Si X es un continuo hereditariamente unicoherente entonces X es T–aditivo.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X, por el corolario 2.7, basta probar que $T(A \cup B) \subset T(A) \cup T(B)$, sea p un punto en X tal que $p \notin T(A) \cup T(B)$, se tiene entonces que $p \notin T(A)$ y $p \notin T(B)$ entonces existen W_A y W_B que pertenecen a $C(X)$ tales que $p \in W_A^\circ \cap W_B^\circ \subset W_A \cap W_B \subset X \setminus A \cup B$, como X es hereditariamente unicoherente se tiene que $W_A \cap W_B \in C(X)$, de donde se concluye que $p \notin T(A \cup B)$. **q.e.d.**

2.30 Proposición. *Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado de X. Si $p \notin T(A)$ entonces existe un subconjunto abierto U de X tal que $A \subset U$ y $p \notin T(\overline{U})$.*

Demostración. Si $p \notin T(A)$ entonces existe $W \in C(X)$ tal que $p \in W^\circ \subset W \subset X \setminus A$, por la normalidad de X existe un abierto U de X tal que $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus W$, por lo tanto $p \notin T(\overline{U})$.



q.e.d.

2.31 Corolario. *Si X es un continuo T–aditivo y A es un cerrado de X entonces se tiene que* $T(A) = \bigcup_{p \in A} T(p)$.

Demostración. Sea A un cerrado de X. Si $p \in A$ entonces $\{p\} \subset A$ y $T(p) \subset T(A)$ por la proposición 2.6, por lo tanto $\bigcup_{p\in A} T(p) \subseteq T(A)$. Sea $x \in X$ tal que $x \notin T(p)$, para todo punto $p \in A$. Entonces para todo $p \in A$ existe un abierto U_p de X tal que $p \in U_p$ y $x \notin T(\overline{U}_p)$ por la proposición 2.30. Se tiene que $\{U_p\}_{p\in A}$ es una cubierta abierta de A, por lo tanto existen $p_1, ..., p_n$ tales que $\{U_{p_j}\}_{j=1}^{n}$ es una subcubierta de A. Como $x \notin T(\overline{U}_{p_j})$ entonces $x \notin \bigcup_{j=1}^{n} T(\overline{U}_{p_j})$, como X es T-aditivo se tiene que $x \notin T(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{U}_{p_j})$ y por lo tanto $x \notin T(A)$. **q.e.d.**

2.32 Proposición. *Un continuo X es T–simétrico si y sólo si X es T–simétrico puntualmente y T–aditivo.*

Demostración. Por la proposición 2.28 es claro que si X es T–simétrico entonces X es T–simétrico puntualmente y T–aditivo.

Inversamente sean A y B dos subconjuntos cerrados de X. Supongamos que $A \cap T(B) = \emptyset$ y $B \cap T(A) \neq \emptyset$. Sea $x \in B \cap T(A)$, por lo tanto $x \in B$ y $x \in T(A)$, observemos que $x \notin A$ ya que si $x \in A$ entonces $x \in A \cap T(B) = \emptyset$, lo cual es una contradicción a nuestra suposición.

Sabemos que $T(A) = \bigcup_{a\in A} T(a)$, por ser X T–aditivo, por lo tanto existe $a \in A$ tal que $x \in T(a)$ por lo que $a \in T(x)$ ya que X es T–simétrico puntualmente, además, $a \in T(x) \subset T(B)$ y por lo tanto $a \in A \cap T(B)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $B \cap T(A) = \emptyset$ y resulta que X es T–simétrico. **q.e.d.**

2.33 Proposición. *Si X es un continuo T–aditivo y aposindético entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Por el corolario 2.31, si A es un cerrado de X entonces

$T(A) = \bigcup_{a\in A} T(a)$. Como X es aposindético, para todo punto x de X se tiene que $T(x) = \{x\}$ por la proposición 2.16. Por tanto, si A es un cerrado de X, entonces $T(A) = A$. Como A fue arbitrario, se tiene por la proposición 2.12 que X es localmente conexo. q.e.d.

La proposición 2.29 y la proposición 2.33 fundamentan el siguiente resultado.

2.34 Corolario. *Si un continuo X es hereditariamente unicoherente y aposindético entonces X es localmente conexo.*

2.35 Definición. Un continuo X es *semiaposindético* si para cualesquiera dos puntos distintos x y y de X, existe un subcontinuo de X que contiene a uno de sus puntos en su interior, pero no contiene al otro. Esto es, X es semiaposindético si para cualesquiera dos puntos distintos x y y de X, $x \notin T(y)$ o $y \notin T(x)$.

2.36 Teorema. *Si X es un continuo no degenerado, irreducible y semiaposindético entonces X es homeomorfo a* $[0,1]$.

Demostración. Como X es irreducible, X es T–simétrico. Como X es semiaposindético, dados $x, y \in X$, $x \notin T(y)$ o $y \notin T(x)$. Por T–simetría se tiene que $x \notin T(y)$ si y sólo si $y \notin T(x)$. Esto implica que para toda $x \in X$, $T(x) = \{x\}$. Por lo tanto X es aposindético, por la proposición 2.15. Como todo continuo T–simétrico es T–aditivo. Por la proposición 2.33 se tiene que X es localmente conexo. Como X es irreducible y localmente conexo, es irreducible y arco conexo [H-Y] p.116. Tomamos un arco α que una a dos puntos de irreducibilidad de X. Entonces $\alpha = X$. Por tanto X es homeomorfo al $[0,1]$. q.e.d.

2.37 Definición. Sean X y Y dos continuos. Una función continua $f: X \to Y$ se dice que es:

(a) *monótona* si $f^{-1}(y)$ es conexa para todo $y \in Y$.

(b) *abierta* si $f(U)$ es un abierto de Y para todo abierto U de X.

2.38 Teorema. *Sean X y Y dos continuos, $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ entonces se tiene:*

(a) $T(B) \subseteq fTf^{-1}(B)$.

(b) Si f es monótona entonces $fT(A) \subseteq Tf(A)$ y $Tf^{-1}(B) \subseteq f^{-1}T(B)$.

(c) Si f es monótona entonces $T(B) = fTf^{-1}(B)$.

(d) Si f es abierta entonces $f^{-1}T(B) \subseteq Tf^{-1}(B)$.

(e) Si f es monótona y abierta entonces $f^{-1}T(B) = Tf^{-1}(B)$.

Demostración. (a) Sea $y \in Y$ y supongamos que $y \notin fTf^{-1}(B)$, entonces $f^{-1}(y) \cap Tf^{-1}(B) = \emptyset$. Lo anterior implica que para cada $x \in f^{-1}(y)$, existe un subcontinuo W_x de X tal que $x \in W_x^\circ \subset W_x \subset X \setminus f^{-1}(B)$. Como $f^{-1}(y)$ es compacto, existen $x_1, ..., x_n \in f^{-1}(y)$ tal que $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ$. Además se tiene que $(\bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ y para cada $j \in \{1, ..., n\}$, $f^{-1}(y) \cap W_{x_j} \neq \emptyset$. Por tanto se tiene que $f(\bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}) \cap B = \emptyset$ y $f(\bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j})$ es un continuo, pues $f(W_{x_j}) \cap f(W_{x_k}) \neq \emptyset$ para toda $j, k \in \{1, 2, ..., n\}$, ya que $y \in f(W_{x_j}) \cap f(W_{x_k})$. Observemos que $Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ)$ es un abierto contenido en $f(\bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j})$. Para ver esto notemos que, como $\bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}$, se tiene que $X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j} \subset X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ$, de donde $f(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}) \subset f(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ)$

y $Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^{\circ}) \subset Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j})$. Como f es suprayectiva, resulta que $Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^{\circ}) \subset f(X \setminus (X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j})) = f(\bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j})$. Por tanto $Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^{\circ}) \subset f(\bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j})$. Además, $y \in Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^{\circ})$ pues, como $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^{\circ}$, se tiene que $f^{-1}(y) \cap (X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^{\circ}) = \emptyset$, de donde $\{y\} \cap f(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^{\circ}) = \emptyset$ y, por tanto, $y \in Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^{\circ})$. De lo anterior concluimos que $y \notin T(B)$, lo que demuestra el resultado.

(b) Primero veremos que $fT(A) \subset Tf(A)$. Supongamos que $y \in Y$ y que $y \notin T(f(A))$, por lo tanto existe $W \in C(Y)$ tal que $y \in W^{\circ} \subset W \subset Y \setminus f(A)$, lo que implica que $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W^{\circ}) \subset f^{-1}(W) \subset f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}f(A) \subset X \setminus A$, de aquí que $f^{-1}(y) \subset X \setminus A$, como f es monótona $f^{-1}(W) \in C(X)$ (véase [K] p.131) y, además, $f^{-1}(W) \cap A = \emptyset$ entonces $f^{-1}(y) \cap T(A) = \emptyset$ y de aquí que $y \notin fT(A)$.

Ahora probaremos que $Tf^{-1}(B) \subset f^{-1}T(B)$. Supongamos que B es un subconjunto de Y, supongamos que $x \in X$ y $x \notin f^{-1}(T(B))$, lo que implica que $f(x) \notin T(B)$, por lo tanto existe $W \in C(Y)$ tal que $f(x) \in W^{\circ} \subset W$ y $B \cap W = \emptyset$. De lo anterior podemos concluir que $x \in f^{-1}(W^{\circ}) \subset f^{-1}(W)$, $f^{-1}(W) \in C(X)$ y $f^{-1}(W) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(W \cap B) = \emptyset$ por lo que $x \notin T(f^{-1}(B)$, de donde $Tf^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(T(B))$.

(c) Por el inciso (a), $T(B) \subset fTf^{-1}$. Por el inciso (b), $T(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(T(B))$, lo cual implica que $f(T(f^{-1}(B))) \subset f(f^{-1}(T(B))) = T(B)$. Esto prueba (c).

(d) Si f es abierta queremos probar que $f^{-1}T(B) \subseteq Tf^{-1}(B)$. Supongamos que $x \in X$ y que, además, $x \notin Tf^{-1}(B)$. Entonces, existe $W \in C(X)$ tal que $x \in W^\circ \subset W \subset X \setminus f^{-1}(B)$, por lo tanto $W \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ y $f(W) \cap B = \emptyset$, por esto $f(x) \in f(W^\circ) \subseteq f(W)$ de donde, por ser f abierta $f(x) \notin T(B)$. Es decir, $x \notin f^{-1}T(B)$, lo cual prueba lo que queríamos demostrar.

(e) Se sigue de manera directa de los incisos (b) y (d). **q.e.d.**

Gracias al teorema anterior se pueden probar en forma elegante algunos resultados interesantes utilizando la función T.

2.39 Proposición. *Supongamos que X y Y son dos continuos y que $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva. Si X es localmente conexo entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Por la proposición 2.12 basta probar que $T(B) = B$, para toda $B \in 2^X$, ya sabemos que $B \subset T(B)$. Por la parte (a) del teorema 2.38, $T(B) \subseteq fTf^{-1}(B)$. Como X es localmente conexo, $Tf^{-1}(B) = f^{-1}(B)$. Entonces $T(B) \subseteq ff^{-1}(B) = B$. **q.e.d.**

2.40 Proposición. *La imagen monótona de un continuo indescomponible es indescomponible.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función monótona y suprayectiva, con X un continuo indescomponible. Supongamos que $y \in Y$. Entonces, por la parte (b) del teorema 2.38, $Tf^{-1}(y) \subseteq f^{-1}T(y)$, como X es indescomponible la proposición 2.19 nos dice que $Tf^{-1}(y) = X$, de donde $Y = f(X) \subset ff^{-1}T(y) \subset Y$, por lo tanto $T(y) = Y$ y nuevamente utilizando la proposición 2.19 se tiene que Y es indescomponible. **q.e.d.**

2.41 Teorema. *Si X es un continuo T–simétrico (respectivamente, T–*

aditivo) y $f : X \to Y$ es una función continua, monótona y suprayectiva, entonces Y es también T–simétrico (respectivamente, T–aditivo).

Demostración. Supongamos que X es T-aditivo, sean A y B dos subconjuntos cerrados de Y. Aplicando la parte (c) del teorema 2.38 , tenemos que $T(A \cup B) = fTf^{-1}(A \cup B) = fT(f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)) = T(f^{-1}(B) \cup f(T(f^{-1}(A)) = fTf^{-1}\ (A) \cup fTf^{-1}(B) = T(A) \cup T(B)$.

Ahora, supongamos que X es T-simétrico, sean A y B dos cerrados de Y, tales que $A \cap T(B) = \emptyset$, entonces $A \cap fTf^{-1}(B) = \emptyset$ por la parte (c) del teorema 2.38 por lo que $f^{-1}(A) \cap Tf^{-1}(B) = \emptyset$, por la simetría de T en X se tiene que $Tf^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ por lo que $f(Tf^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) = fTf^{-1}(A) \cap B = T(A) \cap B = \emptyset$ de donde se concluye que Y es T-simétrico.

q.e.d.

Por el lema 2.4, la imagen bajo la función T de cualquier subconjunto de un continuo X es un subconjunto cerrado de X. Entonces podemos restringir la función T al hiperespacio de subconjuntos cerrados de X, 2^X. Como 2^X tiene una topología. Podemos preguntarnos si la función T restringida a 2^X es continua. Esto no siempre sucede como puede verificarse fácilmente en el continuo de ejemplo 2.9 (c). Por el teorema 2.10 se tiene que la imagen de un subcontinuo es un subcontinuo, por lo que también tiene sentido restringir la función T al hiperespacio de subcontinuos de X, $C(X)$.

No está dentro de los objetivos de este trabajo analizar en qué casos la función T es continua pero completando lo anterior enunciaremos dos teoremas cuya demostración se encuentra en [B3].

2.42 Teorema. *Si X es un continuo para el cual la función T es continua y X es casi conexo en pequeño en $p \in X$ entonces X es semilocalmente conexo* *en p.*

2.43 Teorema. *Si T es aditiva y continua para un continuo X y $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es semilocalmente conexo en p .

(2) X es casi conexo en pequeño en p.

(3) X es conexo en pequeño en p.

Capítulo 3

Aplicaciones de la función T

En este último capítulo daremos algunos resultados interesantes aplicando la función T.

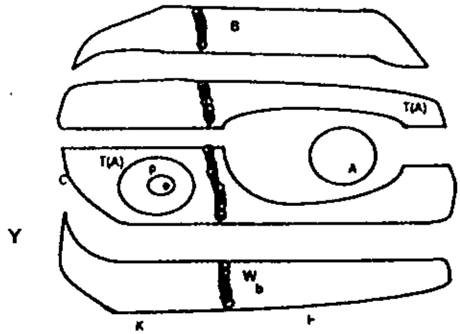
3.1 Definición. Un continuo X se dice que es *m-aposindético* (*aposindético con respecto a conjuntos cerrados numerables*), si X es aposindético con respecto a cada subconjunto con exactamente m puntos, (es aposindético con respecto a cada conjunto cerrado y numerable, respectivamente). Esto es, si para todo $K \subset X$ tal que K tiene m puntos (es cerrado y numerable respectivamente) entonces $T(K) = K$.

3.2 Definición. Sean X un continuo, A y B dos subconjuntos disjuntos de X. Un subconjunto C de X es un *separador de A y de B en X* si $X \setminus C = U \cup V$ donde $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$, $A \subset U$ y $B \subset V$.

3.3 Teorema. *Sea X un continuo si A es un subconjunto de X entonces $T(A)$ intersecta a todo separador cerrado de A y algún punto de $T(A)$.*

Demostración. Supongamos que no es cierto. Entonces existen $p \in T(A)$ y un subconjunto cerrado B de X, tales que $X \setminus B = H \cup K$, $A \subset H$, $p \in K$, H y K son abiertos ajenos de X y $B \cap T(A) = \emptyset$. Como $B \cap T(A) = \emptyset$ para cada $b \in B$, existe un subcontinuo W_b de X tal que $b \in W_b^\circ \subset W_b \subset X \setminus A$. Observemos que la familia $\mathcal{W} = \{W_b^\circ \mid b \in B\}$ es una cubierta abierta de B.

Como B es un compacto, existen $b_1, ..., b_n \in B$ es tal que $B \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{b_j}^{\circ}$.

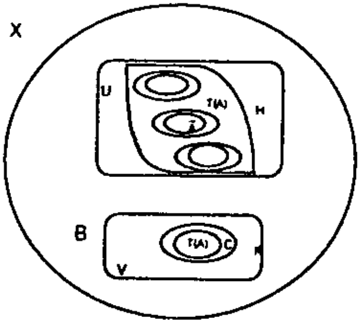


Por otro lado, como $\overline{K} \setminus K \subset B$. Por el teorema 1.33 (de golpes en la frontera) tenemos que $K \cup \bigcup_{j=1}^{n} W_{b_j} = Y$ tiene una cantidad finita de componentes, Y es un cerrado de X por que $\bigcup_{j=1}^{n} W_{b_j}$ es cerrado y contiene a $\overline{K} \setminus K$. Observemos que $p \in K \subset Y^{\circ}$. Sea C la componente de Y que contiene a p. Por el lema 1.6 se tiene que $p \in C^{\circ}$, esto implica que $p \notin T(A)$, lo que contradice la elección de p. Por tanto $B \cap T(A) \neq \emptyset$. **q.e.d.**

3.4 Corolario. *Para un continuo X se tiene que si A es un subconjunto de X entonces toda componente de $T(A)$ intersecta a $\overline{A}$.*

Demostración. Supongamos que no es cierto. Por lo tanto existe una componente C de $T(A)$ tal que $C \cap \overline{A} = \emptyset$. Como $T(A)$ es un subconjunto cerrado de X, $T(A)$ es un compacto y contiene a los dos cerrados $\overline{A}$ y C y no existe un subconjunto conexo de $T(A)$ tal que intersecte a $\overline{A}$ y a C. Por el teorema 1.31 (del cable cortado) existen dos subconjuntos cerrados ajenos

H y K de $T(A)$ tal que $T(A) = H \cup K$, $\overline{A} \subset H$ y $C \subset K$.



Como X es un espacio normal, existen dos subconjuntos abiertos ajenos U y V tales que $H \subset U$ y $K \subset V$. Sea $B = X \setminus (U \cup V)$. Como X es conexo, $B \neq \emptyset$ entonces B es un separador cerrado de A y C, tal que $B \cap T(A) = \emptyset$ y esto contradice el teorema 3.3. **q.e.d.**

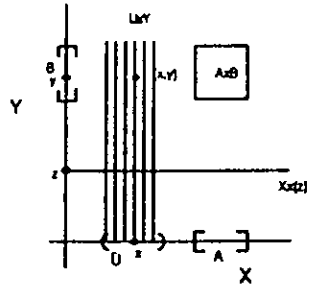
3.5 Corolario. *Si X es un continuo y A es un subconjunto cerrado de X y $T(A)$ es totalmente disconexo entonces $T(A) = A$.*

Demostración. Recordemos que $A \subset T(A)$, entonces es suficiente probar que $T(A) \subset A$. Por el corolario 3.4, toda componente de $T(A)$ intersecta a $\overline{A} = A$. Cada componente C de $T(A)$ tiene exactamente un punto, entonces $C \subset A$, y $T(A) \subset A$. **q.e.d.**

3.6 Teorema. *Sean X y Y continuos. Si A y B son dos subconjuntos cerrados y propios de X y Y, respectivamente, entonces $T(A \times B) \subset A \times B$, de donde, $T(A \times B) = A \times B$.*

Demostración. Sea $(x, y) \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \in X \setminus A$. Por lo tanto existe un subconjunto abierto U

de X tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset X \setminus A$.



Sea $z \in Y \setminus B$, entonces $(X \times \{z\}) \cap (A \times B) = \emptyset$. Entonces $(x, y) \in (\overline{U} \times Y) \cup (X \times \{z\}) \subset (X \times Y) \setminus (A \times B)$. Como $(\overline{U} \times Y) \cup (X \times \{z\})$ es un continuo y contiene a (x, y) en su interior, tenemos que $(x, y) \notin T(A \times B)$ y entonces $T(A \times B) \subset A \times B$. **q.e.d.**

3.7 Teorema. *Sean X y Y continuos. Si A y B son dos subconjuntos cerrados totalmente disconexos de X y de Y, respectivamente, entonces para cualquier subconjunto K de $A \times B$, tenemos que $T(K) = K$.*

Demostración. Sea K un subconjunto cerrado de $A \times B$. Por el teorema anterior tenemos que $T(A \times B) = A \times B$. Como $K \subset A \times B$ tenemos que $T(K) \subset T(A \times B) = A \times B$. Como A y B son totalmente disconexos, $A \times B$ lo es también. Así, $T(K)$ es totalmente disconexo. Entonces por el corolario 3.5, $T(K) = K$. **q.e.d.**

3.8 Corolario. *Si X y Y son continuos y K es un subconjunto cerrado y numerable de $X \times Y$ entonces $T(K) = K$. En particular, $X \times Y$ es m-aposindético para cada $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea K un subconjunto cerrado numerable de $X \times Y$. Sean $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ las proyecciones naturales. Como

K es numerable y compacto, tenemos que $\pi_X(K)$ y $\pi_Y(K)$ son numerables y cerrados de X y Y, respectivamente. Sean $A = \pi_X(K)$ y $B = \pi_Y(K)$. Entonces $K \subset A \times B$ y por el teorema 3.7, $T(K) = K$. **q.e.d.**

3.9 Lema. *Sean X un continuo y sea n un entero positivo. Si D_n denota la métrica en X^n definida por $D_n = ((x_1, ..., x_n), (x'_1, ..., x'_n)) = \max\{d(x_1, x'_n), ..., d(x_n, x'_n)\}$, donde d es la métrica de X, entonces la función $f_n : X^n \to F_n(X)$ dada por $f_n((x_1, ..., x_n)) = \{x_1, ..., x_n\}$ es suprayectiva y satisface la siguiente desigualdad:*

$$H(f_n(x_1, ..., x_n), f_n(x'_1, ...x'_n)) \leq D_n((x_1, ..., x_n), (x'_1, ..., x'_n))$$

para cada $(x_1, ..., x_n)$ y $(x'_1, ..., x'_n)$ puntos de X^n.

Demostración. Veamos que la función f_n es suprayectiva. Si $A \in F_n(X)$, la cardinalidad de A es menor o igual que n, supongamos que A tiene exactamente m puntos, $A = \{x_1, ..., x_m\}$, entonces

$$(x_1, ..., x_m, \underbrace{x_m, ..., x_m}_{n-m \text{ veces}}) = \overline{x} \in X^n$$

es tal que $f_n(\overline{x}) = A$.

Sean $(x_1, ..., x_n) = \overline{x}$ y $(x'_1, ..., x'_n) = \overline{x}'$ en X^n. Supongamos que $D_n(\overline{x}, \overline{x}') = r$ y sea $\varepsilon > 0$ dada. Así, $D_n(\overline{x}, \overline{x}') < r + \varepsilon$, esto implica que para cada $j \in \{1, ..., n\}$, $d(x_j, x'_j) < r+\varepsilon$. Entonces, para cada $x_j \in f_n(\overline{x})$, tenemos que $x'_j \in f_n(\overline{x}')$ y $d(x_j, x'_j) < r+\varepsilon$. Esto muestra que $f_n(\overline{x}) \subset N(r+\varepsilon, f_n(\overline{x}'))$, análogamente, $f_n(\overline{x}') \subset N(r + \varepsilon, f_n(\overline{x}))$. De donde $H(f_n(\overline{x}), f_n(\overline{x}') \leq r + \varepsilon$.

Como ε fue arbitrario, obtenemos que $H(f_n(\overline{x})), f_n(\overline{x}')) \leq r$. **q.e.d.**

Observación: Si $A \in F_n(X)$ entonces la cardinalidad de $f_n^{-1}(A)$ es finita.

3.10 Teorema. *Si X es un continuo, $n > 1$ y K es cualquier subconjunto cerrado y numerable de $F_n(X)$ entonces $T(K) = K$, en particular $F_n(X)$ es m-aposindético para cada $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como K es un subconjunto cerrado y numerable de X, tenemos que $f_n^{-1}(K) = \bigcup_{k\in K} f_n^{-1}(k)$ es un cerrado y numerable de X^n. Por el corolario 3.8, tenemos que $Tf_n^{-1}(K) = f_n^{-1}(K)$, de donde $f_nTf_n^{-1}(K) = f_nf_n^{-1}(K) = K$, por el teorema 2.38 (a) obtenemos que $T(K) \subset f_nTf_n^{-1}(K)$ por lo tanto $T(K) \subset K$, como $K \subset T(K)$ por la observación 2.4, se obtiene que $T(K) = K$. **q.e.d.**

Terminamos mencionando algunas de las preguntas, relacionadas con la función T que permanecen abiertas, que se encuentran en el *Houston Problem Book* (161 - 165) * y en *W. Lewis, Continuum Theory Problems, Topology Proc. 8 (1983)*, (361-394)".

(1)* ¿Si $\bar{T}$ es continua para el continuo X entonces X es necesariamente T–aditivo?

(2)* ¿Si la función $T: 2^X \to 2^X$ es continua para el continuo de Hausdorff X entonces es cierto que X es T– aditivo? (Bellamy, 18 de febrero de 1980)

(3)* ¿Si la función $T: 2^X \to 2^X$ es continua para el continuo de Hausdorff X entonces es cierto que la colección $\{T(p) \mid p \in X\}$ es una descomposición continua de X tal que el espacio cociente es localmente conexo? (Bellamy, 18 de febrero de 1980)

(4)* ¿Si la función $T: 2^X \to 2^X$ es continua para el continuo X y existe un punto p en X tal que $T(p)$ tiene interior no vacío entonces es X indescomponible? (Bellamy, 18 de febrero de 1980)

La función T es idempotente en el espacio X si $T(T(A)) = A$ para todos los subconjuntos A de X.

(5)* ¿ Si X y Y son continuos indescomponibles entonces es T idempotente en $X \times Y$? ¿Lo será sólo para los subconjuntos cerrados de $X \times Y$? (Bellamy, 18 de febrero de 1980)

(6)* ¿ Si X y Y son continuos indescomponibles y W es un subcontinuo de $X \times Y$ con interior no vacío entonces es $T(W) = X \times Y$? (F. B. Jones, 18 de Febrero de 1980)

La respuesta esta pregunta es negativa, pues Alejandro Illanes probó que el producto del solenoide diádico con el solenoide triádico es mutuamente aposindético.

(7)" Sea X un continuo, A un subconjunto de X y $\mathcal{W} = \{W \mid W \in C(X)$ y existe para alguna $x \in T(A)^c\}$. Definimos a $K(A) = \bigcap \mathcal{W}$. ¿ Si T es continua para el continuo X entonces la función K es también continua para X? (Bellamy)

(8)" ¿ Si T es continua para el continuo X y X es descomponible entonces es cierto que para cada $x \in X$, $(T(x))^\circ = \emptyset$? (Bellamy)

(9)" ¿ Si $X \mid T$ denota el espacio cociente que se obtiene de X al identificar a cada $T(x)$ en un sólo punto entonces $x \mid T$ es localmente conexo? (Bellamy)

Se sabe que la respuesta es si en el caso de que X sea T–aditivo.

(10)" ¿ Si X es un continuo indescomponible y W es un subcontinuo de $X \times X$ con interior diferente del vacío entonces es $T(W) = X \times X$? (F. B. Jones)

(11)" Sea X un continuo y x un punto de X. Se dice que x es *un punto de corte débil* si existen dos puntos y y z en X, tales que para cualquier subcontinuo W de X que contiene a $\{y, z\}$ se tiene que W contiene a $\{x\}$. ¿Si X es un continuo atriódico (o no contiene ninguna colección no numerable de triodos ajenos dos a dos) y X no tiene puntos de corte débil entonces se tiene que existe un subcontinuo W de X tal que $W^\circ \neq \emptyset$ y $T(W) \neq X$? (H. Cook)

$(12)^n$ ¿Si T es continua para el continuo X y $f: X \to Z$ es una función continua, monótona y suprayectiva entonces es T continua para Z? (Bellamy)

$(13)^n$ ¿ Si X es un continuo homogéneo y de dimensión uno entonces es T continua para X? (Bellamy)

$(14)^n$ Un *dendroide* es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Un dendroide X es *suave* si existe un punto x en X tal que si $lim\ xa_n = xa$ para cualquier sucesión de arcos $\{xa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $lim\ a_n = a$. Diremos que un continuo X es *estrictamente puntualmente T-simétrico* si para cualesquiera x y $y \in X$ con $x \neq y$ y $x \in T(y)$ entonces $y \notin T(x)$. ¿ Si X es un dendroide estrictamente puntualmente T–simétrico entonces es X un dendroide suave? (Bellamy)

$(15)^n$ Si X es un continuo de Hausdorff que es casi conexo en pequeño entonces es X conexo en pequeño en algún punto? (H. Davis – Doyle)

La respuesta es afirmativa si X es métrico.

$(16)^n$ ¿ Si la restricción de T al hiperespacio de subcontinuos de un continuo X es continua entonces es T continua para X? (Bellamy)

Sabemos que la respuesta es sí, si la restricción de T es la función identidad.

$(17)^n$ ¿ Es cierto que las funciones abiertas preservan la T–aditividad, la T–simetría ? (Bellamy)

Bibliografía

[B1] D. P. Bellamy, *Continua for wich the set function T is continuous*, Amer. Math. Soc. ,1511 (1970), 581–587.

[B2] D. P. Bellamy, *Some Topics in Modern Continua Theory*, Continua Recompositions Manifolds, (R.H. Bing, W. T. Eaton and M. P. Starbird, eds.), University of Texas Press, (1983), 1–26.

[B3] D. P. Bellamy, *Set Functions and Continuous Maps*, General Topology and Modern Analysis, (L. F. McAuley and M. M. Rao, eds.), Academic Press, (1981), 31–38.

[B-U] K. Borsuk and S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. , 37 (1931), 875-882.

[D-D] H. S. Davis, P. H. Doyle, *Invertible Continua*, Portugal. Math., 26 (1967), 487–491.

[H-Y] J. G. Hocking, G. S. Young, *Topology*, Dover Publications, Inc., 1988.

[I] A. Illanes, *Apuntes de Hiperespacios* (No publicados).

[J1] F. B. Jones, *Concerning the boundary of a complementary domain of a continuous curve*, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939), 428–435.

[J2] F. B. Jones, *Aposindetic Continua and certain boundary problems*, Amer. J. Math., 53 (1941), 545–553.

[J3] F. B. Jones, *Concerning nonaposyndetic continua*, Amer. Math., 70 (1948), 403-413.

[J4] F. B. Jones, *Aposyndesis revisited*, Proc. of the Univ. of Oklahoma Topology, Conf., (1972), Univ. of Oklahoma, Norman, 1972, 64–78.

[K] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, Academic Press, 1968.

[Ma] S. Macías, *Aposyndetic Properties of Symmetric Products of Continua*, por aparecer en Topology Proc.

[Mo] R. L. Moore, *Foundations of point set theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol 13, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., (1962).

[N1] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of Sets*, Marcel Dekker inc., 1978.

[N2] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory, an introduction*, Marcel Dekker inc., 1992.

[Wh] G. T. Whyburn, *Semi-locally-connected sets*, Amer. J. Math., 61 (1939), 733–749.

[Wi] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Co., 1970.