UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

DISTRIBUCIONES DE VALORES EXTREMOS Y SU CARACTERIZACION EN TERMINO DE VALORES RECORD

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

JESUS RUIZ MATA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Director de Tesis:

Dra. Ma. Asunción Begoña Fernández Fernández

1998

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Distribuciones de valores extremos y su caracterización en términos de valores Record

realizado por Jesús Ruiz Mata

con número de cuenta 9110630-4 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dra. Ma. Asunción Begoña Fernández Fernández Begoña Fernández

Propietario Dr. José A. Villaseñor Alva

Propietario Dr. Federico O'Reilly Togno

Suplente Dr. José Ma. Gonzales Barrios

Suplente Act. Jaime Vazquez Alamilla

Consejo Departamental de Matemáticas
MAT. JULIO CESAR GUEVARA BRAVO

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todas las personas que me apoyaron en el desarrollo de mis estudios Profesionales, y a quienes me ayudaron con la realización de este trabajo.

A mis Padres
Jesús Ruiz Madrid
Luz María Mata de Ruiz

Quienes siempre han depositado toda su confianza en mi, con todo su amor.

A mis hermanos
María José Ruiz Mata
Enrique Ruiz Mata

Con cariño

A mis Amigos y Compañeros

Que siempre me han brindado una verdadera amistad que es un tesoro de valor incalculable.

Un particular agradecimiento a quienes me brindaron su tiempo, experiencia y sobre todo su apoyo incondicional.

Dra. Begoña Fernández Fernández
Dr. José A. Villaseñor Alva
Dr. José María Gonzales Barrios
Dr. Federico O'Reilly Togno
Act. Jaime Vazquez Alamilla

Indice

Como una tesis de Licenciatura, el presente trabajo tiene como objetivo mostrar el conocimiento adquirido durante los estudios básicos. Sin embargo, en este también se presentan los resultados de los primeros contactos que he tenido con el trabajo científico a través de la investigación. La base de mi investigación en este caso es la teoría de valores extremos, pero, debido al interés que ha despertado esta teoría, existe una gran cantidad por lo que un estudio completo de esta sería imposible en un proyecto de esta naturaleza. Es por eso que se presenta solamente uno de los tipos de valores extremos y las propiedades de estos son estudiados en algunas distribuciones especiales. Los valores extremos que se estudian aquí son conocidos como valores Record. Estos valores extremos modelan los cambios, en orden creciente o decreciente, que pueda tener una sucesión de observaciones. Los valores Record se presentan naturalmente en casi cualquier campo de la ciencia e ingeniería al tratar de estudiar y predecir el comportamiento de los resultados extremos en una serie de observaciones. Por ejemplo, en el ámbito financiero cualquier analista está interesado en predecir los cambios extremos que pueda tener la tasa de interés en cualquier periodo de tiempo y así poder evitar posibles catástrofes económicas. En esta tesis se presenta un estudio completo de las propiedades distribucionales de la sucesión de valores Record asociada a una sucesión de variables aleatorias independientes y con distribución común. Es bastante agradable observar que la sucesión de valores Record se comporta de una manera lo suficientemente decente en el sentido de que las propiedades distribucionales de esta son realmente ideales. Estas propiedades permiten un estudio sencillo del comportamiento de los valores Record asociados a una sucesión de variables aleatorias independientes con una distribución común cualquiera. En este caso se estudia el comportamiento de los valores Record asociados a las distribuciones exponencial y Gumbel. Para lograr esto, es obvio que en primer lugar se deben presentar los conceptos, propiedades y resultados básicos concernientes a estas dos distribuciones. Este trabajo es llevado a cabo en el primer Capítulo, donde se presentan las definiciones y génesis, las propiedades de ciertas funciones de éstas que son usadas para caracterizaciones distribucionales, las propiedades de las estadísticas de orden asociadas a este tipo de variables y algunas otras propiedades especiales. La parte que ofrece mayor interés para el lector especializado se presenta en el tercer Capítulo, donde se tratan los resultados de caracterización de distribuciones. Como una revisión obligada se presentan los resultados más conocidos para la caracterización de una variable aleatoria cualquiera, como son aquellos de la función generadora de momentos, la función característica, las estadísticas de orden y los momentos. Es después de esta sección cuando se llega a la parte más interesante de este trabajo, cuando se presentan las caracterizaciones de las dos distribuciones que estudiamos en términos de valores Record. Estos resultados fueron extraídos de algunos artículos de referencia que me fueron recomendados por mis asesores y de un artículo en el que se centró el desarrollo del trabajo presentado aquí. Este artículo plantea preguntas abiertas acerca de la caracterización de la distribución Gumbel en términos de valores Record y es a partir de éstas de donde se originó la investigación que se presenta. Una modesta contribución para tratar de responder estas preguntas abiertas se presenta en esta sección como una serie de teoremas. Solo puedo agregar que el proceso de realización de esta tesis ha sido de gran satisfacción y que me ha hecho reafirmar mi vocación a la ciencia.

Capítulo 1

DISTRIBUCIONES EXPONENCIAL Y GUMBEL

En este capítulo se presentan los conceptos y las propiedades más conocidas de las distribuciones Exponencial y Gumbel. El interés en el estudio de la distribución exponencial reside en el hecho de que cualquier variable aleatoria continua puede ser transformada a una variable aleatoria con este tipo de distribución que por su naturaleza analítica permite un estudio sencillo y elegante. Este importante hecho nos permite exportar cualquier propiedad de las variables aleatorias con distribución exponencial a una propiedad de otra variable aleatoria arbitraria con distribución continua. La gran ventaja de esto es que el manejo de la distribución exponencial es generalmente más sencillo que el de cualquier otra distribución continua y así el trabajo de análisis matemático se simplifica. En particular veremos en el capítulo siguiente, que el estudio de las propiedades distribucionales de una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común exponencial, nos facilitará el de cualquier sucesión de variables aleatorias independientes con distribución continua común arbitraria. Por otro lado, como el estudio de los estimadores basados en muestras de una población exponencial ha estado asociado al estudio de las estadísticas de orden y nosotros estamos interesados en propiedades de orden de una sucesión de variables aleatorias con distribución común continua, es natural entonces tratar de usar estas variables aleatorias para estudiar estas propiedades y después trasladar los resultados, mediante la correspondiente transformación, a propiedades de orden sobre la sucesión en que estemos interesados. También presentamos en este capítulo un breve estudio de las propiedades de la distribución Gumbel, ya que es considerada como una de las representantes de las llamadas distribuciones de valores extremos y nosotros estamos interesados, como menciona el título de esta tesis, en caracterizaciones de este tipo de distribuciones. La teoría de valores extremos se desprende de una variedad de aplicaciones que involucran fenómenos naturales tales como las inundaciones, ráfagas de aire, contaminación del aire y corrosión y parece haberse originado principalmente de las necesidades de los astrónomos en utilizar o rechazar observaciones salientes (outliers). Los primeros trabajos en problemas de valores extremos datan de fechas tan tempranas como 1709, cuando Nicolas Bermoulli discutió la distancia media más grande al origen cuando n puntos se encuentran aleatoriamente sobre una línea recta de longitud t. Sin embargo, un desarrollo sistemático de esta teoría puede ser atribuido a un artículo de Bortkiewicz (1922) que trata de la distribución del rango en muestras aleatorias de una distribución normal. La importancia del artículo de Bortkiewicz reside en el hecho de que el concepto de la distribución del valor más grande fue claramente introducido. En 1928 Fisher y Tippett mostraron que las distribuciones límites extremas pueden ser solamente de uno de tres tipos posibles. Algunos años más tarde Gnedenko presentó los fundamentos rigurosos de la teoría de valores extremos. Gumbel, más tarde, hizo varias contribuciones significativas al análisis de valores extremos.

1.1 DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

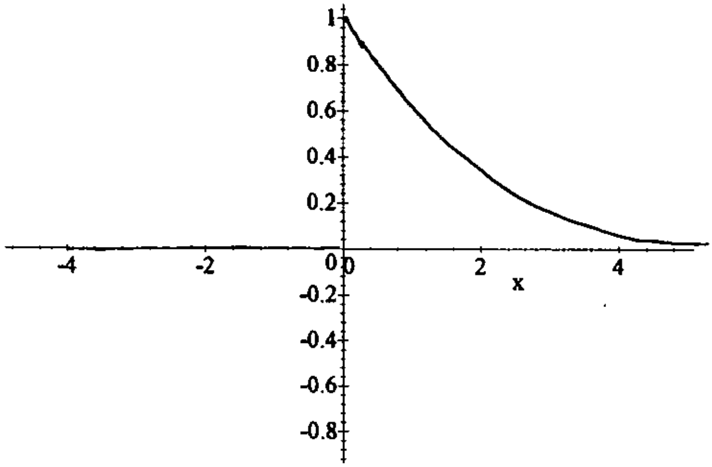
1.1.1 DEFINICIÓN Y GÉNESIS

La distribución exponencial se origina al tratar de dar una descripción útil de eventos que recurren en un tiempo aleatorio. En particular, el suponer que el tiempo futuro de vida de un cierto mecanismo tiene la misma distribución, sin importar su edad en el presente, da origen a una distribución de este tipo. La definición de esta distribución es la siguiente.

Definición 1.1 (Densidad exponencial) *La variable aleatoria X tiene una distribución exponencial si su función de densidad de probabilidad tiene la forma*

$$f_X(x) = \sigma e^{-\sigma(x-\theta)}, \ x > \theta; \ \sigma > 0 \tag{1.1}$$

La siguiente figura da una representación gráfica de esta distribución para $\theta = 0$ y $\sigma = 1$



Función de densidad exponencial estándar

Cuando $\theta = 0$ y $\sigma = 1$ esta distribución es conocida como la distribución exponencial estándar. La función de distribución acumulativa para esta variable aleatoria es

$$F_X(x) = 1 - e^{-\sigma(x-\theta)}, \; x > \theta \tag{1.2}$$

Como la variable aleatoria $Y := X - \theta$ tiene función de distribución

$$\begin{aligned} F_Y(x) &:= P[Y \leq x] \\ &= P[X - \theta \leq x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= P[X \leq x + \theta] \\ &= F_X(x + \theta) \\ &= 1 - e^{-\sigma x}, \ x > 0, \end{aligned}$$

que es la función de distribución de una variable aleatoria exponencial con parámetros $\theta = 0$ y σ, entonces en general supondremos que $\theta = 0$ y la función de distribución acumulativa de X será

$$F_X(x) := 1 - e^{-\sigma x}, \ x > 0; \ \sigma > 0$$

y diremos solamente que X tiene una distribución exponencial con parámetro σ.

La primera propiedad que mencionamos de esta distribución y nos permitirá explicar su génesis es la siguiente

$$\begin{aligned} 1 - F_X(x + z) &= e^{-\sigma(x+z)} \\ &= e^{-\sigma x} e^{-\sigma z} \\ &= (1 - F_X(x))(1 - F_X(z)), \ x, z > 0 \end{aligned}$$

que puede ser reescrita como

$$P[X > x + z \mid X > x] = P[X > z], \ x, z > 0.$$

Esta es una propiedad que tiene un nombre cuya definición damos a continuación

Definición 1.2 (Carencia de memoria) *Una variable aleatoria X se dice que cumple la propiedad de carencia de memoria si se cumple la siguiente ecuación.*

$$P[X > x + z \mid X > x] = P[X > z] \ , \ x, z > 0 \tag{1.3}$$

o equivalentemente si se cumple la ecuación

$$1 - F_X(x + z) = (1 - F_X(x))(1 - F_X(z)), \ x, z > 0 \tag{1.4}$$

Cualquiera de estas ecuaciones es conocida como la ecuación de carencia de memoria, así se tiene la siguiente caracterización

Teorema 1.1 *Hay únicamente dos soluciones a la ecuación* (1.4) *entre las funciones de distribución con soporte en los reales no negativos $R^+ \cup \{0\}$. Esta es, $F_X(x)$ está degenerada en cero, o, para alguna constante $\sigma > 0$, $F_X(x) = 1 - e^{-\sigma x}$, $x > 0$.*

Demostración.-

Sea $G(x) := 1 - F_X(x)$. Entonces, por inducción , (1.4) implica que para cualquieras $x_j > 0$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$G(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = G(x_1)\, G(x_2) \cdots G(x_n) \tag{1.5}$$

Si $x_j = x$ para todo j, obtenemos que

$$G(nx) = (G(x))^n \tag{1.6}$$

para cualquier valor entero de n. Al tomar $x = 1/n$ y aplicar (1.6) tenemos que

$$G(1) = \left(G\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n}$$

o

$$G\left(\frac{1}{n}\right) = (G(1))^{\frac{1}{n}}$$

De esto y aplicando de nuevo (1.6) se tiene que

$$G\left(\frac{n}{s}\right) = (G(1))^{\frac{n}{s}} \tag{1.7}$$

Obviamente si $F_X(x)$ es una función de distribución degenerada en cero entonces es solución a la ecuación de carencia de memoria. Por lo tanto supondremos que $F_X(x)$ no es una función de distribución degenerada en cero. Note ahora que con esta suposición $0 < G(1) < 1$. Si $G(1) = 0$ o $G(1) = 1$, (1.7) produciría $G(y) \equiv 0$ o $G(y) \equiv 1$ que no es posible para $G(y) := 1 - F_X(y)$ con $F_X(0) = 0$ y siendo no degenerada en 0. Entonces $\sigma = -\log G(1)$ es un número finito positivo. Podemos pues reescribir (1.7) como

$$G(x) = e^{-\sigma x} \text{ para cualquier racional } x \text{ no negativo.} \tag{1.8}$$

Ahora sea x irracional no negativo. Sean $\{x_n^1\}$ y $\{x_n^2\}$ dos sucesiones de números racionales no negativos tales que

$$x_n^1 < x < x_n^2 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} x_n^1 = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = x$$

Como $G(x)$ es no creciente, (1.8) produce

$$e^{-\sigma x_n^2} \leq G(x) \leq e^{-\sigma x_n^1} \ , \ n \geq 1$$

Haciendo $n \to \infty$ resulta que $G(x) = e^{-\sigma x}$ para todo x no negativo. Lo cual prueba el teorema.

Q.E.D.

El Teorema 1.1 nos da pues la caracterización más conocida de la distribución exponencial.

1.1.2 FUNCION GENERADORA DE MOMENTOS Y CARACTERÍSTICA

La función generadora de momentos de una variable aleatoria X distribuida exponencialmente con parámetros θ y $\sigma > 0$ está dada por

$$\begin{aligned}
m_X(t) \ &: = E\left[e^{tX}\right] \\
&= \int_\theta^\infty e^{tx} f_X(x)\,dx \\
&= \int_\theta^\infty e^{tx} \sigma e^{-\sigma(x-\theta)} dx \\
&= \sigma e^{\sigma\theta} \int_\theta^\infty e^{(t-\sigma)x} dx \\
&= \frac{\sigma e^{\sigma\theta}}{(t-\sigma)} \int_\theta^\infty (t-\sigma)\, e^{(t-\sigma)x} dx \ , \ t \neq \sigma \\
&= \frac{\sigma e^{\sigma\theta}}{(t-\sigma)} \left[e^{(t-\sigma)x} \,|_\theta^\infty \ \right] \\
&= \frac{\sigma e^{\sigma\theta}}{(\sigma-t)} e^{(t-\sigma)\theta} = \left(1 - \frac{t}{\sigma}\right)^{-1} e^{t\theta} \text{ si } t \leq \sigma \\
&= \infty \text{ si } t > \sigma
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Usaremos la función generadora de acumulantes[1] y los acumulantes[2], cuya definición damos a continuación, para encontrar la esperanza y la varianza de esta variable aleatoria.

Definición 1.3 (Funcion generadora de acumulantes) *La función generadora de acumulantes para la variable aleatoria X esta definida como el logaritmo de su función generadora de momentos. Es decir, si $k_X(t)$ es la función generadora de acumulantes de X entonces*

$$k_X(t) := \log m_X(t) \tag{1.10}$$

El $r-$ésimo acumulante de X está dado por

$$k_r(X) := \frac{d^r}{dt^r} k_X(t) \mid_{t=0} \tag{1.11}$$

En este caso tenemos entonces que la función generadora de acumulantes de X es

$$\begin{aligned} k_X(t) &= \log\left(\left(1 - \frac{t}{\sigma}\right)^{-1} e^{t\theta}\right) \\ &= t\theta - \log\left(1 - \frac{t}{\sigma}\right) \text{ si } t \leq \sigma \end{aligned}$$

Es un hecho bien sabido que

$$k_1(X) = E[X] \tag{1.12}$$

[1] Cumulant generating function
[2] cumulants

y

$$k_2(X) = Var[X] \tag{1.13}$$

Entonces aplicando (1.11), (1.12) y (1.13) tenemos que

$$\begin{aligned} E[X] &= \theta + \frac{1}{(\sigma - t)} \Big|_{t=0} \\ &= \theta + \frac{1}{\sigma} \end{aligned} \tag{1.14}$$

y

$$\begin{aligned} Var[X] &= \frac{1}{(\sigma - t)^2} \Big|_{t=o} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \end{aligned} \tag{1.15}$$

La función característica de X, que es deducida de la misma manera que su función generadora de momentos es

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &: = E\left[e^{itX}\right] \\ &= \left(1 - \frac{it}{\sigma}\right)^{-1} e^{it\theta} \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.1.3 ESTADÍSTICAS DE ORDEN

Sea X_1, X_2, ..., X_n una muestra aleatoria extraída de una población exponencial y sean $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ las estadísticas de orden obtenidas al ordenar esta muestra aleatoria. Entonces si $F_i(x)$ denota la función de distribución acumulativa de la $i-$ésima de estas estadísticas de orden, sabemos que[Davis]

$$
\begin{aligned}
F_i(x) &= \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j} \\
&= \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} \left(1-e^{-\sigma(x-\theta)}\right)^j \left(e^{-\sigma(x-\theta)}\right)^{n-j} \text{ si } x > \theta
\end{aligned}
$$

En particular

$$
\begin{aligned}
F_1(x) &= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \left(1-e^{-\sigma(x-\theta)}\right)^j \left(e^{-\sigma(x-\theta)}\right)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(1-e^{-\sigma(x-\theta)}\right)^j \left(e^{-\sigma(x-\theta)}\right)^{n-j} - \left(e^{-\sigma(x-\theta)}\right)^{n} \\
&= \left(\left(1-e^{-\sigma(x-\theta)}\right)+e^{-\sigma(x-\theta)}\right)^n - e^{-n\sigma(x-\theta)} \\
&= 1-e^{-n\sigma(x-\theta)} \text{ si } x > \theta \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos que $X_{1:n}$ tiene una distribución exponencial con parámetros θ y $n\sigma$. Es decir, se tiene que el mínimo de una muestra aleatoria de una población exponencial tiene una distribución exponencial. Como mencionamos anteriormente, estamos interesados en estudiar el caso en el que $\theta = 0$. Entonces X se distribuye como una exponencial con parámetro σ y por lo tanto su función de distribución está dada por

$$F_X(x) := 1 - e^{-\sigma x} \text{ si } x > 0.$$

En este caso la función de distribución de $X_{1:n}$ es

$$F_1(x) := 1 - e^{-n\sigma x} \text{ si } x > 0$$

que podemos identificar fácilmente como la función de distribución de la variable aleatoria $Y := X/n$. Lo natural es preguntarse ahora que pasa si $X_{1:n}$ y X/n tienen la misma distribución. La respuesta a esta pregunta la obtenemos en el siguiente Teorema.

Teorema 1.2 *Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la variable aleatoria X con función de distribución acumulativa $F_X(x)$ no degenerada en 0 y sean $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ las correspondientes estadísticas de orden de esta muestra aleatoria, para n arbitraria. Una condición necesaria y suficiente para que X tenga una distribución de la forma*

$$F_X(x) := 1 - e^{-\sigma x} \text{ si } x > 0,$$

para algún $\sigma > 0$, es que $X_{1:n}$ y $Y := X/n$ tengan la misma distribución.

Demostración.-

La condición necesaria de este teorema acaba de ser probada en el párrafo anterior. Supongamos ahora que $X_{1:n}$ y $Y := X/n$ tienen la misma distribución. En primer lugar tenemos que la función de distribución de $X_{1:n}$ está dada por

$$\begin{aligned} F_1(x) \quad : \quad &= P[X_{1:n} \leq x] \\ &= 1 - (1 - F_X(x))^n \end{aligned}$$

y la función de distribución de $Y := X/n$ está dada por

$$F_Y(x) \quad : \quad = P[Y \leq x]$$

$$
\begin{aligned}
&= P[X/n \le x] \\
&= P[X \le nx] \\
&= F_X(nx).
\end{aligned}
$$

Ahora , como $X_{1:n}$ y $Y := X/n$ tienen la misma distribución, la siguiente ecuación se cumple

$$1 - F_X(nz) = (1 - F_X(z))^n \tag{1.18}$$

o, para toda $n \ge 1$ y $z > 0$

$$1 - F_X(z) = \left(1 - F_X\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n \tag{1.19}$$

Basta mostrar ahora que cualquiera de las ecuaciones (1.18) o (1.19) es equivalente a la ecuación de carencia de memoria (1.4). Para lograr este objetivo, mostramos primero que una función que satisface (1.18) o (1.19) es continua para todo $x \ge 0$ y satisface la ecuación de carencia de memoria para todos x, $z > 0$ racionales. Estos dos hechos evidentemente implican la validez de la ecuación de carencia de memoria para todo x, $z > 0$. Primero probaremos que $F_X(x)$ es continua en $x = 0$. En efecto, como $F_X(x)$ es no decreciente, (1.18) implica que $F_X(0) = 0$. Como $F_X(x)$ no es degenerada en cero por hipótesis tenemos que también se cumple que $F_X(0+) = 0$, que prueba que $F_X(x)$ es continua en $x = 0$. Ahora, deducimos de (1.18) y (1.19)que la ecuación de carencia de memoria se cumple para valores racionales x, $z > 0$. Sea $G(x) := 1 - F_X(x)$, tenemos de (1.18) y (1.19) que para m y n enteros positivos,

$$G(m+n) = G(1)^{m+n} = G(1)^m G(1)^n = G(m) G(n)$$

y, para los números racionales positivos $x = u/v$ y $z = p/q$

$$\begin{aligned} G(x+z) &= G\left(\frac{uq+vp}{qv}\right) \\ &= G\left(\frac{1}{qv}\right)^{uq+vp} \\ &= G\left(\frac{1}{qv}\right)^{uq} G\left(\frac{1}{qv}\right)^{vp} \\ &= G\left(\frac{uq}{qv}\right) G\left(\frac{vp}{qv}\right) \\ &= G(x)\,G(z) \end{aligned}$$

Ahora falta mostrar que $G(x)$ es continua en $x = x_0$ arbitrario. En la ecuación anterior sean x y z tales que $x < x_0 < x + z$. Entonces como $G(x)$ es no creciente $G(x+z) \leq G(x_0) \leq G(x)$. Haga $x \to x_0$ y $z \to 0$. Como hemos establecido que $G(x)$ es continua en cero y $G(0) = 1$, obtenemos que $\lim_{x \to x_0} G(x) = G(x_0)$, lo que prueba la continuidad de $G(x)$ en $x = x_0$.

Q.E.D.

1.1.4 TRANSFORMACIONES MONÓTONAS DE LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

En esta sección señalamos que todas las propiedades de la distribución exponencial pueden ser traducidas en una propiedad de una distribución arbitraria continua. Si X es una variable aleatoria con función de distribución continua $F_X(x)$ entonces

$$Y := -\log F_X(x) \tag{1.20}$$

y

$$Z := -\log\left(1 - F_X(x)\right) \tag{1.21}$$

son variables aleatorias con distribución exponencial estándar. Por lo tanto una discusión de las caracterizaciones de la distribución exponencial en verdad produce una familia de resultados de caracterización para otro tipo de distribuciones. En seguida se ilustra el uso de (1.20) y (1.21) para algunas distribuciones especificas que son ampliamente usadas en aplicaciones. Utilizaremos alguna propiedad que caracteriza a la distribución exponencial para caracterizar a estas distribuciones

1. *La distribución uniforme.* Si X es una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x) = xI_{[0,1]}(x)$ entonces (1.20) implica que $Y := -\log X$ es una variable aleatoria con distribución exponencial estándar.. La ecuación de carencia de memoria es en este caso

$$P\left[-\log X \geq x + z \mid -\log X \geq x\right] = P\left[-\log X \geq z\right] \ , x, \ z > 0$$

Si $u := e^{-x}$ y $v = e^{-z}$, entonces esta ecuación se transforma en la propiedad en la ecuación de carencia de memoria para la distribución uniforme

$$P\left[X \leq uv \mid X \leq u\right] = P\left[X \leq v\right], 0 \leq u, v \leq 1$$

que caracteriza a la distribución uniforme. En este caso uno podría llamarla la propiedad de carencia de memoria multiplicativa.

1.2 DISTRIBUCIÓN GUMBEL

1.2.1 DEFINICIÓN Y GÉNESIS.

La distribución Gumbel pertenece a una familia especial de distribuciones conocidas como distribuciones de valores extremos. En esta tesis no estamos interesados en estudiar completamente esta familia de distribuciones pero el lector interesado se puede referir al libro de Johnson-Kotz-Balakrishnan.[Balakrishnan]

La primera familia en que se clasifican las distribuciones de valores extremos tiene la siguiente forma

$$P[X \leq x] = \exp\left\{-e^{-(x-\xi)/\theta}\right\} \qquad ; x \in R \tag{1.22}$$

donde ξ y $\theta\,(> 0)$ son parámetros de localidad y escala, respectivamente. También la distribución de $-X$ pertenece a esta familia. Este tipo de distribuciones son también llamadas distribuciones doblemente exponenciales pero en general no se usa este término para no confundir con las distribuciones de Laplace [3], que también son llamadas doblemente exponenciales. Este tipo de distribuciones pueden ser obtenidas como las distribuciones límites del valor máximo entre n variables aleatorias independientes donde cada una tiene la misma distribución continua. Reemplazando X por $-X$, se obtienen las distribuciones límites de los valores mínimos.

Una observación importante es la siguiente: Si X tiene una distribución del tipo (1.22), entonces $Z := \exp[-(X-\xi)/\theta]$ tiene una distribución exponencial con función de densidad de probabilidad

$$f_Z(z) \quad = \quad \frac{d}{dz}F_Z(z)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dz} P[Z \leq z] \\
&= \frac{d}{dz} P[X \geq \xi - \theta \log z] \\
&= \frac{d}{dz}\left(1 - F_X(\xi - \theta \log z)\right) \\
&= \frac{d}{dz}\left(1 - \exp\left\{-e^{-(\xi - \theta \log z - \xi)/\theta}\right\}\right) \\
&= \frac{d}{dz}\left(1 - \exp\left\{-e^{\log z}\right\}\right) \\
&= \frac{d}{dz}\left(1 - e^{-z}\right) \\
&= e^{-z} \text{ para } z \geq 0,
\end{aligned}
$$

es decir, $Z := \exp[-(X - \xi)/\theta]$ tiene una distribución exponencial estándar.

Comúnmente las distribuciones del tipo (1.22) son conocidas como distribuciones del tipo Gumbel. En esta tesis definiremos la distribución Gumbel estándar de la siguiente manera. Supongamos que X tiene una distribución del tipo (1.22) con parámetros $\xi = 0$, $\theta = 1$. Es decir

$$
P[X \leq x] = \exp\left\{-e^{-x}\right\}
$$

Ahora, definamos $Z := -X$, entonces decimos que Z tiene una distribución Gumbel estándar dada por

$$
\begin{aligned}
P[Z \leq z] &= P[-X \leq z] \\
&= P[X \geq -z] \\
&= 1 - P[X < -z] \\
&= 1 - \exp\left\{-e^{z}\right\} \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

Al derivar (1.22) y (1.23) podemos dar la siguiente definición

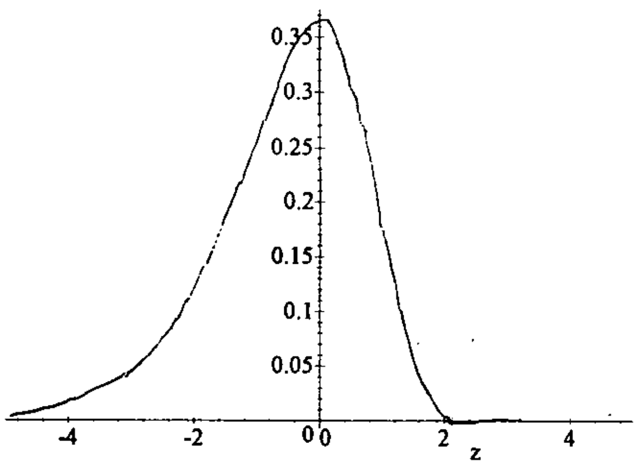
Definición 1.4 (Distribucion Gumbel) *La función de densidad correspondiente a una distribución del tipo Gumbel está dada por*

$$f(x) = \theta^{-1} e^{-(x-\xi)/\theta} \exp\left[-e^{-(x-\xi)/\theta}\right] \ , \ x \in R; \ \theta > 0. \qquad (1.24)$$

Diremos que Z tiene una distribución Gumbel estándar si su función de densidad de probabilidad es

$$f_Z(z) = \exp\{z - e^z\} \ , \ z \in R. \qquad (1.25)$$

La siguiente gráfica corresponde a la densidad Gumbel estándar.



Función de densidad Gumbel estandar

Nuestro siguiente paso es explicar la génesis de esta distribución. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y función de distribución acumulativa $F(x)$, entonces la función de distribución de la n-ésima estadística de orden $X_{n:n} := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ es

$$F_{X_{n:n}}(x) = [F(x)]^n \tag{1.26}$$

Cuando n tiende a ∞ es claro que para cualquier valor fijo de x

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_{n:n}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } F(x) = 1 \\ 0 \text{ si } F(x) < 1 \end{cases}$$

Aún si es propia, la distribución límite sería degenerada y de ningún interés especial. Si hay una distribución límite de interés, debe ser obtenida como la distribución límite de alguna sucesión de transformaciones lineales de $X_{n:n}$, tales como $(a_n X_{n:n} + b_n)$ donde a_n y b_n pueden depender de n pero no de x. Este proceso es análogo a la estandarización que se realiza en los Teoremas de límite central.

Para distinguir, denotaremos por $G(x)$ a la función de distribución acumulativa del valor máximo estandarizado $a_n X_{n:n} + b_n$. Como tenemos que

$$\begin{aligned} & \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{Nn}\} \\ = \; & \max\left\{\max\{X_1, \ldots, X_n\}, \max\{X_{n+1}, \ldots, X_{2n}\}, \ldots, \max\left\{X_{(N-1)n+1}, \ldots, X_{Nn}\right\}\right\} \end{aligned}$$

se sigue que $G(x)$ debe satisfacer la ecuación

$$[G(x)]^N = G(a_N x + b_N) \tag{1.27}$$

Esta ecuación es algunas veces llamada el postulado de estabilidad y fue obtenido por Fréchet (1927) y también por Fisher y Tippet (1928).

Consideremos el caso $a_N = 1$. La ecuación (1.27)es ahora

$$[G(x)]^N = G(x + b_N). \tag{1.28}$$

Como $G(x + b_N)$ también debe satisfacer (1.28) tenemos que

$$\begin{aligned} [G(x)]^{NM} &= [G(x + b_N)]^M \\ &= G(x + b_N + b_M). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Pero también de (1.27)

$$[G(x)]^{NM} = G(x + b_{NM}). \tag{1.30}$$

Igualando (1.29) y (1.30)se obtiene que

$$b_{NM} = b_N + b_M \tag{1.31}$$

cuya solución es

$$b_N = \theta \log N$$

donde θ es una constante. Tomando logaritmos en (1.28) dos veces e insertando el valor de b_N se tiene que

$$\log N + \log\{-\log G(x)\} = \log\{-\log G(x + \theta \log N)\}. \tag{1.32}$$

Entonces si

$$h(x) = \log\{-\log G(x)\},$$

se tiene que

$$h(x + \theta \log N) = h(x) + \log N$$

y por lo tanto

$$h(\theta \log N) = h(0) + \log N.$$

Así que si $x = \theta \log N$, entonces

$$h(x) = h(0) + \frac{x}{\theta} \tag{1.33}$$

Como $h(x)$ se decrementa cuando x crece se debe tener entonces que $\theta < 0$. De (1.33) se tiene que si hacemos $\theta' = -\theta$, entonces

$$\begin{aligned} -\log G(x) &= \exp\left[-\frac{x - \theta' h(0)}{\theta'}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{(x-\xi)}{\theta'}\right] \end{aligned}$$

donde $\xi = \theta' \log\{-\log G(0)\}$. De aquí

$$G(x) = \exp\left[-e^{-(x-\xi)/\theta'}\right]$$

que es una distribución del tipo Gumbel.

1.2.2 FUNCION GENERADORA DE MOMENTOS Y CARACTERÍSTICA

Sea X una variable aleatoria Gumbel con parámetros ξ y $\theta > 0$. Como mencionamos, la variable aleatoria $Z = \exp\left[-\left(X-\xi\right)/\theta\right]$ tiene distribución exponencial estándar. Se sigue que

$$E\left[e^{t(X-\xi)/\theta}\right] = E\left[Z^{-t}\right] = \Gamma\left(1-t\right)$$

para $t < 1$. Reemplazando t por θt vemos que la función generadora de momentos de X es

$$\begin{aligned} m_X(t) \; &: = E\left[e^{tX}\right] \\ &= e^{t\xi} E\left[e^{\theta t(X-\xi)/\theta}\right] \\ &= e^{t\xi}\Gamma\left(1-\theta t\right) \qquad\qquad \theta\left|t\right| < 1. \end{aligned} \tag{1.34}$$

La función generadora acumulante es

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \log E\left[e^{tX}\right] \\ &= \xi t + \log\Gamma\left(1-\theta t\right) \end{aligned} \tag{1.35}$$

Los acumulantes de X son

$$k_1(X) = \Psi'(0) = E\left[X\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \xi - \frac{\theta\Gamma'(1-\theta t)}{\Gamma(1-\theta t)}\Big|_{t=0} \\
&= \xi - \frac{\theta\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} \\
&= \xi - \theta\Gamma'(1) \\
&= \xi - \gamma\theta = \xi + 0.577722\theta \qquad (1.36)
\end{aligned}
$$

donde $\gamma = \Gamma'(1)$ es la constante de Euler[Ahlfors] y

$$
\begin{aligned}
k_r(X) \quad :&= \Psi^{(r)}(0) \\
&= (-\theta)^r \Psi^{(r-1)}(1), \quad r \geq 2. \qquad (1.37)
\end{aligned}
$$

Esto implica, como lo mencionamos antes, que

$$
\begin{aligned}
E[X] &= k_1(X) \\
&= \xi + 0.577722\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= k_2(X) \\
&= \frac{1}{6}\pi^2\theta^2 = 1.644934\theta^2
\end{aligned}
$$

y

$$
desv.est[X] = 1.282555\theta.
$$

La función característica de X, que es deducida de la misma manera que su función generadora de momentos es

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &:= E\left[e^{itX}\right] \\ &= e^{it\xi}\Gamma(1-\theta it). \end{aligned} \tag{1.38}$$

1.2.3 ESTADÍSTICAS DE ORDEN

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Gumbel (1.22) con parámetros ξ y $\theta > 0$ y sean $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ las correspondientes estadísticas de orden. Entonces la función de densidad de $X_{i:n}$ es[Davis]

$$\begin{aligned} f_{X_{i:n}}(x) &= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}F(x)^{i-1}(1-F(x))^{n-i}f(x) \\ &= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\left(\exp\left\{-e^{-(x-\xi)/\theta}\right\}\right)^{i-1}\left(1-\exp\left\{-e^{-(x-\xi)/\theta}\right\}\right)^{n-i} \\ &\quad \theta^{-1}e^{-(x-\xi)/\theta}\exp\left[-e^{-(x-\xi)/\theta}\right] \\ &= \frac{n!\theta^{-1}}{(i-1)!\,(n-i)!}\left(\exp\left\{-e^{-(x-\xi)/\theta}\right\}\right)^{i}\left(1-\exp\left\{-e^{-(x-\xi)/\theta}\right\}\right)^{n-i}e^{-(x-\xi)/\theta}. \end{aligned}$$

En particular para $i = n$ tenemos que

$$\begin{aligned} f_{X_{n:n}}(x) &= \frac{n!\theta^{-1}}{(n-1)!\,(n-n)!}\left(\exp\left\{-e^{-(x-\xi)/\theta}\right\}\right)^{n}\left(1-\exp\left\{-e^{-(x-\xi)/\theta}\right\}\right)^{n-n}e^{-(x-\xi)/\theta} \\ &= n\theta^{-1}e^{-(x-\xi)/\theta}\left(\exp\left\{-e^{-(x-\xi)/\theta}\right\}\right)^{n} \\ &= n\theta^{-1}e^{-(x-\xi)/\theta}\exp\left\{-ne^{-(x-\xi)/\theta}\right\} \\ &= \theta^{-1}e^{-(x-(\xi+\theta\log n))/\theta}\exp\left\{-e^{-(x-(\xi+\theta\log n))/\theta}\right\}. \end{aligned}$$

Entonces vemos que $X_{n:n}$ tiene una distribución Gumbel con parámetros $\xi + \theta \log n$ y $\theta > 0$.

En el caso de que la muestra aleatoria provenga de una distribución Gumbel estándar (1.23) tenemos que

$$\begin{aligned} f_{X_{i:n}}(x) &= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \left(\exp\left\{-e^{x}\right\}\right)^{i-1} \left(1-\exp\left\{-e^{x}\right\}\right)^{n-i} \\ &\quad \exp\left[x-e^{x}\right] \\ &= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \left(\exp\left\{-e^{x}\right\}\right)^{i} \left(1-\exp\left\{-e^{x}\right\}\right)^{n-i} e^{x} \end{aligned}$$

En particular para $i = n$ tenemos que

$$\begin{aligned} f_{X_{i:n}}(x) &= \frac{n!}{(n-1)!\,(n-n)!} \left(\exp\left\{-e^{x}\right\}\right)^{n} \left(1-\exp\left\{-e^{x}\right\}\right)^{n-n} e^{x} \\ &= ne^{x} \left(\exp\left\{-e^{x}\right\}\right)^{n} \\ &= ne^{x} \exp\left\{-ne^{x}\right\} \\ &= \exp\left\{x + \log n - e^{x+\log n}\right\} \end{aligned}$$

que es la densidad de una variable aleatoria Gumbel estándar trasladada por $\log n$. Por lo tanto en este caso tenemos que también $X_{n:n}$ tiene una distribución Gumbel.

1.2.4 TRANSFORMACIÓN A LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Como mencionamos en la sección 1.1.4 cualquier variable aleatoria puede ser transformada a una variable aleatoria con distribución exponencial estándar mediante una transformación monótona.

Si X tiene una distribución Gumbel con parámetros ξ y $\theta > 0$ entonces la variable aleatoria

$$\begin{aligned} Y &:= -\log F_X(X) \\ &= -\log \exp\left\{-e^{-(X-\xi)/\theta}\right\} \\ &= e^{-(X-\xi)/\theta} \end{aligned}$$

tiene una distribución exponencial estándar. Ahora, si X es una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x) = \exp\{-e^{-x}\}$, entonces (1.20) implica que $Y := \exp(-X)$ es una variable aleatoria con distribución exponencial estándar. Utilizaremos el teorema 1.2 para obtener una caracterización de la distribución de X. Sea X_1, $X_2, \ldots$, X_n una muestra aleatoria de X y sea Y_1, $Y_2, \ldots$, Y_n la correspondiente muestra aleatoria de Y, donde

$$Y_i = \exp\{-X_i\}$$

Como e^{-x} es una función decreciente, entonces

$$Y_{1:n} = \exp\{-X_{n:n}\}$$

donde $Y_{1:n} = \min\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ y $X_{n:n} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Sabemos que si $Y_{1:n}$ y Y/n tienen la misma distribución, para n arbitraria, entonces Y tiene una distribución exponencial no centrada y por lo tanto X tiene una distribución Gumbel. Como $Y := \exp(-X)$ y $Y_{1:n} = \exp\{-X_{n:n}\}$, el hecho de que $Y_{1:n}$ y Y/n tengan la misma distribución para toda n es equivalente al hecho de que X y $X_{n:n} - \log n$ tengan la misma distribución. Por lo tanto podemos dar la siguiente caracterización para la distribución Gumbel.

Teorema 1.3 *Sea X_1, $X_2, \ldots,$ X_n una muestra aleatoria de la variable aleatoria X con función de distribución acumulativa $F_X(x)$ no degenerada en 0 y sean $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ las correspondientes estadísticas de orden de esta muestra aleatoria, para n arbitraria. Una condición necesaria y suficiente para que X tenga una distribución de la forma*

$$F_X(x) := \exp\{-\sigma e^{-x}\};\ x \in R\ ,$$

para algún $\sigma > 0$, es que $X_{n:n} - \log n$ y X tengan la misma distribución.

Ahora, si X tiene una distribución Gumbel estándar entonces la variable aleatoria

$$\begin{aligned} Y \ &:= -\log F_X(X) \\ &= -\log\exp\left\{-e^X\right\} \\ &= e^X \end{aligned}$$

tiene una distribución exponencial estándar. La caracterización apropiada en este caso es la siguiente.

Teorema 1.4 *Sea X_1, $X_2, \ldots, X_n$ cualquier muestra aleatoria de X. Si $X_{1:n} + \log n$ tiene la misma distribución que X, para cualquier n, entonces X tiene una distribución gumbel estándar (posiblemente trasladada).*

Capítulo 2

VALORES RECORD

En este capítulo se presentan los conceptos básicos para el estudio de la teoría de los valores Record. En la vida diaria se oye bastante a menudo de los Records o registros; están presentes en los deportes, en la ciencia, la economía, el ambiente, etc. A menudo oímos acerca de los records de la contaminación, los records en eventos deportivos o los records de ganancias o perdidas en finanzas. Existen gentes cuya especialidad es recolectar información acerca de todos los tipos de Records y escribir libros acerca de ellos. Pero, ¿Que es un valor Record en el contexto que estamos tratando en esta tesis?. Si consideramos una sucesión de observaciones con tiempo discreto $\{X_n\}_{n\geq 1}$ un valor Record sería un máximo temporal (o mínimo) en esta sucesión que seguramente cambiará cuando el tiempo pase. Claramente, el nuevo máximo coincidirá con la nueva X_n cuyo valor sea mayor que el último valor máximo elegido. Note que un valor Record ocurre cuando hay un salto en la sucesión de máximos. Los intentos en los que los saltos ocurren son aleatorios y serán llamados tiempos Record. En casi cualquier contexto es un asunto definitivamente importante estudiar el comportamiento de los tiempos y los valores Records para sucesiones de variables aleatorias ya sean dependientes o independientes. Estos nos dan una buena predicción de lo bueno o malo que puede suceder en el futuro, en frecuencia y en magnitud: por ejemplo los grandes saltos en los precios pueden conducir a catástrofes financieras. En este capítulo se presenta la definición formal de tiempo Record y valor Record. Se presentan también las propiedades más importantes de la sucesión de tiempos Record en el caso de que estos se originen de una sucesión de variables aleatorias independientes. De manera para poder presentar los resultados del tercer Capítulo se presentan las propiedades distribucionales de la sucesión de valores Record asociada a una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. También en este capítulo se definirá y estudiará la sucesión de rangos sucesivos asociados a una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. La principal razón para estudiar la sucesión de rangos es que, como se verá en el siguiente capítulo, existen resultados de caracterización distribucional para sucesiones de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas que se basan en éstos. Como hemos visto que cualquier variable aleatoria continua puede ser transformada a una variable aleatoria con distribución exponencial, es natural suponer que también los valores Record de una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común continua puedan transformarse a los valores Record de una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común exponencial. Este último hecho nos lleva a explorar las propiedades distribucionales de la sucesión de valores Record de una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común exponencial. Por último, como el objetivo principal de esta tesis es investigar las propiedades de las distribuciones de valores extremos, es necesario presentar los resultados más importantes de estas distribuciones en términos de valores Records.

2.1 TIEMPOS RECORD

Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con función de distribución acumulativa $F(x)$. Sea $N(1) = 1$ y para $n \geq 2$, sea

$$N(n) = \min\left\{j \in N : j > N(n-1),\, X_j > X_{N(n-1)}\right\}. \tag{2.1}$$

Las sucesiones $\{N(n)\}_{n\geq 1}$ y $\left\{X_{N(n)}\right\}_{n\geq 1}$ se pueden interpretar como sigue. Considere una sucesión infinita de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ independientes e identicamente distribuidas cuya función de distribución es $F(x)$. Entonces vamos a través de la sucesión $X_1, X_2, \ldots$ con el objetivo de elegir términos más y más grandes. Obviamente el primero más grande que tomamos es X_1. Luego tomamos el siguiente, i.e. $X_{N(2)}$, a ser la primera X_i tal que es mayor que X_1. Así continuamos el proceso para poder obtener los correspondientes valores $N(n)$. Los valores correspondientes $X_{N(n)}$ son entonces los valores crecientes $X_1 < X_{N(2)} < \cdots$, llamados valores Record.

Definición 2.1 *La sucesión $\{N(n)\}_{n\geq 1}$ definida en (2.1) es llamada la sucesión de tiempos Record.*

El siguiente lema demuestra un resultado que es realmente impresionante ya que aunque uno pudiera creer que la manera en que se obtiene la sucesión $\{N(n)\}_{n\geq 1}$ depende de la distribución común de la sucesión de variables aleatorias original, esto resulta ser falso.

Lemma 1 *El valor de $N(n)$ no depende de $F(x)$.*

Prueba.-

Tenemos que $X_j \geq X_i$ si y sólo si $F(X_j) \geq F(X_i)$. Pero sabemos que $\{F(X_i)\}_{i\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias uniformes estándar. De aquí la sucesión $\{N(n)\}_{n\geq 1}$ de (2.1) puede ser definida con la suposición adicional de que las X_i's son variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas sobre el intervalo $(0,1)$.

Q.E.D.

Una consecuencia importante del Lema (1) es el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *La distribución de $N(2)$ está dada por*

$$P[N(2)=j] = \frac{1}{j(j-1)} \ ; j \geq 2$$

Consecuentemente $E[N(n)] = \infty$ para $n \geq 2$.

Prueba.-

Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente sobre el intervalo $(0,1)$. Entonces por la ley de probabilidad total

$$\begin{aligned} P[N(2)=j] &= \int_0^1 P[N(2)=j \mid X_1 = x]\, dx \\ &= \int_0^1 P[X_2 \leq x] P[X_3 \leq x] \cdots P[X_{j-1} \leq x] P[X_j > x]\, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 x^{j-2}(1-x)\,dx \\
&= \left(\frac{x^{j-1}}{j-1} - \frac{x^j}{j}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \\
&= \frac{j-(j-1)}{j(j-1)} \\
&= \frac{1}{j(j-1)}
\end{aligned}$$

De aquí, $E[N(2)] = \sum_{j=2}^{\infty} jP[N(2)=j] = \infty$ y como $N(n) \geq N(2)$, $n \geq 2$ se tiene por lo tanto que $E[N(n)] = \infty$ para $n \geq 2$. Lo que concluye la prueba.

Q.E.D.

Por último enunciaremos y probaremos el teorema más importante de esta sección que nos permitirá conocer completamente el comportamiento de los tiempos Record que por su origen darán pie a un estudio más sencillo de los valores Record.

Teorema 2.2 *La sucesión* $\{N(n)\}_{n\geq 2}$ *forma una cadena de Markov. Es decir,*

$$\begin{aligned}
& P[N(n)=k \mid N(2)=j_2,\ldots,N(n-1)=j_{n-1}] \\
= \; & P[N(n)=k \mid N(n-1)=j_{n-1}]
\end{aligned}$$

para todo vector $(j_2, \ldots j_{n-1})$ *para los que la condición sobre la izquierda tiene probabilidad positiva. Las probabilidades de transición están dadas por:*

$$P\left[N(n) = k \mid N(n-1) = j\right] = \begin{cases} \frac{j}{k(k-1)} & k > j \geq n-1 \geq 2 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Demostración.-

De nuevo recurrimos al lema (1) y consideramos la sucesión $X_1, X_2, \ldots$ de variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente sobre el intervalo $(0,1)$. La función de distribución común de estas variables aleatorias está dada por

$$F(x) = xI_{(0,1)}(x) + I_{[1,\infty]}(x)$$

Por uniformidad de notación, hagamos $j_1 = 1$. Así que por la regla de probabilidad total, para $j_t > j_{t-1}$, $t \geq 2$,

$$\begin{aligned}
& P\left[N(t) = j_t,\, 2 \leq t \leq n\right] \\
= \; & P\left[N(2) = j_2, \ldots, N(n) = j_n\right] \\
= \; & \int_0^1 \cdots \int_0^1 P\left[N(2) = j_2, \ldots, N(n) = j_n \mid X_{j_1} = x_1, \ldots, X_{j_{n-1}} = x_{n-1}\right] dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
= \; & \underset{0<x_1<\cdots<x_{n-1}<1}{\int \cdots \int} x_1^{j_2-2} x_2^{j_3-j_2-1} x_3^{j_4-j_3-1} \cdots x_{n-1}^{j_n-j_{n-1}-1} (1-x_{n-1})\, dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
= \; & \left[(j_2-1)(j_3-1)\cdots(j_{n-1}-1)(j_n-1)\, j_n\right]^{-1}
\end{aligned}$$

De aquí que

$$
\begin{aligned}
& P\left[N(n)=k \mid N(2)=j_2, \ldots, N(n-1)=j_{n-1}\right] \\
= & \frac{P\left[N(2)=j_2, \ldots, N(n-1)=j_{n-1}, N(n)=k\right]}{P\left[N(2)=j_2, \ldots, N(n-1)=j_{n-1}\right]} \\
= & \frac{\left[\left(j_2-1\right)\left(j_3-1\right) \cdots\left(j_{n-1}-1\right)(k-1) k\right]^{-1}}{\left[\left(j_2-1\right)\left(j_3-1\right) \cdots\left(j_{n-1}-1\right) j_{n-1}\right]^{-1}} \\
= & \frac{j_{n-1}}{k(k-1)}
\end{aligned}
$$

que no depende de ninguno de los valores $j_2, \ldots, j_{n-2}$. Por lo tanto la sucesión de tiempos Record $\{N(n)\}_{n \geq 2}$ es una cadena de Markov con probabilidades dadas por

$$
P[N(n)=k \mid N(n-1)=j]=\begin{cases} \frac{j}{k(k-1)} & k>j \geq n-1 \geq 2 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}
$$

Q.E.D.

2.2 VALORES RECORD

En esta sección definimos lo que es la sucesión de valores Record asociada a una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas y presentamos con demostración las propiedades más importantes de esta nueva sucesión.

2.2.1 DEFINICIÓN

Definición 2.2 *Sea* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas. Consideremos la sucesión de tiempos Record* $\{N(n)\}_{n\geq 1}$ *presentada en la sección anterior (que no depende de la distribución común de las* X_i*'s por el Lema* (1)*). Si definimos* $X^{(n)} := X_{N(n+1)}$ *para* $n \geq 0$*, entonces* $X^{(n)}$ *se denomina el* $n-$*ésimo valor Record asociado a la sucesión y* $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$ *la correspondiente sucesión de valores Record.*

Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con función de distribución acumulativa $F(x)$ y función de densidad de probabilidad $f(x)$. Nuestra primera tarea en investigar las propiedades distribucionales de la sucesión de valores Record $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$ asociada a la sucesión de variables aleatorias original $\{X_n\}_{n\geq 1}$ será encontrar la función de densidad conjunta de las primeras $n+1$ variables $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ de la nueva sucesión. Esto lo hacemos en el siguiente teorema.

Teorema 2.3 *Sea* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con función de distribución acumulativa* $F(x)$ *y función de densidad de probabilidad* $f(x)$*. La función de densidad conjunta de los primeros* $n+1$ *valores Record* $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ *es, para* $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$*,*

$$f_{X^{(0)},X^{(1)},\ldots,X^{(n)}}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{n-1} r(x_i)\, f(x_n) \tag{2.2}$$

donde

$$r(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

Demostración.-

Sean $y_0 < y_1 < \cdots < y_n$ y consideremos la función de distribución acumulativa de los primeros $n+1$ valores Record $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$

$$\begin{aligned}
F_{X^{(0)},X^{(1)},\ldots,X^{(n)}}(y_0, y_1, \ldots, y_n) &:= P\left[X^{(0)} \le y_0, X^{(1)} \le y_1, \ldots, X^{(n)} \le y_n\right] \\
&= P\left[X_1 \le y_0, X_{N(2)} \le y_1, \ldots, X_{N(n+1)} \le y_n\right] \\
&= \sum_{j_2=2}^{\infty} \sum_{j_3=j_2+1}^{\infty} \cdots \sum_{j_{n+1}=j_n+1}^{\infty} \\
&\quad P\begin{bmatrix} X_1 \le y_0, X_{N(2)} \le y_1, \ldots, X_{N(n+1)} \le y_n, \\ N(2) = j_2, \ldots, N(n+1) = j_{n+1} \end{bmatrix} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Ahora, para $2 \le j_2 < j_3 < \cdots < j_n < j_{n+1}$, analicemos un evento de la forma

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 \le y_0, X_{N(2)} \le y_1, \ldots, X_{N(n+1)} \le y_n, \\ N(2) = j_2, \ldots, N(n+1) = j_{n+1} \end{array} \right\} \qquad (2.4)$$

Tendremos que el evento (2.4) ocurrirá si y sólo si ocurre lo siguiente

$$\begin{aligned}
X_1 &\le y_0,\ X_2 < X_1, \ldots,\ X_{j_2-1} < X_1,\ X_1 < X_{j_2} \le y_1, \\
X_{j_2+1} &< X_{j_2}, \ldots,\ X_{j_3-1} < X_{j_2},\ X_{j_2} < X_{j_3} \le y_2 \\
&\vdots \\
X_{j_n+1} &< X_{j_n}, \ldots,\ X_{j_{n+1}-1} < X_{j_n},\ X_{j_n} < X_{j_{n+1}} \le y_n \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene por (2.5) que

$$
\begin{aligned}
& P\left[\begin{array}{c} X_1 \leq y_0, X_{N(2)} \leq y_1, \ldots, X_{N(n+1)} \leq y_n, \\ N(2)=j_2, \ldots, N(n+1)=j_{n+1} \end{array}\right] \\
= & \underbrace{\int_{-\infty}^{y_0} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_1}}_{j_2-2 \text{ veces}} \int_{x_1}^{y_1} \underbrace{\int_{-\infty}^{x_{j_2}} \cdots \int_{-\infty}^{x_{j_2}}}_{j_3-j_2-1 \text{ veces}} \int_{x_{j_2}}^{y_2} \cdots \underbrace{\int_{-\infty}^{x_{j_n}} \cdots \int_{-\infty}^{x_{j_n}}}_{j_{n+1}-j_n-1 \text{ veces}} \int_{x_{j_n}}^{y_n} \prod_{i=1}^{j_{n+1}} f(x_i)\, dx_{j_{n+1}} \ldots dx_1 \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Entonces (2.3) se transforma en:

$$
\begin{aligned}
& F_{X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}}(y_0, y_1, \ldots, y_n) \\
= & \sum_{j_2=2}^{\infty} \sum_{j_3=j_2+1}^{\infty} \cdots \sum_{j_{n+1}=j_n+1}^{\infty} \\
& \underbrace{\int_{-\infty}^{y_0} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_1}}_{j_2-2 \text{ veces}} \int_{x_1}^{y_1} \underbrace{\int_{-\infty}^{x_{j_2}} \cdots \int_{-\infty}^{x_{j_2}}}_{j_3-j_2-1 \text{ veces}} \int_{x_{j_2}}^{y_2} \cdots \underbrace{\int_{-\infty}^{x_{j_n}} \cdots \int_{-\infty}^{x_{j_n}}}_{j_{n+1}-j_n-1 \text{ veces}} \int_{x_{j_n}}^{y_n} \prod_{i=1}^{j_{n+1}} f(x_i)\, dx_{j_{n+1}} \ldots dx_1 \\
= & \sum_{j_2=2}^{\infty} \sum_{j_3=j_2+1}^{\infty} \cdots \sum_{j_{n+1}=j_n+1}^{\infty} \int_{-\infty}^{y_0} \int_{x_1}^{y_1} \int_{x_{j_2}}^{y_2} \cdots \int_{x_{j_n}}^{y_n} F(x_1)^{j_2-2} F(x_{j_2})^{j_3-j_2-1} \ldots F(x_{j_n})^{j_{n+1}-j_n-1} \\
& f(x_1) f(x_{j_2}) \cdots f(x_{j_{n+1}})\, dx_{j_{n+1}} \cdots dx_{j_2} dx_1 \\
= & \sum_{j_2=2}^{\infty} \sum_{j_3=j_2+1}^{\infty} \cdots \sum_{j_{n+1}=j_n+1}^{\infty} \int_{-\infty}^{y_0} \int_{x_1}^{y_1} \int_{x_2}^{y_2} \cdots \int_{x_n}^{y_n} F(x_1)^{j_2-2} F(x_2)^{j_3-j_2-1} \ldots F(x_n)^{j_{n+1}-j_n-1} \\
& f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_{n+1})\, dx_{n+1} \cdots dx_2 dx_1 \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Intercambiando integrales por sumas (lo cuál puede ser hecho debido al teorema de convergencia dominada) tenemos que

$$
\begin{aligned}
& F_{X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}}(y_0, y_1, \ldots, y_n) \\
= & \int_{-\infty}^{y_0} \int_{x_1}^{y_1} \int_{x_2}^{y_2} \cdots \int_{x_n}^{y_n} \\
& f(x_1) \sum_{j_2=2}^{\infty} F(x_1)^{j_2-2} f(x_2) \sum_{j_3=j_2+1}^{\infty} F(x_2)^{j_3-j_2-1} \ldots
\end{aligned}
$$

$$f(x_n)\sum_{j_{n+1}=j_n+1}^{\infty} F(x_n)^{j_{n+1}-j_n-1} f(x_{n+1})\,dx_{n+1}\cdots dx_1 \tag{2.8}$$

Si hacemos $j_1 = 1$ entonces para $1 \leq k \leq n+1$

$$\begin{aligned} & \sum_{j_{k+1}=j_k+1}^{\infty} F(x_k)^{j_{k+1}-j_k-1} \\ = & \sum_{j=0}^{\infty} F(x_k)^j \\ = & \frac{1}{1-F(x_k)} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Entonces aplicando (2.9) en (2.8) tenemos por lo tanto que:

$$\begin{aligned} & F_{X^{(0)},X^{(1)},\ldots,X^{(n)}}(y_0,y_1,\ldots,y_n) \\ = & \int_{-\infty}^{y_0}\int_{x_1}^{y_1}\int_{x_2}^{y_2}\cdots\int_{x_n}^{y_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{1-F(x_i)}f(x_{n+1})\,dx_{n+1}\cdots dx_1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

lo que implica que la densidad es dada por (2.2).

Q.E.D.

2.2.2 SUCESIÓN DE VALORES RECORD COMO UNA CADENA DE MARKOV ESTACIONARIA

En esta sección vamos a probar, utilizando los valiosos resultados de la sección anterior, que la sucesión de valores Record $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$ asociada a una sucesión $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de variables aleatoria independientes e identicamente distribuidas es una cadena de Markov estacionaria.

Teorema 2.4 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con función de distribución acumulativa $F(x)$ y función de densidad de probabilidad $f(x)$. Entonces la sucesión correspondiente de valores Record $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov estacionaria con función de transición*

$$P[x,y] = \begin{cases} \frac{f(y)}{1-F(x)} & y > x \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Demostración.-

Tenemos por la ecuación (2.2) de la sección anterior que

$$\begin{aligned}
& f_{X^{(n+1)}|X^{(0)},X^{(1)},\ldots X^{(n)}}\left(x_{n+1} \mid x_0, x_1, \ldots, x_n\right) \\
= & \frac{f_{X^{(0)},X^{(1)},\ldots,X^{(n)},X^{(n+1)}}\left(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\right)}{f_{X^{(0)},X^{(1)},\ldots,X^{(n)}}\left(x_0, x_1, \ldots, x_n\right)} \\
= & \frac{f\left(x_{n+1}\right)\prod_{j=0}^{n} r\left(x_j\right)}{f\left(x_n\right)\prod_{j=0}^{n-1} r\left(x_j\right)} \\
= & \frac{f\left(x_{n+1}\right)}{f\left(x_n\right)} r\left(x_n\right) \\
= & \frac{f\left(x_{n+1}\right)}{f\left(x_n\right)} \frac{f\left(x_n\right)}{1-F\left(x_n\right)} \\
= & \frac{f\left(x_{n+1}\right)}{1-F\left(x_n\right)}
\end{aligned}$$

que no depende de $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Por lo tanto la sucesión de valores Record $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov estacionaria con función de transición:

$$P[x,y] = \begin{cases} \frac{f(y)}{1-F(x)} & y > x \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Q.E.D.

Una aplicación obvia que podemos dar al resultado anterior es encontrar la distribución de cada uno de los valores Record. Esto se hace en el siguiente corolario..

Corolario 2.1 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con función de distribución acumulativa $F(x)$ y función de densidad de probabilidad $f(x)$. La función de densidad para el valor Record $X^{(n)}$, $n \geq 0$, está dada por*

$$f_{X^{(n)}}(x) = \frac{\{-\log(1-F(x))\}^n f(x)}{n!} \tag{2.11}$$

Demostración.-

Haremos esta demostración por inducción.

Para $n = 0$

$$f_{X^{(0)}}(x) = f_{X_1}(x) = f(x) \tag{2.12}$$

Para $n = 1$

$$\begin{aligned}
f_{X^{(1)}}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_{X^{(0)},X^{(1)}}(t,x)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_{X^{(0)}}(t)\,P[t,x]\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\frac{f(x)}{1-F(t)}dt \\
&= f(x)\int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{1-F(t)}dt \\
&= f(x)\int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dt}\{-\log(1-F(t))\}\,dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(x)\left\{-\log\left(1-F(t)\right)\right\}|_{-\infty}^{x} \\
&= \left\{-\log\left(1-F(x)\right)\right\} f(x) \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Para $n = 2$

$$
\begin{aligned}
f_{X^{(2)}}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_{X^{(1)},X^{(2)}}(t)\, P[t,x]\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_{X^{(1)}}(t)\, P[t,x]\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)\left\{-\log\left(1-F(t)\right)\right\} \frac{f(x)}{1-F(t)} dt \\
&= f(x)\int_{-\infty}^{x} \left\{-\log\left(1-F(t)\right)\right\} \frac{f(t)}{1-F(t)} dt \\
&= f(x)\int_{-\infty}^{x} \left\{-\log\left(1-F(t)\right)\right\} \frac{d}{dt}\left\{-\log\left(1-F(t)\right)\right\} dt \\
&= f(x)\int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dt}\frac{\left\{-\log\left(1-F(t)\right)\right\}^2}{2} dt \\
&= f(x)\,\frac{\left\{-\log\left(1-F(t)\right)\right\}^2}{2}\, |_{-\infty}^{x}
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
f_{X^{(2)}}(x) = \frac{\left\{-\log\left(1-F(x)\right)\right\}^2 f(x)}{2} \qquad (2.14)
$$

De (2.12), (2.13) y (2.14) tenemos que el pie de inducción se cumple.

Para probar que esto es cierto en general es necesario y suficiente mostrar que si se supone que si la formula es cierta para $k = n$, entonces lo será para $k = n + 1$. Supongamos pues que

$$
f_{X^{(n)}}(x) = \frac{\left\{-\log\left(1-F(x)\right)\right\}^n f(x)}{n!}
$$

entonces,

$$\begin{aligned}
f_{X^{(n+1)}}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_{X^{(n)},X^{(n+1)}}(t,x)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_{X^{(n)}}(t)\,P[t,x]\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{\{-\log(1-F(t))\}^{n} f(t)}{n!}\frac{f(x)}{1-F(t)}dt \\
&= f(x)\int_{-\infty}^{x} \frac{\{-\log(1-F(t))\}^{n}}{n!}\frac{f(t)}{1-F(t)}dt \\
&= f(x)\int_{-\infty}^{x} \frac{\{-\log(1-F(t))\}^{n}}{n!}\frac{d}{dt}\{-\log(1-F(t))\}\,dt \\
&= f(x)\int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dt}\frac{\{-\log(1-F(t))\}^{n+1}}{(n+1)!}dt \\
&= f(x)\,\frac{\{-\log(1-F(t))\}^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_{-\infty}^{x}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$f_{X^{(n+1)}}(x) = \frac{\{-\log(1-F(x))\}^{n+1} f(x)}{(n+1)!}$$

y así terminamos la prueba.

Q.E.D.

Ahora, utilizando este último resultado se encuentra la función de distribución acumulativa de los valores Record en el siguiente.

Corolario 2.2 *Sea* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con función de distribución acumulativa* $F(x)$ *y función de densidad de probabilidad* $f(x)$. *La función de distribución acumulativa para el* $n-$*ésimo valor Record* $X^{(n)}$, $n \geq 0$, *está dada* *por*

$$F_{X^{(n)}}(x) = 1 - \frac{(1-F(x))}{f(x)} \sum_{j=0}^{n} f_{X^{(j)}}(x) \tag{2.15}$$

o equivalentemente

$$F_{X^{(n)}}(x) = 1 - (1-F(x)) \sum_{j=0}^{n} \frac{\{-\log(1-F(x))\}^j}{j!} \qquad n \geq 0$$

Demostración.-

La prueba es por inducción.

Para $n = 0$,

$$F_{X^{(0)}}(x) = F_{X_1}(x) = F(x) \tag{2.16}$$

Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} F_{X^{(1)}}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_{X^{(1)}}(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \{-\log(1-F(t))\} f(t)\,dt \end{aligned}$$

integrando por partes, si tenemos que

$$\begin{aligned} u &= \{-\log(1-F(t))\} & dv &= f(t) \\ du &= \frac{f(t)}{1-F(t)} & v &= F(t) \end{aligned}$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
F_{X^{(1)}}(x) &= \int_{-\infty}^{x} \{-\log(1-F(t))\} f(t)\, dt \\
&= \{-\log(1-F(t))\} F(t) \mid_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{1-F(t)} F(t)\, dt \\
&= \{-\log(1-F(x))\} F(x) + \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)(1-F(t)-1)}{1-F(t)} dt \\
&= \{-\log(1-F(x))\} F(x) - \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{1-F(t)} dt + \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \\
&= \{-\log(1-F(x))\} F(x) - \int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dt} \{-\log(1-F(t))\} dt + F(x) \\
&= \{-\log(1-F(x))\} F(x) - \{-\log(1-F(t))\} \mid_{-\infty}^{x} + F(x) \\
&= \{-\log(1-F(x))\} F(x) - \{-\log(1-F(x))\} + F(x) \\
&= 1-(1-F(x)) - (1-F(x))\{-\log(1-F(x))\} \\
&= 1-(1-F(x))(1+\{-\log(1-F(x))\}) \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Para $n = 2$,

$$
\begin{aligned}
F_{X^{(2)}}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_{X^{(2)}}(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{\{-\log(1-F(t))\}^2 f(t)}{2!} dt
\end{aligned}
$$

integrando por partes, tenemos que si

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\{-\log(1-F(t))\}^2}{2!} & dv &= f(t) \\
du &= \{-\log(1-F(t))\} \frac{f(t)}{1-F(t)} & v &= F(t)
\end{aligned}
$$

entonces,

$$\begin{aligned}
F_{X^{(2)}}(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\{-\log(1-F(t))\}^2 f(t)}{2!} dt \\
&= \frac{\{-\log(1-F(t))\}^2}{2!} F(t) \mid_{-\infty}^{x} \\
&\quad - \int_{-\infty}^{x} \{-\log(1-F(t))\} \frac{f(t)}{1-F(t)} F(t)\, dt \\
&= \frac{\{-\log(1-F(x))\}^2}{2!} F(x) \\
&\quad + \int_{-\infty}^{x} \{-\log(1-F(t))\} \frac{(1-F(t)-1) f(t)}{1-F(t)} dt \\
&= \frac{\{-\log(1-F(x))\}^2}{2!} F(x) \\
&\quad - \int_{-\infty}^{x} \{-\log(1-F(t))\} \frac{f(t)}{1-F(t)} dt \\
&\quad + \int_{-\infty}^{x} \{-\log(1-F(t))\} f(t)\, dt \\
&= \frac{\{-\log(1-F(x))\}^2}{2!} F(x) \\
&\quad - \int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dt} \frac{\{-\log(1-F(t))\}^2}{2!} dt \\
&\quad + \int_{-\infty}^{x} f_{X^{(1)}}(t)\, dt \\
&= \frac{\{-\log(1-F(x))\}^2}{2!} F(x) \\
&\quad - \frac{\{-\log(1-F(x))\}^2}{2!} + F_{X^{(1)}}(x) \\
&= -(1-F(x)) \frac{\{-\log(1-F(x))\}^2}{2!} + 1 \\
&\quad - (1-F(x))(1+\{-\log(1-F(x))\}) \\
&= 1-(1-F(x))(1+\{-\log(1-F(x))\} \\
&\quad + \frac{\{-\log(1-F(x))\}^2}{2!}) \\
&= 1-(1-F(x)) \sum_{j=0}^{2} \frac{\{-\log(1-F(x))\}^j}{j!} \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

De (2.16), (2.17) y (2.18) podemos concluír que el pie de inducción es cierto.

Para probar que esto es cierto en general es necesario y suficiente mostrar que si se supone que la formula anterior es cierta para $k = n$, entonces lo será para $k = n + 1$. Supongamos pues que :

$$F_{X^{(n)}}(x) = 1 - (1 - F(x)) \sum_{j=0}^{n} \frac{\{-\log(1 - F(x))\}^j}{j!}$$

entonces,

$$\begin{aligned} F_{X^{(n+1)}}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_{X^{(n+1)}}(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\{-\log(1 - F(t))\}^n f(t)}{n!} dt \end{aligned}$$

integrando por partes, tenemos que si

$$\begin{aligned} u &= \frac{\{-\log(1 - F(t))\}^{n+1}}{(n+1)!} & dv = f(t) \\ du &= \frac{\{-\log(1 - F(t))\}^n}{n!} \frac{f(t)}{1 - F(t)} & v = F(t) \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} F_{X^{(n+1)}}(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\{-\log(1 - F(t))\}^{n+1} f(t)}{(n+1)!} dt \\ &= \frac{\{-\log(1 - F(t))\}^{n+1}}{(n+1)!} F(t) \mid_{-\infty}^{x} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{x} \frac{\{-\log(1 - F(t))\}^n}{n!} \frac{f(t)}{1 - F(t)} F(t)\, dt \\ &= \frac{\{-\log(1 - F(x))\}^{n+1}}{(n+1)!} F(x) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{x} \frac{\{-\log(1 - F(t))\}^n}{n!} \frac{(1 - F(t) - 1) f(t)}{1 - F(t)} dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\{-\log(1-F(x))\}^{n+1}}{(n+1)!}F(x) \\
&\quad -\int_{-\infty}^{x}\frac{\{-\log(1-F(t))\}^{n}}{n!}\frac{f(t)}{1-F(t)}dt \\
&\quad +\int_{-\infty}^{x}\frac{\{-\log(1-F(t))\}^{n}}{n!}f(t)\,dt \\
&= \frac{\{-\log(1-F(x))\}^{n+1}}{(n+1)!}F(x) \\
&\quad -\int_{-\infty}^{x}\frac{d}{dt}\frac{\{-\log(1-F(t))\}^{n+1}}{(n+1)!}dt \\
&\quad +\int_{-\infty}^{x}f_{X^{(n)}}(t)\,dt \\
&= \frac{\{-\log(1-F(x))\}^{n+1}}{(n+1)!}F(x) \\
&\quad -\frac{\{-\log(1-F(x))\}^{n+1}}{(n+2)!}+F_{X^{(n)}}(x) \\
&= -(1-F(x))\frac{\{-\log(1-F(x))\}^{n+1}}{(n+1)!}+1 \\
&\quad -(1-F(x))\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\{-\log(1-F(x))\}^{j}}{j!}\right) \\
&= 1-(1-F(x))\sum_{j=0}^{n+1}\frac{\{-\log(1-F(x))\}^{j}}{j!}
\end{aligned}
$$

Por lo anterior podemos afirmar que la función de distribución acumulativa del $n-$ésimo Record $X^{(n)}$, para $n \geq 0$, está dada por:

$$
F_{X^{(n)}}(x) = 1-(1-F(x))\sum_{j=0}^{n}\frac{\{-\log(1-F(x))\}^{j}}{j!} \qquad n \geq 0
$$

De esto y (2.11) notamos que

$$
F_{X^{(n)}}(x) = 1-\frac{(1-F(x))}{f(x)}\sum_{j=0}^{n}f_{X^{(j)}}(x)
$$

Q.E.D.

2.2.3 DISTRIBUCIÓN CONJUNTA DE DOS VALORES RECORD

En esta sección presentamos el resultado sobre la distribución conjunta de dos valores Record.

Teorema 2.5 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con función de distribución acumulativa $F(x)$ y función de densidad de probabilidad $f(x)$. La función de densidad conjunta de los valores Record $X^{(m)}$ y $X^{(n)}$ está dada por:*

$$
\begin{aligned}
f_{X^{(m)},X^{(n)}}(x,y) &= \frac{\{-\log(1-F(x))\}^m f(x)}{m!}\frac{f(y)}{1-F(x)} \\
&\quad \frac{[\{-\log(1-F(y))\}-\{-\log(1-F(x))\}]^{n-m-1}}{(n-m-1)!} \quad \text{para } x<y \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

Demostración.-

Si m y n son dos números enteros no negativos tales que $m<n$, entonces es claro que existe $n' \in N$ tal que $n = m + n'$. Si queremos encontrar la expresión general de la función de densidad conjunta para los valores Record $X^{(m)}$ y $X^{(n)}$ donde m y n cumplen las condiciones mencionadas en el enunciado anterior entonces por lo que se afirma en el mismo enunciado es suficiente encontrar la expresión general para la función de densidad conjunta de los valores Record $X^{(m)}$ y $X^{(m+n')}$, donde $n' \geq 1$ y considerando a m fijo. Haremos esto, como siempre, de manera inductiva.

Para $n' = 1$, si $x < y$, entonces:

$$\begin{aligned}
f_{X(m),X(m+1)}(x,y) &= f_{X(m)}(x)\, f_{X(m+1)|X(m)}(y \mid x) \\
&= f_{X(m)}(x)\, P(x,y) \\
&= f_{X(m)}(x)\, \frac{f(y)}{1-F(x)} \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

donde la expresión para $f_{X(m)}(x)$ está dada en (2.11).

Para $n' = 2$:

$$\begin{aligned}
f_{X(m),X(m+2)}(x,y) &= \int_x^y f_{X(m),X(m+1),X(m+2)}(x,t,y)\, dt \\
&= \int_x^y f_{X(m)}(x)\, P(x,t)\, P(t,y)\, dt \\
&= f_{X(m)}(x) \int_x^y \frac{f(t)}{1-F(x)} \frac{f(y)}{1-F(t)} dt \\
&= f_{X(m)}(x)\, \frac{f(y)}{1-F(x)} \int_x^y \frac{f(t)}{1-F(t)} dt \\
&= f_{X(m)}(x)\, \frac{f(y)}{1-F(x)} \\
&\quad [\{-\log(1-F(y))\} - \{-\log(1-F(x))\}] \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Para $n' = 3$:

$$\begin{aligned}
f_{X(m),X(m+3)}(x,y) &= \int_x^y f_{X(m),X(m+2),X(m+3)}(x,t,y)\, dt \\
&= \int_x^y f_{X(m),X(m+2)}(x,t)\, P(t,y)\, dt \\
&= \int_x^y (f_{X(m)}(x)\, \frac{f(t)}{1-F(x)} \\
&\quad [\{-\log(1-F(t))\} - \{-\log(1-F(x))\}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{f(y)}{1-F(t)})dt \\
= \;& f_{X^{(m)}}(x)\frac{f(y)}{1-F(x)} \\
& \int_x^y ([\{-\log(1-F(t))\}-\{-\log(1-F(x))\}] \\
& \frac{f(t)}{1-F(t)})dt \\
= \;& f_{X^{(m)}}(x)\frac{f(y)}{1-F(x)} \\
& \frac{[\{-\log(1-F(y))\}-\{-\log(1-F(x))\}]^2}{2}
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

De (2.20), (2.21) y (2.22) podemos concluir que el pie de la inducción de esta prueba es cierto.

Para probar que esto es cierto en general es necesario y suficiente mostrar que si se supone que la formula anterior es cierta para los valores Record $X^{(m)}$ y $X^{(m+n)}$ entonces lo será para los valores Record $X^{(m)}$ y $X^{(m+n+1)}$. Supongamos pues que :

$$
\begin{aligned}
f_{X^{(m)},X^{(m+n)}}(x,y) \;=\;& f_{X^{(m)}}(x)\frac{f(y)}{1-F(x)} \\
& \frac{[\{-\log(1-F(y))\}-\{-\log(1-F(x))\}]^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
f_{X^{(m)},X^{(m+n+1)}}(x,y) \;=\;& \int_x^y f_{X^{(m)},X^{(m+n)},X^{(m+n+1)}}(x,t,y)\,dt \\
=\;& \int_x^y f_{X^{(m)},X^{(m+n)}}(x,t)\,P(t,y)\,dt \\
=\;& \int_x^y (f_{X^{(m)}}(x)\frac{f(t)}{1-F(x)} \\
& \frac{[\{-\log(1-F(y))\}-\{-\log(1-F(x))\}]^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\frac{f(y)}{1-F(t)})dt \\
&= f_{X^{(m)}}(x)\frac{f(y)}{1-F(x)} \\
&\int_x^y (\frac{[\{-\log(1-F(y))\}-\{-\log(1-F(x))\}]^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\frac{f(t)}{1-F(t)})dt \\
&= f_{X^{(m)}}(x)\frac{f(y)}{1-F(x)} \\
&\frac{[\{-\log(1-F(y))\}-\{-\log(1-F(x))\}]^{n}}{n!}
\end{aligned}$$

Podemos ver por lo tanto que la conjetura se cumple también en este caso. Por lo tanto si m es un entero no negativo podemos afirmar que para todo $n \geq 1$ y $x < y$:

$$\begin{aligned}
f_{X^{(m)},X^{(m+n)}}(x,y) &= f_{X^{(m)}}(x)\frac{f(y)}{1-F(x)} \\
&\frac{[\{-\log(1-F(y))\}-\{-\log(1-F(x))\}]^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Aplicando la ecuación (2.23) podemos concluir que si $m < n$ y $x < y$ entonces la función de densidad conjunta de los valores Record $X^{(m)}$ y $X^{(n)}$ está dada por:

$$\begin{aligned}
f_{X^{(m)},X^{(n)}}(x,y) &= f_{X^{(m)}}(x)\frac{f(y)}{1-F(x)} \\
&\frac{[\{-\log(1-F(y))\}-\{-\log(1-F(x))\}]^{n-m-1}}{(n-m-1)!} \\
&= \frac{\{-\log(1-F(x))\}^m f(x)}{m!}\frac{f(y)}{1-F(x)} \\
&\frac{[\{-\log(1-F(y))\}-\{-\log(1-F(x))\}]^{n-m-1}}{(n-m-1)!}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

2.2.4 SUCESIÓN DE ESPACIAMIENTOS Y SU DISTRIBUCIÓN

Como mencionamos al principio de este capítulo ciertas propiedades distribucionales de la sucesión de valores Record, o funciones de estos, asociados a una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas caracterizan parcial o totalmente la distribución común de la sucesión original. Una sucesión de variables aleatorias que son funciones de los valores Record asociados a una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidos cuyas ciertas propiedades pueden caracterizar la distribución de la sucesión original es la sucesión de espaciamientos cuya definición damos a continuación:

Definición 2.3 *Sea* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de variables aleatorias con sucesión de valores Record asociada* $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 1}$. *Definimos el* $n-$*ésimo espaciamiento entre Records asociado a la sucesión* $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 1}$ *como*

$$S_n = X^{(n)} - X^{(n-1)} \qquad\qquad n \geq 1$$

y la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ *como la sucesión de espaciamientos asociado a la sucesión* $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 1}$.

La primera pregunta que nos hacemos sobre estas nuevas variables aleatorias es cual es su distribución. La respuesta está dada en el siguiente

Teorema 2.6 *Sea* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con función de distribución acumulativa* $F(x)$ *y función de densidad de probabilidad*

$f(x)$. *La función de densidad de probabilidad para el* n−*ésimo espaciamiento entre Records está dada por*

$$f_{S_n}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{-\log(1-F(x))\}^{n-1} f(x)}{(n-1)!} \frac{f(x+s)}{1-F(x)} dx \ si\ s > 0 \tag{2.24}$$

Demostración.-

Para $n \geq 1$ y $s > 0$, tenemos que:

$$f_{S_n}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X^{(n-1)},S_n}(x,s)\,dx$$

Entonces encontraremos primero la densidad conjunta de $X^{(n)}$ y $S_n = X^{(n)} - X^{(n-1)}$. Considérese la transformación:

$$g : R^2 \rightarrow R^2$$

definida por

$$g\left(X^{(n-1)}, X^{(n)}\right) = \left(X^{(n-1)}, X^{(n)} - X^{(n-1)}\right)$$

Sea $(y_1, y_2) \in R^2$ con $y_2 > 0$. Del sistema:

$$\begin{aligned} y_1 &= X^{(n-1)} \\ y_2 &= X^{(n)} - X^{(n-1)} \end{aligned}$$

se tiene que :

$$X^{(n-1)} = y_1 = g_1^{-1}(y_1, y_2)$$

$$X^{(n)} = y_1 + y_2 = g_2^{-1}(y_1, y_2)$$

Entonces la inversa de la transformación g está dada por:

$$g^{-1}(y_1, y_2) = (y_1, y_1 + y_2)$$

y el Jacobiano asociado es:

$$\begin{aligned} J &= \left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial y_1} g_1^{-1} & \frac{\partial}{\partial y_2} g_1^{-1} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} g_2^{-1} & \frac{\partial}{\partial y_2} g_2^{-1} \end{matrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto si $s > 0$:

$$\begin{aligned} f_{X^{(n-1)}, S_n}(x, s) &= f_{X^{(n-1)}, X^{(n)}}\left(g^{-1}(x, s)\right) J \\ &= f_{X^{(n-1)}, X^{(n)}}(x, x + s) \\ &= f_{X^{(n-1)}}(x)\, P(x, x + s) \\ &= \frac{\{-\log(1 - F(x))\}^{n-1} f(x)}{(n-1)!} \frac{f(x+s)}{1 - F(x)} \end{aligned}$$

y de esto se obtiene que:

$$f_{S_n}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X^{(n-1)}, S_n}(x, s)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{-\log(1-F(x))\}^{n-1} f(x)}{(n-1)!} \frac{f(x+s)}{1-F(x)} dx$$

Q.E.D.

Por último daremos una expresión para la densidad conjunta entre espaciamientos sucesivos en el siguiente teorema.

Teorema 2.7 *Sea* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con función de distribución acumulativa* $F(x)$ *y función de densidad de probabilidad* $f(x)$. *La función de densidad conjunta para el* $n-$*ésimo y el* $n+1-$*ésimo espaciamientos de está dada por*

$$\begin{aligned} f_{S_n,S_{n+1}}(s,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\{-\log(1-F(x))\}^{n-1} f(x)}{(n-1)!} \frac{f(x+s)}{1-F(x)} \frac{f(x+s+t)}{1-F(x+s)} \right) dx \\ s &> 0\,; t>0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Demostración.-

Sean $n \geq 1$, $s > 0$ y $t > 0$, entonces

$$f_{S_n,S_{n+1}}(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X^{(n-1)},S_n,S_{n+1}}(x,s,t)\, dx$$

Tenemos que encontrar primero la distribución conjunta de $X^{(n-1)}$, $S_n = X^{(n)} - X^{(n-1)}$ y $S_{n+1} = X^{(n+1)} - X^{(n)}$. Considérese la transformación

$$h : R^3 \to R^3$$

definida por:

$$h\left(X^{(n-1)}, X^{(n)}, X^{(n+1)}\right) = \left(X^{(n-1)}, X^{(n)} - X^{(n-1)}, X^{(n+1)} - X^{(n)}\right)$$

Sea $(y_1, y_2, y_3) \in R^3$ con $y_2 \geq 0$ y $y_3 \geq 0$. Del sistema:

$$\begin{aligned} y_1 &= X^{(n-1)} \\ y_2 &= X^{(n)} - X^{(n-1)} \\ y_3 &= X^{(n+1)} - X^{(n)} \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} X^{(n-1)} &= y_1 = h_1^{-1}(y_1, y_2, y_3) \\ X^{(n)} &= y_1 + y_2 = h_2^{-1}(y_1, y_2, y_3) \\ X^{(n+1)} &= y_1 + y_2 + y_3 = h_3^{-1}(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

es decir el inverso de la transformación h está dado por

$$h^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3)$$

Por lo tanto el Jacobiano de la transformación es:

$$\begin{aligned}
J &= \left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial y_1} h_1^{-1} & \frac{\partial}{\partial y_2} h_1^{-1} & \frac{\partial}{\partial y_3} h_1^{-1} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} h_2^{-1} & \frac{\partial}{\partial y_2} h_2^{-1} & \frac{\partial}{\partial y_3} h_2^{-1} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} h_3^{-1} & \frac{\partial}{\partial y_2} h_3^{-1} & \frac{\partial}{\partial y_3} h_3^{-1} \end{matrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
f_{X^{(n-1)},S_n,S_{n+1}}(x,s,t) &= f_{X^{(n-1)},X^{(n)},X^{(n+1)}}\left(h^{-1}(x,s,t)\right) J \\
&= f_{X^{(n-1)},X^{(n)},X^{(n+1)}}(x, x+s, x+s+t) \\
&= f_{X^{(n-1)}}(x) P(x, x+s) P(x+s, x+s+t) \\
&= \frac{\{-\log(1-F(x))\}^{n-1} f(x)}{(n-1)!} \frac{f(x+s)}{1-F(x)} \frac{f(x+s+t)}{1-F(x+s)}
\end{aligned}$$

de lo que se tiene que:

$$\begin{aligned} f_{S_n,S_{n+1}}(s,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X^{(n-1)},S_n,S_{n+1}}(x,s,t)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\{-\log(1-F(x))\}^{n-1} f(x)}{(n-1)!} \frac{f(x+s)}{1-F(x)} \frac{f(x+s+t)}{1-F(x+s)}\right) dx \\ s &> 0\,;t>0 \end{aligned}$$

Q.E.D.

2.2.5 VALORES RECORD GENERALES EN TÉRMINOS DE VALORES RECORD EXPONENCIALES.

Si X es una variable aleatoria con función de distribución acumulativa $F_X(\cdot)$ y definimos la función

$$\gamma_X(u) := F_X^{-1}(1-e^{-u}) \tag{2.26}$$

donde

$$F_X^{-1}(y) := \sup\{x : F_X(x) \leq y\}$$

es la función cuantil para la variable aleatoria X. Entonces si X^* es una variable aleatoria con distribución exponencial estándar se tiene que

$$X \stackrel{d}{=} \gamma_X(X^*), \tag{2.27}$$

es decir, X y $\gamma_X(X^*)$ tienen la misma distribución.

Por lo tanto si $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes y con distribución común $F(x)$, entonces si $\{X_n^*\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común exponencial estándar tenemos que para $n \geq 1$

$$X_n \stackrel{d}{=} \gamma_X (X_n^*) . \tag{2.28}$$

Si $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$ denota la correspondiente sucesión de valores Record asociada a la sucesión $\{X_n\}_{n\geq 1}$ y $\left\{X^{*(n)}\right\}_{n\geq 0}$ la sucesión de valores Record asociada a la sucesión de variables aleatorias exponenciales estándar $\{X_n^*\}_{n\geq 1}$, entonces como $\gamma_X(u)$ es una función no decreciente se tiene también que para $n \geq 0$

$$X^{(n)} \stackrel{d}{=} \gamma_X \left(X^{*(n)}\right) . \tag{2.29}$$

Utilizando los resultados anteriores podemos obtener la distribución de los valores Record de cualquier sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas como función de la distribución de los valores Record de una sucesión de variables aleatorias exponenciales estándar e independientes.

Vamos pues a encontrar primero la distribución de los valores Record de una sucesión de variables aleatorias exponenciales estándar e independientes. Utilizando (2.11) tenemos que la función de densidad del $n-$ésimo valor Record $X^{*(n)}$ de una sucesión de variables aleatorias exponenciales estándar independientes está dada por

$$f_{X^{*(n)}}(x) \ = \ \frac{\{-\log(1-F(x))\}^n f(x)}{n!}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\{-\log(1-(1-e^{-x}))\}^n e^{-x}}{n!} \\ &= \frac{x^n e^{-x}}{n!} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Es decir

$$X^{*(n)} \sim \Gamma(n+1,1) \tag{2.31}$$

Una aplicación muy útil de este resultado es la siguiente:

Supongamos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común Gumbel estándar $F_X(x) = 1 - e^{-e^x}$; $x \in R$, en este caso

$$F_X^{-1}(y) = \log\{-\log(1-y)\} \qquad\qquad y \in [0,1)$$

por lo tanto la transformación (2.26) está dada por :

$$\begin{aligned} \gamma_X(u) &= F_X^{-1}(1-e^{-u}) \\ &= \log u \end{aligned} \tag{2.32}$$

Entonces tenemos que si $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$ es la sucesión de valores Record asociada a la sucesión $\{X_n\}_{n\geq 1}$ se tiene que para $n \geq 0$

$$X^{(n)} \overset{d}{=} \log X^{*(n)}$$

donde $X^{*(n)} \sim \Gamma(n+1,1)$ por (2.31). Por lo tanto la función de distribución acumulativa de $X^{(n)}$

está dada por

$$\begin{aligned}
F_{X^{(n)}}(x) &= P\left[X^{(n)} \leq x\right] \\
&= P\left[\log X^{*(n)} \leq x\right] \\
&= P\left[X^{*(n)} \leq e^{x}\right] \\
&= F_{X^{*(n)}}\left(e^{x}\right)
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
f_{X^{(n)}}(x) &= f_{X^{*(n)}}\left(e^{x}\right) e^{x} \\
&= \frac{1}{n!} e^{xn} e^{-e^{x}} e^{x} \\
&= \frac{1}{n!} e^{x(n+1)} e^{-e^{x}} \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Podemos verificar esto utilizando la ecuación (2.11). Se tiene que:

$$\begin{aligned}
f_{X^{(n)}}(x) &= \frac{\{-\log\left(1-F(x)\right)\}^{n} f(x)}{n!} \\
&= \frac{\{-\log\left(e^{-e^{x}}\right)\}^{n} e^{x-e^{x}}}{n!} \\
&= \frac{e^{nx} e^{x-e^{x}}}{n!} \\
&= \frac{e^{x(n+1)} e^{-e^{x}}}{n!} \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

entonces podemos ver que (2.33) y (2.34) son iguales.

2.2.6 PROPIEDADES DE LOS VALORES RECORD DE LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Supongamos que $\{X_n^*\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes y con distribución común exponencial estándar. Las propiedades más importantes de los valores record de esta sucesión se establecen en el siguiente teorema.

Teorema 2.8 *Sea $\{X_n^*\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común exponencial estándar y $\left\{X^{*(n)}\right\}_{n\geq 0}$ la correspondiente sucesión de valores Record. Consideremos la sucesión $\{S_n^*\}_{n\geq 0}$, donde*

$$S_0^* = X^{*(0)}$$

y para $n \geq 1$

$$S_n^* = X^{*(n)} - X^{*(n-1)}$$

Entonces $\{S_n^*\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes y con distribución común exponencial estándar.

Demostración.-

Tenemos que

$$\begin{aligned} f_{S_0^*}(s) &= f_{X^{*(0)}}(s) \\ &= f_{X_1}(s) \\ &= e^{-s} \qquad s \geq 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$= \quad 0 \qquad e.o.c.$$

por lo tanto $S_0^* \sim \exp(1)$. Luego, para $n \geq 1$ tenemos que si $s > 0$

$$f_{S_n^*}(s) = \int_0^\infty f_{X^{*(n-1)},S_n^*}(x,s)\,dx \tag{2.36}$$

pero utilizando el método de Jacobianos se tiene que

$$\begin{aligned} f_{X^{*(n-1)},S_n^*}(x,s) &= f_{X^{*(n-1)},X^{*(n)}}(x,x+s) \\ &= f_{X^{*(n-1)}}(x)\,P(x,x+s) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} P(x,x+s) &= \frac{f(x+s)}{1-F(x)} \\ &= \frac{e^{-(x+s)}}{e^{-x}} = e^{-s} \end{aligned}$$

y por (2.11) se tiene que

$$\begin{aligned} f_{X^{*(n-1)}}(x) &= \frac{\{-\log(1-F(x))\}^{n-1} f(x)}{(n-1)!} \\ &= \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

sustituyendo en (2.36) se tiene que

$$f_{S_n^*}(s) = \int_0^\infty e^{-s}\frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}dx$$

$$= e^{-s} \tag{2.37}$$

ya que $g(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}$; $x \geq 0$ es la función de densidad de una variable aleatoria Gamma con parámetro n y 1. Por lo tanto por (2.35) y (2.37) las variables aleatorias de la sucesión $\{S_n^*\}_{n\geq 0}$ son idénticamente distribuidas con distribución común exponencial estándar.

Para probar que son independientes basta probar que para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$f_{S_0^*,S_1^*,\ldots,S_n^*}(s_0, s_1, \ldots, s_n) = \prod_{j=0}^{n} f_{S_j^*}(s_j)$$

Sea $n \geq 1$, entonces aplicando la técnica del Jacobiano se tiene que

$$\begin{aligned}
& f_{S_0^*,S_1^*,\ldots,S_n^*}(s_0, s_1, \ldots, s_n) \\
= \; & f_{X^{*(0)},X^{*(1)},X^{*(2)},\ldots,X^{*(n-1)},X^{*(n)}}\left(s_0, \sum_{j=0}^{1} s_j, \sum_{j=0}^{2} s_j, \ldots, \sum_{j=0}^{n-1} s_j, \sum_{j=0}^{n} s_j\right) \\
= \; & f_{X^{*(0)}}(s_0)\, P\left(s_0, \sum_{j=0}^{1} s_j\right) P\left(\sum_{j=0}^{1} s_j, \sum_{j=0}^{2} s_j\right) \cdots P\left(\sum_{j=0}^{n-1} s_j, \sum_{j=0}^{n} s_j\right) \\
= \; & f(s_0)\,\frac{f\left(\sum_{j=0}^{1} s_j\right)}{1 - F(s_0)}\,\frac{f\left(\sum_{j=0}^{2} s_j\right)}{1 - F\left(\sum_{j=0}^{1} s_j\right)} \cdots \frac{f\left(\sum_{j=0}^{n} s_j\right)}{1 - F\left(\sum_{j=0}^{n-1} s_j\right)} \\
= \; & e^{-s_0}\,\frac{e^{-\sum_{j=0}^{1} s_j}}{e^{-s_0}}\,\frac{e^{-\sum_{j=0}^{2} s_j}}{e^{-\sum_{j=0}^{1} s_j}} \cdots \frac{e^{-\sum_{j=0}^{n} s_j}}{e^{-\sum_{j=0}^{n-1} s_j}} \\
= \; & e^{-\sum_{j=0}^{n} s_j} \\
= \; & \prod_{j=0}^{n} e^{-s_j} \\
= \; & \prod_{j=0}^{n} f_{S_j^*}(s_j)
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene también que las variables $\{S_n^*\}_{n\geq 0}$ son independientes. Así el teorema está probado.

Q.E.D.

Del teorema 2.8 tenemos que como $X^{*(n)} = \sum_{j=0}^{n} S_j^*$ entonces $X^{*(n)} \sim \Gamma(n+1, 1)$.

Ahora, si la sucesión de variables aleatorias independientes $\{X_n\}_{n\geq 1}$ tiene una función de distribución común de la forma

$$F(x) := 1 - e^{-\sigma x} \ , \sigma > 0; x > 0$$

entonces las variables aleatorias $\{X_n^*\}_{n\geq 1}$, donde

$$X_n^* := \sigma X_n,$$

es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución exponencial estándar. Luego por el teorema 2.8 se tiene que la sucesión $\{S_n^*\}_{n\geq 0}$, donde

$$S_0^* = X^{*(0)}$$

y para $n \geq 1$

$$S_n^* = X^{*(n)} - X^{*(n-1)},$$

es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución exponencial estándar. Esto último implica que la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 0}$, donde

$$S_0 = X^{(0)}$$

y para $n \geq 1$

$$S_n = X^{(n)} - X^{(n-1)},$$

es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común

$$F(x) := 1 - e^{-\sigma x}, \sigma > 0; x > 0$$

y en este caso $X^{(n)} \sim \Gamma(n+1, \sigma)$.

2.2.7 PROPIEDADES DE LOS VALORES RECORD DE LA DISTRIBUCIÓN GUMBEL

Supongamos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común Gumbel estándar. Las propiedades más importantes de los valores record de esta sucesión se establecen en el siguiente teorema.

Teorema 2.9 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma distribución Gumbel estándar y $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$ la sucesión correspondiente de valores Record. Entonces* *para todo $n \geq 1$ se tiene que*

$$nS_n = n\left(X^{(n)} - X^{(n-1)}\right) \sim \exp(1)$$

y las variables aleatorias de la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ son independientes.

Demostración.-

Sea $\{X_n^*\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común exponencial estándar. Probamos en la sección anterior que $X^{*(n)} \sim \Gamma(n+1,1)$, entonces se tiene que

$$X^{*(n)} \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n+1} X_i^*$$

es decir, tienen la misma distribución. Entonces para $n \geq 1$ se tiene, por (2.32), para el n-ésimo espaciamiento que:

$$\begin{aligned} S_n &= X^{(n)} - X^{(n-1)} \\ &\overset{d}{=} \log\sum_{i=1}^{n+1} X_i^* - \log\sum_{i=1}^{n} X_i^* \\ &= -\log\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^*}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i^*}\right) \\ &= -\log\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^*}{\sum_{i=1}^{n} X_i^* + X_{n+1}^*}\right) \end{aligned} \tag{2.38}$$

Como $\sum_{i=1}^{n} X_i^* \sim \Gamma(n,1)$, $X_{n+1}^* \sim \Gamma(1,1)$ y son independientes sabemos que[Mood]

$$Y_n := \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^*}{\sum_{i=1}^{n} X_i^* + X_{n+1}^*} \sim Beta(n,1).$$

Entonces podemos calcular la distribución de S_n de la siguiente manera. En primer lugar su función de distribución acumulativa está dada por

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= P[S_n \leq x] \\ &= P[-\log Y_n \leq x] \\ &= P[\log Y_n \geq -x] \\ &= P[Y_n \geq e^{-x}] \\ &= 1 - F_{Y_n}(e^{-x}) \end{aligned} \tag{2.39}$$

y derivando (2.39) obtenemos la densidad de S_n como

$$\begin{aligned} f_{S_n}(x) &= f_{Y_n}(e^{-x})\, e^{-x} \\ &= \frac{e^{-x(n-1)}e^{-x}}{B(n,1)} = ne^{-nx} \qquad ; x > 0 \\ &= 0 \qquad\qquad e.o.c. \end{aligned}$$

Entonces $S_n \sim \exp(n)$ y por lo tanto para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$nS_n = n\left(X^{(n)} - X^{(n-1)}\right) \sim \exp(1)$$

y de las conocidas propiedades de la distribución gamma se tiene que también son independientes. Lo que prueba el teorema.

Q.E.D.

Un resultado que también es digno de incluir es el siguiente

Teorema 2.10 *Sea* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma distribución Gumbel estándar, sucesión correspondiente de valores Record* $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$ *y sucesión correspondiente de espaciamientos* $\{S_n\}_{n\geq 1}$. *Entonces para todo* $n \geq 1$ *se tiene que las variables aleatorias*

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, X^{(n)}$$

son independientes.

Demostración.-

Considérese la transformación

$$g : R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$$

definida por

$$\begin{aligned} g\left(X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\right) \quad &: \; = \left(S_1, S_2, \ldots, S_n, X^{(n)}\right) \\ &= \left(X^{(1)} - X^{(0)}, X^{(2)} - X^{(1)}, \ldots, X^{(n)} - X^{(n-1)}, X^{(n)}\right) \end{aligned}$$

Sea $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \in R^{n+1}$. Del sistema

$$\begin{aligned} y_1 &= X^{(1)} - X^{(0)} \\ y_2 &= X^{(2)} - X^{(1)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_n &= X^{(n)} - X^{(n-1)} \\
y_{n+1} &= X^{(n)}
\end{aligned}
$$

se tiene que:

$$
\begin{aligned}
X^{(0)} &= y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} y_j = g_1^{-1}(y_1, \ldots, y_{n+1}) \\
X^{(1)} &= y_{n+1} - \sum_{j=2}^{n} y_j = g_2^{-1}(y_1, \ldots, y_{n+1}) \\
&\vdots \\
X^{(i)} &= y_{n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} y_j = g_{i+1}^{-1}(y_1, \ldots, y_{n+1}) \\
&\vdots \\
X^{(n-1)} &= y_{n+1} - y_n = g_n^{-1}(y_1, \ldots, y_{n+1}) \\
X^{(n)} &= y_{n+1} = g_{n+1}^{-1}(y_1, \ldots, y_{n+1})
\end{aligned}
$$

Entonces la inversa de la transformación g está dada por

$$
g^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \left(y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} y_j, y_{n+1} - \sum_{j=2}^{n} y_j, \ldots, y_{n+1} - y_n, y_{n+1} \right)
$$

y el Jacobiano asociado es

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{Vmatrix} \\
&= \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto si $s_1, s_2, \ldots s_n$ son números positivos y x es cualquier número, entonces

$$
\begin{aligned}
& f_{S_1,S_2,\ldots,S_n,X^{(n)}}\left(s_1, s_2, \ldots s_n, x\right) \\
= \;& f_{X^{(0)},X^{(1)},\ldots,X^{(n)}}\left(x - \sum_{j=1}^{n} s_j, x - \sum_{j=2}^{n} s_j, \ldots, x - s_n, x\right) \\
= \;& f_{X^{(0)}}\left(x - \sum_{j=1}^{n} s_j\right) \prod_{i=1}^{n-1} P\left(x - \sum_{j=i}^{n} s_j, x - \sum_{j=i+1}^{n} s_j\right) P\left(x - s_n, x\right) \\
= \;& f\left(x - \sum_{j=1}^{n} s_j\right) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f\left(x - \sum_{j=i+1}^{n} s_j\right)}{1 - F\left(x - \sum_{j=i}^{n} s_j\right)} \frac{f(x)}{1 - F(x - s_n)} \\
= \;& e^{\left\{x - \sum_{j=1}^{n} s_j - e^{x - \sum_{j=1}^{n} s_j}\right\}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{e^{\left\{x - \sum_{j=i+1}^{n} s_j - e^{x - \sum_{j=i+1}^{n} s_j}\right\}}}{e^{-e^{x - \sum_{j=i}^{n} s_j}}} \frac{e^{x - e^{x}}}{e^{-e^{x - s_n}}} \\
= \;& e^{\left\{x - \sum_{j=1}^{n} s_j - e^{x - \sum_{j=1}^{n} s_j}\right\}} \frac{\left(\prod_{i=1}^{n-1} e^{x - \sum_{j=i+1}^{n} s_j}\right) e^{-e^{x - s_n}}}{e^{-e^{x - \sum_{j=1}^{n} s_j}}} \frac{e^{x - e^{x}}}{e^{-e^{x - s_n}}} \\
= \;& \prod_{i=1}^{n} e^{x - \sum_{j=i}^{n} s_j} e^{x - e^{x}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} s_j} e^{nx} e^{x-e^x} \\
&= e^{-\sum_{i=1}^{n} is_i} e^{(n+1)x} e^{-e^x} \\
&= \prod_{i=1}^{n} ie^{-is_i} \frac{e^{(n+1)x} e^{-e^x}}{n!} \\
&= \prod_{i=1}^{n} f_{S_i}(s_i)\, f_{X^{(n)}}(x)
\end{aligned}
$$

Entonces tenemos que

$$
f_{S_1,S_2,\ldots,S_n,X^{(n)}}(s_1, s_2, \ldots s_n, x) = f_{S_1}(s_1)\, f_{S_2}(s_2) \cdots f_{S_n}(s_n)\, f_{X^{(n)}}(x)
$$

y por lo tanto las variables aleatorias $S_1, S_2, \ldots, S_n, X^{(n)}$ son independientes.

Q.E.D.

Capítulo 3

CARACTERIZACIONES Y VALORES RECORD

El propósito de este capítulo es presentar algunos resultados conocidos, así como algunas contribuciones nuevas sobre caracterizaciones de la distribución Gumbel, basadas en valores Record. En la primera sección de este capítulo se presentan los resultados generales más conocidos para cualquier variable aleatoria como son la de la función generadora de momentos y la función característica. En las siguientes secciones se presentan caracterizaciones de las distribuciones Exponencial y Gumbel. Es aquí donde se presentan algunas identificaciones utilizando propiedades de los valores Record. Como mencionamos en el capítulo uno, existe una estrecha relación entre la distribución de cualquier variable aleatoria continua y la distribución exponencial y por lo que la singularización de la distribución exponencial en términos de valores Record nos permite establecer distinciones de cualquier variable aleatoria con distribución continua en términos de los correspondientes valores

Record. De hecho utilizamos esta propiedad para establecer propiedades de los valores Record de la distribución Gumbel en la Sección 3.3. Los demás resultados de este capítulo tienen como objetivo intentar dar una respuesta a una pregunta abierta propuesta en un artículo de Arnold y Villaseñor[Villaseñor]. Al estudiar una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común exponencial estándar, uno observa, que la primera variable aleatoria de esta sucesión y los espaciamientos, definidos en el Capítulo dos, forman una sucesión de variables aleatorias independientes y con distribución común exponencial estándar. Este resultado dio pie a la inquietud de saber si esta era una condición suficiente para caracterizar a la distribución exponencial. Esto no sólo resultó ser cierto, sino que Tata[Kotz], en 1969, mostró que con una condición bastante más débil, que es la independencia de la primera variable de la sucesión y el primer espaciamiento, caracterizan a la distribución de las variables aleatorias como una distribución exponencial. Al estudiar una sucesión de variables aleatorias con distribución común Gumbel, Arnold y Villaseñor, encuentran que la sucesión correspondiente de espaciamientos posee propiedades similares a aquellas que tienen los espaciamientos correspondientes a la distribución exponencial. Esto es, los espaciamientos son independientes y tienen una distribución exponencial, aunque no común. Basados en la experiencia sobre el estudio de los valores Record, se preguntan cuál será la condición suficiente más débil que se debe imponer sobre los espaciamientos de tal forma que caracterice a la distribución común de las variables aleatorias como una distribución Gumbel. Ellos se enfocan sobre el primero y el segundo espaciamiento y se preguntan si el imponer ciertas condiciones sobre estos, será suficiente para caracterizar a la distribución Gumbel. En este capítulo se presentan algunos resultados extraídos del artículo de Arnold y Villaseñor que tratan de responder a está pregunta, así como algunas nuevas contribuciones.

3.1 CARACTERIZACIONES GENERALES

En esta sección se presenta la teoría más conocida sobre las caracterizaciones de las distribuciones de probabilidad.

3.1.1 LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

En esta sección se mencionan las propiedades fundamentales de la función característica que nos permiten usarla como una herramienta para caracterizar la distribución de una variable aleatoria.

Definición 3.1 (Funcion caracteristica) *Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x)$. La función característica de X se define como*

$$\begin{aligned}\phi_X(t) \ &:= E\left[e^{itX}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF_X(x) + i\int_{-\infty}^{\infty} \sin tx dF_X(x)\end{aligned}$$

Como $\left|e^{itX}\right| = 1$, entonces

$$\begin{aligned}|\phi_X(t)| &= \left|E\left[e^{itX}\right]\right| \\ &\leq E\left[\left|e^{itX}\right|\right] = E[1] = 1\end{aligned}$$

lo que implica que la función característica existe para todo $t \in R$. En contextos no probabilísticos la función característica se conoce como la transformación de Fourier.

El hecho de que la función característica $\phi_X(t)$ determine la función de distribución de la que proviene es derivado por medio de una fórmula de inversión a través de la que la función de distribución puede ser recuperada de $\phi_X(t)$. Esto se establece en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 (Formula de inversion) *Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x)$ y función característica $\phi_X(t)$. Si $a < b$ son dos puntos de continuidad de $F_X(x)$, entonces*

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_X(t)\, dt \tag{3.1}$$

Esto implica que distintas funciones de distribución no pueden tener la misma función característica.

Demostración.-

Tenemos que

$$\begin{aligned} I_T \quad : & = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_X(t)\, dt \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} dF_X(x)\right] dt \end{aligned}$$

y al aplicar el teorema de Fubini

$$I_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt\right] dF_X(x). \tag{3.2}$$

Luego por la fórmula de DeMoivre tenemos que

$$\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}=\frac{\cos t\,(x-a)-\cos t\,(x-b)}{it}+\frac{\sin t\,(x-a)}{t}-\frac{\sin t\,(x-b)}{t}$$

y como la función $\frac{\cos \alpha t}{t}$, $\alpha \in R/\{0\}$, es una función impar

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}dt &= \int_{-T}^{T}\frac{\cos t\,(x-a)-\cos t\,(x-b)}{it}dt+\int_{-T}^{T}\frac{\sin t\,(x-a)}{t}dt \\
&\quad -\int_{-T}^{T}\frac{\sin t\,(x-b)}{t}dt \\
&= \int_{-T}^{T}\frac{\sin t\,(x-a)}{t}dt-\int_{-T}^{T}\frac{\sin t\,(x-b)}{t}dt. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Utilizando la función $\operatorname{sgn}(x)$ definida como

$$\operatorname{sgn}(x) := -I_{(-\infty,0)}(x)+I_{(0,\infty)}(x)$$

tenemos que (3.3) se transforma en

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}dt &= \operatorname{sgn}(x-a)\,|x-a|\int_{-T}^{T}\frac{\sin t\,|x-a|}{t\,|x-a|}dt \\
&\quad -\operatorname{sgn}(x-b)\,|x-b|\int_{-T}^{T}\frac{\sin t\,|x-b|}{t\,|x-b|}dt. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Aplicando un cambio de variable a las integrales del lado izquierdo tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}dt &= \operatorname{sgn}(x-a)\int_{-T|x-a|}^{T|x-a|}\frac{\sin t}{t}dt \\
&\quad -\operatorname{sgn}(x-b)\int_{-T|x-b|}^{T|x-b|}\frac{\sin t}{t}dt \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

y como la función $\frac{\sin t}{t}$ es par, de (3.5)

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt = 2 \operatorname{sgn}(x-a) \int_{0}^{T|x-a|} \frac{\sin t}{t} dt \\ -2 \operatorname{sgn}(x-b) \int_{0}^{T|x-b|} \frac{\sin t}{t} dt. \tag{3.6}$$

Ahora defina

$$S(T) := \int_{0}^{T} \frac{\sin t}{t} dt \text{ , } T \geq 0. \tag{3.7}$$

Un resultado conocido de cálculo es que

$$\lim_{T \to \infty} S(T) = \frac{\pi}{2}. \tag{3.8}$$

Utilizando (3.7) entonces de (3.6)

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt = 2 \operatorname{sgn}(x-a) S(T|x-a|) \\ -2 \operatorname{sgn}(x-b) S(T|x-b|). \tag{3.9}$$

Sustituyendo (3.9) en (3.2), tenemos que

$$I_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [2 \operatorname{sgn}(x-a) S(T|x-a|) - 2 \operatorname{sgn}(x-b) S(T|x-b|)] \, dF_X(x). \tag{3.10}$$

El integrando aquí es acotado y por (3.8)

$$\lim_{T \to \infty} I_T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b)] \, dF_X(x). \tag{3.11}$$

El integrando de (3.11), $\psi_{a,b}(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b)$, cumple que

$$\psi_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ 1 \text{ si } x = a \\ 2 \text{ si } a < x < b \\ 1 \text{ si } x = b \\ 0 \text{ si } x > b \end{cases}$$

es decir

$$\psi_{a,b}(x) = I_{\{a\}}(x) + 2I_{(a,b)}(x) + I_{\{b\}}(x)$$

y como $F_X(x)$ es continua en a y b, de (3.11)

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} I_T &= \int_a^b dF_X(x) \\ &= F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

es decir

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_X(t)\, dt.$$

Por último probaremos que esta fórmula de inversión implica unicidad para la función de distribución. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen la misma función característica, entonces (3.1) implica que, para $a < b$ tales que las funciones de distribución de X e Y, $F_X(x)$ y $F_Y(y)$, son continuas,

$$P_X((a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$
\begin{aligned}
&= F_Y(b) - F_Y(a) \\
&= P_Y((a,b])
\end{aligned}
$$

Pero la colección de intervalos $\{(a,b] : a < b\}$ genera a la $\sigma-$álgebra de Borel y por lo tanto X e Y tienen la misma distribución. Así el teorema está probado.

Q.E.D.

El teorema anterior implica que si conocemos la función característica de una variable aleatoria, entonces también podemos conocer la distribución de esta.

3.1.2 UNA CARACTERIZACIONES BASADA EN LOS MOMENTOS

Para algunas distribuciones la función característica es difícil o imposible de calcular, pero sin embargo los momentos pueden ser calculados. En el siguiente teorema se prueba que bajo ciertas condiciones la distribución de una variable aleatoria está determinada únicamente por sus momentos.

Teorema 3.2 *Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x)$ y teniendo momentos $\mu_k := E\left[X^k\right] := \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_X(x)$ de todos los ordenes. Si la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{k!} t^k$ tiene un radio de convergencia positivo, entonces X es la única variable aleatoria con estos momentos.*

Demostración.-

Sean

$$\begin{aligned}\beta_k \quad : \quad &= E\left[|X|^k\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \, dF_X(x) \end{aligned} \tag{3.12}$$

los momentos absolutos de X. Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{k!} t^k$ tiene un radio de convergencia positivo, entonces existe $0 < s < 1$ tal que

$$\frac{\mu_k}{k!} s^k \underset{k \to \infty}{\to} 0.$$

Podemos tomar $0 < r < s$ tal que $2^k r^{2k-1} < s^{2k}$ para k grande. Como $|x|^{2k-1} \leq 1 + |x|^{2k}$,

$$\frac{\beta_{2k-1} r^{2k-1}}{(2k-1)!} \leq \frac{r^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{\beta_{2k} s^{2k}}{(2k)!}$$

para k grande. De aquí

$$\frac{\beta_{2k-1} r^{2k-1}}{(2k-1)!} \underset{k \to \infty}{\to} 0$$

y ya que $\beta_{2k} = \mu_{2k}$ se tiene también que

$$\frac{\beta_k r^k}{k!} \underset{k \to \infty}{\to} 0 \tag{3.13}$$

De la expansión en series de Taylor de e^{itx} tenemos que

$$\left| e^{itx} \left(e^{ihx} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ihx)^k}{k!} \right) \right| \leq \frac{|hx|^{n+1}}{(n+1)!}$$

y entonces la función característica de X satisface

$$\begin{aligned} & \left|\phi_X(t+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^k e^{itx}dF_X(x)\right| \\ = & \left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t+h)x}dF_X(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^k e^{itx}dF_X(x)\right| \\ = & \left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\left(e^{ihx}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(ihx)^k}{k!}\right)dF_X(x)\right| \\ \leq & \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|hx|^{n+1}}{(n+1)!}dF_X(x)=\frac{|h|^{n+1}\beta^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Pero tenemos que

$$\phi_X^{(k)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^k e^{itx}dF_X(x) \tag{3.14}$$

de donde, por (3.13),

$$\phi_X(t+h)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi_X^{(k)}(t)}{k!}h^k\ ,\ |h|\leq r. \tag{3.15}$$

Si Y es otra variable aleatoria con los mismos momentos μ_k que X y función característica $\phi_Y(t)$, también se tiene que

$$\phi_Y(t+h)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi_Y^{(k)}(t)}{k!}h^k\ ,\ |h|\leq r. \tag{3.16}$$

Tomando $t=0$; como $\phi_X^{(k)}(0)=i^k\mu_k=\phi_Y^{(k)}(0)$ por (3.14), ϕ_X y ϕ_Y son iguales en $(-r,r)$ y de aquí tienen derivadas idénticas en ese intervalo. Para $\epsilon>0$, al tomar $t=r-\epsilon$ y $t=-r+\epsilon$ en (3.15) y (3.16) tenemos que ϕ_X y ϕ_Y son iguales en $(-2r+\epsilon,2r-\epsilon)$. Como ϵ es arbitrario entonces son iguales en $(-2r,2r)$. Usando el mismo argumento podemos concluir que también coinciden en $(-3r,3r)$ y siguiendo así, tenemos que ϕ_X y ϕ_Y son iguales para todos los reales y por el teorema

3.1 de la sección anterior X e Y tienen la misma distribución y así el teorema está demostrado.

Q.E.D.

Una variable aleatoria que satisface la conclusión del teorema 3.2 se dice que está determinada por sus momentos.

3.1.3 LA FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS

Un corolario de importancia fundamental al teorema 3.2, presentado en la sección anterior, es el hecho de que la función generadora de momentos de una variable aleatoria determina su distribución. En primer lugar recordemos su definición

Definición 3.2 (Funcion generadora de momentos) *Sea X es una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x)$. La función generadora de momentos de X se define como*

$$\begin{aligned} m_X(t) &:= E\left[e^{tX}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF_X(x). \end{aligned} \tag{3.17}$$

El resultado principal de esta sección será presentado como un teorema aunque realmente es un corolario del teorema 3.2.

Teorema 3.3 *Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x)$ y función generadora de momentos $m_X(t)$. Si $m_X(t)$ es finita en un intervalo $[-s_0, s_0]$, con $s_0 > 0$, entonces $F_X(x)$ está determinada por $m_X(t)$.*

Demostración.-

Suponga que $m_X(t)$ es finita en un intervalo $[-s_0, s_0]$, con $s_0 > 0$. Como

$$e^{|sx|} \leq e^{sx} + e^{-sx}$$

y e^{sx} y e^{-sx} son integrables con respecto a $F_X(x)$, así también es integrable la función

$$e^{|sx|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|sx|^k}{k!}.$$

Luego por el teorema de la convergencia dominada

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] \\ &= E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\frac{(tX)^k}{k!}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E\left[X^k\right]}{k!} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{k!} t^k \end{aligned} \tag{3.18}$$

y de esta representación sabemos que $m_X^{(k)}(0) = \mu_k$. Como la función generadora de momentos, $m_X(t)$, es finita en un intervalo alrededor del cero, entonces la serie en (3.18) tiene un radio de convergencia positivo y el teorema 3.2 implica que los momentos, $m_X^{(k)}(0) = \mu_k$, caracterizan a la distribución de la variable aleatoria y por lo tanto la función generadora $m_X(t)$ también caracteriza a la distribución.

Q.E.D.

Al igual que las caracterizaciones basadas en la función característica, este resultado es de bastante utilidad ya que si al obtener la función generadora de momentos de una variable aleatoria reconocemos que pertenece a la función generadora de momentos de una clase especial de distribuciones entonces tendremos que la distribución de la variable aleatoria será de esa clase.

3.1.4 CARACTERIZACIONES BASADAS EN LAS ESTADÍSTICAS DE ORDEN

En primer lugar mencionamos las propiedades generales y resultados básicos para las estadísticas de orden.

Sean X_1, X_2,..., X_n variables aleatorias independientes, con la misma función de distribución $F(x)$ y función de densidad de probabilidad $f(x)$. Las estadísticas de orden de estas variables aleatorias se definen como las variables aleatorias $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ que son las $X_i's$ arregladas en orden creciente. La función de distribución acumulativa de la $i-$ésima de estas estadísticas de orden, $X_{i:n}$, está dada por

$$\begin{aligned} F_i(x) \quad : \quad &= P\left[X_{i:n} \leq x\right] \\ &= P\left[\begin{array}{c} \text{al menos } i \text{ de las } X's \\ \text{sean menores que } x \end{array}\right] \\ &= \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j \left(1 - F(x)\right)^{n-j} \end{aligned} \tag{3.19}$$

y la función de densidad de probabilidad está dada por

$$f_{X_{i:n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} F(x)^{i-1} (1 - F(x))^{n-i} f(x). \tag{3.20}$$

Ahora, si $1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leq n$, entonces la función de densidad conjunta de $X_{r_1:n}$, $X_{r_2:n}, \ldots,$ $X_{r_k:n}$ es, para $-\infty = x_0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k < x_{k+1} = \infty$, $r_0 = 0$ y $r_{k+1} = n+1$

$$f_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = n! \prod_{i=0}^{k} f(x_i) \prod_{i=0}^{k} \frac{[F(x_{i+1}) - F(x_i)]^{r_{i+1}-r_i-1}}{(r_{i+1} - r_i - 1)!}. \tag{3.21}$$

En particular, la densidad conjunta de las n estadísticas de orden es

$$f_{1,2,\ldots,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n! f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n).$$

El primer resultado basado en (3.21) es dando en el siguiente teorema.

Teorema 3.4 *Sea X_1, $X_2, \ldots$, X_n una muestra aleatoria de una distribución exponencial, $F(x) := 1 - e^{-\sigma x}$, $\sigma > 0$; $x > 0$, y sean $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ las correspondientes estadísticas de orden. Entonces las diferencias*

$$d_{i:n} := X_{i+1:n} - X_{i:n},\ X_{0:n} := 0,\ i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \tag{3.22}$$

son variables aleatorias independientes con distribución exponencial

$$P[d_{i:n} \leq x] = 1 - e^{-\sigma(n-i)x}\ ,\ x > 0.$$

Demostración.-

Para d_0, $d_1, \ldots, d_n$ números no negativos tenemos por (3.21) que

$$\begin{aligned}
f_{d_{0:n},d_{1:n},\ldots,d_{n-1:n}}(d_0,d_1,\ldots,d_n) &= f_{1,2,\ldots,n}\left(d_0,\sum_{j=0}^{1}d_j,\ldots,\sum_{j=0}^{n-1}d_j\right)\\
&= n!f(d_0)\,f\left(\sum_{j=0}^{1}d_j\right)\cdots f\left(\sum_{j=0}^{n-1}d_j\right)\\
&= n!\prod_{i=1}^{n}f\left(\sum_{j=0}^{i-1}d_j\right)\\
&= n!\prod_{i=1}^{n}\sigma e^{-\sigma\sum_{j=0}^{i-1}d_j}\\
&= n!\sigma^n e^{-\sigma\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}d_j}\\
&= n!\sigma^n e^{-\sigma\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)d_i}\\
&= n!\prod_{i=0}^{n-1}\sigma e^{-\sigma(n-i)d_i}.
\end{aligned}$$

Entonces la función de densidad conjunta de $d_{0:n}$,$d_{1:n}, \ldots$,$d_{n-1:n}$ es producto de funciones de cada uno de los argumentos y por lo tanto estas son variables aleatorias independientes y

$$f_{d_{i:n}}(x)=\sigma e^{-\sigma(n-i)x},\ x>0$$

o

$$P\left[d_{i:n}\leq x\right]=1-e^{-\sigma(n-i)x},\ x>0.$$

Q.E.D.

Como vimos en la sección 1.1.4, cualquier variable aleatoria X puede ser transformada a una variable aleatoria exponencial estándar mediante la transformación

$$Y := -\log F(X)$$

o

$$Y := -\log(1 - F(x)).$$

Este hecho también nos permite transformar las estadísticas de orden de cualquier muestra aleatoria en estadísticas de orden de una muestra aleatoria de la distribución exponencial estándar y aprovechar sus propiedades. Ya que la función $-\log(1 - F(x))$ es creciente, tenemos que si $X_{i:n}$ es la i-ésima estadística de orden de una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución $F(x)$, entonces $X^*_{i:n} := -\log(1 - F(X_{i:n}))$ es la i-ésima estadística de orden de una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución exponencial estándar. Por ejemplo, si X_1, X_2,..., X_n es una muestra aleatoria de la distribución $F(x) = x$, $x \in [0, 1]$ y $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ son las correspondientes estadísticas de orden, entonces

$$X^*_{i:n} := -\log(1 - X_{i:n}), \, i \in \{1, \ldots, n\}$$

son las correspondientes estadísticas de orden para la distribución exponencial y por el teorema 3.4 las diferencias

$$\begin{aligned} d^*_{i:n} \quad : &= X^*_{i+1:n} - X^*_{i:n} \\ &= -\log\left(\frac{1 - X_{i+1:n}}{1 - X_{i:n}}\right) \, , \; i = 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

son independientes, lo que implica que los cocientes

$$\frac{1-X_{i+1:n}}{1-X_{i:n}}\ ,\ i=1,\ldots,n-1$$

son variables aleatorias independientes. El siguiente resultado básico sobre estadísticas de orden se basa en este hecho.

Teorema 3.5 *Sea X_1, X_2,..., X_n una muestra aleatoria de la distribución $F(x)$ y $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ las correspondientes estadísticas de orden. Entonces la distribución condicional*

$$P\left[X_{r:n} \leq x \mid X_{k:n} = y\right],\ r > k,$$

es la misma que la distribución de la $(r-k)$-ésima estadística de orden en una muestra de tamaño $n-k$ de una distribución

$$F^*(x) = \begin{cases} \frac{F(x)-F(y)}{1-F(y)} \text{ si } x \geq y \\ 0 \text{ e.o.c.} \end{cases}.$$

Demostración.-

Sea $r > k$. Como mencionamos en el párrafo anterior, tenemos que

$$X^*_{k:n} := -\log\left(1-F\left(X_{k:n}\right)\right)$$

y

$$X^*_{r:n} := -\log\left(1-F\left(X_{r:n}\right)\right)$$

son la k-ésima y la r-ésima estadísticas de orden de una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución exponencial estándar, respectivamente. Entonces, por el teorema 3.4, tenemos que

$$X^*_{k:n} = \sum_{i=0}^{k-1} d^*_{i:n}$$

y

$$X^*_{r:n} = \sum_{i=0}^{r-1} d^*_{i:n}$$

donde las variables aleatorias $d^*_{i:n}$'s son independientes y $d^*_{i:n} \sim \exp(n-i)$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Entonces

$$\begin{aligned}
& P\left[X_{r:n} \leq x \mid X_{k:n} = y\right] \\
= \;& P\left[-\log\left(1 - F\left(X_{r:n}\right)\right) \leq -\log\left(1 - F\left(x\right)\right) \mid -\log\left(1 - F\left(X_{k:n}\right)\right) = -\log\left(1 - F\left(y\right)\right)\right] \\
= \;& P\left[X^*_{r:n} \leq -\log\left(1 - F\left(x\right)\right) \mid X^*_{k:n} = -\log\left(1 - F\left(y\right)\right)\right] \\
= \;& P\left[\sum_{i=0}^{r-1} d^*_{i:n} \leq -\log\left(1 - F\left(x\right)\right) \mid \sum_{i=0}^{k-1} d^*_{i:n} = -\log\left(1 - F\left(y\right)\right)\right] \\
= \;& P\left[\sum_{i=0}^{k-1} d^*_{i:n} + \sum_{i=k}^{r-1} d^*_{i:n} \leq -\log\left(1 - F\left(x\right)\right) \mid \sum_{i=0}^{k-1} d^*_{i:n} = -\log\left(1 - F\left(y\right)\right)\right] \\
= \;& P\left[\sum_{i=k}^{r-1} d^*_{i:n} \leq -\log\left(1 - F\left(x\right)\right) + \log\left(1 - F\left(y\right)\right) \mid \sum_{i=0}^{k-1} d^*_{i:n} = -\log\left(1 - F\left(y\right)\right)\right] \\
= \;& P\left[\sum_{i=k}^{r-1} d^*_{i:n} \leq -\log\left(\frac{1 - F\left(x\right)}{1 - F\left(y\right)}\right)\right] \text{ si } x \geq y
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Pero $\sum_{i=k}^{r-1} d^*_{i:n} \sim \exp\left(\sum_{i=k}^{r-1} (n-i)\right)$. Por lo tanto (3.23) es igual a

$$P\left[X_{r:n} \leq x \mid X_{k:n} = y\right] \;=\; 1 - \exp\left\{\sum_{i=k}^{r-1} (n-i) \log\left(\frac{1 - F\left(x\right)}{1 - F\left(y\right)}\right)\right\}$$

$$= \quad 1 - \left(\frac{1-F(x)}{1-F(y)}\right)^{\sum_{i=k}^{r-1}(n-i)} \quad \text{si } x \geq y \tag{3.24}$$

Ahora, sea $Y_{r-k:n-k}$ la $(r-k)$-ésima estadística de orden de una muestra aleatoria de tamaño $n-k$ de la distribución

$$F^*(x) = \begin{cases} \frac{F(x)-F(y)}{1-F(y)} \text{ si } x \geq y \\ 0 \text{ e.o.c.} \end{cases}$$

La función de distribución de $Y_{r-k:n-k}$ está dada por

$$\begin{aligned} P[Y_{r-k:n-k} \leq x] &= P[-\log(1-F^*(Y_{r-k:n-k})) \leq -\log(1-F^*(x))] \\ &= P[X^*_{r-k:n-k} \leq -\log(1-F^*(x))] \\ &= P\left[\sum_{i=0}^{r-k-1} d^*_{i:n-k} \leq -\log(1-F^*(x))\right] \end{aligned} \tag{3.25}$$

Pero $\sum_{i=0}^{r-k-1} d^*_{i:n-k} \sim \exp\left(\sum_{i=0}^{r-k-1}(n-k-i)\right) = \exp\left(\sum_{i=k}^{r-1}(n-i)\right)$. Por lo tanto (3.25) es igual a

$$\begin{aligned} P[Y_{r-k:n-k} \leq x] &= 1 - \exp\left\{\sum_{i=k}^{r-1}(n-i)\log(1-F^*(x))\right\} \\ &= 1 - (1-F^*(x))^{\sum_{i=k}^{r-1}(n-i)} \\ &= 1 - \left(\frac{1-F(x)}{1-F(y)}\right)^{\sum_{i=k}^{r-1}(n-i)} \quad \text{si } x \geq y \end{aligned} \tag{3.26}$$

Podemos ver por tanto que (3.24) y (3.26) son iguales. Por lo tanto la distribución $P[X_{r:n} \leq x \mid X_{k:n} = y]$ es la misma que la distribución de la $(r-k)$-ésima estadística de orden de una muestra aleatoria de tamaño $n-k$ de la distribución

$$F^{*}(x)=\begin{cases}\frac{F(x)-F(y)}{1-F(y)} \text{ si } x\geq y\\ \\ 0 \text{ e.o.c.}\end{cases}$$

Q.E.D.-

Una de las caracterizaciones de la distribución exponencial que probamos en la sección 1.1.3 como el teorema 1.2 es la que establece que entre las funciones de distribución no degeneradas con soporte en $R^{+}\cup\{0\}$, únicamente la exponencial tiene la propiedad de que $nX_{1:n}$ se distribuye como la población para todo n. El siguiente teorema da una caracterización parecida que requiere hipótesis menos fuertes.

Teorema 3.6 *Sea X_1, X_2,..., X_n una muestra aleatoria de la distribución $F(x)$ y suponga que para alguna $n\geq 2$, $nX_{1:n}$ tiene la misma distribución $F(x)$. Si $F(x)$ es tal que $\lim_{x\to 0^{+}} F(x)/x=\sigma>0$, entonces $F(x)=1-e^{-\sigma x}$, $x>0$.*

Demostración.-

Sea $n(k):=n^{k}$, $k\geq 1$, donde $n\geq 2$ es fijo y cumple la hipótesis del teorema. Tenemos que si

$$\begin{aligned}
X_{1:n(k-1)}^{(1)} &:= \min\left\{X_1,X_2,\ldots,X_{n(k-1)}\right\}\\
X_{1:n(k-1)}^{(2)} &:= \min\left\{X_{n(k-1)+1},X_{n(k-1)+2},\ldots,X_{2n(k-1)}\right\}\\
&\vdots\\
X_{1:n(k-1)}^{(n)} &:= \min\left\{X_{(n-1)n(k-1)+1},X_{(n-1)n(k-1)+2},\ldots,X_{n(k)}\right\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} X_{1:n(k)} &:= \min\left\{X_1, X_2, \ldots, X_{n(k)}\right\} \\ &= \min\left\{X^{(1)}_{1:n(k-1)}, X^{(2)}_{1:n(k-1)}, \ldots, X^{(n)}_{1:n(k-1)}\right\} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Como las X_i's son independientes e identicamente distribuidas, así lo son las $X^{(j)}_{1:n(k-1)}$'s. De aquí que, para $k = 2$, cada $X^{(j)}_{1:n(k-1)}$ se distribuye como $X_{1:n}$ que por hipótesis tiene la distribución $F(nx)$. Por lo tanto

$$(1 - F(x))^n = 1 - F(nx)$$

y por (3.27)

$$P\left[X_{1:n(2)} \geq x\right] = (1 - F(nx))^n = 1 - F\left(n^2 x\right)$$

Luego por inducción tenemos que

$$P\left[X_{1:n(k)} \geq x\right] = (1 - F(x))^{n(k)} = 1 - F(n(k)\,x)$$

y entonces, por un lado

$$P\left[X_{1:n(k)} \leq \frac{x}{n(k)}\right] = 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n(k)}\right)\right)^{n(k)}$$

y por otro

$$P\left[X_{1:n(k)} \leq \frac{x}{n(k)}\right] = F(x),$$

donde $n \geq 2$. Así

$$F(x) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n^k}\right)\right)^{n^k} \text{ , para todo } k \geq 1$$

Como $\lim_{x \to 0^+} F(x)/x = \sigma$, entonces

$$F\left(\frac{x}{n^k}\right) = \frac{\sigma x}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ , } x > 0$$

lo que implica que

$$F(x) = 1 - \left(1 - \frac{\sigma x}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right)\right)^{n^k} \text{ , } x > 0$$

y como

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{\sigma x}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right)\right)^{n^k} = e^{-\sigma x}, \; x > 0$$

entonces

$$F(x) = 1 - e^{-\sigma x}, \; x > 0$$

Q.E.D.

Otra caracterización en términos de estadísticas de orden es dada en el siguiente teorema.

Teorema 3.7 *Sea $F(x)$ absolutamente continua con función de densidad $f(x) = F'(x)$. Suponga que $F(0) = 0$, $F(x)$ es estrictamente creciente para todo $x > 0$ y la tasa de riesgo*[1]

$$H(x) := \frac{f(x)}{1 - F(x)} = -\frac{d}{dx} \log(1 - F(x)) \tag{3.28}$$

[1] *Hazard rate*

es monótona para todo $x \geq 0$. Si para alguna $n \geq 2$, $nd_{0:n} = nX_{1:n}$ y $(n-1)\,d_{1:n} = (n-1)\,(X_{2:n} - X_{1:n})$ se distribuyen identicamente, entonces $F(x) = 1 - e^{-\sigma x}$, $x > 0$ para algún $\sigma > 0$.

Demostración.-

Tenemos que

$$\begin{aligned} P[nd_{0:n} \leq x] &= P[nX_{1:n} \leq x] \\ &= P\left[X_{1:n} \leq \frac{x}{n}\right] \\ &= 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \end{aligned} \tag{3.29}$$

y

$$\begin{aligned} P[(n-1)\,d_{1:n} \leq x] &= P\left[(X_{2:n} - X_{1:n}) \leq \frac{x}{n-1}\right] \\ &= \int_0^\infty P\left[(X_{2:n} - X_{1:n}) \leq \frac{x}{n-1} \mid X_{1:n} = y\right] f_{X_{1:n}}(y)\,dy \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la expresión (3.20) para $f_{X_{i:n}}$ y aplicando el teorema 3.5, tenemos que

$$\begin{aligned} P[(n-1)\,d_{1:n} \leq x] &= \int_0^\infty \left[1 - \left(\frac{1 - F\left(y + \frac{x}{n-1}\right)}{1 - F(y)}\right)^{n-1}\right] n\,(1 - F(y))^{n-1} f(y)\,dy \\ &= 1 - n\int_0^\infty \left(\frac{1 - F\left(y + \frac{x}{n-1}\right)}{1 - F(y)}\right)^{n-1} (1 - F(y))^{n-1} f(y)\,dy. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Como

$$\left(1-F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n}=n\int_{0}^{\infty}\left(1-F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n}(1-F(y))^{n-1}f(y)\,dy$$

de (3.29) y (3.30) y la suposición que $nd_{0:n}=nX_{1:n}$ y $(n-1)\,d_{1:n}$ se distribuyen identicamente, entonces

$$\int_{0}^{\infty}k(x,y,n)(1-F(y))^{n-1}f(y)\,dy=0 \text{ para todo } x\geq 0 \tag{3.31}$$

donde

$$k(x,y,n)=\left(1-F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n}-\left(\frac{1-F\left(y+\frac{x}{n-1}\right)}{1-F(y)}\right)^{n-1}.$$

Como la tasa de riesgo $H(x)=-\frac{d}{dx}\log(1-F(x))$ es monótona, $\log(1-F(x))$ es cóncava o convexa de acuerdo a si $H(x)$ es creciente o decreciente. Sin perdida de generalidad supongamos que $H(x)$ es creciente. Entonces $\log(1-F(x))$ es cóncava y por tanto

$$\log\left(1-F\left(y+\frac{x}{n}\right)\right)\geq\frac{1}{n}\log(1-F(y))+\frac{n-1}{n}\log\left(1-F\left(y+\frac{x}{n-1}\right)\right),$$

ya que $y+\frac{x}{n}=\frac{1}{n}(y)+\frac{n-1}{n}\left(y+\frac{x}{n-1}\right)$, es decir $y+\frac{x}{n}$ es una combinación convexa de y y $y+\frac{x}{n-1}$, y una función $h(x)$ es cóncava si para cualquier combinación convexa $\alpha x+(1-\alpha)y$ se tiene que $h(\alpha x+(1-\alpha)y)\geq\alpha h(x)+(1-\alpha)h(y)$. Lo anterior equivale a

$$\left(1-F\left(y+\frac{x}{n}\right)\right)^{n}\geq(1-F(y))\left(1-F\left(y+\frac{x}{n-1}\right)\right)^{n-1}$$

Por lo tanto

$$k(x,y,n)\geq\left(1-F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n}-\left(\frac{1-F\left(y+\frac{x}{n}\right)}{1-F(y)}\right)^{n}\geq 0 \tag{3.32}$$

donde la última desigualdad se sigue otra vez del hecho que $\log(1-F(x))$ es cóncava.. Ahora, (3.32) implica que

$$k(x, y, n) = 0 \text{ para todas } x,\ y\ \geq 0$$

que a su vez implica que

$$1 - F\left(y + \frac{x}{n-1}\right) = (1 - F(y))\left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{3.33}$$

y luego para $y = 0$, como $F(0) = 0$ por hipótesis, entonces

$$1 - F\left(\frac{x}{n-1}\right) = \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

y de (3.33) se tiene

$$1 - F\left(y + \frac{x}{n-1}\right) = (1 - F(y))\left(1 - F\left(\frac{x}{n-1}\right)\right)$$

que es la ecuación de carencia de memoria (1.4). Como en este caso $F(x)$ es continua por hipótesis, entonces no es degenerada y entonces la única solución a la ecuación de carencia de memoria es la distribución exponencial.

El caso cuando $H(x)$ es decreciente es similar al argumento anterior.

Q.E.D.

Ahora presentamos un resultado que podría ser un recíproco para el teorema 3.4 cuando $n = 2$.

Teorema 3.8 *Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con función de distribución continua $F(x)$. Suponga que $F(0) = 0$ y que $F(x)$ es estrictamente creciente para todo $x > 0$.*

Entonces $X_{2:2} - X_{1:2}$ y $X_{1:2}$ son independientes si y sólo si $F(x) = 1 - e^{-\sigma x}$, $x > 0$, para algún $\sigma > 0$.

Demostración.-

Como ya mencionamos, el caso especial $n = 2$ del teorema 3.4 implica que $X_{2:2} - X_{1:2}$ y $X_{1:2}$ son independientes para la distribución exponencial $F(x) = 1 - e^{-\sigma x}$, $x > 0$; $\sigma > 0$.

Ahora, suponga que $X_{1:2}$ y $X_{2:2} - X_{1:2}$ son independientes. Entonces

$$P[X_{2:2} - X_{1:2} \leq x \mid X_{1:2} = z] = P[X_{2:2} - X_{1:2} \leq x] \tag{3.34}$$

para casi todo z. Por otro lado

$$\begin{aligned} P[X_{2:2} - X_{1:2} \leq x \mid X_{1:2} = z] &= P[X_{2:2} \leq x + z \mid X_{1:2} = z] \\ &= P[X_{1:1}^* \leq x + z] \end{aligned}$$

donde, por el teorema 3.5, $X_{1:1}^*$ es la estadística de orden indicada de una población que proviene de una distribución

$$F^*(x) = \begin{cases} \frac{F(x)-F(z)}{1-F(z)} \text{ si } x \geq z \\ \\ 0 \text{ e.o.c.} \end{cases}$$

Luego (3.34) queda

$$\frac{F(x+z) - F(z)}{1 - F(z)} = P[X_{2:2} - X_{1:2} \leq x] \tag{3.35}$$

para todo $x \geq 0$ y casi todo $z \geq 0$. Haciendo $z \to 0$ esto implica que

$$P[X_{2:2} - X_{1:2} \leq x] = F(x). \tag{3.36}$$

Así que si escribimos

$$\frac{F(x+z) - F(z)}{1 - F(z)} = 1 - \frac{1 - F(x+z)}{1 - F(z)}$$

entonces (3.35) y (3.36) implican que

$$1 - F(x+z) = (1 - F(x))(1 - F(z))$$

para todo $x \geq 0$ y $z \geq 0$. Esta es la ecuación de carencia de memoria y como por hipótesis $F(x)$ es no degenerada entonces es una distribución exponencial.

Q.E.D.

3.2 CARACTERIZACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL GENERALES Y POR VALORES RECORD

Un resultado que probamos en la sección 2.2.6 es que si tenemos una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ independientes con distribución común exponencial estándar y $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$ es la correspondiente sucesión de valores Record, entonces se tiene que la sucesión de espaciamientos entre Records $\{S_n\}_{n\geq 0}$, donde

$$S_0 = X^{(0)}$$

y para $n \geq 1$

$$S_n = X^{(n)} - X^{(n-1)},$$

es una sucesión de variables aleatorias independientes y con distribución común exponencial estándar. Una pregunta que surge naturalmente del resultado anterior es la siguiente: si se tiene que la sucesión de espaciamientos $\{S_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes y con distribución común exponencial entonces la distribución común de la sucesión $\{X_n\}_{n\geq 1}$ será exponencial?. La respuesta a esta pregunta no es solamente afirmativa sino que, de manera más sorprendente, ha sido probado que, en el caso de que la función de distribución común de las variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ sea continua, una condición mucho mas débil sobre los espaciamientos caracteriza la distribución de la sucesión como una exponencial. Este resultado es dado en el siguiente teorema[Kotz]:

Teorema 3.9 (Tata 1969) *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con función de distribución común continua $F(x)$ y función de densidad $f(x)$. Entonces $F(x)$ es exponencial si y sólo si $S_0 = X^{(0)}$ y $S_1 = X^{(1)} - X^{(0)}$ son independientes.*

Demostración.-

La condición necesaria de este teorema fue probada en el teorema 2.8.

Ahora supongamos que $S_0 = X^{(0)}$ y $S_1 = X^{(1)} - X^{(0)}$ son variables aleatorias independientes. Entonces si $y > 0$ se tiene que

$$f_{S_0,S_1}(x,y) = f_{S_0}(x)\, f_{S_1}(y)\,. \tag{3.37}$$

Utilizando la técnica del Jacobiano se tiene que

$$\begin{aligned} f_{S_0,S_1}(x,y) &= f_{X^{(0)},X^{(1)}-X^{(0)}}(x,y) \\ &= f_{X^{(0)},X^{(1)}}(x,x+y) \\ &= f_{X^{(0)}}(x)\,P(x,x+y) \\ &= f(x)\,\frac{f(x+y)}{1-F(x)} \end{aligned}$$

entonces como $f_{S_0}(x) = f(x)$ se tiene de (3.37) que

$$f(x)\,\frac{f(x+y)}{1-F(x)} = f(x)\,f_{S_1}(y)$$

lo que implica que

$$\frac{f(x+y)}{1-F(x)} = f_{S_1}(y)$$

e integrando con respecto a y se tiene que para todo $u > 0$

$$\int_0^u \frac{f(x+y)}{1-F(x)}dy = \int_0^u f_{S_1}(y)\,dy$$

y luego

$$\frac{F(x+u)-F(x)}{1-F(x)} = F_{S_1}(u) \qquad u > 0. \tag{3.38}$$

Usando la continuidad de $F(x)$ tenemos que si hacemos $x \to 0$ entonces

$$F_{S_1}(u) = \frac{F(u)-F(0)}{1-F(0)}$$

$$= \quad 1 - \frac{1 - F(u)}{1 - F(0)} \tag{3.39}$$

pero también por (3.38) se tiene que

$$F_{S_1}(u) = 1 - \frac{1 - F(x+u)}{1 - F(x)}. \tag{3.40}$$

Igualando (3.39) y (3.40) obtenemos que

$$\frac{1 - F(x+u)}{1 - F(x)} = \frac{1 - F(u)}{1 - F(0)} \tag{3.41}$$

Si hacemos $G(z) = \frac{1-F(z)}{1-F(0)}$ entonces de (3.41) se tiene que

$$G(x+u) = G(x)\,G(u). \tag{3.42}$$

Podemos reconocer a (3.42) como la ecuación funcional de Cauchy para la carencia de memoria que sabemos tiene como única solución una función exponencial ya que $F(x)$ no es degenerada y así no lo es $G(x)$. Despejando a $F(x)$ de $G(x)$ se tiene que también es exponencial. Por lo tanto la prueba está completa.

Q.E.D.

Como mencionamos anteriormente, estamos interesados en caracterizar la distribución común de una sucesión de variables aleatorias independientes usando solamente las propiedades distribucionales de los espaciamientos definidos en la sección 2.2.4. Si suponemos que $S_1 := X^{(1)} - X^{(0)}$ tiene una distribución exponencial entonces de los teoremas 2.8 y 2.9 podemos tener que la población tiene una distribución exponencial o Gumbel. Sin embargo bajo ciertas condiciones de regularidad se puede concluir que es exponencial.

Teorema 3.10 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes no negativas con función de distribución común continua $F(x)$ y función de densidad $f(x)$. Si $S_1 := X^{(1)} - X^{(0)}$ tiene una distribución exponencial estándar y si la tasa de riesgo $H(x)$, definida en (3.28), es monótona, entonces $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$.*

Demostración.-

Sin perdida de generalidad suponga que la tasa de riesgo,

$$H(x) := \frac{f(x)}{1 - F(x)} = -\frac{d}{dx} \log(1 - F(x)),$$

es monótona creciente. Tenemos por la hipótesis del teorema y (2.24)

$$\begin{aligned}
e^{-s} &= f_{S_1}(s) = \int_0^\infty f(x+s) \frac{f(x)}{1 - F(x)} dx \\
&= \int_0^\infty H(s+x) H(x) (1 - F(s+x)) \, dx \\
&\geq H(s) \int_0^\infty H(x) (1 - F(s+x)) \, dx \\
&= H(s) P[S_1 > s] \\
&= H(s) e^{-s}, \, s > 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto $H(s) \leq 1$.

Ahora, si $x > 0$

$$0 < e^{-y} - \int_x^\infty f(u+y)\,H(u)\,du = \int_0^x f(u+y)\,H(u)\,du \underset{x \to 0}{\to} 0 \tag{3.43}$$

y

$$0 < e^{-y} - \int_x^\infty (1 - F(y+u))\,H(u)\,du = \int_0^x (1 - F(y+u))\,H(u)\,du \underset{x \to 0}{\to} 0. \tag{3.44}$$

Como $H(y) \leq 1$, entonces $1 - F(y+u) \geq f(y+u)$ y esto implica que

$$-\int_x^\infty (1 - F(y+u))\,H(u)\,du \leq -\int_x^\infty f(y+u)\,H(u)\,du$$

que a su vez implica que

$$1 \leq \frac{e^{-y} - \int_x^\infty f(y+u)\,H(u)\,du}{e^{-y} - \int_x^\infty (1 - F(y+u))\,H(u)\,du} = \frac{\int_0^x f(u+y)\,H(u)\,du}{\int_0^x (1 - F(u+y))\,H(u)\,du}.$$

Por la regla de L'Hopital, de (3.43) y (3.44) se tiene que

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(u+y)\,H(u)\,du}{\int_0^x (1 - F(u+y))\,H(u)\,du} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+y)\,H(x)}{(1 - F(x+y))\,H(x)} = H(y)$$

Por lo tanto $H(y) \geq 1$, para todo y. Como también probamos que $H(y) \leq 1$, para todo y, entonces podemos concluir que $H(y) = 1$ para todo y. Por lo tanto tenemos la siguiente ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx} \log(1 - F(x)) = 1$$

cuya solución es

$$F(x) = 1 - e^{-x}$$

El caso cuando $H(x)$ es decreciente es similar al argumento anterior.

Q.E.D.

Si se supone que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común exponencial(λ). Como $\sum_{j=1}^{i} X_j \sim \Gamma(i,\lambda)$ y $X_{i+1} \sim \Gamma(1,\lambda)$ entonces[Mood]

$$Y_i := \frac{\sum_{j=1}^{i} X_j}{\sum_{j=1}^{i+1} X_j} = \frac{\sum_{j=1}^{i} X_j}{\sum_{j=1}^{i} X_j + X_{i+1}} \sim \text{Beta}(i,1).$$

Ahora como la función de distribución de la Beta$(i,1)$ es

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{B(i,1)} \int_0^x t^{i-1} dt \\ &= x^i \end{aligned}$$

por lo tanto las variables aleatorias

$$Z_i := F(Y_i) = \left(\frac{\sum_{j=1}^{i} X_j}{\sum_{j=1}^{i+1} X_j} \right)^i \tag{3.45}$$

son variables aleatoria con una distribución uniforme$(0,1)$. A continuación discutiremos las caracterizaciones de la distribución exponencial basadas en estas variables aleatorias.

Teorema 3.11 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas no negativas tales que las variables aleatoria Z_1 y Z_2, definidas en (3.45), son independientes y con distribución común uniforme en el intervalo $(0,1)$. Entonces la distribución común de las variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es exponencial(λ), $\lambda > 0$.*

Demostración.-

Para tres variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas X_1, X_2 y X_3, Kotlarski (1967) [kotlarski] muestra que si conocemos la distribución de X_2/X_1 y X_3/X_1 es suficiente para determinar la distribución común de las $X_i's$. Es claro también que la distribución de

$$Z_1 = \left(1 + \frac{X_2}{X_1}\right)^{-1}$$

y

$$Z_2 = \left(1 + \frac{X_2}{X_1}\right) / \left(1 + \frac{X_2}{X_1} + \frac{X_3}{X_1}\right)$$

y su distribución conjunta determinan la distribución de X_2/X_1 y X_3/X_1 y de aquí la distribución común de las $X_i's$, excepto por la escala.

Q.E.D.

El siguiente resultado afirma que no es necesaria la suposición de que las $Z_i's$ sean en independientes en el teorema 3.11 para caracterizar la distribución común de las $X_i's$.

Teorema 3.12 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas no negativas tales que para cada n, $Z_n \sim U(0,1)$ donde Z_n está definida en (3.45). Si*

$E[X_1] < \infty$, *entonces la distribución común de las* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *es exponencial*(λ) *para algún* $\lambda > 0$.

Demostración.-

Tenemos por hipótesis que

$$Z_{n-1} = \left(1 - \frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)^{n-1} \sim U(0,1),$$

para todo n. Sin embargo, por la ley fuerte de los grande números $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{c.s.}{\rightarrow} E[X_1]$ y así

$$\left(1 - \frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{X_1}{n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}\right)^{n-1} \underset{c.s.}{\rightarrow} e^{-\frac{X_1}{E[X_1]}}$$

Por lo tanto $e^{-\frac{X_1}{E[X_1]}}$ tiene distribución $U(0,1)$ y así X_1 tiene distribución exponencial(λ).

Q.E.D.

Otro resultado es el siguiente

Teorema 3.13 *Suponga que* X_1 *y* X_2 *son variables aleatorias absolutamente continuas independientes e identicamente distribuidas tales que*

$$\frac{X_1}{X_1 + X_2} \stackrel{d}{=} e^{-X_1/E[X_1]} \tag{3.46}$$

Suponga además que la densidad común de X_1 *y* X_2, $f(x)$, *es logaritmicamente subaditiva, es decir*

$$f(x_1)\, f(x_2) \leq f(x_1 + x_2) \ \text{ para todos } x_1,\, x_2 > 0$$

y que $f(0)>0$. *Entonces necesariamente* $X_i \sim$*exponencial*(λ).

Demostración.-

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $E[X_1]=1$. La condición(3.46) es equivalente a

$$f(-\log y)\frac{1}{y}=\int_0^\infty f(xy)\,f(x(1-y))\,xdx \text{ para } x>0 \tag{3.47}$$

Ahora sea $z:=-\log y$ y defina

$$h(z)=e^z f(z)$$

Como $f(z)$ es logaritmicamente subaditiva, así lo es $h(z)$. Con esta nueva notación tenemos que (3.47) es equivalente a

$$h(z)=\int_0^\infty h\left(e^{-z}x\right)h\left(\left(1-e^{-z}\right)x\right)xe^{-x}dx \tag{3.48}$$

Si hacemos $z\to 0$ en (3.48) tenemos que

$$h(0)=h(0)\int_0^\infty h(x)\,xe^{-x}dx$$

y como por hipótesis $f(0)>0$, esto implica que

$$\int_0^\infty h(x)\,xe^{-x}dx=1$$

Sin embargo por la subaditividad logarítmica de $h(z)$,

$$\int_0^\infty h\left(e^{-z}x\right)h\left(\left(1-e^{-z}\right)x\right)xe^{-x}dx \ \le\ \int_0^\infty h\left(e^{-z}x+\left(1-e^{-z}\right)x\right)xe^{-x}dx$$

$$= \int_0^{\infty} h(x)\, x e^{-x} dx = 1.$$

Por lo tanto, por (3.48), $h(z) \leq 1$ para todo z. Consecuentemente $f(z) \leq e^{-z}$ para todo z, y como $\int_0^{\infty} e^{-z} dz = 1$ entonces se debe tener que $f(z) = e^{-z}$ para casi todo z.

Q.E.D.

3.3 CARACTERIZACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN GUMBEL POR VALORES RECORD

Nuestro primer resultado de importancia es el siguiente[Villaseñor]:

Teorema 3.14 *Supóngase que S_1 y $2S_2$ son variables aleatorias independientes y con distribución común exponencial estándar. Además, suponga que $f(x) / [e^x (1 - F(x))]$ crece cuando x crece y*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)\, e^{-x} = \lambda > 0$$

entonces las variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ tienen una distribución común Gumbel (posiblemente trasladada).

Demostración.-

Introduzcamos las nuevas variables aleatorias $Y_n = e^{X_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ y sea $\left\{Y^{(n)}\right\}_{n \geq 1}$ la sucesión de correspondientes valores Record. Es claro que Y_n se distribuirá como una variable aleatoria exponencial trasladada si y solo si X_n se distribuye como una variable aleatoria Gumbel. De la hipótesis de que $S_1 \stackrel{d}{=} 2S_2 \sim \exp(1)$ se tiene que

$$U_0 = e^{-S_1} = \frac{Y^{(0)}}{Y^{(1)}} \text{ y } U_1 = e^{-2S_2} = \left(\frac{Y^{(1)}}{Y^{(2)}}\right)^2 \tag{3.49}$$

son variables aleatorias independientes y distribuidas uniformemente en el intervalo $(0,1)$.

Si $F(\cdot)$ y $f(\cdot)$ son la función de distribución y la función de densidad comunes de las variables aleatorias Y_n's entonces si aplicamos el método del Jacobiano, (3.49) se reduce a

$$\begin{aligned} f_{U_0,U_1}(u_0,u_1) &= \int_0^\infty \frac{f\left(u_0\sqrt{u_1}u_2\right)}{\left(1-F\left(u_0\sqrt{u_1}u_2\right)\right)} \frac{f\left(\sqrt{u_1}u_2\right)}{\left(1-F\left(\sqrt{u_1}u_2\right)\right)} f(u_2)\frac{u_2^2}{2}du_2 = 1 \\ 0 &< u_0 < 1,\ 0 < u_1 < 1 \end{aligned} \tag{3.50}$$

La condición de que $f(x)/[e^x(1-F(x))]$ crece cuando x crece es equivalente a la suposición de que $F(\cdot)$, la distribución común de las Y_n's es IFR. Es decir. la función $r(u) = \frac{f(u)}{(1-F(u))}$ es creciente. Si en (3.50) tomamos el límite cuando u_0 y $u_1 \downarrow 0$ se tiene que $\int_0^\infty f(u_2)\left(\frac{u_2^2}{2}\right)du_2 = \frac{1}{\lambda^2}$. Pero por IFR, $r(u) \geq \lambda$ para todo u y la igualdad se obtendrá en (3.50) si y solo si $r(u) \equiv \lambda$, es decir que $Y \sim \exp(\lambda)$. Por lo tanto las X_n's tendrán distribución Gumbel.

Q.E.D.

3.4 NUEVOS RESULTADOS

En el teorema 2.9 de la sección 2.2.7 probamos que si $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Gumbel estándar y $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$ la sucesión correspondiente de valores Record, entonces para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$nS_n = n\left(X^{(n)} - X^{(n-1)}\right) \sim \exp(1)$$

y las variables aleatorias de la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ son independientes. Al igual que antes podemos preguntarnos que condiciones sobre la sucesión $\{nS_n\}_{n\geq 1}$ son suficientes para caracterizar la distribución común de las variables aleatorias independientes $\{X_n\}_{n\geq 1}$. Obviamente el hecho de que cualesquiera dos de estas variables aleatorias iS_i y $i'S_{i'}$ sean independientes no caracteriza la distribución común de las variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ ya que tal independencia es observada tanto en el caso en que las variables aleatorias tienen distribución exponencial como en el caso en que tengan distribución Gumbel. También es claro que no se puede tener que en el caso de que las variables aleatorias tengan distribución común Gumbel las variables aleatorias S_0 y S_1 son independientes ya que el Teorema 3.9 implica que si esto ocurre entonces las variables aleatorias tienen distribución común exponencial. Si se tiene que S_0 y $nS_n\,(n \geq 1)$ son independientes, entonces, suponiendo la continuidad absoluta de la distribución común de las variables aleatorias, Nayak(1981) [Nayak] ha probado que la distribución común de las variables aleatorias es exponencial.

Si tenemos que $S_1 \sim \exp(1)$ es claro que no podemos caracterizar a la distribución Gumbel. Que pasa ahora si nos enfocamos sobre los espaciamientos S_1 y S_2?. Una respuesta está dada en el siguiente teorema

Teorema 3.15 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con función de distribución acumulativa $F(x)$, función de densidad de probabilidad $f(x)$ y sucesión de valores Record asociada $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\geq 0}$. Una condición necesaria y suficiente para* *que las variables aleatorias tengan una distribución Gumbel (posiblemente trasladada) es que* $S_1 := X^{(1)} - X^{(0)}$ *y* $2S_2 := 2\left(X^{(2)} - X^{(1)}\right)$ *sean independientes,* $f_{S_1}(0) = 1$ *y la función* $g(t) := e^{-t}(-\log(1 - F(t)))$ *sea monótona.*

Demostración.-

La condición necesaria de este teorema fue probada en el teorema 2.9 de la sección 2.2.7.

Ahora supongamos que $S_1 := X^{(1)} - X^{(0)}$ y $2S_2 := 2\left(X^{(2)} - X^{(1)}\right)$ son independientes, $f_{S_1}(0) = 1$ y la función $g(t) := e^{-t}(-\log(1 - F(t)))$ es monótona. Por (2.25) tenemos que la distribución conjunta de S_1 y S_2 está dada por

$$\begin{aligned} f_{S_1,S_2}(s,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{f(x+s)}{1-F(x)} \frac{f(x+s+t)}{1-F(x+s)})dx. \qquad (3.51) \\ s &> 0,\ t > 0 \end{aligned}$$

De esto podemos obtener fácilmente la distribución conjunta de S_1 y $2S_2$ como

$$\begin{aligned} f_{S_1,2S_2}(s,t) &= f_{S_1,S_2}\left(s, \frac{t}{2}\right)\frac{1}{2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{f(x+s)}{1-F(x)} \frac{f\left(x+s+\frac{t}{2}\right)}{1-F(x+s)} \frac{1}{2} dx. \qquad (3.52) \end{aligned}$$

De (2.24), tenemos que

$$f_{S_1}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{f(x+s)}{1-F(x)} dx \qquad s > 0 \qquad (3.53)$$

y

$$f_{S_2}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{-\log(1-F(x))\} f(x) f(x+s)}{1-F(x)} dx \qquad s > 0. \qquad (3.54)$$

Luego la densidad de $2S_2$ es

$$\begin{aligned} f_{2S_2}(s) &= f_{S_2}\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{-\log(1-F(x))\} f(x) f\left(x+\frac{s}{2}\right)}{1-F(x)} \frac{1}{2} dx \,. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Aprovechando estos resultados y haciendo uso de las hipótesis del torema se tiene que

$$\begin{aligned} f_{S_1,2S_2}(0,0) &= f_{2S_2}(0) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)^3}{(1-F(x))^2} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{f(x)^2 \log(1-F(x))}{1-F(x)} dt \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)^3 + f(x)^2 \log(1-F(x))(1-F(x))}{(1-F(x))^2} dt = 0 \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)^2 (f(x) + \log(1-F(x))(1-F(x)))}{(1-F(x))^2} dt = 0. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Sin perdida de generalidad podemos suponer que la función $g(t) := e^{-t}(-\log(1-F(t)))$ es creciente. Como la función $\log(x)$ es creciente, así lo es $\log(g(t)) = \log(-\log(1-F(t))) - t$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\log(-\log(1-F(x))) - x) &\geq 0 \\ &\Longrightarrow \frac{d}{dx}\log(-\log(1-F(x))) \geq \frac{d}{dx}x \\ &\Rightarrow \frac{\frac{d}{dx} - \log(1-F(x))}{-\log(1-F(x))} \geq 1 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dx} - \log(1-F(x)) \geq -\log(1-F(x)) \\ &\Longrightarrow \frac{f(x)}{1-F(x)} \geq -\log(1-F(x)) \qquad \forall x \in R \\ &\Longrightarrow -\frac{f(x)}{1-F(x)} \leq \log(1-F(x)) \qquad \forall x \in R \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) + \log(1 - F(x))(1 - F(x)) \geq 0 \qquad \forall x \in R.$$

Entonces tenemos que la función $k(x) := f(x) + \log(1 - F(x))(1 - F(x))$ toma el mismo signo en toda la línea real. Entonces, por (3.56), tenemos que

$$\begin{aligned}
k(t) &= f(t) + \log(1 - F(t))(1 - F(t)) = 0 \qquad \forall t \in R \\
&\Rightarrow -f(t) = \log(1 - F(t))(1 - F(t)) \\
&\Rightarrow -\frac{f(t)}{1 - F(t)} = \log(1 - F(t)) \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}\log(1 - F(t)) = \log(1 - F(t)) \\
&\Rightarrow \frac{\frac{d}{dt}\log(1 - F(t))}{\log(1 - F(t))} = 1 \\
&\Rightarrow \frac{-\frac{d}{dt}\log(1 - F(t))}{-\log(1 - F(t))} = 1 \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}\log(-\log(1 - F(t))) = 1 \\
&\Rightarrow \log(-\log(1 - F(t))) = t + c \qquad ; c\,\text{cte.} \\
&\Rightarrow \log(1 - F(t)) = -e^{t+c} \\
&\Rightarrow 1 - F(t) = e^{-e^{t+c}} \\
&\Rightarrow F(t) = 1 - e^{-e^{t+c}}
\end{aligned}$$

es decir, la distribución común de la sucesión de variables aleatorias es Gumbel (posiblemente trasladada).

El caso en que la función $g(t) := e^{-t}(-\log(1 - F(t)))$ es decreciente es análogo.

Q.E.D.

El siguiente resultado elimina la hipótesis del Teorema 3.14 que exige que $\lim_{x\to-\infty} f(x)\, e^{-x} = \lambda > 0$.

Teorema 3.16 *Supóngase que S_1 y $2S_2$ son variables aleatorias independientes y con distribución común exponencial estándar. Además, suponga que $f(x) / [e^x (1 - F(x))]$ es monótona. Entonces las variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ tienen una distribución común Gumbel (posiblemente trasladada).*

Demostración.-

Supongamos pues que S_1 y $2S_2$ son variables aleatorias independientes y con distribución común exponencial estándar. Como se menciono en la prueba del Teorema (3.14), si definimos $Y_n := e^{X_n}$ y $Y^{(n)} := e^{X^{(n)}}$, las variables aleatorias

$$U_0 := e^{-S_1} = \frac{Y^{(0)}}{Y^{(1)}} \text{ y } U_1 := e^{-2S_2} = \left(\frac{Y^{(1)}}{Y^{(2)}}\right)^2$$

son variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas sobre el intervalo $(0,1)$ y si F' y f son la función de distribución acumulativa y la función de densidad de las Y_n 's, entonces de (3.50) tenemos que

$$\begin{aligned} f_{U_0,U_1}(u_0,u_1) &= \int_0^\infty \frac{f(u_0\sqrt{u_1}u_2)}{(1-F'(u_0\sqrt{u_1}u_2))} \frac{f(\sqrt{u_1}u_2)}{(1-F'(\sqrt{u_1}u_2))} f(u_2)\frac{u_2^2}{2}du_2 = 1 \\ 0 &< u_0 < 1, 0 < u_1 < 1 \end{aligned}$$

y haciendo tender u_1 a 1 entonces tenemos que

$$\int_0^\infty \frac{f(u_0u_2)}{(1-F(u_0u_2))}\frac{f(u_2)}{(1-F(u_2))}f(u_2)\frac{u_2^2}{2}du_2 = 1\ ;0 < u_0 < 1$$

y al derivar con respecto a u_0 se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{f(u_2)}{(1-F(u_2))}f(u_2)\frac{u_2^2}{2}\left[\frac{\left(1-F(u_0u_2)\right)Df(u_0u_2)\,u_2 + f^2(u_0u_2)\,u_2}{(1-F(u_0u_2))^2}\right]du_2 = 0 \qquad (3.57)$$

$$;0 < u_0 < 1$$

y haciendo tender u_0 a 1 se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{\left(f(u_2)\right)^2\left[\left(1-F(u_2)\right)Df(u_2)+f^2(u_2)\right]}{(1-F(u_2))^3}\frac{u_2^3}{2}du_2 = 0. \qquad (3.58)$$

Como en el intervalo $[0,\infty)$ la función $g_1(u_2) := \frac{(f(u_2))^2u_2^3}{2(1-F(u_2))^3}$ es no negativa, entonces se tiene que si la función

$$h_1(u_2) = \left(1-F(u_2)\right)Df(u_2) + f^2(u_2) \qquad (3.59)$$

conserva el mismo signo para todo $u_2 \in [0,\infty)$ entonces por (3.58) se tiene que

$$\left[\left(1-F(u_2)\right)Df(u_2)+f^2(u_2)\right] = 0 \qquad ;u_2 \in [0,\infty)$$

lo que implica que

$$
\begin{aligned}
\frac{Df(u_2)}{f(u_2)} &= \frac{-f(u_2)}{(1-F'(u_2))} \\
&\Rightarrow \ D\log f(u_2) = D\log\left(1-F'(u_2)\right) \\
&\Rightarrow \ \log f(u_2) = \log\left(1-F'(u_2)\right) + c \quad ;c \text{ cte.} \\
&\Rightarrow \ f(u_2) = k\left(1-F'(u_2)\right) \qquad ;k \text{ cte. no negativa} \\
&\Rightarrow \ \frac{-f(u_2)}{(1-F'(u_2))} = -k \\
&\Rightarrow \ D\log\left(1-F'(u_2)\right) = -k \\
&\Rightarrow \ \log\left(1-F'(u_2)\right) = -ku_2 + c_1 \\
&\Rightarrow \ 1-F'(u_2) = k_1 e^{-ku_2} \\
&\Rightarrow \ F'(u_2) = 1-k_1 e^{-ku_2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto las variables aleatorias $Y_n := e^{X_n}$ tendrían distribución exponencial y así las variables aleatorias X_n tendrían una distribución Gumbel. El hecho de que la función $h_1(u_2) = \left(1-F'(u_2)\right) Df(u_2) + f^2(u_2)$ no cambie de signo en todos los reales positivos es equivalente al hecho de que la función

$$
h_2(u_2) := \frac{f(u_2)}{(1-F'(u_2))} \tag{3.60}
$$

sea monótona, que es decir que la distribución común de las Y_n tenga tasa de incremento creciente (IFR) o tasa de incremento decreciente (DFR). La relación entre las funciones de distribución y la función de densidad de probabilidad de las variables aleatorias originales $\{X_n\}_{n\geq 1}$, $F(\cdot)$ y $f(\cdot)$, con las de las nuevas variables aleatorias $Y_n := e^{X_n}$ son las siguientes

$$\begin{aligned} \acute{F}(u) \quad &: \quad = P[Y_n \leq u] \qquad ; u > 0 \\ &= \quad P\left[e^{X_n} \leq u\right] \\ &= \quad P[X_n \leq \log u] \\ &: \quad = F[\log u] \end{aligned}$$

y esto implica pues que

$$\acute{f}(u) = f(\log u)\frac{1}{u} \qquad ; u > 0.$$

También podemos escribir de forma mas cómoda las siguientes relaciones

$$F(x) = \acute{F}(e^x) \tag{3.61}$$

y

$$f(x) = \acute{f}(e^x)\, e^x. \tag{3.62}$$

Entonces la condición de que la función en 3.60 sea monótona es equivalente al hecho de que la función

$$\frac{f(x)}{e^x(1 - F(x))} \tag{3.63}$$

sea monótona. Por lo tanto el teorema queda demostrado.

Q.E.D.

BibliografíaVillase0xf1or

[1] Janos Galambos (1978). *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics.*Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, New York.

[2] Janos Galambos, Samuel Kotz (1978). Characterizations of Probability Distributions. *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag. New York, Berlin.

[3] José Villaseñor, Barry C. Arnold (1997). *Gumbel Records and Related Characterizations,* Advances in the Theory and Practice of Statistics: A Volume in Honor of Samuel Kotz. Cap. 27.

[4] Mood, A., Graybill, F., Boes, C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics,* tercera edición. McGraw-Hill International Editions. New York.

[5] Hoel, P. (1972). *Introduction to Stochastic Processes.* Houghton MifflinCompany. St. Louis, Mo.

[6]Johnson N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. *Continuous Univariate Distributions Vol 2,* segunda edición, New York: John Wiley & Sons

[7] Davis, R.. (1981). *Order Statistics.* John Wiley and Sons, New York

[9] Kotlarski, I. (1967). On characterizing the gamma and the normal distribution, *Pacific Journal of Mathematics, 20* , 69-76.

[10] Nayak S. S. (1981). Characterizations based on Record values, *Journal of the Indian Statistical Association, 19,* 123-127.

[11] Ahlfors, L.V. (1953). Complex Analysis, New York: Mc Graw Hill