

01059  
4  
29.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO  
DEPARTAMENTO DE GEOGRAFIA**

**DIMENSION FRACTAL Y LIMITE DE  
PREDICTIBILIDAD DE TRES VARIABLES  
CLIMATICAS EN TOLUCA, CAPITAL**



**T E S I S**

**Para Obtener el Grado de  
MAESTRO EN GEOGRAFIA**

**PRESENTA:**

**EL LICENCIADO EN BIOLOGIA AGROPECUARIA  
JOSE JIMENEZ LOPEZ**

**DIRECTORES DE TESIS:**

**DR. TOMAS MORALES ACOLTZI  
DR. VICTOR LUIS BARRADAS MIRANDA**

**MEXICO, D.F.**

266964  
1998

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## AGRADECIMIENTOS

Expreso mi más sincero agradecimiento al director de tesis Dr. Tomás Morales Acoltzi, por su apoyo en la realización de este trabajo.

Al Dr. Víctor Luis Barradas Miranda, codirector de tesis por sus observaciones y sugerencias para la realización de esta tesis.

A la Dra. Marta Cervantes Ramírez, su valioso apoyo e interés en la revisión de este trabajo.

Al Dr. Juan Carlos Gómez Rojas, por sus sugerencias y correcciones de este estudio.

De igual manera, mi reconocimiento al Dr. Mauricio Aceves García, por el apoyo que me ha brindado en el área de la Geografía.

Al M.V.Z. Rolando Romero López. Secretario Administrativo de la Universidad Autónoma de Tlaxcala. Fundador de la Licenciatura en Biología Agropecuaria, por su apoyo e interés en el desarrollo de la investigación en esta universidad.

Al Dr. Luis Antonio Angulo Montejó. Director del Centro de Investigación en Ciencias Biológicas de la Universidad Autónoma de Tlaxcala, por su apoyo para la realización de estudios de posgrado.

A mis compañeros del Laboratorio de Teoría del Clima y Predicción. Saturnino Orozco Flores, Maricela Hernández Vázquez, Justino Lezama Gutierrez, Araceli Pérez Hernández, Juan Antonio Vázquez Cabrera, Mario Rojas Segundo, por su apoyo y comentarios en este trabajo.

Al Centro de Ciencias de la Atmósfera de la UNAM por el apoyo computacional durante el desarrollo de esta tesis.

A la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior, en el programa nacional de superación del personal académico, por la beca otorgada para la realización de este trabajo.

## DEDICATORIAS

A MIS PADRES : Evelia López Lima y  
Edilberto Jiménez Cuecuecha  
con todo mi amor

A MIS HERMANOS : Irma, Reyna, Sergio y  
Maribel  
con cariño

A la Biol. Elisa Coca Aguilar, por haberme brindado su amistad durante todo este tiempo.

A la Biol. Lourdes Nieto Pérez, por su alegría y sincera amistad han hecho agradable el desarrollo de nuestras actividades en común.

A la C.D. Dolores Ramos Cervantes, por ser una gran amiga.

A la Biol. Maria Jenny Ramírez Rojano, por brindarme su amistad.

A la Biol. Victoria Sánchez Tamayo, por su amistad.

## RESUMEN

Considerando el observatorio meteorológico de Tlaxcala capital y las estaciones meteorológicas del estado registran temperaturas máxima, ambiente, mínima y evaporación y éstas son el resultado de la superposición de sistemas a todas las escalas que se presentan en el sistema climático (Biosfera, Atmósfera, Océanos, etc.), por lo cual son en forma natural el registro de Sistemas Dinámicos Disipativos en forma discreta, en nuestro caso, cada 24 horas.

Se aplicó la teoría de Sistemas Dinámicos para analizar la hipótesis de que:

“ A partir de una sola variable de un sistema es posible obtener toda la dinámica del sistema”.

Se determinó la dimensión del atractor y el límite de predecibilidad asociado al tipo de comportamiento del sistema, para cada serie de tiempo, para el período marzo-octubre de 1983-1997.

Se analizó en forma bidimensional el comportamiento de los grados de libertad activos, para cada serie de tiempo.

Se dió una interpretación al patrón de isolíneas, en función del grado de complejidad representado.

## ÍNDICE

	pág
AGRADECIMIENTOS	i
DEDICATORIAS	ii
RESUMEN	iii
INTRODUCCIÓN	1
<b>I MARCO CONCEPTUAL</b>	11
<b>II FISIOGRAFÍA Y CLIMATOLOGÍA DEL ESTADO DE TLAXCALA</b>	23
2.1 CLIMATOLOGÍA DE TLAXCALA	25
2.1.1 GRUPO DE CLIMAS TEMPLADOS	27
2.1.2 TEMPLADO SUBHÚMEDO $C(w_2)(w)$	27
2.1.3 TEMPLADO SUBHÚMEDO $C(w_1)(w)$	28
2.1.4 TEMPLADO SUBHÚMEDO $C(w_0)(w)$	29
2.3 SUBGRUPO DE CLIMAS SEMIFRÍOS	29
2.3.1 SEMIFRÍO SUBHÚMEDO $C(E)(w_2)(w)$	29
2.4 GRUPO DE CLIMAS FRÍOS Y MUY FRÍOS $E(T)$	30
2.5 HELADAS Y GRANIZADAS	30
2.5.1 HELADAS	31
2.5.2 GRANIZADAS	31
<b>III MARCO TEÓRICO METODOLÓGICO</b>	33
3.1 DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS	35

<b>IV METODOLOGÍA Y TÉCNICAS</b>	46
4.1 COEFICIENTES DE LYAPUNOV	54
4.2 EXPONENTES CARACTERÍSTICOS PARA UNA DISTANCIA LÍMITE FIJA	57
<b>V RESULTADOS</b>	64
5.1 COEFICIENTES DE CORRELACIÓN	64
5.2 ZONA DE INVARIANZA DE ESCALA	69
5.3 DIMENSIÓN DEL ATRACTOR	85
5.4 LÍMITES DE PREDECIBILIDAD	100
<b>VI CONCLUSIONES</b>	104
<b>VII SUGERENCIAS</b>	104
<b>VII BIBLIOGRAFÍA</b>	106
<b>GLOSARIO</b>	110
<b>APÉNDICE: GRÁFICAS DE <math>\text{Ln}C(r,m)</math> EN FUNCIÓN     DE <math>\text{Ln}r</math></b>	111

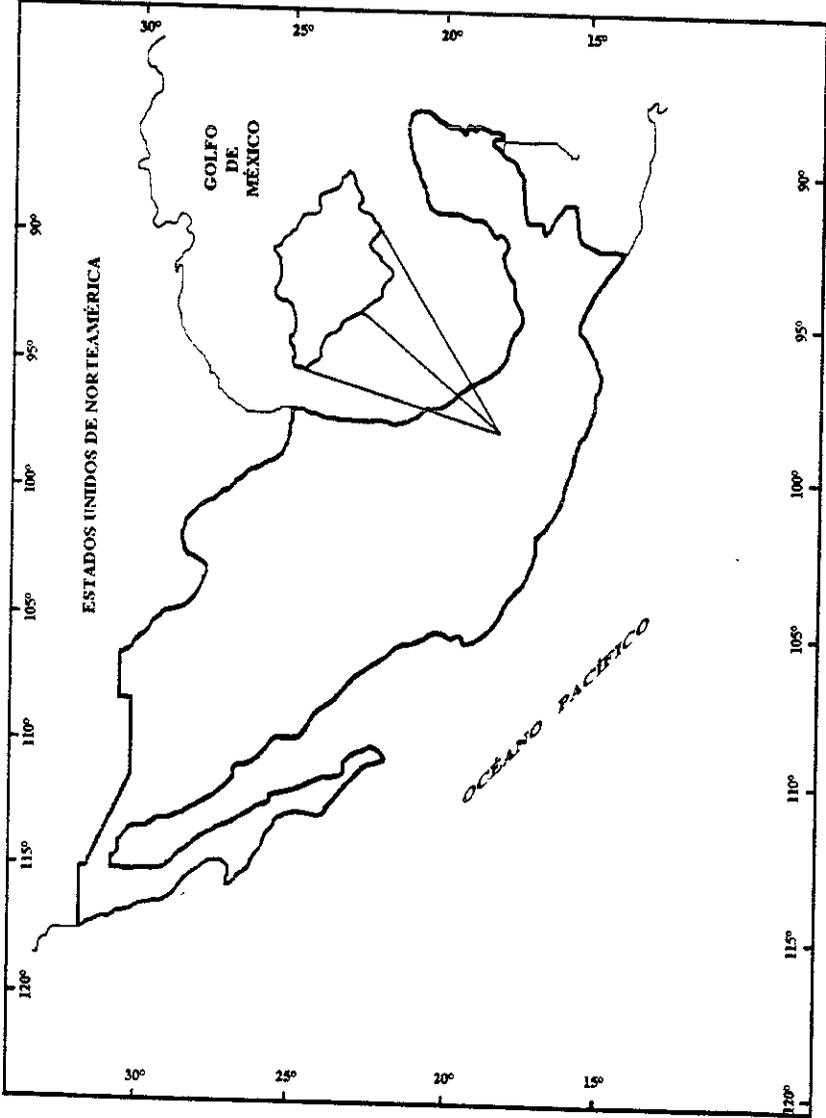
## INTRODUCCIÓN

El estado de Tlaxcala es el más pequeño en superficie de las entidades federativas de México, exceptuando el Distrito Federal y su superficie de 3918 km<sup>2</sup> representa el 0.19% de la superficie del país. Todo el estado se ubica a más de 2000 metros sobre el nivel del mar, y lo limitan los estados: al Norte Hidalgo, al Oeste el estado de México y Puebla, que lo rodea por casi todos lados. El estado se sitúa en la franja del eje volcánico y al Sureste de la meseta central a los 19° 05' 43'' y los 19° 44' 07'' de latitud Norte y entre los 97° 37' 07'' y los 98° 42' 05'' de longitud Oeste. Por estar situado en el eje neovolcánico, su topografía es montañosa, cuenta con grandes llanos cortados por cañadas y barrancas (MAPA 1).

La temperatura media anual de la entidad fluctúa entre 12 y 18°C. El período de lluvias abarca casi seis meses entre mayo-octubre, o abril-septiembre, según la zona y las precipitaciones medias anuales son más abundantes en el Centro y Sur, donde oscilan entre 600 y 1200 mm; en tanto en el Noroeste y Oriente las lluvias son menores de 500 mm.

Para la realización de este trabajo fue necesario:

Analizar la temperatura mínima, la temperatura ambiente, la temperatura máxima y la evaporación. Son variables del tiempo que se registran cada 24 horas en el observatorio de Tlaxcala y en las estaciones



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

COLEGIO DE GEOGRAFÍA

MAPA 1

UBICACIÓN DEL ÁREA DE ESTUDIO  
(TLAXCALA)

TESIS DE GRADO:  
DIMENSIÓN FRACTAL Y LÍMITE DE  
PREDICTIBILIDAD DE TRES VARIABLES  
CLIMÁTICAS: TLAXCALA CAPITAL

JOSÉ JIMÉNEZ LÓPEZ

FUENTE CARTOGRÁFICA:

CARTA GEOGRÁFICA DE LA REPÚBLICA  
MEXICANA

ESC. 1:5 000 000 EDITADA POR INEGI

meteorológicas de Apizaco, Atlangatepec, Españita, Huamantla, Ixtacuixtla, Tepetitla, Tlaxco y Toluca de Guadalupe (MAPA 2).

El estado es una de las regiones más densamente pobladas del territorio nacional, donde se desarrollan gran parte de los cultivos básicos para la alimentación de autoconsumo, como son: maíz, frijol, trigo, avena, cebada y haba, predominando el cultivo del maíz.

Estos cultivos se ven afectados constantemente por las heladas inesperadas presentadas en los meses de mayo, junio, julio y agosto. En 1997 la superficie siniestrada por heladas fue de 842 ha. Con una pérdida económica de 561.997 pesos (fuente SAGAR). En el MAPA 3 se presenta la distribución de las temperaturas mínimas medias anuales en el estado de Tlaxcala. Se puede apreciar un área de baja temperatura en la parte Centro Sur del estado. Asimismo se puede observar áreas de alta temperatura en la parte Este-Oeste. Esta distribución refleja en forma aproximada la distribución de heladas ya que son un aspecto particular de las temperaturas mínimas.

Generalmente las heladas más dañinas para los cultivos son las heladas que se registran después de haber pasado el invierno, o sea, durante la primavera, que son las que se conocen como heladas tardías así como heladas inesperadas, y sus daños principales son:

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y  
LETRAS  
COLEGIO DE GEOGRAFÍA

MAPA 2

ESTACIONES  
METEOROLÓGICAS Y  
RELIEVE

TESIS DE GRADO:  
DIMENSIÓN FRACTAL Y LÍMITE  
DE PREDICTIBILIDAD  
DE TRES VARIABLES  
CLIMÁTICAS: TLAXCALA  
CAPITAL

JOSÉ JIMÉNEZ LÓPEZ

SIMBOLOGÍA BÁSICA

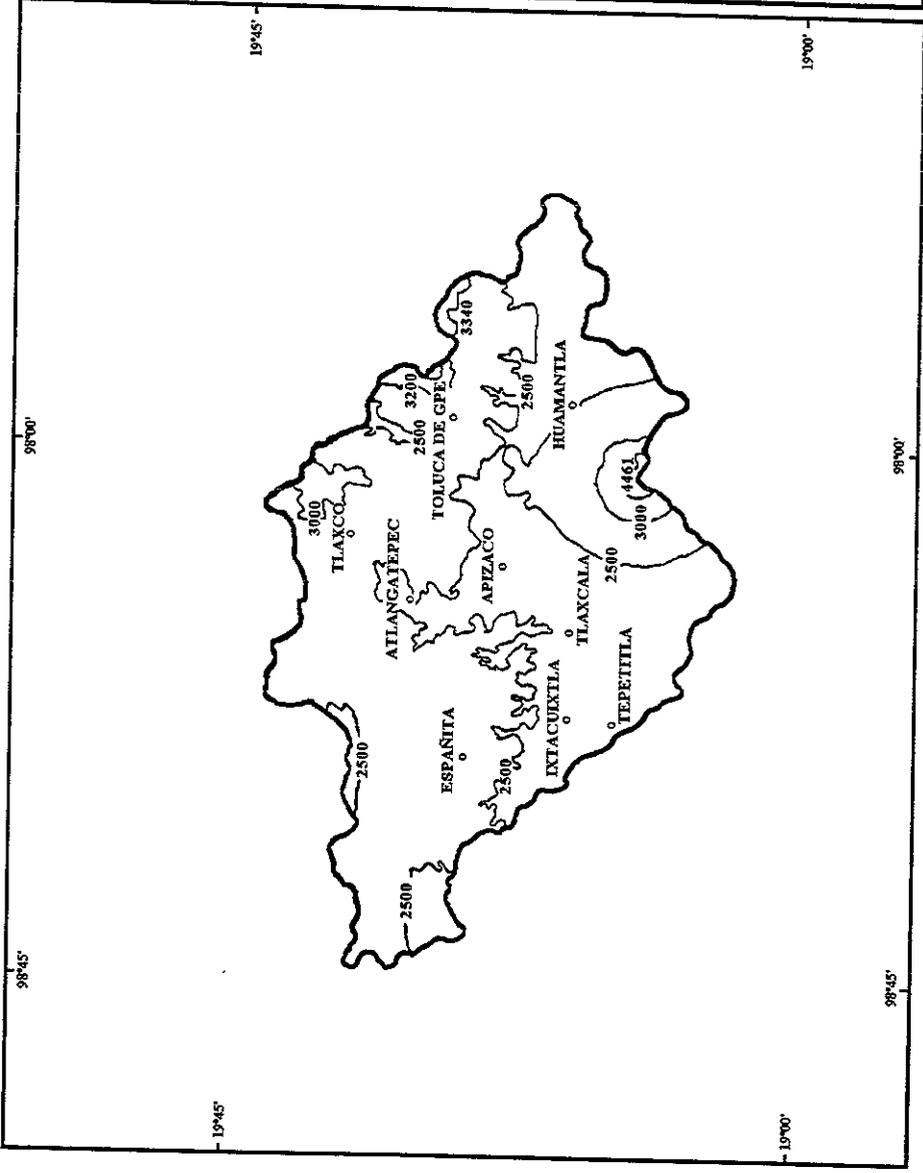
ESTACIONES METEOROL. ○

LÍMITE ESTATAL ———

CURVAS DE NIVEL 1500

FUENTE CARTOGRÁFICA:  
CARTA ESTATAL  
TOPOGRÁFICA

ESCALA APROX · 1:7000 EDITADA  
POR INEGI



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y  
LETRAS  
COLEGIO DE GEOGRAFÍA

MAPA 3

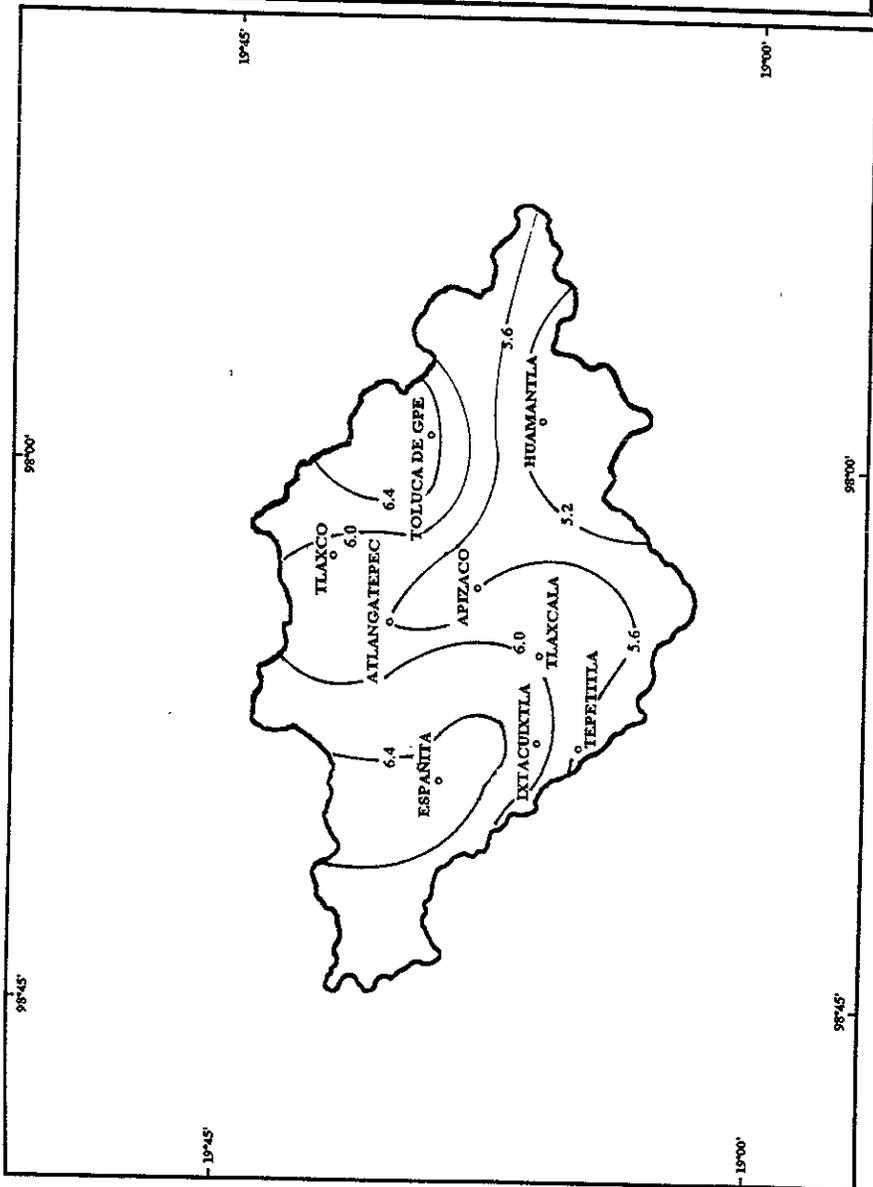
ISOTERMAS DE MÍNIMAS  
MEDIAS ANUALES

TESIS DE GRADO:  
DIMENSIÓN FRACTAL Y  
LÍMITE DE PREDICTIBILIDAD  
DE TRES VARIABLES  
CLIMÁTICAS: TLAXCALA  
CAPITAL

JOSÉ JIMÉNEZ LÓPEZ

FUENTE CARTOGRÁFICA:  
CARTA ESTATAL  
TOPOGRÁFICA

ESCALA APROX.: 1:70000  
EDITADA POR INEGI



- a).- Destrucción de plantas pequeñas sembradas en el inicio de la primavera.
- b).- Destrucción de flores de cultivos que se siembran a finales del otoño o principios de invierno.
- c).- Destrucción de flores y frutos pequeños de frutales.

Por otra parte las heladas tempranas, las que se registran durante el otoño, también pueden producir algunos daños importantes, como disminuir la calidad industrial de algunos cultivos (García y Valdez, 1986).

a).- heladas invernales:

Son las que producen poco daño a las plantas pues éstas se encuentran en estado de reposo.

b).- heladas otoñales:

Son las que afectan algunos cultivos, principalmente a los que se encuentran tiernos en ese tiempo.

c).- heladas primaverales:

Son las heladas más dañinas ya que afectan a las plantas durante su período de plena actividad (Grassi, 1983).

La producción agrícola se ha desarrollado bajo condiciones climatológicas que aumentan las posibilidades de riesgos o siniestros por: heladas, sequías, granizadas y plagas, en suelos de mediana o baja fertilidad con tendencias a erosionarse; con escasos recursos de aguas

superficiales y subterráneas; y con parcelas muy fraccionadas (Jiménez, 1990). Estos son los efectos que a gran escala están produciendo los fenómenos atmosféricos (lluvias, huracanes, brisas, etc).

Un gran número de variables involucradas en los sistemas dinámicos dificulta la predicción del tiempo, lo cual hace suponer que la atmósfera es un sistema dinámico complejo e irregular y por lo tanto impredecible. Sin embargo, la teoría de sistemas dinámicos ha permitido dar inicio al esclarecimiento del comportamiento de la atmósfera. Aún cuando, hasta el momento, no se puede predecir el tiempo, con alta precisión requerida, esta teoría ha abierto caminos en la investigación del tiempo y su predicción.

Recientemente, en las dos últimas décadas, físicos, astrónomos, biólogos, geógrafos, e investigadores de otras disciplinas han aplicado la teoría de sistemas dinámicos a series de tiempo, con el objetivo de determinar la dimensión del atractor (grados de libertad activos o número de ecuaciones necesarias para modelar matemáticamente la evolución del sistema). Específicamente, para el estudio del clima se presentan los siguientes trabajos, entre otros (Tabla 1):

Serie de Tiempo	Dimensión	Referencia
15 años de presión diaria en superficie	No saturó	Fraedrich (1986)
14 inv. presión diaria superficie	3.2	Fraedrich (1986)
15 ver. presión diaria superficie	3.9	Fraedrich (1986)
10 inv. de amplitud de onda zonal	3.1	Fraedrich (1986)
10 ver. de amplitud de onda zonal	3.6	Fraedrich (1986)
10 años intensidad del viento	7.3	Tsonis and Elsner(1988)
15 años intensidad tormentas pluviales	3.8	Rodriguez-Iturbe(1989)

TABLA 1. Variables climatológicas que se han utilizado, para aplicar la teoría de sistemas dinámicos disipativos (Islam et al 1993)

Existen dos tipos de atractores los fractales y los no fractales. En el primer caso se obtiene un período finito de predicción y en el segundo se asegura una predicción a largo plazo. Un atractor se define como una medida de complejidad en el tiempo, que atrae todas las trayectorias de la evolución del sistema en estudio. Algunos sistemas evolucionan hacia un atractor extraño, que tiene una estructura fractal. Aquí surge la pregunta de si este aparente desorden es tal o es el reflejo de un orden con una estructura complicada. La atmósfera puede ser caótica pero su evolución esta confinada a un volumen específico en el espacio de estado que está ocupado por el atractor. Los estados fuera de este volumen no están permitidos. Por ejemplo, los vientos asociados con un

sistema de alta presión, nunca girarán en sentido contrario a como giran las manecillas del reloj, en el hemisferio Norte.

La teoría de sistemas dinámicos caóticos se ha aplicado a series de tiempo obtenidas en las estaciones meteorológicas de Atlangatepec y Tlaxco, del estado de Tlaxcala (Meneses, 1993). También se han empleado como series de tiempo, entre otras variables, a la temperatura ambiente y horas calor registradas cada 24 horas para 6 años de marzo-junio (Hernández, 1996). Pero no hay estudios sobre el acoplamiento de las variables de tiempo/clima, contenido implícitamente en la hipótesis central de la teoría de sistemas dinámicos “a partir de una sola variable es posible determinar la dinámica de un sistema”, por lo que planteamos el siguiente:

**PROBLEMA:**

¿Están acopladas fuertemente las variables climatológicas en una estación termopluviométrica u observatorio?

Los OBJETIVOS del presente estudio son:

A) Determinar para las series de tiempo de temperatura ambiente, temperatura máxima, evaporación y temperatura mínima la dimensión del atractor y su límite de predecibilidad.

B) Determinar, a partir de la dimensión del atractor y del límite de predecibilidad, el grado de acoplamiento de las variables del sistema, para cada estación, para el período marzo-octubre, haciendo énfasis en

la temperatura mínima, debido a la importancia que tienen las heladas inesperadas en el estado.

Por lo tanto se plantea la siguiente HIPÓTESIS:

A partir de UNA variable, del sistema climático, es posible obtener toda la dinámica del sistema en estudio.

## I MARCO CONCEPTUAL

El estado de la atmósfera en cualquier momento y lugar se expresa por una combinación de sus propiedades físicas que son conocidas como los elementos del tiempo y del clima. Estos elementos son temperatura, precipitación y humedad del aire, dirección y rapidez del viento, presión atmosférica, nubosidad, radiación solar y visibilidad.

El tiempo desde el punto de vista climático es la suma total de las propiedades físicas de la atmósfera, o sea de los elementos, en un período cronológico corto, es el estado momentáneo de la atmósfera.

La manera como se distribuye la temperatura durante las 24 horas del día, indica el balance resultante del calentamiento y enfriamiento, debido a la radiación solar recibida y la pérdida de calor por escape de la radiación infrarroja, respectivamente.

A medida que el sol se eleva sobre el horizonte, la cantidad de energía solar que la tierra recibe es mayor que la que irradia; mientras esto continúa, la temperatura aumenta y ese aumento persiste, hasta que se alcanza el equilibrio entre la energía recibida y la irradiada.

Después de que el sol pasa por el zenit la liberación de onda larga es mayor que la recibida, sin embargo, la temperatura no disminuye inmediatamente debido a cierta inercia en el proceso de calentamiento, dando lugar a un periodo de respuesta asociado a esta variable, además, impactando el grado de acoplamiento entre las variables. No obstante, una vez que se ha puesto el sol la temperatura sigue disminuyendo hasta un poco después de la salida del sol al siguiente día, esto explica por

qué el máximo de temperatura es después del medio día 2 ó 3 P.M. y el mínimo un poco después de la salida del sol.

La amplitud de la variación diurna de temperatura se llama oscilación térmica, es la diferencia entre las temperaturas más alta y más baja del día. A éstas se les designa como temperaturas máxima y mínima del día, respectivamente. La oscilación térmica diaria depende de la época del año y de la latitud, aunque también afectan a esta variación de temperatura la presencia de nubes, la situación del lugar y la presencia o ausencia de vegetación abundante. Se llama temperatura máxima absoluta a la temperatura más alta registrada desde que se estableció la estación de observación.

Temperatura mínima absoluta es la temperatura más baja registrada desde que funciona la estación de observación. Esta temperatura es importante durante el período vegetativo ya que el punto de congelación del agua es de ( $0^{\circ}\text{C}$ ), las temperaturas a partir de las cuales las semillas germinan ( $4.5$  a  $5.5^{\circ}\text{C}$ ) y las plantas se desarrollan sin dificultad; y otras cuya importancia para los seres vivos es manifiesta.

Las fechas en que la temperatura se registra entre ciertos límites son muy importantes desde el punto de vista agroclimático. Aún cuando las plantas generalmente no mueren con temperaturas algo mayores de  $0^{\circ}\text{C}$ , en muchas especies el crecimiento no se realiza sino hasta que alcanza una temperatura de unos  $4.5^{\circ}\text{C}$ . La efectividad de la temperatura en producir el crecimiento de las plantas se mide ya sea por el número de días en el año en que la temperatura es mayor de  $4.5^{\circ}\text{C}$ , o por la

cantidad acumulada de grados centígrados en que ésta supera a esa cantidad, este umbral de 4.5 °C varía de acuerdo a la fenología del cultivo.

Una alta eficiencia térmica en un lugar, es una gran ventaja porque en dicho lugar puede crecer una gran diversidad de cultivos, es decir, puede haber variedad de plantas que pueden germinar y desarrollarse.

Por otra parte, a fin de simplificar los cálculos, se ha convenido que la duración del período con temperaturas mayores de 0°C, o estación libre de heladas se denomine estación de crecimiento o período vegetativo.

En los lugares con un período vegetativo corto: menor de 90 días al año la probabilidad de que prosperen los cultivos es muy escasa. Pues no basta tener un promedio de días libres de heladas para tener seguridad en los cultivos porque puede suceder que en algún año haya heladas inesperadas (García E. 1989), aún en la presencia de eventos extremos (Vázquez, 1998), se modifica la probabilidad de ocurrencia de este tipo de heladas.

#### Características generales de las heladas meteorológicas

El descenso de la temperatura por abajo o igual a los 0°C, que causa el fenómeno de las heladas, puede tener tres orígenes diferentes:

- a).- Heladas por advección
- b).- Heladas por radiación
- c).- Heladas por evaporación

a).- Heladas por advección

Se originan por la llegada de masas de aire frío, procedentes de regiones cercanas al Polo Norte. Estas masas causan grandes perturbaciones atmosféricas al desplazarse a lo largo del continente, atravesando Canadá y Estados Unidos de América, en forma de desbordamientos de enorme caudal que se deslizan por entre los diversos accidentes orográficos, principalmente para la República Mexicana, durante el invierno (noviembre, diciembre, enero y febrero).

El desplazamiento de estas masas de aire frío va creando distintos tipos del tiempo atmosférico en toda la ruta que sigue, dependiendo de las características del relieve terrestre.

Las heladas de este tipo se producen en las partes bajas del relieve, como cañadas, valles y bajíos. Este tipo de heladas es muy peligroso, puesto que no hay nada que hacer para protegerse contra ellas, por la continua renovación de aire frío que está en movimiento y por el gran descenso que alcanza la temperatura (García y Valdez, 1986).

b).- Heladas por radiación

Éstas son las más frecuentes, se originan por la pérdida de calor que los vegetales y el suelo sufren por el escape de radiación infrarroja principalmente durante noches despejadas. Para que la helada se produzca se requiere generalmente de la existencia de ciertas condiciones atmosféricas locales, como son la ausencia de viento, cielo despejado y bajas concentraciones de vapor de agua en el aire (aire seco).

Las heladas por radiación se presentan como consecuencia de un balance térmico resultante de las radiaciones, que por una parte recibe el suelo y las plantas, y por otro las que éstas emiten, pues todos los cuerpos tienen la propiedad de emitir radiaciones térmicas y recibirlas de otros al mismo tiempo. Si la temperatura de un cuerpo es mayor que la del ambiente que lo rodea, el balance térmico se inclinará por un enfriamiento de él y por un calentamiento del ambiente, pudiendo llegar a un equilibrio o igualdad de temperaturas entre ambas o viceversa.

El suelo y las plantas reciben durante el día radiación solar (o radiación de onda corta) y radiación atmosférica (radiación en onda larga), ellos por su parte, emiten radiación térmica en todo momento, conocida como radiación de los vegetales y radiación del suelo.

Durante el día las radiaciones del sol y de la atmósfera son considerables y contribuyen a elevar la temperatura de las plantas y especialmente del suelo, como consecuencia de la diferente capacidad térmica. Durante la noche la radiación del sol no existe, permaneciendo únicamente la atmosférica.

Las plantas y el suelo continúan irradiando durante la noche, pudiendo suceder que el calor recibido de la atmósfera sea menor que el irradiado, lo que determina el enfriamiento de ellos.

Si esta pérdida de calor es muy grande y prolongada, las temperaturas del suelo, de las plantas y del aire que las rodea puede disminuir tanto que llegan por debajo  $0^{\circ}\text{C}$ , con lo que se produce una helada (García y Valdez, 1986).

c).- Heladas por evaporación

Cuando la humedad relativa es muy baja y tiende a descender por la presencia de corrientes de aire seco, se puede realizar una significativa evaporación del agua que se encuentra sobre las plantas, con lo que se provoca su enfriamiento, éste es ocasionado por el agua al evaporarse, ya que en ella el cambio del estado líquido al gaseoso requiere el consumo de 600 calorías gramo por  $\text{cm}^2$ . Así, la planta cede el calor de evaporación, es con lo que su temperatura puede disminuir hasta llegar por debajo de  $0^\circ\text{C}$  por lo que se produce una helada.

Esta clase de heladas es poco frecuente y los mayores daños se presentan en cultivos con flores y hortalizas, en los que la vegetación tierna existente puede sufrir considerables daños (García y Valdez, 1986).

Tipos de Heladas.

a).- Heladas blancas.

b).- Heladas negras.

Si durante el enfriamiento que tiene lugar en las partes bajas de la atmósfera como se describió anteriormente, el suelo y las plantas, existe suficiente humedad en el aire, puede formarse el rocío, en forma de pequeñas gotas. Al continuar el descenso de la temperatura estas gotas se congelan formando pequeños cristales de hielo, que dan un color blanco a las superficies.

Al disminuir la temperatura del aire, la humedad relativa aumenta hasta que, a una determinada temperatura a la que se llama punto de

rocío, la muestra de aire después de alcanzar la saturación, el vapor de agua se condensa y forma el rocío. La temperatura en la cual se alcanza el punto de rocío es  $0^{\circ}\text{C}$  o menos, el vapor de agua se condensa directamente en finos cristales de hielo sin condensarse previamente en gotas de agua, es la que se le llama escarcha.

En ambos casos se dice que se ha producido una helada blanca, ya que tanto los vegetales como el suelo presentan el color blanco que les da el hielo.

En resumen, para que se registre una helada blanca o escarcha, es indispensable que el follaje, flores, etc. adquieran una temperatura por debajo de  $0^{\circ}\text{C}$  y, además, que se alcance la temperatura del punto de rocío del aire, para que haya condensación y el agua se congele como consecuencia (García y Valdez, 1986). Estas heladas no son tan dañinas ya que al formarse el hielo el agua cede el calor de congelación al ambiente y a la planta.

El punto de rocío es un indicador de la cantidad total de vapor de agua en el aire, y es más útil que la humedad relativa para estimar heladas, ya que no cambia con la temperatura, si el punto de rocío disminuye (a medida que la humedad del aire es menor) el peligro de heladas aumentará. Sin embargo, es difícil tener información de la temperatura de rocío ya que no se registra en todas las estaciones u observatorios meteorológicos o se calcula a partir de la humedad relativa y temperatura.

b).- Heladas Negras

Desde el punto de vista agrícola, la presencia o ausencia de hielo no es tan importante como saber si se ha registrado una temperatura de  $0^{\circ}\text{C}$  o inferior. Al analizar las estadísticas meteorológicas deben considerarse como heladas todas las temperaturas de  $0^{\circ}\text{C}$  o inferiores, haya habido o no congelación.

Cuando el aire se haya excesivamente seco y no alcanza la temperatura del punto de rocío por debajo de  $0^{\circ}\text{C}$ , no se produce helada blanca. Sin embargo, los cultivos son dañados y al día siguiente o poco tiempo después, las plantas presentan manchas necróticas en sus partes afectadas, este fenómeno se conoce como helada negra.

En el caso de heladas negras no se congela el vapor de aire, pero se puede congelar la savia de las plantas, o bien, al congelarse el agua de los tejidos de las hojas aumenta el volumen y los rompe. Al salir el sol, se produce una evaporación de hielo, bastante rápida que ocasiona una especie de quemaduras o manchas necróticas en el follaje (García y Valdez, 1986).

Efecto de las heladas en los cultivos. Éstos son:

- a).- Internos.
- b).- Externos
- c).- Inmediatos
- d).- Acumulativos

a).- Internos

Ruptura de las membranas de la célula ocasionada por el crecimiento de los cristales de hielo dentro del protoplasma (deshidratación).

b).- Externos

Muerte de hojas y tallos tiernos, destrucción de gran porcentaje de flores, frutos pequeños o muerte de la planta. La resistencia del cultivo a las heladas es de acuerdo a su fase de desarrollo, tiene mayor resistencia cuando la planta se encuentra en germinación, posteriormente cuando la planta se encuentra en fructificación, y su resistencia es menor cuando se encuentra en plena floración.

c).- Inmediatos

Efecto de deshidratación y de rompimiento de la membrana de los cultivos

d).- Acumulativos

Temperaturas bajas, no necesariamente de 0°C o por debajo de 0°C por períodos prolongados de tiempo, provocan el mismo efecto de deshidratación en un período de tres a cuatro días, ocurre una intoxicación de la planta por las sales minerales cuando el fenómeno ha ocurrido en varias ocasiones (García y Valdez, 1986).

Todos los procesos fisiológicos y funciones de las plantas se llevan a cabo dentro de ciertos límites de temperatura relativamente estrechos. En general, la vida activa de las plantas superiores se localiza entre 0° y 50 °C, aún cuando estos límites varían mucho de una especie a otra.

Los procesos fisiológicos que se efectúan en la planta, tales como la fotosíntesis, la respiración y el crecimiento responden con frecuencia en forma diferente a la temperatura, así es que la temperatura óptima para cada función, si no son limitantes otros factores, puede ser muy diferente.

Toda la planta para completar su ciclo vegetativo debe acumular cierto número de grados de calor, por lo que se han ideado varios métodos para llevar el control de la acumulación progresiva de grados a partir de la fase inicial. El método más sencillo es el de suma de temperaturas medias diarias, propuesto por Reamur (Torres, 1986), y consiste en sumar las temperaturas medias diarias ( $^{\circ}\text{C}$ ) ya sea entre dos fases o durante todo el ciclo; sin embargo, este método no ha dado los resultados esperados debido posiblemente a que los demás factores que intervienen en el desarrollo vegetal constituyen una variable no considerada en este método. Las temperaturas bajo  $0^{\circ}\text{C}$  no se consideran en el mismo.

Otro método es el llamado "Crecimiento grados días" cuyo procedimiento se basa en que toda la planta comienza a crecer por encima de una temperatura mínima llamada punto crítico. Los grados de temperatura que diariamente se registran por encima del punto crítico se irán acumulando hasta alcanzar, al completarse el ciclo vegetativo, una temperatura constante de  $2500^{\circ}\text{C}$ , desde la germinación hasta la madurez, los cuales se cubrirán en diferente cantidad de tiempo dependiendo de los diferentes climas (Torres, 1986).

Fuera de ciertos límites de temperatura la planta ya no funciona normalmente y se puede llegar al extremo de que la planta muera. Los vegetales carecen de temperatura alta del cuerpo, lo que es característico de los animales superiores, y la temperatura de la mayoría de las plantas sigue muy de cerca a la del ambiente: ellas absorben el calor o lo pierden conforme el ambiente se hace más cálido o más frío con ligeras variaciones debidas a la transpiración y otras causas.

Es conveniente conocer, además, de los valores medios de temperatura de una zona agrícola, las temperaturas máximas y mínimas, las oscilaciones diurnas y anuales, las cuales actúan marcadamente sobre las plantas, constituyendo factores limitantes de la extensión geográfica de los cultivos.

Suzuki (Torres, 1986) realizó algunos experimentos con trigo y llegó a la conclusión de que el crecimiento en las primeras etapas fenológicas del trigo, comienza cuando las temperaturas del suelo (diurnas) medias son de 5°C y las nocturnas de 1°C. Las temperaturas bajas afectan principalmente el vigor de las semillas, y se adjudica esta pérdida de vigor a muy bajas tasas de respiración y un metabolismo de nitrógeno y fósforo perturbado.

En la Unión Soviética, Grebenikov et al.(Torres, 1986) obtuvieron los mejores resultados cuando la plantación se efectuó durante una época en la que las temperaturas medias diurnas (del aire) se encontraban entre 12°C y 20°C (según la variedad).

En términos generales, las temperaturas óptimas para la germinación de la semilla de trigo se hallan aproximadamente entre 20°C y 25°C; sin embargo, la semilla de trigo germina aceptablemente a temperaturas tan bajas como 5°C y hasta 35°C, aproximadamente.

Las experiencias demuestran que las pérdidas de cosecha a causa de temperaturas altas o bajas, son considerables. Existen en la vida de las plantas períodos críticos en que sensiblemente son afectadas por esas temperaturas. Así vemos cómo las altas temperaturas provocan grandes evaporaciones de la humedad del suelo y hacen transpirar abundantemente a las plantas, provocándoles deshidratación, marchitez o muerte (Torres, 1986).

## II FISIOGRAFÍA Y CLIMATOLOGÍA DEL ESTADO DE TLAXCALA

El estado de Tlaxcala queda inscrito en una parte de la subprovincia de los lagos y volcanes del Altiplanicie Mexicano Meridional del Sistema Volcánico Transversal (MAPA 4).

El estado de Tlaxcala es atravesado, en sentido Noroeste-Sureste, por un angosto corredor llano de carácter aluvial (a unos 2400 msnm) que conecta los llanos Hidalguenses de Apan, al Norte, con las llanuras de la cuenca de Puebla, al Sur. Es dentro de esta alargada llanura que nace el río Zahuapan, el afluente más septentrional del Balsas, a la altura de Apizaco, donde los lomeríos casi constriñen el corredor, que se dirige al Sur.

Limitan por el Norte a este corredor de Calpulalpan, Hueyotlipan, Apizaco y Huamantla, unidades de lomeríos de origen ígneo, algunas asociadas con llanos. Estos rematan al Oriente con mesetas y lomeríos lávicos y al Norte con los bordes de la sierra volcánica de Tlaxco. Por el lado Sur, el corredor limita al Oeste con los lomeríos periféricos de la Sierra Nevada, al Centro con las cañadas de la meseta o bloque de Tlaxcala y, al Oriente con el volcán Matlalcuéyetl. El río Zahuapan pasa hacia el Suroeste por un angosto valle entre estas dos últimas unidades, donde se ubica la capital del estado.

El volcán Matlalcuéyetl (Faldas Azules), también conocido como Malinche, está considerado como una ruina volcánica pliocénica, el muñón erosionado de lo que fuera en otros tiempos un enorme

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y  
LETRAS  
COLEGIO DE GEOGRAFÍA

MAPA 4

FISIOGRAFÍA DEL ESTADO DE  
TLAXCALA

TESIS DE GRADO.  
DIMENSIÓN FRACTAL Y LÍMITE  
DE PREDICTIBILIDAD  
DE TRES VARIABLES  
CLIMÁTICAS: TLAXCALA  
CAPITAL

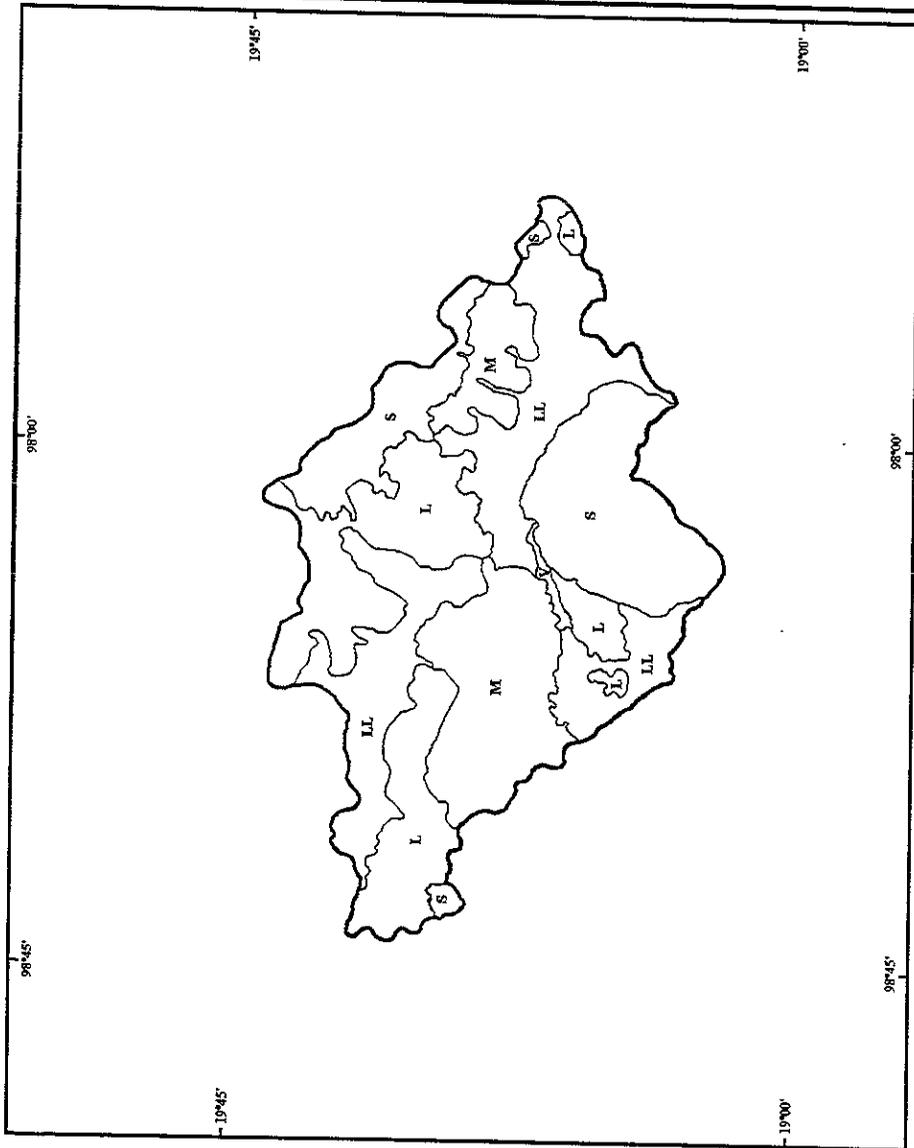
JOSÉ JIMÉNEZ LÓPEZ

SIMBOLOGÍA

- SIERRAS S
- VALLES V
- LOMERIOS L
- MESETAS M
- LLANURAS LL
- CANONES C

FUENTE CARTOGRÁFICA  
CARTA ESTATAL  
REGIONALIZACIÓN  
FISIOGRÁFICA

ESCALA APROX 1 7000  
EDITADA POR INEGI



estratovolcán. Por el área que abarca, poco más de 30 km. de diámetro, es uno de los mayores del país. Sus faldas inferiores se tienden radialmente con pendientes poco pronunciadas, en tanto que sus laderas centrales, desde unos 3300 msnm., son muy escarpadas y se levantan hasta los 4460 msnm. Sus características más notables son las siguientes: una gran barranca que baja hacia el poblado de San José Ixtenco al Oriente, el rasgo circular al Este de la cima llamado Octlayo e identificado (INEGI 1986).

## 2.1 CLIMATOLOGÍA DE TLAXCALA

El estado de Tlaxcala posee en general climas templados subhúmedos con lluvias de verano. Las precipitaciones medias anuales son más abundantes en el Centro y Sur, donde van de 600 a 1200 mm, en tanto que en el Noroeste y Oriente las lluvias son menores de 500 mm al año.

Los climas templados se presentan particularmente en los valles y las llanuras. El volcán de la Malinche, al Sur del estado tiene un clima semifrío, excepto en sus cumbres más altas, donde el clima puede calificarse como frío (MAPA 5).

En algunas partes de la entidad se producen heladas y granizadas casi todo el año, factores climatológicos que, junto con la escasez y la irregularidad de las lluvias, hacen de la actividad agrícola un gran reto para el productor.

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y  
LETRAS  
COLEGIO DE GEOGRAFÍA

MAPA 5

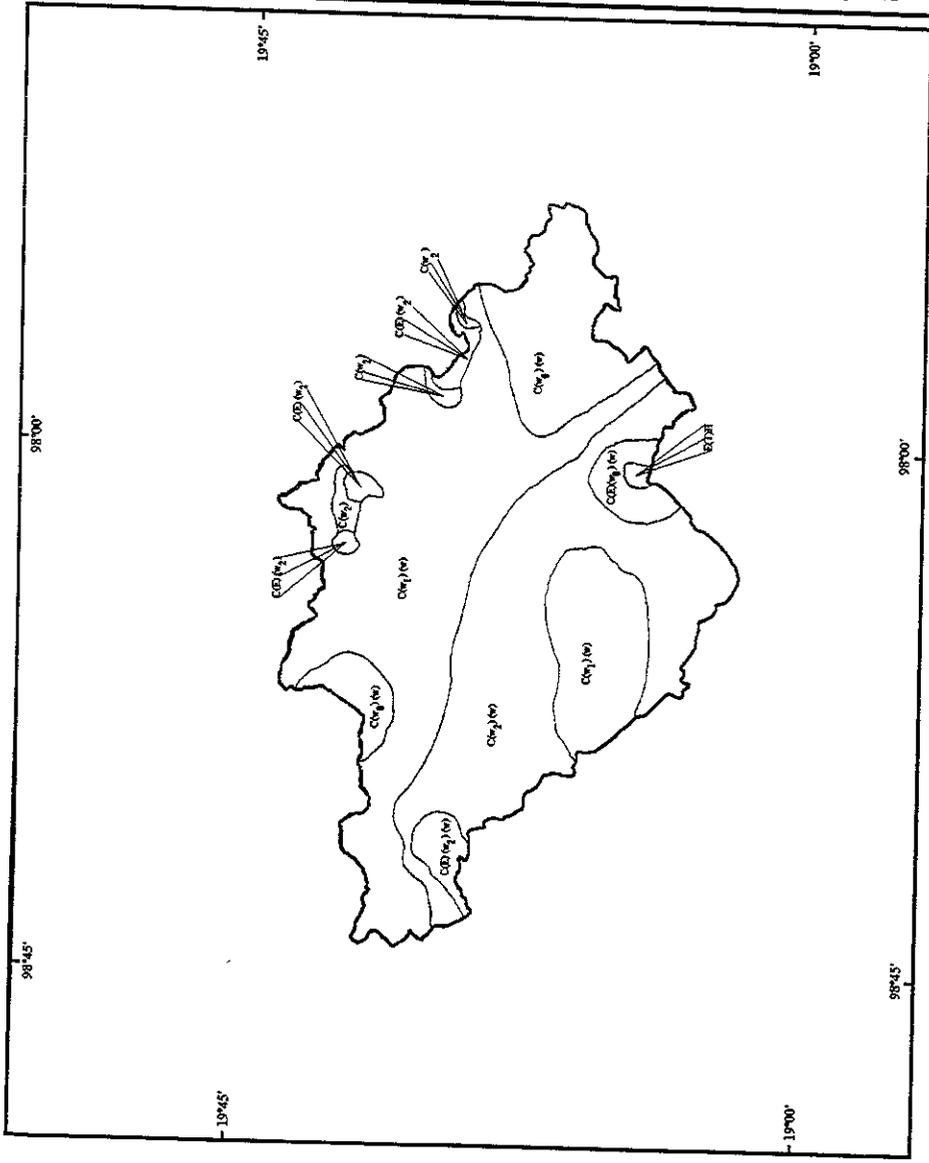
JOSÉ JIMÉNEZ LÓPEZ

**SIMBOLOGÍA**

TIPOS DE CLIM A SEGÚN  
KÖPPEN GRUPO DE CLIMAS  
TEMPLADOS C  
SUBGRUPO DE CLIMAS  
TEMPLADOS  
C(w<sub>2</sub>) (w) tipos templados  
subhúmedos con lluvias en verano %  
de precipitación invernal menor de 5  
el más húmedo de los templados  
subhúmedos

C(w<sub>2</sub>) % de precipitación invernal  
entre 5 y 10.2  
C(w<sub>1</sub>)(w) % de precipitación invernal  
menor de 5  
C(w<sub>0</sub>)(w) % de precipitación invernal  
menor de 5  
C(E)(w<sub>2</sub>) % de precipitación invernal  
entre 5 y 10.2

Grupo de climas fríos y muy fríos E  
E(T)H temperatura del mes más frío  
menos de 0°C  
FUENTE CARTOGRAFICA  
CARTA ESTATAL DE CLIMAS  
ESCALA APROX 1:7000  
EDITADA POR INEGI



A continuación se hace una descripción más detallada de las variables climatológicas de la entidad.

### **2.1.1 GRUPO DE CLIMAS TEMPLADOS**

#### **Subgrupo de Climas Templados C**

Presenta una temperatura media anual de entre 12 y 18 ° C, la del mes más frío oscila entre 3 y 18° C. Este tipo de clima cubre alrededor del 94% de la superficie del estado y se presenta con cuatro modalidades distintas en cuanto a grado de humedad y porcentaje de lluvia invernal. De ellas, sólo se analizarán las tres más importantes.

#### **2.1.2 TEMPLADO SUBHÚMEDO C (w<sub>2</sub>)(w)**

Es el más húmedo de los templados con lluvia en verano y porcentaje de lluvia invernal menor de 5 mm. Se distribuye en el sur de la entidad, en una franja que corre de Este a Oeste y comprende parte de los municipios de Mariano Arista, Españita, Ixtacuixtla, Xaltocan, Huamantla, Santa Cruz Tlaxcala, Juan Cuamatzi, Miguel Hidalgo, José María Morelos, Xicoténcatl, Tenancingo, San Pablo del Monte, Cuaxomulco y Tzompantepec.

La precipitación media anual fluctúa entre 700 y 1000 mm y la temperatura media anual entre 12 y 18°C. La máxima incidencia de lluvia se presenta en julio, con un rango que va de 150 a 160 mm, en tanto que la sequía se registra en los meses de enero y febrero, con un valor menor de 10 mm, esto dependiendo del estado activo del océano,

es decir, "EL NIÑO", "LA NIÑA" o "CONDICIONES NORMALES"(Magaña y Morales, 1997,1998).

Los meses más cálidos son marzo, junio, julio y agosto, con una temperatura entre 14 y 15°C, y los meses más fríos son enero y diciembre, con una temperatura entre 11 y 12°C.

### 2.1.3 TEMPLADO SUBHÚMEDO C(w<sub>1</sub>)(w)

Es intermedio en cuanto a humedad, con precipitaciones en verano y un porcentaje de lluvia invernal menor de 5 mm. Es el clima que se encuentra más extendido en la entidad pero se le localiza principalmente hacia el Norte, en una franja que va de Este a Oeste, en partes de los siguientes municipios. Ixtacuixtla, Nativitas, Tetlatlahuca, Lázaro Cárdenas, Hueyotlipan, Domingo Arenas, Tlaxco, Apizaco, Tetla, Terrenate, Xalostoc y Tocatlán. El régimen pluvial medio anual tiene un rango entre 600 y 1000 mm y la temperatura media anual fluctúa entre 12 y 16°C.

Los meses de junio, julio y agosto registran la mayor precipitación, que va de 150 a 160 mm, en tanto que febrero presenta la mínima de 5 mm.

La más alta temperatura media mensual corresponde a abril y mayo, con un valor que oscila entre 18 y 19°C y la mínima se presenta en enero, con una media entre 13 y 14°C.

#### **2.1.4 TEMPLADO SUBHÚMEDO $C(w_0)(w)$**

Es el menos húmedo de los templados subhúmedos, con lluvia en verano y porcentaje de precipitación invernal menor de 6 mm. Se localiza en el Norte y Noreste de la entidad, principalmente en partes de los siguientes municipios Atlangatepec, Cuapiaxtla, El Carmen, Huamantla, Lázaro Cárdenas y Tlaxco. La precipitación máxima se registra en junio, con un valor entre 110 y 120 mm. La mínima corresponde a enero y febrero con un valor menor de 100 mm.

Las temperaturas máximas se presentan en los meses de abril, mayo y junio, cuyas medias mensuales oscilan entre 17 y 18°C, y en enero se registra la mínima, con un rango que fluctúa entre 11 y 12°C.

### **2.3 SUBGRUPO DE CLIMAS SEMIFRÍOS**

El rasgo que caracteriza a este clima es un régimen térmico medio anual menor de 12°C. Se localiza en pequeñas zonas del Este y Oeste de la entidad y ocupa aproximadamente 5% de su superficie. Aunque presenta dos variantes, sólo una de ellas amerita, por su importancia y extensión, un tratamiento más a fondo.

#### **2.3.1 SEMIFRÍO SUBHÚMEDO $C(E)(w_2)(w)$**

Es el más húmedo de los semifríos y tiene lluvias en verano. La precipitación del mes más seco registra un valor de 40 mm y un porcentaje de lluvia invernal menor de 5 mm. Se ubica en pequeñas zonas del Suroeste y Sureste de la entidad, que comprenden secciones de los municipios de Chiautempan, Teolocholco, Huamantla, Calpulalpan y

Trinidad Sánchez Santos. La precipitación media anual va de 700 a 1000 mm y la temperatura media anual tiene un valor menor de 12°C.

La máxima precipitación se presenta en junio, con un rango que oscila entre 160 y 170 mm, y la mínima se registra en febrero y diciembre, con un valor menor de 10 mm.

Los meses más cálidos son abril, mayo y junio, con una temperatura media de 13 a 14°C y los meses más fríos son enero y febrero, con medias que fluctúan entre 8 y 9°C.

#### **2.4 GRUPO DE CLIMAS FRÍOS Y MUY FRÍOS E(T)H**

Se caracteriza porque en el mes más cálido se registra una temperatura media menor de 6.5°C, lo que sólo permite el desarrollo de asociaciones de líquenes, musgos y hierbas cuya estructura recuerda a la tundra, típica cubierta vegetal de las llanuras árticas, que en nuestro país sólo se encuentra en las partes más altas de las montañas, encima de la línea arbolada. Este clima se localiza en la cumbre de la Malinche y cubre alrededor del 1% de su superficie.

#### **2.5 HELADAS Y GRANIZADAS**

La descripción de las heladas y granizadas se realiza de acuerdo con las zonas definidas por el clima y se encuentran distribuidas de la siguiente manera:

### **2.5.1 Heladas**

En los climas templados, las heladas se presentan casi siempre con una frecuencia de 20 a 40 días al año, aunque hay años con heladas durante 140 y hasta 150 días. En los climas semifríos la frecuencia de heladas se encuentra dentro del rango de 80 a 100 días al año, con extremos hasta de 140 y 160 días durante algunos años. El clima frío se presenta sólo en un área de la parte alta de la Malinche, donde se registran heladas con un rango de 140 a 160 días al año.

En algunas regiones las heladas se presentan durante todo el año. La máxima incidencia de este fenómeno se registra durante los meses de noviembre, diciembre, enero y febrero.

### **2.5.2 Granizadas**

Graniza de 2 a 4 días al año en promedio sobre 40% del estado, aproximadamente; en especial en las zonas donde imperan climas templados subhúmedos y en una pequeña porción de aquéllas en las que rigen los semifríos subhúmedos.

Un 30% del estado tiene un promedio de 2 días al año con granizo, en zonas de climas templados subhúmedos. En otras zonas en donde se presenta el mismo clima y que cubren el 15% del estado, y en parte del área con clima semifrío subhúmedo, graniza de 4 a 6 días al año. En 10% del estado, en otras zonas que también presentan climas

templados subhúmedos, graniza de 6 a 8 días al año. En el 5% restante de la entidad, las granizadas se presentan de 8 a 16 días al año, como promedio. Este fenómeno no guarda un patrón de comportamiento definido y está asociado con el de lluvia. Su máxima incidencia se presenta en los meses de julio y agosto (INEGI 1986).

### III MARCO TEÓRICO METODOLÓGICO

En este trabajo se analizaron las series de tiempo del observatorio meteorológico de Tlaxcala capital y de las estaciones termopluviométricas de Apizaco, Atlangatepec, Españita, Huamantla, Ixtacuixtla, Tepetitla, Tlaxco y Toluca de Guadalupe (MAPA 2).

Se utilizaron como series de tiempo a la temperatura mínima, temperatura máxima, temperatura ambiente y evaporación, registradas cada 24 horas en las estaciones meteorológicas del estado. De acuerdo a un estudio analítico, para poder aplicar esta teoría de sistemas dinámicos, exige que por lo menos se cuente con un registro de 500 datos, en este trabajo se cuenta con más de 3000 datos para cada serie de tiempo.

Análisis de la calidad de la información climática. El análisis consistió básicamente de las siguientes etapas:

Historia de las estaciones climatológicas, longitud de las series climáticas, pruebas de homogeneidad de datos y selección de estaciones útiles.

La investigación se divide en tres etapas fundamentales.

1) En la primera etapa, se selecciona un sistema en particular para su estudio en nuestro caso fueron la temperatura mínima, la temperatura máxima y la evaporación. A continuación se debe observar directa o

indirectamente a través de bancos de datos, el tiempo necesario para detectar que mecanismos o procesos controlan y/o determinan la evolución del sistema, teniendo un modelo conceptual del sistema en estudio.

2) En la segunda etapa se efectúan mediciones de las variables identificadas que describan el sistema de la manera más completa posible, de tal forma, que el comportamiento de dichas variables a lo largo del tiempo para encontrar fórmulas o reglas que expresen su variación instantánea (derivadas con respecto al tiempo). Si se tiene éxito en esta etapa, se obtiene un modelo matemático, que permite efectuar nuevos experimentos para ir refinando las hipótesis, hasta obtener un modelo "adecuado" de simulación con el cual se puede conocer de una manera apropiada el comportamiento del sistema.

3) El objetivo principal de la investigación, en la tercera etapa es la predicción de la evolución del sistema en estudio. Si se tiene éxito en estas etapas se habrá elaborado un modelo matemático determinista. Sin embargo, no siempre es posible pasar de una etapa a otra, por lo cual en este estudio se recurre al modelaje a partir de las series de tiempo registradas en las estaciones meteorológicas.

### 3.1 DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS

La atmósfera es un sistema dinámico donde se desarrollan diferentes tipos de flujos que van desde flujos laminares hasta movimientos turbulentos. Debido a esta complejidad e irregularidad, la atmósfera se supone impredecible. Se sabe que en la naturaleza coexisten sistemas complejos o desordenados y sistemas regulares u ordenados, solamente necesitamos observar a nuestro alrededor para darnos cuenta que prácticamente todos los fenómenos se desarrollan, en forma aparente, de una manera azarosa. Por lo tanto: ¿ la irregularidad de la atmósfera es al azar o existe un orden detrás de su irregularidad ? la teoría de caos determinístico aplicada a los sistemas dinámicos permite determinar el grado de orden o desorden de un sistema, así como el grado de predecibilidad del sistema, esto permite entender que existe un orden en aquellos fenómenos que se creía eran completamente al azar o desordenados:

Se define a un sistema dinámico como un sistema que evoluciona con el transcurso del tiempo, y cuando se conocen las condiciones iniciales que determinan su evolución puede ser descrita por ciertas reglas o ecuaciones matemáticas. Tal evolución se puede describir de una forma más clara si el sistema es descrito por su espacio de estado.

Un espacio de estado se obtiene al considerar como coordenadas a todas las variables de un sistema que describan su evolución. Para dar un ejemplo de evolución de un sistema, en el espacio físico y el espacio de estado, consideremos un péndulo como un sistema dinámico simple.

Se puede ilustrar el movimiento del péndulo en el espacio de estado, consideremos que el péndulo es permitido oscilar a partir de su estado inicial, (Fig. 1a). El estado inicial puede ser descrito por la velocidad ( $V$ ) y la posición del péndulo. La posición del péndulo en cualquier tiempo puede ser dada por el ángulo  $\theta$ , y la física Newtoniana nos provee las ecuaciones que describen la evolución del sistema a partir de un estado inicial. Suponemos que el péndulo parte de la posición A. En ésta su estado inicial será  $\theta = \theta_A$ , y su velocidad  $V=0$ .

El péndulo es entonces liberado. Cuando éste se mueve hacia el punto B, su rapidez se incrementa debido a la aceleración de la gravedad. Después de cruzar la posición B, el péndulo estará más cerca del punto R y tendrá una rapidez mayor. Una vez que el péndulo cruza el punto R su rapidez decrece, puesto que ahora la gravedad actúa en una dirección opuesta a su movimiento. En algún punto (posición C) la rapidez del péndulo será cero otra vez. Inmediatamente el péndulo iniciará su movimiento de regreso. Después éste cruzará el punto R y entonces una vez más, en algún punto, obtendrá una rapidez cero, (posición D) debido a que hay siempre alguna fricción, los puntos en los cuales la rapidez se anula no son fijos sino que son encontrados cada vez más cerca del punto R, finalmente, el péndulo estará en reposo en el punto R (Fig. 1a).

La evolución en el tiempo del péndulo puede ser completamente descrita por dos variables, la velocidad y el ángulo. Esas dos variables definen las coordenadas del espacio de estado. Si graficamos la

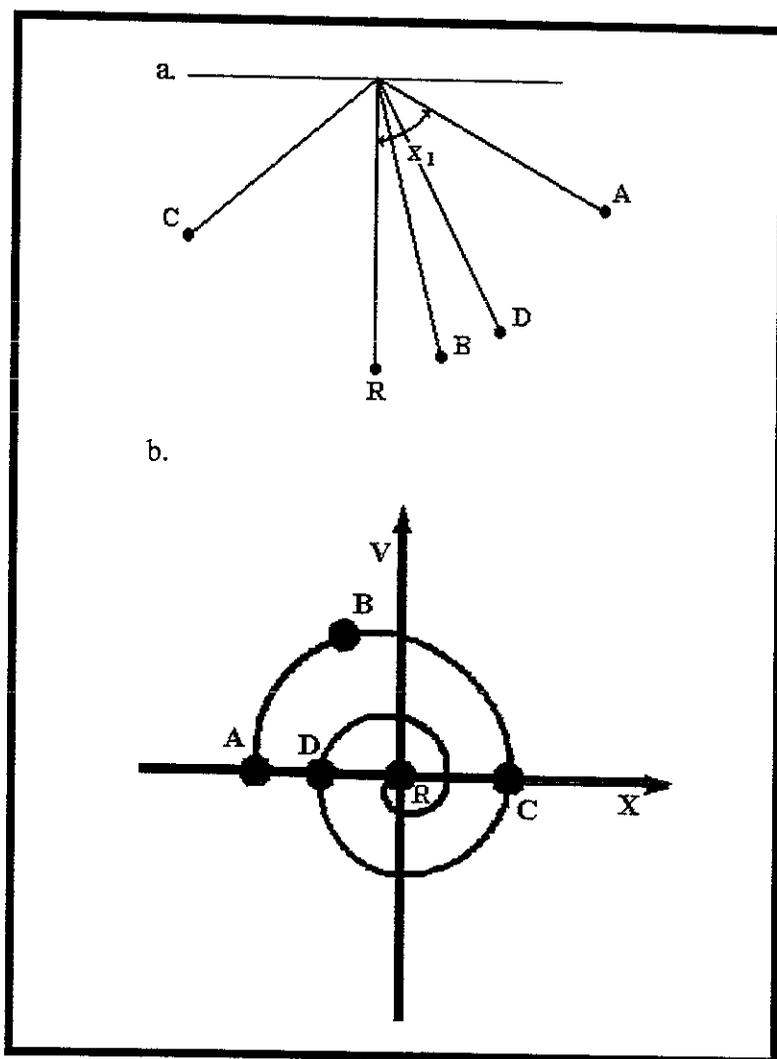


Figura 1. El péndulo como ejemplo de un sistema dinámico disipativo en el espacio físico (A) y en de fase (B)

1.a En el espacio físico.      1.b En el espacio de fase.

velocidad ( $V$ ) como una función del ángulo ( $\theta$ ) del péndulo, para los tiempos correspondientes a las posiciones A,B,C,D y R obtendremos una función como la que se muestra en la (Fig. 1b). Cada parte representa el estado del sistema en un momento dado, por lo tanto una trayectoria que conecta todos los puntos, se puede visualizar la evolución de un sistema, como se observa la trayectoria converge, esto es, tiende al punto R. Como es de esperarse, cualquier trayectoria que corresponda a una evolución de este sistema dinámico desde un estado inicial diferente (velocidad y posición) convergerá al punto R (es decir, no importa el estado inicial, el péndulo siempre llegará al reposo en el punto R). El punto R en el espacio de estado es llamado atractor puntual, puesto que atrae todas las trayectorias en el espacio de estado por un lado. Aparentemente, el comportamiento del sistema dinámico del péndulo siempre llegará al reposo en el punto R. Atractores puntuales, por lo tanto, corresponden a sistemas que alcanzan un estado de reposo.

Para sistemas que se desarrollan determinísticamente, sus atractores son variedades topológicas lisas de baja dimensión tales como puntos (dimensión cero), curvas (dimensión uno), ciclo límite dimensión uno (Fig. 2). El ciclo límite es un atractor que garantiza predecibilidad a largo plazo.

Otra forma de atractor es el toroide (Tsonis and Elsner, 1989). El toroide es semejante a un neumático y en este caso todas las trayectorias en el espacio de estado son atraídas hacia la superficie del toroide.

Estas dimensiones llamadas topológicas (dimensiones de atractores) no cambian aún cuando se deformen los objetos. Una característica importante de los atractores no fractales es que trayectorias vecinas inicialmente permanecen dentro del atractor, lo cual garantiza predecibilidad a largo plazo.

El sistema descrito aquí se desarrolla determinísticamente y se caracteriza por poseer un atractor con dimensión entera (no-fractal), que sugiere la dimensión de cierto subespacio del espacio de estado-intuitivamente, la dimensión de un espacio de estado es el mínimo número de coordenadas necesarias para especificar la localización de un punto de la evolución de cualquier sistema dinámico.

Existen en la naturaleza sistemas dinámicos que tienen un atractor cuya dimensión no es un valor entero, este tipo de atractores se denominan fractales. Para entender el carácter fractal de un atractor (Hao Bai-Lin, 1989) consideremos primeramente un cuadrado en el plano (Fig.3), el cual incrementa sus lados originales " r " veces en cada dirección. Entonces obtendremos un cuadrado el cual es  $r^2$  veces más grande que el primero. El mismo incremento de lados lineales, cuando se aplica a un cubo, permite obtener otro cubo el cual resulta  $r^3$  veces más grande que el original. En general, si se tiene un objeto geométrico A y queremos un objeto N veces mayor incrementando " r " veces sus lados originales se obtiene la siguiente relación

$$N = r^d \quad (1)$$

donde  $d$  es la dimensión del objeto. Aplicando la función logaritmo natural en ambos lados se obtiene que

$$d = \frac{\text{Ln}N}{\text{Ln}r} \quad (2)$$

La variable “ $d$ ” toma valores enteros cuando la dimensión del atractor es no fractal y coincide con la dimensión topológica del objeto. Sin embargo, la dimensión “ $d$ ” no está restringida a valores enteros. Los valores no enteros de esta variable es lo que caracteriza a los atractores caóticos (extraños) llamados fractales. Un ejemplo clásico de un objeto con una dimensión fractal (no entera) es el conjunto de Cantor (Fig. 4). Este se obtiene dividiendo un segmento de recta unitaria en tercios, descartando el tercio medio (como conjunto abierto) y repitiendo el procedimiento para los dos tercios restantes, así hasta que matemáticamente se considere “ad infinitum”.

Después de varios procesos iterativos, en contraste con el segmento de recta original, el conjunto de Cantor muestra un conjunto de puntos contenidos en una distancia igual a la longitud de este segmento. A fin de calcular la dimensión fractal de este conjunto, se

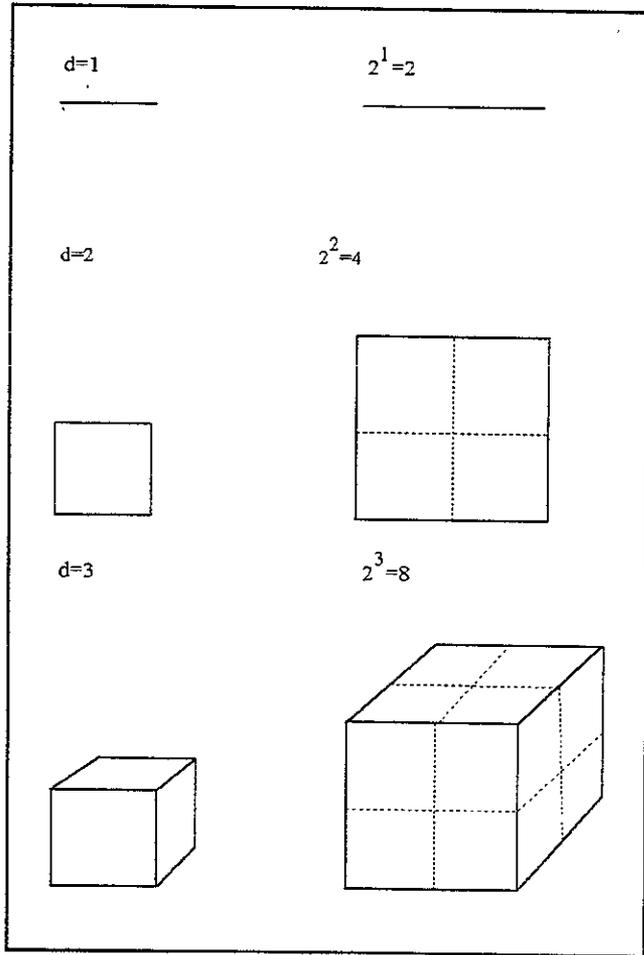


Figura 3. CAMBIOS DE ESCALA DE OBJETOS GEOMÉTRICOS  
REGULARES

toma cada lado, derecho o izquierdo, de la figura 4, como unidad original y se incrementa por un factor  $r=3$ . Para este caso resulta  $N=2$  y por lo tanto el conjunto de Cantor tiene dimensión

$$d = \frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3} = 0.6309\dots$$

que no es entera. Cuando se trata de objetos más intrincados, la aplicación directa de la igualdad (2) puede acarrear muchas dificultades y en consecuencia resultar inoperante.

Los atractores fractales se caracterizan porque a cualquier escala que se observen, conservan su forma geométrica original. Los atractores son subespacios del espacio de estado donde convergen las trayectorias de la evolución del sistema. Estos atractores imponen un límite a la predicción de un sistema, porque se manifiesta divergencia en trayectorias que inicialmente se encuentran cercanas, lo cual implica que la predecibilidad a largo plazo no está garantizada.

La dimensión del atractor fractal o no fractal, indica el número mínimo de variables o grados de libertad presentes en la evolución de un sistema. Por lo tanto, al determinar la dimensión de un atractor se establece también el número de ecuaciones que debe tener un modelo para predecir determinísticamente la evolución de un sistema.

Basta mirar a nuestro alrededor para darnos cuenta que en la mayoría de los fenómenos naturales se manifiestan oscilaciones o

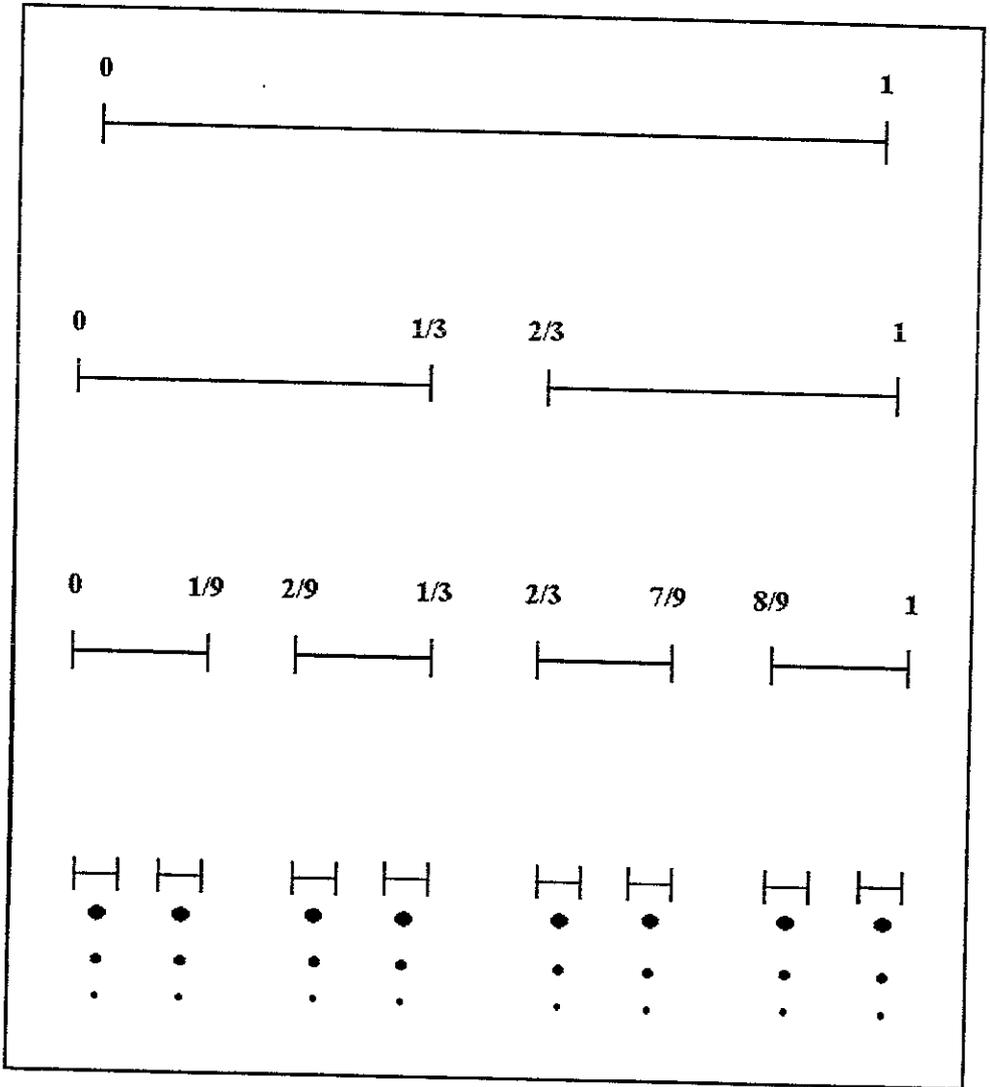


Figura 4 EL CONJUNTO DE CANTOR

vibraciones, monótonas o no monótonas, que permiten clasificar a los movimientos en regulares e irregulares o en periódicos y no periódicos. Los movimientos periódicos los encontramos en la rotación de la tierra, las estaciones del año, mareas, etc.

El estudio de los movimientos periódicos es importante porque cualquier sistema que evoluciona con el tiempo puede ser descrito por una suma de contribuciones periódicas de acuerdo a la transformada de Fourier.

Otra cuestión importante es que los sistemas dinámicos que no son periódicos poseen atractores fractales. Cabe reflexionar sobre lo siguiente: si la trayectoria de un fenómeno se repite periódicamente, entonces no tiene nada de caótica. Sin embargo, ¿no podría ser que un aparente comportamiento caótico no fuera más que una parte de una trayectoria periódica de período muy grande? por otro lado, los descubrimientos sobre el caos determinista han demostrado que sistemas muy simples pueden evolucionar de una manera compleja e imprevisible, que a pesar de un determinismo de principio, resulta inevitable una descripción probabilística de esos sistemas (Grassberger y Procaccia, 1983).

El estudio de los atractores extraños (fractales) ha permitido comprender la evolución de diversos sistemas. Cuando se dispone de

modelos matemáticos suficientemente fiables, los análisis finos permiten entender el comportamiento aparentemente caótico de esos sistemas que van desde circuitos eléctricos, arritmias cardíacas hasta reacciones químicas y rayos láseres.

En algunos problemas como el de la turbulencia atmosférica, se encuentra la dificultad adicional de que coexisten distintos sistemas a distinta escala espacial y temporal. Si fuera posible, idealmente, analizar primero cada uno por separado y luego estudiar cómo interaccionan, se daría un gran paso para su comprensión.

Aplicando los conocimientos acerca de la transformada de Fourier es posible distinguir entre sistemas dinámicos que poseen atractores regulares y atractores extraños en contraste con desarrollos puramente azarosos y aquellos que contiene "ruido"

#### IV METODOLOGÍA Y TÉCNICAS

Aparentemente, la evolución de un sistema depende exclusivamente de las condiciones iniciales y puede ser descrito por reglas determinísticas. Sin embargo, puede comportarse de una manera extraña. Tales sistemas, lo mismo que sus atractores, son llamados caóticos. Las implicaciones de tales descubrimientos son profundas. Si se conocen exactamente las condiciones iniciales, se puede seguir la trayectoria que corresponde a la evolución de un sistema básicamente por siempre y de una manera precisa (Tsonis and Elsner, 1988). El problema, sin embargo, es que no se pueden conocer perfectamente las condiciones iniciales.

Nuestros instrumentos solamente pueden medir en forma aproximada las variables atmosféricas (temperatura ambiente, temperatura mínima, temperatura máxima, evaporación, presión atmosférica, etc.) que son empleadas como condiciones iniciales. Por otro lado, ni siquiera se conocen totalmente las leyes físicas que gobiernan a un sistema debido a la naturaleza del atractor fundamental.

El estado del sistema en un tiempo posterior puede ser totalmente diferente de lo predicho por esas leyes. Simplemente, debido a la naturaleza del sistema, los errores iniciales aumentan y por lo tanto la predicción es limitada. Recientemente, las ideas de las teorías de caos y de sistemas dinámicos han sido aplicadas a modelos que describen fluctuaciones del clima y transiciones entre las edades glaciares (Nicolis,

1987, Tsonis y Elsner, 1988). Esos estudios muestran, en la extensa banda de estructuras del espectro de los datos climáticos observados, la presencia de atractores caóticos no periódicos. Los atractores son sensibles a las condiciones iniciales, de acuerdo con la impredecibilidad de los sistemas climáticos (Lorenz, 1965).

La evolución de un sistema se puede estudiar de dos maneras diferentes: o bien se tienen las ecuaciones matemáticas que lo describen o se cuenta con una serie de tiempo, secuencia de datos. Si la descripción matemática de un sistema es dada, el número de variables se conoce y la generación del espacio de estado y del atractor es directa (Morales-Acoltzi y Adem, 1994).

En este trabajo no se dispone de la formulación matemática precisa, para el caso de las estaciones meteorológicas se cuenta con la serie de datos de temperatura máxima, temperatura mínima, temperatura ambiente y evaporación. Ahora bien, es conveniente reemplazar al espacio de estado por el espacio de fase, se justifica físicamente porque el registro de una sola variable del tiempo es el resultado de la interacción o interrelación de las restantes variables del espacio de estado que determinan la evolución de un sistema. De esta manera, no se pierde la información de la dinámica del sistema pues está incluida en cualquier variable observable.

La física atrás de tal aproximación es que un simple registro desde un sistema dinámico es el resultado de todas las variables interactuantes y así, la información acerca de la dinámica de ese sistema puede, en principio, estar incluida en cualquier variable observable.

En meteorología la variable elegida para representar al espacio de fase puede ser la velocidad vertical del viento, la temperatura ambiente, la temperatura mínima, la temperatura máxima y evaporación.

Para justificar, matemáticamente, el cambio de espacio de estado al espacio de fase. Primeramente, supóngase que el espacio de estado de un sistema está representado por  $N$  diferentes variables (coordenadas) todas distintas  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , de tal forma que a un tiempo inicial " $t_0$ " estará descrito por el vector  $X_0 = (X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_n(t_0))$  en el espacio de estado. Posteriormente, se considera la evolución (con el tiempo) del sistema empleado ecuaciones diferenciales ordinarias que describan los procesos que la determinan esas ecuaciones pueden ser transformadas convenientemente a un conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$X_i = f_i = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_N) \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

Derivando sucesivamente una de estas ecuaciones, todo el sistema puede ser sustituido por un a sola ecuación altamente no lineal de N-ésimo orden. Por ejemplo, si se deriva a la primera ( $i=1$ ) resulta que:

$$X_1^N = f_1(X_1, \dot{X}_1, \ddot{X}_1, \dots, X_1^{N-1}) \quad (4)$$

Entonces sin pérdida de generalidad de la dinámica del sistema, el espacio de fase queda descrito por:

$$(X_1, \dot{X}_1, \ddot{X}_1, \dots, X_1^{N-1})$$

o bien por

$$(X_1, \dot{X}_1, \dots, X_1^N) \quad (5)$$

sin pérdida de información acerca de la evolución del sistema, en este caso, sólo una variable y sus derivadas.

En este trabajo sólo se tienen series de tiempo de cuatro variables muestreadas a intervalos regulares de tiempo. En vez de una variable continua  $X(t)$  y sus derivadas, una serie de tiempo discreta y sus desplazamientos por  $(N-1)$  retrasos en el tiempo se puede considerar.

Entonces dada una observable, por decir  $X(t)$ , si el atractor tiene dimensión finita el vector de estado completo  $X(t)$  puede ser construido

por el siguiente proceso  $X(t+s)$  usado como la primera coordenada,  $X(t+2s)$  como la segunda, y  $X(t+Ns)$  como la última, siendo  $s$  el parámetro de retraso.

Seleccionado  $s$  como la escala de macro-tiempo (tiempo de autocorrelación) de la serie de tiempo  $X(t)$  se debe garantizar independencia lineal de las coordenadas de retraso. Esto es esperado porque para tiempos de retraso mayores que  $s$ , la autocorrelación de la serie de tiempo tiende a cero.

El algoritmo que emplearemos en el desarrollo de este trabajo consiste en efectuar un análisis estadístico de la distancia entre pares de puntos contenidos en el espacio de fase (Grassberger y Procaccia, 1983, 1984), que permitirá estimar la dimensión de los atractores y la divergencia de los pedazos de trayectorias que los envuelven o contienen.

Sean  $X_m(t_i)$  y  $X_m(t_j)$  dos puntos en el espacio de fase  $m$ -dimensional cuyas coordenadas retrasadas en el tiempo están descritas por las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} X_m(t_i) &= [X(t_i), X(t_i + s), X(t_i + 2s), \dots, X(t_i + (m-1)s)] \\ X_m(t_j) &= [X(t_j), X(t_j + s), X(t_j + 2s), \dots, X(t_j + (m-1)s)] \end{aligned} \quad (6)$$

Usando norma Euclidiana, la distancia  $d_y(m)$  entre ambos puntos, la cual depende de la dimensión  $m$  del espacio de fase, esta dada por

$$d_y(m) = |X_m(t_i) - X_m(t_j)| \quad \text{donde} \quad |t_i - t_j| > s \quad (7)$$

Hao Bai-Lin (1989) propone que la distancia entre ambos puntos (vectores) resulta igual a la distancia máxima que existe entre las respectivas componentes. Por lo tanto

$$d_y(m) = \max[(X_m(t_i) - X_m(t_j))] \quad \text{donde} \quad t_i - t_j > s \quad (8)$$

la cual se debe probar para todas las componentes desde 1 a  $m$ . Esta propuesta de Hao Bai-Lin es aplicable para un gran número de datos del orden de 3000 en adelante, en cuyo caso se debe usar el método de información mutua para realizar los corrimientos (Fraser y Swinney, 1986). De esta forma el número total de parejas de puntos:

$$N_m(r) = \sum_{i=1}^N \theta(r - d_y(m)) \quad (9)$$

donde  $\theta$  es la función de Heaviside con

$$\theta(r - d_y(m)) = 1 \quad \text{si} \quad (r - d_y(m)) > 0 \quad (10)$$

$$\theta(r - d_y(m)) = 0 \quad \text{si} \quad (r - d_y(m)) < 0 \quad (11)$$

Como  $N$  representa el número total de puntos en el espacio de estado entonces la función de distribución acumulativa  $C_m(r)$  se normaliza por el total de los  $N^2$  pares de puntos

$$C_m(r) = \frac{N_m(r)}{N^2} \quad (12)$$

La función de distribución representa al número medio relativo de puntos contenidos en un elemento de volumen  $m$ -dimensional o esfera de radio  $r$  que rodea a cada punto o estado de la trayectoria  $X(t)$  en el atractor.

Si se incrementa la distancia límite  $r$ , el número  $C_m(r)$  cambia de forma al incrementar la dimensión contenedora  $m$ . Cuando el número de puntos ( $N$ ) tiende a infinito, la función de distribución permite determinar:

a) la dimensión de los atractores

la divergencia de las trayectorias que contienen al atractor lo cual equivale a poder predecir determinísticamente la evolución del sistema (Klaus, 1987).

Cuando  $N$  tiende a infinito un atractor descrito por la trayectoria  $X(t) = [X(t), X(t + 2s), \dots, X(t + (m - 1)s)]$  evolucionando en un espacio de fase suficientemente alto dimensionalmente ( $m \rightarrow \infty$ ). Tiene una dimensión (de acuerdo a (1)), a la que denotaremos por  $d_2$ , que permanece invariante en escala con la función de distribución acumulativa (12) de parejas de puntos sobre la trayectoria. Por lo tanto cuando  $r$  tiende a cero, resulta que (ver Fig. 3 y Ec. 1)

$$C_m(r) = r^{d_2} \quad (13)$$

El exponente de escala  $d_2$  o dimensión de correlación del atractor para el espacio  $m$ -dimensional se obtiene despejándolo de (13)

$$d_2 = \frac{Ln [C_m(r)]}{Ln r} \quad (14)$$

de esta forma,  $d_2$  se deduce a partir de la pendiente lineal de la función de distribución acumulativa en un diagrama de  $Ln r$  vs  $Ln [C_m(r)]$ .

Para series de tiempo azarosas no hay correlación espacial en cualquier dimensión contenedora  $m$  y de esta forma no se observa saturación en el exponente  $d_2$ . La ecuación (14) requiere de un gran número de puntos debido a que la dimensión contenedora  $m$  debe ser suficientemente alta ( $m > m_\infty$ ) para que el atractor quede contenido en el espacio de fase de  $m_\infty$  coordenadas de tiempo recorrido. De esta forma, la dimensión ( $d_2$ ) del atractor se obtiene como un valor de saturación  $d_2$  que no varía aunque se agreguen más coordenadas al espacio de fase que lo contiene, lo cual se cumple si las pendientes de las distribuciones acumulativas permanecen constantes.

La dimensión  $d_2$  sugiere un sistema dinámico caótico con un número

$$\leq (2d_2 + 1) \quad (15)$$

de grados de libertad (Takens, 1987).

#### 4.1 COEFICIENTES DE LYAPUNOV

Se sabe que un sistema es estable si al aplicarle una pequeña perturbación, sus trayectorias a través del espacio de fase cambia muy poco de lo que pudieran cambiar por otras causas. El matemático ruso Lyapunov se dio cuenta que un simple número puede ser usado para representar el cambio originado por una perturbación de un sistema en un instante por sus perturbaciones. Se divide el tamaño de la perturbación de un sistema en un instante por sus perturbaciones en un momento anterior. Este mismo cálculo se efectúa en varios intervalos de tiempo y promediando los resultados se obtienen cantidades conocidas como los coeficientes de Lyapunov, las cuales describen el cambio de un sistema al estar sometido a una perturbación.

Los coeficientes de Lyapunov definen caos en un sistema dinámico términos de su sensibilidad a las condiciones iniciales. Si el estado inicial de un sistema ( $X_0 = X(t_0)$ ) en el tiempo  $t_0$  sufre un cambio infinitesimal ( $\delta X_0$ ), sus desviaciones ( $\delta X$ ) cambian exponencialmente con el tiempo  $t = t_0 + ms$ , incrementándose por  $m$  pasos de tiempo de duración de  $s$ :

$$\delta X = \delta X_0 \exp(Lms)$$

$$\text{por lo tanto } L = \frac{d(\ln \delta X)}{dt}$$

existe y es denominado el mayor de los coeficientes de Lyapunov.

Otros exponentes de Lyapunov surgen para otros valores iniciales de ( $\delta X_0$ ). En la fórmula anterior  $L$  representa la razón de separación (por

unidad de tiempo) de los pedazos de trayectoria que inicialmente pasan cerca de  $X_0$ .

Si  $L < 1$  la perturbación termina y el sistema es estable. Si  $L = 0$  el sistema es conservativo. Sin embargo, si  $L > 1$  la perturbación crece, el sistema se vuelve inestable y los pedazos de trayectoria divergen exponencialmente. Los sistemas llamados caóticos son aquellos que tiene un coeficiente de Lyapunov mayor que la unidad y son siempre inestables, esta es la raíz de la impredecibilidad de estos sistemas.

El concepto de los coeficientes característicos de Lyapunov ( $L$ ), para trayectorias en un espacio de fase  $m$ -dimensional, pueden ser característicos como la razón exponencial media de la divergencia de trayectorias encerradas, inicialmente, dentro de un esferoide o de un elemento de volumen contenidos en ese espacio.  $L$  toma uno de los  $N$  valores  $L_1, L_2, \dots, L_N$  (Eckmann y Ruelle, 1985), los cuales en general son mayores que la unidad, y, además,

$$L_1 > L_2 > \dots > L_N \quad (15)$$

Así los coeficientes de Lyapunov caracterizan las expansiones o contracciones, en las diferentes direcciones, de los elementos de volumen en el espacio de fase, en general, la razón de crecimiento exponencial de un vector infinitesimal  $X(t)$  en el espacio de fase  $m$ -

dimensional esta dado por el mayor ( $L_1$ ) de los coeficientes de Lyapunov. La razón de crecimiento de un elemento infinitesimal de superficie esta dado por la suma de los dos más grandes coeficientes característicos  $L_1 + L_2$ , en general la razón de crecimiento de un  $N$ -ésimo elemento infinitesimal de un volumen esta dado por la suma  $(\sum L_i = L^{(N)}) L_1 + L_2 + \dots + L_N$  de todos los  $N$  eigenvalores o coeficientes característicos de Lyapunov (Lichtenberg y Lieberman, 1983).

Para un elemento de volumen de un sistema conservativo  $L^{(N)} = 0$ ; para un sistema disipativo el volumen se contrae y  $L^{(N)} < 0$ . Por otro lado, para un proceso Browniano  $L^{(N)} = \infty$  porque el volumen se expande infinitamente por movimiento estocástico.

Cada coeficiente positivo describe una dirección en la cual el sistema realiza ensanchamiento o divergencia de estados vecinos correlacionados. El término mayor del desarrollo de un sistema, dada la condición inicial  $X_0(t_0)$  no puede ser predicho. Estas son características de un sistema caótico que depende sensiblemente de las condiciones iniciales. Cada coeficiente característico de Lyapunov positivo  $L_i > 0$  contribuye a la divergencia o expansión de un elemento de volumen, contenido en un espacio de fase, alrededor del estado inicial  $X_0$  (es decir en un estado inicial del tiempo), su suma define una razón de crecimiento exponencial  $h$  de pequeños errores iniciales

$$h(X_0) = \sum L_i \quad \text{con } L_i > 0 \quad (16)$$

volumen, contenido en un espacio de fase, alrededor del estado inicial  $X_0$  (es decir en un estado inicial del tiempo), su suma define una razón de crecimiento exponencial  $h$  de pequeños errores iniciales

$$h(X_0) = \sum L_i \quad \text{con } L_i > 0 \quad (16)$$

y provee una medida cuantitativa de predecibilidad (impredicibilidad), también describe la expansión de un elipsoide infinitesimal para el cual solamente las componentes divergiendo ( $L_i > 0$ ) en los ejes principales, contribuyen. El valor recíproco,  $1/h$ , denota una medida de escala de tiempo sobre la cual la predecibilidad determinística puede ser posible; esto caracteriza en un tiempo medio la expansión volumétrica exponencial de un sistema dinámico dentro de un espacio de fase.

#### 4.2 EXPONENTES CARACTERÍSTICOS PARA UNA DISTANCIA LÍMITE FIJA

Un estado  $X_m(t_i) = [X(t_i), X(t_i + s), \dots, X(t_i + (m-1)s)]$  en el espacio de fase  $m$ -dimensional de coordenadas recorridas en el tiempo, define un pedazo de trayectoria en el tiempo de longitud  $(m-1)s$ . Estados dentro de una esfera  $m$ -dimensional de tamaño  $r$  rodeando el estado  $X(t_0)$  definen otros fragmentos de trayectorias sobre el atractor, las cuales permanecen cercanas (es decir, dentro de una distancia  $< r$  durante el tiempo  $(m-1)s$  de evolución (Meneses, 1993).

Las trayectorias parten, sin embargo, a diferentes  $t_0$ . Entonces, los promedios deben ser realizados sobre todos los puntos del atractor.

trayectorias las cuales permanecen dentro de la distancia  $< r$ , es decir, las trayectorias permanecen dentro de esferoides de tamaño  $r$ , las otras han escapado.

Entonces, el cambio de  $(m-1)s$  a  $ms$  o desde  $C_m$  a  $C_{m+1}$  provee una medida para la razón media de escape (divergencia) de pedazos de trayectorias cercanas sobre el atractor, lo cual es equivalente, a los exponentes característicos de Lyapunov. Puede ser deducida una invarianza de escala de la función de distribución acumulativa de distancias  $C_m$  para los exponentes característicos de Lyapunov (y la suma  $h = L_i, L_i > 0$ ).

Considerando dos fragmentos de trayectorias divergiendo las cuales permanecen dentro de una distancia límite ( $dx < r$ ) durante  $(m-1)$  pasos de tiempo  $s$ . Su probabilidad para divergir lejos del valor límite fijado durante el siguiente paso de tiempo  $s$  crece proporcionalmente como  $\exp(Lms)$ , además, las probabilidades para un ensamble grande inicialmente de trayectorias para permanecer atrapadas dentro de un elemento de volumen (o esferoide) decrece proporcionalmente a la expansión a lo largo de los ejes principales, es decir,  $\exp(-L_i ms)$ , en este caso sólo contribuyen los ejes divergiendo ( $L_i > 0$ ). Concordantemente, el número relativo medio  $C_m$  de parejas de puntos con distancias  $d_{ij} < r$  decrece proporcionalmente a:

$$C_m = \exp(-msL_i); \exp(-msL_i), \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp[-ms \text{ms} (L_1 + L_2 + \dots)] \\
 &= \exp(-msh)
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

La predecibilidad  $h$  puede ser interpretada como una razón de expansión exponencial media o divergencia de pedazos de trayectorias de longitud  $ms$ , los promedios ocurren sobre todos los puntos del atractor.

Combinación de  $C(r) = r^d$  y  $C_m = r^d \exp(-msh)$  conduce a la ley de invarianza de escala (scaling) de la función de distribución acumulativa de distancias  $C_m(r)$ :

$$C_m(r) = r^d \exp(-ms) \tag{18}$$

Aquí debe ser notado, que esta ley de escalamiento acopla la suma  $h$  de los exponentes característicos de Lyapunov de el flujo, con la razón media de creación de información o reducción de predecibilidad (Eckmann y Ruelle, 1985).

La predecibilidad sobre atractores puede ser estimada a partir de pendientes de la función de distribución en un diagrama  $\text{Ln}C_m(r)$  en función de  $\text{Ln}r$ , y si la dimensión  $m$  es seleccionada suficientemente alta ( $m > m_\infty$ ) para que esté el atractor contenido en el espacio de fase de coordenadas recorridas en el tiempo.

La diferencia entre  $\text{Ln}[C_{m+k}(r)]$  y  $\text{Ln}[C_m(r)]$  para una distancia límite fija  $r$ , conduce a la siguiente expresión despejando  $h$ :

$$h \approx \frac{1}{sk} \operatorname{Ln} \frac{C_m(r)}{C_{m+k}(r)} \quad (19)$$

La distancia fija  $r$  debe ser seleccionada en un intervalo de  $Lnr$  donde las distribuciones relacionadas  $\operatorname{Ln}[C_m(r)]$  pueden ser aproximadas por las líneas rectas de pendientes idénticas, es decir, donde se cumple la relación  $C_m(r) = r^{d_2}$ . El valor inverso  $1/h$  de la divergencia media define una escala de tiempo medio hasta la cual se puede predecir, si es considerada una expansión volumétrica exponencial.

Para construir nuestro espacio de estado se procedió a obtener los corrimientos de cada serie de tiempo (4 variables) para cada uno de los siguientes ejes coordenadas, si la correlación entre los corrimientos es adecuada (uno por uno cada dimensión adicional). Los valores observados cada 24 horas, se representan por la serie  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ . Entonces, el primer corrimiento ( $SOR1$ ). Que representa el segundo eje, se obtiene de la observable eliminando al primer valor ( $X_1$ ); esto es porque para el valor siguiente (tiempo de correlación  $s = 24$  horas) los valores empiezan con  $X_2$ , y  $SOR1$  tendrá como serie de datos a  $X_2, X_3, X_4, \dots, X_n$ . De igual forma el segundo corrimiento ( $SOR2$ ), que representa al tercer eje (se obtiene eliminando a  $X_1$  y  $X_2$  de la serie observada) tendrá como serie de datos a  $X_3, X_4, X_5, \dots, X_n$ . Este procedimiento se realiza hasta la dimensión  $m$ -ésima permitida por la serie de datos. Resumiendo:

$S_0$	$S_{0R1}$	$S_{0R2}$	$S_{0R3}$	...
$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	...
$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	...
$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	...
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
$X_n$	$X_{n+1}$	$X_{n+2}$	$X_{n+3}$	...

En seguida se construyeron los puntos coordenados (con la correlación de los datos de la serie observada) para dos dimensiones ( $2D$ ) y tres dimensiones ( $3D$ ), cuatro dimensiones ( $4D$ ), así hasta la  $m$ -ésima dimensión, para poder encontrar las dimensiones de los atractores como valores de saturación de  $d_{\infty}$ , los cuales no cambian aunque se agregaran más coordenadas al espacio de fase contenedor de esta forma, los puntos de coordenadas para cada dimensión se obtienen:

$2D$	$3D$	$4D$
$P_1(X_1, X_2)$	$P_1(X_1, X_2, X_3)$	$P_1(X_1, X_2, X_3, X_4)$
$P_2(X_2, X_3)$	$P_2(X_2, X_3, X_4)$	$P_2(X_2, X_3, X_4, X_5)$
$P_3(X_3, X_4)$	$P_3(X_3, X_4, X_5)$	$P_3(X_3, X_4, X_5, X_6)$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$P_{n-1}(X_{n-1}, X_n)$	$P_{n-2}(X_{n-2}, X_{n-1}, X_n)$	$P_{n-3}(X_{n-3}, X_{n-2}, X_{n-1}, X_n)$

Se observa para dos dimensiones el  $i$ -ésimo punto se encuentra por medio de la expresión  $P_1(X_1, X_i + 1)$ , para tres dimensiones  $P_i(X_i, X_i + 1, X_i + 2)$ , para cuatro dimensiones  $P_i(X_i, X_i + 1, X_i + 2, X_i + 3)$ , etc, donde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . De igual manera se deduce que la última coordenada de cualquier punto  $P_i$ , está dada por la expresión  $X_i + (m - 1)$ . Posteriormente, se calcularon las distancias que existen entre todos los puntos que se formaron con los datos observados para cada una de las distancias que existentes ( $2D, 3D, \dots, mD$ ). Para ello se empleó norma Euclidiana, aún cuando también existe un método sugerido por Hao Bai Lin 1989 (Ver Ec.8). El sugiere que la máxima diferencia entre los componentes correspondientes determina la distancia entre los vectores.

En seguida, se obtuvieron las correspondientes funciones de distribución acumulativa (Ec. 12) para cada una de la dimensiones ( $C_{2d}(r), C_{3d}(r), \dots, C_{md}(r)$ ), el valor límite  $r$  se eligió de la forma que se observara de una manera clara como estaba variando generalmente aumentando el número de puntos contenidos dentro de los esferoides  $m$ -dimensionales al ir aumentando el radio, hasta que los puntos quedaran dentro de los esferoides. Los valores de los radios que se emplearon, para cada dimensión se fueron incrementando en una milésima.

También se realizaron experimentos con radio mayor, con incrementos de 0.01, de 0.01 obteniéndose los mismos resultados, sin embargo, matemáticamente, se trazaron las gráficas de  $Ln$  vs  $LnC_m(r)$  para obtener el ajuste de rectas, que permitió determinar la zona de

invarianza de escala (scaling) de la función de distribución acumulativa (Ec. 12).

Para las series de tiempo observadas temperatura ambiente, temperatura máxima, temperatura mínima, se gráfico el número de coordenadas contra pendientes para obtener la dimensión del atractor.

Finalmente, se consideró la región de invarianza, se determinaron los límites de predecibilidad para las cuatro variables utilizadas.

## V RESULTADOS

Para determinar las coordenadas adecuadas, a partir de una serie de tiempo, para representar en un espacio de fase el comportamiento del sistema, fue necesario calcular los coeficientes de correlación que a continuación se presentan:

### 5.1 COEFICIENTES DE CORRELACIÓN

En las tablas 2,3,4 y 5 se muestran los coeficientes de correlación (tiempo de correlación:  $T_{ao}=24$  horas) entre las coordenadas de la temperatura ambiente, temperatura máxima, evaporación y temperatura mínima, para un período seleccionado. Se puede observar, que en la diagonal principal de las tablas los coeficientes de correlación son igual a uno. Correspondiendo a las correlaciones de cada una de las coordenadas con ellas mismas, por ejemplo, el primer corrimiento con él mismo, es decir SoR1 con SoR1

La correlación para la evaporación, tabla 4, resulta ser un período muy grande ya que la correlación decae inmediatamente esto significa que es una variable con propiedades diferentes a las demás que permiten un  $T_{ao} = 1$  día.

Se presenta una tendencia a la disminución en el coeficiente de correlación entre una de las coordenadas contra todas las demás, lo cual garantiza que las coordenadas son **linealmente** independientes (Klaus, 1987), Por lo tanto estas coordenadas pueden ser utilizadas para construir el espacio de fase de las cuatro variables climáticas en estudio.

	So	SoR1	SoR2	SoR3	SoR4	SoR5	SoR6
So	1	0.7559	0.7286	0.7049	0.6734	0.6875	0.6469
SoR1	0.7559	1	0.7652	0.7389	0.7178	0.6854	0.6996
SoR2	0.7286	0.7652	1	0.7741	0.7482	0.7268	0.6954
SoR3	0.7049	0.7389	0.7741	1	0.7856	0.7580	0.7382
SoR4	0.6734	0.7178	0.7482	0.7856	1	0.7911	0.7627
SoR5	0.6875	0.6854	0.7268	0.7580	0.7911	1	0.7961
SoR6	0.6469	0.6996	0.6954	0.7382	0.7627	0.7861	1

TABLA 2: COEFICIENTES DE CORRELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS DE LA VARIABLE (TEMPERATURA AMBIENTE), CONSIDERANDO UN CORRIMIENTO TAO=24 HRS.

	So	SoR1	SoR2	SoR3	SoR4	SoR5	SoR6
So	1	0.7282	0.6308	0.5493	0.4573	0.4189	0.3645
SoR1	0.7282	1	0.7275	0.6305	0.5455	0.4519	0.4060
SoR2	0.6308	0.7275	1	0.7279	0.6271	0.5423	0.4595
SoR3	0.5494	0.6305	0.7279	1	0.7271	0.6292	0.5470
SoR4	0.4573	0.5455	0.6271	0.7271	1	0.7328	0.6376
SoR5	0.4189	0.4519	0.5423	0.6292	0.7328	1	0.7324
SoR6	0.3645	0.4060	0.4395	0.5470	0.6376	0.7324	1

TABLA 3: COEFICIENTES DE CORRELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS DE LA VARIABLE (TEMPERATURA MÁXIMA), CONSIDERANDO UN CORRIMIENTO TAO=24 HRS.

	So	SoR1	SoR2	SoR3	SoR4	SoR5	SoR6
So	1	0.2691	0.1904	0.1292	0.1788	0.1433	0.1152
SoR1	0.2691	1	0.2721	0.1896	0.1296	0.1762	0.1447
SoR2	0.1904	0.2721	1	0.2758	0.1925	0.1350	0.1786
SoR3	0.1292	0.1896	0.2758	1	0.2756	0.1873	0.1361
SoR4	0.1788	0.1296	0.1925	0.2756	1	0.2746	0.1887
SoR5	0.1433	0.1762	0.1350	0.1873	0.2746	1	0.2762
SoR6	0.1152	0.1447	0.1786	0.1361	0.1887	0.2762	1

TABLA 4: COEFICIENTES DE CORRELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS DE LA VARIABLE (EVAPORACIÓN), CONSIDERANDO UN CORRIMIENTO DE TAO= 24 HRS.

	So	SoR1	SoR2	SoR3	SoR4	SoR5	SoR6
So	1	0.7559	0.6106	0.5380	0.4962	0.4883	0.5089
SoR1	0.7559	1	0.7666	0.6106	0.5386	0.4962	0.4893
SoR2	0.6106	0.7666	1	0.7661	0.6105	0.5370	0.4964
SoR3	0.5380	0.5386	0.7661	1	0.7659	0.6092	0.5373
SoR4	0.4962	0.4962	0.6105	0.7559	1	0.7657	0.6096
SoR5	0.4883	0.4893	0.5370	0.6092	0.7657	1	0.7660
SoR6	0.5089	0.5098	0.4964	0.5373	0.6096	0.7660	1

TABLA 5: COEFICIENTES DE CORRELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS DE LA VARIABLE (TEMPERATURA MÍNIMA), CONSIDERANDO UN CORRIMIENTO TAO=24 HRS.

## 5.2 ZONA DE INVARIANZA DE ESCALA

En las gráficas 1,2,3,4 apéndice 1, se presentan para cada una de las cuatro variables climatológicas de Tlaxcala capital, las gráficas correspondientes a  $\text{LnC}(r,m)$  vs  $\text{Ln}(r)$ , para las coordenadas de 2-18 con la finalidad de determinar la dimensión contenedora del atractor, para la cual se fue incrementando una a una coordenada hasta encontrar el efecto de saturación, de tal forma que no se obtiene nueva información al anexar más coordenadas, para el caso de la temperatura ambiente la zona de invarianza de escala se alcanza entre 12 y 14 coordenadas.

Para la temperatura máxima la zona de invarianza de escala se encuentra entre las 14 y 17 coordenadas, es decir, el atractor está contenido en un espacio, conocido como espacio de embedding, respectivamente, de acuerdo al teorema de Takens (Eckman and Ruelle, 1985), ec. (15). Para la evaporación, la zona de invarianza de escala se encontró de las 10 a las 12 coordenadas.

En los cuatro casos permanecieron constantes las pendientes de la posición lineal de las gráficas aún cuando se le agreguen más coordenadas, asegurándose con esto una determinación adecuada de la dimensión del atractor.

Para la temperatura mínima la zona de invarianza de escala se encontró entre la coordenadas 12-14.

Para Apizaco, gráficas 5,6,7 y 8, apéndice 1, se presentan las gráficas correspondientes a  $\text{LnC}(r,m)$  en función de  $\text{Ln}(r)$ , para la temperatura ambiente la zona de invarianza de escala se alcanza entre las 10 y 12 coordenadas, en promedio. Para la temperatura máxima la zona de invarianza de escala se encuentra entre las 11 y 12. Para la evaporación la zona de escala se alcanza entre las 10 y 11, y para la temperatura mínima fueron suficientes 13 coordenadas.

Para Atlangatepec, gráfica 9 del apéndice 1, se presenta para la temperatura mínima, la zona de invarianza de escala, se alcanza entre las 4 y 5 coordenadas.

Para Españita, gráfica 10 del apéndice 1, se presenta para la temperatura mínima, la zona de invarianza de escala se alcanza entre las coordenadas 4 y 5.

Para Ixtacuixtla, gráfica 11, apéndice 1, se presenta para la temperatura mínima la zona de invarianza de escala se alcanza entre las coordenadas 8 y 9.

Para Tepetitla, gráfica 12, apéndice 1, se presenta para la temperatura mínima la zona de invarianza de escala se alcanza entre las coordenadas 12 y 13.

Para Tlaxco, gráfica 13, apéndice 1, se presenta para la temperatura mínima la zona de invarianza de escala se alcanza entre las coordenadas 4 y 5.

Para Toluca de Guadalupe, gráfica 14 en el apéndice 1, se presenta para la temperatura mínima la zona de invarianza de escala entre las coordenadas 8 y 9.

Para Huamantla, gráfica 15 del apéndice 1, se presenta, para la temperatura mínima, en la cual la zona de invarianza de escala no se alcanza.

Se presenta un análisis bidimensional con dimensiones de los atractores correspondientes a: temperatura ambiente para las estaciones de Apizaco y Tlaxcala, incluyendo valores de las dimensiones del atractor para Atlangatepec y Tlaxco para tener un análisis que permita, dentro de lo posible, identificar zonas con un número de grados de libertad activos (MAPA 6).

En el mapa 6, se observa un gradiente de Este a Oeste en el número de grados de libertad activos o complejidad en la evolución del tiempo/clima: Este gradiente complejo ( Mapa 2), resulta ser una característica muy importante en el comportamiento clima/tiempo, correspondiendo a el forzamiento generado por la orografía. La interpretación a la diferencia de 5.5 a 11.5, es un aumento correspondiente a la complejidad del sistema tiempo/clima, es decir, hay un aumento en los grados de libertad activos.

Siendo importante remarcar este gradiente de complejidad con los valores de la dimensión del atractor calculado, corresponde también a las característica de meso-escala de Atlangatepec y Tlaxco.

Atlangatepec se encuentra en una zona de una dinámica más compleja ya que tiene un cuerpo de agua (presa) que induce una dinámica en vientos similar a brisa de mar y brisa de continente, en este caso es brisa de la presa y brisa de terral.

En el mapa 7, se presenta el análisis de isolíneas para la dimensión del atractor correspondiente a la serie de tiempo de temperatura máxima, se observa también un gradiente de complejidad en la dirección Este-Oeste correspondiente al gradiente de complejidad en la orografía. Nuevamente la complejidad en el gradiente de la dimensión del atractor corresponde a la complejidad en cada estación.

En el mapa 8, se analiza, con isolíneas, los valores de la dimensión del atractor para la serie de tiempo de evaporación. Es de notarse que persiste el gradiente Este-Oeste en la complejidad o en el número de grados de libertad activos o dimensión del atractor, así como su correspondencia con el gradiente orográfico y su complejidad. El análisis no incluye Tlaxcala capital debido a que la serie de tiempo de evaporación no saturo, ver tabla 6.

En el mapa 9, se presenta un análisis del límite de predecibilidad correspondiente a la temperatura máxima, se observa un gradiente en la dirección Este-Oeste en el límite de predecibilidad, aunque este análisis también corresponde a un gradiente calculado, este resultado debe considerarse con cierto cuidado debido a que el valor de predecibilidad de Tlaxcala capital, tiene un límite casi el doble de cualquier de las otras estaciones. Lo que puede explicarse, debido a que el observatorio esta situado en una zona semicerrada con lomerío. Lo que también debe mencionarse, es que la complejidad de la orografía del estado de Tlaxcala, hace que éste tenga una variedad en microclimas.

En el mapa 10, se presenta el análisis para la dimensión del atractor correspondiente a la temperatura mínima, también se observa un gradiente de complejidad en la dirección Este-Oeste, correspondiente al gradiente de complejidad en la orografía, mientras, que en el Noroeste del estado, el número de grados de libertad activos es menor, la estación de Huamantla no se incluye debido a que no saturó.

En el mapa 11, se analizan los valores del límite de predecibilidad para temperatura mínima, con respecto a ésta se puede observar que en las ocho estaciones el límite de predecibilidad, que en Toluca de Guadalupe presenta 1.6 días como límite de predecibilidad que corresponde al menor valor, observándose un gradiente, en la misma dirección en la complejidad, en el límite de predecibilidad obteniéndose el máximo de predecibilidad para Tepetitla y Tlaxco.

Para una interpretación del gradiente de complejidad en la dirección Este-Oeste, mapa 10, se presenta un análisis de la precipitación pluvial,

para el Estado de Tlaxcala, considerando años con "EL NIÑO" y "LA NIÑA", mapa 12, para verano y mapa 13 para invierno. Observándose que en años con evento caliente en el Océano Pacífico Ecuatorial del Este, llueve menos en verano respecto a años con la fase contraria, y viceversa para invierno. Hay dos formas de constatar los gradientes de complejidad del mapa 10, en la dirección Norte-Sur deberá tenerse isolíneas de casi-igual comportamiento, del sistema climático, para Apizaco, Atlangatepec y Tlaxcala, pues se tienen isolíneas de igual grados de libertad en la misma orientación, lo que se observa en los mapas 12 y 13, Apizaco, Atlangatepec y Tlaxcala, pues tiene un mismo comportamiento en la lluvia de verano en presencia de "EL NIÑO/LA NIÑA".

De acuerdo al gradiente de complejidad en la dirección Este-Oeste, mapa 10, se debe tener un comportamiento más complejo del sistema climático, en la parte Oeste del Estado, efectivamente, se observa que las estaciones Españita y Tepetitla presentan un comportamiento completamente distinto a la mayoría de las estaciones del Estado.

El objetivo de esta investigación en relación a estudiar el acoplamiento entre series de tiempo, en un estación termopluviométrica u observatorio, sólo se encontró acoplamiento para Apizaco en temperaturas ambiente, máxima y mínima, y relativamente con evaporación. Sin embargo, para el observatorio de Tlaxcala no se encontró un acoplamiento entre las mismas variables. Es decir, no existe un fuerte acoplamiento de las variables climatológicas, por lo que hay que analizar cada variable e interpretar los resultados de acuerdo al siguiente punto de vista: la estación/observatorio representa a un sistema abierto (Apizaco), cerrado (Tlaxcala) o semi-abierto/cerrado.

Este estudio mostró, para Tlaxcala capital, una evolución sobre atractores de alta dimensión del orden de 10-11, para la temperatura ambiente, de 6-7 para la temperatura máxima. Esto prueba el comportamiento irregular de la evolución de las temperaturas ambiente y máxima, a través de el carácter fractal en sus dimensiones.

Analizando las tablas 6,7 y 8 se observa que el límite de predecibilidad para la temperatura ambiente, es de un día y para la máxima de 3 días, lo cual demuestra que ésta tiene mayor orden dinámico, es decir, una mayor persistencia se puede verificar en los datos de temperatura máxima que en la ambiente, y para la temperatura mínima es de 2.03 días.

El concepto de persistencia es usado como un modelo, el más sencillo, para realizar predicciones considerando que el valor actual de la variable a predecir, permanece constante por un período igual al tiempo de muestreo, es decir, se encuentran grupos de dos y tres valores constantes. Con respecto a la evaporación no se manifestó saturación y, por lo tanto, no fue posible determinar la dimensión de su atractor.

En Tlaxcala capital se encontró un desacoplamiento entre las series de tiempo en contraste del fuerte acoplamiento de las series de tiempo de temperaturas ambiente, máxima y evaporación en la estación de Apizaco.

De acuerdo a la parte observacional, los datos de límite de predecibilidad corresponden a características observadas en la series de tiempo, por ejemplo, el mayor límite de predecibilidad que corresponde a 3.2 días, para temperatura máxima de Tlaxcala capital, y en Apizaco, para la misma variable, 1.4 días, esta diferencia en los datos calculados para el límite de predecibilidad corresponden a una mayor persistencia en el observatorio de Tlaxcala capital asociada a un sistema semicerrado.

ESTACIÓN	VARIABLE	DIMENSIÓN DEL ATRACTOR	LÍMITE DE PREDICTIBILIDAD EN (DIAS)
APIZACO	TEMPERATURA AMBIENTE	6.5	2.4
	TEMPERATURA MÁXIMA	6.5	1.4
	EVAPORACIÓN	5.5	2.7
	TEMPERATURA MÍNIMA	6.5	2.0
ATLANGATEPEC *	HORAS CALOR	10.5	1.55
	TEMPERATURA MÍNIMA	1.5	2.78
TLAXCALA	TEMPERATURA AMBIENTE	10.5	1.0
	TEMPERATURA MÁXIMA	6.5	3.2
	EVAPORACIÓN	NO SATURÓ	
	TEMPERATURA MÍNIMA	1.5	2.03
TLAXCO *	HORAS CALOR	8.5	1.52
	TEMPERATURA MÍNIMA	1.5	2.9

ESPAÑITA	TEMPERATURA MÍNIMA	2.5	2.3
IXTACUIXTLA	TEMPERATURA MÍNIMA	6.5	2.78
TEPETITLA	TEMPERATURA MÍNIMA	3.5	2.82
TOLUCA DE GUADALUPE	TEMPERATURA MÍNIMA	6.5	1.61
HUAMANTLA	TEMPERATURA MÍNIMA	NO SATURÓ	

RESUMEN ESQUEMÁTICO DE LOS RESULTADOS, DONDE SE PRESENTAN: LA ESTACIÓN, VARIABLES ANALIZADAS, DIMENSIÓN DEL ATRACTOR Y LÍMITE DE PREDECIBILIDAD EN DÍAS.

\* FUENTE: R. HERNÁNDEZ-ARRIAGA (1996)

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y  
LETRAS  
COLEGIO DE GEOGRAFÍA

MAPA 6

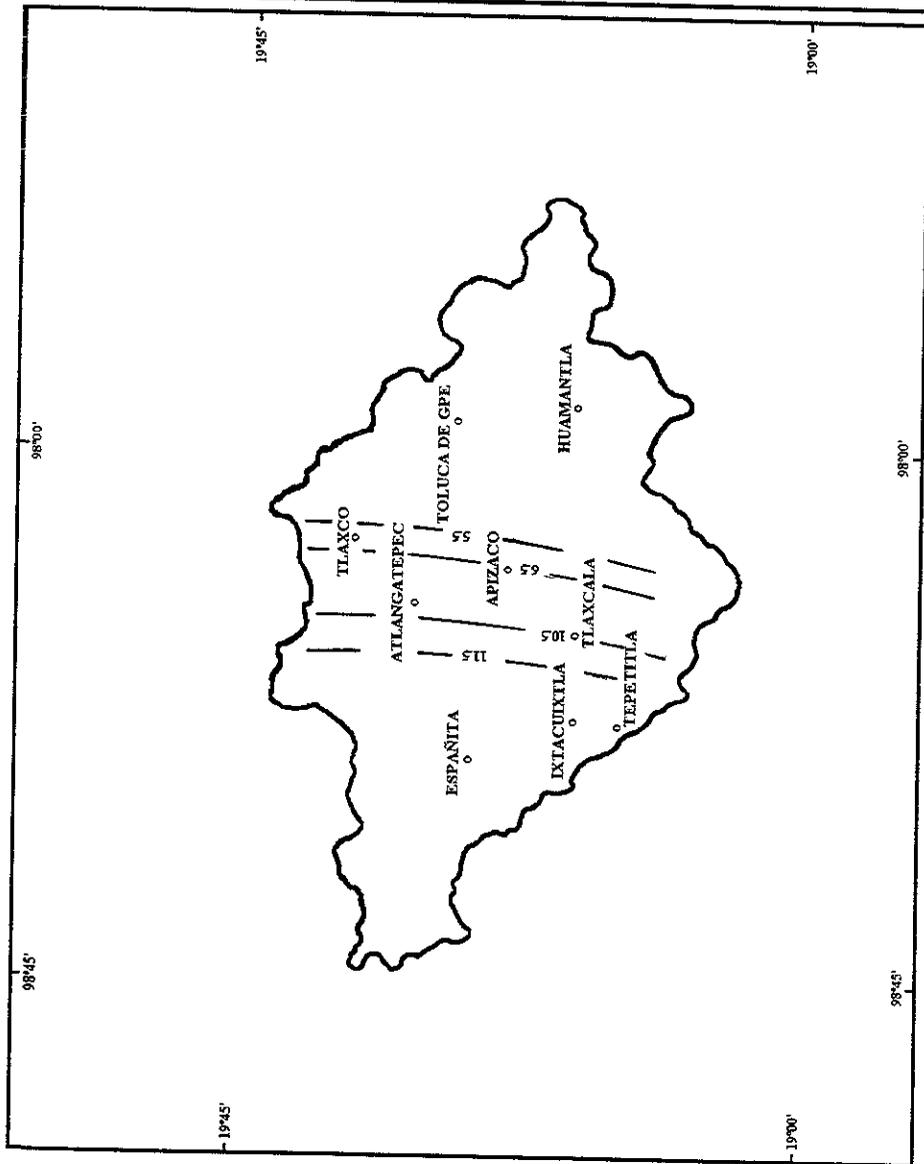
ANÁLISIS CON ISOLÍNEAS DE  
LA DIMENSIÓN DEL ATRACTOR  
PARA SERIES DE TIEMPO DE  
TEMPERATURA AMBIENTE

TESIS DE GRADO:  
DIMENSION FRACTAL Y LÍMITE  
DE PREDICTIBILIDAD  
DE TRES VARIABLES  
CLIMÁTICAS: TLAXCALA  
CAPITAL

JOSÉ JIMÉNEZ LÓPEZ

FUENTE CARTOGRÁFICA:  
CARTA ESTATAL  
TOPOGRÁFICA

ESCALA APROX.: 1:70000 EDITADA  
POR INEGI



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y  
LETRAS  
COLEGIO DE GEOGRAFÍA

MAPA 7

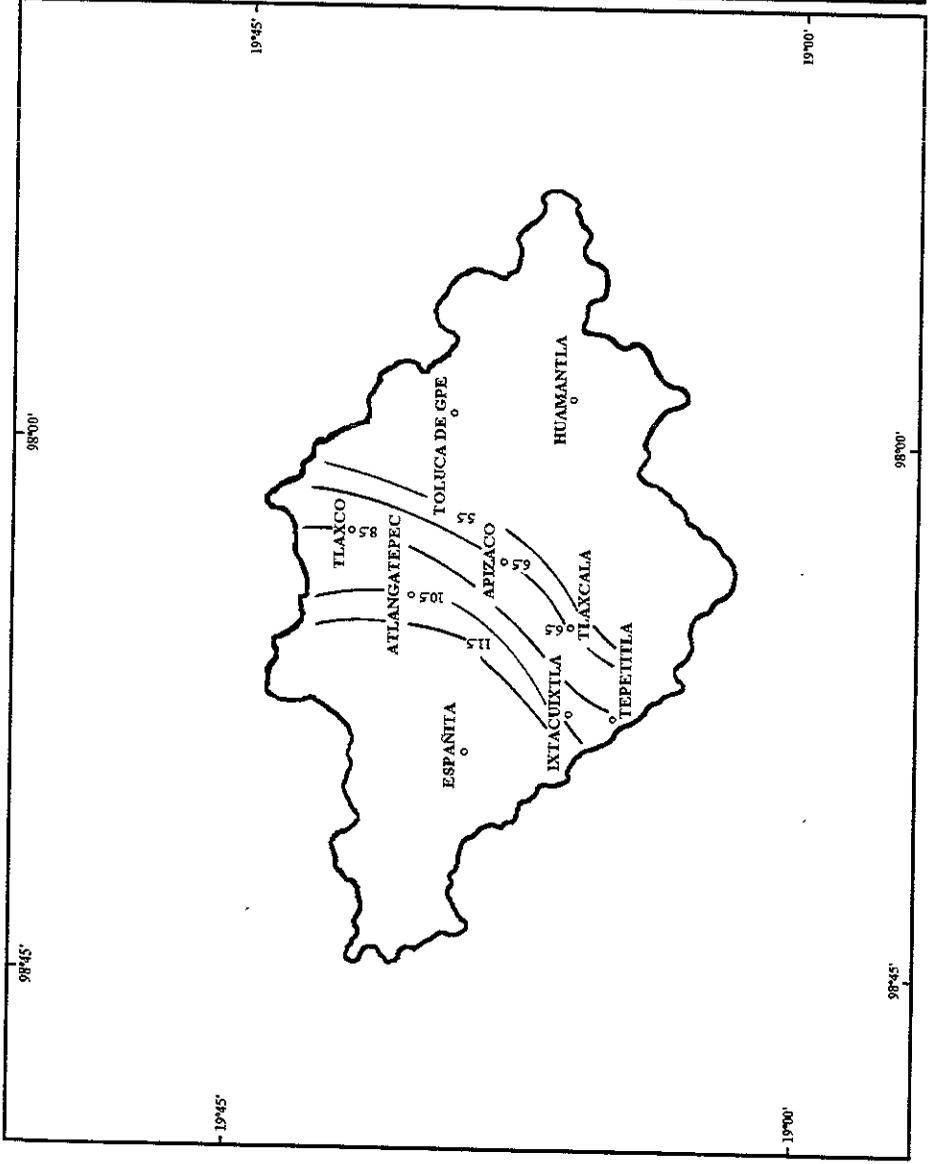
ANÁLISIS CON ISOLÍNEAS DE  
LA DIMENSIÓN DEL ATRACTOR  
PARA SERIES DE TIEMPO DE  
TEMPERATURA MÁXIMA

TESIS DE GRADO:  
DIMENSIÓN FRACTAL Y LÍMITE  
DE PREDICTIBILIDAD  
DE TRES VARIABLES  
CLIMÁTICAS: TLAXCALA  
CAPITAL

JOSÉ JIMÉNEZ LÓPEZ

FUENTE CARTOGRÁFICA.  
CARTA ESTATAL  
TOPOGRÁFICA

ESCALA APROX. 1:70000 EDITADA  
POR INEGI



ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y  
LETRAS  
COLEGIO DE GEOGRAFÍA

MAPA 8

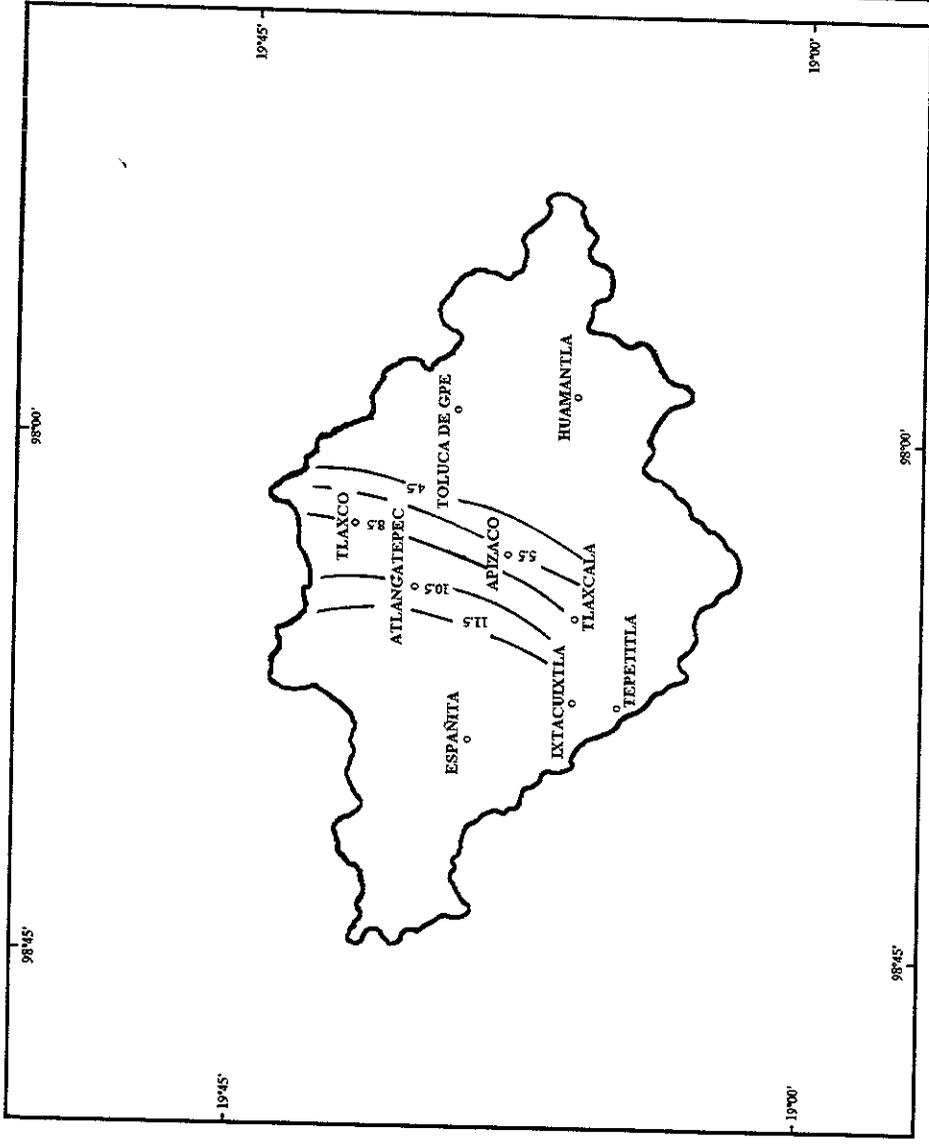
ANÁLISIS CON ISOLÍNEAS DE  
LA DIMENSIÓN DEL ATRACTOR  
PARA SERIES DE TIEMPO DE  
EVAPORACIÓN

TESIS DE GRADO:  
DIMENSIÓN FRACTAL Y LÍMITE  
DE PREDICTIBILIDAD  
DE TRES VARIABLES  
CLIMÁTICAS: TLAXCALA  
CAPITAL

JOSÉ JIMÉNEZ LÓPEZ

FUENTE CARTOGRÁFICA.  
CARTA ESTATAL  
TOPOGRÁFICA

ESCALA APROX. 1:70000 EDITADA  
POR INEGI



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y  
LETRAS  
COLEGIO DE GEOGRAFÍA

MAPA 9

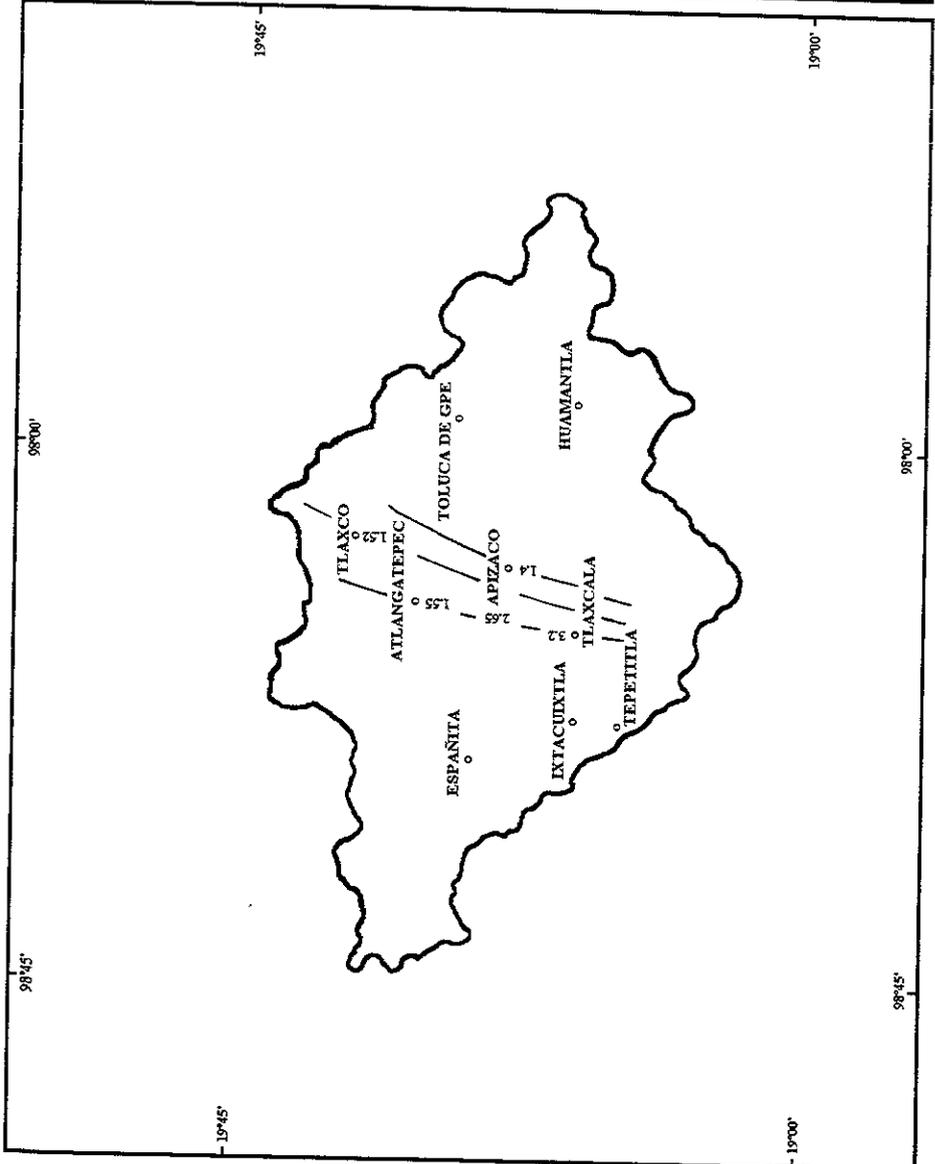
ANÁLISIS CON ISOLÍNEAS DEL  
LÍMITE DE PREDICTIBILIDAD  
PARA LA TEMPERATURA  
MÁXIMA

TESIS DE GRADO:  
DIMENSIÓN FRACTAL Y LÍMITE  
DE PREDICTIBILIDAD  
DE TRES VARIABLES  
CLIMÁTICAS. TLAXCALA  
CAPITAL.

JOSÉ JIMÉNEZ LÓPEZ

FUENTE CARTOGRÁFICA:  
CARTA ESTATAL  
TOPOGRÁFICA

ESCALA APROX. 1:700000 EDITADA  
POR INEGI



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y  
LETRAS  
COLEGIO DE GEOGRAFÍA

MAPA 10

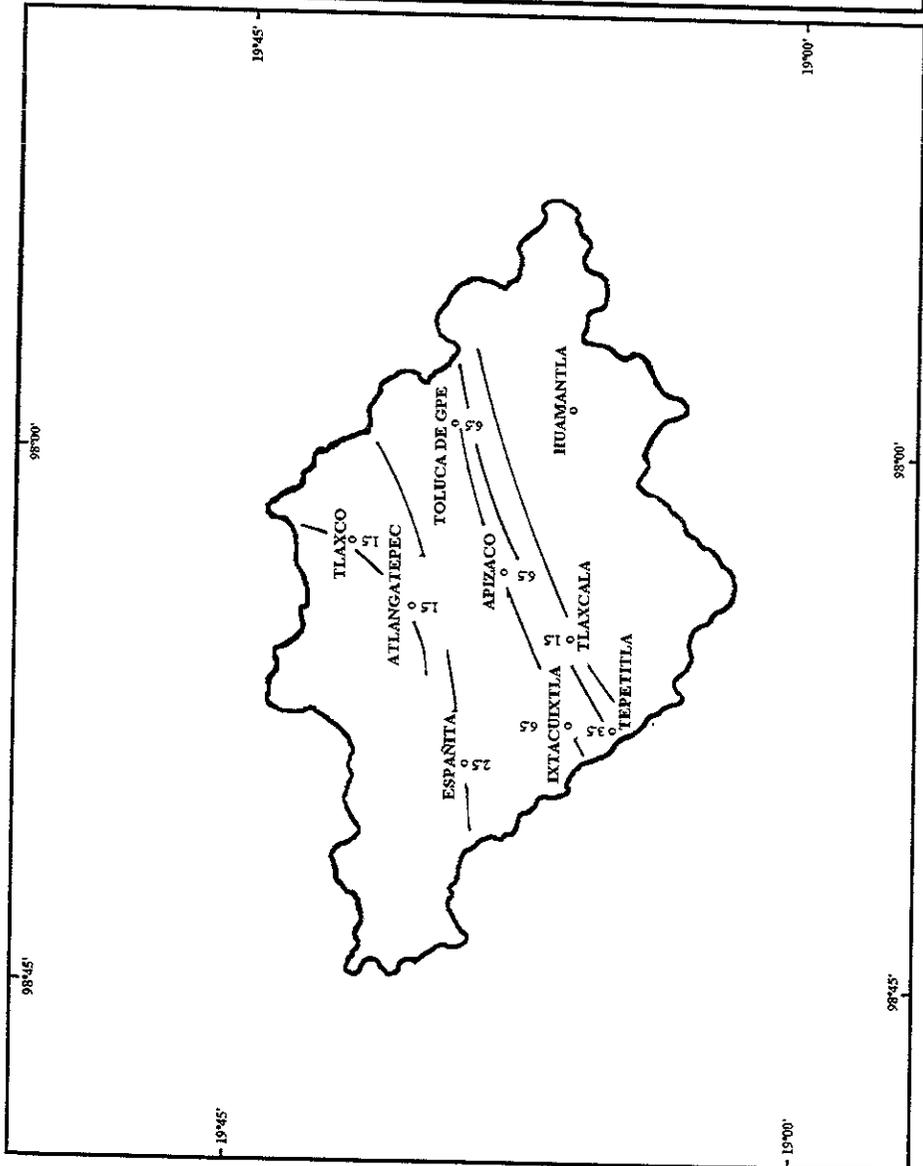
ANÁLISIS CON ISOLÍNEAS DE  
LA DIMENSIÓN DEL ATRACTOR  
PARA SERIES DE TIEMPO DE  
TEMPERATURA MÍNIMA

TESIS DE GRADO:  
DIMENSIÓN FRACTAL Y LÍMITE  
DE PREDICTIBILIDAD  
DE TRES VARIABLES  
CLIMÁTICAS: TLAXCALA  
CAPITAL

JOSÉ JIMÉNEZ LÓPEZ

FUENTE CARTOGRÁFICA:  
CARTA ESTATAL  
TOPOGRÁFICA

ESCALA APROX 1:70000 EDITADA  
POR INEGI



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y  
LETRAS  
COLEGIO DE GEOGRAFÍA

MAPA 11

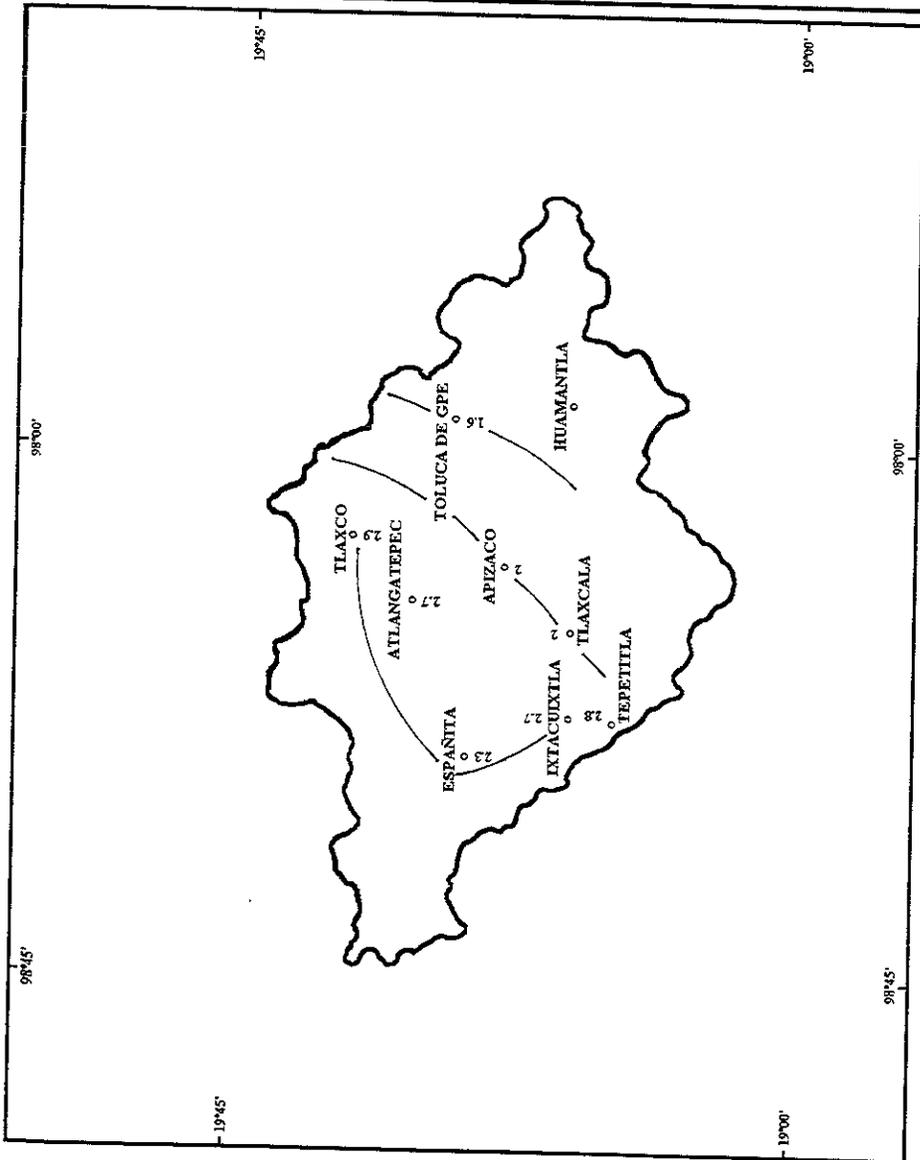
ANÁLISIS CON ISOLÍNEAS DEL  
LÍMITE DE PREDICTIBILIDAD  
PARA SERIES DE TIEMPO DE  
TEMPERATURA MÍNIMA

TESIS DE GRADO:  
DIMENSIÓN FRACTAL Y LÍMITE  
DE PREDICTIBILIDAD  
DE TRES VARIABLES  
CLIMÁTICAS: TLAXCALA  
CAPITAL

JOSÉ JIMÉNEZ LÓPEZ

FUENTE CARTOGRÁFICA:  
CARTA ESTATAL  
TOPOGRÁFICA

ESCALA APROX 1:70000 EDITADA  
POR INEGI







### 5.3 DIMENSIÓN DEL ATRACTOR

#### a) Series de tiempo observadas

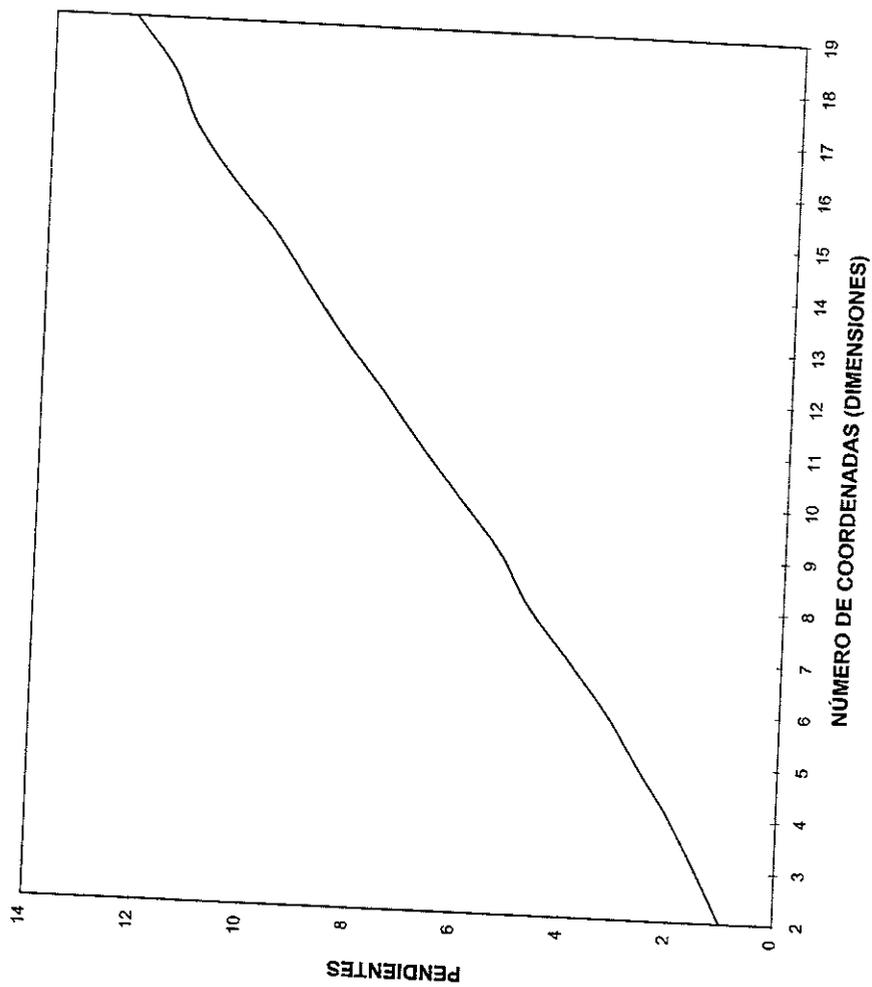
En la gráfica 1, se muestra para Tlaxcala la variación de las pendientes contra el número de coordenadas para la temperatura ambiente, se observa saturación de la información porque la curva se tiende horizontalmente, y su proyección de esta parte plana sobre el eje vertical determina que la dimensión del atractor (en la zona de invarianza de escala) se encuentra entre 10 y 11, mostrando su carácter fractal.

En la gráfica 2, se muestra la temperatura máxima la cual tiene una dimensión del atractor entre 6 y 7.

En la gráfica 3, se muestra la evaporación en la cual no se muestra saturación.

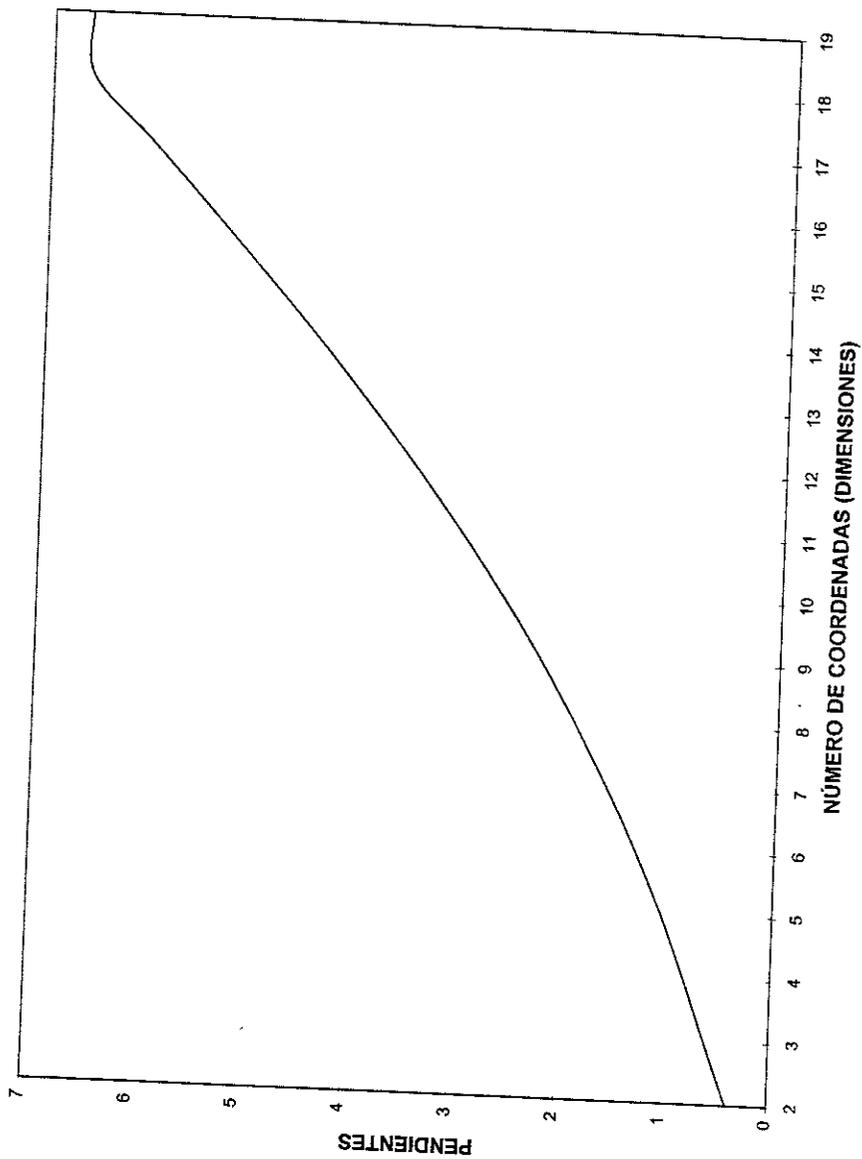
Con los resultados obtenidos para las dimensiones de los atractores cada variable climática los cuales no son de baja dimensión, ya que la dinámica del sistema en estudio es compleja y esta es el resultado de la interacción de la atmósferocéanos-biósfera-criósfera, y por lo tanto están siendo registradas en el observatorio meteorológico y la intensidad de su acoplamiento entre las variables, para la evaporación no se manifiesta saturación de la información, ya que la curva muestra una pendiente constante, y por lo tanto no fue posible determinar la dimensión de su atractor, por lo tanto esta variable no tiene acoplamiento con las otra variables.

TLAXCALA TEM. AMB. TAO= 1 DÍA (RADIO= 0.1)



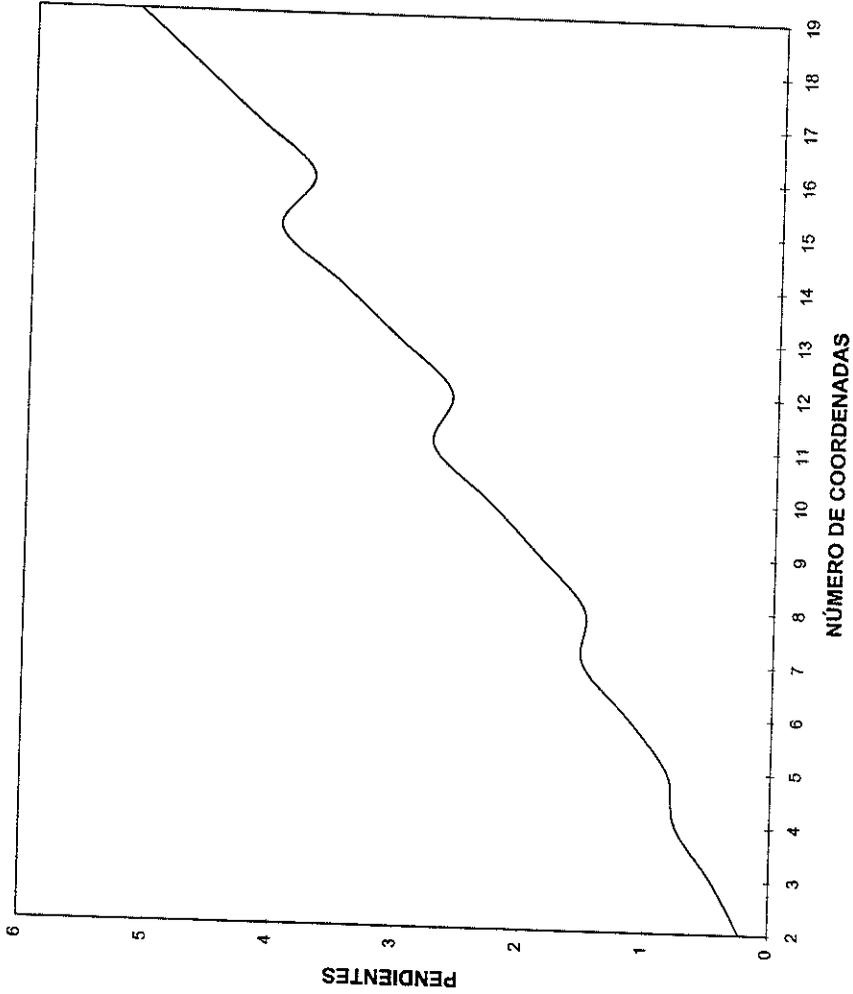
GRÁFICA 1

TLAXCALA TEM. MÁX.  $T_{A0}=1$  DÍA (RADIOS 0.1)



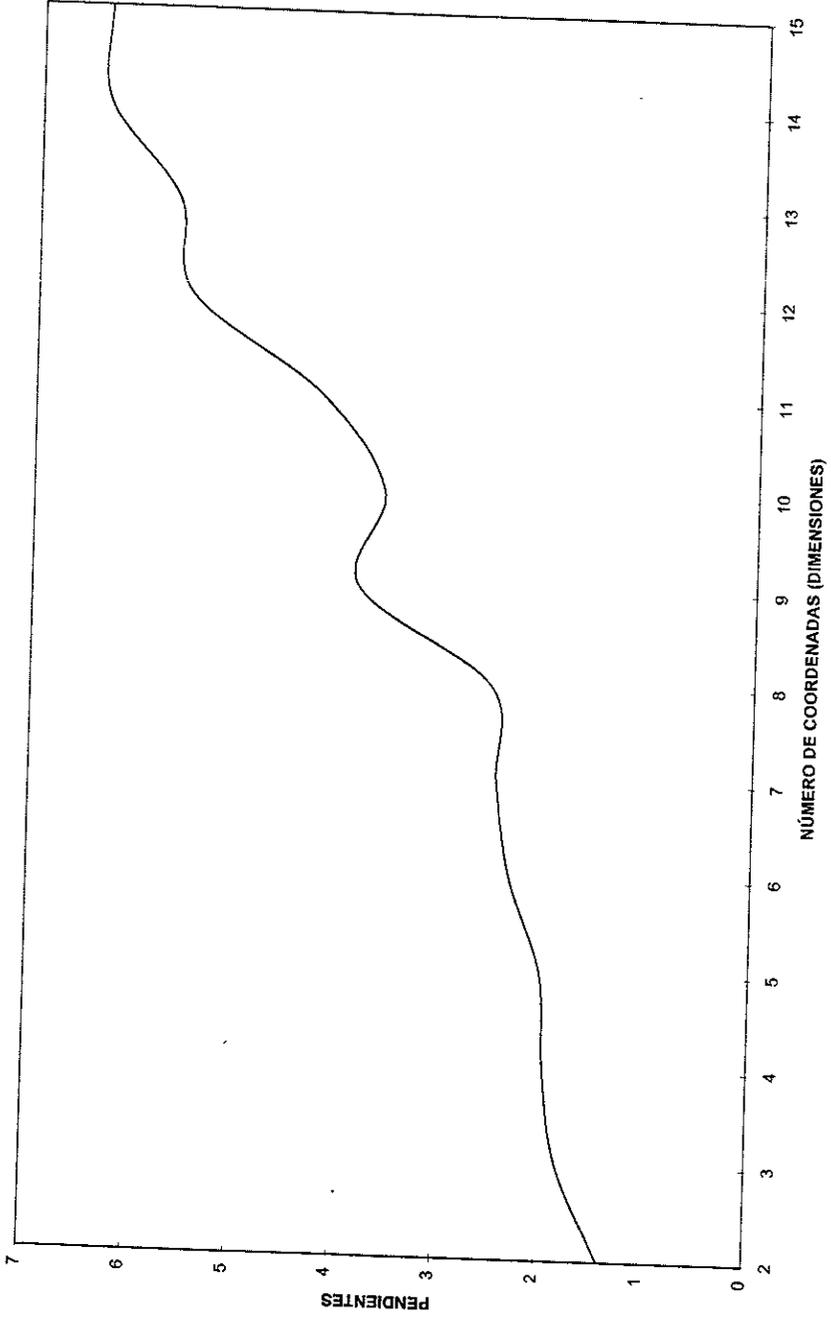
GRÁFICA 2

TLAXCALA EVAPORACIÓN TAO= 1 DÍA (RADIOS 0.1)



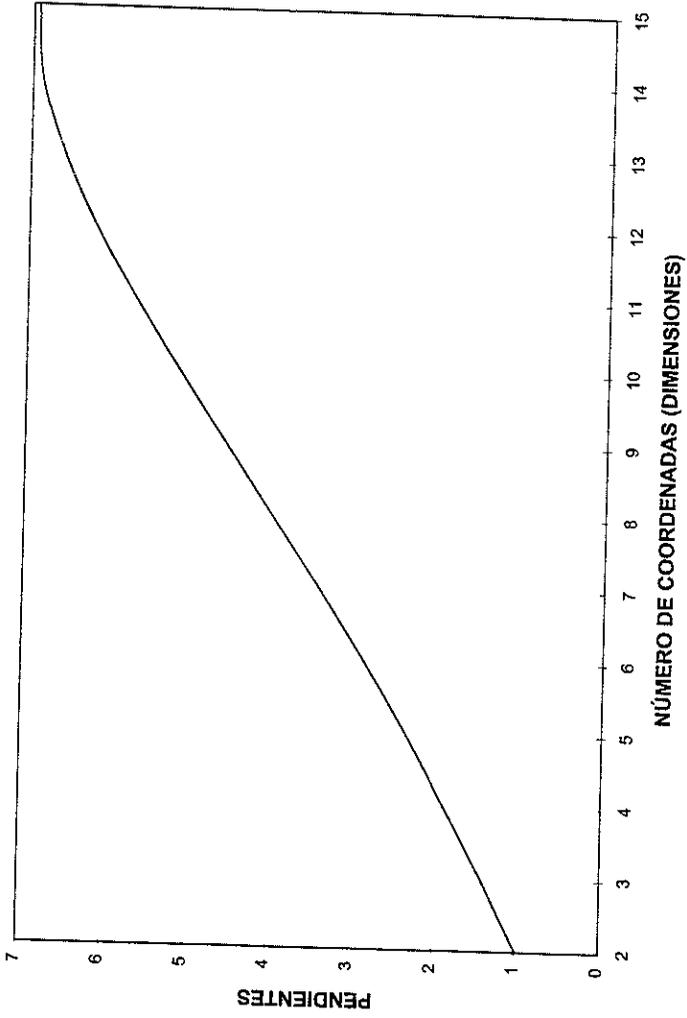
GRÁFICA 3

TLAXCALA TEMPERATURA MÍNIMA TAO= 24 HRS. (RADIOS 0.1)



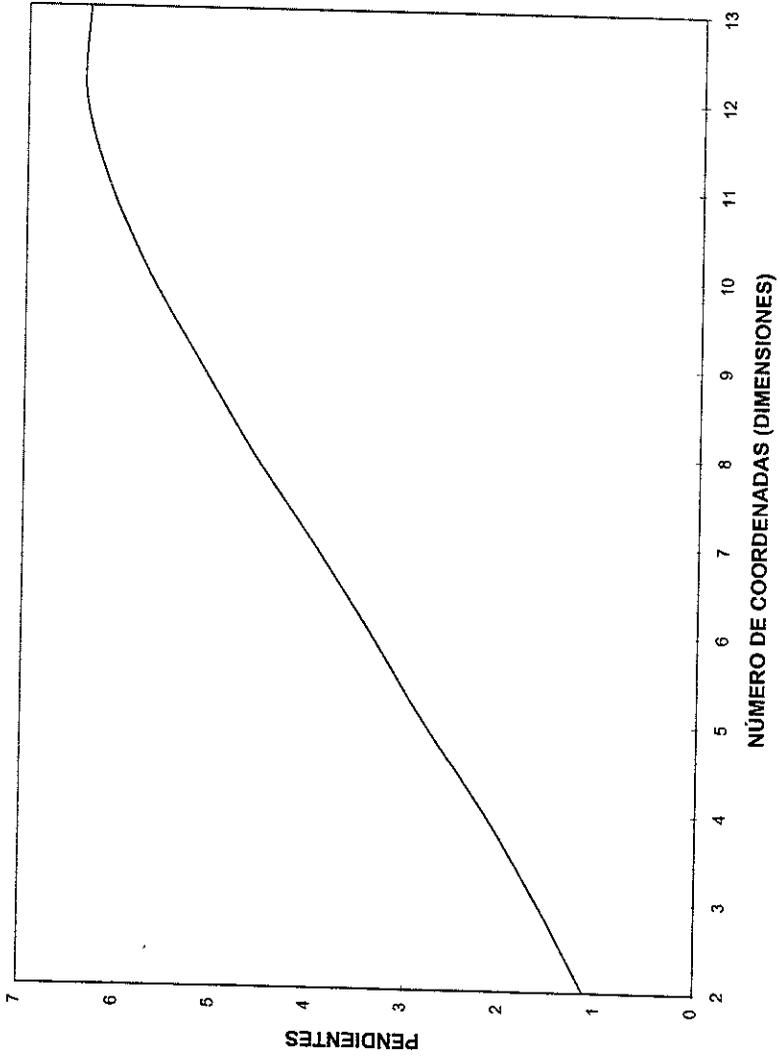
GRÁFICA 4

APIZACO TEM. AMB. TAO= 1 D/A (RADIOS 0.1)



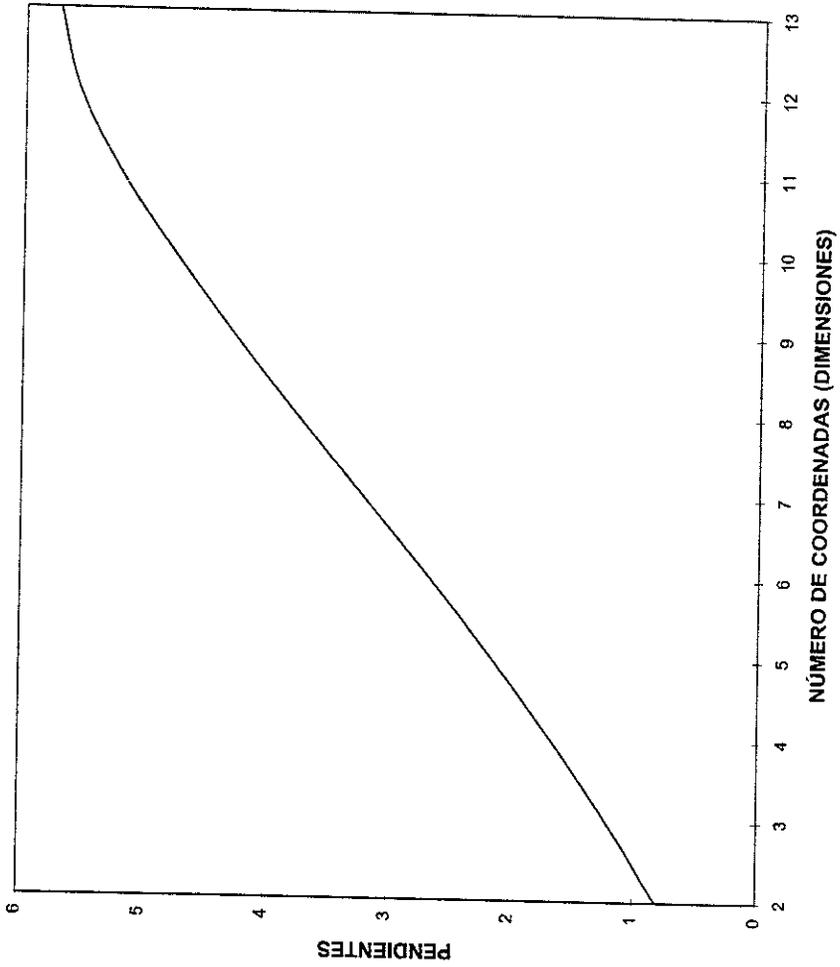
GRÁFICA 5

APIZACO TEM. MAX. TAO=1D/A (RADIOS 0.1)

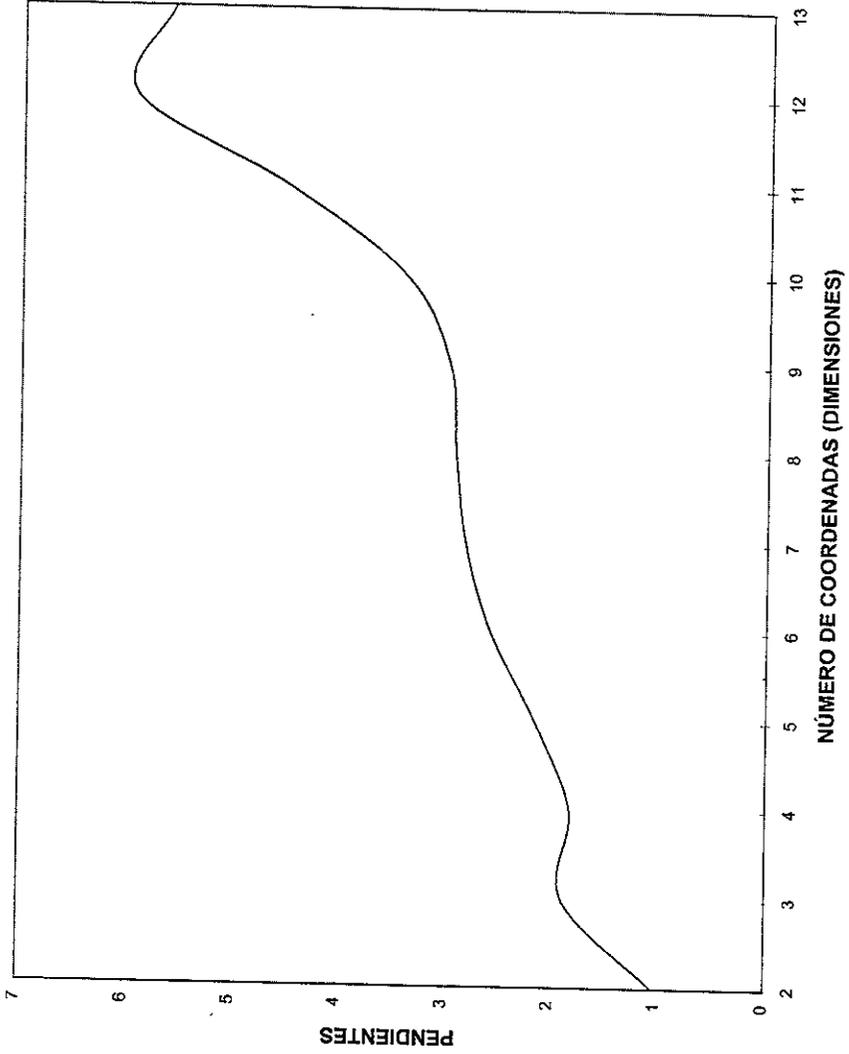


GRÁFICA 6

APIZACO EVAPORACIÓN TAO= 1DÍA (RADIOS 0.1)

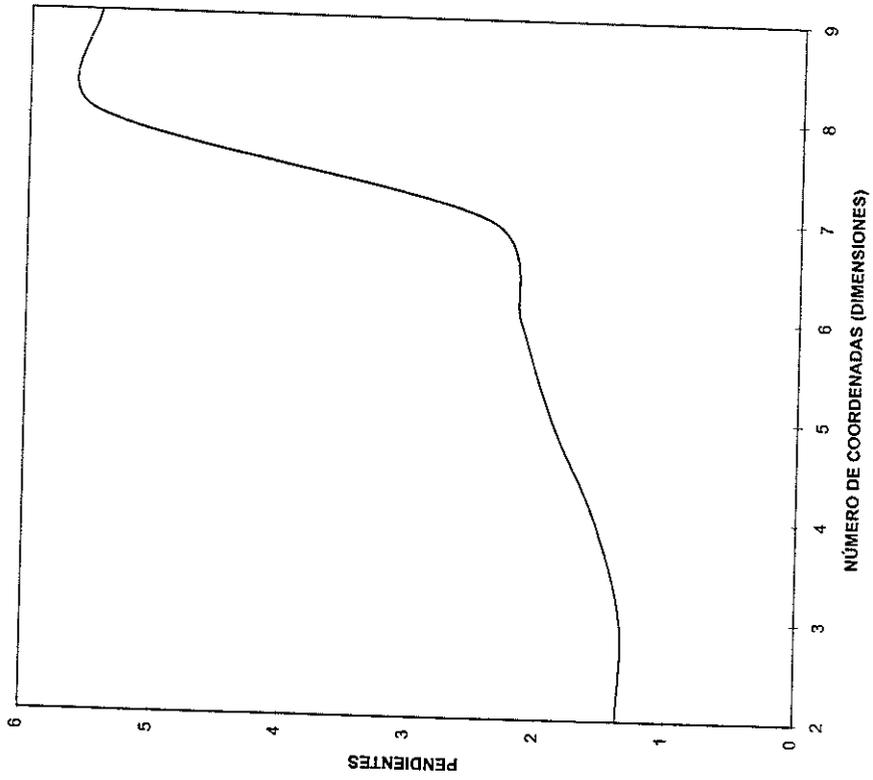


APIZACO TEM. MIN. TAO= 1 DÍA (RADIO 0.1)

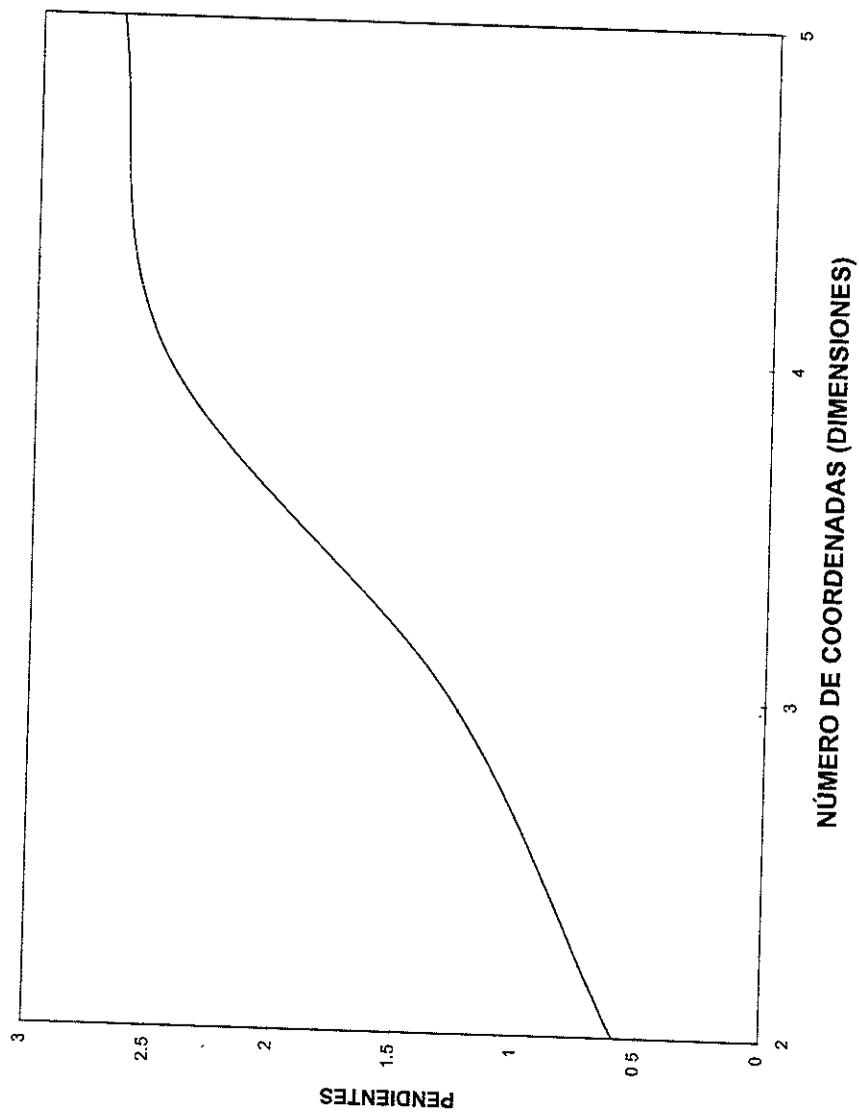


GRÁFICA 8

ATLANGATEPEC TEMPERATURA MÍNIMA TAO= 24 HRS (RADIO= 0.1)

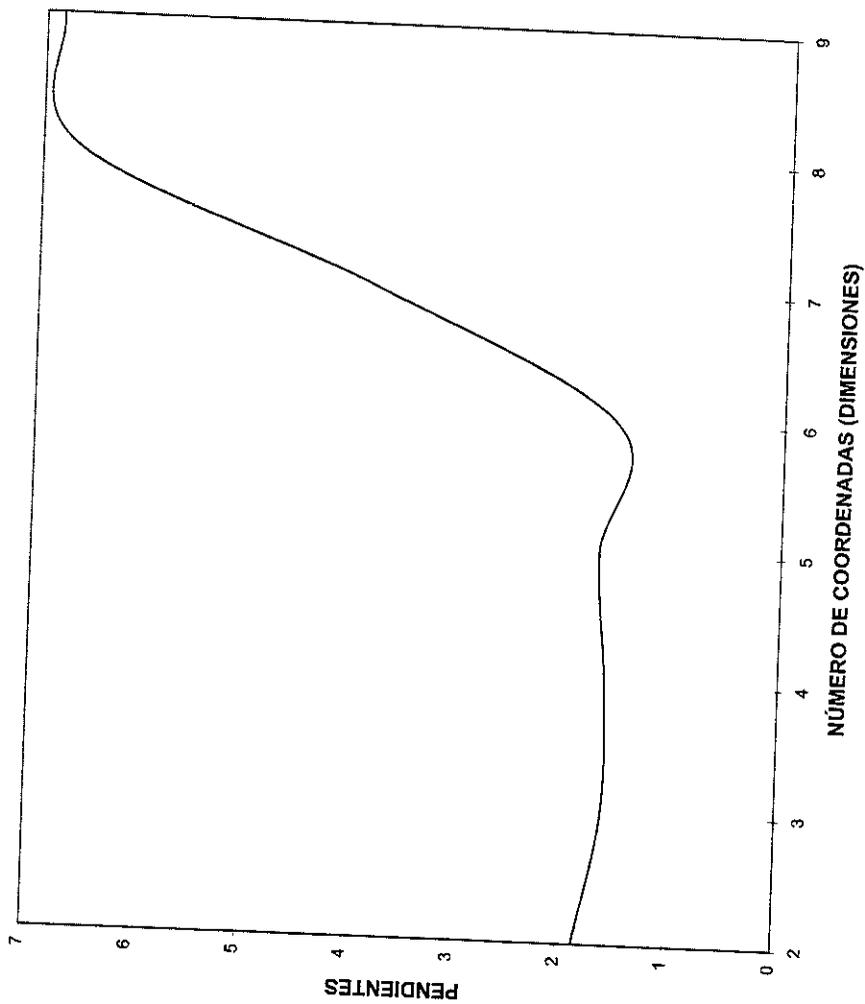


ESPAÑITA TEM. MÍN. TAO= HRS. (RADIO 0.1)



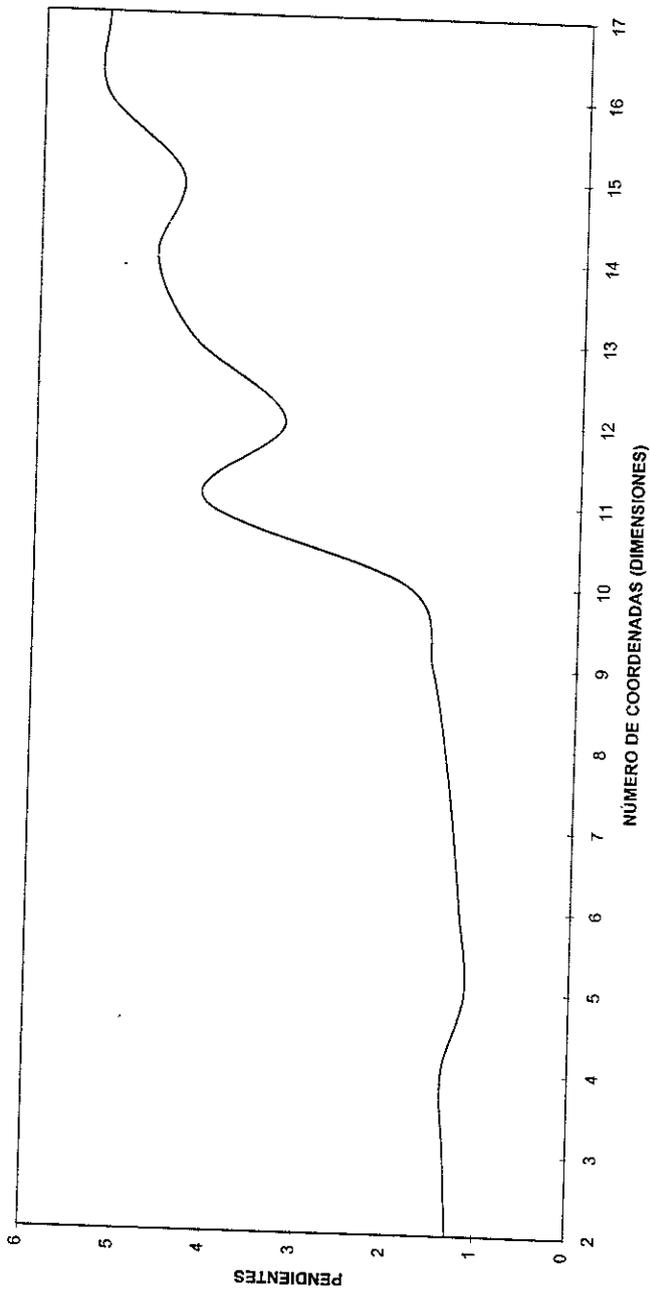
GRÁFICA 10

IXTACUIXTLA TEM. MÍN. TAO= 1 DÍA (RADIOS 0.1)

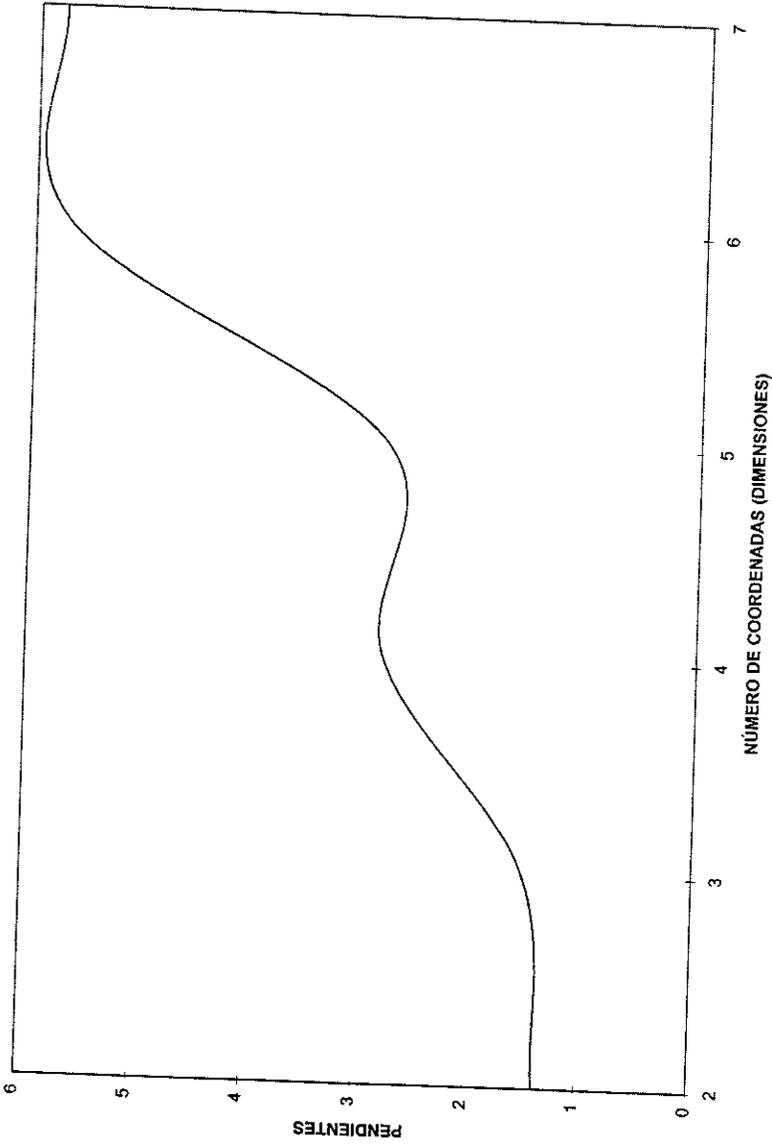


GRÁFICA 11

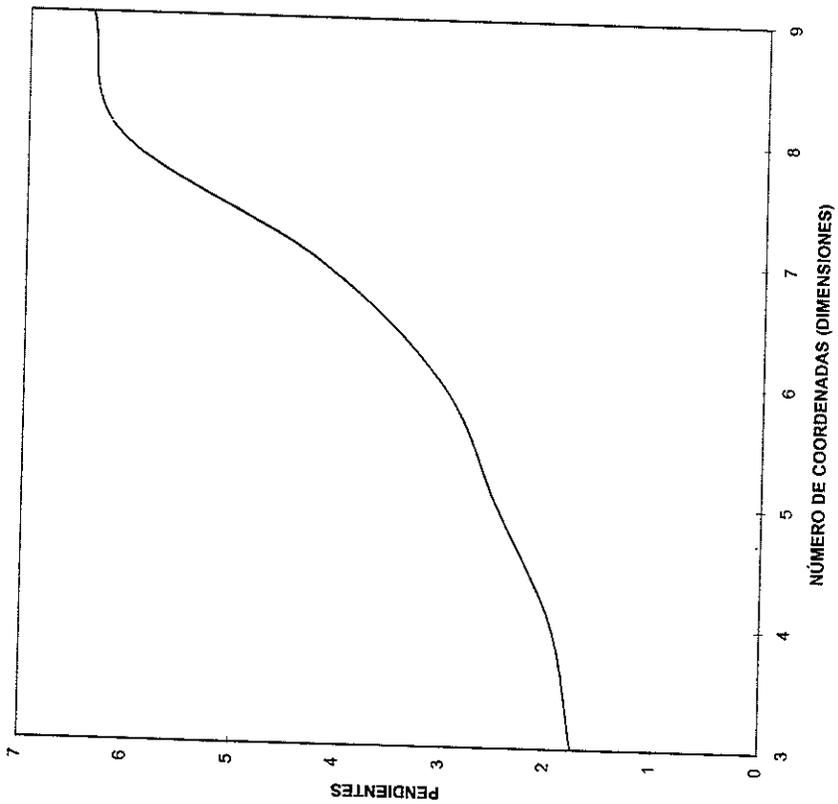
TEPETITLA TEMPERATURA MÍNIMA TAO= 24 HRS. (RADIOS 0.1)



TLAXCO TEMPERATURA MÍNIMA TAO= 24 HRS (RADIO 0.1)



TOLUCA DE GUADALUPE TEM. MÍN. TAO= 1 DÍA (RADIOS 0.1)



GRÁFICA 14

#### 5.4 LÍMITES DE PREDECIBILIDAD

Aplicando la ecuación 19, en la zona de invarianza de escala, para la temperatura ambiente (12D-16D), se determinaron los límites de predecibilidad los cuales se muestran en la tabla 6 M se fija en 12 coordenadas y k se va variando de uno en uno hasta cubrir la zona de invarianza de escala: El límite de predecibilidad media tiende a 1.0 día para Tlaxcala.

De igual manera, para la temperatura máxima en la tabla 7, se muestra que el límite de predecibilidad media tiende a 3.268 días.

Para la temperatura mínima, tabla 8, se muestra el límite de predecibilidad media de 2.03 días.

Lnr	Ln Cm(r)	M COORDENADAS	K DIFERENCIA ENTRE M Y M+k	PREDECIBILIDAD (DÍAS)
0.943906	- 23.0543	12		
0.943906	- 23.9627	13	1	0.9184
0.943906	- 24.8422	14	2	0.8795
0.943906	- 25.8476	15	3	1.0054
0.943906	- 27.0413	16	4	1.1937
				PROM. = 1.0 DÍAS

TABLA 6. CALCULO DE PREDECIBILIDAD PARA LA TEMPERATURA AMBIENTE

Lnr	Ln Cm(r)	M COORDENADAS	K DIFERENCIA ENTRE M Y M+k	PREDECIBILIDAD (DÍAS)
2.151762	- 17.6847	14		
2.151762	- 17.9768	15	1	3.4224
2.151762	- 18.2843	16	2	3.2520
2.151762	- 18.6037	17	3	3.1308
				PROM. = 3.268 DÍAS

TABLA 7. CALCULO DE PREDECIBILIDAD PARA LA TEMPERATURA MÁXIMA

Lnr	Ln Cm(r)	M COORDENADAS	K DIFERENCIA ENTRE M Y M+k	PREDECIBILIDAD (DÍAS)
1.791759	- 19.1447	6		
1.791759	- 19.513	7	1	2.7151
1.791759	- 20.2482	8	2	1.3601
		9		PROM. 2.03 DÍAS

TABLA 8. CALCULO DE PREDECIBILIDAD PARA LA TEMPERATURA MÍNIMA

## VI CONCLUSIONES

Con la dimensión fractal de los atractores y con el límite de predecibilidad obtenidos, concluimos que:

No están fuertemente acopladas las variables climatológicas en todas las estaciones. Lo que significa que la hipótesis central de la teoría de sistemas dinámicos -al menos para el sistema climático- debe incluir explícitamente la condicional de que las variables están fuertemente acopladas, con lo cual quedaría :

**“A partir de una sola variable es posible obtener toda la dinámica de un sistema, si las variables involucradas en el cambio del sistema están fuertemente acopladas”.**

La orografía juega un papel importante en la determinación del clima, dando un carácter de mayor complejidad en la evolución del tiempo/clima, como se pudo determinar a partir del análisis bidimensional de las dimensiones de los atractores para las diferentes variables analizadas.

## VII SUGERENCIAS

Es recomendable para trabajos futuros, se maneje la teoría de información para analizar las propiedades de independencia de las coordenadas generadas por corrimientos, estudiando el comportamiento de la información mutua entre dos series de tiempo, aplicada a la serie de tiempo observada y sus corrimientos.

## VI CONCLUSIONES

Con la dimensión fractal de los atractores y con el límite de predecibilidad obtenidos, concluimos que:

No están fuertemente acopladas las variables climatológicas en todas las estaciones. Lo que significa que la hipótesis central de la teoría de sistemas dinámicos -al menos para el sistema climático- debe incluir explícitamente la condicional de que las variables están fuertemente acopladas, con lo cual quedaría :

**“A partir de una sola variable es posible obtener toda la dinámica de un sistema, sí las variables involucradas en el cambio del sistema están fuertemente acopladas”.**

La orografía juega un papel importante en la determinación del clima, dando un carácter de mayor complejidad en la evolución del tiempo/clima, como se pudo determinar a partir del análisis bidimensional de las dimensiones de los atractores para las diferentes variables analizadas.

## VII SUGERENCIAS

Es recomendable para trabajos futuros, se maneje la teoría de información para analizar las propiedades de independencia de las coordenadas generadas por corrimientos, estudiando el comportamiento de la información mutua entre dos series de tiempo, aplicada a la serie de tiempo observada y sus corrimientos.

Por los resultados obtenidos en este estudio, es recomendable repetir este estudio utilizando el mayor número de estaciones climatológicas así, como el número mayor de años en las series de tiempo, auxiliando este método de análisis dinámico no-lineal, con una caracterización de la serie de tiempo con métodos no-lineales más versátiles como los wavelets, que nos permiten determinar si una serie de tiempo es o no estacionaria.

Esta metodología se puede aplicar para regionalizar áreas de trabajo, desde un punto de vista geográfico, con un enfoque dinámico. Al analizar una variable con esta metodología de grupos de estaciones pluviométricas y clasificando regiones con la misma dimensión del atractor asociado a las series de tiempo analizadas.

Este método propuesto de regionalización, desde un punto de vista dinámico, pensamos que es una buena contraparte del método estadístico de regionalización que surgió recientemente, que aplica el cálculo de L-momentos, considerando valores extremos.

También la metodología puede aplicarse para identificar patrones dinámicos predominantes en ciertas regiones (Raga y Le Moyne, 1986).

## BIBLIOGRAFÍA

- Atmanspacher H., Scheingraber H., and Voges W. 1988 "Global scaling properties of a chaotic attractor reconstrued from experimental data". *Physical Review A*. vol.37, No.4, 1314-1322
- Badii, R., y A. Politi. 1985. "Statistical description of chaotic attractors: The dimension function". *J. Stat. Phys.* 40: 725-750.
- Eckmann, J. P. and Ruelle D. 1985 "Ergodic theory of chaos and strange attractors". *Rev. Modern Phys* 57, 617-656.
- Elsner, J., B. 1992 "Predicting time series using a neural network as a method of distinguishing chaos from noise". *J. Phys. A: Math. Gen.* 25, 843-850
- Essex, C., Lookman, T. and Nerenberg, M. A. N., 1987 "The climate attractor over short timescales". *Nature*. vol. 326, No.5, 64-66.
- Fraser, A.M. y Swinney, H.L., 1986 "Independent coordinates for strange attractors from mutual information". *Physical Review*, vol. 33, No.2, 1134-1139
- García, C.O.R., y Valdez, M.A., 1986, "Cálculo de probabilidades de Heladas en el Valle de Mexicali., B.C ". Instituto de Ingeniería, Laboratorio de Meteorología. Tesis de Licenciatura en Física. Universidad Autónoma de Baja California. México
- García, E., 1989 "Apuntes de Climatología". Offset Larios México. D.F. México
- Grassi, B.A., 1983, "Riesgo de primeras heladas y últimas heladas en Puebla y Tlaxcala, respecto a los cultivos básicos". Chapingo, México

- Grassberger, P., y Y. Procaccia, 1983: "Characterization of strange attractors". *Phys. Rev. Lett.*, 50, 346-349.
- Grassberger, P., and I Procaccia, 1984: "Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach". *Physica*, 13D, 34-54
- Hao Bai-Lin, 1989 "Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative systems" World Scientific.
- Hernández, A. R., 1996 "Sobre la determinación de la dimensión del atractor y el límite de predictibilidad de una serie de tiempo de horas calor para Atlangatepec y Tlaxco (Tlaxcala)". Tesis de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias, UNAM. México. D.F. México.
- Síntesis geográfica del estado de Tlaxcala 1986. Instituto Nacional de Geografía e Informática.
- Islam, S. Bras, L.R., and Iturbe. R. R., 1993 "A possible explanation for low correlation dimension estimates for the atmosphere" *Journal of Applied Meteorology* vol. 32 208-208
- Jiménez J., Hernández, R., Magaña, R., Morales, Acoltzi. 1997 "Análisis del Acoplamiento de Series de Tiempo desde un punto de vista de teoría de sistemas dinámicos no-lineales. 1st. International Symposium in Intelligent Technologies Symposium Proceeding. Apizaco Tlax.
- Klaus, Fraedrich, 1987. "Estimating weather and climate predictability on attractors", *Journal of the Atmospheric Sciences*, 44, ( 4), 722-728.
- Lichtenberg, A. Y y Lieberman, M.A. 1983 "Regular and stochastic Motion" Springer-Verlag, Berlin.
- Lorenz E.N, 1965 "A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model" *Tellus*, vol.27, 636-646.

- Magaña, V.O.R y Morales-Acoltzi T., 1998 “ Variabilidad climática y agricultura en México”. Claridades agropecuarias, apoyos y servicios a la comercialización agropecuaria (ACERCA). No.57, 32-39
- Magaña, V:O:R y Morales-Acoltzi T., 1998 “ EL NIÑO” Y “ LA NIÑA”. Impactos en el estado de Tlaxcala, Tríptico.
- Marsden J. E. y Mc. Cracken M. 1976 “The hopf bifurcation and its applications” Appl. Math. Sci. vol. 19. Springer-Varley, Berlin.
- May R. M., 1976 “ Simple mathematical models with very complicated dynamics” Nature vol. 261, 459-467.
- Meneses A. 1993. “Aplicacion de la teoría de caos para identificar el número de variables con capacidad de predicción del tiempo para el norte-centro de Tlaxcala”. Tesis de licenciatura en Biología Agropecuaria, Universidad Autónoma de Tlaxcala, Tlaxcala, México.
- Morales-Acoltzi, T. y Adem, J., 1994 “ On asymptotic behaviour of the Adem thermodynamic model for the ocean temperature prediction”. *Atmósfera*, vol. 7, No.2, 105-116.
- Nicolis, J.S. 1987 “ Chaotic dynamics applied to biological information processing “ Akademie.Verlag, Berlin.
- Raga, G.B, and Le Moyne, L., 1996 “ On the nature of local air pollution dynamics in Mexico City-I, Nonlinear analysis. *Atmospheric Environment*. vol. 30, No. 23
- Secretaría de Agricultura Ganadería y Desarrollo Rural., 1998 (Comunicación personal)
- Takens F. 1987 “ Dynamical systems and turbulence”, Warwick, vol. 898 of lecture notes in mathematics, edited by D.A. Rand and L.S youn (Springer, Berling) p.366.

- Torres, R. E., 1986 "Agrometeorología" Editorial Diana, México, D.F. México.
- Tsonis, A. A., y Elsner J.B., 1988 "The weather attractor over very short timescales" *Nature*. vol 333, No. 6173, 545-547.
- Tsonis, A. A., y Elsner J.B., 1989 "Chaos strange attractors, and weather" *Bulletin American Meteorological Society*. vol 70. No. 1, 14-23.
- Vázquez, J. A. C. 1998 "Simulación matemática del estudio de las heladas para el estado de Tlaxcala". Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, BUAP.
- Waelbroeck, H. y López-Peña R., Morales, T. y Zertuche, F. 1994 "Prediction of tropical rainfall by local phase space reconstruction" *Journal Atmospheric Sciences*. 51, ( 22), 3360-3364.

## GLOSARIO

**ATRACTOR.**- Es un subespacio del espacio de estado que atrae todas las trayectorias que representan la evolución de un sistema dinámico.

**CAOS.**- Es la palabra griega para la ausencia completa de orden.

**ESPACIO DE ESTADO.**- Se obtiene al considerar como coordenadas a todas las variables de un sistema necesarias para describir en forma precisa su evolución.

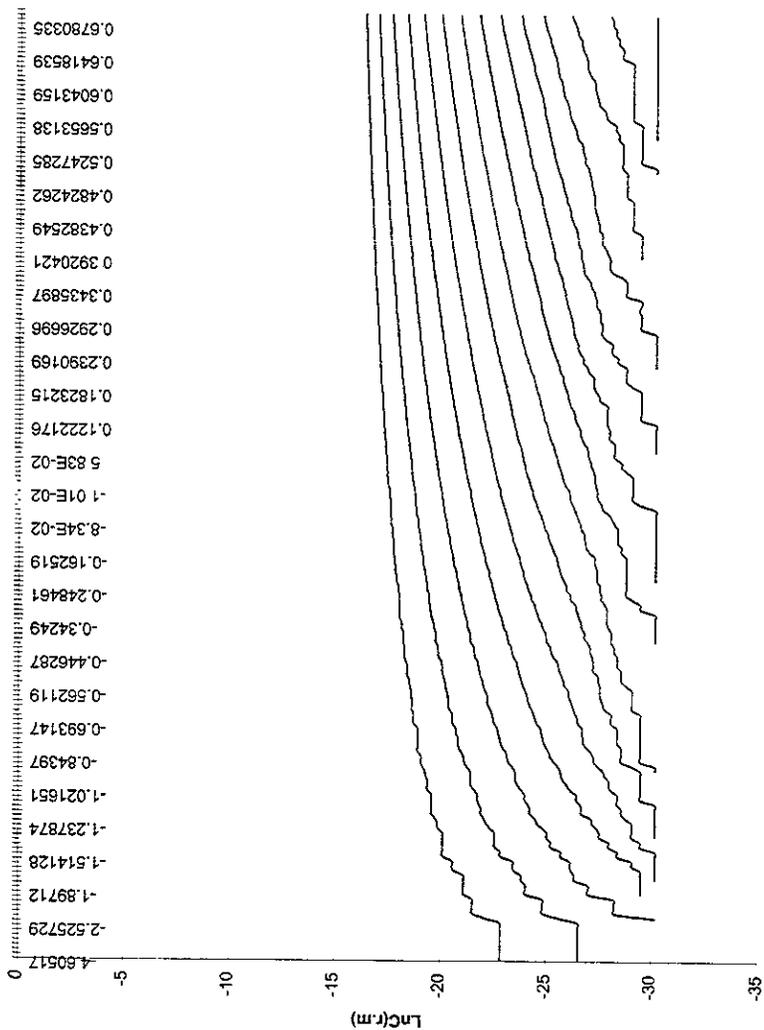
**ESPACIO DE FASE.**- Es el espacio de variables dependientes y sus derivadas.

**FRACTAL.**- Es una forma geométrica que permanece inalterada cualquiera que sea el cambio de escala a la que se observe.

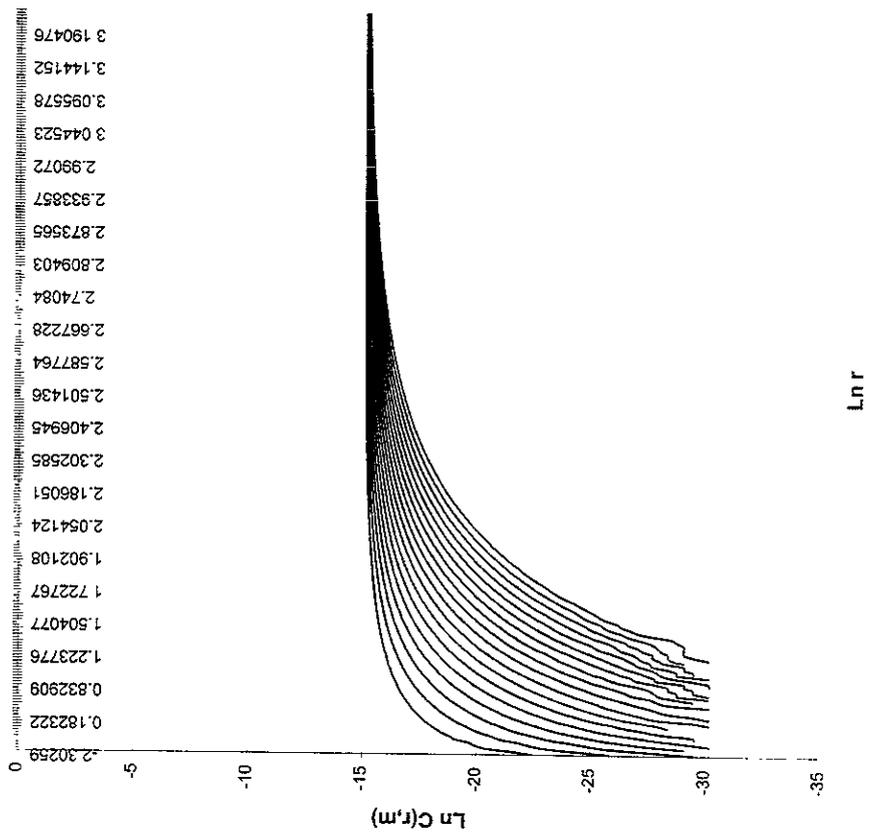
**SISTEMA.**- Es una porción de la naturaleza que ha sido seleccionada para estudiarla, para lo cual deben estar definidas sus fronteras.

**TEORIA DE CAOS.**- Define matemáticamente azarocidad generada por sistemas dinámicos disipativos determinísticos (simples), nos permite ver orden en procesos que a simple vista parecen ser completamente azarosos.

TLAXCALA TEM. AMB. TAO=1 DIA (RADIOS 0.1)

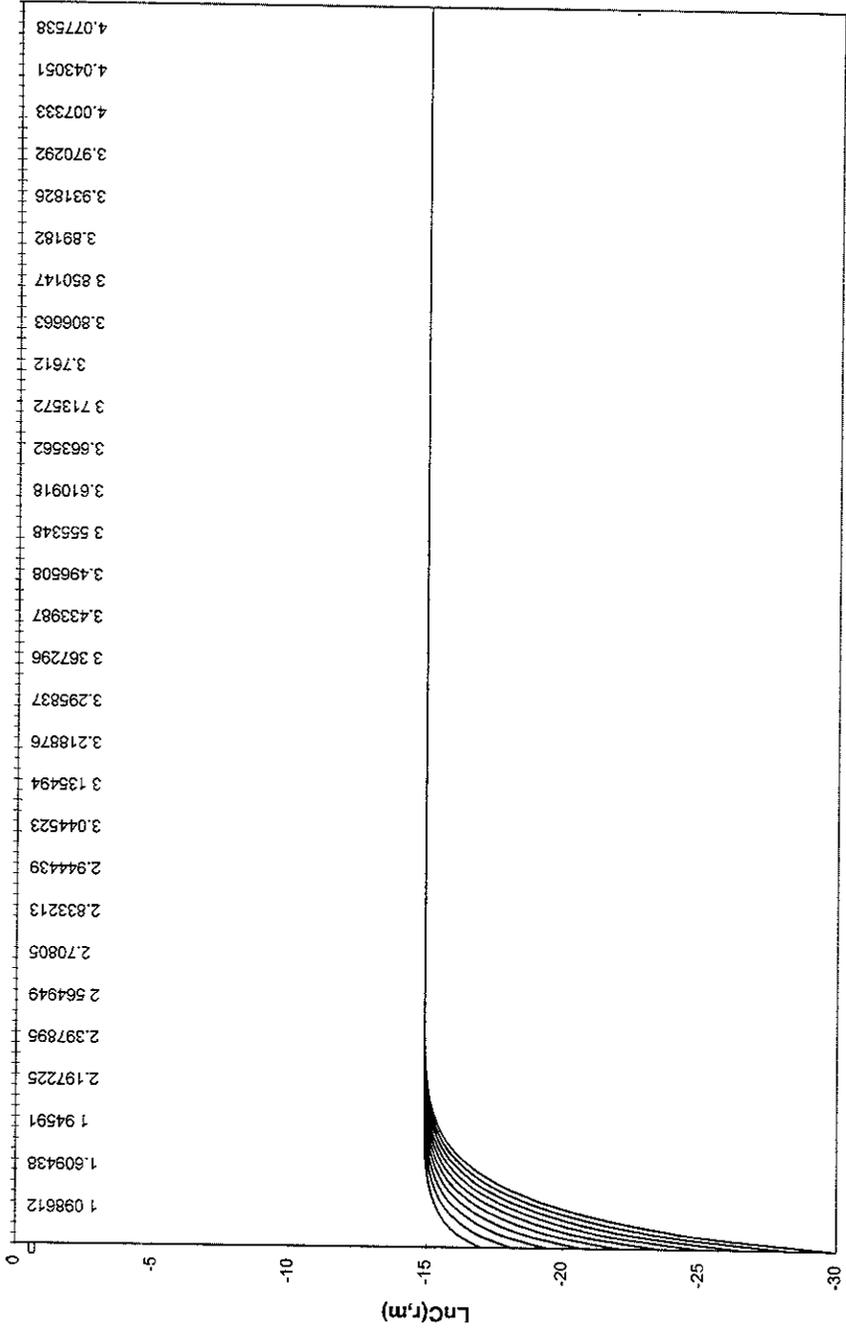


TLAXCALA TEM. MÁX. TAO= 1 DÍA (RADIO 0.1)



GRÁFICA 2

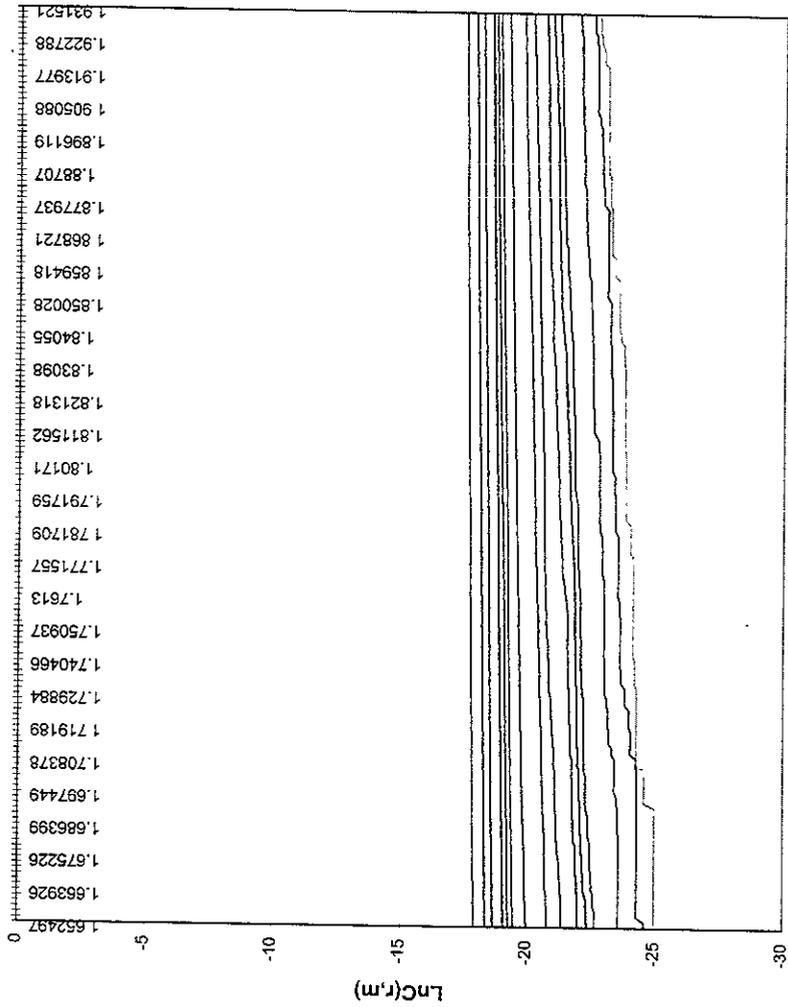
TLAXCALA EVAPORACIÓN TAO= 1 DÍA (RADIOS 0.1)



Ln

GRÁFICA 3

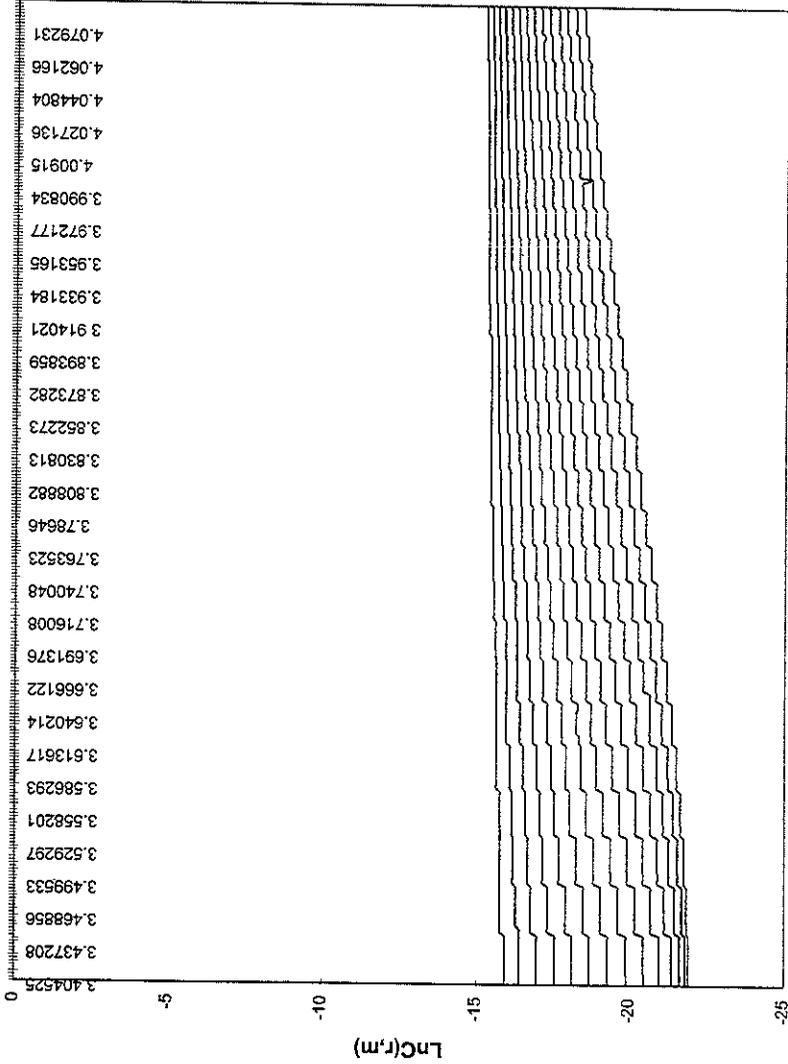
TLAXCALA TEM. MÍN. TAO= 1 DÍA (RADIO= 0.1)



Ln

GRÁFICA 4

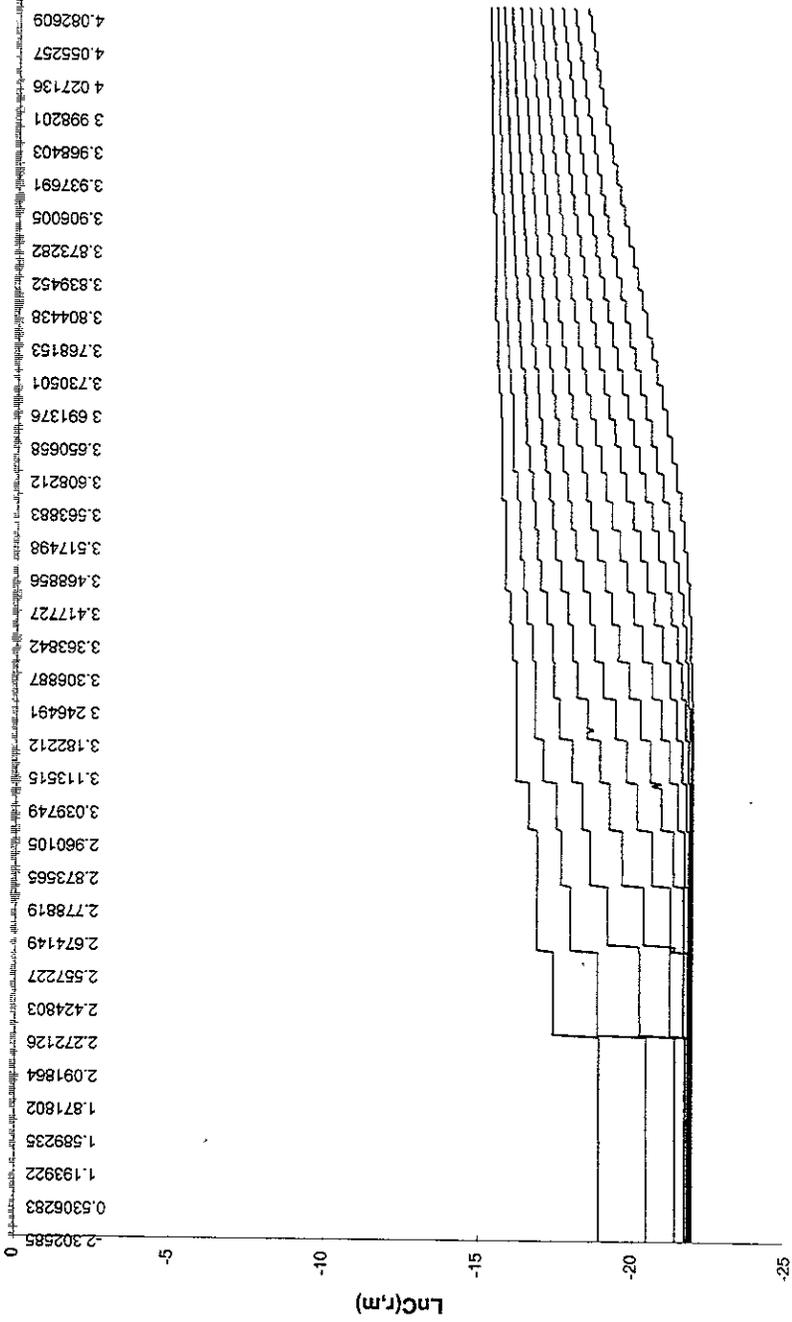
APIZACO TEM. AMB. TAO= 1 DÍA (RADIO= 0.1)



Lnr

GRÁFICA 5

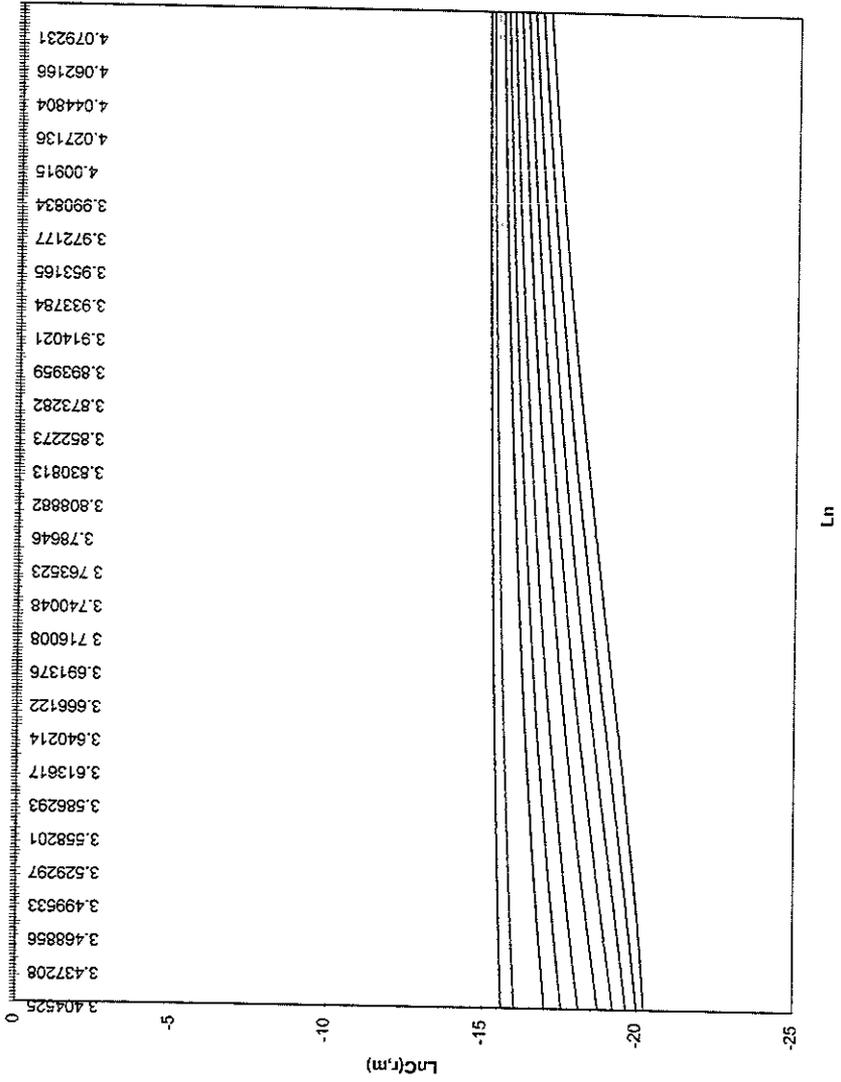
APIZACO TEM. MAX. TAO= 1 DJA (RADIOS 0.1)



Lnr

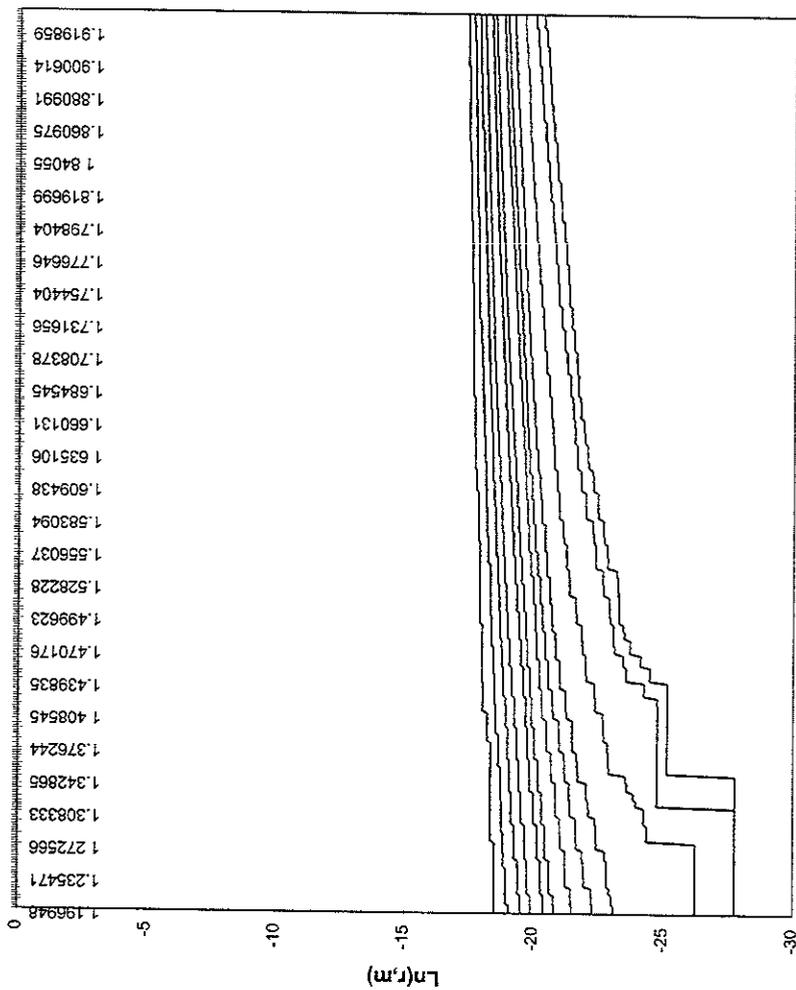
GRÁFICA 6

APIZACO EVAPORACIÓN TAO= 1 DÍA (RADIO 0.1)



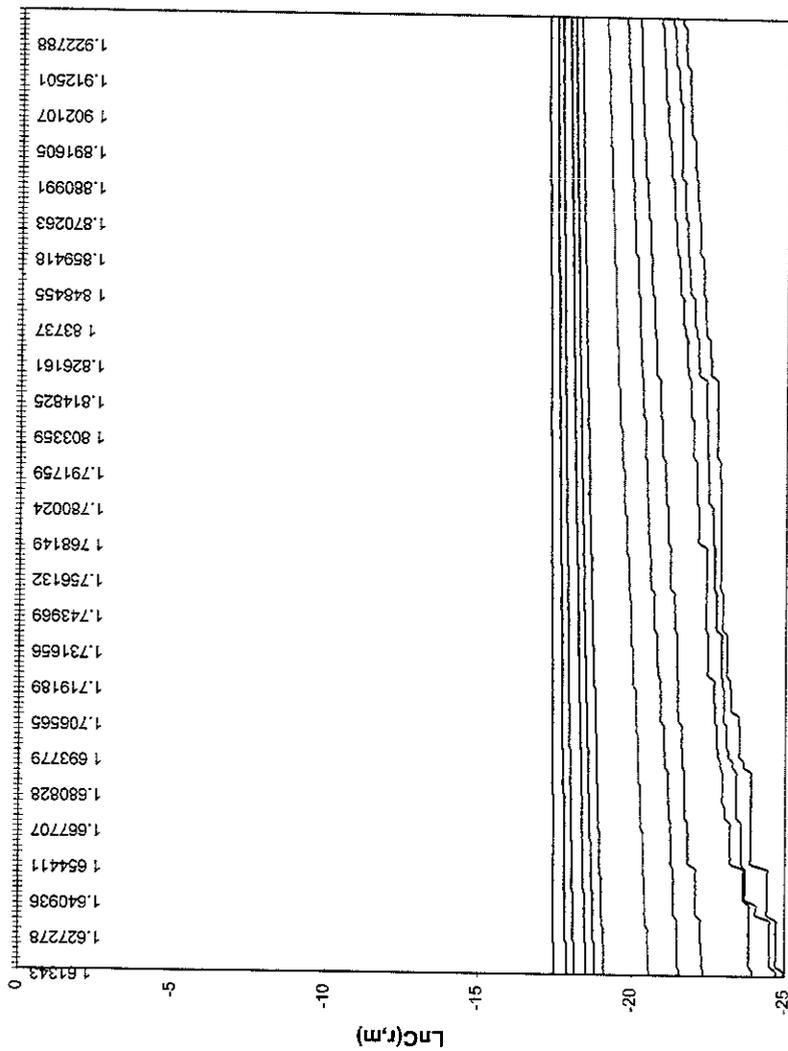
GRÁFICA 7

APIZACO TEM. MÍN. TA0= 1 DÍA (RADIOS 0.1)



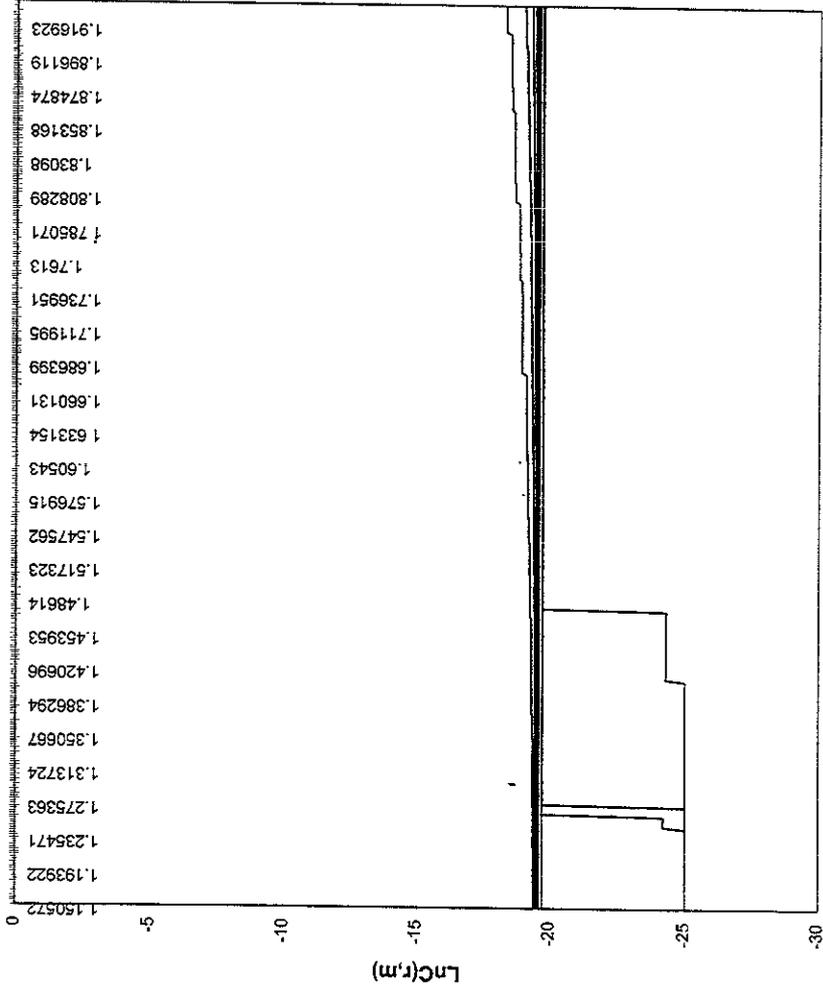
Ln  
GRÁFICA 8

ATLANGATEPEC TEM. MÍN. TAO= 1 DÍA (RADIO= 0.1)



Ln

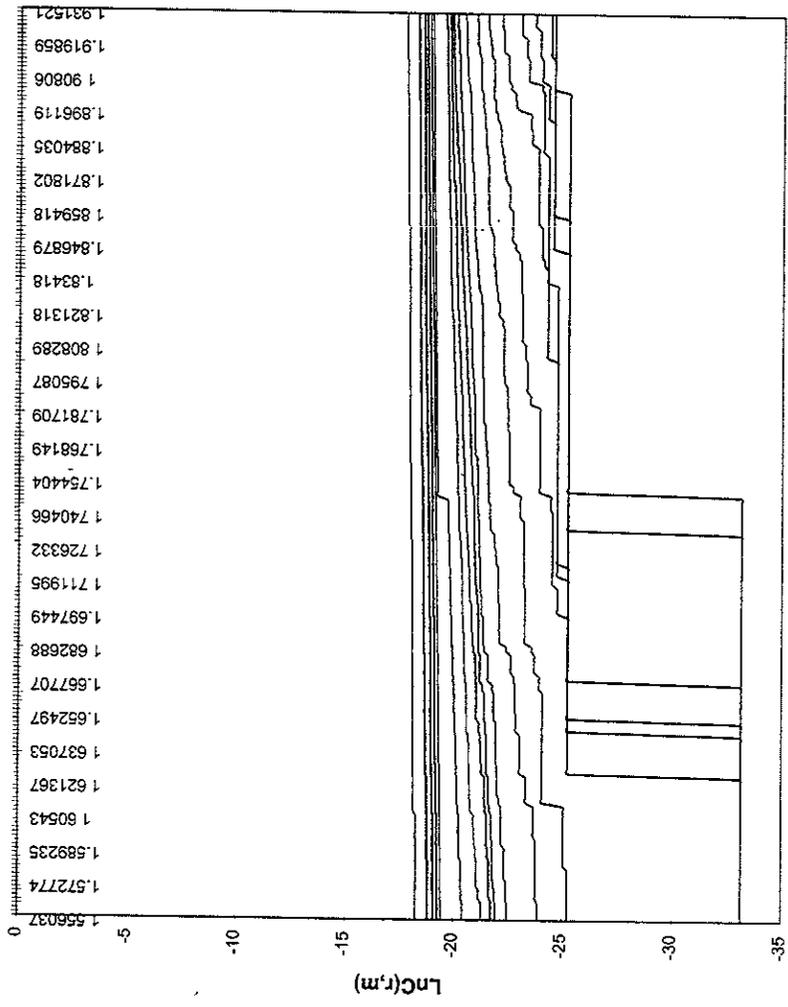
ESPAÑITA TEM. MÍN. TAO= 1 DÍA (RADIO 0.1)



Ln

GRÁFICA 10

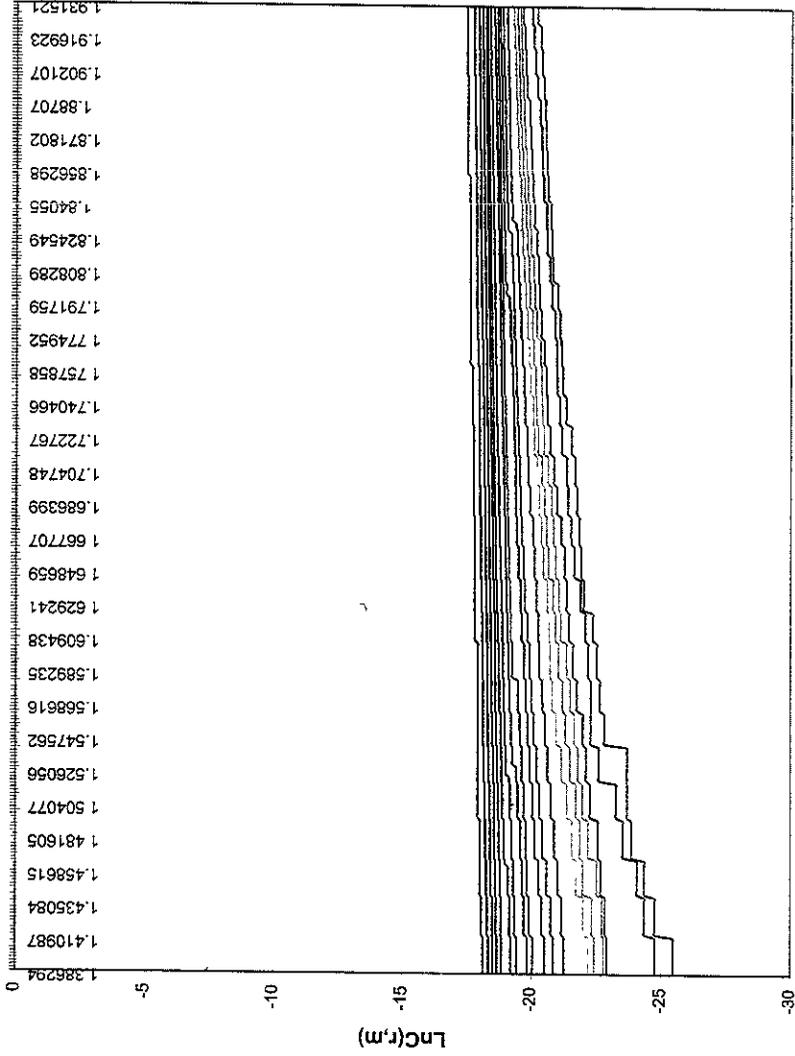
IXTACUIXTLA TEM. MÍN. TAO= 1 DÍA (RADIO 0.1)



Ln

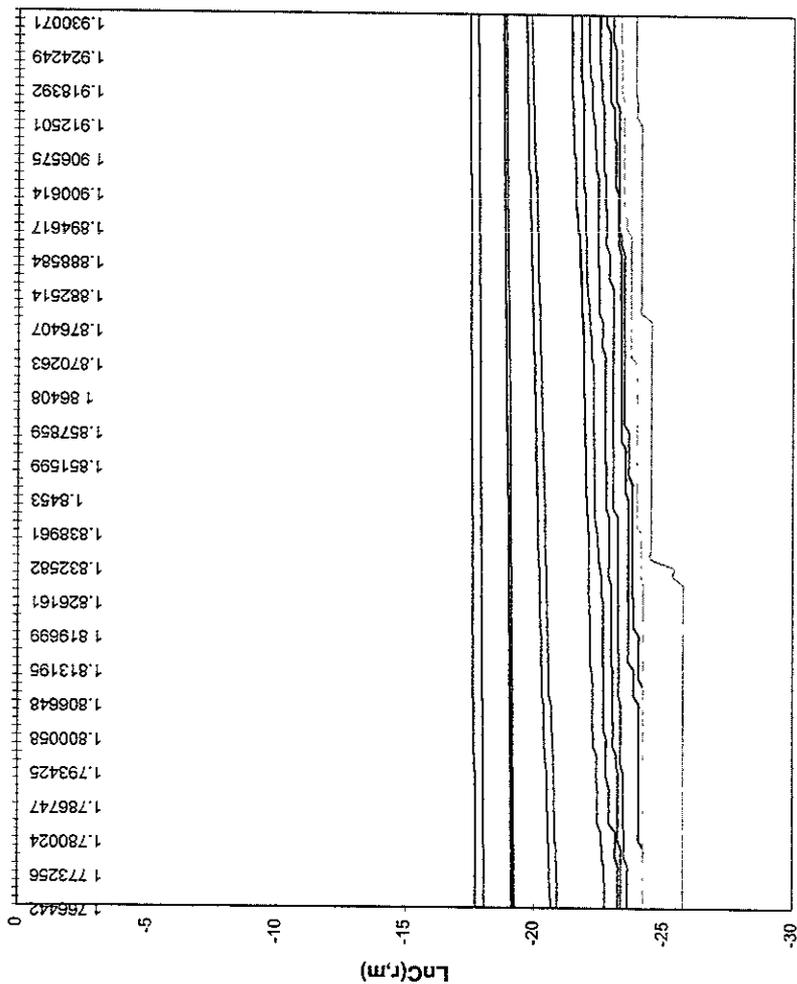
GRÁFICA 11

TEPETITLA TEM. MIN. TAO= 1 DIA (RADIO 0.1)



Ln

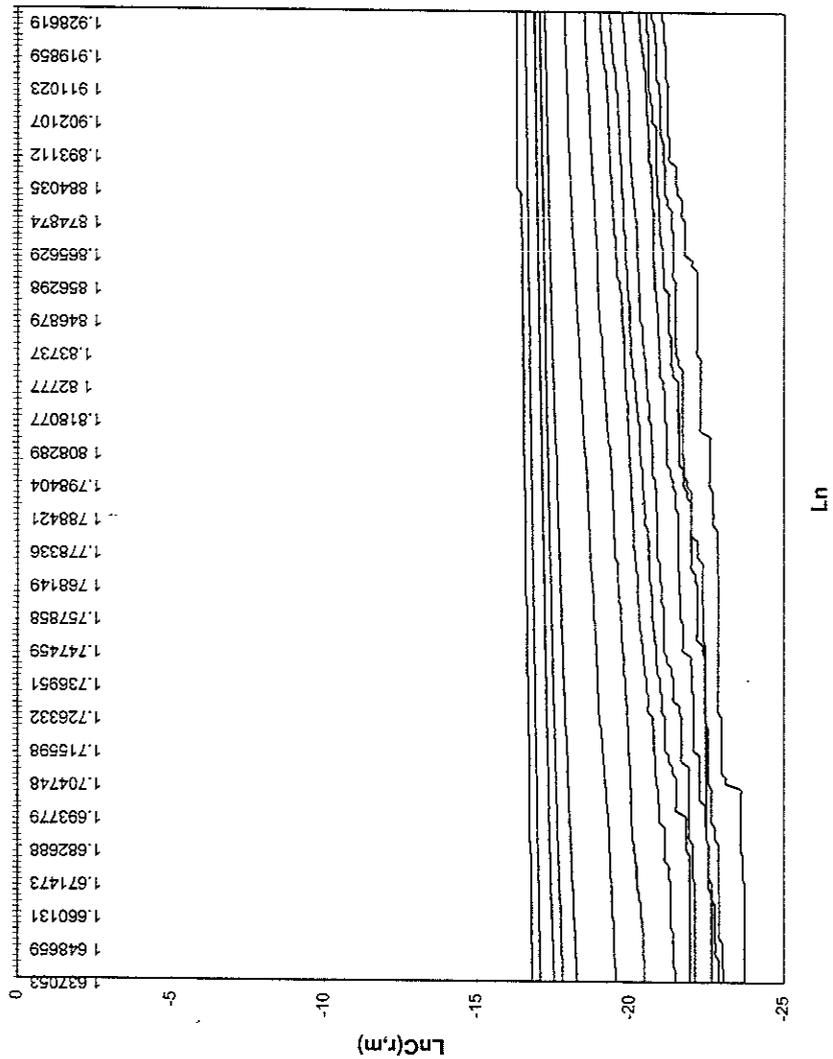
TLAXCO TEM. MÍN. TAO=1 D/A (RADIOS 0.1)



Ln

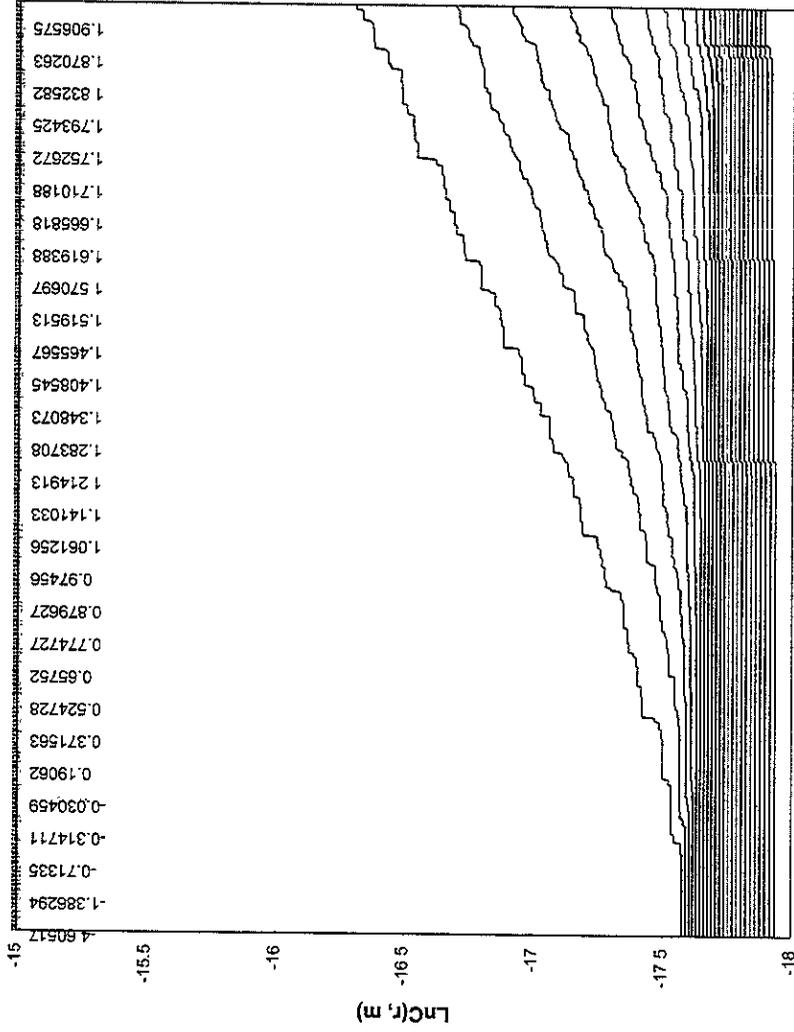
GRÁFICA 13

TOLUCA DE GUADALUPE TEM. MÍN. TAO= 1 DÍA (RADIO 0.1)



GRÁFICA 14

HUAMANTLA TEM. MÍN. TAO= 1 DÍA (RADIO 0.1)



Ln

GRÁFICA 15