4
2 ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a:

GALIA BORJA GOMEZ

Directora de Tesis:

Dra. María Emilia Caballero Acosta

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

1998

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Generalizaciones del Teorema del Límite Central

realizado por Galia Borja Gómez

con número de cuenta 9177039-8, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dra. María Emilia Caballero Acosta	MECaballero
Propietario	Mat. Luis Alberto Briseño Aguirre	
Propietario	Act. Alberto Molina Escobar	Molina
Suplente	M. en C. Guadalupe Carrasco Licea	
Suplente	Dr. Javier Páez Cárdenas	

Consejo Departamental de Matemáticas
Mat. César Guevara Bravo

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL

A Cristina Gómez,
mi madre.

Agradecimientos

Quiero agradecer al subcomité de becas del Instituto de Matemáticas de la UNAM, por haberme apoyado con la Beca para Tesis de Licenciatura en Proyectos de Investigación (PROBETEL), beca que disfruté de mayo a octubre del presente año. Asimismo agradezco a Intercambio Académico de la UNAM y a Fundación UNAM, A. C. , por haberme aceptado en el Programa de Becas Reconocimiento a Estudiantes Distinguidos de la UNAM, para Estancias de Estudio en el Extranjero, que me permitió cursar un año de mis estudios de licenciatura en la Universidad de McGill, Montreal, Canadá.

Esta tesis no hubiera sido posible sin el apoyo de mi maestra, la Dra. María Emilia Caballero a quien agradezco profundamente la dirección de esta tesis, la sugerencia del tema, sus valiosas enseñanzas y el tiempo que me dedicó. También quiero hacer un reconocimiento muy especial al Dr. Javier Páez, quien además de orientarme en este trabajo, debo su invaluable ayuda y solidaridad incondicional durante mis estudios de toda la carrera. Asimismo agradezco al Mat. Luis Briseño, al Act. Alberto Molina y a la M. en C. Guadalupe Carrasco, el tiempo dedicado a la lectura de este trabajo y sus atinados comentarios.

A mis amigos y colegas, en especial Cuco, Eva, Paula, Laiza, y al grupo de Procesos Estocásticos I, les doy las gracias por su apoyo.

A Cristina Gómez y Roberto Borja, mis padres, y Alonso, mi hermano, sería imposible dejar de mencionarlos, pues siempre he contado con su cariño y apoyo incondicionales.

A Emery por su ayuda y amor.

Índice General

Introducción

En la Teoría de la Probabilidad, uno de los teoremas más célebres es el teorema del límite central (TLC), que ocupa un lugar muy importante debido a su antiguedad y al fructífero papel que ha jugado en el desarrollo tanto de la teoría como en aplicaciones.

El TLC establece que dada una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, y si la suma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ se normaliza adecuadamente para que tenga media cero y varianza uno, la función de distribución de S_n converge a la función de distribución de una normal con parámetros cero y uno.

Más específicamente nos dice que $\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$ donde μ es la media y σ^2 la varianza de X_1 sin importar la distribución de las X_i's.

La primera demostración del teorema del límite central se debe a De Moivre, quien la dio alrededor de 1733 para el caso especial de variables Bernoulli con $p = \frac{1}{2}$. Después Laplace lo hizo para valores más generales. La primera demostración rigurosa para casos más generales (no necesariamente Bernoullis) la dio Lyapunov alrededor de 1901. Aunque el teorema como lo conocemos actualmente se debe a J. W. Lindeberg (1922). Una lectura de estas demostraciones nos confirma que el método de la función característica desarrollado por P. Lévy utilizado para la demostración del teorema, expuesto en este trabajo, es impresionante por su elegancia y brevedad.

El propósito de esta tesis es exponer algunas generalizaciones del teorema del límite central, en el sentido de si tomamos una función de la suma S_n ¿qué condiciones hay que pedirle a la función φ para que $\varphi(S_n)$ pueda normalizarse de tal forma que su función de distribución converja a la de una normal con parámetros cero y uno? Sabemos que en el caso particular en que φ sea la función identidad, es el TLC, así que cualesquiera sean las condiciones sobre las funciones φ, la identidad debe cumplirlas.

Para llegar a esto se desarrolla el material necesario y su ubican estos resultados en los dos primeros capítulos de este trabajo. En el tercer capítulo se presentan las generalizaciones mencionadas.

Más precisamente en el capítulo uno estudiamos formas de convergencias de sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. En particular se dan demostraciones de las leyes de grandes números que nos dicen bajo qué hipótesis las siguientes convergencias de los promedios ocurren:

$$\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu, \qquad \frac{1}{n}S_n \xrightarrow{c.s.} \mu.$$

Ahora bien, si queremos decir algo más sobre la convergencia de $\left(\frac{S_n - n\mu}{n}\right)$ necesitamos multiplicarlo por $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$ y vemos que este producto converge débilmente a una $N(0,1)$. Este resultado es el teorema del límite central, que nos permite dar aproximaciones tan precisas como se quiera de $\mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n - n\mu}{n}\right) \leq x\right)$, de hecho

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n - n\mu}{n}\right) \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt.$$

Vale la pena resaltar, que en este capítulo se incluye un teorema que relaciona convergencia en distribución y convergencia en función característica cuya demostración es relevante por su originalidad, ya que no se incluye en la bibliografía clásica del tema. Además, su estudio nos llevó a elaborar un apéndice acerca de la convolución de funciones.

En el capítulo dos presentamos algunos resultados de la Teoría de Variación Regular, necesarios para las demostraciones de los teoremas que conforman el capítulo tres. En la primera sección se estudian las funciones de variación lenta, es decir aquéllas funciones positivas y medibles, definidas en algún intervalo $[M, \infty)$ que cumplen con que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = 1 \quad \text{para toda } \lambda > 0.$$

Se demuestra que el límite converge uniformemente para λ en un conjunto compacto K del $(0, \infty)$, se da una representación de tales funciones y se prueba que satisfacen ciertas propiedades. Además presentamos un teorema llamado de caracterización que nos dice como son las funciones f y g que satisfacen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = g(\lambda) \in (0, \infty) \quad \text{para toda } \lambda > 0$$

siempre que f sea positiva y medible. En la segunda sección del capítulo dos, estudiamos las propiedades de las funciones de variación regular, es decir, las funciones positivas y medibles que cumplen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^{\rho} \quad \text{para toda } \lambda > 0, \text{ con } \rho \in \mathbb{R}.$$

Los resultados del capítulo dos fueron tomados de Bingham, Goldie y Teugels, 1989, en donde la mayoría está simplemente indicada omitíendose la demostración. Dichas demostraciones las desarrollamos aqui.

En el capítulo tres exponemos tres teoremas que generalizan al teorema del límite central en el sentido que buscamos. Estos teoremas fueron publicados en un artículo por el Dr. José A. Villaseñor Alba, en 1997. Aquí hacemos un estudio de éste con todo detalle. Cabe aclarar que resultados similares a los presentados en este capítulo, se pueden obtener con el *Método Delta* en ciertos casos particulares, por ejemplo cuando la función $\varphi(x)$ es diferenciable y satisface una de las siguientes condiciones:

i) $\varphi(x/y) = \varphi(x)/\varphi(y)$ cuando $\varphi(1) = 1$ y $\varphi'(1) \neq 0$

ii) $\varphi(x/y) = \varphi(x) - \varphi(y)$ cuando $\varphi(1) = 0$ y $\varphi'(1) \neq 0$.

El *Método Delta* está basado en el siguiente teorema.

Teorema. *Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $\sqrt{n}\,(T_n-\theta)/\delta \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$. Si $\varphi(x)$ es una función real, continua y diferenciable en θ con $\varphi'(\theta)\neq 0$, entonces*

$$\frac{\sqrt{n}\,(\varphi(T_n)-\varphi(\theta))}{\delta\varphi'(\theta)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Si una función $\varphi(x)$ satisface i), entonces $\varphi(\mu)=\varphi\left(\frac{n\mu}{n}\right)=\frac{\varphi(n\mu)}{\varphi(n)}$ de donde

$$\varphi(n)\,\varphi(\mu)=\varphi(n\mu). \tag{1}$$

Como $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}$, si derivamos con respecto de x, se tiene $\frac{1}{y}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(y)}$, es decir

$$\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\varphi'(x)}{\varphi(y)}. \tag{2}$$

Entonces para una función $\varphi(x)$ que satisface i), por el TLC y el Método Delta, se tiene

$$\frac{\sqrt{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{n}S_n\right)-\varphi(\mu)\right)}{\sigma\varphi'(\mu)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \qquad \text{cuando } n\to\infty$$

con $\theta=\mu$ y $\delta=\sigma$. Usando las propiedades de la función $\varphi(x)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{n}S_n\right)-\varphi(\mu)\right)}{\sigma\varphi'(\mu)} &= \frac{\sqrt{n}\,(\varphi(S_n)-\varphi(\mu)\,\varphi(n))}{\sigma\varphi'(\mu)\,\varphi(n)} \\
&= \frac{\sqrt{n}\mu\,(\varphi(S_n)-\varphi(n\mu))}{\sigma\varphi'(1)\,\varphi(\mu)\,\varphi(n)} && \text{(por 1)} \\
&= \frac{\sqrt{n}\mu\,(\varphi(S_n)-\varphi(n\mu))}{\sigma\varphi'(1)\,\varphi(n\mu)} && \text{(por 2)}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\sqrt{n}\mu\,(\varphi(S_n)-\varphi(n\mu))}{\sigma\varphi'(1)\,\varphi(n\mu)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \qquad \text{cuando } n\to\infty$$

que es un límite de nuestro interés con $b_n = \varphi(n\mu)$ y $a_n = \frac{\sigma\varphi'(1)\varphi(n\mu)}{\sqrt{n\mu}}$.

Algunos ejemplos de los resultados de los teoremas enunciados en el capítulo tres se pueden obtener usando el Método Delta, en particular nuestro ejemplo 1, y el 2 para el caso $\alpha = 1$, ya que entonces $\log x$ cumple con la condición ii). Sin embargo, hay veces en que no es posible aplicar este método a la sucesión S_n, como en el ejemplo 3, y en el 2 para el caso $\alpha \neq 1$. En este sentido los resultados aquí expuestos son más generales.

Capítulo 1

Leyes de grandes números

Dada $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ sus sumas parciales, nos interesa estudiar el comportamiento asintótico de S_n cuando $n \to \infty$, el cual depende crucialmente de la sucesión original de las X_i's. El problema general puede describirse así: ¿bajo qué condiciones la siguiente convergencia ocurre?

$$\frac{S_n}{b_n} - a_n \to S \text{ cuando } n \to \infty$$

donde $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales, S una variable aleatoria, y la convergencia se da en algún modo específico.

La teoría general de tales relaciones está bien establecida y es extensa. Aquí restringiremos la atención a la parte de la teoría cuando las X_i's son independientes e idénticamente distribuidas. Decimos que la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la ley débil de los grandes números si existe una constante μ tal que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}S_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilidad a μ

$$\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Al resultado más fuerte, a saber la convergencia casi segura de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}S_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ a μ

$$\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{c.s.} \mu$$

le llamamos la ley fuerte de los grandes números.

Buscamos condiciones necesarias y suficientes en la distribución de las X_i's para que tales leyes sucedan. Como el nombre lo indica, la ley fuerte implica la débil dado que convergencia casi segura implica convergencia en probabilidad.

1.1 Ley fuerte

En el teorema uno daremos una condición suficiente para la ley fuerte de los grandes números. En general, consideraremos a las variables aleatorias X_i's definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, donde $\Omega \neq \varnothing$, $\mathcal{F}$ es una $\sigma-$álgebra y $\mathbf{P}$ una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.

Primero demostraremos un par de lemas que posteriormente se usarán en las pruebas de los teoremas de esta sección.

Lema 1 *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Para cada $n \in \mathbf{N}$ definimos las siguientes funciones:*

$$X_n^+(\omega) = \max\{X_n(\omega), 0\} \qquad X_n^-(\omega) = -\min\{X_n(\omega), 0\}$$

entonces:

i) *$X_n(\omega) = X_n^+(\omega) - X_n^-(\omega)$, para toda $n \in \mathbf{N}$ y para toda $\omega \in \Omega$.*

ii) *$\{X_n^+\}_{n\in\mathbf{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Lo mismo pasa para $\{X_n^-\}_{n\in\mathbf{N}}$.*

Demostración.

i) Para toda $\omega \in \Omega$ se tiene: $X_n^+(\omega) - X_n^-(\omega) = \max\{X_n(\omega), 0\} + \min\{X_n(\omega), 0\}$, así, si $X_n(\omega) < 0$, entonces $X_n^+(\omega) - X_n^-(\omega) = 0 + X_n(\omega) = X_n(\omega)$. Y, si $X_n(\omega) > 0$,

$X_n^+(\omega) - X_n^-(\omega) = X_n(\omega) + 0 = X_n(\omega)$. Para el caso $X_n(\omega) = 0$, el resultado está claro. Por lo tanto $X_n(\omega) = X_n^+(\omega) - X_n^-(\omega)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

ii) El máximo y el mínimo de dos variables aleatorias son funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ continuas y por lo tanto medibles. Además $Z_n(\omega) = (X_n(\omega), 0)$ es un vector aleatorio, entonces $(f \circ Z)(\omega) = \max\{X_n(\omega), 0\}$ y $(g \circ Z)(\omega) = \min\{X_n(\omega), 0\}$ son medibles como composición de funciones medibles, de ahí que en efecto sean variables aleatorias.

Para demostrar la independencia consideramos $\mathbb{P}\left(X_i^+ \in A, X_j^+ \in B\right)$ para toda $i \neq j$, donde $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ =(la $\sigma-$álgebra generada por los borelianos en $\mathbb{R}$). Hay cuatro casos posibles, a saber si $A, B \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, si $A, B \in \mathbb{R} - \{0\}$, si $0 \in A$ y $0 \notin B$ y si $0 \in A$ y $0 \in B$. Sólamente probaremos el tercer caso ya que se hace de manera similar para los demás.

Sea $0 \in A$ y $0 \notin B$, usando la independencia de las variables aleatorias X_i y X_j

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_i^+ \in A, X_j^+ \in B\right) &= \mathbb{P}\left(X_i \in \left(\left(A \cap \mathbb{R}^+\right) \cup (-\infty, 0]\right), X_j \in B \cap \mathbb{R}^+\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_i \in \left(A \cap \mathbb{R}^+ \cup (-\infty, 0]\right)\right) \mathbb{P}\left(X_j \in B \cap \mathbb{R}^+\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_i^+ \in A\right) \mathbb{P}\left(X_j^+ \in B\right)
\end{aligned}
$$

es decir, las X_i^+ son independientes. Similarmente se prueba para las X_i^-.

Para ver que son idénticamente distribuidas, sean $i \in \mathbb{N}$ y $F_i^+(x)$ la correspondiente función de distribución de X_i^+, para $x > 0$,

$$
\begin{aligned}
F_i^+(x) &= \mathbb{P}\left(X_i^+ \leq x\right) = \mathbb{P}\left(X_i \leq x \text{ y } X_i > 0\right) + \mathbb{P}\left(X_i \leq x \text{ y } X_i \leq 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(0 < X_i \leq x\right) + \mathbb{P}\left(X_i \leq 0\right) \\
&= \left(F_i(x) - F_i(0)\right) + F_i(0) \\
&= F_i(x)
\end{aligned}
$$

donde $F_i(x)$ es la distribución de X_i. En el caso $x = 0$,

$$F_i^+(0) = \mathbb{P}\left(X_i^+ \leq x\right) = \mathbb{P}\left(X_i^+ \leq 0\right) = \mathbb{P}(X_i \leq 0) = F_i(0)$$

y si $x < 0$, $\mathbb{P}(X^+ \leq x) = 0$. Entonces tenemos,

$$F_i^+(x) = \begin{cases} F_i(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como las X_i son idénticamente distribuidas, se tiene que $F_i^+(x) = F_j^+(x)$, para toda $x \in \mathbb{R}$ y para toda $i \neq j$.■

El siguiente resultado tiene que ver con modos de convergencia de variables aleatorias:

Lema 2 *Sea* $A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$ *y* $B_m(\varepsilon) = \bigcup_{n\geq m} A_n(\varepsilon)$. *Entonces:*

i) $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ *si y sólo si* $\mathbb{P}(B_m) \to 0$ *cuando* $m \to \infty$, *para toda* $\varepsilon > 0$.

ii) $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ *si* $\sum_n \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) < \infty$ *para toda* $\varepsilon > 0$.

Demostración.

i) Sea $A(\varepsilon) = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n(\varepsilon) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m\geq n}^{\infty} A_m(\varepsilon)$ $=\{\omega \in \Omega$:para toda $n \in \mathbb{N}$, existe una $m \geq n$ tal que $\omega \in A_m(\varepsilon)\}$.

Nótese que $X_n(\omega) \to X(\omega)$ si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\omega \notin A_n(\varepsilon)$ siempre que $n \geq n_0$, es decir,

$$X_n(\omega) \to X(\omega) \text{ si y sólo si para toda } \varepsilon > 0, \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m\geq n}^{\infty} A_m^c(\varepsilon).$$

Sea $C = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)$ cuando $n \to \infty\}$, es claro que $C = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m\geq n}^{\infty} A_m^c\left(\frac{1}{k}\right)$ por lo que el conjunto $C \in \mathcal{F}$. Además

$$\mathbb{P}(C) = 1 \text{ si y sólo si } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m\geq n}^{\infty} A_m^c(\varepsilon)\right) = 1 \text{ para toda } \varepsilon > 0.$$

Lo que significa que $\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^c(\varepsilon)\right) = 1$ que es equivalente a $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)\right) = 0$, y esto vale para toda $\varepsilon > 0$.

Como $\{B_m(\varepsilon) : m \geq 1\}$ es una sucesión decreciente de eventos con límite $A(\varepsilon)$, tenemos $\mathbb{P}(A(\varepsilon)) = 0$ si y sólo si $\mathbb{P}(B_m(\varepsilon)) \to 0$ cuando $m \to \infty$.

ii) De la definición de $B_m(\varepsilon)$

$$\mathbb{P}(B_m(\varepsilon)) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon))$$

entonces $\mathbb{P}(B_m(\varepsilon)) \to 0$ cuando $m \to \infty$ ya que como $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) < \infty$ entonces $\sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) \to 0$ si $m \to \infty$, y por la primera parte del lema, esto implica que $X_n \overset{c.s.}{\to} X$. ■

Teorema 1 *Sean $X_1, ..., X_n, ...$ variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas tales que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Si $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ entonces*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \mu \text{ casi seguramente y en } L_2.$$

Demostración.

Primero demostraremos la convergencia en L_2.

Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ y

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}S_n - \mu\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}(S_n - n\mu)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[(S_n - n\mu)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\mathrm{var} S_n \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var} X_i \\
&= \frac{1}{n}\mathrm{var} X_1.
\end{aligned}$$

La independencia de $X_1, ..., X_n, ...$ se usó en la cuarta desigualdad ya que bajo esta hipótesis la varianza de la suma es la suma de las varianzas, y de hecho el que sean idénticamente distribuidas se usa para ver que $\sum_{i=1}^{n} \text{var} X_i = n \text{var} X_1$.

Es claro que $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{var} X_1}{n} = 0$ ya que por hipótesis $\text{var} X_1 < \infty$. Esto demuestra la convergencia en L_2.

Dado que $\frac{1}{n} S_n$ converge en L_2 a μ, sabemos que existe una subsucesión de $\left\{\frac{1}{n} S_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge casi seguramente a μ. Probaremos que tal subsucesión puede tomarse como $\left\{\frac{1}{n^2} S_{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, y después extenderemos el resultado a toda la sucesión.

Sea $Z_n = \frac{1}{n} S_n$ y $Z_{n^2} = \frac{1}{n^2} S_{n^2}$, usando la desigualdad de Chebychev tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|Z_{n^2} - \mu| > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n^2}\left|S_{n^2} - n^2\mu\right| > \varepsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|S_{n^2} - n^2\mu\right| > n^2\varepsilon\right) \\
&\leq \frac{1}{(n^2\varepsilon)^2}\mathbb{E}\left(\left|S_{n^2} - n^2\mu\right|^2\right) \\
&= \frac{1}{(n^2\varepsilon)^2}\text{var}\left|S_{n^2}\right| \\
&= \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\text{var}\left|X_1\right|
\end{aligned}$$

sumando sobre n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|Z_{n^2} - \mu| > \varepsilon\right) \leq \frac{\text{var}\left|X_1\right|}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

lo que implica por el lema (2)

$$Z_{n^2} \xrightarrow{c.s.} \mu \quad \text{cuando } n \to \infty. \tag{1.1}$$

Para ver que toda la sucesión converge a μ casi seguramente, primero supongamos que $X_i \geq 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona no decreciente,

$$S_{i^2} \leq S_n \leq S_{(i+1)^2} \qquad \text{si } i^2 \leq n \leq (i+1)^2$$

y

$$\frac{S_{i^2}}{(i+1)^2} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{S_{(i+1)^2}}{i^2} \qquad \text{si } i^2 \leq n \leq (i+1)^2$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{S_{i^2}}{(i+1)^2} &= \frac{i^2}{(i+1)^2} \cdot \frac{S_{i^2}}{i^2} = \frac{i^2}{(i+1)^2} Z_{i^2} \\ \text{y } \frac{S_{(i+1)^2}}{i^2} &= \frac{(i+1)^2}{i^2} \cdot \frac{S_{(i+1)^2}}{(i+1)^2} = \frac{(i+1)^2}{i^2} Z_{(i+1)^2} \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{i^2}{(i+1)^2} Z_{i^2} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{(i+1)^2}{i^2} Z_{(i+1)^2} \quad \text{si } i^2 \leq n \leq (i+1)^2.$$

Es claro que n tiende a infinito si y sólo si i tiende a infinito. Por ello, si se toma el límite en la desigualdad anterior cuando n tiende a infinito se obtiene, usando (1.1),

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \mu \qquad \text{cuando } n \to \infty \tag{1.2}$$

ya que $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{(i+1)^2}{i^2} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{i^2}{(i+1)^2} = 1$.

Ahora si suponemos que X_i es arbitrario, consideramos las variables aleatorias X_i^+, X_i^- definidas en el lema (1). Claramente X_i^+ y X_i^- son no negativas y $X_i^+ \leq |X_i|$ y $X_i^- \leq |X_i|$. Así usando la hipótesis se tiene que $\mathbf{E}\left((X_1^+)^2\right) < \infty$ y $\mathbf{E}\left((X_1^-)^2\right) < \infty$, y cada una de las sucesiones $\{X_1^+\}_{n\in\mathbf{N}}$ y $\{X_1^-\}_{n\in\mathbf{N}}$ satisfacen las hipótesis de independencia e idéntica distribución por el lema (1). En consecuencia por lo ya demostrado

$$\frac{1}{n}S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^+ - X_i^-) \xrightarrow{c.s.} \mathbf{E}X_1^+ - \mathbf{E}X_1^- = \mathbf{E}X_1$$

cuando $n \to \infty$. ■

Antes de demostrar la ley fuerte de los grandes números sin la hipótesis de segundo momento finito, enunciaremos tres lemas que se usan en tal prueba. El primer resultado es acerca de la esperanza de variables aleatorias positivas.

Lema 3 *Si X es una variable aleatoria positiva, entonces*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq i)\leq\mathbb{E}(X)<1+\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq i).$$

Demostración.

Sea $A_i=\{\omega\in\Omega:i-1\leq X(\omega)<i\}$ para $i=1,2,...,$. Entonces, $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una partición de Ω, es decir, $\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ con $A_i\cap A_j=\emptyset$ si $i\neq j$, y por lo tanto $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)=1$.

Además

$$(i-1)\,\mathbf{1}_{A_i}\leq X\mathbf{1}_{A_i}<i\mathbf{1}_{A_i}$$

y sumando,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\,\mathbf{1}_{A_i}\leq X\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{1}_{A_i}<\sum_{i=1}^{\infty}i\mathbf{1}_{A_i}.$$

Si tomamos las esperanzas,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\,\mathbf{1}_{A_i}\right)\leq\mathbb{E}(X)<\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty}i\mathbf{1}_{A_i}\right)$$

por convergencia monótona se tiene

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\,\mathbf{1}_{A_i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\,\mathbb{P}(A_i)\quad\text{y}\quad\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty}i\mathbf{1}_{A_i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}i\mathbb{P}(A_i)$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{\infty}i\mathbb{P}(A_i)-\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)\leq\mathbb{E}(X)<\sum_{i=1}^{\infty}i\mathbb{P}(A_i).$$

Pero como $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)=1$, basta con demostrar que $\sum_{i=1}^{\infty}i\mathbb{P}(A_i)=1+\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq i)$.
Para ello desarrollamos la suma

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}i\mathbb{P}(A_i)&=\mathbb{P}(A_1)+2\mathbb{P}(A_2)+\ldots+n\mathbb{P}(A_n)+\ldots\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)+\mathbb{P}(A_2)+\ldots+(n-1)\,\mathbb{P}(A_n)+\ldots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\sum_{i=2}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)+\ldots+\sum_{i=n}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)+\ldots \\
&= 1+\sum_{i=2}^{\infty}\mathbb{P}(i-1\leq X<i)+\ldots+\sum_{i=n}^{\infty}\mathbb{P}(i-1\leq X<i)+\ldots \\
&= 1+\mathbb{P}(X\geq 1)+\ldots+\mathbb{P}(X\geq n-1)+\ldots \\
&= 1+\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq i).\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

El siguiente resultado es acerca de series convergentes en los reales.

Lema 4 *Dada una sucesión de números reales* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=c$, *con* c *una constante, se tiene que* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}x_n=0$.

Demostración.

Sea $S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$; por hipótesis $\lim_{n\to\infty}S_n=c$ y también $\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=c$. Entonces $\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$. Desarrollando la diferencia

$$
\begin{aligned}
S_n-S_{n-1} &= \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)-\frac{1}{n-1}(x_1+\ldots+x_{n-1}) \\
&= \frac{x_n}{n}-\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)(x_1+\ldots+x_{n-1}) \\
&= \frac{x_n}{n}-\frac{1}{n(n-1)}(x_1+\ldots+x_{n-1}) \\
&= \frac{x_n}{n}-\frac{1}{n}S_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Como $\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=c$, entonces $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_{n-1}=0$, de donde

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{n}-\frac{1}{n}S_{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0.\ \blacksquare
$$

Lema 5 *Si* $\alpha>1$ *y* $\beta_k=[\alpha^k]$, *la parte entera de* α^k, *entonces existe* $A>0$ *tal que para toda* $m\geq 1$

$$
\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{\beta_k^2}\leq\frac{A}{\beta_m^2}.
$$

Demostración.

Sabemos por un lado que,

$$0 \leq \alpha^k - 1 \leq [\alpha^k]$$

entonces

$$\frac{1}{[\alpha^k]^2} \leq \frac{1}{[\alpha^k - 1]^2} \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N}$$

de donde

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[\alpha^k]^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^k - 1)^2}.$$

Y por otro, dado que $\alpha > 1$ existe un número $m \geq 1$, tal que para todo $k \geq m$,

$$\left(\alpha^k - 2\right) \geq 1$$

por lo tanto,

$$\left(\alpha^k - 1\right)^2 \geq \alpha^k \left(\alpha^k - 2\right) \geq \alpha^k > 0.$$

De ahí que,

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{[\alpha^k]^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^k - 1)^2} \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k (\alpha^k - 2)} \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k} < \infty, \quad \text{pues} \left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1.$$

Entonces, para esa m y para cualquier $m' > m$

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{[\alpha^k]^2} \leq \frac{1}{\alpha^m} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k = \frac{1}{\alpha^m} \cdot C < \infty$$

donde $C = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k$.

Si $1 \leq m' < m$,

$$\sum_{k=m'}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} = \sum_{k=m'}^{m-1} \frac{1}{\beta_k^2} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} \leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\beta_k^2} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\beta_k^2} + \frac{1}{\alpha^m} \cdot C < \infty$$

pues $\sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\beta_k^2}$ es una suma finita y entonces existe un número $B > 0$ tal que $\sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\beta_k^2} = \frac{1}{\alpha^m} \cdot B$ de donde

$$\sum_{k=m'}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} \leq \frac{1}{\alpha^m} (B + C) \leq \frac{1}{\alpha^{m'}} (B + C) < \infty.$$

Queda claro entonces que para todo $m > 1$, existe una $A > 0$ tal que

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} \leq \frac{A}{\beta_m^2}. \blacksquare$$

A continuación demostramos la ley fuerte de los grandes números sin la hipótesis de segundo momento finito.

Teorema 2 *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Son equivalentes:*

i) $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{c.s.} \mu$ *, si $n \to \infty$ para alguna constante μ;*

ii) $\mathbf{E} |X_1| < \infty$,

y en tal caso $\mu = \mathbf{E}(X_1)$.

Demostración.

i)⇒ii) Por hipótesis y el lema (4) afirmamos que

$$\frac{1}{n} X_n \xrightarrow{c.s.} 0 \quad \text{si } n \to \infty. \tag{1.3}$$

Por otra parte,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_n| \geq n) < \infty \tag{1.4}$$

ya que de lo contrario, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq n) = \infty$ y por la segunda parte del lema de Borel-Cantelli se tendría que ,

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n \to \infty} \{|X_n| \geq n\}\right) = 1$$

es decir,

$$\mathbf{P}\left(\omega \in \Omega : \frac{|X_n(\omega)|}{n} \geq 1 \text{ para una infinidad de } n\text{'s}\right) = 1$$

lo que contradice a (1.3). Por el lema (3) tenemos

$$\mathbb{E}\left(|X_1|\right) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_1| \geq n\right)$$

que es finito por (1.4).

ii)⇒i) Supongamos que X_i es una variable aleatoria no negativa para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{E}|X_1| = \mathbb{E}(X_1) = \mu < \infty$. Definimos una nueva sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera,

$$Y_n = X_n \mathbf{1}_{\{X_n<n\}} = \begin{cases} X_n & \text{si} \quad X_n < n \\ 0 & \text{si} \quad X_n \geq n \end{cases}$$

Nótese que $\sum\limits_{n} \mathbb{P}(Y_n \neq X_n) = \sum\limits_{n} \mathbb{P}(X_n \geq n) \leq \mathbb{E}X_1 < \infty$, por el lema (3).
Claramente $\mathbb{P}(X_n \geq n) = \mathbb{P}(X_1 \geq n)$ pues las X_i son idénticamente distribuidas.

Sea $A_n = \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \neq Y_n(\omega)\}$ entonces $\sum\limits_{n} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, y por el lema de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0 \;\; \text{y} \;\; \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^c\right) = 1.$$

Sea $\Omega_0 = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n^c \subset \Omega$, entonces para cada $\omega \in \Omega_0$ se cumple

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i(\omega) - Y_i(\omega)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{1.5}$$

ya que $\Omega_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m\geq n} A_m^c$, lo que indica que ω está en Ω_0 si y sólo si existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $m \geq n_0$, $\omega \in A_m^c$, es decir, si y sólo si existe un n_0 tal que para todo $m \geq n_0$, $X_m(\omega) = Y_m(\omega)$.

Por (1.5) vemos que basta demostrar que $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{c.s.} \mu$, ya que eso implicaría que $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{c.s.} \mu$.

Sea $S_n' = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Para $\alpha > 1$, $\varepsilon > 0$ y $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión definida como $\beta_n = [\alpha^n]$ la parte entera de α^n, usando la desigualdad de Chebyshev y que S_n' tiene segundo momento finito, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{1}{\beta_n}\left|S_{\beta_n}' - \mathbf{E}\left(S_{\beta_n}'\right)\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_n^2}\text{var}\left(S_{\beta_n}'\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_n^2}\sum_{i=1}^{\beta_n}\text{var}(Y_i) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{\beta_1^2}\sum_{i=1}^{\beta_1}\text{var}(Y_i) + \ldots + \frac{1}{\beta_n^2}\sum_{i=1}^{\beta_n}\text{var}(Y_i) + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\left(\text{var}(Y_1) + \ldots + \text{var}(Y_{\beta_1})\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_n^2}\right) + \ldots\right. \\
&\quad \left. + \left(\text{var}\left(Y_{\beta_{m-1}+1}\right) + \ldots \text{var}\left(Y_{\beta_m}\right)\right)\left(\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{\beta_n^2}\right) + \ldots\right] \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\left(\text{var}(Y_1) + \ldots + \text{var}(Y_{\beta_1})\right)\left(\frac{A}{\beta_1^2}\right) + \ldots\right. \\
&\quad \left. + \left(\text{var}\left(Y_{\beta_{m-1}+1}\right) + \ldots + \text{var}\left(Y_{\beta_m}\right)\right)\left(\frac{A}{\beta_m^2}\right) + \ldots\right] \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\text{var}(Y_1)\frac{A}{1^2} + \ldots + \text{var}\left(Y_{\beta_1}\right)\frac{A}{\beta_1^2} + \ldots\right. \\
&\quad \left. + \text{var}\left(Y_{\beta_{m-1}+1}\right)\frac{A}{\left(\beta_{m-1}+1\right)^2} + \ldots + \text{var}\left(Y_{\beta_m}\right)\frac{A}{\beta_m^2} + \ldots\right] \\
&= \frac{A}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\text{var}(Y_i) \\
&\leq \frac{A}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\mathbf{E}\left(Y_i^2\right). \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

La segunda desigualdad se obtuvo por la independencia de las variables aleatorias y en la quinta se uso el lema (5).

Sea $B_{ij} = \{j-1 \leq X_i < j\} = \{\omega \in \Omega \mid X_i(\omega) \in [j-1, j)\}$, obsérvese que $\mathbb{P}(B_{ij}) =$

$\mathbf{P}(B_{1j})$. Además $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}$, para cada $i \in \mathbb{N}$,entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\mathbb{E}\left(Y_i^2\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}\left(Y_i^2 \mathbf{1}_{B_{ij}}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{j=1}^{i} \mathbf{E}\left(j^2 \mathbf{1}_{B_{ij}}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{j=1}^{i} j^2 \mathbf{P}(B_{1j}) \\
&= \mathbf{P}(B_{11}) + \frac{1}{2^2}\left[\mathbf{P}(B_{11}) + 2^2\mathbf{P}(B_{12})\right] + \ldots \\
&= \mathbf{P}(B_{11})\left[1 + \frac{1}{2^2} + \ldots\right] + \ldots + \mathbf{P}(B_{1n})\left[1 + \frac{n^2}{(n+1)^2} + \ldots\right] + \ldots \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_{1j})\left[\sum_{i=j}^{\infty} \frac{j^2}{i^2}\right] \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \mathbf{P}(B_{1j}) \frac{2}{j} \\
&= 2\sum_{j=1}^{\infty} j\mathbf{P}(B_{1j}) \\
&\leq 2\left[\mathbf{E}(X_1) + 1\right] < \infty.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

En la séptima desigualdad se usó el criterio de la integral,

$$\sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq \frac{1}{(j-1)} \leq \frac{2}{j} \quad \text{si } j \geq 2.$$

La novena desigualdad se debe a que por ser $\{B_{1j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ partición de Ω:

$$\mathbf{E}(X_1) = \int_{\Omega} X_1 dP = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_{1j}} X_1 dP$$

y

$$(j-1)\,\mathbf{P}(B_{1j}) = \int_{B_{1j}} (j-1)\, dP \leq \int_{B_{1j}} X_1 dP$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty}(j-1)\mathbb{P}(B_{1j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\int_{B_{1j}} X_1 dP = \mathbb{E}(X_1)$$

pero desarrollando la primera sumatoria obtenemos,

$$\sum_{j=1}^{\infty}(j-1)\mathbb{P}(B_{1j}) = \sum_{j=1}^{\infty} j\mathbb{P}(B_{1j}) - \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_{1j}) = \sum_{j=1}^{\infty} j\mathbb{P}(B_{1j}) - 1 \leq \mathbb{E}(X_1)$$

teniendo así,

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\mathbb{P}(B_{1j}) \leq \mathbb{E}(X_1) + 1$$

de donde se concluye,

$$2\sum_{j=1}^{\infty} j\mathbb{P}(B_{1j}) \leq 2\left[\mathbb{E}(X_1) + 1\right].$$

De (1.6) y (1.7) vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\frac{1}{\beta_n}\left|S'_{\beta_n} - \mathbb{E}\left(S'_{\beta_n}\right)\right| > \varepsilon\right) < \infty.$$

Como esto es válido para toda $\varepsilon > 0$ y por el lema (2)

$$\frac{1}{\beta_n}\left|S'_{\beta_n} - \mathbb{E}\left(S'_{\beta_n}\right)\right| \xrightarrow{c.s.} 0 \text{ si } n \to \infty. \tag{1.8}$$

Además, por convergencia monótona

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(X_n \mathbf{1}_{\{X_n < n\}}\right) = \mathbb{E}\left(X_1 \mathbf{1}_{\{X_1 < n\}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X_1) = \mu$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\beta_n}\mathbb{E}\left(S'_{\beta_n}\right) = \frac{1}{\beta_n}\sum_{i=1}^{\beta_n}\mathbb{E}(Y_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$$

y de (1.8)

$$\frac{1}{\beta_n}S'_{\beta_n} \xrightarrow{c.s.} \mu \text{ si } n \to \infty \tag{1.9}$$

Para ver que toda la sucesión converge, obsérvese que por ser las $Y_i's$ no negativas, se tiene que $\{S'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona no decreciente y por lo tanto

$$\frac{1}{\beta_{n+1}}S'_{\beta_n} \leq \frac{1}{m}S'_m \leq \frac{1}{\beta_n}S'_{\beta_{n+1}} \quad \text{si } \beta_n \leq m \leq \beta_{n+1}.$$

Haciendo $m \to \infty$ y dado que $\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k} = \frac{[\alpha^{k+1}]}{[\alpha^k]} \to \alpha$ cuando $k \to \infty$,

$$\alpha^{-1}\mu \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{1}{m}S'_m \leq \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m}S'_m \leq \alpha\mu.$$

Como es para toda $\alpha > 1$, si hacemos α tender a uno obtenemos que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \overset{c.s.}{\to} \mu$ cuando n tiende a infinito que es a lo que queríamos llegar.

Para el caso general, se procede como en la demostración del teorema (1), usando las funciones positivas $X_i^+ = \max\{X_i(\omega), 0\}$ y $X_i^- = -\min\{X_i(\omega), 0\}$ definidas en el primer lema . Por lo ya demostrado y por el lema (1) para variables aleatorias no negativas, se tiene:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^+ \overset{c.s.}{\to} \mathbf{E}(X_i^+) \text{ y } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^- \overset{c.s.}{\to} \mathbf{E}(X_i^-)$$

de donde,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^+ - X_i^-) \overset{c.s.}{\to} \mathbf{E}(X_i^+) - \mathbf{E}(X_i^-) = \mathbf{E}(X_i)\,. \blacksquare$$

1.2 Ley débil

Para la demostración de la ley débil de los grandes números y del teorema del límite central, hacen falta dos resultados que probaremos a continuación.

Definición 1 *Dada una variable aleatoria X, se define la función característica de X como*

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3 *Sean $X, X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias reales, $F_X, F_1, F_2, \dots$ sus respectivas funciones de distribución y $\phi_X, \phi_1, \phi_2, \dots$ sus funciones características. Entonces son equivalentes:*

i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, *i.e.* $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_X(x)$, *para todo* $x \in C_{F_X} = \{x \in \mathbb{R} \mid F_X$ *es continua en* $x\}$.

ii) $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$ *si* $n \to \infty$, *para toda* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua y acotada.*

iii) $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$ *si* $n \to \infty$, *para toda* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua y de soporte compacto.*

iv) $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi_X(t)$ *para toda* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se va a demostrar primero **ii)** $\Rightarrow$**i)** $\Rightarrow$ **iii)** $\Rightarrow$ **ii)** y luego que **ii)** $\Rightarrow$ **iv)** $\Rightarrow$ **iii)**.

ii) $\Rightarrow$**i)**

Sea $x_0 \in C_{F_X}$ y sea $\varepsilon > 0$. Se usan las funciones auxiliares definidas así:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \le x_0 \\ -\frac{1}{\varepsilon}x + \frac{x_0+\varepsilon}{\varepsilon} & x \in (x_0, x_0+\varepsilon] \\ 0 & x > x_0 + \varepsilon \end{cases}$$

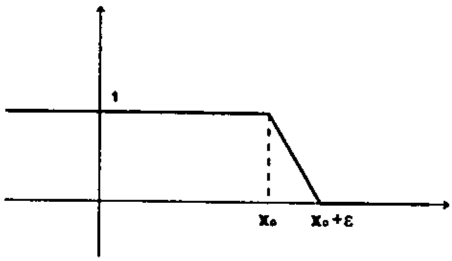

Figura 1 La función $g(x)$.

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \leq x_0 - \varepsilon \\ -\frac{1}{\varepsilon}x + \frac{x_0}{\varepsilon} & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0] \\ 0 & x > x_0 \end{cases}$$

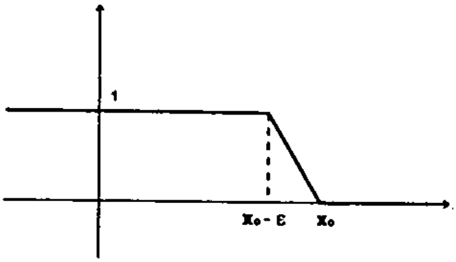

Figura 2 La función $h(x)$.

ambas funciones son continuas en $\mathbb{R}$ y acotadas.

Por ii): $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}(g(X_n)) = \mathbf{E}(g(X))$, pero $\mathbf{1}_{(-\infty,x_0]} \leq g \leq \mathbf{1}_{(-\infty,x_0+\varepsilon]}$, de donde

$$F_n(x_0) = \mathbf{P}(X_n \leq x_0) = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(-\infty,x_0]}(X_n)\right) \leq \mathbf{E}(g(X_n))$$

y

$$\mathbf{E}(g(X)) \leq \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{(-\infty,x_0+\varepsilon]}(X)\right) = \mathbf{P}(X \leq x_0 + \varepsilon) = F_X(x_0 + \varepsilon).$$

De las dos desigualdades se sigue que,

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x_0) \le \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X)) \le F_X(x_0+\varepsilon).$$

Esto es válido para toda $\varepsilon > 0$, entonces tomamos el límite cuando ε tiende a cero

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x_0) \le \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F_X(x_0+\varepsilon) = F_X\left(x_0^+\right). \tag{1.10}$$

Análogamente, si se usa la función h tenemos por **ii)** :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(h(X_n)) = \mathbb{E}(h(X)) \quad \text{y } \mathbf{1}_{(-\infty,x_0-\varepsilon]} \le h \le \mathbf{1}_{(-\infty,x_0]}$$

por lo cual

$$F_X(x_0-\varepsilon) = \mathbb{P}(X \le x_0-\varepsilon) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{(-\infty,x_0-\varepsilon]}(X)\right) \le \mathbb{E}(h(X))$$

y

$$\mathbb{E}(h(X_n)) \le \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{(-\infty,x_0]}(X_n)\right) = \mathbb{P}(X_n \le x_0) = F_n(x_0).$$

De las dos desigualdades anteriores concluimos que

$$F_X(x_0-\varepsilon) \le \mathbb{E}(h(X)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(h(X_n)) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x_0)$$

y como esto es cierto para toda $\varepsilon > 0$, se tiene

$$F\left(x_0^-\right) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F_X(x-\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x_0). \tag{1.11}$$

De (1.10) y (1.11) se concluye que si $x_0 \in \mathcal{C}_{F_X}$.

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_0) = F_X(x_0)$$

si $x_0 \in C_{F_X}$.

i) $\Rightarrow$ iii)

Se hará primero para f de clase $C^1(\mathbb{R})$, de soporte compacto.

Por hipótesis $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F_X(x)$, para todo $x \in C_{F_X}$, pero

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}(X_n \leq x) = \int_{-\infty}^{x} d\mathbb{P}_{X_n} = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(s)\, d\mathbb{P}_{X_n}(s) \\ 1 - F_n(x) &= \mathbb{P}(X_n > x) = \int_{x}^{\infty} d\mathbb{P}_{X_n} = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(x,\infty]}(s)\, d\mathbb{P}_{X_n}(s). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathbb{E}(f(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_{X_n}(x) \text{ y } \mathbb{E}(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_X(x).$$

Calculando $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_{X_n}(x)$ por partes con

$$\begin{aligned} u &= f(x) & v &= (1 - F_n(x)) \\ du &= f' dx & dv &= -dF_{X_n}(x) \end{aligned}$$

se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_{X_n}(x) = -\left[f(x)(1 - F_n(x))\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} (1 - F_n(x)) f'(x)\, dx$$

y el primer término se anula, de donde,

$$\mathbb{E}(f(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_{X_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} (1 - F_n(x)) f'(x)\, dx.$$

Lo mismo pasa para $\mathbb{E}(f(X))$

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} (1 - F(x)) f'(x)\, dx.$$

Como por hipótesis $(1 - F_n(x)) \underset{n\to\infty}{\to} (1 - F(x))$ para toda $x \in \mathcal{C}_F$ se tiene

$$(1 - F_n(x)) f'(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1 - F(x)) f'(x)$$

casi dondequiera con respecto a la medida de Lebesque en $\mathbb{R}$ (ya que sabemos que el conjunto de discontinuidades de una función monótona es a lo más numerable). Además,

$$|(1 - F_n(x)) f'(x)| \leq \max_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < \infty.$$

Por lo tanto y por convergencia dominada, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (1 - F_n(x)) f'(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} (1 - F(x)) f'(x)\, dx$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X)).$$

Ahora quitamos la hipótesis de que f sea de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Primero se recuerda que dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{C}^1$ y de soporte compacto, tal que $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$ (ver apéndice).

Por otra parte, existe N_0 tal que si $n \geq N_0 \Rightarrow |\mathbb{E}(g(X_n)) - \mathbb{E}(g(X))| < \frac{\varepsilon}{2}$ (por lo demostrado en la primera parte).

En consecuencia

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| &\leq |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(g(X_n))| + |\mathbb{E}(g(X_n)) - \mathbb{E}(g(X))| \\ &\quad + |\mathbb{E}(g(X)) - \mathbb{E}(f(X))| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

iii) $\Rightarrow$ ii)

Sea f una función continua, acotada y positiva $(f \geq 0)$, y sea $\varepsilon > 0$ fijo. Supongamos que $|f| \leq 1$, (si no, se normaliza). Sea $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua y de soporte compacto tal que:

i') $0 \leq \beta \leq 1$

ii') $\int_{\mathbb{R}} \beta(x)\, d\mathbb{P}_X(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{5}$.

Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\int_{\mathbb{R}} \beta(x)\, d\mathbb{P}_{X_n}(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$ si $n \geq n_0$. Por otra parte la función (βf) es también continua de soporte compacto, por lo que existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|\mathbf{E}(\beta(X_n) f(X_n)) - \mathbf{E}(\beta(X) f(X))| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } n \geq m_0.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}[f(X_n)] - \mathbf{E}[f(X)]| &\leq |\mathbf{E}[\beta f(X_n)] - \mathbf{E}[\beta f(X_n)]| + |\mathbf{E}\{[(1-\beta)\cdot f](X_n)\}| \\
&\quad + |\mathbf{E}\{[(1-\beta)\cdot f](X)\}| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \mathbf{E}[(1-\beta)(X_n)] + \mathbf{E}[(1-\beta)(X)] \quad \text{si } n \geq m_0 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \qquad \text{si } n \geq n_0 \text{ y } n \geq m_0.
\end{aligned}$$

La última desigualdad se debe a que :

i") $\mathbf{E}(\beta(X)) > 1 - \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow \mathbf{E}[(1-\beta)(X)] = 1 - \mathbf{E}(\beta(X)) < \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{4}$

ii") $\mathbf{E}(\beta(X_n)) > 1 - \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \mathbf{E}[(1-\beta)(X_n)] = 1 - \mathbf{E}(\beta(X_n)) < \frac{\varepsilon}{4}$, $n \geq m$.

Si ahora suponemos f continua y acotada, tomamos las funciones positivas f^+y f^- tales que $f = f^+ - f^-$, definidas como

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \qquad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$$

y aplicamos a cada una lo anterior para obtener,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(f^{+}\left(X_n\right)\right) &\to \mathbf{E}\left(f^{+}\left(X\right)\right)\\ \mathbf{E}\left(f^{-}\left(X_n\right)\right) &\to \mathbf{E}\left(f^{-}\left(X\right)\right)\end{aligned}$$

dado que $\mathbf{E}\left(f\left(X\right)\right) = \mathbf{E}\left(f^{+}\left(X\right)\right) - \mathbf{E}\left(f^{-}\left(X\right)\right)$, por lo de arriba podemos concluir

$$\mathbf{E}\left(f\left(X_n\right)\right) \to \mathbf{E}\left(f\left(X\right)\right).$$

ii)⇒iv)

Es inmediato porque las funciones $\cos(s)$ y $\operatorname{sen}(s)$ son continuas y acotadas de los reales en los reales. Al ser $e^{is} = \cos(s) + i\operatorname{sen}(s)$, ésta es también continua y acotada, entonces por (ii)

$$\phi_n(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX_n}\right) = \mathbf{E}\left(\cos\left(tX_n\right)\right) + i\mathbf{E}\left(\operatorname{sen}\left(tX_n\right)\right) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbf{E}\left(\cos\left(tX\right)\right) + i\mathbf{E}\left(\operatorname{sen}\left(tX\right)\right) = \phi_X(t)$$

es decir $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi_X(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

iv)⇒iii)

Sea f una función continua de soporte compacto tal que su transformada de Fourier $\hat{f}$ dada por

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} f(x)\, dx$$

es integrable

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(\lambda)\right| d\lambda < \infty.$$

La inversión de Fourier nos permite escribir

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \hat{f}(\lambda)\, d\lambda$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X_n)) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mathbb{P}_{X_n}(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \hat{f}(\lambda)\, d\lambda \right) d\mathbb{P}_{X_n}(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \hat{f}(\lambda)\, d\mathbb{P}_{X_n}(x) \right) d\lambda \qquad \text{(por Fubini)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\, \mathbb{E}\left(e^{-i\lambda X_n}\right) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\, \phi_n(-\lambda)\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Por hipótesis $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(-\lambda) = \phi_X(-\lambda)$, además para toda n $\left|\phi_n(-\lambda) \hat{f}(\lambda)\right| \leq \left|\hat{f}(\lambda)\right|$, que es integrable. En base a esto y por convergencia dominada

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(-\lambda) \hat{f}(\lambda)\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(-\lambda) \hat{f}(\lambda)\, d\lambda \\
&= \mathbb{E}(f(X)).
\end{aligned}$$

Para quitar la condición de que $\hat{f}$ sea integrable, recordamos el siguiente resultado de la transformada de Fourier: *Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ y es de soporte compacto, entonces $\hat{f}$ es integrable.*

Además, dada f de soporte compacto y $\varepsilon > 0$, existe una función $g \in C^2(\mathbb{R})$, de soporte compacto tal que $|f(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$, para toda $t \in \mathbb{R}$. (Ver apéndice). Pero la respectiva $\hat{g}$ es integrable, y por lo ya demostrado, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X))$$

es decir, que dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_0$,

$$|\mathbb{E}(g(X_n)) - \mathbb{E}(g(X))| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y entonces

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| &\leq |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(g(X_n))| + |\mathbb{E}(g(X_n)) - \mathbb{E}(g(X))| \\ &\quad + |\mathbb{E}(g(X)) - \mathbb{E}(f(X))| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 4 *Sea X una variable aleatoria tal que $\mathbb{E}\left(|X|^k\right) < \infty$, entonces $\phi_X \in C^k(\mathbb{R})$ y*

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\mathbb{E}(X^j)}{j!}(it)^j + o\left(t^k\right),$$

donde ϕ_X es la función característica de X.

Para la demostración de este teorema necesitamos el siguiente lema.

Lema 6 *Para $n \in \mathbb{N}$ y $t > 0$*

$$\left|e^{it} - 1 - \frac{it}{1!} - \ldots - \frac{(it)^{n-1}}{(n-1)!}\right| \leq \frac{t^n}{n!}$$

Demostración.

Se hará por inducción.

Sea $\rho_n(t) = e^{it} - 1 - \frac{it}{1!} - \ldots - \frac{(it)^{n-1}}{(n-1)!}$, entonces, para $n = 1$

$$\rho_1(t) = e^{it} - 1 = i\int_0^t e^{ix}dx$$

y como $|\rho_1(t)| = \left|\int_0^t e^{ix}dx\right| \leq \int_0^t |e^{ix}|\,dx = \int_0^t dx = t$, tenemos el resultado $|\rho_1(t)| \leq t$.

Para $n-1$, se tiene

$$|\rho_{n-1}(t)| \leq \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Veamos que se cumple para n. Tenemos que

$$\rho_n(t) = i\int_0^t \rho_{(n-1)}(x)\,dx$$

ya que

$$\begin{aligned} i\int_0^t \rho_{(n-1)}(x)\,dx &= i\int_0^t \left[e^{ix} - 1 - \frac{ix}{1!} - \ldots - \frac{(ix)^{n-2}}{(n-2)!}\right]dx \\ &= i\left[\frac{e^{it}}{i} - \frac{1}{i} - t - \ldots - \frac{i^{n-2}t^{n-1}}{(n-1)!}\right] \\ &= e^{it} - 1 - \frac{it}{1!} - \ldots - \frac{(it)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Como se vale para $n-1$

$$|\rho_n(t)| \leq \int_0^t \left|\rho_{(n-1)}(x)\right|dx \leq \int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx = \frac{t^n}{n!}. \blacksquare$$

Demostración del teorema.

Demostraremos primero que si $\mathbb{E}\left(|X|^k\right) < \infty$, entonces $\phi_X \in C^k(\mathbb{R})$ y $\phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}\left(X^k\right)$. Se hará por inducción.

Para $k=1$ por hipótesis se tiene $\mathbb{E}(|X|)<\infty$, y sabemos que

$$\phi_X(t)= \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x)$$

entonces

$$\frac{\phi_X(t+h)-\phi_X(t)}{h}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{e^{ihx}-1}{h}dF(x)$$

pero por el lema anterior, para $n=1$ se tiene, $\left|\frac{e^{ihx}-1}{h}\right|\leq|x|$, entonces por convergencia dominada

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\phi_X(t+h)-\phi_X(t)}{h} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{ihx}-1}{h}\right)dF(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(ix)\,dF(x)\\ &= i\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx}dF(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi_X\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, y $\phi'_X(t)=i\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}xdF(x)$, evaluando a $\phi'_X(t)$ en $t=0$ tenemos,

$$\phi'_X(0)=i\mathbb{E}(X).$$

Suponemos que el resultado es cierto para $k-1$, es decir, $\phi_X\in\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})$ y

$$\phi_X^{(k-1)}(t)=i^{k-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}x^{k-1}dF(x).$$

Para k, sabemos que $\mathbb{E}\left(|X|^{k}\right) < \infty$ y

$$\frac{\phi_X^{(k-1)}(t+h) - \phi_X^{(k-1)}(t)}{h} = i^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} e^{itx} \left(\frac{e^{ihx}-1}{h}\right) dF(x)$$

pero otra vez por el lema anterior, para $n = 1$ se tiene, $\left|\frac{e^{ihx}-1}{h}\right| \leq |x|$, y por convergencia dominada,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\phi_X^{(k-1)}(t+h) - \phi_X^{(k-1)}(t)}{h} &= i^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} e^{itx} \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{ihx}-1}{h}\right) dF(x) \\
&= i^{k} \int_{-\infty}^{\infty} x^{k} e^{itx} dF(x)
\end{aligned}$$

de donde

$$\phi_X^{(k)}(t) = i^{k} \int_{-\infty}^{\infty} x^{k} e^{itx} dF(x)$$

que valuada en $t = 0$ es,

$$\phi^{(k)}(0) = i^{k}\mathbb{E}\left(X^{k}\right).$$

Hemos demostrado que si $\mathbb{E}\left(|X|^{k}\right) < \infty$, entonces $\phi_X(t)$ tiene k-ésima derivada continua y $\phi_X^{(k)}(0) = i^{k}\mathbb{E}\left(X^{k}\right)$.

Por otro lado, la aproximación de $\phi_X(t)$ dada por el polinomio de Taylor de orden k para la función $\phi_X(t)$, alrededor del cero es:

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\phi_X^{(j)}(0)}{j!} t^{j} + o\left(t^{k}\right)$$

sustituyendo a $\phi_X^{(j)}(0)$ por $i^{j}\mathbb{E}\left(X^{j}\right)$ obtenemos

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\mathbb{E}\left(X^{j}\right)}{j!} (it)^{j} + o\left(t^{k}\right)$$

que es justamente lo que queríamos demostrar. ■

Tenemos entonces ya los resultados necesarios para demostrar el teorema de convergencia débil.

Teorema 5 (de convergencia débil) *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y $\mathbb{E}\left|X_1\right| < \infty$, entonces*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P},\mathcal{D}} \mu \qquad \textit{cuando } n \to \infty,$$

en donde $\mu = \mathbb{E}\left(X_1\right)$.

Demostración.

Dado que convergencia en distribución a una constante implica en convergencia en probabilidad, nos bastará con probar la primera.

Como $\mathbb{E}\left|X_1\right| < \infty$, por el teorema anterior sabemos que la función característica de X_1 está en $C^1(\mathbb{R})$ y es igual a

$$\phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX_1}\right) = 1 + it\mu + o(t).$$

Sea $\phi_{\frac{1}{n}S_n}$ la función característica de $\frac{1}{n}S_n = \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)$, entonces

$$\phi_{\frac{1}{n}S_n}(t) = \mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{n}S_n}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{n}(X_1+\ldots+X_n)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{n}X_k}\right) = \left[\phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

sustituyendo a $\phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)$,

$$\phi_{\frac{1}{n}S_n}(t) = \left[1 + i\frac{t}{n}\mu + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\phi_{\frac{1}{n}S_n}(t) = e^{it\mu} = \phi_\mu(t).$$

Como la funciones características convergen y por el teorema (3), se tiene la convergencia en distribución. ■

1.3 Teorema del Límite Central

El teorema del límite central establece condiciones bajo las cuales la suma parcial de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, es asintóticamente distribuida como una normal con parametros cero y uno. Ocupa un lugar muy importante en la teoría de la Probabilidad debido a su antiguedad y al fructífero papel que ha jugado en el desarrollo de la teoría y en aplicaciones. Lo enunciamos y demostramos a continuación.

Teorema 6 (del Límite Central) *Sean $X_1, X_2, ...$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $\mathbb{E}(X_1) < \infty$ y $var(X_1) < \infty$. Entonces*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \qquad \textit{cuando } n \to \infty,$$

donde $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ y $\sigma^2 = var(X_1)$.

Demostración.

Sea $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$; entonces $\mathbb{E}(Y_i) = \frac{1}{\sigma}(\mathbb{E}(X_i) - \mu) = 0$ y $\text{var}(Y_i) = \mathbb{E}(Y_i^2) = 1$.

Aplicando el resultado del teorema (4), escribimos a la función característica de Y_i como

$$\phi_{Y_i}(t) = 1 + it \cdot 0 + \frac{(it)^2}{2} + o(t^2).$$

Si $S_n' = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, entonces como se vió en la demostración del teorema anterior

$$\phi_{S_n'}(t) = \left[\phi_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

sustituyendo a $\phi_{Y_i}(t)$:

$$\phi_{S'_n}(t) = \left[1 - \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{2} + o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right]^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}} = \phi_{N(0,1)}(t).$$

Como se da la convergencia puntual para la función característica, por el teorema (4) sabemos que S'_n converge en ditribución a una normal estandar. ■

Capítulo 2

Variación regular

La teoría de variación regular fue introducida por Jovan Karamata en 1930. En forma simple, variación regular se puede ver como el estudio de la siguiente relación:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = g(\lambda) \in (0,\infty) \quad \text{para toda } \lambda > 0$$

así como sus numerosas ramificaciones. Esta teoría ha resultado tener muchas aplicaciones en la Probabilidad y por ello nos interesa.

2.1 Funciones de Variación Lenta

Definición 2 *Sea l una función positiva, medible, definida en alguna vecindad $[M,\infty)$ de infinito, y que satisface*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = 1 \quad \textit{para toda } \lambda > 0.$$

Entonces se dice que l es de variación lenta.

Estas funciones fueron introducidas por Karamata en 1930 para funciones continuas en lugar de medibles. Cabe observar que la vecindad $[M,\infty)$ es de poca importancia;

podemos suponer a l definida en $(0,\infty)-$ por ejemplo definiendo $l(x) = l(M)$ para $x \in (0, M)$.

Ejemplos de funciones de variación lenta son aquéllas positivas que tienen límite en infinito, es decir $\lim\limits_{x\to\infty} l(x) = c$, con $c > 0$. En particular, las funciones constantes positivas. La función logaritmo $(\log x)$ y sus iteradas $(\log_k x)$ también varían lentamente. Un ejemplo de función no logarítmica es $l(x) = \exp\{\log x / \log\log x\}$. Sin embargo, funciones de variación lenta pueden tener

$$\liminf_{x\to\infty} l(x) = 0, \qquad \limsup_{x\to\infty} l(x) = \infty$$

un ejemplo de estas funciones "de oscilación infinita" es

$$l(x) = \exp\left\{(\log x)^{\frac{1}{3}} \cos\left[(\log x)^{\frac{1}{3}}\right]\right\}.$$

Antes de continuar daremos un lema que da una caracterización de las funciones de variación lenta. Éste será importante ya que se usará en casi todas las demostraciones subsecuentes.

Lema 7 *Sea $h(x) = \log l(e^x)$. La función l es de variación lenta si y sólo si $\lim\limits_{x\to\infty} h(x+u) - h(x) = 0$ para toda u en $\mathbb{R}$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) De la definición de $h(x)$ se tiene

$$h(x+u) - h(x) = \log l(e^x e^u) - \log(e^x) = \log\left(\frac{l(e^x e^u)}{l(e^x)}\right)$$

y como $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{l(e^x e^u)}{l(e^x)} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{l(\lambda y)}{l(y)} = 1$, tomando $y = e^x$ y $\lambda = e^u > 0$ para toda $u \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} h(x+u) - h(x) = \lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{l(e^x e^u)}{l(e^x)}\right) = 0.$$

$\Leftarrow$) Por definición de h, tenemos que $e^{h(x)} = l(e^x)$ de donde

$$\frac{l(\lambda y)}{l(y)} = \frac{e^{h(\log \lambda y)}}{e^{h(\log y)}} = e^{h(\log \lambda y) - h(\log y)} = e^{h(x+u) - h(x)}$$

entonces, al tomar el límite cuando y tiende a infinito y hacer el cambio de variable $x = \log y$ y $u = \log \lambda$, se tiene

$$\lim_{y \to \infty} \left[\frac{l(\lambda y)}{l(y)}\right] = \lim_{x \to \infty} e^{h(x+u)-h(x)} = e^0 = 1, \qquad \text{para todo } u \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Muchas veces preferiremos trabajar con la correspondiente función h en vez de con la propia l.

El teorema considerado como el de mayor importancia en el tema, es el llamado Teorema de Convergencia Uniforme (TCU), y se demuestra a continuación. Para este teorema, necesitamos el siguiente concepto. Diremos que $\lim\limits_{x \to \infty} f(\lambda x) = c$ converge uniformemente para λ en un conjunto compacto K del $(0, \infty)$, si para toda $\varepsilon > 0$ existe un $x_0 > 0$ tal que $|f(\lambda x) - c| < \varepsilon$ para todo $x \geq x_0$ y para toda $\lambda \in K$.

Teorema 7 (de Convergencia Uniforme) *Si l es una función de variación lenta, entonces*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = 1 \textit{ converge uniformemente para } \lambda \textit{ en un conjunto compacto de } (0, \infty).$$

Demostración.

Sea $h(x) = \log[l(e^x)]$, por hipótesis tenemos que

$$\lim_{x \to \infty} [h(x+u) - h(x)] = 0, \quad \text{para toda } u \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Hay que demostrar que (2.1) se da uniformemente para u en un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Pero basta con probar uniformidad en cada intervalo $[0, A]$, ya que transladándolo obtenemos uniformidad en cada intervalo cerrado y acotado.

Tomamos $\varepsilon \in (0, A)$. Para $x > 0$, sean

$$\begin{aligned} I_x &= [x, x + 2A] \\ E_x &= \left\{ t \in I_x : |h(t) - h(x)| \geq \frac{1}{2}\varepsilon \right\} \\ E_x^* &= \left\{ t \in [0, 2A] : |h(x+t) - h(x)| \geq \frac{1}{2}\varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Nótese que $E_x = E_x^* + \{x\}$. Entonces como l es medible, E_x y E_x^* también lo son y $\nu(E_x) = \nu(E_x^*)$, donde $\nu(\cdot)$ denota la medida de Lebesque.

Por (2.1) existe un $x_0 > 0$ tal que si $x \geq x_0$ entonces $|h(x+t) - h(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ y $t \notin E_x^*$, es decir $\mathbf{1}_{E_x^*}(t) = 0$ para toda $x \geq x_0$ y por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty} \mathbf{1}_{E_x^*}(t) = 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Además $\mathbf{1}_{E_x^*}(t) \leq \mathbf{1}_{[0,2A]}(t)$ ya que $E_x^* \subset [0, 2A]$. Entonces por convergencia dominada $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{E_x^*}(t)\, dx = \nu(E_x^*)$ también se va a cero. De ahí que exista un cierto x_0 tal que $\nu(E_x) < \frac{1}{2}\varepsilon$ para $x \geq x_0$.

Para $c \in [0, A]$, $I_{x+c} \cap I_x = [x + c, x + 2A]$ tiene longitud $2A - c \geq A$, mientras que para $x \geq x_0$,

$$\nu(E_x \cup E_{x+c}) < \nu(E_x) + \nu(E_{x+c}) = \nu(E_x^*) + \nu\left(E_{x+c}^*\right) < \varepsilon < A.$$

Entonces para $c \in [0, A]$ y $x \geq x_0$,

$$(I_{x+c} \cap I_x) \setminus (E_x \cup E_{x+c})$$

tiene medida positiva ya que la medida de $(I_{x+c} \cap I_x)$ es mayor que A y la de $(E_x \cup E_{x+c})$ menor estrictamente que A. Por lo tanto es no vacío. Sea t un elemento en $R_{(x,c)}$, entonces

$$|h(t) - h(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ y } |h(t) - h(x+c)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

De aquí que para toda $c \in [0, A]$ y para $x \geq x_0$,

$$|h(x+c) - h(x)| < \varepsilon$$

lo que demuestra la uniformidad en $[0, A]$. ■

El siguiente teorema, nos dice exactamente como son las funciones que varían lentamente.

Teorema 8 (de Representación) *La función l es de variación lenta si y sólo si se puede escribir de la forma*

$$l(x) = c(x) \exp\left\{ \int_a^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\} \quad (x \geq a) \tag{2.2}$$

para algúna $a > 0$, y donde $c(x) \to c \in (0, \infty)$ y $\varepsilon(x) \to 0$, cuando $x \to \infty$.

Demostración.

Demostraremos primero, que $l(x)$ definida como en (2.2) es de variación lenta.

Dado que $\lim_{x\to\infty} c(x) = c \in (0, \infty)$ sabemos que $c(x)$ es de variación lenta, entonces por el TCU, para $\lambda > 0$ y para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una $x_0 > 0$ tal que para toda $x \geq x_0$

$$(1 - \varepsilon) \leq \frac{c(\lambda x)}{c(x)} \leq (1 + \varepsilon). \tag{2.3}$$

Si $\lambda > 1$, dado que $\lim_{u\to\infty} \varepsilon(u) = 0$, para $\varepsilon > 0$ y para x suficientemente grande

$$\int_x^{\lambda x} \frac{-\varepsilon}{u} du \leq \int_x^{\lambda x} \frac{\varepsilon(u)}{u} du \leq \int_x^{\lambda x} \frac{\varepsilon}{u} du$$

pero

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\varepsilon}{u} du = \varepsilon [\log(\lambda x) - \log(x)] = \varepsilon \log(\lambda)$$

teniendo así que

$$-\varepsilon(\log(\lambda)) \leq \int_x^{\lambda x} \frac{\varepsilon(u)}{u} du \leq \varepsilon(\log(\lambda)). \tag{2.4}$$

Como la función exponencial es estrictamente creciente, al aplicarla a (2.4) no se altera la desigualdad, y al multiplicar por (2.3) obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{c(\lambda x)}{c(x)}\exp\left\{\int_x^{\lambda x}\frac{\varepsilon(u)}{u}du\right\} &\leq (1+\varepsilon)\exp\{\varepsilon(\log(\lambda))\} \\ \frac{c(\lambda x)}{c(x)}\exp\left\{\int_x^{\lambda x}\frac{\varepsilon(u)}{u}du\right\} &\geq (1-\varepsilon)\exp\{-\varepsilon(\log(\lambda))\} \qquad (2.5)\end{aligned}$$

además,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(1+\varepsilon)\exp\{\varepsilon(\log(\lambda))\}\right] = 1$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(1-\varepsilon)\exp\{-\varepsilon(\log(\lambda))\}\right] = 1$$

de donde vemos que para $\varepsilon' > 0$,

$$\left[(1+\varepsilon)\exp\{\varepsilon(\log(\lambda))\}\right] < 1+\varepsilon'$$

y

$$\left[(1-\varepsilon)\exp\{-\varepsilon(\log(\lambda))\}\right] > 1-\varepsilon'$$

si $\varepsilon' < \delta$. Por lo tanto

$$1-\varepsilon' < \frac{c(\lambda x)}{c(x)}\exp\left\{\int_x^{\lambda x}\frac{\varepsilon(u)}{u}du\right\} < 1+\varepsilon'$$

lo que implica, por definición de límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{l(\lambda x)}{l(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{c(\lambda x)}{c(x)}\exp\left\{\int_x^{\lambda x}\frac{\varepsilon(u)}{u}du\right\} = 1$$

Para $0 < \lambda < 1$ la desigualdad (2.4) quedaría como

$$-\varepsilon\log(-\lambda) = -\varepsilon\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq \int_{\lambda x}^{x}\frac{\varepsilon(u)}{u}du \leq \varepsilon\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \varepsilon\log(-\lambda)$$

es decir

$$-\varepsilon \log(-\lambda) \leq \int_x^{\lambda x} \frac{\varepsilon(u)}{u} du \leq \varepsilon \log(-\lambda)$$

y procediendo como en el caso anterior, se llega a que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{c(\lambda x)}{c(x)} \exp\left\{\int_x^{\lambda x} \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\} = 1.$$

Como ya vimos que pasa para toda $\lambda > 0$, se concluye que l es de variación lenta.

Para demostrar la otra parte del teorema, necesitamos del siguiente resultado acerca de una propiedad importante que cumplen las funciones de variación regular.

Lema 8 (Seneta 1973) *Si l es positiva, medible, definida en algún intervalo $[A, \infty)$ y*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = 1 \quad \textit{para toda } \lambda > 0,$$

entonces l es acotada en todo intervalo finito suficientemente lejos a la derecha. Es decir, existe $x_0 > 0$ tal que si $I = [a, b]$ con $a \geq x_0$, entonces existe $M_I > 0$ con la propiedad de que $l(x) \leq M_I$ para toda $x \in M_I$. Si definimos $h(x) = \log l(e^x)$, h es también acotada en intervalos finitos suficientemente lejos a la derecha.

Demostración.

Por el TCU, podemos encontrar una x_0 suficientemente grande tal que

$$|h(x+u) - h(x)| < 1 \quad \text{para } x \geq x_0 \quad (u \in [0,1])$$

de ahí que

$$|h(x)| \leq 1 + |h(x_0)| \quad \text{en } [x_0, x_0 + 1].$$

Ahora, por inducción se prueba que

$$|h(x)| \leq n + |h(x_0)| \quad \text{en } [x_0, x_0 + n]$$

por lo tanto, h es acotada en intervalos finitos lejos a la derecha, de donde concluimos lo mismo para $l(x) = \exp h(\log x)$. ■

Demostración del Teorema (continuación)

Podemos reescribir a (2.2) como

$$l(x) = \exp\left\{c_1(x) + \int_a^x \frac{\varepsilon(u)}{u}du\right\}$$

donde $c_1(x)$ y $\varepsilon(x)$ serían funciones acotadas y medibles, $c_1(x) = \log(c(x)) \to d = \log c \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Si definimos $h(x) = \log l(e^x)$, por el lema 7, el que l sea de variación lenta implica:

$$h(x+u) - h(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0 \quad \text{para toda } u \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Entonces probaremos que h se puede escribir como

$$h(x) = d(x) + \int_a^{e^x} \frac{\varepsilon(u)}{u}du \quad (x \geq a) \tag{2.7}$$

donde $b = \log a, d(x) = c_1(e^x) \to d = \log c$.

Haciendo el cambio de variable $v = \log u$ en (2.7), tenemos que

$$\int_a^{e^x} \frac{\varepsilon(u)}{u}du = \int_{\log a}^{x} \varepsilon(e^v)\,dv = \int_b^x e(v)\,dv$$

donde $e(x) = \varepsilon(e^x)$ y $e(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Por el lema de Seneta, sabemos que h es integrable en intervalos finitos lejos a la derecha, siendo así acotada y medible. Por otro lado, para x_0 suficientemente grande podemos escribir

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_x^{x+1} h(x)\,dt - \int_{x_0}^{x+1} h(t)\,dt + \int_{x_0}^{x+1} h(t)\,dt \\
&= \int_x^{x+1} h(x)\,dt - \left(\int_{x_0}^{x} h(t)\,dt + \int_x^{x+1} h(t)\,dt\right) + \left(\int_{x_0}^{x_0+1} h(t)\,dt + \int_{x_0+1}^{x+1} h(t)\,dt\right)
\end{aligned}$$

$$= \int_x^{x+1} \{h(x) - h(t)\}\, dt + \int_{x_0}^{x} \{h(t+1) - h(t)\}\, dt + \int_{x_0}^{x_0+1} h(t)\, dt$$

donde el último término es una constante, digamos c.

Si $e(x) = h(x+1) - h(x)$, entonces dado que l es de variación lenta y por (2.6), $e(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Además $\int_x^{x+1} \{h(x) - h(t)\}\, dt = \int_0^1 \{h(x) - h(x+u)\}\, du \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ debido al TCU.

Por lo tanto

$$h(x) = d(x) + \int_b^x e(v)\, dv$$

con

$$d(x) = \int_x^{x+1} \{h(x) - h(t)\}\, dt + \int_{x_0}^{x_0+1} h(t)\, dt \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} c$$

y

$$e(x) = h(x+1) - h(x). \blacksquare$$

Usando este teorema, vemos que la función logaritmo que es de variación lenta, se representa como

$$\log x = 1 \cdot \exp\left\{\int_e^x \frac{1}{u \log u} du\right\}$$

donde $c(x) = 1, \varepsilon(x) = \frac{1}{\log x}$.

Cabe notar que la representación dada por (2.2) no es única, de hecho existe una función de variación lenta l_1, con ciertas propiedades, que es equivalente a l, $(l_1 \sim l)$, es decir $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{l(x)}{l_1(x)} = 1$. En el siguiente teorema se demostrará esto.

Teorema 9 (Bruijn 1930) *Sea l una función de variación lenta. Entonces $l(x) \sim l_1(x)$ donde $l_1(x) \in C^\infty[a,\infty)$, y si $h_1(x) = \log l_1(e^x)$ entonces tiene la propiedad de que*

$$h_1^{(n)}(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Entonces $l_1$es de variación lenta con representación $l_1(x) = \exp\left(c_1 + \int_a^x \frac{\varepsilon_1(t)}{t} dt\right)$, en donde $c_1 = h_1(\log a)$ y $\varepsilon_1(t) = h_1'(\log t)$.

Demostración.

Sea $p(\cdot) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ una densidad en $\mathbb{R}$ con soporte $[0,1]$.

Sea $h(x) = \log l(e^x)$ y sea

$$e(x) = \{h(n+1) - h(n)\} p(x-n) \quad (n \leq x < n+1)$$

con n suficientemente grande para que $[n, \infty)$ esté en el dominio de h, digamos $n \geq B$ (B un número entero).

Entonces $e(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ en cada intervalo $(n, n+1)$ y también para los extremos, ya que p y todas sus derivadas son cero en 0 y 1. Para $k = 0, 1, \ldots$definimos $M_k = \sup\limits_{x \in [0,1]} \left|p^{(k)}(x)\right|$, donde $p^{(0)} = p$. Todas las M_k son finitas por lo que:

$$\begin{aligned} \left|e^{(k)}(x)\right| &= \left|\{h([x]+1) - h([x])\}\right| \left|p^{(k)}(x - [x])\right| \\ &\leq \left|\{h([x]+1) - h([x])\}\right| M_k \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Sea $h_1(x) = h(B) + \int_B^x e(t)\, dt$, entonces hemos demostrado que $h_1(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$y que todas sus derivadas son o(1) cuando $x \to \infty$.

Finalmente, para $x \geq B$

$$\begin{aligned} h(x) - h_1(x) &= [h(x) - h(B)] - \int_B^x e(t)\, dt \\ &= [h(x) - h(B)] - \left[\int_B^{B+1} e(t)\, dt + \ldots + \int_{[x]-1}^{[x]} e(t)\, dt + \int_{[x]}^{x} e(t)\, dt\right] \\ &= [h(x) - h(B)] - \left[(h(B+1) - h(B)) - (h(B+2) - h(B+1))\right. \\ &\quad \left. - \ldots - (h([x]) - h([x]-1)) - \int_{[x]}^{x} e(t)\, dt\right] \\ &= h(x) - h([x]) - \int_{[x]}^{x} e(t)\, dt \\ &= h(x) - h([x]) - \{h([x]+1) - h([x])\} \int_0^{x-[x]} p(t)\, dt \end{aligned}$$

y por el TCU, lo anterior se va a cero cuando x tiende a infinito. Entonces $l(x) \sim l_1(x) = \exp h_1(\log x)$. ■

En el siguiente teorema veremos que si f no es "demasiado patológica" y S (el conjunto de todas las $\lambda > 0$ tales que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = g(\lambda) \in (0,\infty)$ se cumple) no demasiado pequeño, el límite es cierto para toda $\lambda \in \mathbb{R}^+$ donde $g(\lambda) = \lambda^\rho$ para algún real ρ. Tal resultado caracteriza los posibles límites g.

Teorema 10 (de Caracterización) *Si la función positiva f es medible y tal que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = g(\lambda) \in (0,\infty) \tag{2.8}$$

para toda λ en un conjunto de medida positiva, entonces:

i) *el límite* (2.8) *es cierto para toda $\lambda > 0$,*

ii) *existe un número real ρ, tal que $g(\lambda) = \lambda^\rho$ para toda $\lambda > 0$, y*

iii) *$f(x) = x^\rho l(x)$, con l de variación lenta.*

Demostración.

i) Sea S el conjunto de todas las $\lambda > 0$ tales que (2.8) se cumple.

Si $\lambda, \mu \in S$,entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda\mu x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda\mu x)}{f(\mu x)} \cdot \frac{f(\mu x)}{f(x)} = g(\lambda)\, g(\mu)$$

de donde se ve que $\lambda\mu \in S$ y

$$g(\lambda\mu) = g(\lambda)\, g(\mu) \quad (\lambda, \mu \in S).$$

También vemos que si $\lambda \in S$, entonces $\frac{1}{\lambda}$ está en S, ya que:

$$g\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{\lambda}x\right)}{f(x)} = \lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{f(\lambda y)} = \lim_{y\to\infty} \left[\frac{f(\lambda y)}{f(y)}\right]^{-1} = \frac{1}{g(\lambda)}$$

donde en la segunda igualdad se hace el cambio de variable $y = \frac{x}{\lambda}$.

Obteniendo así que $g\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{g(\lambda)}$.

Entonces S es un subgrupo multiplicativo del $(0, \infty)$ que contiene a un conjunto de medida positiva, lo que nos permite concluir que $S = (0, \infty)$.

ii) Sea $h(x) = \log[f(e^x)]$ y $k(u) = \log[g(e^u)]$, entonces (2.8) es equivalente a

$$\lim_{x\to\infty} [h(x+u) - h(x)] = \log\left[\frac{f(e^{x+u})}{f(e^x)}\right] = \log g(e^u) \in \mathbb{R},\ \forall u \in T \subset \mathbb{R}$$

donde $T = \{\log\lambda : \lambda \in S\}$. Como S es un subgrupo multiplicativo, T es entonces un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$, y $k(u+v) = k(u) + k(v)$, (con $u, v \in T$). Por un resultado conocido de análisis se tiene entonces que la función k es de la forma: $k(u) = \rho \cdot u$, con $\rho \in \mathbb{R}$. De ahí que $\log[g(e^u)] = \rho \cdot u$ y finalmente que

$$g(\lambda) = \exp\left(\log g\left(e^{\log\lambda}\right)\right) = \exp(\rho\log\lambda) = \lambda^\rho.$$

iii) Si tomamos $l(x) = \frac{f(x)}{x^\rho}$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)/(\lambda x)^\rho}{f(x)/x^\rho} = \frac{1}{\lambda^\rho}\left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}\right) =$ 1 para toda $\lambda > 0$. ■

En la siguiente proposición enunciamos algunas propiedades de las funciones de variación lenta.

Proposición 1

i) *Si l varía lentamente, entonces* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log l(x)}{\log x} = 0$.

ii) *Si l varía lentamente, también lo hace $(l(x))^\alpha$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$.*

iii) Si l_1, l_2 *varían lentamente, también lo hacen $l_1(x)\, l_2(x)$, $l_1(x) + l_2(x)$, y si $l_2(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, $l_1(l_2(x))$ es de variación lenta.*

iv) *Si $l_1, ..., l_k$ varían lentamente y $r(x_1, ..., x_k)$ es una función racional con coeficientes positivos, $r(l_1(x_1), ..., l_k(x_k))$ es de variación lenta.*

Demostración.

i) Sea $l_1(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $l_1 \sim l$. La existencia de tal función está garantizada por el teorema de Bruijn. Como $\lim_{x\to\infty} \frac{l(x)}{l_1(x)} = 1$, se tiene que $\lim_{x\to\infty} \log\left[\frac{l(x)}{l_1(x)}\right] = \lim_{x\to\infty} [\log(l(x)) - \log(l_1(x))] = 0$, por otro lado

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log(l(x)) - \log(l_1(x))}{\log x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log(l(x))}{\log x} - \frac{\log(l_1(x))}{\log x}\right) = 0$$

y

$$\frac{\log l(x)}{\log x} = \left(\frac{\log(l(x))}{\log x} - \frac{\log(l_1(x))}{\log x}\right) + \frac{\log l_1(x)}{\log x}$$

de donde vemos que basta demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log l_1(x)}{\log x} = 0.$$

Haciendo $x = e^y$, claramente $x \to \infty$ si y sólo si $y \to \infty$, de donde,

$$\frac{\log l_1(x)}{\log x} = \frac{\log l_1(e^y)}{\log e^y} = \frac{\log l_1(e^y)}{y} = \frac{h_1(y)}{y}.$$

Si $h_1(y)$es acotada,

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\log l_1(e^y)}{y} = 0.$$

Si por el contrario $h_1(y) \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, aplicamos la regla de L'Hôpital y el teorema (9) para obtener:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\log l_1(e^y)}{y} = \lim_{y\to\infty} \frac{h'(y)}{1} = 0.$$

ii) Dado que $\lim_{x\to\infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = 1$, y la función $f(x) = x^\alpha$ es continua para toda $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(l(\lambda x))^\alpha}{(l(x))^\alpha} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{l(\lambda x)}{l(x)}\right]^\alpha = \left[\lim_{x\to\infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)}\right]^\alpha = 1.$$

iii) Para ver que el producto de dos funciones de variación lenta es también de variación lenta, se calcula directamente el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{l_1(\lambda x)\,l_2(\lambda x)}{l_1(x)\,l_2(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{l_1(\lambda x)}{l_1(x)}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{l_2(\lambda x)}{l_2(x)}=1.$$

En el caso de la suma, se observa que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{l_1(\lambda x)+l_2(\lambda x)}{l_1(x)+l_2(x)}-1\right| &= \left|\frac{l_1(\lambda x)+l_2(\lambda x)-l_1(x)-l_2(x)}{l_1(x)+l_2(x)}\right|\\
&= \left|\frac{(l_1(\lambda x)-l_1(x))+(l_2(\lambda x)-l_2(x))}{l_1(x)+l_2(x)}\right|\\
&\leq \left|\frac{(l_1(\lambda x)-l_1(x))}{l_1(x)+l_2(x)}\right|+\left|\frac{(l_2(\lambda x)-l_2(x))}{l_1(x)+l_2(x)}\right|\\
&\leq \left|\frac{(l_1(\lambda x)-l_1(x))}{l_1(x)}\right|+\left|\frac{(l_2(\lambda x)-l_2(x))}{l_2(x)}\right|\\
&= \left|\frac{l_1(\lambda x)}{l_1(x)}-1\right|+\left|\frac{l_2(\lambda x)}{l_2(x)}-1\right|
\end{aligned}$$

donde el último término se va a cero cuando x tiende a infinito, por ser l_1 y l_2 de variación lenta, de ahí que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{l_1(\lambda x)+l_2(\lambda x)}{l_1(x)+l_2(x)}=1.$$

Para el tercer resultado, sustituimos a la función $l_2(x)$ por su equivalente $c_2(x)\exp\left\{\int_a^x\frac{\varepsilon_2(u)}{u}du\right\}$ (Teorema de Representación), en el cociente:

$$\begin{aligned}
\frac{l_1(l_2(\lambda x))}{l_1(l_2(x))} &= \frac{l_1\left(c_2(\lambda x)\exp\left\{\int_a^{\lambda x}\frac{\varepsilon_2(u)}{u}du\right\}\right)}{l_1\left(c_2(x)\exp\left\{\int_a^{x}\frac{\varepsilon_2(u)}{u}du\right\}\right)}\\
&= \frac{l_1\left(c_2(\lambda x)\exp\left\{\int_a^{x}\frac{\varepsilon_2(u)}{u}du\right\}\exp\left\{\int_x^{\lambda x}\frac{\varepsilon_2(u)}{u}du\right\}\right)}{l_1\left(c_2(x)\exp\left\{\int_a^{x}\frac{\varepsilon_2(u)}{u}du\right\}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{l_1\left(l_2(x)\frac{c_2(\lambda x)}{c_2(x)}\exp\left\{\int_x^{\lambda x}\frac{\varepsilon_2(u)}{u}du\right\}\right)}{l_1(l_2(x))} \\
&= \frac{l_1(l_2(x)\,g(\lambda,x))}{l_1(l_2(x))}
\end{aligned}
$$

donde $g(\lambda,x)=\frac{c_2(\lambda x)}{c_2(x)}\exp\left\{\int_x^{\lambda x}\frac{\varepsilon_2(u)}{u}du\right\}$. Debido a que $\lim_{x\to\infty}\frac{c_2(\lambda x)}{c_2(x)}=1$ y $\lim_{x\to\infty}\int_x^{\lambda x}\frac{\varepsilon_2(u)}{u}du=0$ se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} g(\lambda,x)=1.$$

Podemos entonces recurrir al TCU. Como l_1 es de variación lenta, se sabe que para toda $\varepsilon>0$, existe una $\delta>0$ tal que si $|c-w|\cdot|y|<\delta$, entonces $|l_1(c\cdot y)-l_1(w\cdot y)|<\varepsilon$.

Lo anterior implica que si $\lim_{y\to\infty}\frac{l_1(c\cdot y)}{l_1(y)}=1$ entonces $\lim_{y\to\infty}\frac{l_1(w\cdot y)}{l_1(y)}=1$. En este caso $c=1$, y $w=g(\lambda,x)$, por lo que en efecto $|c-g(\lambda,x)|<\delta$, y $y=l_2(x)$, que sabemos tiende a infinito cuando $x\to\infty$. Por lo tanto podemos concluir que,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{l_1(l_2(\lambda x))}{l_1(l_2(x))}=\lim_{x\to\infty}\frac{l_1(l_2(x)\,g(\lambda,x))}{l_1(l_2(x))}=1.$$

iv) Sea $r(x_1,...,x_k)=\frac{a_1\cdot x_1+...+a_k\cdot x_k}{b_1\cdot x_1+...+b_k\cdot x_k}$, una función racional con coeficientes positivos, entonces

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{r(l_1(\lambda x_1),...,l_k(\lambda x_k))}{r(l_1(x_1),...,l_k(x_k))} &= \lim_{x\to\infty}\frac{a_1\cdot l_1(\lambda x_1)+...+a_k\cdot l_k(\lambda x_k)}{b_1\cdot l_1(\lambda x_1)+...+b_k\cdot l_k(\lambda x_k)}\cdot\frac{b_1\cdot l_1(x_1)+...+b_k\cdot l_k(x_k)}{a_1\cdot l_1(x_1)+...+a_k\cdot l_k(x_k)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{a_1b_1\cdot l_1(\lambda x_1)l_1(x_1)+...+a_kb_k\cdot l_k(\lambda x_k)l_k(x_k)}{a_1b_1\cdot l_1(\lambda x_1)l_1(x_1)+...+a_kb_k\cdot l_k(\lambda x_k)l_k(x_k)} \\
&= 1 \blacksquare
\end{aligned}
$$

2.2 Funciones de Variación Regular

Definición 3 *Si una función positiva $f(x)$, medible, definida en el intervalo $[x,\infty)$ con $x>0$, es tal que*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{f(x)}=\lambda^\rho \quad \textit{para toda } \lambda>0.$$

decimos que es de variación regular en infinito con índice ρ, y escribimos $f\in R_\rho$.

Definimos $R = \bigcup_{\rho \in \mathbf{R}} R_\rho$ a la clase de todas las funciones de variación regular.

Proposición 2 *Si f es de variación regular con índice $\rho \neq 0$, entonces cuando $x \to \infty$*

$$f(x) \to \begin{cases} \infty & si\ \rho > 0 \\ 0 & si\ \rho < 0 \end{cases}$$

Demostración.

Si f es de variación regular con índice ρ, vimos en la sección anterior que podemos escribirla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^\rho l(x) \\ &= x^\rho c(x) \exp\left\{ \int_a^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\} \quad (x \geq a) \end{aligned}$$

para alguna $a > 0$, donde $c(x) \to c \in (0, \infty), \varepsilon(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. De ahí que

$$f(x) = \{c + o(1)\} \exp\left\{ \int_1^x \frac{[\rho + o(1)]}{u} du \right\} \quad (0 < c < \infty) \tag{2.9}$$

(redefiniendo a f en algún subconjunto compacto de $(0, \infty)$, de ser necesario).

Entonces $\exp\left\{ \int_1^x \frac{[\rho + o(1)]}{u} du \right\} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty \text{ si } \rho > 0 \\ 0 \text{ si } \rho < 0 \end{cases}$

y por la representación de $f(x)$ en (2.9) queda demostrada la proposición. ■

A continuación veremos algunas propiedades de las funciones de variación regular.

Proposición 3

i) Si $f(x) \in R_\rho$, *entonces* $f(x)^\alpha \in R_{\alpha\rho}$.

ii) Si $f_i(x) \in R_{\rho_i}$ $(i = 1, 2)$, $f_2(x) \to \infty$ *cuando* $x \to \infty$, *entonces* $f_1(f_2(x)) \in R_{\rho_1 \rho_2}$.

iii) Si $f_i(x) \in R_{\rho_i}$ $(i = 1, 2)$, *entonces* $f_1 + f_2 \in R_\rho$ *donde* $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$.

iv) Si $f_i(x) \in R_{\rho_i}$ $(i = 1, ..., k)$ *y* $r(x_1, ..., x_k)$ *es una función racional con coeficientes positivos, entonces* $r(f_1(x_1), ..., f_k(x_k)) \in R$.

Demostración.

i) Puesto que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\rho$ y la función $g(x) = x^\alpha$ es continua para toda α,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(f(\lambda x))^\alpha}{(f(x))^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(\lambda x)}{f(x)}\right]^\alpha = \lambda^{\rho\alpha}$$

de donde $f(x)^\alpha \in R_{\alpha\rho}$.

ii) Por el Teorema de Caracterización, sabemos que $f_2(x) = x^{\rho_2} l_2(x)$, y que $l_2(x) = c_2(x) \exp\left\{\int\limits_a^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\}$ se sabe por el Teorema de Representación. Sustituimos ambos valores en el cociente

$$\begin{aligned}
\frac{f_1(f_2(\lambda x))}{f_1(f_2(x))} &= \frac{f_1\left(\lambda^{\rho_2} x^{\rho_2} c_2(\lambda x) \exp\left\{\int\limits_a^{\lambda x} \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\}\right)}{f_1\left(x^{\rho_2} c_2(x) \exp\left\{\int\limits_a^{x} \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\}\right)} \\
&= \frac{f_1\left(f_2(x)\, \lambda^{\rho_2} \frac{c_2(\lambda x)}{c_2(x)} \exp\left\{\int\limits_x^{\lambda x} \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\}\right)}{f_1(f_2(x))} \\
&= \frac{f_1(f_2(x)\, g(\lambda, x))}{f_1(f_2(x))}
\end{aligned}$$

donde $g(\lambda, x) = \lambda^{\rho_2} \frac{c_2(\lambda x)}{c_2(x)} \exp\left\{\int\limits_x^{\lambda x} \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\}$, y entonces $\lim\limits_{x\to\infty} g(\lambda, x) = \lambda^{\rho_2}$.

Aplicamos el Teorema de Caracterización a $f_1(x)$,

$$\begin{aligned}
\frac{f_1(f_2(x)\, g(\lambda, x))}{f_1(f_2(x))} &= \frac{(f_2(x)\, g(\lambda, x))^{\rho_1} l_1(f_2(x)\, g(\lambda, x))}{(f_2(x))^{\rho_1} l_1(f_2(x))} \\
&= \frac{(g(\lambda, x))^{\rho_1} l_1(f_2(x)\, g(\lambda, x))}{l_1(f_2(x))}.
\end{aligned}$$

Ahora tomamos el límite cuando x tiende a infinito. Dado que $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \infty$ y por la proposición (1), inciso iii), se tiene,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{l_1(f_2(x)\, g(\lambda, x))}{l_1(f_2(x))} = 1$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to\infty} (g(\lambda, x))^{\rho_1} = \lambda^{\rho_1\rho_2}.$$

Concluyendo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f_1(f_2(\lambda x))}{f_1(f_2(x))} &= \lim_{x\to\infty} \frac{f_1(f_2(x)\, g(\lambda, x))}{f_1(f_2(x))} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(g(\lambda, x))^{\rho_1}\, l_1(f_2(x)\, g(\lambda, x))}{l_1(f_2(x))} \\
&= \lambda^{\rho_1\rho_2}
\end{aligned}$$

lo que implica $f_1(f_2(x)) \in R_{\rho_1\rho_2}$.

iii) Sin pérdida de generalidad, supondremos que ρ_1 es mayor que ρ_2, es decir $\rho_1 = \max\{\rho_1, \rho_2\}$. Por el Teorema de Caracterización:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_1(\lambda x) + f_2(\lambda x)}{f_1(x) + f_2(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\lambda x)^{\rho_1}\, l_1(\lambda x) + (\lambda x)^{\rho_2}\, l_2(\lambda x)}{(x)^{\rho_1}\, l_1(x) + (x)^{\rho_2}\, l_2(x)}. \qquad (2.10)$$

Usando el teorema de Bruijn, si $l' \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ es la función de variación lenta tal que $l_1 \sim l'$ y $l_2 \sim l'$, (2.10) se simplifica a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left[\left(\frac{l'(\lambda x)}{l'(x)}\right)\left(\frac{(\lambda x)^{\rho_1} + (\lambda x)^{\rho_2}}{(x)^{\rho_1} + (x)^{\rho_2}}\right)\right] &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{l'(\lambda x)}{l'(x)}\right) \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(\lambda x)^{\rho_1} + (\lambda x)^{\rho_2}}{(x)^{\rho_1} + (x)^{\rho_2}}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(\lambda x)^{\rho_1} + (\lambda x)^{\rho_2}}{(x)^{\rho_1} + (x)^{\rho_2}}\right) \\
&\quad \lim_{x\to\infty} \frac{(\lambda x)^{\rho_1}\left(1 + (\lambda x)^{\rho_2-\rho_1}\right)}{(x)^{\rho_1}\left(1 + (x)^{\rho_2-\rho_1}\right)} \\
&= \lambda^{\rho_1} \lim_{x\to\infty} \frac{1 + (\lambda x)^{\rho_2-\rho_1}}{1 + (x)^{\rho_2-\rho_1}} \quad (\rho_2 - \rho_1 < 0)
\end{aligned}$$

$$= \lambda^{\rho_1}$$

lo que implica $f_1 + f_2 \in R_\rho$, donde $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$.

iv) Sea $r(x_1, ..., x_k) = \frac{a_1 \cdot x_1 + ... + a_k \cdot x_k}{b_1 \cdot x_1 + ... + b_k \cdot x_k}$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{r(f_1(\lambda x_1), ..., f_k(\lambda x_k))}{r(f_1(x_1), ..., f_k(x_k))} &= \lim_{x\to\infty} \frac{a_1 \cdot f_1(\lambda x_1) + ... + a_k \cdot f_k(\lambda x_k)}{b_1 \cdot f_1(\lambda x_1) + ... + b_k \cdot f_k(\lambda x_k)} \cdot \frac{b_1 \cdot f_1(x_1) + ... + b_k \cdot f_k(x_k)}{a_1 \cdot f_1(x_1) + ... + a_k \cdot f_k(x_k)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{a_1 b_1 \cdot f_1(\lambda x_1) f_1(x_1) + ... + a_k b_k \cdot f_k(\lambda x_k) f_k(x_k)}{a_1 b_1 \cdot f_1(\lambda x_1) f_1(x_1) + ... + a_k b_k \cdot f_k(\lambda x_k) f_k(x_k)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

de donde se concluye $r(x_1, ..., x_k) \in R$. ∎

Capítulo 3

Generalizaciones del Teorema del Límite Central

Una vez estudiado el teorema del límite central, consideramos el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\varphi(S_n)-b_n}{a_n}\leq x\right)=L(x) \tag{3.1}$$

en donde al igual que antes $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con varianza finita, $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de reales con $a_n>0$ para toda $n\in\mathbb{N}$. Entonces surge la pregunta. ¿Bajo qué condiciones de $\varphi(x)$, se asegura la existencia de sucesiones de constantes $a_n>0$, y b_n tales que el límite (3.1) exista?

En este capítulo presentaremos condiciones suficientes sobre $\varphi^{-1}(x)$, para que el límite (3.1) exista cuando $L(x)$ tiene la distribución normal $(0,1)$, denotada por $\Phi(x)$, y cuando las X_i's tengan una distribución diferente de la exponencial y con esperanza μ positiva. El caso exponencial ha sido estudiado en [6].

En adelante S_n denotará la suma $\sum_{i=1}^{n}X_i$ de variables aleatorias X_i's independientes e identicamente distribuidas, esperanza $\mu>0$ y varianza $\sigma^2<\infty$.

A continuación demostraremos un lema que relaciona funciones diferenciables con funciones de variación regular, el cual usaremos posteriormente en las pruebas de los teoremas que enuncian las generalizaciones del TLC que buscamos.

En adelante la función $h(x)$ denotará a una función real positiva no decreciente con valores en el intervalo (x, ∞) con $x > 0$, y tal que $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$.

Lema 9 *Sea $h(x)$ una función diferenciable en el intervalo (x_0, ∞), con $x_0 > 0$.*

i) *Si para algún $\alpha \in (0, \infty)$*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{th'(t)}{h(t)} = \alpha. \tag{3.2}$$

Entonces $h(x)$ es una función de variación regular en infinito con índice α.

ii) *Si $h'(x)$ es una función monótona y $h(x)$ es de variación regular en infinito con índice α, entonces (3.2) se cumple.*

Demostración.

i) Por hipótesis tenemos que dado $\varepsilon > 0$, existe un $t_0 > 0$, tal que si $t \geq t_0$

$$\left| \frac{th'(t)}{h(t)} - \alpha \right| < \varepsilon$$

es decir, para $t \geq t_0$

$$\alpha - \varepsilon < \frac{th'(t)}{h(t)} < \varepsilon + \alpha$$

$$\frac{\alpha - \varepsilon}{t} < \frac{h'(t)}{h(t)} < \frac{\varepsilon + \alpha}{t} \tag{3.3}$$

si tomamos $x > 1$,

$$\begin{aligned}
(\alpha - \varepsilon) \int_t^{tx} \frac{du}{u} &\leq \int_t^{tx} \frac{h'(u)}{h(u)} du \leq (\alpha + \varepsilon) \int_t^{tx} \frac{du}{u} \\
(\alpha - \varepsilon) \log \frac{tx}{t} &\leq \int_t^{tx} \frac{h'(u)}{h(u)} du \leq (\alpha + \varepsilon) \log \frac{tx}{t} \\
\exp\left[(\alpha - \varepsilon) \log x\right] &\leq \exp\left[\int_t^{tx} \frac{h'(u)}{h(u)} du\right] \leq \exp\left[(\alpha + \varepsilon) \log x\right].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Por otra parte

$$\frac{h(tx)}{h(t)} = \exp\{\log(h(tx)) - \log(h(t))\} = \exp\left\{\int_t^{tx} \frac{h'(u)}{h(u)} du\right\}.$$

De (3.4) se deduce entonces

$$\exp[(\alpha-\varepsilon)\log x] \leq \frac{h(tx)}{h(t)} \leq \exp[(\alpha+\varepsilon)\log x]$$

es decir,

$$x^{\alpha-\varepsilon} \leq \frac{h(tx)}{h(t)} \leq x^{\alpha+\varepsilon}.$$

Como $\lim_{\varepsilon\to 0} x^{\alpha+\varepsilon} = x^{\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} x^{\alpha-\varepsilon}$ tenemos que para toda $t \geq t_0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^{\alpha} \text{ para toda } x > 1. \tag{3.5}$$

Si $x \in (0,1)$ como $tx < t$, de (3.3) se obtiene

$$(\alpha-\varepsilon)\int_{tx}^{t} \frac{du}{u} \leq \int_{tx}^{t} \frac{h'(u)}{h(u)} du \leq (\alpha+\varepsilon)\int_{tx}^{t} \frac{du}{u}$$

de ahí que

$$\begin{aligned}
-(\alpha-\varepsilon)\int_{tx}^{t} \frac{du}{u} &\geq -\int_{tx}^{t} \frac{h'(u)}{h(u)} du \geq -(\alpha+\varepsilon)\int_{tx}^{t} \frac{du}{u} \\
-(\alpha-\varepsilon)\log\frac{1}{x} &\geq -\int_{tx}^{t} \frac{h'(u)}{h(u)} du \geq -(\alpha+\varepsilon)\log\frac{1}{x} \\
\exp\left[-(\alpha-\varepsilon)\log\frac{1}{x}\right] &\geq \exp\left[-\int_{tx}^{t} \frac{h'(u)}{h(u)} du\right] \geq \exp\left[-(\alpha+\varepsilon)\log\frac{1}{x}\right].
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
\frac{h(tx)}{h(t)} &= \exp\{\log(h(tx)) - \log(h(t))\} \\
&= \exp\left\{\int_t^{tx} \frac{h'(u)}{h(u)} du\right\} \\
&= \exp\left\{-\int_{tx}^{t} \frac{h'(u)}{h(u)} du\right\}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\exp\left[-(\alpha+\varepsilon)\log\frac{1}{x}\right] &\leq \frac{h(tx)}{h(t)} \leq \exp\left[-(\alpha-\varepsilon)\log\frac{1}{x}\right] \\
\left(\frac{1}{x}\right)^{-(\alpha+\varepsilon)} &\leq \frac{h(tx)}{h(t)} \leq \left(\frac{1}{x}\right)^{-(\alpha-\varepsilon)}
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
x^{\alpha+\varepsilon} \leq \frac{h(tx)}{h(t)} \leq x^{\alpha-\varepsilon}.
$$

Procediendo como antes, tenemos que

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^{\alpha} \quad \text{para toda } x \in (0,1). \tag{3.6}
$$

De (3.5) y (3.6) vemos que $h(x)$ es una función de variación regular en infinito con índice α.

ii) Supongamos primero que $h'(x)$ es no creciente. Entonces para $x > 1$ y $t > 0$,

$$
\frac{h(tx)}{h(t)} - 1 = \frac{h(tx) - h(t)}{h(t)} = \frac{\int_t^{tx} h'(u)\,du}{h(t)} \leq \frac{h'(t)}{h(t)}(tx - t)
$$

así,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{h(tx)}{h(t)}-1=\liminf_{t\to\infty}\frac{h(tx)}{h(t)}-1=x^{\alpha}-1\leq\liminf_{t\to\infty}\frac{h'(t)}{h(t)}t(x-1)$$

entonces,

$$\frac{x^{\alpha}-1}{x-1}\leq\liminf_{t\to\infty}\frac{h'(t)}{h(t)}t$$

y

$$\alpha=\lim_{x\to1}\frac{x^{\alpha}-1}{x-1}\leq\liminf_{t\to\infty}\frac{h'(t)}{h(t)}t. \tag{3.7}$$

Similarmente, para $x<1$ y $t>0$,

$$1-\frac{h(tx)}{h(t)}=\frac{h(t)-h(tx)}{h(t)}=\frac{\int_{tx}^{t}h'(u)\,du}{h(t)}\geq\frac{h'(t)}{h(t)}(t-tx)$$

haciendo $t\to\infty$,

$$1-\limsup_{t\to\infty}\frac{h(tx)}{h(t)}=1-\lim_{t\to\infty}\frac{h(tx)}{h(t)}=1-x^{\alpha}\geq\limsup_{t\to\infty}\frac{h'(t)}{h(t)}t(1-x)$$

entonces,

$$\frac{1-x^{\alpha}}{1-x}\geq\limsup_{t\to\infty}\frac{h'(t)}{h(t)}t$$

y

$$\alpha=\lim_{x\to1}\frac{1-x^{\alpha}}{1-x}\geq\limsup_{t\to\infty}\frac{h'(t)}{h(t)}t. \tag{3.8}$$

De (3.7) y (3.8),

$$\alpha\leq\liminf_{t\to\infty}\frac{h'(t)}{h(t)}t\leq\limsup_{t\to\infty}\frac{h'(t)}{h(t)}t\leq\alpha$$

lo que implica,

$$\alpha = \lim_{t\to\infty} \frac{h'(t)}{h(t)} t.$$

Supongamos ahora que $h'(x)$ es no decreciente. Entonces para $x > 1$ y $t > 0$,

$$\frac{h(tx)}{h(t)} - 1 = \frac{h(tx) - h(t)}{h(t)} = \frac{\int_t^{tx} h'(u)\,du}{h(t)} \geq \frac{h'(t)}{h(t)} (tx - t)$$

así,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} - 1 = \limsup_{t\to\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} - 1 = x^{\alpha} - 1 \geq \limsup_{t\to\infty} \frac{h'(t)}{h(t)} t(x-1)$$

entonces,

$$\frac{x^{\alpha} - 1}{x - 1} \geq \limsup_{t\to\infty} \frac{h'(t)}{h(t)} t$$

y

$$\alpha = \lim_{x\to 1} \frac{x^{\alpha} - 1}{x - 1} \geq \limsup_{t\to\infty} \frac{h'(t)}{h(t)} t. \tag{3.9}$$

Similarmente, para $x < 1$ y $t > 0$,

$$1 - \frac{h(tx)}{h(t)} = \frac{h(t) - h(tx)}{h(t)} = \frac{\int_{tx}^{t} h'(u)\,du}{h(t)} \leq \frac{h'(t)}{h(t)} (t - tx)$$

haciendo $t \to \infty$,

$$1 - \liminf_{t\to\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = 1 - \lim_{t\to\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = 1 - x^{\alpha} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{h'(t)}{h(t)} t(1-x)$$

entonces,

$$\frac{1 - x^{\alpha}}{1 - x} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{h'(t)}{h(t)} t$$

$$\alpha = \lim_{x\to 1} \frac{1 - x^{\alpha}}{1 - x} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{h'(t)}{h(t)} t. \tag{3.10}$$

De (3.9) y (3.10) se tiene,

$$\alpha \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{h'(t)}{h(t)} t \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{h'(t)}{h(t)} t \leq \alpha$$

de donde,

$$\alpha = \lim_{t\to\infty} \frac{h'(t)}{h(t)} t.$$

Con lo que termina la demostración. ■

Una vez obtenido este resultado, presentamos tres teoremas que nos dan condiciones suficientes sobre la función $\varphi^{-1}(x)$ para que existan sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tales que el límite (3.1) es cierto cuando $L(x) = \Phi(x)$, la función de distribución de una normal estandar.

Teorema 11 *Sea $h(x)$ una función diferenciable en (x_0, ∞) para cierto $x_0 > 0$. Si*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{th'(t)}{h(t)} = \alpha \qquad \textit{con } \alpha \in (0,\infty),$$

entonces para $\varphi(x) = h^{-1}(x)$ y $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\varphi(S_n) - b_n}{a_n} \leq x\right) = \Phi(x),$$

donde $b_n = \varphi(n\mu)$ y $a_n = \frac{\sigma b_n}{\alpha\mu\sqrt{n}}$.

Demostración.

Primero verificaremos que en efecto la función inversa de h existe. Por hipótesis sabemos que para $0 < \varepsilon < \alpha$, existe $t_0 > 0$ tal que si $t \geq t_0$

$$\left|\frac{th'(t)}{h(t)} - \alpha\right| < \varepsilon$$

es decir, para $t \geq t_0$

$$\frac{\alpha - \varepsilon}{t} < \frac{h'(t)}{h(t)} < \frac{\alpha + \varepsilon}{t}$$

y como h es positiva

$$h(t)\frac{(\alpha-\varepsilon)}{t} < h'(t) < h(t)\frac{(\alpha+\varepsilon)}{t}.$$

Pero $(\alpha-\varepsilon)>0$, por lo tanto $h'(t)>0$. Es decir, h es estrictamente creciente en el intervalo (t_0,∞) y por lo tanto la función inversa existe ahí.

obsérvese que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{\varphi(S_n)-b_n}{a_n}\leq x\right) &= \mathbb{P}\left(\varphi(S_n)\leq xa_n+b_n\right)\\
&= \mathbb{P}\left(S_n\leq h(xa_n+b_n)\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leq\frac{h(xa_n+b_n)-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h(a_nx+b_n)-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}=x \tag{3.11}$$

es decir, que para $\varepsilon=\frac{1}{k}$ existe una $N_k\in\mathbb{N}$ tal que para toda $n>N_k$

$$\left|\frac{h(a_nx+b_n)-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}-x\right|<\frac{1}{k}$$

o sea

$$x-\frac{1}{k}<\frac{h(a_nx+b_n)-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}<x+\frac{1}{k}.$$

Entonces definiendo $g_n=\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ se tiene,

$$\mathbb{P}\left(g_n\leq x-\frac{1}{k}\right) \leq \mathbb{P}\left(g_n\leq\frac{h(a_nx+b_n)-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\leq\mathbb{P}\left(g_n\leq x+\frac{1}{k}\right)$$

para esa ε fija, hacemos $n\to\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(g_n \leq x - \frac{1}{k}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(g_n \leq \frac{h\left(a_n x + b_n\right) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(g_n \leq x + \frac{1}{k}\right)$$

y por el teorema del límite central,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(g_n \leq x - \frac{1}{k}\right) \;=\; \Phi\left(x - \frac{1}{k}\right)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(g_n \leq x + \frac{1}{k}\right) = \Phi\left(x + \frac{1}{k}\right)$$

por lo tanto

$$\Phi\left(x - \frac{1}{k}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(g_n \leq \frac{h\left(a_n x + b_n\right) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \leq \Phi\left(x + \frac{1}{k}\right).$$

Como esto último es cierto para cualquier k, hacemos $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty} \Phi\left(x - \frac{1}{k}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(g_n \leq \frac{h\left(a_n x + b_n\right) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \Phi\left(x + \frac{1}{k}\right)$$

y de ahí,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{h\left(a_n x + b_n\right) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(x\right)$$

que es lo que queremos demostrar. Vemos entonces que basta con probar que (3.11) se cumple bajo la hipótesis (3.2).

Sea $x_n = a_n x + b_n$,

$$\frac{h\left(x_n\right) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \;=\; \frac{h(x_n) - h\left(b_n\right)}{\frac{\sigma\sqrt{h(b_n)}}{\sqrt{\mu}}} \tag{3.12}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\mu}\left(h\left(x_n\right)-h\left(b_n\right)\right)}{\sigma\sqrt{h\left(b_n\right)}} \\
&= \frac{\sqrt{\mu}}{\sigma}\left(\sqrt{h\left(x_n\right)}-\sqrt{h\left(b_n\right)}\right)\left(1+\sqrt{\frac{h\left(x_n\right)}{h\left(b_n\right)}}\right).
\end{aligned}
$$

Entonces demostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{h\left(x_n\right)}-\sqrt{h\left(b_n\right)}=\frac{\sigma}{2\sqrt{\mu}}x$ y $\lim\limits_{n\to\infty}1+\sqrt{\frac{h(x_n)}{h(b_n)}}=2$. Para el primer límite consideramos la siguiente igualdad,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{h\left(x_n\right)}-\sqrt{h\left(b_n\right)} &= \int_{b_n}^{x_n}\frac{h'\left(u\right)}{2\sqrt{h\left(u\right)}}du \\
&= \int_{b_n}^{x_n}\frac{uh'\left(u\right)}{2h\left(u\right)}\sqrt{h\left(u\right)}\frac{du}{u}.
\end{aligned}
$$

Como $h\left(x\right)$ es creciente, entonces $h^{-1}\left(x\right)$ también lo es. Además $h^{-1}\left(n\mu\right)=b_n\to\infty$ cuando $n\to\infty$. Por (3.3) y por la igualdad anterior, tenemos que para todo $\varepsilon\in\mathbb{R}$ tal que $0<\varepsilon<\alpha$ y n suficientemente grande,

$$
(\alpha-\varepsilon)\int_{b_n}^{x_n}\frac{\sqrt{h\left(u\right)}}{2u}du\leq\sqrt{h\left(x_n\right)}-\sqrt{h\left(b_n\right)}\leq(\alpha+\varepsilon)\int_{b_n}^{x_n}\frac{\sqrt{h\left(u\right)}}{2u}du \tag{3.13}
$$

como $\sqrt{h\left(u\right)}$ es una función no decreciente, podemos acotar las integrales :

$$
\begin{aligned}
(\alpha-\varepsilon)\int_{b_n}^{x_n}\frac{\sqrt{h\left(u\right)}}{2u}du &\geq \frac{(\alpha-\varepsilon)}{2}\sqrt{h\left(b_n\right)}\int_{b_n}^{x_n}\frac{du}{u} \\
&= \frac{(\alpha-\varepsilon)}{2}\sqrt{h\left(b_n\right)}\log\left(\frac{x_n}{b_n}\right) \\
&= \frac{(\alpha-\varepsilon)}{2}\sqrt{h\left(b_n\right)}\log\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)
\end{aligned}
$$

y

$$
(\alpha+\varepsilon)\int_{b_n}^{x_n}\frac{\sqrt{h\left(u\right)}}{2u}du \leq \frac{(\alpha+\varepsilon)}{2}\sqrt{h\left(x_n\right)}\int_{b_n}^{x_n}\frac{du}{u}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\alpha+\varepsilon)}{2}\sqrt{h(x_n)}\log\left(\frac{x_n}{b_n}\right) \\
&= \frac{(\alpha+\varepsilon)}{2}\sqrt{h(x_n)}\log\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\frac{(\alpha-\varepsilon)}{2}\sqrt{h(b_n)}\log\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right) &\leq \sqrt{h(x_n)}-\sqrt{h(b_n)} \\
&\leq \frac{(\alpha+\varepsilon)}{2}\sqrt{h(x_n)}\log\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right).
\end{aligned}
$$

Multiplicando y dividiendo por $\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sigma}{\alpha\mu\sqrt{n}}$,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{h(x_n)}-\sqrt{h(b_n)} &\leq \frac{a_n}{b_n}\frac{(\alpha+\varepsilon)}{2}\sqrt{h(x_n)}\log\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)^{\frac{b_n}{a_n}} \\
&= \left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\mu}}\right)\sqrt{\frac{h(x_n)}{h(b_n)}}\log\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)^{\frac{b_n}{a_n}}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\sqrt{h(x_n)}-\sqrt{h(b_n)} &\geq \frac{a_n}{b_n}\frac{(\alpha-\varepsilon)}{2}\sqrt{h(b_n)}\log\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)^{\frac{b_n}{a_n}} \\
&= \left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\mu}}\right)\log\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)^{\frac{b_n}{a_n}}
\end{aligned}
$$

de ahí que,

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\mu}}\right)\log\left(1+\frac{x}{\frac{b_n}{a_n}}\right)^{\frac{b_n}{a_n}} &\leq \sqrt{h(x_n)}-\sqrt{h(b_n)} \\
&\leq \left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\mu}}\right)\sqrt{\frac{h(x_n)}{h(b_n)}}\log\left(1+\frac{x}{\frac{b_n}{a_n}}\right)^{\frac{b_n}{a_n}} \quad (3.14)
\end{aligned}
$$

Como $\frac{b_n}{a_n} = \frac{\alpha\mu\sqrt{n}}{\sigma} \to \infty$ cuando n tiende a infinito y por el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x$$

vemos que tomando límite cuando n tiende a infinito en (3.14), obtenemos,

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\mu}}\right)x &\leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt{h(x_n)} - \sqrt{h(b_n)} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt{h(x_n)} - \sqrt{h(b_n)} \\ &\leq \left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\mu}}\right)x \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{h(x_n)}{h(b_n)}}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h(x_n)}{h(b_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{h\left(b_n\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)\right)}{h(b_n)}$$

y como $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sigma}{\alpha\mu\sqrt{n}} \to 0$ cuando n es grande,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right) = 1.$$

Lo que implica que para toda $\varepsilon > 0$, existe una $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > N$

$$1-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n}x + 1 < 1+\varepsilon.$$

Entonces, si multiplicamos por b_n, que para n grande es positivo,

$$b_n(1-\varepsilon) < b_n(\frac{a_n}{b_n}x+1) < b_n(1+\varepsilon)$$

aplicamos la función $h(x)$ que es no decreciente,

$$h\left[b_n(1-\varepsilon)\right] \leq h\left[b_n\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)\right] \leq h\left[b_n(1+\varepsilon)\right]$$

y finalmente dividimos por $h(b_n)$ que es positivo para n grande, obtenemos

$$\frac{h\left[b_n(1-\varepsilon)\right]}{h(b_n)} \leq \frac{h\left[b_n\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)\right]}{h(b_n)} \leq \frac{h\left[b_n(1+\varepsilon)\right]}{h(b_n)}.$$

Por la primera parte del lema (9), sabemos que $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\alpha$, y como $b_n \to \infty$ cuando n tiende a infinito, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{h\left[b_n(1-\varepsilon)\right]}{h(b_n)} &= (1-\varepsilon)^\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{h\left[b_n\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)\right]}{h(b_n)} \\
\limsup_{n\to\infty} \frac{h\left[b_n\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)\right]}{h(b_n)} &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{h\left[b_n(1+\varepsilon)\right]}{h(b_n)} = (1+\varepsilon)^\alpha .
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)^\alpha = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)^\alpha = 1$, se tiene

$$1 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{h\left[b_n\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)\right]}{h(b_n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{h\left[b_n\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)\right]}{h(b_n)} \leq 1$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h\left[b_n\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)\right]}{h(b_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{h(x_n)}{h(b_n)} = 1. \tag{3.16}$$

Entonces como la función raíz cuadrada es continua y el límite de $\frac{h(x_n)}{h(b_n)}$ cuando n tiende a infinito existe, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{h(x_n)}{h(b_n)}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h(x_n)}{h(b_n)}} = 1$, y así

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt{h(x_n)} - \sqrt{h(b_n)} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\mu}}\right)x.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ en (3.15), concluimos que

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt{h(x_n)} - \sqrt{h(b_n)} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt{h(x_n)} - \sqrt{h(b_n)} = \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\mu}}\right) x. \qquad (3.17)$$

Por lo que de $(3.17), (3.16), (3.12)$ obtenemos (3.11) :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{h(a_n x + b_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\mu}}{\sigma} \left(\sqrt{h(x_n)} - \sqrt{h(b_n)}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{h(x_n)}{h(b_n)}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\mu}}{\sigma} \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\mu}} x\right) (1+1) = x
\end{aligned}$$

como queríamos. ∎

Ejemplo 1. Sea $h(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$, con $\alpha > 0$. Entonces $h'(x) = \frac{1}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1}$ y $h^{-1}(x) = x^{\alpha}$. Vemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x h'(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}}}{x^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{\alpha}$$

y por el teorema (11),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n^{\alpha} - (n\mu)^{\alpha}}{\alpha\sigma (n\mu)^{\alpha} / \mu\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Corolario 1 *Sea $h(x)$ una función diferenciable en el intervalo (x_0, ∞) con $x_0 > 0$. Si $h(x)$ es de variación regular con índice $\alpha > 0$, y $h'(x)$ es monótona, entonces lo enunciado en el teorema* (11) *se cumple.*

Demostración. Por el lema (9) segunda parte, sabemos que $\lim_{t\to\infty} \frac{t h'(t)}{h(t)} = \alpha$, que es la hipótesis que se necesita para obtener el resultado del teorema anterior. ∎

Teorema 12 *Sea $h(x)$ una función diferenciable en el intervalo (x_0, ∞) con $x_0 \ge 0$.*

Si

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h'(t)}{t^{\beta} h(t)} = \alpha, \ \ \textit{con}\ \alpha > 0\ \textit{y}\ \beta > -1 \tag{3.18}$$

entonces para $\varphi(x) = h^{-1}(x)$ *se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\varphi(S_n) - b_n}{a_n} \leq x\right) = \Phi(x)$$

donde $b_n = \varphi(n\mu)$ *y* $a_n = \frac{\sigma}{\alpha\mu b_n^{\beta}\sqrt{n}}$.

Demostración.

Por hipótesis tenemos que dado $0 < \varepsilon < \alpha$, existe $t_0 > 0$ tal que si $t > t_0$

$$\left|\frac{h'(t)}{t^{\beta} h(t)} - \alpha\right| < \varepsilon$$

es decir, para todo $t \geq t_0$

$$\alpha - \varepsilon < \frac{h'(t)}{t^{\beta} h(t)} < \alpha + \varepsilon.$$

Por ser h positiva, multiplicamos por $t^{\beta} h(t)$ que es positivo, y no se altera la desigualdad,

$$t^{\beta} h(t)(\alpha - \varepsilon) < h'(t) < t^{\beta} h(t)(\alpha + \varepsilon).$$

Como $(\alpha - \varepsilon) > 0$, se tiene que $h'(t) > 0$, lo que no dice que la función h es estrictamente creciente y por lo tanto que la inversa existe.

obsérvese que como en la demostración del teorema anterior, bastará con probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(a_n x + b_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = x.$$

Sea $x_n = a_n x + b_n$, entonces

$$\frac{h(x_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{h(x_n) - h(b_n)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\left[\frac{h(x_n) - h(b_n)}{h(b_n)}\right] = \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\left[\frac{h(x_n)}{h(b_n)} - 1\right]. \tag{3.19}$$

Por otro lado,

$$\log\left(\frac{h(x_n)}{h(b_n)}\right) = \int_{b_n}^{x_n} \frac{h'(u)}{u^\beta h(u)} u^\beta du.$$

Por hipótesis, para $0 < \varepsilon < \alpha$ y para n suficientemente grande,

$$(\alpha - \varepsilon) \int_{b_n}^{x_n} u^\beta du \leq \log\left(\frac{h(x_n)}{h(b_n)}\right) \leq (\alpha + \varepsilon) \int_{b_n}^{x_n} u^\beta du. \tag{3.20}$$

También notemos que,

$$\begin{aligned}
\int_{b_n}^{x_n} u^\beta du &= \frac{1}{\beta+1}\left(x_n^{\beta+1} - b_n^{\beta+1}\right) \\
&= \frac{b_n^{\beta+1}}{\beta+1}\left(\frac{x_n^{\beta+1} - b_n^{\beta+1}}{b_n^{\beta+1}}\right) \\
&= \frac{b_n^{\beta+1}}{\beta+1}\left(\frac{(a_n x + b_n)^{\beta+1}}{b_n^{\beta+1}} - 1\right) \\
&= \frac{b_n^{\beta+1}}{\beta+1}\left[\left(\frac{a_n}{b_n}x + 1\right)^{\beta+1} - 1\right] \\
&= \frac{b_n^{\beta+1}}{\beta+1}\left[\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x + 1\right)^{\beta+1} - 1}{\frac{a_n}{b_n}x}\right]\frac{a_n}{b_n}x \\
&= \frac{1}{\beta+1}\left[\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x + 1\right)^{\beta+1} - 1}{\frac{a_n}{b_n}x}\right]\frac{\sigma x}{\alpha\mu\sqrt{n}}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Como $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sigma}{\alpha\mu b_n^{\beta+1}\sqrt{n}} \to 0$ cuando n tiende a infinito, y por el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\beta+1} - 1}{x} = \beta + 1 \tag{3.22}$$

vemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{b_n}^{x_n} u^\beta du = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sigma x}{\alpha\mu\sqrt{n}} = 0$.

Entonces por (3.20) se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} \log \frac{h(x_n)}{h(b_n)} = 0$, y que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h(x_n)}{h(b_n)} = 1$. Además $\frac{h(x_n)}{h(b_n)}$ se acerca a 1 por la derecha, ya que $x_n > b_n$ y como h es no decreciente, $h(x_n) > h(b_n)$

implica que $\frac{h(x_n)}{h(b_n)} > 1$, y así $\log\left[\frac{h(x_n)}{h(b_n)}\right] > 0$.

Dado que $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z-1}{\log z} = 1$, sustituyendo a z por $\frac{h(x_n)}{h(b_n)}$, tenemos que para n suficientemente grande y $0 < \varepsilon < 1$

$$(1-\varepsilon)\log\left[\frac{h(x_n)}{h(b_n)}\right] < \frac{h(x_n)}{h(b_n)} - 1 < \log\left[\frac{h(x_n)}{h(b_n)}\right](\varepsilon+1).$$

Debido a esto y a (3.19),

$$\frac{h(x_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\left[\log\left[\frac{h(x_n)}{h(b_n)}\right](\varepsilon+1)\right].$$

Por (3.20) y para n suficientemente grande,

$$\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\left[\log\left[\frac{h(x_n)}{h(b_n)}\right](\varepsilon+1)\right] \leq \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\left[(\alpha+\varepsilon)\int_{b_n}^{x_n} u^\beta du\right](\varepsilon+1)$$

y por (3.21),

$$\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\left[(\alpha+\varepsilon)\int_{b_n}^{x_n} u^\beta du\right](\varepsilon+1) = \left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)(\varepsilon+1)\frac{1}{\beta+1}\left[\frac{\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)^{\beta+1}-1}{\frac{a_n}{b_n}x}\right]x.$$

Utilizando la definición de límite y (3.22),

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)(\varepsilon+1)\frac{1}{\beta+1}\left[\frac{\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)^{\beta+1}-1}{\frac{a_n}{b_n}x}\right]x \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)(\varepsilon+1)^2 x$$

teniendo así que

$$\frac{h(x_n) - h(b_n)}{\sigma\sqrt{n}} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)(\varepsilon+1)^2 x. \tag{3.23}$$

Análogamente se obtiene la desigualdad por el otro lado,

$$\frac{h(x_n) - h(b_n)}{\sigma\sqrt{n}} \geq \left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)(\varepsilon-1)^2 x. \tag{3.24}$$

Finalmente, haciendo $\varepsilon \to 0$ y tomando el límite cuando n tiende a infinito en (3.23) y (3.24), se tiene lo que se quería demostrar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(x_n) - h(b_n)}{\sigma\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{h(a_n x + b_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = x. \blacksquare$$

Ejemplo 2. Sea $h(x) = e^{x^{\frac{1}{\alpha}}}, \alpha > 0$. Entonces $h'(x) = \frac{1}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}}$ y $h^{-1}(x) = (\log x)^{\alpha}$.

Vemos que la hipótesis del teorema (12) se cumple

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h'(x)}{x^{\beta} h(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}}}{x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}}} = \frac{1}{\alpha}$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[\frac{(\log S_n)^{\alpha} - (\log(n\mu))^{\alpha}}{\alpha\sigma/\mu\,(\log n\mu)^{1-\alpha}\sqrt{n}} \le x\right] = \Phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 13 *Sea $h(x)$ una función diferenciable en el intervalo (x_0, ∞) con x_0 un real positivo. Si*

i) $\lim_{t\to\infty} \frac{(\log t)^2}{h(t)} = 0$

ii) $\lim_{t\to\infty} \frac{t(\log t)\,h'(t)}{h(t)} = \alpha$

(3.25)

para alguna $\alpha \in (0,\infty)$, entonces para $\varphi(x) = h^{-1}(x)$ se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\varphi(S_n) - b_n}{a_n} \le x\right) = \Phi(x), x \in \mathbb{R}$$

con $b_n = \varphi(n\mu)$ y $a_n = \frac{\sigma b_n \log b_n}{\alpha\mu\sqrt{n}}$.

Demostración.

Notemos que por la hipótesis ii), tenemos que dado $0 < \varepsilon < \alpha$, existe $t_0 > 0$ tal que si $t > t_0$

$$\left| \frac{t(\log t)h'(t)}{h(t)} - \alpha \right| < \varepsilon$$

es decir, para $t \geq t_0$

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{t(\log t)h'(t)}{h(t)} \leq \varepsilon + \alpha$$

entonces,

$$\frac{h(t)}{t}(\alpha - \varepsilon) \leq (\log t)h'(t) \leq \frac{h(t)}{t}(\varepsilon + \alpha).$$

Pero si $t > 1$, $\log t > 0$. Entonces para toda $t > \max\{1, t_0\}$ se tiene

$$\frac{h(t)}{t(\log t)}(\alpha - \varepsilon) \leq h'(t) \leq \frac{h(t)}{t(\log t)}(\varepsilon + \alpha).$$

Por ser h una función positiva, $\alpha > \varepsilon$ y $t > 1$, se tiene que $h'(t) > 0$, para toda $t > \max\{1, t_0\}$, lo que implica que h es estrictamente creciente a partir del $\max\{1, t_0\}$ y por lo tanto que su inversa existe ahí.

Resulta claro entonces, que para la demostración de este teorema, como en las dos anteriores, bastará con demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(a_n x - b_n) - h(b_n)}{\sigma\sqrt{n}} = x.$$

Sea $x_n = a_n x + b_n$, entonces, como en (3.19),

$$\frac{h(x_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\left(\frac{h(x_n)}{h(b_n)} - 1\right). \tag{3.26}$$

Por otro lado,

$$\log\frac{h(x_n)}{h(b_n)} = \int_{b_n}^{x_n} \frac{h'(u)}{h(u)}du = \int_{b_n}^{x_n} \frac{u(\log u)h'(u)}{h(u)} \frac{du}{u\log u}$$

entonces para $0 < \varepsilon < \alpha$ y para n suficientemente grande, por (3.25),

$$(\alpha-\varepsilon)\int_{b_n}^{x_n}\frac{du}{u\log u}\le\log\frac{h(x_n)}{h(b_n)}\le(\alpha+\varepsilon)\int_{b_n}^{x_n}\frac{du}{u\log u}. \tag{3.27}$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito en (3.27) se sigue que $\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{h(x_n)}{h(b_n)}\right)=0$, lo que indica que $\lim_{n\to\infty}\frac{h(x_n)}{h(b_n)}=1$.

Ahora usaremos el resultado: $\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{\log z}=1$, que por definición dice que para $0<\varepsilon<\alpha$ existe $\delta>0$ tal que si $|z-1|<\delta$ entonces

$$\left|\frac{z-1}{\log z}-1\right|<\varepsilon$$

de donde, si $1<z<1+\delta$

$$(1-\varepsilon)\log z<z-1<(1+\varepsilon)\log z.$$

Sustituimos a z por $\frac{h(x_n)}{h(b_n)}>1$, con n suficientemente grande, que ya vimos también tiende a uno, y multiplicamos por $\left(\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right)$,

$$\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\left[(1-\varepsilon)\log\frac{h(x_n)}{h(b_n)}\right]<\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\left(\frac{h(x_n)}{h(b_n)}-1\right)<\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\left[(1+\varepsilon)\log\frac{h(x_n)}{h(b_n)}\right]$$

y por (3.27),

$$\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\alpha\int_{b_n}^{x_n}\frac{du}{u\log u}\le\frac{h(x_n)-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\alpha\int_{b_n}^{x_n}\frac{du}{u\log u}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\int_{b_n}^{x_n}\frac{du}{u\log u} &= \log\log u\,\big|_{b_n}^{x_n}=\log\log x_n-\log\log b_n\\ &= \log\left[\frac{\log x_n}{\log b_n}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \log\left[\frac{\log\left(b_n\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)\right)}{\log b_n}\right] \\
&= \log\left[\frac{\log b_n + \log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}\right] \\
&= \log\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}\right]. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Por (3.28),

$$
\begin{aligned}
\frac{h(x_n)-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} &\leq \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\alpha\log\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}\right] \\
\frac{h(x_n)-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} &\geq \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\alpha\log\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}\right]. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sigma \log b_n}{\alpha\mu\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\alpha\sqrt{\mu}}\left(\frac{(\log b_n)^2}{h(b_n)}\right)^{\frac{1}{2}}$, así por $i)$ y dado que $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, tenemos que

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sigma}{\alpha\mu}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\log b_n)^2}{h(b_n)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{\alpha\mu}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{(\log b_n)^2}{h(b_n)}\right]^{\frac{1}{2}} = 0.
$$

Entonces,

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{b_n}^{x_n}\frac{du}{u\log u} = \lim_{n\to\infty}\log\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}\right] = 0
$$

lo que implica,

$$
\lim_{n\to\infty} 1+\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n} = 1.
$$

Sustituyendo a z por $\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}\right)$, en el límite $\lim\limits_{z\to 1}\frac{\log z}{z-1}=1$, se tiene,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}\right]}{\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}}=1 \tag{3.30}$$

en donde $\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}=\frac{\log x_n-\log b_n}{\log b_n}=\frac{\log x_n}{\log b_n}-1>0$, pues $\frac{\log x_n}{\log b_n}>1$ ya que $\log x_n>\log b_n$ por ser $x_n>b_n$.

Usando la definición de límite y que $\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}>0$, en (3.30) tenemos que para n suficientemente grande

$$(1-\varepsilon)\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}\leq\log\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}\right]\leq(1+\varepsilon)\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}.$$

Nuevamente usando que $\lim\limits_{z\to 1}\frac{\log z}{z-1}=1$, pero con $z=1+\frac{a_n}{b_n}x$, se tiene,

$$(1-\varepsilon)\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)\leq\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)\leq(1+\varepsilon)\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)$$

por lo que

$$\begin{aligned}\log\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}\right] &\leq (1+\varepsilon)(1+\varepsilon)\frac{\frac{a_n}{b_n}x}{\log b_n}=(1+\varepsilon)^2\frac{\sigma}{\alpha\mu\sqrt{n}}x\\ \log\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{a_n}{b_n}x\right)}{\log b_n}\right] &\geq (1-\varepsilon)(1-\varepsilon)\frac{\frac{a_n}{b_n}x}{\log b_n}=(1-\varepsilon)^2\frac{\sigma}{\alpha\mu\sqrt{n}}x.\end{aligned}$$

Entonces, por la desigualdad (3.29), obtenemos,

$$\frac{h(x_n)-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\alpha(1+\varepsilon)^2\frac{\sigma}{\alpha\mu\sqrt{n}}x=(1+\varepsilon)^3\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)x$$

$$\frac{h\left(x_n\right)-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}\left(1-\varepsilon\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\alpha\left(1-\varepsilon\right)^2\frac{\sigma}{\alpha\mu\sqrt{n}}x=\left(1-\varepsilon\right)^3\left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)x.$$

Claramente si tomamos $\varepsilon \to 0$ y límite cuando n tiende a infinito, se tiene el resultado buscado

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h\left(x_n\right)-h\left(b_n\right)}{\sigma\sqrt{n}}=x. \blacksquare$$

Ejemplo 3. Sea $h\left(x\right)=\left(\log x\right)^{\gamma}$ donde $\gamma>2$. Entonces $h'\left(x\right)=\frac{\gamma}{x}\left(\log x\right)^{\gamma-1}$ y $h^{-1}\left(x\right)=\exp x^{\frac{1}{\gamma}}$. Verificamos que las hipótesis del teorema se cumplan:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{h(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{(\log x)^{\gamma}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\log x\right)^{2-\gamma}=0$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(\log x)h'(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(\log x)\frac{\gamma}{x}(\log x)^{\gamma-1}}{(\log x)^{\gamma}}=\gamma$

así, de acuerdo con el teorema (13)

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\exp\left\{S_n^{\frac{1}{\gamma}}\right\}-\exp\left\{\left(n\mu\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}}{\sigma\exp\left\{\left(n\mu\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}\left(n\mu\right)^{\frac{1}{\gamma}}/\gamma\mu\sqrt{n}}\leq x\right)=\Phi\left(x\right), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Apéndice

A continuación demostraremos que para toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua y de soporte compacto, y para toda $\epsilon > 0$, existe una función g de clase $C^1(\mathbb{R})$ y de soporte compacto, tal que $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - g(t)| < \frac{\epsilon}{4}$. Veremos que dicha g es la convolución de f con otra función específica que llamaremos α_ϵ. Antes de definir a tal función, hace falta enunciar la definición de convolución y demostrar algunas propiedades de ésta.

Definición 4 *La convolución de dos funciones f y g es la función*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

y se denota por $f * g$.

Un ejemplo notable se da cuando f y g son las densidades de dos variables aleatorias independientes X y Y respectivamente, entonces se tiene que $f * g$ es precisamente la densidad de la suma $X + Y$.

La convolución de funciones como operación binaria, cumple con ciertas propiedades tales como la conmutatividad y la asociatividad, que demostramos en la siguiente proposición :

Proposición 4 *Sean f, g y h funciones, entonces:*

i) $f * g = g * f$

ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$

Demostración.

i) $f * g(x) \quad = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(s)\, g(x-s)\, ds, \qquad (s = x-y)$$

$$= g * f(x)$$

ii) $(f * g) * h(x) \quad = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-z-y)\, g(y)\, dy\right)\; h(z)\; dz$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-s)\, g(s-z)\, ds\right)\; h(z)\; dz, \qquad (s = z+y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x-s) \left(\int_{\mathbb{R}} g(s-z)\, h(z)\; dz\right)\; ds, \qquad \text{(por Fubini)}$$

$$= f * (g * h)(x)\,. \blacksquare$$

Proposición 5 *Si f y g son funciones continuas, de soporte compacto K, y $f \in C^1(\mathbb{R})$, entonces $f * g$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$.*

Demostración.

Observemos que como f y g son continuas y de soporte compacto, entonces estan en L_1, es decir, $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx < \infty$.

Además son acotadas, de donde

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\, dy = \int_K f(y)\, dy \leq M_1 \lambda(K)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} g(y)\, dy = \int_K g(y)\, dy \leq M_2 \lambda(K)$$

con $\nu(K)$ la medida de Lebesque del compacto K.

Para poder hablar de la convolución de f y g, hay que ver que $f(x)$ es integrable con respecto a la medida $g(y)\, dy$. Esto es claro ya que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_K f(x-y)\, g(y)\, dy \leq \int_{\mathbb{R}} M_1 g(y)\, dy < \infty.$$

Entonces $\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy$ está bien definida como función de x. Con un argumento similar, y dado que la derivada de una función continua en un compacto es acotada, se ve que $\int_{\mathbb{R}} f'(x-y)\, g(y)\, dy$ también está bien definida.

Si $h(x) = (f * g)(x)$, entonces para toda $\varepsilon' > 0$, existe una $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon' = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\, gy$, y por la continuidad de f para esa $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $|x - z| < \delta$, entonces $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$. De donde,

$$|h(x) - h(z)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(z)|\, |g(y)|\, dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\, dy = \varepsilon'$$

De lo anterior se desprende que $h(x) = (f * g)(x)$ es una función continua. Por otro lado,

$$h'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{f(x + \varepsilon - y) - f(x - y)}{\varepsilon} \right] g(y)\, dy$$

y si tomamos una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$, y definimos una sucesión de funciones $\{h_n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $h_n(y) = \left[\frac{f(x+\varepsilon_n - y) - f(x-y)}{\varepsilon_n} \right] g(y)$, para cada n en $\mathbb{N}$. Se tiene que $\lim_{n \to \infty} h_n(y) = f'(x - y)\, g(y)$ que es integrable. Entonces por convergencia dominada

$$\begin{aligned} h'(x) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f(x + \varepsilon - y)\, g(y) - f(x - y)\, g(y)}{\varepsilon} \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f'(x - y)\, g(y)\, dy \end{aligned}$$

que en efecto es continua . Por lo tanto $f * g(x)$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$.■

Ahora definimos la siguiente función:

$$\alpha_\varepsilon(x) = \begin{cases} c \exp\left(-\frac{1}{\delta^2 - x^2} \right) & \text{si } |x| < \delta \\ 0 & \text{si } |x| \geq \delta \end{cases}$$

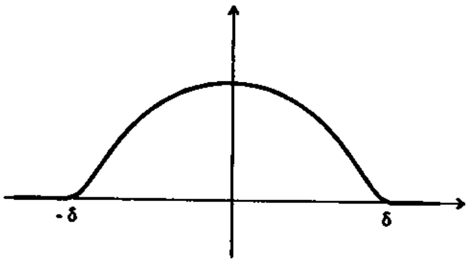

Figura 3 La función $\alpha_\varepsilon(x)$.

Veamos que $\alpha_\varepsilon(x)$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$.

Hay que demostrar entonces que α_ε es continua y con derivada continua en $x = \delta, -\delta$ ya que claramente lo es en los intervalos $(-\delta, \delta)$, $(-\infty, \delta)$ y (δ, ∞). Como es una función par, bastará con que lo probemos en el punto δ únicamente. Consideramos los siguientes límites:

$$\lim_{x \to \delta^+} \alpha_\varepsilon(x) = 0$$

y

$$\lim_{x \to \delta^-} \alpha_\varepsilon(x) = \lim_{x \to \delta^-} c \exp\left(\frac{1}{x^2 - \delta^2}\right) = 0$$

como ambos coinciden, se tiene que $\alpha_\varepsilon(x)$ es continua en δ, similarmente se obtiene la continuidad en $-\delta$. En el cero no hace falta probarlo ya que es función par. Por lo tanto $\alpha_\varepsilon(x)$ es continua.

Para calcular la derivada en $x = \delta$ consideramos los límites

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\alpha_\varepsilon(\delta + h) - \alpha_\varepsilon(\delta)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{0}{h} = 0$$

y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\alpha_\varepsilon(\delta + h) - \alpha_\varepsilon(\delta)}{h} = c \cdot \lim_{h \to 0^-} \frac{\exp\left(\frac{1}{(\delta+h)^2 - \delta^2}\right)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= c \cdot \lim_{h \to 0^-} \frac{\exp\left(\frac{1}{2\delta h + h^2}\right)}{h} \\
&= c \cdot \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{h}}{\exp\left(\frac{-1}{2\delta h + h^2}\right)} \\
&= c \cdot \lim_{h \to 0^-} \frac{-\frac{1}{h^2}}{\frac{-2(\delta+h)}{(2\delta h+h^2)^2} \exp\left(\frac{-1}{2\delta h + h^2}\right)} \quad \text{(por l'Hopital)} \\
&= c \cdot \lim_{h \to 0^-} \frac{(2\delta h + h^2)^2}{2h^2 (\delta + h) \exp\left(\frac{-1}{2\delta h + h^2}\right)} \\
&= c \cdot \lim_{h \to 0^-} \frac{4\delta^2 + 4\delta h + h^2}{2 (\delta + h) \exp\left(\frac{-1}{2\delta h + h^2}\right)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Como los dos límites son iguales, el límite cuando h tiende a cero existe y por lo tanto la función es derivable en δ, de igual forma es derivable en $-\delta$.

Finalmente hay que demostrar que la derivada $(\alpha_\varepsilon)'(x)$, es continua.

Se tiene que la derivada definida en $\mathbb{R}^+$ es

$$
(\alpha_\varepsilon)'(x) = \begin{cases} \frac{-2x \cdot c \exp\left(\frac{-1}{\delta^2 - x^2}\right)}{(\delta^2 - x^2)^2} & 0 \leq x < \delta \\ 0 & x \geq \delta \end{cases}
$$

que es claramente continua en $(0, \delta)$ y en (δ, ∞). Para verificar la continuidad en el punto δ, hace falta de un resultado que enunciamos en el siguiente lema.

Lema 10 *Para* $p \in \mathbb{N}$, *se tiene que* $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u^p} = 0.$

Demostración.

Lo haremos por inducción:

para $p = 1$,

$$
\lim_{u \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u^1} = \lim_{u \to 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{e^{\frac{1}{u}}} = \lim_{u \to 0^+} \frac{-u^{-2}}{\frac{1}{u^2} e^{\frac{1}{u}}} = \lim_{u \to 0^+} \frac{-1}{\frac{u^2}{u^2} e^{\frac{1}{u}}} = \lim_{u \to 0^+} \frac{-1}{e^{\frac{1}{u}}} = 0.
$$

Lo suponemos cierto para $p = n$.

Para $p = n + 1$ se tiene,

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u^{n+1}} = \lim_{u \to 0^+} \frac{\frac{1}{u^{n+1}}}{e^{\frac{1}{u}}} = \lim_{u \to 0^+} \frac{-(n+1)\, u^{-n-2}}{\frac{1}{u^2} e^{\frac{1}{u}}} = \lim_{u \to 0^+} -(n+1)\, u^{-n} e^{\frac{-1}{u}}$$

pero por hipótesis de inducción,

$$\lim_{u \to 0^+} -(n+1)\, u^{-n} e^{\frac{-1}{u}} = -(n+1) \lim_{u \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u^n} = 0. \blacksquare$$

Para verificar la continuidad en el punto δ, calculamos el límite por la izquierda de $(\alpha_\varepsilon)'(x)$

$$\lim_{x \to \delta^-} (\alpha_\varepsilon)'(x) = 2c \cdot \lim_{x \to \delta^-} \frac{x \exp\left(\frac{-1}{\delta^2 - x^2}\right)}{\left(\delta^2 - x^2\right)^2}$$

y por el lema anterior con $p = 2$ y $u = \delta^2 - x^2$ que en efecto decrece a cero cuando x crece a δ, se tiene

$$\lim_{x \to \delta^-} (\alpha_\varepsilon)'(x) = 0.$$

Además,

$$\lim_{x \to \delta^+} (\alpha_\varepsilon)'(x) = 0.$$

Dado que ambos límites son cero, tenemos que el límite en δ existe y por lo tanto que la función $(\alpha_\varepsilon)'(x)$ es continua en δ. Como lo mismo pasa para $\alpha_\varepsilon(x)$ definida en $\mathbb{R}^-$, se sigue que la función original $\alpha_\varepsilon(x)$ es continua y con derivada continua en los puntos δ y -δ, concluyendo que $\alpha_\varepsilon(x)$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$ por todo lo ya demostrado.

Cabe observar que $\alpha_\varepsilon(x)$ es una función positiva, de soporte compacto $[-\delta, \delta]$ y que la constante c puede tomarse de tal forma que $\int_{\mathbb{R}} \alpha_\varepsilon(u)\, du = c \int_{[-\delta,\delta]} \exp\left(\frac{-1}{\delta^2 - |u|^2}\right) du = 1$. Simplemente tomando $c = \left(\int_{[-\delta,\delta]} \exp\left(\frac{-1}{\delta^2 - |u|^2}\right) du\right)^{-1}$.

Ahora si tenemos todo lo necesario para demostrar que dada una función f continua y de soporte compacto, definida en los reales y una $\varepsilon > 0$, $g(x) = f * \alpha_\varepsilon(x)$ es una función de clase $C^1(\mathbb{R})$ y de soporte compacto tal que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Notemos que por la proposición 5, la convolución $f * \alpha_\varepsilon(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Además es de soporte compacto. Finalmente vemos que si tomamos el soporte de $\alpha_\varepsilon : [-\delta, \delta]$ con $\delta > 0$ la que se obtiene de la continuidad de f, es decir, la δ tal que dado un $\frac{\varepsilon}{4} > 0$, si $|s-t| < \delta$, entonces $|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Se tiene

$$
\begin{aligned}
|f * \alpha_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \{f(x-y) - f(x)\} \alpha_\varepsilon(y)\, dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| \alpha_\varepsilon(y)\, dy \\
&= \int_{[-\delta,\delta]} |f(x-y) - f(x)| \alpha_\varepsilon(y)\, dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}
$$

De donde, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f * \alpha_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Notación y resultados

- **Convergencias**

Definición 5 *Sean* $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. X_n *converge a* X :

1. *casi seguramente* $\left(X_n \xrightarrow{c.s.} X\right)$ si $\mathbf{P}\left(\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$
2. en $\mathcal{L}_r$ $\left(X_n \xrightarrow{r} X\right)$ si $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_n - X|^r) = 0$
3. en *probabilidad* $\left(X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X\right)$ si para toda $\varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$
4. en *distribución* $\left(X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X\right)$si $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ para toda $x \in C_{F_X}$ donde $C_{F_X} = \{x \in \mathbf{R} : x \text{ es punto de continuidad de } F_X\}$.

- **Desigualdad de Chevychev.** *Si* X *es una variable aleatoria tal que*

$X \in L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, *es decir,* $\mathbf{E}(|X|^p) < \infty$. *Entonces*

$$\mathbf{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^p}\mathbf{E}(|X|^p), \qquad \text{para toda } \varepsilon > 0.$$

- **Lema de Borel-Cantelli.** *Si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de eventos, entonces*

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)<\infty$ *implica* $\mathbf{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty}A_n\right)=0.$

ii) *Si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de eventos independientes entonces*

  i') $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)<\infty$ *si y sólo si* $\mathbf{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty}A_n\right)=0$

  ii') $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)=\infty$ *si y sólo si* $\mathbf{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty}A_n\right)=1.$

- **Funciones**

1. La función indicadora de A, se define como

$$\mathbf{1}_{\{A\}}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{si } x\notin A\end{cases}$$

2. Decimos que $f=$o(t) si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=0.$
3. Decimos que $l\sim l_1$ si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{l(x)}{l_1(x)}=1.$

Bibliografía

[1] M. Adams, V. Guillemin, *Measure Theory and Probability,* Wadsworth & Brooks / cole Advanced Books and Software, Monterey, California, 1986.

[2] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, *Regular Variation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[3] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* segunda edición, John Wiley, Vol. II, New York, 1971.

[4] G. R. Grimmet y D. R. Stirzaker, *Probability and Random Processes,* Oxford University Press, segunda edición, 1992.

[5] R. G. Laha, y V. K. Rohatgi, *Probability Theory,* John Wiley, New York, 1979.

[6] S. I. Resnick, *Limit laws for record values,* Stochastic Process. Appl.1, 1973, 67-82.

[7] P. K. Sen and J. M. Singer, *Large Sample Methods in Statistics, An Introduction with Applications,* Chapman and Hall, Inc., New York, 1993.

[8] M. Spivak, *Cálculo Infinitesimal,* segunda edición, Editorial Reverté, México, 1992.

[9] Villaseñor Alva, José A., *Limit Theorems for Transformations of Sums of IID Random Variables,* Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 3, 1997.