UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVERSIFICACION DEL PORTAFOLIO BAJO EL MODELO DE MARKOWITZ

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

TLALOC RAMOS RAMOS

DIRECTOR DE TESIS: ACT. HECTOR DE LA ROSA ELIZALDE

MEXICO, D. F. 1998.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Diversificación del portafolio bajo el modelo de markowitz.

realizado por Ramos Ramos Tlaloc

con número de cuenta 9135147-0, pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. Hector de la Rosa Elizalde
Propietario	Act. Aurora Valdez Michel
Propietario	Act. Francisco Sánchez Villarreal
Suplente	Act. Susana Barrera Ocampo
Suplente	Act. Manuel Melgarejo Briseño

Consejo Departamental de Matemáticas
M. en A.P. Ma. del Pilar Alonso Reyes

DIVERSIFICACIÓN DEL PORTAFOLIO BAJO EL MODELO DE MARKOWITZ

A MIS PADRES, en agradecimiento a su
apoyo constante.

A MIS HERMANOS

Mi más sincero agradecimiento a las personas que contribuyeron a la revisión y asesoramiento de está tesis.

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÒNOMA DE

MÉXICO

A TODOS MIS AMIGOS

INDICE

Capítulo III

Capítulo IV

INTRODUCCIÓN

En la presente tesis, se presenta una herramienta que nos ayuda a optimizar una inversión en acciones el objetivo de este trabajo es proporcionar al lector una idea bastante amplia del Modelo de Markowitz y su funcionalidad, dicho modelo es bastante lógico y claro, en este trabajo se buscará conservar esas características.

La tesis se divide en cuatro capítulos, en el primero de ellos, damos una visión completa al lector de los mercados disponibles al inversionista y se analiza la forma de cotizar de los dos principales instrumentos del mercado de valores, es evidente que todos los inversionistas buscan obtener el mayor rendimiento posible, este rendimiento va acompañado de un cierto nivel de riesgo, este es nulo para los instrumentos que cotizan en el mercado de dinero, este riesgo es analizado y clasificado de una manera más detallada en el capítulo dos, donde se analizan los riesgos en los mercados, además se analiza la línea característica o modelo de mercado el nos ayuda a determinar el nivel de riesgo de una acción con respecto al mercado.

En el capítulo tercero, se definen primeramente conceptos probabilísticos, necesarios para la presentación del modelo, a su vez estos conceptos son trasladados al campo de estadística ya que a través de está estimamos los parámetros desconocidos, para finalizar con dicho capítulo se determina el rendimiento de cartera, así como la varianza de la misma.

Por último, para finalizar el presente trabajo en el cuarto capítulo presentamos el Modelo de Markowitz, iniciamos primeramente dando una explicación de lo que hace el algoritmo para resolver el problema del portafolio, al final de dicho capítulo se consideran las extensiones del modelo, se resuelve además un ejemplo para tres acciones, así pues el ejemplo que se da al final de está obra es para dar una mayor claridad al lector del procedimiento de cálculo.

Los datos que se utilizan en el ejemplo son datos reales, correspondientes al periodo 18/08/98 al 21/10/98, y las acciones que se analizan son Cemex correspondiente al sector de la construcción, Cifra correspondiente al sector comercio y Cie correspondiente al sector entretenimiento, dicho ejercicio nos ayudara a mostrar la utilidad del modelo de markowitz en el mercado Mexicano de Valores, los datos utilizados los puede consultar el lector en el anexo que se incluye en este trabajo al final del mismo.

CAPÍTULO I

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo veremos los conceptos de inversión así como, las situaciones que se pueden presentar cuando un individuo, se enfrenta a una decisión de inversión.

Posteriormente, hablaremos sobre el riesgo y rendimiento de una inversión, también se mencionan los conceptos básicos relativos al mercado de valores, se muestra la clasificación del mercado de valores y se da un breve bosquejo de cómo cotizan los instrumentos a descuentos y los Bonos, ya que estos dos instrumentos representan los tipos de instrumentos que cotizan en el mercado, por último se menciona brevemente los productos derivados.

Conceptos Generales

- Inversión

En el sentido más amplio de la palabra significa colocar dinero en algún negocio y/o destinar recursos a alguna operación con el objeto de obtener alguna utilidad. En finanzas una inversión es una asignación de recursos que hacemos en el presente con el fin de obtener un beneficio en el futuro.

Las decisiones de inversión son muy importantes pues como hemos visto en el párrafo anterior, implican asignación de recursos, dicha asignación es por un plazo determinado, durante el cual no disponemos de los mismos y esperando en el futuro realizarlos.

- Certeza, Riesgo e Incertidumbre.

Es conveniente distinguir claramente entre tres posibles situaciones, a las que se enfrenta un individuo ante una situación de inversión:

A) Certeza

Es definida como aquel caso en el que el tomador de decisiones conoce de antemano con exactitud todos los valores de los parámetros que pueden afectar la decisión.

B)Riesgo.

Corresponde a la situación en que no se dan las condiciones de certeza se tiene conocimiento de todos los futuros estados posibles de la economía, negocios, etc... que pueden afectar los valores de los parámetros relevantes en la decisión y, se está en condiciones de asignar una probabilidad de ocurrencia a cada uno de estos estados.

C) Incertidumbre.

Se presenta cuando no se da al menos una de las condiciones que caracterizan al riesgo, es decir, no se conocen todos los futuros estados que pueden determinar la decisión y/o, no se pueden asignar probabilidades a los estados.

El problema interesante radica pues, en la toma de decisiones bajo una situación de riesgo, ya que en este punto el problema es saber cuanto más de rendimiento debe adquirirse para aceptar un determinado nivel de riesgo, a continuación veremos estos dos últimos importantes conceptos que son riesgo y rendimiento ya que se supone que el inversionista sólo toma de decisiones considerando el rendimiento y el riesgo.

- Riesgo y Rendimiento

Riesgo.

El riesgo siempre indica que la posibilidad de fallar existe sólo que se espera que el número de fallos sea proporcional al nivel de riesgo que se tome o se incurra, por consiguiente una alternativa de inversión con un riesgo mínimo, minimiza la probabilidad de fracasar, pero de ninguna manera se tiene el éxito asegurado. Las diferencias de riesgo entre las diferentes propuestas de inversión, a veces es bastante desigual, y esta diferencia incluye modificaciones en el rendimiento, ya que los riesgos más grandes acompañan por lo general a rendimientos mayores y viceversa.

Cuando se analiza el riesgo se supone que el inversionista es averso al riesgo, esto es, que prefiere rendimientos elevados y bajo niveles de riesgo. Se pueden definir básicamente tres actitudes frente al riesgo:

A)Propensión al riesgo.
B) Aversión al riesgo.
C) Indiferencia respecto al riesgo.

Una persona propensa al riesgo seleccionará entre dos inversiones con iguales rendimientos aquella que tenga mayor cantidad de riesgo, la aversa al riesgo, eligirá aquella inversión con menor riesgo, la persona indiferente al riesgo elegir cualquier alternativa .El sentido común nos dicta que siempre es mejor, elegir entre alternativas con igual rendimiento aquella que tenga el menor nivel de riesgo.

El riesgo del proyecto surge siempre que exista la posibilidad de que el rendimiento obtenido del proyecto sea menor al esperado, entendiéndose por rendimiento esperado de una inversión el rendimiento promedio que se esperaría lograr si la inversión fuera hecha muchas veces.

Diversificación del riesgo

El principio de diversificación afirma que, al diseminar una inversión entre muchos activos diferentes, se eliminará parte del riesgo. Existe un nivel mínimo de riesgo que no se puede diseminar mediante la diversificación al cual se le denomina riesgo no diversificable, así pues una parte del riesgo es diversificable y la otra no lo es.

Rendimiento.

El rendimiento de una inversión, puede provenir de un flujo de efectivo durante el tiempo que se mantiene la inversión, flujo al que se conoce como componente del ingreso del rendimiento, también puede provenir de una ganancia de capital y en el mejor de los casos de ambos conceptos.

- Mercados Financieros

Un mercado surge cuando existen gentes que necesitan un servicio y otra que pueda satisfacer esa necesidad, en particular el Mercado financiero es el punto de concurrencia de oferentes y demandantes de bienes y servicios financieros.

- Clasificación del Mercado

Por los sujetos que participan en la compra-venta:

- Mercado Primario
- Mercado Secundario

Mercado Primario

Lo forman los emisores de los títulos e inversionistas cuando se coloca una emisión de valores. Este mercado representa una fuente de recursos para los emisores, en este mercado existe un contacto directo entre la compañía emisora y el público.

Mercado Secundario

Es el que forman los inversionistas que se compran y venden valores entre sí, sin que dichas transacciones generen flujos de recursos para las emisoras de los títulos en cuestión. Este mercado genera liquidez a los inversionistas, tiene más actividad que el mercado primario.

Por el plazo y rentabilidad de los títulos la segmentación del mercado es la siguiente:

- Mercado de dinero.

- Mercado de capitales.

- Mercado de metales.

Mercado de dinero.

Es el que se origina en la relación de oferentes y demandantes de fondos a corto plazo. Los concurrentes depositan estos fondos por periodos menores a un año, esperando realizarlos, es decir obtener rendimientos. Es el mercado de instrumentos de deuda con vencimiento a un año o menos estableciéndolo al momento de la emisión, se realizan actividades crediticias a corto plazo. En este mercado cotizan empresas particulares, gobierno los cuales necesitan financiamiento a corto plazo, los instrumentos de este mercado son de renta fija.

Mercado de capitales.

El mercado de capitales se origina en la oferta y demanda de fondos para ser utilizados a largo plazo. Estos fondos se emplean en la adquisición de activos fijos y en la ejecución de programas que permitirán la existencia de las organizaciones. A los valores que se negocian en el mercado de capitales se les subdivide a su vez, en valores de renta fija y de renta variable (acciones).

- Valores de renta fija.

Aquel tipo de valores cuyo rendimiento es fijo. Por tanto, no existe, salvo insolvencia del emisor, riesgo inherente a la operación en el sentido de que el precio pueda verse reducido en relación al costo de adquisición a la fecha de vencimiento de los mismos. Este tipo de valores funcionan en base de interés se establece un tipo de interés el cual se mantiene durante el periodo.

- Valores de renta variable.

Son aquellos cuyo rendimiento dependerá en buena parte de los resultados que obtenga la empresa emisora.

- Mercado de metales.

Es el mercado que constituyen la oferta y demanda de metales preciosos y títulos relacionados, este mercado se considera de renta variable.

A continuación se muestra un esquema de los instrumentos del mercado de valores, y su clasificación en cada uno de los mercados anteriores.

Instrumentos del Mercado de capitales
(Largo Plazo)

Instrumentos de Renta Variable.

- Acciones (Industriales, Comerciales y de Servicios.)
- Acciones de Sociedades de Inversión.

Instrumentos de Deuda o Renta Fija

- Obligaciones
- Bonos Bancarios de Desarrollo (Bbd's)
- Bonos Bancarios para la Vivienda
- Bonos Bancarios para el Desarrollo Industrial (Bondis)
- Bonos Bancarios de Infraestructura.
- Bonos de Indemnización Bancaria (Bib's)
- Certificados de Participación Ordinarios (Cpo's)
- Certificados de Participación Inmobiliarios (Cpi's)
- Pagarés a Mediano Plazo (Pm)
- Pagarés Financieros (Pf)

Instrumentos del Mercado de Dinero
Corto Plazo (Un año o menos)

- Certificados de la tesorería de Federación (Cetes)
- Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (Bondes)
- Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Unidades de Inversión (Udibonos)
- Pagarés de petróleos Mexicanos (Petropagarés)
- Papel Comercial

- Pagaré Empresarial Bursátil
- Papel Comercial Indizado
- Pagarés con Rendimiento Liquidables al Vencimiento (Priv)
- Aceptaciones Bancarias (Ab's)
- Certificado de Depósito Bancarios (Cedes)
- Bonos en prenda

Mercado de Metales
(Renta Variable)

- Certificados de Plata (Ceplatas)
- Onzas troy de Oro y Plata
- Centenarios

- Tipos de Instrumentos del Mercado de Valores

En el mercado de valores existen básicamente dos tipos de instrumentos:

- Instrumentos a descuento.
- Bonos.

El término descontar es el efecto de anticipar cualquier circunstancia a futuro, de tal suerte que la situación presente ya lo haya asimilado de alguna manera.

Los instrumentos a descuento por lo tanto se caracterizan por descontar por adelantado las expectativas de los resultados futuros, dicho de otra forma, los precios de hoy tienden a reflejar lo que se espera suceda mañana, el instrumento más representativo de este tipo son los Cetes.

Por otro lado, que el otro instrumento representativo del mercado son los bonos, los cuales realizan pagos, regularmente programados entre la fecha original de emisión y la fecha de vencimiento y a estos pagos intermedios se les conoce como cupones, así pues un cupón representa derechos futuros para el tenedor. A continuación se da una breve explicación de estos.

- Relación entre tasa de Interés, Plazo, Valor Nominal de Instrumentos Emitidos a Descuento.

El instrumento de deuda más sencillo, la obligación que se coloca a descuento se vende a un precio (P) menor a su valor nominal (N), y la diferencia es el descuento el cual refleja la tasa de interés (i) en el periodo (n).

En otras palabras el precio de una obligación que se coloca a descuento es igual al valor presente del pago futuro en efectivo del valor nominal del titulo.

Formalmente, la relación entre el precio, el valor nominal, las tasas de interés y el plazo del instrumento se expresa de la siguiente manera:

$$P = \frac{N}{(1+i)^n}$$

Para un instrumento del mercado de dinero con vencimiento menor a un año, se aplica una formula un tanto diferente:

$$P = \frac{N}{1 + i * \frac{m}{360}}$$

donde:

i = tasa de interés anual.
m = número de días faltantes para su vencimiento.

El cete es precisamente un instrumento a descuento y a continuación se mencionan las principales características.

- CETES

Los cetes son títulos de crédito al portador por los cuales el gobierno federal se obliga a pagar una suma fija de dinero en una fecha determinada.

Características Principales.

- Es una inversión de alta liquidez.
- Es una inversión completamente segura ya que cuenta con el respaldo del gobierno federal.
- Se emiten semanalmente los días jueves.
- La duración máxima no podrá exceder un año.
- El valor nominal de los cetes es de $ 10.

Los cetes se venden a descuento, lo cual significa que el precio de los mismos siempre será menor a su valor nominal. El único día en que los cetes alcanzan su valor nominal es el día de vencimiento.

Ejemplo:

Una persona interesada en adquirir títulos de la emisión 42-80 del 15 de octubre, llama a la casa de bolsa para colocar su orden de compra un día antes.

El costo por título, que deberá cubrir es de 9.41, si está persona retiene los títulos hasta el vencimiento de los mismos el 15 de enero de 1981, ganará $ .59 por cada título. Por tanto la tasa de rendimiento anual es:

$$9.41(1+i)=10 \Leftrightarrow i=.0626992$$

La tasa anterior es una tasa efectiva 91 días para determinar la tasa de rendimiento nominal anual tenemos:

$$\frac{.0626992*360}{91}=24.80\%$$

Por lo tanto la tasa de rendimiento anual es de 24.80%. Utilizando la relación entre tasa de interés y tasa de descuento la cual está dada por la siguiente expresión:

$$d=\frac{i}{1+i}$$

En nuestro caso tenemos que:

$$d=\frac{.248}{(1+.248*\frac{91}{360})}=23.34\%$$

A continuación encontramos el precio de un cete en base a los datos que se dan a continuación:

-Valor nominal $ 10
-Tasa de descuento 33.65 %

Para determinar el precio del cete utilizaremos la fórmula que nos da el valor presente de un capital a una tasa de descuento la cual viene dada por:

$$P = VN\left[1-\left(\frac{Td * n}{360}\right)\right]$$

Donde:

P = Precio del título.
VN = Valor nominal del título.
Td = Tasa de descuento.
n = Número de días que dura la inversión.

Así pues, tenemos que el precio del título es:

$$P = 10\left(1-.\frac{(.3365)(182)}{360}\right) = 8.2988$$

Otro instrumento representativo del mercado son los bonos que a continuación analizamos sus principales características.

- BONOS

En el juego de los grandes capitales que son necesarios movilizar para financiar las instalaciones industriales modernas, o las grandes obras que emprenden las corporaciones o gobiernos, no es posible obtener el dinero necesario en préstamo de una sola compañía y entonces es necesario recurrir a las inversiones de muchas personas. Para agilizar estas inversiones, se ha creado una forma de obligaciones que constituyen un instrumento de crédito llamado bonos.

- Definiciones.

Bono

Es una obligación o documento de crédito, emitido por un gobierno o una entidad particular, a un plazo perfectamente determinado, que devenga intereses en periodos regulares de tiempo.

Los bonos que pueden ser transferidos libremente y cambiar de dueño por simple venta, se denominan bonos no registrados y son al portador. En caso de que los bonos sean bonos registrados, sólo pueden transferirse por endoso y consentimiento de emisor.

Pago de Intereses

En la mayoría de los bonos, los pagos de intereses se efectúan contra la presentación de cupones; estos cupones están impresos en serie y unidos a la misma obligación y cada uno tiene impresa la fecha de su pago.

Valor Nominal

El principal o capital que se señala en el bono es su valor nominal los valores más utilizados son los bonos de $ 100.00. y sus múltiplos.

Valor de redención.

Es el valor que se reintegra al tenedor del bono; por lo general, el valor de redención es igual al valor nominal. En tal caso se dice que el valor es a la par. El reintegro del principal se efectúa en una fecha de vencimiento estipulada pero, en algunos casos, se deja el prestatario la opción de reintegrar el valor antes del vencimiento.

Precio de los bonos

El precio de los bonos en el mercado de valores se fija por acuerdo entre el comprador y el vendedor; este valor depende básicamente de los siguientes factores:

1) Tasa de interés e intervalos de cupones.
2) Tasa de interés local para las inversiones.
3) Tiempo que debe transcurrir hasta el vencimiento.
4) Precio de redención.
5) Condiciones económicas imperantes.

Los bonos pueden venderse a la par, con premio o con descuento, según que el precio de venta sea igual, mayor o menor que el valor nominal.

De esta forma, el valor de los instrumentos con cupones es igual a la suma del valor presente de todos los flujos de efectivo representados por los pagos de cupones C_i más el pago del principal N al vencimiento.

La fórmula para determinar el precio del bono seria pues:

$$P = \frac{C_1}{(1+i)} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \dots\dots\dots\dots + \frac{C_n + N}{(1+i)^n}$$

Por ejemplo, un instrumento con un plazo a vencimiento de tres años, un valor nominal de 100 000 usd, a una tasa de interés de 12% por cada cupón anual y tasa del mercado del 10 %, por lo tanto el precio del bono sería:

$$P = \frac{12000}{1.1} + \frac{12000}{(1.1)^2} + \frac{112000}{(1.1)^3}$$

P = 10900.09 + 9917.36 + 84147.26

P = 104 973.71 usd

Derivados financieros o Productos derivados.

La innovación de instrumentos y de técnicas de operación son producto de la necesidad que tienen los inversionistas de reducir riesgos e incrementar ganancias, lo cual se ha logrado al tener acceso a la combinación adecuada de las múltiples alternativas que proporciona el uso de los productos financieros.

Los productos financieros derivados más conocidos son: los forwards, futuros, opciones, warrants y swaps. El rendimiento de estos depende del valor de uno o varios instrumentos básicos. En general tenemos: El tipo de cambio (divisas), el valor de una acción o bonos (series accionarias, canastas de titulos), tasas de interés, productos comodities.

Instrumento Derivado.

Puede definirse como aquel cuyo valor depende del valor de otro instrumento conocido como bien subyacente, es decir, el precio del instrumento derivado se origina propio del precio de su bien subyacente, y con ellos se pactan con anterioridad las condiciones de una transacción futura de dicho bien.

La función que desempeñan los productos derivados como instrumentos financieros es la de servir como herramienta para la administración del riesgo, es decir, eliminar el riesgo de movimientos adversos en la tasa de interés, precio de materia prima, precio de una divisa extranjera u otra variable.

Estos instrumentos dan una mayor diversificación del mercado, además proporcionan una línea de referencia para los precios futuros de los subyacentes.

Por ultimo para finalizar este capitulo damos un ejemplo de warrants cuyo activo subyacente son series accionarias, lo cual ilustrara el tipo de coberturas que ofrecen los productos derivados.

Supongamos que tenemos dos inversionistas, los cuales esperan que las acciones alfa suban de su nivel actual de $22.00; el primero tiene una acción de alfa, y el segundo un titulo opcional de compra, con un precio de ejercicio de $22.00.Cuando el precio de la acción alcanza un nivel de $30.00, las ganancias del primer inversionista ascienden a $8.00, mientras que el segundo empieza a obtener ganancias a partir del precio equilibrio (precio de ejercicio + prima) $26.00, ascendiendo el beneficio a $4.00. La diferencia entre ambos inversionistas radica en que la inversión realizada por el primero fue de $22.00 y la ganancia de $8.00 (36%), mientras que la inversión del segundo tan sólo fue de $4.00 con una ganancia de $4.00 (100%).

En caso de que no se cumplan las expectativas de los inversionistas y el mercado se mueva a la baja hasta un nivel de $15.00 la pérdida del primer inversionista ascienden a $7.00 (precio de ejercicio - precio de mercado)mientras que el segundo aseguró una pérdida máxima de $4.00 ya que el precio de valor en referencia al vencimiento expira sin valor alguno y la pérdida máxima es igual a la prima.

En este capítulo bosquejamos de una manera clara las distintas alternativas de inversión, como se vio anteriormente, en los mercados financieros se pueden realizar inversiones sin riesgo, pero por otro lado existen también inversiones que contienen cierto grado de riesgo, este riesgo se analiza detalladamente en el capítulo II, ya que como se menciono anteriormente los rendimientos de inversiones suelen traer aparejado un cierto nivel riesgo y es importante cuantificarlo.

CAPÍTULO II

CAPÍTULO II

INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se mencionaron los diferentes mercados y por consecuencia las diferentes alternativas de inversión, en este capítulo hablaremos de los riesgos que se presentan en dichos mercados.

Primeramente se clasifican los riesgos en riesgos intrínsecos y riesgos exógenos, a partir de está clasificación analizamos más detenidamente los riesgos financieros, se menciona también la línea de mercado, que nos ayuda a determinar que tanto riesgo tiene acción con respecto al mercado.

- Riesgos en los Mercados

Los inversionistas potenciales reaccionan como los consumidores al comprar. Reciben la influencia de la publicidad, de la imagen de la empresa y del precio. Por lo general no agotan todas sus posibilidades de compra a la primera oportunidad de inversión, sino que llegan a ser compradores muy exigentes cuando seleccionan un portafolio de valores. Por lo tanto es necesario definir e identificar cada uno de los riesgos que se presentan en los mercados financieros, nos daremos cuenta que algunos de estos riesgos dependen de la compañía, como por ejemplo el riesgo crediticio que se definirá posteriormente. Existen otros riesgos que no dependen de la compañía y afectan a todas las compañías en su totalidad, estos riesgos son propios de una economía, como la inflación.

De esta forma nos daremos cuenta de la necesidad que tienen los inversionistas, de realizar un análisis detallado y profundo de los títulos que desean adquirir, para obtener los mejores resultados. A continuación se mencionan algunas situaciones en las cuales se manifiestan los riesgos financieros.

Por ejemplo, prestatarios que obtienen financiamientos denominados en dólares a una tasa flotante pueden encontrarse en una situación poco deseable si las tasas aumentan; las compañías con obligaciones en moneda extranjera se exponen a quedar con mayores deudas en términos de pesos si el tipo de cambio peso/otra divisa se eleva; análogamente, las compañías con cuentas por cobrar en moneda extranjera pueden experimentar una reducción de sus utilidades en pesos si el tipo de cambio peso/otra divisa se reduce, y los inversionistas con planes para adquirir instrumentos de los mercados de dinero internacionales pueden enfrentarse a precios más elevados si las tasas de interés bajan.

En general, hay dos tipos de riesgos: riesgos intrínsecos y riesgos exógenos.

- Riesgos Intrínsecos.

Son riesgos propios de la actividad de una compañía. Por ejemplo una compañía fabricante de pantalones de mezclilla adquiere telas y diseños, emplea mano de obra, renta instalaciones para producirlos y espera venderlos a un precio mayor, que su costo de elaboración. Sus riesgos intrínsecos son aquellos relacionados con la venta y fabricación de los pantalones de mezclilla, y su capacidad para administrar estos riesgos determina su solvencia o riesgo crediticio.

- Riesgos Exógenos.

Los riesgos exógenos son aquellos que están fuera del control de la compañía, como los riesgos de variaciones indeseables en el tipo de cambio, la tasa de interés etc...Por ejemplo, si una compañía mexicana vende pantalones de mezclilla a Japón y extienden una factura en yenes liquidable a 45 días, se expone a un riesgo cambiario, originado por una posible caída del tipo de cambio peso/yen, en cuyo caso recibiría menos pesos por el monto de su venta.

Otro riesgo exógeno que enfrenta la compañía fabricante de pantalones de mezclilla es el riesgo de tasa de interés. Si la empresa tiene adeudos denominados en dólares a tasa flotante, y las tasas de interés se elevan, su obligación aumentará. Análogamente, si planea emitir papel comercial, también se expone a una elevación en tasas de interés, en cuyo caso colocará su papel a un precio menos atractivo.

A continuación se definen y se identifican de una manera más precisa cada uno de los riesgos anteriormente mencionados.

- Riesgo de Crédito.

El riesgo de crédito se refiere a la capacidad que tiene la contrapartida en la transacción para cumplir con las obligaciones convenidas.

En los mercados financieros la capacidad para satisfacer una obligación se traduce en la capacidad de pagar cuando vence la obligación de entregar los fondos.

En el mercado de dinero uno toma y uno presta o coloca, fondos. El riesgo de crédito lo asume el prestamista o colocador ya que existirá el riesgo de que el tomador sea incapaz de devolver los fondos que se le han prestado. A pesar de que el préstamo se haga a un tipo de interés muy rentable, el gestor de fondos sufrirá un pérdida si el prestatario no es capaz de pagar la deuda.

Un ejemplo de las pérdidas causadas por el riesgo de crédito en el mercado de divisas se ilustra mediante el siguiente ejemplo:

Supóngase que el banco A vende marcos al banco B, a un precio de .48 USD/DM y que el banco B no cumple el contrato, por lo tanto el banco A tiene que vender de nuevo los marcos a otro banco, al tipo de cambio que prevalezca en el mercado, ahora supongamos que el tipo de cambio actual es de .40 USD/DM, claramente el banco A registrará una pérdida.

Riesgo Soberano.

El riesgo soberano constituye un apartado dentro del riesgo de crédito. Cualquier país dispone de la prerrogativa de cerrar, en un momento dado su ventanilla de cambio. Sobre todo en los países cuyas monedas son objeto de escasa negociación en el mercado, es posible que el banco central constituya la única fuente de divisas. Por lo tanto, podemos encontrarnos con la situación de una empresa que tiene un riesgo de crédito muy bueno, pero está situada en un país con un elevado riesgo soberano.

Por ejemplo podemos estar bastantes seguros de que la empresa será capaz de generar el volumen necesario de moneda local para pagar el préstamo que le hemos concedido en moneda extranjera.

Ahora bien si el banco central impide la conversión de la moneda local en la moneda extranjera, la suma que corresponde a la devolución del préstamo no estará disponible en la moneda extranjera deseada.

- Riesgo Cambiario

El riesgo cambiario se define como el riesgo de una variación en las ganancias netas como resultado de movimientos en un cierto tipo de cambio.

La identificación y medición de este riesgo se puede entender mejor mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.

Una compañía estadounidense importó tejidos de lana de Gran Bretaña y, en consecuencia, tiene una cuenta por pagar de 50 000 BP a 30 días. En ese lapso, la compañía esta expuesta al riesgo de una alza en el tipo de cambio dólares norteamericanos por libra esterlina, con lo cual su cuenta por pagar sería mayor en términos de dólares.

Supongamos para este ejemplo que el tipo de cambio al contado es semejante al tipo de cambio adelantado a 30 días, es decir, 1.50 usd/bp.

Con el propósito de medir el riesgo cambiario, es necesario determinar, en primer término, cuantos dólares espera pagar la compañía, así pues su cuenta por pagar sería de:

$$50\,000 \text{ bp} \times 1.50 \text{ usd/bp} = 75\,000 \text{ usd.}$$

Por lo tanto la compañía espera pagar 75 000 usd por las 50 000 libras esterlinas que adeuda.

Ahora si el tipo de cambio a 30 días no fuera de 1.50 usd/bp, sino de 1.51 usd/bp, la deuda sería de:

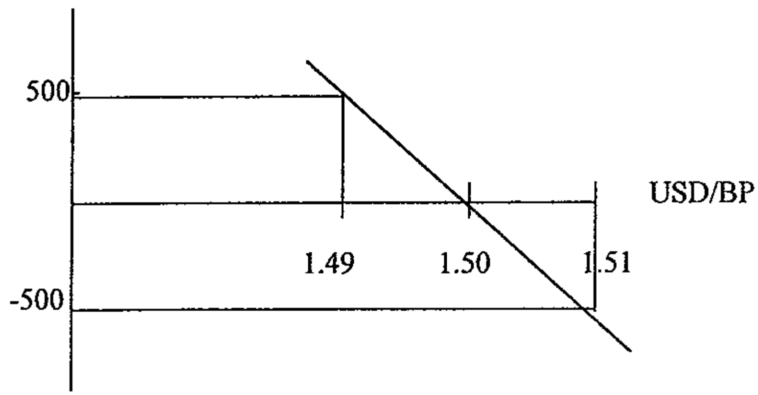
$$50\,000 \text{ bp} \times 1.51 \text{ usd/bp} = 75\,500 \text{ usd}$$

Por lo tanto la compañía pagaría 500 usd más de lo esperado. Por otro lado si el tipo de cambio se moviera en favor de la compañía, por ejemplo, a 1.49 usd/bp, la cuenta a pagar sería de:

$$50\,000 \text{ bp} \times 1.49 \text{ usd/bp} = 74\,500 \text{ usd}$$

Por lo tanto la compañía pagaría 500 usd menos de lo esperado. A continuación se muestra el cambio neto en las ganancias originadas por los diferentes tipos de cambio:

Cambio neto en USD



Ejemplo 2.

Una compañía mexicana importo tejidos de lana de Gran Bretaña y tiene una deuda por pagar a 30 días de 50 000 BP. Por lo tanto está expuesta a una alza del tipo de cambio pesos libras esterlinas, con lo cual su cuenta por pagar sería mayor en pesos.

Es decir la compañía está expuesta al riesgo de un mayor tipo de cambio USD/BP y por consecuencia a un mayor tipo de cambio PESO/USD. Para facilitar el ejemplo, se supondrá que el tipo de cambio al contado y el tipo de cambio adelantado a 30 días son iguales y supondremos que:

1.50 usd/bp, 8.60 peso/usd

Por lo tanto el tipo de cambio peso libra esterlina viene dado por:

8.60 peso/usd x 1.50 usd/bp = 12.90 peso/bp

Por otro lado la cantidad que espera pagar la compañía:

12.90 peso/bp x 50 000bp = 645 000

Ahora si el tipo de cambio es de 13.8 pesos/bp tenemos que la cuenta por pagar sería de:

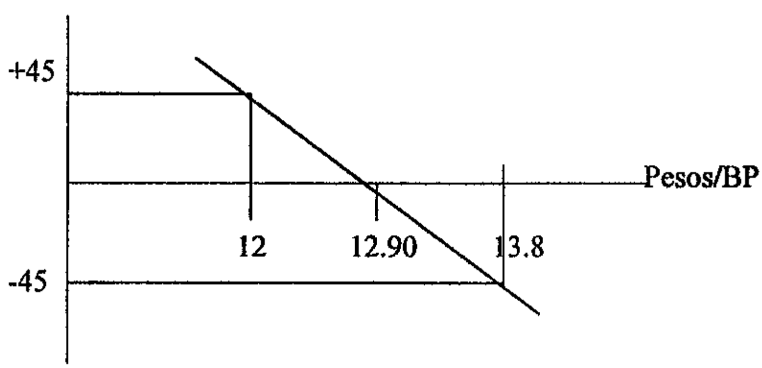
13.8 peso/bp x 50 000 bp = 690 000

es decir se pagarían 45 000 pesos más de lo esperado. Ahora si el tipo de cambio es 12 tenemos que:

12 peso/bp x 50 000 bp = 600 000 pesos

Por lo tanto se pagarían 45 000 pesos menos de lo esperado. A continuación se ilustran las diferentes situaciones a las que anteriormente se hizo referencia.

Cambio neto en miles de pesos



Cabe destacar que en los ejemplos anteriores el tipo de cambio adelantado y el tipo de cambio al contado se ha supuesto igual, lo cual es muy poco probable en la practica, así pues, para calcular el costo esperado en pesos respecto de los 50 000 BP no debe usarse el tipo de cambio al contado, sino el tipo de cambio adelantado y apartir de esta cotización medir la variación del riesgo cambiario, como el lector puede darse cuenta esto no dificulta los cálculos anteriores.

- Riesgo de tipo de interés

A nivel conceptual, es bastante sencillo identificar el riesgo de variaciones en las tasas de interés. Por ejemplo un banco o una empresa con adeudos a tasa flotante, se expone al riesgo de mayores tasas de interés, pues si estas se eleva lo hará también su deuda.

De igual manera el administrador de un portafolio que planea vender obligaciones, se arriesga a un aumento en las tasas de interés y , por lo tanto, a una baja en el precio de sus instrumentos. Por otra parte quien presta a tasas de interés flotantes, se expone a una baja en las tasas de interés. Asimismo, quien maneja un portafolio y planea comprar obligaciones se arriesga a una baja en las tasas de interés antes de efectuar la compra, con lo cual se elevará el precio de estos instrumentos.

El riesgo de tipo de interés en el mercado de dinero surge cuando los vencimientos de los préstamos y los depósitos tomados no están emparejados. Por ejemplo, cuando préstamos fondos a seis meses al tiempo que tomamos fondos, con vencimiento a un mes, el tipo de interés en el préstamo a seis meses ha quedado cerrado desde el principio. Sin embargo al final del primer mes se necesitan tomar depósitos adicionales para pagar la deuda inicial o bien para prorrogarla.

Ahora bien, al principio de la transacción no conocemos con certeza cuál será el tipo de interés en ese momento. Es muy probable, que el gestor de fondos que se encuentra en está situación, está especulando sobre la posibilidad de que los tipos de interés bajen después de transcurrido un mes. Si esta suposición resulta ser correcta, el gestor de fondos habrá asegurado o cerrado un tipo de interés elevado para el préstamo a seis meses, mientras que la refinanciación de la operación podrá hacerse al final del primer mes a un tipo de interés más bajo. Ahora bien si la expectativa inicial resulta equivocada y los tipos de interés aumentan y siguen aumentando durante lo que queda del periodo de préstamo, el gestor de fondos se verá forzado a obtener financiación (tomar dinero) a tipos de interés que pueden resultar más elevados que el tipo al que se colocaron o prestaron los fondos inicialmente.

- Riesgo de Liquidez

Antes de definir el riesgo de liquidez, damos la definición de liquidez, la cual nos ayudará a precisar mejor las ideas.

Liquidez

Es la capacidad de obtener dinero en efectivo. A nivel empresa también se le denomina liquidez a la capacidad de un activo de tener fácil convertibilidad en dinero en efectivo. Finalmente a nivel economía, se le llama liquidez a la facilidad o dificultad existente para obtener créditos. Se dice que hay liquidez o alta liquidez en la economía cuando los recursos de crédito son abundantes y viceversa.

Si prestamos fondos por seis meses mientras que tomamos fondos por un mes, existe el riesgo de que al final del mes momento en que se debe negociar la refinanciación está no se encuentre.

En un caso extremo podemos encontrarnos con un mercado de dinero lo suficientemente estrecho como para imposibilitar la obtención de fondos en el mercado, este es pues, meramente el riesgo de liquidez.

Este riesgo se origina en aquellos casos en los que nadie desea prestar fondos a la entidad en cuestión, a ningún tipo de interés debido a que dicha entidad a perdido toda su solvencia.

En cuanto a los riesgos que puede estar expuesto un inversionista en el mercado de capitales, todos estos riesgos se manifiestan en el riesgo de mercado que a continuación se define.

- Riesgo de mercado.

El riesgo de mercado, es el que surge cuando el mercado se mueve en dirección adversa a los intereses del inversionista.

Por lo tanto este riesgo contempla la posibilidad de que los resultados se vean afectados por variaciones adversas en la evolución de los precios.

Así pues hemos definido los riesgos financieros, a continuación nos concentraremos en analizar el riesgo de mercado, mencionaremos medidas que nos pueden ayudar a estimarlo.

Al diseñar una cartera los inversionistas buscan maximizar el rendimiento esperado de sus inversiones, dado el nivel de riesgo que están dispuestos a aceptar. Para diseñar una cartera eficiente es necesario entender lo que significa rendimiento esperado y riesgo de una cartera. Deberemos ser pues, más precisos acerca de su significado.

Primeramente necesitamos tener una expectativa de rendimiento y apartir de está, sería prudente medir la variabilidad de dicha expectativa. Así pues buscamos alguna medida que describa de una manera más precisa las rentabilidades pasadas del mercado, en otras palabras, ¿ Cuál es nuestra mejor estimación de la rentabilidad que un inversionista podría haber obtenido durante algún periodo en particular?

Una respuesta que parece bastante razonable es utilizar la rentabilidad promedio del título, ahora como dijimos anteriormente esto es solo una expectativa está claro que la rentabilidad real puede ser mayor o menor a dicha expectativa.

Así pues, surge una segunda cuestión y que nos parece muy importante ¿Como medimos la dispersión de nuestras rentabilidades?. Para contestar esta cuestión primeramente definiremos el riesgo de la cartera.

- Riesgo de la cartera.

La definición de riesgo de inversión nos conduce a un territorio menos explorado. No todos están de acuerdo sobre la manera de definir el riesgo. No obstante, hay algunos atributos del riesgo que son razonablemente aceptados.

Un inversionista que tenga una cartera de cetes hasta la fecha de vencimiento, no afronta incertidumbre sobre resultados monetarios. El valor de la cartera al vencimiento de los valores será idéntico al valor predicho y el inversionista no afronta riesgo monetario. Sin embargo en el caso de una cartera de acciones sería imposible predecir el valor de la cartera a cualquier fecha futura. Lo mejor que un inversionista puede hacer es calcular una estimación de la mejor opción o la estimación más probable, calificada por los informes acerca del rango y la similitud con otros valores. En este caso el inversionista afronta un riesgo.

Una medida de riesgo es la extensión a la cual los posibles valores de la cartera probablemente diverjan del valor esperado o predicho. Más específicamente, el riesgo para la mayoría de los inversionistas esta relacionado, con las desviaciones por debajo del rendimiento esperado.

Una manera de medir la volatilidad de la rentabilidad cuando estamos analizando un título únicamente, más aún supongamos que un inversionista tiene un portafolio constituido por un sólo título, está suposición no es real pero nos ayudará a responder la pregunta anteriormente planteada, además en el análisis siguiente consideraremos el caso en el que el portafolio del inversionista se constituye de más de un título.

Ahora bien si el inversionista tiene un título y desea estimar o medir la posibilidad de que existan desviaciones en la rentabilidad esperada o promedio, y de acuerdo con la definición de riesgo de la cartera podemos intuir que una buena medida de dispersión es la varianza ya que está mide las desviaciones apartir de la media. También usaremos la desviación estándar del título la cual no es más que la raíz cuadrada de la varianza.

Como dijimos anteriormente no es común que el inversionista tenga sólo un título. En la práctica los inversionistas poseen varios títulos, en este caso la inquietud que surge es medir la contribución del título al riesgo de la cartera, ya que en una cartera grande y bien diversificada gran parte de la varianza de un título esta dispersa, en este caso no se puede considerar la varianza del título, ni su desviación estándar como la contribución del mismo al riesgo de la cartera. Por otro lado tampoco se puede considerar como el riesgo del portafolio, el simple promedio ponderado de las desviaciones estándar de los valores individuales. El riesgo de un portafolio no depende sólo del riesgo de los títulos individuales que forman el portafolio, sino también de la relación existente entre los títulos.

De acuerdo con lo anterior necesitamos medir la relación existente entre cada par de títulos, o lo que es lo mismo necesitamos medir la relación existente entre dos variables apartir de dos conjuntos de datos, de nuestros cursos de estadística sabemos que las medidas de relación entre dos variables son la covarianza y la correlación. En el capítulo siguiente haremos un análisis detallado de las medidas estadísticas que se mencionan en el capitulo presente.

Ahora, analizaremos la relación que existe entre el retorno de un titulo y el portafolio de mercado para activos con riesgo.

La relación entre el rendimiento de un activo con riesgo y el retorno de mercado queda descrita por la línea característica o modelo de mercado, el cual queda definido por:

$$r_i = r_f + \left[\left(\frac{r_m - r_f}{\sigma^2(r_m)}\right)\right] * Cov(r_i, r_m)$$

donde:

r_i = Rendimiento esperado del título i.
r_f = Es la tasa libre de riesgo.
r_m = Rendimiento esperado del portafolio de mercado.
$\sigma^2(r_m)$ = Varianza de los rendimientos del mercado.
$Cov(r_i,r_m)$ = Covarianza del título i, con el portafolio de mercado.

Podemos notar que los títulos con valores grandes de covarianza, deberían proporcionar un retorno esperado alto, ya que si tenemos un titulo con una covarianza con el mercado grande y retorno esperado bajo, el inversionista podría concluir que el título contribuye mucho al riesgo del portafolio y no contribuye de igual manera al rendimiento del mismo, por lo tanto el inversionista no invertiría en dicho título.

En la ecuación característica tenemos que cuando $Cov(r_i,r_m) = 0$, es decir, cuando la covarianza de un título con riesgo y el portafolio del mercado es cero, se espera que le retorno esperado del título, sea equivalente al retorno esperado que tiene un activo libre de riesgo .Con frecuencia se utiliza la tasa de certificados de la tesorería como sustituto de la tasa libre de riesgo.

Lo anterior se debe a que el titulo con riesgo, no contribuye al riesgo del portafolio, a continuación se ilustra esto en la línea característica:

$$r_i = r_f + \left[\left(\frac{r_m - r_f}{\sigma^2(r_m)}\right)\right] * Cov(r_i, r_m)$$

teniendo en cuenta que $Cov(r_i,r_m) = 0$, tenemos :

$$r_i = r_f + \left[\left(\frac{r_m - r_f}{\sigma^2(r_m)}\right)\right] * 0 = r_f$$

Por otro lado es posible tener títulos, que tenga un retorno esperado menor a la tasa libre de riesgo, esto sucede si $Cov(r_i.r_m) < 0$, otra observación interesante surge cuando tenemos que $Cov(r_i,r_m) = \sigma^2(r_m)$ en este caso el retorno del titulo será:

$$r_i = r_f + \left[\left(\frac{r_m - r_f}{\sigma^2(r_m)}\right)\right] * \sigma^2(r_m)$$

Simplificando la ecuación anterior tenemos:

$$r_i = r_f + r_m - r_f = r_m$$

Otra forma bastante común de expresar la línea característica es:

$$r_i = r_f + (r_m - r_f) * \beta_i$$

donde :

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_m)}{\sigma^2(r_m)}$$

β_i se conoce como la beta de un titulo, representa la sensibilidad del titulo a los rendimientos del mercado en exceso de la tasa libre riesgo.

Si la beta es igual a uno, entonces los rendimientos del titulo variarán en forma proporcional al mercado.

Si beta es mayor que uno, esto significa que el titulo tiene más riesgo que el mercado en conjunto. Este tipo de inversión suele llamarse inversión agresiva.

Por otro lado, si la beta es menor que uno, el titulo tiene menos riesgo que el mercado en conjunto, a este tipo de inversión suele llamársele inversión defensiva.

Este riesgo no se puede diversificar mediante la inversión en otros activos con riesgo porque depende de situaciones como los cambios en la economía lo cual afecta a todos los activos con riesgos.

Como podemos notar la línea característica queda definida por dos parámetros claves que son la tasa libre de riesgo y la beta del titulo, a la tasa libre de riesgo se le conoce como recompensa por esperar, y a la beta del titulo se le conoce como, recompensa que se obtiene por cada unidad de riesgo asumida.

Por lo tanto podemos concluir que si:

$$\beta \leq r_f$$

es decir si la recompensa por asumir más riesgo no es mayor a la tasa libre de riesgo, mejor se invierte todo el capital a tasa libre de riesgo, ya que cuando se asume más riesgo se incrementa la varianza, es decir hay más posibilidades de que el resultado real diverja del valor esperado.

Por otro lado si $\beta > r_f$, entonces el portafolio óptimo podría construirse, de una parte de activos con riesgo y otra parte de activos libres de riesgo, también se puede dar el caso de que el portafolio óptimo incluya puros activos con riesgo esto dependerá del grado de aversión al riesgo por parte del inversionista.

A continuación mostramos un ejemplo que nos dará una mejor idea de lo que mencionamos en los párrafos anteriores.

Consideremos las siguientes rentabilidades posibles tanto de las acciones de la empresa Jelco Inc, así como las rentabilidades del mercado. Supongamos también que hay dos posibles estados de la economía y además ambos son igualmente probables:

Tipo de Economía	Rentabilidad del mercado	Rentabilidad de la acción
Al alza	15 %	20 %
Al la baja	-5 %	-10 %

Como podemos notar la empresa, responde a los movimientos del mercado porque la rentabilidad esperada es mayor en los estado a la alza que en los estados a la baja.

Así pues en base a los datos anteriores tenemos que la beta es igual a 1.5, así pues podemos concluir que cuando el mercado presenta un buen comportamiento, se espera que las acciones de la empresa se comporten aún mejor. Cuando el comportamiento del mercado es pobre se espera que la rentabilidad de la empresa se comporte aún peor.

Un inversionista al analizar este título se daría cuenta que las acciones contribuyen mucho al riesgo de la cartera.

Utilizando está beta consideremos el siguiente ejemplo, con lo cual finalizamos el capítulo:

Supongamos que el rendimiento esperado en los certificados de la tesorería a corto plazo son del 10%, la cual como se menciono anteriormente se puede considerar como la tasa libre de riesgo o la alfa, el rendimiento esperado del portafolio del mercado es de 15 % y consideremos la beta como 1.5. De acuerdo con estos datos el rendimiento esperado de la acción es:

$$r_i = .10 + (.15 - .10)*1.5 = 17.5\ \%$$

Por lo tanto se espera que las acciones de la empresa presenten un rendimiento anual del 17.5 %.

En este capítulo se presento la Línea de Mercado que puede ser de gran utilidad al inversionista para determinar el comportamiento de las acciones con respecto al mercado, y por lo tanto realizar una selección más cuidadosa de las posibles acciones que podrían ser tomadas en cuenta para formar un portafolio, en el siguiente capítulo se determina las expresiones para el retorno esperado de un portafolio así como para determinar la varianza del mismo.

CAPÍTULO III

CAPÍTULO III

INTRODUCCIÓN

El modelo de markowitz que es presentado en este trabajo, nos ayuda a construir un portafolio optimó de acciones, por lo tanto, a partir del rendimiento de las acciones se deriva el análisis.

Se definen primeramente conceptos probabilísticos los cuales nos ayudarán a dar validez a la expresiones utilizadas para calcular el rendimiento de la cartera así como la varianza de la misma, a su vez estos mismos conceptos son trasladados al campo de la estadística ya que a través de está, estimamos los parámetros desconocidos.

- Rendimiento de las Acciones.

Si los rendimientos de las acciones varían aleatoriamente, y además suponemos que los rendimientos de las acciones son independientes, es decir, el rendimiento de una acción no tiene que ver con el rendimiento de otra acción, bajo estás suposiciones es obvio que no conocemos los rendimientos que pudieran prevalecer en el futuro por lo tanto necesitamos pronosticarlos. Así pues iniciamos nuestro estudio sobre el rendimiento de las acciones.

- Valor esperado y Varianza de una variable aleatoria

Valor Esperado de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución de probabilidades f. El valor esperado de X se define como:

$$E(X) = \int_{\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Para el caso discreto tenemos:

Definición.

Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles $x_{1,\ldots\ldots\ldots\ldots,}x_{n\ldots\ldots}$ Sea p (x_i) = P(X = x_i), i = 1,2,3,.......n...... el valor esperado de X (esperanza matemática de x) denotado E (X), se define como:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i * f(x_i)$$

Observación.-

Si se lanza un dado regular y la variable aleatoria X designa el número de puntos que salen, entonces E (X) es igual a E (X) = 1/6 * (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7/ 2.Este ejemplo sencillo ilustra, que E (X) no es un resultado que esperaríamos cuando X se observa una sola vez. Por el contrario sucede que si obtenemos un gran número de observaciones independientes de X, tales como $x_1,\ldots\ldots,x_n$, y calculamos el promedio aritmético de los resultados, estará cerca del valor E (X), así pues la E(X) es una medida de tendencia central cuando el experimento se realiza repetidas ocasiones.

Ahora bien, es obvio que al inversionista le interesa estimar el rendimiento del título i-ésimo, claro está que dicho rendimiento es desconocido. Una de las medidas de tendencia central más comunes y de las más útiles es el promedio aritmético de un conjunto de observaciones. A está medida se le conoce también como media aritmética o simplemente media de un conjunto de n observaciones.

- Media Aritmética

La media aritmética de un conjunto de n observaciones $x_1,\ldots\ldots,x_n$ es igual a la suma de las observaciones dividida entre n, así pues la media muestral queda definida como:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Ejemplo.

Encuentre la media aritmética de las observaciones: 2,9,11,5,6

$$\overline{X} = \frac{2+9+11+6+}{5} = 6.6$$

Al adecuar este concepto al análisis de las acciones, tenemos que el estimador del rendimiento de una acción queda determinado por:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n}$$

Donde los rendimientos r_i se observan durante un período bien especifico.

A continuación mencionamos una propiedad importante del valor esperado que nos será de utilidad más adelante.

Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ n variables aleatorias y a_i es un número real para toda i = 1, 2 …, n entonces tenemos que

$$E(a_1 Y_1 + \ldots + a_n Y_n) = E(a_1 Y_1) + \ldots + E(a_n Y_n)$$
$$= a_1 E(Y_1) + \ldots + a_n E(Y_n)$$

- Varianza de una variable aleatoria.

Definición.

Sea X una variable aleatoria. Definamos la varianza de X, denotada por V(X), como sigue:

$$V(X) = E(X - E(X))^2$$

La raíz cuadrada de V(X) se llama desviación estándar de X denotada por σ_x.

Observaciones:

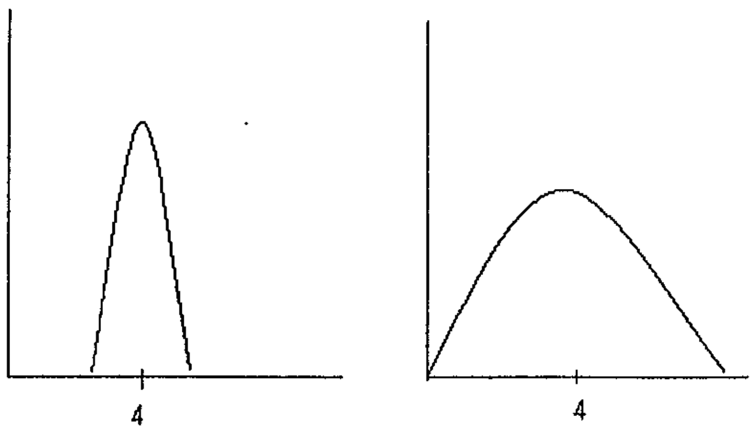
El número V(X) está expresado en unidades cuadradas de X . Esta es una razón para considerar la desviación estándar, la cual se expresa en las mismas unidades que X.

Expresión alternativa para la varianza.

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2)$$
$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X))^2$$
$$= E(X^2) - E((X))^2$$

Continuando, con el estudio de los estadísticos que nos ayudan a estimar parámetros, tenemos que una vez localizado el centro de la distribución de un conjunto de datos, el siguiente paso es buscar una medida de variabilidad o dispersión de los datos.

Consideremos las siguientes distribuciones, ambas distribuciones están centradas en y=4, pero existe una gran diferencia en la variabilidad de las observaciones alrededor de la media para estas distribuciones.



La variabilidad es una característica muy importante de un conjunto de datos. Por ejemplo si se están fabricando tornillos, la variación excesiva en el diámetro de los tornillos implica un alto porcentaje de productos defectuosos.

Primeramente notamos que es posible medir la variabilidad en términos de las distancias entre cada punto (observación) y la media de las observaciones. Si las distancias son grandes podemos decir que hay más variabilidad que si las distancias son pequeñas. Más explícitamente se define la desviación de una observación y_i de su media por la medida:

$$Y_i - \overline{Y}$$

Nótese que las observaciones a la derecha de su media producen desviaciones positivas y las observaciones a la izquierda producen desviaciones negativas.

Si se está de acuerdo en que las desviaciones contienen información sobre la variación de las observaciones, el siguiente paso es construir una fórmula basada en las desviaciones y que sea una buena medida de variación.

Una posibilidad que se puede considerar, como medida de variación es considerar el promedio de las desviaciones. Desafortunadamente está idea no funcionará porque algunas desviaciones son positivas y otras negativas, y su suma siempre es cero. Esto último puede verificarse fácilmente y a continuación se exhibe:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}\bar{y}\\ &= \sum_{i=1}^{n}y_i-n\bar{y}\\ &= \sum_{i=1}^{n}y_i-n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}y_i=0.\end{aligned}$$

Para evitar está dificultad causada por los signos, es preferible usar la suma de cuadrados de las desviaciones:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

Para un número fijo de observaciones, cuando está cantidad es grande, los datos son más variables que cuando es pequeña.

- Varianza Muestral

La varianza muestral de un conjunto de n observaciones $y_1,\ldots\ldots,y_n$ se define como el promedio del cuadrado de las observaciones con respecto a su media muestral. La varianza de la muestra se denota por S^2, y está dada por la fórmula:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

Grandes varianzas implican gran variación en los datos, pero una afirmación de este tipo permite solamente comparaciones entre distintos conjuntos de datos. Hasta aquí la varianza muestral no dice nada en especifico acerca de un solo conjunto de datos.

Por ejemplo ¿ Qué se puede decir de la variabilidad de un conjunto de datos que tenga varianza igual a 100?. La respuesta no puede darse con los elementos que disponemos se intentará remediar está situación por medio de una nueva definición.

Definición

La desviación estándar de un conjunto de n observaciones $y_1,\ldots\ldots,y_n$ es igual a la raíz cuadrada de la varianza.

La varianza se mide en términos del cuadrado de las unidades originales. Si las observaciones están medidas en centímetros la varianza esta dada en centímetros cuadrados. Al tomar la raíz cuadrada de la varianza, se obtiene la desviación estándar, con lo que se regresa a las unidades originales de las observaciones.

- Desviación Estándar Muestral

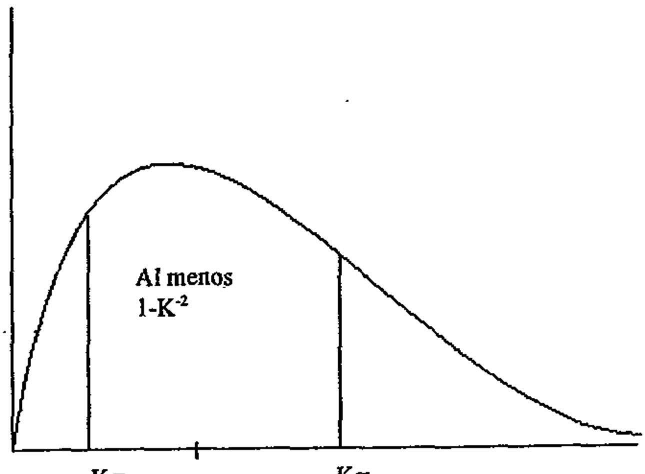
$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$$

A continuación presentamos un interesante y útil teorema.

Teorema de Tchebysheff

Dados un número $k \geq 1$, y un conjunto de observaciones $y_1,\ldots\ldots,y_n$, al menos ($1 - 1/k^2$) de las observaciones caen dentro de k desviaciones estándar de su media.

La idea contenida en el teorema de Tchebysheff se ilustra en la siguiente figura, en la cual se construye un intervalo midiendo una distancia de $k\sigma$ a ambos lados de la media. Notese que el resultado del teorema es cierto para cualquier número k siempre y cuando este sea mayor o igual que uno. Entonces dentro de este intervalo se tendrá una fracción de ($1 - 1/k^2$) del número total de las observaciones.



Para entender mejor este resultado, se calculan valores de la fracción correspondiente a ($1 - 1/k^2$).

Para k =1, el teorema afirma que cuando menos el $1 - 1/1 = 0$ de las observaciones caen en el intervalo ($\mu - \sigma$) a ($\mu + \sigma$), resultado que no proporciona información en absoluto . Pero para k = 2, 1- $(1/2^2)$ =3/4 de las observaciones caen en el intervalo ($\mu - 2\sigma$) a ($\mu + 2\sigma$). Cuando menos el 8/9 de las observaciones caen dentro de tres desviaciones estándar de la media, es decir, dentro del intervalo dado por ($\mu - 3\sigma$) a ($\mu + 3\sigma$).

Ejemplo

La media y la varianza de una muestra n = 25 son 75 y 100 respectivamente. Use el teorema de Tchebysheff para describir la distribución de las observaciones.

Se tiene $\bar{Y}$= 75 y S^2 = 100, por lo tanto se tiene que S =10. La distribución de las observaciones está centrada en $\bar{Y}$= 75 y aplicando el teorema tenemos que:

- Al menos 3/4 de las 25 observaciones caen en el intervalo dado por $(75 \pm 20) = (55, 95)$
- Al menos 8/9 de las 25 observaciones caen en el intervalo dado por $(75 \pm 30) = (45, 105)$

A continuación mencionamos una propiedad importante de la varianza que será utilizada más adelante:

Sea $Y_1, \ldots\ldots, Y_n$, n variables aleatorias independientes entonces:

$$V(Y_1 + , \ldots\ldots, + Y_n) = V(Y_1) + \ldots\ldots + V(Y_n)$$

Sea Y una variable aleatoria y C es una constante, entonces

$$V(CX) = C^2 V(X)$$

Ahora encontraremos el valor esperado y varianza de:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$$

Supongamos que $Y_1, \ldots\ldots\ldots Y_n$ son variables aleatorias independientes y $E(Y_i) = \mu$ y $V(Y_i) = \sigma^2$, encontrar la esperanza y la varianza del promedio de las $Y_{i's}$

Tenemos que:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}Y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n}Y_n$$

$$E(\overline{Y}) = \frac{1}{n}E(Y_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n}E(Y_n)$$

$$= \frac{1}{n}\mu + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n}\mu$$

$$= n\frac{1}{n}\mu$$

$$= \mu$$

Por otro lado:

$$V(\overline{Y}) = V(\frac{1}{n}Y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n}Y_n)$$

$$= V(\frac{1}{n}Y_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + V(\frac{1}{n}Y_n)$$

$$= \frac{1}{n^2}V(Y_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n^2}V(Y_n)$$

$$= n\frac{1}{n^2}\sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

A continuación desarrollaremos una aproximación para la distribución muestral del promedio que se puede utilizar sea cual fuere la distribución de la población de la cual se toma la muestra.

Veremos que el promedio de las $Y_{i's}$ tendrá una distribución que es aproximadamente normal si el tamaño de la muestra es grande.

El resultado formal antes indicado se denomina teorema del limite central.

Teorema.

Sean $Y_1,\ldots\ldots\ldots,Y_n$ variables aleatorias independientes y distribuidas idénticamente con $E(Y_i) = \mu$ y $V(Y_i) = \sigma^2 < \infty$
Definimos :

$$U_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu)}{\sigma}$$

Entonces la función U_n converge a la función de distribución normal estándar cuando n crece indefinidamente.

Un valor de n mayor o igual que 30 garantizará generalmente que la distribución U_n se pueda aproximar muy bien por una distribución normal.Es importante notar que el teorema del limite central se puede aplicar para una muestra aleatoria $Y_1,\ldots\ldots\ldots,Y_n$ de cualquier distribución, en tanto que $E(Y_i) = \mu$ y $V(Y_i) = \sigma^2$ sean finitas y tamaño de muestra sea grande.

Ahora mencionaremos la regla empírica, la cual después de haber visto que una distribución normal aproxima muy bien los rendimientos de las acciones da una mayor solidez a nuestro estudio.

La regla empírica

Dada una distribución de las observaciones con forma aproximadamente normal, entonces el intervalo:

- $(\mu \pm \sigma)$ contiene aproximadamente al 68 % de las observaciones.
- $(\mu \pm 2\sigma)$ contiene aproximadamente al 95 % de las observaciones.
- $(\mu \pm 3\sigma)$ contiene casi todas las observaciones.

A continuación se da un ejemplo de la utilidad del teorema del limite central.

Ejemplo

Los tiempos de espera para los clientes que pasan por una caja registradora a la salida de una tienda de menudeo son variables aleatorias independientes con una media de 1.5 minutos y una varianza de 1. Aproxime la probabilidad de que se pueda atender a 100 clientes en menos de dos horas.

$$P(\sum_{i=1}^{100} Y_i \leq 120) = P(\overline{Y} \leq 1.2)$$

Ya que el tamaño de muestra es grande, el teorema del limite central establece que Y es una distribución normal con media μ = 1.5 y varianza = .01, por lo tanto:

$$P(\overline{Y} \leq 1.2) = P\left[\frac{\overline{Y}-1.5}{.1} \leq \frac{1.2-1.5}{.1}\right] \approx P(z \leq -3) = .0013$$

Así la probabilidad de que se pueda atender a 100 clientes en menos de dos horas es muy pequeña, lo que para casos prácticos indica que es casi imposible despachar a 100 clientes en menos de 2 horas de servicio.

Así pues, después de haber dado una medida de estimación sobre el rendimiento esperado y riesgo de un título, ahora procederemos a determinar el retorno esperado de la cartera, así como su variabilidad, tomando en cuenta que una cartera es una suma ponderada de variables aleatorias.

- Selección de la Cartera.

Quienes invierten en el mercado accionario, requieren de una serie de análisis para fundamentar sus decisiones de inversión, que van desde determinar que acciones comprar o vender, hasta determinar en que momento hacerlo.

Estos análisis reciben el nombre de Análisis Bursátil, y se dividen en dos grandes grupos:

Análisis Fundamental

Es el conjunto de análisis relativos a la economía del país, el sector y ramo de la empresa, estados financieros y demás información de la emisora, planes y proyectos a futuro.

Análisis Técnico.

Agrupa el conjunto de análisis relativos a las fluctuaciones de los precios accionarios en el mercado para identificar patrones que revelen oportunamente tendencias y lograr con ello mayores rendimientos.

Podemos decir que para seleccionar una cartera se realizan los siguientes procesos:

1. - Análisis de los valores.
2. - Análisis de la cartera.
3. - Selección de la cartera.

Al analizar los valores individuales, se intentará pronosticar el rendimiento futuro de dichos valores, así como analizar que tan riesgosos son los títulos, en el análisis de la cartera se trata de hacer predicciones sobre la cartera en conjunto, teniendo presente que una cartera se compone de títulos individuales las predicciones sobre la cartera dependen totalmente de las predicciones hechas sobre los títulos individuales.

Claramente al seleccionar una cartera, se reflejarán las preferencias del inversionista hacia el riesgo y rendimiento, así pues el inversionista escogerá lo que le parece mejor.

Para determinar el rendimiento de una cartera denotaremos:

r_i = Rendimiento de la i-ésima acción
P_i = Cantidad de capital invertido en la acción i.

Por otro lado recordamos la ecuación:

$$S = P + I$$

La cual establece que el monto generado por una inversión (S) es igual a la cantidad inicial invertida (P), más los intereses generados durante el periodo de inversión (I), donde los intereses o rendimiento, queda determinado por $I = P * R$.

De está forma tenemos que para un título individual el valor de la inversión al final del periodo es:

$$\begin{aligned} S_i &= P_i + P_i * r_i \\ &= P_i (1 + r_i) \end{aligned}$$

Ahora supongamos que en nuestra cartera tenemos n valores por lo tanto en este caso la ecuación anterior se modifica y queda expresada como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} S_i &= \sum_{i=1}^{n} (P_i + P_i * r_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_i(1 + r_i) \end{aligned}$$

Al inicio denotamos P_i como la cantidad invertida en el título i , así pues denotamos :

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = P$$

Donde P es el capital total invertido en los n títulos. Sea P* r que denote el rendimiento total de la cartera de está forma tenemos que:

$$P + P * r = \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=1}^{n} P_i * r_i = P + \sum_{i=1}^{n} P_i * r_i$$

De está última igualdad tenemos que:

$$P * r = \sum_{i=1}^{n} P_i * r_i$$

Dividiendo entre P de ambos lados de la igualdad obtenemos la ecuación:

$$r = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{P} * r_i$$

Si denotamos X_i como el porcentaje de fondos de la cartera invertidos en el título i, sustituyendo esto en la última ecuación tenemos:

$$r = \sum_{i=1}^{n} X_i * r_i$$

$$X_i = \frac{P_i}{P}$$

Es claro que se debe tener la suma de las $X_{i's}$ =1, inicialmente nos enfocaremos al caso en que:

$0 \leq X_i \leq 1$ para toda i = 1,.........,n

Podemos concluir pues que el rendimiento de la cartera es el promedio ponderado de los rendimientos de los valores que se encuentran incluidos en la cartera, claramente la ponderación que se aplica a la acción i-ésima es el porcentaje de fondos invertidos en dicha acción.

Ahora el siguiente paso es determinar la variabilidad del rendimiento de la cartera.

De acuerdo al estimador que se definió anteriormente y que nos da una buena medida de la variabilidad de un conjunto de datos, tenemos que el estimador de la variabilidad del rendimiento de la acción i-ésima queda definido por:

$$S^2{}_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r})^2}{n-1}$$

Por otro lado intuitivamente, esperaríamos que la relación existente entre cada título influya de alguna manera en el riesgo de la cartera, por lo cual definiremos una medida de relación entre dos variables.

Pensamos en la dependencia de dos variables aleatorias Y_1 , Y_2 como el caso en el que una variable, digamos Y_1 crece o decrece cuando Y_2 cambia. Concentraremos nuestra atención en dos medidas de dependencia la Covarianza y Coeficiente de correlación lineal, a continuación se muestran dos figuras que nos ayudarán a justificar el porque de su elección como medidas de dependencia.

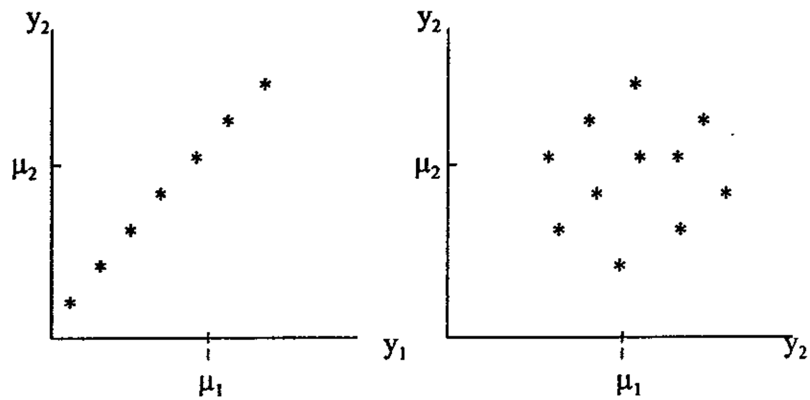


figura (a)   figura (b)

Si todos los puntos caen sobre una línea recta, como se indica en la figura (a) las observaciones son dependientes Y_1, Y_2.

Por el contrario la figura (b) nos indica un poco o ninguna dependencia entre Y_1, Y_2.

Supongase que realmente conocemos los valores esperados $E(Y_1) = \mu_1$ y $E(Y_2) = \mu_2$ y localizaremos este punto en la gráfica (a), ahora escogamos un punto (Y_1 , Y_2) y determinemos las desviaciones correspondientes a ($Y_1 - \mu_1$) y ($Y_2 - \mu_2$). Observemos que ambas desviaciones tendrían el mismo signo algebraico para un punto en particular y por tanto su producto, $(Y_1 - \mu_1) * (Y_2 - \mu_2)$, será positivo.

Lo anterior se cumple para todos los puntos de la figura (a), para los cuales se tiene que $\mu_1 < Y_1$, por lo tanto podemos concluir, que para los puntos a la derecha de μ_1 corresponderán pares de desviaciones positivas; mientras que para los puntos a la izquierda de μ_1 corresponderán pares de desviaciones negativas; y el promedio del producto de las desviaciones, $(Y_j - \mu_1) * (Y_i - \mu_2)$, será grande positivo.

Si la relación lineal dada en la figura (a) tuviera una pendiente negativa, todos los pares correspondientes de las desviaciones habrían sido de signo opuesto, y el valor medio de $(Y_j - \mu_1) * (Y_i - \mu_2)$ hubiera sido un número grande negativo.

La situación descrita con anterioridad no se presentará en la figura (b) en donde hay poca dependencia entre Y_1 y Y_2. Las desviaciones correspondientes, $(Y_j - \mu_1) * (Y_i - \mu_2)$, tendrían el mismo signo algebraico para algunos puntos y signos opuestos para otros puntos. Así el producto $(Y_j - \mu_1) * (Y_i - \mu_2)$ sería positivo para algunos puntos , negativo para otros, y tendrá un promedio cercano a cero.

La covarianza definida sobre una población bivariable asociada con Y_1, Y_2 se establece en la siguiente definición.

- Covarianza

La Covarianza de Y_1, Y_2 se define como el valor esperado ($Y_1 - \mu_1$) * ($Y_2 - \mu_2$). En la notación de la esperanza la Covarianza será igual a:

$$\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = E((Y_1 - \mu_1) * (Y_2 - \mu_2))$$

en donde $E(Y_1) = \mu_1$ y $E(Y_2) = \mu_2$.

Para estimar la covarianza usaremos la siguiente expresión:

$$Cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{n}$$

Por otro lado tenemos:

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

y usando esta última expresión podemos determinar una expresión alternativa para la covarianza:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sigma_x \sigma_y \rho_{xy}$$

El coeficiente de correlación entre el título X y el título Y está dado por:

$$\rho_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sigma_x \sigma_y}$$

Supongamos que tenemos dos acciones A y B, respectivamente, además supongamos que la acción A tiene un retorno por arriba del promedio cuando el retorno de la acción B está por arriba del retorno esperado, así mismo el retorno de la acción A está por debajo del promedio, cuando el retorno de la acción B está por debajo del retorno esperado, esto implica una relación positiva entre ambos retornos.

Inversamente supongamos que el retorno de la acción A está por arriba del promedio siempre que el retorno de la acción B está por debajo del promedio, y viceversa, en este caso diremos que ambos retornos están relacionados negativamente.

A continuación, mencionaremos un resultado que nos ayudará a determinar la varianza de una suma de variables aleatorias y por consiguiente, a determinar la varianza de un portafolio.

Teorema

Sean $Y_1, \ldots\ldots\ldots Y_n$ variables aleatorias con $E(Y_i) = \mu_i$ y a_i un número entonces tenemos que :

$$V(a_1Y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_nY_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2 + 2\sum\sum_{i<j} a_i a_j \sigma_{ij}$$

Donde σ_{ij} es la covarianza entre las variables Y_i , Y_j .

De esta manera tenemos que la varianza de la cartera queda definida por:

$$V(Cartera) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j E\left[(R_i - \overline{R}_i) * (R_j - \overline{R}_j)\right]$$

Nótese que X_i , X_j son constantes para cada i y j correspondiente.

Analizaremos la varianza de una cartera compuesta por dos activos.

$$V(R)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_iX_jE\left[(R_j-\overline{R}_j)*(R_i-\overline{R}_i)\right]$$

Sumando sobre las j,s y desarrollando la expresión anterior tenemos:

$$V(R)=X^2{}_1E(R_1-\overline{R}_1)^2+X^2{}_2E(R_2-\overline{R}_2)+2X_1X_2E\left[(R_1-\overline{R}_1)*(R_2-\overline{R}_2)\right]$$

Por otro lado recordando que:

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_1)=\mathrm{E}\left[\mathrm{R}_1-\overline{R}_1\right]^2 \text{ y } \mathrm{V}(\mathrm{R}_2)=\mathrm{E}\left[\mathrm{R}_2-\overline{R}_2\right]^2$$

Y además:

$$\sigma_{12}=E\left[(R_1-\overline{R}_1)*(R_2-\overline{R}_2)\right]$$

tenemos que la varianza para un portafolio constituido por dos activos es:

$$\mathrm{V}(\mathrm{R})=\mathrm{X}^2{}_1\,\mathrm{V}(\mathrm{R}_1)+\mathrm{X}^2{}_2\,\mathrm{V}(\mathrm{R}_2)+2\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\,\sigma_{12}$$

Tomando en cuenta la ecuación:

$$\sigma_{xy}=\rho_{xy}\ \sigma_x\ \sigma_y$$

Podemos reescribir la ecuación de la varianza del portafolio como:

$$\mathrm{V}(\mathrm{R})=\mathrm{X}^2{}_1\,\mathrm{V}(\mathrm{R}_1)+\mathrm{X}^2{}_2\,\mathrm{V}(\mathrm{R}_2)+2\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\,\rho_{12}\ \sigma_1\ \sigma_2$$

Podemos notar que la desviación estándar siempre es positiva, el signo de la correlación será el mismo que el correspondiente entre la covarianza de las dos variables.

Si la correlación es positiva nosotros diremos que las variables están correlacionadas positivamente, si la correlación es negativa diremos que las variables están correlacionadas negativamente cabe destacar la siguiente propiedad del coeficiente de correlación:

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

- Retorno y Riesgo del Portafolio.

Supongamos que un inversionista ha estimado el retorno esperado y la desviación estándar de los títulos individuales así como la relación existente entre ellos. Así pues la pregunta que surge es ¿ Como el inversionista realizará su elección, es decir, la mejor combinación de títulos?

Es obvio que el inversionista desearía un portafolio con alto rendimiento y pequeña desviación estándar.

Para aclarar mejor estos conceptos así como los resultados anteriores consideremos el siguiente ejemplo, para lo cual usaremos los datos que se dan a continuación:

Rendimiento de la Acción 1	:	17.5 %
Rendimiento de la Acción 2	:	5.5 %
Varianza de la acción 1	:	6.6875 %
Varianza de la acción 2	:	1.3225 %
Desviación estándar de la Acción 1	:	25.86 %
Desviación estándar de la Acción 2	:	11.50 %
Covarianza entre ambas Acciones	:	-.004875
Correlación entre ambas Acciones	:	-.1639

Teniendo en cuenta los datos de la tabla anterior tenemos que el retorno esperado del portafolio; compuesto por esas dos acciones:

$$\text{Retorno esperado del portafolio} = X_1 * 17.5\ \% + X_2 * 5.5\ \%$$

Por otro lado, supongamos que $X_1 = .60$ y $X_2 = .40$, de esta manera tenemos que:

$$\text{Retorno esperado del portafolio} = .60 * 17.5\,\% + .40 * 5.5\,\%$$
$$= 12.7\,\%$$

Ahora procederemos a encontrar la varianza del portafolio, como vimos anteriormente la varianza de un portafolio depende de las varianzas individuales, así como de la covarianza entre ambos títulos; de esta forma la varianza del portafolio está dada:

$$V(R) = X^2_1\, V(R_1) + X^2_2\, V(R_2) + 2X_1X_2\, \rho_{12}\ \sigma_1\ \sigma_2$$

De donde podemos observar, que si $\sigma_{12} > 0$, es decir, la relación entre los títulos es positiva la varianza del portafolio entero crece, por el contrario si la relación de ambos títulos es negativa, la varianza total del portafolio decrece.

Es importante que la relación entre ambos títulos sea negativa, es decir, cuando uno de los títulos sube el otro baja y viceversa, de tal forma que un título compense las pérdidas causadas por el otro y viceversa, ya que si los títulos están relacionados positivamente, tendremos que o suben los dos títulos, o bajan ambos títulos, de donde podemos concluir que no existe una cobertura o balance, la varianza de nuestro portafolio es pues de esta manera:

$$V(R) = .36 * .066875 + .16 * .013225 + 2 * .6 * .4 * .\text{-}004875$$
$$= .023851$$

Podemos calcular de un modo alternativo la varianza de un portafolio, el cual consiste en una representación matricial de las varianzas y covarianzas que existen en un portafolio, dicha matriz se muestra a continuación:

Acción	1	2
1	$X^2_1 \sigma^2_1 = .024075$	$X_1X_2 \sigma_{12} = .\text{-}00117$
2	$X_1X_2 \sigma_{12} = .\text{-}00117$	$X^2_2 \sigma^2_2 = .002116$

Realizando la sumatoria de los términos de la matriz anterior obtenemos la varianza del portafolio, notese que los términos de la diagonal equivalen a las varianzas de los títulos individuales, ponderadas por el respectivo porcentaje de inversión y los elementos fuera de la diagonal equivalen a las covarianzas entre los títulos que se incluyen en el portafolio ponderada por los respectivos porcentajes de inversión.

Por último la desviación estándar del portafolio esta dada por:

$$\begin{aligned} SD(Portafolio) &= \sqrt{V(Porfolio)} \\ &= \sqrt{.023851} \\ &= .1544 \\ &= 15.44\ \% \end{aligned}$$

La interpretación de la desviación estándar de un portafolio es la misma que la desviación estándar de un título individual.

Un retorno de –2.74 % (12.7 % - 15.44 %), es una desviación estándar por debajo de la media, un retorno de 28.14 % es a una desviación estándar por arriba de la media (12.7 % + 15.44 %).

Si los retornos del portafolio están normalmente distribuidos, un retorno entre –2.47 % y 28.14 % ocurriría alrededor del 68 % de las veces.

Representación Matricial para varios Activos.

Debido a que un portafolio está constituido por varios activos, extenderemos la representación matricial de la matriz de varianzas y covarianzas. Suponemos que se están considerando n títulos, esto nos arroja una matriz de n x n.

Acción	1	2	3 ...	n
1	$X^2_1 \sigma^2_1$	$X_1X_2 \sigma_{12}$	$X_1X_3 \sigma_{13}$ ...	$X_1X_n \sigma_{1n}$
2	$X_2X_1 \sigma_{21}$	$X^2_2 \sigma^2_2$	$X_2X_3 \sigma_{23}$ ...	$X_2X_n \sigma_{2n}$
3	$X_3X_1 \sigma_{31}$	$X_3X_2 \sigma_{32}$	$X^2_3 \sigma^2_3$ ...	$X_3X_n \sigma_{3n}$
.				.
.				.
.				.
n	$X_nX_1 \sigma_{n1}$	$X_nX_2 \sigma_{n2}$	$X_nX_3 \sigma_{n3}$ ...	$X^2_n \sigma^2_n$

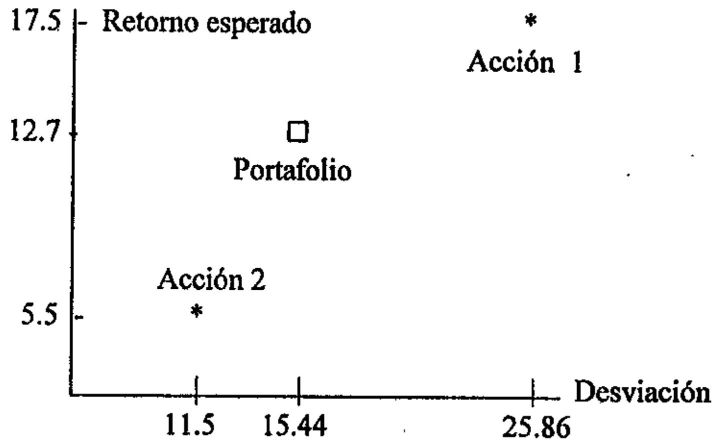
- Efecto de la diversificación

Es intuitivo comparar la desviación estándar de el portafolio con la desviación estándar de los títulos individuales, el peso promedio de la desviación estándar es:

$$\begin{aligned} \text{Peso promedio de las desviaciones estándar} &= X_1 * \sigma_1 + X_2 * \sigma_2 \\ &= .6 * .2586 + .4 * .115 \\ &= .2012 \end{aligned}$$

Como podemos notar el peso promedio de las desviaciones estándar es mayor que la desviación estándar del portafolio, esto se atribuye a la diversificación.

En la siguiente figura se muestran los retornos esperados y las desviaciones estándar de las acciones 1 y 2 así como el portafolio constituido por ambas.



El cuadro que se muestra en la gráfica anterior corresponde al portafolio que está constituido del 60 % de la acción 1 y 40 % de la acción 2, cabe destacar que este portafolio es sólo un caso particular de todos los portafolios que se pueden formar con estas dos acciones.

Para analizar como la diversificación reduce el riesgo haremos las siguientes suposiciones.

1. - Todos los títulos poseen la misma varianza, la cual denotaremos por C_v, en otras palabras $\sigma^2{}_i = C_v$ para cada título i.

2. - Todas las covarianzas son iguales, en otras palabras $\sigma_{ij} = C_{cov}$ para cada par de títulos.

3. - Todos los títulos tienen el mismo peso en el portafolio, como estamos considerando n activos tenemos $X_i = 1/n$, para cada título.

La matriz de varianzas y covarianzas bajo estás suposiciones es:

Acción	1	2	3	....	n
1	$1/n^2\ C_v$	$1/n^2\ C_{cov}$	$1/n^2\ C_{cov}$	....	$1/n^2\ C_{cov}$
2	$1/n^2\ C_{cov}$	$1/n^2\ C_v$	$1/n^2\ C_{cov}$	....	$1/n^2\ C_{cov}$
3	$1/n^2\ C_{cov}$	$1/n^2\ C_{cov}$	$1/n^2\ C_v$	....	$1/n^2\ C_{cov}$
.					.
.					.
.					.
n	$1/n^2\ C_{cov}$	$1/n^2\ C_{cov}$	$1/n^2\ C_{cov}$	....	$1/n^2\ C_v$

Nótese que los términos de la diagonal son idénticos, y los términos fuera de la diagonal también son iguales, por otro lado sabemos que hay n términos en la diagonal y nx(n −1) términos fuera de la diagonal, sumando todos estos términos tenemos:

$$Varianza = \frac{nCv}{n^2} + \frac{n(n-1)Cov}{n^2} = \frac{Cv}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)Cov$$

Sabemos que conforme n crece sin limite, que en este caso es el número de títulos en el portafolio, la varianza del portafolio se convierte en:

$$\text{Varianza del portafolio } (n \to \infty) = C_{cov}$$

Esto ocurre porque $1/n \to 0$ y $1 - 1/n \to 1$, cuando n crece indefinidamente.

En esta sección, se establecen las expresiones relacionadas con el riesgo y el rendimiento de un portafolio, de tal forma que el siguiente paso es determinar el portafolio óptimo para el inversionista, este problema da lugar al análisis que se realiza en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO IV

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el modelo Markowitz así mismo se definen los conceptos necesarios, para la presentación del modelo.

Iniciamos dando una explicación del algoritmo utilizado para resolver el problema del portafolio. Posteriormente se realiza un análisis geométrico del conjunto eficiente, se definen los conceptos del Línea Isomedia, Curva Isovariante, Línea Crítica, para finalizar el capítulo realizamos un ejemplo, resolviendo el modelo para un portafolio y por último analizamos las extensiones del modelo.

Se pueden formar un número infinito de portafolios con n títulos, pero necesita el inversionista evaluar todos esos portafolios, es decir necesita evaluar todos los portafolios del conjunto factible, nótese que el conjunto factible es el conjunto de portafolios que satisfacen las restricciones del modelo.

La respuesta a la cuestión anterior es no, el inversionista necesita evaluar solo un subconjunto de portafolios del conjunto factible, y son aquellos portafolios que satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. - Ofrezcan el máximo retorno esperado para varios niveles de riesgo.
2. - Ofrezcan el mínimo riesgo para varios niveles de retorno esperado.

El conjunto de portafolios que satisfacen las condiciones anteriores es llamado conjunto eficiente.

Por lo tanto un portafolio es ineficiente si es posible obtener un retorno esperado mayor sin que la variabilidad se incremente, u obtener mayor certidumbre del retorno sin que tenga que disminuir el mismo.

En este capitulo, se presentan los cálculos necesarios, que se deben realizar para obtener el conjunto eficiente, asociado con un conjunto de títulos. Antes de presentar el algoritmo y las definiciones necesarias, vamos a explicar lo que hace el algoritmo.

Si un inversionista, considera todos los portafolios eficientes que pueden formarse con N títulos, necesita obviamente determinar la composición de cada uno de esos portafolios. Después de haber hecho esto, debe calcular los retornos esperados y desviaciones estándar de esos portafolios eficientes y así, el inversionista puede seleccionar el portafolio óptimo.

Para iniciar el algoritmo de Markowitz, el cual nos ayuda a determinar el conjunto eficiente, el inversionista necesita estimar el vector de retornos esperados y la matriz de varianzas y covarianzas.

A continuación damos los retornos esperados y la matriz de varianzas y covarianzas, que nos ayudarán a explicar el algoritmo, posteriormente en la parte final de este capítulo se presentan los cálculos de una manera más precisa, cabe destacar que esta matriz se obtuvo de datos reales, estos se presentan en el anexo de este trabajo.

$$E = \begin{bmatrix} -.0040027 \\ .007214869 \\ .0058183 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} .001766238 & .002222751 & .001703416 \\ .002222751 & .00646149 & .004254351 \\ .001703416 & .004254351 & .003993911 \end{bmatrix}$$

El algoritmo encuentra los portafolios que son puntos extremos del conjunto eficiente, que esta asociado con dichos títulos.

Un portafolio extremo o esquina es un portafolio eficiente con la siguiente propiedad:

Cualquier combinación de dos portafolios esquina adyacentes, nos generán un nuevo portafolio eficiente.

El algoritmo inicia identificando el portafolio con el más alto retorno, el cual es un portafolio eficiente, en nuestro ejemplo tenemos que dicho portafolio esta dado por:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} .00 \\ 1.00 \\ .00 \end{bmatrix}$$

El retorno esperado y desviación estándar correspondiente a dicho portafolio es:

$$E = .7214869\ \% \qquad \sigma = 8.038339\ \%$$

El algoritmo procede a identificar el segundo portafolio esquina del conjunto eficiente, este portafolio está dado por la siguiente composición:

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} .00 \\ .032907789 \\ .967092211 \end{bmatrix}$$

Para este portafolio tenemos que el retorno esperado y la desviación estándar es:

$$E = .586426\ \% \qquad \sigma = 6.334951\ \%$$

Es importante destacar que el primer y segundo portafolio esquina, son adyacentes y cualquier portafolio que cae sobre la línea que une al primer y segundo portafolio, se puede expresar como una combinación de $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$.

Por ejemplo el portafolio eficiente que cae a la mitad de $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ tiene la siguiente composición:

$$.5X^{(1)} + .5X^{(2)} = .5\begin{bmatrix} .00 \\ 1.00 \\ .00 \end{bmatrix} + .5\begin{bmatrix} .00 \\ .032907789 \\ .967092211 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .00 \\ .51645389 \\ .48354611 \end{bmatrix}$$

Para este portafolio se tiene:

$$E = .653956\ \% \qquad \sigma = 5.922894\ \%$$

Continuando con el algoritmo este identifica el tercer punto esquina cuya composición es:

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} .109972072 \\ .00 \\ .890027928 \end{bmatrix}$$

El retorno esperado y desviación estándar son:

$$E = .4738267\ \% \quad \sigma = 5.931771\ \%$$

Desde que $X^{(2)}$ y $X^{(3)}$ son adyacentes cualquier combinación de ellos cae en el segmento de línea que los une.

Por ejemplo si un inversionista, destina el 50 % de sus fondos en $X^{(2)}$ y el 50 % en $X^{(3)}$, entonces el portafolio eficiente que resulta es:

$$.50X^{(2)} + .50X^{(3)} = .5\begin{bmatrix} 00 \\ .032907789 \\ 967092211 \end{bmatrix} + .5\begin{bmatrix} .109972072 \\ .00 \\ .890027928 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .054986036 \\ .016453894 \\ .92856007 \end{bmatrix}$$

Calculando el retorno esperado y desviación estándar tenemos que:

$$E = .5301262\ \% \quad \sigma = 6.1308249\ \%$$

Como se menciono al inicio únicamente combinaciones de portafolios esquina adyacentes serán portafolios eficientes. Esto significa que portafolios formados por combinaciones de portafolios no adyacentes, no caerán en le conjunto eficiente.

Por ejemplo $X^{(1)}$ y $X^{(3)}$ son portafolios no adyacentes, por lo cual cualquier combinación de estos no caerá en el conjunto eficiente.

Por ejemplo si inversionista destina el 33 % de sus fondos en $X^{(1)}$ y 67 % en $X^{(3)}$ el portafolio resultante está determinado por:

$$.33X^{(1)} + .67X^{(3)} = .33\begin{bmatrix} .00 \\ 1.00 \\ .00 \end{bmatrix} + .67\begin{bmatrix} .109972072 \\ .00 \\ .890027928 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .07368129 \\ .33 \\ .59631871 \end{bmatrix}$$

El retorno esperado y desviación estándar es:

$$E = .555554\ \% \qquad \sigma = 6.376229\ \%$$

Este no es un portafolio eficiente desde que el retorno del portafolio cae entre el retorno del segundo y tercer portafolio esquina y combinando $X^{(2)}$ y $X^{(3)}$ el inversionista puede obtener un portafolio eficiente con el mismo retorno y menor desviación estándar.

$$.555554\ \% = .586426\ \% * Y + .473827\ \% * (1 - Y)$$

Resolviendo la última ecuación para Y tenemos que Y =.72582961 es decir del total de fondos debemos invertir el 72.582961 % en el segundo portafolio y el resto en el tercer portafolio con lo cual lograremos el retorno deseado.

$$.72582961X^{(2)} + (1 - .72582961)X^{(3)} = \begin{bmatrix} .03015109 \\ .02388545 \\ .94596347 \end{bmatrix}$$

Calculando el retorno esperado y desviación estándar tenemos que:

$$E = .555554\ \% \qquad \sigma = 6.222422\ \%$$

Continuando con el algoritmo se identifica el cuarto portafolio esquina:

$$X^{(4)} = \begin{bmatrix} .97330505 \\ .00 \\ .02669495 \end{bmatrix}$$

El retorno esperado y desviación estándar para este portafolio son:

$$E = -.374052\ \% \qquad \sigma = 4.200667\ \%$$

Este portafolio es el que tiene la mínima desviación estándar de todos los portafolio eficientes, el algoritmo termina. Es muy sencillo con una computadora, gráficar el conjunto eficiente.

Una vez que se ha determinado la composición de el conjunto eficiente, la composición para el portafolio optimó para el inversionista puede obtenerse fácilmente.

Para determinar el portafolio optimó, el inversionista debe especificar el retorno esperado deseado, e identificar los portafolios esquina que están alrededor del nivel de retorno deseado por el inversionista. Esto es el inversionista puede identificar el portafolio esquina que tiene el retorno esperado mayor que el nivel deseado por el inversionista, y a su vez identificar el portafolio esquina que tiene el retorno menor al nivel deseado, estos dos portafolios esquina deben ser portafolios adyacentes.

Si el retorno de el portafolio optimó es denotado por r* y los retornos de los portafolios esquina son denotados por r^a y r^b respectivamente entonces la composición de el portafolio optimó puede ser determinada por:

$$r^* = r^a\ Y + r^b\ (1 - Y)$$

El portafolio optimó entonces consiste de una proporción Y del portafolio que tiene un retorno por arriba del deseado y 1 – Y, del portafolio que está por abajo del retorno deseado.

- Análisis Geométrico del Conjunto Eficiente.

Primeramente analizaremos un portafolio compuesto por tres títulos, u acciones, posteriormente se introducirán los conceptos primordiales para el análisis del portafolio, constituido por cualquier número de títulos.

- El Conjunto de Portafolios Legítimos o Factibles.

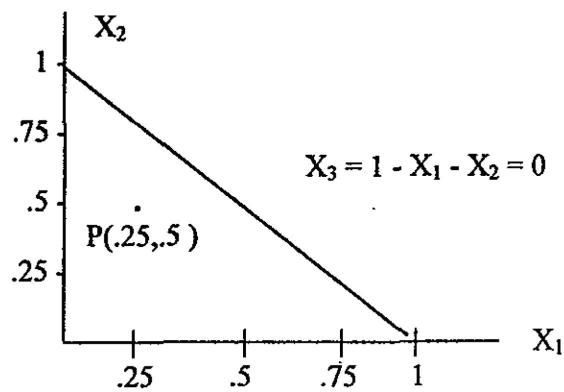
En el análisis de tres títulos, claramente se debe tener:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

De esta última ecuación, tenemos que la fracción invertida en el tercer título está dada por:

$$X_3 = 1 - X_1 - X_2$$

De está manera podemos representar un portafolio como se muestra en la siguiente figura:



El punto P que se muestra en la figura anterior, representa el portafolio con $X_1 = .25, X_2 = .5$ y

$$X_3 = 1 - .25 - .5 = .25$$

El análisis estándar del problema del portafolio requiere que:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0$$

Así pues, se dice que un portafolio es legitimo; si la suma de las $X_{i's}$ es uno, y cada X_i es mayor o igual que cero.

De esta manera observamos que un portafolio es legitimo en nuestro ejemplo particular, si el punto que determina (X_1 , X_2), se encuentra en la región determinada por :

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 = 1 - X_1 - X_2 = 0$$

Todos los portafolios que se localizan en está región forman el conjunto legitimo de portafolios.

- Lineas Isomedias.

En el análisis de tres títulos el retorno esperado E del portafolio está dado por la ecuación:

$$E = X_1\mu_1 + X_2\mu_2 + X_3\mu_3$$

Si sustituimos en la última expresión X_3 por $1 - X_1 - X_2$ obtenemos:

$$E = X_1\mu_1 + X_2\mu_2 + (1 - X_1 - X_2)\mu_3$$

$$E = X_1(\mu_1 - \mu_3) + X_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3$$

Supongamos que:

$$\mu_1 = .1, \mu_2 = .05, \mu_3 = .07$$

Entonces el retorno esperado del portafolio es:

$$E = .03\ X_1 - .02\ X_2 + .07$$

De tal manera, que todos los portafolios que tengan un mismo retorno esperado deben satisfacer la ecuación que surge al especificar un valor para E.

Consideremos aquellos portafolios con un rendimiento del 8 %:

$$.08 = .03\ X_1 - .02\ X_2 + .07$$

$$.01 = .03\ X_1 - .02\ X_2$$

Los puntos que se listan a continuación se encuentran sobre la línea anterior; dicho de otro modo satisfacen la ecuación anterior:

$$(X_1, X_2) = \left(\frac{1}{3}, 0\right), (X_1, X_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

Por lo tanto un portafolio con un retorno del 8%, deberá estar representado por un punto, sobre la línea:

$$.01 = .03\ X_1 - .02\ X_2$$

Por lo tanto las Líneas Isomedias se definen como el conjunto de puntos que tienen el mismo retorno esperado.

Si el retorno esperado de los distintos títulos es el mismo, en este caso el portafolio eficiente es aquel que tiene la menor varianza.

- Curvas de Isovarianza.

La varianza de un portafolio constituido por tres títulos está dada:

$$V = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + X_3^2\sigma_3^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1X_3\sigma_{13} + 2X_3X_2\sigma_{23}$$

Sustituyendo en ecuación anterior $X_3 = 1 - X_1 - X_2$, y desarrollando y reordenando términos obtenemos la siguiente expresión:

$$V = X_1^2(\sigma_1^2 - 2\sigma_{13} + \sigma_3^2) + X_2^2(\sigma_2^2 - 2\sigma_{23} + \sigma_3^2) + 2X_1X_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_3^2)$$

$$+ 2X_1(\sigma_{13} - \sigma_3^2) + 2X_2(\sigma_{23} - \sigma_3^2) + \sigma_3^2$$

Con esto expresamos a V en términos de X_1, X_2.

Supongamos que tenemos tres títulos para los cuales:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = .01, \sigma_3^2 = .04, \sigma_{12} = .005, \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

Sustituyendo estos valores en la última ecuación tenemos:

$$V = .05X_1^2 + .05X_2^2 + .09X_1X_2 - .08X_1 - .08X_2 + .04$$

Ahora nuevamente, todos los portafolios con una varianza igual a .01, deben satisfacer la siguiente ecuación:

$$.01 = .05X_1^2 + .05X_2^2 + .09X_1X_2 - .08X_1 - .08X_2 + .04$$

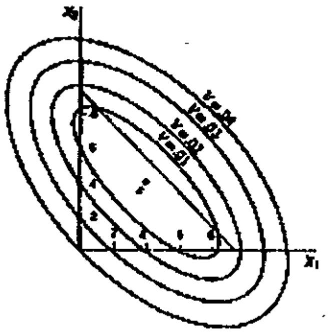
esto es:

$$0 = .05X_1^2 + .05X_2^2 + .09X_1X_2 - .08X_1 - .08X_2 + .03$$

Por lo tanto, las curvas de Isovarianza se definen como el conjunto de puntos (X_1 , X_2) que tienen el mismo nivel de riesgo.

Si modificamos la varianza, obtenemos un conjunto de elipses, todas ellas tienen el mismo centro y la misma orientación.

El centro de todas estas elipses es el punto en el cual se minimiza la varianza. Las curvas de Isovarianza, por lo general, forman un sistema de elipses, como el que se muestra a continuación:

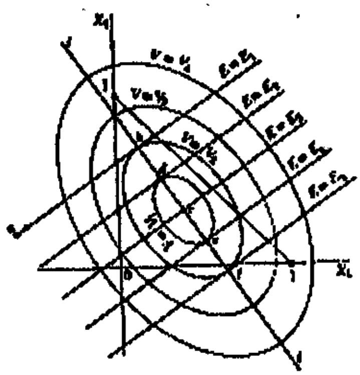


De tal forma, que existe una elipse asociada con cada valor de varianza, y conforme la varianza aumenta el conjunto de elipses se van expandiendo. Cabe destacar que los cálculos que se presentarán al final del capítulo para obtener el conjunto eficiente de portafolios no dependerá, de la figura geométrica que formen las varianzas.

- Línea Crítica Para Tres Títulos.

La figura que se presenta a continuación contiene tanto líneas isomedias como elipses de isovarianza. La línea etiquetada con E = E_1 es la localización de los puntos que representan portafolios con un retorno esperado igual a E_1, lo mismo sucede con las demás líneas.

Análogamente la elipse etiquetada $V = V_1$ es la localización de todos los puntos que representan portafolios con varianza igual a V_1, la misma interpretación aplica para las demás elipses.



Imaginemos que nos movemos a lo largo de la línea , $E = E_1$, en la dirección indicada por la flecha, de está forma si nos movemos a lo largo de está línea encontraremos las curvas de isovarianza $V = V_4$, $V = V_3$,$V = V_2$,$V =V_3$,$V=V_4$.El retorno esperado a lo largo de línea es el mismo, la varianza disminuye conforme nos movemos de V_4 a V_3 y de V_3 a V_2,y crece cuando nos movemos de V_2 a V_3, y de V_3 a V_4.

De todos los puntos sobre la línea $E = E_1$ el punto b, en el cual la línea isomedia es tangente a la línea isovariante es el de menor varianza, cualquier otra línea isovariante que este contenida en V_2 , no toca a $E = E_1$. Cualquier curva isovariante que contega a V_2 tiene una varianza mayor que V_2.

Los puntos b,d,c,e,f, son los puntos en los cuales se minimiza la varianza para un determinado nivel de rendimiento.

Si trazamos una línea que contenga dichos puntos obtendremos, lo que llamaremos la Línea Crítica, en la cual se localizan, los portafolios con mínima varianza para un determinado nivel de rendimiento.

A continuación planteamos matemáticamente el modelo de markowitz, primeramente notamos que los parámetros que requiere el algoritmo para iniciar son:

C representa la matriz de varianzas y covarianzas de n x n
μ representa el vector de retornos esperados de n x 1
A representa la matriz de coeficientes de las restricciones del modelo m x n .
b representa el lado derecho del conjunto de restricciones de m x 1

Así pues el modelo queda descrito por:

Modelo de Markowitz

$$\text{Min} \quad X^tCX$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$$

$$X_i \geq 0$$

- Conceptos Generales para el Análisis del Problema del Portafolio Compuesto de varios Títulos.

Al analizar cuatro títulos aparecen los conceptos que se utilizan en el análisis de cualquier número de títulos. En este caso cualquier portafolio está identificado por X_1 , X_2 , X_3 desde que $X_4 = 1 - X_1 - X_2 - X_3$.

A continuación definiremos varios subconjuntos de portafolios.

Subespacios.

Primero presentaremos definiciones y notaciones para subespacios particulares y después se extenderán los mismo al caso general.

El subespacio S_{124}, consiste de todos los puntos (portafolios) para los cuales se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $X_3 = 0$
(2) $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1$

Así pues, por ejemplo el portafolio con:

$$X_1 = \frac{1}{2}, X_2 = \frac{1}{2}, X_3 = 0, X_4 = 0$$

Está en el subespacio S_{124} desde que satisface las dos condiciones, $X_3 = 0$, y:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1$$

El portafolio con:

$$X_1 = \frac{1}{4}, X_2 = \frac{1}{4}, X_3 = \frac{1}{4}, X_4 = \frac{1}{4}$$

No está en el subespacio S_{124} desde que X_3 es diferente de cero. Geometricamente S_{124} es el plano que contiene al eje X_1, X_2 cualquier punto en este plano tiene $X_3 = 0$ y la suma de las $X_{i's}$ igual a uno.

Análogamente definimos el subespacio S_{134} que consiste de todos los puntos que satisfacen:

(1) $X_2 = 0$
(2) $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1$

En general $S_{12,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n}$ es el subespacio con $X_k = 0$ y la suma de la X_i's igual con uno.

Líneas Críticas.

Para cada subespacio, se define una correspondiente línea crítica, por ejemplo:

l_{1234} es el conjunto crítico asociado con el subespacio S_{1234}.
l_{123} es el conjunto crítico asociado con el subespacio S_{123}.

Los conjuntos críticos asociados con otros subespacios, son denotados de manera similar.

Así pues, definimos l_{1234} como la localización de todos los puntos P, para los cuales se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) P está en el subespacio S_{1234}
(2) De todos los portafolios en S_{1234} con el mismo retorno esperado que P, P tiene la varianza mínima.

La definición de l_{123} es similar a la de l_{1234}, excepto que l_{123} es definido exclusivamente en términos de los puntos de el subespacio S_{123}. Un punto P está en l_{123} si se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) P está en el subespacio S_{123}
(2) De todos los puntos en S_{123} con el mismo retorno esperado que P, P tiene la varianza más pequeña.

En general $l_{12,\ldots k-1,k+1,\ldots,n}$ es la localización de todos los puntos P, para los cuales se tiene :

(1) P está en el subespacio $S_{123,\ldots k-1,k+1,\ldots,n}$
(2) De todos los portafolios en $S_{123,\ldots k-1,k+1,\ldots,n}$ con el mismo retorno esperado que P, P tiene la varianza mínima.

- Obtención del Conjunto Eficiente.

En está sección presentaremos, el método de la línea crítica para obtener el conjunto eficiente, con el cual se resuelve el problema del portafolio así pues a continuación mostramos los cálculos que se realizan, para obtener dicho conjunto.

Un portafolio queda representado por un vector:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ * \\ * \\ * \\ X_n \end{bmatrix}$$

Donde X_j es la fracción invertida en el j-ésimo título y X_j es mayor o igual que cero, para toda j.

Definiciones para iniciar el Algoritmo.

Sea IN un subconjunto de números entre 1 y n, y OUT, contiene aquellos números que no están en IN. Por ejemplo con n=6 podemos tener que IN={1,3,4} y OUT={2,5,6}. Sea e_i el vector con un uno en la i-ésima entrada y ceros en las demás n-1 posiciones, para un conjunto particular IN sea C_{IN} la matriz C de varianzas y covarianzas con el i-ésimo renglón y la i-ésima columna reemplazados por e_i y e_i^t respectivamente, para cada i en el conjunto OUT, así pues, para IN={1,3,4} y OUT={2,5,6} tenemos:

$$C_{IN} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & \sigma_{33} & \sigma_{34} & 0 & 0 \\ \sigma_{41} & 0 & \sigma_{43} & \sigma_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definimos A_{IN} como la matriz de los coeficientes de las restricciones con la i-ésima columna reemplazada por el vector 0 para cada i en el conjunto OUT, y definimos también μ_{IN} como el vector de retornos esperados con 0 en la i-ésima componente para cada i en el conjunto OUT, para el conjunto IN mencionado anteriormente y m=1, tenemos:

$$A_{IN} = (a_{11}, 0, a_{13}, a_{14}, 0, 0)$$

$$\mu_{IN} = (\mu_1, 0, \mu_3, \mu_4, 0, 0)$$

Definimos la matriz M como:

$$M = \begin{bmatrix} C & A^t \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

Donde A^t, es la transpuesta de A. M es una matriz de (m + n), C es la matriz de varianzas y covarianzas, y la matriz de ceros es de m x m.

Se define también el vector columna R como:

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ * \\ * \\ 0 \\ b_1 \\ * \\ * \\ * \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

R es de m + n, para el cual sus primeros n elementos son ceros, y sus últimos m elementos son precisamente los elementos del vector b.Por último definimos el vector μ como:

$$\overline{\mu}_{IN} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ * \\ * \\ * \\ \mu_n \\ 0 \\ * \\ * \\ * \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{IN} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El cual es un vector de m + n, vector columna, sus primeras n entradas, son los retornos esperados de cada título, y sus últimos m elementos con ceros.

Líneas Críticas

El conjunto de portafolios eficientes, está compuesto de segmentos de líneas críticas. Asociada con cada línea crítica existe un conjunto de variables asociadas, que son las correspondientes a los números del conjunto IN, las variables que no intervienen en la definición de la línea crítica, correponden a los números contenidos en el conjunto OUT, a continuación definimos la ecuación que nos determina una línea crítica:

$$M_{IN}\begin{bmatrix} X_1 \\ * \\ * \\ * \\ X_n \\ \lambda_1 \\ * \\ * \\ * \\ \lambda_m \end{bmatrix} = R + \overline{\mu}_{IN}\lambda_E$$

De manera más compacta representamos la ecuación anterior como:

$$M_{IN}\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = R + \overline{\mu}_{IN}\lambda_E$$

M_{IN}, es la matriz M, aplicando las definiciones a las matrices C,A,μ para los elementos del conjunto IN y OUT.

El procedimiento de cálculo utilizado, es tal que M_{IN}, siempre es no singular, es decir, que siempre tiene inversa y por lo tanto nuestro sistema que nos define nuestra correspondiente línea crítica siempre tiene solución.

Escrito de otra forma:

$$\begin{pmatrix} C_{IN} & A_{IN}' \\ A_{IN} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{IN} \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_E$$

Nótese que en la i-ésima ecuación de arriba se tiene $X_i=0$, para i en el conjunto OUT, multiplicando la última ecuación por M_{IN}^{-1} tenemos:

$$\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{IN} & A_{IN}' \\ A_{IN} & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{IN} & A_{IN}' \\ A_{IN} & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mu_{IN} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En nuestro modelo, existe únicamente una restricción:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$$

Por lo tanto tenemos que m = 1 y:

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ * \\ * \\ X_n \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

λ_E es un número si un valor de λ_E se específica, la ecuación que nos determina una línea crítica, puede ser resuelta en términos de X.

Iniciando el Algoritmo de Línea Crítica.

Es conveniente ilustrar los cálculos, mediante un ejemplo, nosotros usaremos los siguientes datos para el problema de la selección del portafolio. En nuestro portafolio consideraremos únicamente tres títulos, esta matriz se construye con los datos del anexo a este trabajo, donde se listan los rendimientos de cada uno de los títulos considerados y se calculan los parámetros necesarios para iniciar el algoritmo.

La matriz de varianzas y covarianzas, así como el vector de retornos esperados están dados por:

$$C = \begin{bmatrix} .001766238 & .002222751 & .001703416 \\ .002222751 & .00646149 & .004254351 \\ .001703416 & .004254351 & .003993911 \end{bmatrix}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} .-0040027 \\ .007214869 \\ .0058183 \end{bmatrix}$$

La única restricción es :

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

Por supuesto , X_j debe ser mayor o igual a cero para j = 1,2,3.

De acuerdo a la definición anterior de M tenemos que:

$$M = \begin{bmatrix} .001766238 & .002222751 & .001703416 & 1 \\ .002222751 & .00646149 & .004254351 & 1 \\ .001703416 & .004254351 & .003993911 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 1.

Encontrar el portafolio $X^{(1)}$ con el máximo retorno esperado. El portafolio con máximo retorno esperado está constituido por el título que nos da el máximo retorno. En nuestro ejemplo tenemos que el portafolio con el máximo retorno esperado es:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 2.

Encontrar la fórmula de la línea crítica asociada con $X^{(1)}$. Nótese que la correspondiente línea crítica está determinada por:

l_2 que es el conjunto crítico asociado con el subespacio S_2, el cual contiene todos los puntos que satisfacen las siguientes dos condiciones:

(1) $X_1 = X_3 = 0$
(2) $X_1 + X_2 + X_3 = 1$

Y por definición de línea crítica de todos los portafolios que tengan un retorno esperado de .721487 %, el determinado por $X^{(1)}$ es el de mínima varianza, en este caso tenemos IN={2} y OUT={1,3}.

Ahora recordando la fórmula que nos determina la línea crítica tenemos :

$$M_{IN}\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = R + \overline{\mu}_{IN}\lambda_E$$

Tomando en cuenta que X_1 y X_3 están fuera, es decir no intervienen en la definición de l_2 , esta dada por el siguiente sistema, en este caso el determinante de la matriz es -1, por tanto existe la inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .00646149 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ .007214869 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\lambda_E$$

Calculando la inversa de M_{IN} tenemos:

$$M_{IN}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -.006461149 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -.006461149 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -.006461149 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ .007214869 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\lambda_E$$

Realizando las operaciones tenemos :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -.00646149 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .007214869 \end{bmatrix} \lambda_E$$

Paso 3.

Para determinar la variable que entra, calcularemos el siguiente sistema para las $\lambda_{E'S}$.

$$\begin{pmatrix} C & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} - \mu \lambda_E = 0$$

Y tomaremos el máximo, de las $\lambda_{E'S}$ finitas, cuidando siempre que λ_E sea mayor o igual a cero, y que sea diferente a las $\lambda_{E'S}$ obtenidas en los sistemas sucesivos para λ_E , esto con el fin de evitar ciclos.

Así pues, en este caso obtendremos tres ecuaciones en términos de λ_E , que a continuación se muestran:

$$\begin{pmatrix} .001766238 & .002222751 & .001703416 & 1 \\ .002222751 & .00646149 & .004254351 & 1 \\ .001703416 & .004254351 & .003993911 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -.00646149 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .007214869 \end{pmatrix} \lambda_E \right]$$

$$- \begin{pmatrix} -.0040027 \\ .007214869 \\ .0058183 \\ \end{pmatrix} \lambda_E = 0$$

Realizando las operaciones tenemos que el sistema resultante es:

$$\begin{aligned} -.00423874 + .007214869\lambda_E + .004002696\lambda_E &= 0 \\ 0 \quad + .007214869\lambda_E - .007214869\lambda_E &= 0 \\ -.00220714 + .007214869\lambda_E - .0058183\lambda_E &= 0 \end{aligned}$$

Despejando λ_E de cada una de las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\lambda_E = .377866176 \text{ y } \lambda_E = 1.580401066$$

Por lo tanto el máximo es $\lambda_E = 1.580401066$, como este valor se desprende de la tercera ecuación se tiene que la variable que entra es X_3.

El primer segmento de nuestro conjunto eficiente, se obtiene tomando en cuenta el valor máximo de λ_E, para las distintas intersecciones, en el presente ejemplo, el primer segmento de la línea crítica cae a lo largo de l_{23}.

Paso 4.

Obtener la fórmula de la nueva línea crítica.

En este caso tenemos que IN={2,3} y OUT={1}, así pues planteando la ecuación que nos determina la línea crítica l_{23} tenemos, en este caso el determinante de la matriz es -0.0019467 por lo tanto existe la inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .00646149 & .004254351 & 1 \\ 0 & .004254351 & .003993911 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ .007214869 \\ .0058183 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_E$$

Por lo tanto la ecuación para l_{23} es:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -.13378587 \\ 1.133785869 \\ -.00395907 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ .71740389 \\ -.71740389 \\ .00563146 \end{pmatrix} \lambda_E$$

Calculando el sistema para las λ_E tenemos:

$$\begin{pmatrix} .001766238 & .002222751 & .001703416 & 1 \\ .002222751 & .00646149 & .004254351 & 1 \\ .001703416 & .004254351 & .003993911 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -.13378587 \\ 1.133785869 \\ -.00395907 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ .71740389 \\ -.71740389 \\ .00563146 \end{pmatrix} \lambda_E \right]$$

$$- \begin{pmatrix} -.0040027 \\ .007214869 \\ .0058183 \\ \end{pmatrix} \lambda_E = 0$$

El sistema de ecuaciones resultantes es:

$$\begin{aligned} -.00232513 + .006004033\lambda_E + .004002696\lambda_E &= 0 \\ 0 + .007214869\lambda_E + -.007214869\lambda_E &= 0 \\ 0 + .0058183\lambda_E \ -.0058183\lambda_E &= 0 \end{aligned}$$

Así pues tenemos que λ_E = .232356781 de la primera ecuación por lo tanto la variable que entra es X_1.

Para obtener el segundo portafolio eficiente debemos sustituir λ_E = .232356781 en la ecuación de la línea crítica l_{23} con lo cual tenemos:

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -.13378587 \\ 1.133785869 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ .71740389 \\ -.71740389 \end{pmatrix} .232356781 = \begin{pmatrix} 0 \\ .032907789 \\ .967092211 \end{pmatrix}$$

Paso 6.

Ahora necesitamos obtener la ecuación para la línea crítica l_{123}, el determinante en está ocasión es -4.51417E-06 y sistema es:

$$\begin{bmatrix} .001766238 & .002222751 & .001703416 & 1 \\ .002222751 & .00646149 & .004254351 & 1 \\ .001703416 & .004254351 & .003993911 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -.0040027 \\ .00721487 \\ .0058183 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_E$$

Nótese que en este caso IN={1,2,3}, resolviendo el sistema anterior tenemos:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.002693405 \\ -.26713587 \\ .264442464 \\ -.00162767 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4.31531803 \\ 1.2913058 \\ 3.02401223 \\ -.00440222 \end{pmatrix} \lambda_E$$

Paso 7.

Tenemos que l_{123} se intersecta con l_{12} cuando:

$$X_3 = .264442464 + 3.024012233\lambda_E = 0$$

Lo cual se satisface para λ_E menor que cero. Por otro lado tenemos l_{123} intersecta l_{13} cuando:

$$X_2 = -.26713587 + 1.2913058\lambda_E = 0$$

Esto sucede cuando λ_E =.206872663, por otro lado l_{123}, intersecta l_{23} cuando:

$$X_1 = 1.002693405 - 4.31531803\lambda_E = 0$$

Lo cual se satisface para λ_E =.232356781, como este es un valor repetido para λ_E, tenemos que el valor máximo es λ_E =.206872663, por lo tanto sale X_2, en este caso IN={1,3} y OUT={2}.

El portafolio eficiente en está intersección está dado por:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.002693405 \\ -.26713587 \\ ..264442464 \end{bmatrix} + .206872663 \begin{bmatrix} -4.31531803 \\ 1.2913058 \\ 3.02401223 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .109972072 \\ 0 \\ ..890027928 \end{bmatrix}$$

Paso 8.

Obtener la ecuación de línea crítica asociada con l_{13}, el determinante es para esta matriz -0.00235332.

$$\begin{pmatrix} .001766238 & 0 & .001703416 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ .001703416 & 0 & .003993911 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -.0040027 \\ 0 \\ .0058183 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema anterior tenemos que I_{13} está dada por:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .97330505 \\ 0 \\ .02669495 \\ -.00176456 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4.17325791 \\ 0 \\ 4.17325791 \\ -.00374052 \end{pmatrix} \lambda_E$$

Calculando el sistema para las $\lambda_{E's}$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} .001766238 & .002222751 & .001703416 & 1 \\ .002222751 & .00646149 & .004254351 & 1 \\ .001703416 & .004254351 & .003993911 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} .97330505 \\ 0 \\ .02669495 \\ -.00176456 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4.17325791 \\ 0 \\ 4.17325791 \\ -.00374052 \end{pmatrix} \lambda_E \right]$$

$$- \begin{pmatrix} -.0040027 \\ .007214869 \\ .0058183 \end{pmatrix} \lambda_E = 0$$

Resolviendo el sistema anterior en términos de $\lambda_{E's}$ tenemos:

$$\lambda_E = 0,\ \lambda_E = .206872663,\ \lambda_E = 0$$

De los anteriores valores de λ_E el único mayor que cero es un valor repetido así pues termina el algoritmo y el último portafolio del conjunto eficiente es:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .99310345 \\ 0 \\ .00689655 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4.55172414 \\ 0 \\ 4.551172414 \end{pmatrix} 0 = \begin{pmatrix} .99310345 \\ 0 \\ .00689655 \end{pmatrix}$$

En nuestro ejemplo particular tenemos:

	Inicio	Primera iteración	Segunda iteración	Final
X_1	0	.00	.109972072	.97330505
X_2	1	.032907789	.00	.00
X_3	0	.967092211	.890027928	.02669495

Para los cuales se tiene:

	Retorno	Varianza	Desviación Estándar
$X^{(1)}$	.721487 %	.646149 %	8.038339 %
$X^{(2)}$	.586426 %	.401316 %	6.334951 %
$X^{(3)}$	.473827 %	.351859 %	5.931771 %
$X^{(4)}$	-.374052 %	.176456 %	4.200667 %

- Permitiendo la inversión a tasa libre de riesgo.

El retorno a tasa libre de riesgo implica que el retorno esperado es cierto. Esto es si un inversionista adquiere un activo libre de riesgo, al final del periodo de inversión conoce exactamente el valor de la misma.

Naturalmente la desviación estándar es cero, así mismo la covarianza entre la tasa de retorno de un activo libre de riesgo y la tasa de retorno de un activo con riesgo es cero, esto es claro desde que la covarianza entre dos retornos es igual a la correlación entre los mismos por la desviación estándar de cada activo.

Invertir en activos libres de riesgo es equivalente a prestar dinero, ya que no hay incertidumbre por parte del inversionista que presta los fondos. Así pues tenemos que el inversionista tiene la posibilidad de invertir su dinero a tasa con riesgo y tasa sin riesgo.

Supongamos que tenemos dos títulos uno libre de riesgo y el otro con riesgo. Sea X la cantidad invertida de fondos en el activo con riesgo, por lo tanto sea 1- X la cantidad invertida a tasa libre de riesgo, por lo tanto el rendimiento esperado del portafolio compuesto por estos dos títulos esta dado por:

$$\mathrm{Re}n\mathrm{dim}iento = (1-X)R_{LR} + XR_R$$

Donde R_{LR} es el rendimiento otorgado por el activo libre de riesgo, y R_R es el rendimiento esperado del activo con riesgo, y X la fracción invertida del total de fondos en el activo con riesgo.

La varianza del portafolio constituido por dos títulos es:

$$V(Cartera) = X^2 Var(R_R) + (1-X)^2 Var(R_{lR}) + 2X(1-X)Cov(R_{LR}, R_R)$$

Nótese que en este caso $Var(R_{LR}) = 0$, ya que no hay riesgo con respecto al retorno esperado de un activo libre de riesgo, además $Cov(R_{LR}, R_R) = 0$, ya que básicamente se está calculando la covarianza de una constante con una variable.

Por lo tanto la ecuación que determina la varianza de la cartera se reduce en este caso a:

$$V(Cartera) = X^2 Var(R_R)$$

Otra extensión natural del modelo de Markowitz, consiste en permitir al inversionista que obtenga crédito a tasa libre de riesgo, e invertir los fondos del inversionista más el crédito obtenido. A continuación se analiza está posibilidad.

- Obteniendo créditos a tasa libre de riesgo.

El análisis presentado en la sección anterior puede ser extendido al caso en el cual el inversionista está en la posibilidad de obtener créditos.

Como siempre si un inversionista pide dinero una tasa de interés debe ser pagada, desde que la tasa de interés es conocida no hay incertidumbre por el pago que debe realizar el inversionista por concepto de interés.

En este caso si X representa el porcentaje de crédito obtenido con respecto a nuestros propios fondos, en este caso $X < 0$, pero aún se debe cumplir la restricción de que la suma de las $X_{i's}$.

Por ejemplo supongamos que el capital inicial de un inversionista es $17200 y pide un crédito de $ 4300 en este caso , X_1 que es el porcentaje total de fondos que se invertirán es igual a 1.25, y $X_2 = -.25$ claramente vemos que la suma de $X_1 + X_2 = 1$.

En este caso la fracción obtenida por concepto de crédito será negativa a la hora de determinar el rendimiento del portafolio y claramente esto disminuirá el rendimiento del portafolio, por otro lado tenemos que la varianza del portafolio se calcula de manera análoga al caso en que se invierte en activos con riesgo y sin riesgo, ya que nuevamente no existe incertidumbre por el pago que debe realizar el inversionista por concepto del crédito obtenido.

Por último, cuando se invierte en activos con riesgo y sin riesgo, se puede determinar de manera similar el portafolio optimó para el inversionista teniendo en cuenta la siguiente ecuación:

$$r^* = r_{Mar}\ Y + (1 - Y)\ r_f$$

Cuando obtenemos por ejemplo que $Y = 1.25$ significa que el portafolio optimó consiste en obtener un préstamo de 25 % de los fondos iniciales del inversionista, e invertir todos los recursos en activos con riesgo.

ANEXO

En este anexo se listan los precios así como los rendimientos diarios de las acciones que fueron utilizados en este trabajo para resolver el problema del portafolio para las acciones de Cemex, Cifra, Cie correspondientes a los sectores de construcción, comercio y entretenimiento respectivamente, estos datos corresponden al periodo 18/08/98 al 21/10/98 a continuación se listan los precios diarios para estas acciones:

	Cemex	Cifra	Cie
1	22.45	13.5	18.2
2	22.85	13.08	17.5
3	23.8	13.04	18.5
4	23.45	13	18.9
5	22.4	13	19.1
6	20.8	12.5	16.84
7	19.98	12.3	16.42
8	20.3	12.4	16.8
9	19.7	12.2	15.3
10	20	12	14.56
11	19.56	12.2	14.6
12	20.5	12.4	14.7
13	21	12.1	15.1
14	21.95	12.5	15.72
15	21.1	12	14.5
16	22.45	12.96	16
17	24.2	12.98	17.9
18	24.5	13.5	17.6
19	23.95	13.5	17.3
20	24	14	16.5
21	25.2	14.6	16.68
22	22.5	12.84	14.5
23	20.85	12.5	13.4
24	20.95	12.26	14
25	19	12.3	12.8

26	19.6	12.8	13.5
27	17.1	11.32	10.64
28	16.7	11	9.9
29	16.98	10.6	10.8
30	19.2	11.5	12.7
31	19.5	12	13.7
32	19.1	11.8	13.7
33	17.9	11.2	12.78
34	20.25	10.8	13.5
35	20.75	11.2	13.4
36	20	10.8	13.8
37	22.7	11	15.7
38	21	10.46	15.3
39	24.55	10.88	18
40	26.3	10.8	19.5
41	26.65	10.64	20.3
42	27.5	10.8	21.5
43	28.9	11	23.2
44	29.4	11.44	23.9
45	29	11.32	25

Consideraremos los rendimientos continuos, de la triple igualdad de nuestros cursos de Matemáticas Financieras tenemos:

$$(1+i)=e^{\delta} \Leftrightarrow \delta=\ln(1+i)$$

Así pues sea S_i el precio de la acción el i-ésimo día, para determinar el rendimiento diario continuo tenemos:

$$\ln\left(1+\frac{S_i-S_{i-1}}{S_{i-1}}\right)=\ln\left(\frac{S_{i-1}+S_i-S_{i-1}}{S_{i-1}}\right)=\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Por lo tanto la transformación a realizar para considerar los rendimientos continuos es:

$$\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

A continuación se listan los rendimientos aplicándoles la transformación que se estableció anteriormente.

Dia	Cemex	Cifra	Cie
1	0.0176605	-0.03160534	-0.03922071
2	0.04073446	-0.00306279	0.05556985
3	-0.01481509	-0.0030722	0.02139119
4	-0.04580954	0	0.01052641
5	-0.07410797	-0.03922071	-0.12593133
6	-0.04022121	-0.01612938	-0.0252569
7	0.01588911	0.00809721	0.02287878
8	-0.03000225	-0.01626052	-0.09352606
9	0.01511364	-0.0165293	-0.04957479
10	-0.02224561	0.0165293	0.00274349
11	0.04693822	0.01626052	0.00682597
12	0.02409755	-0.02449102	0.02684725
13	0.0442447	0.03252319	0.04023904
14	-0.0394941	-0.04082199	-0.08078514
15	0.06201757	0.07696104	0.09844007
16	0.07506202	0.00154202	0.11221199
17	0.01232048	0.03927997	-0.01690181
18	-0.02270479	0	-0.0171924
19	0.00208551	0.03636764	-0.04734612
20	0.04879016	0.0419642	0.01085002

21	-0.11332869	-0.12845623	-0.14006175
22	-0.07616136	-0.02683665	-0.07889394
23	0.0047847	-0.01938671	0.04380262
24	-0.09769967	0.00325733	-0.08961216
25	0.03109059	0.03984591	0.05324451
26	-0.1364511	-0.1228741	-0.2380692
27	-0.02366974	-0.0286758	-0.07208573
28	0.01662746	-0.03704127	0.08701138
29	0.1228741	0.08149303	0.16205586
30	0.01550419	0.04255961	0.07579384
31	-0.02072613	-0.01680712	0
32	-0.06488762	-0.05218575	-0.06951438
33	0.12335408	-0.03636764	0.05480824
34	0.02439145	0.03636764	-0.00743498
35	-0.03681397	-0.03636764	0.02941389
36	0.12663265	0.01834914	0.12899212
37	-0.07784249	-0.05033681	-0.02580788
38	0.15618942	0.03936778	0.16251893
39	0.06885708	-0.00738011	0.08004271
40	0.01322021	-0.01492565	0.04020642
41	0.03139685	0.01492565	0.05743205
42	0.04965559	0.01834914	0.07609934
43	0.01715308	0.03922071	0.02972618
44	-0.01369884	-0.01054491	0.04499737

El rendimiento promedio de cada título durante el periodo de observación esta dado por:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{44} r_i}{44}$$

Donde r_i es el rendimiento correspondiente al i-ésimo día de esta manera tenemos:

	Rendimiento Promedio
Cemex	- .0040027
Cifra	.007214869
Cie	.0058183

Ahora la varianza del rendimiento de cada título esta dada por:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{44} \left(r_i - \bar{r}\right)}{43}$$

Así pues tenemos calculando la expresión anterior para las tres acciones:

	Varianza	Desviación Estándar
Cemex	.003993911	6.319739 %
Cifra	.001766238	4.202663 %
Cie	.00646149	8.0383392 %

Por otro lado la covarianza entre dos títulos está dada por:

$$Cov(r_i, r_j) = \frac{\sum_{i=1}^{44} (r_i - \bar{r}_I)(r_j - \bar{r}_J)}{44}$$

De esta manera tenemos:

Covarianzas

	Cie	Cemex
Cifra	.002222751	.001703416
Cemex	.004254351	

De esta forma tenemos que la matriz de varianzas y covarianzas es:

$$C = \begin{bmatrix} .001766238 & .002222751 & .001703416 \\ .002222751 & .00646149 & .004254351 \\ .001703416 & .004254351 & .003993911 \end{bmatrix}$$

Y el vector de retornos esperados:

$$\mu = \begin{bmatrix} .-0040027 \\ .007214869 \\ .0058183 \end{bmatrix}$$

CONCLUSIONES

El trabajo que se desarrollo es legible para todos los lectores, ya que la exposición que aquí se presenta se efectúa de una forma sencilla y detallada, la estructura de la tesis va enfocando perfectamente al lector hacia un objetivo que es precisamente plantear el problema del portafolio así como una posible solución, procurando siempre que el trabajo no pierda su lógica y claridad.

El Modelo de Markowitz utiliza las dos características más relevantes para un inversionista que son riesgo y rendimiento esperado, además supone que los inversionistas eligirán carteras eficientes, como podemos notar esta suposición es bastante real, en el desarrollo de este trabajo, se ve que a pesar de su sencillez es extremadamente práctico y útil, más aún se resuelve el problema del portafolio para un caso real, lo cual nos muestra que es una herramienta poderosa para solucionar dicho problema.

Como todos los modelos no garantiza que los resultados sean ciertos, ya que si los modelos garantizaran estos resultados hace mucho que el hombre no viviría bajo incertidumbre, por el contrario con el Modelo de Markowitz obtenemos una solución, que minimiza el riesgo, es decir disminuye la incertidumbre al máximo, tomando en cuenta en nivel de retorno deseado por el inversionista, así pues al minimizar el riesgo al máximo para un determinado nivel de retorno, se minimiza también la posibilidad de fallar.

Así pues, me parece que se ha cumplido el objetivo de este trabajo, es decir, dar una idea clara y precisa del Modelo Markowitz, así como mostrar su funcionalidad.

BIBLIOGRAFIA

- DE LA CUEVA Benjamín, Matemáticas Financieras

- DÍAZ Mata Alfredo, Invierta en la Bolsa Grupo Editorial Iberoamérica

- FABOZZI J. / Franco Modigliani / Michael G. Ferri Mercados e Instituciones financieras Ed. Prentice Hall.

- KOLB W. Robert, Ed. Inversiones Ed. Limusa Noriega Editores

- MANSELL Cartens Catherine, Las Nuevas Finanzas en México IMEF, Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas

- MARMOLEJO G. Martín, Inversiones IMEF, Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas

- MARKOWITZ Harry, Portfolio Selection: Efficient diversification of investment, Jhon Wiley Inc.

- MARKOWITZ Harry, Mean-Variance in portfolio Choice and Capital Markets. Ed. Blackwell

- MENDENHALL William / Richard L. Sheaffer / Dennis D. Wackerly Estadística Matemática con Aplicaciones Ed. Grupo Editorial Iberoamérica

- MEYER L. Paul Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas Ed. Fondo Educativo Iberoaméricano

- MINZONI Consorti Antonio Tres visiones acerca de los productos financieros derivados en México Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias

- PORTUS, Goviden Lincoyan, Matemáticas Financieras Ed. McGrawHill

- ROSS A. Stephen / Randolph W. Westerfield / Jeffrey F. Jaffe Finanzas Corporativas, Publicaciones Irwin

- SHARPE F. William / Gordon J. Alexander Investments Ed. Prentice Hall

- SANCHEZ Muñoz Luis Manuel, Introducción al Mercado de Valores y Prácticas Bursátiles Ed. PAC