

5
20



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

**CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LA
PSEUDO-ELASTICIDAD EN ALEACIONES
CON MEMORIA DE FORMA.**

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE :

**MAESTRO EN INGENIERIA
(MECANICA)**

P R E S E N T A

JACINTO CORTES PEREZ

DIRIGIDA POR: DR. HORACIO FLORES ZUÑIGA

267329

Ciudad Universitaria,

Noviembre 1998.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

01173

5

2e/

**CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LA
PSEUDO-ELASTICIDAD EN ALEACIONES CON MEMORIA
DE FORMA**

*Deí dico el presente trabajo a mi esposa: Judith Salgado Salgado.
Por tenerme fe y por su infinito apoyo.
Por que sin ella no lo hubiera logrado.*

*A mis hijos: Nayeli y Gerardo.
Porque en los momentos más difíciles son la motivación más grande.
Por que estoy lejos de alcanzar lo que quiero para ellos.*

*A mis padres: Celia Pérez Pérez y Nazario Cortés hernandes (Q. P.D).
Porque nunca, los obstáculos que tenga que superar serán más grandes que los que
ellos superaron para darme una vida mejor.*

A mis hermanos:

Mario:

Porque su ejemplo me impone metas más grandes.

Silvia:

Por el apoyo solidario que siempre me ha brindado y porque merece mucho más de la vida, quisiera dedicarle este pequeño logro en mi vida.

Claudia:

Porque en ocasiones, injustamente, la vida nos niega la posibilidad de hacer las cosas aún cuando nos sobre determinación.

A mis sobrinos:

Mario Alberto, Sonia, Fernando y Daniel

Porque son la nueva generación que espera grandes cosas de la anterior.

Un agradecimiento especial y un reconocimiento a la Dirección General de Asuntos para el Personal Académico (DGAPA) de la UNAM, por el apoyo prestado para la realización del presente trabajo vía el otorgamiento de la beca para Estudios de Posgrado en la UNAM.

Agradecimientos

Agradezco de manera especial al Dr. Horacio Flores Zúñiga tanto por la dirección del presente trabajo como por la confianza que me tuvo y por su apoyo para la obtención de la beca.

Al IIM de la UNAM por el apoyo brindado para la obtención de la beca para la realización de estudios de maestría de la DGAPA. Así mismo por haber brindado sus instalaciones para realizar del trabajo experimental correspondiente a al presente trabajo.

Al personal del IIM, , Ing. Alfredo Maciel, Ing. Carmen Vazquez, M. en C. José Guzmán por el apoyo en la realización de las pruebas experimentales (pruebas de tracción, calorimetrías, microscopía, etc.) incluidas en el presente trabajo. Así mismo agradezco a: Ing. Jesus Rivera, Ing Raúl Reyes Ing. Jesús Camacho y Sr Martín Serrano por la asistencia en el mantenimiento de los equipos necesarios para la realización de los experimentos.

A mis profesores de la DEPMI, porque sus enseñanzas dejaron una onda huella en mí y sobre todo cambiaron mi forma de ver la Ingeniería Mecánica. En especial al Dr. Jorge Carrera Bolaños y al Dr. Luis Ferrer Argote.

A mis sinodales; Dr. Arturo Pingarrón , Dra. Dora M. K de Grinber, M. en I. Armando Ortíz Prado y especialmente al Dr. Luis Ferrer Argote por sus comentarios sobre el presente trabajo.

A mis compañeros y amigos de la DEPMI: Luciano Vela, Enrique Mota, Roberto Pérez, Miguel Rivera y Said Robles, por que con su compañía fue menos difícil llegar a la meta.

A mis compañeros y amigos del IIM: Julfeta Torres, Enrique Olaes, Marco Antonio Reyes, Alejandro Ibarra, José Luis Valladares y Ricardo Martínez, por su camaradería.

A la sociedad mexicana, porque esta vez no sólo me dio la oportunidad de recibir educación si no que me dio sustento. Espero responder con rectitud a su distinción y poder retribuírselo algún día.

INDICE

INTRODUCCIÓN	i
CAPÍTULO 1: GENERALIDADES SOBRE EL EFECTO MEMORIA DE FORMA.	1
Introducción.	1
1.1 La transformación martensítica.	1
1.1.1 Definición.	1
1.1.2 Temperaturas de transformación.	3
1.1.3 Clasificación	5
1.1.4 Termodinámica.	5
1.1.5 Características Cristalográficas.	7
1.1.6 Cinética.	8
1.1.6.1 Nucleación	8
1.1.6.2 Crecimiento	9
1.2 Efectos relacionados con la transformación martensítica	10
1.2.1. Efecto memoria de forma simple.	10
1.2.2. El doble efecto memoria de forma (DEMF).	11
1.3 Superelasticidad	12
1.3.1 Pseudo elasticidad.	12
1.3.2. Superelasticidad.	14
CAPITULO 2: ALEACIONES DE COBRE CON MEMORIA DE FORMA	20
2.1 Aleaciones de cobre con memoria de forma.	20
2.1.1 Sistemas Cu-Zn y Cu-Al	21
2.1.2 La austenita.	23
Obtención de la austenita.	24
2.1.3 Orden químico.	24
2.1.4 Las martensitas	25
2.1.5 Estabilidad térmica	26
2.1.6 Estabilización.	26
2.2 Aleaciones Cu-Al-Be	27
2.3 Superelasticidad en aleaciones base cobre.	30

2.3.1	<i>Características de las transformaciones inducidas por esfuerzo.</i>	31
2.3.2	<i>Propiedades mecánicas y superelásticas en aleaciones Cu-Al-Be.</i>	37
CAPÍTULO 3: TEORÍAS DE MECÁNICA DE SÓLIDOS		40
3.1	<i>Elasticidad Finita</i>	41
3.1.1	<i>Tensor De Piola-Kirchoff</i>	42
3.1.2	<i>El Tensor De Elasticidad</i>	43
3.1.3	<i>Elasticidad Lineal</i>	45
3.2	<i>Teorías no lineales</i>	46
3.2.1	<i>Inelasticidad</i>	47
3.2.2	<i>Deformación Inelástica</i>	48
3.2.3	<i>Viscoelasticidad Lineal</i>	48
3.2.4	<i>Plasticidad</i>	52
3.3	<i>Modelos del Comportamiento Pseudoelástico</i>	55
3.3.1	<i>Teoría De Superelasticidad</i>	56
3.3.2	<i>Modelos Del Comportamiento Pseudoelástico en Materiales con Memoria de Forma</i>	59
CAPÍTULO 4: MODELACIÓN DEL COMPORTAMIENTO PSEUDO-ELÁSTICO EN TENSIÓN UNIAXIAL Y PARA UN CASO DE FLEXIÓN.		62
4.1	<i>Planteamiento.</i>	62
4.2	<i>Análisis en tracción uniaxial</i>	64
4.2.1	<i>Análisis a Temperatura Constante</i>	64
4.2.2	<i>Análisis a Carga Constante</i>	68
4.2.3	<i>Criterio de las fracciones volumétricas.</i>	71
4.2.4	<i>Consideraciones termodinámicas</i>	77
4.3	<i>Modelación del comportamiento desplazamiento-temperatura de una viga sometida a flexión a carga costante.</i>	78
CAPITULO 5: METODO EXPERIMENTAL		83
5.1	<i>Producción del material</i>	83
5.2	<i>Determinación de las Temperaturas de transformación.</i>	83
5.3	<i>Tratamientos térmicos.</i>	85
5.4	<i>Pruebas mecánicas</i>	86
CAPITULO 6 RESULTADOS Y DISCUSIÓN		88
6.1	<i>Pruebas de tracción</i>	88

<i>6.1.1 Determinación de los parámetros para la simulación</i>	88
<i>6.1.2 Simulación de las curvas de carga en el intervalo superelástico.</i>	91
<i>6.1.3 Simulación del comportamiento a esfuerzo constante.</i>	98
<i>6.2 Pruebas en flexión</i>	102
<i>CONCLUSIONES</i>	106
<i>REFERENCIAS</i>	107

INTRODUCCION

Es bien sabido que buena parte del desarrollo tecnológico en la ingeniería mecánica se basa en el empleo de los denominados "nuevos materiales" así como en la optimización en el empleo de los ya existentes. Esto indica que una parte importante de la investigación en mecánica se está orientando al estudio del comportamiento mecánico de los materiales. Debido a ello se ha puesto especial interés en el estudio de materiales que presentan comportamientos no lineales.

Algunos de los denominados "nuevos materiales" son los materiales con memoria de forma. Los materiales con memoria de forma son aquellos que tienen la capacidad de que al pasar por una cierta temperatura crítica: tomar dos formas predeterminadas (doble efecto memoria de forma) o bien recuperar su forma original después de haber sido deformados de manera aparentemente plástica (efecto memoria de forma simple). Dicho comportamiento se debe a que éstos materiales presentan una transformación martensítica de tipo termoelástico. El término termoelástico se refiere a que la transformación martensítica puede ser inducida por temperatura o por esfuerzo.

Existen varios los materiales que presentan memoria de forma entre los cuales se encuentran: metales puros, polímeros, cerámicos, aleaciones metálicas y algunos microorganismos. De estos materiales los que más están siendo aplicados son las aleaciones metálicas de cobre (de los sistemas Cu-Zn y Cu-Al principalmente) debido a que resultan ser las más económicas.

Los materiales con memoria de forma presente una serie de efectos entre los cuales se encuentran: el doble efecto memoria de forma, el efecto memoria de forma simple y el efecto superelástico entre otros.

El comportamiento mecánico que presentan los materiales con memoria de forma, el cual es denominado **pseudoelástico**, es no lineal y dependiente de la temperatura. Debido a esto, resulta considerablemente complicado diseñar dispositivos mecánicos que aprovechen sus propiedades. No obstante en varios países como Japón, Estados Unidos y Francia existen ya una serie de dispositivos que emplean los estos materiales en algunas de sus partes.

A pesar de los materiales con memoria de forma están siendo en otros países, la información al respecto es escasa y poco accesible y por ello las aplicaciones que se han desarrollado en nuestro país son prácticamente artesanales.

La mayoría de los estudios que se han reportado, sobre el comportamiento mecánico de estos materiales, involucran el empleo de métodos numéricos debido a lo complejo del comportamiento. No obstante varias de las aplicaciones que se conocen se basan en elementos mecánicos simples como vigas y resortes helicoidales.

Debido a lo anterior surge el interés por estudiar el comportamiento mecánico de estos materiales en elementos mecánicos simples como vigas en flexión. Lo anterior es con el fin de proporcionar criterios de diseño mas o menos simples que permitan en un futuro desarrollar aplicaciones que aprovechen las propiedades de los materiales con memoria de forma. En particular el presente trabajo está dirigido a la búsqueda de soluciones analítica aproximadas aplicables a: elementos sujetos a tensión y vigas en flexión,

sometidos a carga constante y temperatura variable. Se estudia el caso de carga constante debido a que de esta manera se puede obtener el mismo comportamiento que en el caso del doble efecto memoria de forma, sin que sea necesario someter el elemento al proceso de educación que puede resultar costoso.

Dado que el fenómeno que se experimentan estos materiales es considerablemente complejo en los dos primeros capítulos del presente trabajo se presentan los conceptos fundamentales de la transformación martensítica en general primero en forma general y luego en forma particular en las aleaciones de cobre con memoria de forma.

Posteriormente, se presenta una breve revisión de las teorías sobre mecánica de sólidos así como sobre los principales modelos del comportamiento pseudoelástico que presentan los materiales con memoria de forma.

En el cuarto capítulo se presenta el desarrollo de algunos modelos del comportamiento pseudoelástico para los casos de:

Tracción uniaxial a temperatura constante

Tracción uniaxial a carga constante

Luego estos modelos son extendidos al caso de una viga en cantilever sometida a una carga puntual en su extremo libre.

Finalmente, se presentan una comparación entre los modelos y los datos obtenidos experimentalmente en pruebas realizadas con materiales policristalinos elaborados con aleaciones (con memoria de forma) tipo Cu-Al-Be.

CAPITULO 1

GENERALIDADES SOBRE EL EFECTO MEMORIA DE FORMA.

Introducción.

Algunas aleaciones tienen la capacidad poco usual, de recuperar su forma original después de haber sido deformadas de manera permanente a baja temperatura, retomando su forma inicial mediante un simple calentamiento. Esta capacidad es llamada el "efecto memoria de forma". Frecuentemente, ese tipo de aleaciones también puede presentar el llamado "Efecto Pseudoelástico" o "Superelástico" que corresponde a la capacidad de obtener grandes deformaciones elásticas. Este tipo de aleaciones se les conoce como *aleaciones con memoria de forma*. Estos efectos son una consecuencia de la existencia de una transformación de fase martensítica en estas aleaciones.

1.1 La transformación martensítica.

Existen dos tipos de transformaciones en estado sólido: *difusional* y "*por desplazamientos*" (*displacive*). Las transformaciones difusionales son aquellas en las cuales una nueva fase puede ser formada sólo por el movimiento aleatorio de los átomos sobre distancias relativamente grandes, es decir, hay difusión y cambio en la composición química. En contraste, la transformación "*por desplazamientos*" no requiere de tales movimientos, los átomos se mueven de manera cooperativa para formar la nueva fase, desplazándose distancias menores al parámetro de red. De esta manera los átomos forman una estructura cristalina más estable pero sin cambio en la composición química de la matriz. Debido a que no es necesaria una migración atómica, la transformación "*por desplazamientos*" es reversible y generalmente progresa en una forma independiente del tiempo, con un movimiento de la interface limitado sólo por la velocidad del sonido en el material.

Las transformaciones martensíticas son generalmente del segundo tipo y se forman por enfriamiento rápido de una fase de alta temperatura llamada fase "madre" o austenita. La fase obtenida de esta manera es llamada *fase martensítica*.

1.1.1 Definición.

Actualmente la definición mas admitida para la transformación martensítica es la publicada por M. Cohen, G.B. Olson, P.C. Clapp 1]: "*Es una transformación "por desplazamientos", de primer orden, con una deformación homogénea de red constituida principalmente por una deformación cortante*".

La transformación es "*por desplazamientos*" cuando no hay difusión, y el movimiento de los átomos es muy pequeño respecto a las distancias interatómicas. No hay entonces cambio en la composición química.

Una transformación es de primer orden cuando durante la misma, las dos fases involucradas se diferencian claramente. También se considera de primer orden, por la existencia de una histéresis, es decir, existe un intervalo de temperaturas donde ambas fases coexisten. Además el hecho de poseer una entalpía de transformación son también consideradas como de este tipo de transformación. Finalmente, son llamadas de primer orden ya que se acompañan de una discontinuidad en propiedades como el volumen, la presión, etc., que son primeras derivadas de los potenciales termodinámicos.

El cambio de la estructura cristalina del material durante la transformación se manifiesta mediante una deformación homogénea de red de la fase madre, que está formada principalmente por una deformación de corte. Este corte produce una deformación macroscópica en la superficie de la muestra, la cual es visible al microscopio óptico. Esta deformación de la red puede estar acompañada por desplazamientos de átomos que se encuentran dentro de la malla (llamado "Shuffle" por algunos autores) ver Figura 1.1 [2]

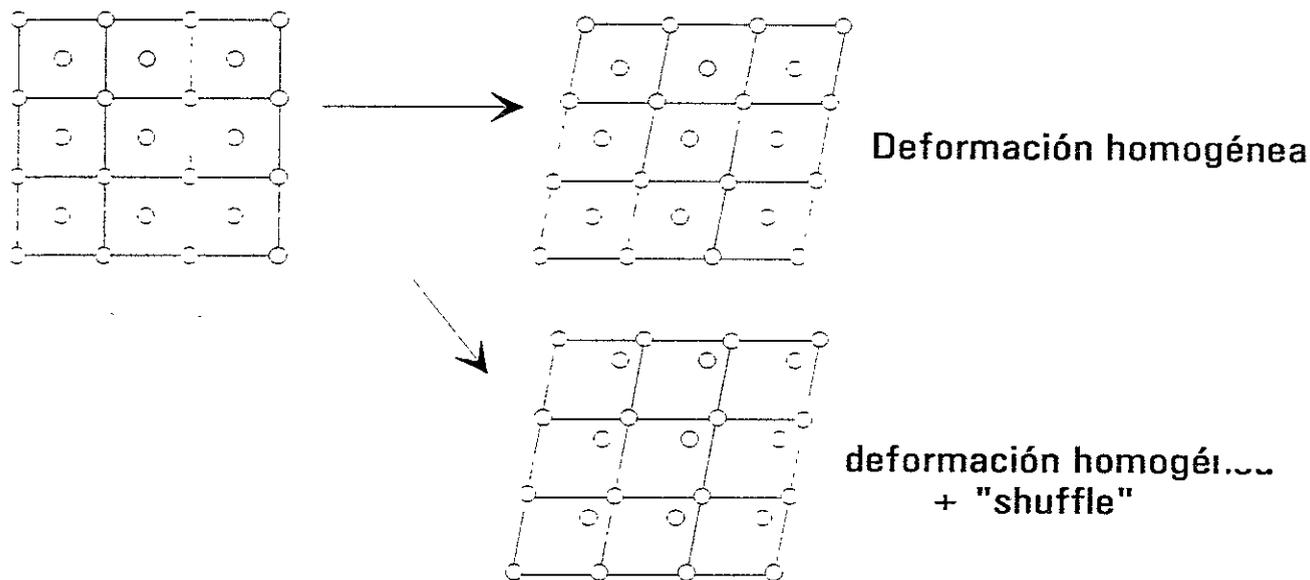


Figura 1.1 : Deformación homogénea de red (corte) con y sin "Shuffle" [2].

En particular el acero sufre una transformación martensítica entre las estructuras austenita (fcc: cúbica centrada en las caras) y martensita (bcc: tetragonal centrada en el cuerpo). Bain propuso un modelo para la obtención de una fase a partir de la otra, donde la fase austenita se convierte en la fase martensita mediante una compresión a lo largo de un eje y una expansión en los otros dos. La Figura 1.2 muestra el modelo que esquematiza este tipo de transformación[1].

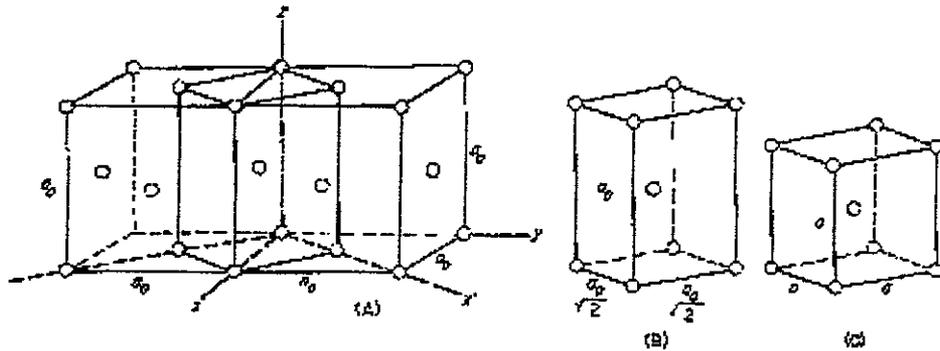


Figura 1.2: Diagrama esquemático de la "Deformación de Bain".

A finales del siglo pasado Martens identificó una nueva fase del acero, obtenida mediante un templado. Dicha fase fue relacionada con el endurecimiento de este material. En 1895 esta fase fue llamada martensita en consideración a su investigación[4]. Sin embargo el término *martensita* se ha generalizado a todas las fases obtenidas de la misma manera (mediante un templado). Las transformaciones martensíticas se han observado en todo tipo de materiales: gases solidificados, superconductores, aleaciones metálicas, cerámicas, polímeros y también en estructuras biológicas como el virus T4 [5].

1.1.2 Temperaturas de transformación.

Todas las transformaciones de tipo martensítico tienen temperaturas características que definen los puntos de inicio y fin de la transformación, ver Figura .1.3.

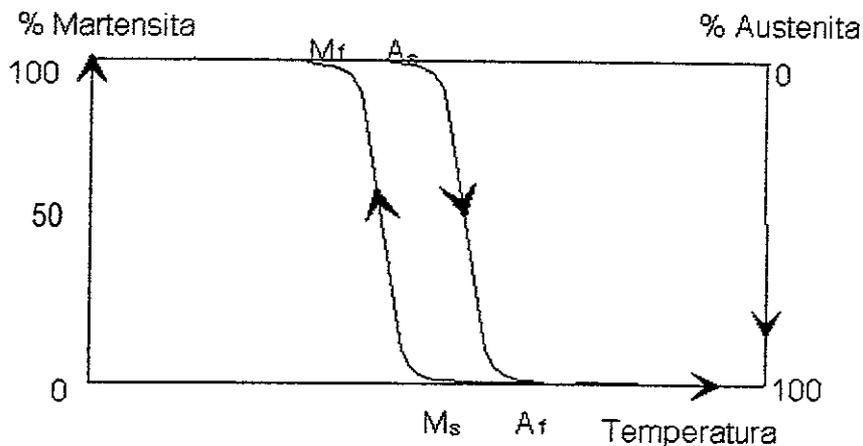


Figura 1.3. Ciclo de transformación martensítica.

Las temperaturas M_S y M_F corresponden al principio y al fin de la transformación directa: de austenita a martensita. De la misma manera, las temperaturas A_S y A_F están definidas como el principio y el fin de la transformación inversa: martensita a austenita. En las aleaciones metálicas

estos cuatro puntos de transformación dependen esencialmente de la composición química y de la historia térmica que hayan sufrido las aleaciones.

Las temperaturas M_{50} y A_{50} están definidas como las temperaturas donde el material está 50 % transformado. La histéresis está definida como la diferencia entre esas dos temperaturas. La histéresis de transformación depende principalmente del tipo de aleación y de las estructuras de las fases involucradas.

El porcentaje de fase transformada representado en el eje y de la Figura 1.3 se obtiene generalmente integrando el pico de la entalpía de transformación (en DSC calorimetría diferencial de Barrido), considerando que la fracción de fase transformada es proporcional al calor desprendido durante la transformación. En ese contexto, la definición mas aceptada de la temperatura M_s corresponde al 10 % de martensita transformada.

Asimismo pueden utilizarse los valores de cualquier propiedad física que sufra una discontinuidad durante la transformación. Por ejemplo, en los ensayos de resistividad eléctrica o bien del cambio en el flujo de calor a través del material (cambio en la conductividad térmica) se pueden determinar las temperaturas de transformación. Una gráfica en la que se usó el cambio en la resistividad eléctrica para encontrar las temperaturas de transformación se muestra en la Figura 1.4 [6].

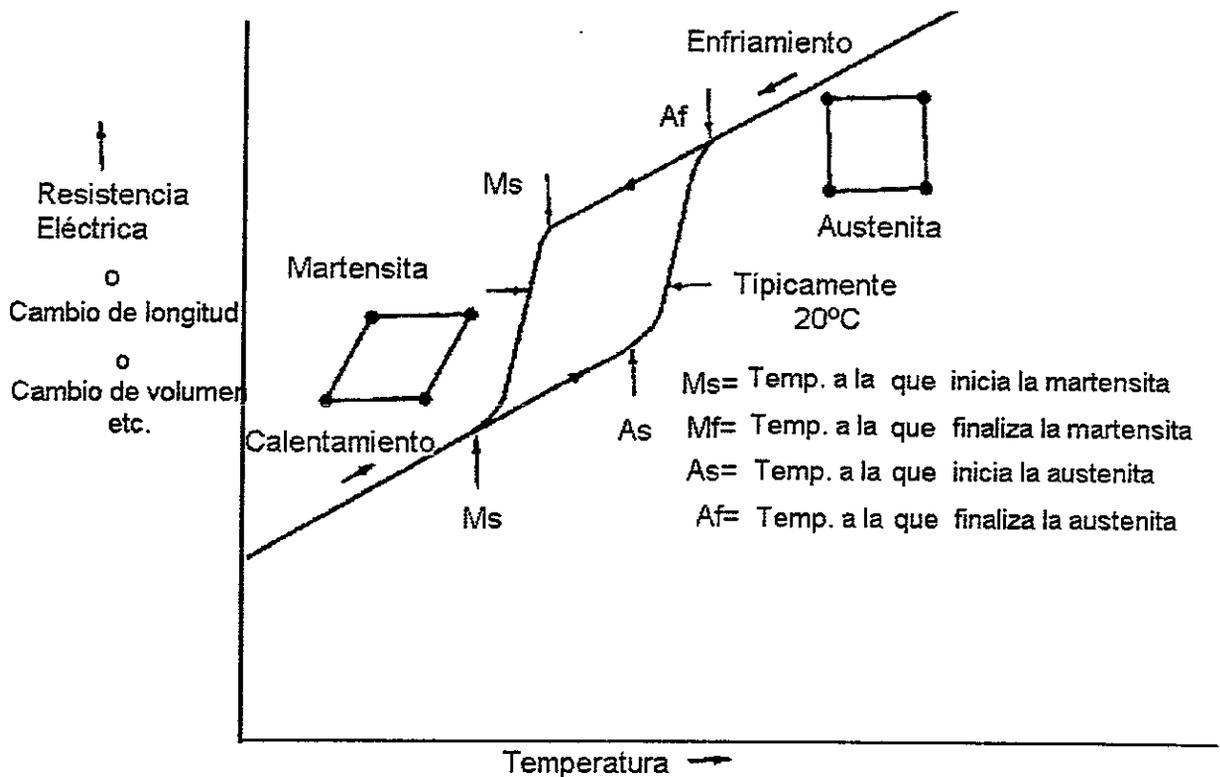


Figura 1.4: Gráfica típica de una propiedad física, como la resistividad eléctrica, en función de la temperatura [6]

1.1.3 Clasificación

Según la amplitud de la histéresis, las transformaciones martensíticas pueden ser clasificadas de dos maneras: tipo abrupta (o "Burst" como es llamada en la literatura) o bien termoelásticas.

Las transiciones de tipo "Burst" tienen una histéresis importante debido a que la deformación producida durante la transición es bastante grande (ver Figura 1.5-a). Por otro lado la rapidez de transformación puede alcanzar la velocidad del sonido dentro del material. El acero es un buen ejemplo de este material presentando esta característica.

Las transiciones termoelásticas tienen una histéresis débil, lo que explica el porqué son reversibles. El crecimiento de la martensita se realiza mediante una sucesión de posiciones de equilibrio que son función de las fuerzas que están presentes: la fuerza motriz debido a la diferencia de energía libre entre las dos fases y la fuerza resistiva debido a la energía elástica almacenada y de la energía de interface. La rapidez de crecimiento está gobernada por la del enfriamiento. Existen dos tipos de transformación termoelástica: El tipo I presentado en la Figura 1.5-b) que muestra un intervalo de ($M_s - M_f$) ó ($A_f - A_s$) pequeño, y el tipo II de intervalo grande (Figura 1.5-c) que es el caso del Ti-Ni. La termoelasticidad es generalmente una condición necesaria para tener el efecto memoria de forma y la superelasticidad.

No obstante, el efecto memoria de forma presentado por ciertos aceros, se da por otro tipo de transformación que es por desplazamientos pero no martensítica (vgr. Fe-Mn-Si-C), a pesar de que su histéresis es mucho mayor a la de las termoelásticas [7].

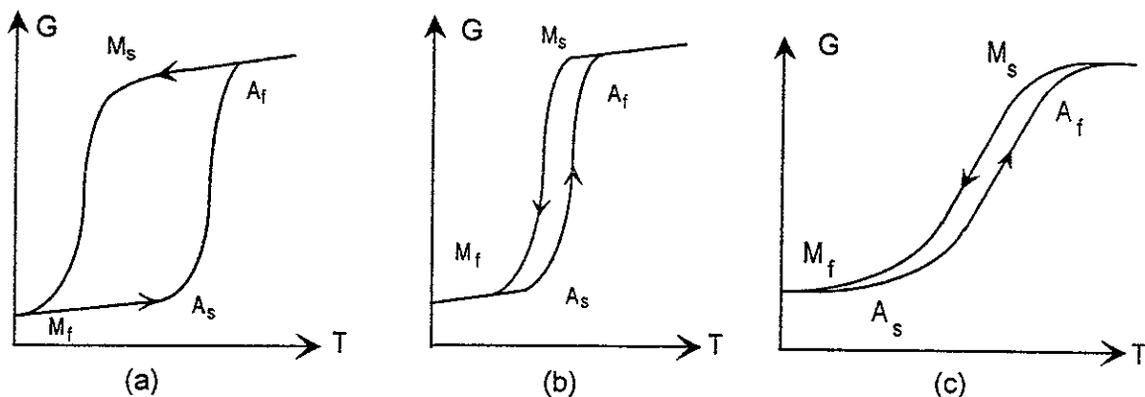


Figura 1.5: Tipos de transformaciones martensíticas.

1.1.4 Termodinámica.

Si partimos del hecho de que la transformación martensítica no genera un cambio en la composición química, ésta puede ser considerada desde el punto de vista termodinámico como un

sistema de un sólo componente. La fase en equilibrio es aquella donde la energía libre es la más baja. La Figura 1.6 muestra esquemáticamente la variación de la energía de la fase austenítica (G_A) y martensítica (G_M). La temperatura de equilibrio entre las dos fases, para la cual los términos de energía libre $\Delta G_{(A-M)} = G_M - G_A = 0$, es llamada T_0 . La transformación no comienza sino hasta que la temperatura $M_S < T_0$ ya que el sistema debe suministrar una energía suplementaria: $\Delta G_{(A-M)}$ para vencer las barreras energéticas de otro tipo: germinación de la martensita, la interacción entre variantes⁽¹⁾ de martensita y las deformaciones elásticas y/o plásticas creadas por la martensita dentro de la austenita.

En el caso de las transformaciones no termoelásticas⁽²⁾ o de tipo "Burst", esta barrera energética es muy grande, entre otros por el hecho del intenso cambio en el volumen entre las dos fases, lo que implica una gran histéresis. Este es precisamente el caso de los aceros.

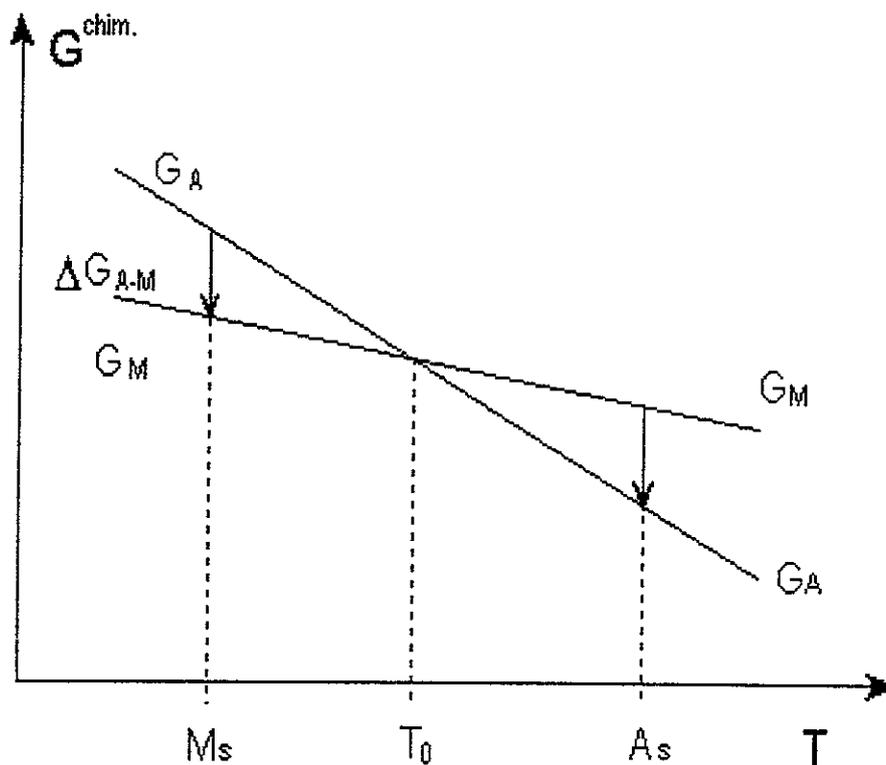


Figura 1.6. Variación de la energía libre de cada una de las fases en función de la temperatura.

¹ Ver sección 1.1.4.

² Ver §1.1.5.

1.1.5 Características Cristalográficas.

En la escala microscópica (microscopio óptico) la interfase austenita-martensita es un plano invariante llamado "plano de hábito". En primera aproximación la transformación se traduce por una deformación de corte paralela al plano de hábito. La Figura 1.7 muestra esquemáticamente la aparición de una plaqueta única en un monocristal [2].

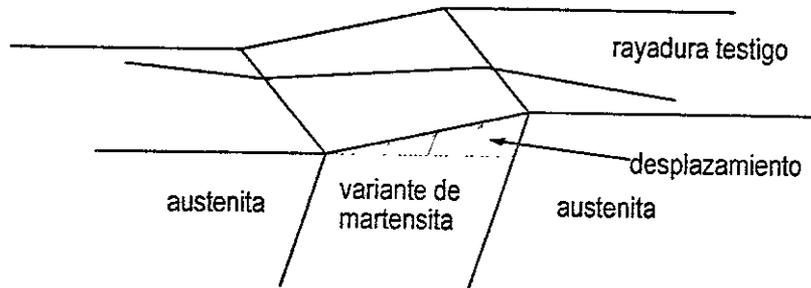


Figura 1.7: Efecto de una rayadura testigo del relieve de la superficie debido al surgimiento de una plaqueta de martensita [2].

A partir de un monocristal de austenita se pueden formar 24 diferentes variantes de martensita. Estas variantes se diferencian entre sí por la orientación de su plano de hábito y por la dirección de la deformación de corte. En la Figura 1.8 se muestra un esquema de cómo se obtienen las diferentes variantes de martensita a partir de un cristal cúbico de austenita. Las 24 variantes se obtienen considerando los 6 planos de un cristal cúbico y cuatro direcciones por cada uno de ellos.

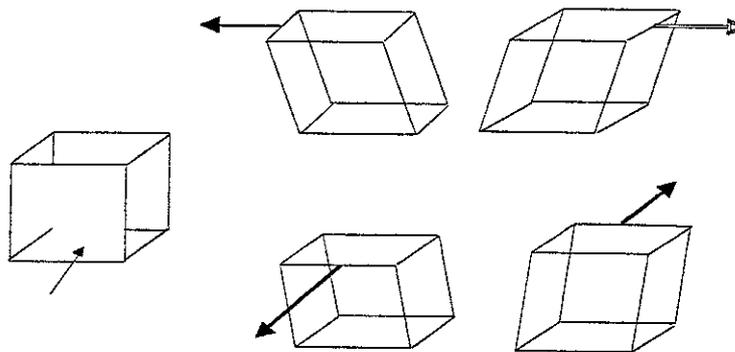


Figura 1.8: Esquema de obtención de variantes

Por otro lado, las variantes equiprobables se forman de manera tal que compensan sus deformaciones respectivas (bajo el efecto de los esfuerzos internos): se forma un grupo de variantes llamadas *autoacomodantes*, el cual genera una transformación sin deformación macroscópica significativa, como puede verse en la Figura 1.9 [8, 9].

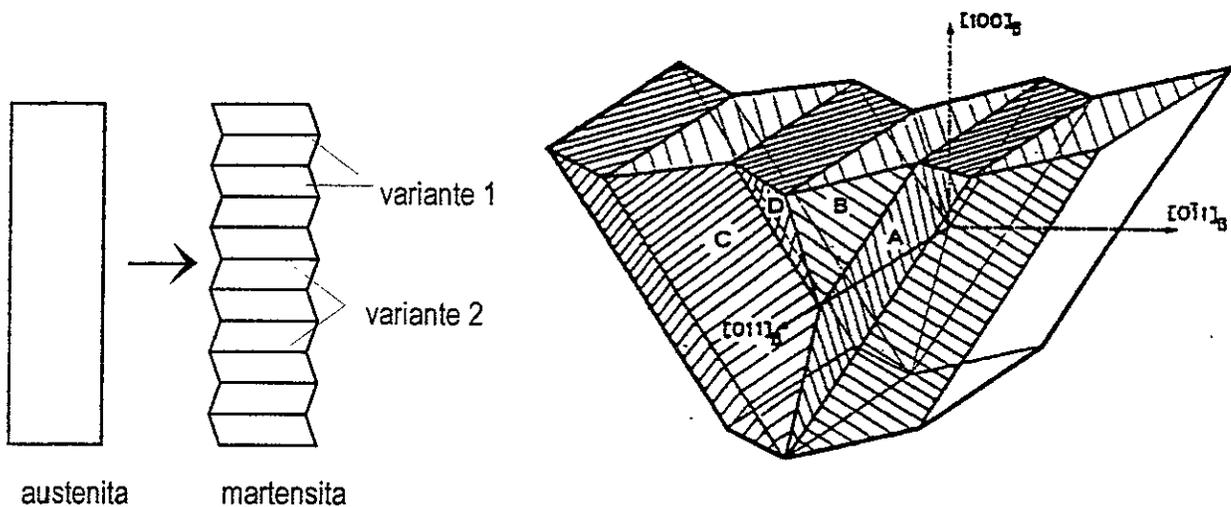


Figura 1.9 : Presentación esquemática de las variantes autoacomodantes.

1.1.6 Cinética.

La transformación de fase martensítica ocurre mediante dos pasos: la nucleación y el crecimiento subsecuente.

1.1.6.1 Nucleación

La nucleación es el conjunto de fenómenos que preceden y conducen a la aparición del primer volumen de martensita a partir de la fase madre (austenita). La nucleación se da por etapas sucesivas desde una etapa de coherencia total hasta una etapa de incoherencia, donde se forma una superficie entre la matriz y la nueva fase.

La nucleación homogénea corresponde a la formación de los núcleos de martensita dentro de la austenita, sin la ayuda de imperfecciones de red o sitios de nucleación diferentes a la austenita misma. En la teoría clásica de la nucleación homogénea, la energía para activar la nucleación proviene sólo de las fluctuaciones térmicas. Pero esta energía calculada es dos órdenes de magnitud mas grande que las presentadas por las martensitas termoelásticas. Es claro que la nucleación debe ser heterogénea.

La nucleación heterogénea necesita de sitios de nucleación preferencial donde la energía necesaria para formar un núcleo es menor que la requerida para la nucleación homogénea. Los sitios de nucleación preferencial pueden ser las imperfecciones de la estructura de la fase austenítica.

Cohen considera que existen embriones preexistentes en la matriz, y da las condiciones de crecimiento de esos embriones [10]. Este es entonces un modelo de crecimiento. Desde el punto de vista de este autor estos embriones consisten en un elipsoide aplastado con una interface semicoherente con la matriz, constituidos de bucles de dislocaciones. Pero los embriones

necesarios de tamaño 60 nm (en el caso del Fe-Ni) nunca han sido observados, a pesar de numerosas observaciones en microscopía electrónica y topografía de rayosX.

Kajiwara demostró que en las aleaciones de Fe-Ni, Fe-Ni-C, Fe-Cr-C, el acomodamiento de la deformación plástica debida al cambio de forma en la austenita, es un paso primordial de la nucleación. El reportó que las dislocaciones por ellas mismas no participan como sitios de nucleación favorable, sino mas bien para acomodar plásticamente la deformación [11].

Easterling y Tholen consideran la interacción elástica entre las dislocaciones preexistentes y un germen de martensita. Esos grupos de dislocaciones forman sitios de germinación de martensita convenientes. Su campo de deformación puede interaccionar favorablemente con el campo de deformación relacionado con la deformación de Bain, y disminuir así la barrera energética de la germinación. Aquí la dislocación no participa en la transformación mas que a través de su campo de deformación. Esos autores notaron que la energía de deformación del embrión disminuye por maclado durante su crecimiento. Posteriormente, el crecimiento se prosigue mediante un mecanismo de deslizamiento de dislocaciones en la interface, aquí también el maclado disminuye la energía necesaria [12].

Mas tarde Olson y Cohen propusieron una teoría a partir de los defectos cristalinos de la matriz, donde la martensita aparece durante las etapas sucesivas: una etapa partiendo de un estado de coherencia total y llegando a un estado de incoherencia. La primera etapa de falla es la disociación de dislocaciones. El volumen contenido en el interior de éstas se convierte en el germen de martensita [13].

Recientemente, Guénin ha desarrollado un modelo de nucleación de la martensita basado en el concepto de "modo suave localizado". La nucleación de la martensita tendría lugar en las zonas mecánicamente inestables, situadas en la proximidad de los defectos de la red, siendo las dislocaciones el tipo principal de defecto [14, 15].

Esos diferentes modelos presentan el importante papel que tienen los defectos y particularmente las dislocaciones. Desde el punto de vista experimental, numerosos estudios se han realizado con el fin de visualizar los primeros estados de la nucleación. Ultimamente se ha podido confirmar que la nucleación de la martensita es heterogénea y se lleva a cabo sobre o muy cerca de sitios particulares (inclusiones, concentración de dislocaciones, defectos de superficie): S. Muto mediante microscopía electrónica en Fe₃-Pt, T. Saburi y S. Nenno para la aleación Ti-Ni-Cu, C. Jourdan y colaboradores para el Titanio en topografía X [16].

1.1.6.2 Crecimiento

El crecimiento es el período de desarrollo y propagación de la martensita una vez que sus primeros gérmenes se han formado. Este crecimiento se realiza por el movimiento de interfaces, algunas veces muy lentos, otras veces muy rápidos. Un estudio mas fino acoplado a mediciones de emisión acústica ha mostrado, durante un enfriamiento lento, que las interfases progresan por saltos muy rápidos aún si la velocidad aparentemente global es débil [17]. Tal parece que la velocidad máxima de propagación de las interfases es una fracción importante de la velocidad del sonido: 60 % según las mediciones de Mañosa et al en aleaciones Cu-Zn-Al (17).

Recientemente Minfa et al parten del hecho de que la germinación es un proceso heterogéneo. Las heterogeneidades están ligadas a la existencia de una distribución de defectos preexistentes (sitios de germinación) y por defectos generados de manera autocatalítica (suponiendo aquí que éstos poseen una distribución gaussiana).

1.2 Efectos relacionados con la transformación martensítica

La transformación martensítica de (tipo termoelástico) es la responsable de los efectos: memoria de forma simple, doble efecto memoria de forma y el efecto superelástico entre otros. En esta sección se discute el efecto memoria de forma simple y el doble. Es en la siguiente sección donde se discutirá el efecto superelástico.

1.2.1. Efecto memoria de forma simple.

El efecto memoria de forma simple es la recuperación (por calentamiento) de una forma de alta temperatura (pre-definida) desde una forma de baja temperatura (obtenida por deformación) [18]. La Figura 1.10 presenta un esquema de este efecto de forma macroscópica. Partiendo de la muestra en estado austenítico ($T > A_f$) con la forma en la que fué fabricada, se enfría hasta una temperatura donde toda la muestra está en estado martensítico ($T < M_f$). A esta temperatura la muestra puede ser deformada y permanecer con una deformación aparentemente plástica cuando se retira la carga. Finalmente al calentar la muestra recupera la forma que tenía a temperatura alta.

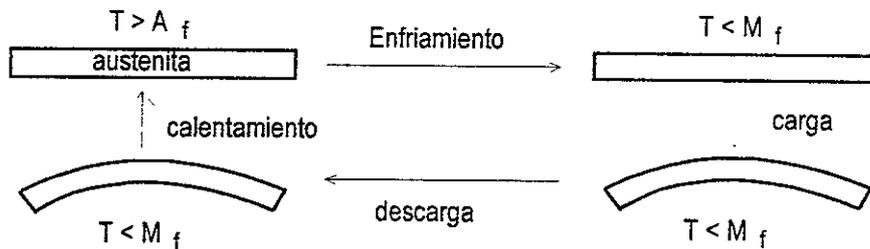


Figura 1.10 Esquema del efecto memoria de forma.

La Figura 1.11 muestra este comportamiento desde el punto de vista de las variantes de martensita, en un diagrama temperatura - esfuerzo - deformación ($T-\sigma-\epsilon$). Si se parte de una muestra que está en estado austenítico ($T > A_f$) punto (1), se le enfría por debajo de M_f y la muestra pasa al estado martensítico (2), y las variantes así producidas están repartidas mas o menos al azar. La aplicación de un esfuerzo en fase martensítica provoca la reorientación de ciertas variantes de martensita, produciendo una deformación macroscópica (3). al quitar el esfuerzo no todas las variantes regresan a su orientación inicial; subsiste entonces una deformación (4). Las variantes, aunque están repartidas de manera diferente, son de cualquier manera producidas por el mismo monocristal de austenita original, en el cual éstas se retransforman por calentamiento, recuperando así la forma inicial (1).

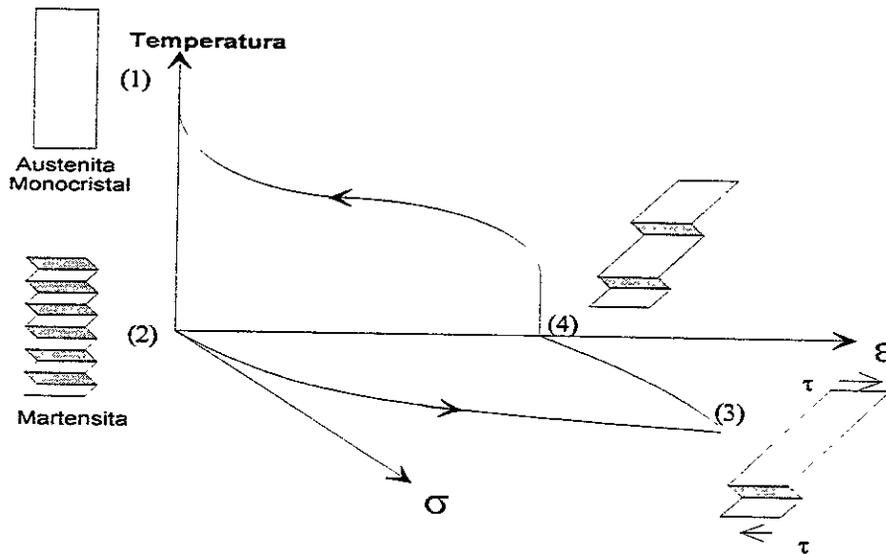


Figura 1.11. Efecto memoria de forma simple desde el punto de vista de las variantes de martensita.

1.2.2. El doble efecto memoria de forma (DEMF).

Después de un tratamiento termomecánico particular llamado "educación" un comportamiento análogo al de la Figura 1.11 se presenta sin que se aplique esfuerzo exterior. Se trata del doble efecto memoria de forma el cual corresponde al paso reversible de una forma de "alta" temperatura a una forma de "baja" temperatura. El comportamiento se ilustra en la Figura 1.12.

Este efecto pone en juego durante el enfriamiento la nucleación y el crecimiento de una variante particular (o de un número limitado de variantes) de martensita. Esta variante favorece la aparición de variantes cuya deformación está en la dirección donde el esfuerzo de la educación fue aplicado, mientras que las otras variantes no aparecen o aparecen muy poco. Durante el calentamiento el efecto memoria de forma simple se produce llevando al material a la forma inicial.

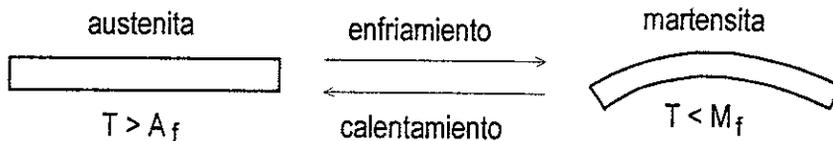


Figura 1.12: El doble efecto memoria de forma (esquema macroscópico).

En una gráfica ϵ vs T este efecto puede apreciarse como lo muestra la Figura 1.13, donde la deformación espontánea es considerada como el doble efecto memoria de forma: DEMF.

Recientemente se han presentado 2 hipótesis importantes, las cuales toman en cuenta por un lado, la relación energética que hay entre dislocaciones preexistentes (por educación) y las martensitas formadas. La otra hipótesis corresponde con la generación de dislocaciones y/o grupos de ellas que generan un campo de esfuerzos que hace que algunas variantes sean más favorables.

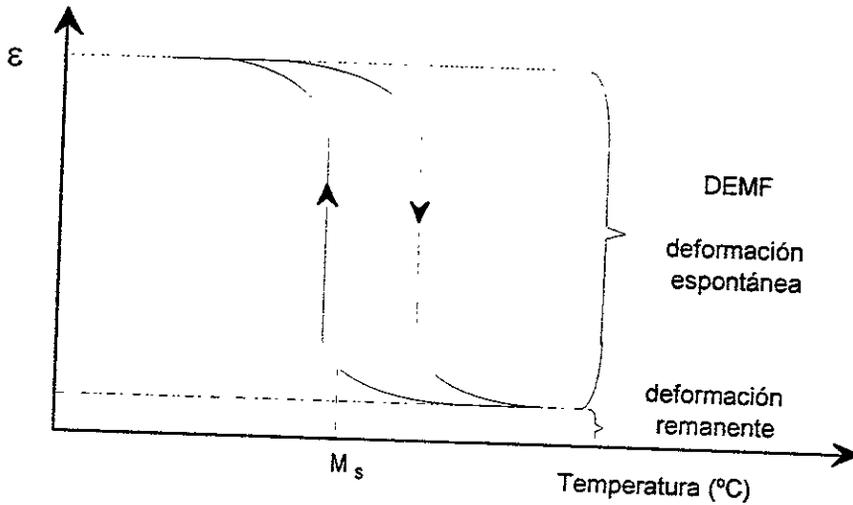


Figura 1.13: Esquema del doble efecto memoria de forma.

1.3 Superelasticidad

1.3.1 Pseudo elasticidad.

La pseudo elasticidad es una variante del efecto memoria de forma y que se diferencia de los otros efectos en que es totalmente isotérmico. En general, cualquier no-linealidad en la curva esfuerzo - deformación durante la descarga se considera como pseudo elasticidad. Dos ejemplos típicos de este comportamiento son mostrados en las Figuras 1.14 y 1.15.

El comportamiento que se aprecia en la curva de la Figura 1.14 es conocido como "pseudo - maclado", pseudoelasticidad por maclado³ o bien como efecto tipo caucho. Este efecto ocurre generalmente a una temperatura inferior a M_F donde la muestra está totalmente en estado martensítico. La característica macroscópica de este comportamiento es que presenta una pequeña no- linealidad en la curva de descarga.

En este tipo de pseudoelasticidad se parte de un material en estado completamente martensítico. La aplicación de un esfuerzo produce el crecimiento de las variantes de martensita que son favorecidas por dicho esfuerzo. Este crecimiento hace que las otras variantes (producidas durante el enfriamiento) decrezcan. Al descargar sólo algunas de las variantes se recuperan y esto explica el porque la deformación permanece.

³ Originalmente el término de macla se utilizó para denotar a las variantes de martensita.

policristales, en lugar de las mesetas, se aprecia un cambio de pendiente (ver Figura 1.16). Esta pseudoelasticidad es también conocida como la pseudoelasticidad de transformación.

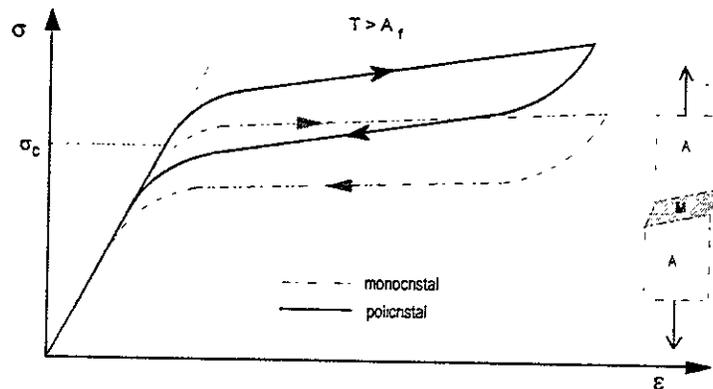


Figura 1.16: Efecto Superelástico para un monocristal y un policristal.

1.3.2. Superelasticidad.

La superelasticidad, definida en la sección precedente, requiere que ocurra una transformación martensítica inducida por esfuerzo. En nuestro caso una fase martensítica es inducida al esforzar una fase austenítica, lo que quiere decir que es posible inducir una transformación martensítica no sólo por enfriamiento sino también al aplicar un esfuerzo. La superelasticidad es posible debido que la formación de la martensita es un proceso termoelástico.

La formación de la martensita es un proceso termoelástico en el sentido de que al ir disminuyendo la temperatura (entre M_S y M_F) obtenemos un ligero crecimiento de las placas de martensita existentes y la nucleación de otras, pero si la temperatura ahora se va incrementando las placas de martensita que recién se habían formado desaparecen y aquellas que crecieron ligeramente (durante el enfriamiento) se contraen.

Lo anterior significa que existe para un sistema tal una equivalencia entre esfuerzo y temperatura, de tal forma que una disminución en la temperatura es equivalente a un incremento en el esfuerzo, además ambos estabilizan la martensita [6].

A la martensita formada mediante la aplicación de un esfuerzo se le denomina "Martensita Inducida por Esfuerzo" (MIE) y la fuerza motriz necesaria para la transformación es ahora mecánica en lugar de la térmica. Obviamente para inducir martensita por esfuerzo se tiene que estar por encima de A_F .

El esfuerzo requerido para formar MIE incrementa al elevarse la temperatura como se muestra en la Figura 1.17 [6]. La variación del dicho esfuerzo crece linealmente con la temperatura como puede verse en la Figura 1.18 [6]). Este comportamiento obedece la ecuación de Clausius-Clapeyron, la cual está descrita con la manera siguiente:

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\Delta H}{T \Delta V} \quad (1)$$

en donde P es la presión, T es la temperatura, ΔH es el calor latente de transformación y ΔV es el cambio de volumen debido a la transformación. Esta ecuación escrita de esa forma ha sido tradicionalmente usada por los químicos, pero los metalurgistas la usan en una forma equivalente:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial M_s} = -\frac{\Delta H}{T \varepsilon_0} \quad (2)$$

donde ΔH y T tienen el mismo significado que antes, mientras que σ , M_s^σ y ε_0 son respectivamente, el esfuerzo aplicado, la temperatura M_s^σ trasladada⁴ y la deformación por transformación en la dirección del esfuerzo aplicado.

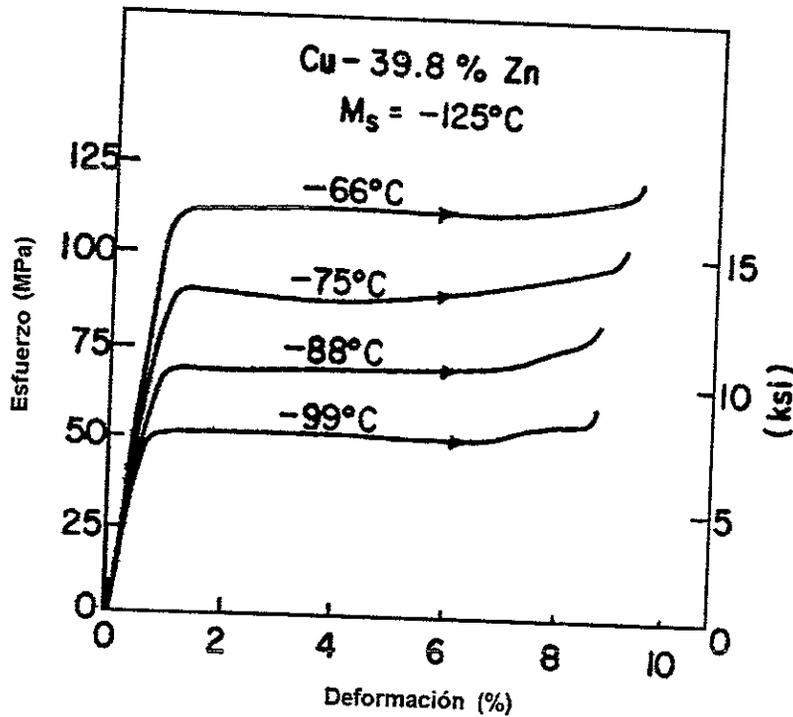


Figura 1.17: Curvas esfuerzo - deformación para un monocristal de Cu-Zn esforzado en tensión a distintas temperatura por encima de M_s [6].

El esfuerzo necesario para formar MIE continua creciendo con la temperatura hasta llegar a un cierto valor M_d , por encima del cual el esfuerzo es más grande que el necesario para mover las dislocaciones en el material y producir deformación plástica. Esto hace que la temperatura M_d sea la temperatura más alta a la cual es posible obtener MIE. Entonces, el intervalo de temperaturas para obtener MIE está entre M_s y M_d .

⁴ Es decir que al aplicar el esfuerzo la temperatura de transformación es modificada.

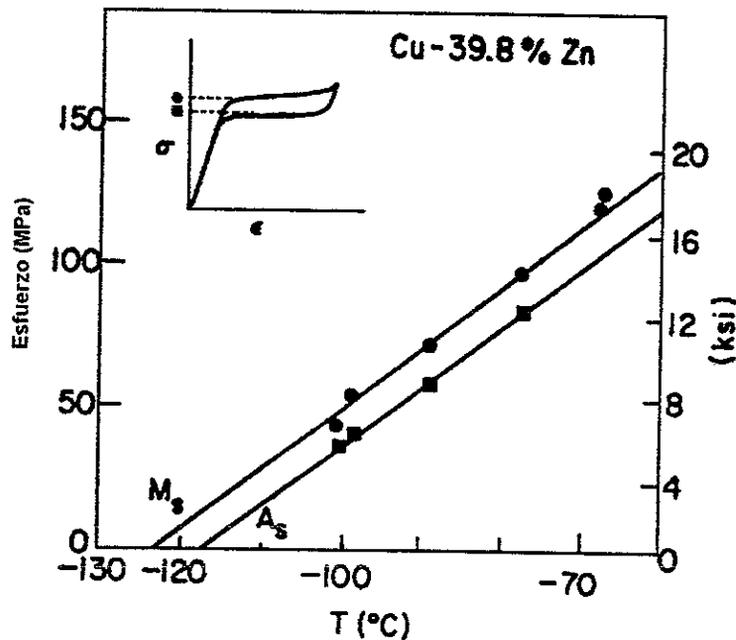


Figura 1.18: Gráfica que relaciona el esfuerzo necesario para inducir martensítica (y su reversión) en función de la temperatura (por encima de M_s) para la aleación Cu-39.8%Zn[6].

La ecuación de Clausius-Clapeyron funciona tanto para el caso isotérmico (ver Figura 1.18) como para el caso no isotérmico. Esto quiere decir que se puede mantener constante la temperatura y medir el esfuerzo necesario para formar martensita o bien, aplicar una carga constante y medir la temperatura M_s^{σ} . En realidad todas las temperaturas de transformación (M_s , M_F , A_s y A_F) están afectadas por el esfuerzo de la misma manera (ver Figura 1.19). Lo anterior implica que la razón: $\frac{d\sigma}{dM_s^{\sigma}}$ es llamada razón de esfuerzo, y es la relación fundamental del efecto superelástico en aleaciones con memoria de forma.

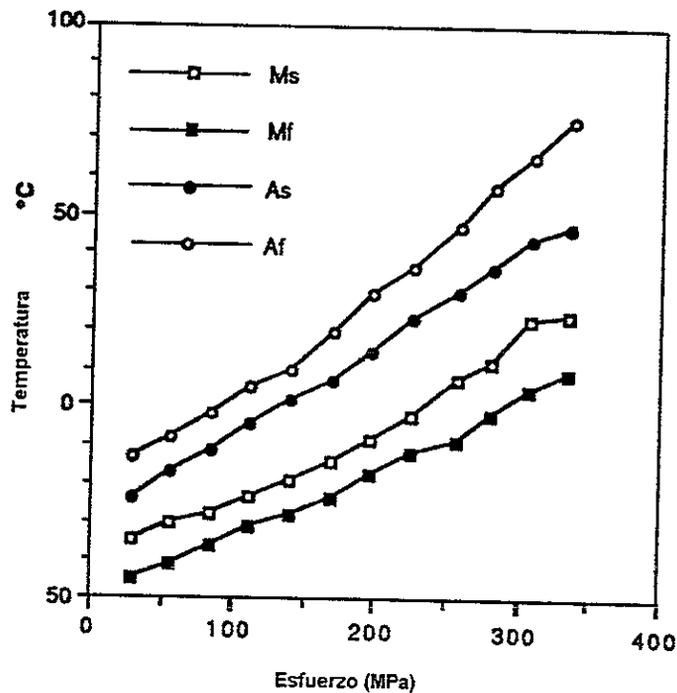


Figura 1.19: Gráfica de la variación de las temperaturas de transformación al variar la carga aplicada para la aleación Cu-39.8%Zn[6].

La Figura 1.20 muestra una curva esfuerzo-deformación superelástica para una aleación(monocrystalina) con memoria de forma (AMF) con composición Cu-39.8%Zn. La meseta superior corresponde a la formación de martensita bajo esfuerzo mientras que la meseta inferior representa la reversión de la Martensita inducida por esfuerzo (MIE) formada cuando el esfuerzo es retirado. En dicha figura se puede observar que se logró una deformación de aproximadamente un 9% y que fue completamente recuperada durante la descarga: Esto puede ser visto como un efecto memoria de forma mecánico.

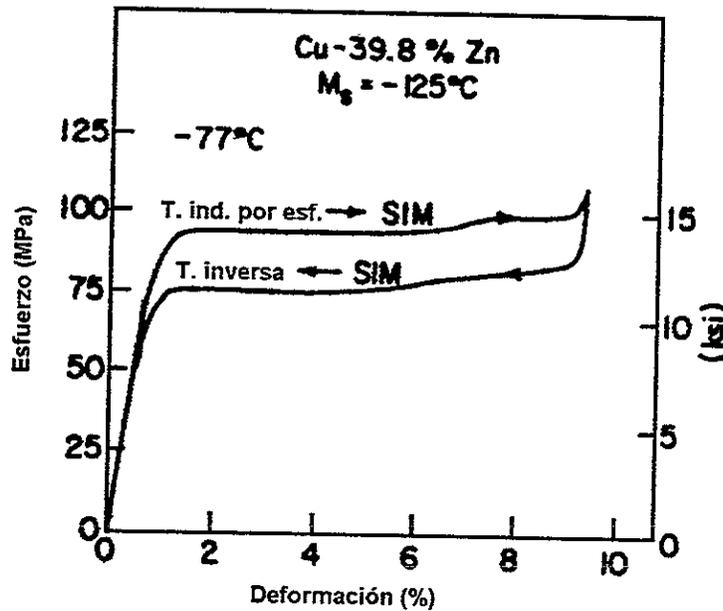


Figura 1.20: Curva esfuerzo-deformación para una aleación Cu-Zn con memoria de forma cargada a una temperatura mayor a A_F . [6].

Cuando se induce martensita por esfuerzo, en un monocristal, en realidad se está generando sólo una variante de martensita, que corresponde a aquella que es más favorecida por el esfuerzo. En la Figura 1.21 se ve claramente que sólo unas cuantas placas de martensita SIM se han formado (aquellas con un plano de hábito que es congruente con respecto a la dirección del esfuerzo aplicado). Lo anterior significa que al inducir una sola variante la deformación resultante produce una máxima elongación en la dirección del esfuerzo. En la Figura. 1.21-b se muestra el mismo espécimen a un nivel de esfuerzo más alto, donde se aprecian muchas más placas de SIM de la misma variante.

Debido a que una sola variante de martensita se forma con el esfuerzo, el cambio de forma (elongación) del espécimen es completamente recuperado al retirar el esfuerzo. Esta situación es diferente a la del caso de la martensita "inducida térmicamente" ya que en ese caso las variantes son autoacomodantes⁵ y por ello no hay un cambio de forma macroscópico.

El comportamiento mecánico de las AMF se resume gráficamente en la Figura 1.22. En el extremo posterior del plano esfuerzo-deformación (σ - ϵ), se muestra la curva que resulta al deformar una muestra a una temperatura inferior a M_F . La deformación inducida es de aproximadamente un 4%. Una vez que el esfuerzo se quita, la deformación es recuperada cuando es calentada entre A_S y A_F (plano ϵ - T). A una temperatura superior a M_S , pero menor a M_d , se forma la martensita MIE y se puede apreciar la histéresis de superelasticidad. A una temperatura mayor que M_d ya no se aprecia

⁵ Ver § 1.1.4.

la formación de la martensita MIE en el plano σ - ϵ , en su lugar se ve como el material presenta una deformación plástica convencional.

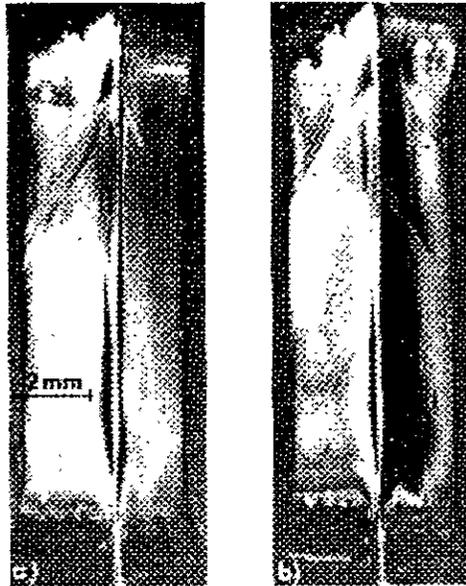


Figura 1.21: La formación de una sola variante de martensita en un monocristal de Cu-Zn cargado a una temperatura mayor a M_s [6].

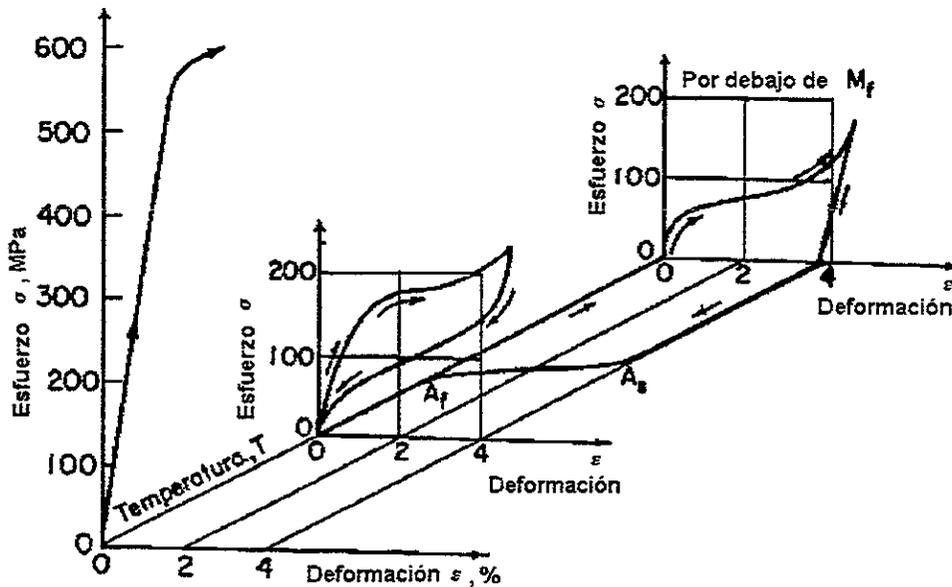


Figura 1.22: Diagrama tridimensional esfuerzo-deformación-temperatura que presenta una aleación Ti-Ni [6]

CAPITULO 2

ALEACIONES DE COBRE CON MEMORIA DE FORMA

Las aleaciones con memoria de forma que en la actualidad han sido más comercializadas son las de los sistemas: Ni-Ti y las de cobre (tales como Cu-Zn-Al y Cu-Al-Ni).

Las aleaciones del sistema Ni-Ti generalmente presentan mejores propiedades de memoria de forma y de resistencia a la corrosión que las aleaciones de cobre. Sin embargo resulta muy costosa su producción y su conformado. Es por ello que en muchas aplicaciones, las aleaciones base cobre ofrecen una alternativa más económica que las de Ni-Ti.

En un principio las aleaciones base cobre presentaban algunos problemas relacionados con fallas intergranulares, debido al crecimiento de grano. Este crecimiento se obtiene durante los tratamientos térmicos, los cuales son indispensables para que las aleaciones adquieran sus propiedades de memoria de forma. Un tamaño de grano grande produce dicha fragilidad en las fronteras de grano.

Los problemas de crecimiento del grano han sido superados gracias al desarrollo de refinadores, y en la actualidad las aleaciones base cobre son tan competitivas como las de Ni-Ti, sobre todo cuando son usadas como actuadores termomecánicos en los que tradicionalmente se usaban bimetales (termostatos, etc).

2.1 Aleaciones de cobre con memoria de forma.

Las aleaciones base cobre, con memoria de forma, se derivan de tres sistemas de aleaciones binarias: Cu-Zn, Cu-Al y Cu-Sn (ver esquema de la Figura 2.23).

Las aleaciones Cu-Sn tienen el inconveniente de que son poco estables a temperaturas no muy altas respecto a la ambiente. Es por ello que estas aleaciones han sido más de interés para estudios de laboratorio que como aleaciones con memoria de forma con potencial comercial.

Ya que las propiedades de memoria de forma de las aleaciones de cobre son muy sensibles a los contenidos de los elementos aleantes. Se agrega un tercer elemento para modificar la temperatura de transformación martensítica, para mejorar la estabilidad térmica y/o para mejorar sus propiedades mecánicas.

Así a partir de los sistemas binarios: Cu-Zn y Cu-Al se han desarrollado aleaciones ternarias. Las aleaciones ternarias Cu-Zn-X generalmente contienen como tercer aleante los siguientes elementos: Al, Si, Sn, Ga o Mn. Las aleaciones ternaria Cu-Al-X, por otra parte, tienen como elementos aleantes al Ni, Be, Zn o Mn.

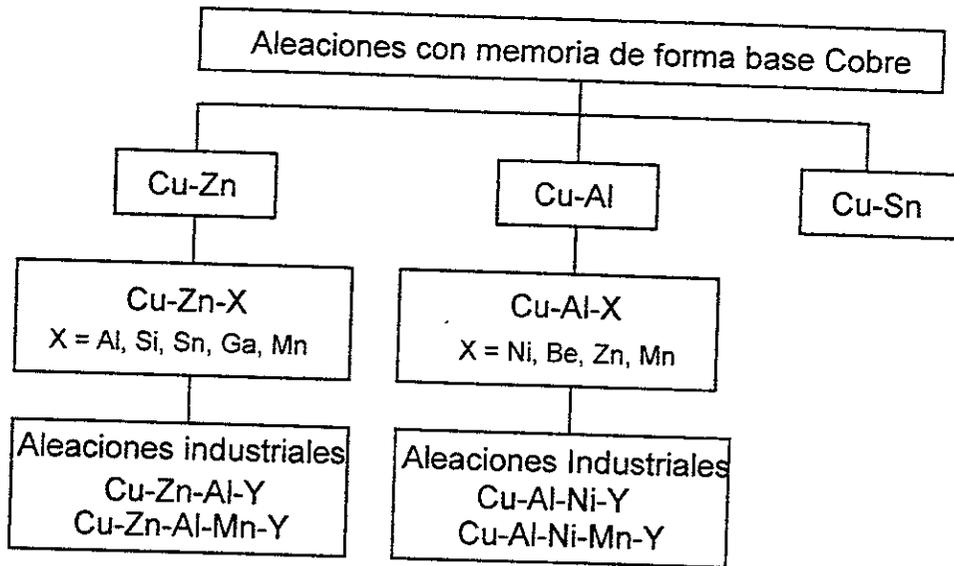


Figura 2.23: Sistemas de aleaciones base cobre con memoria de forma[6]. Y es generalmente un refinador de grano.

Además de las aleaciones ternaria citadas en el párrafo anterior se han desarrollada aleaciones cuaternarias tales como Cu-Zn-Al-Ni[19] Cu-Zn-Al-Mn [20]y Cu-Al-Ni-Mn [21].

Las aleaciones de cobre con memoria de forma, que en la actualidad son mas comerciales son las del Cu-Zn-Al y Cu-Al-Ni, ya sea en su forma ternaria o bien cuaternaria (con el Mn, Ni y otros como el cuarto aleante). Estas aleaciones son a menudo modificadas con la adición de afinadores de grano (Y) tales como B, Ce, Co, Fe, Ti, V y Zr [22,23, 24,25 y 26].

2.1.1 Sistemas Cu-Zn y Cu-Al

La Figura 2.24 muestra el diagrama de fases de equilibrio de los sistemas Cu-Zn y Cu-Al. Como puede verse en ambos diagramas, en la región rica en Cobre, existe una fase β que es estable a alta temperatura. Esta fase es muy importante ya que las aleaciones de cobre con memoria de forma deben tener composiciones tales que esta fase se pueda obtener con un tratamiento térmico.

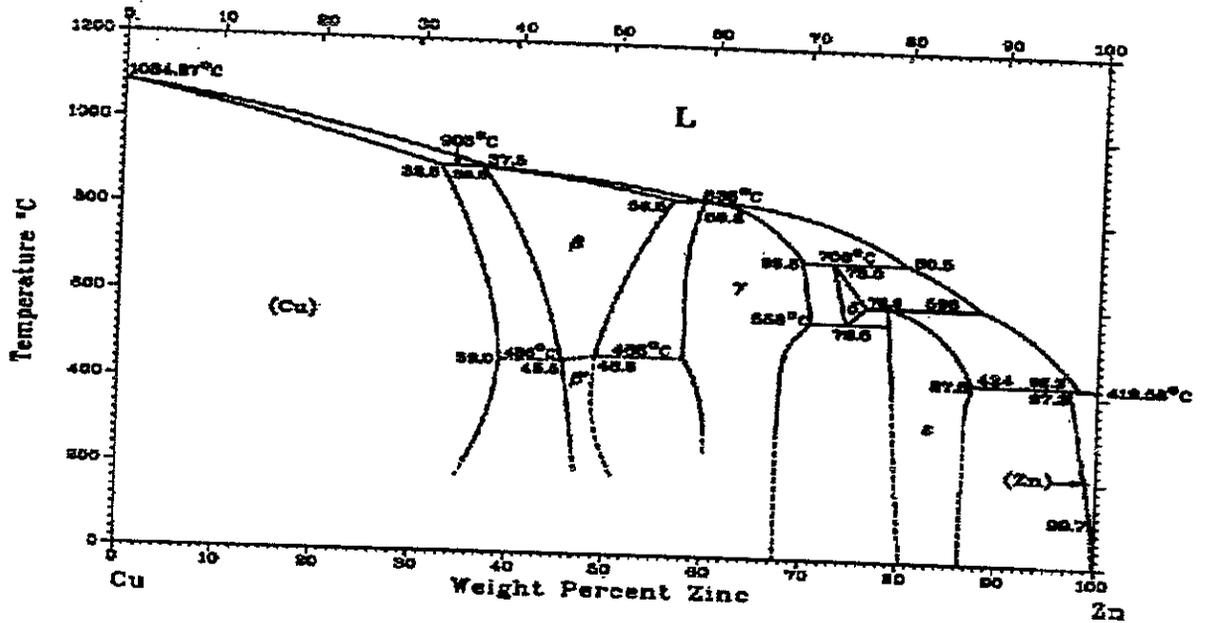
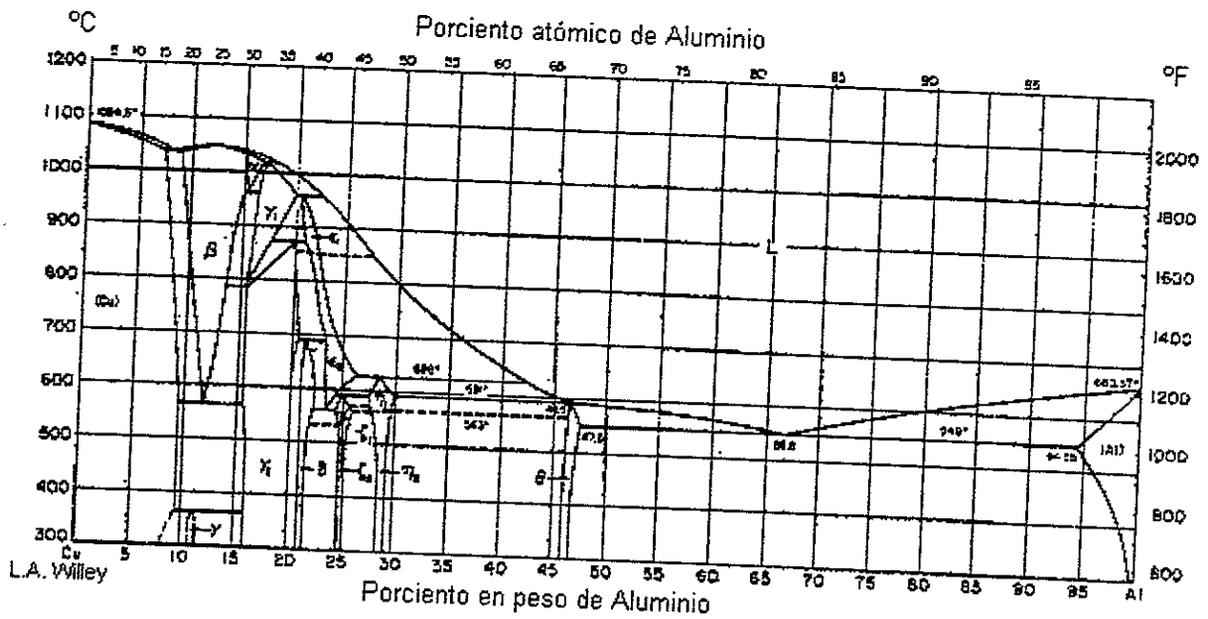


Figura 2.24. Diagramas de fases binarios del Cu-Zn y del Cu-Al [27]

Por otro la en la Figura 2.25 se presenta un corte del diagrama de fases del Cu-Al para la región rica en cobre donde se pueden apreciar tanto las fases de equilibrio como las metaestables (líneas punteadas). En particular resalta la línea punteada que muestra la dependencia de la temperatura de transformación M_s con el contenido de Aluminio.

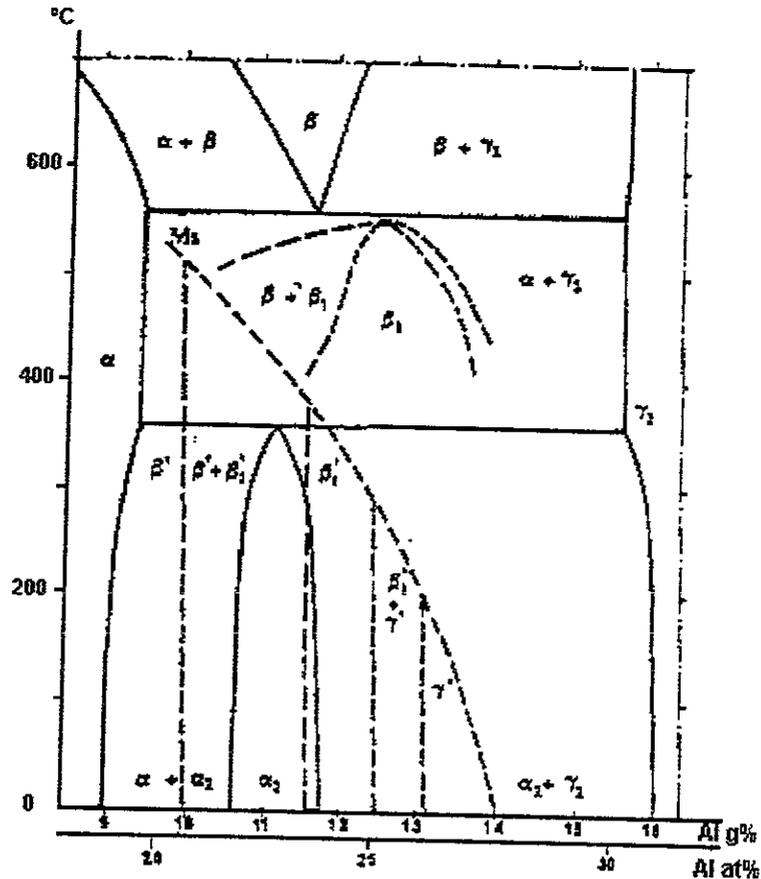


Figura 2.25: Diagrama Cu-Al en la zona rica en Cobre [28]

2.1.2 La austenita.

En general en los diagramas de fases de las aleaciones de cobre (también en las de oro y en las de plata) se presenta la fase β estable a alta temperatura. Esta fase, conocida como fase austenítica, tiene una estructura cristalina cúbica centrada.

La fase austenítica es metaestable a temperatura ambiente (ya que es obtenida por templado desde una temperatura donde es estable) y sufre la transformación martensítica a una temperatura que depende de la composición química de la aleación.

La dependencia de la temperatura M_s con la composición ha sido cuantificada para diferentes sistemas de aleación como lo son los sistemas ternarios: Cu-Zn-Al y Cu-Al-Ni. Como una primera aproximación, se ha encontrado que las temperaturas de transformación siguen una relación lineal con los contenidos de los aleantes. Una muestra de lo anterior se puede ver en las siguientes relaciones:

Para Cu-Zn-Al [29, 30, 31] A_s ($^{\circ}\text{C}$) = $2117 - 58.79(\text{wt}\%\text{Zn}) - 149.64(\text{wt}\%\text{Al})$

M_s ($^{\circ}\text{C}$) = $2212 - 66.9(1.355(\text{at}\%\text{Al}) + (\text{at}\%\text{Zn}))$

Cu-Al-Ni [21]

M_s ($^{\circ}\text{C}$) = $2020 - 45(\text{wt}\%\text{Ni}) - 134(\text{wt}\%\text{Al})$

Estas relaciones han sido obtenidas de los trabajos realizados sobre aleaciones correspondientes y representan una buena aproximación para conocer las temperaturas de transformación. No obstante, dichas temperaturas dependen también de la historia térmica del material.

Obtención de la austenita.

Como se mencionó anteriormente, en las aleaciones de cobre con memoria de forma tienen que ser sometidas a un tratamiento térmico específico para adquirir sus propiedades. Dicho tratamiento consiste en un betatizado y un enfriamiento rápido (similar al templado). El betatizado consiste en someter la muestra de aleación a una temperatura donde la fase β es estable (alta temperatura). El enfriamiento rápido simplemente sirve para retener a temperatura ambiente dicha fase.

2.1.3 Orden químico.

Algunas veces durante el enfriamiento rápido se incluyen pasos de enfriamiento intermedios, en estas aleaciones, los cuales tienen por objeto estabilizar las temperaturas de transformación. Dicho tratamiento está relacionado con una puesta en orden de la estructura. Este tratamiento sirve en parte para *estabilizar* la austenita y formar preferentemente un tipo de orden (en la estructura) de la fase beta.

La transición de orden, o bien la transición orden-desorden, ocurre cuando las especies químicas se acomodan en sitios cristalinos preferenciales. Este fenómeno ocurre mediante una difusión de sitios vacantes (vacancias). Dicha difusión es favorecida por la alta concentración de sitios vacantes obtenida después del enfriamiento rápido. Es común encontrar, en publicaciones sobre transformaciones martensíticas, el término estabilización el cual es también una consecuencia de una difusión de sitios vacantes.

La Figura 2.26 muestra los tipos de ordenamientos que presenta la fase beta de las aleaciones de cobre. La fase β representa en orden B2 y la fase β_1 está representadas por la estructura DO_3 .

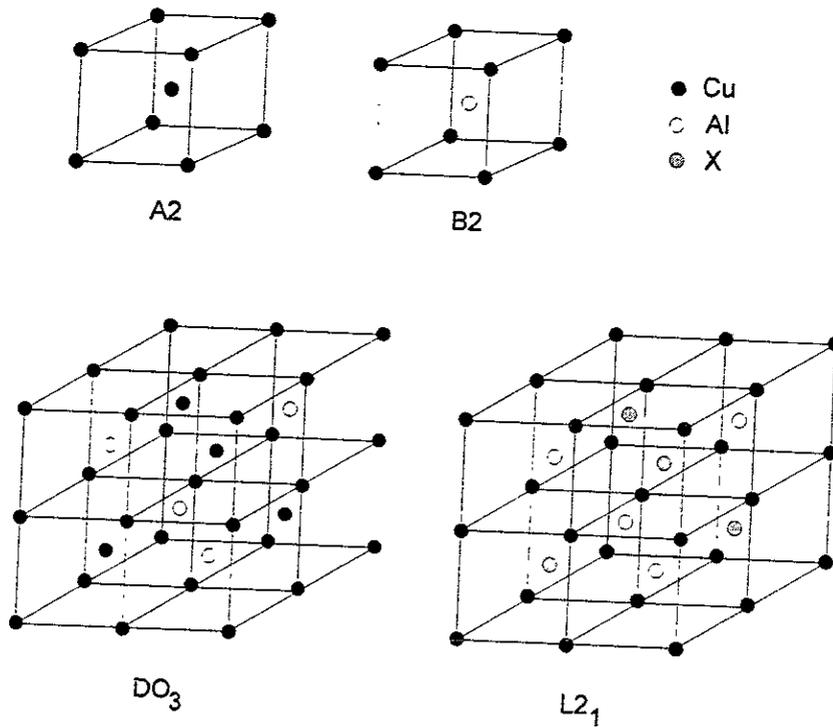


Figura 2.26: Tipos de ordenamiento atómico de la fase beta.

2.1.4 Las martensitas

Existen varios tipos de martensita que pueden obtenerse a partir de las estructuras de la fase beta metaestable. Las estructuras de las martensitas pueden ser ordenadas o desordenadas dependiendo de la composición química de la aleación y del orden de la fase madre (beta) que la origina. Durante la transformación, la martensita hereda el mismo ordenamiento de la austenita, lo cual es llamado orden inherente. Por otro lado las martensitas inducidas por esfuerzo normalmente tienen la misma estructura que las martensitas inducidas térmicamente.

La Figura 2.27 muestra los diferentes tipos de martensita obtenidos en las aleaciones de cobre. Cabe señalar que la austenita β se transforma al enfriarse en β' y que en el caso de la austenita ordenada β_1 se produce la martensita β_1' .

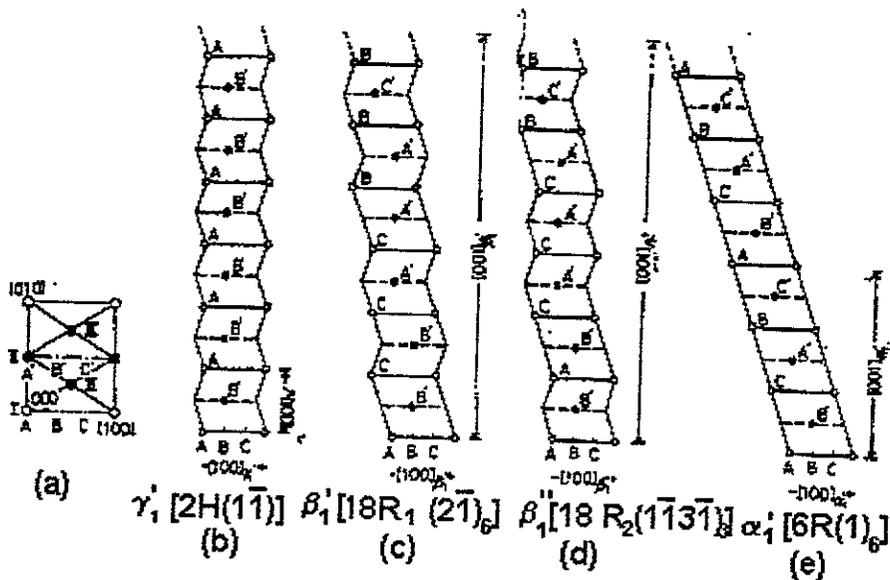


Figura 2.27: Tipos de estructuras martensíticas en Cu-Al-Ni[32].

Por otro lado, para que existan buenas propiedades de memoria de forma, es necesario que el tipo de transformación martensítica sea lo mas termoelástico posible. Por ejemplo, como se verá más adelante, cuando se obtiene la martensita γ' la transformación es muy poco termoelástica mientras que cuando se inducen las martensitas β' y β'_1 es muy termoelástica. Esto quiere decir que la composición química de la aleación puede controlarse para evitar las transformaciones poco termoelásticas.

2.1.5 Estabilidad térmica

Debido a la naturaleza metaestable, tanto de la fase madre β como de la fase martensítica de estas aleaciones, la exposición a temperaturas relativamente altas puede producir la formación de las fases de equilibrio (es decir ocurre una precipitación). Al tratamiento térmico que produce dicho fenómeno se conoce como *envejecimiento*. Este fenómeno afecta evidentemente las propiedades de memoria de forma de las aleaciones.

En particular, en la primera etapa del envejecimiento las temperaturas de transformación (M_S , M_F , A_S y A_F) cambian, ya que al comenzar a formarse los precipitados, éstos empobrecen a la fase beta de algún elemento. Al final de este tratamiento sólo hay fases de equilibrio, es decir ya no puede haber transformación martensítica.

2.1.6 Estabilización.

Las temperaturas de transformación son también muy sensibles a la rapidez de enfriamiento. En particular, cuando se enfría rápidamente la fase β de la aleación Cu-Zn-Al, presenta una inestabilidad inicial de sus temperaturas de transformación. Por otro lado, la misma aleación enfriada directamente hasta obtener su fase martensítica da como resultado una martensita estable con temperaturas de transformación más altas que las nominales. En este caso también ocurre un ordenamiento de la martensita activado difusión de una alta densidad de vacancias. Este fenómeno

se atribuye a que, durante el enfriamiento rápido, se atrapa un gran número de vacancias las cuales, a temperatura ambiente, difunden lentamente modificando las porciones de fases $\beta(B2)$ y $\beta_1 (DO_3)$. Por ejemplo las aleaciones Cu-Zn-Al presenta una evolución de M_s que puede llegar hasta 40°C , de diferencia, entre la temperatura M_s medida justo después del Templado(enfriamiento rápido) respecto a una medición realizada una semana después. Sin embargo, se pueden obtener temperaturas de transformación estables mediante "post-templados" o bien realizando un "templado escalonado".

2.2 Aleaciones Cu-Al-Be

Para poder entender mejor la importancia de las aleaciones del sistema Cu-Al-Be primeramente, es preciso citar brevemente las principales ventajas y desventajas que presentan las Aleaciones con Memoria de Forma más empleadas actualmente en aplicaciones comerciales. Las aleaciones más estudiadas a la fecha, y por ello las más empleadas en aplicaciones, son las de los sistemas Ni-Ti, Cu-Al-Ni y Cu-Zn-Al.

La aleación Ti-Ni tiene un mayor costo de fabricación, aunque sus propiedades de memoria de forma son muy buenas. Por otro lado las aleaciones Cu-Zn-Al son maquinables en frío, pueden tener temperaturas de transformación M_s entre -200°C y la temperatura ambiente, sin embargo no son estables a temperaturas ligeramente superiores a la ambiente (150°C). Por su parte las aleaciones Cu-Al-Ni son estables a alta temperatura, y se pueden utilizar con temperaturas M_s mayores a la ambiente hasta 100°C , sin embargo tienen el inconveniente de que no se les puede agregar mucho Níquel para hacer bajar la temperatura M_s ya que esto provoca la formación de martensitas menos termoelásticas (como la γ_1').

Debido a lo anterior, con respecto a las aleaciones de cobre, parecía no haber una aleación que tuviera buena estabilidad térmica y a su vez que pudiera transformar (M_s) a bajas temperaturas.

Recientemente, se encontró que las aleaciones del sistema Cu-Al-Be presentan memoria de forma, y que tienen buena estabilidad térmica a temperaturas relativamente altas (de 200 a 300°C). Asimismo presentan temperaturas de transformación tan bajas como -200°C . Es evidente que esta aleación llena esa necesidad de tener una temperatura de transformación M_s baja y por otro lado presentar una buena estabilidad térmica a altas temperaturas.

S. Belkahlá estudió el sistema ternario Cu-Al-Be en la parte rica en cobre y propone el diagrama pseudo binario que se muestra en la Figura 2.28 [33,34]. En la figura se puede ver que la "forma" de dicho diagrama es esencialmente la misma que la del Cu-Al, sólo que en este caso, la adición de 0.5% en peso de Berilio, provoca que la isoterma del eutectoide quede desplazada unos 50°C hacia abajo.

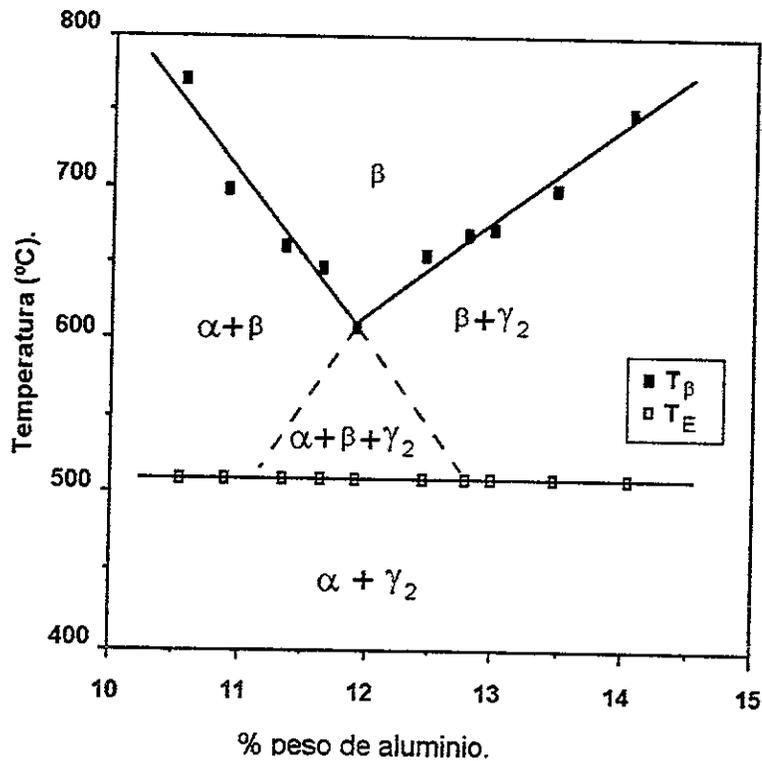


Figura 2.28 : Diagrama pseudo binario para Cu-Al-Be a 0.5% en peso de Berilio [33,34]

Asimismo, se ha reportado que, la adición de 0.5 % en peso de Berilio a la aleación Cu-Al de composición eutectoide, produce una disminución de la isoterma peritectoide [35,36]

En el sistema Cu-Al-Be, la composición del punto eutectoide sigue teniendo la estequiometría DO_3 lo cual favorece cristalográficamente, una transformación martensítica del tipo $DO_3 \rightarrow 18R$. Esta transformación es la más favorable para el efecto superelástico como se verá más adelante. Lo anterior se debe a que las cantidades de Be que se manejan son muy pequeñas y por lo tanto los átomos de este aleante se acomodan en la red como átomos sustitucionales de los átomos de Al.

Por otro lado se estudió la influencia de los elementos aleantes en las temperaturas de transformación. Como resultado de este estudio se propuso la siguiente ecuación para la temperatura de transformación martensítica (M_S) en función de la composición:

$$M_S(^{\circ}C) = 1245 - 71\%Al - 893\%Be$$

Se ve claro en la ecuación anterior, que es posible obtener temperaturas de transformación considerablemente bajas adicionando cantidades de Be mucho más pequeñas que las que se tendrían que adicionar en el caso del Níquel.

Posteriormente, Flores realizó una serie de estudios sobre la estabilidad térmica de la fase beta del Cu-Al-Be [35,36]. Dicho estudio lo llevó a cabo con técnicas de Calorimetría diferencial de barrido

(DSC), microscopía óptica, microscopía electrónica de transmisión (TEM) y termopotencia. Como resultado de sus estudios, Flores presentó el diagrama Tiempo-Temperatura-Transformación (TTT) que se muestra en la Figura 2.29. En esta figura la línea que separa la zona de estabilidad de la fase beta con las fases de equilibrio, corresponde al inicio de la precipitación medida por calorimetría diferencial de barrido.

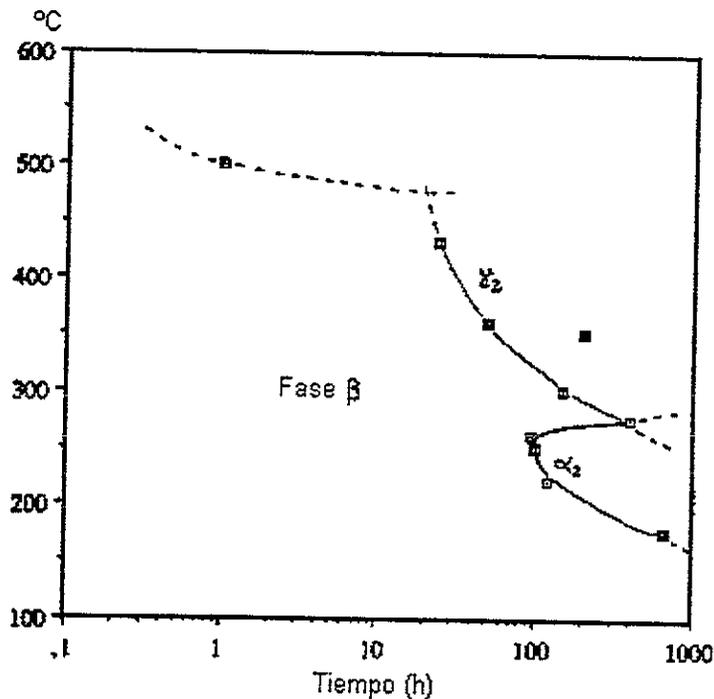


Figura 2.29: Diagrama -Tiempo -Temperatura -Transformación para Cu-Al-Be [35,36]

En el diagrama TTT se ve como a temperaturas ligeramente mayores que 100°C la fase beta (metaestable) se mantiene "estable" durante más de 1000 hrs mientras que a temperaturas intermedias (cercanas a los 300°C) puede tener una fase beta estable hasta por mas de 100 hrs.

Un estudio más reciente sobre los precipitados de las fases estables en aleaciones Cu-Al-Be ha sido realizado por Valladares et al usando la técnica de difracción de rayos X en polvos [37]. Los resultados obtenidos en este estudio están en concordancia con los obtenidos por Flores por lo que se puede hablar de una buena estabilidad térmica de la fase beta en las aleaciones Cu-Al-Be para aplicaciones a bajas temperaturas.

En el presente estudio se utilizaron aleaciones de Cu-Al-Be debido a que sus temperaturas de transformación debían ser menores a la ambiente para obtener el efecto superelástico a temperatura ambiente. Además en las pruebas de superelasticidad a diferentes temperaturas es necesario calentar algunas veces hasta 100°C.

2.3 Superelasticidad en aleaciones base cobre.

Como sucede en todos los materiales con memoria de forma, las curvas esfuerzo-deformación (σ - ϵ) características de las aleaciones con memoria de forma base cobre, dependen de la temperatura de prueba y en muchos casos presentan multi-estados de superelasticidad en temperaturas cercanas a las temperaturas de transformación como se muestra en la Figura 2.30.

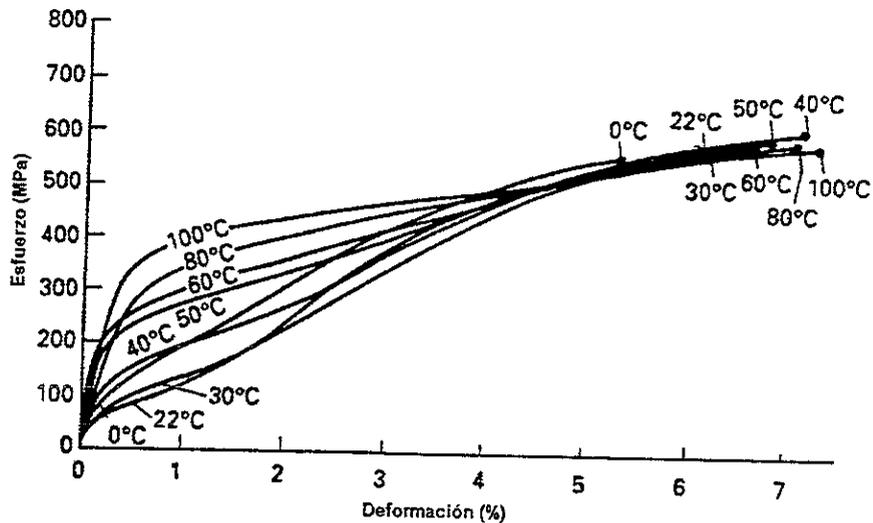


Figura 2.30: Curvas σ - ϵ a distintas temperaturas para un espécimen de Cu-Zn-Al con $M_S=30^\circ\text{C}$ [31].

En una temperatura entre A_F y M_d la aleación presenta pseudoelasticidad y el primer estado de deformación está asociado con la formación de martensita inducida por esfuerzo MIE. El esfuerzo crítico al cual se induce martensita decrece linealmente al disminuir la temperatura siguiendo la relación de Clausius-Clapeyron.

Conforme la temperatura disminuye aproximándose a M_F , el modo inicial de la curva σ - ϵ cambia gradualmente, de la formación de martensita inducida por esfuerzo a la reorientación de las variantes de martensita existentes. Esto es que la superelasticidad es gradualmente reemplazada por el efecto memoria de forma simple.

Otro efecto que se presentan en las AMF base cobre son las llamadas *transformaciones sucesivas* las cuales, están relacionadas con la transformación inducida por esfuerzo de un tipo de martensita a otro: Martensita - Martensita.

La deformación superelástica en las AMF base cobre es típicamente de entre 4 y 6%, sin embargo, cuando se inducen por esfuerzo las transformaciones sucesivas (austenita-martensita-martensita) la magnitud de la deformación pseudoelástica puede ser incrementada considerablemente.

En ambas aleaciones, Cu-Zn-Al y Cu-Al-Ni con estructura austenítica β_1 , se pueden inducir (por esfuerzo) transformaciones del tipo $\beta_1 \rightarrow \beta_1' \rightarrow \alpha_1'$ a bajas temperaturas mientras que a altas temperaturas, la martensita α_1' es directamente inducida a partir de la fase madre β_1 [38, 39,40].

En aleaciones de Cu-Al-Ni esforzadas a bajas temperaturas (estando en martensita γ_1') la transformación sucesiva $\gamma_1' \rightarrow \beta_1'' \rightarrow \alpha_1'$ puede también ser el modo de deformación dominante. La martensita β_1'' es otra versión de martensita con empaquetamiento 18R.

La transformación sucesiva austenita-martensita-martensita, inducida por esfuerzo, da como resultado estados múltiples de pseudoelasticidad como puede apreciarse en la Figura 2.31. Además, es posible lograr deformaciones (recuperables) totales tan altas que llegan a ser un 17% en monocristales [38, 39,40].

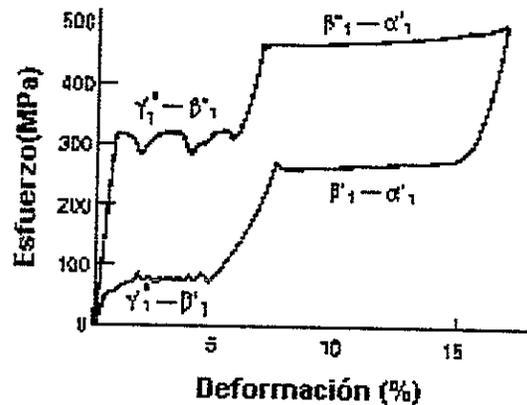


Figura 2.31: Multiestados de superelasticidad observado en un monocristal de Cu-Al-Ni [39]

2.3.1 Características de las transformaciones inducidas por esfuerzo.

Las curvas esfuerzo-deformación (σ - ϵ) que se han mostrado hasta ahora son curvas "generalizadas" del comportamiento superelástico. En la realidad existen diferencias considerables entre la forma de la curva que genera una transformación del tipo $\beta_1 \rightarrow \beta_1'$, y aquellas generadas por otras transformaciones como la $\beta_1 \rightarrow \gamma_1'$. En la Figura 2.31 se muestran dos curvas σ - ϵ correspondientes a los tipos de transformación citados. Se puede apreciar que la curva de la Figura 2.10-(b) presenta un cambio suave en el inicio de la meseta mientras que en la curva de la Figura 2.10-(a) se aprecia un pico en el mismo punto.

Las diferencias en las formas de las curvas σ - ϵ correspondientes a los distintos tipos de transformaciones, fueron estudiadas por Otsuka et al [38]. Otsuka atribuye tales diferencias al hecho de que la martensita γ_1' requiere de más energía para nuclear y crecer que la β_1' . Esta afirmación se apoya en las observaciones microscópicas realizadas durante la transformación, donde se aprecia cómo la martensita γ_1' germina como una sola plaqueta, misma que posteriormente crece hasta cubrir todo el cristal. En cambio la martensita β_1' presenta la nucleación y crecimiento de varias plaquetas de manera simultánea.

Lo anterior implica que la martensita γ_1' requiere mayor energía para su nucleación y su crecimiento debido a la fricción interna que tiene que ser vencida para mover una sola plaqueta de

martensita. El pico en la curva σ - ε se debe a que se requiere un esfuerzo mayor para iniciar el movimiento de la interfase austenita -martensita, que el requerido para mantener el crecimiento de la plaqueta. Como consecuencia de lo anterior, éste tipo de transformación presenta una histéresis grande que disminuye su carácter termoelástico.

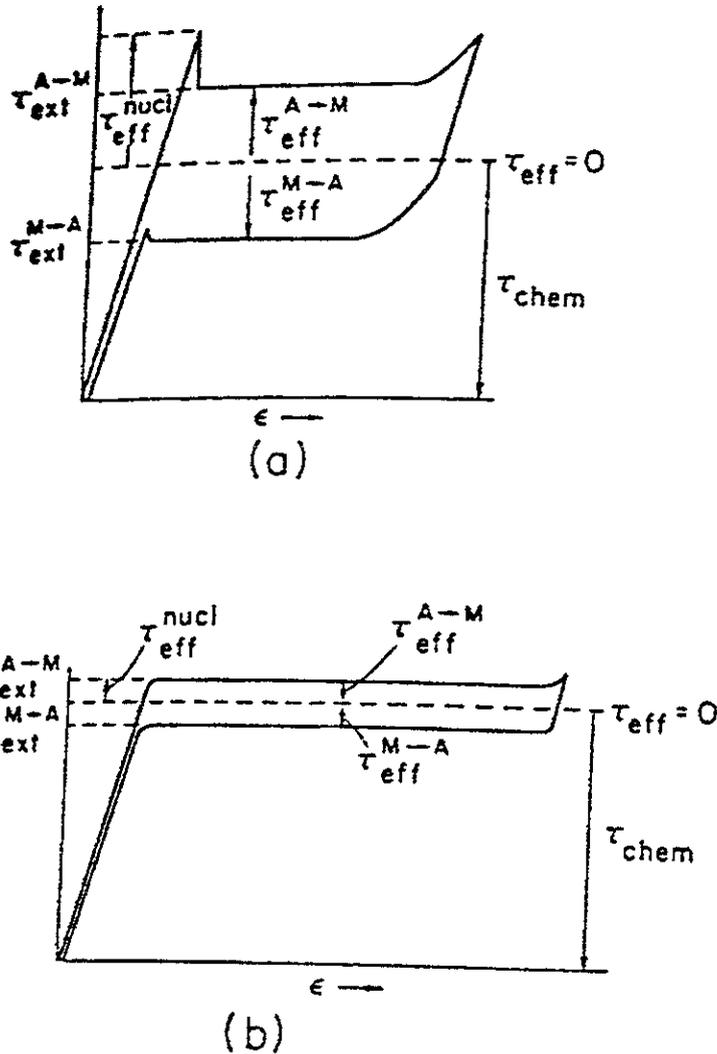


Figura 2.10 Curvas esfuerzo deformación correspondientes a: (a) Una transformación martensítica tipo $\beta_1 \rightarrow \gamma_1'$ y (b) a una transformación martensítica del tipo $\beta_1 \rightarrow \beta_1'$ [40].

En contraste con la martensita γ_1' , la martensita β_1' (inducida por esfuerzo) presenta una histéresis pequeña y permite obtener deformaciones mayores, lo que la hace mejor desde el punto de vista de la superelasticidad.

Además de las dos martensitas que hemos mencionado existen otras: α_1'' , β_1'' (la martensita β_1'' es una martensita resultante del re-ordenamiento de la martensita γ_1') entre otras [38, 39,40]. En

general, al inducir por esfuerzo las martensitas α_1' , α_1'' y γ_1' se produce una histéresis grande, un pico al inicio de la meseta de carga, y por lo tanto resultan ser poco termoelásticas.

Las martensitas γ_1' , β_1' , α_1' pueden ser inducidas por esfuerzo a partir de la austenita β_1 como se muestra en la Figura 2.32. En esta figura, se presenta el mecanismo mediante el cual se pueden obtener las tres martensitas mencionadas al aplicar un esfuerzo cortante en diferentes puntos. Nótese que la fase β_1' puede obtenerse a partir de la γ_1' y también que la fase α_1' puede obtenerse a partir de β_1' [39,40]. En realidad no siempre se sigue dicho orden en todas las transformaciones, ya que el tipo de estructura martensítica depende de la composición estequiométrica de la fase madre del material.

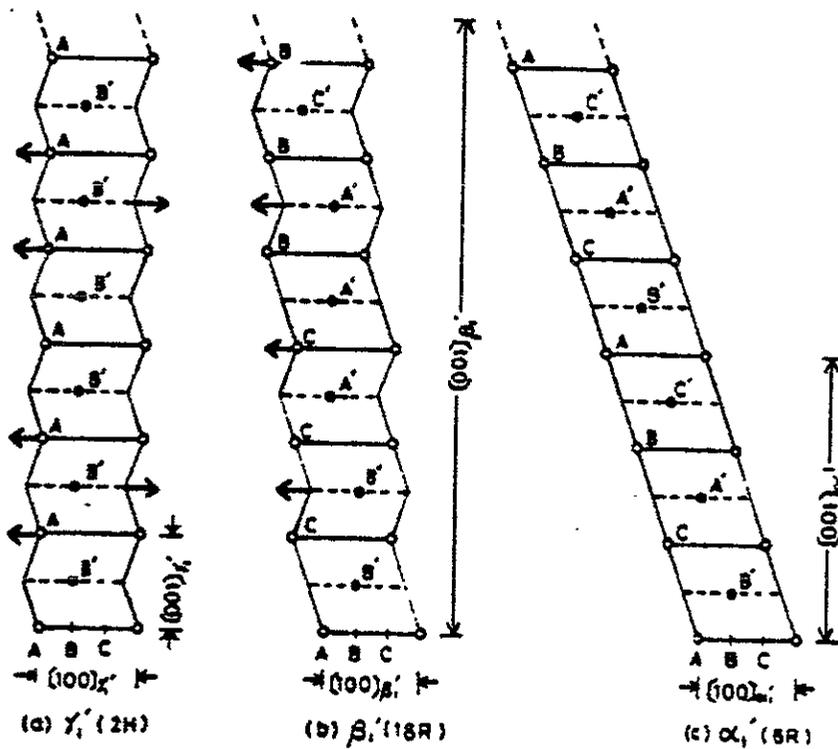


Figura 2.32 Mecanismos del cambio estructuras de las transformaciones sucesivas; $\gamma_1' \rightarrow \beta_1' \rightarrow \alpha_1'$. Se muestran los esfuerzos que se requieren para pasar de una estructura a la otra [39]

Por otro lado, se ha encontrado que todas las transformaciones presentes en una aleación base cobre pueden ser observadas en su diagrama σ - ϵ , sólo si la prueba es realizada en un monocristal con una orientación específica. En aleaciones Cu-Al-Ni se encontró que dicha orientación es la $[001]$ [40].

Este comportamiento está relacionado con una cierta dependencia que tiene la deformación total (obtenida durante la transformación inducida por esfuerzo) con la dirección en la cual se esta aplicando el esfuerzo. Como se puede ver en la Figura 2.12 las deformaciones más altas, para ambos casos (a) y (b), son logradas cuando el eje de aplicación de la carga está en direcciones

cercanas a la dirección [001] y las menores corresponden a las direcciones más cercanas a la dirección [111].

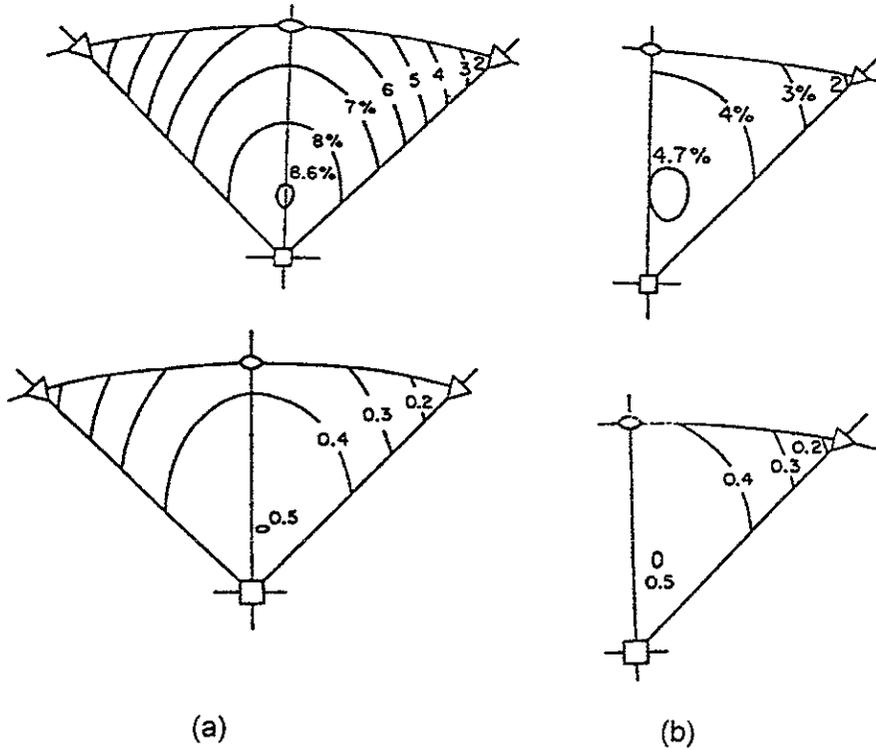


Figura 2.12: Variación de la deformación (transformacional) y del factor de Schmid correspondientes a: (a) Una transformación del tipo $\beta_1 \rightarrow \beta_1'$ y (b) para otra del tipo $\beta_1 \rightarrow \gamma_1'$ [38].

En la figura 2. 12 se puede apreciar también que la variación en la magnitud de las deformaciones está directamente relacionada con el valor del factor del Schmid correspondiente a cada dirección. Este comportamiento se puede entender mejor si observamos la siguiente ecuación que usa Otzuka et al [38] para calcular la deformación esperada durante una transformación inducida por esfuerzo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_o &= \sqrt{\left[m_1^p (R \cdot p_1) \right]^2 + 2 m_1^p (R \cdot p_1) (R \cdot d_1^p) + 1 - 1 + m_1^n (R \cdot p_1)} \\ &= \sqrt{\left(m_1^p \sin \chi_o \right)^2 + 2 m_1^p \sin \chi_o \cos \lambda_o + 1 - 1 + m_1^p \sin \chi_o} \end{aligned}$$

donde: ε_o es la deformación debida a la transformación. λ_o es el ángulo entre el eje tensil y la dirección del esfuerzo cortante d_1^p , χ_o es el ángulo entre el eje tensil y el plano de hábito, p_1 es un vector unitario normal al plano de hábito y R es un vector unitario paralelo a la orientación del cristal. En dicha ecuación se puede ver con más claridad la dependencia de la deformación con la dirección en la que se aplica el esfuerzo.

Esta ecuación también se emplea para calcular la deformación obtenida por maclado y funciona convenientemente en este caso debido a la similitud que existe entre las variantes de martensita y las maclas.

Se ha observado, en policristales de Cu-Al-Ni [41 y 42], que se puede apreciar la primera transformación inducida por esfuerzo, pero no las transformaciones sucesivas entre las martensitas como en los monocristales. Tampoco es posible observar los rasgos característicos de las curvas esfuerzo-deformación correspondientes al tipo de transformación que se presenta en el material. Adicionalmente, como se vio en el capítulo 1, en lugar de la meseta de transformación en las curvas correspondientes a policristales se observa un cambio de pendiente. Todo lo anterior se debe a que cada uno de los granos contribuye a la deformación total dependiendo su orientación y lo que se observa es más bien el promedio de las contribuciones de los granos.

Pese a lo anterior, existen otros parámetros que nos permiten distinguirlos y caracterizar los diferentes tipos de transformaciones martensíticas inducidas por esfuerzo. Dichos parámetros son: la razón $d\sigma/dM_s$, la razón $\Delta H/T$ (el cociente de la entalpía de formación entre la temperatura a la cual se logra la transformación) y la deformación total lograda durante la transformación (ϵ_0).

Los parámetros característicos de las diferentes transformaciones, para algunas aleaciones, han sido medidos en monocristales con distintas orientaciones [40]. En la tabla 2.1 se muestra una relación de dichos parámetros para algunas de las transformaciones de las que hemos hablado en esta sección. Los valores promedio de dichos parámetros son empleados para estimar los correspondientes parámetros en policristales [41 y 42]. Se utilizan dichos valores, considerando que se tiene una distribución normal de orientaciones en los granos.

Entropía (y entalpía) de transformación calculada con la ecuación de Clausius -Clapeyron

Tipo de Transformación	$(d\sigma)/dT$ (MPa/K)	ϵ_0	ΔS (J/mole · K)	ΔH (J/mole)	ΔH (cal/mole)	T (K)
$\gamma'_1 \rightleftharpoons \beta''_1$	-0.206	0.056	0.086	17.3	4.1	200
$\beta'_1 \rightleftharpoons \alpha'_1$	-0.139	0.112	0.117	46.7	11.2	400
$\beta''_1 \rightarrow \alpha'_1$	-0.174	0.145	0.145	36.4	8.7	250
$\beta_1 \rightleftharpoons \beta'_1$	2.04	0.085	-1.30	-389	-93.0	300

Tabla 2.1 Resumen de los valores que toman los parámetros ($d\sigma/dM_s$, ϵ_0 , ΔH y ΔS) de algunos tipos de transformaciones inducidas por esfuerzo que se presentan en las aleaciones de cobre [40]

Todas las transformaciones inducidas por esfuerzo que experimenta un material se resumen en los diagramas σ_C -T. En dichos diagramas, σ_C es el esfuerzo necesario para inducir la martensita MIE y T es la temperatura. La pendiente de cada recta en el diagrama, es la razón de esfuerzo $\frac{\partial \sigma}{\partial M_s^\sigma}$, que corresponde al tipo de transformación que se presenta en esa región de esfuerzo y temperatura.

En aleaciones de Cu-Al-Ni el diagrama σ_c -T tiene la forma mostrada en la Figura 2.13. Este diagrama muestra los diferentes tipos de transformaciones inducidas por esfuerzo para cada intervalo de temperaturas. A una temperatura dada, se pueden tener varias transformaciones sucesivas [40].

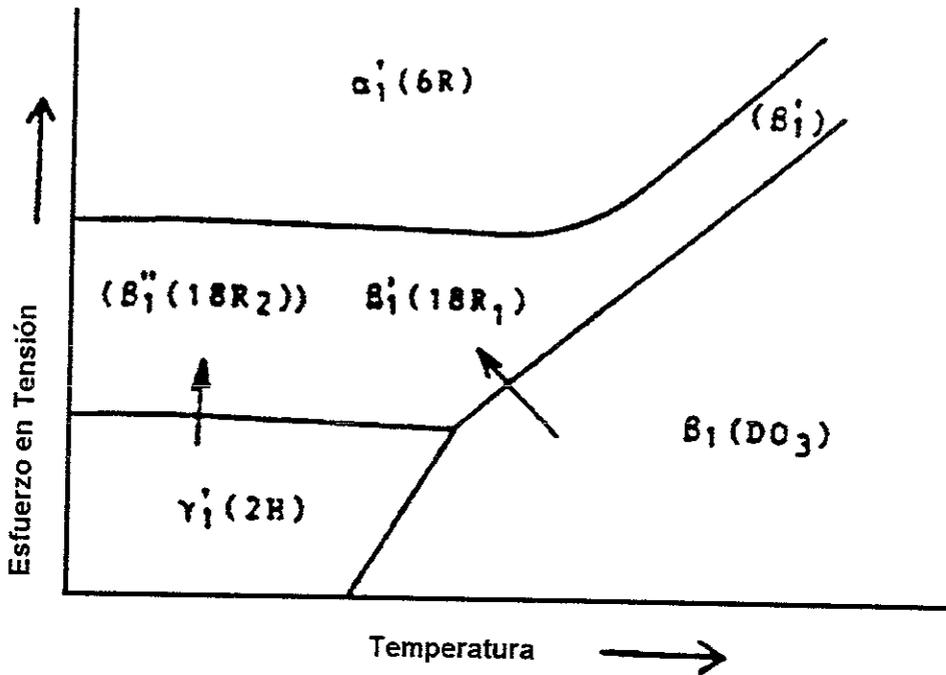


Figura 2.13: Diagrama Esfuerzo crítico-temperatura (σ_c -T) para el sistema Cu-Al-Ni [40].

Las propiedades mecánicas, físicas y de memoria de forma de las aleaciones Cu-Al-Ni y Cu-Zn-Al son resumidas en la Tabla 2.2.

Los módulos de Young de las aleaciones con memoria de forma son difíciles de definir, ya que se ha observado que las constantes elásticas de la fase β se suavizan conforme la temperatura se aproxima a la temperatura de transformación martensítica. En particular, las aleaciones de Cu-Zn-Al y Cu-Al-Ni presentan significativas disminuciones en las constantes elásticas al corte C' estando en la fase β .

Por otro lado se ha observado que, la fase β de aleaciones Cu-Zn-Al y Cu-Al-Ni es altamente anisotrópica, con valores tan altos, de la razón de anisotropía, como 15 y 12 para Cu-Zn-Al y Cu-Al-Ni respectivamente. A esta alta anisotropía mecánica de la fase β , así como a la dependencia de la deformación transformacional con la orientación, se le ha atribuido la falla intergranular de las AMF base cobre.

<i>PROPIEDADES FÍSICAS</i>	<u>Cu-Zn-Al</u>	<u>Cu-Al-Ni</u>
Densidad (g/cm ³)	7.64	7.12
Resistividad (μΩ·cm)	8.5 - 9.7	11 - 13
Conductividad térmica (J/m·s·°K)	120	30 - 43
Capacidad calorífica (J/Kg·°K)	400	373 - 574
<i>PROPIEDADES MECÁNICAS</i>		
Módulos de Young (Gpa)		
fase-β	72	85
Martensita	70	80
Anisotropía elástica	15	12
Esfuerzo de Cedencia (MPa)		
Austenita	350	400
Martensita	80	130
Esfuerzo último a la tensión (MPa)	600	500 - 800
<i>PROPIEDADES DE MEMORIA DE FORMA</i>		
Deformación en memoria simple (%)	4	4
Deformación en doble efecto (%)	2	2
Histéresis (K)	10 - 25	15 - 20

Tabla 2.2: Propiedades mecánicas de algunas de las aleaciones base cobre con memoria de forma más empleadas [31]

2.3.2 Propiedades mecánicas y superelásticas en aleaciones Cu-Al-Be.

Como se mencionó anteriormente, las aleaciones del sistema Cu-Al-Be han sido poco estudiadas sin embargo se cuenta con algunos datos reportados en la literatura en lo referente a propiedades mecánicas y superelásticas.

Recientemente Ríos et al, determinaron las constantes elásticas de la fase β por el método de propagación de ultrasonido a través de muestras monocristalinas. Este trabajo permitió además

determinar el coeficiente de anisotropía del material y éstos valores son comparados con los correspondientes a aleaciones de los sistemas Cu-Al-Ni y Cu-Zn-Al en la Tabla 2.3 [43].

Constantes elásticas de algunas aleaciones de Cobre

ELASTIC CONSTANT AT 293K $\times 10^{10}$ Pa	Cu-Al-Be Ms = 260K THIS WORK	Cu-Al-Be Ms < 30K THIS WORK	Cu-19.32n -13.0Al Ms = 280K [7]	Cu-15.12n -16.9Al Ms = 220K [7]	Cu-20.82n -12.7Al Ms = 156K [7]	Cu-14Al- 4.2Ni Ms = 264K [2] (-)
C _L	22.87	22.76	20.3	23.1	19.4	23.1
C ₁₁	14.16	14.28	13.0	14.2	11.6	13.4
C ₁₂	12.74	12.54	11.8	12.8	10.2	11.7
C ₄₄	9.42	9.35	8.6	9.6	8.4	9.7
C'	0.71	0.87	0.54	0.70	0.71	0.87
A	13.2	10.7	15	13.5	11.8	11.0

Tabla 2.3: Constantes elásticas para diversas aleación base cobre con memoria de forma [43].

Otro trabajo realizado muy recientemente sobre las aleaciones Cu-Al-Be fue presentado por Hautocour et al [44]. Dicho trabajo consistió en un estudio del comportamiento termomecánico de una muestra monocristalina orientada en la dirección [001]. Como resultado de su trabajo, Hautocour propone el diagrama σ_c -T que se muestra en la Figura 2.14.

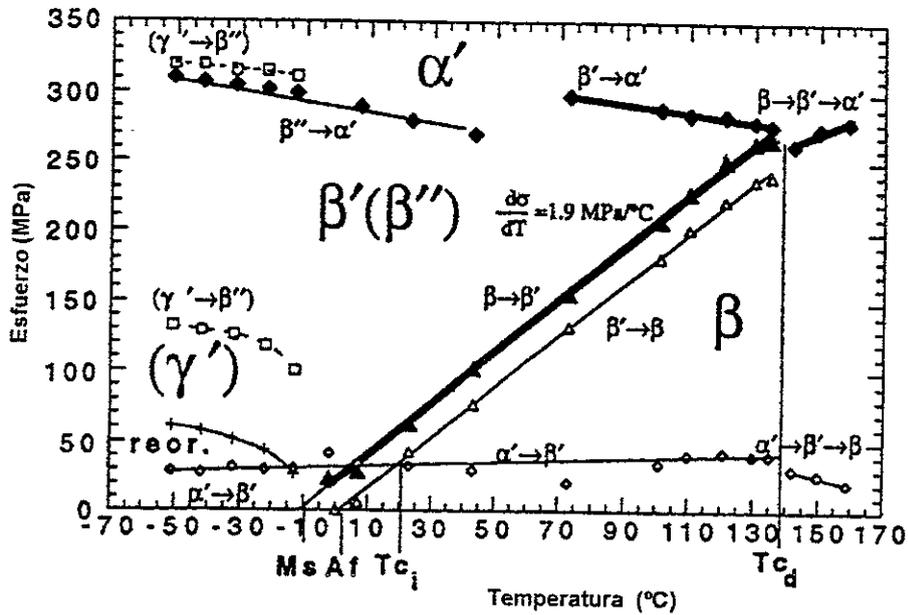


Figura 2.14: Diagrama σ -T obtenido para una aleación mono cristalina de Cu-Al-Be orientada en la direcci3n [001] [44].

Estos resultados son consistentes con los encontrados en muestras policristalinas donde adem3s se pudo constatar que los promedios de los valores de los par3metros reportados para distintas orientaciones son consistentes [45 46].

CAPITULO 3

TEORÍAS DE MECÁNICA DE SÓLIDOS

Como puede apreciarse en lo expuesto hasta esta parte del presente trabajo el comportamiento pseudoelástico que presentan los materiales con memoria de forma, es sumamente complejo y por ello difícil de modelar. Más aún difícil resulta poder obtener soluciones a problemas estructurales los cuales constituyen el grueso de las aplicaciones. En general los rasgos que deben ser tomados en cuenta si se quiere modelar el comportamiento superelástico son los siguientes:

- El tipo de muestra que se esté estudiando, es decir si se trata de un policristal o de un monocristal.
- Los comportamientos superelástico y de reorientación de variantes de martensita que se presentan en distintos intervalos de temperaturas.
- Los parámetros del tipo de transformación martensítica que experimente el material (La razón de esfuerzo, el tamaño de la histéresis, la magnitud de la deformación transformacional, etc.).
- La anisotropía mecánica observada tanto en la fase austenítica como durante la transformación
- Cierta dependencia que se ha observado entre la histéresis con la rapidez de deformación.
- Cierta asimetría que presenta el comportamiento en tensión y en compresión.
- Los efectos que puede tener el (o los) proceso (s) de conformado empleado (s) para fabricar los elementos mecánicos que se estudian.

Debido a lo complejo del fenómeno el problema principal es definir relaciones constitutivas que permitan reproducirlo considerando todos los aspectos anteriores. Para ello se han propuesto una serie de métodos de análisis que comprenden modelaciones fenomenológicas que en general combinan los distintos modelos de comportamientos mecánicos conocidos con los rasgos característicos del fenómeno.

En el presente capítulo se presentan brevemente las principales teorías sobre comportamiento mecánico de sólidos así como algunos de los modelos del comportamiento pseudopelástico más conocidos.

3.1 Elasticidad Finita

Esta teoría mecánica es en realidad la aplicación de la mecánica del medio continuo a los problemas mecánicos. Dicha teoría es la más simple pero la que mejor se conoce y por ello sus principios son generalmente empleados para definir otras teorías que pretenden simular fenómenos más complicados. En la presente sección se presentan los rasgos característicos de elasticidad finita siguiendo la metodología de Gurtin [47]

En la mecánica clásica la fuerza sobre un resorte elástico depende sólo del cambio en la longitud del resorte, es decir la fuerza es independiente de la historia pasada de la longitud ni de la razón con la que cambia la longitud en el tiempo. Para un cuerpo, el gradiente de deformación mide el cambio local de la longitud y por ello se define un cuerpo elástico como aquel cuya ecuación constitutiva da el esfuerzo $T(x, t)$ en $x = x(p, t)$ cuando se conoce el gradiente de deformación (F), es decir:

$$T(x, t) = \hat{T}(F(p, t), p) \quad (3.1)$$

Formalmente, un cuerpo elástico es un cuerpo material cuya clase constitutiva C está definida por una función de respuesta suave:

$$\hat{T} : Lin^+ \times B \rightarrow Sym$$

Un cuerpo elástico es aquel para el cual la función \hat{T} está totalmente determinada por la respuesta del material para un movimiento homogéneo, independiente del tiempo, de la forma:

$$x(p, t) = q + F(p - p_0) \quad (3.2)$$

es decir una deformación homogénea.

La función de respuesta es independiente del observador si cumple con la siguiente relación:

$$QT(F)Q^T = \hat{T}(QF) \quad (3.3)$$

\hat{T} es una transformación simétrica en p si para todo $Q \in Orth^+$ cumple con la relación:

$$\hat{T}(F, p) = \hat{T}(FQ, p) \quad (3.4)$$

Si es cierto entonces se dice que el material es isotrópico.

Ahora si el material es isotrópico en p , entonces la relación constitutiva se puede escribir en la forma:

$$T = \beta_0(\ell_B)I + \beta_1(\ell_B)B + \beta_2(\ell_B)B^{-1} \quad (3.5)$$

donde $B = FF^T$ es el tensor izquierdo de Cauchy-Green y β_0, β_1 y β_2 son funciones escalares de la lista de invariantes de $B(\mathfrak{B}_B)$.

3.1.1 Tensor De Piola-Kirchoff

El tensor de Cauchy T mide las fuerzas de contacto por unidad de área en la configuración deformada. En muchos problemas de interés, especialmente en los que involucran sólidos, no es conveniente trabajar con T , ya que la configuración deformada es desconocida. Por tal razón es necesario trabajar con un tensor de esfuerzos que mida la fuerza por unidad de área en la configuración de referencia. Dicho tensor es el tensor de Piola-Kirchoff el cual se define como:

$$S = (\det F)T_m F^{-T} \quad (3.6)$$

El tensor de Piola-Kirchoff cumple con las condiciones de que:

$$\hat{S}(QF) = Q\hat{S}(F)$$

para todo $F \in \text{Lin}^+$ y $Q \in \text{Orth}^+$. lo que significa que S es independiente del observado. Por otro lado, si definimos:

$$\bar{S}(C) = \sqrt{\det CT}T(C)$$

podemos obtener una nueva ecuación constitutiva, que queda:

$$S = F\bar{S}(C)$$

En vista de lo anterior se tiene que las ecuaciones de campo para un caso estático se pueden reescribir como:

$$S = F\bar{S}(C)$$

$$C = F^T F$$

$$F = \nabla f$$

$$\text{Div}S + b_0 = 0$$

(3.7)

con las condiciones de frontera:

$$f = \hat{f}$$

sobre

$$\ell_1$$

$$Sn = \hat{s}$$

sobre

$$\ell_2$$

donde \hat{f} y \hat{s} son funciones conocidas sobre ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente

Cuando las fuerzas son conocidas en toda la frontera las condiciones de frontera pueden escribirse como:

$$Sn = \hat{s}$$

sobre

$$\partial B$$

(3.8)

de las ecuaciones de balance se tiene entonces que:

$$\int_{\partial B} \hat{s} dA + \int_B b_0 dV = 0$$

Esta relación envuelve solo los datos y proporciona una condición necesaria para la existencia de una solución. Por otro lado de la segunda ecuación de balance obtenemos que:

$$\int_{\partial B} (f - o) \times \hat{s} dA + \int_B (f - o) \times b_0 dV = 0$$

y, debido a presencia de la deformación f , no es una restricción sobre los datos, más bien una condición de compatibilidad la cual será automáticamente satisfecha por cualquier solución de el problema de valores en la frontera (3.7) (3.8). Cuan grandes como sean las fuerzas que actúan sobre el cuerpo B , esperamos que una solución, aún cuando los momentos no son balanceados en la configuración de referencia; el cuerpo simplemente se deforma de manera que se balancean los momentos en la configuración deformada.

3.1.2 El Tensor De Elasticidad

El comportamiento de la ecuación constitutiva

$$S = \hat{S}(F)$$

cerca de $F=I$ es gobernado por la transformación lineal:

$$\mathbf{C} : \text{Lin} \rightarrow \text{Lin}$$

definida por:

$$\mathbf{C} = D\hat{S}(I)$$

\mathbf{C} es llamado el tensor de elasticidad del punto material p ; rigurosamente hablando \mathbf{C} es la derivada del tensor de Piola-Kirchoff con respecto a F en $F=I$. Por otro lado tenemos que si:

$$\hat{S}(I) = \hat{T}(I) = 0$$

entonces se dice que el esfuerzo residual se desvanece. Debido a esto, se tiene que el tensor de elasticidad puede definirse a partir del tensor de Cauchy como la derivada del mismo, esto es:

$$\mathbf{C} = D\hat{T}(I)$$

El tensor de elasticidad \mathbf{C} cumple con las siguientes propiedades:

- a) $\mathbf{C}[H] \in \text{Sym}$ para todo $H \in \text{Lin}$;
- b) $\mathbf{C}[W] = 0$ para todo W antisimétrico;

De las propiedades de \mathbf{C} se tiene que si E es la parte simétrica de un tensor cualquiera H , entonces:

$$\mathbf{C}[H] = \mathbf{C}[E]$$

Por otra parte, se puede demostrar que si el material es isostrópico en p entonces se cumple que existen escalares μ y λ tales que:

$$\mathbf{C}[E] = 2\mu E + \lambda(\text{tr } E)I$$

(3.9)

para todo tensor simétrico E . Donde μ y λ son escalares llamados *módulos de Lamé* en p .

3.1.3 Elasticidad Lineal

A continuación se deducirá la teoría lineal en la cual se basa en el hecho de que el gradiente de deformación es pequeño y que el esfuerzo residual es cero. El primer paso a seguir es la linealización de la ecuación constitutiva:

$$S = \hat{S}(F)$$

para el esfuerzo de Piola-Kirchoff. Para estudiar el comportamiento de dicha ecuación hacemos:

$$H = \nabla u$$

y analizamos lo que ocurre cuando H tiende a cero. Para ello consideraremos a $S(F)$ como una función de H usando la relación:

$$F = H + I$$

Se puede demostrar que la relación constitutiva tiene la forma asintótica siguiente (suponiendo además que el esfuerzo residual desaparece):

$$\hat{S}(F) = \mathbf{C}[\mathcal{E}] + o(H) \tag{3.10}$$

conforme $H \rightarrow 0$ donde \mathbf{C} es el tensor de elasticidad y

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(H + H^T \right) \tag{3.11}$$

es la parte simétrica de H (es decir es la deformación infinitesimal).

Debido a lo anterior se tiene que, si el esfuerzo residual desvanece en la configuración de referencia , entonces bajo la condición $o(\nabla u)$ conforme $\nabla u \rightarrow 0$, El esfuerzo S es una función lineal del tensor de deformación infinitesimal ε y dado que \mathbf{C} es simétrico, dentro del mismo error, S es simétrico.

La teoría de elasticidad lineal se basa en la ley esfuerzo-deformación (2.10) con el termino de orden $o(\nabla u)$ despreciable, la relación desplazamiento-deformación (2.11) y la ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{C}[\mathcal{E}] \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \left(\nabla u + \nabla u^T \right) \\ \text{Div} S + b_0 &= \rho_0 u \end{aligned} \tag{3.12}$$

Es importante notar que estas ecuaciones están expresadas en términos del desplazamiento

$$u(p,t) = x(p,t) - p$$

y no en términos del movimiento x .

Es importante enfatizar que la derivación formal de la ecuación constitutiva linealizada (3.12)₁ se basó en las siguientes suposiciones:

- a) El esfuerzo residual en la configuración de referencia desaparece.
- b) El gradiente de desplazamientos es pequeño.

Adicionalmente, tenemos que, dados \mathbf{C} , ρ_0 , y b_0 , (3.12) es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales parciales para los campos u , ε y S . Y además, si el cuerpo es isotrópico (3.12)₁ puede escribirse como:

$$\mathbf{C}[\mathcal{E}] = 2\mu\mathcal{E} + \lambda(\text{tr}\mathcal{E})\mathbf{I} \tag{3.13}$$

Más aún, cuando el cuerpo es homogéneo, ρ_0 , μ y λ son constantes. Con estas suposiciones, se tiene que combinando las dos últimas ecuaciones de (3.12) y (3.13) y usando propiedades del operador Div se obtiene la ecuación del movimiento en términos de los desplazamientos:

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla\text{Div}u + b_0 = \rho_0 u$$

donde Δu es el Laplaciano de u

Para un caso estático $u = 0$ y la ecuación anterior se convierte en la ecuación de equilibrio en términos del desplazamiento:

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla\text{Div}u + b_0 = 0$$

Esta ecuación es en realidad, un sistema de ecuaciones equivalente al sistema (3.12) y su solución es el campo vectorial de desplazamientos. Para encontrar la solución de un problema en particular, es necesario definir las condiciones de frontera correspondientes. En general, sólo algunos cuantos problemas pueden ser resueltos analíticamente pero existen varios métodos para encontrar soluciones numéricas entre los cuales se encuentran el método del elemento finito. Por otro lado es posible encontrar la solución de un problema en particular empleando métodos experimentales que nos brinden información sobre la solución.

3.2 Teorías no lineales

Debido a que muchos de los materiales presentan comportamientos mecánicos que no pueden ser definidos mediante la teoría de la elasticidad lineal, han sido desarrolladas algunas otras teorías que podrían considerarse como de elasticidad no-lineal. En la presente sección se presentan algunas de dichas teorías presentadas por J. Lubliner.[48]. Como se verá más adelante, dichas teorías consideran que la deformación está compuesta por un término lineal (definido de la misma

manera que se define por la elasticidad lineal) y otro no lineal que en algunos casos depende del tiempo.

3.2.1 Inelasticidad

Tomando la definición de Cauchy de un cuerpo elástico como aquel para el cual la deformación en cualquier punto del cuerpo está completamente determinada por el esfuerzo y la temperatura (a temperaturas cercanas al ambiente se considera que la deformación depende sólo del esfuerzo), entonces una definición obvia de un cuerpo inelástico sería la de aquel cuya deformación en un punto cualquiera del mismo depende de "algo" más que el esfuerzo. Ese algo más de lo que depende la deformación en un punto de un cuerpo inelástico es su *memoria histórica* de esfuerzo y temperatura. El término "*memoria histórica*" (*Past History*) puede ser definido completamente mediante el uso de análisis funcional y de una elevada teoría matemática conocida como la teoría de los *materiales con memoria*. La dependencia de la deformación actual sobre la historia de esfuerzo (y su correspondiente dependencia del esfuerzo sobre la historia de la deformación) puede ser expresada explícitamente cuando el comportamiento es lineal. Esta relevante teoría es conocida como *viscoelasticidad lineal*.

Una forma en la cual la "*memoria histórica*" afecta a la relación entre los esfuerzos y las deformaciones es a través de la llamada "*sensibilidad a la rapidez de cambio*" (*rate sensitivity*) La deformación producida por la aplicación lenta de esfuerzo es diferente (por lo general la diferencia es bastante grande) a la producida por la rápida aplicación del mismo.

Una manifestación muy particular de la "*rate sensitivity*" es el hecho de que la deformación por lo general incrementa con el tiempo a esfuerzo constante, excepto posiblemente bajo presión hidrostática. Este fenómeno es conocido en fluidos como *flujo* y en sólidos como *Creep* (termofluencia).

La razón de sensibilidad, como regla, incrementa con la temperatura, de tal manera que materiales que presentan un comportamiento elástico en un cierto intervalo de tiempo y a temperaturas bajas se convierten en inelásticos a temperaturas más altas,

Si el esfuerzo y la deformación pueden ser intercambiados en la anterior discusión, entonces, ya que una baja "*sensibilidad a la rapidez de cambio*" implica una gran deformación a un esfuerzo dado, esto representa que se tendrá un esfuerzo más bajo a una deformación dada. En consecuencia el esfuerzo disminuirá con el tiempo a una deformación constante. Este fenómeno es conocido como *relajación*.

La "*sensibilidad a la rapidez de cambio*" de muchos materiales, incluyendo polímeros, asfaltos y concretos, a menudo son adecuadamente descritos, dentro de ciertos límites, por medio de la teoría lineal. Sin embargo, la inelasticidad de metales tiende a ser altamente no lineal en el sentido en que es muy parecida a la elástica en un cierto rango de esfuerzos pero fuertemente dependiente de historia fuera de ese rango. Cuando el límite de rango elástico es superado es decir, cuando el esfuerzo es incrementado, se dice que el material cede. Cuando el rango elástico forma una región en el espacio de los componentes de esfuerzo se dice que forma una región elástica y a su frontera se le denomina superficie de cedencia.

Variables Internas

Una forma alternativa de representar ese "algo más" presente en los cuerpos inelásticos es a través de un arreglo de variables ξ_1, \dots, ξ_n , tales como la dependencia de la deformación sobre esa deformación además de la del esfuerzo y la temperatura. Esas variables son llamadas *variables internas*, y se asume que toman valores escalares o de tensores de segundo orden. El arreglo de las variables internas, cuando son tensoriales, es expresado por sus invariantes y son denotadas por ξ . De esta, manera la deformación esta dada por:

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma, T, \xi)$$

De donde vemos que la presencia de variables adicionales en las relaciones constitutivas requiere de ecuaciones constitutivas adicionales. Las ecuaciones adicionales que se postulan para un cuerpo inelástico "sensible a la razón de cambio" refleja la hipótesis de que, el estado local que determina la deformación está definido por σ, T, ξ , entonces "la razón de cambio de la evolución" de las variables internas está también determinado por el estado local, es decir:

$$\dot{\xi} = g_\alpha(\sigma, T, \xi) \quad (3.14)$$

Estas ecuaciones son conocidas como *ecuaciones de la evolución o ecuaciones de la razón de cambio* para la variable interna ξ_α

La relación $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, T, \xi)$ no siempre puede ser invertida para dar $\sigma = \sigma(\varepsilon, T, \xi)$, aun cuando no haya variables internas restrictivas gobernando la deformación.

Si es posible expresar el esfuerzo como: $\sigma = \sigma(\varepsilon, T, \xi)$ entonces esta expresión puede ser sustituida en el lado derecho de (3.14), y como resultado se obtiene una forma alternativa de las ecuaciones de evolución:

$$\dot{\xi} = g_\alpha(\sigma(\varepsilon, T, \xi), T, \xi) = \bar{g}_\alpha(\varepsilon, T, \xi)$$

3.2.2 Deformación Inelástica

Para cuerpos inelásticos bajo deformaciones infinitesimales se asume, casi universalmente, que el tensor de deformaciones puede ser descompuesto como la suma de una deformación elástica ε^e y otra inelástica ε^p :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

donde $\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}$ (sumándole deformaciones térmicas si es necesario). La viscosidad Newtoniana es un ejemplo de esta descomposición donde $\varepsilon^i = \varepsilon^v$.

3.2.3 Viscoselastividad Lineal

La citada teoría de la viscoelastividad lineal proporciona algunos ejemplos más de descomposición de la deformación en la suma de dos componentes. Por simplicidad se limitará el análisis a los casos en que tengamos un sólo componente de esfuerzos y su

correspondiente deformación. Se asumirá también que la temperatura se mantiene constante y no será mostrada explícitamente.

Modelo Reológico

Supóngase que el comportamiento de un elemento material puede ser representado por el modelo mecánico de la figura 3.1(a) donde los esfuerzos son representados por fuerzas y las deformaciones por desplazamientos. Cada uno de los resortes modela la respuesta elástica (con módulos E_0 y e_1) y el amortiguador modela la parte viscosa.

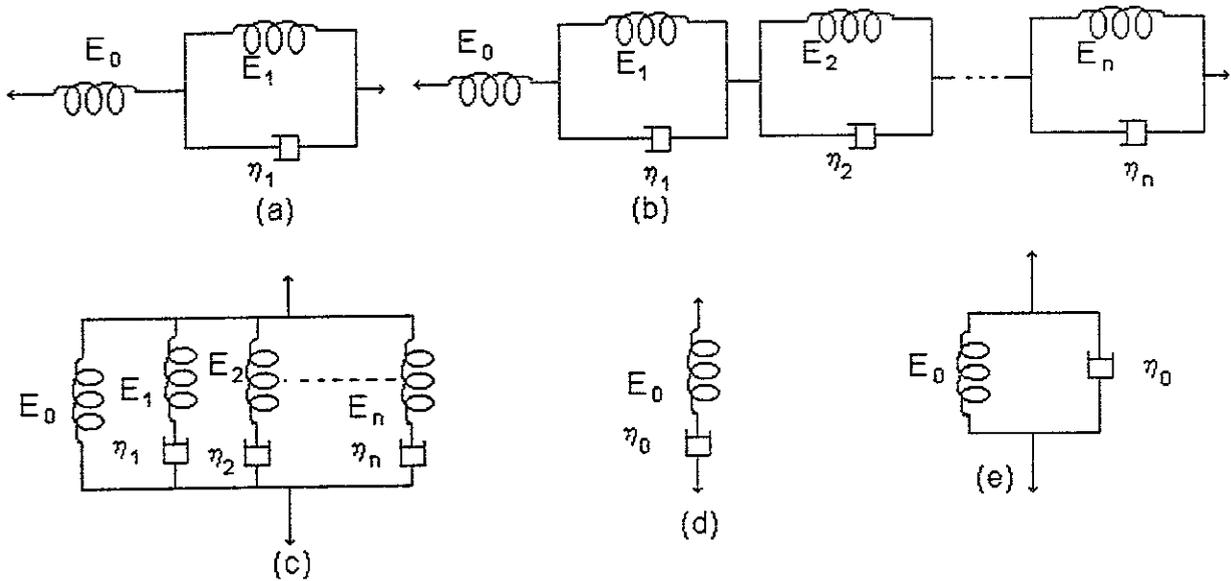


Figura 3.1 Modelos de viscosidad lineal a) Modelo estándar de sólidos. b) generalización del modelo de Kelvin. c) Modelo generalizado de Maxwell. d) Modelo de Maxwell. e) Modelo de Kelvin.

El desplazamiento del resorte del lado izquierdo representa la deformación elástica ϵ^p , y el desplazamiento de la combinación: resorte-amortiguador del lado derecho representa la deformación inelástica. El equilibrio requiere que la fuerza en el resorte del lado derecho sea igual a la suma de las fuerzas en los otros dos elementos y por lo tanto tenemos las siguientes ecuaciones de esfuerzos:

$$\sigma = E_0 \varepsilon^e$$

$$\sigma = E_1 \varepsilon^i + \eta \dot{\varepsilon}^i$$

donde η es la viscosidad del elemento amortiguador. De las ecuaciones anteriores, tenemos que la deformación total será:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \varepsilon^i$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} - \frac{E_1}{\eta} \varepsilon^i$$

En consecuencia la deformación inelástica puede ser vista como una variable interna ya que la segunda de las ecuaciones anteriores es una ecuación de "razón de cambio" (E_1 y η son por lo general funciones de la temperatura).

Dada una entrada de esfuerzo como una función del tiempo, la ecuación de la razón de cambio para ε^i es una ecuación diferencial que puede ser resuelta para $\varepsilon^i(t)$:

$$\varepsilon^i = \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \sigma(t') dt'$$

donde el tiempo de referencia (en el cual $\varepsilon^i=0$) se elige como $-\infty$ por conveniencia, y $\tau=\eta/E_1$ es una propiedad del material y tiene una dimensión de tiempo. En particular, si $\sigma(t)=0$ para $t<0$ y $\sigma(t)=\sigma_0$ (constante) para $t>0$, entonces:

$$\varepsilon^i = \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

este resultado muestra una forma de creep llamada *elasticidad retardada*.

El caso limite representado por E_1 es conocido como *Modelo de viscoelasticidad de Maxwell*. En este caso la solución es sólo

$$\varepsilon^i = \frac{t\sigma_0}{\eta}$$

lo que representa un *creep de estado estacionario*.

Modelo Generalizado de Kelvin

Si se usan modelos con más amortiguadores por componente de deformación, - digamos un número de combinaciones amortiguador-resorte en paralelo dispuestas en serie con un resorte obtenemos el llamado *modelo generalizado de Kelvin* que se muestra en la Figura 2.1(b) - entonces la deformación inelástica está representada por la suma de los desplazamientos de los amortiguadores, y todos los desplazamientos de los amortiguadores constituyen una variable interna. Denotando cada una de dichas variables internas por ξ_α tenemos:

$$\varepsilon^i = \sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha$$

Por analogía con la derivación previa, las ecuaciones de razón de cambio son, si $\tau_\alpha = \frac{\eta_\alpha}{E_\alpha}$,

$$\dot{\xi}_\alpha = \frac{\sigma}{\eta_\alpha} - \frac{\xi_\alpha}{\tau_\alpha}$$

Como antes, para una historia de esfuerzo dada $\sigma(t')$, $-\infty < t' < t$ (donde t es el tiempo actual), las ecuaciones de razón de cambio son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales para ξ_α que pueda ser integrado explícitamente:

$$\xi_\alpha = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\eta_\alpha} e^{-\left(\frac{t-t'}{\tau_\alpha}\right)} \sigma(t') dt'$$

y la deformación, a un tiempo t , puede por lo tanto ser expresado como:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_0} \sigma(t) + \int_{-\infty}^t \left[\sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{\eta_\alpha} e^{-\left(\frac{t-t'}{\tau_\alpha}\right)} \right] \sigma(t') dt'$$

Con una función de creep uniaxial definida por:

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \sum \frac{1}{E_\alpha} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

la deformación puede, con la ayuda de la integración por partes (y la suposición de que $\sigma(-\infty)=0$), también puede ser expresada como:

$$\varepsilon(t) = \int J(t-t') \frac{d\sigma}{dt'} dt'$$

Si la historia de esfuerzo está dada por $\sigma(t')=0$ para $t'<0$ y $\sigma(t')=0$ (constante) para $t'>0$, entonces, para $t>0$, la deformación es $\varepsilon(t)=\sigma J(t)$. La función de creep puede por lo tanto ser determinada experimentalmente de la simple prueba de creep, sin tener que usar un modelo de variable interna (a menos que las propiedades cambien con el tiempo, como es el caso del concreto) Similarmente en pruebas de relajación bajo condiciones análogas a las de la historia de esfuerzo pero ahora para la historia de la deformación se puede expresar el esfuerzo en términos de una *función de relajación uniaxial* como:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(t-t') \frac{d\varepsilon}{dt'} dt'$$

Una forma explícita de la función de relajación en términos de variables internas puede obtenerse por medio del *Modelo Generalizado de Maxwell* (Figura 2.1c). Se puede demostrar que, en general, $R(0)=1/J(0)=E_0$ (el módulo elástico instantáneo), y $R(\infty)=1/J(\infty)=E_\infty$ (el módulo elástico asintótico), con $E_0>E_\infty$ excepto en el caso de materiales elásticos. En particular, E_∞ puede ser cero, como en el caso del modelo de Maxwell (Figura 2.1(d)), mientras que E_0 puede ser infinito, como en el caso del Modelo de Kelvin (Figura 2.1e). La función de relajación del Modelo de Kelvin es una función singular dada por:

$$R(t) = E_\infty + \eta \delta(t)$$

donde $\delta(t)$ es la delta de Dirac.

Una generalización del procedimiento para describir el comportamiento uniaxial al multiaxial es, tratar a las funciones $J(t)$ y $R(t)$ como funciones tensoriales de cuarto orden.

El uso de las funciones de creep y de relajación hace posible representar la deformación explícitamente en términos de la historia de esfuerzo, o viceversa, sin hacer referencia a variables internas. En general, el concepto de variables internas no es necesario en la teoría de viscoelasticidad lineal. Una vez que se conoce la función de creep la suposición de respuesta lineal es por sí misma suficiente para determinar la deformación para cualquier historia de esfuerzo (el principio de superposición de Boltzman).

Como se mencionó antes, existe una teoría matemática (sin variables internas) para materiales con memoria que presentan comportamiento no lineal. Sin embargo prácticamente todos los modelos constitutivos que se usan para materiales inelásticos no lineales se basan en variables internas.

3.2.4 Plasticidad

La llamada plasticidad se refiere a la capacidad que tienen los materiales dúctiles de cambiar su forma original mediante la aplicación de una fuerza de magnitud apropiada, y mantener dicha forma

después de retirar la fuerza. Normalmente dicha fuerza es considerablemente alta, sin embargo en algunos materiales como los polímeros, dicho esfuerzo es muy bajo a temperaturas altas. En otros casos como en algunos metales dichas fuerzas son muy altas a temperaturas bajas y es necesario elevar la temperatura de material para poder conformarlo.

Se ha observado en general que ocurre una considerable deformación en el proceso de plasticidad acompañado de un muy pequeño cambio en el volumen. En consecuencia la deformación plástica es principalmente una distorsión. Por otra parte se ha observado también que la parte del esfuerzo que más realiza trabajo es el *deviator*. Por ello, una prueba directa de plasticidad de un material, puede hacerse sometiendo a un cuerpo a un estado de esfuerzos de cortante simple.

Diagramas Esfuerzo-Deformación

El resultado inmediato de una prueba en tensión es una relación entre la fuerza axial y el cambio en la longitud. Esta relación es transformada luego por otra que relaciona el esfuerzo (fuerza por unidad de área transversal) y la deformación (cambio en la longitud dividido por la longitud original). Los parámetros que normalmente se mantienen constantes son la temperatura y la rapidez de deformación o de carga. Si se obtienen cambios significativos en la longitud original es importante especificar si el área usada en el cálculo del esfuerzo es el área original A_0 (esfuerzo nominal o de ingeniería σ_e) o por el área actual A (esfuerzo real o de Cauchy σ_t) y si la deformación es el cambio de longitud dividido por la longitud original (deformación ingenieril ϵ_e) o el logaritmo natural de la razón de cambio de la longitud actual l ($l=l_0 + \Delta l$) por la longitud inicial l_0 (deformación logarítmica o natural ϵ_l).

Es claro que el esfuerzo de Cauchy refleja el actual estado de esfuerzo mejor que el esfuerzo nominal y aunque ambas definiciones involucran la longitud inicial, la rapidez de deformación (derivada temporal) de ambos, convencional y logarítmica deformación son respectivamente $\frac{\dot{l}}{l_0}$ y

$\frac{\dot{l}}{l}$, de tal manera que la segunda es independiente de la configuración inicial. En particular en materiales que es posible realizar pruebas en compresión análogas a las de tensión, a menudo se encuentra que ambos diagramas esfuerzo-deformación coinciden cuando son considerados, el esfuerzo de Cauchy y la deformación logarítmica.

Límite Elástico y Esfuerzo de Cedencia

Cuando la sensibilidad a la razón de cambio es despreciable se puede distinguir en los diagramas esfuerzo deformación una región en la cual el esfuerzo es proporcional a la carga. Esta región está acotada por un cierto valor límite σ_0 , dicho esfuerzo es el llamado límite de proporcionalidad. En este intervalo el material responde a la ley de Hooke. Cuando el material es sometido a esfuerzos mayores a dicho límite y luego es retirada la carga, la deformación no regresa a cero. Dicha deformación es llamada deformación plástica.

La rapidez de aplicación de la carga puede cambiar los resultados que se acaban de exponer. Por ejemplo, el "modelo estándar de sólidos viscoelásticos" predice que una prueba realizada a una rapidez de deformación o de carga constante resultará un tanto curvada pero no se presentará deformación permanente después de la descarga más bien se observará un lazo de histéresis. Lo anterior quiere decir que, las curvas esfuerzo deformación dependen de la "rapidez de cambio" a

menos que el tiempo que tome la prueba es muy grande o muy pequeño en comparación con el valor característico del modelo τ

Aun cuando el efecto de la rapidez de cambio sea despreciable, no siempre es fácil determinar con precisión el límite elástico de un material. Para efectos de diseño se define un cierto valor de esfuerzo llamado esfuerzo de cedencia que corresponde con el esfuerzo que ocasiona un cierto valor de deformación permanente.

Deformación plástica.

La deformación permanente puede ser identificada como una deformación inelástica sin embargo considerando que el "rate sensitivity" es despreciable dicha deformación es llamada deformación plástica y se denota por ε^p y esta dada por:

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$$

La deformación plástica en un valor dado de esfuerzo es a menudo algo diferente de la deformación permanente observada cuando la muestra es descargada. Esto se debe a que la relación esfuerzo deformación en la descarga no siempre es idealmente elástica así mismo puede ser el resultado de otros fenómenos asociados.

La curva esfuerzo-deformación resultante de la carga inicial hasta la zona plástica es llamada *curva virgen de flujo*. Si una muestra cargada después de haber sido deformada plásticamente, el diagrama esfuerzo deformación correspondiente será aproximadamente una línea con pendiente E para luego seguir la curva virgen. El resultado será un incremento en el esfuerzo de cedencia del material el cual es llamado endurecimiento por trabajo en frío.

La curva virgen de un sólido endurecido por trabajo, que no presente picos en su punto de cedencia, puede ser aproximada con la formula de Ramberg-Osgood

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma_R}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_R} \right)^m \quad (3.15)$$

donde α y m son constantes adimensionales y σ_R es un esfuerzo de referencia. Si m es muy grande entonces la deformación plástica es pequeña hasta σ se aproxima a σ_R e incrementa rápidamente cuando σ excede a σ_R , de tal modo que ese esfuerzo puede ser tomado como el esfuerzo de cedencia. En el límite cuando m tiende a infinito, la deformación plástica es cero si $\sigma < \sigma_R$ y es indeterminada cuando $\sigma = \sigma_R$ mientras que $\sigma > \sigma_R$ se obtendrá una deformación plástica infinita, lo cual es imposible. Este caso límite es conocido como *plasticidad perfecta* con esfuerzo de cedencia σ_R .

Si la deformación es suficientemente grande, como para que la deformación elástica sea despreciable, entonces la ecuación(3.15) puede resolverse para el esfuerzo en términos de la deformación como sigue:

$$\sigma = k\varepsilon^n$$

donde

$$k = \sigma_R \left(\frac{E}{\alpha \sigma_R} \right)^n \quad (3.16)$$

$n = 1/m$ es llamado *exponente de endurecimiento*. Esta ecuación propuesta por Ludwik es frecuentemente usada en aplicaciones en se requiere expresar el esfuerzo en función de la deformación. Cabe destacar que la ecuación (3.16) tiene una pendiente inicial infinita. Para poder considerar la elástica en con un esfuerzo de cedencia inicial σ_E la ecuación (3.16) es en ocasiones escrita de la siguiente manera

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \frac{\sigma_E}{E} \\ \sigma_E \left(\frac{E\varepsilon}{\sigma_E} \right) & \varepsilon \geq \frac{\sigma_E}{E} \end{cases}$$

En el caso más general las relaciones constitutivas, tridimensionales, en lugar de emplear el esfuerzo de referencia (σ_R) usan diversos criterios de cedencia como: el de Mises-Hencky, el de Coulomb, el de St. Venan, el de Mohr o el de Coulomb-Mohr entre otros. Así una forma tridimensional de la ecuación (3.16) considerando el criterio de Mises es:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left(\frac{\sigma_1}{k} \right)^{1/n} \left[\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 \right]^{\frac{1-n}{2n}} \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \\ \varepsilon_2 &= \left(\frac{\sigma_1}{k} \right)^{1/n} \left[\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 \right]^{\frac{1-n}{2n}} \left(\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ \varepsilon_3 &= \left(\frac{\sigma_1}{k} \right)^{1/n} \left[\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 \right]^{\frac{1-n}{2n}} \left(\beta - \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \\ \alpha &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \\ \beta &= \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \end{aligned}$$

donde: σ_i , ε_i , $i=1,2,3$, son los esfuerzos y deformaciones principales.

Es importante mencionar que en plasticidad la es muy encontrar modelos que consideran la deformación incremental más que la deformación total. Entre dichos modelos se encuentran los de Levy-Mises de palsticidad y el Prandt-Reuss que es elastoplástico.

3.3 Modelos del Comportamiento Pseudoelástico

Actualmente el estudio del comportamiento pseudoelástico ha cobrado auge debido a la proliferación de las aplicaciones en distintas áreas de la ingeniería. Los estudios han sido realizados principalmente para policristales pero existen algunas que se ha realizado para

monocristales. Dichos estudios se han realizado combinando diversos modelos no-lineales entre los cuales destacan: los de material compuesto, elasto-plástico y visco-plástico como los más importantes. La mayoría de estos modelos son fenomenológicos sin embargo destacan algunos que consideran la física del fenómeno como es el caso de Patoor que ha desarrollado una teoría de la superelasticidad y un modelo micromecánico.

Como se mencionó al principio del presente capítulo, el interés principal se centra en la determinación de las relaciones constitutivas que definan el comportamiento de estos materiales y sólo en algunos casos se han aplicado al cálculo estructural.

En la presente sección se presentan en primer lugar la teoría de superelasticidad desarrollada por Patoor et al[18] y posteriormente se presentan algunos de los modelos que aparecen en la literatura.

3.3.1 Teoría De Superelasticidad

Entre los autores que más han trabajado en este tema se encuentran Patoor y Beveiller quienes como se mencionó antes han desarrollado toda una teoría que pretende explicar los fenómenos observados en estos materiales. Esta teoría considera la variación en el potencial termodinámico del material mientras se está realizando la transformación.

En principio Patoor y Beveiller proponen, para el caso de policristales, que la deformación debida a la transformación martensítica es función de la fracción volumétrica del material que se ha transformado y que el cambio en la energía del potencial termodinámico es función de la misma fracción volumétrica, del esfuerzo aplicado y de la temperatura. La deformación durante la transformación es expresada matemáticamente como:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N gR^i f^i$$

$$f = \frac{V_M}{V}$$

donde:

ε = es la deformación durante la transformación

g = es la magnitud de la deformación

R = representa la orientación de la una variante en particular

V_M = es el volumen de martensita en la muestra

V = es el volumen total de la muestra

f = es la fracción volumétrica de martensita

Los superíndices indican que los valores corresponden a cada grano de un policristal.

Así mismo la variación del potencial termodinámico de la transformación se expresa de la siguiente manera:

$$\Delta G(f, \sigma, T) = (BT + C)f - \sigma Rg + \frac{1}{2} A(f) f^2 g$$

donde

ΔG = es el cambio potencial termodinámico de la transformación.

f, R y g= tienen el mismo significado de en la ecuación anterior.

σ = es el esfuerzo aplicado

B y C= son constantes

A(f)= es una función que representa la interacción entre variantes de martensita y entre límites de grano.

En la ecuación anterior, cada uno de los sumandos representa un tipo de energía que cambia durante la transformación. El primer sumando representa la energía química, el segundo sumando es el cambio en la energía potencial y el tercero, el cambio en la energía de interacción.

A partir de las ecuaciones presentadas y algunas simplificaciones, Patoor, calcula la fuerza termodinámica asociada a la transformación y los diagramas: Esfuerzo crítico-Temperatura, Fracción volumétrica-Temperatura y Fracción volumétrica-Esfuerzo. La ecuación que se obtiene es la siguiente:

$$\sigma R = \frac{B}{g} T + \frac{C}{g} + A(f) f$$

Los bosquejos de los diagramas correspondientes se muestran en la Figura 3.2. Para obtener estas curvas Pattot considera los casos extremos en los cuales f=0 y f=1 para un caso donde el esfuerzo es constante y para otro a temperatura constante.

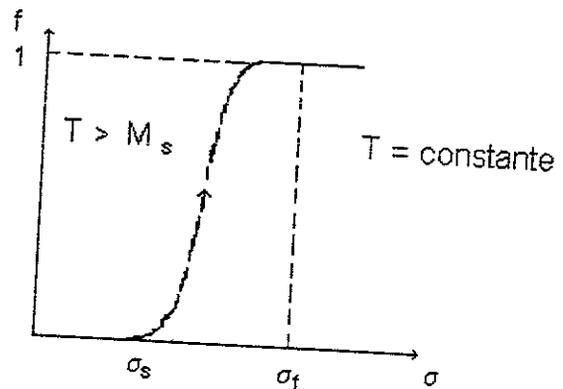
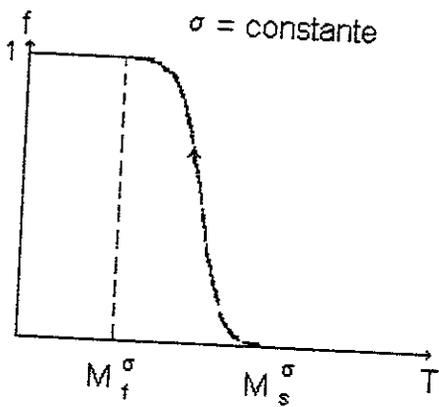
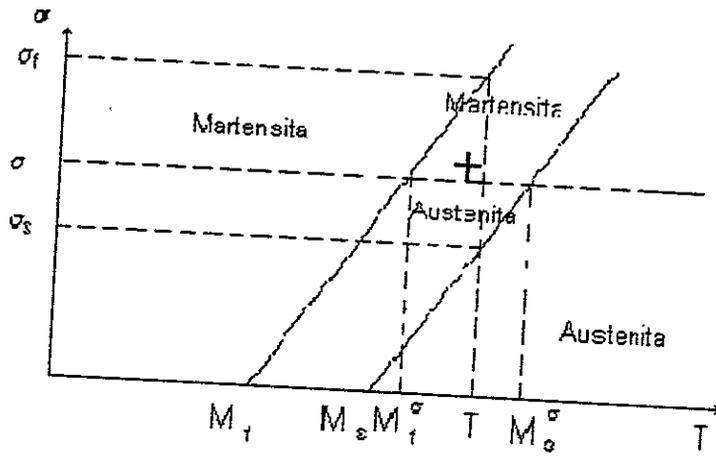


Figura 3.2 Diagramas descriptivos de la evolución de la transformación martensítica [18]

El efecto de la histeresis se propone que está representado por un sumando más en la ecuación de la variación del potencial termodinámico de la transformación. El término que representa a la histeresis es también función de la fracción volumétrica transformada.

Usando las dos ecuaciones originales y calculando la diferencial exacta de f , Patoor propone las siguientes ecuaciones:

$$d\varepsilon = \frac{Rg}{A(f)} R d\sigma$$

$$R\sigma = \frac{B}{g} (T - M_s) + A(f)f$$

Las cuales usa para bosquejar las curvas Esfuerzo-Deformación que se han observado en monocristales. Para construir dichos diagramas nuevamente se emplean los casos extremos donde $f=1$ y $f=0$ así como los diagramas σ_c - T

Para el caso de policristales la forma de análisis se complica aún más ya que se requiere "sumar" los efectos de cada uno de los granos y considerar los efectos entre variantes y entre los límites de granos.

Para obtener las relaciones constitutivas correspondientes a materiales policristalinos, Patoor[49, 50] propone un análisis complejo llamado análisis micromecánico el cual consiste en la descripción cinemática de los mecanismos físicos de la deformación y en la definición de un potencial termodinámico local. El análisis micromecánico permite determinar las ecuaciones constitutivas locales las cuales son después globalizadas usando un esquema denominado "auto consistente". El cálculo de las curvas esfuerzo-deformación según este método requieren que se conozca el número de granos en la muestra, la orientación de los granos y la magnitud del esfuerzo aplicado.

Con las ecuaciones constitutivas globalizadas Patoor muestra que es posible determinar el origen de la disimetría entre los comportamientos en tensión y compresión[51].

Por otro lado, según se reporta en la literatura, Patoor ha colaborado en estudio sobre el cálculo estructural en donde emplean algunas simplificaciones para aproximar el comportamiento superelástico en policristales[52,53].

3.3.2 Modelos Del Comportamiento Pseudoelástico en Materiales con Memoria de Forma

Otro modelo del comportamiento termomecánico observado en los materiales con memoria de forma ha sido desarrollado por Delobelle y LExcellent[54]. Este modelo es citado como un modelo viscoplástico con variables cinemática internas. El modelo parte del supuesto de que la deformación está compuesta de 3 partes: una elástica, una viscoplástica y otra pseudoelástica. Las dos últimas componentes de la deformación son funciones de una variable interna globales.

En un estudio sobre el efecto del comportamiento pseudoelástico en pruebas a esfuerzo uniaxial constante, Leclerrq et al [55] propone un modelo termodinámico donde usa la fracción transformada como variable interna y considera la deformación total compuesta por una parte elástica y una transformacional. Las ecuaciones que se proponen son las siguientes:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = E \varepsilon^e$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{tr}$$

$$\varepsilon^{tr} = \gamma \sigma$$

donde: σ = es el esfuerzo aplicado

ρ = es la densidad

ψ = es la energía libre específica

E = es el módulo elástico de la autenita

ε^e = es la deformación elástica.

ε^{tr} = es la deformación transformacional

γ = es la máxima deformación durante la transformación en el caso unidimensional.

z_σ =fracción volumétrica de la martensita orientada

\dot{z}_σ = es la derivada con respecto al tiempo de z_σ

Por otro lado Graesser y Cozzarelli[56] proponen un conjunto no lineal de ecuaciones constitutivas parametrizadas para el comportamiento pseudoelástico. Los parámetros de dichas ecuaciones son los que controlan la histéresis, el esfuerzo residual, las mesetas de carga y descarga y la transición de fase misma. El modelo consta de dos partes una elástica y una inelástica las cuales se superponen para describir los distintos comportamientos observados en los materiales con memoria de forma.

En un primer trabajo Graesser propone un modelo unidimensional el cual luego es generalizado al caso tridimensional. El modelo unidimensional propuesto es el siguiente:

$$\sigma = E \left[\varepsilon - |\varepsilon| \left| \frac{\sigma - \beta}{Y} \right|^{n-1} \left(\frac{\sigma - \beta}{Y} \right) \right]$$
$$\beta = E\alpha \left[\varepsilon - \frac{\sigma}{E} + f_T |\varepsilon|^c \operatorname{erf}(a\varepsilon) \right]$$

donde:

σ = esfuerzo unidimensional

ε =deformacion unidimensional

β =esfuerzo residual

E = Módulo de Young

ν = razón de Poisson

Y = Esfuerzo necesario para inducir la transformación martensítica a una temperatura dada

α = constante que determina la pendiente de la región inelástica

n = constante que controla transición de la región elástica a la inelástica

f_T = una constante que controla el tipo y el tamaño de la histéresis

a = constante que controla la cantidad elástica recuperada.

c = constante que controla la pendiente de la meseta de descarga

$|x|$ =valor absoluto de x

$\operatorname{erf}(x)$ =función error de argumento x

Posteriormente este modelo fue generalizado al caso tridimensional de donde proponen las siguiente ecuaciones constitutivas para el comportamiento Pseudoelástico en Aleaciones con Memoria de Forma.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1-\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \sqrt{3K_2} \left(\sqrt{3J_2^o} \right)^{r-1} \left(\frac{s_{ij} - b_{ij}}{\sigma_c} \right) \\ b_{ij} &= \frac{2}{3} E \alpha \left[\varepsilon_{ij}^m + f_T \left(\frac{2}{3} \sqrt{3I_2} \right)^{c-1} \operatorname{erf} \left(\frac{2}{3} a \sqrt{3I_2} \right) \right] \\ \varepsilon_{ij}^m &= \varepsilon_{ij} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} + \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}\end{aligned}$$

donde I_2 , K_2 y J_2^o son respectivamente los segundos invariantes de: el tensor deviator de deformación, el tensor deviator de la rapidez de deformación y del tensor de "sobre esfuerzo". La cantidades $\sqrt{3I_2}$ y $\sqrt{3K_2}$, son análogos a las respectivas mediciones de deformación plastica efectiva y rapidez de esfuerzo plástico efectivo que se usan en plasticidad.

CAPÍTULO 4: MODELACIÓN DEL COMPORTAMIENTO PSEUDO-ELÁSTICO EN TENSIÓN UNIAxIAL Y PARA UN CASO DE FLEXIÓN.

Como se explicó en el capítulo anterior, existen varios modelos propuestos para la simulación del comportamiento pseudoelástico y debido que el comportamiento es histerético, dichos modelos son cinemáticos. Por otra parte debido a lo complejo del fenómeno, dichos modelos descomponen a la deformación total en 2 o 3 componentes. Obviamente con este tipo de relaciones constitutivas es prácticamente imposible obtener soluciones analíticas aún para los casos más simples.

Por otro lado el objetivo principal del presente trabajo es presentar criterios de diseño que permitan aplicar, por lo menos en casos sencillos, éstos materiales. Es por ello que el presente estudio se dirigirá a la obtención de relaciones constitutivas simplificadas (para policristales) que permitan obtener soluciones analíticas aproximadas para algunos casos sencillos como lo son los de flexión en vigas.

No obstante queda abierta la posibilidad, para un trabajo posterior, de orientar la investigación en la dirección de la obtención de soluciones numéricas para lo cual se vislumbra que el problema principal está en la determinación del método más adecuado.

En el presente capítulo se presenta en primer lugar el desarrollo de las relaciones constitutivas simplificadas para el caso uniaxial donde se considera sólo la parte de la carga a temperatura constante. Posteriormente se analiza un caso en tensión uniaxial a carga constante y temperatura variable. Finalmente empleando las relaciones obtenidas en las secciones precedentes se analiza un caso de flexión en cantilever a carga constante y temperatura variable, el cual posteriormente se extiende a algunos otros arreglos de flexión.

4.1 Planteamiento.

Para definir las relaciones constitutivas que rigen a la pseudoeelasticidad resulta razonable que se empleen las teorías de mecánica de sólidos que se conocen hasta ahora. Como se puede apreciar, en los modelos presentados en la sección 3.3, la teoría que más se usa para definir las relaciones constitutivas del comportamiento pseudoelástico es la de elastoplasticidad. Lo anterior se debe a que la transformación inducida por esfuerzo puede ser visto como una cedencia del material. En realidad la mayoría de los modelos propuestos para el comportamiento pseudoelástico corresponden con, el caso cinemático del modelo elastoplástico "corregido" y en algunos casos agregándole un término.

El modelo de Corzelli [56] considera el segundo término, la parte plástica, del modelo elastoplástico como una deformación inelástica y lo define en función de una serie de parámetros relacionados con el esfuerzo crítico, el tamaño de la histéresis y un esfuerzo residual.

Por otro lado, el modelo de Lecterq [55] considera el segundo término del modelo elastoplástico como una deformación transformacional que tiene que ver con la deformación que se alcanza durante la transformación y adicionalmente agrega un término viscoelástico que relaciona con la histéresis y la deformación residual que se observa a temperaturas cercanas a M_s .

El modelo de Lecterq al igual que el de Delobelle involucran la fracción volumétrica de martensita en el material y la consideran como una variable interna. Esto indica que se está considerando a los materiales que presentan la pseudoelasticidad como "material con memoria" en sentido de que la deformación actual depende de la "historia pasada de la deformación" que es como se definieron los materiales inelásticos en la sección 3.2.1.

De la teoría de propuesta por Patoot y Eberhardt se puede derivar la siguiente relación constitutiva:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} + f(\sigma, T)\varepsilon_0 & \sigma_0 &= \frac{\sigma_c + \sigma_f}{2} \\ f &= \frac{e \frac{(\sigma - \sigma_0)}{\delta\sigma}}{1 + e \frac{(\sigma - \sigma_0)}{\delta\sigma}} & \delta\sigma &= \frac{\sigma_f - \sigma_c}{2 \ln(9)} & \sigma_f &= \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} (T - M_f) \\ & & \sigma_f &= \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} (T - M_f) \end{aligned}$$

Como se puede ver esta relación constitutiva difiere un tanto de los demás modelos, en el sentido de que no considera el modelo elastoplástico. Sin embargo, para el caso estático, considera la deformación compuesta por dos partes una elástica y una transformacional que depende de la fracción volumétrica de la martensita en el material, la cual a su vez es función del esfuerzo y de la temperatura. Para el caso cinemático el modelo derivado de la teoría de Patoor considera además un tercer término que define la histéresis y la deformación remanente que como se mencionó anteriormente, se presenta a temperaturas cercanas a M_s . Como se puede ver, este modelo es más sencillo que los presentados en la sección 3.3 sin embargo es un modelo para monocristales y para aplicarlo a policristales es necesario "acoplar" las contribuciones de cada grano a la deformación total y considerar los términos disipativos durante la transformación.

Pese a que los materiales (policristalinos) con memoria de forma presentan una alta anisotropía mecánica (sección 2.3) los modelos propuestos para policristales dan por hecho que el material es continuo homogéneo e isotrópico. Lo anterior se debe probablemente a que se ha observado, en muestras policristalinas laminadas, que los parámetros de la transformación inducida por esfuerzo (como la deformación transformacional y la entalpía de formación) coincide aproximadamente con el promedio de los valores observados en monocristales con distintas orientaciones [41] [46].

Si se plantean las relaciones constitutivas sólo en la parte de la carga, entonces ya no es necesario considerar el caso cinemático ya que desaparece la histéresis y las deformaciones residuales. Con esta restricción adicional y dado que se dieron por hecho que se cumplen las hipótesis de continuidad, homogeneidad e isotropía entonces, se tiene que se convierte el problema en uno de elasticidad finita cuyo tensor de Cauchy cumple con la ecuación 3.5.

Por otro lado como se supuso que no existen esfuerzos residuales y entonces el tensor de elasticidad (C) asociado, cumple con la ecuación 3.9. Considerando lo anterior tenemos que las relaciones constitutivas que emplearíamos tendrían la forma de la ecuación 3.10:

$$\hat{S}(F) = \mathbf{C}[\varepsilon] + O(H)$$

que corresponde con las relaciones constitutivas para un caso de elasticidad finita donde, a diferencia de el caso de elasticidad finita, el segundo término no es despreciable. En realidad, en

los modelos presentados en sección 3.3, se escribe la deformación en términos de los esfuerzos de una forma:

$$\mathcal{E} = \hat{C}[S] + \Psi[S]$$

donde \hat{C} es el tensor de elasticidad correspondiente mientras que Ψ es un operador no lineal que representa, precisamente, la parte no-lineal de la deformación. Visto desde el enfoque que presenta Durelli et al[57], la ecuación anterior implica que los coeficientes de las relaciones constitutivas: deformación-esfuerzo son función de los esfuerzos o viceversa, lo que Durelli califica como un caso de elasticidad no lineal.

Para poder encontrar soluciones analíticas aproximadas la ecuación anterior, aún en el caso uniaxial, resulta inconveniente. Debido a ello en el desarrollo que se presenta en la siguiente sección usaremos sólo la parte no lineal de la ecuación de Ramberg-Osgood para el caso a temperatura constante y la parte no lineal de la ecuación derivada de la teoría de Patoor para el caso a carga constante.

4.2 Análisis en tracción uniaxial

En la presente sección se desarrolla un procedimiento para “construir” una relación constitutiva que simule el efecto de la disminución de la temperatura en las curvas esfuerzo-deformación a distintas temperaturas en el intervalo superelástico. Posteriormente esta relación constitutiva se emplea para simular el efecto observado en la deformación a esfuerzo constante.

4.2.1 Análisis a Temperatura Constante

Como se mencionó en la sección anterior, la relación constitutiva más conveniente para el estudio del fenómeno en cuestión es la de plasticidad, la cual, para el caso uniaxial se puede escribir:

$$\sigma = k\varepsilon^n \tag{4.1}$$

donde: σ el esfuerzo aplicado, ε es la deformación, n y k son parámetros que se relacionan con las características del comportamiento.

Esta relación constitutiva describe un comportamiento parabólico similar a empleado por Gillet et al[52] para analizar el comportamiento que se observa en miembros estructurales construidos con Materiales con Memoria de Forma

Una forma de emplear la ecuación (4.1) para simular el comportamiento pseudoelástico se puede lograr si n se mantiene constante y hacemos que k dependa de la temperatura. Para lograr esto se procede a analizar el comportamiento observado en las curvas esfuerzo-deformación en intervalos de temperatura mayores que A_f y menores que M_f .

Como puede apreciarse en la Figura 4.1, las curvas esfuerzo-deformación que se obtienen de una prueba de tracción uniaxial realizada a una muestra policristalina (a una temperatura $T > A_f$) presentan un cambio de pendiente cuando el esfuerzo alcanza cierto valor. Como ya se ha mencionado, la magnitud de dicho esfuerzo depende de la temperatura ya que corresponde con el

inicio de la transformación martensítica inducida por esfuerzo. Como se puede ver, el cambio de pendiente es un tanto pronunciado por lo que indica que se presenta una región de transición entre las dos pendientes que se extiende en un intervalo de deformaciones amplio. Como se mencionó anteriormente dicha región de transición está relacionada con la anisotropía observada en cada grano de un policristal durante la transformación.

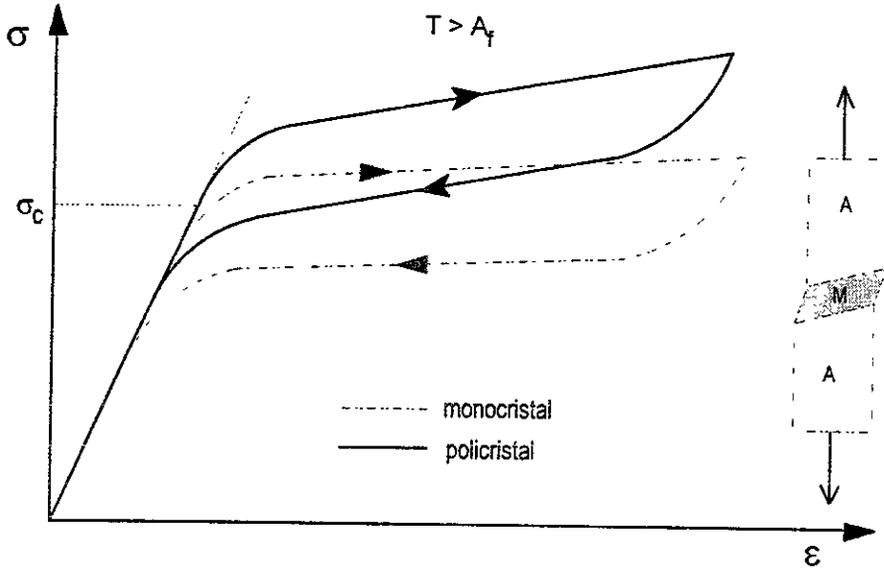


Figura 4.1. Comportamiento superelástico observado en materiales con memoria de forma.

Por otro lado a temperaturas menores M_f es observa también que la curva esfuerzo deformación tiene la forma de una curva "parabólica" achatada como se muestra en la Figura 4.2. La forma de la curva esfuerzo-deformación en este intervalo de temperaturas presenta un cierto "endurecimiento" conforme disminuye la temperatura de prueba. Este efecto en las curvas esfuerzo deformación es contrario a que se observa en las curvas superelástica y se debe a que en este intervalo de temperaturas, se presenta un efecto denominado reorientación de variantes de martensita que se ha observado en distintos aleaciones de cobre con memoria de forma[44][38].

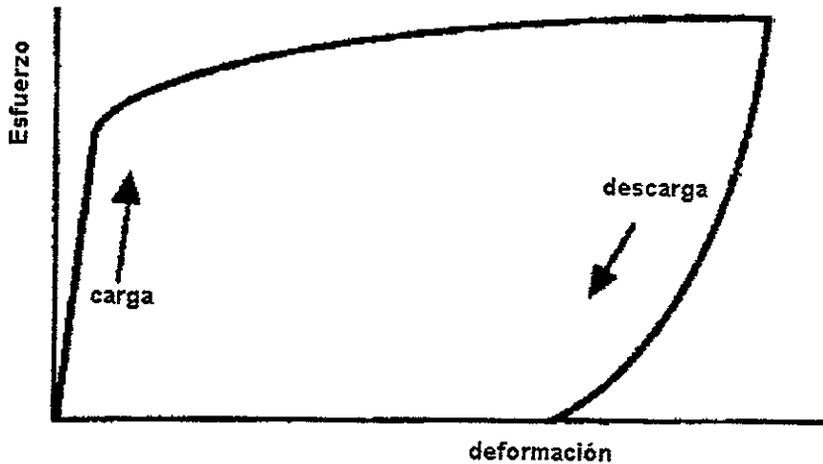


Figura 4.2. Efecto pseudo elástico debido a la reorientación de variantes de martensita en $T < M_f$.

Como se mencionó el parámetro n en la ecuación 4.1 determinan el "achatación" que sufre la curva esfuerzo deformación a valores de esfuerzo superiores al de referencia. Para estimar el valor que debe tener el parámetro n de la ecuación 4.1 en el intervalo superelástico, se consideraron dos valores típicos que toma la deformación en correspondientes a puntos situados antes y después del esfuerzo crítico. El procedimiento consiste en calcular el valor que toma la pendiente de la curva definida por 4.1 cuando la deformación es de aproximadamente 0.1% y el que toma cuando la deformación es de aproximadamente 4.0%.

Los dos valores de deformación citados en el párrafo anterior, corresponden a la deformación que se presenta a aproximadamente la mitad del esfuerzo crítico y a un valor lejano, donde la segunda pendiente se ha desarrollado completamente. Como se puede apreciar dichas deformaciones quedan comprendidas dentro la zona donde se presenta la transición, entre las dos pendientes que se aprecian en las curvas esfuerzo deformación. La variación de las dos pendientes debe medirse de los datos experimentales y plantear la siguiente relación que nos permitirá determinar el valor aproximado que debe tomar n :

$$r = \frac{\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = 0.001}}{\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = 0.04}} = 40^{n-1}$$

(a)

Dado que la pendiente disminuye, entonces podemos inferir que n será menor que 1. Adicionalmente, n debe ser impar ya que sólo así la ecuación 4.1 nos definirá la curva de tracción como la de compresión. Cabe mencionar que los valores de r y n se mantienen en un intervalo muy próximo si la base del término de la derecha es mayor que 20.

Por otro lado, para determinar la forma que debe tener el parámetro k de la ecuación 4.1 recordamos que, como se expuso en la sección 3.2, dicha ecuación puede ser vista como la parte plástica de la ecuación de Ramberg-Osgood [48] que propone que la deformación total en un material elastoplástico está compuesta por una deformación elástica y una plástica que se puede escribir:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma_R}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_R} \right)^m \quad (4.2)$$

Comparando esta ecuación con la 4.1 el coeficiente k puede ser escrito de la siguiente manera:

$$k = \sigma_R \left(\frac{E}{\alpha \sigma_R} \right)^n \quad (4.3)$$

donde $n = 1/m$

Lo conveniente de esta comparación es el significado que tienen los parámetros de la parte plástica ya que esto permite emplear dicha ecuación para "construir" una ecuación que simule el comportamiento superelástico, es decir la curvas esfuerzo deformación a temperatura constante.

Como se mencionó antes k debe representar la influencia de la temperatura sobre el comportamiento mecánico de estos materiales y el problema central consiste, en determinar $k(T)$ de forma adecuada para que contenga la mayor información posible sobre la parte térmica del fenómeno.

En primer lugar $k = k(T)$ debe hacer variar las curvas generadas por la ecuación 4.1 de tal manera que estas se "achaten" al disminuir la temperatura. Para tal efecto tenemos que de la ecuación 4.3 σ_R puede ser escrita en términos de k , α y E lo que queda como:

$$\sigma_R = k^{1-n} \left(\frac{\alpha}{E} \right)^{\frac{n}{1-n}} \quad (4.4)$$

Luego como σ_R funciona como un esfuerzo de referencia es razonable pensar que debe tener alguna relación con el esfuerzo crítico (σ_C) y podría emplearse para calcular los valores de k para cada temperatura en el intervalo superelástico. Considerando lo anterior proponemos que σ_R es igual al esfuerzo crítico y obtenemos la siguiente expresión para k en función de la temperatura :

$$k(T) = \left(\frac{E}{\alpha} \right)^n \left[\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} (T - M_s) \right]^{1-n} \quad (4.5)$$

Se ha observado que en muestras policristalinas, se presenta una M_s aparente (M_s') menor que la M_s que se obtiene por calorimetría [41][46]. Dicho efecto se atribuye a la interacción que existe entre los límites de grano las cual depende del tamaño del grano de la muestra en cuestión [41]. La consecuencia de dicho efecto es que en las curvas esfuerzo-deformación, correspondientes a temperaturas ligeramente menores que M_s , sigue apreciando un cambio de pendiente correspondiente a la transformación inducida por esfuerzo. Dicho comportamiento es contrario a lo esperado sin embargo es posible considerar, en la simulación, el efecto simplemente tomando M_s de la ecuación 4.5 como M_s' (M_s aparente). Debido a lo anterior, en lo sucesivo se considerara la M_s aparente (M_s') en lugar de M_s .

El término E en la ecuación anterior está relacionado con la pendiente de la curva esfuerzo deformación a en la región lineal pero no es precisamente el Módulo elástico de la austenita. Para poder estimar su valor podemos suponer que la curva teórica corta a la experimental a un esfuerzo ligeramente mayor que el esfuerzo crítico. Dicha condición nos lleva escribimos la siguiente expresión en términos de la fracción del esfuerzo crítico (en este caso se le dio un valor de 1.25) y de n :

$$E_A = n \frac{E}{\alpha} (p)^{\frac{1-n}{n}} = n \frac{E}{\alpha} \left(\frac{1}{1.25} \right)^{\frac{1-n}{n}} \quad (4.6)$$

donde p es el recíproco de la fracción del esfuerzo crítico a la cual se cumple la condición. Como se puede ver en esta ecuación $p < 1$.

como se puede ver, si $\alpha=1$, la condición se simplifica y queda sólo determinar E_A de los datos experimentales y despejar E de la ecuación anterior.

Como se verá el capítulo 6 los criterios que se han citado son útiles sólo para aproximar los valores de E y n ya que por lo general requieren algunas modificaciones para ajustarlos a las curvas experimentales.

Como se verá más adelante la ecuación 4.5, con las restricciones impuestas a los parámetros n , E y α , funciona bien para el intervalo superelástico sin embargo es conveniente analizar el caso a esfuerzo constante ya que nos lleva a definir $k(T)$ de una forma alternativa que hace evidente la validez de la 4.5.

4.2.2 Análisis a Carga Constante

Otra forma de ver la influencia que tiene la temperatura sobre los valores que toma k plantea para el caso en que se aplica un esfuerzo constante y se hace variar la temperatura. Observando la forma que toman las curvas deformación-temperatura a esfuerzo constante reportadas [55][58]

podemos considerar que si la deformación sigue un comportamiento definido por 4.1 entonces $k(T)$ está acotada por dos valores extremos, uno inferior y el otro superior.

El valor inferior de k debe mantenerse a temperaturas menores a una cierta temperatura M_f^σ y el superior deberá mantenerse a temperaturas superiores a una cierta temperatura M_s^σ . El valor inferior de k está relacionado con el hecho de que en estos materiales existe una deformación transformacional máxima y al efecto de transición que se presenta cerca de la temperatura M_s . Como se verá más adelante dicho valor depende de la magnitud del esfuerzo aplicado.

Por otro lado el valor superior que toma k se justifica por el hecho de que a temperaturas mayores a aquella a la cual el esfuerzo crítico es igual al esfuerzo aplicado (M_s^σ), la deformación queda dentro de la región donde el comportamiento mecánico del material es lineal.

La temperatura M_s^σ puede calcularse usando la ecuación del esfuerzo crítico de la siguiente manera:

$$M_s^\sigma = \frac{\sigma_A}{\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s^\sigma}} + M_s'$$

donde: σ_A es el esfuerzo aplicado, M_s^σ es la temperatura a la cual $\sigma_A = \sigma_c$ es decir la temperatura de inicio de la transformación "trasladada". Nuevamente M_s es la temperatura de transformación aparente (M_s') como se aclaró en la ecuación 4.5.

En presente análisis se considerará que $M_s' = M_f^\sigma$ lo cual significa que no existe deformación a temperaturas menores que M_s' . La consecuencia de esto, como se verá más adelante, es que se presenta un efecto que difiere con lo que se observa en monocristales e incluso contradice la teoría de la pseudoelasticidad.

Considerando que los valores extremos de k no se alcanzan súbitamente si no que más bien lo hacen de manera suave, se propone una función de Boltzman para describir $k(T)$ es decir:

$$k(\delta T) = \frac{k_1 - k_2}{1 + e^{\frac{(\delta T - T_c)}{T_a}}} + k_2$$

(4.8)

donde: $\delta T = T - M_s'$; T es la temperatura de prueba

k_j $j=1,2,3,4$ así como T_c y T_a , son los parámetros de la curva.

Para obtener los parámetros de la curva propuesta se consideran los rasgos característicos del fenómeno además de que se introduce otro parámetro importante que es la magnitud del esfuerzo aplicado.

k_1 y k_2 representan los valores máximo y mínimo que puede tomar k . El valor mínimo de k es k_2 y corresponde con las temperaturas $T < M_f(M_s)$. Por otro lado k_1 es el valor máximo que puede tomar k y corresponde a temperaturas $T > M_s$.

Para determinar los valores de k_1 y k_2 se consideran las dos asíntotas de la ecuación 4.8. Primero se considera que $k=k_i$ cuando la temperatura corresponde con aquella a la cual el esfuerzo aplicado es igual al esfuerzo crítico (en $T=M_s$). El valor que toma k a ésta temperatura se hace corresponder con un 0.99 de k_1-k_2 .

Por otro lado, se considera que $k=k_f$ a una temperatura $T=M_f(M_s)$ y cuyo valor será un 0.01 de k_1-k_2 . El razonamiento anterior nos lleva a plantear las siguientes ecuaciones:

$$0.99 * (k_1 - k_2) + k_2 = k_i$$

$$0.01 * (k_1 - k_2) + k_2 = k_f$$

de donde:

$$k_2 = \frac{0.99k_f - 0.01k_i}{0.9^2 - 0.1^2}$$

$$k_1 = \frac{0.01k_f - 0.99k_i}{0.01^2 - 0.99^2}$$

(4.9)

Para calcular T_c y T_a se emplea el mismo criterio usado para determinar las k_j sólo que esta vez se considera sólo el cociente de la ecuación 4.8. Es decir que se suponen que el 0.99 de $k_1 - k_2$ se alcanza en $T = M_s$ mientras que el 0.01 de $k_1 - k_2$ se alcanza en $T = M_f(M_s)$. Estas condiciones pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{1}{1 + e^{\left(\frac{-T_c}{T_a}\right)}} = 0.01$$

$$\frac{1}{1 + e^{\left[\frac{\left(\frac{M_s^\sigma - M_s'}{T_a}\right) - T_c}{T_a}\right]}} = 0.99$$

lo que resulta en lo siguiente:

$$T_c = \frac{\ln(99)}{\ln(99^2)} (M_s^\sigma - M_s') = \frac{1}{2} (M_s^\sigma - M_s') = \frac{\sigma_A}{2 \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s^\sigma}}$$

$$T_a = \frac{T_c}{\ln(99)} = \frac{\sigma_A}{2 \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s^\sigma} \ln(99)}$$

Como se puede apreciar hasta este punto se ha construido la función k en términos no sólo de la temperatura si no de las temperaturas críticas y la magnitud del esfuerzo aplicado, sin embargo valores de k_1 y k_2 quedaron definidos en términos de otros dos valores k_f y k_r . Se puede ver que dichos valores son aproximadamente: $k_1=k_f$ y $k_2=k_r$ ya que los coeficientes que los multiplican son muy cercanos a 1 y a 0 en cada caso. En la siguiente sección se presenta un criterio que permite definir los valores k_1 y k_2 sin tener de definir nuevos parámetros y así se obtienen expresiones que nos permitirán simular las curvas superelásticas, que corresponden a los casos a temperatura constante, y las curvas deformación-temperatura que se refieren al caso donde el esfuerzo se mantiene constante.

4.2.3 Criterio de las fracciones volumétricas.

Si se observa con detenimiento la ecuación 4.8 que define a k es claro que es posible reescribirla de la siguiente manera:

$$k = \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{\delta T - T_c}{dT}}} \right) k_2 + \frac{k_1}{1 + e^{\frac{\delta T - T_c}{dT}}} = \left(\frac{e^{\frac{\delta T - T_c}{dT}}}{1 + e^{\frac{\delta T - T_c}{dT}}} \right) k_2 + \frac{k_1}{1 + e^{\frac{\delta T - T_c}{dT}}}$$

con T_c y T_a definidos de la misma manera que se hizo en la sección anterior.

Si se observa con detenimiento, el término que multiplica a K_2 es una función acotada con dos valores asintóticos, uno superior y otro inferior. Conforme T tiende a valores negativos muy grandes la función tiende a 1 y mientras que cuando T toma valores positivos muy grandes tiende a cero. Por otra parte, considerando la forma como se definieron los parámetros T_c y T_a se tiene que dicha función esta acotada por M_s^σ y M_s' . Lo anterior significa que el término que se factorizó representa la evolución de la fracción volumétrica de la muestra en función de la temperatura considerada por Patoot et al[18] en su teoría para esfuerzo constante.

Considerando lo anterior tenemos que k se puede escribir en términos de la fracción volumétrica de martensita en el material de la siguiente manera:

$$k = f k_2 + (1 - f) k_1 = f(k_2 - k_1) + k_1$$

(4.10)

y por tanto la ecuación constitutiva 4.1 se puede reescribir como:

$$\sigma = [f(k_2 - k_1) + k_1] \varepsilon^n \quad (4.11a)$$

o bien:

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma}{f(k_2 - k_1) + k_1} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (4.11b)$$

donde:

$$f = \frac{e^{\frac{\delta T - T_c}{dT}}}{1 + e^{\left(\frac{\delta T - T_c}{dT} \right)}}$$

donde k_2 y k_1 como se definieron en la sección anterior, son los valores extremos inferior y superior que toma $k(T)$

Como se puede ver k queda definido por la fracción volumétrica de martensita presente en el material y por “dos rigideces extremas” que toma la curva esfuerzo-deformación al disminuir la temperatura. De esta manera se puede ver el efecto de la transformación martensítica en las propiedades mecánicas del material. Cabe mencionar que al definir k con la ecuación 4.10 presenta la misma forma que se emplea para definir el módulo elástico equivalente en materiales compuestos (cuando la variación es lineal).

Definiendo las relaciones constitutivas en términos de la fracción volumétrica transformada nos lleva a un resultado que es consistente con lo establecido por los diversos autores que estudian el fenómeno [18] [54]. Dicho resultado se puede resumir de la siguiente manera: “la deformación en los materiales con memoria de forma, no sólo depende del esfuerzo sino que también de una variable que tiene que ver con la historia del material, es decir la fracción volumétrica”.

Por otro lado, dado que la fracción volumétrica tiene su propia relación constitutiva es posible entonces considerarla como una variable interna.

El resultado anterior es particularmente importante cuando estudiemos casos en los que se presenta una distribución de esfuerzos no uniforme ya que se puede deducir la misma a partir de éste criterio. Esto explica el hecho de que haya sido posible bosquejar el comportamiento desplazamiento-temperatura a partir de la evolución de la fracción volumétrica en un trabajo previo [46][59].

Volviendo a la ecuación (4.10) que define el valor de k en términos de la fracción volumétrica y retomando la ecuación (4.4) que lo define en términos de un esfuerzo de referencia σ_R se tiene que, igualando ambas expresiones podemos expresar σ_R de la siguiente manera:

$$\sigma_R = \left(\frac{\alpha}{E}\right)^{\frac{n}{1-n}} [f(k_2 - k_1) + k_1]^{\frac{1}{1-n}} \quad (4.12)$$

De donde podemos analizar el comportamiento de σ_R cuando toma los valores extremos, $f=0$ y $f=1$.

Es claro que si escribimos la variación de σ_R entre $f=0$ y $f=1$ dividida por el intervalo de temperaturas correspondiente a la misma variación de f , es decir por $M_s^\sigma - M_f^\sigma$, el resultado debe ser igual a la razón Clausius-Clapeyron ya que es una relación fundamental del efecto superelástico. Lo anterior nos lleva a la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma_R|_{f=1} - \sigma_R|_{f=0}}{M_s^\sigma - M_f^\sigma} = \frac{\left(\frac{\alpha}{E}\right)^{\frac{n}{1-n}} \left(k_1^{\frac{1}{1-n}} - k_2^{\frac{1}{1-n}}\right)}{M_s^\sigma - M_f^\sigma} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} \quad (4.13)$$

luego, si calculamos k_1 haciendo que σ_R sea igual al esfuerzo crítico, como se estableció la sección 4.1.2., obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{\sigma_R|_{f=1} - \sigma_R|_{f=0}}{M_s^\sigma - M_f^\sigma} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} \frac{\left[\left(\frac{\alpha}{E}\right)^n k_2\right]^{\frac{1}{1-n}}}{M_s^\sigma - M_f^\sigma} \quad (4.14)$$

Observando el segundo miembro de esta relación se puede ver que si E es del orden de 10^{10} , k_2 del orden de 10^8 , n es de alrededor de 0.5 (pero impar como se estableció en la sección anterior) y $\alpha=1$, dicho término es despreciable y el miembro de la izquierda se aproxima a la razón de Clausius-Clapeyron. Es decir que se satisface la relación fundamental definida por la ecuación 4.13. Cabe destacar las restricciones que se están dando a los parámetros E , k_2 , n y α son consistentes con las que se mencionaron en la sección 4.1.2.

La consideración de que σ_R sea igual al esfuerzo crítico es conveniente para calcular sólo los valores superiores de k (es decir k_i) ya que si se emplea para calcular k_f , dado que se considera que dicho valor corresponde con la temperatura M_s (M_s^σ), se obtiene una recta sobre el eje de las deformaciones. Sin embargo, si se consideran casos a temperatura constante en la región

superelástica ($T > M_s$) entonces podemos establecer que la ecuación constitutiva que simula el efecto superelástico se puede escribir:

$$\sigma = \left[\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} (T - M_s) \right]^{1-n} \left(\frac{E}{\alpha} \varepsilon \right)^n$$

(4.15)

donde: T es la temperatura a la que se realiza la prueba.

Volviendo al caso a esfuerzo constante, se tiene que para determinar k_f se debe tomar en cuenta que a temperaturas menores a M_s (M_s^*) el efecto superelástico es reemplazado por la reorientación de variantes como se reporta en la literatura [6]. Como ya fue mencionado, la reorientación de variantes sigue una relación inversa a la que se observa en el efecto superelástico y es no lineal. Lo anterior significa que al pasar por M_s (M_s^*) se presenta una transición que representa una discontinuidad en la función que se emplee para definir los comportamientos en ambos intervalos ($T > M_s$ y $T < M_s$). No obstante, dado que en la presente modelación sólo se ha considerado el intervalo superelástico podemos encontrar un valor equivalente para k_f que sea consistente con el observado en los experimentos y que corresponda con la temperatura M_f^σ que en el presente análisis se tomó igual a M_s^* .

La idea de tomar un valor equivalente para k_f se apoya en el hecho de que, en las pruebas experimentales no se presenta discontinuidad alguna cerca de M_s , más bien, se aprecia que la deformación tiende asintóticamente hacia un valor constante. Dicho valor, que alcanza la deformación, puede ser calculado usando un valor de k equivalente. Para poder calcular el valor de la deformación máxima, es necesario conocer un cierto valor $\Delta\sigma$ que corresponde con el incremento del esfuerzo, respecto al esfuerzo crítico, necesario para finalizar la transformación inducida por esfuerzo en una prueba en tensión a temperatura constante. Como se mencionó al inicio del presente capítulo, en el caso de policristales no se distingue la terminación de la transformación, así mismo en lugar de una meseta de transformación se observa un cambio de pendiente. Una forma de calcular $\Delta\sigma$ puede ser considerar la segunda pendiente que se observa en policristales así como la deformación transformacional promedio no obstante, si se hace de ese modo se obtiene que el valor del intervalo $M_s^\sigma - M_f^\sigma$ sería de alrededor de 100°C lo cual no es consistente con las observaciones experimentales [55] donde se observa más bien, que la transformación finaliza alrededor de M_s (o M_s^*). Considerando lo anterior es posible emplear como criterio que la variación del esfuerzo, necesario para finalizar la transformación, es igual al esfuerzo aplicado σ_A ya que esto es equivalente, en un caso a carga constante, a tener que disminuir la temperatura hasta M_s (o M_s^*) para finalizar la transformación.

Considerando lo anterior, se tiene que la deformación máxima (ε_{\max}), así como la deformación mínima, pueden ser calculadas empleando la ecuación 4.15, tomando $T = M_s^\sigma$ y $\sigma = 2\sigma_A$ para la deformación máxima y $\sigma = \sigma_A$ para la deformación mínima (ε_{\min}), con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{max} &= \frac{\alpha}{E} 2^{\frac{1}{n}} \sigma_A \\ \varepsilon_{min} &= \frac{\alpha}{E} \sigma_A \\ \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min} &= \frac{\alpha}{E} \sigma_A \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)\end{aligned}\tag{4.16}$$

Con este valor de deformación máxima, empleando la ecuación 4.1, es posible obtener un valor de k con el que se obtenga la misma deformación pero con un esfuerzo igual a σ_A , dicho valor es justamente k_f y está dado por:

$$k = k_f = \left(\frac{E}{\alpha} \right)^n \frac{\sigma_A^{1-n}}{2}\tag{4.17}$$

Se puede apreciar, en las ecuaciones 4.16, que el término $\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}$ corresponde con el valor de la deformación transformacional (ε_0) y que en este caso dicho valor depende del esfuerzo aplicado. Esto constituye una contradicción con la teoría de la pseudoeleasticidad para monocristales ya que, según dicha teoría, tanto el intervalo $\Delta T = M_s^\sigma - M_f^\sigma$ como $\varepsilon_0 = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{inc}$ son independientes de la carga aplicada. Como se mencionó anteriormente ε_0 depende de la orientación y se relaciona con ΔT y con la razón de esfuerzo según la relación:

$$\frac{\varepsilon_0 E_T}{M_s^\sigma - M_f^\sigma} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s}$$

donde E_T es la pendiente de la región de transición

Como se mencionó anteriormente la razón de esfuerzo depende del tipo de transformación así que para que se cumpla dicha igualdad, es necesario que E_T se mantenga constante lo cual se ha sucede en la realidad. En policristales, el valor de E_T , el cual corresponde con E_M , al igual que la razón de esfuerzo se conservan constantes por lo que se ve claramente que para que esto suceda deben variar tanto ε_0 como ΔT .

Como se puede apreciar la suposición echa de que $M_f^\sigma = M_s$ da como resultado el efecto que se acaba de mencionar y claramente contradice la teoría de la pseudoeleasticidad para monocristales. No obstante, como se verá en el capítulo 6, en las pruebas experimentales realizadas en el presente trabajo y en algunas reportadas en la literatura[55] se aprecian dichos efectos. El origen de los mismos puede ser atribuido a la alta anisotropía mecánica que se presenta durante la transformación inducida por esfuerzo y a la interacción entre los límites de grano que se presenta en consecuencia. En realidad no se ha reportado en la literatura el origen de dichos efectos y su estudio se deja para un trabajo posterior sobre todo, porque resulta de gran importancia para el modelado del comportamiento termomecánico de los materiales con memoria de forma policristalinos.

En este punto, se cuenta ya con expresiones que permiten calcular los valores extremos de k (k_1 y k_2) Lo anterior significa que es posible establecer la relación constitutiva que simula la variación de la deformación en función de la temperatura, cuando se mantiene constante el esfuerzo. Dicha expresión se puede escribir de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{E} \left[\left(f(k_2 - k_1) + k_1 \right) \right]^{\frac{n-1}{n}} \sigma_A^{\frac{1}{n}}$$

$$f = \frac{e \frac{T - M'_s - T_c}{T_a}}{1 + e \frac{T - M_f^\sigma - T_c}{T_a}}$$

con

(4.18)

$$k_i = \left(\frac{E}{\alpha} \right)^n \left(\sigma_A \right)^{1-n}$$

$$k_f = \left(\frac{E}{\alpha} \right)^n \frac{\sigma_A^{1-n}}{2}$$

$$T_c = \frac{\sigma_A}{2 \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s^\sigma}}$$

$$T_a = \frac{\sigma_A}{2 \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s^\sigma} \ln(99)}$$

donde k_1 y k_2 se calculan a partir de k_f y k_i .

Se ve claramente que se ha "construido" una función $k=k(T, E_A, E_M, \sigma_A, M_s')$, es decir en términos de los parámetros fenomenológicos macroscópicos de una muestra sin embargo, ésta función se puede aplicar sólo para el enfriamiento (desde $T > M_s^\sigma$ hasta $T < M_f^\sigma$). Para el calentamiento se debe considerar que existe una histéresis entre las temperaturas M_f y A_s la cual se mantiene para M_s^σ y A_s^σ . Lo anterior tiene el efecto de desplazar la curva que describe el comportamiento observado durante el enfriamiento a temperaturas mayores, lo que implica que las mismas relaciones presentadas pueden ser utilizadas para la parte del calentamiento. El único cambio que se debe hacer es el de sustituir M_f^σ por A_s^σ . En realidad, para reproducir este efecto deberían emplearse modelos cinemáticos sin embargo haciendo la consideración anterior se puede obtener una buena estimación de esta parte del comportamiento.

Para emplear las ecuaciones propuestas deben ser considerados los parámetros fenomenológicos de los Material con Memoria de Forma que, en particular, se vaya a utilizar. Algunos de estos parámetros como la razón de esfuerzo y la deformación transformacional(para monocristales con diferentes orientaciones) así como los de los módulos elásticos de las fases austenita y martensita han sido reportados en la literatura [6] [38][39] [44] para distintas Aleaciones con Memoria de Forma.

Como se ha mencionado ya en varias ocasiones, se ha observado en muestras policristalinas de Cu-Al-Ni[41] y de Cu-Al-Be[46] que el promedio de las deformaciones transformacionales(para monocristales con diferentes orientaciones) y la razón de esfuerzo pueden usarse con buenos resultados, sin embargo no sucede así con los módulos elásticos. Los módulos elásticos en policristales llegan a tener variaciones considerables y sobre todo, no existe información que permita predecir la variación de la pendiente en la zona de transición que se presenta en las curvas esfuerzo-deformación. Lo anterior se debe a que dicha pendiente depende tanto de la distribución en las orientaciones de los granos del policristal como las interacción entre los límites de granos.

Considerando estas limitantes se hace evidente que es necesario recurrir a información experimental para simular los comportamientos tratados en la presente sección. No obstante, como se verá en la sección de resultados, sólo es necesario realizar unas cuantas pruebas que nos permitan obtener la información que se requiere para la simulación.

Las pruebas a las que se refiere el párrafo anterior son las siguientes: un estudio de calorimetría diferencial de barrido, o una dilatometría, y una prueba en tracción a $T > A_f$. De la calorimetría practicada a la muestra se obtienen las temperaturas de transformación M_s , A_s y A_f . La prueba en tensión a $T > A_f$ es necesaria para obtener de la curva experimental los valores de E_A , E_M y r para posteriormente determinar los valores de E y n .

Una forma alternativa para determinar los valores de E y n es practicando una ajuste a la curva experimental con una curva del tipo de la ecuación 4.1. Posteriormente se debe redondear el valor de n a un número impar y se debe practicar nuevamente el ajuste para obtener el valor de E que se empleará después para calcular los valores de k correspondientes a otras temperaturas. En el capítulo 6 correspondiente a los resultados, se emplean ambos métodos a fin de verificar las restricciones planteadas en el presente capítulo y validar los modelos propuestos.

4.2.4 Consideraciones termodinámicas

Una consideración adicional que resulta prudente hacer se refiere al cambio en el calor de transformación que se presentó cuando se induce la transformación por esfuerzo. Si se observa cuidadosamente la relación de Clasiuss-Clapeyron podemos ver que para que el cociente:

$$\frac{\Delta H}{T}$$

se mantenga constante, el calor de transformación debe incrementarse al aumentar la temperatura a la cual se presenta la transformación. Así pues si hacemos que $T = M_s^\sigma$ obtenemos que la variación en la entalpía de formación está dado por:

$$\delta(\Delta H) = \varepsilon_0 \sigma_A + \Delta H_1$$

donde ΔH_1 es la entalpía de formación a cero esfuerzo.

Por otro lado tenemos que empleando la teoría de Patoor para monocristales podemos establecer que durante una transformación inducida por esfuerzo se presenta un cambio en la energía elástica almacenada en la muestra y dicho cambio es aproximadamente:

$$\Delta W_e \approx \varepsilon_0 \sigma_A$$

Lo anterior significa que la variación de la energía elástica almacenada en el material debe cumplir aproximadamente con la relación:

$$\frac{\Delta W_e + \Delta H_1}{M_S^\sigma} \approx \varepsilon_0 \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_S^\sigma}$$

(4.17)

El resultado anterior es particularmente importante ya que involucra un valor que puede ser determinado experimentalmente ΔH_1 de un estudio totalmente independiente (calorimetría diferencial de barrido) a las pruebas mecánicas correspondientes. Por ello se puede emplear la relación (4.17) como una condición adicional que debe cumplir el modelo que se propone en la presente sección. Cabe mencionar que dicha condición pudo haberse empleado en la deducción del modelo, sin embargo, se dejó al final para corroborar las suposiciones hechas durante el desarrollo del mismo.

4.3 Modelación del comportamiento desplazamiento-temperatura de una viga sometida a flexión a carga constante.

En esta sección se presenta una extensión del análisis presentado en la sección anterior, aplicado a un elemento mecánico tipo viga en cantilever con una carga puntual aplicada en su extremo libre. Al final este análisis se generaliza a algunos casos de flexión conocidos ampliamente.

Para realizar el presente análisis se empleó la teoría de vigas aplicada a un problema de plasticidad [60] primero para un caso isotérmico y posteriormente se incluyeron los criterios desarrollados en la sección anterior para obtener el comportamiento de la viga al variar la temperatura. Se aplicó la teoría de vigas debido a que las dimensiones de los elementos estudiados cumplen con la hipótesis fundamental de dicha teoría es decir que una de las dimensiones es considerablemente mayor que las otras dos.

Primeramente, partiendo de la ecuación de equilibrio de momentos en una sección de la viga, la cual establece que:

$$\int \sigma_x dA = M(x)$$

donde: σ_x es el esfuerzo normal en la dirección x en una sección transversal de la viga.

$M(x)$ es el momento flexionante a lo largo de la dirección x

Luego suponemos que el esfuerzo normal sigue la ecuación (4.1) y empleando la relación de la flexión:

$$\varepsilon = \frac{y}{r}$$

donde: y es la coordenada en "y" de un punto en la viga

r es el radio de curvatura de la viga en el punto con coordenada y

Ahora relacionando las dos últimas expresiones se obtiene que la ecuación de balance de momentos puede escribirse como:

$$\frac{1}{r^n} = \frac{M(x)}{kI_n}$$

donde:

$$I_n = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^{n+1} dA$$

Luego considerando que:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \approx \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

donde : v = es el desplazamiento en la dirección y de cualquier punto sobre el eje neutro de la viga se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(\frac{M(x)}{kI_n} \right)^{1/n}$$

(4.18)

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta si se conoce el arreglo en flexión y el tipo de carga a la que esté sometido el elemento en cuestión ya que el momento flexionante depende de estos dos aspectos. Suponiendo que se trata de una viga en catiliver con una carga puntual en su extremo libre el momento flexionante está dado por:

$$M(x) = F(l - x)$$

donde : F es la magnitud de la fuerza puntual aplicada.

l = es el claro de la viga.

Usando este dato resolvemos la ecuación (4.18) y se obtiene que la siguiente solución:

$$v(x) = \left(\frac{\lambda}{\frac{1}{n}} \right) \left[\frac{(l-x)^{\frac{1}{n}+2}}{\frac{1}{n}+2} \right] + C_1 x + C_2$$

donde:

$$\lambda = \left(\frac{F}{kI_n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

aplicando las condiciones de frontera correspondientes a la viga en cantilever sujeta a una carga puntual en su extremo libre, es decir:

$$v(0) = 0$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

obtenemos la ecuación conocida como "curva elástica" correspondiente:

$$v(x) = \frac{\lambda}{\left(\frac{1}{n} + 1 \right)} \left[\frac{(l-x)^{\frac{1}{n}+2}}{\frac{1}{n}+2} + l^{\frac{1}{n}+1} x - \frac{l^{\frac{1}{n}+2}}{\frac{1}{n}+2} \right]$$

(4.19)

Ahora, evaluando la expresión anterior en $x=l$ para obtener el desplazamiento en el extremo libre de la viga obtenemos:

$$v(d) = \frac{n \lambda l^{\frac{1}{n} + 2}}{1 + 2n}$$

(4.20)

pero para el caso de una sección rectangular⁶

$$I_n = \frac{2b}{n+2} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+2}$$

$$n+2 = \frac{2p_1+1}{2p_2+1}$$

$$p_1, p_2 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

en consecuencia:

$$\lambda = \left[\frac{F(n+2)}{bk} \right] \frac{1}{n} \left(\frac{\frac{n+1}{2}}{\frac{n}{n+2}} \right) \left(\frac{h}{n} \right)$$

Y finalmente la ecuación 4.20 se convierte en:

$$v(d) = \left[\frac{F(n+2)}{bk} \right] \frac{1}{n} \left(\frac{\frac{n+1}{2}}{\frac{n}{n+2}} \right) \left(\frac{\frac{1+2n}{nl}}{2n+1} \right)$$

(4.21)

Como se puede ver, esta ecuación está en función del coeficiente k de la relación esfuerzo-deformación que se propuso en la sección anterior. Como se vio dicho coeficiente es función de la

⁶ Es importante hacer notar que la condición que se puso a n , de ser impar, en la sección anterior nos permite asegurar que el momento de inercia quede definido ya que de lo contrario caeríamos en una indeterminación en este punto del desarrollo

temperatura y de los parámetros macroscópicos de la muestra. Introduciendo el valor de k en la ecuaciones 4.19 y 4.21 podemos obtener la siguiente información sobre la viga:

- a) La curva elástica para cada temperatura.
- b) El desplazamiento (v) de un punto sobre el eje neutro para cada temperatura.
- c) El desplazamiento (v) de un punto sobre el eje neutro para una temperatura dada a distintas cargas.

Como se mencionó anteriormente, dado que la ecuación 4.18 está escrita en términos del momento flexionante ($M(x)$), es posible resolverla y obtener la misma información que se acaba de mencionar para otros arreglos de flexión y tipos de carga.

En el capítulo 6 se presenta la comparación de los algunos de las soluciones, calculadas con los modelos desarrollados en el presente capítulo, con algunos datos experimentales obtenidos en el presente trabajo y otros reportados en la literatura.

CAPITULO 5: METODO EXPERIMENTAL

5.1 Producción del material

Algunas de las muestras empleadas en el presente estudio fueron proporcionadas por TRIMETAUX⁷ mientras que otras fueron producidas en el laboratorio.

La producción del material se realizó en un dispositivo como el que se muestra en la Figura 5.1. Dicho dispositivo es un horno de inducción que cuenta con un sistema que permite hacer un vacío parcial de -60cm de Hg con lo cual es posible disminuir la oxidación de los componentes durante la fusión. Para realizar cada fundición se purgó 4 veces el sistema y se dejó fluir argón en el crisol mientras se fundían los componentes. De la misma forma, se refundieron 3 veces las muestras para asegurar la homogeneización de las mismas.

La producción de las cintas se realizó en el mismo dispositivo citado arriba sólo que esta vez se colocó un disco metálico que puede hacerse girar a distintas velocidades. Sobre el disco girando, se deja caer el metal en forma líquida (desde un crisol son una perforación en el fondo) y debido a la velocidad y al gradiente de temperaturas se forma las cintas metálicas con tamaños de grano del orden de micras.

5.2 Determinación de las Temperaturas de transformación.

Durante la transformación martensítica se presentan una serie de cambios en algunas de las propiedades físicas del material. Además debido a que es una transformación de primer orden, va acompañada de una liberación de calor y de su correspondiente absorción durante la transformación inversa. Esta última propiedad es aprovechada en el dispositivo denominado "calorímetro diferencial de barrido".

Dicho dispositivo consta de un elemento compensador de energía que mide el calor absorbido y/o cedido por la muestra y un sensor de temperatura (termopar). Ambos sensores envían una señal eléctrica a un transductor que a su vez envía la señal a una microcomputadora que convierte los datos recibidos en puntos que gráfica en un plano Voltaje-Temperatura. Una gráfica típica obtenida con el calorímetro se muestra en la Figura 5.2.

⁷ TRIMETAUX es una empresa francesa productora de aleaciones Cu-Al-Be con memoria de forma

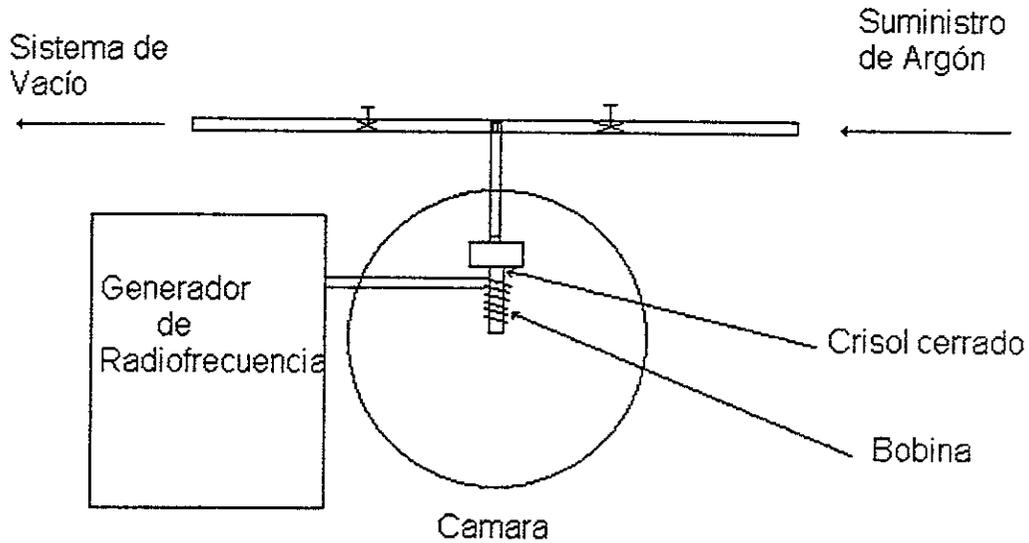


Figura 5.1. Diagrama esquemático del equipo empleado para producir las aleaciones empleadas en el estudio.

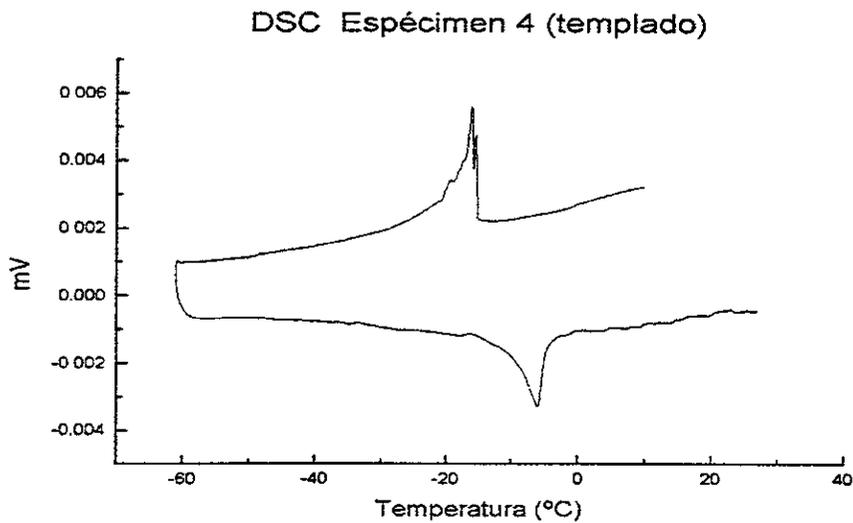


Figura 5.2 Gráfica de la calorimetría practicada a un espécimen de $M_s = -20^\circ\text{C}$.

En la gráfica de la Figura 5.2 se ven dos "picos", uno durante el enfriamiento y otro durante el calentamiento. El área bajo cada pico representa el calor de transformación (ΔH) característico del tipo de martensita que se forma en el material. Convencionalmente, las temperaturas características se determinan una vez terminada la prueba, de la manera siguiente: Se calcula el área bajo el pico de enfriamiento, se determina a que temperaturas el área barrida del pico

corresponde al 10 y 90 %, y éstas corresponden a M_S y M_f . De manera similar se miden las temperaturas de transformación inversa A_S y A_f . [61y35]. Con este método, se obtuvieron las temperaturas de transformación de las muestras trabajadas en el presente estudio.

5.3 Tratamientos térmicos.

Las aleaciones base cobre requieren ser templadas para congelar la fase beta que presenta la transformación martensítica y con ello los efectos memoria de forma y superelástico. El enfriamiento rápido puede realizarse de distintas maneras, sin embargo, un enfriamiento rápido no adecuado puede producir temperaturas de transformación que varían con el tiempo posterior al templado.

El betatizado de las muestras, que se emplearon en el presente estudio, fue realizado siguiendo el procedimiento propuesto por Flores ya que él comprobó que de esa forma se obtienen temperaturas de transformación estables[35]. Dicho procedimiento se muestra esquemáticamente en la Figura 5.3.

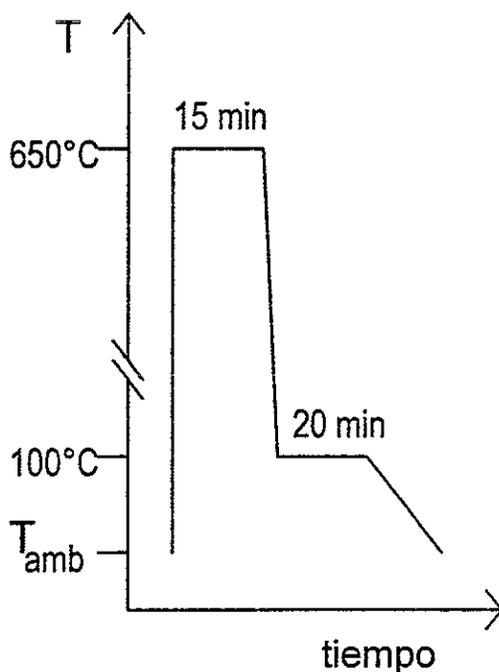


Figura 5.3 : Betatizado y enfriamiento rápido escalonado de las muestras.

El betatizado corresponde al tratamiento térmico a 750°C durante 15 minutos, como se muestra en la figura, temperatura a la cual es estable la fase β . Posteriormente, el templado escalonado corresponde al enfriamiento rápido hasta una temperatura superior a la ambiente.

En este caso el templado escalonado se realizó a 100°C, y se dejó a esa temperatura durante 20 minutos. Finalmente, se enfría la muestra al aire hasta la temperatura ambiente. Este tratamiento permite obtener una temperatura de transformación estable y una estructura ordenada.

Los tratamientos térmicos practicados a las muestras empleadas en este estudio fueron realizados en una mufla que calienta mediante resistencias eléctricas.

5.4 Pruebas mecánicas

Las pruebas en flexión se realizaron en un dispositivo como el que se muestra en la Figura 5.4. Dicho dispositivo fue diseñado en el IIM y cuenta con los siguientes sistemas:

- 1) Un sistema que permite enfriar y calentar la muestra estando ésta sumergida en alcohol etílico.
- 2) Un sensor de temperaturas y uno de desplazamientos el cual mide el desplazamiento de la muestra en el extremo de aplicación de la carga.
- 3) Un sistema de adquisición de datos (desplazamientos y temperaturas) consistente de un programa de computadora.

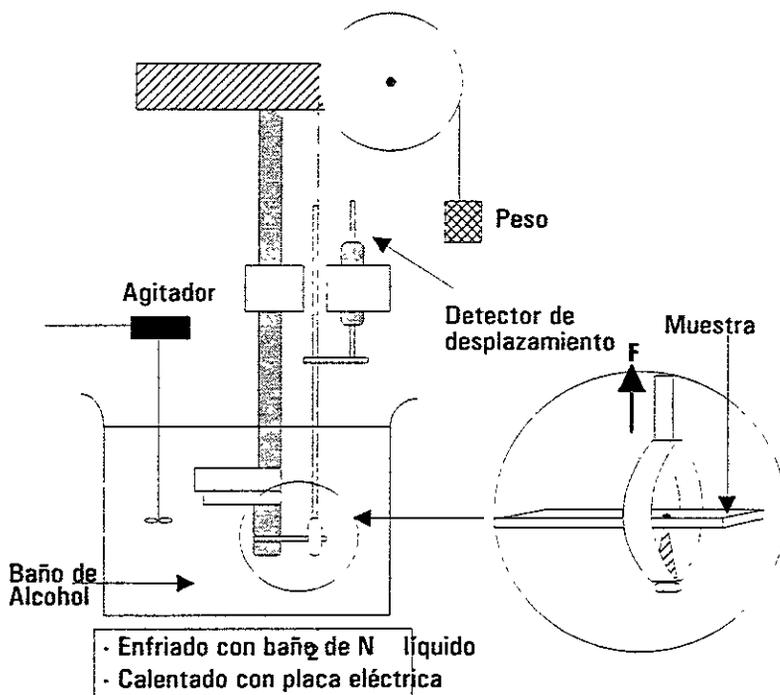


Figura 5.4.: Dispositivo para cargar las muestras en flexión.

Las pruebas de tracción se realizaron en una máquina universal Instron modelo 1125 con una cámara montada en la misma, que proporciona calentamiento y enfriamiento de las muestras por medio de resistencias eléctricas e inyección de nitrógeno respectivamente. La adquisición de los datos se realizó directamente del graficador mecánico de la máquina. Dichos datos fueron posteriormente procesados en un paquete de computadora.

En la Tabla 5.1 se muestra una relación de las muestras empleadas en el presente trabajo.

Muestra	Ms	Prueba	Dimensiones		
Cab5	-35	tensión			
Cab1	-40	Tensión			
Cab7	-50	Tensión			
T3100		Tensión			
T390		Tensión			
1c400	-50	Flexión en cantiliever	3.46 mm	0.56 mm	1.12 cm
10c400	-40	Flexión en cantiliever	3.90 mm	0.88 mm	1.56 cm
5c400	-40	Flexión en cantiliever	3.11 mm	0.7 mm	1.57 cm

Tabla 5.1 Relación de muestras empleadas en el estudio

CAPITULO 6 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6.1 Pruebas de tracción

La muestra cab5 sometida a pruebas de tracción a distintas temperaturas, presentó los efectos superelástico y la reorientación de variantes de martensita en los intervalos temperaturas correspondientes (ver Figura 6.1). Las curvas de carga de esta muestra fueron empleadas para probar los modelos desarrollados en el capítulo 3 para los casos de tracción a: temperatura constante y a carga constante.

Cabe mencionar que en la figura 6.1 se aprecia que a temperaturas menores que la M_s , medida por medio de calorimetría diferencial de barrido, se aprecia transformación inducida por esfuerzo. Lo anterior, como se mencionó anteriormente, ha sido observado por Shimizu et al [41] en muestras policristalinas de Cu-Al-Ni y lo atribuye a la interacción entre los límites de grano cuando éste es grande (del orden de milímetros). Como se mencionó en el capítulo 4, se tomará la M_s aparente (M_s') (en este caso se tomó muy cercana a -35°C) para construir las curvas superelásticas mientras que para las pruebas a esfuerzo constante, se tomará la M_s real.

6.1.1 Determinación de los parámetros para la simulación

En primera instancia para simular el comportamiento esfuerzo-deformación en el intervalo superelástico, se ajustó la curva correspondiente a $T=10^\circ\text{C}$ ($T > A_f$ ya que $A_f \cong 0^\circ\text{C}$) empleando una curva de la forma de la ecuación 4.1 dejando libre los parámetros k y n .

El resultado del ajuste practicado a la curva en $T=10^\circ\text{C}$ fueron los valores de $n=0.58340872$ y una $k=1.428 \times 10^9$. Como se puso la restricción de que n debe ser impar dicho valor se redondeó a $n=0.6$ y se realizó nuevamente el ajuste. Como resultado de este nuevo ajuste se obtuvo un valor de $k=1.55 \times 10^9$.

Por otro lado, se calculó el esfuerzo crítico correspondiente a la temperatura de prueba y se igualó al esfuerzo de referencia de donde se obtuvo que $\sigma_R=88.5$ Mpa. Finalmente, empleando los valores de se obtuvieron para k , n y σ_R y haciendo $\alpha=1$ se calculó el valor de E empleando la ecuación 4.3 de donde resultó que $E=10$ GPa.

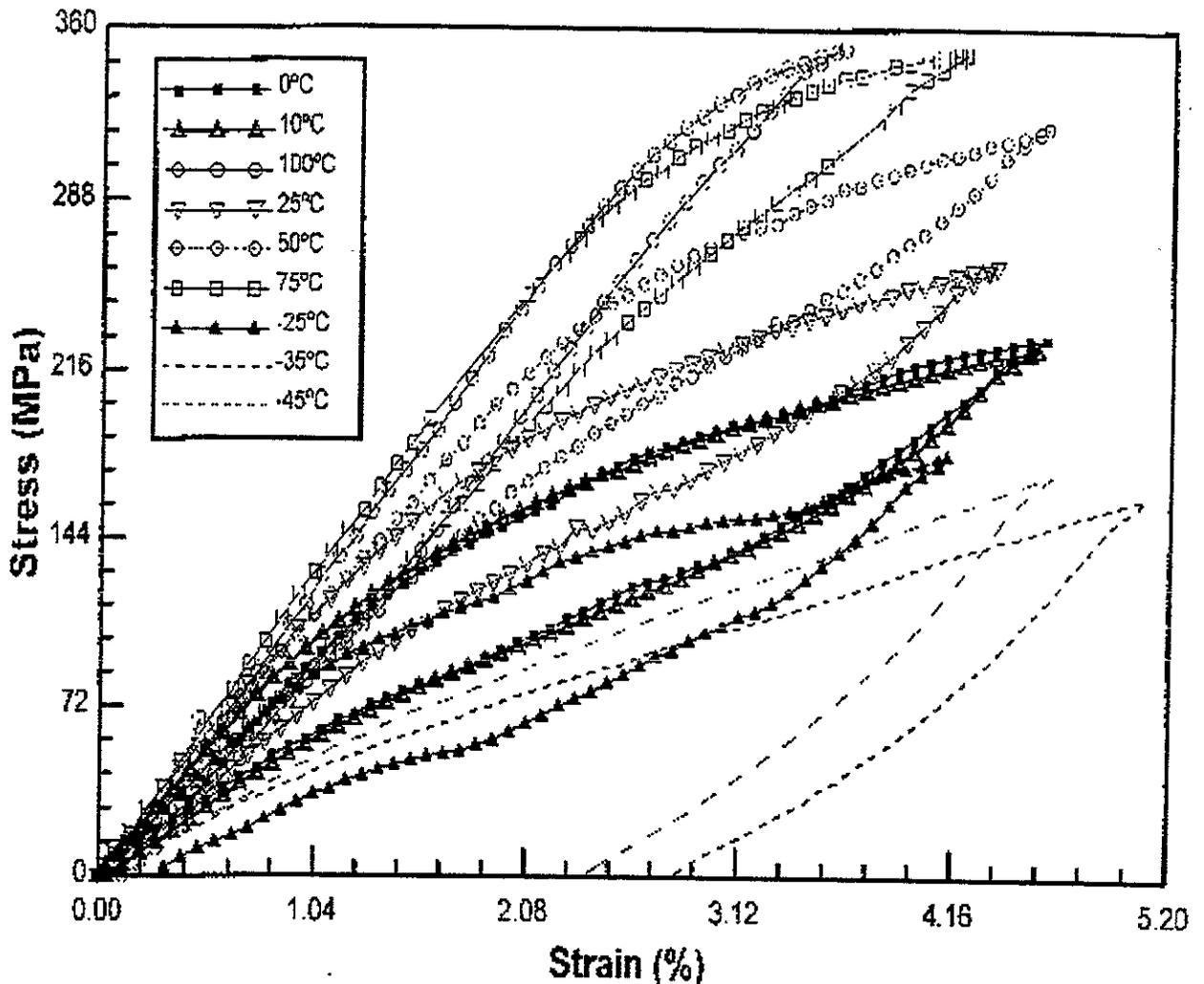


Figura 6.1. Curvas esfuerzo deformación, ensayadas a distintas temperaturas, correspondientes a la muestra cab5.

El valor que se obtuvo para E cumple también con las restricciones que se le impusieron en la ecuación 4.13 ya que es del orden de 10^{10} además de que, es ligeramente mayor que el módulo elástico del material en antes de la transformación. Ambas curvas, la experimental y la resultante del ajuste se muestran en la Figura 6.2.

Por otra parte la curva de la Figura 6.3 donde se grafica la derivada de la curva experimental empleada en esta parte del estudio se puede apreciar que se presenta una región de transición acotada por dos valores más o menos constante. Como se puede ver, los dos valores son 8 y 1.7 el cociente entre ambos es de aproximadamente $\frac{1}{4}$. Luego, haciendo $r=1/4$, y tomando $n=0.6$ usamos la relación 4.6 para calcular E . El resultado es $E=1.009 \times 10^{10}$ el cual coincide con el obtenido mediante el ajuste.

Como se mencionó en el capítulo 4 lo anterior muestra que es posible estimar los valores de n y E sin necesidad de emplear el ajuste de los datos experimentales y de alguna manera validó las restricciones impuestas a dichos parámetros en el capítulo 4. En la siguiente sección se calculan las curvas correspondientes a la muestra Cab5 a distintas temperaturas en el intervalo superelástico así mismo se emplean los criterios desarrollados en la sección 4.2.1 para calcular los parámetros de otras muestras.

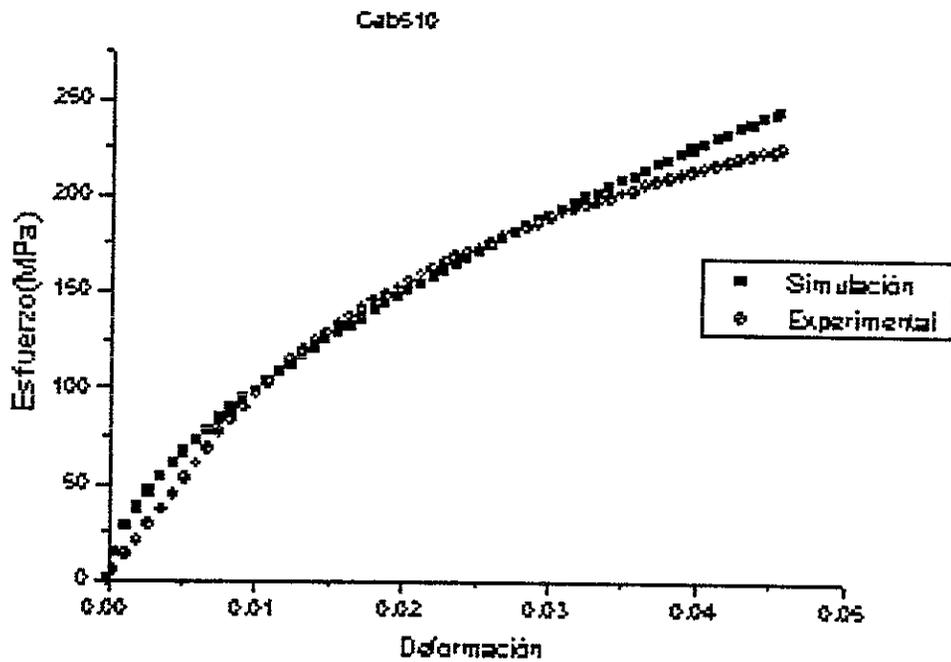


Figura 6.2 Comparativo entre los datos experimentales ajustados realizados a la curva de carga de muestra cab5 a $T=10^{\circ}\text{C}$.

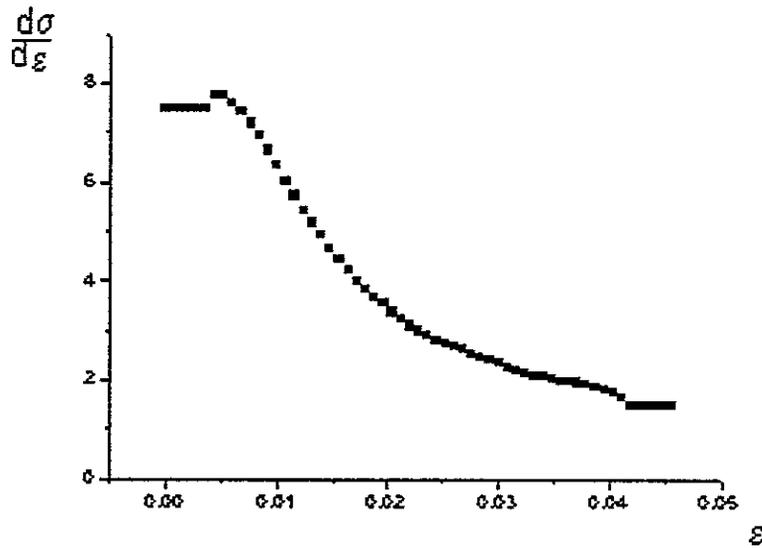


Figura 6.3 Evolución de la pendiente de la curva experimental correspondiente a la muestra Cab5 ensayada a $T=10^{\circ}\text{C}$

6.1.2 Simulación de las curvas de carga en el intervalo superelástico.

Empleando los valores para E y n que se obtuvieron en la sección anterior así como el esfuerzo crítico respectivo, se calcularon los valores de k correspondientes a una serie de curvas esfuerzo-deformación (experimentales) correspondientes a la muestra cab5, ensayadas a temperaturas mayores a M_s' . En la Figura 6.4 se pueden ver los valores calculados de k comparados con los obtenidos ajustando la curvas experimentales usando una función de tipo de la ecuación 4.1 y con $n=0.6$.

Como puede verse, los valores calculados y los obtenidos ajustando los datos experimentales coinciden considerablemente en la región de temperaturas mayor que 15°C por encima de la M_s aparente. Sin embargo para temperaturas cercanas a M_s' se aprecia una divergencia importante. Los valores de k calculados, llegan a cero en $T=-35$ mientras que los ajustados, tienden a un cierto valor superior a cero. Lo anterior está relacionado con el efecto M_s aparente que se observa en policristales con grano grande que se mencionó al inicio del presente capítulo. Por otro lado, como se mencionó en el capítulo 4, esto se relaciona también con el paso de la región superelástica a la de reorientación de variantes.

Por otro lado, usando la ecuación 4.1 con los valores de k calculados como se indicó, se obtuvieron las curvas esfuerzo-deformación correspondientes a la muestra Cab5 a distintas temperaturas (mayores a M_s'). Algunas de dichas curvas junto con los respectivos datos experimentales se muestran en la Figura 6.5.

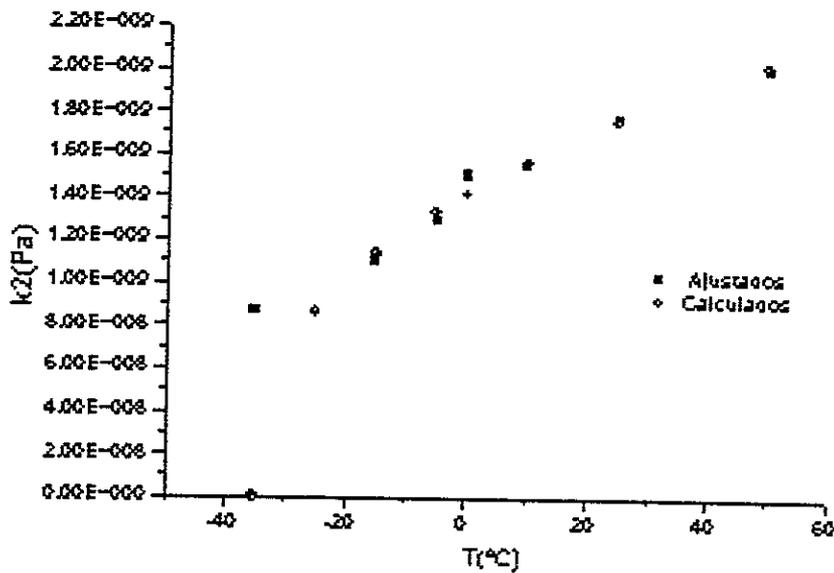
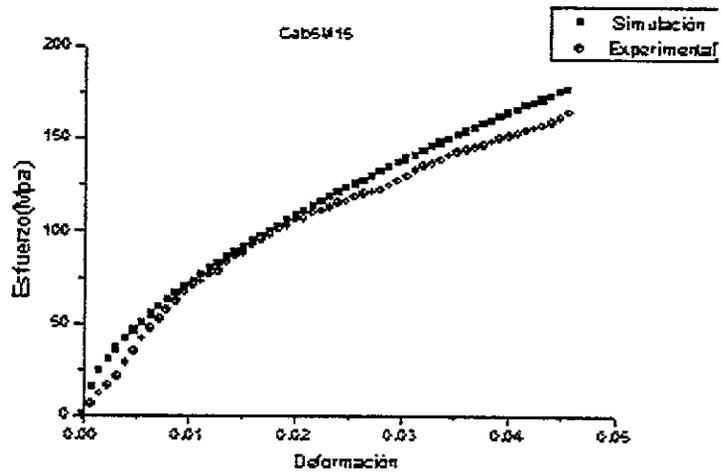


Figura 6.4 Valores de k calculados con la ecuación 4.5 y sus correspondientes obtenidos ajustando la curvas esfuerzo deformación.

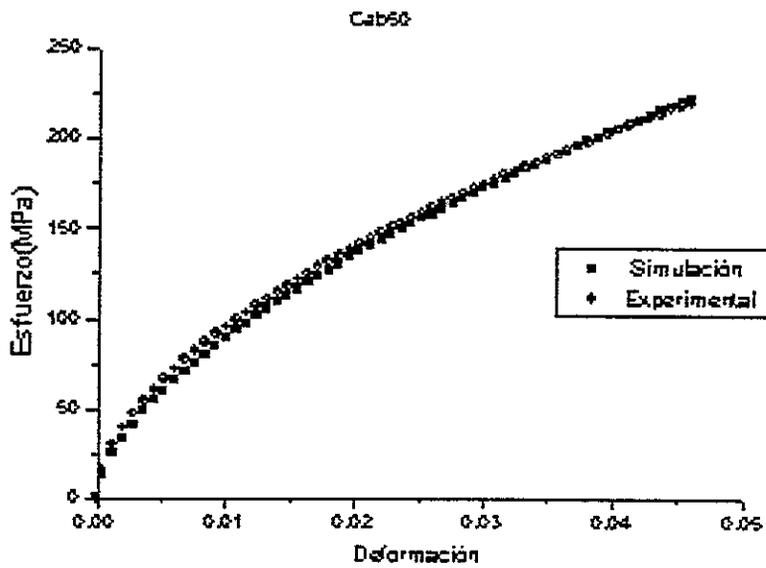
Por otro lado considerando los criterios establecidos en la sección 4.2.1 y discutidos anteriormente calculamos las curvas teóricas correspondientes a las muestras Cab1, Cab7 y Mod1. que se muestran en la Figura 6.6. Para evitar el uso de M_s real y aparente, el valor que correspondiente se calculó empleando el valor del esfuerzo crítico a la temperatura de prueba.

Como podemos ver las curvas correspondientes a la muestra cab7 y la cinta T3100 presentan gran dispersión lo cual se debe a que las temperaturas de prueba se encuentran a más de 60°C de sus temperaturas M_s correspondientes. Una situación similar ocurrió en las muestra cab5 a temperaturas a las cuales $T - M_s > 60^\circ\text{C}$. Sin embargo en las otras curvas, incluyendo la muestra Mod1 que, correspondientes a muestras: cab1, la cinta metálica T390 y la Mod1(que se obtuvo de una curva reportada en la literatura[55.]) coinciden moderadamente con los datos experimentales.

Como se mencionó anteriormente en las Figuras 6.5 y 6.6 las curvas experimentales, correspondientes a temperaturas relativamente altas, y las calculadas coinciden considerablemente en los valores correspondientes a deformaciones grandes mientras que a deformaciones pequeñas la dispersión crece. No obstante cuando la temperatura de prueba se acercan más a M_s las curvas teóricas coinciden mejor en la región de deformaciones pequeñas.

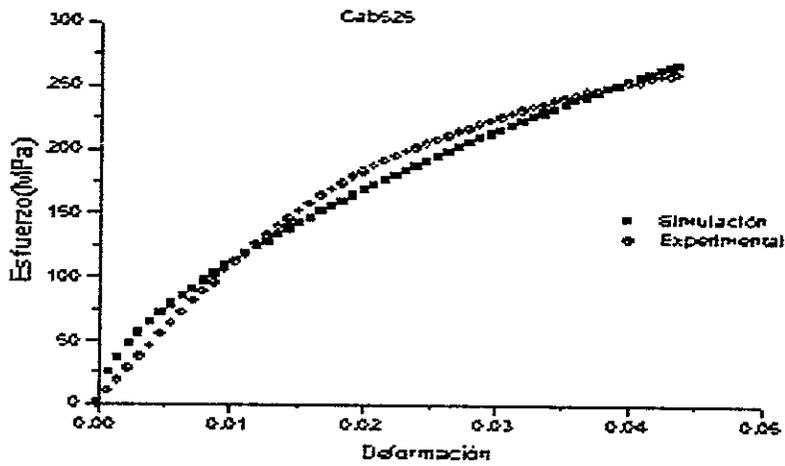


a)



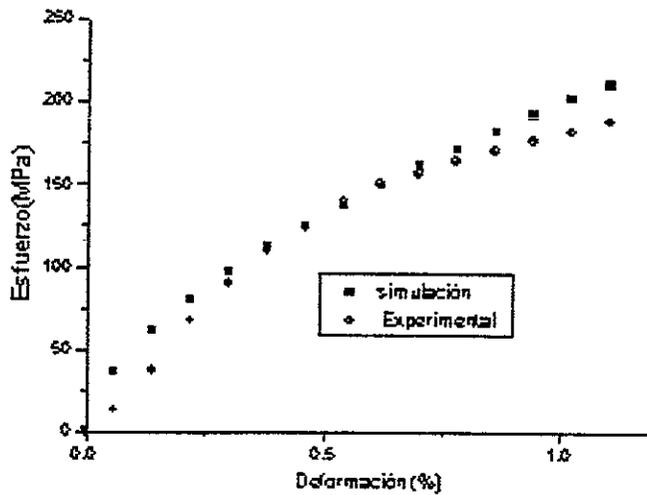
b)

Figura 6.5. Comparativo en las curvas esfuerzo deformación para la muestra Cab5 s temperaturas: (a) -25°C , (b) 0°C .



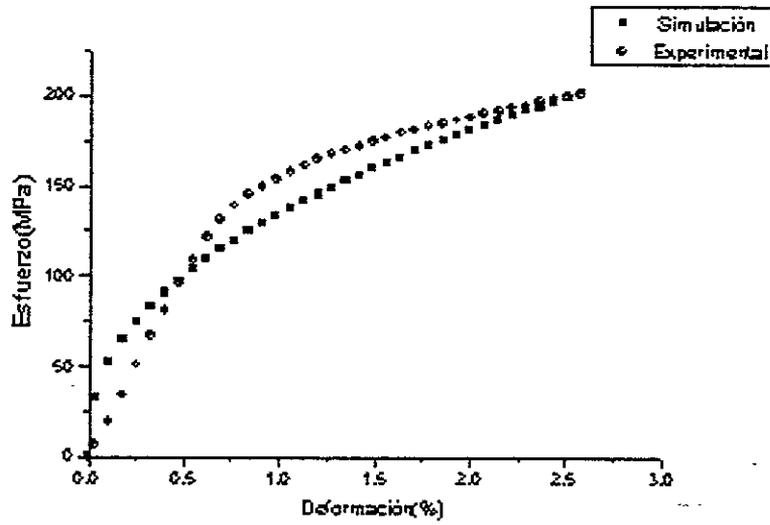
d)

Figura 6.5. Comparativo en las curvas esfuerzo deformación para la muestra Cab5 a la temperatura d) 25°C

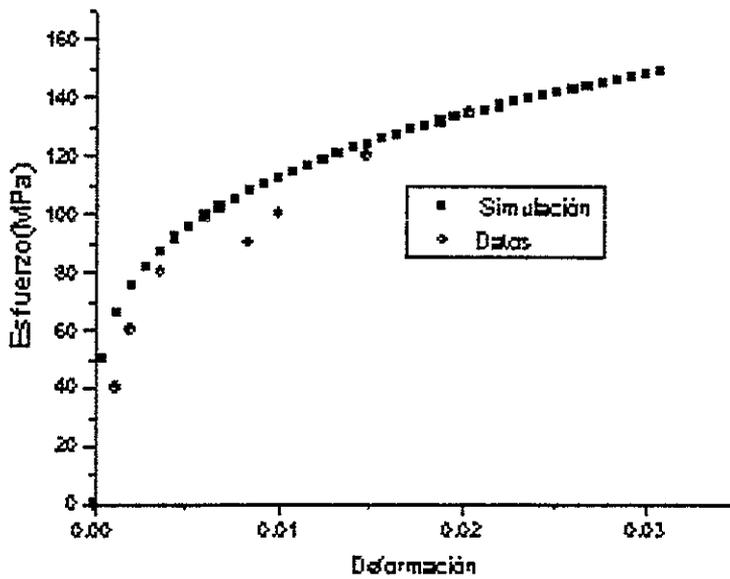


a)

Figura 6.6 Comparación entre las curvas experimentales y las curvas calculadas empleando los criterios de la sección 4.2.1 para la muestra a) Cab1.

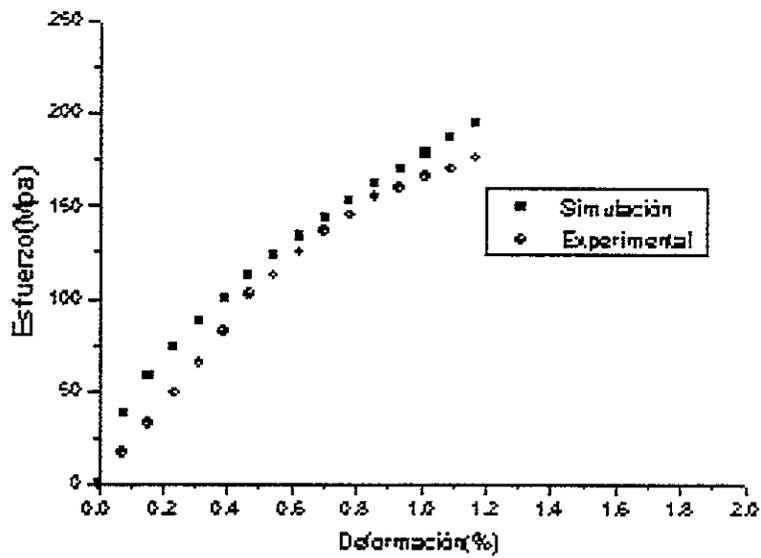


b)

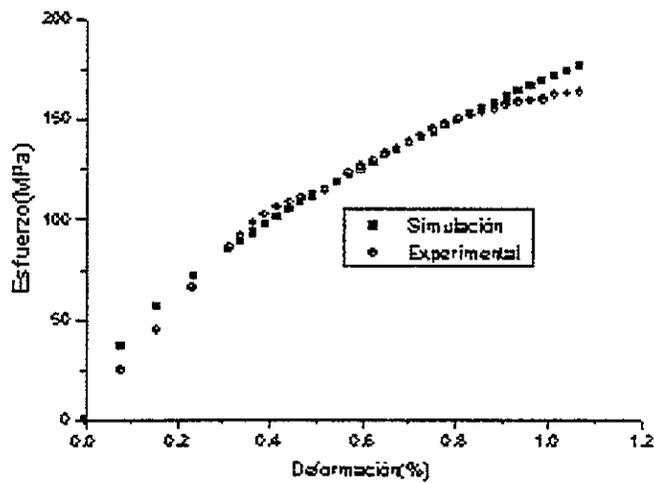


c)

Figura 6.6 Comparación entre las curvas experimentales y las curvas calculadas empleando los criterios de la sección 4.2.1 para las muestras b)Cab7, c)Mod1[55]



d)



e)

Figura 6.6 Comparación entre las curvas experimentales y las curvas calculadas empleando los criterios de la sección 4.2.1 para las muestras d) T3100 y e) T390.

Lo anterior se puede explicar si se considera la diferencia entre la curva 4.1 y una recta que define la primera región elástica de las curva superelástica. Por simplicidad, escribimos dicha relación en términos de las fracciones del esfuerzo crítico y se obtiene la siguiente expresión:

$$d = \sigma_R \left(\frac{1}{pE_A} - \frac{1}{p^n E} \right)$$

En esta relación se puede ver que la dispersión es menor si σ_R es menor. Por otro lado, se puede apreciar que en el intervalo de $1 < p < \infty$ d es positivo lo cual se aprecia en las curvas experimentales. Así mismo en la Figura 6.7 se puede observar que la máxima dispersión se presenta aproximadamente a $p=2$, es decir a un 0.5 del esfuerzo crítico. Finalmente, en dicha figura se puede ver que d se hace cero muy cerca de $p=1$ lo cual también fue previsto en la sección 4.2.1.

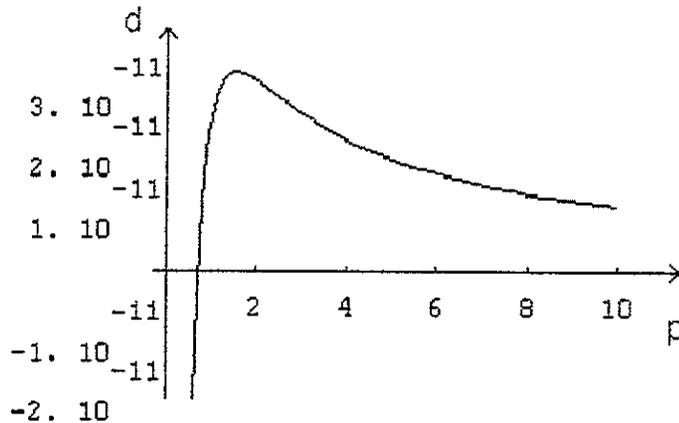


Figura 6.7 Gráfica de la diferencia entre la curva teórica y la observada en el intervalo de esfuerzos menores al esfuerzo crítico.

En realidad la ecuación 4.1 es normalmente empleando para simular el comportamiento plástico en la región de deformaciones grandes. No obstante, las desviaciones observadas tienen el efecto de restringir el intervalo en el que se pueden aplicar. Como se verá más adelante dicha restricción es conveniente para las aplicaciones prácticas.

Obviamente si en lugar de usar el modelo plástico (4.1) se empleara el modelo elastoplástico (4.2) las desviaciones podrían disminuir considerablemente. Sin embargo, si se empleara dicha

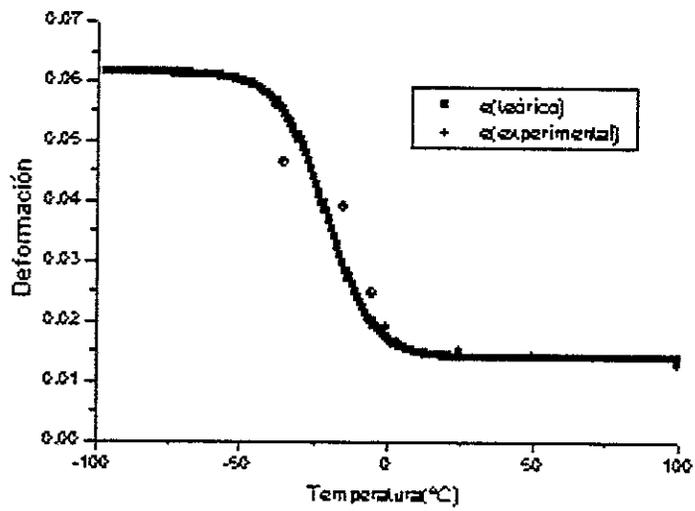
ecuación, como se mencionó en el capítulo 4, sería imposible obtener soluciones analíticas aproximadas para casos de carga simples pero que se presenten en aplicaciones.

6.1.3 Simulación del comportamiento a esfuerzo constante.

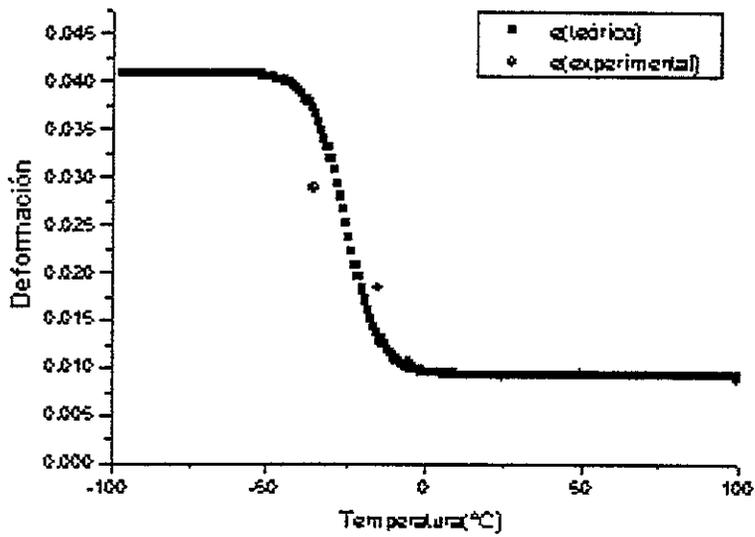
Con los valores medidos de las curvas experimentales y los calculados en la sección anterior, se determinó un valor de k_i para la muestra cab5 sujeta distintas cargas. Posteriormente se obtuvieron las curvas experimentales deformación-temperatura a partir de las curvas esfuerzo deformación a temperatura $T > M_s'$. Con la ecuación 4.16 se calculó la deformación máxima, correspondiente a cada esfuerzo, y finalmente con la ecuación 4.17 se obtuvo el valor de k_f . Las curvas experimentales y las teóricas, para distintas magnitudes de esfuerzo (constante), se muestran en la Figura 6.8.

Como puede apreciarse, las curvas experimentales presentan un descenso a partir de $T = -35^\circ\text{C}$ debido a que a temperaturas menores se presentan el efecto de la reorientación de variantes. Como se ve en la figura, conforme aumenta el esfuerzo las curvas, tanto la teórica como la experimental, se extiende en un intervalo de temperaturas (ΔT) mayores.

En la tabla 6.1 se presenta una relación de los valores de ε_0 calculados con la ecuación 4.16 para cada caso de esfuerzo así como los correspondientes valores de ΔT .

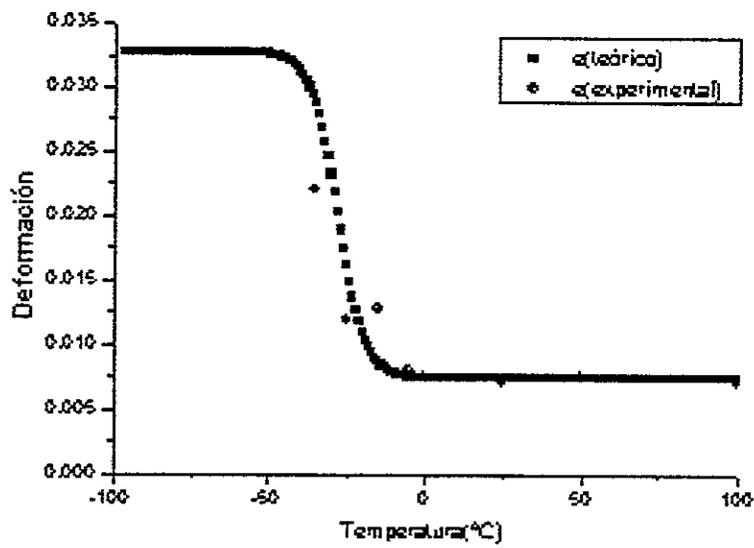


a)

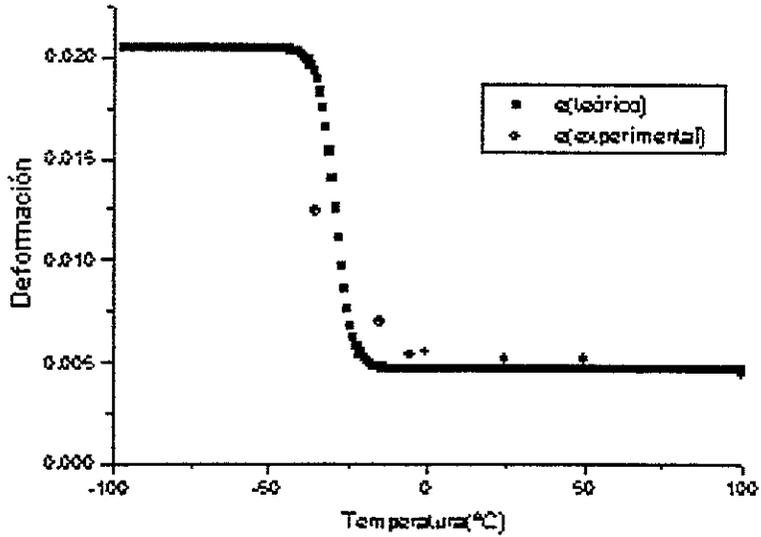


b)

Figura 6.8 Curvas correspondientes a la muestra cab5 a esfuerzos de a)150Mpa, b)100Mpa.



c)



d)

Figura 6.8 Curvas correspondientes a la muestra cab5 a esfuerzos de c)80MPa y d)50Mpa.

Esfuerzo Aplicado (Mpa)	$\varepsilon_0 = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}$ (%)	$\Delta T = M_s^\sigma - M_f^\sigma$ (°C)
150	3.62	76.14
100	2.42	50.76
80	1.93	40.6
50	1.2	25.3

Tabla6.1. Relación de los valores de ε_0 y ΔT calculados para las distintos esfuerzos aplicadas a la muestra Cab5.

Por otro lado en la Figura 6.9 se muestran algunas de las curvas deformación-temperatura publicadas por Lecterq et al[55] correspondientes a pruebas en tracción a esfuerzo constante. Como se puede ver los efectos discutidos en el párrafo anterior se presentan también en dichas curvas. Como se mencionó en el capítulo 4, este efecto es equivalente a tener un ΔT variable lo cual contradice la teoría general, para monocristales, sobre la transformación martensítica inducida por esfuerzo [51]. Como se expuso en el capítulo 3 dicha teoría establece que, en los diagramas σ_c-T , las líneas correspondientes a M_s^σ y M_f^σ son paralelas y con pendiente igual a la razón de esfuerzo ($\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s}$) correspondiente al tipo de transformación martensítica dominante en el material.

Así mismo, dicha teoría establece que la magnitud de la deformación transformación es constante para una orientación dada e independiente de la magnitud de la carga aplicada. Como se dijo antes, el origen de dicho efecto no ha sido reportado pero puede ser atribuido a cierta interacción entre los límites de grano debida a la alta anisotropía mecánica que se presenta durante la transformación martensítica inducida por esfuerzo así como al efecto de la temperatura sobre la transformación al llegar a M_s . Cabe destacar que la suposición, al respecto, que se hizo en el capítulo 4 conserva el parámetro $\frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s}$ del material y se propone que el esfuerzo al cual finaliza la

transformación es el doble del esfuerzo aplicado. Dichas suposiciones no son del todo arbitrarias ya que en realidad existe suficiente evidencia experimental que comprueba que en policristales la razón de esfuerzo es la misma que para monocristales[41][42] [45][46] sin embargo no existen las mismas evidencias para suponer que ε_0 coincide con el promedio de las deformaciones para distintas orientaciones.

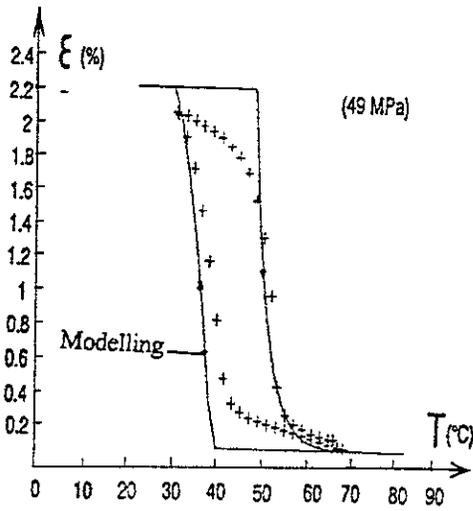
Partiendo de la discusión anterior se tiene que al parecer las suposiciones hechas al respecto son sensatas y por ello las curvas teóricas simulan con buena aproximación el comportamiento experimental. No obstante, el criterio empleado es más bien fenomenológico y no involucra la física del fenómeno para lo cual requiere una gran cantidad de trabajo experimental específico que pueda esclarecer el origen de dichos efectos.

Dado que las curvas propuestas siguen con buena aproximación el comportamiento observado en los experimentos el modelo empleado en esta parte del estudio se aplica en la siguiente sección para simular el comportamiento observado en una viga en cantiliever sometida a una carga constante.

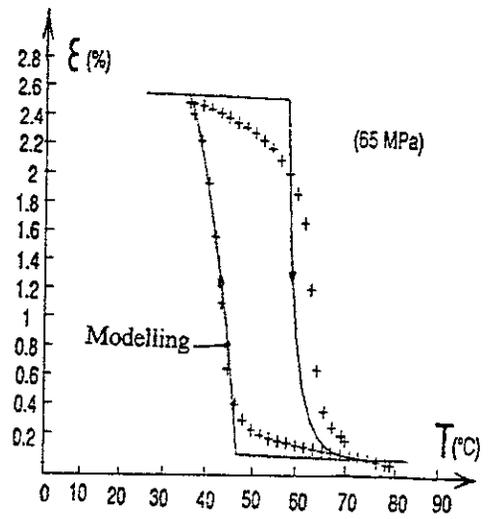
6.2 Pruebas en flexión

Empleando la ecuación 4.18 con los parámetros correspondientes, se calcularon las curvas teóricas correspondientes a las muestras 1c400, 10c400 y 5c400 .

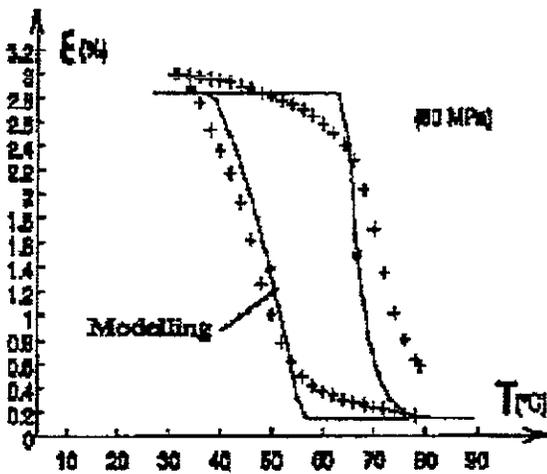
Para el caso de la muestra a1c400 dichos parámetros son muy similares a los de la muestra Cab5 mientras que la muestra 10c400 presentó un valor de $E_A=8 \times 10^9$. Estas muestras fueron ensayadas a un esfuerzo constante de 90Mpa. En la figura 6.10 se pueden apreciar las curvas teóricas y las experimentales.



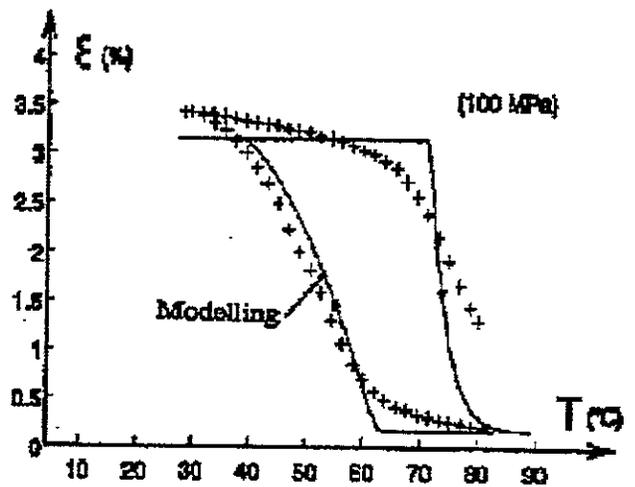
Thermal cycling
Cu Zn Al. $\sigma = 49$ MPa.



Thermal cycling
Cu Zn Al. $\sigma = 65$ MPa.

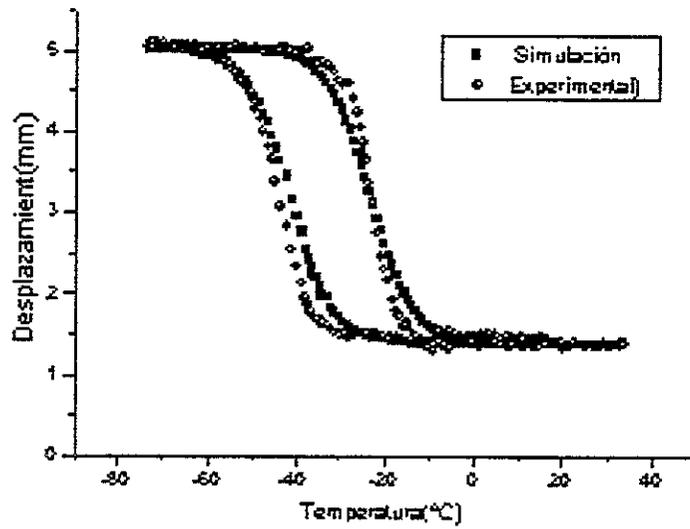


Cu Zn Al. $\sigma = 80$ MPa.

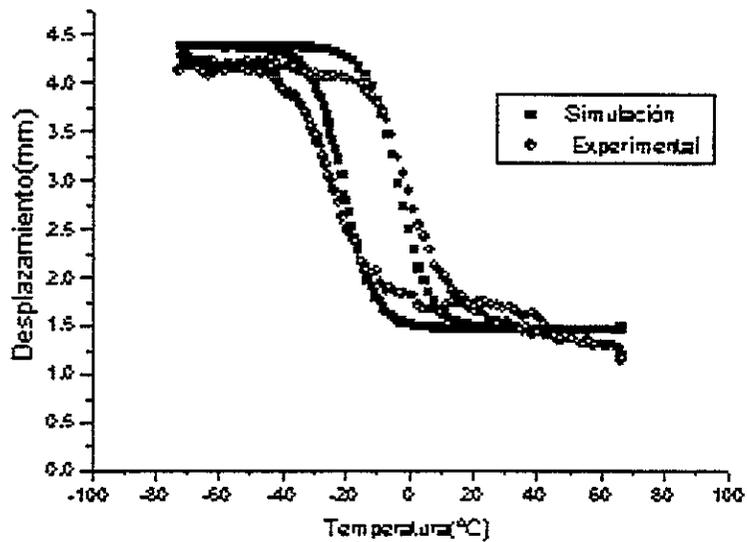


Cu Zn Al. $\sigma = 100$ MPa.

Figura 6.9 Curvas deformación temperatura a distintas cargas, correspondientes a pruebas en tensión reportadas por Lecterq et al[55].



a)



b)

Figura 6.10 curvas teóricas y experimentales correspondientes a pruebas en flexión a esfuerzo constante para las muestras: a)1c400, b)10c400

Como se puede ver, dichas curvas presentan un ciclo completo (calentamiento y enfriamiento) para lo cual se consideró el valor de la histéresis que se observa en las calorimetrías. Se hizo esto debido a que durante el proceso sólo se carga una vez la muestra y no se descarga durante toda la prueba. Debido a esto, se considera que los efectos de la rapidez de deformación sobre la histéresis no influyen en esta prueba y al parecer se corrobora con las observaciones experimentales.

Cabe mencionar que las muestras presentadas, en esta parte del estudio, fueron sometidas a ciclos térmicos y las curvas presentadas en la Figura 6.10 corresponden con el primer ciclo. En los ciclos posteriores se presenta un desplazamiento de las curvas hacia arriba. Según se reporta en la literatura [35] esto se debe a que durante los ciclos se introduce cierta deformación plástica. No obstante se ha reportando que después de los primeros ciclos, el comportamiento se mantiene prácticamente constante durante los ciclos posteriores[58].

CONCLUSIONES

Dados los resultados que se obtuvieron en el presente trabajo podemos concluir lo siguiente sobre los materiales con memoria de forma, policristalinos, que presentan sólo un tipo de transformación inducida por esfuerzo:

a) Es posible simular el comportamiento pseudoelástico (durante el proceso de carga) a temperatura constante empleando un modelo plástico en el intervalo de temperaturas $M_s' < T < M_s + 50^\circ\text{C}$.

b) Los caso de temperatura variable, se puede emplear el criterio anterior combinado con el de fracciones volumétricas y los parámetros de la transformación, para simular las curvas enfriamiento para esfuerzos no mayores a 120Mpa.

c) Empleando los criterios anteriores es posible simular el comportamiento desplazamiento-temperatura en un elemento tipo viga en cantilever con una carga constante en su extremo sujeto a carga constante(para un punto en el extremo libre).

d) El mismo criterio puede ser empleado para calcular el mismo comportamiento que la viga en cantilever para distintos arreglos de flexión y con algunas correcciones, para un caso de torsión simple ya que la forma de las curvas esfuerzo deformación son esencialmente iguales que en el caso de tracción.

e) Con los criterios presentados, considerando las restricciones expuestas, es posible diseñar algunos elementos mecánicos sencillos que no requieran gran precisión como las llamadas persianas inteligentes, actuadores termomecánicos o bien partes de dispositivos domésticos de los denominados inteligentes.

f) Los modelos expuestos, sobre todo el de carga constante con las modificaciones pertinentes, pueden ser empleados en aplicaciones que involucren deformación constante como es el caso de los alambres con memoria de forma que se emplean para ortodoncia.

REFERENCIAS

1. M. Olson, G.B. Cohen, P.C. Clapp. On the classification of displacive phase transformations. Proceedings of the international conference on martensitic transformation. ICOMAT 79, Cambridge-Massachusetts, U.S.A., 1979, pp. 1-11.
2. G. Guénin. Contribution a l'étude de la nucléation des transformations martensitiques thermoelastiques, cas de l'alliage ternaire Cu-Zn-Al. Thèse : Sci : Inst. Nat. Sc. Appl. Lyon, 1979. 155 p.
3. Bain, E. C., Trans. AIME, 70 25 (1924).
4. C.M. Wayman. Introduction to the crystallography of the martensitic transformation. New York, U.S.A.. Mc Millan co. 1964, 157p.
5. H. Czichos. Adolf Martens and the research of martensite. Proceedings of the european conference on martensitic transformation in science and technology. Bochum, Alemania, 1989 pp. 3-14.
6. C. M. Wayman, T.M. Duerig. An introduction to martensite and shape memory. *Engineering Aspects of Shape Memory Alloys*. London : Butterworth-Heinemann, 1990, pp. 3-20.
7. L.Federzoni. Etude d'un acier inoxydable à memoire de forme. . Thèse: Sci : Inst. Nat. Sc. Appl. Lyon, 1993, 265p.
8. J.H.Yang, C.M Wayman. Self-accommodation and shape memory mechanism of ε -martensite I. Experimental observations. *Materials Characterization*, Vol. 28, (1992), pp. 23-35.
9. J.H. Yang, C.M. Wayman. Self-accommodation and shape memory mechanism of ε -martensite. II. Theoretical considerations. *Materials characterisation*. Vol. 28, (1992), pp. 37-47.
10. M. Cohen. Nucleation of solid-state transformation. *Transactions of The Metallurgical Society of AIME*, abril 1958, pp. 171-183.
11. S. Kajiwar. Roles of dislocation and grain boundaries in martensitic nucleation. *Metall. Trans. A*. 1986, Vol. 17A, pp. 1693-1702.
12. K. E. Easterling, A. R. Tholen. The nucleation of martensite in steel. *Acta Metall.*, 1976, vol. 24, pp. 333-341.
13. M. Olson, G.B. Cohen. A mechanism of martensite nucleation *Metall. Trans. A*, Vol. 7A, (1976), Partie I: General concepts and FCC \rightarrow HCP transformation, pp.1897-1904. Partie II: FCC \rightarrow BCC and other martensitic transformations, pp.1905-1914, Partie III: Kinetics of martensitic nucleation, pp. 1915-1923.
14. G. Guenin, P.F. Gobin. A localised soft mode model for the nucleation of thermoelastic transformation: Application to the $\beta \rightarrow 9R$ transformation. *Metall. Trans. A*. Vol. 13A, pp. 1127-1134.
15. G. Guenin, P.C. Clapp. New developments of the localized soft mode model for martensitic nucleation. *Proceedings of the international conference on martensitic transformations*, ICOMAT, 1986. Nara, (Japan). pp. 171-179.

16. C. Jourdan, J. Gastaldi, G. Grange. Heterogeneous nucleation during the titanium $\alpha' \leftrightarrow \beta$ transformation studied by synchrotron X-ray topography. *Acta Metall.*, 1988, Vol. 36, N° 11, pp. 2979-2987.
- 17 L. Mañosa, A. Planes, D. Rouby, P. Fleishmann, J. L. Macqueron, M. Morin. On the origin of acoustic emission during thermoelastic martensitic transformations. Proceedings of the european conference on martensitic transformation in science and technology . 1989, Bochum, (Allemagne). pp. 313-318.
- 18 Patoor E., Berveiller M.. *Les alliages à mémoire de forme*, Technologies de pointe. Hermes, PARIS, 1990.
- 19 N. Mwanba and L. Delaey. Proceeding, International Conference on Martensitic Transformations, Leuven, Belgium C4-639 (1982)
- 20 Brook, P.L., U. S. Patent, No. 4166739, September (1979).
- 21 Sugimoto, K. Bulletin of Japan Inst of Metal. 24, 45 (1985).
- 22 Ikai, Y. Murakami, K. And Mishima, K., Proceedings, International Conference on Martensitic Transformations, Leuven, Belgium C4-785 (1982).
- 23 Lee, J.S., and Wayman, C. M., *Metallography*, 19, 401 (1986).
- 24 Elst, R., Van Humbeeck, J., Meeus, M., and Delaey, L., *Z. Metalle*, 77, 421 (1986).
- 25 Sugimoto, K., Kamei, K., Matsunoto, H., Komatsu, S., Akamatsu, K. And Sugimoto, T., Proceedings, International Conference on Martensitic Transformations, Leuven, Belgium C4-761 (1982).
- 26 Sure G. N. and Brown, L. C., *Met Trans. A.*, 15^o, 1613 (1984).
- 27 J. L. Murray. "Binary alloy phase diagrams". Taddeus B. Massalki(ed.) metals park, Ohio, U.S.A.: American society of metals, 1986, Tome 1, pp. 103-108.
- 28 R.P. Jewlett, D. J. Mack. Further investigation of copper aluminium alloys in the temperature range below the $\beta \leftrightarrow \alpha + \lambda_2$ eutectoid. *Journal of the Institute of Metals*, 1963-64, Vol. 92, pp. 58-61.
- 29 Adnyana, D. N., Memory Metals, Inc., Internal Report, (1985).
- 30 Ahlers, M., *Scripta Met.*, 8, 213 (1974).
- 31 Wu. Cu-Based Shape Memory Alloys. *Engineering Aspects of Shape Memory Alloys*. London: Butterworth-Heinemann, 69-87, (1990).
- 32 Tokonami M., Oztuka K., Shimizu K., Iwata Y., Shibuya I.. Neutron diffraction studies of crystal structures of stress-induced martensites in a Cu-Al-Ni alloy. Proceedings of the International Conference On Martensitic Transformations, ICOMAT-79. Cambridge Massachusetts (Ed.). pp. 639-644.

- 33 Belkahala (S). Elaboration et caracterization de nouveary alliages à mèmorie de forme base temperatura type Cu-Al--Be. *Thèse de doctorat*: Inst. Nat. Sc. Appl., Lyon FRA. p.132, (1990).
- 34 Belkahala (S), Guenin (G). Martensitic Transformation and Matallurgical Study of low Temperature Cu-Al- Be Ternary Alloy. *European Symposium on Martensitic Transformation an Shape Memory Properties*. Aussuis, FRA: Edited by G. Guenin, *J. de Phys. IV*. Colloque C-4, 145-150, (1991).
- 35 H. Flores. Satabilité Thermodinamique de la Phase Beta et de L' effet Memoire Doble sens d' un Alliage a Memoire de Forma du Type Cu-Al-Be. *Thèse de doctorat*: Inst. Nat. Sc. Appl., Lyon FRA, 1993.
- 36 H. Flores Zúñiga, D. Rios-Jara, F.C. Lovey and G. Guénin. Thermal stability of Beta Phase in a Cu-Al-Be Shape Memory Alloy. *Proceedings of the Euopean symposium on Martensitic Transformations*, BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), *J. de Physique Colloque C-2*, p. 171, (1994).
- 37 J. Valladares, F. Dovalí, H. Flores, D. Ríos. X-Ray Powder Difracción of Beta PhaseDecomposition in a Cu-Al-Be Shape Memory Alloy. *Proceeding of the International Conference of Advanced Materials: ICAM-95, Simp. 24. Cancún MEX.*, 1995.
- 38 K. Otzuka and C. M. Wayman. Superelasticity Effects and Stress- Induced MartensiticTransformations in Cu-Al-Ni Alloys. *Acta Metallurgica*, **24**, 207-226, (1976).
- 39 K. Otzuka, H. Sakamoto and K. Shimizu. Two Stage Superelasticity Associated with successive Martensite-to-Martensite Transformations. *Scrita Metallurgica*, **10**, 983-988, (1976).
- 40 K. Otzuka, H. Sakamoto and K. Shimizu. Successive Stress-Induced Martensitic Transformations and Associated Transformation Pseudoelasticity in Cu-Al-Ni. *Acta Metallurgica*, **27**, 585-601, (1979).
- 41 H. Sakamoto and K. Shimizu. Experimental Investigación of Cyclic Deformation and Fatigue Behavior of Polycrystalline Cu-Al-Ni Shape Memory Alloys above M_s . *Transactions of Japan Institute of Metals*, **8**, 592-600, (1986).
- 42 H. Sakamoto, Y. Kijima and K. Shimizu. Fatigue and Fracture Characteristics of Polycrystalline Cu-Al-Ni Shape Memory Alloys. *Transactions of Japan Istitute of Metals.*, **23**, 585-594, (1982).
- 43 D. Rios, S. Belkahala, A. Canales, H. Flores and G. Guenin. Elastic Constants Mesurrement of beta Cu-Al-Be Alloys. *Scripta Metallurgica et Materalia*, **25**, 1315-1355, (1991).
- 44 A. Houtcocur, A Eberhard, E Patoor and Berveiller. Termomechanical Behavior of Monocristalline Cu-Al-Be Shape Memory Alloys and Determination of the Metaestable Phase Memory Properties. *Proceedings of de III European Symposium on Mrtensitic Transformations* BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), *J. de Physique Colloque C2*, 459 (1994).
- 45 H. Flores, J. Cortés. Superelasticity in Cu-Al-Be Shape Memory Alloys. *Proceeding of the International Conference of Advanced Materials: ICAM-95, Simp. 24. CANCÚN MEX.*, 1995.
- 46 J. Cortés. Superelasticidad en aleaciones Cu-Al-Be con Memoria de Forma. Tesis de Licenciatura en Ingeniería Mecánica. ENEP Aragón, UNAM, 1997.

- 47 M. E. Gurtin. An Introduction to Continuum Mechanics. Academic Press, London. Pp165-227(1981).
- 48 J. Lubliner. Plasticity Theory. Macmillan Company, New York USA. pp41-102(1990).
- 49 E. Patoor, A. Eberhardt and M. Berveiller. Micromechanical Modeling of Superelasticity in Shape Memory Alloys. *Proceedings of the III European Symposium on Martensitic Transformations* BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), J de Physique Colloque C-2, pp. 501-506, (1994).
- 50 E. Patoor, A. Eberhardt and M. Berveiller. Micromechanical Modeling of Superelasticity in Shape Memory Alloys. J. de Physique IV.C-1, pp277-292, (1996).
- 51 E. Patoor, M. El Amrani, A. Eberhardt and M. Berveiller. Determination of the Origin for the Disymmetry Observed between Tensile and Compression Tests on Shape Memory Alloys. *Proceedings of the III European Symposium on Martensitic Transformations* BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), J de Physique Colloque C-2, p. 495, (1994).
- 52 Y. Gillet, E. Patoor and M. Berveiller. Structure Calculations Applied to Shape Memory Alloys. *Proceedings of III European Symposium on Martensitic Transformations*, BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), J de Physique Colloque C-2, p. 343, (1994).
- 53 Y. Gillet, M.-A. Meunier, V. Brailovski, F. Trochu, E. Patoor and M. Berveiller. Comparison of Thermomechanical Models for Shape Memory Alloy Spring. J de Physique IV Colloque C8, supplément au Journal de Physique III, volume 5, p. 1165(1995).
- 54 P. Delobelle and C. L'excellent. A Phenomenological three dimensional model for pseudoelastic behavior of Shape Memory Alloys. J. de Physique IV.C-1, pp293-300, (1996).
- 55 S. Lecterq, G. Bourbon and C. L'excellent. Plasticity Like Model of Martensite Phase in Shape Memory Alloys. *Proceedings of the III European Symposium on Martensitic Transformations* BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), J de Physique Colloque C-2, p. 513, (1994).
- 56 E. J. Graesser, F.A. Cozzarelli. A Proposed Three-Dimensional Constitutive Model for Shape Memory Alloys. *Journal of Intelligent. Materials Systems and Structures* 5, pp 78-89, (1994).
- 57 A. J. Durelli, E. A. Phillips, C. H. Tsao. Introduction to the Theoretical and Experimental Analysis of Stress and Strain. MacGraw- Hill USA. p491 (1958).
- 58 L. Chavarria. Puesta en marcha de un dispositivo para obtener muestras con el doble efecto memoria de forma. Tesis de licenciatura UNAM. p115(1997).
- 59 J. Cortés, H. Flores Zúñiga. Análisis teórico del Efecto superelástico en un elemento sujeto a flexión. *Memorias de III Congreso de la Sociedad Mexicana de Ingenieros Mecánicos*. MORELIA MÉXICO. pp415-420(1997).
- 60 A. C. Ugural, S.K. Fenster. Advanced Strength and Applied Elasticity. Edward Arnold England. p422(1981).