

18
2 ejm



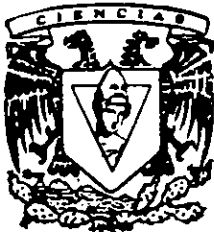
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

(e.l.)-NÚCLEOS EN DIGRÁFICAS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C A
P R E S E N T A
MARGARITA L JIMENEZ VILLARRUEL

DIRECTORA DE TESIS:
HORTENSIA GALEANA SANCHEZ.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN 1998



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN DE TESIS
267642



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

“(6.0)-NÚCLEO EN DIGRÁFICAS”

realizado por Margarita Jiménez Villarruel

con número de cuenta 7111149-4 , pasante de la carrera de MATEMÁTICAS.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ

Hortensia Galeana Sánchez

Propietario

DR. HUGO ALBERTO RINCON MEJIA

Hugo A. Rincon M.

Propietario

M. EN C. VIRGINIA ABRÍN BATULE

Virginia Abrin Batule

Suplente

M. EN C. PATRICIA CORTES FLORES

Patricia Cortes Flores

Suplente

MAT. LAURA PASTRANA RAMÍREZ

Laura Pastrana R.

MAT. JULIO CESAR GUEVARA BRAVO
Consejo Departamental de Matemáticas

[Firma manuscrita]

ESTADO DE MÉXICO
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
SECRETARÍA DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS Y TECNOLÓGICAS
SECRETARÍA DE CULTURA Y TURISMO
SECRETARÍA DE ECONOMÍA
SECRETARÍA DE ENERGÍA
SECRETARÍA DE FOMENTO ECONÓMICO
SECRETARÍA DE GOBIERNO FEDERAL
SECRETARÍA DE HACIENDA Y CREDITO PÚBLICO
SECRETARÍA DE INDUSTRIA, COMERCIO Y TURISMO
SECRETARÍA DE MEDIO AMBIENTE Y ENERGÍA
SECRETARÍA DE PLANEACIÓN ECONOMICA
SECRETARÍA DE PROMOCIÓN INDUSTRIAL
SECRETARÍA DE SALUD
SECRETARÍA DE TRABAJO Y PREVISIÓN SOCIAL
SECRETARÍA DE TRANSPORTES Y COMUNICACIONES
SECRETARÍA DE VIVIENDA Y OBRAS PÚBLICAS
SECRETARÍA DE DEFENSA NACIONAL
SECRETARÍA DE SEGURIDAD PÚBLICA
SECRETARÍA DE SERVICIOS FEDERALES DE TRÁFICO Y VIALIDAD
SECRETARÍA DE TRANSPORTES Y COMUNICACIONES
SECRETARÍA DE TURISMO
SECRETARÍA DE ECONOMÍA
SECRETARÍA DE FOMENTO ECONÓMICO
SECRETARÍA DE INDUSTRIA, COMERCIO Y TURISMO
SECRETARÍA DE PLANEACIÓN ECONOMICA
SECRETARÍA DE PROMOCIÓN INDUSTRIAL
SECRETARÍA DE TRABAJO Y PREVISIÓN SOCIAL
SECRETARÍA DE TRANSPORTES Y COMUNICACIONES
SECRETARÍA DE VIVIENDA Y OBRAS PÚBLICAS
SECRETARÍA DE DEFENSA NACIONAL
SECRETARÍA DE SEGURIDAD PÚBLICA
SECRETARÍA DE SERVICIOS FEDERALES DE TRÁFICO Y VIALIDAD

A LA MEMORIA DE EPIFANIO JIMÉNEZ GUTIÉRREZ

A MIS PADRES: GUADALUPE VILLARRUEL CEDILLO
EPIFANIO JIMÉNEZ GUTIÉRREZ

A MIS HIJOS: JORGE HOMERO Y PABLO ISAAC

A MI HERMANA: MA. VIRGINIA
A MIS SOBRINOS: ALEJANDRA MARGARITA Y ERICK
ULISES

AGRADEZCO INFINITAMENTE A LA DRA. HORTENSIA
GALEANA SÁNCHEZ HABER DIRIGIDO ESTE TRABAJO Y
REGALARME SU VALIOSO TIEMPO.

INDICE

Introducción	1
Definiciones	3
Capítulo I Seminúcleos y Núcleos en Digráficas	21
Capítulo II ϵ y (ϵ, ℓ) -Núcleos en Digráficas	34
Capítulo III ϵ -Núcleos en Digráficas	54
Capítulo IV Una condición suficiente para la existencia de ϵ - Núcleos en Digráficas.	63
Referencias	75

Introducción

Sea D una digráfica, $V(D)$ su conjunto de vértices y $F(D)$ su conjunto de flechas. Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es un núcleo de D si: N es independiente (no existen flechas de D con ambos extremos en N) y absorbente (para cada $x \in V(D) - N$ existe $y \in N$ tal que $(x,y) \in F(D)$).

El concepto de núcleo de una digráfica fue introducido por John Von Neumann y Morgenstern 1944 en el contexto de la Teoría de Juegos, ellos probaron que toda digráfica finita sin ciclos dirigidos posee un único núcleo.

El concepto de núcleo de una digráfica tiene aplicaciones en: problemas de toma de decisiones, en teoría de juegos como en el juego de Nim, en la ubicación de radares, en lógica y en muchas otras áreas, esto ha hecho que crezca el interés por encontrar condiciones suficientes para la existencia de núcleos en digráficas.

En 1953 Richardson demostró que toda digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar posee núcleo.

Este es ahora un resultado clásico sobre la existencia de núcleos en digráficas.

El problema de la existencia de un núcleo en una digráfica dada ha sido estudiado por varios autores.

En 1981 M. Kwasnik introdujo el concepto de (k, ℓ) -núcleo que es una generalización del concepto de núcleo en una digráfica y demostró una generalización del teorema de Richardson; probó que toda digráfica fuertemente conexa sin ciclos dirigidos de longitud no congruente con cero módulo k posee un (k, ℓ) -núcleo.

En el presente trabajo se expone una recopilación sobre la existencia de (ℓ, ℓ) -núcleos en digráficas explicando en detalle los métodos usados para la obtención de condiciones suficientes para la existencia de (ℓ, ℓ) -núcleos en digráficas.

Antes de continuar definiremos lo que es un ℓ -núcleo, y un (ℓ, ℓ) -núcleo, $\ell \geq 2, \ell \geq 1$.

Sea D una digráfica ℓ y ℓ números naturales con $\ell \geq 2, \ell \geq 1$. Un conjunto $J \subseteq V(D)$ será llamado un (ℓ, ℓ) -núcleo de la digráfica si:

1. Para cada $x' \neq x, \quad x, x' \in J$ tenemos $d_D(x, x') \geq \ell$.
2. Para cada $y \in (V(D) - J)$ existe $x \in J$ tal que $d_D(y, x) \leq \ell$.

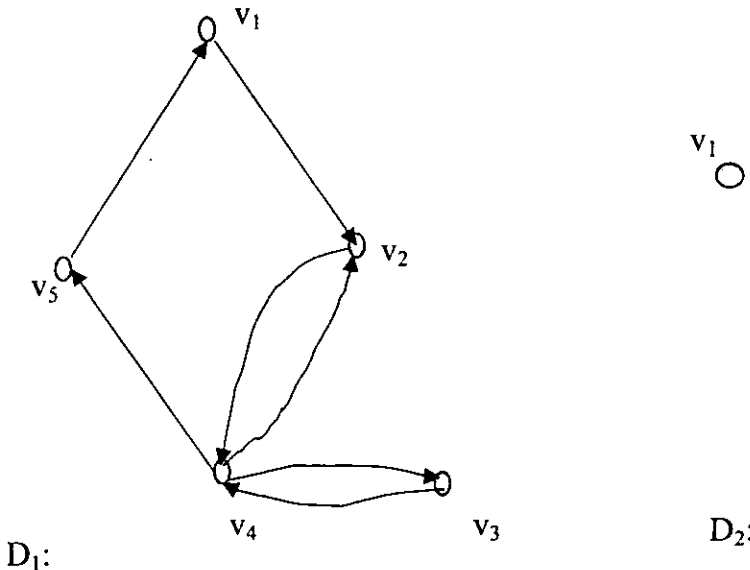
Un ℓ -núcleo es un $(\ell, \ell - 1)$ -núcleo, para $\ell = 2$ y $\ell = 1$ es un núcleo en el sentido de Von Neumann.

El trabajo desarrollado en esta tesis “ (ℓ, ℓ) -núcleos en digráficas” se basa en los trabajos de investigación publicados por investigadores mexicanos y extranjeros. Los investigadores mexicanos son: Hortensia Galeana S., Hugo Alberto Rincón M. y Víctor Neumann L. Algunos de los investigadores extranjeros son M. Kwassnik, C. Berge, P. Duchet.

La tesis contiene cuatro capítulos: El Capítulo I “Seminúcleos y Núcleos en Digráficas”; el Capítulo II “ ℓ y (ℓ, ℓ) -núcleos en digráficas”; el Capítulo III “ ℓ -núcleos en digráficas” y el capítulo IV “Una condición suficiente para la existencia de ℓ -núcleos en digráficas”. Antes de desarrollar los cuatro capítulos hacemos un glosario con los términos más usados.

Definiciones

Una digráfica D es un par (V, F) en donde V es un conjunto finito no vacío y F un subconjunto de $V \times V$ que no contiene pares de la forma (v, v) . Los elementos de V son los vértices de D y los de F las flechas.



$$V(D_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$F(D_1) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_1), (v_1, v_5)\}$$

$$V(D_2) = \{v_1\}$$

$$F(D_2) = \emptyset$$

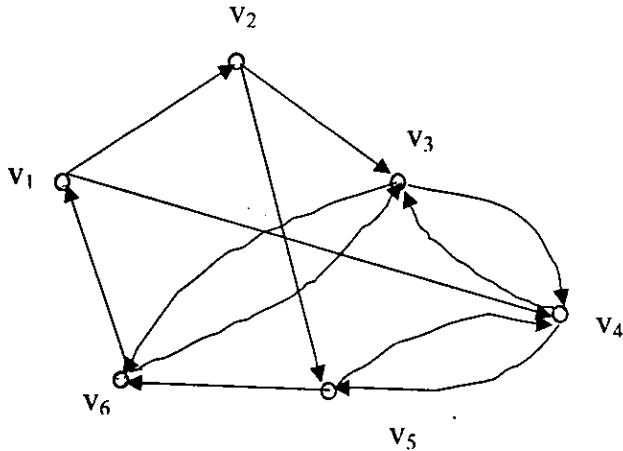
Si $f = (v_1, v_2) \in F$ diremos que f va de v_1 a v_2 , que v_1 y v_2 son las terminales de f y que v_1 es el vértice terminal inicial de f y v_2 es el vértice terminal final de f . Si además $v_1 \in S_1 \subseteq V(D)$ y $v_2 \in S_2 \subseteq V(D)$ se dirá que f va de v_1 a S_2 , de S_1 a S_2 o de S_1 a v_2 .

Si $(v_1, v_2) \in F$ y $(v_2, v_1) \in F$ diremos que $f = (v_1, v_2) \in F$ es una flecha simétrica.

En el siguiente ejemplo tenemos los conjuntos de vértices y flechas de D :

$$V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$F(D) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_3, v_6), (v_3, v_4), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_5, v_4), (v_6, v_3), (v_6, v_1), (v_2, v_5)\}$$



D :

$$S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$S_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$$

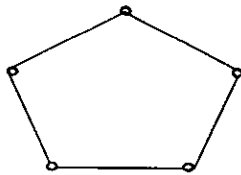
$$v_3 \in S_1 \subseteq V \quad v_6 \in S_2 \subseteq V$$

$f = (v_3, v_6)$ va de S_1 a S_2

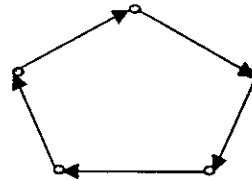
$f = (v_3, v_6)$ es una flecha simétrica de D .

Una digráfica D se llama simétrica si siempre que (u,v) es una flecha de D , entonces también lo es (v,u) . Existe una correspondencia natural uno a uno entre el conjunto de digráficas simétricas y el conjunto de gráficas. Una digráfica se llamará asimétrica u orientada si siempre que (u,v) sea una flecha de D , entonces (v,u) no es una flecha de D . Así una digráfica asimétrica puede obtenerse desde una gráfica G asignando una sola dirección a cada arista de G , transformándose G en una digráfica orientada o asimétrica.

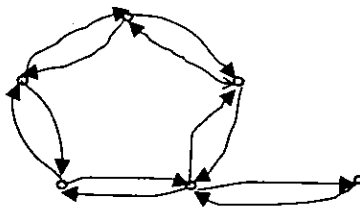
Una gráfica finita (G) es una pareja ordenada formada por un conjunto finito, V junto con un conjunto (posiblemente vacío) A (separado de V) de subconjuntos de dos elementos (distintos) de vértices de V .



Gráfica G

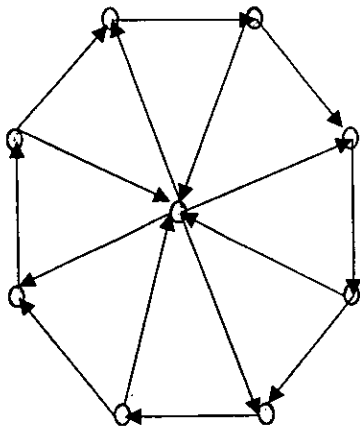


Gráfica orientada de G o
Digráfica D.

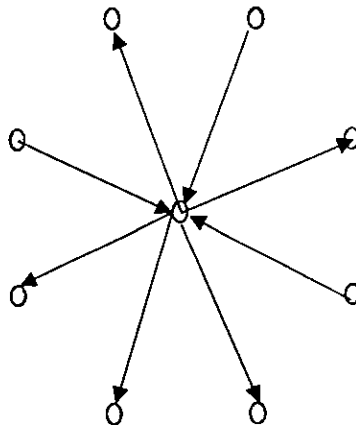


Digráfica simétrica

Una digráfica D_1 es una subdigráfica de una digráfica D si $V(D_1) \subseteq V(D)$ y $F(D_1) \subseteq F(D)$ y se denota $D_1 \subset D$.

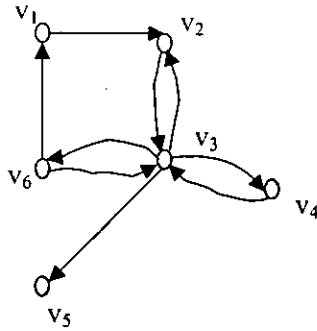


Digráfica D

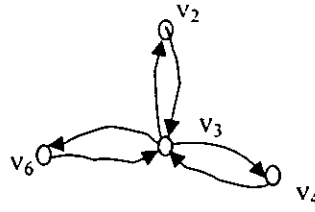


Subdigráfica D_1

Si U es un subconjunto no vacío del conjunto de vértices de una digráfica D , entonces la subdigráfica $\langle U \rangle$ de D plena o inducida por U es aquella digráfica que tiene como conjunto de vértices U y cuyo conjunto de flechas son todas aquellas de D que unen vértices de U .

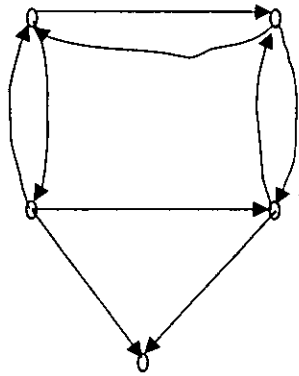


Digráfica D

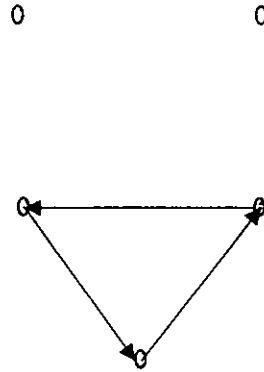


Subdigráfica de D inducida por U
 $U = \{v_2, v_3, v_4, v_6\}$

La parte asimétrica de D ($Asym(D)$) es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas asimétricas de D y los vértices son todos los vértices de la digráfica D.



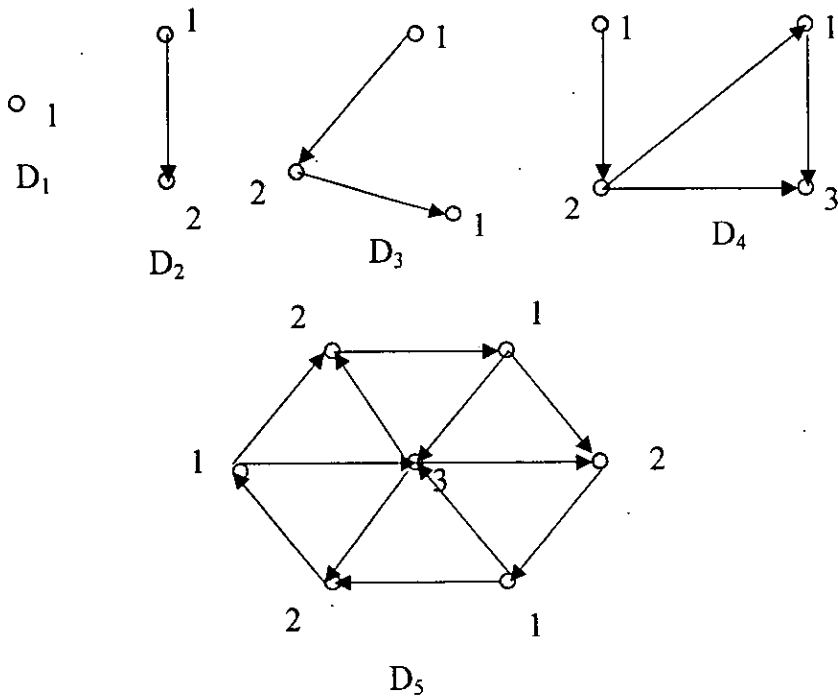
D:



$Asym(D)$:

Una buena coloración de vértices de una digráfica es una coloración de los vértices de manera que vértices adyacentes tengan distinto color.

El número cromático $\chi(D)$ de una digráfica D es el mínimo número m de colores para el cual una digráfica tiene una buena coloración con m colores. Si $\chi(D) = n$, entonces la digráfica se llama n -cromática.



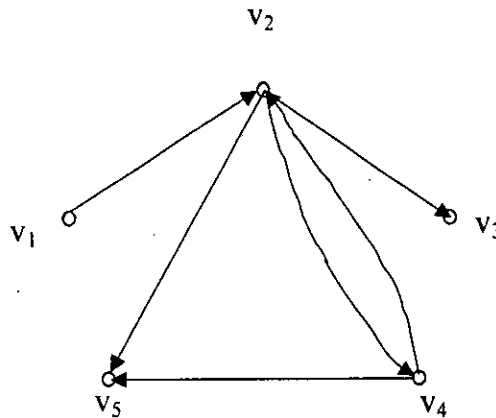
$$\begin{aligned}\chi(D_1) &= 1 \\ \chi(D_2) &= 2 \\ \chi(D_3) &= 2 \\ \chi(D_4) &= 3 \\ \chi(D_5) &= 3\end{aligned}$$

Sean u y v vértices (no necesariamente distintos) de una digráfica D , por un u - v semicamino dirigido se entiende una sucesión alternante finita

$$u = u_0, f_1, u_1, f_2, \dots, u_{n-1}, f_n, u_n = v \quad (1)$$

de vértices y flechas empezando con el vértice u y terminando con el vértice v , tal que $f_i = (u_{i-1}, u_i)$ o $f_i = (u_i, u_{i-1})$ es una flecha de D para $i = 1, 2, \dots, n$.

El número n (el número de ocurrencias de las flechas) se llama la longitud del semicamino dirigido. Si $f_i = (u_{i-1}, u_i)$ es flecha de D para cada $i = 1, 2, \dots, n$ en (1) entonces la sucesión (1) se llama un u - v camino dirigido.

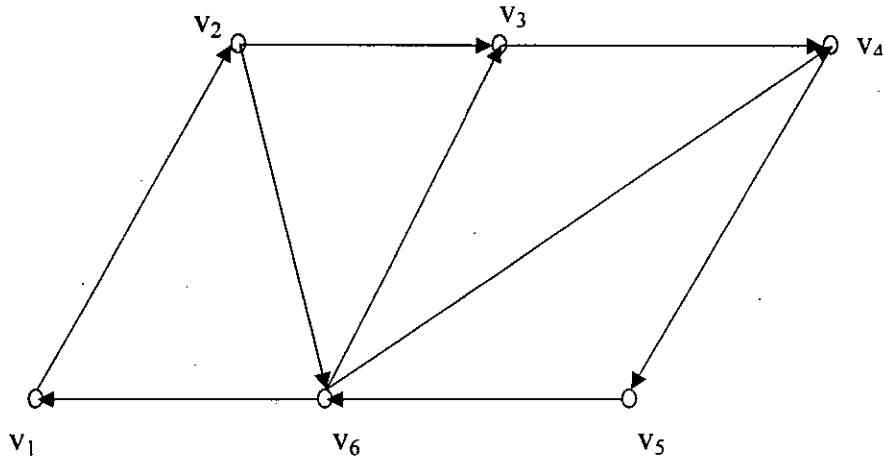


Semicamino dirigido C_1 : $v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_4, v_2), v_4, (v_3, v_4), v_3, (v_3, v_2), v_2, (v_2, v_5), v_5$ es un semicamino dirigido v_1 - v_5 .

Camino dirigido C_2 : v_1, v_2, v_3, v_2, v_5 es un v_1 - v_5 camino dirigido.

El camino dirigido se denotará cerrado sí $v_0 = v_n$.

La longitud del camino dirigido es n si $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ y la denotaremos por $\ell(C)$, así $\ell(C) = n$.



$C_1: (v_1, v_2, v_6, v_3, v_4, v_5, v_6, v_3)$ es un camino dirigido y $\ell(C_1) = 7$

$C_2: (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1)$ es un camino dirigido cerrado y $\ell(C_2) = 6$

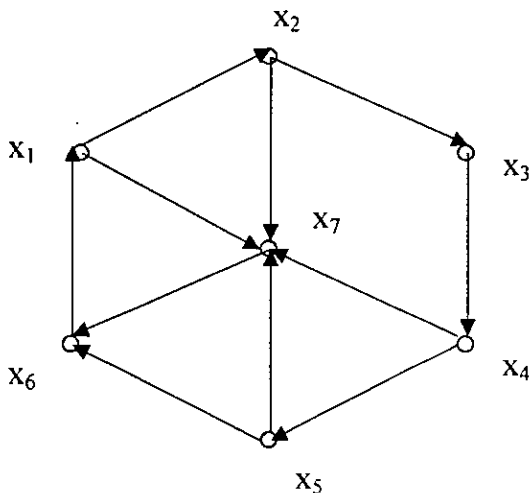
Una trayectoria dirigida que une a u con v es un camino dirigido $u = u_0, u_1, \dots, u_n = v$ en el que ningún vértice se repite, una trayectoria dirigida une a u y v y la llamamos una u - v trayectoria dirigida.

En la digráfica anterior $T(v_1, v_5) = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ es una trayectoria de v_1 a v_5 .

Por la distancia dirigida $d_D(x, y)$ del vértice x al vértice y en una digráfica D entendemos la longitud de la trayectoria dirigida más

corta desde x a y en D . $d_D(x,y) = \min \{ \ell(T) \mid T \text{ es una } xy\text{-trayectoria dirigida} \}$.

La longitud de una trayectoria dirigida T ; $\ell(T)$ es el número de vértices sobre la trayectoria menos uno.



$$T_1(x_1-x_6) = T_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \ell(T_1) = 5, T_2(x_1-x_6) =$$

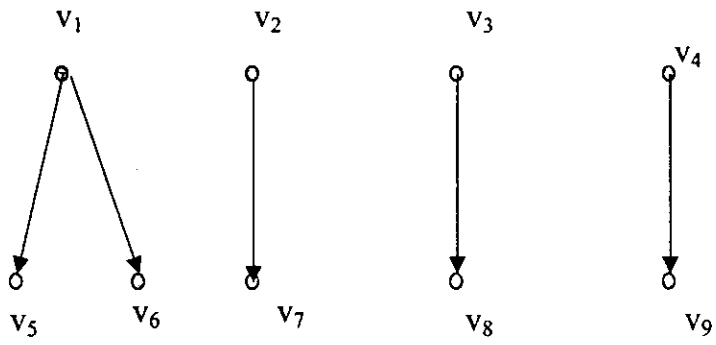
$$T_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_6), \ell(T_2) = 5$$

$$T_3(x_1-x_6) = T_3(x_1, x_7, x_6), \ell(T_3) = 2$$

T_3 es la trayectoria más corta de x_1 a x_6 .

Un conjunto independiente J de una digráfica D es un conjunto de vértices en donde cada dos vértices son no adyacentes.

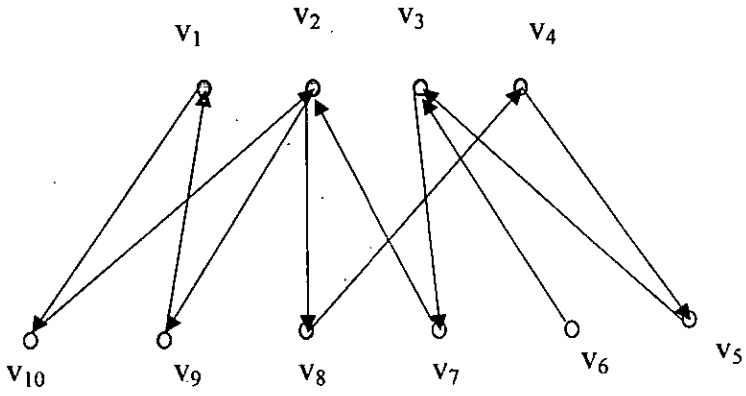
$I(D)$ representa el número de independencia y es igual a la máxima cardinalidad de un conjunto independiente de vértices en D .



$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_5, v_6, v_7, v_8\}, \{v_1, v_6\}, \{v_1, v_7, v_4\}$ son algunos conjuntos independientes de vértices, donde $I(D) = 5$

Sea D una digráfica. Diremos que $S \subseteq V(D)$ es un seminúcleo de D si:

- a) S es independiente
- b) Para cada flecha que va de S a x (en virtud de la condición anterior, $x \in V-S$), existe una flecha f' que va de x a S .



Ejemplo de Seminúcleo

$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un seminúcleo de D .

Sea $N \subseteq V(D)$. N es un núcleo de D si

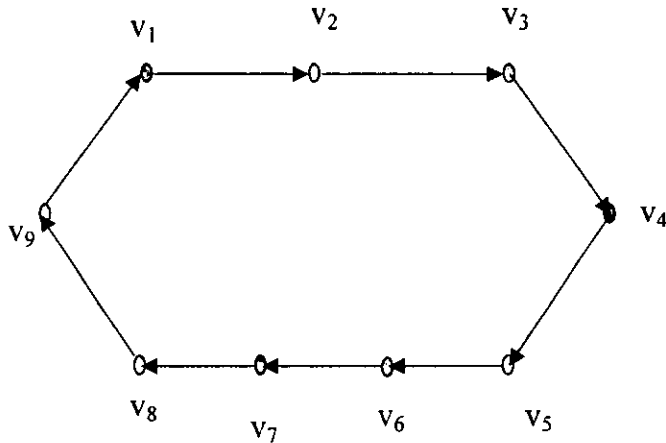
- i) N es independiente
- ii) Para todo $x \in V - N$ existe una flecha de x a N .

$N = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un núcleo de D porque es independiente

Un conjunto $J \subseteq V(D)$ se llama un (ℓ, ℓ) -núcleo de la digráfica D si

- (1) para cada $x' \neq x \in J$ tenemos $d_D(x, y) \geq \ell$
- (2) para cada $y \in (V(D) - J)$ existe una $x \in J$ tal que $d_D(x, y) \leq \ell$

Un ℓ -núcleo es un $(\ell, \ell - 1)$ -núcleo; para $\ell = 2$ y $\ell = 1$ tenemos un núcleo en el sentido de Berge.



$J = \{v_1, v_4, v_7\}$ es un $(3, 2)$ -núcleo

$v_1, v_4, v_7 \in J$

$d_D(v_1, v_4) = 3$

$d_D(v_4, v_7) = 3$

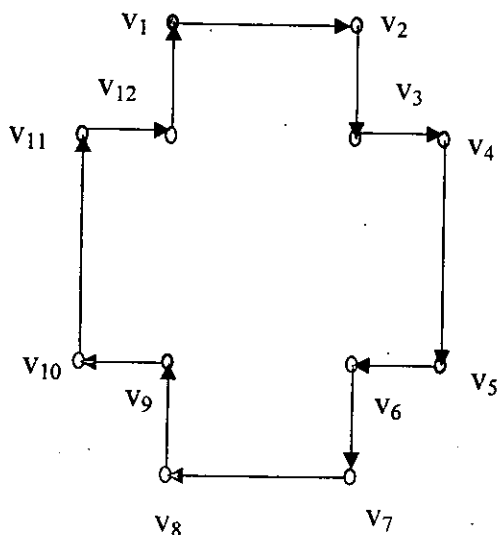
$d_D(v_7, v_1) = 3$

$\ell = 2$

Sea $v_2 \in V - J$

$$d_D(v_2, v_4) = 2 \text{ y } 2 \leq 2$$

de la misma manera para v_3, v_5, v_6, v_8, v_9



$J = \{v_1, v_5, v_9\}$ es un $(4,3)$ -núcleo

$$v_1, v_5 \in J$$

$$d_D(v_1, v_5) = 4$$

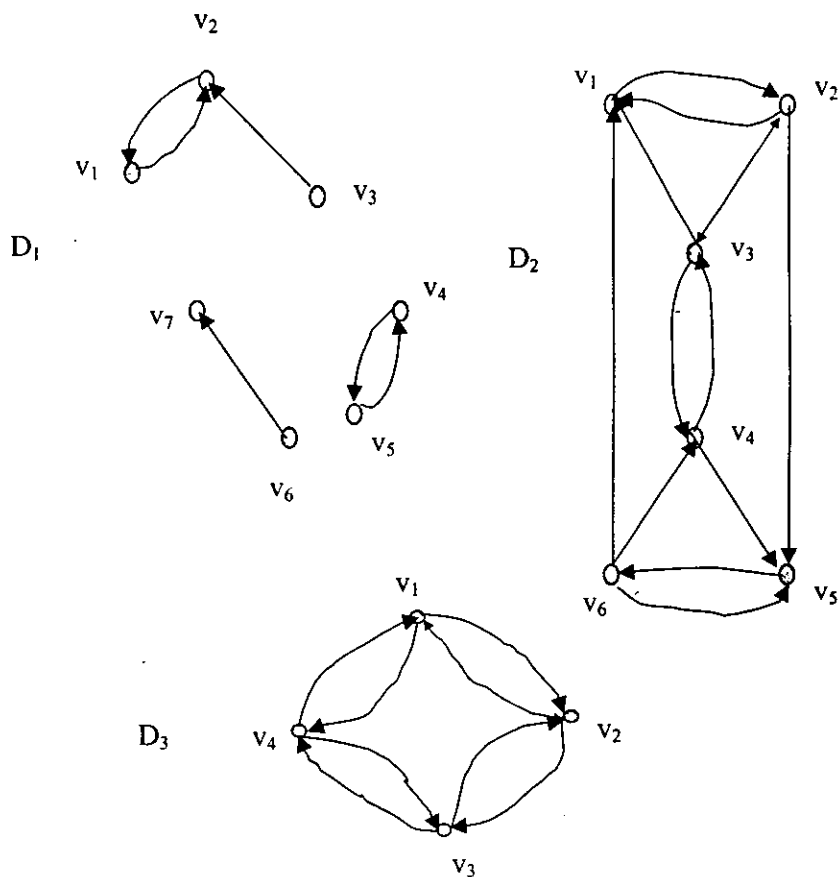
$$d_D(v_5, v_9) = 4$$

$$d_D(v_9, v_1) = 4$$

Todo punto que no está en el (k,ℓ) -núcleo $x \in V(D) - J$ tiene $d_D(x, v) \leq 3$. Donde v es un elemento del (k,ℓ) -núcleo.

Se dice que un vértice u está conectado a un vértice v en una digráfica D si existe un u - v semicamino dirigido (o equivalentemente

un v-u semicamino dirigido) en D . Se dice que una digráfica es conexa si cada dos vértices están conectados. Una digráfica que no es conexa la llamamos disconexa. La relación “está conectado a” es una relación de equivalencia en el conjunto de vértices de una digráfica; la subdigráfica inducida por los vértices en una clase de equivalencia es una componente conexa o una componente de D .



D_1 es desconexa, D_2 y D_3 son fuertemente conexas.

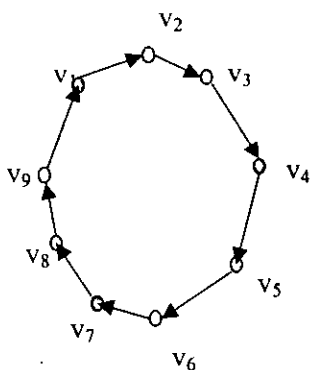
Sea D una digráfica, consideremos en $V(D)$ la siguiente relación binaria \sim ; $u, v \in V(D)$ $u \sim v$ si y sólo si existe una uv -trayectoria dirigida en D y una vu -trayectoria dirigida en D ; \sim es de equivalencia; las clases de equivalencia son las componentes fuertemente conexas de D o componentes fuertes; si D tiene una única componente fuerte se dirá que D es fuertemente conexas.

Un ciclo es una sucesión de vértices de D , $C = (0, 1, 2, \dots, n-1)$ tal que $(i, i+1) \in F(D)$ (notación mod n).

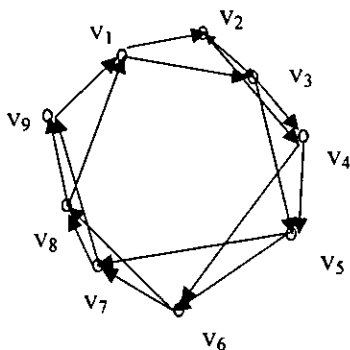
Sea k un número natural $k \geq 2$. Un conjunto $J \subseteq V(D)$ se llamará un k -núcleo de la digráfica si:

- 1) Para cada $x, x' \in J$ tenemos $d_D(x, x') \geq k$
- 2) Para cada $y \in (V(D) - J)$, existe $x \in J$ tal que $d_D(x, y) \leq k-1$

Cuando toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo, se dice que D es núcleo-perfecta o y se denota NP. Note que el k -núcleo de D es el núcleo de una digráfica D^n obtenida de D poniendo una flecha xy si existe en D una trayectoria dirigida de x a y y de longitud $\leq k-1$.

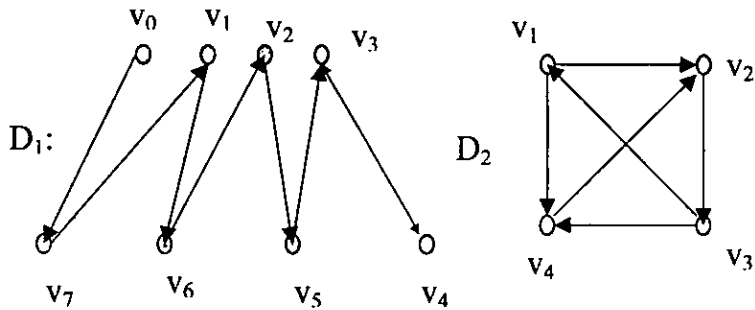


$\{v_1, v_4, v_7\} = J$
Es un 3-núcleo



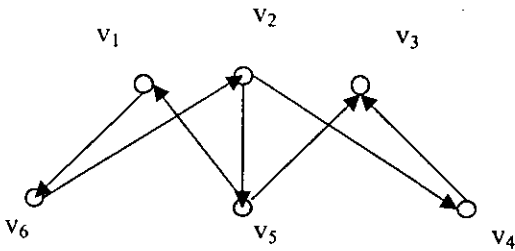
$\{v_1, v_4, v_7\}$ es un núcleo
en D^3

D es bipartita si existe una descomposición de $V(D)$ en dos subconjuntos independientes ajenos.

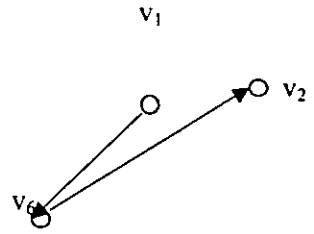


$V_1 = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ y $V_2 = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$ son los conjuntos independientes, D_1 es bipartita y D_2 no es bipartita.

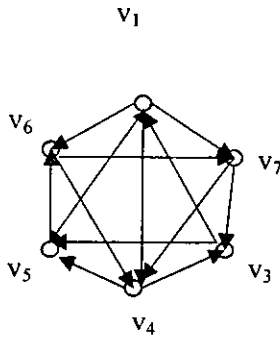
D es R-digráfica si toda subdigráfica plena de D posee un seminúcleo no trivial (es decir, no vacío).



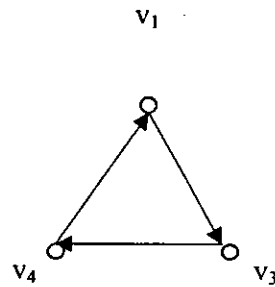
R-digráfica



Subdigráfica



D no es R-digráfica



La subdigráfica inducida por $\{v_1, v_3, v_4\}$ no tiene seminúcleo.

Una digráfica D se llama cíclicamente k -partita ($k \geq 2$) si uno puede hacer una partición del conjunto $V(D) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$ tal que si (u,v) es una flecha de D , entonces $u \in V_i$ y $v \in V_{i+1}$ (notación mod k). En el caso de que $k = 2$ obtenemos una digráfica bipartita en el sentido usual.

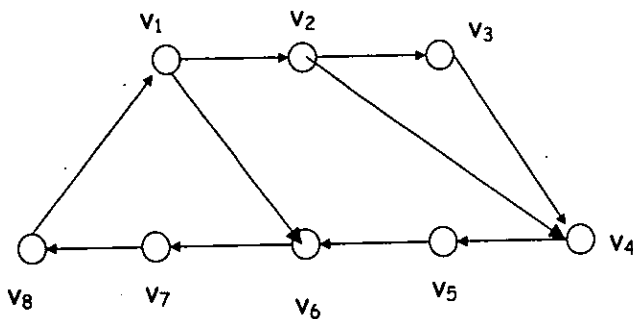
La distancia de un punto hacia un conjunto J se define como:

$$d_D(x,J) = \min \{ d_D(x,y) \mid y \in J \}$$

Sea $T = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ una trayectoria de una digráfica D , T es una subdigráfica de D . $\ell(T)$ es la longitud de T . Dados $z_i, z_j \in T$, denotaremos por $[z_i, T, z_j]$ el camino dirigido desde z_i a z_j contenido en T

Una cuerda del camino dirigido T es una flecha de D de la forma (z_i, z_j) donde $j \neq i+1$ y $\{z_i, z_j\} \subseteq \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$.

Una cuerda corta de T es una flecha de la forma $\{i, i+2\}$ con $0 \leq i \leq n-2$.



$$T = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

(v_1, v_6) es una cuerda

(v_2, v_4) es una cuerda corta

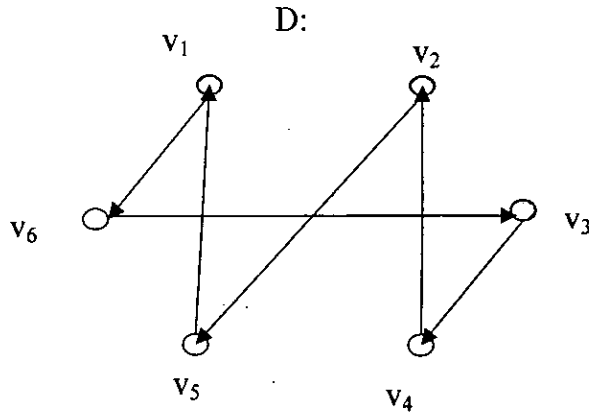
Denotamos a $[u', C, v']$ como el subcamino dirigido de u a v contenido en C .

Capítulo I

El objetivo principal de este capítulo es demostrar que toda R-digráfica contiene al menos un núcleo.

Sea D una digráfica. Diremos que $S \subseteq V(D)$ es un seminúcleo de D si:

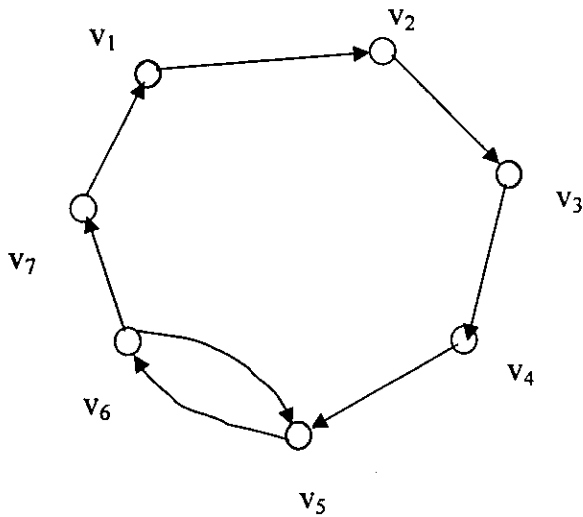
- S es independiente
- Para cada flecha que va de S a x (en virtud de la condición anterior, $x \in V-S$), existe una flecha f' que va de x a S .



$S = \{v_1, v_2, v_3\}$ es un seminúcleo de D

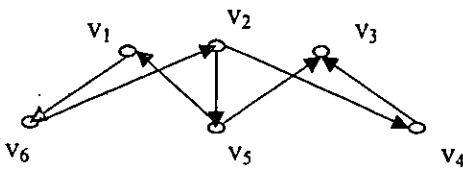
Sea $N \subseteq V(D)$. N es un núcleo de D si

- N es independiente
- Para todo $x \in V-N$ existe una flecha de x a N .

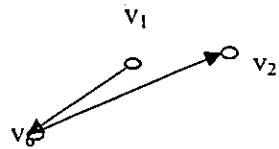


$N = \{ v_1, v_3, v_5 \}$ es un núcleo

D es R-digráfica si toda subdigráfica plena de D posee un seminúcleo no trivial (es decir, no vacío).



R-digráfica



Subdigráfica

En este capítulo daremos algunos lemas y teoremas acerca de la existencia, primero de seminúcleos de una digráfica y luego de la existencia de núcleos de una digráfica.

El resultado principal de este capítulo es el Teorema de Richardson ***“Si D es finita y no posee ciclos impares, entonces D es R -digráfica y, por consiguiente posee un núcleo.”***

El primer teorema sobre seminúcleos de digráficas es I.1 ***“Todo seminúcleo está incluido en un seminúcleo máximo”***^[1]

Empezando con las condiciones para que existan seminúcleos llegaremos paso a paso a la definición de núcleo de una digráfica.

El siguiente Teorema es el I.2 ***“Toda R -digráfica posee al menos un núcleo”***.

“Si D es finita y no posee ciclos impares, D contiene un seminúcleo”^[1].

Este Teorema nos da una condición para que una digráfica tenga un seminúcleo, enseguida veremos el Teorema

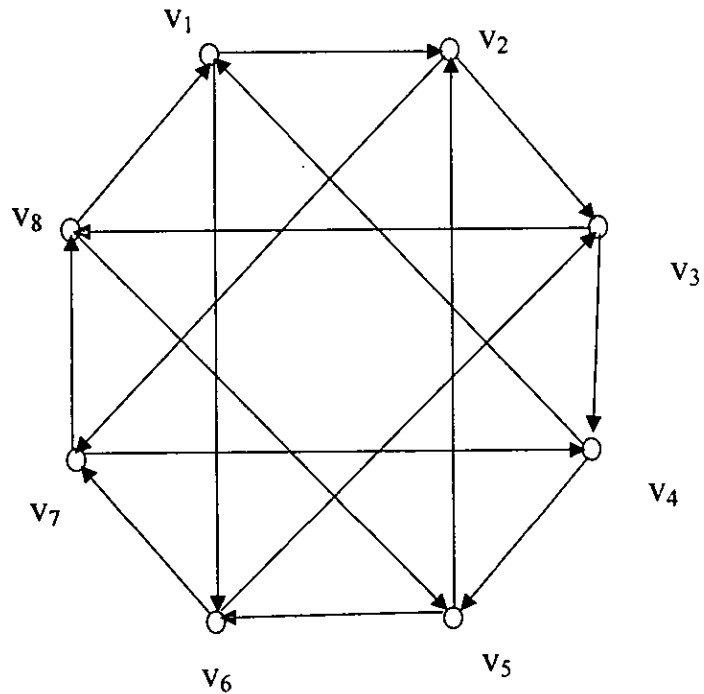
“Todo camino dirigido cerrado de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar”^[1]

Este teorema lo usaremos en forma generalizada en todos los capítulos posteriores de este trabajo de tesis.

Como penúltimo teorema de este capítulo veremos el Teorema I.5 ***“Si D es finita y no posee ciclos impares, entonces D es R -digráfica y, por consiguiente posee un núcleo.”***^[2]

Y finalmente presentamos el Teorema de Richardson como un corolario^[2] del teorema I.5 y resultado de los lemas y teoremas anteriores.

D es finita y no posee ciclos impares



$N = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ es un núcleo.

En este Capítulo se demuestra que toda R-digráfica contiene al menos un núcleo.

Pueden demostrarse varios teoremas sobre la existencia de núcleos de un modo más transparente, probando que las digráficas que se consideran son R-digráficas.

Como ilustración de este procedimiento, se dará una demostración del Teorema de Richardson y se probará que toda digráfica bipartita es R-digráfica.

Teorema I.1. *Todo seminúcleo está incluido en un seminúcleo máximo.*

La demostración se obtendrá como consecuencia de los lemas Lema I.1 y Lema I.2.

Lema I.1. *El conjunto de seminúcleos de D , ordenado por inclusión es inductivo superiormente.*

Demostración.

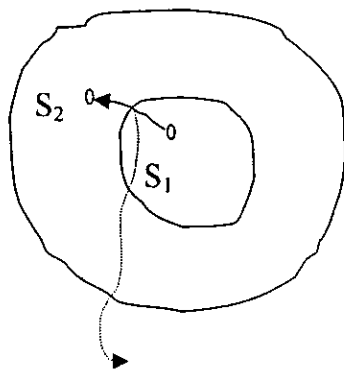
Ser *inductivo superiormente* significa que toda cadena tiene cota superior.

Sea C una cadena de seminúcleos de D , es decir, una colección de seminúcleos tal que si $S_1, S_2 \in C$, se tiene $S_1 \subseteq S_2$ o $S_2 \subseteq S_1$.

Pongamos $U = \bigcup_{S \in C} S$

Tenemos que demostrar:

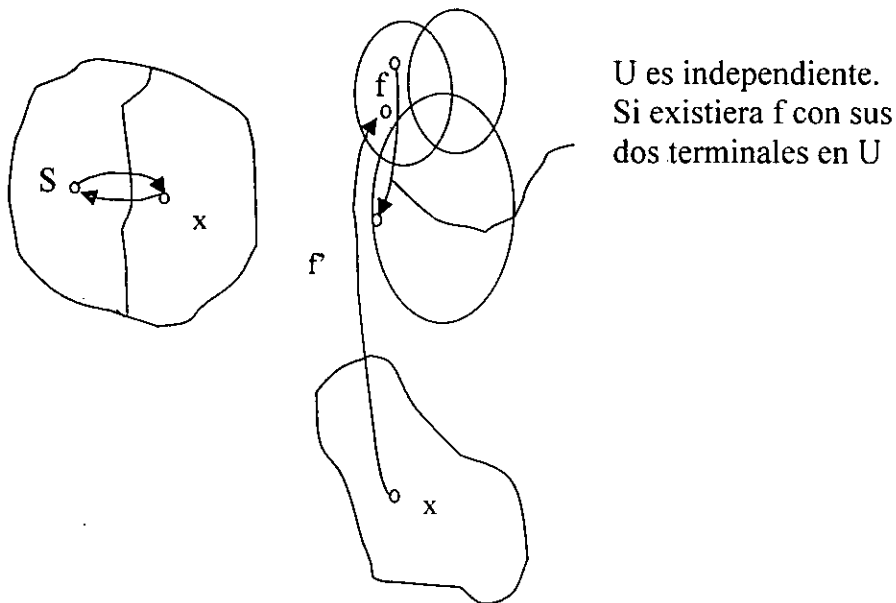
- a) U es independiente, pues si existiera una flecha $f(v_1, v_2)$ con sus dos terminales en U , se tendría $v_1 \in S_1 \in C$ para algún S_1 y $v_2 \in S_2 \in C$ para algún S_2 . Luego $v_1, v_2 \in \max(S_1, S_2) \in C$, lo que es imposible.



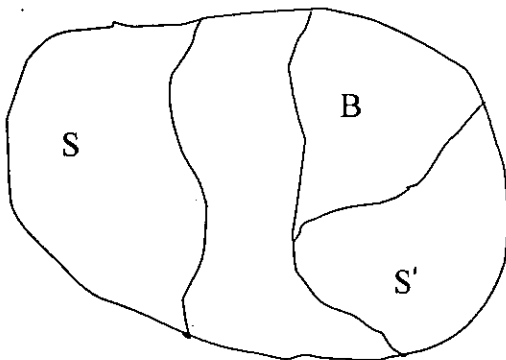
$$U = \bigcup_{S \in C} S_i$$

no puede ser

- b) Si f es una flecha que va de U a x , existen s y S tales que $f = (s, x)$ y $s \in S \in C$. Como S es seminúcleo existe una flecha f' que va de x a S y por consiguiente a U . c.q.d.



Lema 1.2. Sea S un seminúcleo de D , $B = \{v \in V-S \mid \text{no existe flecha de } v \text{ a } S\}$ y S' un seminúcleo de la subdigráfica $\langle B \rangle$ inducida por B . Entonces $S \cup S'$ es un seminúcleo de D .



Demostración.

Por demostrar que $S \cup S'$ es independiente

Sean $u, v \in (S \cup S')$ supongamos que existe una flecha de u a v de tal forma que se consideren:

- i) $u \in S, v \in S$
- ii) $u \in S', v \in S'$
- iii) $u \in S', v \in S$
- iv) $u \in S, v \in S'$

No pueden cumplirse i) y ii) por ser S y S' seminúcleos y por lo tanto independientes; iii) es imposible ya que $S' \subseteq B$. Finalmente si iv) se cumpliera, existiría otra flecha de S' a S , por ser S seminúcleo, lo cual satisfaría iii). Luego $S \cup S'$ es independiente.

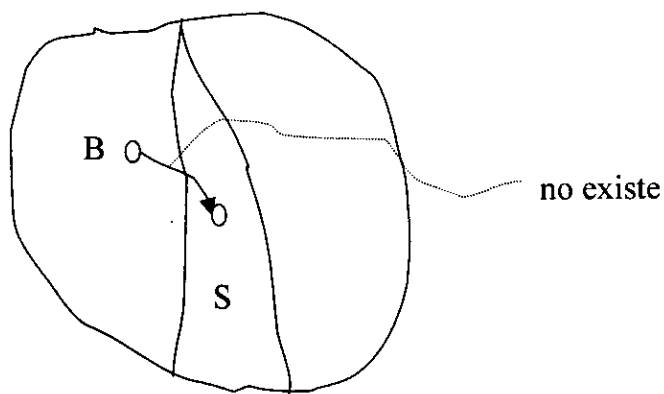
Pongamos $A = V - (S \cup B)$. Sea f una flecha de $S \cup S'$ a x . Si $x \in A$, obviamente existe una flecha de x a S y por consiguiente a $S \cup S'$.

Si $x \notin A$ f necesariamente sale de S' (pues no hay flechas de S a $S \cup B$) y llega a $B - S'$ y por ser S' seminúcleo de $\langle B \rangle$, existe f' de x a S' y por consiguiente a $S \cup S'$. \square c.q.d.

Teorema 1.2. Toda R-digráfica posee al menos un núcleo.

Demostración

Sea D una R -digráfica, S un seminúcleo máximo de D y $B = \{v \in V - S \mid \text{no existe flecha de } v \text{ a } S\}$.



Probaremos que $B = \emptyset$ y por lo tanto S es un núcleo de D , pues si se tuviera $B \neq \emptyset$ existiría un seminúcleo $S' \neq \emptyset$ de la subdigráfica $\langle B \rangle$ inducida por B . $S \cup S'$ sería un seminúcleo de D por el Lema I.2 y contendría propiamente a S lo que contradice la hipótesis de maximalidad de S . \square c.q.d.

En realidad como es fácil de observar, el que D sea una R -digráfica implica que toda subdigráfica plena de D contiene un núcleo.

Que D sea R -digráfica significa que cada subdigráfica inducida posee un seminúcleo $\neq \emptyset$.

Sea H una subdigráfica inducida de D . Toda subdigráfica inducida de H es también una subdigráfica inducida de D y por lo tanto tiene seminúcleo no vacío.

Por lo tanto H es R -digráfica y por el Teorema I.2 tiene un núcleo.

Se dará ahora, como una aplicación del Teorema I.2 el Teorema de Richardson.

Teorema 1.3. Si D es finita y no posee ciclos impares, D contiene un seminúcleo.

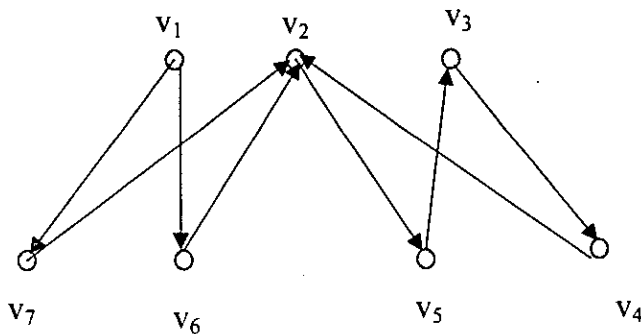
Demostración.

Definamos en V las relaciones \preceq y \sim

a) $v' \preceq v$ si y sólo si existe en D un camino dirigido de v a v'

b) $v \sim v'$ si y sólo si $v \preceq v'$ y $v' \preceq v$.

Ejemplo



$v_2 \preceq v_1$ porque existe un v_1 - v_2 camino dirigido (v_2, v_6, v_1)

$v_2 \preceq v_4$ existe un v_4 - v_2 camino dirigido (v_4, v_2)

y $v_4 \preceq v_2$ existe un v_2 - v_4 camino dirigido (v_2, v_5, v_3, v_4)

\preceq Es un preorden, es decir una relación binaria, transitiva y reflexiva.

i) Si $v_1 \preceq v_2$ y $v_2 \preceq v_3$ entonces $v_1 \preceq v_3$

a) Si $v_1 \preceq v_2$ existe un camino dirigido de v_2 a v_1

b) Si $v_2 \preceq v_3$ existe un camino dirigido de v_3 a v_2

y por lo tanto por a) y b) existe un v_3 - v_1 camino dirigido de v_3 a v_1 .

Por lo tanto \preceq es transitiva y $v_1 \preceq v_1$ ya que (v_1) es un camino dirigido de v_1 a v_1 por lo tanto \preceq es reflexiva y transitiva.

\sim Es una relación de equivalencia (es decir, reflexiva, simétrica y transitiva)

Demostración:

1. Ya vimos $v_1 \preceq v_1$ por lo tanto $v_1 \sim v_1$ y por lo tanto \sim es reflexiva.

2. Si $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 \preceq v_2$ y $v_2 \preceq v_1$ por lo tanto

si $v_1 \sim v_2 \Rightarrow v_2 \sim v_1$

3. \sim es transitiva

Sup $v_1 \sim v_2$ y $v_2 \sim v_3$ por lo tanto $v_1 \preceq v_2$ y $v_2 \preceq v_3$ y $v_3 \preceq v_2$, por la transitividad de \preceq tenemos que entonces $v_1 \preceq v_3$ y $v_3 \preceq v_1$ por lo tanto $v_1 \sim v_3$.

Demostración.

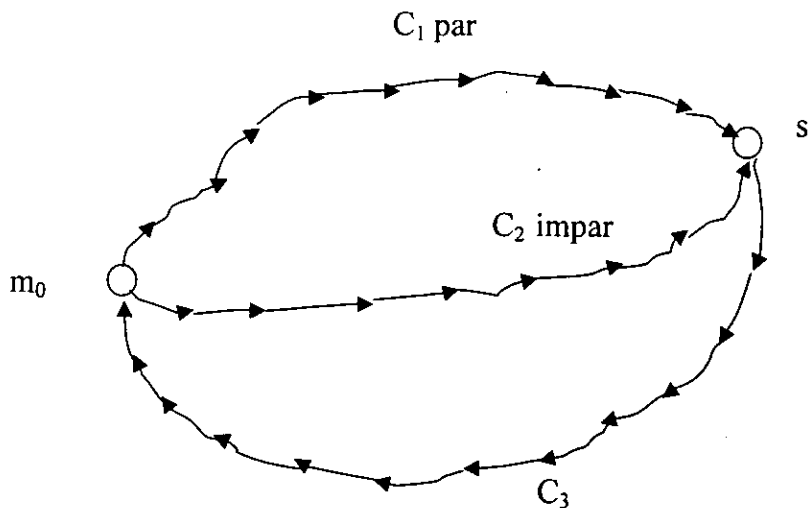
Sea $m_0 \in V$ un elemento mínimo (Es decir tal que $m \preceq m_0$ implique $m \sim m_0$)

Si se toman $S = \{m \in M \mid \text{que existe un camino dirigido de longitud par de } m_0 \text{ a } m\}$ e $I = \{m \in M \mid \text{que existe un camino dirigido de longitud impar de } m_0 \text{ a } m\}$ se tiene

i) $m_0 \in S$

ii) $S \cap I = \emptyset$

Pues si existiera $s \in S \cap I$, habría un camino de m_0 a s de longitud par sea C_1 , y otro de longitud impar, sea C_2 , y además otro de s a m_0 , C_3 , por ser $m_0 \sim s$. Por lo tanto habría un ciclo impar, porque si C_3 es par, entonces $C_3 \cup C_2$ es un camino dirigido cerrado de longitud impar y por el Teorema I.3 contiene un ciclo dirigido de longitud impar. Si C_3 es impar, entonces $C_3 \cup C_1$ es un camino dirigido cerrado de longitud impar, esto contradice la hipótesis.



Todas las flechas de D que salen de elementos de S llegan a I ya que si $s \in S$ tenemos $s \in M$ y existe un camino dirigido de longitud par C de m_0 a s ; si $(s,u) \in F(D)$ tenemos $C \cup f$ es un camino dirigido de longitud impar de m_0 a u por lo tanto $u \in I$ ya que de cada vértice de I sale alguna flecha hacia S . De aquí se sigue sin más que S es un seminúcleo de D . \square c.q.d.

Teorema I.4. *Todo camino dirigido cerrado de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar.*

Demostración.

La demostración se hace por inducción sobre la longitud del camino

1°. Si $\ell(C) = 3$ el mismo es el ciclo porque $C = (z_0, z_1, z_2, z_0)$

$z_1 \neq z_0$ $z_2 \neq z_1$ $z_2 \neq z_0$ por ser adyacentes.

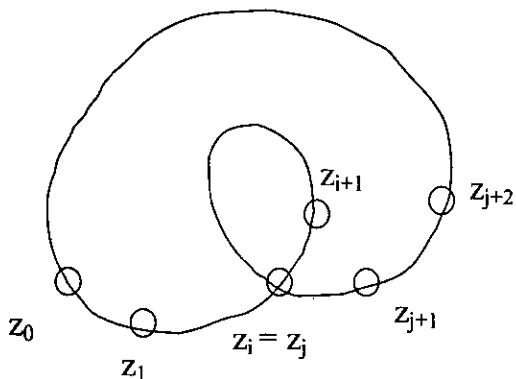
2°. Suponemos que todo camino dirigido cerrado de longitud impar $< 2n+1$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

3°. Sea C un camino dirigido cerrado con longitud $\ell(C) = 2n+1$

Por demostrar que contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Sea $C = (z_0, z_1, \dots, z_{2n}, z_0)$ $z_i \neq z_j \forall i \neq j$ entonces C es un ciclo dirigido de longitud impar y queda demostrado.

Si $z_i = z_j$ para alguna $i \neq j$ $i < j$



$$C_1 = (z_i, z_{i+1}, \dots, z_i) \text{ y } C_2 = (z_0, z_1, \dots, z_i = z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, \dots, z_n, z_0)$$

Recorro el camino por fuera

C_1 y C_2 son caminos dirigidos cerrados de longitud $< 2n + 1$

Además

$\ell(C_1) + \ell(C_2) = \ell(C)$ y $\ell(C)$ es impar, por lo que se tiene que al menos uno C_1 o C_2 tiene longitud impar y sin pérdida de generalidad digamos que C_1 tiene longitud impar. Por hipótesis de inducción tenemos que C_1 contiene un ciclo de longitud impar. Por lo tanto C contiene un ciclo dirigido de longitud impar. \square c.q.d.

Corolario (Teorema de Richardson). Si D es finita y no posee ciclos impares, D es R -dirigida y por consiguiente, posee núcleo.

Demostración.

Sea H una subdigráfica inducida de D , H no posee ciclos impares (porque es una parte de D que no contiene ciclos impares). Por el Teorema 1.4 H tiene un seminúcleo no vacío. Por lo tanto D es R-digráfica y por el Teorema 1.2 posee un núcleo. \square c.q.d.

Capítulo II

“ k y (k, ℓ) -núcleos en digráficas”

Como vimos en el Capítulo I, el Teorema de Richardson “Si D es finita y no posee ciclos impares, D es R -digráfica y, por consiguiente posee un núcleo”.

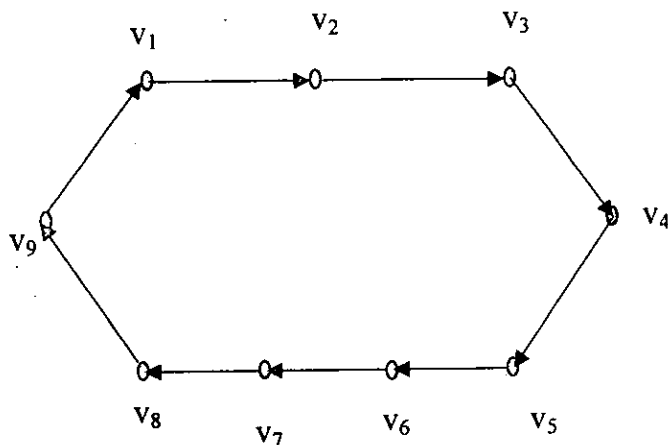
En este capítulo veremos algunas generalizaciones del Teorema de Richardson y vamos a ver una generalización del Teorema de Duchet^[3]: “Si todo ciclo dirigido de longitud impar en una digráfica D tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D tiene un núcleo”.

Un conjunto $J \subseteq V(D)$ se llama un (k, ℓ) -núcleo de la digráfica D si

(1) para cada $y \neq x \in J$ tenemos $d_D(x, y) \geq k$

(2) para cada $x' \in (V(D) - J)$ existe una $x \in J$ tal que $d_D(x, x') \leq \ell$

Un k -núcleo es un $(k, k-1)$ -núcleo; para $k = 2$ y $\ell = 1$ tenemos un núcleo en el sentido de Berge.



En esta digráfica $\{v_1, v_4, v_7\}$ es un $(3, 3)$ -núcleo.

El concepto de (ℓ, ℓ) -núcleo de una digráfica D lo introdujo Kwasnik^[6] quien también obtuvo una generalización del Teorema de Richardson sobre la existencia de ℓ -núcleos en digráficas.

Su teorema 2.1 “Sea D una digráfica fuertemente conexa tal que todo ciclo dirigido de D tiene longitud $\equiv 0 \pmod{k}$, $k \geq 2$. Entonces D tiene un ℓ -núcleo”.

También veremos una generalización del Teorema I.4 (pág. 38) mediante el **Lema 2.1**. *Todo camino dirigido cerrado de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ $k \geq 2$ contiene un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$.*

Incluimos también la demostración de teoremas acerca de la existencia de ℓ -núcleos como son los Teoremas:

Teorema II.2. “Sea D una digráfica tal que $Asym(D)$ es fuertemente conexa. Además supongamos que para cada ciclo dirigido γ tal que $\ell(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$ al menos una de las dos condiciones siguientes se satisface.

- (a) Toda flecha de γ es una flecha simétrica en D
- (b) γ tiene por lo menos k flechas simétricas. (note que cuando $\ell(\gamma) \leq \ell - 1$, γ debe satisfacer (a)).

Entonces D tiene un ℓ -núcleo.”

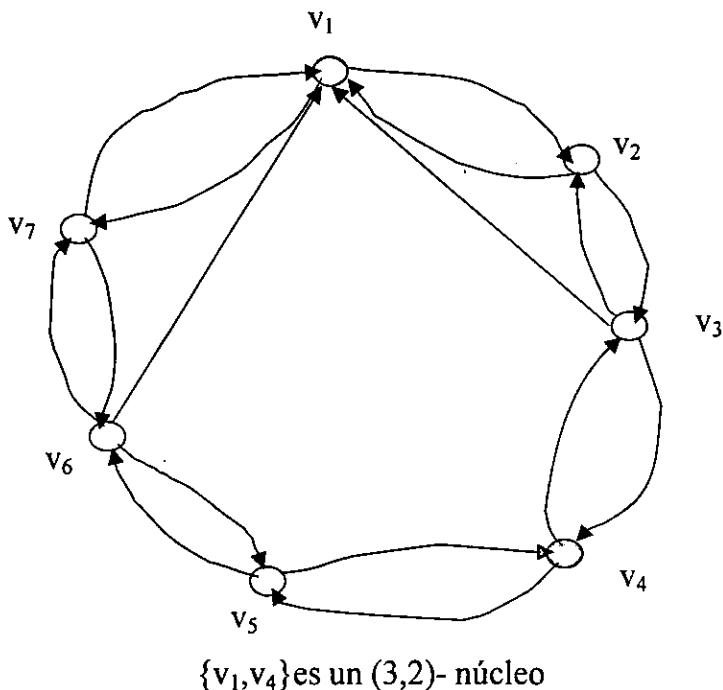
Veremos una generalización de este Teorema que es el Teorema II.3.

Teorema II.3. *Sea D una digráfica que satisface las siguientes condiciones:*

- (i) Existe $m_0 \in V(D)$ tal que para cada $x \in V(D)$ existe en $Asym(D)$ un xm_0 -camino dirigido de longitud $\equiv i \pmod{k}$ para alguna $0 \leq i \leq \ell$ y un m_0x -camino dirigido.
- (ii) Todo ciclo dirigido γ tal que $\ell(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$ se satisfacen (a) o (b)

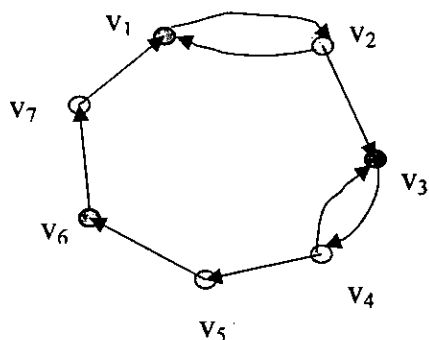
- a) *Toda flecha de γ es una flecha simétrica de D*
 b) *γ tiene al menos k flechas simétricas.*
 Entonces D tiene un (k, l) -núcleo.

Veremos también dos ejemplos de digráficas que no contienen k -núcleos^[4].



En este capítulo se desarrollan algunos resultados sobre la existencia de k -núcleos y (k, l) -núcleos en digráficas con el propósito de generalizar el Teorema de Duchet [3]: “Si todo ciclo dirigido de longitud impar en una digráfica D tiene al menos dos flechas simétricas entonces D tiene un núcleo.”

Este a su vez es una generalización del Teorema de Richardson.



$N = \{v_1, v_3, v_6\}$ es un núcleo y el ciclo impar $C = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1\}$ tiene dos flechas simétricas.

En ^[6] Kwasnik define el k - núcleo de una digráfica y obtiene la siguiente generalización del Teorema de Richardson (para digráficas fuertemente conexas)

Teorema II.1. *Sea D una digráfica fuertemente conexa tal que todo ciclo dirigido de D tiene longitud $\equiv 0 \pmod{k}$, $k \geq 2$. Entonces D tiene un k - núcleo.*

Antes de demostrar este teorema, enunciaremos y demostraremos el siguiente lema.

Lema II.1. ^[4] *Todo camino dirigido cerrado de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$, $k \geq 2$ contiene un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$.*

Demostración. Para $k = 2$ ya se demostró (Teorema I.4)
Supongamos $k > 2$

Por inducción sobre la longitud del camino cerrado.

1°. Si C es un camino dirigido cerrado de longitud 2. Sea C tal camino (v_0, v_1, v_0) este es el mismo ciclo dirigido de longitud $\neq 0 \pmod{k}$.
Pues $k > 2$.

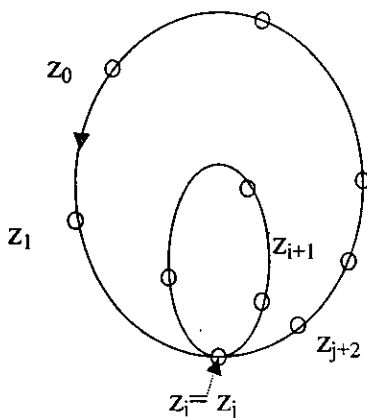
2°. Supongamos que si C' es un camino dirigido cerrado de longitud $\neq 0 \pmod{k}$ $\ell(C') < n$, entonces C' contiene un ciclo dirigido de longitud $\neq 0 \pmod{k}$.

3°. Sea C un camino dirigido cerrado de longitud $n \neq 0 \pmod{k}$

$$C = (z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_0)$$

(a) Si $z_i \neq z_j \forall i \neq j$ entonces C es un ciclo dirigido de longitud $\neq 0 \pmod{k}$

(b) Si $z_i = z_j$ para alguna $i \neq j$ denotamos:



Vamos a partir el camino dirigido

$$C_1 = (z_0, z_1, \dots, z_i = z_j, z_{j+1}, \dots, z_{n-1}, z_0)$$

$$C_2 = (z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, \dots, z_j = z_i)$$

C_1 y C_2 forman un camino dirigido cerrado

$$\ell(C_1) + \ell(C_2) = \ell(C) = n$$

$$\ell(C_1) < n, \ell(C_2) < n$$

$n \not\equiv 0 \pmod{k}$

Si los dos tuvieran $\ell \equiv 0 \pmod{k}$

$\ell(C)$ tendría $\ell(C) \equiv 0 \pmod{k}$

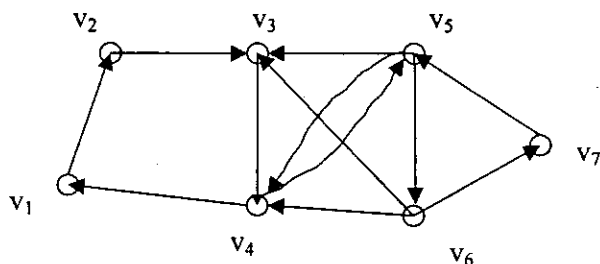
Ya que $n \not\equiv 0 \pmod{k}$ se tiene que al menos uno de los dos caminos C_1 o C_2 tiene longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\ell(C_1) \not\equiv 0 \pmod{k}$

Además $\ell(C_1) < n$ por hipótesis de inducción tenemos que

C_1 contiene un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$. Por lo tanto C contiene un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$. \square c.q.q.d.

Ejemplo de un camino dirigido de longitud impar que contiene un ciclo dirigido de longitud impar.



$C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_5, v_4, v_1)$ contiene al ciclo dirigido de longitud impar $C_{11} = (v_6, v_4, v_5, v_6)$.

Teorema (M. Kwasnik ^[6]) 2.1. Sea D una digráfica fuertemente conexa tal que todo ciclo dirigido de D tiene longitud $\equiv 0 \pmod{k}$, $k \geq 2$. Entonces D tiene un k - núcleo.

Demostración. Sea $m_0 \in V(D)$ y para cada $0 \leq i \leq k-1$ sea $N_i \subseteq V(D)$ definida como sigue:

$$N_i = \{z \in V(D) \mid \text{existe un } m_0z\text{-camino dirigido de longitud } \equiv i \pmod{k}\}$$

(i) Afirmamos que $N_i \cap N_j = \emptyset$ para $i \neq j, i, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

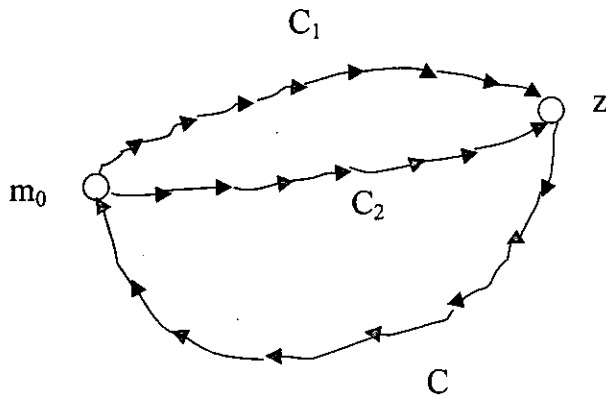
Desde luego si hubiera un $z \in N_i \cap N_j$

Entonces existiría un m_0z -camino dirigido C_1 tal que $\ell(C_1) \equiv i \pmod{k}$

Y un m_0z -camino dirigido C_2 tal que $\ell(C_2) \equiv j \pmod{k}$

Puesto que D es fuertemente conexa existe un zm_0 -camino dirigido C

$\ell(C_1 \cup C) \equiv \ell(C_2 \cup C) \equiv 0 \pmod{k}$



$\ell(C_1 \cup C) \equiv 0 \pmod{k}$ porque si fuera $\neq 0 \pmod{k}$, por el Lema 2.1 contendría un ciclo dirigido de longitud $\neq 0 \pmod{k}$, contradiciendo la hipótesis.

De forma análoga

$\ell(C_2 \cup C) \equiv 0 \pmod{k}$

$\ell(C_1 \cup C) = \ell(C_1) + \ell(C)$

$\ell(C_2 \cup C) = \ell(C_2) + \ell(C)$

de donde

$\ell(C_1) \equiv \ell(C_2) \pmod{k}$

esto no es posible porque $\ell(C_1) \equiv i \pmod{k}$

y $\ell(C_2) \equiv j \pmod{k}$

y además $i \neq j$ con $i < j$

$j < k$

(ii) Afirmamos que cada N_i es un conjunto k -independiente, (esto es: para $x, y \in N_i$, $x \neq y$, $d_D(x, y) \geq k$.)

Sean $x, y \in N_i$ y suponemos que existe una xy -trayectoria dirigida T con $\ell(T) \leq k-1$. Sea C_x un m_0x -camino dirigido, y C_y un m_0y -camino dirigido tal que $\ell(C_x) \equiv \ell(C_y) \equiv i \pmod{k}$ y C un ym_0 -camino dirigido.

$\ell(C_x \cup T \cup C) \equiv 0 \pmod{k}$ [Si $\ell(C_x \cup T \cup C) \not\equiv 0 \pmod{k}$ contendría un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ por el Lema 2.1]. Análogamente $\ell(C_y \cup C) \equiv 0 \pmod{k}$

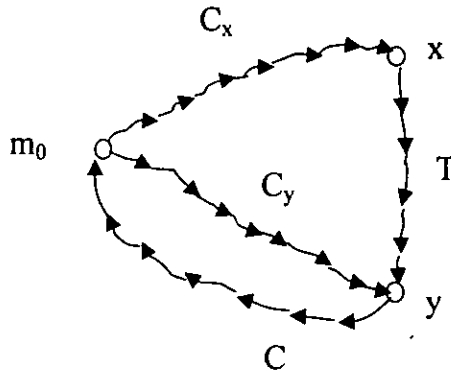
por lo tanto $\ell(C_x \cup T \cup C) \equiv \ell(C_y \cup C)$

por lo tanto $\ell(C_x) + \ell(\cancel{C}) + \ell(T) \equiv \ell(C_y) + \ell(\cancel{C})$

$$\ell(C_x) + \ell(T) \equiv \ell(C_y)$$

y como $\ell(C_x) \equiv \ell(C_y) \equiv i \pmod{k}$ $i > 0$

se sigue $\ell(T) \equiv 0 \pmod{k}$. Contradicción pues $0 < \ell(T) \leq k-1$



iii) Claramente toda flecha con punto final inicial en N_i tiene punto final terminal en N_{i+1} (notación mod k)

$$\text{y } V(D) = \bigcup_{i=0}^{k-1} N_i$$

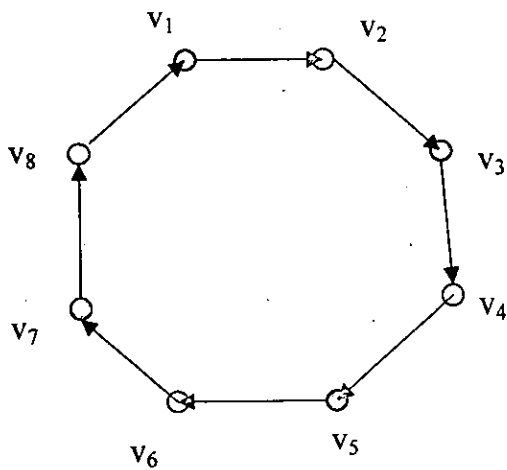
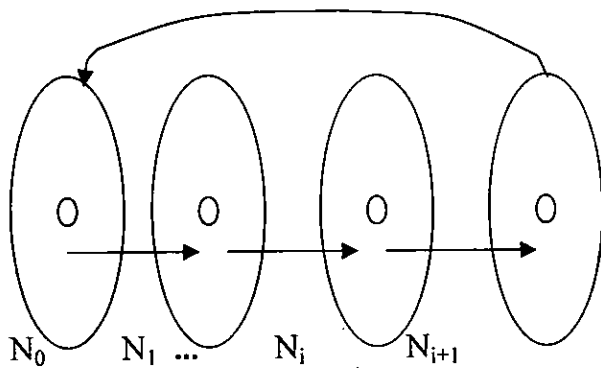
$(x, y) \in F(D)$ con $x \in N_i \Rightarrow y \in N_{i+1}$

\exists m_0x - camino dirigido C con $\ell(C) \equiv i \pmod{k}$

sea $C \cup \{x, y\}$

$\ell(C \cup (x, y)) \equiv i + 1$

por esto $y \in N_{i+1}$



$C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)$ es un ciclo dirigido de longitud $= 8 \equiv 0 \pmod{2}$

$J = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ es un 2-núcleo

Teorema II.2. Sea D una digráfica tal que $\text{Asym}(D)$ es fuertemente conexa. Además suponemos que para cada ciclo dirigido γ tal que $\ell(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$ al menos uno (a) ó (b) se satisface.

(a) Toda flecha de γ es una flecha simétrica de D

(b) γ tiene por lo menos k flechas simétricas. (note que cuando $\ell(\gamma) \leq k-1$, γ debe satisfacer (a).

Entonces D tiene un k -núcleo.

Demostración.

Sea $m_0 \in V(D)$ y para cada $0 \leq i \leq k$ sea $N_i \subseteq V(D)$ definida como sigue:

$N_i = \{z \in V(D) \mid \text{existe un } m_0z\text{-camino dirigido de longitud } \equiv i \pmod{k} \text{ contenido en } \text{Asym}(D)\}$

i) $N_i \cap N_j = \emptyset$ para $i \neq j, i, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

Supongamos que $N_i \cap N_j \neq \emptyset$

Sea $z \in N_i \cap N_j, i \neq j$

Sea C_1 un m_0z -camino dirigido en $\text{Asym}(D)$ con $\ell(C_1) \equiv i \pmod{k}$.

Sea C_2 un m_0z -camino dirigido en $\text{Asym}(D)$ con $\ell(C_2) \equiv j \pmod{k}$.

Como $\text{Asym}(D)$ es fuertemente conexa existe un C_3 z - m_0 -camino dirigido en $\text{Asym}(D)$

$\ell(C_1 \cup C_3) = \ell(C_1) + \ell(C_3)$

$C_1 \cup C_3$ es un camino dirigido cerrado en $\text{Asym}(D)$

$\ell(C_1 \cup C_3) \equiv 0 \pmod{k}$ porque si no tendríamos que $C_1 \cup C_3$ es un camino dirigido cerrado de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ y por lo tanto contiene un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ y asimétrico, contradiciendo (a) y (b).

Análogamente $\ell(C_2 \cup C_3) \equiv 0 \pmod{k}$

$\ell(C_1 \cup C_3) \equiv 0 \pmod{k}$

$\ell(C_2 \cup C_3) \equiv 0 \pmod{k}$.

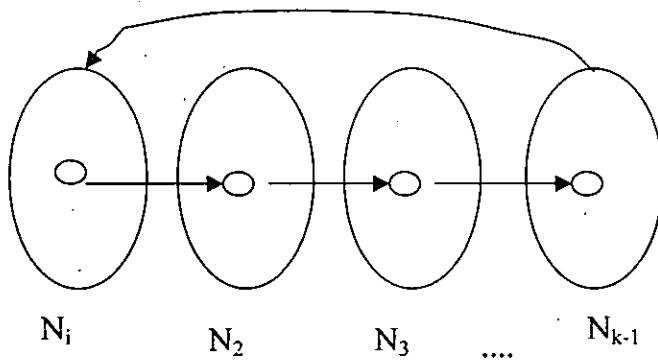
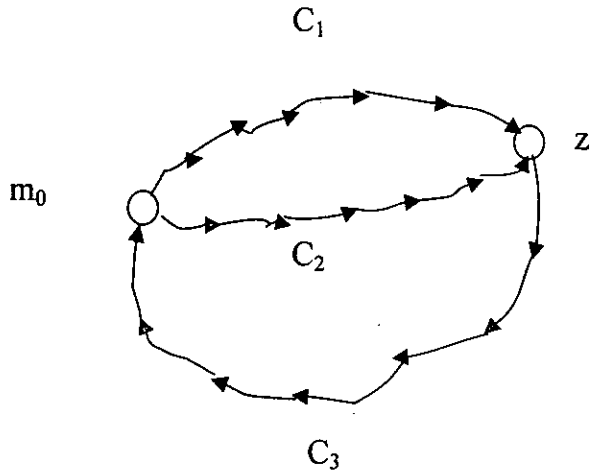
Por lo tanto $\ell(C_1 \cup C_3) \equiv \ell(C_2 \cup C_3)$

$\ell(C_1) + \ell(C_3) \equiv \ell(C_2) + \ell(C_3)$

de aquí

$\ell(C_1) \equiv \ell(C_2)$ para $i \neq j$ **CONTRADICCIÓN.**

$N_i \cap N_j = \emptyset$ ya tengo una partición de los vértices de D .



ii) Para $x, y \in N_i$, $x \neq y$, $d_D(x, y) \geq k$

Suponemos por contradicción que existe una xy -trayectoria dirigida T en D con $\ell(T) \leq k-1$

Supongamos que $\ell(T) \leq k-1$

Sea C_x un m_0x -camino dirigido asimétrico tal que $\ell(C_x) \equiv i \pmod{k}$

Sea C_y un m_0y -camino dirigido asimétrico tal que $\ell(C_y) \equiv i \pmod{k}$

Existe C m_0 -camino dirigido asimétrico por ser $\text{Asym}(D)$ fuertemente conexa.

Entonces

$C_x \cup T \cup C$ es un camino dirigido cerrado con a lo más $k-1$ flechas simétricas (las flechas de T), por lo tanto $\ell(C_x \cup T \cup C) \equiv 0 \pmod{k}$ de no ser así por Lema 2.1 contendría un ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ no simétrico y con a lo más $k-1$ flechas simétricas. **CONTRADICCIÓN** (a la hipótesis).

Análogamente

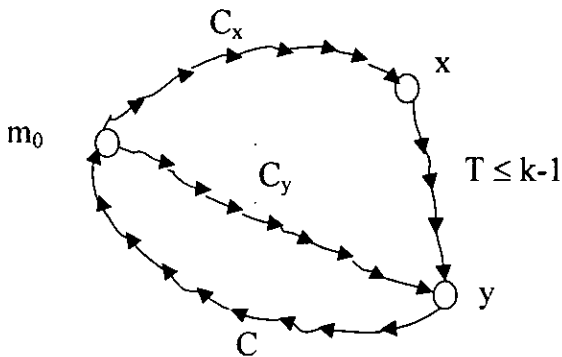
$$\ell(C_y \cup C) \equiv 0 \pmod{k}$$

$$\ell(C_y \cup C) \equiv \ell(C_x \cup T \cup C)$$

$$\ell(C_y) + \ell(C) \equiv \ell(C_x) + \ell(C) + \ell(T)$$

$$\ell(C_y) \equiv \ell(C_x) + \ell(T) \text{ y } \ell(T) \equiv 0 \pmod{k}$$

CONTRADICCIÓN.

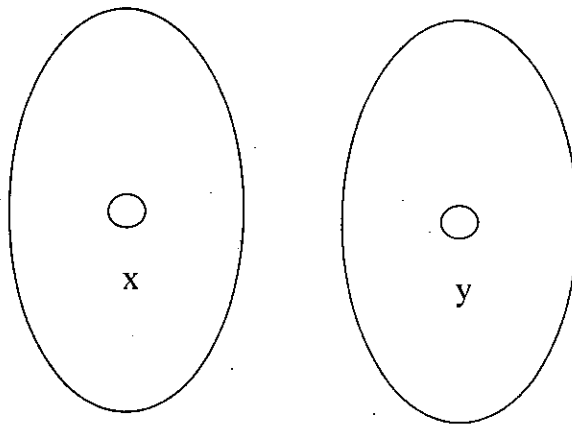


Porque $1 \leq \ell(T) \leq k-1$

iii) Cada flecha asimétrica con punto final inicial en N_i tiene punto final terminal en N_{i+1} (notación mod k) y

$$V(D) = \bigcup_{i=0}^{k-1} N_i$$

Dada una flecha asimétrica xy tal que $x \in N_i$ demostrar que $y \in N_{i+1}$



$$V(D) = \bigcup_{i=0}^{k-1} N_i$$

Sea (u,v) una flecha asimétrica, existe un $m_0 u$ -camino dirigido asimétrico C_1 con $\ell(C_1) \equiv i \pmod{k}$ $C_1 \subset \text{Asym}(D)$ por lo tanto $C_1 \cup (u,v)$ es un camino dirigido asimétrico de m_0 a v con $\ell(C_1 \cup (u,v)) = \ell(C_1) + 1 \equiv i + 1 \pmod{k}$

Por lo tanto $v \in N_{i+1}$

Ejemplo. Para $k \geq 3$ sea H_k la digráfica definida como sigue:

$$V(H_k) = \{0, 1, \dots, k^2, k+1\}$$

$$F(H_k) = \{(i, i+1) \mid i \in \{0, 1, \dots, k^2 + k\}\} \cup \{(k^2 + k + 1, 0)\} \cup \{(ik + 2, ik + 1) \mid i \in \{1, 2, \dots, k\}\}.$$

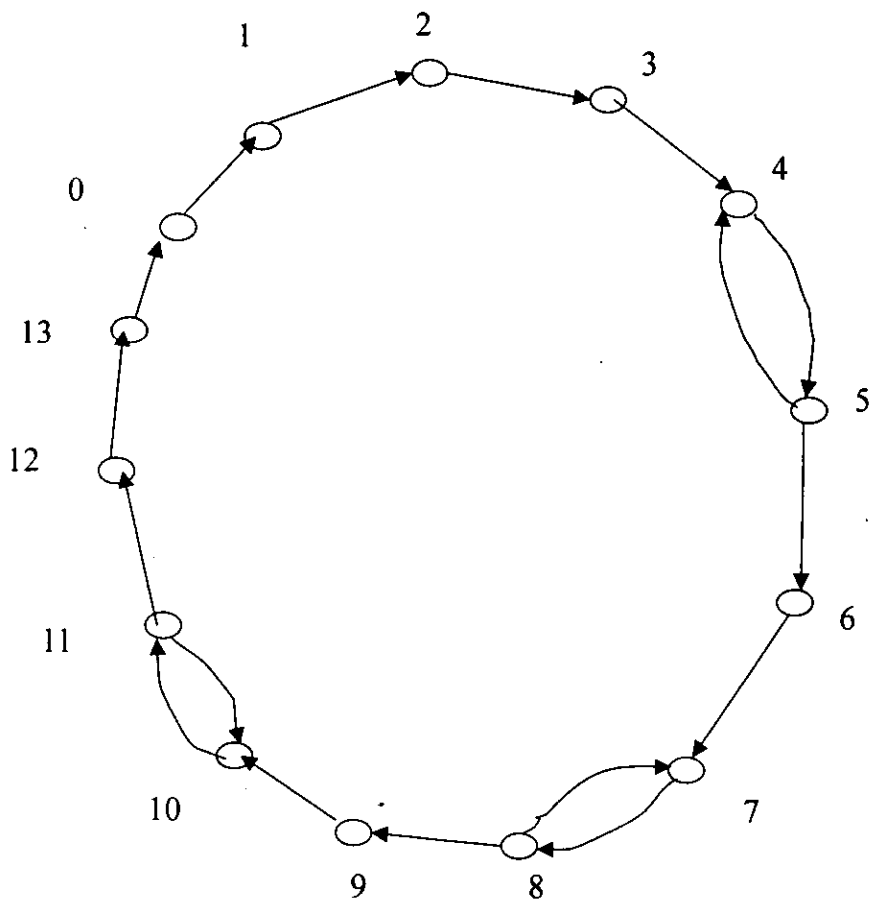
Supongamos que H_k tiene un k -núcleo N , claramente $N \cap \{0, 1, \dots, k-1\} \neq \emptyset$. Si $i \in \{0, 1, \dots, k-1\} \cap N$, entonces $N = \{i, k+i, 2k+i, \dots, k^2+i\}$, $k^2+i+1 \notin N$ y no hay trayectoria dirigida de longitud a lo más $k-1$ del vértice k^2+i+1 en N .

Se concluye que H_k no tiene k -núcleo.

Ejemplo 2.1 para $k = 3$ Sea H_3 la digráfica definida como sigue:

$$V(H_k) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$$

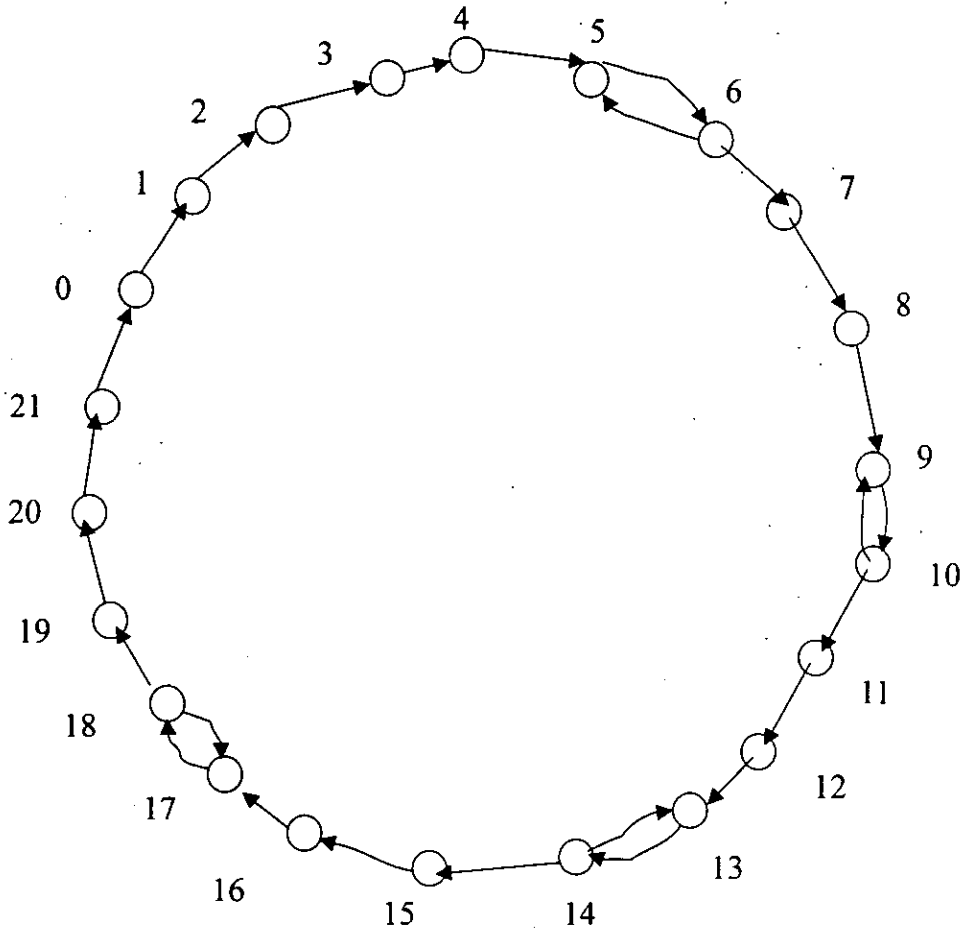
$$F(H_k) = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,8),(8,9),(9,10), \\ (10,11),(11,12),(12,13),(13,0),(5,4),(8,7),(11,10)\}$$



Cuando $k = 4$

$V(H_4) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21\}$

$F(H_4) = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,8),(8,9),(9,10),$
 $(10,11),(11,12),(12,13),(13,0),(5,4),(8,7),(11,10),(11,12),(12,13),$
 $(13,14),(14,15),(15,16),(16,17),(17,18),(18,19),(19,20),(20,21),(21,0),$
 $(6,5),(10,9),(14,13),(18,17)\}$

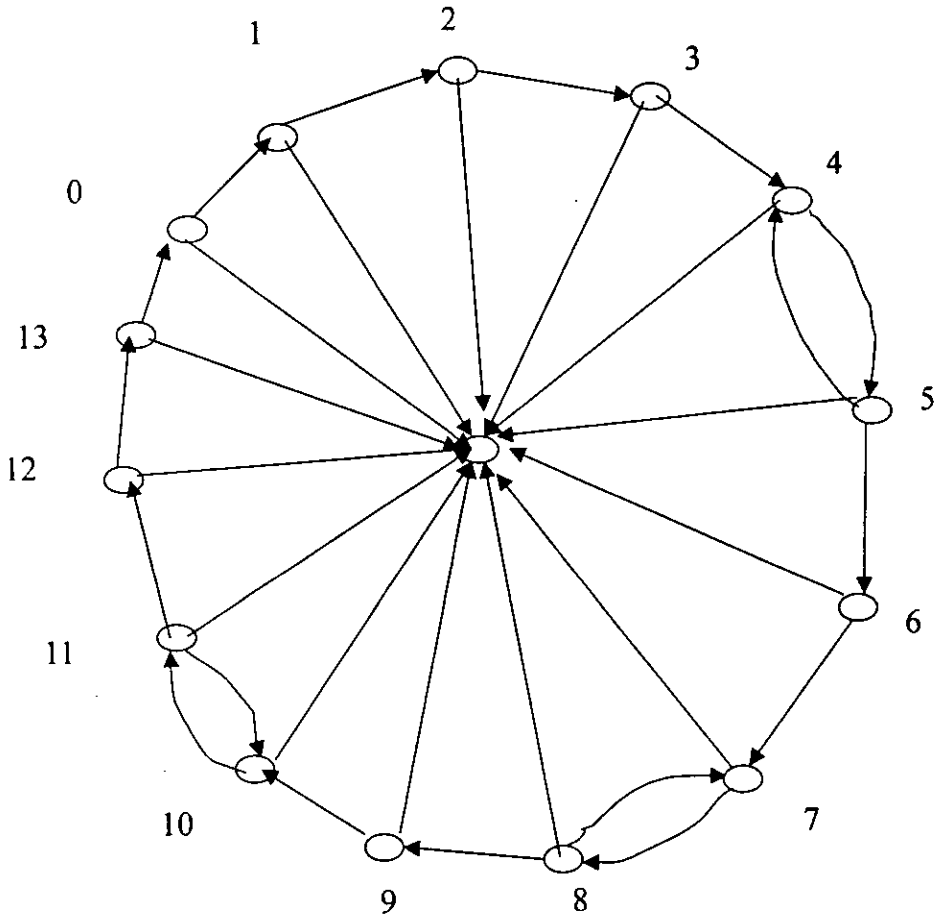


Ejemplo 2.2. Para $k \geq 2$ sea D_k la digráfica definida como sigue: para cada $i \in V(H_k)$ sea T_i^k una iz-trayectoria dirigida de longitud k de tal suerte que $T_i^k \cap T_j^k = \{z\}$ $T_i^k \cap \{H_k\} = i$
Y sea

$$D_k = H_k \cup T_i^k$$

Es fácil ver que no tiene k -núcleo y $\text{Asym}(D_k)$ es una digráfica conexa.

Para $k = 3$ tenemos:

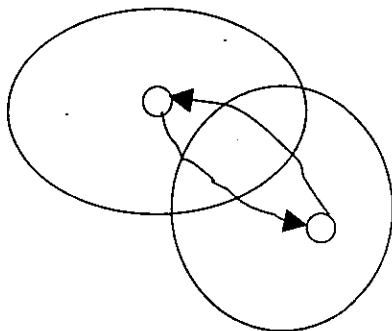


El siguiente resultado es una generalización del Teorema II.2

Teorema II.3. Sea D una digráfica que satisface las siguientes condiciones:

- (i) Existe $m_0 \in V(D)$ tal que para cada $x \in V(D)$ existe en $\text{Asym}(D)$ un xm_0 -camino dirigido de longitud $\equiv i \pmod{k}$ para alguna $0 \leq i \leq k-1$ y un m_0x -camino dirigido.
- (ii) Todo ciclo dirigido γ tal que $\ell(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$ se satisfacen (a) o (b)
 - a) Toda flecha de γ es una flecha simétrica de D
 - b) γ tiene al menos k flechas simétricas.

Entonces D tiene un (k, ℓ) -núcleo.



$\text{Asym}(D)$
 $C_1 = xm_0$
 $\ell(C_1) \equiv i \pmod{k}$
 C_2 es un m_0x -camino dirigido.

DEMOSTRACIÓN.

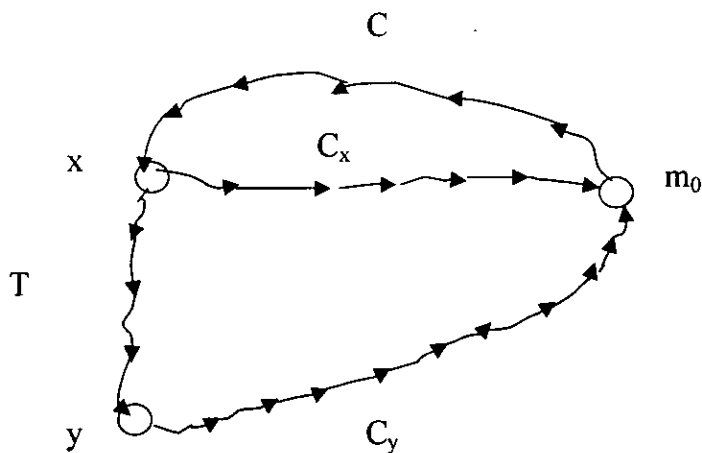
Sea $N = \{z \in V(D) \mid \text{existe un } zm_0\text{-camino dirigido de longitud } \equiv 0 \pmod{k} \text{ contenido en } \text{Asym}(D)\}$

(1) Si $x, y \in N$ $x \neq y$ entonces $d_D(x, y) \geq k$

Sean $x, y \in N$ y supongamos que existe una xy -trayectoria dirigida T con $\ell(T) \leq k-1$

Sea C_x un xm_0 -camino dirigido de longitud $\equiv 0 \pmod{k}$

Sea C_y un ym_0 -camino dirigido de longitud $\equiv 0 \pmod{k}$



Contenidos en $\text{Asym}(D)$ y sea

C un m_0x -camino dirigido contenido en $\text{Asym}(D)$

El Lema 2.1

y la hipótesis (ii) implican que

$$\ell(C \cup C_x) \equiv 0 \pmod{k}$$

Si no se diera esta congruencia, es decir si

$$\ell(C \cup C_x) \not\equiv 0 \pmod{k},$$

tendríamos que $(C \cup C_x)$ es un camino dirigido cerrado con longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ y está contenido en $\text{Asym}(D)$. Por el Lema 2.1 $C \cup C_x$ contendría un ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ contenido en $\text{Asym}(D)$.

CONTRADICCIÓN.

(y todos los ciclos o eran simétricos o contienen $k \geq 1$ flechas simétricas.)

Análogamente $\ell(C_y \cup C \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$

Por lo tanto

$$\ell(C \cup C_x) \equiv \ell(C_y \cup C \cup T)$$

por lo cual

$$\ell(\cancel{C}) + \ell(C_x) \equiv \ell(C_y) + \ell(\cancel{C}) + \ell(T)$$

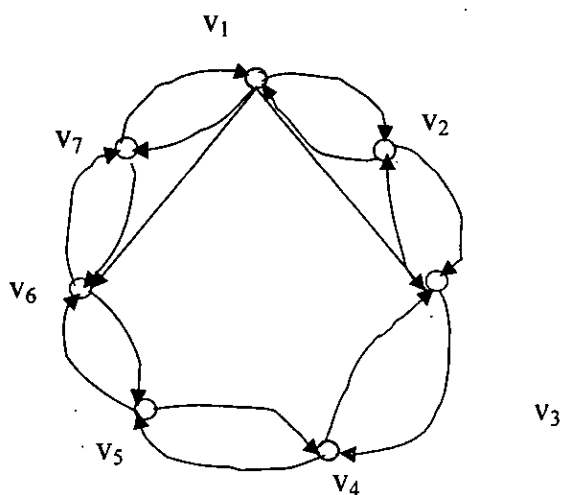
por lo tanto

$$\ell(C_x) \equiv \ell(C_y) + \ell(T)$$

$$\text{y como } \ell(C_x) \equiv \ell(C_y) \equiv 0 \pmod{k}$$

tenemos $\ell(T) \equiv 0 \pmod{k}$ contradicción con la hipótesis.

Ejemplo del Teorema 2.3



$\{v_1, v_4\}$ es un (3,2)-núcleo de D y se satisface que la longitud del ciclo dirigido $C = \{v_1, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1\}$ tiene $\ell(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$ y tiene al menos 3 flechas simétricas.

Capítulo III “k-núcleos en digráficas”

El objetivo de este capítulo es obtener una caracterización de una digráfica cíclicamente k-partita y fuertemente conexa. Como una consecuencia, obtendremos una condición suficiente para que una digráfica tenga un k-núcleo.

El primer teorema del capítulo es el **Teorema III.1**^[5] Sea **D** una digráfica fuertemente conexa, **D** es una digráfica cíclicamente k-partita si y sólo si existe una subdigráfica fuertemente conexa **H** \subseteq **D** tal que todo ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ tiene al menos dos flechas en **F(D) - F(H)**.

Este teorema es una caracterización de una digráfica cíclicamente k-partita.

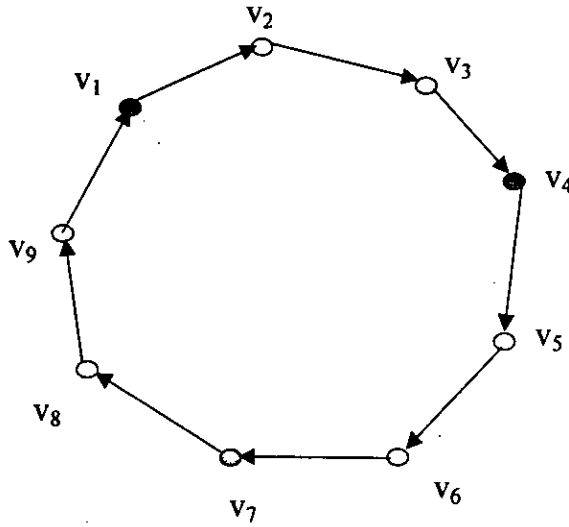
Una digráfica **D** se llama cíclicamente k-partita ($k \geq 2$) si uno puede hacer una partición del conjunto $V(D) = V_0 + V_1 + \dots + V_{k-1}$ tal que si (u,v) es una flecha de **D** entonces $u \in V_i$ y $v \in V_{i+1}$ (notación mod k). En el caso de que $k = 2$ obtenemos la digráfica bipartita en el sentido usual.

El otro teorema que veremos en el capítulo es el **Teorema III.2**^[5]. Sea **D** una digráfica tal que $\text{Asym}(D)$ es fuertemente conexa. Además suponemos que para cada ciclo dirigido γ tal que $\ell(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$ se satisface (a) o (b).

(a) Toda flecha de γ es una flecha simétrica de **D**

(b) γ tiene por lo menos k flechas simétricas.

Entonces **D** tiene un k-núcleo.



$\{v_1, v_4, v_7\}$ es un 3-núcleo

En este capítulo obtenemos una caracterización de las digráficas cíclicamente k -partitas fuertemente conexas, generalizaremos el capítulo I en el que una digráfica bipartita tiene un núcleo, y obtendremos una condición suficiente para que una digráfica tenga un k -núcleo.

Recordemos el siguiente Lema que será usado en la demostración del Teorema III.1

Lema 1.1 ^[1] *Todo camino dirigido cerrado de longitud $\not\equiv 0 \pmod k$, $k \geq 2$ contiene un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod k$.*

Teorema III.1 ^[5] *Sea D una digráfica fuertemente conexa, D es una digráfica cíclicamente k -partita si y sólo si existe una subdigráfica fuertemente conexa $H \subseteq D$ tal que todo ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod k$ tiene al menos dos flechas en $F(D) - F(H)$.*

Demostración. \Rightarrow

Es claro que si D es una digráfica fuertemente conexa y cíclicamente k -partita, entonces todo ciclo dirigido de D tiene longitud $\equiv 0 \pmod{k}$. Así cuando D es una digráfica fuertemente conexa y cíclicamente k -partita, la subdigráfica $H = D$ satisface las propiedades requeridas.

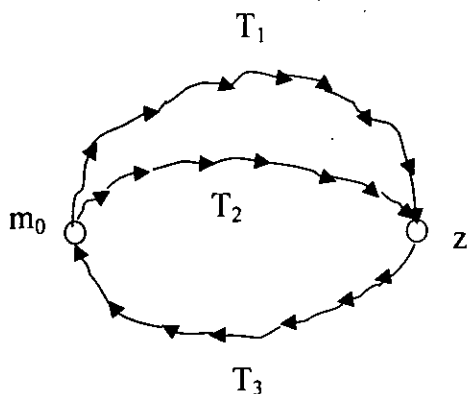
\Leftarrow Supongamos ahora que existe una subdigráfica fuertemente conexa $H \subseteq D$ tal que todo circuito de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ tiene al menos dos flechas en $F(D) - F(H)$,

Sea $m_0 \in V(D)$ y para cada $0 \leq i \leq k-1$ sea $N_i \subseteq V(D)$ definida como sigue

$N_i = \{z \in V(D) \mid \text{existe un } m_0z\text{-camino dirigido contenido en } H \text{ de longitud } \equiv i \pmod{k}\}$

i. Afirmamos que $N_i \cap N_j = \emptyset$ para $i \neq j, i, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Suponemos que existe un $z \in N_i \cap N_j$ entonces existe un m_0z -camino dirigido T_1 contenido en H tal que $\ell(T_1) \equiv i \pmod{k}$ y existe un m_0z -camino dirigido T_2 contenido en H tal que $\ell(T_2) \equiv j \pmod{k}$, puesto que H es fuertemente conexa existe un zm_0 -camino dirigido T_3 contenido en H ;



$$\ell(T_1) \equiv i \pmod{k}$$

$$\ell(T_2) \equiv j \pmod{k}$$

$$\ell(T_1 \cup T_3) \equiv \ell(T_1) + \ell(T_3)$$

$$\ell(T_2 \cup T_3) \equiv \ell(T_2) + \ell(T_3)$$

$\ell(T_1 \cup T_3) \equiv 0 \pmod{k}$ porque si

$\ell(T_1 \cup T_3) \not\equiv 0 \pmod{k}$ entonces

$T_1 \cup T_3$ es un camino dirigido cerrado de $\ell \not\equiv 0 \pmod{k}$ por el Lema 1.1 contendría un ciclo $\gamma \subset T_1 \cup T_3$ y $T_1 \cup T_3 \subset H$ por lo tanto tendríamos un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ contenido en H contradiciendo la hipótesis, por lo tanto

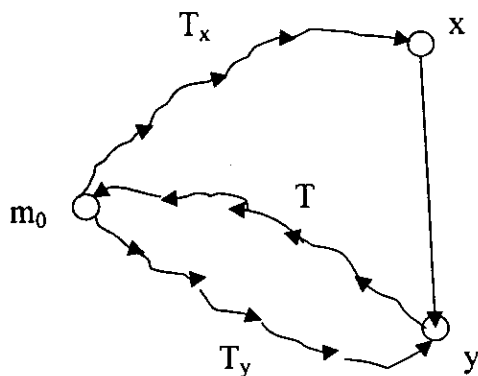
$$\ell(T_1 \cup T_3) \equiv 0 \pmod{k} \text{ análogamente } \ell(T_2 \cup T_3) \equiv 0 \pmod{k}$$

$$\text{por lo tanto } \ell(T_1) + \ell(T_3) \equiv \ell(T_2) + \ell(T_3) \pmod{k}$$

$$\text{por lo tanto } \ell(T_1) \equiv \ell(T_2) \pmod{k} \quad (i \neq j). \quad \forall$$

ii. Afirmamos que cada N_i es un conjunto independiente de D (i.e. no existe flecha de D con ambos puntos terminales en N_i)

Sean $x, y \in N_i$ y suponemos que $(x, y) \in F(D)$



Sea T_x un m_0x -camino dirigido contenido en H

T_y un m_0y -camino dirigido contenido en H tal que $\ell(T_x) \equiv \ell(T_y) \equiv i \pmod{k}$ y sea T un ym_0 -camino dirigido contenido en H (T existe puesto que H es fuertemente conexa). Ya que $T_y \cup T$ es un camino dirigido cerrado contenido en H se sigue que $\ell(T_y \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$

ya que si $\ell(T_y \cup T) \not\equiv 0 \pmod{k}$ por el Lema 1.1 contendría un ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ y contenido en $H \forall T_x \cup (x,y) \cup T$ es un camino dirigido cerrado con a lo más una flecha en $F(D) - F(H)$ del Lema 1.1 y de la hipótesis que $\ell(T_x \cup (x,y) \cup T) \equiv \ell(T_y \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$ Porque si $\ell(T_y \cup T) \not\equiv 0 \pmod{k}$ contendría un ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ con a lo más una flecha en $F(D) - F(H) \forall$

$$\ell(T_x \cup (x,y) \cup T) \equiv \ell(T_y \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$$

$$\ell(T_x) + \ell(x,y) + \cancel{\ell(T)} \equiv \ell(T_y) + \cancel{\ell(T)} \pmod{k}$$

$$\ell(T_x) + 1 \equiv \ell(T_y) \pmod{k}$$

$$i + 1 \equiv i \pmod{k}$$

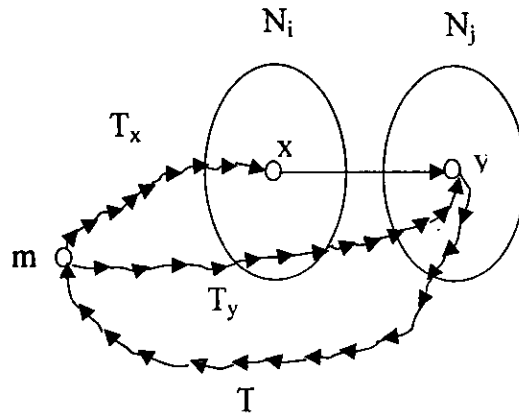
$$1 \equiv 0 \pmod{k} \quad \forall$$

iii. Toda flecha con punto final inicial en N_i tiene punto final terminal en N_{i+1} (notación mod k) y $V(D) = \bigcup_{i=0}^{k-1} N_i$.

Sea (x,y) una flecha con punto final inicial en N_i se sigue de (ii) que $y \in N_j$ para alguna $j \in \{0,1,\dots,k-1\} - \{i\}$. Sea T_x un m_0x -camino dirigido contenido en H con $\ell(T_x) \equiv i \pmod{k}$, T_y un m_0y -camino dirigido contenido en H con $\ell(T_y) \equiv j \pmod{k}$ y T un ym_0 -camino dirigido contenido en H (recuérdese que tal camino existe porque H es fuertemente conexa). Tenemos $T_x \cup (x,y) \cup T$ es un camino dirigido cerrado con a lo más una flecha en $V(D) - V(H)$ así se sigue del Lema 1.1 y de la hipótesis que $\ell(T_x \cup (x,y) \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$ (Si $\ell(T_x \cup (x,y) \cup T) \not\equiv 0 \pmod{k}$ tendríamos un ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ con a lo más una flecha en $F(D) - F(H) \forall$) también $\ell(T_y \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$ (Si $\ell(T_y \cup T) \not\equiv 0 \pmod{k}$ tenemos que por Lema 1.1 $T_y \cup T$ contiene un ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ y sería un ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$)

contenido en $H\bar{V}$) por lo tanto $\ell(T_x) + 1 \equiv \ell(T_y) \pmod{k}$ y $j = i + 1 \pmod{k}$ y porque $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ se sigue que $j = i + 1$.

Concluimos de (i), (ii) y (iii) y de la definición (***) que D es cíclicamente k -partita. \square c.q.q.d.



Teorema III.2. ^[5] Sea D una digráfica tal que $\text{Asym}(D)$ es fuertemente conexa. Además suponemos que para cada ciclo dirigido γ tal que $\ell(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$ se satisface (a) o (b).

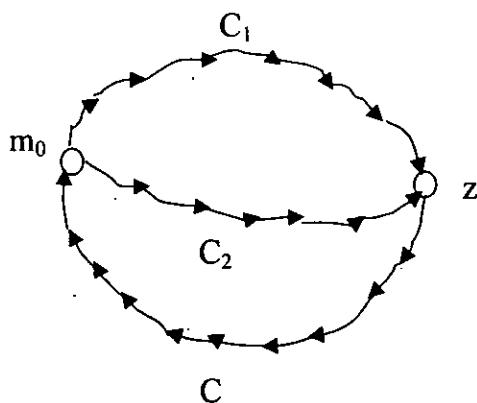
- (a) Toda flecha de γ es una flecha simétrica de D
- (b) γ tiene por lo menos k flechas simétricas.

Entonces D tiene un k -núcleo.

Demostración.

i) Sea $m_0 \in V(D)$ y para cada $0 \leq i \leq h$ sea $N_i \subseteq V(D)$ definida como sigue

$N_i = \{z \in V(D) \mid \text{existe un } m_0z\text{-camino dirigido de longitud } \equiv i \pmod{k} \text{ contenido en } \text{Asym}(D)\}$



i) $N_i \cap N_j = \emptyset$ para $i \neq j, i, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Supongamos que $N_i \cap N_j \neq \emptyset$, sea $z \in N_i \cap N_j, i \neq j$,

C_1 es un m_0z -camino dirigido en $\text{Asym}(D)$ con $\ell(C_1) \equiv i \pmod{k}$

C_2 es un m_0z -camino dirigido en $\text{Asym}(D)$ con $\ell(C_2) \equiv j \pmod{k}$

Como $\text{Asym}(D)$ es fuertemente conexa existe C_3 un camino dirigido de z a m_0 en $\text{Asym}(D)$,

entonces $\ell(C_1 \cup C_3) \equiv \ell(C_1) + \ell(C_3)$

$C_1 \cup C_3$ es un camino dirigido cerrado en $\text{Asym}(D)$ $\ell(C_1 \cup C_3) \equiv 0 \pmod{k}$ porque si no tendríamos que $C_1 \cup C_3$ es un camino dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ y por lo tanto contiene un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ y asimétrico, contradiciendo (a) y (b).

Análogamente, $\ell(C_2 \cup C_3) \equiv 0 \pmod{k}$

$\ell(C_1 \cup C_3) \equiv 0 \pmod{k}$

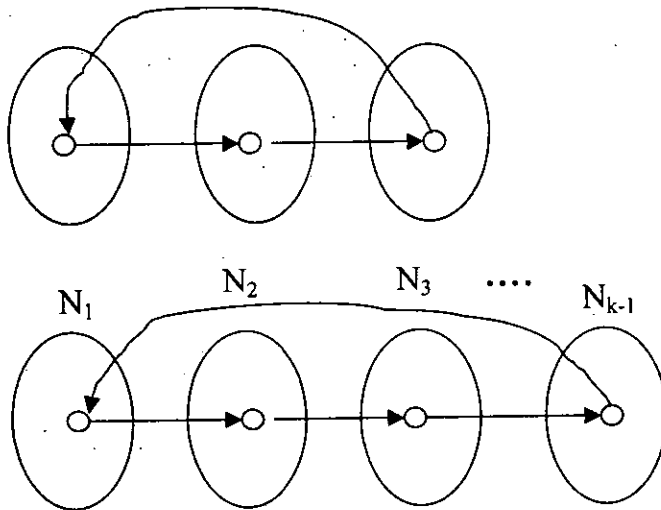
$\ell(C_2 \cup C_3) \equiv 0 \pmod{k}$

Por lo tanto $\ell(C_1 \cup C_3) \equiv \ell(C_2 \cup C_3)$

$\ell(C_1) + \ell(C_3) \equiv \ell(C_2) + \ell(C_3)$

de aquí $\ell(C_1) \equiv \ell(C_2)$ para $i \neq j. \nabla$

$N_i \cap N_j = \emptyset$ ya tengo partición de $V(D)$



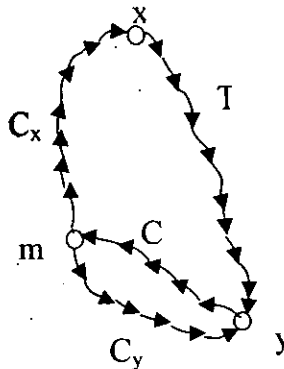
ii) Para $x, y \in N_i, x \neq y, d_D(x, y) \geq k$

Suponemos que existe una xy -trayectoria dirigida T en D con $\ell(T) \leq k-1$

C_x es un m_0x -camino dirigido asimétrico tal que $\ell(C_x) \equiv i \pmod{k}$

C_y es un m_0y -camino dirigido asimétrico tal que $\ell(C_y) \equiv i \pmod{k}$

Existe C un ym_0 -camino dirigido tal camino existe por ser $\text{Asym}(D)$ fuertemente conexas



Contradiciéndose entonces $(C_x \cup T \cup C)$ es un camino dirigido cerrado con a lo más $k-1$ flechas simétricas, por lo tanto $\ell(C_x \cup T \cup C) \not\equiv 0 \pmod{k}$, si $\ell(C_x \cup T \cup C) \not\equiv 0 \pmod{k}$, contendría un ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ no simétrico y con a lo más $k-1$ flechas simétricas. Contradiciéndose la hipótesis.

Análogamente

$$\ell(C_y \cup C) \equiv 0 \pmod{k},$$

$$\ell(C_x \cup T \cup C) \equiv 0 \pmod{k},$$

$$\ell(C_y \cup C) \equiv \ell(C_x \cup T \cup C),$$

$$\ell(C_y) + \cancel{\ell(C)} \equiv \ell(C_x) + \cancel{\ell(C)} + \ell(T),$$

$$\ell(C_y) \equiv \ell(C_x) + \ell(T),$$

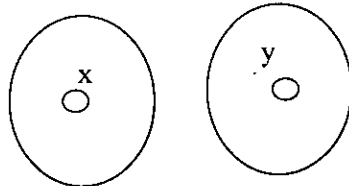
$$\text{y } \ell(T) \equiv 0 \pmod{k}. \text{ Contradicción}$$

porque habíamos supuesto que $1 \leq \ell(T) \leq k-1$

- iii) Cada flecha asimétrica con punto final inicial en N_i tiene punto final terminal en N_{i+1} (notación mod k) y

$$V(D) = \bigcup_{i=0}^{k-1} N_i$$

Tenemos que demostrar que dada una flecha asimétrica xy con $x \in N_i$ tiene $y \in N_{i+1}$



$$V(D) = \bigcup_{i=0}^{k-1} N_i$$

Sea (u,v) una flecha asimétrica, existe un m_0u -camino dirigido C_1 con $\ell(C_1) \equiv i \pmod{k}$, $C_1 \subset \text{Asym}(D)$ por lo tanto $C_1 \cup (u,v)$ es un camino dirigido asimétrico de m_0 a v con $\ell(C_1 \cup (u,v)) \equiv \ell(C_1) + 1 \equiv i+1 \pmod{k}$, por lo tanto $v \in N_{i+1}$. c.q.d.

Capítulo IV

Una condición suficiente para la existencia de k -núcleos en Digráficas

En este capítulo veremos una condición suficiente para la existencia de k -núcleos en digráficas.

Presentamos una generalización del teorema de Kwasnik sobre la existencia de k -núcleos en digráficas fuertemente conexas, el cual es una generalización del Teorema de Richardson:

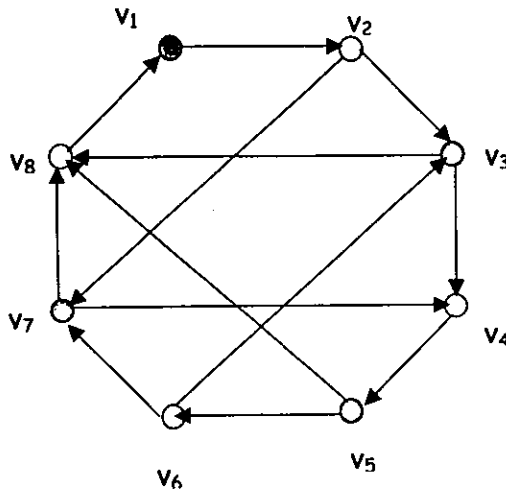
El resultado principal de este capítulo es el **Teorema IV.1**. Sea D una digráfica tal que $\text{Asym}(D)$ es fuertemente conexa y cada ciclo dirigido de longitud 3 tiene al menos dos flechas simétricas. Si para cada ciclo dirigido γ de D con $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$ se satisfacen (a) ó (b), donde:

- (a) γ tiene dos flechas simétricas,
 - (b) γ tiene cuatro cuerdas cortas
- entonces D tiene un k -núcleo ($k \geq 2$).

Para la demostración del Teorema IV.1 vamos a utilizar y demostrar el *Lema IV.1*. "Sea D una digráfica, $u, v, w \in V(D)$, T_1 es una trayectoria dirigida de u a v , T_2 es una vw -trayectoria dirigida de longitud a lo más 1 (posiblemente $v = w$), T_3 es una wu -trayectoria dirigida y denotamos por $\gamma = T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Si $l(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$, $k \geq 2$, entonces existe un ciclo dirigido C contenido en γ con $l(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$ y vértices $u', v', w' \in V(D)$, tal que $[u', C, v']$ es una subtrayectoria de T_1 , $[v', C, w']$ es una subtrayectoria de T_2 , y $[w', C, u']$ es una subtrayectoria de T_3 , (posiblemente $l(T_2) = 0$ y posiblemente $l[v', C, w'] = 0$)".

* Denotamos a $[u', C, v']$ como el subcamino dirigido de u a v contenido en C .

Teorema [M Kwasnik] Sea D una digráfica fuertemente conexa, si todo ciclo de D tiene longitud $\equiv 0 \pmod{k}$, $k \geq 2$. Entonces D tiene un k -núcleo.



D

En esta digráfica todo ciclo dirigido de D tiene longitud $\equiv 0 \pmod{k}$, $k \geq 2$.

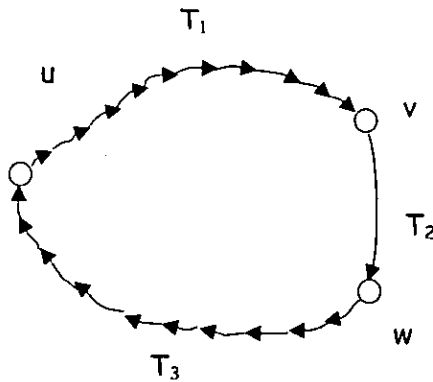
D tiene un 2-núcleo que es $N = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$

El resultado principal de este capítulo es el Teorema IV.1 y para demostrarlo es necesario demostrar primero el siguiente Lema.

[7]

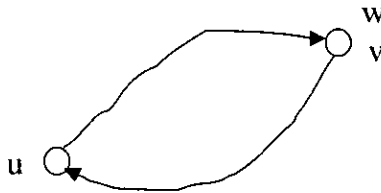
Lema IV.1. Sea D una digráfica, $u, v, w \in V(D)$, T_1 es una trayectoria dirigida de u a v , T_2 es una vw -trayectoria dirigida de longitud a lo más 1 (posiblemente $v = w$), T_3 es una wu -trayectoria dirigida y denotamos por $\gamma = T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Si $\ell(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$, $k \geq 2$, entonces existe un ciclo dirigido C contenido en γ con $\ell(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$ y vértices $u', v', w' \in V(D)$, tal que $[u', C, v']$ (en donde $[u', C, v']$ denota la trayectoria dirigida de u' a v' contenida en C) es una subtrayectoria de T_1 , $[v', C, w']$ es una subtrayectoria de T_2 , y $[w', C, u']$ es una subtrayectoria de T_3 , (posiblemente $\ell(T_2) = 0$ y posiblemente $\ell[v', C, w'] = 0$).

Demostración.

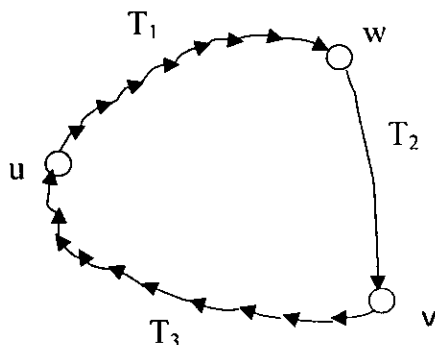


La demostración será por inducción sobre $\ell(\gamma)$

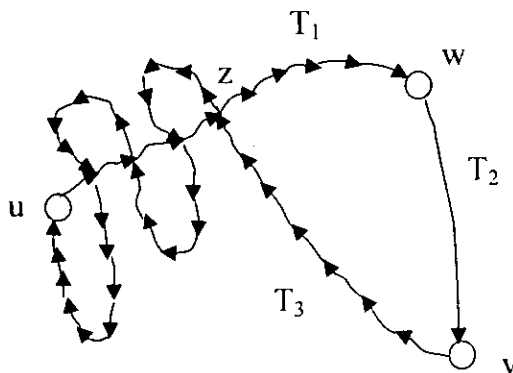
Si $\ell(\gamma) = 2$, claramente γ es un ciclo requerido con las propiedades requeridas.



Supongamos que el resultado es válido para γ' con las propiedades del Lema 2.1 tal que $\ell(\gamma') < n$ y sea $\gamma = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ con $\ell(\gamma) = n$. Si $V(T_1) \cap V(T_3) = \{u\}$, entonces $v \neq w$, γ es un ciclo dirigido y el resultado es inmediato.



Si $V(T_1) \cap V(T_3) \neq \{u\}$, tomamos z el primer vértice de T_3 diferente de u que está en T_3 . Ya que $\ell(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{k}$ tenemos que al menos una de las siguientes afirmaciones se cumple:



a) $\ell([u, T_{1,z}] \cup [z, T_{3,u}]) \not\equiv 0 \pmod k$

b) $\ell([z, T_{1,w}] \cup T_2 \cup [v, T_{3,z}]) \not\equiv 0 \pmod k$

Si (a) se cumple tomamos $\gamma' = [u, T_{1,z}] \cup [z, T_{3,u}]$, $u' = u$, $v' = w' = z$, claramente $\ell(\gamma') < n$, y por la hipótesis de inducción sobre γ tenemos que existe un ciclo dirigido C contenido en γ' y por lo tanto en γ con las propiedades requeridas.

Si (b) se cumple tomamos $\gamma' = [z, T_{1,w}] \cup T_2 \cup [v, T_{3,z}]$

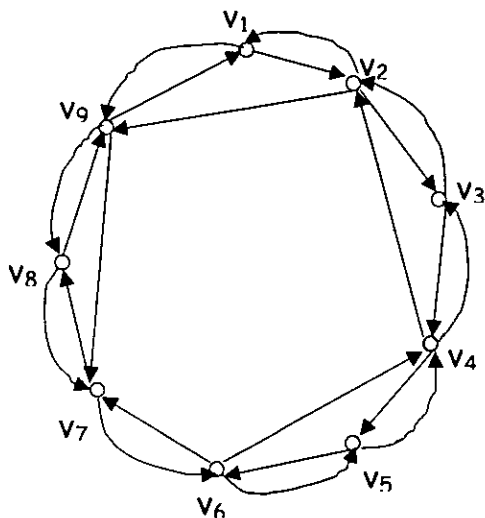
$u' = v' = w' = z$ claramente $\ell(\gamma') < n$ y por la hipótesis de inducción tenemos que existe un ciclo $C \subseteq \gamma'$ y por lo tanto contenido en γ con las propiedades requeridas. \square c.q.d.

^[7]
Teorema IV.1. Sea D una digráfica tal que $\text{Asym}(D)$ es fuertemente conexa y cada ciclo dirigido de longitud 3 tiene al menos dos flechas simétricas. Si para cada ciclo dirigido γ de D con $\ell(\gamma) \not\equiv 0 \pmod k$ se satisfacen (a) ó (b), donde:

(a) γ tiene dos flechas simétricas,

(b) γ tiene cuatro cuerdas cortas

entonces D tiene un k -núcleo ($k \geq 2$).



DEMOSTRACIÓN:

Sea $m_0 \in V(D)$ y para cada $0 \leq i \leq k$ sea $N_i \subseteq V(D)$ definida como sigue:

$N_i = \{z \in V(D) \mid \text{la trayectoria dirigida más corta desde } m_0 \text{ a } z \text{ contenida en } \text{Asym}(D) \text{ tiene longitud } \equiv i \pmod{k}\}$

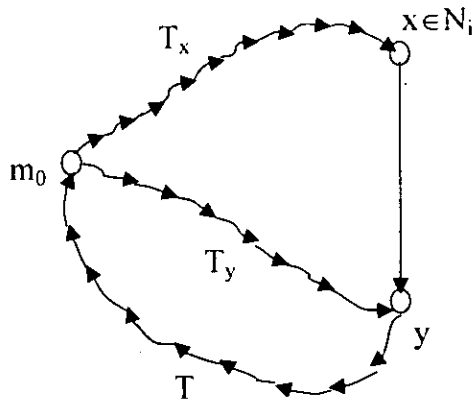
$$(1). \bigcup_{i=0}^{k-1} N_i = V(D)$$

Por ser $\text{Asym}(D)$ fuertemente conexa para un $z \in V(D)$ existe una trayectoria (tomamos la más corta) asimétrica de m_0 a z . Esta es congruente con algún $0 \leq i < k \pmod{k}$, por lo tanto $z \in N_i$. Por lo tanto

$$V(D) = \bigcup_{i=0}^{k-1} N_i = V(D)$$

(2). Toda flecha de D con punto final inicial en N_i tiene punto final terminal en N_{i+1} (notación módulo k).

Sea (x,y) una flecha con punto terminal inicial en N_i y tomamos la trayectoria dirigida más corta T_x de m_0 a x contenida en $\text{Asym}(D)$, la trayectoria dirigida más corta T_y de m_0 a y , y T la trayectoria dirigida más corta de y a m_0 contenida en $\text{Asym}(D)$, notaremos que tales trayectorias existen porque $\text{Asym}(D)$ es fuertemente conexa.



$$(3.1). \ell(T_x) \equiv i \pmod{k}$$

Esto es consecuencia de la definición de N_i y del hecho que $x \in N_i$.

(3.3). T_x no tiene cuerda corta en D .

Ya que T_x es la trayectoria dirigida más corta de m_0 a x contenida en $\text{Asym}(D)$. Sea $T_x = [m_0 = z_0, z_1, \dots, z_n = x]$

Si (z_i, z_{i+2}) $0 \leq i \leq n-2$ es una cuerda corta de T_x tenemos $[z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_i]$ es un triángulo dirigido con a lo más una flecha simétrica nótese que si (z_i, z_{i+2}) es flecha asimétrica tendríamos $T'_x(z_0, z_1, \dots, z_i, z_{i+2}, \dots, z_n)$ una m_0x trayectoria dirigida contenida en $\text{Asym}(D)$ contradiciendo la elección de T_x (porque $\{(z_i, z_{i+1}), (z_{i+1}, z_{i+2})\} \subseteq F(T_x) \subseteq F(\text{Asym}(D))$ contradiciendo los supuestos del Teorema 2.1. Concluimos que T_x no tiene cuerdas cortas en D .

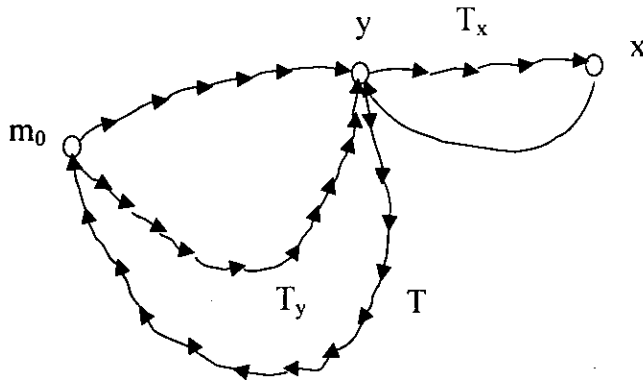
Similarmente podemos demostrar las siguientes dos afirmaciones:

(3.3). T_y no tiene cuerda corta en D

(3.4). T no tiene cuerda corta en D .

Ahora analizaremos los dos posibles subcasos:

(Caso 1.) $y \in T_x$



Aquí analizaremos los diferentes subcasos

(Caso 1.a) $l([m_0, T_x, y] \cup T) \not\equiv 0 \pmod{k}$

En este caso se sigue del Lema 2.1 (tomando $u = m_0, v = w = y = z_i$,



$T_1 = [m_0, T_x, y]$ $T_2 = [v = w = y = z_i]$ y $T_3 = T$

que existe un ciclo dirigido C contenido en $[m_0, T_x, y] \cup T$ con $l(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$ y vértices u', v', w' tales que $[u', C, v']$ es una subtrayectoria de T y $v' = w'$ $[w', C, u']$ es subtrayectoria de T y tenemos

(1.a.1) $C \subseteq \text{Asym}(D)$

esto se sigue del hecho de que $C \subseteq [m_0, T_x, y] \cup T \subseteq T_x \cup T \subseteq \text{Asym}(D)$

(1.a.2) $[u', C, v']$ no tiene cuerda corta

Es una consecuencia de (3.2) y del hecho de que $[u', C, v']$ es una subtrayectoria de $[m_0, T_x, y]$ la cual es una subtrayectoria de T_x .

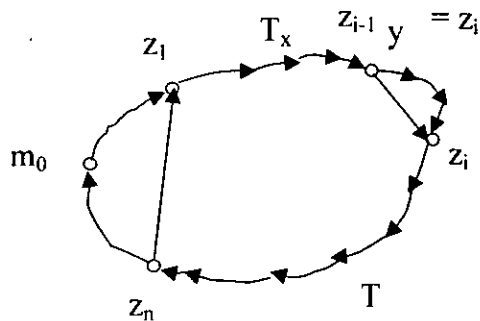
Similarmente

(1.a.3) $[v', C, u']$ no tiene cuerda corta.

Ya que $l(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$ se sigue de (1.1.1) y los supuestos del Teorema 2.1 que C tiene cuatro cuerdas cortas. Sea

$C = [u' = z_0, z_1, \dots, z_{i-1}, z_i = v', z_{i+1}, \dots, z_n, z_0]$

Tenemos de (1.a.2) y (1.a.3) que las únicas posibles cuerdas cortas de C son (z_{i-1}, z_{i+1}) y (z_n, z_1) contradiciendo las hipótesis del Teorema 2.1.



(Caso 1.b) $l([y, T_x, x] \cup [x, y]) \not\equiv 0 \pmod{k}$

En este caso tenemos el ciclo dirigido

$C = [y, T_x, x] \cup [x, y] = [y = w_0, w_1, \dots, w_n = x, w_0]$

Con $l(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$. Ya que $[y, T_x, x]$ es una subtrayectoria de T_x y $T_x \subseteq \text{Asym}(D)$ tenemos que la única posible flecha simétrica de C es (x, y) . Por lo tanto se sigue de los supuestos del Teorema 2.1 que C tiene cuatro cuerdas cortas. Pero se sigue de (3.2) y del hecho que $[y, T_x, x]$ es una subtrayectoria de T_x que las únicas cuerdas cortas posibles de C son: (w_{n-1}, w_0) y (w_n, w_1) , contradiciendo los supuestos del Teorema 2.1

Así el único caso posible es:

(Caso 1.c) $l([y, T_x, x] \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$ y $l([y, T_x, x] \cup (x, y)) \equiv 0 \pmod{k}$

en este caso tenemos que

$$\ell([m_0, T_x, y] \cup T) + \ell([y, T_x, x] \cup [x, y]) \equiv 0 \pmod{k}$$

es decir $\ell(T_x \cup [x, y] \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$

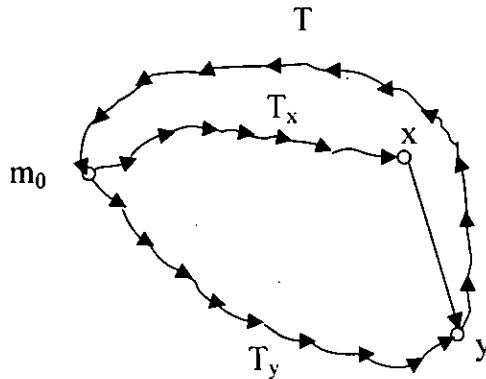
Por lo tanto $\ell(T_x \cup [x, y] \cup T) \equiv \ell([m_0, T_x, y] \cup T) \pmod{k}$ y se sigue que $\ell(T_x \cup [x, y]) \equiv \ell([m_0, T_x, y]) \pmod{k}$. Entonces

$$\ell([m_0, T_x, y]) \equiv \ell(T_x) + 1 \pmod{k}$$

y tenemos de (3.1) que $\ell([m_0, T_x, y]) \equiv i+1 \pmod{k}$

Finalmente nótese que siendo T_x la trayectoria dirigida más corta de m_0 a x contenida en $\text{Asym}(D)$ y $[m_0, T_x, y]$ es una subtrayectoria dirigida de T_x tenemos que $[m_0, T_x, y]$ es la trayectoria dirigida más corta de m_0 a y contenida en $\text{Asym}(D)$. Concluimos de la definición de N_{i+1} que $y \in N_{i+1}$.

(Caso 2) $y \notin T_x$



En este caso probaremos que $\ell(T_y) \equiv i+1 \pmod{k}$

De nuevo analizaremos varios casos posibles.

(Caso 2.a) $\ell(T_y \cup T) \not\equiv 0 \pmod{k}$

En este caso se sigue del Lema 2.1 (Tomando $u = m_0$, $v = w = y$, $T_1 = T_y$, $T_2 = (v = w = y)$ y $T_3 = T$) que existe un ciclo dirigido C de longitud $\ell(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$

$u', v' = w' \in V(C)$ tal que $[u', C, v']$ es una subtrayectoria de T_y y $[v', C, u']$ es una subtrayectoria de T . Ya que $T_y \subseteq \text{Asym}(D)$ y $T \subseteq \text{Asym}(D)$ tenemos que $C \subseteq \text{Asym}(D)$.

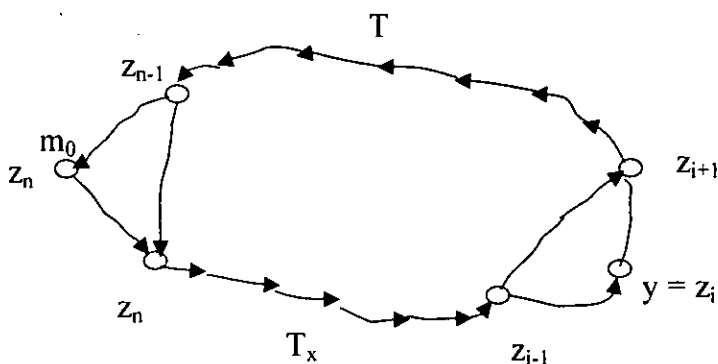
Por lo tanto se sigue de los supuestos del Teorema 2.1 que C tiene cuatro cuerdas cortas. Pero se sigue de (3.3), (3.4) y por los hechos: que $[u', C, v']$ es una subtrayectoria de T_y y $[v', C, u']$ es una subtrayectoria de T que

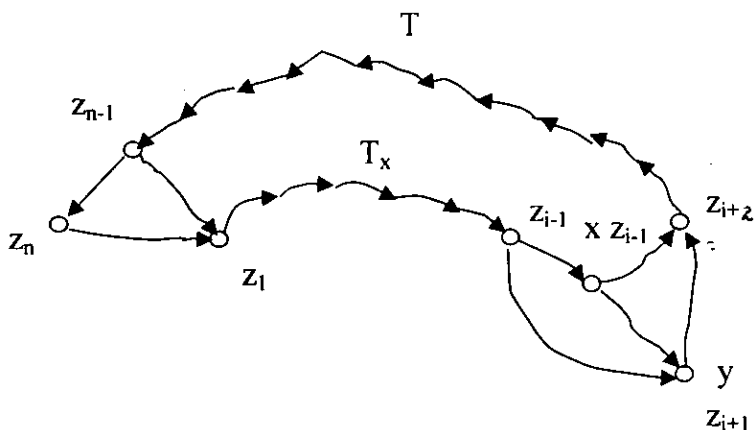
si $C = [u' = z_0, z_1, \dots, z_{i-1}, z_i = y, z_{i+1}, \dots, z_n, z_0]$

entonces, las únicas posibles cuerdas cortas de C son: (z_{n-1}, z_0) y (z_{i-1}, z_{i+1}) , contradiciendo la hipótesis del Teorema 2.1.

(Caso 2.b) $\ell(T_x \cup [x,y] \cup T) \not\equiv 0 \pmod{k}$

(Tomando $u = m_0, v = x, w = y, T_1 = T_x, T_2 = (x,y)$ y $T_3 = T$) que existe un ciclo dirigido C de longitud $\ell(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$ $u', v', w' \in V(C)$ tal que $[u', C, v']$ es una subtrayectoria de T_x , $[v', C, w']$ es una subtrayectoria de $[x,y]$ (posiblemente $v' = w'$) y $[w', C, u']$ es una subtrayectoria de T_3 . Ya que $T_x \subseteq \text{Asym}(D)$ y $T \subseteq \text{Asym}(D)$ tenemos que la única flecha simétrica de C es (x,y) . Por lo tanto se sigue de los supuestos del Teorema 2.1 que C tiene cuatro cuerdas cortas. Además; si $C = [u' = z_0, z_1, \dots, z_{i-1}, z_i = v', z_{i+1} = w', z_{i+2}, \dots, z_n, z_0]$ entonces se sigue de (3.2), (3.4) y por los hechos:





$[u', C, v']$ es una subtrayectoria de T_x , $[w', C, u']$ es una subtrayectoria de T , que las únicas posibles cuerdas cortas de C son (z_{i-1}, z_{i+1}) y (z_i, z_{i+2}) , y (z_n, z_1) , contradiciendo la hipótesis del Teorema 2.1. contradiciendo los supuestos del Teorema IV.1

Concluimos de los casos (2.a) y (2.b) que

(Caso 2.c) $\ell(T_y \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$ y

$\ell(T_x \cup [x, y] \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$

Por lo tanto

$\ell(T_y \cup T) \equiv \ell(T_x \cup [x, y] \cup T) \pmod{k}$

así

$\ell(T_y) \equiv \ell(T_x \cup [x, y]) \equiv \ell(T_x) + 1 \pmod{k}$

y siendo $\ell(T_x) \equiv i \pmod{k}$ tenemos $\ell(T_y) \equiv i + 1 \pmod{k}$

y concluimos que $y \in N_{i+1}$.

Claramente se sigue de (1), (2) y (3) que cada N_i ($0 \leq i \leq k-1$) es un k -núcleo de D y el Teorema IV.1 está demostrado.

Referencias:

- [1]. V. Neumann-Lara, Seminúcleos de una digráfica, An. Inst. Mat. II Univ. Nac. Autónoma México (1971).
- [2]. M. Richardson, Extension Theorems for solutions, Ann. Math. (2) 58 (1953), p. 573.
- [3]. P. Duchet, Graphes noyau-parfaits, Ann. Discrete Math. 9 (1980) 93-101.
- [4]. Galeana – Sánchez Hortensia, On the existence of (ϵ, δ) -Kernels in Digraphs, Ann. Discrete Math. 85 (1990) 99-102.
- [5]. Galeana – Sánchez Hortensia, On the existence of kernels and ϵ -kernels in Digraphs, Ann. Discrete Math. 110 (1992) 251-255.
- [6]. M. Kwassnik, The generalization of Richardson Theorem, Discussiones Math. IV (1981) 11-14.
- [7]. Galeana Sánchez H. Rincón Mejía H. A sufficient condition for the existence of ϵ -kernels in digraphs.