102
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES

CUAUTITLAN

"ALGUNOS MODELOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES APLICADOS EN LA GESTION DE EMPRESAS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERA MECANICA ELECTRICISTA

P R E S E N T A :

GEORGINA ELIZABETH RODRIGUEZ CARMONA

ASESOR: ING. SERGIO PEDRO ACOSTA TORRES.

CUAUTITLAN IZCALLI, ESTADO DE MEXICO. 1998.

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN
UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR
DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

U. N. A. M.
FACULTAD DE ESTUDIOS

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS

DEPARTAMENTO DE
EXAMENES PROFESIONALES

DR. JUAN ANTONIO MONTARAZ CRESPO
DIRECTOR DE LA FES CUAUTITLAN
P R E S E N T E

ATN: Q. Ma. del Carmen García Mijares
Jefe del Departamento de Exámenes
Profesionales de la FES Cuautitlán

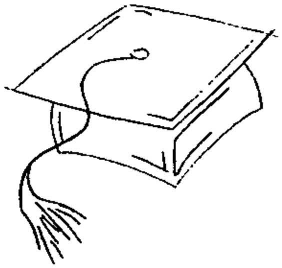
Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS:
"Algunos modelos de investigación de operaciones aplicados en la gestión de empresas".

que presenta la pasante: Georgina Elizabeth Rodríguez Carmona,
con número de cuenta: ________ para obtener el TITULO de:
Ingeniero Mecánico Electricista.

Considerando que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO

A T E N T A M E N T E.
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx., a 2 de Septiembre de 1998

PRESIDENTE	Lic. Valentín Roldan Vázquez	[firma]	4/SEPT./98
VOCAL	Ing. Sergio Pedro Acosta Torres	[firma]	18/SEPT/98
SECRETARIO	Ing. Antonio Trejo Lugo	[firma]	17/SEP/98
PRIMER SUPLENTE	Ing. Rogelio Ramos Carranza	[firma]	2/SEP/98
SEGUNDO SUPLENTE	Ing. José Luz Hernández Castillo	[firma]	3/Sept/98



A mis Padres:

Por haberme apoyado en todo, por su deseo de ver culminada esta etapa tan importante en mi vida.

Gracias.

A mi Tío: Dr. Rodolfo Carmona.

Por haberme apoyado, por la ayuda incondicional que siempre me brindó, por su cariño y por todo lo que me ha dejado, mil gracias tío; esta tesis está inspirada en ti.

Gracias.

A mis Hermanos:

Jorge, Coqui, Nestor y Nunis.

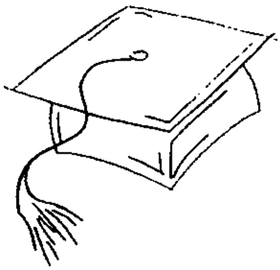
Por haberme apoyado y alentado para seguir adelante.

Gracias.

A Marco:

Por apoyarme en todo momento y ayudarme en la realización de este trabajo.

Gracias.



A mi Asesor:

Sergio P. Acosta por su apoyo y paciencia para culminar esta importante etapa.

Gracias.

A la Universidad Nacional Autónoma de México:

Por pertenecer a esta institución.

A la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán.:

Por instruirme para ser una profesional.

Gracias.

Al Profesor:

Víctor Flores Zavala por haberme dado consejos para la realización de este trabajo.

Gracias.

INDICE

INTRODUCCION

INTRODUCCION

Desde el advenimiento de la revolución industrial el mundo ha tenido un notable crecimiento en la magnitud y complejidad de las organizaciones. Las raíces de la investigación de operaciones surgen cuando se hicieron los primeros intentos para usar un punto de vista científico en la administración de las organizaciones. Sin embargo, generalmente se ha atribuido el principio de la actividad llamada investigación de operaciones a los servicios militares al principio de la II Guerra Mundial . Debido al esfuerzo de guerra, se presentó la urgente necesidad de asignar recursos escasos a las diversas operaciones militares y a las actividades dentro de cada operación, de una manera efectiva.

La investigación de operaciones puede describirse como un procedimiento científico para tomar decisiones que compensen las operaciones de sistemas de organización; se aplica a problemas que tienen que ver con la forma de conducir y coordinar las operaciones o actividades dentro de una organización.

El punto de vista de la investigación de operaciones es el del método científico. En particular, el proceso se inicia observando y formulando cuidadosamente el problema y, a continuación, se construye un modelo científico (típicamente matemático) que intenta abstraer la esencia del problema real. Entonces se establece la hipótesis de que este modelo es una representación suficientemente precisa de las características esenciales de la situación, de modo que las conclusiones (soluciones) que se obtengan a partir del modelo también son válidas para el problema real. Después se modifica esta hipótesis y se verifica mediante una experimentación adecuada. En consecuencia, para ser satisfactoria también debe proporcionar conclusiones positivas y comprensibles a quienes deben tomar las decisiones. Una característica es que intenta hallar la solución mejor, u óptima, para el problema bajo consideración; se interesa en la toma de decisiones óptimas en sistemas determinísticos y probabilistas que se originan en la vida real y en la modelación de los mismos. La contribución del procedimiento de investigación de operaciones se basa principalmente:

1. La estructuración de la situación de la vida real en un modelo matemático, abstrayendo los elementos esenciales de modo que pueda descubrirse una solución pertinente para los objetivos de quienes toman las decisiones. Esto implica examinar el problema en el contexto del sistema completo.

2. La exploración de la estructura de tales soluciones y el desarrollo de procedimientos sistemáticos para obtenerlas.

3. El desarrollo de una solución, incluyendo la teoría matemática, si es necesario, que proporciona un valor óptimo de la medida de deseabilidad de un sistema (o posiblemente la comparación de cursos de acción alternativos, evaluando su medida de deseabilidad).

CAPITULO 1

CAPITULO 1

BREVE BOSQUEJO HISTORICO DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.

1.1. ORIGENES DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.

A partir de la Revolución Industrial, los pequeños talleres de los artesanos del siglo pasado han evolucionado hasta llegar a las corporaciones de la actualidad. Los resultados de esta evolución se refleja en el incremento en la división de mano de obra así como la responsabilidad de administración en estas corporaciones.

Los resultados han sido buenos, puesto que la productividad incrementó, sin embargo se han presentado situaciones, las cuales aún se presentan en varias corporaciones. Uno de los problemas es la tendencia de una corporación a crecer en forma aislada y autónoma, sin considerar que es mucho mejor y más sencillo tener las actividades y objetivos en conjunto.

Por tal motivo surge la Investigación de Operaciones para obtener la mejor manera de solución a este tipo de problemas, porque es muy difícil asignar los recursos a todas sus diferentes actividades; sobre todo cuando se trata de una corporación que aumenta su complejidad.

Las raíces de la Investigación de Operaciones se encuentran en la Segunda Guerra Mundial en el ámbito militar de Inglaterra. Durante la guerra, se asignaron recursos escasos a las diferentes actividades militares de cada operación de una manera eficaz. Por lo tanto la administración británica y después la de Estados Unidos reunieron a un grupo de científicos para proceder con el método científico que se aplicara a las estrategias militares. Los cuales se les considera como los primeros en investigación de operaciones, tales que sirvieron para ganar la Batalla de Inglaterra, la Campaña de las Islas del Pacífico, etc.

Debido al éxito en la guerra con estas estrategias del método científico, los científicos que colaboraron en esta labor se dedicaron con el estudio de estas estrategias sobre todo en la industria, los negocios, con lo cual se fortacelen con estos conocimientos, en 1950 Inglaterra es el primer país en atraer a estos científicos y Estados Unidos lo hace en 1951. En el crecimiento de la investigación de operaciones existen dos factores, los cuales son importantes ya que ellos intervienen en su rápido crecimiento.

1. La necesidad de saber ó ampliar el campo de la investigación de operaciones.

2. La computadora, ya que la investigación de operaciones requiere de muchos cálculos, la computadora nos permite hacerlo de una forma más rápida y sencilla.

En el **cuadro 1.1** se presentan algunas de las contribuciones para la investigación de operaciones así como su autor.

Cuadro 1.1 Algunas contribuciones para la investigación de operaciones y su autor.

EPOCA	PERSONAJE	CONTRIBUCION
Primera Guerra Mundial	Thomas Alva Edison	Investigó mediante un tablero táctico las maniobras de los barcos mercantes que eran más adecuadas para disminuir las pérdidas de embarques causadas por submarinos enemigos.

1910	A. H. Erlang.	Constituye la base de muchos modelos matemáticos que se usan actualmente en la teoría de Líneas de Espera.
1930	Horace C. Levinson	Aplica modelos matemáticos a grandes cantidades de datos.
1937	Grupo de científicos ingleses	Es considerado como el núcleo del primer grupo de investigación de operaciones.
1940	S. Blacket.	Aplicación de modelos matemáticos con fines militares.
1942	Fuerza Aérea de los Estados Unidos	Se introduce la investigación de operaciones como materia obligatoria, en las escuelas de nivel superior de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos.
1947	George Dantzig	Desarrolló el método Simplex para solucionar modelos de programación lineal.
1957	Richard Bellman	Desarrolló las bases de la Programación Dinámica.
1957	Departamento de Planeación de la compañía E.I.Dupont.	Desarrolló el método de la Ruta Crítica.
1957	Marina de los Estados Unidos	Desarrolló el método PERT en el proyecto Polaris.

CAPITULO 2

CAPITULO 2

PROGRAMACION LINEAL

2.1.ANTECEDENTES

La programación lineal tuvo su origen en el método de análisis de insumo - producto desarrollado por el economista W.W. Leontief. Hitchcock interpretó primero un "problema de tipo transporte" en 1941, mientras que Koopmans estudió el mismo tema en 1947. En 1945, Stigler estudió el "problema de la dieta". Puede decirse que el procedimiento matemático que se emplea con más frecuencia para encontrar soluciones óptimas es el método simplex, creado en 1947 por George Dantzig, que colaboraba entonces con la fureza Aérea de los Estados Unidos, este es un método de ensayo y error.

2.2. CARACTERISTICAS DE LA PROGRAMACION LINEAL:

2.2.1 PROPORCIONALIDAD

La Proporcionalidad es una suposición de las actividades individuales, consideradas independientemente de las otras. Por lo tanto, considérese el caso en el que sólo se emprende una de las n actividades. Llamada la actividad k, de modo que $x_i = 0$ para toda j = 1,2,....,n, excepto j = k. La suposición es que, en este caso, 1) la medida de efectividad Z es igual a $x_k x_k$ y 2) el uso de cada recurso y es igual a $a_{ik} x_k$; es decir; las dos cantidades son directamente proporcionales al nivel de cada k conducida por sí misma (k = 1, 2,....,n). Esto implica en particular que no se tiene carga extra de arranque con el inicio de la actividad y que se cumple la proporcionalidad sobre el intervalo completo de niveles de la actividad.

2.2.2. ADITIVIDAD

La suposición de proporcionalidad no es suficiente para garantizar que la función objetivo y las funciones de restricción sean lineales. La suposición de aditividad requiere que, dados los niveles cualquiera de actividad (x_1, x_2, ..., x_n), el uso total de cada recurso y la medida total resultante de la efectividad es igual a la suma de las cantidades correspondientes generadas por cada actividad conducida por sí misma.

2.2.3. DIVISIBILIDAD

Las variables de decisión tendrían significado físico únicamente si tienen valores enteros. Con frecuencia la solución obtenida en la programación lineal no es entera. La divisibilidad en las unidades de actividad pueden dividirse en niveles fraccionarios cualesquiera, de modo que pueden permitirse valores no enteros para las variables de decisión. Si la solución obtenida no es entera, entonces las variables no enteras se redondean simplemente a valores enteros.

2.3. REQUISITOS PARA LA FORMULACION DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL.

1. **Función objetivo lineal bien definida.** Este objetivo puede servir para maximizar la contribución utilizando los recursos disponibles, o bien, puede producir el mínimo costo posible usando una cantidad limitada de factores productivos, o bien, puede determinar la mejor distribución de los factores productivos dentro de un cierto período.

2. **Caminos alternativos de acción.** Puede ser posible una selección entre diversas combinaciones de mano de obra y maquinaria automática. O bien, puede ser posible asignar capacidad de manufactura en una cierta relación para la manufactura de los productos de una empresa.

3. **La función objetivo lineal y las restricciones lineales deben expresarse matemáticamente.** La linealidad en la programación lineal es un término matemático que se usa para describir sistemas de ecuaciones simultáneas de primer grado que satisfagan a la función objetivo y a sus restricciones. Así como la función objetivo lineal debe expresarse por medio de una ecuación, de la misma manera deben expresarse las restricciones lineales matemáticamente, por medio de ecuaciones o desigualdades.

4. **Las variables deben estar interrelacionadas.** sea posible formular relaciones matemáticas entre las variables que describen el problema. Dicho de otra manera las variables del problema deben estar interrelacionadas.

5. **Los recursos deben ser de aprovisionamiento limitado.** Los recursos deben ser finitos y económicamente cuantificables. Por ejemplo, cada planta tiene un número limitado de horas disponibles, las horas de mano de obra son finitas. Como el costo de la mano de obra directa tiene impacto sobre la utilidad, es también un factor económico.

2.4. DEFINICIONES EN PROGRAMACION LINEAL.

La Programación Lineal típicamente trata del problema de asignar recursos limitados entre actividades competidoras en la mejor forma posible (óptima). La naturaleza de los problemas que resuelve la programación lineal surge siempre que se deba seleccionar el nivel de ciertas actividades que compiten por recursos escasos pero necesarios para realizar esas actividades.

Algunas aplicaciones son:

- Problemas de transporte.
- Planificación de la agricultura.
- Selección de patrones de embarque.
- Asignación de recursos nacionales a recursos domésticos.

- Asignación de medios de producción a productos.
- Varianza mínima de riesgo en modelos de inversiones y finanzas.

La Programación Lineal es un modelo de programación matemática designado a la asignación eficiente de los recursos limitados en actividades conocidas con el objetivo de satisfacer las metas deseadas, tales como maximizar beneficios o minimizar costos. La característica distintiva de los modelos de Programación Lineal es que las funciones que representan el objetivo y las restricciones son lineales.

El modelo general de la Programación Lineal está formado por:

1. Función Objetivo.
2. Restricciones Funcionales.
3. Restricciones de no Negatividad.

Función Objetivo:

Puede ser de **"MAXIMIZACION"** o de **"MINIMIZACION"**.

La minimización de una función f(x), es matemáticamente equivalente a la maximización de la expresión negativa de ésta función; esto es:

Minimizar $f(x) = $ Maximizar $-f(x)$

Restricciones Funcionales:

Pueden ser:

Menor o igual ($\leq$)

Igual ($=$)

Mayor o igual ($\geq$)

Unicamente un signo ocurre para cada restricción.

Restricciones de no Negatividad:

La incógnita o variables de decisión no pueden ser negativas ya que no tienen ningún sentido real.

Dado que para poder resolver el modelo se deben considerar ecuaciones y como casi siempre los modelos de Programación Lineal están planteados como inecuaciones se deben considerar dos formas para los modelos de Programación Lineal, los cuales son:

1. Forma Canónica.
2. Forma Estándar.

2.5 FORMA CANONICA DEL MODELO DE PROGRAMACION LINEAL.

Las características de ésta forma son:

a) La función objetivo es del tipo de **MAXIMIZACION**.

b) Todas las restricciones funcionales son del tipo (≤).

c) Todas las variables de decisión son no negativas.

El modelo general de la forma canónica es:

Maximizar $Z = \Sigma c_j x_j$

sujeto a: $\Sigma a_{ij} x_j <= b_i$; $i = 1,2,......,m$

$x_j >= 0$; $j = 1,2,......,n$

Cualquier modelo de programación lineal puede ponerse en la forma canónica por medio de las tres transformaciones elementales siguientes:

1. La minimización de una función, f(x) es matemáticamente equivalente a la maximización de la expresión negativa de ésta función, - f(x).

Ejemplo:

La función objetivo:

minimizar $D = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$

es equivalente a:

maximizar $F = -D = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots\ldots - c_nx_n$

con $D = F$

2. Una desigualdad con signo ($\geq$) puede cambiarse a una desigualdad con signo ($\leq$) multiplicando a toda la desigualdad por -1.

Ejemplo:

La restricción funcional:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 15$$

es equivalente a:

$$-3x_1 - 2x_2 \geq -15$$

3. Una ecuación puede ser reemplazada por dos desigualdades con signos contrarios.

Ejemplo:

La ecuación:

$$7x_1 + 4x_2 = 9$$

es equivalente a:

$$7x_1 + 4x_2 \leq 9$$

y

$$7x_1 + 4x_2 \geq 9$$

o también equivalente a:

$$7x_1 + 4x_2 \leq 9$$

y

$$-7x_1 - 4x_2 \leq -9$$

2.6. FORMA ESTANDAR DEL MODELO DE PROGRAMACION LINEAL.

Las características de esta forma son:

a) La función objetivo es del tipo de **MAXIMIZACION** ó **MINIMIZACION**.

b) Todas las restricciones son ecuaciones excepto para las restricciones de no negatividad que permanecen como desigualdades.

c) Todas las variables de decisión son no negativas.

El modelo general de la forma estándar es:

$$\text{Optimizar} \quad Z = c_j\, x_j$$

sujeto a:

$$a_{ij}\, x_j \leq b_i \quad ; i = 1,2,\ldots\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \quad ; j = 1,2,\ldots\ldots,n$$

Las restricciones funcionales que están definidas como desigualdad pueden cambiarse a ecuaciones introduciendo en cada una de tales restricciones a las variables de holgura, las cuales se suman si la restricción es (≤) o se restan si la restricción es (≥). El término independiente puede hacerse siempre positivo multiplicando a toda la ecuación por (-1) siempre que sea necesario.

CAPITULO 3

CAPITULO 3

METODOS DE SOLUCION DE PROGRAMACION LINEAL.

3.1. *DIFERENTES TIPOS DE SOLUCION*

Existen varios métodos de solución para los modelos de Programación Lineal, entre los cuales se pueden mencionar:

a) Por Tanteo.
b) Algebraico.
c) Matricial.
d) Gráfico.
e) Simplex.

En este trabajo se abordarán los métodos Gráfico y Simplex. El método Gráfico, para tener una visión gráfica del modelo y la generación de soluciones alternativas y el método Simplex por ser hasta la fecha el más adecuado para modelos sin tener restricción en el número de variables de decisión ó incógnitas.

3.2. *METODO GRAFICO*

El método gráfico es posible cuando el número de variables es dos como máximo y consiste en graficar el "espacio de soluciones factibles", el cual es el espacio encerrado por las restricciones funcionales.

La solución óptima es el punto en el espacio de soluciones que optimiza el valor de la función objetivo y que siempre está en uno de los vértices del poliedro convexo que forma el área o espacio de soluciones.

METODOLOGIA

1. Definir las variables de decisión o incógnitas del sistema.
2. Establecer la tabla de datos en términos del enunciado del problema.
3. A partir de la tabla de datos establecer el modelo de programación lineal, es decir, definir:
   - 3.1. La función objetivo.
   - 3.2. Las restricciones funcionales.
   - 3.3. Las restricciones de no negatividad.

Definición matemática del problema. Se determina la función objetivo (una igualdad) y las restricciones (desigualdades) del problema. Debe observarse que los valores calculados para los productos que han de fabricarse deben ser positivos. Así, todos los valores encontrados en la solución de un problema de programación lineal deben ser mayores que (si han de fabricarse) o iguales a cero (si no han de fabricarse).

4. Trazar en un plano a escala conveniente, todas las restricciones funcionales, indicando para cada una el área factible según el signo que tenga asociado.

Representación gráfica de las desigualdades de restricción. Se traza una línea de restricción por cada una de las desigualdades de restricción (dígase departamentos) localizando sus dos puntos terminales y uniendo estos puntos por una recta. Cada uno de los dos puntos terminales o extremos se determina dividiendo el tiempo total (las horas) disponible entre el tiempo necesario (horas) para fabricar la unidad de un producto solamente. Por ejemplo si se utiliza todo el tiempo dentro de un departamento para hacer el primer producto, sólo comparado con un segundo producto lo cual da como resultado la determinación de uno de los dos puntos terminales. El mismo cálculo se hace para el segundo producto, estableciendo con ello el otro punto terminal.

5. Definir el área factible de soluciones para el sistema considerado.

6. Para cada vértice del área factible de soluciones determinar sus valores (x,y) y sustituirlos en la ecuación de la función objetivo.

Trazo de la función objetivo. Se determinan dos puntos terminales que representan cantidades físicas cuya contribución sea fácilmente alcanzable. En seguida se unen estos puntos extremos y terminales con una recta que representa una línea inicial de la función objetivo. Se traza una o más líneas paralelas partiendo de la original de la función objetivo hasta el punto más alejado que este fuera del área de soluciones factibles. Ese punto (podría ser una serie de puntos) de la línea máxima de la función objetivo que se encuentre aún dentro del área de soluciones factibles representa la combinación de productos que deja mayor utilidad.

7. Aquel par ordenado que optimice el valor de la función objetivo definirá los valores correspondientes de las variables de decisión o incógnitas.

Resolución utilizando ecuaciones simultáneas. Las cantidades a fabricar se determinar resolviendo simultáneamente las ecuaciones de las dos líneas para el punto más alejado determinado en el paso anterior. También se llevan estas cantidades resultantes por fabricar a la ecuación de contribución para determinar la contribución total.

8. Comprobar la solución sustituyendo el par ordenado de la solución óptima en todas las restricciones funcionales verificando la validez de las mismas.

9. Definir la solución en lenguaje claro y preciso.

Las restricciones de no negatividad, confinan todos los valores factibles al primer cuadrante (que está definido por el espacio arriba de 0 sobre el eje x_2 a la derecha de 0 sobre el eje x_1). El espacio encerrado por las restricciones restantes se determina sustituyendo en primer término (≤) por (=) para cada restricción, con lo cual se produce la ecuación de una línea recta. Después se traza cada línea recta en el plano (x_2, x_1) y la región en la cual se encuentra cada restricción cuando se considera la desigualdad. El espacio de soluciones resultante se muestra por medio del área que se representa por medio de letras.

Cada punto contenido o situado en la frontera del espacio de soluciones satisface todas las restricciones y por consiguiente, representa un punto factible. Aunque hay un número infinito de puntos factibles en el espacio de soluciones, la solución óptima puede determinarse al observar la dirección en la cual aumenta la función objetivo.

Ejemplo:

Una industria metal-mecánica produce dos artículos: A y B y cuenta con tres departamentos para su fabricación: Corte, Troquelado y Ensamble.

Cada artículo A requiere 2 horas en Corte, 1 hora en Troquelado y 4 en Ensamble, mientras que cada artículo B requiere 2 horas en Corte, 2 horas en Troquelado y 2 en Ensamble.

No se tiene limitación en ventas, todo lo que se produce se puede vender.

Si el beneficio unitario es de $1.00 por cada artículo A y $1.50 por el B y se cuenta por semana con 160 horas en el departamento de Corte, 120 horas en el de Troquelado y 280 horas en el de Ensamble, definir el programa de producción semanal que maximice los beneficios respetando las restricciones establecidas.

Solución:

1. Definir de las variables de decisión ó incógnitas:

Considerando:

x_1 - cantidad de artículos A a producir.

x_2 - cantidad de artículos B a producir.

2. Tabla de Datos:

Recurso	x_1	x_2	Magnitud
Depto. de Corte	2	2	160 horas
Depto. de Troquelado	1	2	120 horas
Depto. de Ensamble	4	2	280 horas
Beneficio unitario	\$1.00	\$1.50	

3. Modelo de programación lineal:

Por estar considerando beneficios la función objetivo es del tipo de maximización, por lo que el modelo es:

Maximizar $F = x_1 + 1.5x_2$

sujeto a:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 160 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 120 \quad \ldots\ldots (2)$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 280 \quad \ldots\ldots (3)$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

4. Trazo de las restricciones funcionales:

Definiendo los puntos sobre los ejes coordenados para cada restricción, considerándolas como ecuaciones:

En (1) $\quad 2x_1 + 2x_2 = 160$

si $x_1 = 0$; $x_2 = 80$

$x_1 = 80$; $x_2 = 0$

En (2) $\quad x_1 + 2x_2 = 120$

si $x_1 = 0$; $x_2 = 60$

$x_1 = 120$; $x_2 = 0$

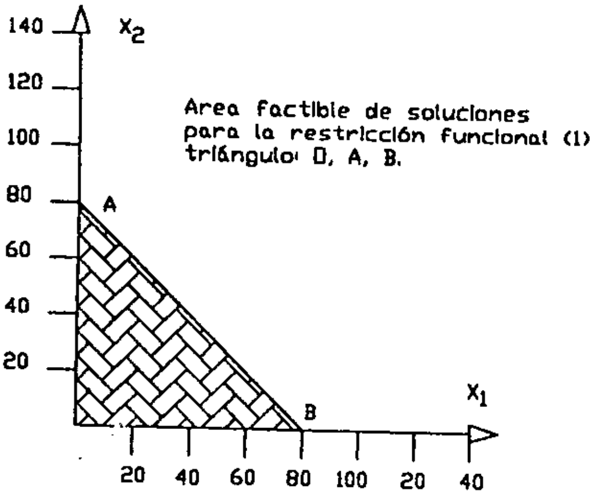
En (3) $4x_1 + 2x_2 = 280$

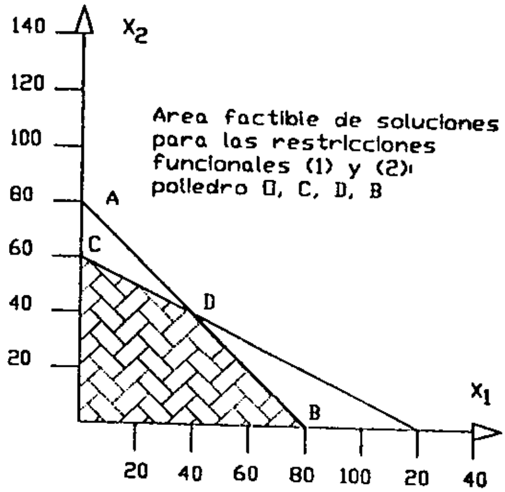
si $x_1 = 0$; $x_2 = 140$

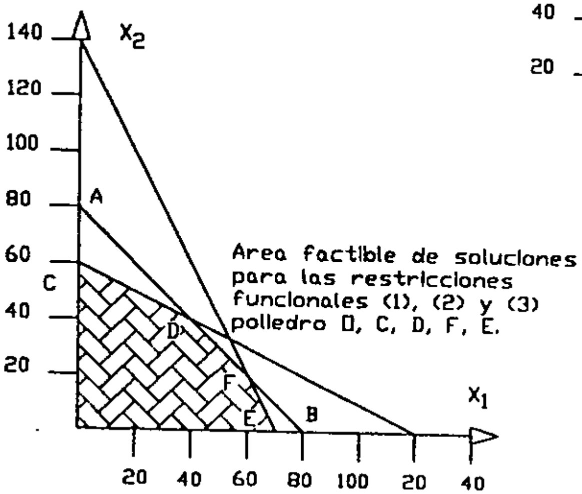
$x_1 = 70$; $x_2 = 0$

En base al teorema fundamental de la Programación Lineal se sabe que la solución óptima debe estar en uno de los vértices, por lo tanto se analizan estos:

VERTICE	X_1	X_2	F
0	0	0	0
C	0	60	90
D	40	40	100
E	70	0	70
F	60	20	90


140
120
100
80
60
40
20
X_2
Area factible de soluciones
para la restricción funcional (1)
triángulo: O, A, B.
A
B
X_1
20 40 60 80 100 20 40


140
120
100
80
60
40
20
X_2
Area factible de soluciones
para las restricciones
funcionales (1) y (2):
poliedro O, C, D, B
A
C
D
B
X_1
20 40 60 80 100 20 40


140
120
100
80
60
40
20
X_2
A
C
Area factible de soluciones
para las restricciones
funcionales (1), (2) y (3)
poliedro O, C, D, F, E.
D
F
E
B
X_1
20 40 60 80 100 20 40

3.3. METODO SIMPLEX

Este modelo de PL es un algorítmo algebráico, que considera únicamente los puntos extremos o vértices del espacio de soluciones a fin de determinar la solución óptima.

Consiste en partir de una solución básica factible (un vértice) y pasar a través de una sucesión de soluciones básicas factibles (no redundantes) de tal manera que cada nueva solución tenga la facultad de mejorar el valor de la función objetivo.

La base del método simplex que garantiza generar tal sucesión de soluciones básicas, está formado por dos condiciones fundamentales:

1. OPTIMIDAD.

Asegura que nunca se encontrará una solución inferior.

2.FACTIBILIDAD:

Garantiza que partiendo de una solución básica factible, únicamente se encontrarán durante el cálculo soluciones básicas factibles.

El método simplex es un proceso iterativo en el que se identifica una solución inicial factible y se sigue investigando para ver si existe una solución mejor. Por mejor debe entenderse la medida en la que se puede perfeccionar el valor de la función objeto.

Existen tres requisitos en la solución de un problema de programación lineal por el método simplex:

1. Todas las limitantes deben estar establecidas como ecuaciones.
2. El segundo miembro de una limitante, no puede ser negativo.
3. Todas las variables están restringidas a valores no negativos.

3.3.1. *ASPECTOS MATEMATICOS INVOLUCRADOS EN EL METODO SIMPLEX*

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Se considera el ejemplo siguiente de dos ecuaciones en tres variables:

(1)
$$x_1 - x_2 + x_3 = 2 \,\ldots\ldots\ldots\, E_1$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 7 \,\ldots\ldots\ldots\, E_2$$

El orden fijo de valores $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, para hacer la solución a la ecuación 1 la sustitución de estos valores para x_1 , x_2 , x_3 en la primera ecuación produce la identidad 2 = 2, la solución (3,2,1) satisface la ecuación 1. En general se tiene un sistema de m ecuaciones en n variables

(2)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Este es un sistema de m x n ecuaciones lineales. Una solución de E_1 es una ordenada y fija serie de números (x_1' , x_2' ,........ x_n') que se define de la siguiente manera :

$$a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ldots\ldots + a_{1n}x_n' = b_1$$

La serie de números es la solución de un sistema de ecuaciones previendo está solución para cada ecuación del sistema por ejemplo: sustituyendo (3,2,1) para las variables en la ecuación E_2 se produce la igualdad 7 = 7 se tiene que (3,2,1) es una solución para la E_1 y E_2 , por lo consiguiente para el sistema. Para el sistema (3,2,1) es satisfactorio para cualquier serie de números de la forma: **(3, $x_3' + 1$, x_3')** donde x_3'

puede ser escogida arbitrariamente. Un sistema que tiene soluciones únicas es llamado consistente.

Dado un sistema como el mencionado anteriormente es fácil construir nuevas ecuaciones que tengan la propiedad que cada solución de la primera ecuación es también la solución de la nueva ecuación. En la nueva ecuación esta formada por la multiplicación de la primera ecuación por 2 y la segunda por (-3) y sumando:

$$\text{(3)}\qquad \begin{array}{rl} 2: & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -3: & \underline{2x_1 + x_2 - x_3 = 7} \\ & -4x_1 - 5x_2 + 5x_3 = -17 \end{array}$$

La solución (3,2,1) del sistema 1 es también la solución de la nueva ecuación. Un esquema para generar nuevas ecuaciones cuyo serie de solución incluye a todas las soluciones de un sistema lineal general. Para cada ecuación i un número arbitrario, k_i es escogido, la nueva ecuación bajo la línea es formada por la multiplicación de i ecuación por k_i y sumar:

$$\text{(4)}\qquad \begin{array}{l} k_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ k_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{k_m : a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m} \end{array}$$

$$\text{(5)}\qquad d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots\ldots + d_nx_n = d$$

Los coeficientes de la suma son fáciles de obtener como son:

$$\text{(6)}\qquad \begin{array}{l} d_1 = k_1a_{11} + k_2a_{21} + \ldots\ldots + k_ma_{m1} \\ d_2 = k_1a_{12} + k_2a_{22} + \ldots\ldots + k_ma_{m2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{d_n = k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + \ldots\ldots + k_ma_{mn}} \\ d = k_1b_1 + k_2b_2 + \ldots\ldots + k_mb_m \end{array}$$

Una ecuación como la penúltima formada de esta manera es llamada una combinación lineal de las ecuaciones originales, k_i son llamados múltiplos de la combinación lineal. Escribiendo los sistemas 4 y 5 en forma de coeficientes separados en los sistemas 7 y 8 vemos que la operación para formar una combinación lineal de las ecuaciones corresponden a formar una combinación lineal de las filas del sistema 7. Por esto se puede formar cada elemento de fila del sistema 8 para sumar los productos de k_i por el correspondiente elemento en la fila i del sistema 7.

$$
\begin{array}{lcccccl}
 & & & & & & \text{Multiplicador} \\
 & a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1m} & b_1 & : k_1 \\
(7) & a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} & b_2 & : k_2 \\
 & \vdots & & & & & \\
 & \vdots & & & & & \\
 & a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots & a_{mn} & b_m & : k_m
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccccc}
(8) & d_1 & d_2 & \ldots\ldots\ldots & d_n & d
\end{array}
$$

Siempre que una serie de números (x_1 , x_2 , ... x_n) constituya una solución del sistema 4, el sistema 5 se convierte sobre la sustitución una pesada suma de identidades y por lo tanto una misma identidad. Por lo tanto cada solución de un sistema lineal es también una solución de muchas combinaciones lineales de las ecuaciones del sistema, una ecuación puede ser incertada dentro de un sistema de ecuaciones sin que afecte a la serie de la solución.

DEFINICIONES:

Si en un sistema de ecuaciones, una ecuación es la combinación lineal de otras, es dependiente de ellas, la ecuación dependiente es llamada (redundante), también se llama así cuando ocurre en un sistema de una sola ecuación. Una ecuación que no contiene redundancia es llamada independiente.

Un sistema lineal es claramente consistente si es posible exhibir una combinación lineal de las ecuaciones del sistema de la forma:

$$(9) \qquad 0x_1 + 0x_2 + \ldots\ldots + 0x_n = 0$$

Cualquier solución del sistema tendria para satisfacer el sistema 9, pero esto es imposible no importa que valores sean asignados a las variables en este sistema como una ecuación inconsistente por ejemplo el sistema:

$$\begin{array}{rl} 1: & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -1: & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ \hline & 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \end{array}$$

No tiene solución porque la primera ecuación es una suma de 3 números con resultado 5, mientras que la segunda es la misma suma con resultado 4, sin embargo se procede a aplicar múltiplos $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ por el camino de eliminación dicho x_1, se tendría automáticamente la contradicción desplegada debajo de las ecuaciones.

3.3.1.1. COMO SE RESUELVEN LOS SISTEMAS

El usual proceso de eliminación para encontrar una solución de un sistema de ecuaciones es para aumentar el sistema por generar nuevas ecuaciones por tomar combinaciones lineales de manera que los coeficientes son cero.

En el sistema 10, la ecuación E_1 es multiplicada por $k_1 = -2$ y E_2 por $k_2 = 1$ que sobre la suma del coeficiente de x_1 desaparece. Estas producciones de la ecuación E_3 pueden ser representadas simbólicamente $E_3 = -(-2)E_1 + (1)E_2$. Similarmente se forma la ecuación E_4 por multiplicación de E_3 por 1/3 y se forma E_5 por adición de E_4 a E_1.

El sistema aumentado E_1 , E_2 , ... E_5 tiene la misma serie de solución que el sistema original 1 porque todas las ecuaciones como E_4 y E_5 pueden ser expresadas como una combinación lineal directa de E_1 y E_2 :

$$
\textbf{(10)} \qquad
\begin{array}{rcl}
x_1 - x_2 + x_3 = 2 & & (E_1) \\
2x_1 + x_2 - x_3 = 7 & & (E_2) \\
-3x_2 - 3x_3 = 3 & & (E_3 = -2E_1 + E_2) \\
x_2 - x_3 = 1 & & (E_4 = 1/3\ E_3) \\
x_1 \qquad\qquad = 3 & & (E_5 = E_1 + E_4)
\end{array}
$$

El subsistema E_4, E_5 puede ser usado para detectar fácilmente si una ecuación es linealmente dependiente en ella. Note que x_2 aparece en E_4 con 1 de coeficiente y cero en E_5 y el opuesto es verdad para x_1 , esto lo hace fácil para eliminar x_1 y x_2 de cualquier otra ecuación. Por ejemplo está claro que si E_1 es para hacer una combinación lineal de E_4 y E_5 , el multiplo de E_5 debe ser 1 y de E_4 debe ser -1. Es verificable que $E_1 = E_5 - E_4$, $E_2 = 2E_5 + E_4$, $E_3 = 3E_4$.

Todas estas soluciones de E_4 , E_5 son también soluciones de E_1 , E_2 y como es notable tempranamente todas las soluciones de E_1 , E_2 son soluciones de E_4 , E_5 , por lo tanto las soluciones de los dos subsistemas son los mismos.

Una segunda ventaja de E_4 , E_5 es que es fácil establecer la serie de solución de todas las posibles soluciones, se escoge cualquier valor arbitrario para $x_3 = x_3°$ y evaluar x_2 y x_1, en términos de x_3. En este caso ($x_1 = 3$, $x_2 = 1 + x_3°$, $x_3 = x_3°$) describe la serie de todas las soluciones por ejemplo: $x_3 = 0$ produce la solución particular ($x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$).

El método de solución de un sistema es uno de los aumentos por la combinación lineal hasta ampliar el sistema este es un subsistema cuya solución de serie es linealmemte dependiente sobre el excepto para el término constante. El subsistema llega a pertenecer a la clase llamada canónica.

Definición: Un sistema canónico con una serie de variables, llamado básico, es un sistema tal que para cada i, la primera variable básica tiene 1 como coeficiente en la primera ecuación y tiene cero coeficientes en otra parte.

Por ejemplo: { E_4 , E_5 } en el sistema 10 es canónica con x_2 asociado con E_4 y x_4 con E_5. El sistema 11 es canónico porque para cada i, x_i tiene una unidad de coeficiente dentro de la ecuación i y cero en otra parte.

$$
(11) \qquad
\begin{array}{llllll}
x_1 & & + \bar{a}_{1,r+1} + x_{r+1} + & \bar{a}_{1,n}x_n & = & b_1 \\
& x_2 & + \bar{a}_{2,r+1} + x_{r+1} + & \bar{a}_{2,n}x_n & = & b_2 \\
& \vdots & & & & \\
& \quad \vdots & & & & \\
& \quad\quad x_r & + \bar{a}_{r,r+1} + x_{r+1} + & \bar{a}_{r,n}x_n & = & b_r
\end{array}
$$

Definición: Dos sistemas son llamados equivalentes cuando un sistema puede ser derivado desde otro insertando o suprimiendo una ecuación redundante o si un sistema es derivado desde otro a través de una cadena de sistemas cada vínculo para su predecesor por tal inserción o cancelación.

Operaciones Elementales: Existen dos tipos de combinaciones lineales que pueden ser usadas para obtener sistemas equivalentes.

1. Reemplazando alguna ecuación E_t , por la ecuación [kE_t] con $k \neq 0$.
2. Reemplazando alguna ecuación E_t , por la ecuación [E_t + kE_i] es alguna otra ecuación para el sistema.

Para comprobar una ecuación elemental del primer tipo de resultado es un sistema equivalente, insertar kE_t como una nueva ecuación después de E_t entonces suprimir E_t. Observe que E_t es una ecuación redundante para ello puede ser formado desde kE_t por $1/k[kE_t]$ si $k \neq 0$. Para el segundo tipo, insertar E_t + kE_i después de E_t y entonces suprimir E_i por lo tanto E_i es una ecuación redundante y esta dada por: $[E_i + kE_i] - kE_i$.

Para transformar el sistema 1 dentro del sistema equivalente 10 por una secuencia de operaciones elementales es como sigue:

Operaciones Elementales

$$\begin{array}{lr} x_1 - x_2 + x_3 = 2 & (E_1) \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 & (E_2) \end{array}$$

Reemplazar E_2 por $E'_2 = E_2 + E_1$

$$\begin{array}{lr} x_1 - x_2 + x_3 = 2 & (E_1) \\ 3x_1 \qquad\qquad = 9 & (E'_2) \end{array}$$

Reemplazar E_1 por $E'_1 = E_1 - 1/3\ E'_2$

$$\begin{array}{lr} - x_2 + x_3 = -1 & (E'_1) \\ 3x_1 \qquad\qquad = 9 & (E'_2) \end{array}$$

Reemplazar E'_1 por $E''_1 = - E'_1$

$$\begin{array}{lr} x_2 - x_3 = 1 & (E''_1) \\ 3x_1 \qquad\qquad = 9 & (E'_2) \end{array}$$

En general la correspondiente a cada operación elemental es una operación inversa que es también elemental y del mismo tipo.

Teorema: La correspondiente a una secuencia de ecuaciones elementales es una secuencia inversa de operaciones elementales para que un sistema se pueda aplicar obteniéndose desde la denuación del sistema.

Sistemas canónicos: El sistema 2 es un sistema llamado cuadrado porque se considera $m = n$. Un sistema cuadrado de m ecuaciones dentro de n incógnitas a una solución única, el proceso usual de solución tal a un sistema consiste en eliminar una incógnita, estableciendo al lado una ecuación y trabajando con un reducido sistema teniendo menos ecuaciones y menos incógnitas. El proceso es repetido un total de m - 1 veces, resultando una simple ecuación con una variable, su valor es entonces sustituido dentro de la ecuación precedente para determinar su valor de otra variable por ejemplo:

$$
(1)\qquad \begin{array}{llll} x_1 & & & = b_1 \\ & x_2 & & = b_2 \\ & \vdots & & \\ & & \vdots & \\ & & x_m & = b_m \end{array}
$$

Considerar un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$
(2)\qquad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}
$$

Si $a_{11} \neq 0$ entonces la primera ecuación puede ser usada para eliminar x_1 desde la segunda ecuación por la operación elemental $E'_2 = E_2 - (a_{21}/a_{11})\,E_1$, y para eliminar x_1 desde la tercera ecuación por la operación elemental resultando el sistema $E'_3 = E_3 - (a_{31}/a_{11})E_1$.

Lo cual se obtiene un sistema equivalente:

$$
(3)\qquad \begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \quad (a_{11} \neq 0) \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 & \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 & \end{array}
$$

El sistema 3 es normalmente una serie al lado y el proceso se repite con el sistema reducido. Si $a'_{22} \neq 0$ entonces la segunda ecuación puede ser usada para eliminar x_2 desde la tercera ecuación, resultando un sistema triángular equivalente:

$$
\textbf{(4)} \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \qquad (a_{11} \neq 0,\ a'_{22} \neq 0) \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 &= b''_3 \end{aligned}
$$

Si $a''_{33} \neq 0$, la solución para el sistema 4 para x_3 dentro de la última ecuación. Es sustituido de x_3 dentro de la segunda ecuación para evaluar x_2, ambos valores son sustituidos dentro de la primera ecuación, estas sustituciones forman la misma suma usando la tercera ecuación para eliminar x_3 de la segunda y primera ecuación por las operaciones elementales sucesivas $E''_2 = E'_2 - (a'_{23}/a''_{33})E''_3$ y $E'_1 = E_1 - a_{13}/a''_{33})E''_3$, resultando:

$$
\textbf{(5)} \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b'_1 \qquad (a_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0, a''_{33} \neq 0) \\ a'_{22}x_2 &= b''_2 \\ a''_{33}x_3 &= b''_3 \end{aligned}
$$

Sustituyendo el valor de x_2 obteniendo desde la segunda ecuación dentro de la primera ecuación para el valor x_1 tiene el mismo efecto como la operación elemental $E''_1 = E_1 - a_{12}/a'_{22})E''_2$ y producir:

$$
\textbf{(6)} \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 &= b'_1 \qquad (a_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0, a''_{33} \neq 0) \\ a'_{22}x_2 &= b''_2 \\ a''_{33}x_3 &= b''_3 \end{aligned}
$$

Ejemplo de reducción para forma triángular y diagonal, considere el sistema 3x3:

$$Io = x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$IIo = x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$IIIo = x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

Ello puede reducir la forma triángular como sigue:

	Operación
$I_1 : x_1 + x_2 + x_3 = 1$	$I_1 = Io$
$II_1 : \quad -2x_2 = 2$	$II_1 = IIo - Io$
$III_1 : \quad x_2 - 2x_3 = 1$	$III_1 = IIIo - Io$

	Operación
$I_2 : x_1 + x_2 + x_3 = 1$	$I_2 = I_1$
$II_2 : \quad x_2 = -1$	$II_2 = -\frac{1}{2}\, II_1$
$III_2 : \quad x_3 = -2$	$III_2 = -\frac{1}{2}\,(III_1 + \frac{1}{2}\, II_1)$

Estos últimos sistemas (I_2, II_2, III_2,) es triangular y puede ser fácilmente reducido para la forma diagonal.

	Operación
$I_3 : x_1 = 4$	$I_3 = I_2 - II_2 - III_2$
$II_3 : \quad x_2 = -1$	$II_3 = II_2$
$III_3 : \quad x_3 = -2$	$III_3 = III_2$

3.3.1.2. REDUCCION DE UN PIVOTE DE UN SISTEMA GENERAL.

Se tiene un sistema de m ecuaciones con n variables, con $m \leq n$.

$$
(7) \qquad
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

Este sistema se puede reemplazar por otro sistema canónico equivalente. Dentro de esta forma la solución serie es evidente y fácil de detectar.

(8) Sistema canónico con variables básicas $x_1, x_2, \ldots, x_m$

$$
\begin{array}{lllllllll}
x_1 & & + & \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + & \bar{a}_{1j}x_j + \ldots + & \bar{a}_{1n}x_n & = & \bar{b}_1 \\
 & x_2 & + & \bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + & \bar{a}_{2j}x_j + \ldots + & \bar{a}_{2n}x_n & = & \bar{b}_2 \\
 & \cdot & & \vdots & & & & \\
 & \cdot & & \vdots & & & & \\
 & & x_m + & \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + & \bar{a}_{mj}x_j + \ldots + & \bar{a}_{mn}x_n & = & \bar{b}_m
\end{array}
$$

Variables Básicas Variables no básicas (o Independientes) Constantes

El procedimiento estándar para reducción es un sistema general 7 para la forma canónica equivalente. Los principios son mejor ilustrados con un ejemplo generalizado. Considerar el sistema 2 x 4:

$$
\begin{aligned}
x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\
x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

Escoger como "elemento pivote" algún término con coeficiente no cero tal como el término en letra negra en la primera ecuación y eliminar la correspondiente variable, x_2, desde otra ecuación por medios de operaciones elementales.

$$
\begin{aligned}
x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\
x_1 \quad + x_3 + 3x_4 &= 12
\end{aligned}
$$

El próximo pivote a escoger es x_1, de todas las otras ecuaciones, (porque x_1, sucede para coeficientes que tienen cero en la primer ecuación, no fomentar eliminaciones en hechos que no son requeridos), por lo tanto arreglando el sistema de ecuaciones aplicado:

$$x_1 \quad + x_3 + 3x_4 = 12$$

$$x_2 + x_3 + \quad x_4 = 5$$

De este sistema canónico con variables básicas x_1, x_2 es evidente por establecimiento $x_3 = x_4 = 0$, una solución es $x_1 = 12$, $x_2 = 5$, $x_3 = x_4 = 0$.

3.3.1.3. PIVOTEANDO

Una operación pivote consiste de m operaciones elementales que reemplaza un sistema por un sistema equivalente con variables específicas que tienen como coeficiente la unidad de una ecuación. Los pasos detallados son los siguientes:

a) Seleccionar un término $a_{rs}x_s$ dentro del sistema 7 tal que $a_{rs} \neq 0$, llamado el término pivote.

b) Reemplace la r ecuación por la r ecuación multiplicada por $(1/a_{rs})$.

c) Para cada i = 1,2, ..., m excepto i = r, reemplace la i ecuación por la suma de la y ecuación y la reemplaza r ecuación multiplicada por $(-a_{is})$.

En general la reducción a alguna forma canónica puede ser cumplida por una secuencia de operaciones pivote. Para el primer término pivote seleccionado y término $a_{rs}x_s$ tal que $a_{rs} \neq 0$. Después del primer pivote, el segundo término pivote es seleccionado usando un término no cero de alguna ecuación excepto r, es decir ecuación r'. Después de pivotear, el tercer término pivote seleccionado dentro del resultado del sistema m - ecuación de alguna ecuación excepto r y r' es decir ecuación r''. En general, repetir la operación pivoteando tantas veces sea necesario, siempre se escoge el término pivote de las ecuaciones que no corresponden a la selección anteriormente.

Por ejemplo si el pivoteo sucesivo fuera hecho en variables x_1, x_2, ..., x_r dentro de la ecuación correspondiendo i = 1,2,....,r, entonces el sistema original 7 considerado reduce un sistema equivalente para la forma 9, referir como el sistema se reduce con variables pivote $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Un sistema reducido relativo para r si las variables pivote son cambiadas por orden de variables y ecuaciones, se puede colocar en el sistema 9.

(9) Sistemas Reducidos con variables pivote $x_1, x_2, \ldots, x_r$

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & + \bar{a}_{1,r+1}x_{r+1} & + \bar{a}_{1,r+2}x_{r+2} & + \ldots\ldots & + \bar{a}_{1n}x_n & = & \bar{b}_1 \\
\quad x_2 & + \bar{a}_{2,r+1}x_{r+1} & + \bar{a}_{2r+2}x_{r+2} & + \ldots\ldots & + \bar{a}_{2n}x_n & = & \bar{b}_2 \\
\quad\quad . & \quad \vdots & & & & & \\
\quad\quad . & \quad \vdots & & & & & \\
\quad\quad\quad x_r & + \bar{a}_{r,r+1}x_{r+1} & + \bar{a}_{r,r+2}x_{r+2} & + \ldots\ldots & + \bar{a}_{rn}x_n & = & \bar{b}_r \\
\hline
 & 0.\, x_{r+1} + & \ldots\ldots\ldots\ldots & & + 0.\, x_n & = & \bar{b}_{r+1} \\
 & \vdots & & & & & \\
 & \vdots & & & & & \\
 & 0\, .\, x_{r+1} + & \ldots\ldots\ldots\ldots & & + 0\, .\, x_n & = & \bar{b}_m
\end{array}
$$

El sistema 9 es obtenido de 7 por una secuencia de operaciones pivote, cada una consiste de m operaciones elementales, si se sigue el sistema reducido es:

a) Formado para combinaciones lineales del sistema original.

b) Equivalente para el sistema original.

El sistema original 7 tiene solución si su sistema reducido 9 es solucionable si y sólo si:

(10) $$\bar{b}_{r+1} = \bar{b}_{r+2} = \ldots\ldots = \bar{b}_m = 0$$

Si el sistema 10 tiene solución de serie inmediatamente es evidente porque algún valor de la variable (independiente) $x_{r+1}, \ldots, x_n$ determina el valor correspondiente para la variable (dependiente) $x_1, \ldots, x_r$, de otra forma sería $b_{r+i} \neq 0$ para alguna i, la solución de serie es empleada porque la (r+i) ecuación es inconsistente para los estados de $0 = \bar{b}_{r+i}$. En este caso el sistema original 7 y el sistema reducido 9 ambos son inconsistentes (insolucionables).

Sistema Canónico.

Si el sistema original es consistente, el sistema formado por ecuaciones vacías para la reducción esto es llamado canónica equivalente con la variable pivote como básica.

(11) Sistema canónico con variables básicas $x_1, x_2, \ldots, x_r$

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & + \bar{a}_{1,r+1}x_{r+1} & + \ldots + & \bar{a}_{1,r+2}x_{r+2} & + \ldots\ldots + & \bar{a}_{1n}x_n & = \bar{b}_1 \\
\quad x_2 & + \bar{a}_{2,r+1}x_{r+1} & + \ldots + & \bar{a}_{2,r+2}x_{r+2} & + \ldots\ldots + & \bar{a}_{2n}x_n & = \bar{b}_2 \\
\quad \cdot & \quad \vdots & & & & & \\
\quad \cdot & \quad \vdots & & & & & \\
\qquad x_r & + \bar{a}_{r,r+1}x_{r+1} & + \ldots + & \bar{a}_{r,r+2}x_{r+2} & + \ldots\ldots + & \bar{a}_{rn}x_n & = \bar{b}_r
\end{array}
$$

Variables Básicas Dependientes — Variables Independientes — Constantes

Equivalente Canónica Unica.

La propiedad fundamental de un sistema canónico resulta de la reducción del proceso de cualquier otro sistema con la misma serie de solución en reducción puede ser efectuado usando la misma variable pivote y el resultado del sistema canónico sería idéntico si las ecuaciones para reordenar su correspondencia con las variables básicas es el mismo para ambos sistemas.

Dos sistemas de ecuaciones canónicas relativas para $x_1, x_2, \ldots, x_r$, sustituyendo $x_{r+1} = x_{r+2} = x_n = 0$ dentro del primer sistema, se obtiene $x_1 = \bar{b}_1, x_2 = \bar{b}_2, \ldots\ldots\ldots x_r = \bar{b}_r$, porque la sustitución de la equivalencia dentro del segundo sistema produce los mismos valores; esto da verdadero su respectivo término constante que es el mismo. Similarmente, sustituyendo los valores de las variables independientes de $x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots . x_n = 0$, excepto $x_s = 1$, para su coeficiente correspondiente de x_s es el mismo para cualquiera $s = r + 1, r + 2, \ldots, n$.

Soluciones Básicas.

La solución especial obtenida aplicando las variables independientes igual a cero y resolviendo las variables dependientes es llamado solución básica.

Así si el sistema 8 es el sistema canónico de 7 con variables básicas $x_1, x_2, \ldots, x_m$, la correspondiente solución básica es:

(12) $x_1 = \bar{b}_1, x_2 = \bar{b}_2, \ldots, x_m = \bar{b}_m; x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0.$

3.3.2. METODOLOGIA DEL METODO SIMPLEX.

1. Definir las variables de decisión o incógnitas del sistema.
2. Establecer la tabla de datos.
3. A partir de la tabla de datos establecer el modelo completo de P.L. es decir:
   - **3.1.** La función objetivo.
   - **3.2.** Las restricciones funcionales.
   - **3.3.** Las restricciones de no negatividad.

4. Convertir las desigualdades en igualdades agregando variables de holgura y/o artificiales.

5. Expresar las ecuaciones del sistema en forma matricial y estándar, teniendo en cuenta que el orden de la matriz a invertir siempre será igual al número de restricciones funcionales más uno.

6. Construir la tabla Simplex con los datos del problema.
7. Seleccionar la variable que entra y la que sale de la solución.

   7.1. Variable que entra a la solución:

   Para **MINIMIZACION:** entra la de mayor valor positivo en el renglón de la función objetivo.

   Para **MAXIMIZACION**: entra la de mayor valor negativo en el renglón de la función objetivo.

Esto define la columna pivote.

   7.2. Variable que sale de la solución:

   En la columna pivote la relación menor positiva, columna "VALORES" entre los elementos correspondientes de la columna pivote.

8. Regla de detención.

   ¿Puede seguirse iterando?

   Si ....regresar al punto 7.

   No...........ésta es la solución óptima.

9. Al encontrar la solución óptima comprobar tanto en la función objetivo como en cada una de las restricciones la validez del resultado.

10. Definir la solución en un lenguaje claro y normal.

Ejemplo:

Una industria metal-mecánica produce dos articulos: A y B y cuenta con tres departamentos para su fabricación: Corte, Troquelado y Ensamble.

Cada artículo A requiere 2 horas en Corte, 1 hora en Troquelado y 4 en Ensamble, mientras que cada artículo B requiere 2 horas en Corte, 2 horas en Troquelado y 2 en Ensamble.

No se tiene limitación en ventas, todo lo que se produce se puede vender.

Si el beneficio unitario es de $1.00 por cada artículo A y $1.50 por el B y se cuenta por semana con 160 horas en el departamento de Corte, 120 horas en el de Troquelado y 280 horas en el de Ensamble, definir el programa de producción semanal que maximice los beneficios respetando las restricciones establecidas.

Solución:

x_1 - Cantidad de artículos "A" a producir

x_2 - Cantidad de artículos "B" a producir

TABLA DE DATOS

Recurso	x_1	x_2	Magnitud
Depto. de Corte	2	2	160 horas
Depto. de Troquelado	1	2	120 horas
Depto. de Ensamble	4	2	280 horas
Beneficio unitario	$ 1.00	$ 1.50	

Maximizar $F = x_1 + 1.5x_2$

sujeto a:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 160 \quad \text{.......} \quad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 120 \quad \text{.......} \quad (2)$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 280 \quad \text{.......} \quad (3)$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

$$\text{Max. } F_0 = x_1 + 1.5x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3$$

$$\begin{aligned} \text{s. a.} \quad 2x_1 + 2x_2 + y_1 + 0y_2 + 0y_3 &= 160 \\ x_1 + 2x_2 + 0y_1 + y_2 + 0y_3 &= 120 \\ 4x_1 + 2x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 &= 280 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 3/2x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + F_0 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0F_0 &= 160 \\ x_1 + 2x_2 + 0y_1 + y_2 + 0y_3 + 0F_0 &= 120 \\ 4x_1 + 2x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0F_0 &= 280 \end{aligned}$$

I	VARIABLES BASICAS	VALORES	x_1	x_2	F_0	y_1	y_2	y_3
0	F_0	0	-1	-3/2	1	0	0	0
	y_1	160	2	2	0	1	0	0
	y_2	120	1	2	0	0	1	0
	y_3	280	4	2	0	0	0	1

NOTA: Para evitar problemas de redondeo y tener un resultado con mayor exactitud, es recomendable trabajar con decimales.

Para determinar las variables que salen y entran; para un problema de maximización; entra el valor más negativo y para un problema de minimización entra el valor más positivo. Para este caso está en la columna x_2 y se hace la relación de la columna pivote sobre la columna de valores.

VARIABLES BASICAS	VALORES	$\underline{x_2}$	RELACION
F_0	0	- 3/2	
y_1	160	2	160/2 = 80
y_2	120	2	**<u>120/2 = 60</u>**
y_3	280	2	280/2 = 140

$\underline{x_2}$ – Columna pivote; para maximización entra el más negativo

<u>120/2 = 60</u> – sale menor relación positiva; y viceversa para el de minimización.

La intersección de la variable que entra y de la que sale define el pivote principal con valor a 1.

Entra x_2

Sale y_2

El renglón y_2 se divide todo entre el número que se encuentra en la columna pivote; este número se le llama elemento pivote.

V.B	Valores	x_1	x_2	F_0	y_1	y_2	y_3
F_0							
y_1							
x_2	60	½	1	0	0	½	0
y_3							

Para completar la tabla simplex se pasa la ecuación F_0 igual y se le resta la nueva ecuación pivote multiplicado por su elemento pivote el cual se encuentra en la columna x_2.

V.B	Valores	x_1	x_2	F_0	y_1	y_2	y_3
F_0	0	-1	-3/2	1	0	0	0
$-(-3/2)x_2$	90	3/4	3/2	0	0	3/4	0
	90	-1/4	0	1	0	¾	0

Y así sucesivamente

V.B	Valores	x_1	x_2	F_0	y_1	y_2	y_3
y_1	160	2	2	0	1	0	0
$-2x_2$	-120	-1	-2	0	0	-1	0
	40	1	0	0	1	-1	0

V.B	Valores	x_1	x_2	F_0	y_1	y_2	y_3
y_3	280	4	2	0	0	0	1
$-2x_2$	- 120	-1	-2	0	0	-1	0
	160	3	0	0	0	-1	1

I	V.B	Valores	x_1	x_2	F_0	y_1	y_2	y_3
1	F_0	90	-1/4	0	1	0	0	0
	y_1	40	1	0	0	1	-1	0
	x_2	60	½	1	0	0	½	0
	y_3	160	3	0	0	0	- 1	0

- Como en la ecuación F_0 se tiene valores negativos; se sigue iterando.

Entra x_1

Sale y_1

I	V.B	Valores	x_1	x_2	F_0	y_1	y_2	y_3
2	F_0	100	0	0	1	¼	1	0
	x_1	40	1	0	0	1	-1	0
	x_2	40	0	1	0	-½	1	0
	y_3	40	0	0	0	- 3	2	0

V.B	Valores	x_1	x_2	F_0	y_1	y_2	y_3
F_0	90	- ¼	0	1	0	¾	0
- (1/4)x_1	10	¼	0	0	¼	¼	0
	100	0	0	1	¼	1	0

V.B	Valores	x_1	x_2	F_0	y_1	y_2	y_3
x_2	60	½	1	0	0	½	0
-½ x_1	-20	- ½	0	0	-½	½	0
	40	0	1	0	- ½	1	0

V.B	Valores	x_1	x_2	F_0	y_1	y_2	y_3
y_3	160	3	0	0	0	-1	0
- 3 x_1	-120	- 3	0	0	- 3	3	0
	40	0	0	0	- 3	2	0

-Como en F_0 ya no hay valores negativos; entonces la última iteración es la óptima.

-Para verificar que el resultado es el correcto se comprueba en las ecuaciones originales.

Comprobación:

$F_0 = 100$

$x_1 = 40$

$x_2 = 40$

$y_3 = 40$

En $F_0 = x_1 + 3/2\ x_2$

$= 40 + 3/2\ (40)$

$= 100$

$$\text{En} \quad 2x_1 + 2x_2 = 160$$
$$2(40) + 2(40) = 160$$
$$160 = 160$$

$$\text{En} \quad x_1 + 2x_2 = 120$$
$$40 + 2(40) = 120$$
$$120 = 120$$

$$\text{En} \quad 4x_1 + 2x_2 = 280$$
$$4(40) + 2(40) = 280 \qquad y_3 = 40$$
$$240 = 280$$

Traducción de la Solución:

Producir 40 artículos A y 40 artículos B el beneficio máximo será de $100. Quedarán 40 horas en el departamento de ensamble sin utilizar.

3.4. TECNICAS DE VARIABLES ARTIFICIALES.

La mayoría de los problemas de programación lineal no tiene una solución inicial de variables de holgura no negativas en forma canónica. La solución original ya no es factible, en este caso, no existe garantía de que siquiera existe una solución factible: las restricciones pueden ser inconsistentes. Lo que se requiere es un método sistemático y eficiente para generar una solución factible básica inicial. Para iniciar el método simplex, se utiliza el truco de crear en forma artificial un conjunto de ecuaciones en forma canónica. Esto se hace al introducir en cada restricción que no contenga una variable de holgura; una variable denominada artificial, el nuevo problema creado así se denomina problema ampliado.

Se emplean para obtener una solución básica factible cuando las variables de holgura no proporcionan fácilmente tal solución.

En general este caso será al menos una de las restricciones del tipo:

(=) ó (≥)

3.4.1. TECNICA DE LA GRAN "M" ó METODO DE PENALIZACION.

Al problema ampliado se le asigna la misma función objetivo que en el problema original, excepto que se penaliza cada variable artificial fuertemente con un gran coeficiente negativo de la función objetivo; por ejemplo una cantidad - M (de donde proviene el nombre del método). El método de la gran M sólo utiliza la lógica inherente de la programación lineal y el método simplex para proporcionar una solución óptima al problema ampliado que es también óptima para el problema original.

METODOLOGIA

1. Definir las variables de decisión o incógnitas del sistema.
2. Establecer la tabla de datos.
3. A partir de la tabla de datos establecer el modelo completo de P.L.
4. Agregar variables no negativas a cada una de las expresiones correspondientes de los tipos (≥) e (=). Estas variables se denominan Variables Artificiales y su adición hace que se infrinjan las restricciones correspondientes. Esta dificultad se elimina asegurando que las variables artificiales sean cero en la solución final. Esto se logra asignando una penalización grande por unidad a estas variables en la función objetivo. Tal penalización se designará como -M para problemas de maximización y +M para minimización y M > 0.

5. Usar las variables artificiales en la solución básica inicial y a fin de que la tabla Simplex inicial se prepare adecuadamente, la función objetivo deberá expresarse en términos de las variables no básicas únicamente. Esto significa que los coeficientes de las variables artificiales en la función objetivo deben ser cero, un resultado que puede lograrse sumando múltiplos adecuados de las ecuaciones de restricción al renglón de la función objetivo.

6. Proceder con los pasos regulares del método Simplex.

Ejemplo:

Una compañía produce secadores electrónicos: de lujo y estándar. Cada secador de lujo requiere el doble de tiempo en mano de obra que el estándar. Si todos los secadores son estándar la compañía puede producir, cuando menos 500. Las ventas limitan la producción del de lujo a 150 secadores cuando mucho y se tiene un pedido fijo del estándar de 250. Si los beneficios son $8 para el de lujo y $5 para el estándar, determinar el número de secadores que deben producirse, de cada tipo para maximizar el beneficio.

Solución:

Sea x_1 = No. de secadores de lujo a producir

x_2 = No. de secadores estándar a producir

TABLA DE DATOS

Recurso	x_1	x_2	Magnitud
Mano de obra	2	1	≥ 500
ventas de x_1	1		≤ 150
pedidos de x_2		1	$= 250$
Beneficios	\$ 8	\$ 5	

Solución por el método "M"

$$\text{Maximizar: } F = 8x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a:} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 500 \text{ ———— } (-Y_1),\ R_1 \\ & x_1 + \quad \leq 150 \text{ ———— } Y_2 \\ & x_2 = 250 \text{ ———— } R_3 \\ & x_1, x_2 \geq 0,\ Y_1, Y_2, R_1, R_2 \geq 0,\ M \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max. } F_0 &= 8x_1 + 5x_2 + 0Y_1 + 0Y_2 - MR_1 - MR_3 \\ \text{s. a:} \quad & 2x_1 + x_2 - Y_1 + 0Y_2 + R_1 + 0R_3 = 500 \\ & x_1 + 0x_2 + 0Y_1 + Y_2 + 0R_1 + 0R_3 = 150 \\ & 0x_1 + x_2 + 0Y_1 + 0Y_2 + 0R_1 + R_3 = 250 \\ & x_1, x_2, Y_1, Y_2, R_1, R_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$0 = -8x_1 - 5x_2 + 0Y_1 + F_0 + MR_1 + 0y_2 + MR_3$$

$$500 = 2x_1 + x_2 - Y_1 + 0F_0 + R_1 + 0y_2 + 0R_3$$

$$150 = x_1 + 0x_2 + 0Y_1 + 0F_0 + 0R_1 + 0y_2 + 0R_3$$

$$250 = x_1 + x_2 + 0Y_1 + 0F_0 + 0R_1 + 0y_2 + 0R_3$$

I	V.B.	Valores	x_1	x_2	y_1	F_0	R_1	y_2	R_3
0	F_0	0	-8	-5	0	1	M	0	M
	R_1	500	2	1	-1	0	1	0	0
	y_2	150	1	0	0	0	0	1	0
	R_3	250	0	1	0	0	0	0	1

- Para iterar se requiere la conformación exacta de I_4 por lo que los coeficientes "M" de R_1 y R_3 deben ser cero.

V.B.	Valores	x_1	x_2	y_1	F_0	R_1	y_2	R_3
F_0	0	-8	-5	0	1	M	0	M
(-M)R_1	-500M	-2M	-M	M	0	-M	0	0
(-M)R_3	-250M	0	-M	0	0	0	0	-M
	-750M	-2M-8	-2M-5	M	1	0	0	0

- La tabla simplex queda de la siguiente forma:

I	V.B.	Valores	x_1	x_2	y_1	F_0	R_1	y_2	R_3
0	F_0	750	-2M- 8	-2M-5	M	1	0	0	0
	R_1	500	2	1	-1	0	1	0	0
	y_2	150	1	0	0	0	0	1	0
	R_3	250	0	1	0	0	0	0	1

Ahora se procede con los pasos del método simplex. Resolviendo el problema con el software Tora Optimization System se tiene lo siguiente:

	x_1	x_2	RHS
Max	8	5	
Constraint 1:	2	1	
Constraint 2:	1	0	
Constraint 3:	0	1	

Basic	x_1	x_2	sx_3	Rx_4	sx_5	Rx_6	Solution
z	0.00	0.00	0.00	0.00	8.00	5.00	2450.00
1)x2	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	250.00
2)x1	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	150.00
3)sx3	0.00	0.00	1.00	-1.00	2.00	1.00	50.00

Comprobación:

$F_0 = 2450$

$x_1 = 150$

$x_2 = 250$

$y_1 = 50$

En $F_0 = 8x_1 + 5x_2$

$= 8(150) + 5(250) = 2450$

$2450 = 2450$

En $2x_1 + x_2 \geq 500$

$2(150) + 250 \geq 500$ $\quad y_1 = 50$

$550 \geq 500$

En $x_1 \leq 150$

$150 \leq 150$

En $x_2 = 250$

$250 = 250$

Traducción de la Solución:

Se deben producir 150 secadores de lujo y 250 secadores estándar, lo cual da un beneficio máximo de $2450; deben sobrar 50 secadores o se producen más de la capacidad mínima.

3.4.2. *TECNICA DE LAS DOS FASES.*

En el método de las dos fases se intenta encontrar una solución factible básica inicial al problema original en la fase 1. Si no existe solución factible, la fase 1 lo indica de inmediato. La fase 2 empieza con esta solución factible básica inicial y encuentra la solución óptima al problema original. Se eliminan las variables artificiales de la base de la siguiente forma. En la fase 1 se introduce una función objetivo separada, a la que a menudo se denomina forma de infactibilidad, la cual da a cada variable artificial un coeficiente de función objetivo de - 1 y a cada verdadera variable un coeficiente de 0. Si la fase 1 concluye con variables artificiales básicas en un valor positivo, no existe solución factible para el problema original, (sin embargo, es posible tener variables artificiales básicas con un valor de cero al final de la fase 1. A estas variables no se les permitirá que asuman valores positivos en la optimización de la fase 2).

Una desventaja de la Técnica M es el posible error de cómputo que podría resultar de asignar un valor muy grande a la constante M.

Para aliviar la dificultad, el nuevo modelo elimina el uso de la constante M resolviendo el problema en dos fases:

FASE I

Formular un nuevo problema reemplazando la función objetivo por la suma de las variables artificiales. La nueva función objetivo se MINIMIZA sujeta a las restricciones del problema original. Si el problema tiene un espacio factible se deberá cumplir con los siguientes requisitos:

a) El valor mínimo de la nueva función objetivo será cero.

b) No existen variables artificiales en la solución.

c) No se puede seguir iterando.

Si alguna de las tres condiciones anteriores no se cumple el problema termina con la información de que no existe solución factible.

FASE II

Utilizar la solución básica óptima de la fase Y como una solución de inicio para el problema original. En este caso la función objetivo original se expresa en términos de las variables no básicas utilizando las eliminaciones usuales de Gauss-Jordan.

Ejemplo:

Una compañía produce 3 modelos de sillas. Las contribuciones a la utilidad por silla son:

Contemporáneo	$ 10
Danés	$ 15
Early	$ 25

La empresa está agotando su capacidad de almacenamiento, por lo que la producción total de cualquier mezcla de sillas está limitada a 100 piezas por día. Si toda la producción fuera de sillas modelo Contemporáneo y no estuviera limitada la producción la empresa podría producir 1500 sillas, pero el modelo Danés requiere 1.5 veces más tiempo y el Early requiere el doble de tiempo que el modelo Contemporáneo. Además el modelo Danés, requiere un respaldo reforzado, el cual es suministrado por un sólo proveedor que no puede surtir más de 500 por día.

Suponiendo que los detallistas de la empresa pueden aceptar cualquier mezcla de modelos, determinar la producción óptima, si también se sabe que por apoyo a un cliente importante se tienen que producir 50 sillas modelo Contemporáneo.

Solución:

x_1 – Número de sillas Contemporáneo a producir

x_2 – Número de sillas Danés a producir

x_3 – Número de sillas Early a producir

TABLA DE DATOS

Recurso	X_1	X_2	X_3	Magnitud
Capacidad de Producción	1	1	1	≤ 1000
No. de sillas por día	1	1.5	2	≤ 1500
Respaldo		1		≤ 500
Apoyo al cliente	1			$= 50$
Utilidades	\$ 10	\$ 15	\$ 25	

Max.: $F = 10x_1 + 15x_2 + 25x_3$

s. a :

cap.Prod. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000$ ———— Y_1

No. sillas por día $x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 \leq 1500$ ———— $(-Y_2)$

Respaldo $x_2 \leq 500$ ———— Y_3

Apoyo al cliente $x_1 = 50$ ———— $(-Y_4), R_2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Solución por dos Fases:

Mín.: $r_0 = R_1 + R_2$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000$$

$$x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 \leq 1500$$

$$x_2 \leq 500$$

$$x_1 = 50$$

$$
\begin{aligned}
-0x_1 - 0x_2 - 0x_3 + 0y_1 + 0y_3 - 0y_2 - 0y_4 + r_0 - 0R_1 - 0R_2 &= 0\\
x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + 0y_3 - 0y_2 - 0y_4 + 0r_0 + 0R_1 + 0R_2 &= 1000\\
x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 + 0y_1 + y_3 - 0y_2 - 0y_4 + 0r_0 + 0R_1 + 0R_2 &= 1500\\
0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0y_1 + 0y_3 - y_2 - 0y_4 + 0r_0 + R_1 + 0R_2 &= 500\\
x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0y_1 + 0y_3 - 0y_2 - y_4 + 0r_0 + 0R_1 + R_2 &= 50
\end{aligned}
$$

I	V.B.	Valores	x_1	x_2	x_3	y_2	y_4	r_0	y_1	y_3	R_1	R_2
0	r_0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	-1
	y_1	1000	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
	y_2	1500	1	1.5	2	0	0	0	0	1	0	0
	R_1	500	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	0
	R_2	50	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	1

Los coeficientes de R_1 y R_2 deben ser cero.

V.B.	Valores	x_1	x_2	x_3	y_2	y_4	r_0	y_1	y_3	R_1	R_2
r_0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	-1
R_1	500	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	0
R_2	50	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
	550	1	1	0	-1	-1	1	0	0	0	0

I	V.B.	Valores	x_1	x_2	x_3	y_2	y_4	r_0	y_1	y_3	R_1	R_2
1	r_0	550	1	1	0	-1	-1	1	0	0	0	0
	y_1	1000	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
	y_2	1500	1	1.5	2	0	0	0	0	1	0	0
	R_1	500	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	0
	R_2	50	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	1

Entra x_2

Sale R_1

-Se procede con los pasos del método simplex y se llega a la solución de que r_0 = 0 por lo tanto se pasa a la Fase II con la misma tabla que se obtuvo en la Fase Y únicamente se cambian los valores del renglón r_0 con los valores de F_0 y desaparecen las variables artificiales.

I	V.B.	Valores	x_1	x_2	x_3	y_2	y_4	F_0	y_1	y_3
2	F_0	0	-10	-15	-25	0	0	1	0	0
	y_1	450	0	0	1	1	1	0	1	0
	y_2	700	0	0	2	3/2	1	0	0	1
	x_2	500	0	1	0	-1	0	0	0	0
	x_1	50	1	0	0	0	-1	0	0	0

V.B.	Valores	x_1	x_2	x_3	y_2	y_4	F_0	y_1	y_3
F_0	0	-10	-15	-25	0	0	1	0	0
$(15)x_2$	7500	0	15	0	-15	0	0	0	0
$(10)x_1$	500	10	0	0	0	-10	0	0	0
	8000	0	0	-25	- 15	-10	1	0	0

V.B.	Valores	x_1	x_2	x_3	y_2	y_4	F_0	y_1	y_3
F_0	8000	0	0	-25	-15	-10	1	0	0
y_1	450	0	0	1	1	1	0	1	0
y_2	700	0	0	2	3/2	1	0	0	1
x_2	500	0	1	0	-1	0	0	0	0
x_1	50	1	0	0	0	-1	0	0	0

- Se procede con los pasos del método simplex

Resolviendo el problema con el software Tora se tiene:

	x_1	x_2	x_3		RHS
Max	10	15	25		
Constraint 1:	1	1	1	≤	1000
Constraint 2:	1	1.5	2	≤	1500
Constraint 3:	0	1	0	≤	500
Constraint 4:	1	0	0	=	50

Basic	x_1	x_2	x_3	sx_4	sx_5	sx_6	Rx_7
z	0.00	3.75	0.00	0.00	12.50	0.00	- 2.50
1)sx4	0.00	0.25	0.00	1.00	- 0.50	0.00	- 0.50
2)x3	0.00	0.75	1.00	0.00	0.50	0.00	- 0.50
3)sx6	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
4)x1	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

Basic	Solution
z	18625.00
1)sx4	225.00
2)x3	725.00
3)sx6	500.00
4)x1	50.00

Comprobación:

$F_0 = 18625$

$x_1 = 50$

$x_2 = 0$

$x_3 = 50$

$y_1 = 225$

$y_3 = 500$

En $F_0 = 10\,x_1 + 15\,x_2 + 25\,x_3$

$18625 = 10(50) + 15(0) + 25(725)$

$18625 = 18625$

En $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000$

$50 + 0 + 725 \leq 1000$ $\qquad$ $y_1 = 225$

$775 \leq 1000$

En $x_1 + 3/2\, x_2 + 2\, x_3 \leq 1500$

$50 + 3/2(0) + 2(725) \leq 1500$

$1500 \leq 1500$

En $x_2 \leq 500$

$0 \leq 500$ $\qquad$ $y_3 = 500$

En $x_1 = 50$

$50 = 50$

Interpretación de los Resultados:

Se deben producir 50 sillas del modelo Contemporáneo, 50 sillas del modelo Early; dando una utilidad máxima de $ 18625.

Quedarán 225 sillas de la capacidad de producción y 500 sillas que requieren respaldo, las cuales se utilizaran en el modelo Danés.

3.5. PROBLEMA DUAL

El problema Dual permite:

a) Resolver problemas de sistemas lineales que tienen más restricciones que actividades. Como el grado de dificultad de resolver un programa lineal por medio de una computadora está en función del número de filas de la matriz A y no en el número de columnas, al aplicarse la dualidad a un problema primario donde m > n, se obtiene otro problema lineal donde el número de filas n es menor al número de columnas m.

b) Hacer interpretaciones económicas de las soluciones óptimas de los problemas de programación lineal.

c) Generar nuevos algoritmos para la solución de problemas de redes de optimización.

d) Generar métodos como el dual simplex para el análisis de sensibilidad de los problemas de programación lineal.

Una vez que se ha realizado el modelo dual este se puede resolver por la metodología del algoritmo simplex y su resultado será el mismo valor óptimo de la función objetivo.

Cada modelo de programación lineal tiene un segundo modelo asociado con él. Uno se denomina "Primal" y el otro "Dual", los dos modelos poseen propiedades muy relacionadas de tal manera que la solución óptima a un modelo proporciona información completa sobre la solución óptima para el otro.

El modelo dual se definirá para cuando su primal está en dos formas:

1) Forma Canónica

2) Forma Estándar

Modelo Dual cuando el Primal está en la forma canónica:
Se obtiene a partir del modelo primal y (viceversa) tal como sigue:

1. Cada restricción en un modelo corresponde a una variable dual en el otro.
2. Los elementos del vector de términos independientes en un modelo son iguales a los coeficientes respectivos de la función objetivo del otro.
3. Un modelo es de maximización y el otro de minimización.
4. El modelo de maximización tiene restricciones ($\leq$) y el de minimización tiene restricciones ($\geq$).
5. Las variables en ambos modelos son no negativas.

Ejemplo:

Dado el siguiente modelo de programación lineal, obtener su dual.

Maximizar: $F = 15\,x_1 + 26\,x_2$

sujeto a:

$$3\,x_1 + 9\,x_2 \leq 70 \text{ ——— } u_1$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 35 \text{ ——— } u_2$$
$$5\,x_1 + 2\,x_2 \leq 20 \text{ ——— } u_3$$
$$x_1 + x_2 \leq 10 \text{ ——— } u_4$$

Sean u_1,u_2,u_3,u_4 las variables duales asociadas a la 1a., 2a.,3a.,4a., restricciones funcionales del primal, el dual es entonces:

Minimizar: $C = 70\,u_1 + 35\,u_2 + 20\,u_3 + 10\,u_4$

sujeto a:

$$3\,u_1 + 2\,u_2 + 5\,u_3 + u_4 \geq 15$$
$$9\,u_1 + 3\,u_2 + 2\,u_3 + u_4 \geq 26$$
$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4 \geq 0$$

Modelo Dual cuando el Primal está en la forma estándar:
Se obtiene a partir del modelo primal tal como sigue:

1. Cada restricción en el primal corresponde a una variable dual en el otro.
2. Los elementos del vector de términos independientes en el primal son iguales a los coeficientes respectivos de la función objetivo del dual.
3. El primal es de Maximización y el Dual es de Minimización o viceversa.
4. El primal tiene restricciones (=) y el dual (>).
5. Una restricción de igualdad original en el primal, genera una variable dual irrestricta en signo.

3.5.1. *EJEMPLO DEL PROBLEMA DUAL EN LA FORMA CANONICA.*

Dado el siguiente modelo de programación lineal obtener su dual:

$$\text{Maximizar} \quad F = 3x_1 + 15x_2 + 7x_3$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a:} \quad x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 19 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1, x_2, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El Dual es:

$$\text{Minimizar:} \quad C = 19u_1 + 6u_2$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a:} \quad u_1 + 4u_2 &\geq 3 \\ 3u_1 + u_2 &\geq 15 \\ 5u_1 + u_2 &\geq 7 \end{aligned}$$

$u_1 \geq 0$, u_2 irrestricta en signo

Aplicación del Problema:

Un dietista está planeando el menú para la merienda a servir en el comedor de una universidad. Se usarán tres diferentes alimentos.

El alimento A contiene por onza 50 miligramos (Mg) de vitamina 1.20 Mg. de vitamina 2 y 10 Mg. de vitamina 3 y cuesta $10 por onza.

El alimento B contiene por onza 30 Mg. de vitamina 1.10 Mg. de vitamina 2 y 50 Mg. de vitamina 3 y cuesta $15 por onza.

El alimento C contiene por onza 20 Mg. de vitamina 1.30 Mg. de vitamina 2 y 20 Mg. de vitamina 3 y cuesta $ 12 por onza.

Las necesidades vitamínicas mínimas son: 900 Mg. de vitamina 1.1200 Mg. de vitamina 2 y 210 Mg. de vitamina 3.

Se pide determinar el número de onzas de cada alimento que debe incluir en la comida, al menor costo posible, satisfaciendo los niveles diarios de las tres vitaminas.

Solución:

x_1 – No. de onzas para el alimento A

x_2 – No. de onzas para el alimento B

x_3 – No. de onzas para el alimento C

TABLA DE DATOS

Recurso	x_1	x_2	x_3		Magnitud
V - 1	50	30	20	$\geq$	900
V - 2	20	10	30	$\geq$	1200
V - 3	10	50	20	$\geq$	210
costo	\$10	\$15	\$12		

Primal:

Minimizar: $C_0 = 10\,x_1 + 15\,x_2 + 12x_3$

sujeto a:

$$50\,x_1 + 30\,x_2 + 20x_3 \geq 900$$
$$20\,x_1 + 10\,x_2 + 30\,x_3 \geq 1200$$
$$10\,x_1 + 50\,x_2 + 20\,x_3 \geq 210$$
$$x_1\,,\; x_2\,,\, x_3 \geq 0$$

Dual:

Maximizar: $F_0 = 900\,u_1 + 1200\,u_2 + 210\,u_3$

sujeto a:

$$50\,u_1 + 20\,u_2 + 10\,u_3 \leq 10 \,\ldots\ldots\ldots w_1$$
$$30\,u_1 + 10\,u_2 + 50\,u_3 \leq 15 \,\ldots\ldots\ldots w_2$$
$$20\,u_1 + 30\,u_2 + 0\,u_3 \leq 12 \ldots\ldots\ldots w_3$$
$$u_1\,,\; u_2\,,\, u_3 \geq 0$$

$$-900\,u_1 - 1200\,u_2 - 210\,u_3 + F_0 + 0w_1 + 0w_2 + 0w_3 = 0$$
$$50\,u_1 + 30\,u_2 + 10\,u_3 + 0F_0 + w_1 + 0w_2 + 0w_3 = 10$$
$$30\,u_1 + 10\,u_2 + 50\,u_3 + 0F_0 + 0w_1 + w_2 + 0w_3 = 15$$
$$20\,u_1 + 30\,u_2 + 20\,u_3 + 0F_0 + 0w_1 + 0w_2 + w_3 = 12$$
$$u_1\,,\; u_2\,,\, u_3\,,\, w_1\,,\, w_2\,,\, w_3 \geq 0$$

I	V.B	Valores	u_1	u_2	u_3	F_0	w_1	w_2	w_3
0	F_0	0	-900	-1200	-210	1	0	0	0
	w_1	10	50	20	10	0	1	0	0
	w_2	15	30	10	50	0	0	1	0
	w_3	12	20	30	20	0	0	0	1

Entra u_2

Sale w_3

I	V.B	Valores	u_1	u_2	u_3	F_0	w_1	w_2	w_3
1	F_0	480	- 100	0	590	1	0	0	40
	w_1	2	110/3	0	-10/3	0	1	0	-2/3
	w_2	11	70/3	0	130/3	0	0	1	-10/3
	u_2	2/5	2/3	1	2/3	0	0	0	1/30

V.B	Valores	u_1	u_2	u_3	F_0	w_1	w_2	w_3
F_0	0	- 900	- 1200	- 210	1	0	0	0
(1200)u_2	480	800	1200	800	0	0	0	0
	480	- 100	0	590	1	0	0	0

V.B	Valores	x_1	x_2	x_3	F_0	w_1	w_2	w_3
w_1	10	50	20	10	0	1	0	0
$(-20)u_2$	-8	- 40/3	- 20	- 40/3	0	0	0	- 2/3
	2	110/3	0	- 10/3	0	1	0	- 2/3

V.B	Valores	u_1	u_2	u_3	F_0	w_1	w_2	w_3
w_2	15	30	10	50	0	0	1	0
$(-10)u_2$	- 4	- 20/3	- 10	- 20/3	0	0	0	- 10/3
	11	70/3	0	130/3	0	0	1	- 10/3

Entra u_1

Sale w_1

NOTA :Los resultados se ven en los precios sombra.

Los precios sombra son los coeficientes de la función F_0 debajo de las variables básicas iniciales, para este caso son las variables W_1, W_2 y W_3; que para el problema primal propuesto sería X_1, X_2 y X_3.

							x_1		x_2
I	V.B	Valores	u_1	u_2	u_3	F_0	w_1	w_2	w_3
2	F_0	5340/11	0	0	19170/33	1	300/110	0	2100/55
	u_1	3/55	1	0	- 3/33	0	3/110	0	- 1/55
	w_2	321/33	0	0	500/11	0	- 70/11	1	9/99
	u_2	12/33	0	1	72/99	0	- 1/55	0	5/110

V.B	Valores	u_1	u_2	u_3	F_0	w_1	w_2	w_3
F_0	480	- 100	0	590	1	0	0	40
(100)u_1	300/55	100	0	-300/33	0	300/110	0	-100/55
	5340/11	0	0	19170/33	1	300/110	0	2500/55

V.B	Valores	u_1	u_2	u_3	F_0	w_1	w_2	w_3
w_2	11	70/3	0	130/3	0	0	1	- 10/30
(-70/3) u_1	- 42/3	- 70/3	0	210/99	0	- 70/11	0	14/33
	321/33	0	0	500/11	0	- 70/11	1	9/99

V.B	Valores	u_1	u_2	u_3	F_0	w_1	w_2	w_3
u_2	2/5	2/3	1	2/3	0	0	0	1/30
$(-2/3)u_1$	- 6/165	- 2/3	0	6/99	0	- 1/55	0	2/165
	40	0	1	0	0	- 1/55	0	5/110

Comprobación:

$F_0 = 5340/11$

$x_1 = 300/110$

$x_2 = 0$

$x_3 = 2100/55$

En $F_0 = 10\,x_1 + 15\,x_2 + 12\,x_3$

$5340/11 = 10(300/110) + 15(0) + 12(2100/55)$

$5340/11 = 5340/11$

En $50\,x_1 + 30\,x_2 + 20\,x_3 \geq 900$

$50(300/110) + 30(0) + 20(2100/55) \geq 900$

$2340/11 \geq 900$

En $20\,x_1 + 10\,x_2 + 30\,x_3 \geq 1200$

$20(300/110) + 10(0) + 30(2100/55) \geq 1200$

$12900/11 \geq 1200$

En $10x_1 + 50x_2 + 20x_3 \geq 210$

$$10(300/110) + 50(0) + 20(2100/55) \geq 210$$

$$8700/11 \geq 210 \qquad y_3 = 19170/33$$

Interpretación de los Resultados:

El número de onzas para el alimento A es de 2.7, para el alimento C es de 38.18, el alimento B no se incluye en la comida.

El costo mínimo es de \$ 485.45. Quedarán 580.9 Mg. de la vitamina 3 sin usar.

3.5.2. EJEMPLO DEL PROBLEMA DUAL EN LA FORMA ESTANDAR.

Una compañía produce 3 modelos de sillas. Las contribuciones a la utilidad por silla son:

Contemporáneo	\$ 10
Danés	\$ 15
Early	\$ 25

La empresa está agotando su capacidad de almacenamiento, por lo que la producción total de cualquier mezcla de sillas está limitada a 100 piezas por día. Si toda la producción fuera de sillas modelo Contemporáneo y no estuviera limitada la producción la empresa podría producir 1500 sillas, pero el modelo Danés requiere 1.5 veces más tiempo y el Early requiere el doble de tiempo que el modelo Contemporáneo. Además el modelo Danés, requiere un respaldo reforzado, el cual es suministrado por un sólo proveedor que no puede surtir más de 500 por día.

Suponiendo que los detallistas de la empresa pueden aceptar cualquier mezcla de modelos, determinar la producción óptima, si también se sabe que por apoyo a un cliente importante se tienen que producir 50 sillas modelo Contemporáneo.

Solución:

x_1 = Número de sillas Contemporáneo a producir

x_2 = Número de sillas Danés a producir

x_3 = Número de sillas Early a producir

TABLA DE DATOS

Recurso	X_1	X_2	X_3	Magnitud
Capacidad de Producción	1	1	1	≤ 1000
No. de sillas por día	1	1.5	2	≤ 1500
Respaldo		1		≤ 500
Apoyo al cliente	1			$= 50$
Utilidades	\$ 10	\$ 15	\$ 25	

Primal:

Max.: $F = 10x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3$

s. a :

cap.Prod.	$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 1000$ —u_1
No. sillas por día	$x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 + 0y_1 + y_2 + 0y_3 = 1500$ —u_2
Respaldo	$0x_1 + x_2 + 0x_3 + 0y_1 + 0y_2 + y_3 = 500$ —u_3
Apoyo al cliente	$x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 50$ —u_4

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

Dual:

$$\text{Min. } C_0 = 1000\,u_1 + 1500\,u_2 + 500\,u_3 + 50\,u_4$$

s. a :

$$\begin{array}{lllll}
u_1 + & u_2 + & & + \; u_4 \geq 10 & \text{........- } w_1,\ R_1 \\
u_1 + & 1.5\,u_2 + & u_3 & \geq 15 & \text{........- } w_2,\ R_2 \\
u_1 + & 2\,u_2 + & & \geq 25 & \text{........- } w_3,\ R_3 \\
u_1 & & & \geq 0 & \\
 & u_2 & & \geq 0 & \\
 & & u_3 & \geq 0 & \\
\end{array}$$

u_4 Irrestricta en signo

Solución por el software Manager

V.B.	Valor	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
F	18750	0	0	0	0	0	0	- 750	- 250	0	- 500
y_5	12.50	0	0	0	0	0	0	- 0.50	0.50	1	0
y_1	2.50	0	0	0	0	1	0	- 0.50	- 0.50	0	0
y_2	3.75	0	0	0	0	0	1	- 0.75	- 0.25	0	- 1
x_1	0	1	0	0	0	0	0	0	- 1	0	0
x_2	12.50	0	1	0	0	0	0	- 0.50	0.50	0	0
x_3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	- 1
x_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Comprobación:

$C_0 = 18750$

$u_1 = 0$

$u_2 = 2.50$

$u_3 = 0$

En $C_0 = 1000\,u_1 + 1500\,u_2 + 500\,u_3 + 50\,u_4$

$18750 = 1000(0) + 1500(12.50) + 500(0) + 50(0)$

$18750 = 18750$

En $u_1 + u_2 + \quad + u_4 \geq 10$

$0 + 12.50 + 0 \geq 10$ $\qquad y_1 = 2.50$

$12.50 \geq 10$

En $u_1 + 3/2\,u_2 + u_3 \geq 15$

$0 + 3/2(12.50) + 0 \geq 15$ $\qquad y_2 = 3.75$

$18.75 \geq 15$

En $u_1 + 2\,u_2 \geq 25$

$0 + 2(12.50) \geq 25$

$25 \geq 25$

En $u_1 \geq 0$

$0 \geq 0$

En $u_2 \geq 0$

$12.50 \geq 0$ $\qquad y_5 = 12.50$

En $u_3 \geq 0$

$0 \geq 0$

En $u_4 = 0$

$0 = 0$

Solución del primal con el software Tora

	x_1	x_2	x_3		RHS
Max	10	15	25		
Constraint 1:	1	1	1	≤	1000
Constraint 2:	1	1.5	2	≤	1500
Constraint 3:	0	1	0	≤	500
Constraint 4:	1	0	0	=	50

Basic	x_1	x_2	x_3	sx_4	sx_5	sx_6	Rx_7
z	0.00	3.75	0.00	0.00	12.50	0.00	- 2.50
1)sx4	0.00	0.25	0.00	1.00	- 0.50	0.00	- 0.50
2)x3	0.00	0.75	1.00	0.00	0.50	0.00	- 0.50
3)sx6	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
4)x1	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

Basic	Solution
z	18625.00
1)sx4	225.00
2)x3	725.00
3)sx6	500.00
4)x1	50.00

Comprobación:

$F_0 = 18625$

$x_1 = 50$

$x_2 = 0$

$x_3 = 50$

$y_1 = 225$

$y_3 = 500$

En $F_0 = 10\,x_1 + 15\,x_2 + 25\,x_3$

$18625 = 10(50) + 15(0) + 25(725)$

$18625 = 18625$

En $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000$

$50 + 0 + 725 \leq 1000$ $\qquad$ $y_1 = 225$

$775 \leq 1000$

En $x_1 + 3/2\,x_2 + 2\,x_3 \leq 1500$

$50 + 3/2(0) + 2(725) \leq 1500$

$1500 \leq 1500$

En $x_2 \leq 500$

$0 \leq 500$ $\qquad$ $y_3 = 500$

En $x_1 = 50$

$50 = 50$

3.6. EJEMPLO DE APLICACION DE LA PROGRAMACION LINEAL.

La compañía ST8, S.A. de C.V. produce tres tipos de recubrimientos:

I. DIZU.

II. SIN.

III. RANTICOR.

Los precios de venta son:

Lote de DIZU	: \$ 495.00
Lote de SIN	: \$ 4 140.00
Lote de RANTICOR	: \$ 3 060.00

Cuenta para ello con dos departamentos:

1. *LAVADO*. Con una capacidad de 624 horas por mes.
2. *REACCION*. Con una capacidad de 312 horas por mes.

Por ser diferentes materiales a recubrir en su forma geométrica y peso, cada uno de ellos requieren diferentes tiempos en horas tanto en Lavado como en Reacción tal como se indica en la tabla:

	Lote de DIZU (150 KG.)	**Lote de SIN** (2000 pzas)	**Lote de RANTICOR** 2000 PZAS.
LAVADO	1.5	4	2
REACCION	1	2	1

De acuerdo a la información de Contabilidad, los costos de producción por lote de los recubrimientos son:

LAVADO		DIZU	SIN	RANTICOR
Materias primas	$	4	4	4
Mano de obra	$	18	18	18
Otros	$	15	25	15
Sub - Total		37	47	37

REACCION		DIZU	SIN	RANTICOR
Materias primas	$	272	308	139
Mano de obra	$	47	94	534
Otros	$	12	24	47
Sub - Total		331	426	720
TOTAL POR LOTE		368	473	757
PRECIO DE VENTA		495	4140	3060
COSTOS DE PRODUC.		368	473	757
BENEFICIO UNITARIO		127	3667	2303

El Departamento de Ventas informa que para el próximo mes las ventas serán:

- Para el recubrimiento de DIZU: no mayor a 30 lotes.
- Para el recubrimiento SIN: no mayor a 6 lotes.
- Para el recubrimiento de RANTICOR: no mayor a 16 lotes.
- Considerando en las cantidades anteriores pedidos confirmados de:
- Recubrimiento DIZU: 12 lotes.
- Recubrimiento SIN: 4 lotes.
- Recubrimiento RANTICOR: 10 lotes.
- En términos de toda la información anterior se requiere definir el programa de producción que maximice los beneficios, respetando las restricciones establecidas.

SOLUCION:

Considerando:

x_1 = número de lotes del recubrimiento DIZU a producir.

x_2 = número de lotes del recubrimiento SIN a producir.

x_3 = número de lotes del recubrimiento RANTICOR a producir.

LA TABLA DE DATOS ES:

RESTRICCION	x_1	x_2	x_3	**Magnitud**
Lavado	1.5	4	2	624
Reacción	1	2	1	312
Ventas DIZU	1			30
Ventas SIN		1		6
Ventas RANTICOR			1	16
Pedido DIZU	1			12
Pedido SIN		1		4
Pedido RANTICOR			1	10
Beneficio Unitario	127	3667	2303	

El Modelo de Programación Lineal es:

$$\text{Max. } F = 127\,x_1 + 3667\,x_2 + 2303\,x_3$$

sujeto a:

Lavado:	$1.5\,x_1$ +	$4\,x_2$ +	$2\,x_3 \leq 624$
Reacción:	x_1 +	$2\,x_2$ +	$x_3 \leq 312$
Ventas DIZU:	x_1		≤ 30
Ventas SIN:		x_2	≤ 6
Ventas RANTICOR:			$x_3 \leq 16$
Pedido DIZU:	x_1		≥ 12
Pedido SIN:		x_2	≥ 4
Pedido RANTICOR:			$x_3 \geq 10$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Solución con el software "Manager"

V.B.	Valor	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
F	62660	0	0	0	0	0	127	3667	2303	0	0	0
y_1	523	0	0	0	1	0	-1.5	- 4	-2	0	0	0
y_2	254	0	0	0	0	1	- 1	- 2	-1	0	0	0
y_6	18	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
y_7	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
y_8	6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_1	30	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_2	6	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_3	16	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0

Los métodos de solución requieren de muchos cálculos iteractivos, para facilitar la solución de ellos existen varios software como son : Manager, Tora, Lindo, Optimiza (que se realizó en la FES - C., por Aguilar- Acosta).

Para la resolución de estos ejemplos se utilizó el software Tora y Manager, porque se trata de ejemplos sencillos y pocas variables de decisión.

Si se tiene un problema con muchas variables de decisión entonces se debe trabajar con el software Lindo.

Optimiza se utiliza para problemas con pocas variables de decisión, es muy sencillo para trabajar.

CAPITULO 4

CAPITULO 4

PROBLEMA DEL TRANSPORTE

4.1. DIFERENTES METODOS DE SOLUCION DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

Existen 4 tipos de Métodos para la resolución del Problema del Transporte:

1. Esquina Noroeste
2. Aproximación de Voguel (MAV)
3. Costo Mínimo
4. Tanteos

En este trabajo se abordarán los Métodos Esquina Noroeste y Aproximación de Voguel (MAV), los cuales establecen una solución básica de inicio

4.2. ANTECEDENTES

El origen de los métodos de transporte se dan en el año de 1941, en el que F.L. Hichcock presentó un estudio titulado (La distribución de un producto desde diversos orígenes a numerosas localidades). En 1947, T.C. Koopmans presentó un estudio, sin ninguna relación con el de Hitchcock, al que le llamó (Utilización óptima del sistema de transporte). Ambas aportaciones contribuyeron al desarrollo de los métodos de transporte que implican un número dado de fuentes de embarque y otro de puntos de destino.

4.3. DEFINICION DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

El modelo tiene que ver con la determinación de un plan de costo mínimo para transportar una mercancía desde varias fuentes (por ejemplo, fábricas) a varios destinos (almacenes o bodegas). Es básicamente un programa lineal que se puede resolver a través del método simplex regular, su estructura especial hace posible el desarrollo de un procedimiento de solución, conocido como técnica de transporte.

Entre los datos del modelo se cuentan:

1. Nivel de oferta en cada fuente y la cantidad de la demanda en cada destino.
2. El costo de transporte unitario de la mercancía de cada fuente a cada destino.

La suposición básica del modelo es que el costo del transporte en una ruta directamente proporcional al número de unidades transportadas. La definición de "unidad de transporte" variará dependiendo de la "mercancía" que se transporte.

Si x_{ij} representa la cantidad transportada desde la fuente y al destino j, entonces, el modelo general de PL que representa el modelo de transporte es

$$\text{minimizar } z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} <= a_i \quad i = 1, 2. \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} >= b_j \quad j = 1, 2. \ldots, n$$

$$x_{ij} >= 0, \text{ para todas las i y j}$$

4.4. PASOS BASICOS DE LA TECNICA DEL TRANSPORTE.

1. Determine una solución factible inicial usando los métodos de la Esquina Noroeste y Aproximación de Voguel.

2. Determine la variable que entra (método del cruce de arroyo), que se elige entre las variables no básicas. Si todas estas variables satisfacen la condición de optimidad (del método simplex), deténgase; de lo contrario, diríjase al paso 3.

3. Determine la variable que sale (método del cruce de arroyo, mediante el uso de la condición de factibilidad) de entre las variables de la solución básica actual; después obténgase la nueva solución básica. Regrese al paso 2.

Un proceso iterativo (Método de Transporte) asigna los recursos limitados, como la capacidad de producción, entre las actividades en competencia; por ejemplo, los almacenes. La función objetivo es minimizar los costos de transporte dentro de las restricciones de las fábricas y almacenes individuales, más las restricciones normales de no negatividad que surgen en los problemas de negocios. La solución final es, entonces, la determinación del programa óptimo de embarque con los costos de transporte más bajos.

4.5. METODO DE LA ESQUINA NOROESTE

Este método establece que las cantidades embarcadas de las fábricas a los almacenes se deben comenzar en la esquiná superior izquierda de la tabla que se use en el estudio. Cuando se complete la ruta, es decir, cuando se anotaron en su totalidad la capacidad de la fábrica o los requerimientos de los almacenes (ventas), tomando en cuenta, cuál es la cantidad más baja, entonces se anota la holgura, ya sea de la capacidad de fábrica o de requerimientos de almacenes en el nuevo(s) renglón(es) o columnas hasta que se complete la tabla.

Si la capacidad de fábrica tiene un valor que excede los requerimientos de almacenes (ventas), se dice que se tiene un caso de holgura en las fábricas. A la holgura no se le asigna costo alguno en vista de que no ocasiona costo de transporte. Puede ser un exceso de capacidad de la(s) fábrica(s) un exceso de inventario. La columna de holgura que permite que los requerimientos marginales de las fábricas igualen a los requerimientos de los almacenes o sea, que los renglones igualen a las columnas.

Este método comienza asignando la cantidad máxima permisible por la oferta y la demanda a la variable x_{11} (la que esta en la esquina noroeste de la tabla). La columna (renglón) satisfecha se cancela indicando que las variables restantes en la columna (renglón) cancelado es igual a cero. Si una columna y un renglón se satisface simultáneamente, únicamente uno (cualquiera de los dos) debe cancelarse y se asigna un cero al renglón o columna no cancelado. Después de ajustar las cantidades de oferta y demanda para todos los renglones y columnas cancelados, la cantidad máxima factible se asigna al primer elemento no cancelado en la nueva columna (renglón).

El procedimiento termina cuando exactamente un renglón o una columna se dejan sin cancelar.

4.5.1. EJEMPLO DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE PARA EL CASO DE MINIMIZACION.

La empresa Ruiz S.A. de C.V. tiene cuatro productos que pueden fabricarse en 3 máquinas. Sin embargo hay diferencias de velocidades de funcionamiento, precios de venta y costos, que son los siguientes:

	Producción	unid/hora,	en la máquina:	Precio de	Número de
	1	2	3	venta $	Productos
PRODUCTOS					
A	18	-	14.4	76	3250
B	20	15	16	75	4000
C	16		12.8	71	3600
D	20	15	16	72	3500
tiempo disponible	400 hr/mes	600 hr/mes	400 hr/mes		

COSTO UNITARIO VARIABLE POR MAQUINA, EN $

PRODUCTO	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
A	28		31
B	31	37	35
C	26		32
D	30	34	36

Se pide definir la programación y asignación de la carga apropiada de trabajo a las tres máquinas que maximice las utilidades.

Solución:

La función objetivo en este caso es el de maximizar la utilidad total mediante la programación y asignación de trabajo a las tres máquinas.
Se sabe que:

Utilidad = precio de Venta - Costo de producción

Se define la utilidad para cada producto y se muestra en la siguiente tabla:

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
Producto A	$48		$45
Producto B	$44	$38	$40
Producto C	$45		$39
Producto D	$42	$38	$36

El producto A no se pude efectuar en la máquina 2 por razones técnicas, lo mismo que para el producto C.

De la tabla anterior se observa que la máquina 1 es la más eficiente, dado que a parte de poder producir todos los artículos otorga el máximo de beneficios unitarios, por lo que se le denominará la máquina estándar.

Cálculo de horas estándar de máquina para un producto:

Se obtiene dividiendo el total de unidades que se producen durante el período, entre el número de unidades que produzca en una hora la máquina estándar.

Producto A : $\frac{3250 \text{ unidades}}{18 \text{ unid/hora}} = 180.56$ horas estándar

Producto B : $\frac{4000 \text{ unidades}}{20 \text{ unid/hora}} = 200$ horas estándar

Producto C : $\frac{3600 \text{ unidades}}{16} = 225$ horas estándar

Producto D : $\frac{3500 \text{ unidades}}{20} = 175$ horas estándar

Capacidad Productiva de la máquina:

Se obtiene multiplicando la capacidad en horas disponibles de una máquina por su eficiencia con relación a la estándar, en donde:

Eficiencia relativa de la máquina $= \dfrac{\textit{Producción unitaria de la máquina}}{\textit{Producción unitaria de la máquina std.}}$

Horas std. de la máquina = *(horas disponibles de la máquina)* x *(eficiencia relativa)*

Para la máquina 2

Eficiencia relativa $= \dfrac{15}{20} = 0.75$

Horas estándar de la máquina 2 = 600 x 0.75 = 450

Para la máquina 3

Eficiencia relativa:

Para A $\dfrac{14.4}{18} = 0.80$

Para B $\dfrac{16}{20} = 0.80$

Para C $\dfrac{12.8}{16} = 0.80$

Horas estándar de la máquina 3 = 400 x 0.80 = 320

Para la utilidad unitaria por hora de máquina estándar:

Utilidad por hora estándar para el producto "i" en la máquina "j".	=	Utilidad del producto "i" en en la máquina "j"	x	Producción por hora de la máquina estándar para el producto "i"

Por ejemplo:

Utilidad para el producto A en la máquina 3 = (\$45/unid.)x(18 unid/hr-std.) = \$810 Hr-std.

Efectuando los cálculos correspondientes se obtiene la matriz de utilidades siguiente:

	Máquina 1	**Máquina 2**	**Máquina 3**	**Requerimiento de unidades hr-std.**
Producto A	864		810	181
Producto B	880	760	800	200
Producto C	720		624	225
Producto D	840	760	720	175
Cap. de máq. hr-std.	400	450	320	389

Para que no aparezcan en la solución las variables x_{12} y x_{32} se castigan con -M dado que la función objetivo es de Maximización.

Para simplificar se intercambian renglones y columnas.

	Producto A	**Producto B**	**Producto C**	**Producto D**	**Producto ficticio**	**Capacidad**
Máquina 1	864	880	720	840	0	400
Máquina 2	-M	760	-M	760	0	450
Máquina 3	810	800	624	720	0	320
Requerimiento	181	200	225	175	389	

Resolviendo se obtiene:

	Producto A	Producto B	Producto C	Producto D	Producto ficticio	Capacidad
Máquina 1	0	175	225	0	0	400
Máquina 2	0	0	0	175	275	450
Máquina 3	181	25	0	0	114	320
Requerimiento	181	200	225	175	389	

Valor de la función objetivo = 175x880 + 225x720 + 175x760 + 181x810 + 25x880

= 615 610

Los valores de las variables en la solución obtenida están expresados en horas estándar, para convertirlas en "horas reales" para cada máquina:

$$\textbf{Tiempo en horas para trabajar la máquina} = \frac{\textit{Horas estándar asignadas a la máquina}}{\textit{Eficiencia de la máquina}}$$

Efectuando los cálculos correspondientes de la tabla queda:

	Producto A	Producto B	Producto C	Producto D	Producto ficticio
Máquina 1	0	175	225	0	0
Máquina 2	0	0	0	233	367
Máquina 3	226.5	31.25	0	0	142.5

Está solución indica que la máquina 1 se ocupará 175 horas para trabajar el producto 2 y 225 para el producto 3, es decir trabajará todo el tiempo disponible.

Para expresar la solución en términos de unidades de producto:

Unidades producidas del producto j en la máquina i	=	Horas asignadas del producto j en la máquina i	x	Producción horaria del producto j en la máquina i

Efectuando los cálculos se obtiene:

	Producto A	Producto B	Producto C	Producto D
Máquina 1	0	3500	3600	0
Máquina 2	0	0	0	3500
Máquina 3	3250	500	0	0
	3250	4000	3600	3500

Utilidad total máxima = $ 612 250.

4.6. METODO DE APROXIMACION DE VOGUEL (MAV).

Los pasos del procedimiento son:

1. Evalúese una penalización para cada renglón (columna) restando el menor elemento de costo del renglón (columna) del elemento de costo menor siguiente en el mismo renglón (columna).

2. Identifíquese el renglón o columna con la mayor penalización, rompiendo empates en forma arbitraria. Asígnese el mayor valor posible a la variable con el costo más bajo del renglón o columna seleccionado. Ajústese la oferta y la

demanda y táchese el renglón o columna satisfecho. Si un renglón y una columna se satisfacen al mismo tiempo, sólo uno de ellos se tacha y al renglón (columna) restante se la asigna una oferta (demanda) cero. Cualquier renglón o columna con oferta o demanda cero no debe utilizarse para calcular penalizaciones futuras.

3a. Si sólo hay un renglón o columna sin tachar, deténgase.

3b. Si sólo hay un renglón (columna) con oferta (demanda) positiva sin tachar, determínense las variables básicas del renglón (columna) a través del método del costo mínimo.

3c. Si todos los renglones y columnas sin tachar tienen oferta y demanda cero (asignadas), determínense las variables básicas cero a través del método del costo mínimo. Deténgase.

3d. De lo contrario, calcúlense las penalizaciones de los renglones y columnas no tachados y después dirígase al paso 2. (Obsérvese que los renglones y columnas con oferta y demanda cero asignadas no deben utilizarse para determinar estas penalizaciones.)

Prueba de degeneración. Comprobar si la solución es o no degenerada (cantidades a embarcar). La degeneración es una condición en la cual no es posible evaluar todas las casillas vacías (no usadas), debido a que se utiliza un número menor de casillas o sea, se llenan menos que los requerimientos marginales (renglones y columnas) menos uno. La fórmula para verificar si hay degeneración es $m + n - 1$, donde m es el número de renglones y n el número de columnas.

Evaluación de todas las casillas que no se llenan. Consiste en determinar un mejor programa de embarque evaluando las casillas que no se llenan o aquéllas que no tienen embarque programado. Tiene que evaluarse cada casilla que no se utilice. Este método de evaluación demuestra el efecto neto total sobre el costo si se suma una unidad a la ruta de las casillas.

Seleccionar de la casilla vacía con el valor negativo mayor. Ahora que está completa la evaluación de los valores de costo (un signo más denota una penalización de costo o costos de transporte mayores, mientras que un signo negativo denota ahorros adicionales de costo o costos de transporte más bajos), por lo tanto se selecciona la cifra negativa más alta. Esto permitirá a la empresa hacer los embarques a costos más bajos.

4.6.1. EJEMPLO DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE PARA EL CASO DE MAXIMIZACION.

Una tienda requiere comprar las siguientes cantidades de vestidos:

Tipo de vestido:	A	B	C	D	E
Cantidad	150	100	75	250	200

Cuatro diferentes fabricantes someten propuestas para surtir las cantidades a continuación. (Todos los tipos de vestidos combinados).

Fabricante:	W	X	Y	Z
Cantidad total	300	250	150	200

La tienda estima que su ganancia por vestido, varia según el fabricante como se muestra a continuación:

	A	B	C	E
W	8.23	3.50	4.25	1.50
X	3.00	7.45	4.50	1.00
Y	2.50	3.50	5.25	1.25
Z	3.25	2.75	4.00	1.75

Como deberan asignarse los pedidos

Solución:

La Σ de la demanda = 775 y la Σ de la oferta = 900, como Σ oferta > Σ demanda se crea un vestido ficticio = 125. (900 - 775 = 125).

	A	B	C	D	E	Ficticio	Oferta
W	8.23	3.5	4.25	2.25	1.5	0	300
X	3	7.45	4.5	1.75	1	0	250
Y	2.5	3.5	5.25	2	1.25	0	150
Z	3.25	2.75	4	4	1.75	0	200
Demanda	150	100	75	250	200	125	

Se selecciona el mayor elemento de la matriz de beneficios unitarios y se restan de todos los demás. Los valores negativos que se obtienen representan los costos de oportunidad, lo que se deja de obtener de utilidad o producción para efectos del modelo solo se consideran valores absolutos.

Con la transformación anterior el modelo se ha modificado a uno de minimización y por lo tanto se resuelve como tal.

	A	B	C	D	E	FICT:									
	$\boxed{0}$	$\boxed{4.73}$	$\boxed{3.98}$	$\boxed{5.98}$	$\boxed{6.73}$	$\boxed{8.23}$	~~300~~,~~150~~	3.98	0.75	2	0.75	0.75	1.5	-	-
W	150			50	100		100								
	$\boxed{5.23}$	$\boxed{0.78}$	$\boxed{3.73}$	$\boxed{6.48}$	$\boxed{7.23}$	$\boxed{8.23}$									
X		100			25	125	~~250~~,150	29.5	29.5	2.8	0.75	0.75	1	1	-
	$\boxed{5.73}$	$\boxed{4.73}$	$\boxed{2.98}$	$\boxed{6.23}$	$\boxed{6.98}$	$\boxed{8.23}$									
Y			75		75		~~150~~,75	1.75	1.75	3.3	0.75	0.75	1.25	1	-
	$\boxed{4.98}$	$\boxed{5.48}$	$\boxed{4.23}$	$\boxed{4.23}$	$\boxed{6.48}$	$\boxed{8.23}$									
Z			200				200	0.75	1.25	2.3	2.25	-	-	-	-
	150	100	75	~~250~~,50	~~200~~,100	~~125~~,50									
	4.98	3.95	0.75	1.75	0.25	0									
	-	3.95	0.75	1.75	0.25	0									
	-	-	0.75	1.75	0.25	0									
	-	-	-	1.75	0.25	0									
	-	-	-	0.25	0.25	0									
	-	-	-	-	0.25	0									
	-	-	-	-	0.25	0									

$$m + n - 1 = 9$$

Beneficio total (1) = 150(8.23) + 50(2.25) + 100(1.5) + 100(7.45) + 25(1) + 75(5.25) + 75(1.5) + 200(4) = \$ 3554.5.

$C_{12} = C_{12} - C_{22} + C_{21} - C_{11} = 4.73 - 0.78 + 5.23 - 0 = +9.18$

$C_{13} = C_{13} - C_{14} + C_{24} - C_{22} + C_{12} = 3.98 - 5.98 + 6.48 - 0.78 + 4.73 = +8.43$

$C_{16} = C_{16} - C_{26} + C_{25} - C_{15} = 8.23 - 8.23 + 7.23 - 6.73 = +0.5$

$C_{21} = C_{21} - C_{22} + C_{32} - C_{31} = 5.23 - 0.78 + 4.73 - 5.73 = +3.45$

$C_{23} = +,\ C_{24} = 0,\ C_{31} = +,\ C_{32} = +,\ C_{34} = +,\ C_{36} = +,\ C_{41} = +,\ C_{42} = +,$
$C_{43} = +,\ C_{45} = +,\ C_{46} = +.$

Por lo tanto (1) es óptimo.

Solución:

- Comprar al fabricante W = 150 vestidos A; 50 tipo D y 100 tipo E.
- Comprar al fabricante X = 100 vestidos B; 25 tipo E.
- Comprar al fabricante Y = 75 vestidos C; 75 tipo E.
- Comprar al fabricante Z = 200 vestidos D.

Se dejan de comprar 125 vestidos al fabricante X.

4.7. MODELO DE ASIGNACION.

Es un caso especial del modelo del transporte. Aquí los trabajos representan orígenes y las máquinas representan destinos. La oferta disponible en cada fuente es 1 y la demanda-requerida también es 1 para cada destino. El costo de asignar el trabajo "i" a la máquina j es c_{ij}. Si un trabajo no puede asignarse a una cierta máquina la c_{ij} correspondiente se toma igual a M para minimización, donde M es un valor muy alto.

Antes de que el modelo pueda resolverse se debe balancear el problema añadiendo trabajos ó máquinas ficticias dependiendo si $m < n$ ó $m > n$ para obtener $m = n$.

Metodología:

Caso A: *minimización.*

1. Se selecciona el menor elemento en cada renglón y se resta de los demás.
2. Se selecciona el menor elemento en cada columna y se resta de los demás.
3. Dibujar un número de líneas MINIMO horizontales y verticales de tal manera que todos los ceros se tachen.
4. Prueba de optimidad: Si el número de líneas es igual al orden de la matriz hacer la asignación. Si no lo es pasar al 5° paso.

5. Seleccionar el menor elemento de toda la matriz que no este tachado. Este elemento se resta de todo elemento no tachado y se suma a todo elemento en la intersección de dos líneas. Regresar al 3° punto.

Caso B: maximización.

1. Se selecciona el mayor elemento de la matriz y se resta de todos los demás. Los valores negativos que se obtienen representan los costos de oportunidad. Para efectos del problema sólo se considerarán valores absolutos.

2. Con la transformación anterior el problema se a modificado a uno de minimización como el del caso "A".

4.7.1. EJEMPLO DEL METODO DE ASIGNACION PARA EL CASO DE MINIMIZACION.

Se tienen que realizar 5 diferentes tareas y se cuenta con 6 máquinas para su ejecución. Por el tipo de tarea a realizar esta debe iniciarse y concluirse en una sola máquina y por diferencias tecnológicas en las mismas máquinas se tienen evaluados los desperdicios de pendiendo de la tarea y de la máquina en la cual se efectúa según se indica en la tabla siguiente expresada en pesos.

		MAQUINA					
		1	2	3	4	5	6
T	1	3.25	M	4.3	3.9	3.7	4.0
A	2	3.4	5.1	3.9	4.8	4.2	4.6
R	3	3.1	4.8	4.0	3.9	4.5	3.8
E	4	4.3	3.9	4.9	4.1	4.1	3.7
A	5	4.7	4.6	3.8	3.8	3.9	3.9

Por limitaciones técnicas la tarea No. 1 no puede realizarse en la máquina No. 2.

Se requiere definir el número de tarea así como el número de máquina a seleccionar de forma tal que se efectúen todas las tareas con el menor valor de desperdicio posible.

A continuación de lo que se trata entonces es de la asignación óptima de tareas a máquinas.

Solución:

Nota para balancear el modelo se le asigna una tarea con valor cero.

Como la tarea 1 no se puede realizar en la máquina 2 se le asigna el valor de M.

1. El menor elemento del primer renglón es 3.25 por lo tanto la tabla queda de la siguiente forma:

0	**M**	**1.05**	**0.65**	**0.45**	**0.75**

y así sucesivamente.

~~0~~	M	1.05	0.65	0.45	~~0.75~~	
~~0~~	1.7	0.5	1.4	0.8	~~1.2~~	# líneas 4
~~0~~	1.7	0.9	0.8	1.4	~~0.7~~	4 ≠ 6
~~0.6~~	0.2	1.2	0.4	0.4	~~0~~	
~~0.9~~	~~0.8~~	~~0~~	~~0~~	~~0.1~~	~~0.1~~	
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	

2. Se selecciona el menor elemento de cada columna y se resta de los demás (los renglones o columnas tachadas se pasan igual, solo se hace con los que no están tachados).

~~0~~	M	0.85	0.45	0.25	0.75
~~0~~	1.5	0.3	1.2	0.6	1.2
~~0~~	1.5	0.7	0.6	1.2	0.7
~~0.6~~	~~0~~	~~1~~	~~0.2~~	~~0.2~~	~~0~~
~~1.1~~	~~0.8~~	~~0~~	~~0~~	~~0.1~~	~~0.3~~
~~0.2~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0.2~~

En la intersección de las rectas se suma el valor más pequeño que haya sido seleccionado.

líneas 4

$4 \neq 6$

Como el número de líneas es menor que el número de la matriz se sigue iterando, restando el valor más pequeño del renglón a los valores no tachados.

~~0~~	~~M~~	~~0.60~~	~~0.2~~	~~0~~	~~0.5~~
~~0~~	1.25	0.05	0.95	0.35	0.95
~~0~~	1.25	0.45	0.35	0.45	0.45
~~0.85~~	~~0~~	~~1~~	~~0.2~~	~~0.2~~	~~0~~
~~1.35~~	~~0.8~~	~~0~~	~~0~~	~~0.1~~	~~0.3~~
~~0.45~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0.2~~

líneas 5

$5 \neq 6$

Se continua iterando.

1	1	2	3	4	5	6	1
2	0	M	0.55	0.15	0	0.45	1
3	0	1.2	0	0.9	0.35	0.9	1
4	0	1.2	0.4	0.3	0.95	0.4	1
5	0.9	0	1	0.2	0.25	0	1
6	1.4	0.8	0	0	0.15	0.3	1
1	0.5	0	0	0	0.05	0.2	1
	1	1	1	1	1	1	

líneas 6

6 = 6

Esta es la solución óptima.

Solución:

	Desperdicios
♦ Asignar la tarea 1 a la máquina 5	3.7
♦ Asignar la tarea 2 a la máquina 3	3.9
♦ Asignar la tarea 3 a la máquina 1	3.25
♦ Asignar la tarea 4 a la máquina 6	3.7
♦ Asignar la tarea 5 a la máquina 4	3.8
♦ Asignar la tarea 6 a la máquina 2	0
	18.35

Desperdicio total mínimo $ 18.35

4.7.2. EJEMPLO DEL METODO DE ASIGNACION PARA EL CASO DE MAXIMIZACION.

Una empresa requiere cubrir 4 puestos vacantes. Después de diferentes evaluaciones se tienen 6 candidatos posibles. Las calificaciones obtenidas por todos y cada uno de ellos para las 4 posiciones se muestran a continuación.

Por política de la compañía se requiere que las 4 personas que se contraten sean capaces de desarrollar eficazmente las labores relacionadas para cada puesto.

Definir la contratación así como el puesto más adecuado.

	PUESTOS			
	1	2	3	4
Candidato				
1	90	89	76	92
2	82	80	98	86
3	72	90	92	94
4	91	92	95	80
5	88	89	90	87
6	97	79	80	78

Se selecciona el elemento mayor de la matriz y se le resta de los demás, considerando valores absolutos.

8	9	22	6	98	98
16	18	0	12	98	98
26	8	6	4	98	98
7	6	3	18	98	98
10	9	8	11	98	98
1	19	18	20	98	98

Con la transformación anterior se resuelve como el caso de minimización.

PUESTOS

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
1	7	3	19	2	0	0	1	
2	15	12	0	8	0	0	1	# líneas
3	25	2	3	0	0	0	1	6
4	6	0	0	14	0	0	1	6 = 6
5	9	3	5	7	0	0	1	
6	0	13	15	16	0	0	1	
	1	1	1	1	1	1		

Por lo tanto esta es la solución óptima.

	Calificación
♦ Asignar el puesto 1 al candidato 6	97
♦ Asignar el puesto 2 al candidato 4	92
♦ Asignar el puesto 3 al candidato 2	98
♦ Asignar el puesto 4 al candidato 3	94
	381

Las calificaciones más altas son 381.

CAPITULO 5

CAPITULO 5

MODELOS DE PLANEACION Y PROGRAMACION DE PROYECTOS.

5.1. REDES.

1. RUTA CRITICA "CPM" (Critical Path Method).
2. PERT (Program Evaluation and Review Technique).

El análisis de redes ha desempeñado un importante papel en ingeniería electrónica. Pero también se ha visto que la teoría de redes, juega un papel importante en otros contextos, por ejemplo:

- Análisis de redes en la teoría de la información
- En los estudios de sistemas de transporte
- En la planificación y control de proyectos de investigación y desarrollo
- Estructuras de grupos sociales
- Sistemas de comunicación
- Aplicaciones de análisis de estructura de los idiomas

Como resultado el problema básico de la teoría de redes es encontrar la ruta más corta a través de una red. Otra aplicación relativa al problema básico consiste en elegir un conjunto de conexiones, que proporcionen una ruta entre dos puntos cualesquiera de una red, el que minimice la longitud total de estas conexiones.

El método de la Ruta Critica es una técnica eficaz en la planeación de todo tipo de proyectos. En esencia es la representación del plan de un proyecto en un diagrama o red, que describe la secuencia e interrelación de todas las componentes del proyecto, así como el análisis lógico y la manipulación de esta red, para la completa determinación del mejor programa de operación; permite la evaluación y comparación rápida de distintos programas de trabajo, tipos de recursos a emplear así como su magnitud. Una vez que el mejor plan ha sido elaborado en esta forma, el diagrama de la Ruta Crítica indica claramente las operaciones que controlan la ejecución fluida de los trabajos. Finalmente durante la ejecución del proyecto, el diagrama provee al responsable una información precisa de los efectos de cada variación o retraso en el plan adoptado, permitiendo así identificar las operaciones que requieren cambios.

Una ruta crítica define una cadena de actividades críticas, las cuales conectan eventos inicial y final del diagrama de flechas, la ruta crítica identifica todas las actividades críticas del proyecto. El resultado final es clasificar las actividades de los proyectos como críticas o no críticas. Se dice que una actividad es crítica si una demora en su comienzo causara una demora en la fecha de determinación del proyecto completo. Una actividad no crítica es tal que el tiempo entre su comienzo de inicio más próximo y de terminación más tardío (como lo permite el proyecto) es más grande que su duración real, en este caso, se dice que la actividad no crítica tiene un tiempo de holgura.

5.2. METODOLOGIA DEL CPM

1. Desglosar el proyecto en las operaciones o procesos que son necesarios para su terminación. El grado de descomposición de cada concepto, depende de cada proyecto y está sujeto a la naturaleza del trabajo y tipo de mano de obra involucrados, a la localización del trabajo, la información de costos, etc. Cada una de estas operaciones o procesos se llama **ACTIVIDAD** y la terminación de una actividad, se llama **EVENTO**; las actividades consumen tiempo mientras que los eventos no.

2. Después que se ha preparado una lista de todas las actividades que constituyen el proyecto, se procede a determinar las relaciones esenciales entre todas ellas. Aunque muchas de las actividades se pueden realizar simultáneamente, algunas

deben ordenarse de acuerdo con una secuencia necesaria llamada CADENA. Se debe sujetar a cada una de las actividades del proyecto a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son las actividades precedentes a ésta?
2. ¿Qué actividades deben proseguir a ésta?
3. ¿Qué actividades pueden realizarse simultáneamente con ésta?

En esta forma se examina cada actividad determinándose la secuencia necesaria de actividades. Cada actividad tiene definido un evento que señala su inicio y un evento que marca su término, lo mismo que cada proyecto tiene un sólo nodo de inicio y un sólo nodo de término.

3. Considerar las restricciones del proyecto tales como: seguridad, recursos, administrativas, etc.

4. Trazar el diagrama de flechas en términos de la lógica del proyecto y enumerar los eventos. Un diagrama de flechas es la representación de un programa o plan para un proyecto determinado, en el que se muestra la secuencia correcta, así como las interrelaciones de actividades y eventos para alcanzar los objetivos finales. En un diagrama de flechas ó red de actividades orientadas, como también se le llama, cada línea orientada o flecha representa una actividad, y la relación entre éstas está representada por la disposición de unas flechas con otras. Cada círculo o nodo representa un evento.

5. Elaborar la tabla de los datos costo-tiempo para cada actividad, ya que existe un costo asociado que, generalmente depende de su tiempo específico de terminación. Si el tiempo varía, se esperará que también varíe el costo.

6. Asignar un tiempo a cada actividad de la red, usando la duración de los trabajos para los de costo-tiempo, normales. Siguiendo los eventos en orden numérico desde el principio, una simple adición nos dará el tiempo más próximo posible al que todas las actividades que llegan a cada evento, pueden terminarse; si dos ó más actividades ocurren a un mismo evento siempre se pondrá mayor suma. (PASO A LA DERECHA), esto es, EL TIEMPO DE TERMINACION MAS PROXIMO (TMP) para el evento. El TMP para cada evento se registra en el sector inferior izquierdo del nodo ó evento correspondiente. Después de seguir en esta forma a través de la red, se obtiene el TMP del último evento; este es la terminación más próxima del proyecto y es la suma de las duraciones de las actividades a través de la ruta que conduce a la duración más larga del proyecto, de principio a fin.

El siguiente paso es ir hacia atrás desde el último evento, (PASO A LA IZQUIERDA) restando la duración de cada actividad, para encontrar EL TIEMPO DE TERMINACION MAS TARDIO (TMT) permisible para cada evento, considerando que el proyecto debe ser terminado al TMT del evento final.

El TMT está controlado por todas las actividades que salen del evento en cuestión. El TMT se escribe en el sector inferior derecho del evento. Cuando dos ó más actividades salen de un nodo se tomará el menor valor que ocurre a este nodo como el TMT.

La diferencia entre los dos números de cada evento que dan el TMP y el TMT para cada evento, es el margen de retraso y se llama TIEMPO FLOTANTE U HOLGURA. En los eventos que TMP - TMT, no hay tiempo flotante y son los EVENTOS CRITICOS, los cuales deben ser terminados dentro del programa si se quiere terminar el proyecto en el mínimo tiempo total. La ruta que une a estos eventos críticos es la RUTA CRITICA de la red.

5.3. NOMENCLATURA DEL CPM

Para cada actividad se tiene:

- FT.- Tiempo Flotante Total: es la suma total del tiempo en el que una actividad puede ser retrasada sin aumentar la duración del proyecto.

- FL.- Tiempo Flotante Libre: es la suma del tiempo en el que el inicio de una actividad puede ser retrasado sin interferir con el inicio de la actividad que le sigue:

$$FT \geq FL$$

- IMP.- Tiempo de Iniciación más Próximo: es el momento al que una actividad del proyecto puede empezarse.

- IMT.- Tiempo de Iniciación más Tardío: es aquel al que se puede comenzar, si se desea conservar la duración mínima del proyecto.

- IMP = TMP - DURACION

- IMT = TMT - DURACION

- FT = TMT - TMP = IMT - IMP

- FL = IMP de la siguiente actividad - TMP de la actividad en cuestión.

a) Obtener el modelo óptimo por medio de la compresión de la red, considerando el costo total del proyecto para ello.

Para comprimir una red, es decir reducir la duración de un proyecto, sólo se puede hacer si se comprime una actividad crítica. La actividad crítica que se escoge es la que tenga menor pendiente, para incrementar el menor costo posible al proyecto.

La pendiente de una actividad está en términos de:

$$m = \frac{C_n - C_r}{D_r - D_n}$$

En donde:

- m = Pendiente de la actividad en cuestión.
- D_n = Duración normal de la actividad en cuestión.
- D_r = Duración de ruptura de la actividad en cuestión.
- C_n = Costo normal de la actividad en cuestión.
- C_r = Costo de ruptura de la actividad en cuestión.

Para determinar la magnitud de la compresión de la actividad se tiene en cuenta dos límites, y la expresión es:

Lím Com = min { (Límite de ruptura); (Límite de FL)

En donde:

Lím Com = Límite de compresión de la actividad en cuestión.

min = mínimo de los dos valores.

Límite de ruptura = (Duración en la red - Duración de ruptura) de la actividad en cuestión.

Límite de FL = Menor valor de FL que tienda a cero obtenido de la matriz correspondiente.

Cuando se tengan dos o más rutas críticas, todas y cada una de ellas se deberán comprimir en la misma magnitud.

Cuando alguna ruta crítica ya no pueda comprimirse, es decir que todas sus actividades estén en su tiempo de ruptura, se habrá obtenido el Proyecto de Ruptura, el cual es el proyecto de duración mínimo posible.

b) Evaluar todos los proyectos obtenidos en términos de su costo total y duración. El primer proyecto siempre se denominará Proyecto Normal, el Proyecto Optimo será el de menor costo total y el Proyecto de Ruptura el último obtenido.

c) Trazar el Diagrama de Tiempo (Gráfica de Gantt) y el Diagrama de Nivelación de Recursos. Para su trazo se emplea para definir su intervalo el IMP y TMT para cada actividad.

Ejemplo:

Una compañía contratista va a cotizar la construcción de una cancha de tenis. El desglose de las actividades del proyecto con sus respectivas datos, costo - tiempo son como siguen:

donde m = pendiente

		Normal		**Ruptura**		**Personal**	
Actividad	**Precedencia**	**Duración**	**Costo**	**Duración**	**Costo**	**Requerido**	**m**
A	——	8	100	6	200	2	50
B	——	4	150	2	350	4	100
C	A	2	50	1	90	5	40
D	A	10	100	5	400	3	60
E	B	5	100	1	200	6	25
F	C, E	3	80	1	100	5	10
			$ 580				

Costos Indirectos: $ 65/semana.

Descripción:

- A – Construcción de tribunas.
- B – Excavación de la cancha.
- C – Instalación de butacas.
- D – Detallado de tribunas.
- E – Compactación de la cancha.
- F – Detallado de la cancha.

Si la disponibilidad máxima de personal es 14 elementos se requiere saber:

1) El tiempo y costo óptimo del proyecto.
2) Las actividades que controlan la duración del proyecto.
3) Las tolerancias de todas las actividades.
4) El diagrama de tiempo flotante y nivelación de recursos.

Solución:

Duración Normal (1): 18 semanas

Costo Normal = $ 580.

Nodos Críticos = 1,3,5.

IMP = Tiempo de iniciación más próximo ——— Paso a la derecha (mayor)

Para el evento final: IMP = IMT

IMT = Tiempo de iniciación más tardío ——— Paso a la izquierda (menor).

Actividades críticas:

Para reducir la duración del proyecto se evalúan las actividades críticas y a la de menor pendiente es la que se "comprimirá".

Características para una actividad crítica:

1. Estar entre nodos críticos.
2. La sumatoria del IMP + la Duración es igual al TMP y además TMT - la Duración es igual a IMT.

Cuando se tienen 2 ó más rutas críticas, todas y cada una de ellas deben comprimirse en la misma magnitud.

Para comprimir una Actividad Crítica:

1. Comprimir hasta su límite de ruptura.
2. Tomar el límite de FL que tienda a cero.
3. Efecto en la Red (No debe Desaparecer Ninguna Ruta Crítica).
4. Cuando se tienen dos ó más Rutas Críticas:
   Compresión en la misma magnitud de todas y cada una de ellas.
5. Cuando una ó más Rutas Críticas, están en su límite de Ruptura ya no se puede comprimir, por lo tanto esta es el proyecto de ruptura.

Sólo se consideran A y D para compresión ya que son las únicas actividades críticas. Se comprime A por ser la de menor pendiente.

Límite de compresión "A" = mín. [lím. ruptura, lím. FL = Tiempo Flotante libre].

Límite ruptura A = (Duración de la red - tiempo óptimo)

= 8 - 6 = 2

Para establecer el límite del tiempo flotante libre/holgura libre, se establece la matriz correspondiente.

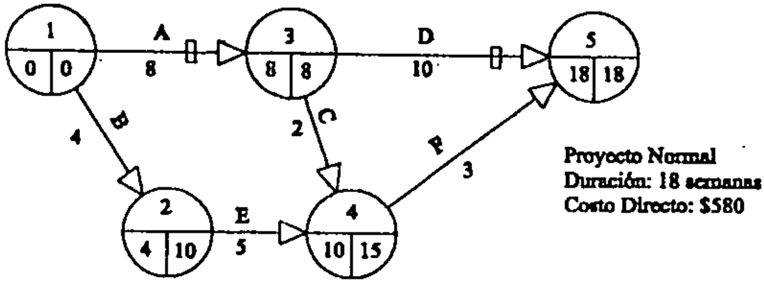
Nodos (red)	Actividad (red)	Duración (red)	IMP (red)	TMP (Dur + IMP)	IMT (TMT-Dur)	TMT (red)	FT (TMT-TMP)	FL (IMP_{i+1}-TMP_i)
1-2	B	4	0	4	6	10	6	4-4 = 0
1-3	A	8	0	8	0	8	0	8-8 = 0
2-4	E	5	4	9	10	15	6	**10-9 = 1**
3-4	C	2	8	10	13	15	5	10-10 = 0
3-5	D	10	8	18	8	18	0	18-18 = 0
4-5	F	3	10	13	15	18	5	18-13 = 5

10 - 9 = 1 ∴ lím. FL = 1

$$FL \leq FT$$

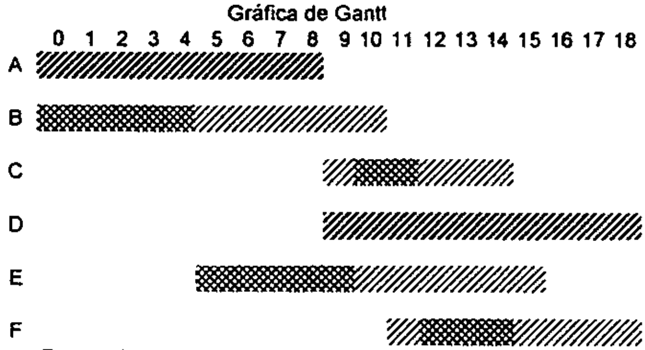
Lím. Compresión A = mín [lím. ruptura, lím. FL] = mín. (2,1) = 1

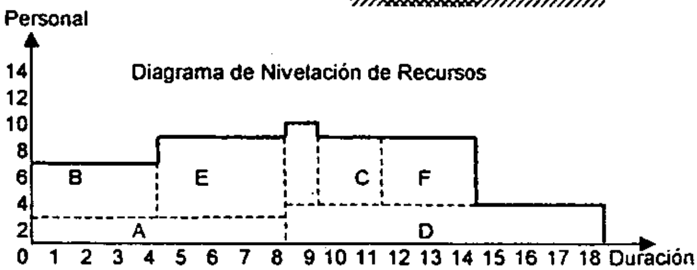
Por lo tanto se comprime A en 1 semana.



ACT	DUR	IMP	TMT	P.R.
*A	8	0	8	2
B	4	0	10	4
C	2	8	15	5
*D	10	8	18	3
E	5	4	15	6
F	3	10	18	5

Gráfica de Gantt





De la Semana 0 a la 4: 6 Personas
De la Semana 4 a la 8: 8 Personas
De la Semana 8 a la 9: 9 Personas
De la Semana 9 a la 14: 8 Personas
De la Semana 14 a la 18: 3 Personas

Duración (2) = 17 semanas

Costo (2) = 580 + 50(8 - 7) = $ 630

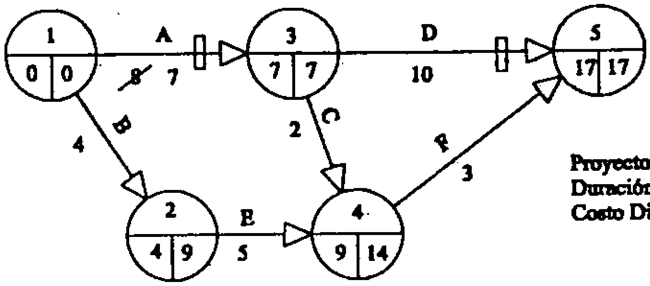
Nodos Críticos: 1,3,5

Por lo tanto se comprime A = lím. A = mín.[lím. rupt., lím. FL]

lím. Ruptura = 7 - 6 = 1; lím. FL = 5; lím. A = mín. [1,5] = 1

Nodos (red)	Actividad (red)	Duración (red)	IMP (red)	TMP (Dur + IMP)	IMT (TMT-Dur)	TMT (red)	FT (TMT-TMP)	FL (IMP_{i+1}-TMP_i)
1-2	B	4	0	4	5	9	5	0
1-3	A	7	0	7	0	7	0	0
2-4	E	5	4	9	9	14	5	0
3-4	C	2	7	9	12	14	5	0
3-5	D	10	7	17	7	17	0	0
4-5	F	3	17	12	14	17	5	5

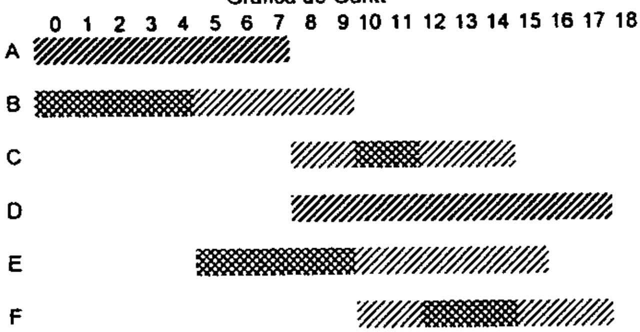
Por lo tanto A se comprime en 1 semana.

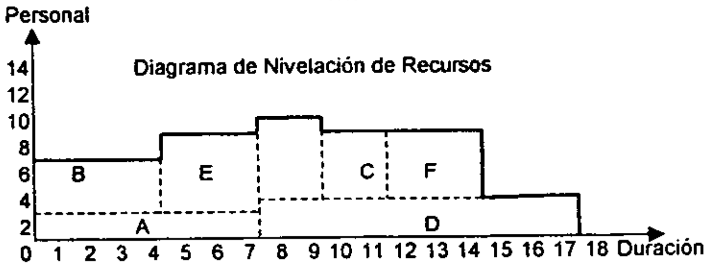


Proyecto 2.
Duración 17 semanas
Costo Directo 580+50x1=$630

ACT	DUR	IMP	TMT	P.R.
*A	7	0	7	2
B	4	0	9	4
C	2	7	14	5
*D	10	7	17	3
E	5	4	14	6
F	3	9	17	5

Gráfica de Gantt





De la Semana 0 a la 4: 6 Personas
De la Semana 4 a la 7: 8 Personas
De la Semana 7 a la 9: 9 Personas
De la Semana 9 a la 14: 8 Personas
De la Semana 14 a la 17: 3 Personas

Duración (3) = 16 semanas.

Costo directo = 630 + 50(7 - 6) = \$ 680.

Nodos Críticos: 1,3,5.

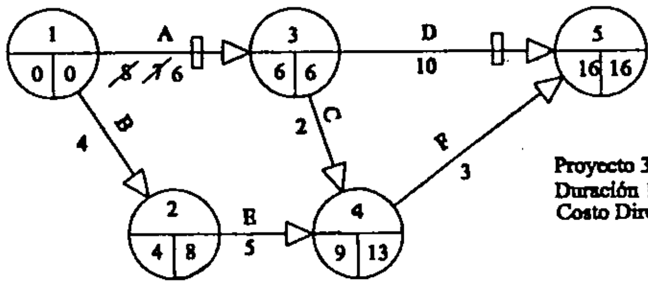
Como A ya está en su límite de ruptura ya no se puede comprimir, se compara las pendientes de las actividades críticas restantes.

Se comprime D = lím. D = mín. [lím. Rupt, lím FL]
lím. Ruptura D = 10 - 5 = 5

Nodos (red)	Actividad (red)	Duración (red)	IMP (red)	TMP (Dur+IMP)	IMT (TMT-Dur)	TMT (red)	FT (TMT-TMP)	FL (IMP_{i+1}-TMP_i)
1-2	B	4	0	4	4	8	4	0
1-3	A	6	0	6	0	6	0	0
2-4	E	5	4	9	8	13	4	0
3-4	C	2	6	8	11	13	5	1
3-5	D	10	6	16	6	16	0	0
4-5	F	3	9	12	13	16	4	4

lím. FL = 4; lím D = mín. (5, 4) = 4

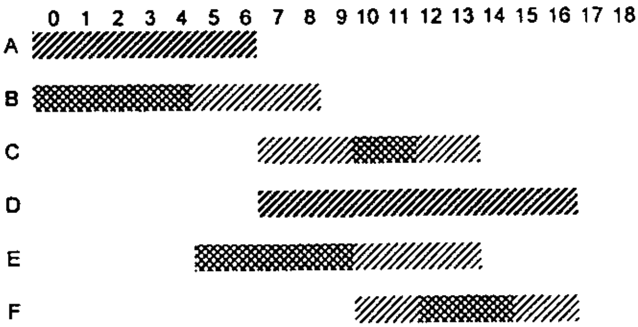
Por lo tanto D se comprime en 4 semanas.

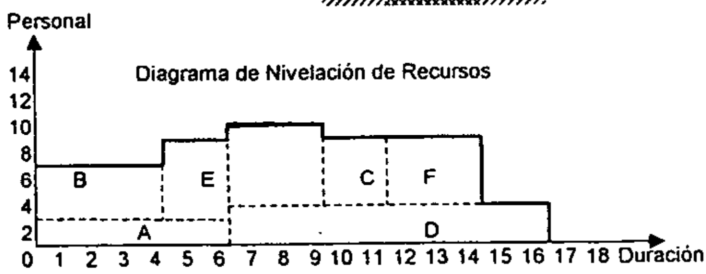


Proyecto 3
Duración 16 semanas
Costo Directo 630+50x1=$680

ACT	DUR	IMP	TMT	P.R.
*A	6	0	6	2
B	4	0	8	4
C	2	6	13	5
*D	10	6	16	3
E	5	4	13	6
F	3	9	16	5

Gráfica de Gantt





De la Semana 0 a la 4: 6 Personas
De la Semana 4 a la 7: 8 Personas
De la Semana 7 a la 9: 9 Personas
De la Semana 9 a la 14: 8 Personas
De la Semana 14 a la 17: 3 Personas

Duración (4) = 12 semanas

Costo Directo = 680 + 60(10 - 4) = $ 920

Nodos críticos = 1,2,3,4,5

Ruta crítica (1) = A,D

Ruta crítica (2) = B,E,F

Como las dos rutas críticas se deben comprimir en la misma magnitud: para la ruta crítica (1) se escoge D (la única posible) y de la ruta critica (2) se escoge la de menor pendiente que es la actividad "F".

lím. compresión = mín. D = (lím rupt, lím FL)

D = (6 - 5 = 1, ----)

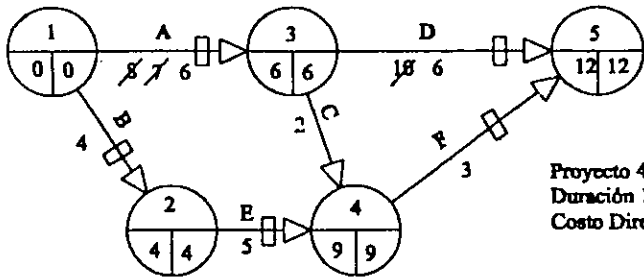
F = (lím. rupt, lím FL)

F = (3 - 1 = 2, ----)

Por lo tanto se comprimen en una semana; el lím FL está indefinido porque sigue constante, por lo cual no se puede considerar.

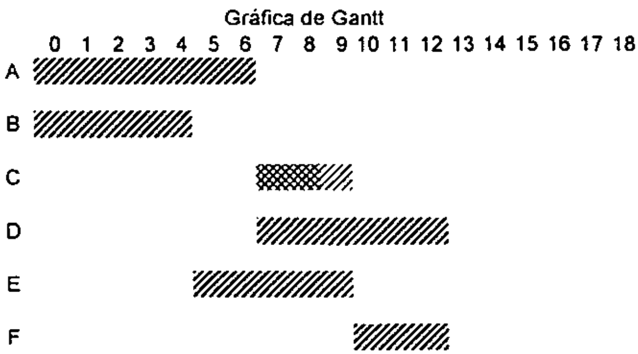
Nodos (red)	Actividad (red)	Duración (red)	IMP (red)	TMP (Dur + IMP)	IMT (TMT-Dur)	TMT (red)	FT (TMT-TMP)	FL (IMP_{i+1}-TMP_i)
1-2	B	4	0	4	0	4	0	0
1-3	A	6	0	6	0	6	0	0
2-4	E	5	4	9	4	9	0	0
3-4	C	2	6	8	7	9	1	1
3-5	D	6	6	12	6	12	0	0
4-5	F	3	9	12	9	12	0	0

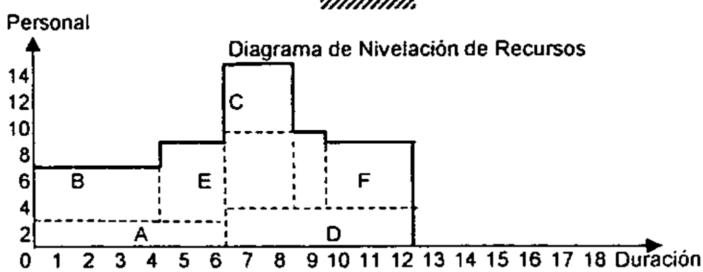
Por lo tanto se comprime D y F en 1 semana.



Proyecto 4
Duración 12 semanas
Costo Directo 680+60x4=$920

ACT	DUR	IMP	TMT	P.R.
*A	6	0	6	2
*B	4	0	4	4
C	2	6	9	5
*D	6	6	12	3
*E	5	4	9	6
*F	3	9	12	5





De la Semana 0 a la 4: 6 Personas
De la Semana 4 a la 6: 8 Personas
De la Semana 6 a la 8: 14 Personas
De la Semana 8 a la 9: 9 Personas
De la Semana 9 a la 12: 8 Personas

Proyecto de Ruptura

Como las dos rutas críticas se deben comprimir en la misma magnitud y todas las actividades de la ruta crítica (1) están en su duración de ruptura, el proyecto ya no puede disminuir su tiempo, por lo tanto (5) es el proyecto de ruptura.

Duración (5) = 11 semanas.

Costo = 920 + 1(60+70) = $ 990

	Semanas		Costos	
Proyecto	**Duración**	**Directo**	**Indirecto**	**Total**
1	18	580	1170	1750
2	17	630	1105	1735
3	16	680	1040	1720
4	12	920	780	1700
5	11	990	715	1705

Costo Directo (L) = Duración x costo indirecto

(1) = 18 x 65 = 1750

1) Proyecto Optimo : Proyecto No. 4

   Duración: 12 semanas

   Costo total: $ 1700

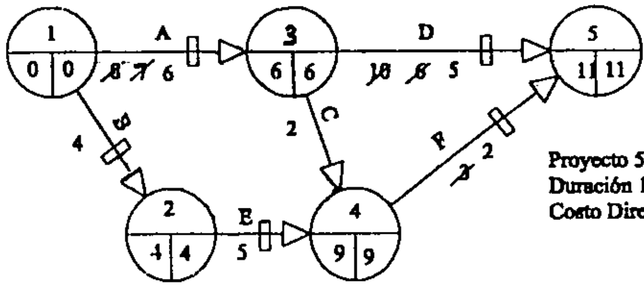
2) Las actividades que controlan la duración del proyecto (críticas) son:

   A, B, D, E, F

3) La única actividad que tiene tolerancia (Holgura o tiempo flotante) es la "C" donde:

   FL = 1 semana

   FT = 1 semana



Proyecto 5
Duración 11 semanas
Costo Directo 920+(60+70)1=$990

ACT	DUR	IMP	TMT	P.R.
*A	6	0	6	2
*B	4	0	4	4
C	2	6	9	5
*D	5	6	11	3
*E	5	4	9	6
*F	2	9	11	5

Gráfica de Gantt

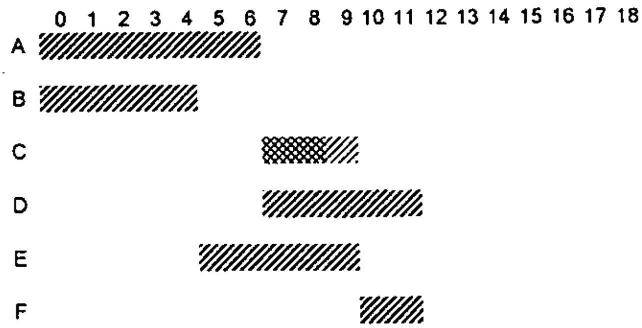
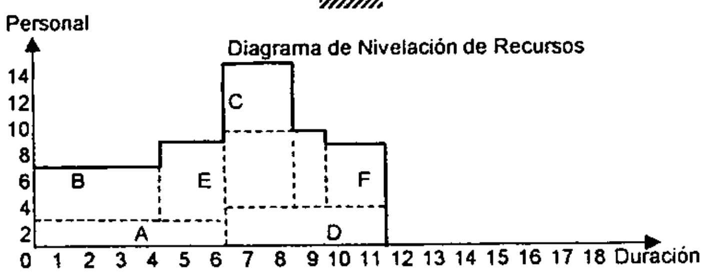


Diagrama de Nivelación de Recursos



De la Semana 0 a la 4: 6 Personas
De la Semana 4 a la 6: 8 Personas
De la Semana 6 a la 8: 14 Personas
De la Semana 8 a la 9: 9 Personas
De la Semana 9 a la 11: 8 Personas

5.4. PERT

5.4.1 ANTECEDENTES.

Nació en 1956 de la desesperación, durante las primeras etapas del programa de desarrollo del proyectil submarino de la Marina de los E.U. se abrió una oficina de proyectos especiales para dirigir este enorme y complejo proyecto. El Sr. Willard Fazar de la oficina de proyectos, con ayuda de la División de Proyectiles y Asuntos Espaciales de la Lockheed y consultores de Booz, Allen & Hamilton, ideó la técnica PERT como un diagrama de flujo del tipo de red con incertidumbre incorporada. Fazar utilizó tres aproximaciones: la optimista, la normal y la pesimista. Dicha aproximación múltiple dificultó un poco los cálculos, pero la computadora de alta velocidad, tenía capacidad más que suficiente para éstos. La técnica PERT trabajó bien desde el momento en que se la puso en acción, en 1958, realizando el proyectil dos años antes del tiempo originalmente calculado.

Los contratos comprendían a la investigación y desarrollo de trabajo, así como las manufacturas de componentes que no estaban aún definidos, por lo tanto, ni el costo ni el tiempo podían ser estimados con exactitud, y los tiempos de terminación tenían que estar basados en la probabilidad. Por lo anterior, es importante comprender que los sistemas PERT, constituyen un enfoque probabilístico de los problemas de planificación y control de proyectos.

5.4.2. METODOLOGIA DEL PERT.

- **Construcción de la red PERT.** En una red PERT se trata de desarrollar una secuencia lógica de las actividades por realizar para llevar a cabo el proyecto y la correlación de estas actividades respecto al tiempo. El término actividad (trabajo) se define como una etapa de trabajo del proyecto total y se representa con una flecha. El extremo de la flecha representa el comienzo de la actividad y la punta su terminación, el diagrama debe determinar el orden lógico de las actividades, la forma en que cada una se conecta con las demás, si una actividad particular precede, sigue, o es concurrente con otra. Es necesario trazar el diagrama de las flechas para mostrar la forma en que las actividades se relacionan en cuanto al tiempo.

Los puntos de iniciación y terminación de las actividades, que aparecen como números encerrados en círculos, reciben el nombre de eventos o nodos. Los eventos son puntos del tiempo contrastando con las actividades que tienen cierta duración o longitud. Se numeran en serie desde la iniciación hasta la terminación de un proyecto.

- **Cálculo del tiempo esperado.** Los diseñadores de PERT tuvieron que encontrar una forma específica que satisfaciera las condiciones del tiempo más corto (optimista), tiempo más largo (pesimista) y tiempo más probable. El tiempo más probable (m) debe llevar un peso mucho mayor que el optimista (a) y el más pesimista (b). Hay mayor probabilidad de que se termine el proyecto más próximo a la fecha más probable que el de las otras dos fechas de los extremos. La fórmula de aproximación desarrollada para el tiempo esperado de una actividad (t_e) es:

$$te = \frac{ta + 4tm + tb}{6}$$

En donde:

- te - tiempo medio esperado.
- ta = tiempo optimista.
- tm - tiempo más probable.
- tb - tiempo pesimista.

El tiempo esperado t_e representa el valor específico del tiempo (horas, días, semanas o alguna otra base).

- **Determinación del tiempo más próximo y más tardío.** Un evento puede tener uno o más valores, depende de la relación actividad - tiempo. Se necesita conocer la fecha más próxima en que puedan iniciarse las actividades que se originan a partir de un evento. Este es el tiempo esperado más próximo, de modo semejante, se necesita conocer la fecha más tardía o más lejana en la que se puedan concluir las actividades que tienen su término en un evento y que aún permiten que el proyecto íntegro se termine como lo indica el programa. A esto se le llama el tiempo más tardío.

El tiempo más próximo (T_E) para el evento 0 es cero, en vista de que no lo precede ninguna actividad con duración. El tiempo del evento cero se convierte en el tiempo base a la que se suman todos los tiempos subsecuentes. El tiempo esperado más próximo para el evento 1 es la suma del tiempo base 0 y la duración de la actividad 0 - 1 (1 semana), cero más uno es igual a 1 semana.

Cuando hay dos o más actividades que llegan hasta un evento el tiempo más próximo para este evento en particular requiere de una selección. Al determinar los tiempos esperados más próximos se debe observar la regla básica: escoger el tiempo máximo, cuando haya varios tiempos de ocurrencia de un evento.

Tiempo más tardío (T_L), es la fecha más lejana en la que se puede terminar cada actividad, permitiendo aún que el proyecto total se concluya a tiempo. Para calcular los tiempos más tardíos admisibles, se comienza al final del proyecto. En vista de que el tiempo más tardío admisible es la fecha alejada en la que se pueden terminar las actividades que concurren en ese evento. Esta fecha permite que las actividades que siguen al evento terminen en la fecha de terminación más próxima del proyecto. La regla básica que se observará al determinar los tiempos más tardíos admisibles es: cuando hay varios tiempos de ocurrencia para un mismo evento, se debe tomar el tiempo mínimo.

- **Determinación de la ruta o rutas críticas.** Tras determinar el tiempo más próximo esperado y el tiempo más tardío admisible, ahora se les puede trazar en una sola red. La ruta crítica en la red, es el trayecto del tiempo más largo que la cruza, para cada uno de los eventos de la ruta crítica, su tiempo más próximo, T_E, es igual a su tiempo más tardío, T_L. Esto significa que el tiempo más tardío admisible en el que cada evento se puede terminar es igual al tiempo más próximo en que puede esperarse que se termine. En consecuencia, no hay tiempo de holgura o de sobra, los eventos deben realizarse exactamente de acuerdo al programa, para cumplir con el tiempo de terminación.

- **Cálculo de holgura.** La red permite ver en cuáles actividades se puede y se debe ahorrar tiempo y en cuáles otras se puede apresurar un poco el programa durante cierto período, si resulta ventajoso hacerlo.

Al tiempo del que se dispone libremente en una red PERT, se le conoce comúnmente como holgura y puede definirse en dos formas :

La holgura total es el tiempo que puede retrasarse una actividad desde su iniciación, sin afectar el tiempo de terminación del proyecto total.

La holgura libre de una actividad es el tiempo que puede retrasarse una actividad desde su iniciación, sin afectar la iniciación de las actividades subsiguientes.

La fórmula de la holgura S (total), expresa la diferencia entre el tiempo más tardío admisible T_L, y el tiempo más próximo esperado T_E, y tiene la siguiente forma:

$$S = T_L - T_E$$

Conociendo la magnitud de la holgura o tiempo sobrante que hay en los diferentes eventos, es posible desviar los recursos - trabajadores, maquinaria y materiales - a la ruta crítica, a fin de acortar el tiempo total del proyecto, esta es una de las razones básicas para utilizar la técnica PERT.

Desviación estándar "σ_{te}"

$$\sigma_{te} = \frac{tb. - ta}{6}$$

Varianza "V_{te}"

$$V_{te} = (\sigma_{te})^2 = \left[\frac{tb - ta}{6}\right]^2$$

Adoptando el tiempo medio esperado de las actividades, los cálculos para el PERT son igual que en el CPM. Sin embargo según el enfoque del PERT a cada duración se le asocia su desviación estándar o su varianza. Las flechas calculadas para los eventos serán tiempos medios esperados de eventos y en consecuencia estarán sujetos a duda; la medida de esta duda requiere la obtención de la desviación estándar de los eventos.

La duración del proyecto se determina sumando el tiempo medio esperado de las actividades a lo largo de la ruta crítica y está será por lo tanto la duración media esperada. Para la duración del proyecto de tiempo esperado **(T_e^P)**

$$V_{T_e^P} = (\sigma_{T_e^P})^2 = \Sigma\, V_{te} = \Sigma\, (\sigma_{te})^2$$

A partir de la cual se determina la desviación estándar de la duración del proyecto.

Una vez determinados el tiempo medio esperado para un evento (T_x) y su desviación estándar (σ_{Tx}) a partir de la teoría de probabilidades se calcula que probabilidad hay que encontrar en un tiempo programado para el evento específico (T_p). Para esto se considera que el tiempo de terminación del evento tiene una distribución normal de probabilidades con un valor medio (T_x) y desviación estándar (σ_{Tx}) determinados en forma práctica de las tablas estándar de probabilidad preparadas a partir de las funciones de distribución normal.

$$\textbf{Donde: } Z = \frac{T_p - T_x}{\sigma_{Tx}}$$

Por lo tanto para determinar el tiempo programado para un evento, pasado en un nivel de riesgo dado:

$$T_p = T_x + Z\,\sigma_{Tx}$$

En algunos casos los valores de T_{XP} y T_{XT} son diferentes; a esta diferencia se le llama holgura del evento y se expresa como:

$$\textbf{Holgura} = T_{XT} - T_{TP}$$

Un evento con holgura cero debe estar en la ruta crítica esperada. Existen dos variancias aplicables a cada evento V_{TXP} y V_{TXT}.

- V_{TXP} mide la incertidumbre en el camino que consume más tiempo (calculada sobre el tiempo medio esperado para cada actividad), hasta el evento bajo consideración.

- V_{TxT} mide la incertidumbre que todavía se puede encontrar a lo largo de la trayectoria que consume más tiempo a partir de este evento y hasta la terminación del proyecto.

Para los eventos sobre la ruta crítica esperada la suma de las dos variancias debe ser igual a una constante.

Ejemplo de Aplicación:

Tiempos estimados para el proyecto de construcción de una tubería.

Precedencia	Actividad	Descripción	t_a	t_m	t_b	Costo Normal	Costo Ruptura
———	A	Preparación de personal	10	10	10	300	300
A	B	Traslado al lugar	18	20	22	300	500
A	C	Adquisición de tubería	20	30	100	400	1600
A	D	Adquisición de válvulas	18	20	70	600	2100
O	E	Trazo de ejes	6	7	14	350	750
C	F	Acondiciona - miento de accesorios	7	9	17	200	1000
E . C	G	Excavación de zanjas	20	25	60	400	1200
E , C	H	Preparar cajas para válvulas	17	18	31	250	1000
H	I	Colocar tubería	18	20	40	300	900

G , F , D	J	Colocar válvulas	8	10	12	600	1000
L , N	K	Anclajes de concreto	11	12	13	500	550
M , P	L	Rellenar	8	8	20	200	400
I , J	M	Terminar cajas para válvulas	8	8	8	250	250
I , J	N	Probar tubería	5	6	7	150	200
B	O	Limpieza	2	3	10	200	300
I , J	P	Retirar equipo y personal	3	4	5	250	275

Definir el proyecto a tiempo medio esperado.

Definir el proyecto de ruptura .

Duración del proyecto si se requiere una probabilidad de éxito del 80%, del 90% y 95%.

Nodos críticos: 2, 4, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 16

Rc	**A**	**C**	**I_1**	**H**	**M**	**I_3**	**L**	**K**
m	∞	60	∞	250	∞	∞	100	50

Proyecto a tiempo medio esperado

Duración (1) : 123 semanas

Costo Directo (1) : $5250

Por lo tanto se comprime "K"

Lím. Comp. K = mín. [(lím. rupt);(lím. FL)]

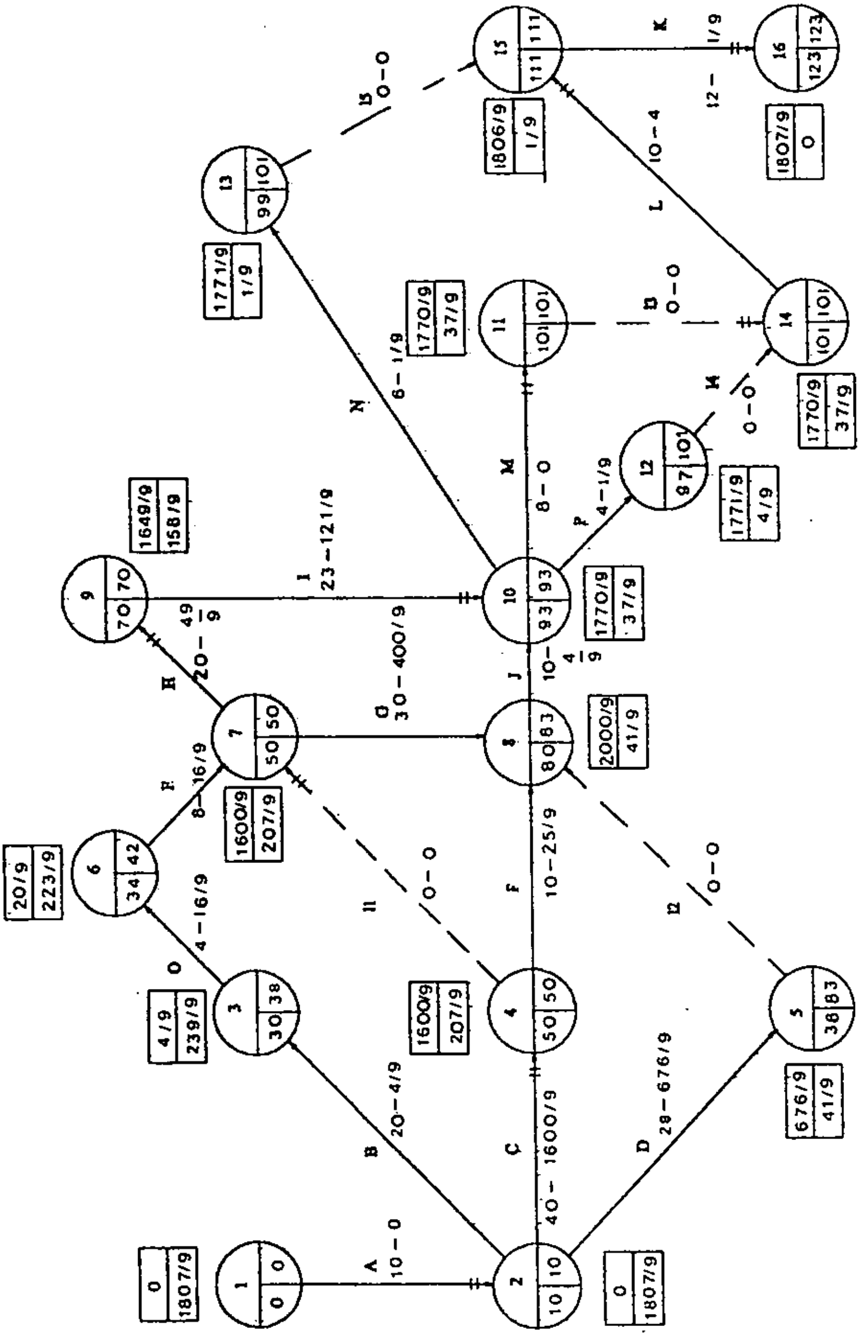
Lím. Rupt. K = (dur-t.opt.)

= 12 - 11 = 1

Se comprime K en 1 semana

Nodos	Actividad	Duración	IMP	TMP	IMT	TMT	FT	FL
1-2	A	10	0	10	0	10	0	0
2-3	B	20	10	30	18	38	8	0
2-4	C	40	10	50	10	50	0	0
2-5	D	28	10	38	55	83	45	0
3-6	O	4	30	34	38	42	8	0
4-7	I_1	0	50	50	50	50	0	0
4-8	F	10	50	60	73	83	23	20
5-8	I_2	0	38	38	83	83	45	42
6-7	E	8	34	42	42	50	8	8
7-8	G	30	50	80	53	83	3	0
7-9	H	20	50	70	50	70	0	0
8-10	J	10	80	90	83	93	3	3
9-10	I	23	70	93	70	93	0	0
10-11	M	8	93	101	93	101	0	0
10-12	P	4	93	97	97	101	4	0
10-13	N	6	93	99	105	111	12	0
11-14	I_3	0	101	101	101	101	0	0
12-14	I_4	0	97	97	101	101	4	4
13-15	I_5	0	99	99	111	111	12	2
14-15	L	10	101	111	101	111	0	0
15-16	K	12	111	123	111	123	0	0

Lím. FL = 4



No obstante que el límite de compresión de una actividad crítica inicialmente está definida por el menor límite de ruptura y del límite de FL, en algunas ocasiones (cuando desaparece la ruta crítica original haciendo uso sólo de lo anterior), se debe analizar directamente en la red, la intervención de la magnitud de compresión deduciendo, la magnitud máxima que impida la desaparición de la ruta crítica original.

Como en el nodo 4, la actividad C no se puede comprimir a su límite de ruptura ya que al hacerlo desaparece la ruta crítica, por lo cual se debe de reducir en 8 para que de esta forma no se elimine la ruta crítica.

Duración (2) : 122 semanas

Costo: 5250 + 50(12-11) = $ 5300

Nodos críticos: 2, 4, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 16

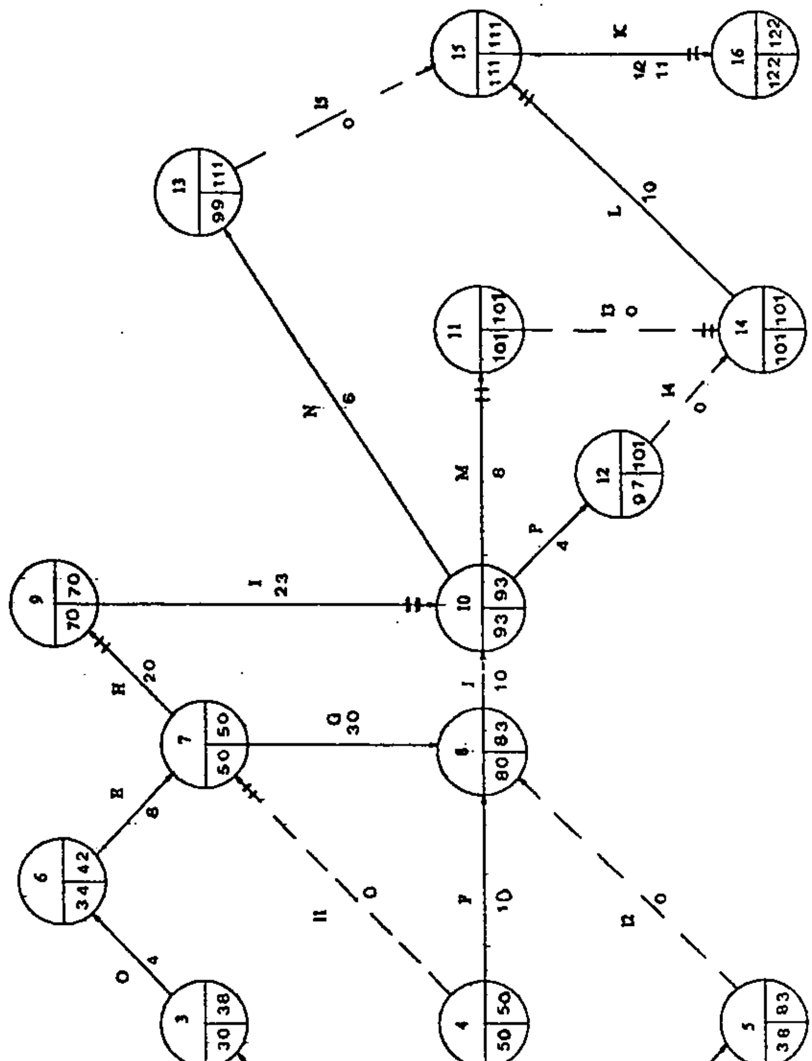
Rc	**A**	**C**	**I_1**	**H**	**I**	**M**	**I_3**	**L**	**K**
m	∞	60	∞	250	120	∞	∞	100	50

Por lo tanto se comprime "C"

Lím comp. C = mín. (lím. rupt.; lím. FL) = { 20, 8 }

lím. rupt. = 40 - 20 = 20

considerar el **FL** de la actividad **E** = 8



Se comprime C en 8 semanas.

Nodos	Actividad	Duración	IMP	TMP	IMT	TMT	FT	FL
1-2	A	10	0	10	0	10	0	0
2-3	B	20	10	30	18	38	8	0
2-4	C	40	10	50	10	50	0	0
2-5	D	28	10	38	55	83	45	0
3-6	O	4	30	34	38	42	8	0
4-7	I_1	0	50	50	50	50	0	0
4-8	F	10	50	60	73	83	23	20
5-8	I_2	0	38	38	83	83	45	42
6-7	E	8	34	42	42	50	8	8
7-8	G	30	50	80	53	83	3	0
7-9	H	20	50	70	50	70	0	0
8-10	J	10	80	90	83	93	3	3
9-10	I	23	70	93	70	93	0	0
10-11	M	8	93	101	93	101	0	0
10-12	P	4	93	97	97	101	4	0
10-13	N	6	93	99	105	111	12	0
11-14	I_3	0	101	101	101	101	0	0
12-14	I_4	0	97	97	101	101	4	4
13-15	I_5	0	99	99	111	111	12	2
14-15	L	10	101	111	101	111	0	0
15-16	K	11	111	122	111	122	0	0

Lím. FL = 8 de lo contrario desaparece la ruta crítica original.

Duración (3) : 114 semanas

Costo : 5300 + 60 (40 - 8) = $ 7220

Nodos Críticos: 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 16

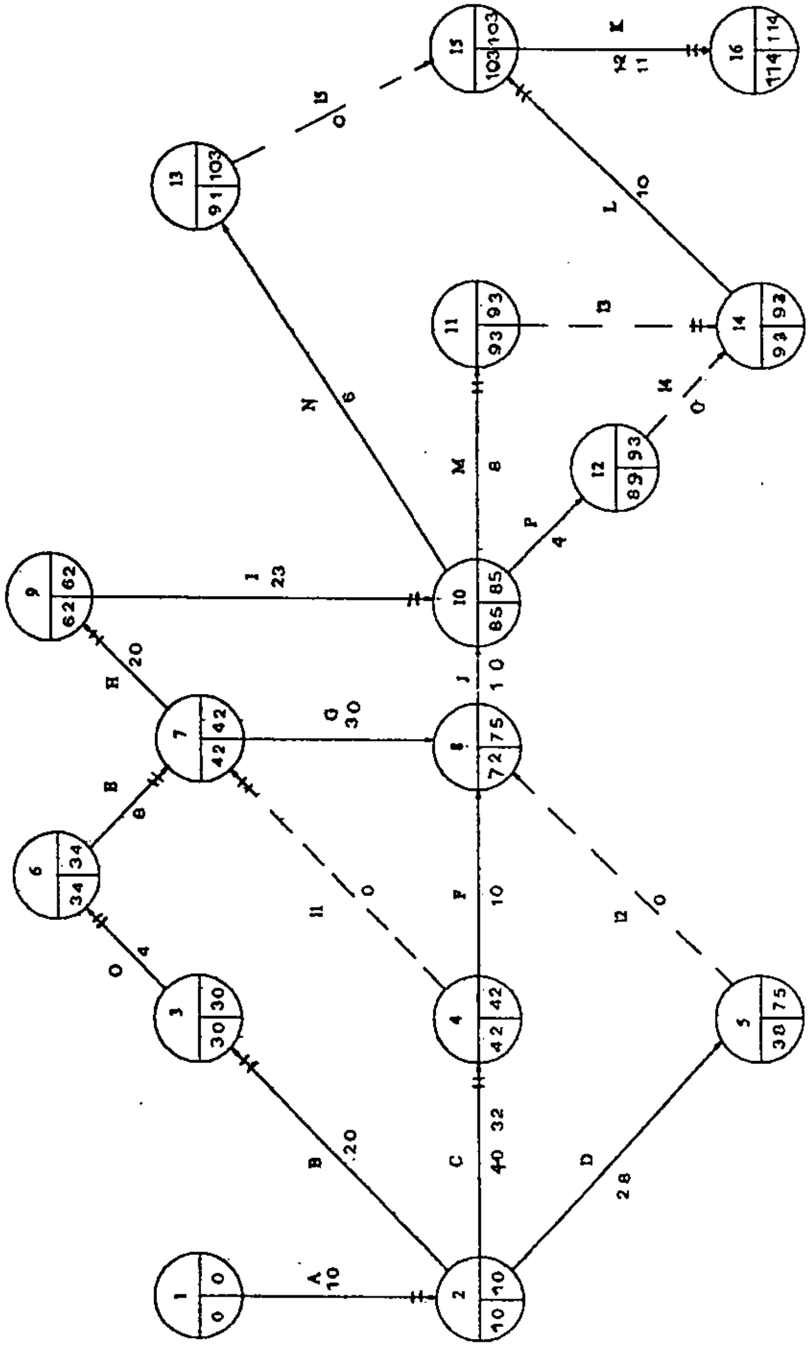
Rc (1):	**A**	**C**	**I_1**	**H**	**I**	**M**	**I_3**	**L**	**K**
m	∞	60	∞	250	120	∞	∞	100	50

Rc (2):	**A**	**B**	**O**	**E**	**H**	**I**	**M**	**I_3**	**L**	**K**
m	∞	100	50	200	250	120	∞	∞	100	50

Por lo tanto se comprime "L" por ser común y por menor pendiente

lím. comp. L = (10 - 8); ∞) = 2, se comprime en 2 semanas.

- *Se toma en cuenta el valor del límite de ruptura, porque el límite del FL es constante y ningún valor tiende a cero.*



Nodos	Actividad	Duración	IMP	TMP	IMT	TMT	FT	FL
1-2	A	10	0	10	0	10	0	0
2-3	B	20	10	30	10	30	0	0
2-4	C	32	10	42	10	42	0	0
2-5	D	28	10	38	47	75	37	0
3-6	O	4	30	34	30	34	0	0
4-7	I_1	0	42	42	42	42	0	0
4-8	F	10	42	52	31	75	21	20
5-8	I_2	0	38	38	75	75	35	34
6-7	E	8	34	42	34	42	0	0
7-8	G	30	42	72	43	75	1	0
7-9	H	20	42	62	42	62	0	0
8-10	J	10	72	82	75	85	3	3
9-10	I	23	62	85	62	85	0	0
10-11	M	8	85	93	85	93	0	0
10-12	P	4	85	89	89	93	4	0
10-13	N	6	85	91	85	91	0	0
11-14	I_3	0	93	93	93	93	0	0
12-14	I_4	0	89	89	93	93	4	4
13-15	I_5	0	91	91	103	103	12	2
14-15	L	10	93	103	93	103	0	0
15-16	K	11	103	114	103	114	0	0

Duración (4): 112 semanas

Costo: 7220 + 100(10 - 8) = $ 7420

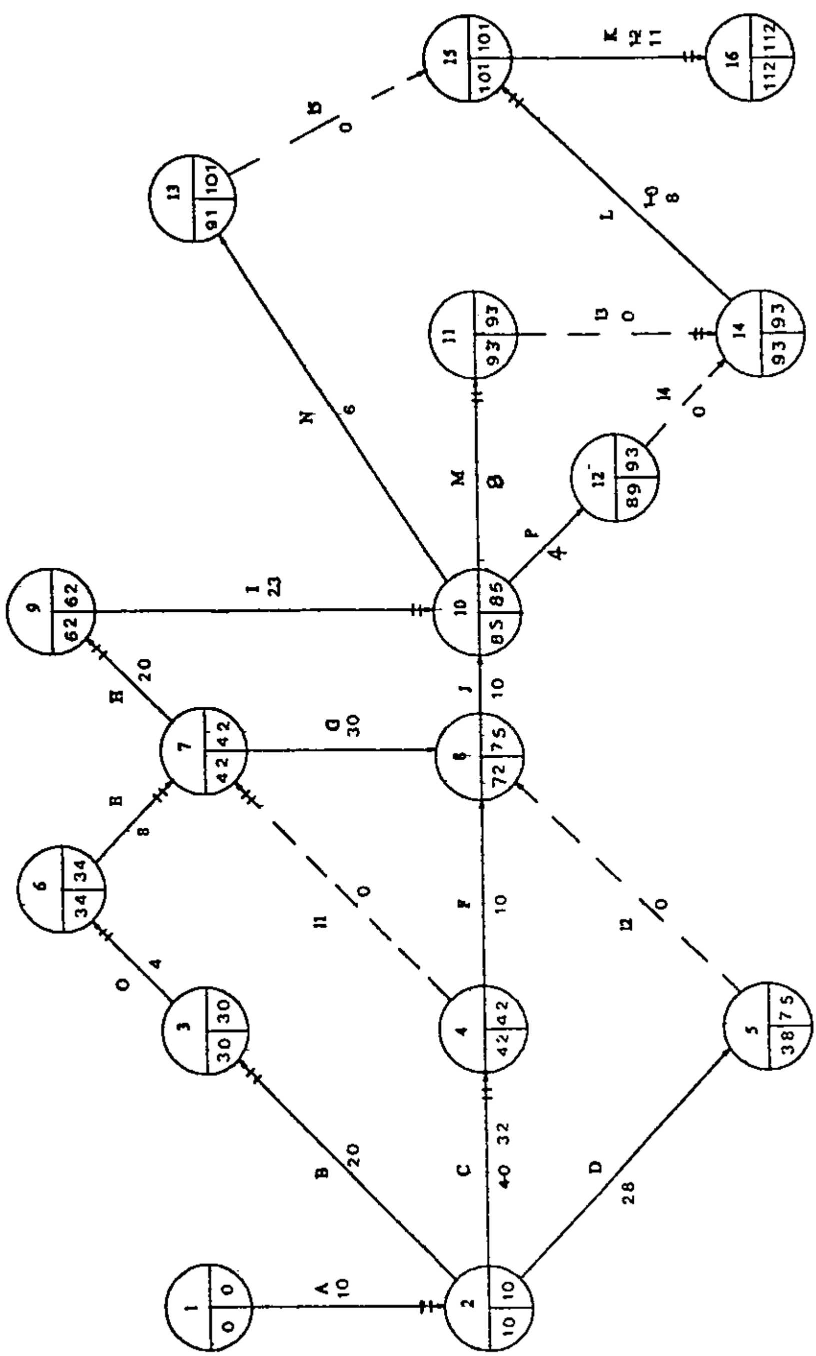
Nodos críticos: 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 16.

Rc (1):	A	C	l_1	H	I	M	l_3	L	K	
m	∞	60	∞	250	120	∞	∞	100	50	
Rc (2):	A	B	O	E	H	I	M	l_3	L	K
m	∞	100	50	200	250	120	∞	∞	100	50

Por lo tanto se comprimen C y D

lím. comp. C = mín. (lím. rupt; lím. FL) = (12, ∞)

lím. comp. O = mín. (lím. rupt; lím. FL) = (2, ∞)



Por lo tanto se comprimen en 2 semanas.

Nodos	Actividad	Duración	IMP	TMP	IMT	TMT	FT	FL
1-2	A	10	0	10	0	10	0	0
2-3	B	20	10	30	10	30	0	0
2-4	C	32	10	42	10	42	0	0
2-5	D	28	10	38	47	75	37	0
3-6	O	4	30	34	30	34	0	0
4-7	I_1	0	42	42	42	42	0	0
4-8	F	10	42	52	65	75	23	20
5-8	I_2	0	38	38	75	75	37	34
6-7	E	8	34	42	34	42	0	0
7-8	G	30	42	72	45	75	3	0
7-9	H	20	42	62	42	62	0	0
8-10	J	10	72	82	75	85	3	3
9-10	I	23	62	85	62	83	0	0
10-11	M	8	85	93	85	93	0	0
10-12	P	4	85	89	89	93	4	0
10-13	N	6	85	91	95	101	10	0
11-14	I_3	0	93	93	93	93	0	0
12-14	I_4	0	89	89	93	93	4	4
13-15	I_5	0	91	91	101	101	10	2
14-15	L	8	93	101	93	101	0	0
15-16	K	11	101	112	101	112	0	0

Duración (5) : 110 semanas

Costo: 7420 + 60(32 - 30) + 50(4 - 2) = $ 7640

Nodos críticos: 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 16.

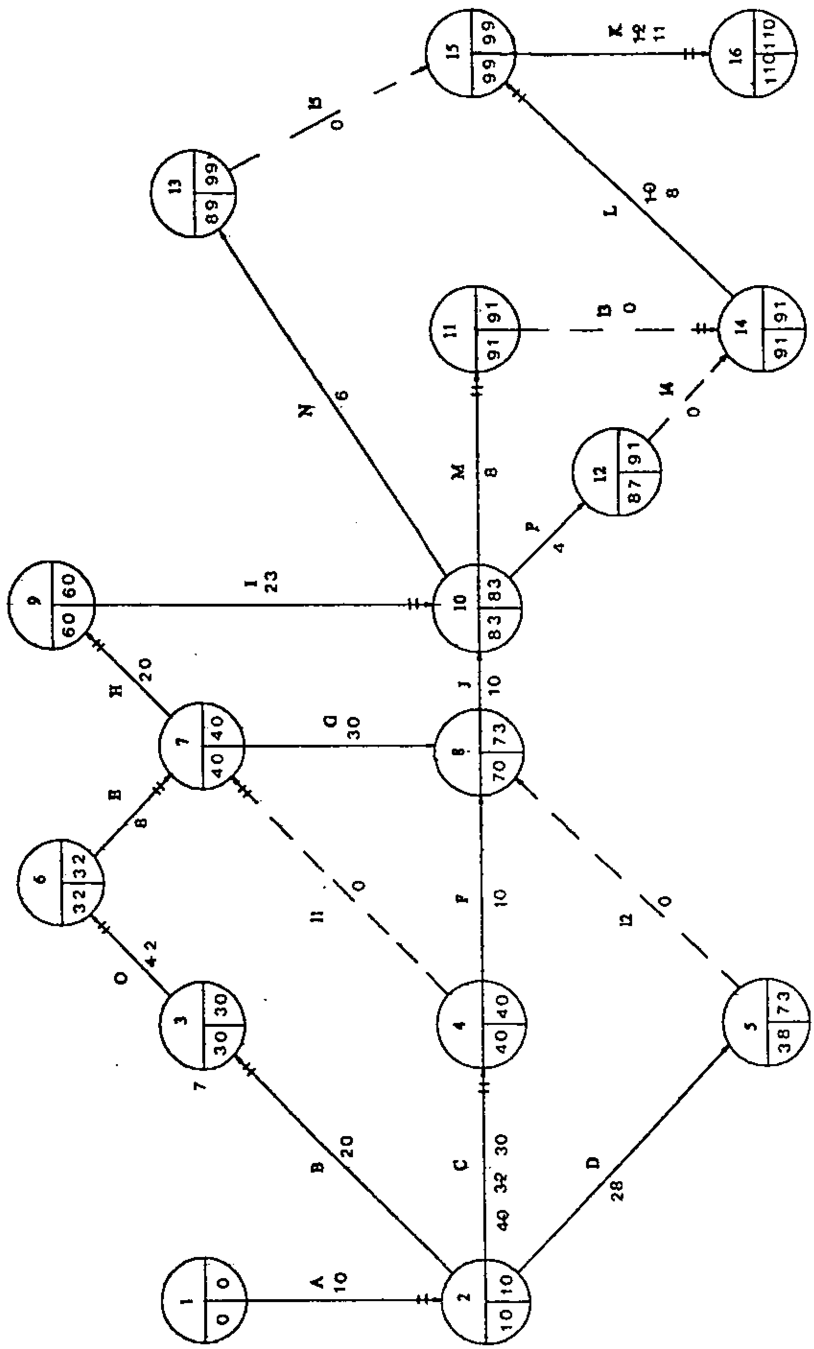
Rc (1):	A	C	I_1	H	I	M	I_3	L	K
m	∞	60	∞	250	120	∞	∞	100	50

Rc (2):	A	B	O	E	H	I	M	I_3	L	K
m	∞	100	50	200	250	120	∞	∞	100	50

Por lo tanto se comprimen C y B

lím. comp. C = mín. (lím. rupt; lím. FL) = (2, ∞)

lím. comp. B = mín. (lím. rupt; lím. FL) = (2, ∞)



Se comprimen en 2 semanas

Nodos	Actividad	Duración	IMP	TMP	IMT	TMT	FT	FL
1-2	A	10	0	10	0	10	0	0
2-3	B	20	10	30	10	30	0	0
2-4	C	30	10	40	10	40	0	0
2-5	D	28	10	38	45	73	35	0
3-6	O	2	30	32	30	32	0	0
4-7	I_1	0	40	40	40	40	0	0
4-8	F	10	40	50	63	73	23	20
5-8	I_2	0	38	38	73	73	37	34
6-7	E	8	32	40	32	40	0	0
7-8	G	30	40	70	53	83	13	0
7-9	H	20	40	60	40	60	0	0
8-10	J	10	70	80	73	83	3	3
9-10	I	23	60	83	60	83	0	0
10-11	M	8	83	91	83	91	0	0
10-12	P	4	83	87	87	91	4	0
10-13	N	6	83	89	93	99	10	0
11-14	I_3	0	91	91	91	91	0	0
12-14	I_4	0	87	87	91	91	4	4
13-15	I_5	0	89	89	99	99	10	2
14-15	L	8	91	99	91	99	0	0
15-16	K	11	99	110	99	110	0	0

Duración (6): 108 semanas

Costo: 7640 + 60(30 - 28) + 100(20 - 18) = $ 7960

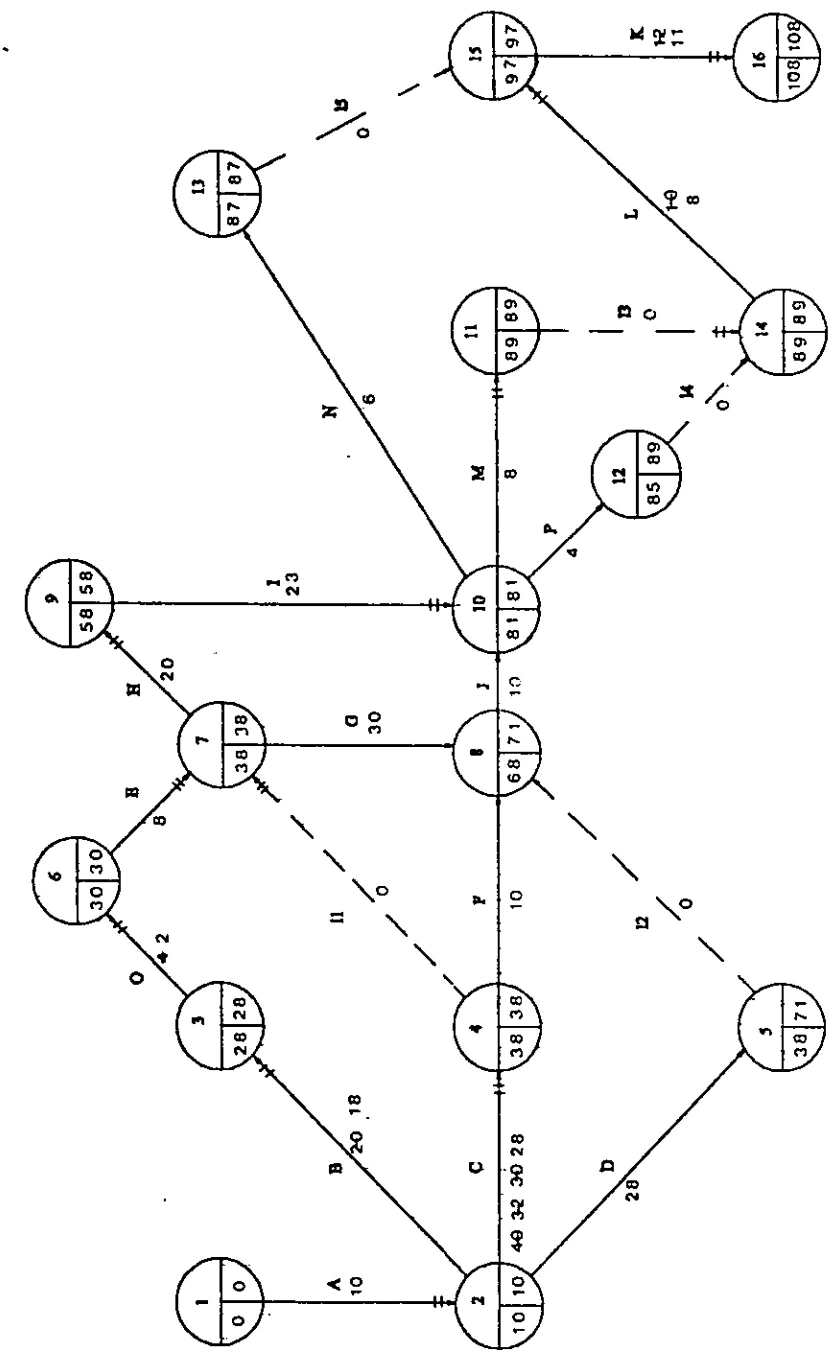
Nodos críticos: 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 16.

Rc (1):	A	C	I_1	H	I	M	I_3	L	K	
m	∞	60	∞	250	120	∞	∞	100	50	
Rc (2):	A	B	O	E	H	I	M	I_3	L	K
m	∞	100	50	200	250	120	∞	∞	100	50

Por lo tanto se comprimen C y E

lím. comp. C = mín. (lím. rupt.;lím FL) = (2, ∞)

lím. comp. E = mín. (lím. rupt.;lím FL) = (2, ∞)



Se comprimen en 2 semanas

Nodos	Actividad	Duración	IMP	TMP	IMT	TMT	FT	FL
1-2	A	10	0	10	0	10	0	0
2-3	B	18	10	28	10	28	0	0
2-4	C	28	10	38	10	38	0	0
2-5	D	28	10	38	43	71	33	0
3-6	O	2	28	30	28	30	0	0
4-7	I_1	0	38	38	38	38	0	0
4-8	F	10	38	48	61	71	23	20
5-8	I_2	0	38	38	71	71	33	0
6-7	E	8	30	38	30	38	0	0
7-8	G	30	38	68	41	71	3	0
7-9	H	20	38	58	38	58	0	0
8-10	J	10	68	78	71	81	3	3
9-10	I	23	58	81	58	81	0	0
10-11	M	8	81	89	81	89	0	0
10-12	P	4	81	85	85	89	4	0
10-13	N	6	81	87	91	97	10	0
11-14	I_3	0	89	89	89	89	0	0
12-14	I_4	0	85	85	89	89	4	4
13-15	I_5	0	87	87	97	97	10	2
14-15	L	8	89	97	89	97	0	0
15-16	K	11	97	108	97	108	0	0

Duración (7): 106 semanas

Costo: 7960 + 60(28 - 26) + 200(8 -6) = $ 8480

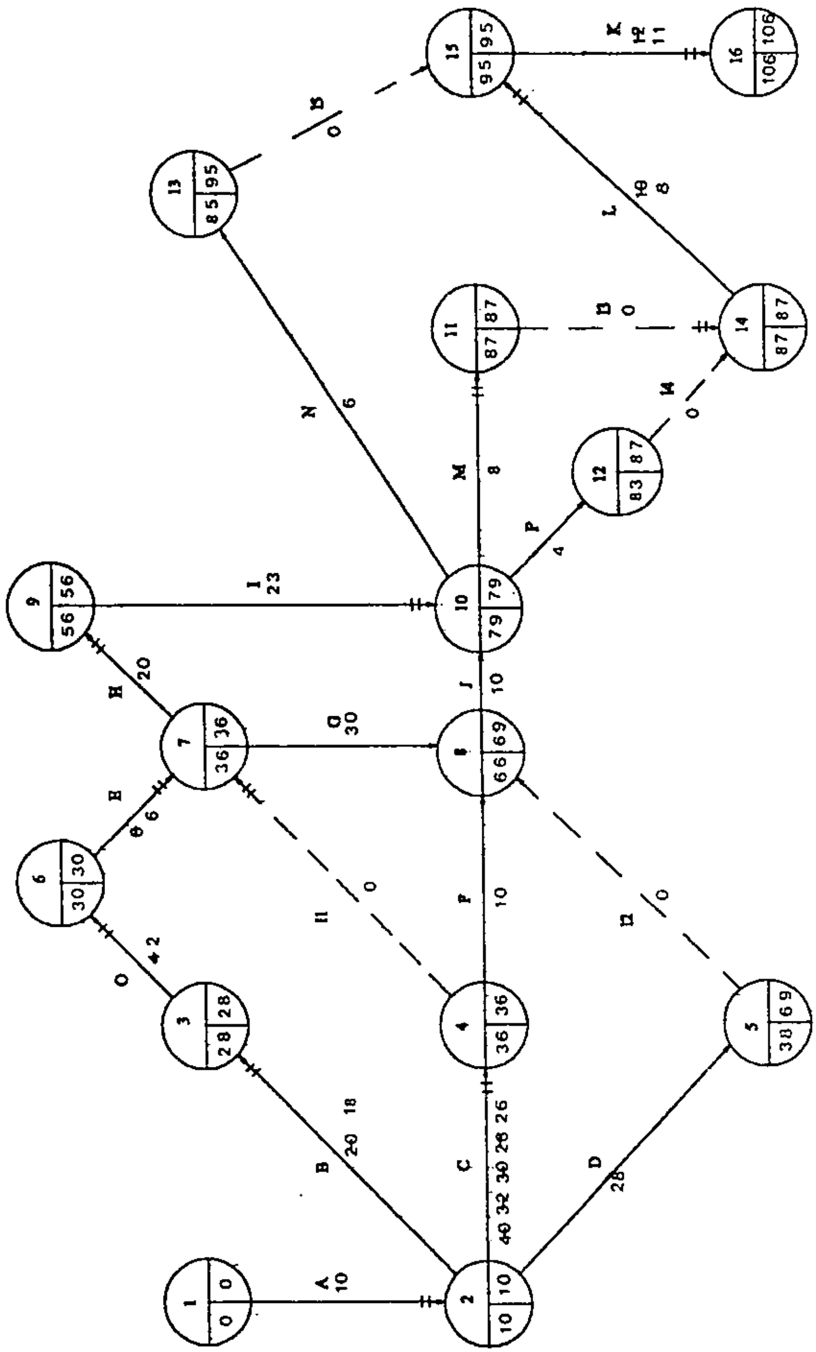
Nodos críticos: 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 16.

Rc (1):	**A**	**C**	**I_1**	**H**	**I**	**M**	**I_3**	**L**	**K**	
m	∞	60	∞	250	120	∞	∞	100	50	
Rc (2):	**A**	**B**	**O**	**E**	**H**	**I**	**M**	**I_3**	**L**	**K**
m	∞	100	50	200	250	120	∞	∞	100	50

Por lo tanto se comprime H

lím. comp. H = mín.(lím rupt; lím FL) = (3, ∞)

Se comprime en 3 semanas



Nodos	Actividad	Duración	IMP	TMP	IMT	TMT	FT	FL
1-2	A	10	0	10	0	10	0	0
2-3	B	18	10	28	10	28	0	0
2-4	C	26	10	36	10	36	0	0
2-5	D	28	10	38	41	69	31	0
3-6	O	2	28	30	28	30	0	0
4-7	I_1	0	36	36	36	36	0	0
4-8	F	10	36	46	59	69	23	20
5-8	I_2	0	38	38	69	69	33	0
6-7	E	6	30	36	30	36	0	0
7-8	G	30	36	66	36	69	3	0
7-9	H	20	36	56	36	56	0	0
8-10	J	10	66	76	69	79	3	3
9-10	I	23	56	79	56	79	0	0
10-11	M	8	79	87	79	87	0	0
10-12	P	4	79	83	83	87	4	0
10-13	N	6	79	85	91	97	12	0
11-14	I_3	0	87	87	87	87	0	0
12-14	I_4	0	83	83	87	87	4	4
13-15	I_5	0	85	85	95	95	10	2
14-15	L	8	87	95	87	95	0	0
15-16	K	11	95	106	95	106	0	0

Duración (8): 103 semanas

Costo: 8480 + 250(20 - 17) = $ 9230

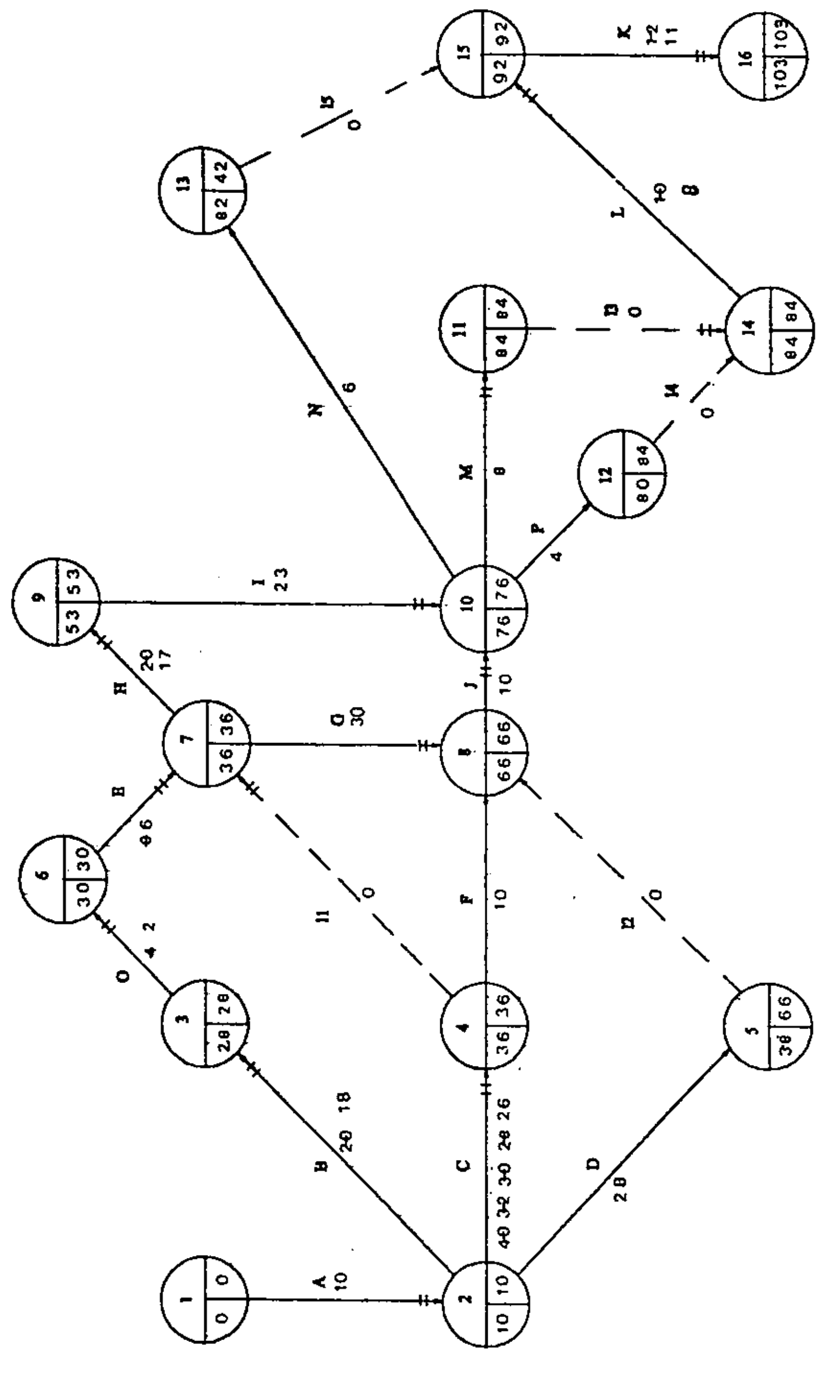
Nodos críticos: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16.

Rc (1):	A	C	I_1	H	I	M	I_3	L	K	
m	∞	60	∞	250	120	∞	∞	100	50	
Rc (2):	A	B	O	E	H	I	M	I_3	L	K
m	∞	100	50	200	250	120	∞	∞	100	50
Rc (3):	A	C	I_1	G	J	I	M	I_3	L	K
m	∞	60	∞	80	100	120	∞	∞	100	50

Por lo tanto se comprimen G e I

lím. comp. G = mín.(lím. rupt;lím FL) = (25, ∞)

lím. comp. I = mín.(lím. rupt;lím FL) = (5, ∞)


A
10
D
28
I
23
N
6
M
8
P
4

- *Se comprimen en 5 semanas; de lo contrario desaparecen las rutas críticas.*

Nodos	Actividad	Duración	IMP	TMP	IMT	TMT	FT	FL
1-2	A	10	0	10	0	10	0	0
2-3	B	18	10	28	10	28	0	0
2-4	C	26	10	36	10	36	0	0
2-5	D	28	10	38	41	66	28	0
3-6	O	2	28	30	28	30	0	0
4-7	I_1	0	36	36	36	36	0	0
4-8	F	10	36	46	56	66	20	20
5-8	I_2	0	38	38	66	66	28	28
6-7	E	6	30	36	30	36	0	0
7-8	G	30	36	66	36	66	0	0
7-9	H	17	36	53	36	53	0	0
8-10	J	10	66	76	66	76	3	3
9-10	I	23	53	76	53	76	0	0
10-11	M	8	76	84	76	84	0	0
10-12	P	4	76	80	80	84	4	0
10-13	N	6	76	82	86	92	10	0
11-14	I_3	0	84	84	84	84	0	0
12-14	I_4	0	80	80	84	84	4	4
13-15	I_5	0	82	82	92	92	10	2
14-15	L	8	84	92	84	92	0	0
15-16	K	11	92	103	92	103	0	0

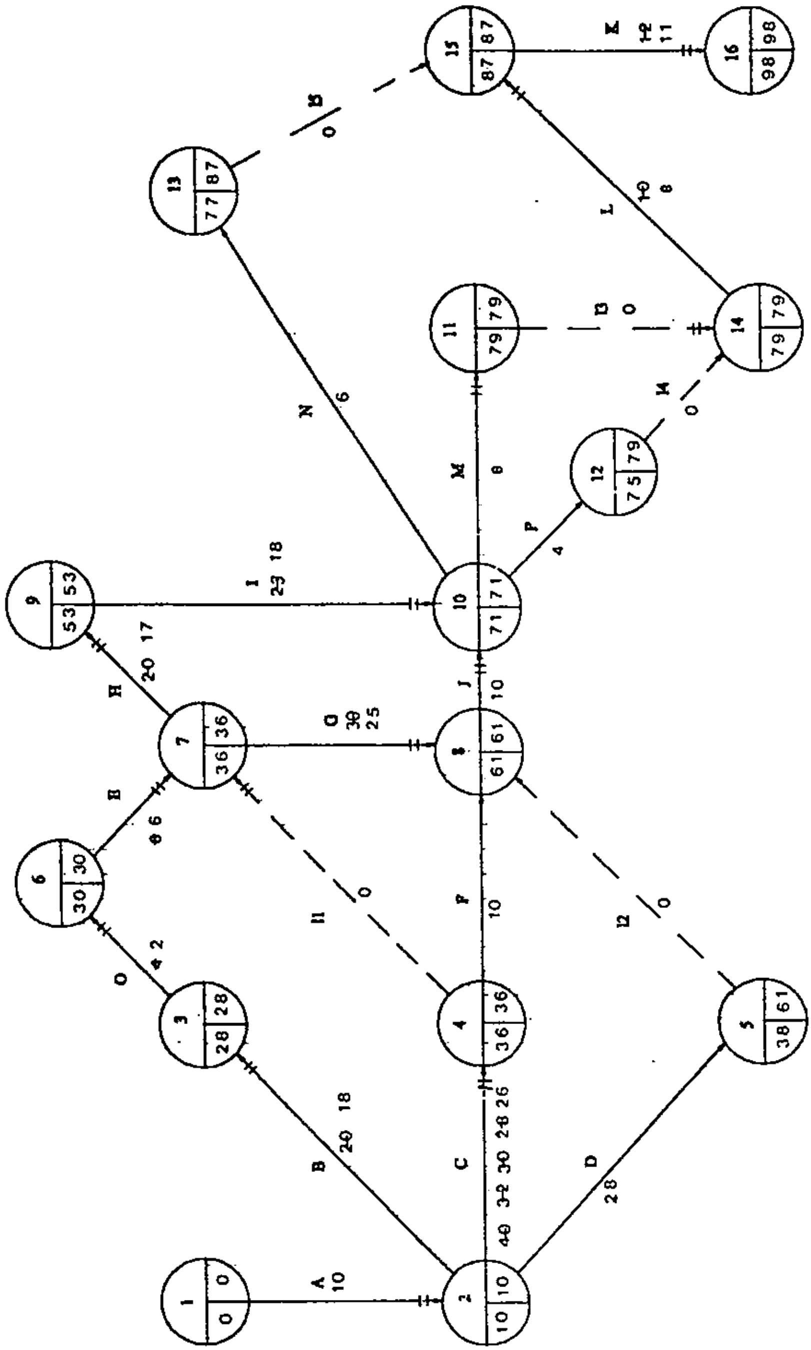
Duración (9): 98 semanas

Costo: 9230 + 80(30 - 25) + 120(23 - 18) = $ 10,230

Nodos críticos: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 16.

- Las rutas críticas tienen a todas sus actividades en sus tiempos de ruptura; el proyecto ya no se puede comprimir.

Por lo tanto el proyecto 9 es el proyecto de ruptura.



Nodos	Actividad	Duración	IMP	TMP	IMT	TMT	FT	FL
1-2	A	10	0	10	0	10	0	0
2-3	B	18	10	28	10	28	0	0
2-4	C	26	10	36	10	36	0	0
2-5	D	28	10	38	33	61	23	0
3-6	O	2	28	30	28	30	0	0
4-7	I_1	0	36	36	36	36	0	0
4-8	F	10	36	46	51	61	15	15
5-8	I_2	0	38	38	61	61	23	23
6-7	E	6	30	36	30	36	0	0
7-8	G	25	36	61	36	61	0	0
7-9	H	17	36	53	36	53	0	0
8-10	J	10	61	71	61	71	0	0
9-10	I	18	53	71	53	71	0	0
10-11	M	8	71	79	71	79	0	0
10-12	P	4	71	75	75	79	4	0
10-13	N	6	71	77	81	87	10	0
11-14	I_3	0	79	79	79	79	0	0
12-14	I_4	0	75	75	79	79	4	4
13-15	I_5	0	77	77	87	87	10	2
14-15	L	8	79	87	79	87	0	0
15-16	K	11	87	98	87	98	0	0

Definir el proyecto a tiempo medio esperado:

- El proyecto (1) es el proyecto a tiempo medio esperado porque se hace el análisis con los tiempos medios esperados con una duración de 123 semanas y costo de $5250.

Definir el proyecto de ruptura:

- El proyecto (9) es el proyecto de ruptura porque tiene a todas sus actividades criticas en su límite de ruptura con una duración de 98 semanas y un costo de $ 10,230.

Duración del proyecto si se requiere una probabilidad de éxito del 80%, 90% y 95%.

- Los valores se toman del proyecto medio esperado.

Evento	T_x	σ_{Tx}	Probabilidad	Z	T_p
16	*123*	*14.1696*	0.8	0.8	134.3356
16	*123*	*14.1696*	0.9	1.3	141.4204
16	*123*	*14.1696*	0.95	1.7	147.0883

$$v_{Tx} = 1807/9 = 14.1696$$

$$Z = T_p - T_x / \sigma_{Tx} \ ; \ T_p = T_x + Z\,\sigma_{Tx}$$

$$T_p = 123 \div (0.8)(14.1696) = 134.3356$$

$$T_p = 123 + (1.3)(14.1696) = 141.4204$$

$$T_p = 123 + (1.7)(14.1696) = 147.0883$$

CAPITULO 6

CAPITULO 6

SIMULACION

6.1 INTRODUCCION

La técnica de la simulación ha sido, una importante herramienta del proyectista, ya sea que esté simulando el vuelo de un avión en túnel de viento, la distribución de una planta con modelos a escala de máquinas, o bien, líneas de comunicación con un diagrama de organización. Con la llegada de las computadoras digitales de alta velocidad, con las cuales conducir los experimentos simulados, esta técnica ha incrementado también su importancia para el investigador de operaciones. En consecuencia, la simulación se ha convertido en la rama experimental de la investigación de operaciones.

Dentro de la investigación de operaciones, la simulación típicamente comprende también la construcción de un modelo que, en naturaleza, es matemático en gran parte. En lugar de describir directamente el comportamiento global del sistema, el modelo de simulación describe la operación del sistema en términos de eventos individuales de los componentes del sistema por separado.

En particular, el sistema se divide en elementos cuyo comportamiento se puede predecir, al menos en términos de distribuciones de probabilidad, para cada uno de los diversos estados posibles del sistema y de sus entradas, también se introducen al modelo las interrelaciones entre los elementos.

El modelo de Simulación usualmente toma la forma de suposición acerca de la operación del sistema, expresado matemáticamente ó relaciones lógicas entre los objetos de interés del sistema.

Como con otras técnicas, Simulación tiene sus ventajas y desventajas. La mayor ventaja de simulación es que la teoría de simulación es muy franca, en general, los métodos de simulación son fáciles de aplicar que métodos analíticos.

6.2. REQUISITOS PARA LA FORMULACION DEL PROBLEMA DE SIMULACION.

Antes de especificar los aspectos más importantes que se presentan al formular problemas de simulación, será útil definir está. La simulación es la utilización de un modelo de sistemas, que tiene las características deseadas de la realidad, a fin de reproducir la esencia de las operaciones reales. También se le ha definido como una representación de la realidad mediante el empleo de un modelo u otro sistema que reaccione de la misma manera que la realidad, en un conjunto de condiciones dadas.

La definición más general y amplia de está es: una técnica cuantitativa que utiliza un modelo matemático computarizado para representar la toma real de decisiones bajo condiciones de incertidumbre, con objeto de evaluar cursos alternativos de acción con base en hechos y suposiciones.

La simulación implica la construcción de un modelo matemático que describa el funcionamiento del sistema en cuantos a eventos y componentes individuales. Además, el sistema se divide en los elementos y las interrelaciones de aquellos elementos de comportamientos previsible, al menos en función de una distribución de probabilidades, para cada uno de los diversos estados posibles del sistema y sus insumos. La simulación es un medio de dividir el proceso de elaboración de modelos en partes componentes más pequeñas y combinarlas en el orden natural o lógico. Lo que permite el análisis en computadora de los efectos de las interacciones mutuas entre éstas. Debido al error estadístico, es imposible garantizar que se encontrará la respuesta óptima, no obstante estará por lo menos próxima a la óptima si el problema se simula correctamente.

Los procesos de Simulación consisten de varias formas diferentes. Aunque cada estudio puede ser alguna cosa diferente, en general se utilizan las siguientes estructuras:

1. Formulación del problema.
2. Recolectar datos y definir el modelo.
3. Procesar el modelo.
4. Verifique el modelo a computar.
5. Validez del modelo de simulación.
6. Diseño del experimento.
7. Ejecución de simulación.
8. Documentación e Implementación.

6.3 METODO DE MONTECARLO.

- Este método es una simulación con técnicas de muestreo, es decir, en vez de sacar muestras de una población real, se obtienen de duplicado teórico de la misma. Implica la determinación de la distribución de la probabilidad de las variables en estudio y después el muestreo tomado de esta distribución por medio de números aleatorios para obtener datos. De hecho, un grupo de números aleatorios genera un grupo de valores que tienen las mismas características de distribución que la población real.

- El método sugiere el empleo de las ruedas de la ruleta o de los dados, se utilizan números aleatorios, el método se puede resolver problemas dependientes de la probabilidad en los que la experimentación física es impracticable y la creación de una fórmula exacta es imposible, se estudian problemas con una larga secuencia de pasos o eventos determinados por la probabilidad. Aunque pueden escribirse fórmulas matemáticas para la probabilidad de un paso o evento dado, a menudo resulta imposible escribir una ecuación útil para las probabilidades de todos los pasos o eventos.

- Los métodos de Monte Carlo son extremadamente útiles en problemas de líneas de espera que son difíciles o imposibles de analizar matemáticamente. Los métodos de muestreo simulado son adecuados, por ejemplo, cuando la suposición simple de que el primero que llega es el primero que sale, se reemplaza por un tipo diferente de disciplina de cola. En muchos casos las distribuciones observadas de tiempos de servicio y de tiempo de entre llegadas, no pueden ajustarse mediante distribuciones matemáticas, y el método de Monte Carlo es la única esperanza que tenemos de encontrar algún tipo de respuesta.

- En las líneas de espera de varios canales, las salidas en una cola pueden convertirse en llegadas para otra. Bajo estas condiciones, el método es de gran utilidad, ya que ninguno de los modelos anteriores se comporta adecuadamente. El método es una técnica de simulación en la que se crean funciones de distribución estadística usando una serie de números aleatorios.

- Existen varias ventajas de este método comparado con el procedimiento obvio de muestreo, de simplemente observar el proceso real y formar una historia de llegadas, servicios, tiempos de espera, longitudes de cola, etc. Otra ventaja consiste en que se pueden manipular aquellos factores que están sujetos a control. Por ejemplo, utilizando métodos de Monte Carlo podemos rápidamente medir el efecto de agregar una o más estaciones de servicio sin tener en verdad que meterse en el problema y el gasto de instalarlas.

6.4. EJEMPLO:

DETERMINACION DE LA MAGNITUD DE LA MANO DE OBRA PARA MANTENIMIENTO

En esta sección se presenta un problema para la determinación de la mano de la cuadrilla de mantenimiento, teniendo como meta una política de costo mínimo de mantenimiento.

La gerencia de manufactura de la Ace Tool and Manufacturing Company, después de importantes negociaciones con su sindicato, ahora tiene que emplear personal de mantenimiento para hacer.el servicio a la máquina. Ya no puede aplicar el sistema anterior, cuando los operadores de las máquinas hacían el servicio ellos mismos. Por tanto, la compañía quiere determinar el número óptimo del nuevo personal de mantenimiento para lograr minimizar las pérdidas de producción ocasionadas por el tiempo muerto de la maquinaria descompuesta. El número de personas que se requieren es una condición de primera importancia, ya que los salarios y prestaciones tienen que balancearse al compararlos con el costo esperado de máquinas y operadores ociosos.

El punto de partida del estudio, es recopilar datos acerca de la forma en que las máquinas trabajan actualmente, lo cual puede hacerse registrando el número total de incidentes en donde el equipo necesita servicios cada hora y el tiempo que se requiere para hacer este. A todos los tiempos de servicio que sobrepasan un número entero de minutos seles ha asignado el minuto entero siguiente, que se traduce en un análisis conservador del problema.

Los eventos de este estudio pueden simularse ahora mediante el empleo de una tabla de números aleatorios. Los números aleatorios representan las posibilidades, que se exponen como porcentajes en las figuras 11 - 4 y 11 - 5. Se les emplea para obtener atrasos de máquinas y valores de los tiempos de servicio del problema. Por ejemplo, el número aleatorio 18 se selecciona para representar los atrasos por hora de la figura 11 - 4. Comenzando por el lado derecho de la gráfica, se traza una línea horizontal hasta que se intercepte la curva de distribución. Luego se traza una vertical hasta el eje X (véase la línea punteada de la gráfica). En este ejemplo, los atrasos por hora serían de 19 para la primera hora. Con la simulación así, a partir de la distribución acumulativa, se obtienen los atrasos de la máquina que se aproximan a las condiciones reales de operación. El mismo tipo de simulación es aplicable en la determinación de los tiempos de servicio. Se selecciona un número aleatorio para cada atraso y se obtienen el tiempo de la figura 11 - 5.

Los tiempos de espera de los operadores, que aparecen en la tabla 11 - 4, para tres trabajadores de mantenimiento se calcularon de la siguiente manera. El tiempo total de servicio que se requiere para la primera hora del estudio es de 175 minutos (tabla 11 - 3), el cual debe ser ajustado por el tiempo de servicio más rápido, 38 minutos (2 minutos por llamada de servicio x 19 atrasos) y por el tiempo de tolerancia para el personal de 30 minutos (10 minutos por cada hombre de mantenimiento por hora x 3 hombres) durante la primera hora.

El tiempo de servicio de 175 minutos menos 38 minutos por mayor eficiencia más 30 minutos por tiempo del personal, hace un total de 167 minutos para tres hombres de servicio.

En consecuencia, los hombres de servicio o de mantenimiento no están ocupados totalmente durante la primera hora, lo cual significa que su tiempo ocupado es de 167 minutos con 13 minutos de tiempo ocioso. Similarmente, los operadores tampoco están esperando.

El mismo tipo de cálculos se aplica a los renglones restantes. Al moverse hacia las columnas que representan cuatro hombres de servicio, deben tomarse en cuenta 40 minutos del tiempo libre para el personal.

Partiendo de un salario horario, que incluya prestaciones, de $ 4 para el personal de mantenimiento y de $ 15 para una máquina automática ociosa (la tarifa incluye la pérdida de utilidad por falta de producción de partes y el costo del operador ocioso), el estudio de investigación de operaciones indica como óptimo el empleo de tres hombres para el servicio de mantenimiento, como se ve en la tabla 11- 5.

TABLA 11 – 3

Ejemplo de simulación de tres horas de tiempo de servicio en las máquinas (apoyada en la realización del mantenimiento por parte de los propios operadores de las máquinas).

Simulación de los atrasos que hay en una hora.	simulación del tiempo de servicio individual por hora.

TABLA: 11 – 3.

número aleatorio	atraso en una hora	número aleatorio	tiempo individual de de servicio en un minuto	t. total de s. por hora, exp.en min
18	19	20,68,57,79,84,7	8,9,10,10	175
		2,95,08,85,79,34,	10,10,8,10,10	
		40,67,24,86,54,	9,9,9,8,10	
		35,81,07	9,9,10,8	
09	18	88,30,90,90,88,	10,8,10,10,10,	165
		72,22,75,69,86,	10,8,10,9,10,	
		45,48,32,63,00,	9,9,9,9,7	
		32,74,13	9,10,8	
41	20	68,65,99,76,66,	9,9,11,10,9	180
		12,72,59,02,72,	8,10,9,7,10	
		75,97,69,07,00,	10,11,9,8,7	
		01,46,29,64,88	7,9,8,9,10	

TABLA 11 - 4

Actividad de los hombres de mantenimiento.

hora de estudio	total de minutos de servicio que se requieren	**tiempo ocupado en minutos**	tiempo ocioso en minutos	**tiempo de espera de los operadores en minutos**	tiempo de espera acumulado de los trab. en minutos	**tiempo ocupado en minutos**	tiempo ocioso en minutos	**tiempo de espera de los trab. en minutos**	tiempo de espera acumulado de los operadores
1	137	167	13	-	-	177	63	-	-
2	129	159	21	-	-	169	71	-	-
3	140	170	10	-	-	180	60	-	-
4	167	180	-	17	17	207	33	-	-
5	119	140	31	-	-	159	81	-	-
6	179	180	-	29	29	219	21	-	-
7	105	135	45	-	-	145	95	-	-
8	130	160	20	-	-	170	70	-	-
9	150	180	-	-	-	190	50	-	-
10	166	180	-	16	16	206	34	-	-
11	141	171	9	-	7	181	59	-	-
12	155	180	-	5	12	195	45	-	-

(En la actualidad se incluye una tolerancia de 10 min. por hora por cada reparador como tiempo personal, antes de tacharlo de ocioso).

TABLA 11 – 5

Análisis de la utilización de hombres de mantenimiento, apoyado en la prestación del servicio por trabajadores de mantenimiento.

	No. de personas de mantenimiento	
	Tres	Cuatro
Tiempo total perdido por las máquinas (operadores) de acuerdo a la tabla 11 - 4	81 minutos	- minutos
Costo del tiempo muerto de la máquina (operador)	$15/hora	$ 15 hora
Valor del tiempo perdido por las máquinas (operadores)	$20.25	$ -
Pago total del personal de mantenimiento durante 12 horas ($ 48 por hombre)	144.00	192.00
Costo total (máquinas ociosas y mantenimiento)	$164.25	$192.00

Figura 11.4

Porcentaje Acumulativo de los Atrasos de las Máquinas por Hora

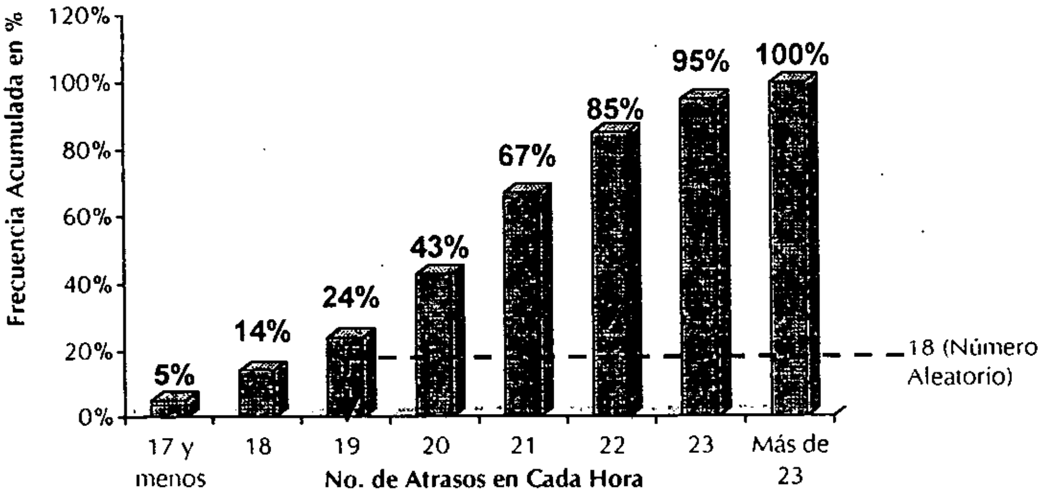
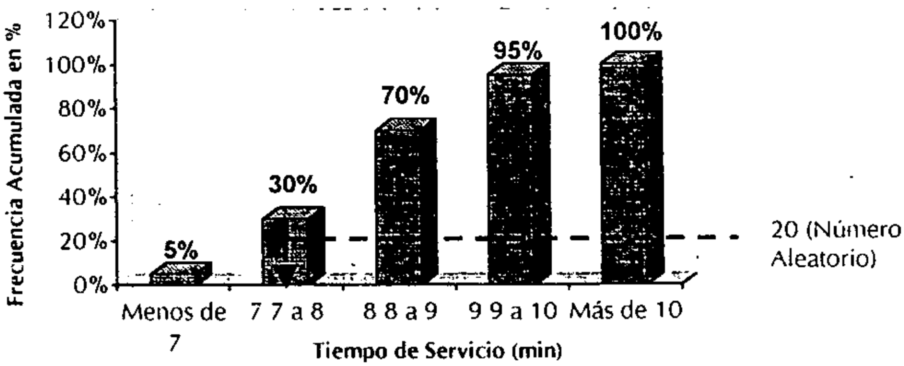


Figura 11.5

Porcentaje Acumulativo del Tiempo que se Toma Hacer el Servicio por Descompostura



CONCLUSIONES

CONCLUSIONES:

El desarrollo del presente Trabajo permite establecer la importancia de la Programación Lineal. Debido a que en las organizaciones se desarrollan diversas actividades que necesitan de varios estudios para tomar una decisión. La Programación Lineal ayuda a tomar estas decisiones por medio de sus métodos de solución, optimizando los recursos para obtener así la solución óptima y poder tomar una buena decisión.

El Trabajo se elaboró en una forma sencilla para facilitar la comprensión de la metodología de la Programación Lineal, ya que en la mayoría de los libros la explicación no es muy clara, lo cual no se puede comprender fácilmente y es por eso que este Trabajo está realizado de tal manera para usarlo como guía ya que los métodos están explicados paso a paso y así se pueda comprender como se resuelven los métodos.

Actualmente con la ayuda de la computadora y con los programas especiales para resolver los problemas de Programación Lineal es mucho más sencillo y rápido de resolverlos puesto que dichos programas cada vez se van actualizando, se pueden manejar en Windows 95 estos programas son Lindo y Lingo la ventaja que tienen es que aceptan más variables de decisión, lo cual sería muy tardado y posiblemente se tendrían muchos errores si esto se hiciera a mano; por lo cual los programas son de gran utilidad para la solución del problema, puesto que con la ayuda de Windows es mucho más sencillo manejarlo, porque si no se conoce bien el programa; con la ayuda del menú de Windows se puede proseguir con los pasos del programa.

La Programación Lineal tiene diversas aplicaciones como son:

- Evaluación de medios de promoción: Analiza la eficacia del espacio de publicidad y del tiempo, con base en los medios de promoción o de publicidad disponibles.

- Operación de altos hornos: Ayuda a la gerencia de producción en la programación de altos hornos con mucha mayor exactitud y eficiencia que la que puede lograrse con otros métodos analíticos.

- Mezcla de materia prima: Ayuda a mezclar varios ingredientes de una mezcla en particular para satisfacer requerimientos especiales y auxilia a la gerencia de manufactura proporcionando las materias primas sujetas a restricciones de calidad.

- Programación de inventarios: Permite el acomodo de materias primas y artículos semiterminados, minimizar la inversión de capital de la empresa mientras maximiza el flujo de producción aficiente.

- Planeación general de la mano de obra: Permite a la gerencia de personal analizar combinaciones de políticas de personal en función de sus aptitudes para mantener un flujo de estado estable de gente, por dentro y por fuera de la compañía.

- Programación de producción: Determina para la gerencia de manufactura la combinación de productos a manufacturar que produce más utilidades, para las instalaciones que poseen un amplio rango de capacidades de producción y el método más eficiente para la carga de la máquinas.

- Distribución de materias primas: Optimiza para los compradores las fuentes potenciales de materias primas para la producción y minimiza los costos de transporte.

- Asignación de trabajadores: Optimiza la distribución de los trabajadores con base en puntuaciones de prueba, de manera que se asigne el individuo adecuado al trabajo correcto.

- Asignación de máquinas: Ofrece la forma de asignar máquinas a las órdenes de fábrica más adecuadas para las respectivas máquinas y tiende a minimizar los costos y/o a cumplir con fechas de entrega específicas.

- Determinación de los transportes de acarreo: Prueba un medio para que la gerencia decida cuáles transportes son los de más bajo precio para el acarreo de los productos terminados de la firma.

- Utilización eficiente de un sistema de transporte: Optimiza no sólo los costos de embarque más bajos de las plantas de la empresa a los almacenes de ésta sino que también puede mantener los costos totales de transporte desde los almacenes a los clientes a un mínimo.

Con respecto a los problemas de Redes se encontró que la aplicación original de los sistemas tipo PERT fue para evaluar la secuencia de un programa de investigación y desarrollo, también se está usando para medir y controlar el progreso en muchos otros tipos de proyectos especiales. Se ha aplicado esta clase de procedimiento para la producción de películas, campañas políticas y cirugía compleja.

Aplicaciones PERT:

- Construcción: Ayuda a planear los proyectos de construcción, particularmente los de grandes estructuras, y a controlar las actividades de construcción para mantener ocupados a los trabajadores de salarios elevados, minimizando con ello los costos totales del proyecto.

- Investigación y desarrollo: Son útiles para supervisarlos proyectos complejos de investigación y desarrollo orientados hacia la investigación pura y aplicada, permitiendo a la gerencia mantener los costos reales dentro de las cantidades presupuestadas.

- Extensos contratos de gobierno: Se utilizan para mantener bajo control los tiempos y costos totales de los trabajos que se realizan a través de extensos contratos de gobierno; aún, ciertos contratos pueden requerir de la aplicación de la técnica PERT en la preparación de cotizaciones.

- Instalación de equipo: Son útiles para la planeación de una serie de actividades en suma integradas, cuando se instala equipo, inclusive computadoras y equipo importante.

- Instalación de sistemas y procedimientos: Se utilizan para implantar nuevos sistemas y procedimientos, ya sean simples o complejos.

- Mantenimiento y modificaciones: Ayudan a resolver problemas de mantenimiento, particularmente en las industrias del acero, la química, del petróleo, del vidrio y del papel.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

Frederick Hillier y Gerald J. Lieberman
Introducción a la Investigación de Operaciones
México, Mc. Graw Hill, 1982.

Taha Hamdy A.
Investigación de Operaciones
México, Representaciones y servicios de Ingeniería, 1981.

Thierauf R. V.
Introducción a la Investigación de Operaciones
México, Limusa, 1982.

Hans. G. Daellenbach, John A. George, Donald C. Mc. Nickle
Introducción a Técnicas de Investigación de Operaciones
Compañía Editorial Continental, 1986.

James M. Antill Y Ronald Woodhead
Método de la Ruta Crítica y su aplicación en la construcción
Editorial Limusa, 1969.

George B. Dantzig
Linear Programming and Extension
Editorial Princeton Uiversity Press, 1972.

Flores Zavala Víctor
Apuntes de Ingeniería de Sistemas
México, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1989.

E. Martínez, J. Mejía, H. Tapia
Elementos de Programación Lineal
Editorial Centro de Estudios Avanzados del I.P.N., 1980.

Juan Prawda
Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones
México, Limusa, 1976.

Russell Ackoff, Maurice W. Sasieni
Fundamento de Investigación de Operaciones
México, Limusa, 1975.