

6
00164 dij



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ARQUITECTURA

266717

CONSTRUCCION, GEOMETRÍA Y ESFUERZOS DE CUBIERTAS ESFÉRICAS
ARQ. JORGE NÁÑEZ MARTÍNEZ



DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE ARQUITECTURA. UNAM
MÉXICO AÑO 1998





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ARQUITECTURA

CONSTRUCCION, GEOMETRÍA Y ESFUERZOS DE CUBIERTAS ESFÉRICAS
ARQ. JORGE NÁÑEZ MARTÍNEZ

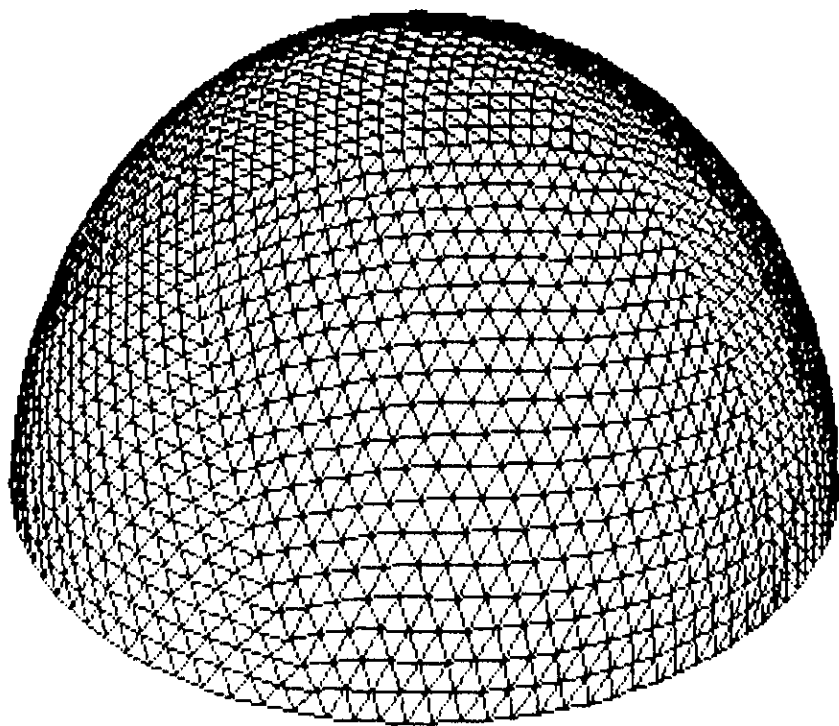


DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE ARQUITECTURA. UNAM
MÉXICO AÑO 1998



**CONSTRUCCIÓN , GEOMETRÍA Y ESFUERZOS DE
CUBIERTAS ESFÉRICAS.**

ARQ. JORGE NÁÑEZ MARTÍNEZ.



TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN ARQUITECTURA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO .
FACULTAD DE ARQUITECTURA. UNAM
MÉXICO, D.F. 1998

JURADO

DIRECTOR DE TESIS

M. EN ARQ. FRANCISCO REYNA GÓMEZ

SINODALES

DR. FERNANDO LÓPEZ CARMONA

DR. JUAN GERARDO OLIVA SALINAS

M. EN DIS. ARQ. JAN VAN ROSMALEN JANSEN

M. EN ARQ. JORGE RANGEL DAVALOS

AGRADECIMIENTOS

A MIS MAESTROS POR SU ENSEÑANZA Y PACIENCIA

DR. FERNANDO LÓPEZ CARMONA
M. EN ARQ. FRANCISCO REYNA GÓMEZ
DR. JUAN GERARDO OLIVA SALINAS

A MIS PADRES

RAÚL DE JESÚS NÁÑEZ MANCILLA (q.e.p. d.)
MARÍA ANGELA MARTÍNEZ GUZMAN

A MIS HERMANOS

ARMANDO NÁÑEZ MARTÍNEZ
ORALIA NÁÑEZ MARTÍNEZ
GLORIA PATRICIA NÁÑEZ MARTÍNEZ
TERESA DE JESÚS NÁÑEZ MARTÍNEZ
BEATRIZ NÁÑEZ MARTÍNEZ

A MI HIJA

REBECA NÁÑEZ PEÑALOZA

A MIS SOBRINOS

ARTURO DE JESÚS JUÁREZ NÁÑEZ
NADIA BEGNE FELIX NÁÑEZ
JULIANA JUÁREZ NÁÑEZ

INDICE

página

PROLOGO _____ 6

INTRODUCCIÓN _____ 7

1.0 GEOMETRÍA DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA

Antecedentes históricos _____ 9

Introducción matemática de cubiertas esféricas _____ 17

1.0.0 Superficie esférica _____ 18

1.0.1 Definición

1.0.2 Paralelos y Meridianos

1.0.3 Ángulos diedros, triedros y esféricos

1.0.4 Coordenadas esféricas y rectangulares _____ 19

1.0.5. Triángulos esféricos , rectángulos, oblicuángulos y
formulario _____ 20

1.0.6 Longitud de arco _____ 23

1.0.7 La elipse como figura proyectada

1.0.8 Rotación de ejes coordenados _____ 24

1.0.9 Transformación de coordenadas rectangulares _____ 25

1.1.0 DESARROLLABILIDAD DE LA SUPERFICIE _____ 26

1.1.1 Por conos tangentes.

1.1.2 Por cilindros tangentes _____ 28

1.1.3 Por husos esféricos _____ 30

1.2.0. LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS ESFÉRICOS _____ 32

1.2.1 Montea de los sólidos Platónicos - Tetraedro,

hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro _____ 33

1.2.2 Programa de computo GEODESIC _____ 38

1.2.3 Modelo analítico _____ 39

1.2.4 Tetraedro esférico : _____ 40

a) Coordenadas rectangulares y esféricas

b) Propiedades geométricas.

c) Montea triplanar , perspectiva _____ 41

1.2.5 Hexaedro esférico : _____ 42

a) Coordenadas rectangulares y esféricas

b) Propiedades geométricas

c) Montea triplanar , perspectiva _____ 43

1.2.6 Octaedro esférico :	44
a) Coordenadas rectangulares y esféricas	
b) Propiedades geométricas	
c) Montea triplanar , perspectiva	45
1.2.7 Dodecaedro esférico :	46
a) Coordenadas rectangulares y esféricas	
b) Propiedades geométricas	
c) Montea triplanar, perspectiva	47
1.2.8 Icosaedro esférico :	48
a) Coordenadas rectangulares y esféricas	
b) Propiedades geométricas	
c) Montea triplanar , perspectiva	49

II.- ESFUERZOS DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA.

2.0.0 Introducción a los esfuerzos	51
2.0.2 Cúpula sujeta a esfuerzos de peso propio.	52
2.0.3 Esfuerzo cortante.	
2.0.4 Esfuerzo tangencial.	53
2.0.5 Esfuerzo anular	

2.1.0 ESFUERZOS EN SÓLIDOS PLATÓNICOS.	
2.1.1 Tetraedro esférico	55
2.1.2 Hexaedro esférico	56
2.1.3 Octaedro esférico	57
2.1.4 Dodecaedro esférico	58
2.1.5 Icosaedro esférico.	59

III.- ALTERNATIVA DE CONSTRUCCIÓN.

3.0.0 Grandes ejemplos constructivos	61
3.1.0 MATERIAL	62
Características generales, esfuerzos permisibles, elementos de unión , capacidad de carga	
3.2.0 EJEMPLO DEMOSTRATIVO	66
3.2.1 Secciones y especificaciones	
3.2.2 Procedimiento constructivo	
CONCLUSIONES	68
BIBLIOGRAFÍA.	69

PROLOGO.

En el presente documento se pretende describir el análisis geométrico, de esfuerzos y el procedimiento constructivo de las cubiertas esféricas.

La idea fundamental del proyecto de análisis en cubiertas esféricas es tratar de aprovechar la ventaja estética, estructural y económica que nos proporciona su forma al poder librar pequeños y grandes claros con cantidades mínimas de material, debido a que por la característica de su forma se obtiene un sólido hermoso con la cantidad mayor de espacio o volumen y con la menor de superficie. Además nos proporciona una gran variedad de opciones derivadas de dicha forma.

Las cubiertas esféricas también presentan desventajas como son sus onerosos sistemas de cálculo geométrico, estructural y su procedimiento constructivo, sin dejar de tomar en cuenta la poca información específica en un solo documento que nos ayude a facilitar estos análisis, quizás estas sean las tres razones principales por la que su uso cotidiano sea tan poco común, totalmente contrario a lo que uno desea disfrutar ordinariamente.

Al tratar de solventar un poco estas carencias en la medida de lo posible, se elabora este documento, con el apoyo de la experiencia adquirida en la especialización de cubiertas ligeras por el año de 1983.

Indudablemente que estos onerosos sistemas de cálculo geométrico y estructural se resuelven con la computadora, herramienta usada comúnmente en la actualidad, para que alguien verdaderamente interesado en el tema entienda primero claramente su análisis. Se le proporciona toda la información matemática necesaria para que, de así requerirlo elabore sus propios programas de computo de acuerdo a sus necesidades y gustos para que le ayuden posteriormente a realizar con mayor rapidez sus análisis.

Al mencionar las cubiertas esféricas no podemos olvidar que estas han sido utilizadas desde los años 220 a.C. hasta

los años sesenta del presente siglo por los grandes maestros de la antigüedad como fueron los Asirios y Caldeos, Marcos Agripa, Artemio de Tralles, Isidoro Mileto, Miguel Ángel y contemporáneos como: R. Buckminster Fuller, Pier Luigi Nervi, Felix Candela, López Carmona, solo por mencionar algunos, aportando cada uno de ellos grandes avances en su análisis geométrico, estructural y en sus procedimientos constructivos no superados ni superables en muchos años.

Si analizamos las obras realizadas por R. Buckminster Fuller, Pier Luigi Nervi y Felix Candela de los más recientes constructores de estos tipos de cubiertas esféricas, indudablemente que por su magnitud y complejidad técnica son difíciles de repetir en la actualidad, solamente podemos concluir que invariablemente ellos utilizaron las barras y nodos como elementos soportantes de la estructura siendo la cubierta de diversos materiales como el plástico, madera, concreto láminas etc.

Al pretender facilitar su procedimiento constructivo tratamos de explorar aunque sea teóricamente al proponer un sistema constructivo diferente, suprimiendo los nodos, por que sobre todo utilizarlos nos implicaría adquirir el de alguna patente o a implantar el diseño de un nodo nuevo.

La propuesta del sistema constructivo consiste en utilizar casetones de madera en forma de triedros truncados, sostenidos unos con otros o sea autosustentantes, iniciando su colocación perimetralmente de la base hacia la corona.

Los casetones se proponen de madera por ser un material fácil de adquirir en zonas urbanas o rurales.

Invariablemente que para comprobar que la teoría concuerda con la práctica se deberán ir librando claros de pequeños a grandes es por eso que la propuesta analizada inicialmente es librar un claro de 8 metros de radio.

INTRODUCCIÓN

En este documento se describen los pasos necesarios a realizar en el análisis de las cubiertas esféricas circunscritas a los sólidos platónicos, también conocidos como polígonos regulares, que son el :

Tetraedro
Hexaedro
Octaedro
Dodecaedro
Icosaedro .

Para obtener cubiertas esféricas de estos sólidos se harán cortes con planos horizontales al tetraedro, hexaedro, octaedro e icosaedro, según su simetría un corte irregular al dodecaedro .

Los sólidos platónicos como son el tetraedro, octaedro, e icosaedro contienen caras formadas con triángulos equiláteros . El hexaedro y dodecaedro de caras cuadradas y pentagonales que pueden dividirse por triángulos isósceles de dos aristas iguales y una desigual .

Los triángulos mencionados a la vez pueden subdividirse en pequeñas redes triangulares de 2°, 3°, 4°, 5° y 6° grados, conforme sean las divisiones a los arcos de las caras de los sólidos Platónicos, 2, 3, 4, 5 y 6 etc., según sea el caso .

Las redes triangulares las podemos lograr mediante triedros truncados, con centro en el origen de la esfera .

La base del triedro que nos sirve como cubierta la obtenemos con pequeñas superficies planas de aristas rectas de las cuerdas del círculo máximo.

Las cubiertas esféricas las analizaremos en tres capítulos que constan de lo siguiente :

En el **primer capítulo** se enuncian los conocimientos básicos de geometría analítica, geometría descriptiva, trigonometría esférica, vectores y matrices para la obtención de coordenadas esféricas y cartesianas, ángulos internos, longitudes de arcos, longitud de barras, rotaciones de ejes coordenados, etc., siendo todos elementos

necesarios para la obtención de la geometría en el desarrollo de las cubiertas esféricas.

En relación al análisis con geometría descriptiva se describe la obtención de la desarrollabilidad de la superficie esférica mediante tres opciones diferentes que son :

Por conos tangentes, por cilindros tangentes y por usos esféricos, para poder obtener las aristas y vértices de los sólidos Platónicos esféricos, se describe la montea de cada uno de ellos, señalando una de sus aristas en verdadera forma y magnitud.

Como ejemplo representativo se elaboró el programa GEODESIC Versión 1.0 en lenguaje Qbasic, útil para el análisis de los sólidos Platónicos esféricos se presentan de cada uno de ellos las coordenadas rectangulares y esféricas, propiedades geométricas, montea triplanar y perspectivas, con el objeto de tener un análisis completo de estos sólidos.

En el **segundo capítulo** analizamos los esfuerzos de peso propio que se producen en estos tipos de cubiertas esféricas.

Estos esfuerzos básicamente son de cortante, tangencial y anulares, que se pueden obtener fácilmente en cada punto de la superficie aplicando las fórmulas descritas.

La representación de estos esfuerzos en los sólidos Platónicos esféricos quedan descritos en los ejemplos demostrativos de cada uno de ellos mediante el análisis de esfuerzos por medio del programa GEODESIC Versión 1.0

En el **tercer capítulo** se propone la alternativa de un sistema constructivo, como es el de elaborar casetones de madera en forma de triedros truncados, ya sea a pie de obra o en algún taller que pueda servir para el montaje de una cubierta esférica de 8 metros de radio en 12 horas aproximadamente, esta alternativa consiste en montar unos casetones sostenidos con otros o sea autosustentantes, utilizando el triplay de madera como material adecuado, fácil de adquirir en cualquier parte del país y que puede utilizarse por usuarios no especializados.

La aplicación de este sistema constructivo implica que con la obtención de la geometría y los esfuerzos pueda utilizarse cualquier material industrializado.

I.- GEOMETRÍA DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA.

ANTECEDENTES HISTÓRICOS.

Los antecedentes históricos de las cubiertas esféricas pueden dividirse en tres grandes épocas .

- 1) EPOCA ANTIGUA
- 2) APARTIR DEL RENACIMIENTO
- 3) SIGLO XX

1) EPOCA ANTIGUA

Los estudios de la geometría se remontan a las antiguas civilizaciones de Egipto y Mesopotamia 2000 años a.C.¹.

Alrededor del siglo XVI a.C., los Egipcios y los Babilonios inventaron métodos para medir los ángulos, también por esos tiempos, el escriba AHMES escribió su famoso papiro donde describe que los Egipcios conocían, que la circunferencia de un círculo es un número fijo de veces su propio diámetro lo que hoy todas conocemos como perímetro de la circunferencia, sin embargo, es hasta el siglo XVII d.C cuando un número inconmensurable se designa con la letra Griega π , constante muy importante en los cálculos geométricos actuales .

Los matemáticos Griegos de la escuela de Alejandría lograron dividir a la circunferencia en 360 partes iguales², o sea la dividieron con intervalos de un grado ante este hecho podemos considerar que descubrieron un sistema de medición posiblemente copiando a los Babilonios.

Sin embargo, a pesar de los descubrimientos tan importantes hechos anteriormente se considera que la geometría como ciencia inició en Grecia en el siglo IV a.C.³ con la escuela Jónica o sea 1600 años después de los primeros vestigios de las antiguas civilizaciones Egipcias y Mesopotamicas.

Los términos eje, vértice y diámetro fueron usados por ARQUÍMEDES (297-212 a.C.), siendo él junto con EUCLIDES (330-275 a.C.) y APOLONIO DE PERGA (260 - 200 a.C) los considerados como legisladores de la geometría⁴.

Los conocimientos existentes hasta ese entonces, fueron suficientes para que los grandes constructores Asirios y

Caldeos lograran ser los primeros en construir bóvedas de cañón (figura 1), cúpulas y semicúpulas de barro secado al sol aproximadamente en el año 220 a.C.⁵.

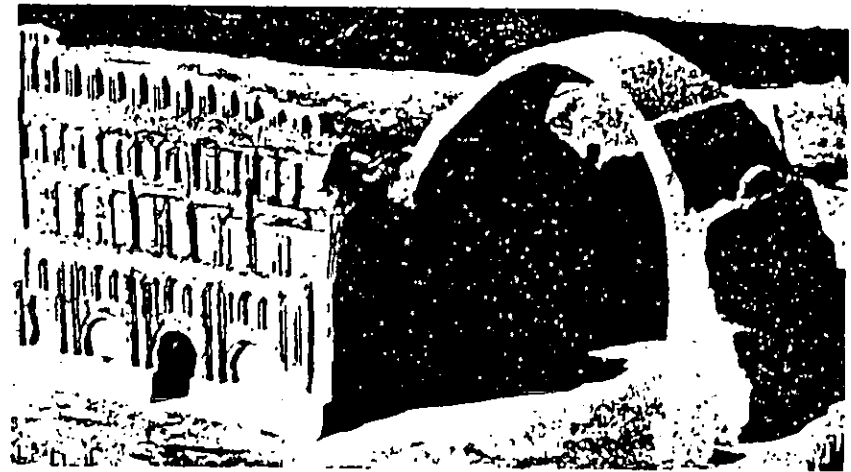


Figura 1 Bóveda de adobe tipo cañón
Alfonso Olvera López

El estudio profundo de la esfera con sus investigaciones astronómicas lo inicia HIPARCO (140 a.C.), Astrónomo y matemático Griego, quien vivió la mayor parte de su vida en Rodas, se le consideró como el iniciador de la trigonometría plana, introdujo en Grecia la división del círculo en grados, minutos y segundos, dividió el diámetro en 120 partes iguales y procedió al cálculo teórico del valor de las cuerdas, estableció una tabla que empieza por el medio grado y varía por intervalos iguales a esta fracción, ideó el primer enrejado de paralelos y meridianos².

¹ ENCICLOPEDIA SALVAT, tomo 8, página 2109

² HOOPER; GRISWOLD . Trigonometría , páginas 3,4,5

³ ENCICLOPEDIA SALVAT , tomo 6 , página 1528

⁴ LANDAVERDE , FELUPE DE JES U S . Geometría , página vi

⁵ OLVERA , LÓPEZ , ALFONSO . Análisis , cálculo y diseño de las bóvedas de cascaro

Los avances de la geometría se reflejaría en la construcción de grandes cúpulas y es bajo el Imperio Romano, en los años 27 a 25 a.C., en el dominio de MARCOS AGRIPA en el campo de Marte, cuando se construye la cúpula del Panteón de Roma (figura 2), con un diámetro de 43.50 metros y un agujero central de 8.92 metros de diámetro⁵.

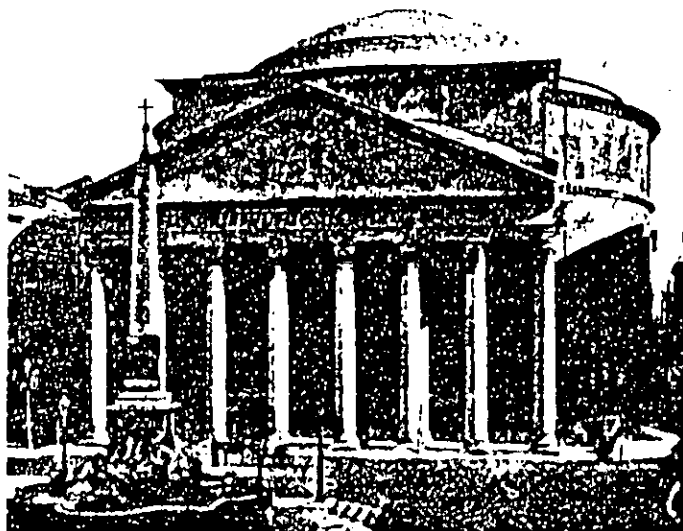


figura 2 Panteón de Roma
Alfonso Olvera López

Continuador de los estudios de HIPARCO Es MENELAO 100 años d.C. quien escribiera el primer tratado de trigonometría esférica, al que tituló "SPHARICA", además investigó lo que hoy conocemos con el nombre de triángulos esféricos, definido como la porción de la superficie de una esfera limitada por 3 arcos de círculos máximos que pasa por su centro.

Son los matemáticos de la India por el año 500 d.C., quienes empezaron a considerar el movimiento de una recta

que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de un punto fijo y a medir las longitudes de las semicuerdas o perpendiculares trazadas desde el extremo de la recta, lo que hoy también podríamos llamar ordenadas o flechas de un arco de círculo⁶.

Bajo el Imperio de JUSTINIANO entre los años 532 a 537 d.C., se construyó de ladrillo pegado con cal en Constantinopla la Catedral de Santa Sofía, por los arquitectos ARTEMIO DE TRALLES e ISIDORO DE MILETO cuya cúpula central tiene 32.6 metros de diámetro, dicha cúpula se derrumbó en 555, siendo reconstruida posteriormente (figura 3)^{5.1}.

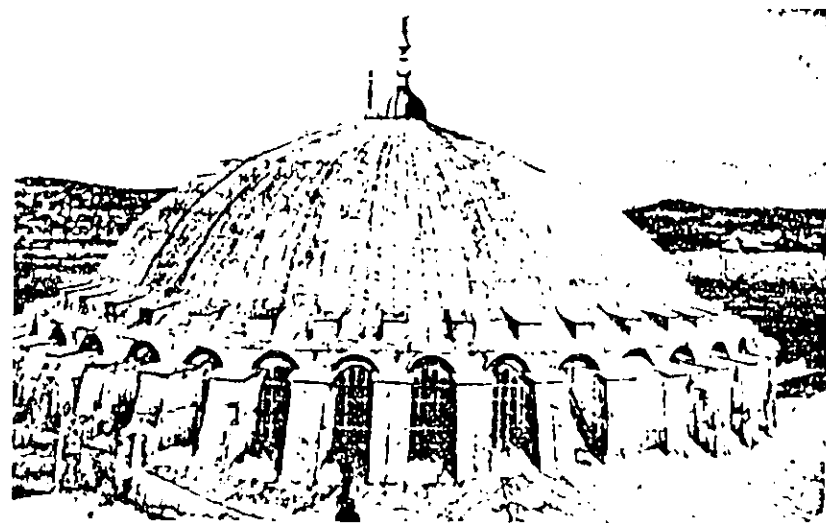


Figura 3 Catedral de Santa Sofía
Alfonso Olvera López

⁵ Pilar González Sereno . Historia universal tomo II página 366

^{5.1} OLVERA . LÓPEZ . A. . Análisis , cálculo y diseño de las bóvedas de casaca , página 12

⁶ HOOPER ; GRISWOLD . Trigonometría . página 5



Figura 4 Cúpula de San Pedro
Alfonso Olvera López

2) APARTIR DEL RENACIMIENTO

Con la introducción sistemática del uso de coordenadas geográficas; paralelos y meridianos, por HIPARCO de NICEA, utilizaron los grandes constructores este conocimiento para aplicarlo en la construcción de cúpulas con castillas de piedra o ladrillo en forma de meridianos.

Ya en el Renacimiento por el año de 1300 d.C. en la catedral de Florencia se deja ver la inquietud de los arquitectos por librar grandes claros.

Por el año de 1590 ya en pleno Renacimiento diseña MIGUEL ÁNGEL la cúpula de la Basílica de San Pedro, construida de ladrillos con nervios de piedra cuyo diámetro es de 42 metros (figura 4) ⁷.

Quien es considerado el padre de la geometría plana RENE DESCARTES (1596-1650). Observó que el concepto fundamental de su método puede extenderse de la geometría analítica plana a la geometría analítica del espacio, es decir mencionó la geometría de tres dimensiones, pero nada escribió acerca de ella, sin embargo, fue F. VAN SCHOOTEN quien sugirió en el año de 1657 el uso de las coordenadas en el espacio tridimensional ⁸.

Es entre los años de 1661 a 1716 que dan a conocer conceptos importantes como lo son: origen por G.H. DEL 'HOSPITAL; abscisa, ordenada, coordenadas, parámetro aplicada a ecuaciones paramétricas usados por G.G. LEIBBNIZ ⁹.

Pero quien creo los cimientos de la geometría analítica de tres dimensiones A. PARENT (1666- 1716), enseñó por primera vez a representar una superficie, tanto de la esfera como de otros sólidos, por medio de una ecuación cartesiana, que el llama "equation superficielle", aunque habla de un punto como origen o punto de referencia, no menciona ni ejes ni planos coordenados ⁸.

⁷ OLVERA, LOPEZ, ALFONSO. Análisis, cálculo y diseño de las bóvedas de casaca, página 13

⁸ ANFOSSI; M.A. FLORES MEYER. Geometría analítica, página xv

⁹ ANFOSSI; M.A. FLORES MEYER. Geometría analítica, página xvi

Quienes examinaron teóricamente las condiciones de equilibrio de las bóvedas en el año de 1695 fueron DE LA HIRE Y PARENT ¹⁰.

Desarrolla la geometría descriptiva como ciencia GASPARD MONGE (1746-1818) ¹¹.

Por el año de 1748 POLENI Y NEWTON realizaron estudios sobre la cúpula de San Pedro, construida casi 160 años antes ¹⁰.

Imaginó LOBACHEVSKIJ (1793-1856), que dibujando un cuadrado en la superficie de una esfera los ángulos cambiarían notablemente con respecto a la misma figura trazada en un plano, si el espacio es curvo, las líneas rectas Euclidianas se vuelven geodésicas ¹², concepto muy importante en los análisis geométricos actuales de la esfera ¹².

En el año de 1826 LAME Y CLAPEYRON Desarrollaron la analogía de los esfuerzos de membrana en las cúpulas ¹⁰.

Inventa las coordenadas polares en el plano JACOBO BERNOULLI (1654-1705), aunque Arquímedes hace una primera alusión a ellas ¹³.

El que indicó la consideración de los tres ejes coordenados de un sistema cartesiano J.E. HERMANN entre los años de 1678 a 1733, considera tres ejes de referencia y hace observar que un punto cualquiera de cada eje tiene dos de sus coordenadas nulas, demuestra que toda ecuación de primer grado con tres variables $Ax+By+Cz-D=0$ representa a un plano, partiendo de ella, deduce las coordenadas de la intersección del plano con cada uno de los ejes cartesianos ⁸.

Establece los fundamentos de la geometría analítica del espacio LEONARDO EULER (1707-1783), además estudia las superficies representadas por las ecuaciones de segundo grado y hace la reducción de ellas a cinco tipos ¹³.

Determina A.C. CLAIRUT (1713-1765), tangentes y normales a las curvas alabeadas, hace figurar ecuaciones de planos; ecuaciones de las superficies; de la esfera, del paraboloide hiperbólico y en general las ecuaciones de las superficies de los sólidos de revolución, J.L. LAGRANGE (1736-1813) definió la extensión de las

coordenadas polares a la geometría analítica del espacio de las que hay un indicio en A. Clairaut ^{8,13}.

La introducción de las coordenadas cilíndricas se debe a L.J. MAGNUS (1790-1861) ¹³.

El estudio sistemático de las curvas dadas por ecuaciones en coordenadas polares lo determina GOURIEF en el año de 1794 ¹³.

Erige su primera cúpula en Berlín, el llamado padre de las cúpulas, J.W. SCHWEDLER, siendo el claro máximo alcanzado en ese entonces de 60 metros, en Viena en 1874 ¹⁴.

3) SIGLO XX

Utilizaron el acero para construir una cúpula por primera vez BELLANGE Y BRUNET por el año de 1911, con ella se cubría la parte central del "Marché aux Grains" de París ¹⁵.

El movimiento en Alemania, fue influenciado principalmente por J. W. Schwedler, "el padre de las construcciones de cúpula, Henneberg, Mohr, Ritter, Müller - Breslau, Scharowsky y Zimmermann, cada una de estas personalidades contribuyó poderosamente al desarrollo de las cúpulas, debido a eso abundan en Europa cúpulas tanto ZIMMERMANN como de los demás por el año de 1914 particularmente en Alemania ¹⁶.

Construye el primer cascarón de concreto reforzado, CARL ZEISS en el año de 1924, quien aplicó por primera vez la teoría desarrollada por los AIRY y LOVE en el año de 1892, dicho cascarón se construyó en Jena Alemania.

⁸ Arcos de círculo máximo que corresponden a la mínima distancia entre dos puntos.

⁸ ANFOSSI : M.A. FLORES MEYER. . Geometría analítica , página xv

¹⁰ OLVERA , LOPEZ , ALFONSO . Análisis , cálculo y diseño de las bóvedas de casaca , pág. 14

¹¹ GIANCARLO , MASINI . El romance de los números , página 128

¹² GIANCARLO , MASINI . El romance de los números , página 148

¹³ ANFOSSI : M.A. FLORES MEYER. . Geometría analítica , página xv

¹⁴ MAKOWSKI , Z. S. Estructuras espaciales de acero , página 120

¹⁵ MAKOWSKI , Z. S. Estructuras espaciales de acero , página 112

¹⁶ MAKOWSKI , Z. S. Estructuras espaciales de acero , página 114

DYCKERHOFF Y WIDMANN construyeron en el año de 1925 el hall de exhibición en el planetario de Dusseldorf, RITTER Y DISCHINGER en el año de 1929 el hall del mercado de Leipzig ¹⁷.

Se construye en el año de 1915 la mayor cúpula de acero del tipo Schwedler sobre el Coliseum del Civic Center de Charlotte Carolina del Norte USA con un diámetro de 101 metros y una altura de 19 metros .

En el año de 1955, se construye una cúpula de acero y resina poliéster translúcida de dos direcciones para el pabellón de exposiciones de Hannover por la firma Krupp.

Para el año de 1956, Se construye cúpula laminar formada por un gran número de láminas, unidas de modo que constituyan mallas en forma de rombo, dichas cúpulas algunas alcanzan más de 90 metros de luz, estas podían erigirse en doce días solamente, la firma especializada en este tipo de construcciones es la Roof Structures Inc. del Dr. Kiewitt .

Varias cúpulas de tres direcciones han sido construidas en el año de 1958 en Francia por S. du Chateau formada por elementos tubulares y raccords de un tipo especial que constituyen los nodos del sistema quienes son idénticos entre sí; tienen la particularidad de permitir el ajuste longitudinal de las barras, así se puede suministrar todas de la misma medida.

Para un sistema prefabricado, lo ideal sería trabajar con elementos idénticos, unidos en los nodos por un único método. Con ello se conseguiría un montaje rápido y fácil al ser todos los elementos intercambiables y fabricables en grandes series .

Se podrá comprobar, sin embargo, que un gran número de cúpulas están formadas por barras de diferente longitud aunque sean prefabricadas.

La Unión Tank Car Company construyó e instaló una cúpula de 115 metros de diámetro que podía alojar un estadio con una cancha de fútbol completa ¹⁸.

Hacia 1966 diferentes constructores habían instalado más de cinco mil cúpulas distribuidas en cincuenta países .



Figura 5 Cúpula tipo Schwedler
Makowski Zygmunt Stanislaw

¹⁷ OLVERA, LOPEZ, A. . Análisis, cálculo y diseño de las bóvedas de cascaza, pág. 15

¹⁸ MAKOWSKI, Z. S. Estructuras espaciales de acero, página 120, 124, 126, 128, 136

RICHARD BUCKMINSTER FULLER ¹⁹

Nació en Milton Massachusetts U.S.A. en el año de 1895, quien con el correr de los años llegó a ser quizás el más importante constructor de cúpulas.

En 1917 Fuller se las había arreglado para consagrar algún tiempo a meditar sobre la geometría de la naturaleza .

Una y otra vez se preguntaba por que la geometría del hombre parecía manifestarse con números tan extraños, infinitos y constantes como π constante descubierta XVII siglos a . C. .

" El tetraedro es un sistema estructural básico y toda estructura en el universo se compone de piezas tetraédricas ", en la geometría de Fuller, el triángulo es la figura que se sostiene más rígidamente con menor esfuerzo, el tetraedro , el octaedro y el icosaedro eran las únicas tres figuras completamente indeformables quizá porque de los sólidos, platónicos son los que contienen en todas sus caras triangulares aristas iguales, luego empezó a traducir este cambio de poliedro a esfera, así obtendría el sólido con la cantidad mayor de espacio o volumen y con la menor de superficie.

Fuller constituyó y organizó en 1946 , la Fuller Research Foundation (Fundación Fuller de investigación), lo que más le entusiasmaba eran las posibilidades de la geodésica , si se pudiese construir una esfera hecha de triángulos formados por geodésicas que se intersecten, cada triángulo representaría una estructura tetraédrica de superficie mínima y resistencia máxima. En Chicago en 1948 enseñó a los estudiantes a construir cúpulas geodésicas con palitos de madera.

Fuller en 1949, enseñó en los Colegios de Carolina y Raleigh a jóvenes estudiantes la elaboración de modelos de cúpulas de tetraedros.

Fuller en 1953 , construye una armadura octeta de cúpula forrada de plástico translucido para la Ford Motor Company, además construyó para el departamento de defensa de Washington una cúpula de plástico para el radar de 16.50 metros de diámetro y 12 metros de altura,

la cual podía armarse en solo catorce horas, para el año de 1954, diseñó para el cuerpo de infantería marina una cúpula geodésica de 9 metros de diámetro hecha de un armazón de madera y forrada de plástico y fue la primera transportación aérea de una cúpula Fuller a una velocidad de 96 km./hr., se tardaron en construirla alrededor de dos horas y cuarto , en la décima exposición Internacional de diseño Fuller ganó el gran premio con dos cúpulas geodésicas de papel, hechas de hexágonos de cartón y un forro exterior de plástico.

Fuller en el año de 1956 instaló una cúpula para el pabellón de los Estados Unidos en la feria Internacional que se celebró en Afganistán, media 30 metros de diámetro por 10.50 metros de altura, para el año de 1957, proyectó para la compañía explotadora mas fuerte de aluminio una cúpula de casi 44 metros de diámetro construyéndose en solo 22 horas después de haberse desempaquetado.

En las cúpulas de Fuller, la triangulación de la armadura principal seguía las aristas de un icosaedro regular proyectado sobre la esfera, sus tradicionales cúpulas, constaban de dos elementos bien distintos, la armadura resistente y la cubierta , esta ultima generalmente de material sintético, no contribuía de ningún modo a la resistencia del conjunto, en 1959 diseñó para la feria mundial a celebrarse en Moscú una de las cúpulas más grandes de aproximadamente 60 metros de diámetro.

Uno de los aspectos interesantes de la cúpula geodésica de Fuller era que a medida que se hacía la cúpula más y más grande, las distancias entre los vértices se hacían más y más pequeñas hasta que los triángulos tetraédricos virtualmente desaparecían, Esto dio a Fuller la idea de utilizar una cúpula para techar una ciudad entera, visualizó una cúpula de más de 3 km. de diámetro que cubriera parte de la Isla de Manhattan en Nueva York ,

¹⁹ ROSEN , SIDNEY . El mago de la cúpula , páginas 11,113,122,123,124,127,134,126,137,138,139, 140,141,142,151,152,168,169.

concepto muy actualizado en las ciudades con grandes índices de contaminación .

Esta cúpula de 1600 metros de altura pesaría 80 mil toneladas y podría armarse por helicópteros en secciones de 5 toneladas con un costo calculado de 200 millones de dólares.

El gobierno de los E.U. pidió a Fuller en el año de 1967 que proyectara una cúpula que constituyese el pabellón Norteamericano de la feria mundial Canadiense a celebrarse en Montreal llamada "EXPO 67", la cúpula

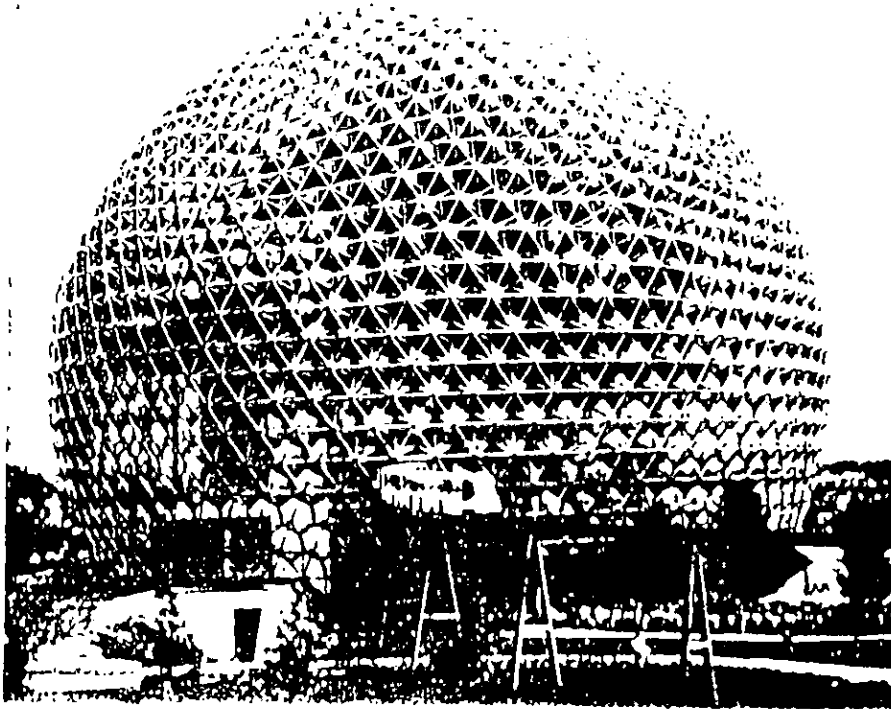


Figura 6 Cúpula Expo 67 en Montreal
Rosen Sidney

sería una enorme pompa de plástico de 65 metros de diámetro. Era una especie de pompa de tres cuartos , cuya ligera estructura de acero estaba hecha de Hexágonos, en lugar de un forro completo de plástico , diseñó una cubierta hecha de miles de Hexágonos de plástico separados, siendo esta su obra más importante (figura 6).

PIER LUIGI NERVI ²⁰

Construyeron A. VITELLOZZI Y P. L. NERVI en 1960 el pequeño palacio de los deportes de 57.5 metros de diámetro y 21 metros de altura, la cubierta está formada por

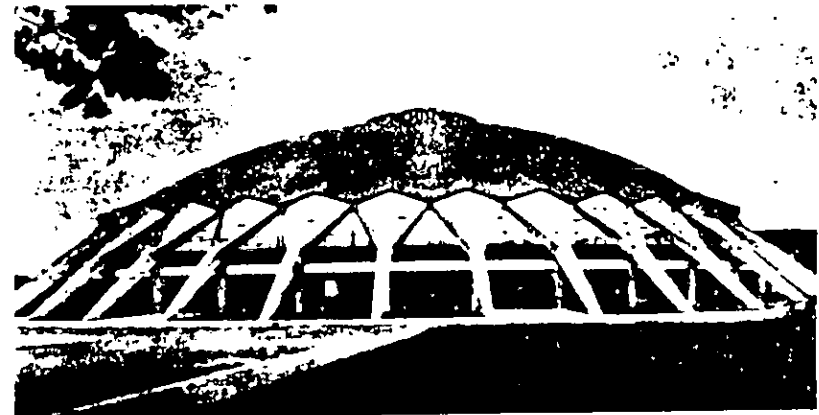


Figura 7 Palacio de los deportes en Roma
Alfonso Olvera López.

un casquete esférico compuesto de 1620 elementos prefabricados de ferrocemento sistema Nervi , el montaje y la terminación de la cúpula se realizó en 30 días ; en el Palacio de los deportes en Roma la cúpula central tiene 100 metros de diámetro se construyó con elementos prefabricados sistema Nervi lo cual permitió realizar la obra en tres meses (figura 7); en el Palacio de los deportes de Génova la cúpula central tiene un diámetro de 160 metros , tanto la cúpula como la bóveda tórica se construyó con el sistema Nervi .

²⁰ OLVERA , L . A. Análisis , cálculo y diseño de las bóvedas de casaca pág. 19,23,24,25,26

FELIX CANDELA OUTERIÑO ²¹

Nació el 27 de enero de 1910 en Madrid España otro gran constructor de cúpulas aunque sus más grandes logros los obtuvo con los paraboloides hiperbólicos .

Candela en 1934, acentúa su interés en las estructuras laminares, cuando Torroja estaba construyendo el Frontón Recoletos, en 1935 se graduó como Arquitecto y es hasta el 13 de junio de 1939 cuando llegó a Veracruz .

Candela en 1948, leyó un artículo de George Winter en el que se discutía la construcción de losas dobladas .

Esto prendió de nuevo su interés en las estructuras laminares, se puso a recopilar artículos sobre cascarones, estudió idiomas como el Inglés, Francés y Alemán, tradujo algunos trabajos del Sueco y del Danés. Lentamente empezó a darse cuenta de que estas estructuras podían ser analizadas por métodos más simples que el clásico.

Candela en el año de 1951 ²¹, erige su primera obra que tuvo publicidad y le dio renombre inmediato y fue el Pabellón de Rayos Cósmicos de Ciudad Universitaria.

Candela en 1954, construye cascarón de un cuarto de esfera para el Cabaret la Jacarandá en el D.F., en 1955, construye bóveda de pañuelo para la Destilería Bacardi en la Galarza, Matamoros, Puebla.

Candela construye en el año de 1959 la cúpula esferoidal para un auditorio en Ciudad Sahagún, Hidalgo, con un claro de 34 metros.

Le fue concedida a Candela en 1961 la medalla de oro por Ingenieros estructurales en Londres.

Candela en el año de 1968, junto con Enrique Castañeda y Antonio Peyri construyen el palacio de los deportes para la Olimpiada de México 68 (figura 8).

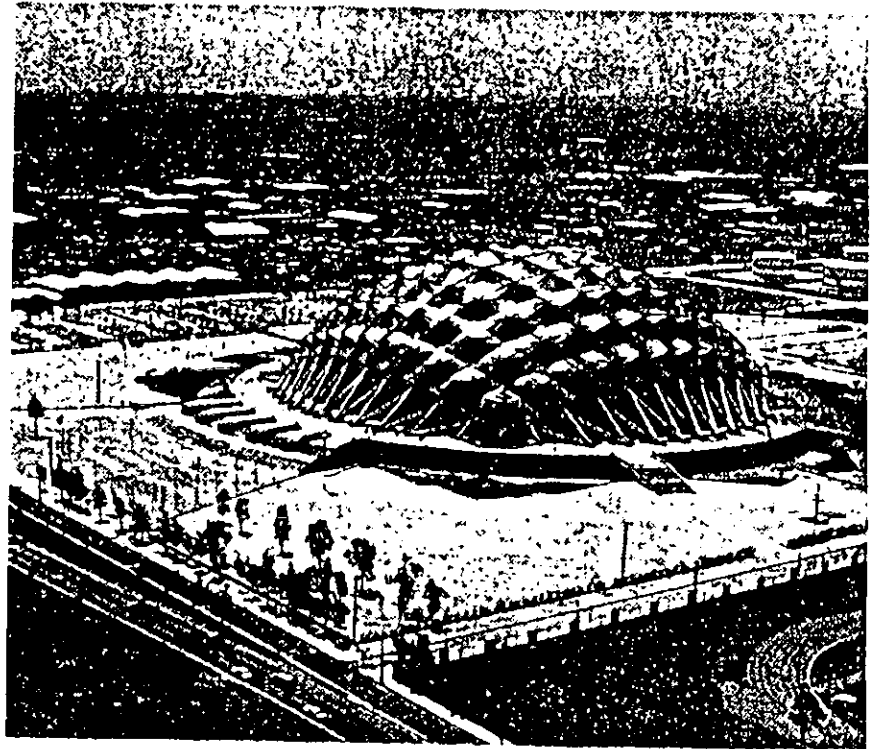


Figura 8 Palacio de los deportes México 68
Colin Faber

Realiza proyecto de unidad deportiva para la Universidad de Brow, E. U. A. ; en el año de 1969 realiza proyecto para una ciudad deportiva en Kuwait Arabia.

²¹ COLÍN, FABER . Los estructuras de Candela

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA DE CUBIERTAS ESFÉRICAS.

Al proponer una cubierta esférica nos encontramos con la problemática que significa obtener su geometría, para poder lograrlo necesitamos recordar la aplicación de algunos conocimientos matemáticos que nos son útiles en los cálculos de la geometría de una superficie esférica, estos conocimientos van de lo más elemental como es la trigonometría plana, la cual se encarga de estudiar las funciones llamadas trigonométricas, derivándose de estas funciones las leyes de senos, cosenos y tangentes, utilizados en la resolución de triángulos rectángulos u oblicuángulos, estos conocimientos por ser materia de estudio en los cursos de matemáticas básicas, prefiero no profundizar más en ellos para evitar sobresaturar este documento.

Además de lo anterior también debemos recordar algunos conocimientos de geometría analítica plana como, sistemas de coordenadas, la línea recta, ecuación de la circunferencia, transformación de coordenadas, la elipse, coordenadas polares, también conocimientos de materia de estudio en los cursos de matemáticas elementales, tampoco vale la pena escudriñar en ellos por los motivos antes expuestos.

Si nos seguimos refiriendo a los conocimientos que debemos recordar vale la pena mencionar a la geometría analítica del espacio como, el punto en el espacio, el plano, la recta en el espacio, al igual que lo anterior son conocimientos de materia de estudio en los cursos de geometría, por lo cual no ahondo en ellos.

De los conocimientos de geometría analítica del espacio que considero conveniente incluir en este documento son aquellos en los que está incluida la superficie esférica, rotación de ejes coordenados y la transformación de coordenadas rectangulares en el espacio.

Al estar abocado en la solución geométrica de las cubiertas esféricas es indudable que debemos conocer algunas definiciones y fórmulas al respecto, por lo que describimos la definición de, superficie esférica, paralelos y

meridianos, ángulos diedros, ángulos triedros, ángulos esféricos las coordenadas esféricas y rectangulares, la longitud de arco, la elipse como figura proyectada todo lo anterior con sus fórmulas, esto con el objeto de obtener las coordenadas esféricas y rectangulares de las diferentes opciones de las cubiertas esféricas.

Al obtener estas coordenadas en algunas ocasiones es necesario girar las caras de estas cubiertas para eso debemos apoyarnos ya sea en la rotación de ejes o en la transformación de coordenadas, pudiendo utilizar cualquiera de las dos opciones que finalmente nos sirven para obtener el mismo resultado.

Siguiendo con los conocimientos incluidos en el documento también debemos considerar a la trigonometría esférica como son la resolución de triángulos esféricos rectángulos u oblicuángulos su definición y formulario debido a que al pretender dividir a la superficie esférica una de las divisiones posibles es mediante estos triángulos que además nos son favorables estructuralmente, todo el formulario incluido es nada más con el objeto de que el interesado pueda comprobar los resultados de los ejemplos representativos y además le sirvan de guía para sus propias propuestas.

Como es de todos conocidos la fobia que hay por los números por algunos arquitectos, se presenta la opción de poder analizar a la superficie esférica mediante la geometría descriptiva para eso incluimos la desarrollabilidad de la superficie y la manera de obtener las aristas en verdadera magnitud y sus vértices de los casos de estudio.

Además, se incluye un ejemplo representativo de cada uno de los sólidos Platónicos esféricos, con datos obtenidos mediante el programa GEODESIC Versión 1.0, en donde se describen sus coordenadas rectangulares y esféricas, propiedades geométricas, dibujos de las plantas, fachadas y perspectivas.

Todo esto como resultado final de los conocimientos matemáticos en los análisis geométrico y estructural aquí descritos

1.0.0 SUPERFICIE ESFÉRICA.

1.0.1 DEFINICION - Es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo llamado centro.

1.0.2 PARALELOS - (directrices) Son una infinidad de círculos paralelos, de los cuales uno es máximo y los demás menores, trazados desde un mismo polo como centro(figura 9).

MERIDIANOS - (generatriz) Todo arco de círculo máximo que pasa por un polo gira alrededor de su diámetro (figura 9).

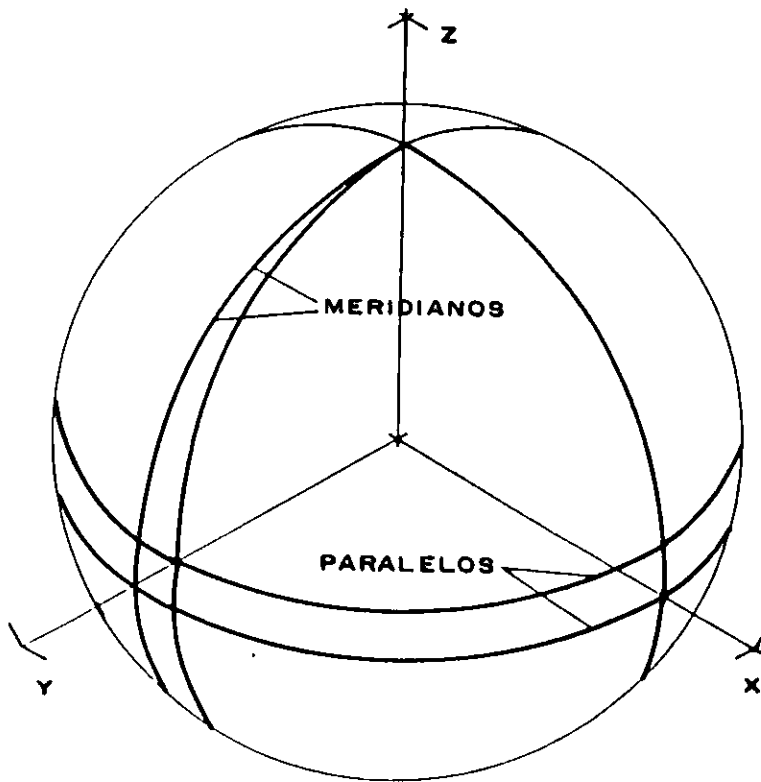


Figura 9 Paralelos y meridianos.

1.0.3 ÁNGULOS DIEDROS - Los ángulos diedros son los ángulos formados por dos planos de círculos máximos que tienen una sola recta común $\angle EFG$ (figura 10).

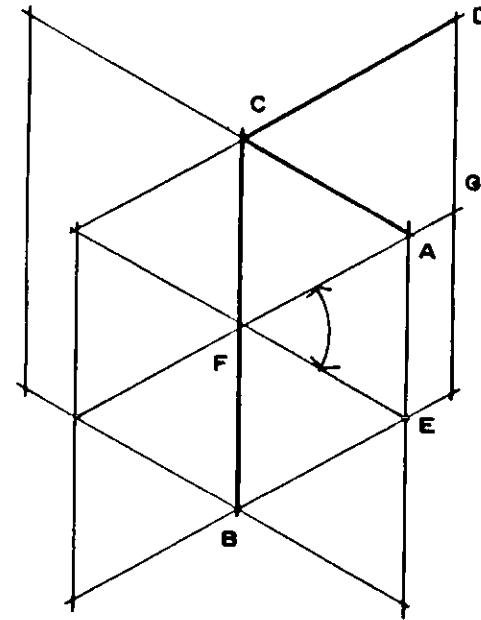


Figura 10 Ángulos diedros.

ÁNGULOS TRIEDROS - Los ángulos triedros son los ángulos formados por tres planos que tienen un solo punto común OABP (figura 11).

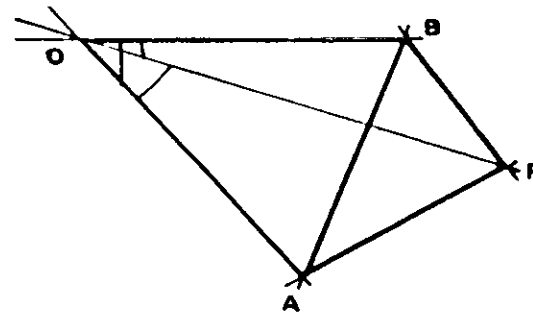


Figura 11 Ángulos triedros.

ÁNGULOS ESFÉRICOS .- Los ángulos esféricos son los ángulos formados en una esfera por dos arcos secantes de circunferencias máximas y tiene por medida la del diedro formado por los planos de los dos círculos máximos $\angle AOB$; $\angle BOP$; $\angle AOP$ (figura 12).

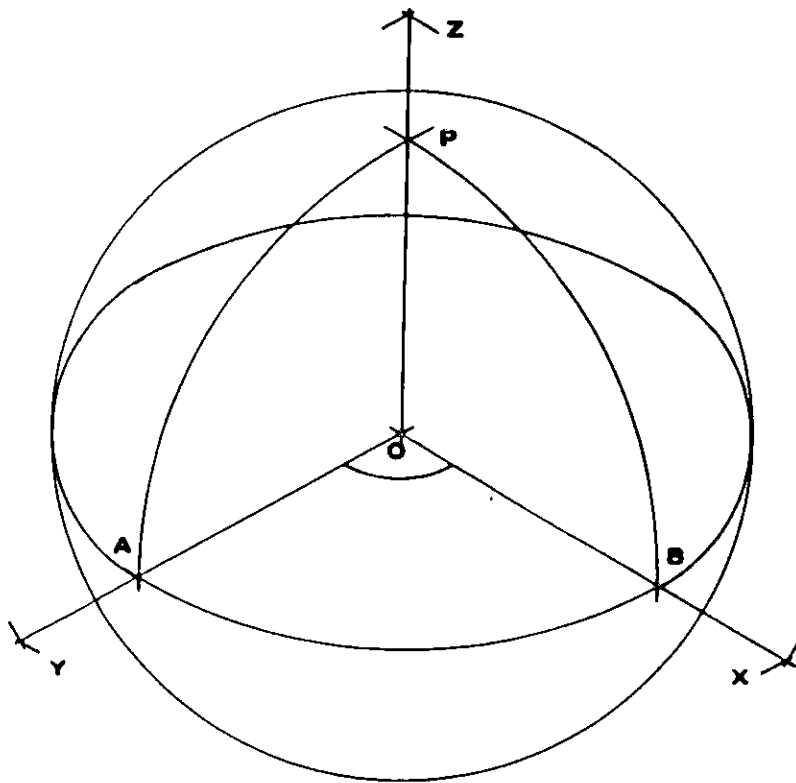


Figura 12 Ángulos esféricos.

1.0.4 COORDENADAS ESFÉRICAS .- Las coordenadas esféricas de un punto cualquiera en una superficie esférica de centro en el origen O y radio r (figura 13) son .

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 ; \phi = \arccos \frac{z}{r} ; \theta = \arctan \frac{x}{y}$$

COORDENADAS RECTANGULARES .- Las coordenadas rectangulares de un punto cualquiera en una superficie esférica de centro en el origen O y radio r (figura 13) son.
 $x = r \text{ seno } \phi \text{ seno } \theta ; y = r \text{ seno } \phi \text{ coseno } \theta ; z = r \text{ coseno } \phi$

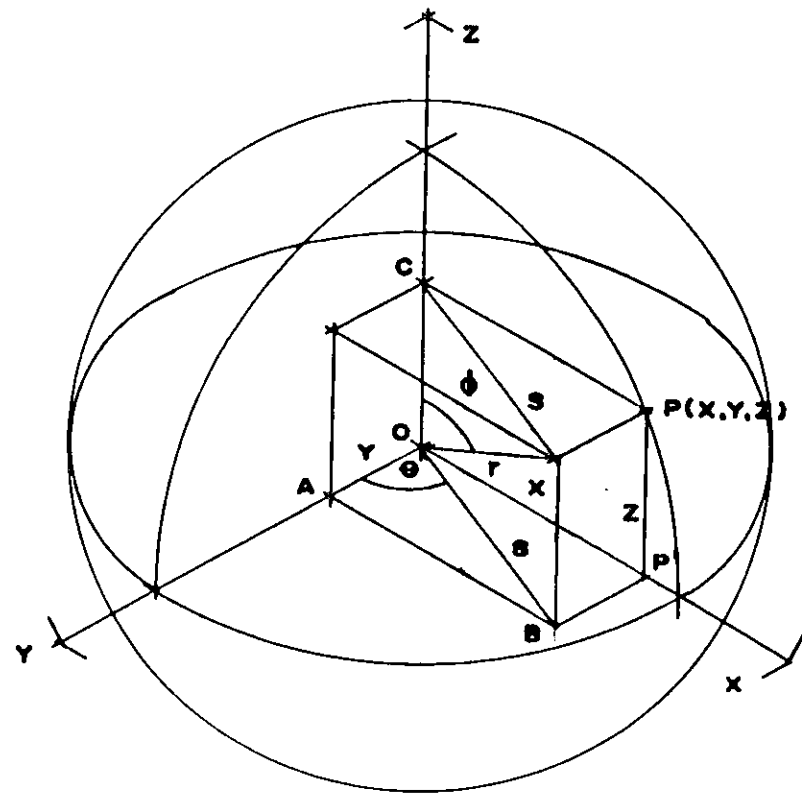


Figura 13 Coordenadas esféricas y rectangulares.

1.0.5 TRIÁNGULOS ESFÉRICOS.

Un triángulo esférico es la región de la superficie de una esfera limitada por los arcos de 3 circunferencias máximas. Los arcos son los lados del triángulo esférico y se denominan a, b, c . y sus respectivos ángulos son A, B, C .

TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS .

Se llama triángulo esférico rectángulo a un triángulo esférico tal que uno de sus ángulos sea recto y se cumplan las 10 relaciones fundamentales siguientes (figura 14) :

- 1) $\text{seno } a = \text{seno } A \text{ seno } c$
- 2) $\text{tangente } a = \text{tangente } A \text{ seno } b$
- 3) $\text{tangente } a = \text{coseno } B \text{ tangente } c$
- 4) $\text{coseno } c = \text{coseno } b \text{ coseno } a$
- 5) $\text{coseno } A = \text{seno } B \text{ coseno } a$
- 6) $\text{seno } b = \text{seno } B \text{ seno } c$
- 7) $\text{tangente } b = \text{tangente } B \text{ seno } a$
- 8) $\text{tangente } b = \text{coseno } A \text{ tangente } c$
- 9) $\text{coseno } c = \text{cotangente } A \text{ cotangente } B$
- 10) $\text{coseno } B = \text{seno } A \text{ coseno } b$

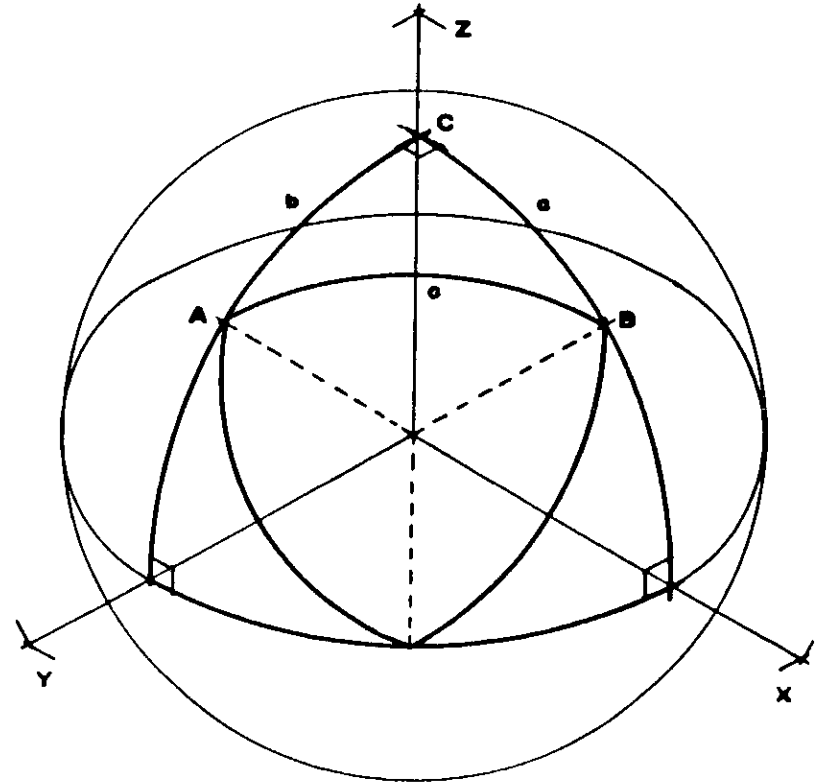


Figura 14 Triángulos esféricos rectángulos.

TRIÁNGULOS ESFÉRICOS OBLICUÁNGULOS.

Es un triángulo esférico tal que ninguno de sus ángulos es recto (figura 15).

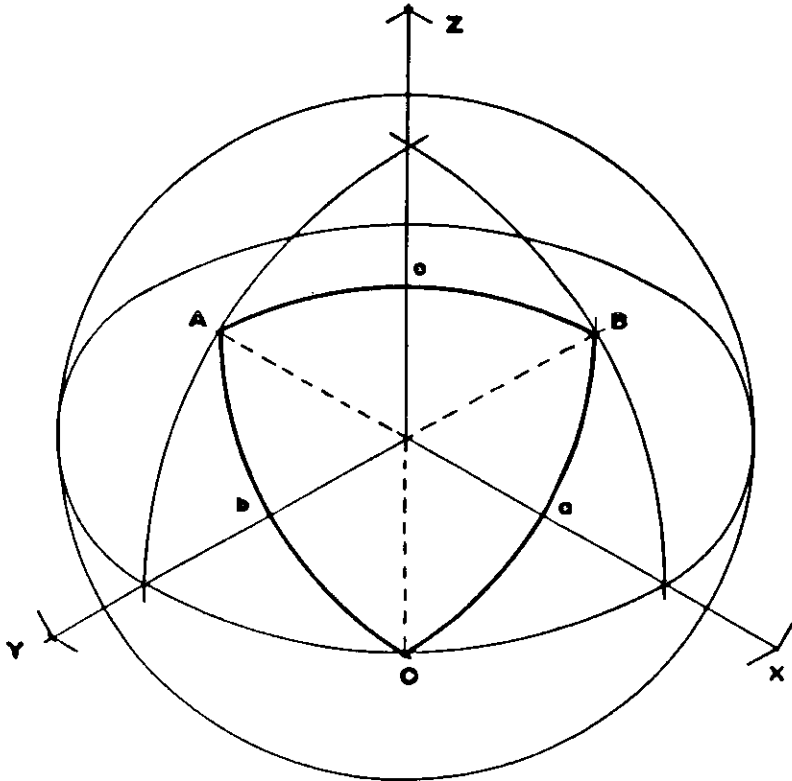


Figura 15 Triángulos esféricos oblicuángulos.

Un triángulo esférico oblicuángulo queda determinado cuando se conocen tres cualesquiera de sus elementos, excepto en los 6 casos posibles de ambigüedad.

CASO I Dados los tres lados .

CASO II Dados los tres ángulos.

CASO III Dados dos lados y el ángulo comprendido.

CASO IV Dados dos ángulos y el lado comprendido.

CASO V Dados dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos

CASO VI Dados dos ángulos y un lado opuesto a uno de ellos

CASO I Dados los tres lados

$$s = \frac{1}{2} (a+b+c)$$

$$\text{tangente } r = \sqrt{\frac{\text{seno } (s-a) \text{ seno } (s-b) \text{ seno } (s-c)}{\text{seno } s}}$$

$$\text{tangente } \frac{1}{2} A = \frac{\text{tangente } r}{\text{tangente } (s-a)}$$

$$\text{tangente } \frac{1}{2} B = \frac{\text{tangente } r}{\text{tangente } (s-b)}$$

$$\text{tangente } \frac{1}{2} C = \frac{\text{tangente } r}{\text{tangente } (s-c)}$$

CASO II Dados los tres ángulos

$$S = \frac{1}{2}(A+B+C)$$

$$\text{tangente } R = \sqrt{\frac{\text{seno } (S-A) \text{ seno } (S-B) \text{ seno } (S-C)}{\text{seno } S}}$$

$$\text{tangente } \frac{1}{2} a = \frac{\text{tangente } R}{\text{tangente } (S-A)}$$

$$\text{tangente } \frac{1}{2} b = \frac{\text{tangente } R}{\text{tangente } (S-B)}$$

$$\text{tangente } \frac{1}{2} c = \frac{\text{tangente } R}{\text{tangente } (S-C)}$$

CASO III Dados dos lados y el ángulo comprendido.

$$\tan \frac{1}{2}(A+C) = \coseno \frac{1}{2}(a-c) \secante \frac{1}{2}(a+c) \cotangente \frac{1}{2} B$$

$$\tan \frac{1}{2}(A-C) = \text{seno } \frac{1}{2}(a-c) \text{ cosecante } \frac{1}{2}(a+c) \cotangente \frac{1}{2} B$$

$$\tan \frac{1}{2} b = \text{tangente } \frac{1}{2}(a-c) \text{ seno } \frac{1}{2}(A+C) \text{ cosecante } \frac{1}{2}(A-C)$$

CASO IV Dados dos ángulos y el lado comprendido.

$$\tan \frac{1}{2}(b+a) = \coseno \frac{1}{2}(B-A) \secante \frac{1}{2}(B+A) \text{ tangente } \frac{1}{2} c$$

$$\tan \frac{1}{2}(b-a) = \text{seno } \frac{1}{2}(B-A) \text{ cosecante } \frac{1}{2}(B+A) \text{ tangente } \frac{1}{2} c$$

$$\cotangente \frac{1}{2} C = \text{seno } \frac{1}{2}(b+a) \text{ cosecante } \frac{1}{2}(b-a) \tan \frac{1}{2}(B-A)$$

CASO V Dados dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos

$$\text{seno } C = \text{seno } c \text{ cosecante } a \text{ seno } A$$

$$\cotangente \frac{1}{2} B = \text{seno } \frac{1}{2}(c+a) \text{ cosecante } \frac{1}{2}(c-a) \tan \frac{1}{2}(C-A)$$

$$\tan \frac{1}{2} b = \text{seno } \frac{1}{2}(C+A) \text{ cosecante } \frac{1}{2}(C-A) \text{ tangente } \frac{1}{2}(c-a)$$

CASO VI Dados dos ángulos y un lado opuesto a uno de ellos.

$$\text{seno } b = \text{seno } B \text{ cosecante } A \text{ seno } a$$

$$\tan \frac{1}{2} c = \text{seno } \frac{1}{2}(B+A) \text{ cosecante } \frac{1}{2}(B-A) \text{ tangente } \frac{1}{2}(b-a)$$

$$\cotangente \frac{1}{2} C = \text{seno } \frac{1}{2}(b+a) \text{ cosecante } \frac{1}{2}(b-a) \tan \frac{1}{2}(B-A)$$

1.0.6 LONGITUD DE ARCO

Determina la longitud de un arco en una circunferencia el radio r y el ángulo central θ en radianes (figura 16).

$la = r \theta$; $n =$ número de grados ; $la =$ longitud de arco

Al convertir radianes a grados tenemos :

$$1 \text{ grado} = \left(\frac{\pi}{180} \right) \text{radianes} ; \quad la = r n \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

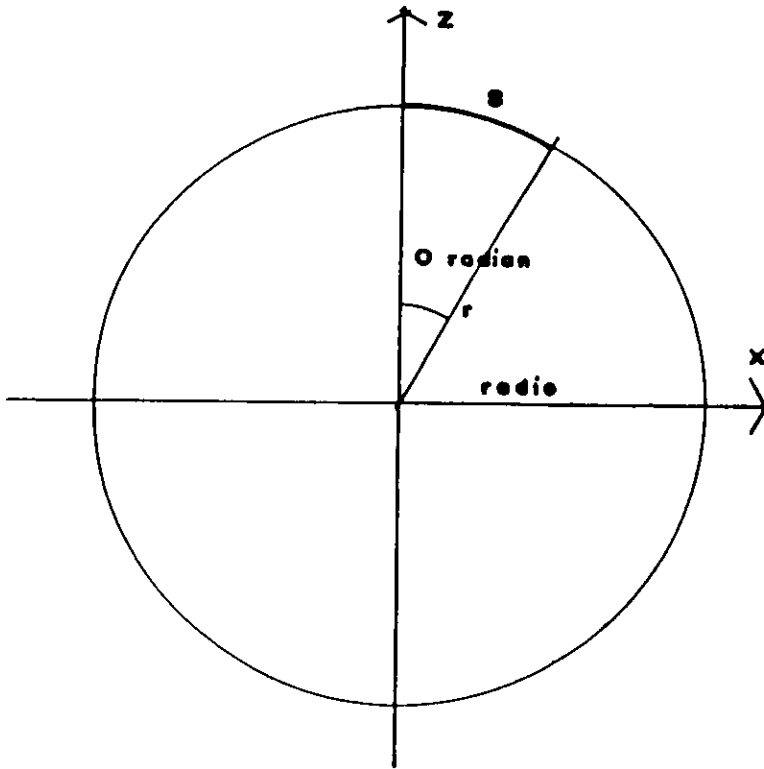


Figura 16 Longitud de arco.

1.0.7 LA ELIPSE COMO FIGURA PROYECTADA

Si una circunferencia se proyecta ortogonalmente en un plano que la corte según un diámetro, la proyección de la ordenada de un punto cualquiera de la circunferencia es igual a esa ordenada multiplicada por el coseno del ángulo plano del diedro formado por el plano de la circunferencia y el de proyección (figura 17).

$$PM' = PM \coseno \theta ; \quad \text{o sea } yp = zI \frac{a}{b} ; \quad a = r \text{ seno } \phi$$

$$PM' = yp = \frac{yp^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Que es la ecuación de la elipse, luego la proyección ortogonal de una circunferencia es una elipse.}$$

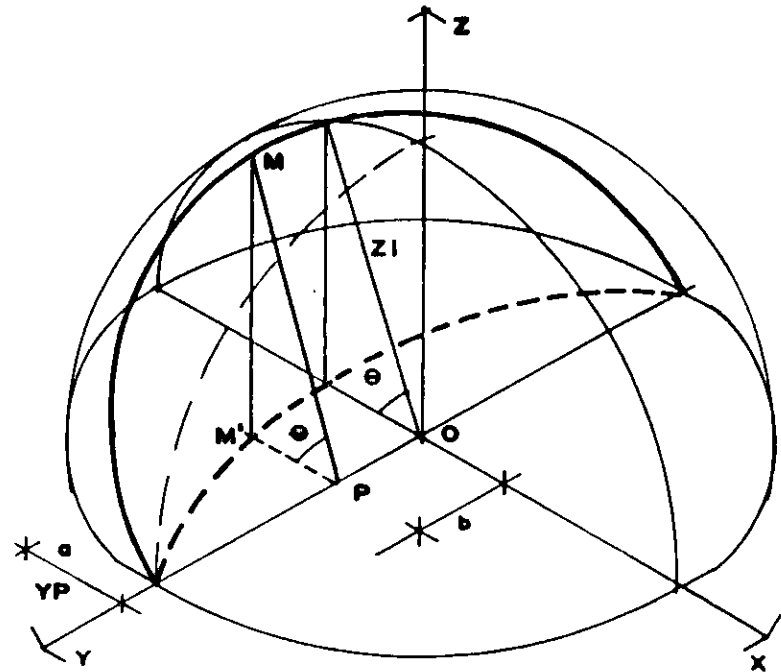


Figura 17 Elipse como figura proyectada

1.0.8 ROTACIÓN DE EJES COORDENADOS.

En una transformación de rotación de un objeto, se debe designar un eje de rotación en torno al cual se hará girar el objeto y la cantidad de rotación angular, adoptando el convencionalismo de que las rotaciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj son positivos.

Las ecuaciones de rotación del eje X son (figura 18):

$$y' = y \cos \theta - z \sin \theta$$

$$z' = y \sin \theta + z \cos \theta$$

$$x' = x$$

En forma de coordenada homogénea se expresan como

$$(x', y', z', 1) = (x, y, z, 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

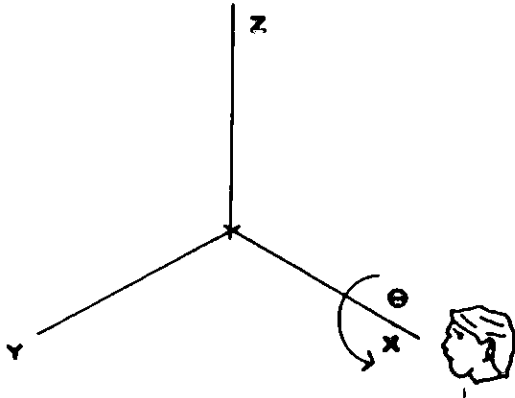


Figura 18 Rotación de eje X

Las ecuaciones de rotación del eje Y son (figura 19):

$$z' = z \cos \phi - x \sin \phi$$

$$x' = z \sin \phi + x \cos \phi$$

$$y' = y$$

En forma de coordenada homogénea se expresan como :

$$(x', y', z', 1) = (x, y, z, 1) \begin{vmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

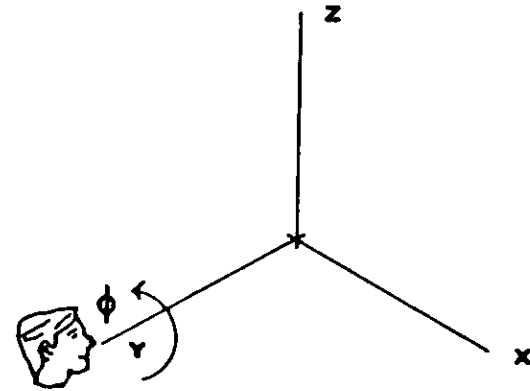


Figura 19 Rotación de eje Y

Las ecuaciones de rotación del eje Z son (figura 20):

$$x' = x \cos \omega - y \sin \omega$$

$$y' = x \sin \omega + y \cos \omega$$

$$z' = z$$

En forma de coordenada homogénea se expresan como :

$$(x', y', z', 1) = (x, y, z, 1) \begin{vmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

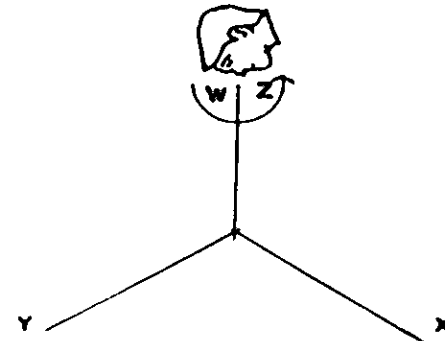


Figura 20 Rotación de eje Z

Una matriz de rotación inversa se forma sustituyendo el ángulo de rotación (+) por (-), es decir podemos calcular de cualquier matriz de rotación R mediante la evaluación de su transpuesta. $R^{-1} = R^t$

1.0.9 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS RECTANGULARES

Es la operación de mover los ejes coordenados a una nueva posición haciéndolos girar en torno del origen como punto fijo de tal manera que los nuevos ejes permanezcan mutuamente perpendiculares entre si y análogamente dirigidos uno con respecto al otro (figura 21) .

los ejes originales X, Y, Z , toman las nuevas posiciones especificadas por los ejes X', Y', Z' , respectivamente .

Designamos con (X, Y, Z) y (X', Y', Z') las coordenadas de un punto cualquiera P del espacio referido a los ejes originales y a los nuevos ejes .

Denotamos por $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$, los ángulos directores de los ejes X', Y', Z' , referidos a los ejes originales .

EJE	X	Y	Z	
X'	a_1	a_2	a_3	**
Y'	b_1	b_2	b_3	
Z'	c_1 ***	c_2	c_3	

**ángulos directores de los nuevos ejes con respecto a los ejes originales

*** ángulos directores de los ejes originales con respecto a los nuevos ejes.

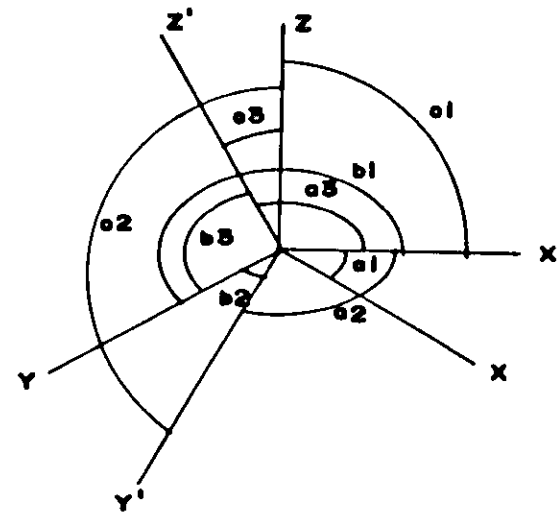


Figura 21 Transformación de coordenadas rectangulares

1.1.0 DESARROLLABILIDAD DE LA SUPERFICIE

La esfera se ha llamado forma o cuerpo perfecto por sus propiedades universales de simetría; polar, axial o planar en relación con su centro, es el cuerpo de revolución por excelencia al ser la superficie generada por un círculo que gira alrededor de uno cualquiera de sus diámetros.

La desarrollabilidad de este género de superficies, no debe entenderse en los términos del teorema de la desarrollabilidad "En una superficie cuando dos de sus generatrices infinitamente próximas determinan un plano", pues según él no son desarrollables, ya que resulta imposible construir un plano tangente a todo lo largo de una de sus generatrices; un plano es tangente a estas superficies en un punto y solo en uno.

Por diversas necesidades, se ha logrado estudiar las posibilidades de desarrollo de este género de superficies; tomando como base, el que una superficie cualquiera es semejante en elementos diferenciales, a planos tangentes a ella, o bien a superficies desarrollables, en las zonas en que éstas sean tangentes a las superficies en estudio.

Debido a eso se exponen tres formas de desarrollo de la esfera como son:

- 1.1.1 Por conos tangentes
- 1.1.2 Por cilindros tangentes
- 1.1.3 Por husos esféricos

1.1.1 Desarrollo por conos tangentes.- Podemos suponer en este caso, que la esfera se envuelva en una serie de conos de revolución tangentes a ella, cuyos ejes coinciden con el eje de la esfera (figura 22).

Cada uno de estos conos será tangente a la esfera, alrededor de un círculo paralelo y según el principio general de tangencia, lo será a dos círculos paralelos infinitamente próximos; entre los cuales podemos suponer que la esfera se identifica con un tronco infinitamente estrecho de ese cono tangente.

Esta serie de conos tendrá como límites extremos los planos tangentes a los polos de la esfera, en tanto al centro se convierten en un cilindro tangente a su ecuador.

Los conos disminuyen de altura a medida que sus correspondientes círculos de tangencia se acercan al polo, hasta llegar a ser un plano tangente a la esfera en ese punto aumentándola en cambio a medida que se acercan al ecuador, hasta el límite en que las generatrices llegan a ser paralelas, resultando de esto un cilindro tangente a la línea ecuatorial.

Al estudiar el desarrollo apartir de la monea de una esfera (figura 23), construiremos sólo el desarrollo de un hemisferio, entendiendo que el otro, es igual y simétrico respecto al ecuador.

Procedimiento de obtención.

Datos: meridiana principal MM' , ecuador EE' y centro oo' .
1º Divídase la proyección M' en un número cualquiera de partes iguales $1'2'3'p'$.

2º Trácese las tangentes a la meridiana M' en los puntos $1'2'3'p'$ en que fue dividida. Estas tangentes cortan al eje.

La tangente en $1'$ es paralela al eje, siendo meridiana principal del cilindro tangente al ecuador; la tangente en $2'$ corta al eje en $V2$; la tangente en $3'$ lo corta en $V3$ y finalmente la tangente en p' , es proyección íntegra del plano tangente en el polo.

Las tangentes descritas, se cortan dos a dos en puntos $a'b'c'$; los planos horizontales que pasan por esos puntos, contienen a los círculos paralelos en que se cortan los conos y limitan los troncos de cada uno de ellos.

3º Determínese las proyecciones horizontales de estos círculos que tendrán como centro común la proyección o del eje de la esfera y cuyos radios $r1 r2 r3$ son respectivamente las distancias del centro o a las proyecciones abc , de los puntos donde se cortan las tangentes.

4º Procédase al desarrollo de los troncos de cono envolventes de la esfera (figura 24).

a) Desarróllese la línea del ecuador cuya transformada será una recta de longitud $2\pi r1$, sección recta del cilindro tangente al ecuador; trácese una recta perpendicular a la anterior en su punto medio 1 y llévese sobre ella a uno y otro lado de 1 , distancias $1A$ y $1A'$, iguales a $1'a'$, estas

dos dimensiones determinan un rectángulo que es desarrollo del cilindro.

b) Sobre la perpendicular central, tómesese distancias **AV2**, igual a **a'V2** y **BV2** igual a **b'V2**; con estas distancias como radio y centro en **V3**, trácense arcos de círculo comprendidos dentro de un sector circular cuyo ángulo central $\alpha = 360^\circ r1 / AV2$; el sector será desarrollo del primer cono y la faja comprendida entre los dos arcos es la correspondiente al tronco de cono.

c) Sobre la misma perpendicular central, tómesese distancias **BV3** igual a **b'V3** y **CV3** a **c'V3**, haciendo centro en **V3**, trácense arcos de círculos con radios **V3B** y **V3C**, con una amplitud de ángulo central $\beta = 360^\circ r3 / BV3$, la faja comprendida entre los arcos, es transformada del segundo tronco de cono.

d) Finalmente el círculo tangente al polo, está determinado por el radio **r3** igual a la distancia **p'c'**; trasládese ésta a **CP** sobre la misma perpendicular central del desarrollo y trácense el círculo de centro **P** y radio **r3**.

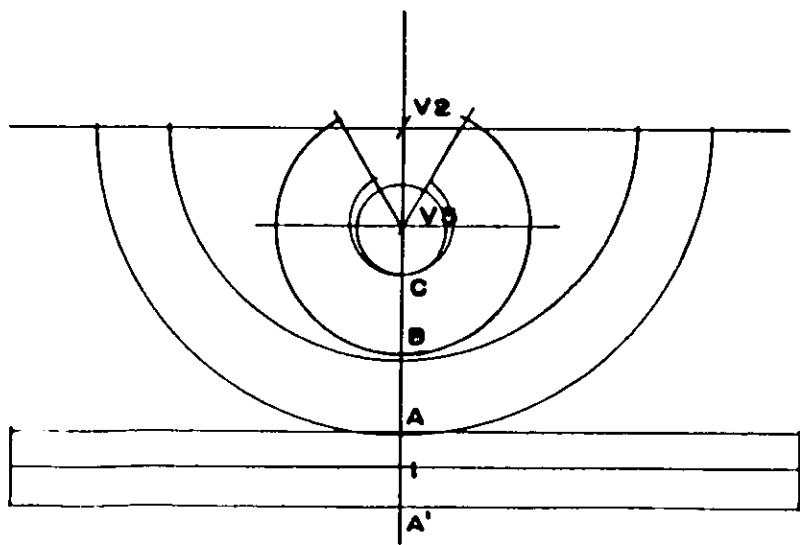


Figura 22 Desarrollo por conos tangentes.

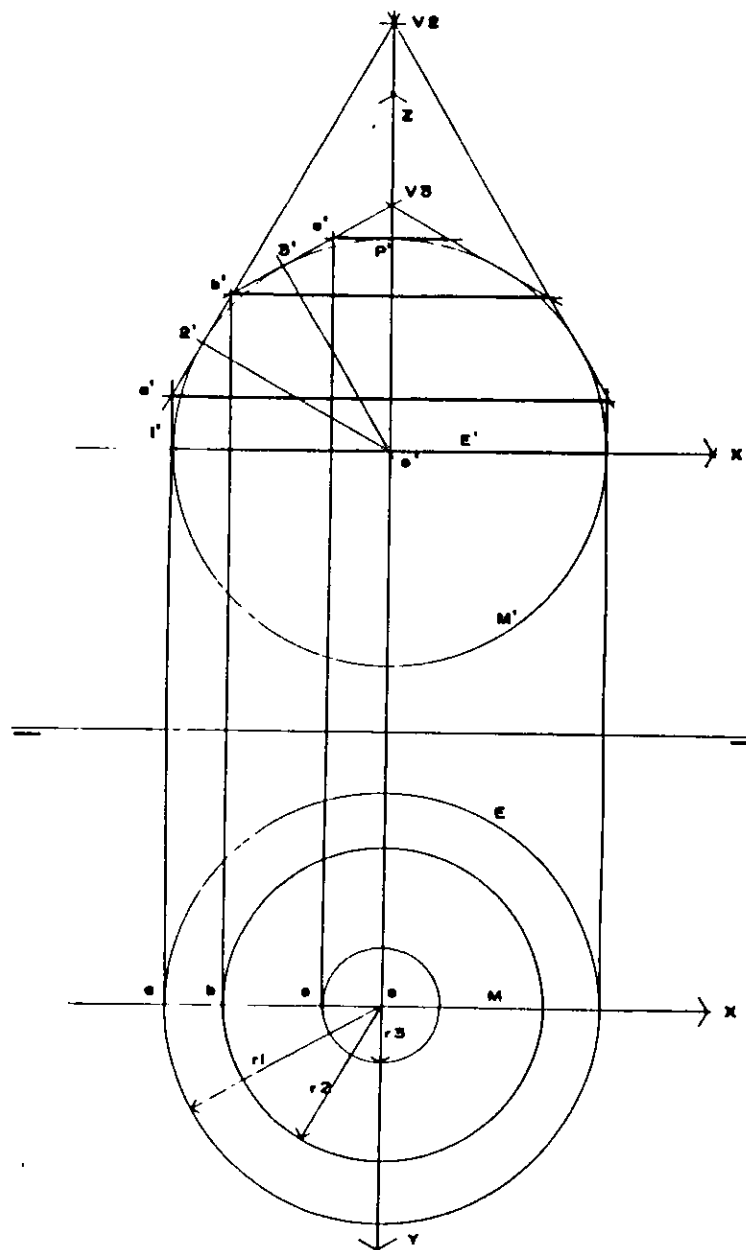


Figura 23 Montea de una esfera.

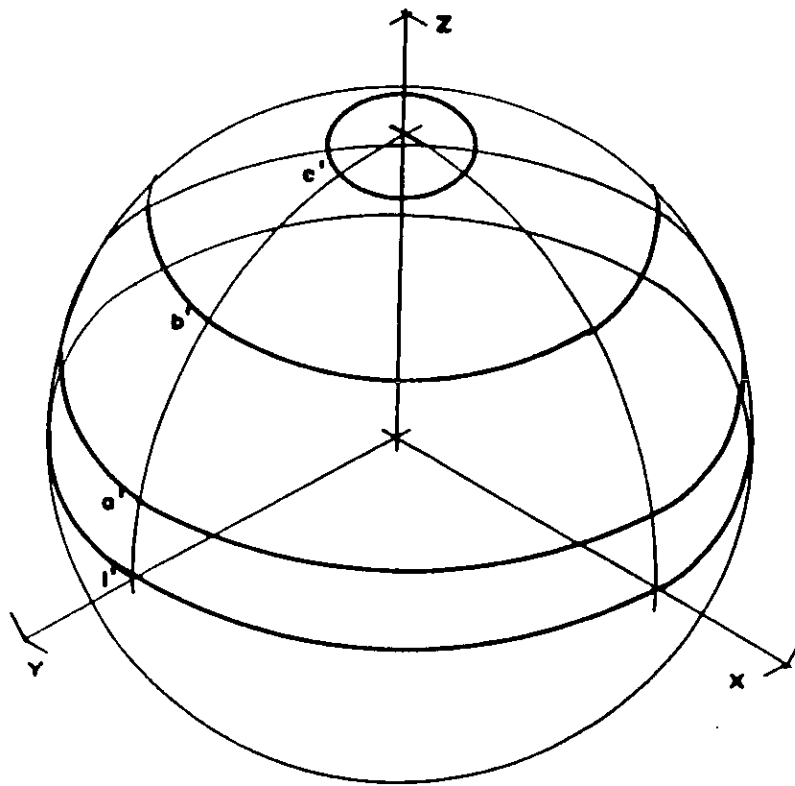


Figura 24 Isométrico del desarrollo por conos tangentes.

1.1.2 Desarrollo por cilindros tangentes - Este procedimiento parte de la hipótesis de que un cilindro es tangente a una esfera alrededor de un círculo meridiano; siéndolo también por tanto al infinitamente próximo; es decir, que en una zona infinitamente angosta, comprendida entre dos meridianos, la superficie esférica puede considerarse cilíndrica.

Este segmento de superficie esférica comprendida entre dos meridianos, se llama huso esférico y tiene una amplitud máxima en el ecuador, estrechándose gradualmente hasta reducirse a un punto en el polo, lugar donde se cortan todas las meridianos.

Procedimiento de obtención.

Vamos a construir esta forma de desarrollo, partiendo de la monea de una esfera (figura 25), tenemos como datos, meridiana principal MM' , ecuador EE' , centro oo' y radio r .

1º Divídase la esfera mediante planos meridianos, en husos razonablemente angostos; para lo cual, en monea se divide la proyección horizontal E del ecuador en partes preferiblemente iguales y simétricas, mediante diámetros que son proyecciones íntegras de los planos meridianos.

Tales diámetros cortan al ecuador E en los puntos **1,2,3,.....11,12,1**.

2º Complétese la monea, obteniendo las proyecciones verticales de las meridianas que determinan esos planos; éstas serán elipses que tienen en común, el diámetro vertical de la esfera como eje mayor; en tanto sus ejes menores, quedan determinados por las proyecciones de los cortes, que los respectivos planos producen en la proyección horizontal del ecuador.

3º Para construir el desarrollo, extiéndase la línea del ecuador, que se transforma en una recta de longitud $2\pi r$ (figura 26) y divídase en el mismo número de partes iguales **1,2,3,.....11,12,1**; en que se dividió el ecuador de la monea; señálense también los puntos medios de cada una de esas divisiones.

4º Levántense en dichos puntos medios, rectas perpendiculares a la transformada del ecuador es decir πr en su longitud total

5º Cada huso quedará limitado por dos arcos de círculo, que pasen por los puntos extremos de su meridiana central y por los que en el ecuador definen su anchura

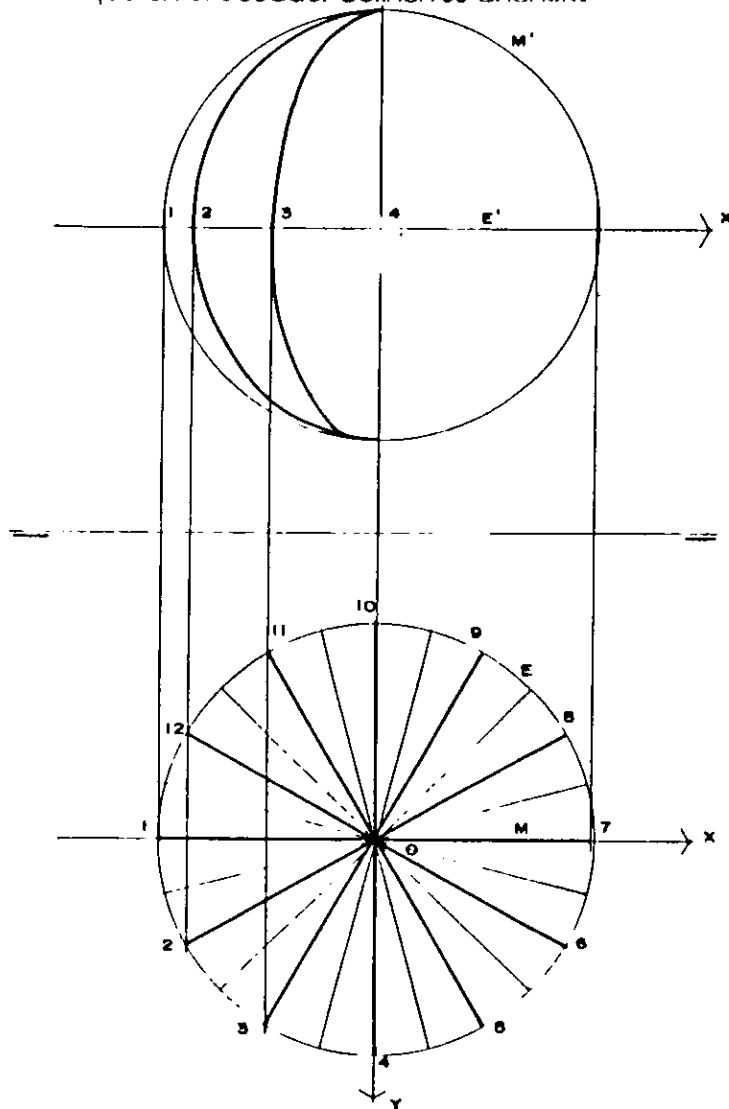


Figura 25 Montea de la esfera

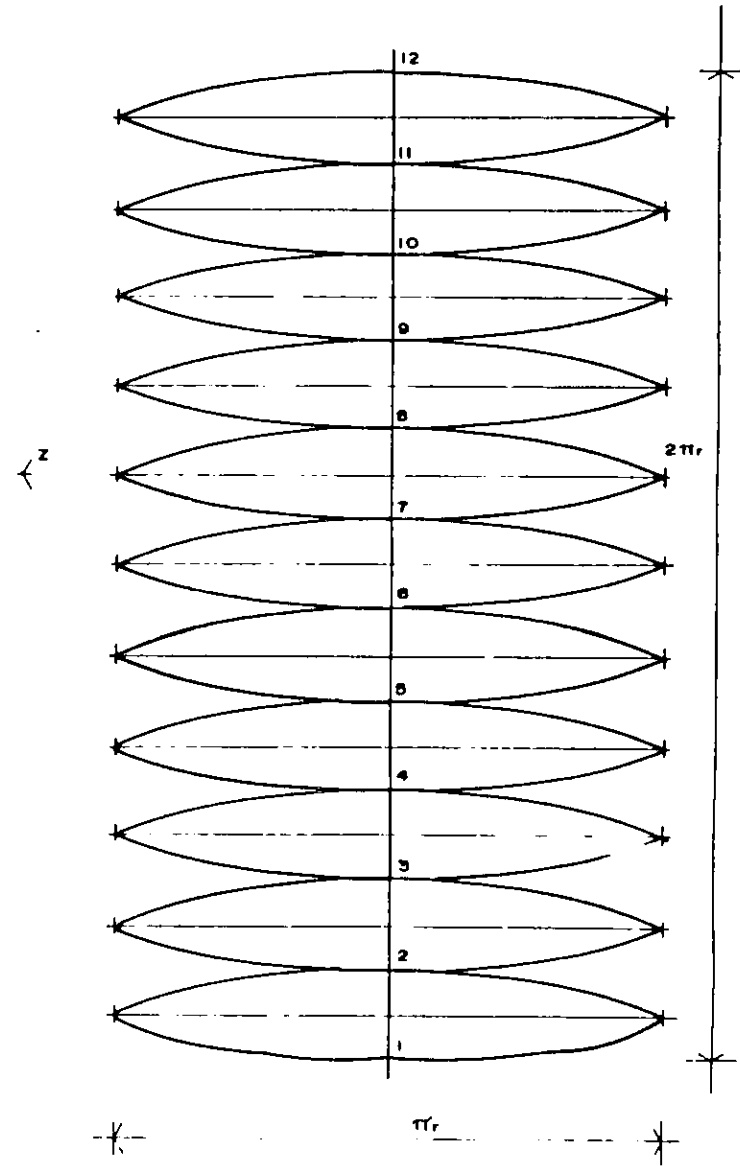


Figura 26 Desarrollo por cilindros tangentes.

1.1.3 Desarrollo por Husos esféricos .- basado en el de husos pero que elimina de éstos, las partes extremas conservando solamente las centrales de máxima anchura.

Este procedimiento parte de dividir la esfera en seis cuadrados esféricos iguales, a manera de las caras de un cubo, los vértices de dichos cuadrados esféricos, son los del cubo inscrito en la esfera.

Para obtener la división de la esfera en seis cuadrados iguales .

1° Tórnense tres ejes de la esfera perpendiculares entre sí (figura 27); tales serán : **a'b'**, **ab** el eje vertical de la esfera y otros dos contenidos en el plano del ecuador **c'd' c d** , fronto horizontal y **e'f' ef**, de punta ; los tres ejes pasan por el centro de la esfera, determinando tres planos perpendiculares entre sí, que la dividen en cuadrantes.

2° Córtese la esfera por seis círculos que bisequen los cuadrados en que se ha dividido , tomando como polos para esta división los extremos de los ejes descritos.

Con el eje **a'b' ab**, se construyen los círculos que bisecan los cuadrantes formados por el plano de perfil **a'o'f' aof** y el frontal **a'o'd'** . Estos círculos tienen como proyección horizontal los diámetros del ecuador **1234**; sus proyecciones verticales serán las elipses **a'1'b'2'a'** y **a'3'b'4'a'** que se sobreponen.

Con el eje **e'f'ef**, se construyen los círculos bisectores de los cuadrantes comprendidos entre los planos **a'o'f' aof** de perfil y **f'o'd' fod** horizontal.

Los dos círculos correspondientes, tienen como proyección vertical los diámetros **5'6'** y **7'8'** de la meridiana principal, proyectándose en la horizontal en las elipses sobrepuestas **e5f6e** y **e7f8e**.

Con el eje **c'd' cd**, se construyen los bisectores de los cuadrantes entre los planos **a'o'd' aod** frontal **f'o'd' fod** horizontal.

Tales círculos tendrán sus dos proyecciones en elipses iguales a las anteriores, construidas con el eje mayor **c'd'** en proyección vertical y **cd** en la horizontal , siendo sus ejes menores **9'10' 910 11'12' 1112** , nótese que las seis elipses

proyecciones de los círculos bisectores, se cortan dos a dos en los puntos **l'l m'm n'n p'p q'q r'r s's t't**.

3° Divídase cada uno de los cuadrados en husos , mediante meridianas que partan de los dos polos, que definen los círculos que los limitan, la división de uno solo de los cuadrados; éste se parte en tres husos por planos verticales concurrentes en el eje **a'b'ab**, que corten al ecuador en **x'x y'y**, limitándose los cortes por esos planos en puntos **u'u v'v**, dentro del área que cubre el cuadrado; señalándose también los puntos medios de esos husos **wfz** en la línea del ecuador **yhjk** en los extremos superior e inferior de los lados del cuadrado.

4° Extiéndase el segmento **4f2** del ecuador en una línea recta **4F2** (figura 28) de longitud $\pi/2$ y llévense sobre ella los puntos **XYZFW** con las distancias que se obtienen de la montea, en los puntos **xyzfw** de la proyección horizontal son distancias iguales en el ecuador.

En los puntos centrales de los husos **ZFW** levántese perpendiculares a la transformada **4F2** y constrúyanse los husos como en el desarrollo por cilindros tangentes obténgase ahora las longitudes de las líneas **zmkyvfj** en verdadera magnitud, para lo cual se trasladan en proyección vertical, mediante paralelas a **lt** hasta la meridiana principal, lo que equivale a girarlas una a una hasta su posición frontal; de este modo, se miden los arcos **d'ml'd'kl'd'vl'd'fl'**, trasladándose respectivamente a **2M ZK YV FJ**, nótese que **YV** se mide sobre los lados adyacentes de dos husos contiguos, que son una misma meridiana.

Las distancias **4L ,WH,XV**, son simétricas de las anteriores , respecto de la línea central **FJ**.

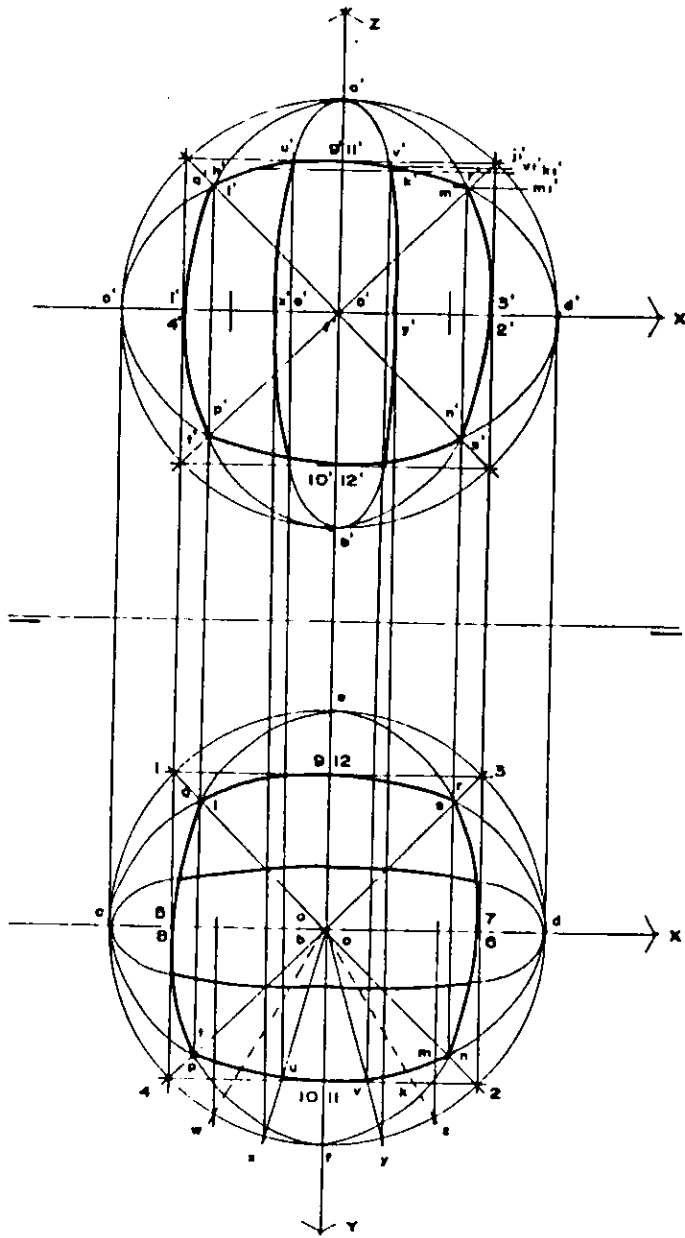


Figura 27 Montea de la esfera

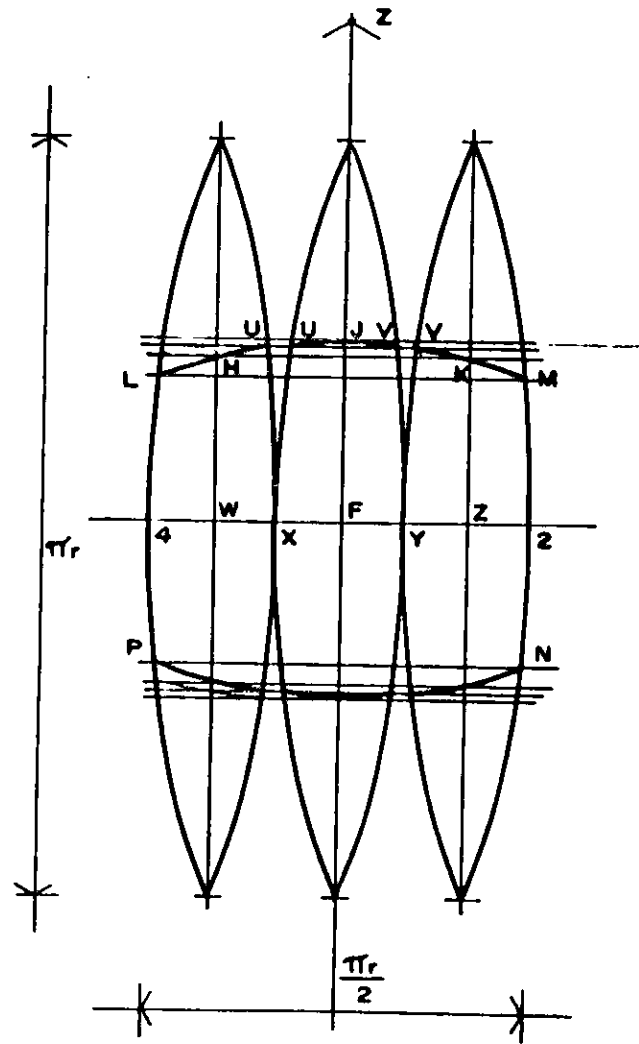


Figura 28 Desarrollo por Husos esféricos.

1.2.0 LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS ESFÉRICOS.- Si tratamos de obtener superficies esféricas dividiendo a la esfera, nos encontramos que en el amplio campo del universo solamente podemos dividirla de dos formas que son :

- 1) Circunscribiéndola a los poliedros regulares Platónicos
- 2) Circunscribiéndola a los poliedros semiregulares Arquimedianos.

Ambos llamados en honor a sus descubridores Platón y Arquímedes, sólidos Platónicos y sólidos Arquimedianos respectivamente.

Los sólidos Platónicos esféricos son :

- a) Tetraedro esférico
- b) Hexaedro esférico
- c) Octaedro esférico
- d) Dodecaedro esférico
- e) Icosaedro esférico.

Cada uno de estos sólidos se le conocen como regulares por que todas sus caras 4,6,8,12,20 respectivamente están compuestos por triángulos esféricos rectángulos u oblicuángulos iguales.

Los sólidos Arquimedianos los podemos dividir en trece , aunque once de ellos pueden obtenerse muy fácilmente partiendo de los cinco sólidos Platónicos, finalmente su única variante es que se componen de varias caras de 2 o 3 tipos , cada cara puede dividirse en triángulos esféricos rectángulos u oblicuángulos, al igual que los sólidos Platónicos , ante eso preferimos abocarnos a la obtención de la geometría de los sólidos Platónicos esféricos, ya que pudiendo resolver estos, también se pueden resolver los sólidos Arquimedianos aunque claro con mayor complejidad.

El análisis de uno de los sólidos puede hacerse también invariablemente con dos tipos de métodos como son :

- 1) Descriptivamente
- 2) Analíticamente.

1) Descriptivamente lo podemos analizar utilizando la geometría descriptiva para obtener las aristas y los vértices de la superficie esférica circunscrita en los poliedros regulares.

2) Al abocarnos solamente a resolver analíticamente los sólidos Platónicos esféricos nos encontramos con la incógnita ¿ que obtener y para que nos puede servir ?, por eso concluimos que, las coordenadas rectangulares nos sirve para dibujar la montea triplanar **XY, YZ, XZ** y las perspectivas de estos planos llamándolos **XOYO, YOZO y XOZO**; las coordenadas esféricas r podemos utilizarlo para controlar la colocación de casetones, ϕ y θ para calcular los esfuerzos ; las propiedades geométricas como los **lados** nos sirve para el ángulo de corte de las nervaduras , las **cuerdas** para obtener la longitud de las nervaduras y los **ángulos** para el trazo de la pieza que nos servirá como cubierta.

Una vez obtenida la geometría con todos los datos necesarios de los sólidos Platónicos tenemos el dilema, de como representarlos debido a que si de cada uno de ellos representamos todos sus datos, tendríamos datos y datos que no nos simplificaba en nada los ejemplos, por eso se tomó la decisión de plasmar algo únicamente representativo de cada uno de los sólidos Platónicos que contenga únicamente los datos necesarios antes descritos, al esquematizar estos datos en una gráfica se nos presenta el problema de que para una mejor visión de una de las caras de cada sólido Platónico es necesario dibujar según convenga ya sea el plano **IX, IY, IZ, XY, XZ** del tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, de esta manera creo que los ejemplos representativos quedan descritos con bastante claridad.

b) Hexaedro esférico.- Para trazar la monea del hexaedro inscrita en una superficie esférica se deberán realizar los pasos siguientes (figura 30):

Datos: Meridiana principal MM' , ecuador EE' , centro OO' y radio rr' .

1º Ubíquese el polo en el eje Z de el plano vertical y como centro del mismo el origen de la esfera OO' .

2º Trazar en el plano horizontal con centro en el origen O de la esfera una recta 45° respecto al meridiano principal M en donde se cruce con el ecuador E ubíquese los vértices $1,5$, los referimos al plano vertical donde se cruzan con el meridiano principal M' , ubicamos los vértices $1'5'$.

3º Trazar en el plano horizontal con centro en el origen O de la esfera una recta 135° respecto al meridiano principal M en donde se cruce con el ecuador E ubíquese los vértices $2,6$, los referimos al plano vertical donde se cruzan con el meridiano principal M' , ubicamos los vértices $2'6'$.

4º Trazar en el plano horizontal con centro en el origen O de la esfera una recta 225° respecto al meridiano principal M en donde se cruce con el ecuador E ubíquese los vértices $3,7$, los referimos al plano vertical donde se cruzan con el meridiano principal M' , ubicamos los vértices $3'7'$.

5º Trazar en el plano horizontal con centro en el origen O de la esfera una recta 315° respecto al meridiano principal M en donde cruce con el ecuador E ubíquese los vértices $4,8$, los referimos al plano vertical donde se cruzan con el meridiano principal M' , ubicamos los vértices $4'8'$.

6º Ubíquese una de las aristas en verdadera forma y magnitud o sea el segmento $5'6'$.

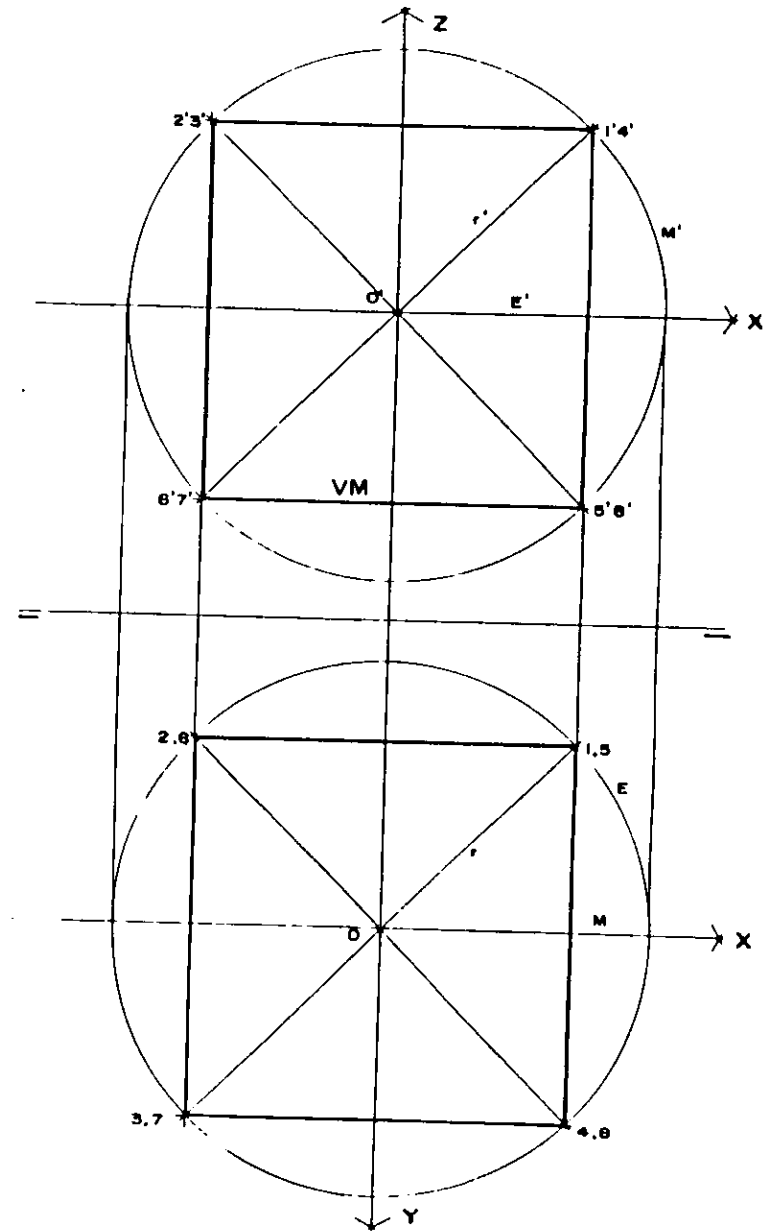


Figura 30 Monea del hexaedro esférico.

c) **Octaedro esférico.**- Al trazar la montea del octaedro inscrito en una superficie esférica deberán realizarse los siguientes pasos (figura 31):

Datos: Meridiana principal MM' , ecuador EE' , centro OO' y radio rr' .

1° Ubíquese el polo en el eje Z de el plano vertical y defina el primer vértice en el punto $1'$ donde cruza al meridiano M' con el eje Z , referimos este vértice a la meridiana M del plano horizontal para localizar el vértice 1 .

2° Referimos al polo contrario del ubicado para el vértice $1'$ en el cruce del meridiano M' con el eje Z ubicamos el vértice $2'$, referimos este punto al plano horizontal en el cruce con el meridiano M localizamos al vértice 2 .

3° Trazar en el plano horizontal con centro en el origen O de la esfera una recta 45° respecto al meridiano principal M en donde se cruce con el ecuador E ubíquese el vértice 3 , lo referimos al plano vertical donde se cruzan con el ecuador E' , ubicamos el vértice $3'$.

4° Trazar en el plano horizontal con centro en el origen O de la esfera una recta 135° respecto al meridiano principal M en donde se cruce con el ecuador E ubíquese el vértice 4 , lo referimos al plano vertical donde se cruzan con el ecuador E' , ubicamos el vértice $4'$.

5° Trazar en el plano horizontal con centro en el origen O de la esfera una recta 225° respecto al meridiano principal M en donde se cruce con el ecuador E ubíquese el vértice 5 , lo referimos al plano vertical donde se cruzan con el ecuador E' , ubicamos el vértice $5'$.

6° Trazar en el plano horizontal con centro en el origen O de la esfera una recta 315° respecto al meridiano principal M en donde se cruce con el ecuador E ubíquese el vértice 6 , lo referimos al plano vertical donde se cruzan con el ecuador E' , ubicamos el vértice $6'$.

7° Ubíquese una de las aristas en verdadera forma y magnitud o sea la recta $1'5'$.

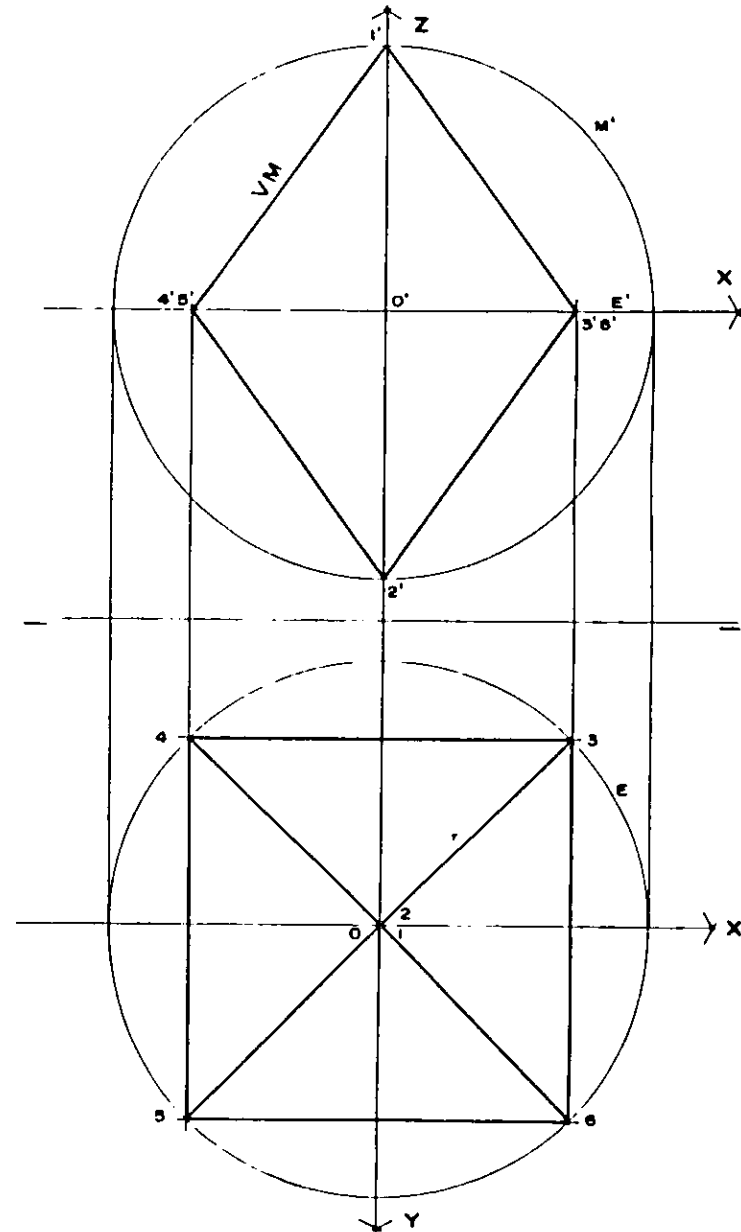


Figura 31 Montea del octaedro esférico

d) **Dodocaedro esférico** .-Al trazar la montea del dodecaedro inscrito en una superficie esférica se deberán realizar los siguientes pasos(figura 32).

Datos: Meridiana principal **MM'** , ecuador **EE'** , centro **OO'** y radio **rr'** .

1º Ubíquese el polo en el eje **Z** de el plano vertical y como centro del mismo el origen de la esfera los puntos **OO'** .

2º Divídase la esfera en el plano vertical mediante un plano meridiano a 36° respecto al eje **Z** , en el punto donde se cruza con la meridiana **M** localizamos el vértice **1'** , lo referimos a la meridiana **M** del plano horizontal donde ubicamos el vértice **1** trazamos un círculo paralelo con radio **o,1** .

3º Divídase la esfera en el plano horizontal mediante 5 planos meridianos a 72° respecto al eje **X** , tomando al vértice **1** como punto de inicio, en el cruce de las divisiones con el círculo paralelo de radio **o,1** obtenemos los vértices **2,3,4,5** .

4º Referimos los puntos **2,3,4,5** al plano vertical y en el cruce con la paralela trazada respecto al ecuador **E** a partir del vértice **1'** , obtenemos los vértices **2'3'4'5'** .

5º Divídase en plano horizontal mediante 10 planos meridianos iguales al ecuador **E** con centro en el origen **O** .

6º Trazar en el Plano Vertical respecto al eje **Z** con centro en el origen una meridiana a 77° en el punto donde se cruza con la meridiana **M'** localizamos el vértice **6'** , referimos ese punto al Plano Horizontal en el meridiano **M** localizamos el vértice **6** , con centro en el origen y como radio el segmento **O6** trazamos un círculo en los puntos donde se cruza con las 10 divisiones iguales ubicamos los vértices **7,8,9,10,11,12,13,14,15** , referimos los puntos al plano vertical para ubicar los puntos **11'12'13'14'** .

7º Localizamos una de las aristas en verdadera forma y magnitud o sea el segmento **1'6'** .

8º trazamos al vértice **1'6'** una perpendicular a su centro, pasando por el origen **o'** referimos los vértices **13,14** a la perpendicular trazada para ubicar los vértices **13'14'** .

8º Referimos el vértice **11** al meridiano **M'** , ubicar vértice **11'** .

9º referimos el vértice **12** a la arista **4'11'** , ubicar vértice **12'** .

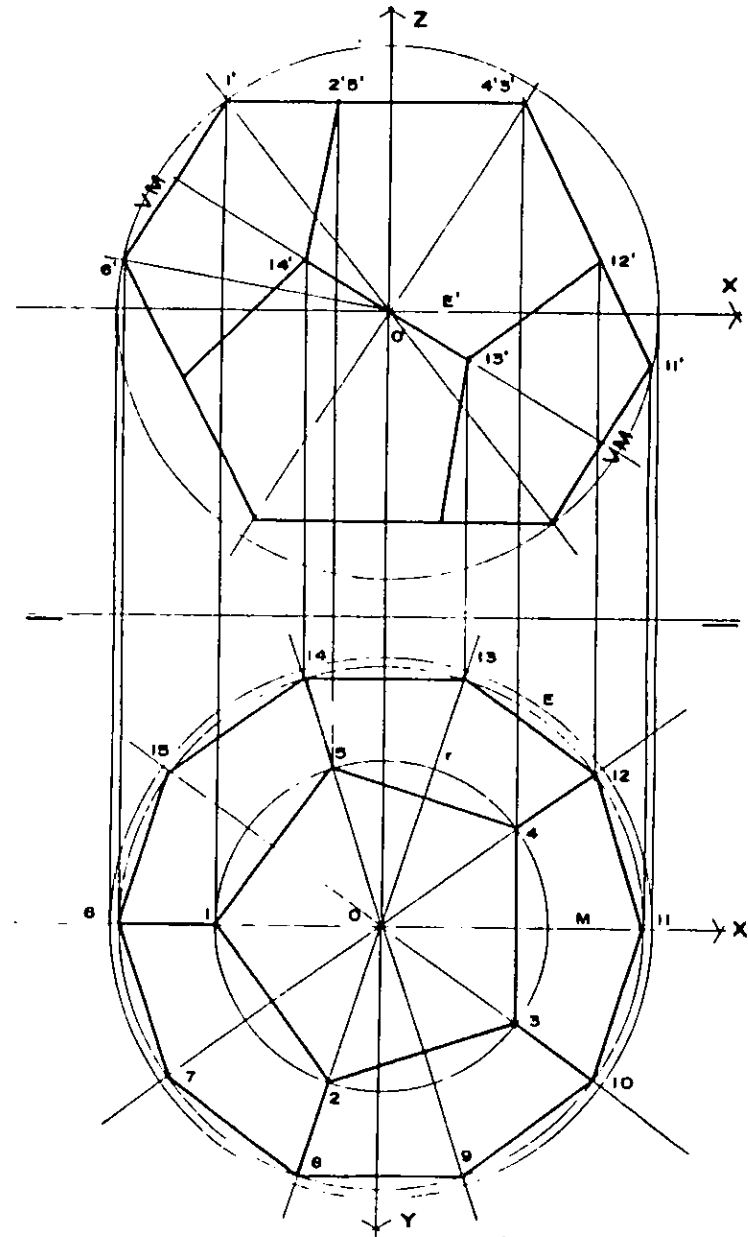


Figura 32 Montea del dodecaedro esférico.

e) **Icosaedro esférico** .- Al trazar la monea del Icosaedro inscrito en una superficie esférica se deberán realizar los siguientes pasos(figura 33).

Datos: Meridiana principal **MM'** , ecuador **EE'**, centro **OO'** y radio **rr'**.

1º Ubíquese el polo en el eje **Z** de el plano vertical y defina el primer vértice **1'** en el cruce del meridiano **M'** con el eje **Z** , referimos este vértice a la meridiana **M** del plano horizontal para localizar el vértice **1**.

2º Divídase la esfera en el plano vertical mediante un plano meridiano a 64° respecto al eje **Z** , en el punto donde se cruza con la meridiana **M'** localizamos el vértice **2'** , lo referimos a la meridiana **M** del plano horizontal donde ubicamos el vértice **2** trazamos un círculo paralelo con radio **1,2** .

3º Divídase la esfera en el plano horizontal mediante 10 planos meridianos a 36° respecto al eje **X** , tomando al vértice **2** como punto de inicio, en el cruce de las divisiones con el círculo paralelo de radio **1,2** obtenemos los vértices **3,4,5,6,7,8,9,10,11**.

4º Trazamos meridiana apartir del vértice **2'** del plano vertical que pase por el origen, referimos el vértice **7** a la meridiana **M'** del plano vertical donde cruce con la meridiana **2'** ubicamos el vértice **7'** , trazamos en ese punto línea horizontal paralela al ecuador **E'** donde cruce con la referencia de los vértices **3, 5** ubicamos los vértices **3'5'**.

5º Trazamos en el vértice **2'** línea horizontal en el plano vertical paralela al ecuador **E'** en donde cruce con las referencias **4, 6, 8** , ubicamos los vértices **4'6'8'**.

6º Referimos al polo contrario del ubicado para el vértice **1'** en el cruce del meridiano **M'** con el eje **Z** , ubicamos el vértice **12'** , referimos este punto al plano horizontal en el cruce con el meridiano **M** localizamos al vértice **12**

7º Localizamos una de las aristas en verdadera forma y magnitud o sea el segmento **1'2'**.

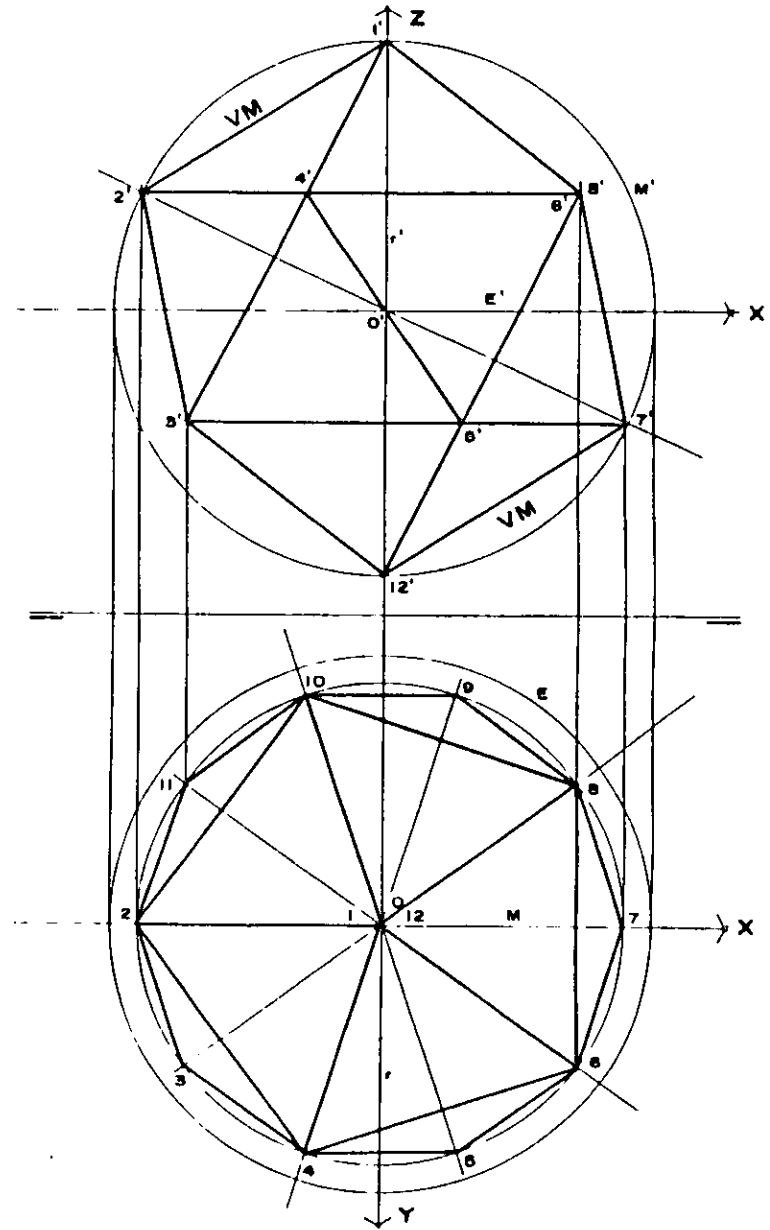


Figura 33 Monea del icosaedro esférico.

1.2.2 PROGRAMA DE COMPUTO GEODESIC.

Todos los análisis hechos en este trabajo, tanto geométricos, como estructurales pueden realizarse con todo el catálogo de fórmulas descritas, pero indudablemente una vez que se ha entendido el proceso de cálculo, seguir realizándolo manualmente se convierte en un proceso lento y quizá fastidioso, por ese motivo se elaboró el programa llamado GEODESIC Versión 1.0, este programa fue elaborado conjuntamente y con los derechos reservados entre el arquitecto Jorge Náñez Martínez quien realizó todas las subrutinas de opciones de cálculo para triángulos rectángulos u oblicuángulos y el ingeniero Armando Náñez Martínez quien elaboró los menús principal, secundario y terciario.

GEODESIC está elaborado en lenguaje Qbasic de Microsoft, por ser un lenguaje de fácil aplicación y que no requiere equipo sofisticado, ya que puede utilizarse en las computadoras IBM compatibles los MS-dos o en ambiente Windows de Visual basic ²².

GEODESIC, está compuesto del menú principal, secundario y terciario los cuales tienen las opciones descritas a continuación.

MENÚ PRINCIPAL
SUPERFICIES ESFÉRICAS
1) Tetredro esférico
2) Hexaedro esférico
3) Octaedro esférico
4) Dodecaedro esférico
5) Icosaedro esférico
6) Salir

MENÚ SECUNDARIO
TRIÁNGULOS ESFÉRICOS
1) Rectángulos
2) Oblicuángulos
3) Menú anterior

MENÚ TERCIARIO
OPCIONES DE CALCULO
1) Calcula coordenadas
2) Calcula ángulos
3) Calcula esfuerzos
4) Geometral PLXY
5) Geometral PLXZ
6) Geometral PLYZ
7) Perspectiva PLXOYO
8) Perspectiva PLXOZO
9) Perspectiva PLYOZO
0) Menú anterior

La intención al elaborar GEODESIC, es la de poder analizar cualquier sólido Platónico dividiéndolo ya sea mediante triángulos rectángulos u oblicuángulos para eso las opciones de cálculo realiza lo siguiente:

1) Calcula coordenadas.- En esta subrutina se calcula las coordenadas rectangulares y esféricas X, Y, Z, r, ϕ, θ .

2) Calcula ángulos.- Esta subrutina calcula las propiedades geométricas de los triángulos esféricos como son los lados, cuerdas y ángulos.

3) Calcula esfuerzos.- Aquí la subrutina calcula los esfuerzos tangenciales y normales en cada punto, además de los esfuerzos de tensión o compresión en las barras.

4,5,6.) Geometricas.- La única función de estas subrutinas es la de dibujar los tres diferentes geometricas como son los planos XY, XZ, YZ .

7,8,9) Perspectivas.- La razón de estas subrutinas es dibujar en perspectiva los geometricas de los planos XY, XZ, YZ .

Para poder acceder a cualquier opción de cálculo, únicamente se debe ingresar los datos de entrada que son:

r -Radio de la esfera

n- Particiones del arco, o sea las divisiones que se desea hacer a una de las caras de la esfera.

q -Carga uniforme de la cubierta.

²² para mayores aclaraciones llamar al teléfono 6-18-02-73.

MODELO ANALÍTICO

Como ejemplo representativo de cada uno de los sólidos Platónicos esféricos tenemos, el análisis geométrico analítico del tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro esférico, los cuales describimos simplificada y claramente para evitar tener datos y datos que no permita visualizar claramente las coordenadas rectangulares y esféricas, propiedades geométricas de las redes triangulares como son:

- i) Lados.- Nos sirve para conocer el ángulo de corte de las nervaduras.
- ii) Cuerdas.- Para obtener longitud de nervaduras
- iii) Ángulos.- En el trazo de pieza para cubierta

PROCEDIMIENTO DE CALCULO

El procedimiento de cálculo para llegar a obtener estos datos es el siguiente:

SUBROUTINA PARA CALCULAR LADOS, CUERDAS, ANGULOS DE c

- 1) Obtener hipotenusa del triángulo esférico deseado
- 2) Dividir hipotenusa en n partes iguales
- 3) Almacenar ángulo de n partes iguales en lc
- 4) Calcular las coordenadas rectangulares X, Y, Z , de cada punto de la división de n partes iguales.
- 5) Calcular las coordenadas esféricas de los mismos puntos
- 6) Obtenemos la longitud de las cuerdas c con las coordenadas rectangulares.
- 7) Obtener los ángulos internos CoC
- 8) Girar los puntos obtenidos para las coordenadas rectangulares X, Y, Z , a la ubicación deseada

SUBROUTINA PARA CALCULAR LADOS, CUERDAS, ANGULOS DE b

- 9) Repetir procedimiento de los pasos 1 a 8

SUBROUTINA PARA CALCULAR LADOS, CUERDAS, ANGULOS DE a

- 10) Repetir procedimiento de los pasos 1 a 8

NOMENCLATURA

- X, Y, Z ._ Coordenadas rectangulares
 r ._ Radio de la esfera
 ϕ ._ Ángulo comprendido entre el radio y eje Z
 θ ._ Ángulo comprendido entre los ejes X e Y
 lc ._ Longitud de arco del lado c
 lb ._ Longitud de arco del lado b
 la ._ Longitud de arco del lado a
 CoC ._ Ángulo interno del triángulo
 CoB ._ Ángulo interno del triángulo
 CoA ._ Ángulo interno del triángulo

Una vez que obtenemos los datos deseados procedemos a graficar los geométrales y perspectivas de cada uno de los sólidos Platónicos, representamos únicamente en este documento los geométrales de la planta, alzado y una de sus perspectivas.

Cada una de estas gráficas tiene un código de identificación.

NOMENCLATURA

- $PLXY4$._ Plano XY del tetraedro
 $PLXZ4$._ Plano XZ del tetraedro
 $PLXOZO4$._ Perspectiva del plano XZ del tetraedro

1.2.4 Tetraedro esférico

a) Coordenadas rectangulares

PUNTO	X(m)	Y(m)	Z(m)
8	2.3883	5.6646	5.1194
9	-2.3883	5.6646	5.1194
13	0.0000	7.9715	0.6746

Coordenadas esféricas

PUNTO	r (metros)	ϕ (grados)	θ (grados)
8	8.00	50.21	67.14
9	8.00	50.21	-67.14
13	8.00	85.16	90.00

b) Propiedades geométricas

1) Lados

PUNTO	lc(grados)	lb(grados)	la(grados)
8,9	34.740		
9,13		40.579	
13,8			40.579

2) Cuerdas

PUNTO	c(metros)	b(metros)	a(metros)
8,9	4.777		
9,13		5.548	
13,8			5.548

3) Ángulos

PUNTO	CoC(grados)	CoB(grados)	CoA(grados)
13	50.994		
8		64.502	
9			64.502

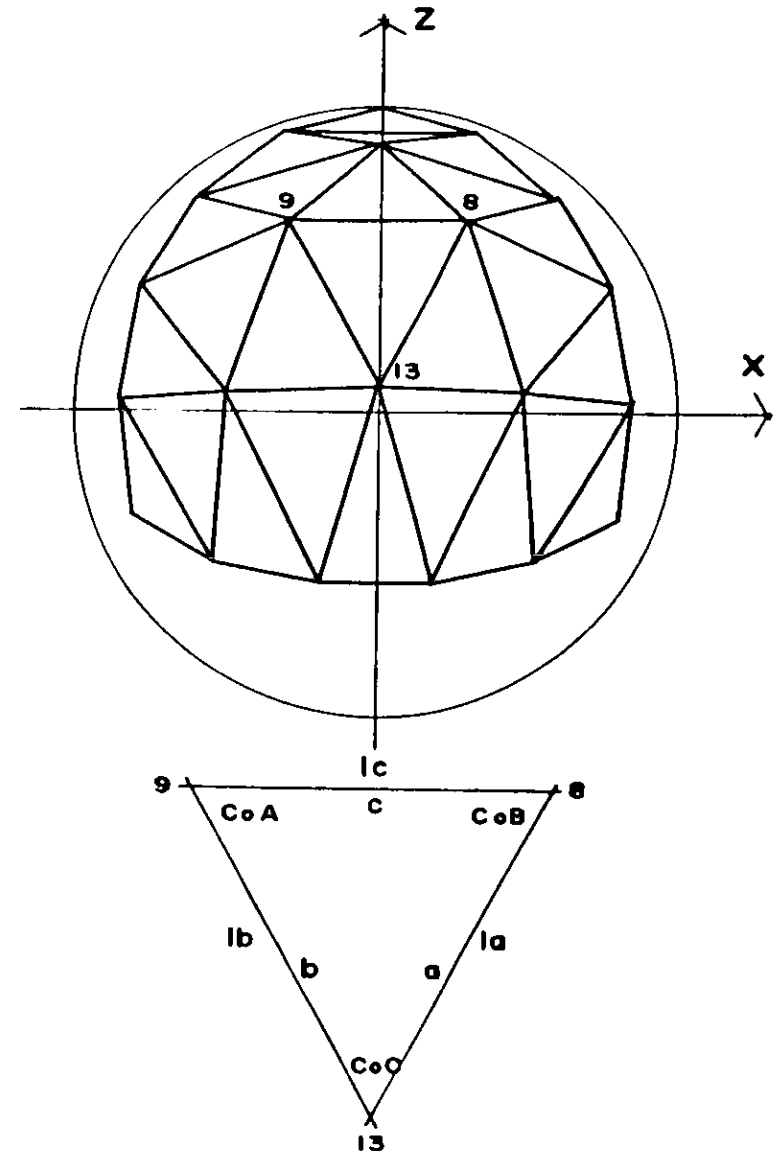


Figura 34 Geometría del tetraedro esférico.

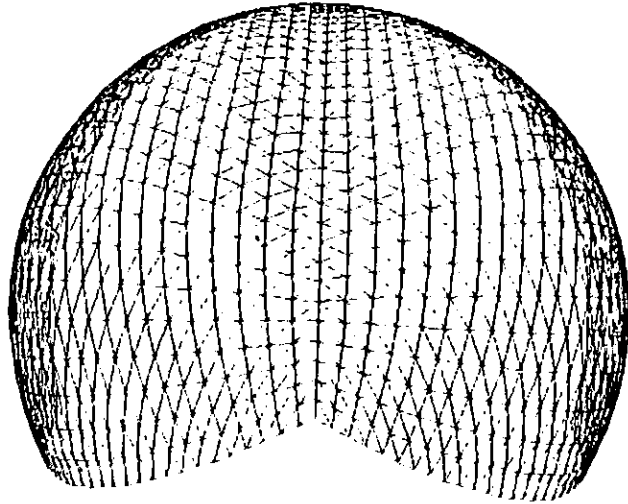


Figura 35

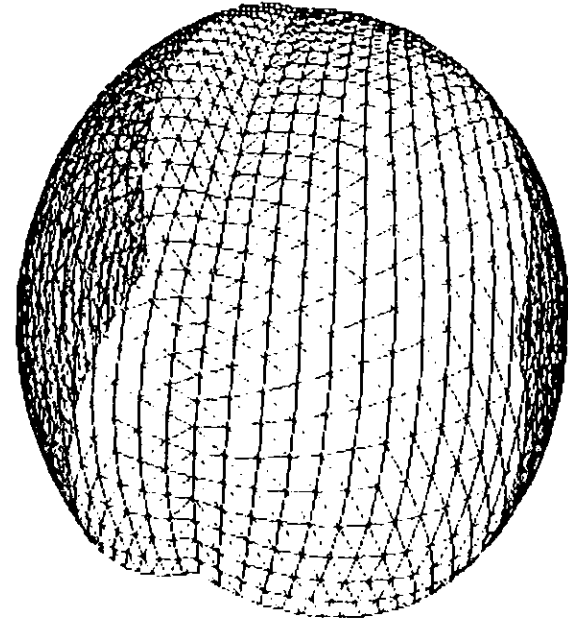


Figura 37

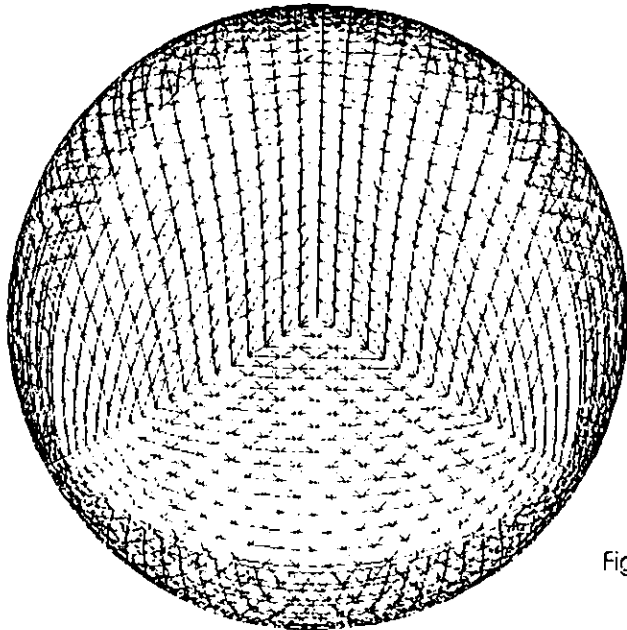


Figura 36

TETRAEDRO ESFÉRICO

Figura 35 Alzado

Figura 36 Planta

Figura 37 Perspectiva

1.2.5 Hexaedro esférico

a) Coordenadas rectangulares

PUNTO	X(m)	Y(m)	Z(m)
13	7.8565	0.0000	1.5086
18	7.9395	-0.9823	0.0000
19	7.9395	0.9823	0.0000

Coordenadas esféricas

PUNTO	r(metros)	ϕ (grados)	θ (grados)
13	8.00	79.13	90.00
18	8.00	90.00	82.95
19	8.00	90.00	97.05

b) Propiedades geométricas

1) Lados

PUNTO	lc(grados)	lb(grados)	la(grados)
18,19	14.104		
19,13		12.932	
13,18			12.932

2) Cuerdas

PUNTO	c(metros)	b(metros)	a(metros)
18,19	1.965		
19,13		1.802	
13,18			1.802

3) Ángulos

PUNTO	CoC(grados)	CoB(grados)	CoA(grados)
13	66.059		
18		56.970	
19			56.970

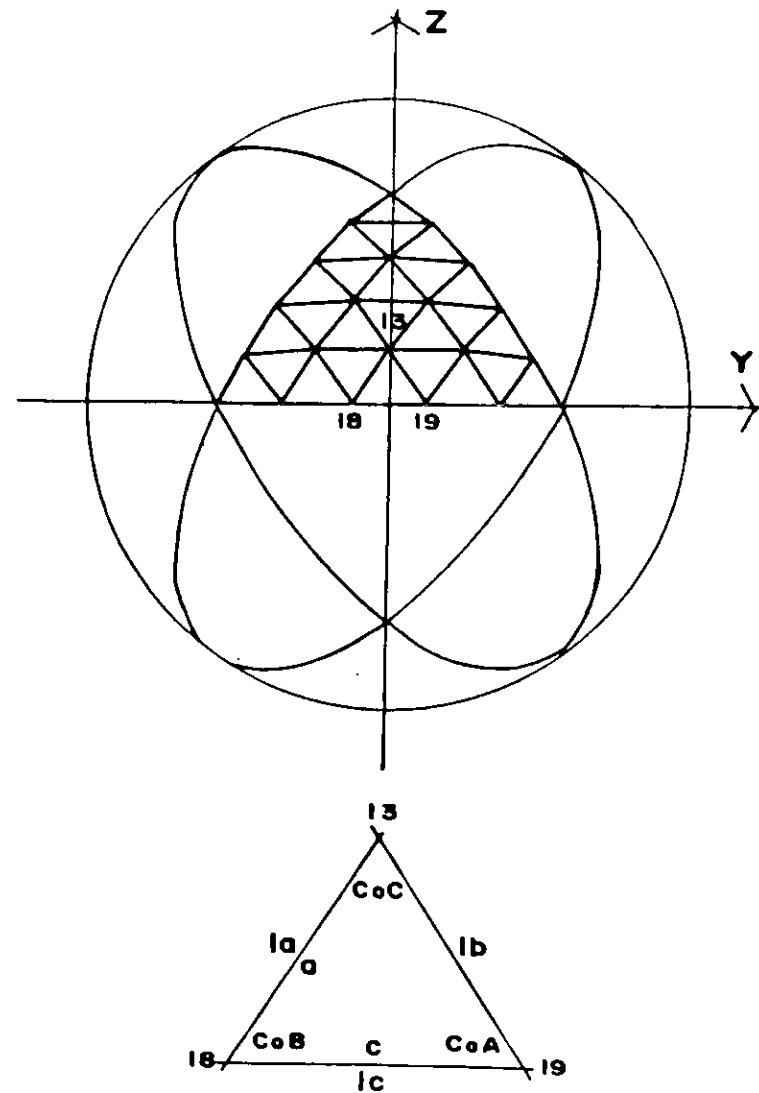


Figura 38 Geometría del Hexaedro esférico.

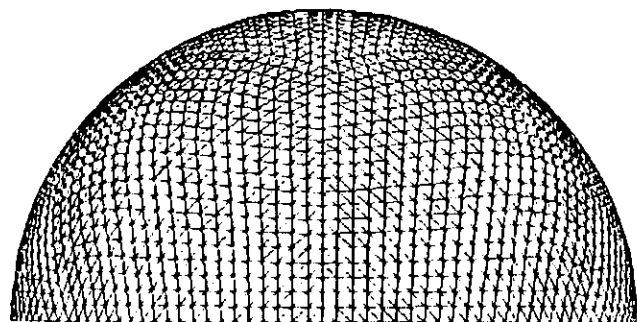


Figura 39

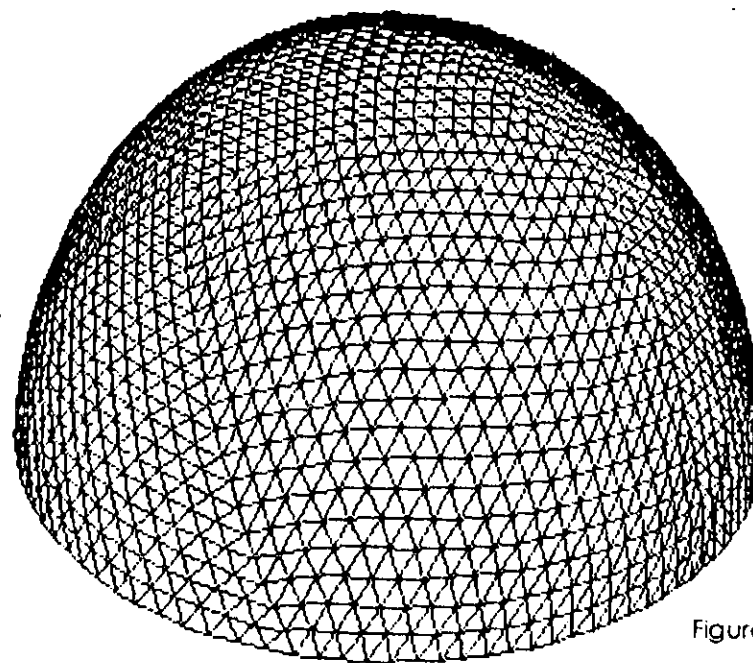


Figura 41

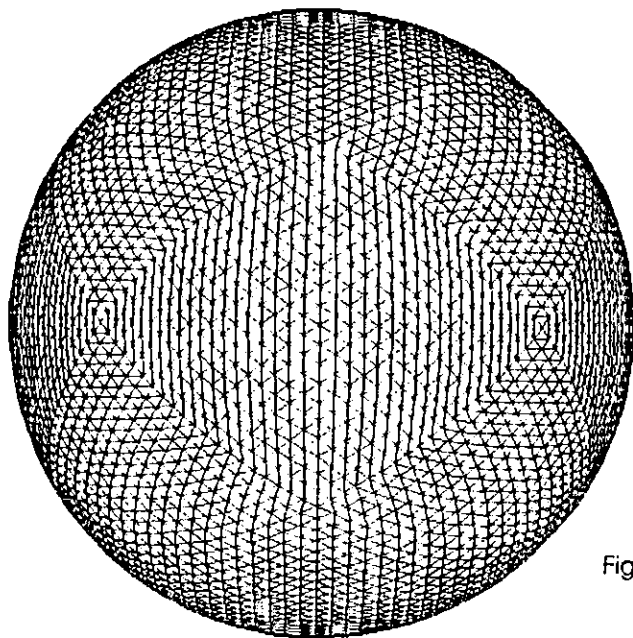


Figura 40

HEXAEDRO ESFÉRICO

Figura 39 Alzado

Figura 40 Planta

Figura 41 Perspectiva

1.2.6 Octaedro esférico

a) Coordenadas rectangulares

PUNTO	X(m)	Y(m)	Z(m)
8	1.6129	5.4651	5.6153
9	-1.619	5.4651	5.6153
13	0.0000	7.2693	3.3403

Coordenadas esféricas

PUNTO	r(metros)	ϕ (grados)	θ (grados)
8	8.00	45.42	73.56
9	8.00	45.42	-73.56
13	8.00	65.32	-90.00

b) Propiedades geométricas

1) Lados

PUNTO	lc(grados)	lb(grados)	la(grados)
8,9	23.262		
9,13		20.526	
13,8			20.526

2) Cuerdas

PUNTO	c(metros)	b(metros)	a(metros)
8,9	3.226		
9,13		3.321	
13,8			3.321

3) Ángulos

PUNTO	CoC(grados)	CoB(grados)	CoA(grados)
13	58.103		
8		60.948	
9			60.948

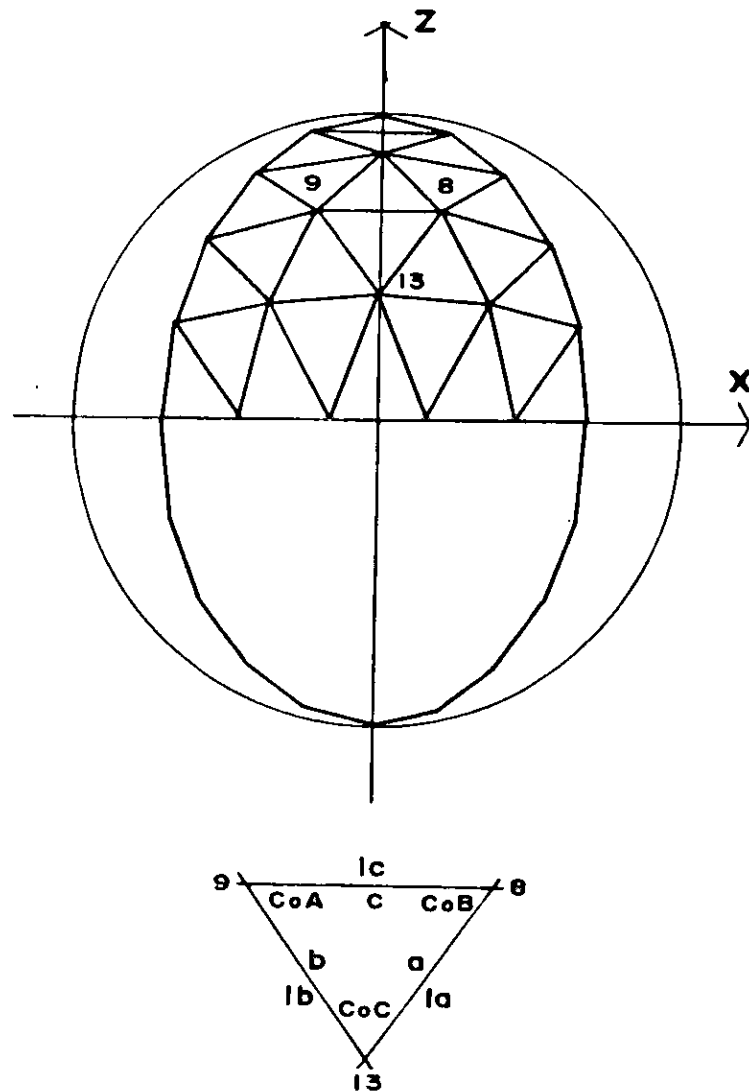


Figura 42 Geometría del Octaedro esférico.

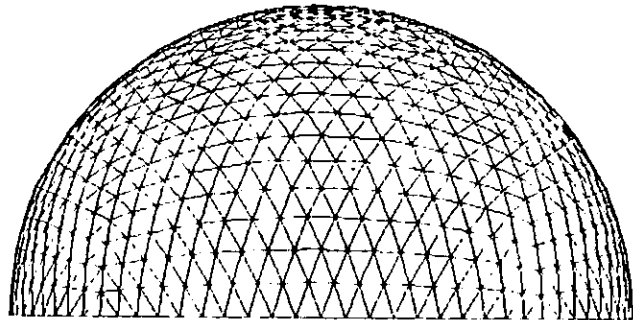


Figura 43

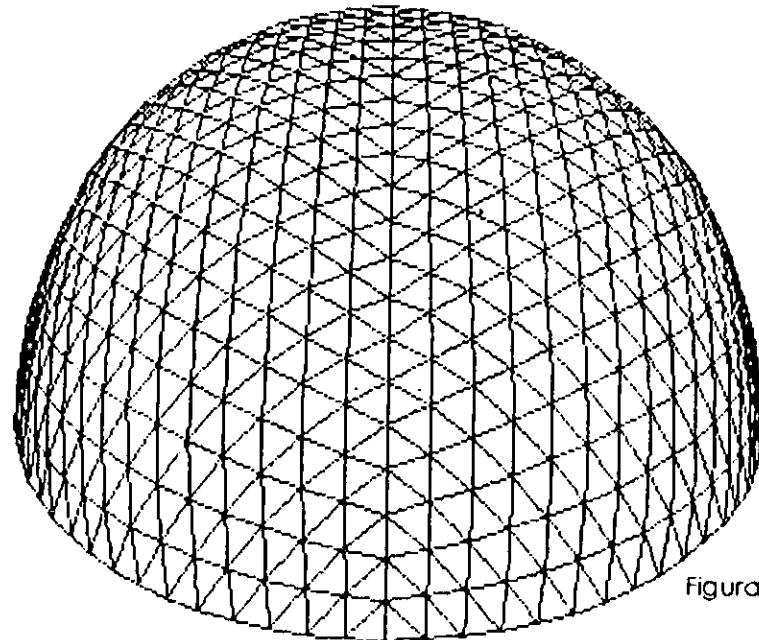


Figura 45

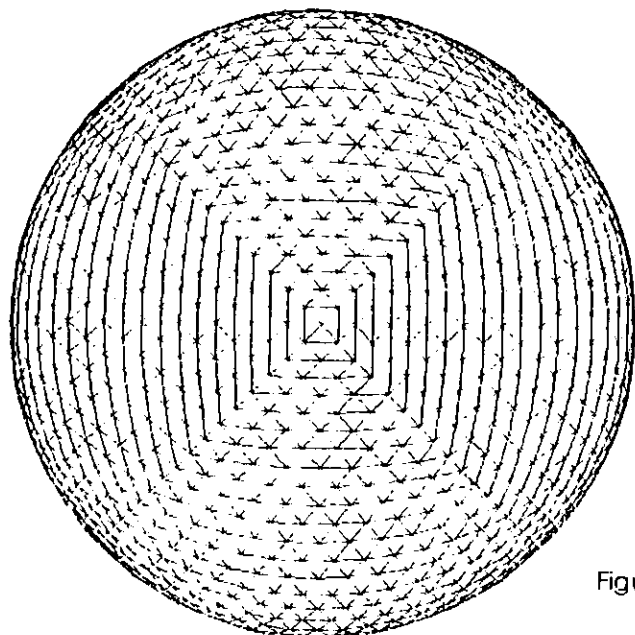


Figura 44

OCTAEDRO ESFÉRICO

Figura 43 Alzado

Figura 44 Planta

Figura 45 Perspectiva

1.2.7 Dodecaedro esférico

a) Coordenadas rectangulares

PUNTO	X(m)	Y(m)	Z(m)
18	0.5833	4.1947	6.7871
19	-0.5833	4.1947	6.7871
13	0.0000	3.3746	7.2534

Coordenadas esféricas

PUNTO	r(metros)	ϕ (grados)	θ (grados)
18	8.00	31.96	82.08
19	8.00	31.96	-82.08
13	8.00	24.95	90.00

b) Propiedades geométricas

1) Lados

PUNTO	lc(grados)	lb(grados)	la(grados)
18,19	8.360		
19,13		7.949	
13,18			7.949

2) Cuerdas

PUNTO	c(metros)	b(metros)	a(metros)
18,19	1.167		
19,13		1.109	
13,18			1.109

3) Ángulos

PUNTO	CoC(grados)	CoB(grados)	CoA(grados)
13	63.456		
18		58.271	
19			58.271

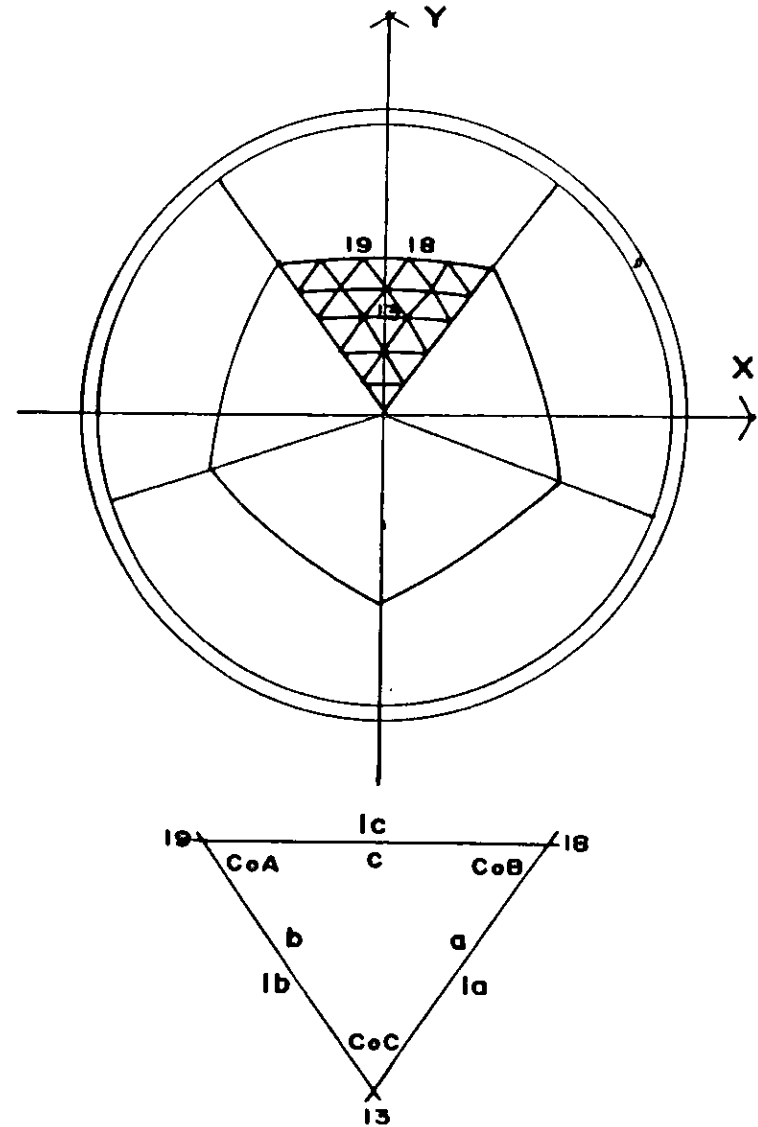


Figura 46 Geometría del Dodecaedro esférico.

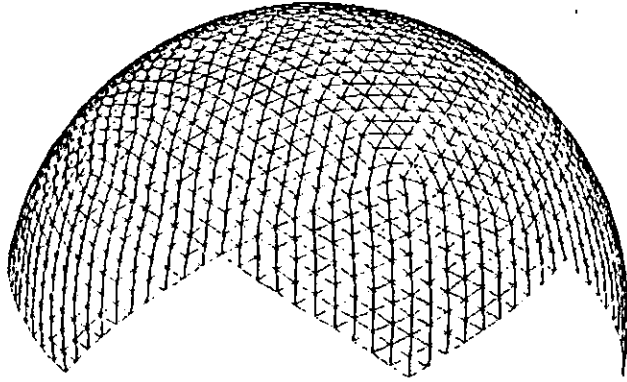


Figura 47

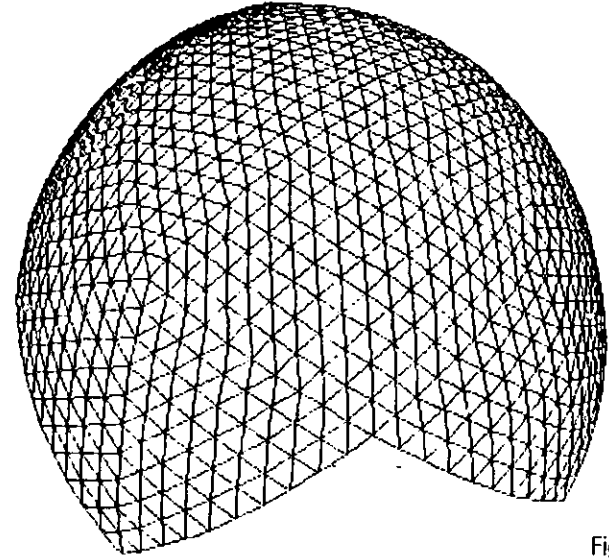


Figura 49

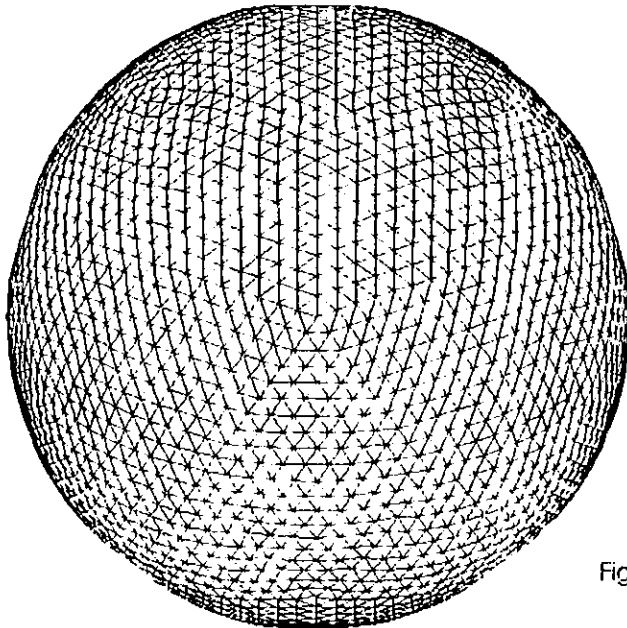


Figura 48

DODECAEDRO ESFÉRICO

Figura 47 Alzado

Figura 48 Planta

Figura 49 Perspectiva

1.2.8 Icosaedro esférico

a) Coordenadas rectangulares

PUNTO	X(m)	Y(m)	Z(m)
9	-0.9863	4.2484	6.7066
8	0.9863	4.2484	6.7066
13	0.0000	5.6287	5.6849

Coordenadas esféricas

PUNTO	r(metros)	ϕ (grados)	θ (grados)
9	8.00	33.04	76.93
8	8.00	33.04	-76.93
13	8.00	44.72	90.00

b) Propiedades geométricas

1) Lados

PUNTO	lc(grados)	lb(grados)	la(grados)
9,8	14.163		
8,13		14.219	
13,9			14.219

2) Cuerdas

PUNTO	c(metros)	b(metros)	a(metros)
9,8	1.973		
8,13		1.980	
13,9			1.980

3) Ángulos

PUNTO	CoC(grados)	CoB(grados)	CoA(grados)
13	59.740		
9		60.129	
8			60.129

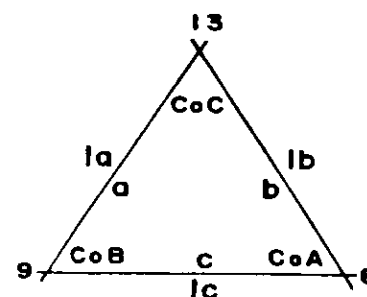
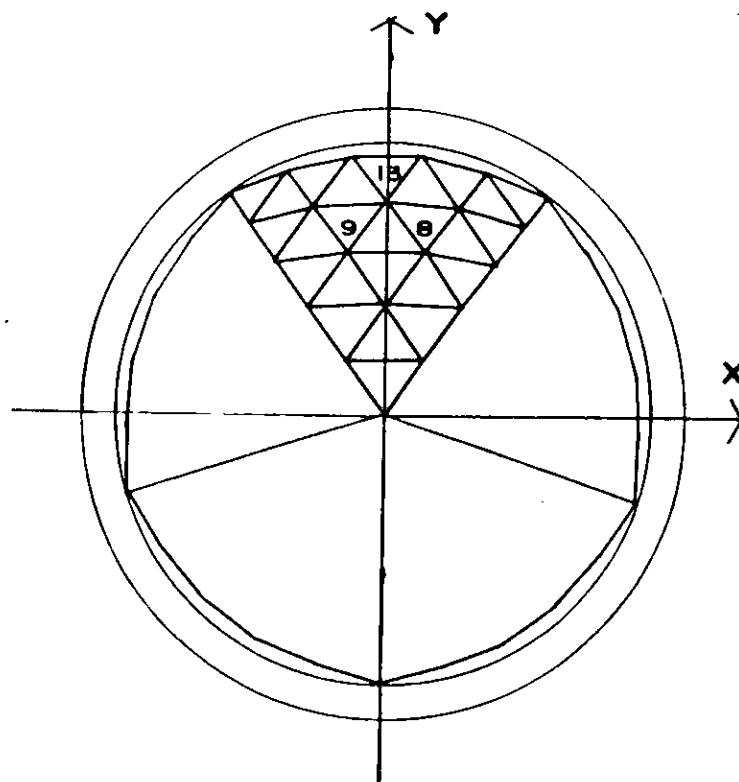


Figura 50 Geometría del Icosaedro esférico.

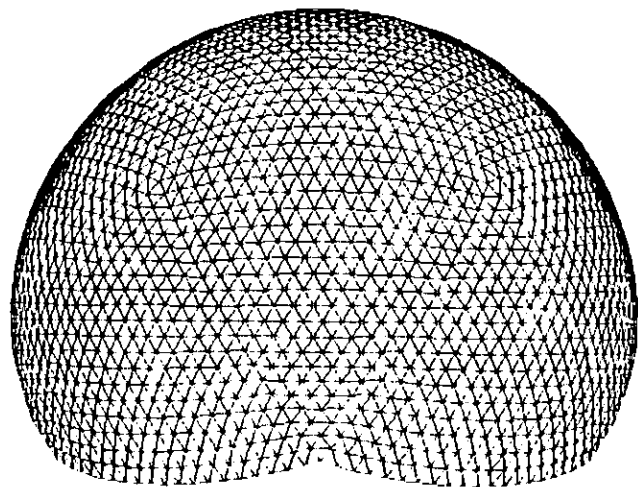


Figura 51

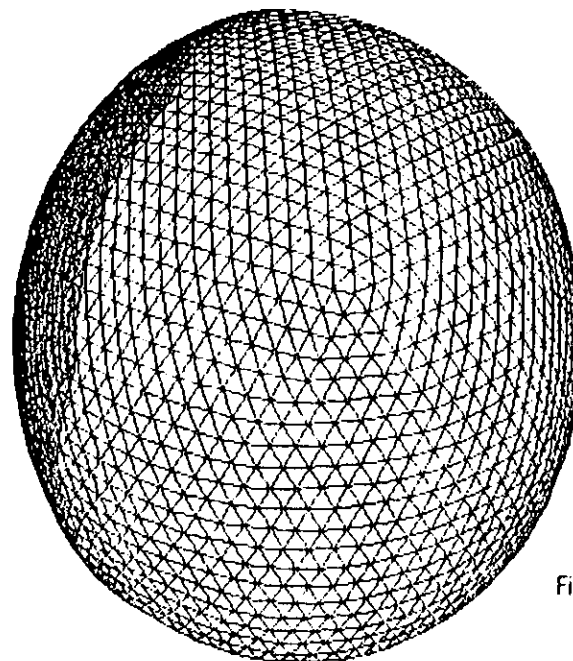


Figura 53

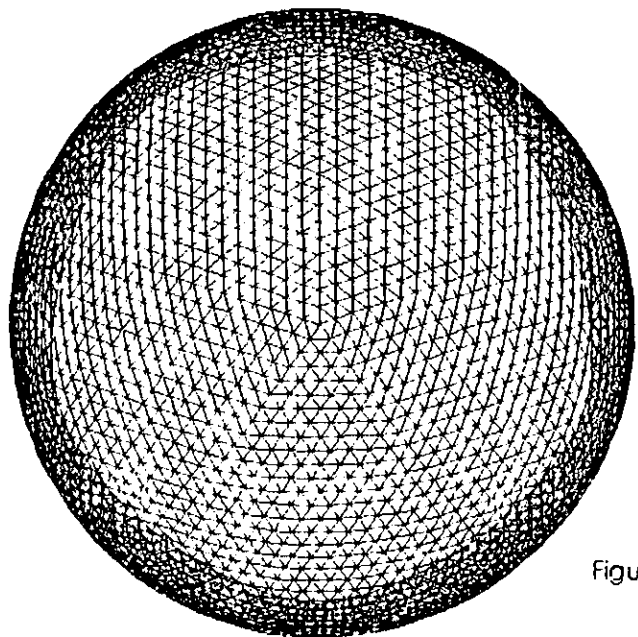


Figura 52

ICOSAEDRO ESFÉRICO

Figura 51 Alzado

Figura 52 Planta

Figura 53 Perspectiva

II.- ESFUERZOS DE LA SUPERFICIE ESFERICA.

2.0.0 INTRODUCCION A LOS ESFUERZOS

Contrariamente a lo que sucede con el análisis geométrico de la esférica, en el análisis estructural de los esfuerzos, si hay información específica, sustanciosa para realizarla debido a que existen fórmulas simplificadas en su aplicación, lo único más complejo es la obtención del ángulo ϕ en cada punto de la superficie, el cual ya se obtuvo en el proceso geométrico, una vez que se tiene este dato la aplicación de las fórmulas son muy sencillas y la interpretación de los esfuerzos también, porque los conocimientos adquiridos durante la preparación académica de un arquitecto o ingeniero a nivel licenciatura y de la especialidad en cubiertas ligeras, en las materias de estática, resistencia de materiales, estructuras de concreto, madera, acero y cascarones, son suficientes para interpretar estos resultados y aplicarlos en el material escogido o en alguno nuevo, en el caso de no conocer sus características y esfuerzos permisibles, obtenerlos mediante pruebas de laboratorio que nos determine estas incógnitas.

Estos esfuerzos característicos que son de compresión (+) en los esfuerzos tangenciales y de tracción (-) a partir del ángulo $51^{\circ} 49'$ en esfuerzos anulares ver (figura 55).

Quedan claramente representados en los esfuerzos de cada uno de los sólidos Platónicos esféricos cuando dividimos mediante mallas triangulares, los esfuerzos existentes únicamente son de compresión en las barras, que resultan ser los más desfavorables de los dos ya que su capacidad de carga depende de la longitud entre los apoyos.

Por ese motivo en la antigüedad se podían construir cubiertas de ángulos menores de $51^{\circ} 49'$ con materiales adecuados a este esfuerzo.

2.1.0 CÚPULAS

Pueden definirse, como superficies de doble curvatura en un mismo sentido curvatura gaussiana positiva o " sinclásticas ", cuyos elementos resistentes son todos arcos de círculos máximos, que forman mallas espaciales bidimensionales o tridimensionales, cuando son de una o dos capas respectivamente.

Las barras que forman la malla, generalmente pueden disponerse formando triángulos, aunque también logran formarse cuadrados, hexágonos, etc.

Las mallas de una sola capa de las que nos ocupamos, son aplicables a todas aquellas estructuras en que por efecto del aplastamiento se presentan flexiones de pequeña intensidad que en los casos generales no se consideran.

2.1.1 CUPULA SUJETA A ESFUERZOS DE PESO PROPIO.

Por su sistema de carga se considera así cuando una cúpula está sujeta a esfuerzos de peso propio o gravitacionales y a los accidentales como son el viento y sismo.

2.1.2 Esfuerzo cortante (figura 54).- Supongamos que hacemos un corte vertical de la cúpula, producido por un plano que pasa por el eje vertical de ella. Si cortamos ahora con dos planos horizontales, cuya posición está definida por los ángulos ϕ y $d\phi$, establecemos el equilibrio de las fuerzas que actúan en el anillo formado por los planos al cortar la cúpula tendremos:

a) Una serie de fuerzas tangenciales a la cúpula en el círculo bb' y a las cuales, por unidad de longitud de dicho círculo, los llamaremos T .

En el círculo cc' actuarán tangencialmente las fuerzas $T + dT$.

Además, está actuando como carga el peso propio.

Entonces, si tomamos las cargas que actúan sobre el plano M , tendremos, las fuerzas T y el peso de la cúpula bab' .

Si aplicamos la primera condición de equilibrio estático tendremos que la carga gravita sobre la cúpula bab' incluyendo el peso propio, debe ser igual a la suma de las componentes verticales de T .

Así pues, si llamamos p a la carga por unidad de superficie de cúpula, el esfuerzo cortante hasta el plano N valdrá:

$$\begin{aligned} \text{Área } bab' \times p &= 2 \pi r a d = 2 \pi r^2 (1 - \cos \phi) \\ \text{Cortante} = Q &= 2 \pi r^2 (1 - \cos \phi) p \quad (1) \end{aligned}$$

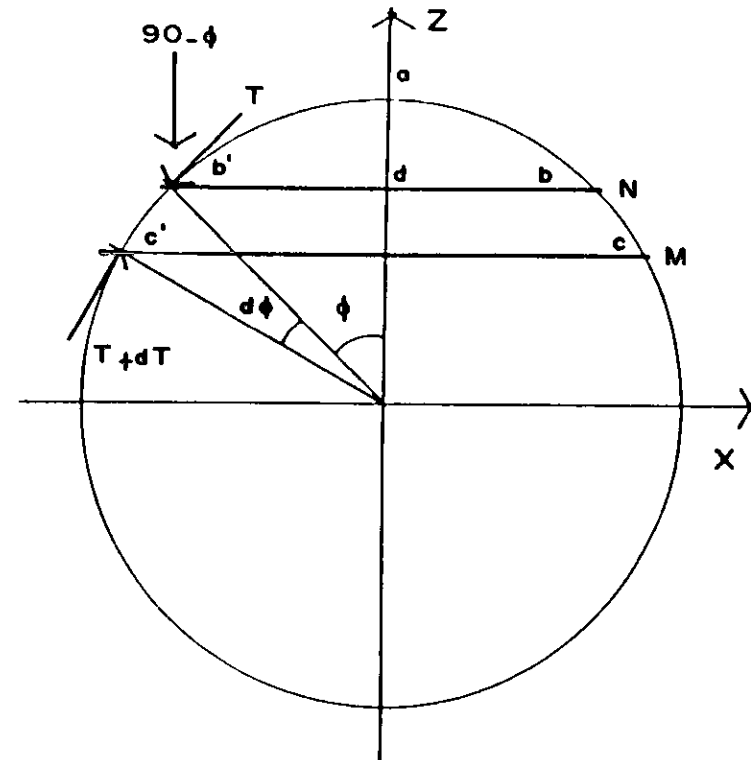


Figura 54

2.1.3 Esfuerzo tangencial (figura 55) .- Generalmente estos esfuerzos fluyen tangencialmente a la superficie en el sentido de los meridianos y transmiten esfuerzos de compresión.

Si la cúpula es de medio punto (180°), no necesita anillo de borde que absorba la tracción anular .

Estos esfuerzos los podemos obtener de la forma siguiente (figura 56).

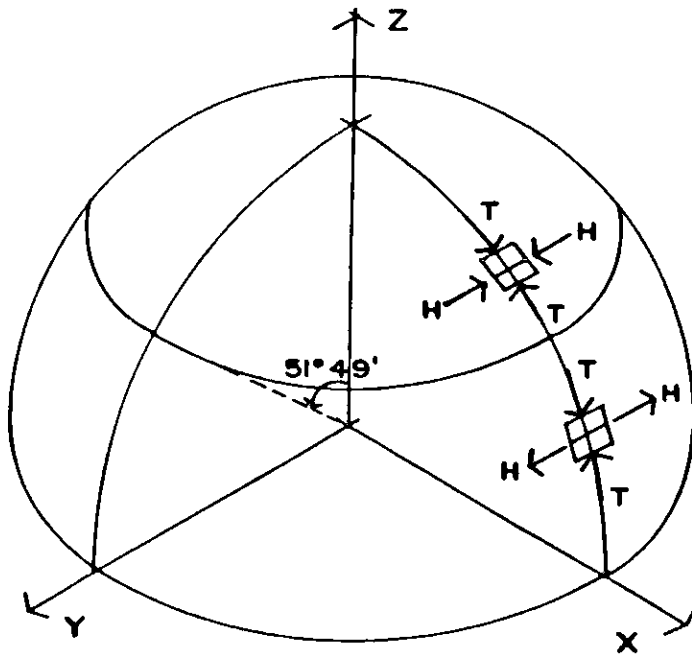


Figura 55

La componente horizontal de la fuerza meridional se obtiene multiplicando **T** por el coseno de ϕ .

$$T_H = T \cos \phi$$

La tracción anular en el borde se obtiene multiplicando **TH** por el radio del círculo $x = r \text{ seno } \phi$ que contiene el mencionado borde.

$$T_{\text{anular}} = TH \times$$

La suma de componentes verticales de **T** vale :

$$2 \pi b d T \text{ seno } \phi = 2 \pi r \text{ seno}^2 \phi T \quad (2)$$

é igualando las expresiones (1) y (2) tendremos :

$$2 \pi r^2 (1 - \cos \phi) p = 2 \pi r \text{ seno}^2 \phi T$$

y despejando a **T** queda

$$T = \frac{pr (1 - \cos \phi)}{\text{seno}^2 \phi} \quad (3)$$

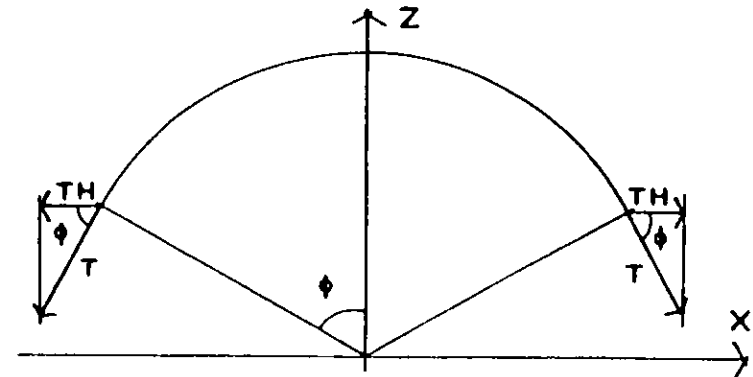


Figura 56

2.1.4 Esfuerzos anulares (figura 55).- De la figura 54 nos damos cuenta que en el anillo formado por la intersección de los planos **N** y **M** en la cúpula aparecen por efecto del peso propio una serie de fuerzas horizontales radiales , que serían los componentes horizontales de **dT** cuyo valor es :

$$dT \cos \phi = dT_H$$

Ahora bien, esta presión radial produce una fatiga anular cuyo valor es la presión por el radio, quedando, si llamamos **H** a la fuerza por unidad de longitud del meridiano.

$$H ds = dT \cos \phi r \operatorname{seno} \phi \quad (4)$$

Si sustituimos en (4) el valor de **T** nos quedará :

$$H d\phi r = d \left(pr^2 \left(\frac{1 - \cos \phi}{\operatorname{seno}^2 \phi} \right) \cos \phi \operatorname{seno} \phi \right)$$

despejando a **H** y derivando encontramos :

$$H = pr \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\cos \phi}{\operatorname{seno} \phi} - \frac{\cos^2 \phi}{\operatorname{seno} \phi} \right)$$

$$\therefore H = -pr \left(\frac{1 - 2 \cos \phi + \cos^3 \phi}{\operatorname{seno}^2 \phi} \right)$$

cuando $\phi = 0$ la ecuación anterior es indeterminada por lo que se transforma a lo siguiente :

$$H = -pr \left(\frac{1 - \cos \phi - \cos^2 \phi}{1 + \cos \phi} \right) \quad (5)$$

Si en la ecuación anterior se hace $\phi = 0$, es decir, en la corona :

$$H = + \frac{pr}{2} \text{ (compresión)}$$

En cualquier punto de la cúpula que forme con la vertical un ángulo menor de $51^\circ 49'$, el esfuerzo según los paralelos **H** será de compresión.

En cualquier punto de la cúpula que forme con la vertical un ángulo mayor a los $51^\circ 49'$ el esfuerzo según los paralelos **H** será de tracción (Figura 55).

2.2.0 ESFUERZOS EN SÓLIDOS PLATÓNICOS ESFÉRICOS

2.2.1 Tetraedro esférico

Esfuerzos tangenciales y anulares punto c

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ(grados)
8	487.82	24.11	50.214
9	487.82	24.11	50.214
13	737.78	-670.32	85.163

Esfuerzos tangenciales y anulares punto b

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ(grados)
13	737.78	-670.32	85.163
9	487.82	24.11	50.214
8	487.82	24.11	50.214

Esfuerzos tangenciales y anulares punto a

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ(grados)
13	737.78	-670.32	85.163
8	487.82	24.11	50.214
9	487.82	24.11	50.214

Cuerdas

PUNTO	c(metros)	b(metros)	a(metros)
8,9	4.777		
9,13		5.548	
13,8			5.548

Esfuerzos en barras punto c, b, a

PUNTO	barra c (kg)	barra b(kg)	barra a(kg)
8,9	1984.74		
9,13		2305.31	
8,13			2305.31

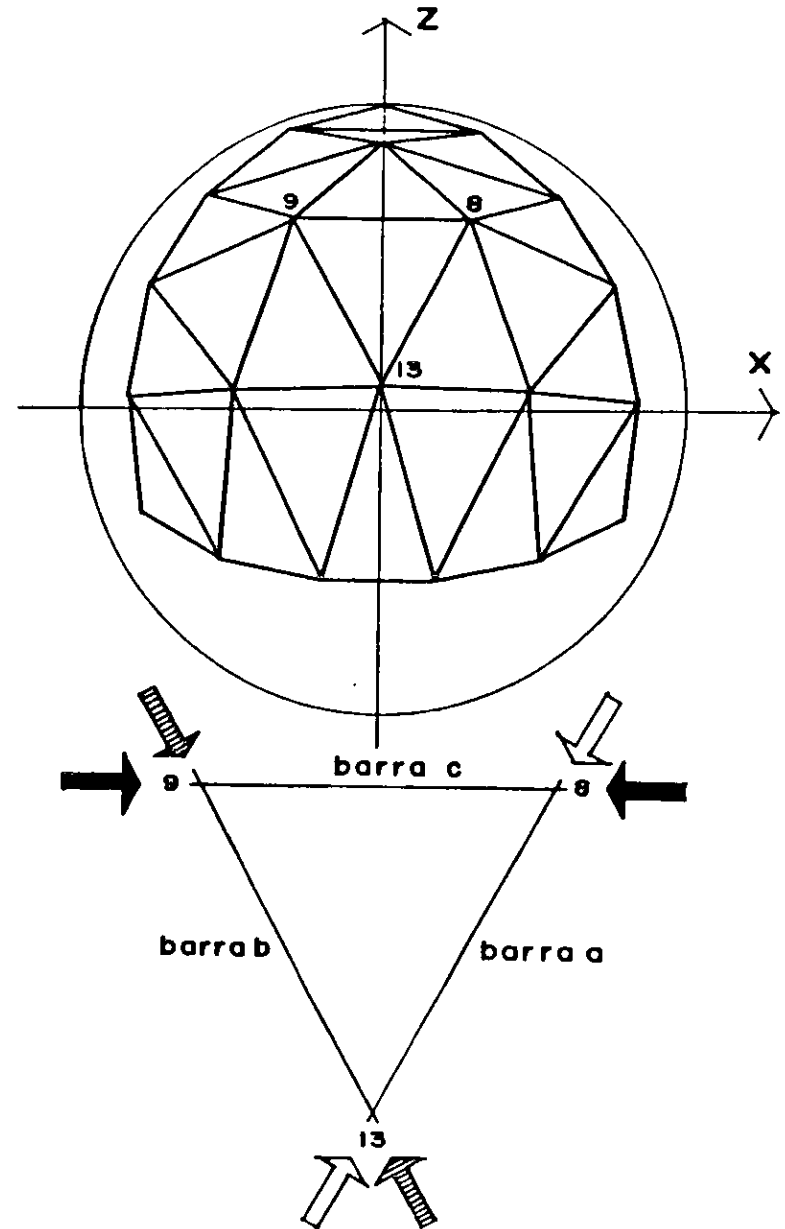


Figura 57 Esfuerzos tetraedro esférico.

2.2.2 Hexaedro esférico

Esfuerzos tangenciales y anulares punto c

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ(grados)
13	673.07	-522.21	79.13
18	800.00	-800.00	90.00
19	800.00	-800.00	90.00

Esfuerzos tangenciales y anulares punto b

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ(grados)
18	800.00	-800.00	90.00
19	800.00	-800.00	90.00
13	673.07	-522.21	79.13

Esfuerzos tangenciales y anulares punto a

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ(grados)
19	800.00	-800.00	90.00
18	800.00	-800.00	90.00
13	673.07	-522.21	79.13

Cuerdas

PUNTO	c(metros)	b(metros)	a(metros)
18,19	1.965		
19,13		1.802	
13,18			1.802

Esfuerzos en barras punto c, b, a

PUNTO	barra c (kg)	barra b(kg)	barra a(kg)
18,19	1814.78		
19,13		1322.14	
13,18			1322.14

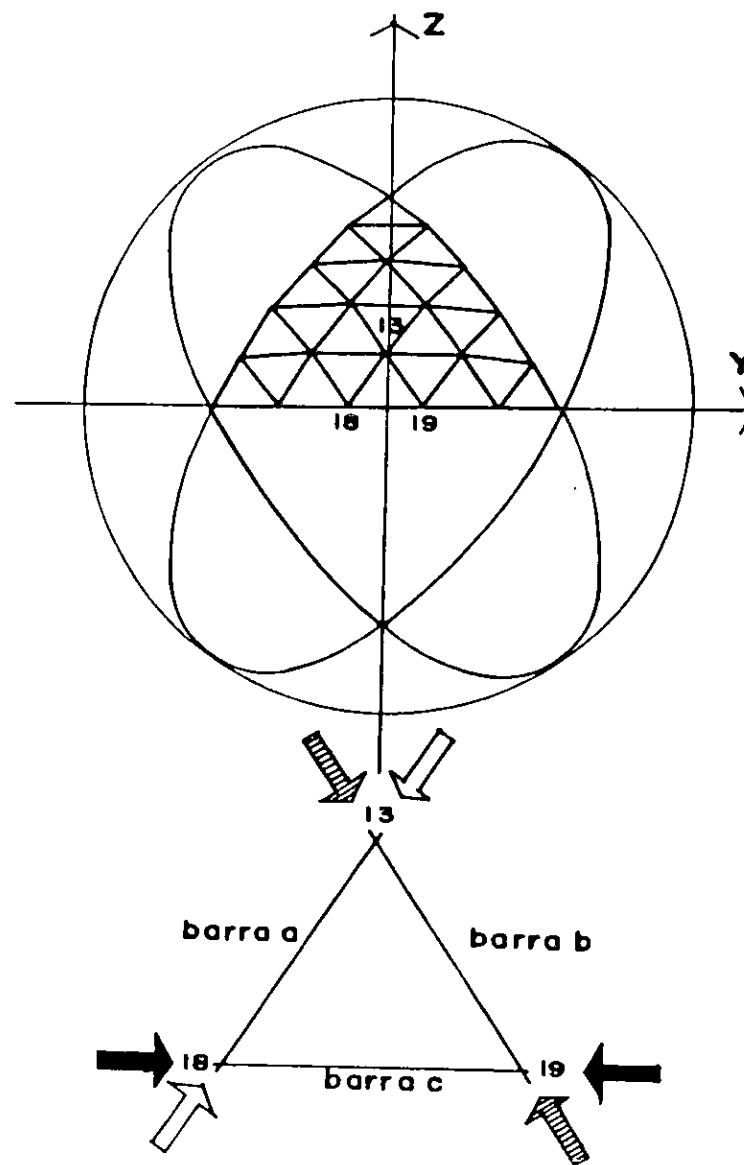


Figura 58 Esfuerzos hexaedro esférico.

2.2.3 Octaedro esférico

Esfuerzos tangenciales y anulares punto c

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ (grados)
8	470.06	91.469	45.419
9	470.06	91.469	45.419
13	564.36	-230.33	65.321

Esfuerzos tangenciales y anulares punto b

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ (grados)
13	564.36	-230.33	65.321
9	470.06	91.469	3.321
8	470.06	91.469	45.419

Esfuerzos tangenciales y anulares punto a

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ (grados)
13	564.36	-230.33	65.321
8	470.06	91.469	45.419
9	470.06	91.469	45.419

Cuerdas

PUNTO	c(metros)	b(metros)	a(metros)
8,9	3.226		
9,13		3.321	
13,8			3.321

Esfuerzos en barras punto c, b, a

PUNTO	barra c (kg)	barra b (kg)	barra a (kg)
8,9	1228.00		
9,13		1264.42	
13,8			1264.42

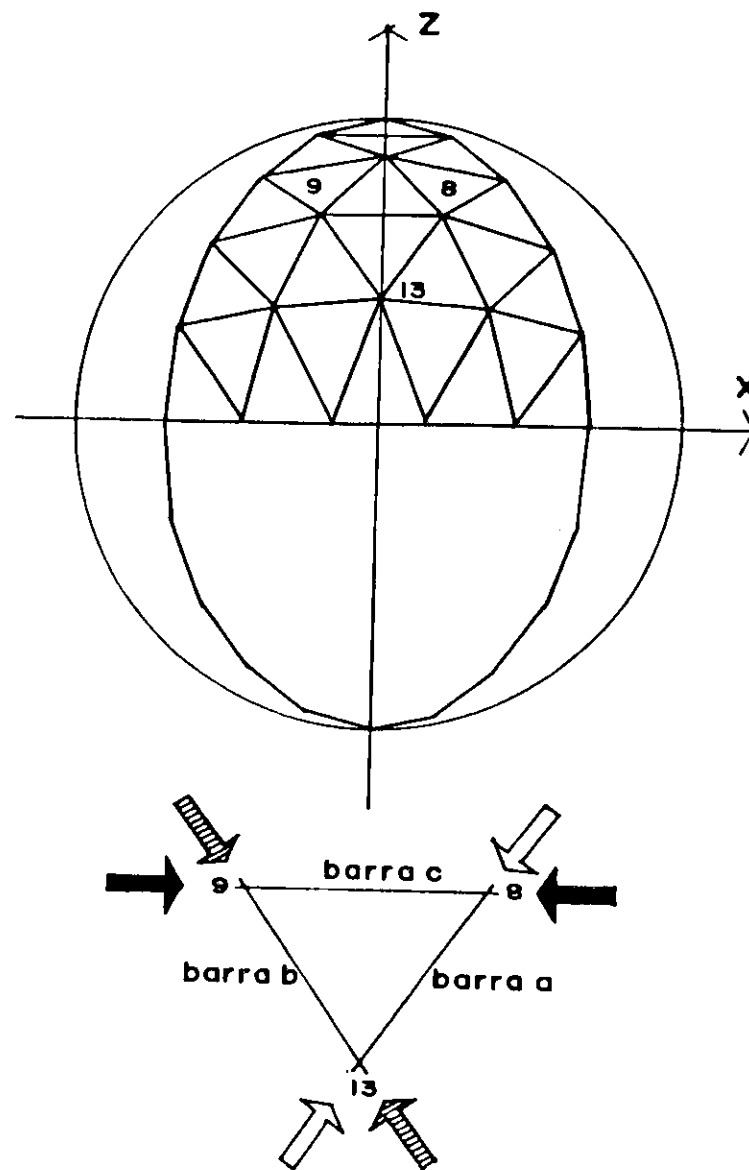


Figura 59 Esfuerzos octaedro esférico.

2.2.4 Dodecaedro esférico

Esfuerzos tangenciales y anulares punto c

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ(grados)
13	419.57	305.76	24.95
18	432.81	245.90	31.963
19	432.81	245.90	31.963

Esfuerzos tangenciales y anulares punto b

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ(grados)
18	432.81	245.90	31.963
19	432.81	245.90	31.963
13	419.578	305.764	24.950

Esfuerzos tangenciales y anulares punto a

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ(grados)
19	432.81	245.90	31.963
18	432.81	245.90	31.963
13	419.578	305.764	24.950

Cuerdas

PUNTO	c(metros)	b(metros)	a(metros)
18,19	1.167		
19,13		1.109	
13,18			1.109

Esfuerzos en barras punto c, b, a

PUNTO	barra c (kg)	barra b(kg)	barra a(kg)
18,19	354.43		
19,13		305.12	
13,18			305.12

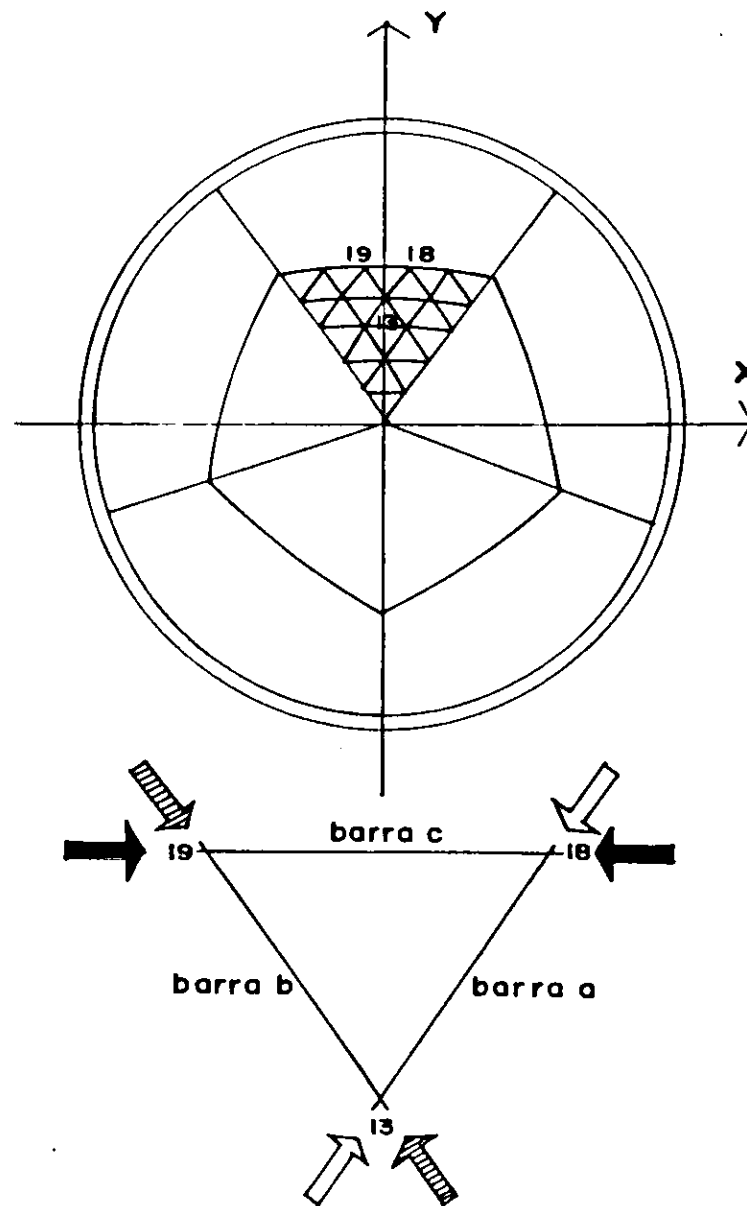


Figura 60 Esfuerzos dodecaedro esférico.

2.2.5 Icosaedro esférico

Esfuerzos tangenciales y anulares punto c

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ(grados)
8	435.179	235.482	33.036
9	435.179	235.482	33.036
13	467.66	100.819	44.715

Esfuerzos tangenciales y anulares punto b

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ(grados)
13	467.66	100.819	44.715
9	435.179	235.482	33.036
8	435.179	235.482	33.036

Esfuerzos tangenciales y anulares punto a

PUNTO	T(kg/m)	H(kg/m)	ϕ(grados)
13	467.66	100.819	44.715
8	435.179	235.482	33.036
9	435.179	235.482	33.036

Cuerdas

PUNTO	c(metros)	b(metros)	a(metros)
8,9	1.973		
9,13		1.980	
13,8			1.980

Esfuerzos en barras punto c, b, a

PUNTO	barra c (kg)	barra b(kg)	barra a(kg)
8,9	609.33		
9,13		611.74	
13,8			611.74

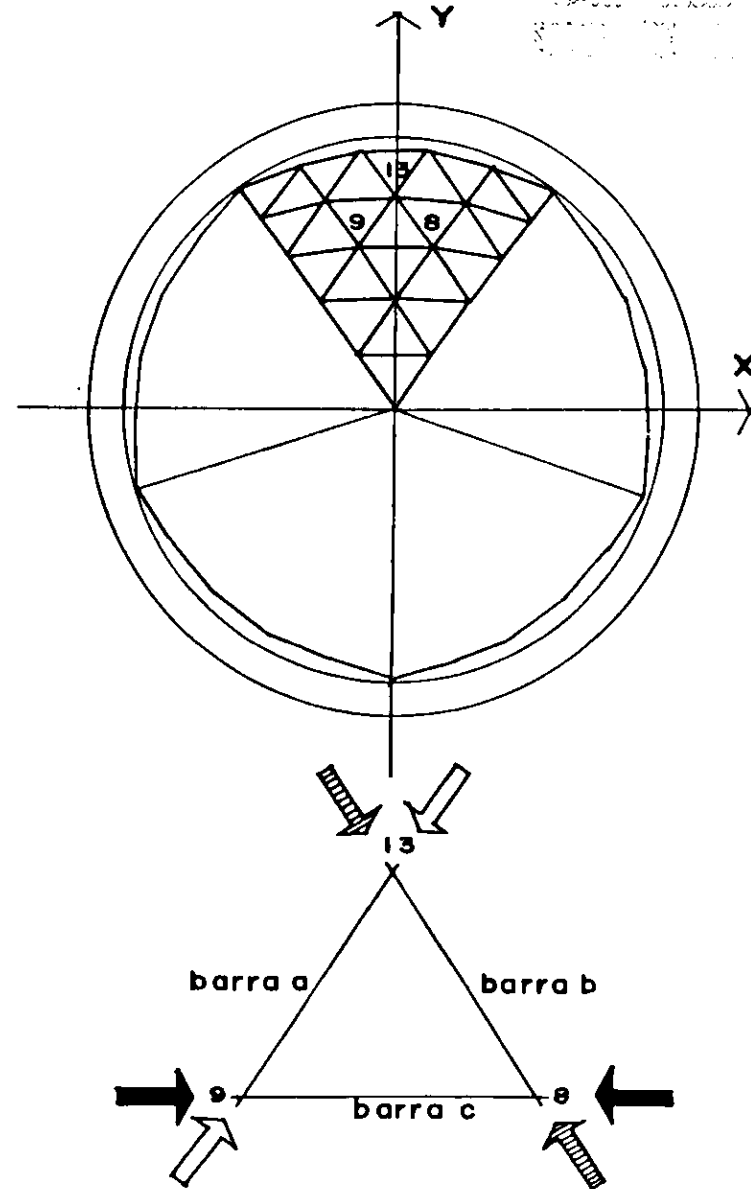


Figura 61 Esfuerzos icosaedro esférico.

III .- ALTERNATIVA DE CONSTRUCCION

3.0.0 GRANDES EJEMPLOS CONSTRUCTIVOS

Para definir una alternativa de construcción, tomamos como referencia los grandes ejemplos constructivos.

Históricamente las cubiertas esféricas se han venido construyendo desde los años 220 a.C., a pesar de los escasos conocimientos sobre geometría y de cálculo estructural que en ese entonces existían, esa carencia indudablemente se veía reflejado en el procedimiento constructivo con el que erigían las cubiertas esféricas, siendo estas de adobe utilizando quizá para el control geométrico un hilo o una vara de madera.

Conforme se fueron dando los conocimientos de geometría se construyeron cubiertas librando cada vez mayores claros, a partir de los años 27 a.C., con el panteón de Roma.

Conocido el uso de coordenadas geográficas como paralelos y meridianos en el año 140 a.C. por HIPARCO DE NICEA, se aplica en construcción hasta el año de 1300 d.C., en la Catedral de Florencia, utilizan como material el ladrillo o la piedra para construir costillas en forma de meridianos adecuados para recibir los esfuerzos de compresión, todo esto realizado con verdadero criterio estructural pero no con métodos de cálculo.

MIGUEL ÁNGEL en pleno Renacimiento construía a base de ladrillos la Basílica de San Pedro, utilizando también a los meridianos como costillas, todo esto con criterio estructural.

El uso de las coordenadas en el espacio tridimensional lo sugirió F. VAN SCHOOTEN en el año de 1657, fue para el año de 1695 cuando examinaron las condiciones de equilibrio de las bóvedas por DE LA HIRE Y PARENT., para ese mismo año A. PARENT representa por primera vez la ecuación de una superficie esférica y de otros sólidos más.

Un conocimiento muy importante lo da LOVACEVSKIJ (1793-1856), como lo es el descubrimiento de las geodésicas, concepto muy importante en los análisis actuales y en los procedimientos constructivos de las cubiertas esféricas.

Estando en la era moderna J.W. SCHWEDLER en el año de 1874, construye la primera cúpula utilizando los armados principales en los sentidos de paralelos y meridianos.

Se construye el primer cascarón de concreto reforzado por CARL ZEISS en el año de 1924.

FULLER organizó y constituyó en 1946, la fundación Fuller de investigación, lo que más le entusiasmaba era las posibilidades de la geodésica, para 1948 enseñaba a construir maquetas de cúpulas geodésicas, hasta llegar a construir su mejor obra llamada EXPO 67, a base de nodos y barras.

Para 1960 PIER LUIGI NERVI construye mediante paneles prefabricados, sobre una retícula romboidal de acero.

CANDELA en 1968 construye el palacio de los Deportes en México, D.F., a base de retícula de meridianos con dos polos perpendiculares entre sí y a base de armaduras de círculo máximo cubiertas con lámina de cobre.

Como podemos observar en los antecedentes de los procedimientos constructivos, van mejorando paralelamente a los conocimientos de geometría no así con los de cálculo de esfuerzos que se han podido dar un poco más atrasados.

Todos estos conocimientos históricos del procedimiento constructivo utilizado hasta ahora me sirven como apoyo para proponer la alternativa de un sistema constructivo diferente que trate de simplificar la edificación de las cubiertas esféricas.

Hoy en día con todos los conocimientos que existen y que se han ido produciendo a través de los siglos para el análisis geométrico y estructural, además de la herramienta para realizarlos tratamos de aprovechar todas estas ventajas proponiendo un sistema constructivo difícil de analizar geométricamente pero fácil de ejecutar como son los casetones de madera autosustentables, que finalmente ha sido de los objetivos principales en el transcurso de los siglos la de simplificar el procedimiento constructivo de las cubiertas esféricas.

3.1.0 MATERIAL

Una vez obtenidos la geometría y los esfuerzos de la cubierta esférica que pretendemos construir, escogemos el material de una gran variedad de los que pueden utilizarse como lo son: el adobe, tabique, piedra, concreto, madera, perfil estructural, panel prefabricado, perfil tubular, aluminio, cobre, vidrio, acrílico y ferrocemento o la combinación de dos o tres de estos materiales o proponemos uno nuevo nunca antes utilizado, si escogemos la última opción se tendría que mandar a realizar pruebas de laboratorio para conocer sus propiedades mecánicas y geométricas, hacer estas pruebas significa un desembolso económico bastante fuerte que dependiendo de la importancia del proyecto a veces no es tan conveniente hacerlo, debido a eso, escogimos la madera que es un material existente en el mercado y en cualquier lugar por muy alejado que esté y además ya existen estudios de sus propiedades mecánicas y geométricas, de la madera se obtienen una gran variedad de productos, como la madera maciza, aglomerados, triplay, ponderplay, etc., de estos escogemos al triplay de pino por ser un material con un acabado muy homogéneo, con dimensiones constantes y muy fácil de trabajar ya sea manualmente o con herramienta eléctrica, una vez definido el material le debemos conocer algunos aspectos como son:

- a).- Características generales.
- b).- Esfuerzos permisibles.
- c).- Elementos de unión.
- d).- Capacidad de carga

a) Características generales.- Uno de los materiales de mayor utilidad en la construcción es el triplay de pino.

Gracias a su constitución a base de chapas dispuestas de manera que las fibras de cada capa quedan perpendiculares a las capas contiguas. En efecto, las resistencias de las láminas de triplay en sus dos direcciones principales son semejantes. Otras ventajas que se derivan de la estructura peculiar del triplay son su alta resistencia al empuje lateral de clavos, pernos y tornillos, su estabilidad

dimensional y su alta resistencia a las fuerzas cortantes en su plano.

Por otra parte la ligereza de los tableros y los componentes estructurales del triplay, así como la facilidad con que se ensamblan, permiten una notable rapidez en los procesos de construcción, sin necesidad de utilizar equipo pesado. De especial interés es la posibilidad de recurrir a sistemas de prefabricación para producir componentes estándar. Sin embargo, para que esto acontezca es necesario contar con información confiable sobre las propiedades del triplay, que deben considerarse en el dimensionamiento adecuado de las piezas.

b) Esfuerzos permisibles.- Los esfuerzos permisibles utilizados para el dimensionamiento del triplay varían con la especie de las láminas que la integran y el tipo de pegamento, estos valores se basan en la American Plywood Association, son aplicables a cargas de duración normal en estructuras en un ambiente tal que el contenido de humedad en equilibrio es menor que el 16%.

En la tabla de esfuerzos permisibles dá esfuerzos cortantes para dos casos: esfuerzo cortantes en planos perpendiculares a las capas del triplay, es decir a través del espesor del triplay y esfuerzo cortante "rodante" o "rolado" (figura 62)

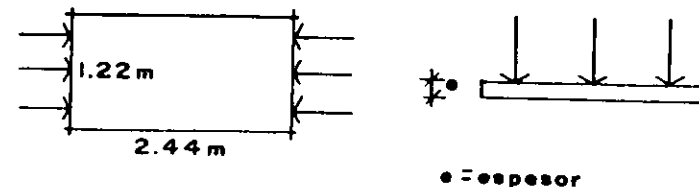


Figura 62 Planos perpendiculares

Rodante o rolado

ESFUERZOS PERMISIBLES

Tipo de esfuerzo	valor permisible (kg/ cm ²)
Flexión o tracción (fibras de la cara exterior paralelas o perpendiculares al claro)_____	55-140
Compresión (en el plano de las capas, en dirección perpendicular o paralela a las fibras de las caras exteriores_____)	40-115
Aplastamiento (compresión perpendicular a las caras exteriores_____)	7- 24
Cortante (en planos perpendiculares a las capas, en dirección perpendicular o paralelas a las fibras de las caras externas_____)	10- 18
Cortante (rodante en el plano de las capas en dirección paralela o perpendicular a las fibras de las caras externas_____)	3- 5
Modulo de elasticidad en flexión (fibras de las caras exteriores paralelas o perpendiculares al claro)_____	63,000-126,000
Modulo de rigidez (para fuerza cortante en planos perpendiculares a las capas)_____	3,150- 6,300

Los esfuerzos cortantes permisibles a través del espesor del triplay se refieren al caso de placas sujetas a un marco en toda su periferia. Cuando la placa está sujeta en solo dos lados, los esfuerzos permisibles deben multiplicarse por 0.89, cuando la sujeción se efectúa en lados paralelos a las fibras de las caras por 0.75.

c) Elementos de unión.- El dimensionamiento de las uniones es uno de los aspectos más difíciles del diseño de estructuras de madera. Como en las estructuras de otros materiales, es importante reconocer que el comportamiento del conjunto estructural no será adecuado si las uniones no tienen la resistencia necesaria para que los elementos estructurales que unen puedan desarrollar la capacidad requerida de ellos. El comportamiento de las uniones o conexiones de madera depende no solo de las

características de la madera sino también de la orientación de la carga con respecto al elemento de unión y de este con respecto a las fibras de madera.

Los elementos de unión más comúnmente utilizados son los clavos y grapas, los pernos, los tornillos, las pijas, las placas de metal o triplay y los pegamentos o colas de diversos tipos.

CLAVOS Y GRAPAS.

El clavo es el elemento de unión más usual en el tipo de construcción ligera, en el que el grosor de las piezas por unir no suele exceder de unos cinco centímetros.

Existe una gran variedad de clavos que se distinguen por el tipo de cabeza y de punta, la relación entre la longitud y el diámetro, el material utilizado en su fabricación y la naturaleza del acabado superficial. Para mejorar la adherencia con la madera y por lo tanto la resistencia a la extracción, se recurre a diversos tratamientos de la superficie. Estos tratamientos pueden consistir en recubrir el clavo con algún material especial o en formar estrías anulares o helicoidales. En el caso de clavos con estrías helicoidales a modo de rosca el clavo va girando al ir penetrando en la madera. Los clavos con estrías son especialmente útiles cuando es necesario hacer ensamblajes con madera verde, ya que conservan considerablemente resistencia a la extracción aun después de la contracción que sufre la madera al secarse. Para obras expuestas a la intemperie conviene disponer de clavos galvanizados o de materiales resistentes a la oxidación.

El clavado de maderas duras, como son muchas de las maderas tropicales, presenta problemas particulares.

Una técnica consiste en hacer el clavado cuando la madera está verde. En tal caso es aconsejable el empleo de clavos estriados. Si el clavado se hace cuando la madera está seca conviene utilizar clavos delgados de acero de alta resistencia incados en agujeros taladrados previamente.

Los clavos pueden usarse de dos maneras; aprovechando su resistencia a fuerzas laterales o aprovechando su resistencia a la extracción. La primera modalidad es la más eficiente (figura 63).

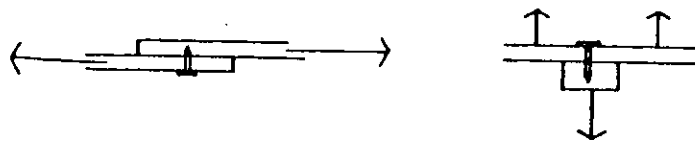


Figura 63 Empuje lateral

Extracción

La capacidad de los clavos para resistir fuerzas laterales está regida por su resistencia a la flexión o tracción y la extracción o por fallas en la madera debidas a rajaduras o aplastamiento de las fibras. La deformación es lo que limita esencialmente la capacidad aprovechable en servicio de este tipo de juntas, la deformación bajo cargas de servicio no debe exceder de 0.4 mm. Para que la capacidad dada sea válida, la penetración de la punta del clavo en la pieza que la recibe, debe ser cuando menos 14 veces el diámetro del clavo y el miembro en contacto con la cabeza deberá tener cuando menos un espesor de 10 veces el diámetro del clavo.

Para los espaciamientos entre clavos se recomiendan los siguientes valores mínimos, en donde D es el diámetro del clavo.

10 D entre hileras de clavos

5 D de los bordes

20 D de los extremos

20 D entre clavos a lo largo de las fibras.

Los espaciamientos indicados se muestran en la (figura 64). La separación mínima entre hileras de clavos paralelas a las fibras puede disminuirse a 8D si los clavos se colocan a tresbolillo (figura 64).

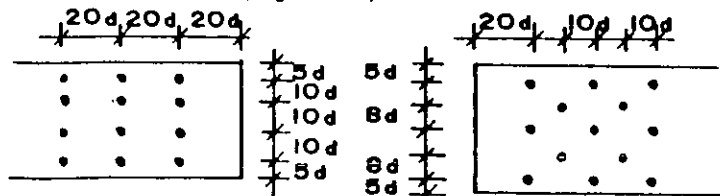


Figura 64 Clavos alineados verticalmente

Tresbolillo

TORNILLOS PARA MADERA Y PIJAS.

Los tornillos para madera varían en longitud de 5/16 " a 3" y pueden tener diversos diámetros.

Se introducen en la madera con la ayuda de un agujero guía con el taladro previamente. Con ellos se logran uniones más rígidas que con los clavos, pero son más caras que éstos y su colocación requiere más mano de obra.

Las pijas tienen rosca como los tornillos, pero su longitud puede llegar a ser de 12". Su diámetro varía de 1/2" a 1".

También requieren un agujero guía para su fijación, que se efectúa con llave de tuerca.

Para maderas duras suele utilizarse tornillos y pijas de rosca fina; para maderas blandas son preferibles de rosca gruesa.

Una regla para escoger dimensiones adecuadas consiste en considerar que la longitud de un tornillo o pija debe ser tal que de la mitad a un tercio de la longitud penetre en el material de la base.

Al igual que los clavos, los tornillos pueden utilizarse de dos maneras, los espaciamientos mínimos de los tornillos serán los siguientes:

3 D entre hileras de tornillos

5 D de los bordes

10 D entre tornillos adyacentes en la dirección de las fibras.

10 D de los extremos.

Estas separaciones son menores que las recomendadas para clavos debido a que al introducir los tornillos en agujeros taladrados previamente se reduce la tendencia de la madera a fisurarse (figura 65).

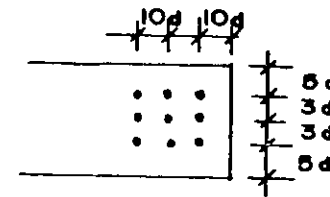


Figura 65 Separaciones mínimas

PERNOS

El perno es uno de los elementos de unión de uso más común porque permite realizar conexiones de considerable resistencia con relativa sencillez. Los pernos pueden tener cabeza en un extremo y rosca y tuerca en el otro o rosca en ambos extremos. Su longitud y diámetro son muy variables.

El diámetro varía en 1/4" y 3", generalmente se emplean en combinación con rondanas, que reducen los esfuerzos al aplastamiento.

Los diámetros de los agujeros no deben ser mayores de 1.6 mm que el de los pernos.

Para que sean aplicables las recomendaciones anteriores en uniones a base de pernos deben respetarse los siguientes espaciamientos mínimos.

1) Cuando la fuerza actúa en la dirección de las fibras.

4 D entre pernos adyacentes

1.5 D entre hileras de pernos

7 D del extremo cargado

4 D del extremo no cargado

1.5 D de los bordes

2) Cuando la fuerza actúa perpendicularmente a la dirección de las fibras.

4 D entre pernos adyacentes en la dirección de las fibras

4 D de los extremos

4 D del borde cargado

1.5 D del borde no cargado

5 D entre hileras de pernos $t/D > 6$

2.5 D entre hileras de pernos para $t/D = 2$ (interpolación entre los dos últimos valores para $2 < t/D \leq 6$.)

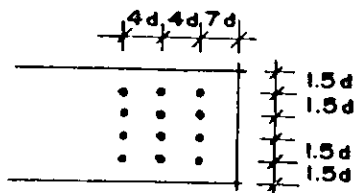


Figura 66 Separaciones mínimas

d) Capacidad de carga.- Se definirán la capacidad de carga que tienen algunos elementos que podríamos utilizar tomando como base que la separación máxima entre apoyos es de 61 cm como lo especifica el reglamento de construcciones:

Triplay de pino con carga uniforme

9 mm 126 kg/m²

12 mm 280 kg/m²

16 mm 484 kg/m²

Triplay de pino a la compresión paralela a las fibras

9x100 mm 296.28 kg

12x100 mm 694.40 kg

16x100 mm 1167.86 kg

Triplay de pino a la tracción paralelas a las fibras

9x100 mm 1386 kg

12x100 mm 1848 kg

16x100 mm 2464 kg

UNIÓN DE 2 PIEZAS DE TRIPLAY DE PINO 9,12,16 mm

Clavos que transmiten fuerzas laterales

2.03x38.1 mm 17.50 kg

2.68x50.8 mm 26.85 kg

2.32x50.8 mm 22.41 kg

Pijas que transmiten fuerzas laterales

3.17x32 mm 23.11 kg

3.51x40 mm 31.16 kg

3.84x50 mm 41.39 kg

Pernos que transmiten esfuerzos de tracción o compresión

diámetro	tracción o corte	Compresión o aplastamiento
pulgadas	kg	kg
5/32"	69.3	185.46
3/16"	181.65	486.00
1/4"	332.43	889.64
5/16"	518.49	1387.57
3/8"	746.55	1997.91

3.2.0 EJEMPLO DEMOSTRATIVO

3.2.1 Secciones y especificaciones

3.2.2 Procedimiento constructivo.

3.2.1 Secciones y especificaciones.- (figura 67) Para poder dimensionar las secciones y especificaciones de los sólidos Platónicos necesitamos tomar de uno de ellos los esfuerzos máximos de los ejemplos en los puntos representativos que tenemos.

En este ejemplo tomaremos los datos del hexaedro esférico, por la razón de ser representativa de esfuerzos máximos de una semiesfera, convirtiendo los esfuerzos obtenidos de una distancia nodal $>a$ 6l cm, a una $= a$ 6l cm, como máximo, tomando en cuenta que los esfuerzos obtenidos en las barras o nervaduras nos representan esfuerzos de compresión (+) y tracción (-).

Datos	Capacidad de carga	Especificación
Carga uniforme $w=100 \text{ kg/m}^2$	126 kg/m ²	triplay 9 mm
$0.61/1.965 \times 1814.78 \text{ kg} = 563.36 \text{ kg}$		
Barra $c = 563.36 \text{ kg}$	694.4 kg	triplay 12 mm
Empalme con pernos 563.36 kg	486.0 kg	perno 3/16"

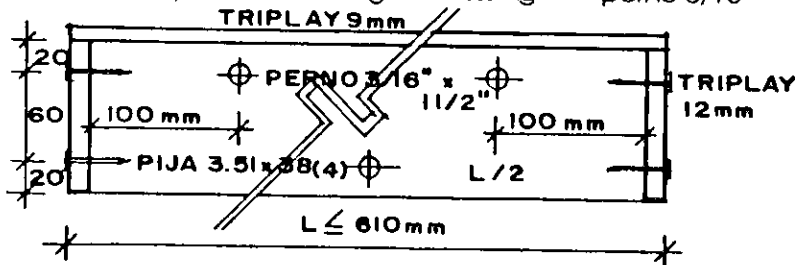


Figura 67 Secciones y especificaciones

3.2.2 Procedimiento constructivo.- Teniendo la geometría, los esfuerzos, el material, las secciones y especificaciones, debemos determinar cual es el procedimiento constructivo a seguir para erigir la cubierta esférica:

- Nervadura
- Cubierta
- Armado
- montaje

e) Impermeabilizante

a) Nervaduras - Si nos referimos a la tabla de geometría 1.2.2 tetraedro esférico en el inciso b) propiedades geométricas ,1) lados , 2) cuerdas tenemos(figura 68):

$$\begin{aligned} l(\text{grados}) &= 34.740 & c(\text{metros}) &= 4.777 \\ lb(\text{grados}) &= 40.579 & b(\text{metros}) &= 5.548 \\ la(\text{grados}) &= 40.579 & a(\text{metros}) &= 5.548 \\ & & & 180^\circ - \text{lados} \end{aligned}$$

$$A = \frac{\quad}{2}$$

Descantar espesor de triplay para nervadura solo en un lado y armamos nervadura según especificaciones.

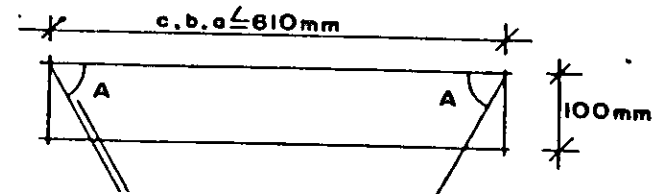


Figura 68 Trazo de nervadura

b) Cubierta - Para el trazo y corte de la cubierta tenemos dos posibilidades ; la primera es con el esqueleto de la nervadura trazamos directamente al triplay ó iniciamos el trazo tomando como datos el inciso 3) ángulos, partiendo de cualquiera de ellos, en este caso escogemos CoC (figura 69). medimos la cuerda $c/2$, b,a.

$$\begin{aligned} \text{CoC}(\text{grados}) &= 50.994 \\ \text{CoB}(\text{grados}) &= 64.502 \\ \text{CoA}(\text{grados}) &= 64.502 \end{aligned} \quad B = \frac{180^\circ - \text{CoC}}{2}$$

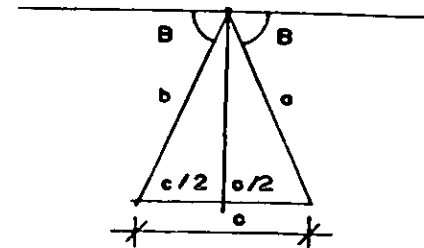


Figura 69 Trazo de cubierta

c) Amado.- Teniendo la cubierta y el esqueleto de la nervadura procedemos a clavar la cubierta sobre el esqueleto de las nervaduras con clavos de 1" sin cabeza, tenemos así los casetones los impregnamos con Osmose contra polilla y quedan listos para su montaje

d) Montaje.- La colocación de las piezas deberá iniciarse a partir de la base en el eje coordenado Z coincidiendo al centro de la pieza con la mitad del ángulo CoC e ir intercalando la posición del ángulo CoC, la colocación deberá continuarse en todo el perímetro de la base, una vez terminado continuar con la siguiente franja y así sucesivamente hasta llegar al polo (figura 70)

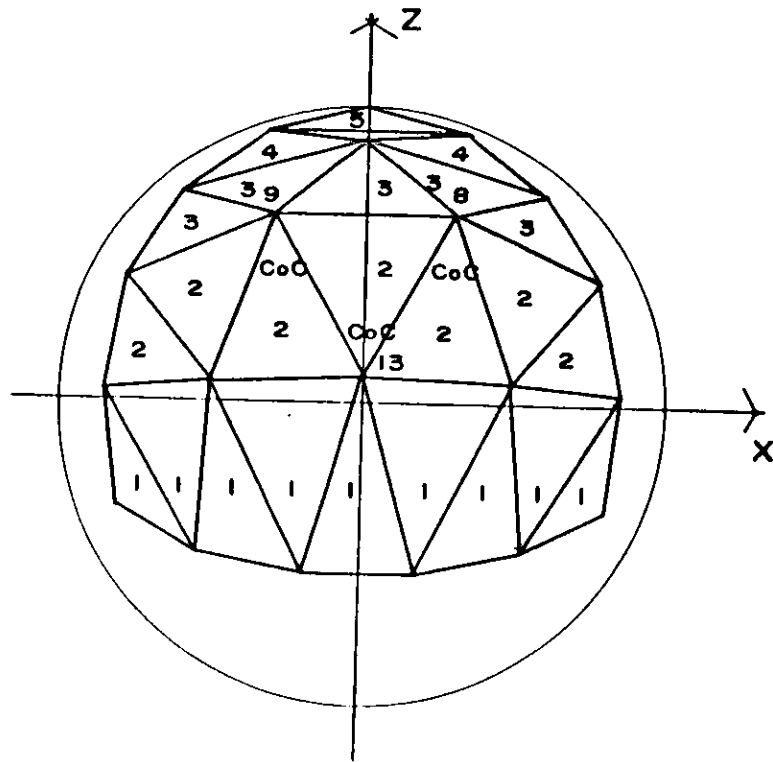


Figura 70 Montaje de piezas

e) Impemeabilizante.- Se deberá utilizar una marca que haya probado su calidad y garantice una duración mínima de 10 años para aplicaciones en frío, en este caso propongo de la marca Imperquimia IQF4.

- Colocar capa de espuma de poliestireno de 2 cm. de espesor.
- Limpieza y preparación de la superficie eliminando materiales sueltos.
- Calafatear con Bituplastic, zonas críticas, tales como juntas, grietas, chafanes, bajadas, etc.
- Aplicación de una mano de imprimador Imperprim S-L
- Aplicación de una capa Impercoat S - 40
- Colocación de una malla de fibra de vidrio Vitricoat con traslapes mínimos de 5 cm.
- Aplicación de una segunda capa de Impercoat S - 40
- Colocación de una segunda capa de fibra de vidrio
- Aplicación de una tercera capa de Impercoat S - 40
- Colocación de una tercera capa de fibra de vidrio
- Aplicación de una cuarta capa de Impercoat S - 40
- Colocación de una cuarta capa de fibra de vidrio
- Aplicación de una quinta capa de Impercoat S - 40
- Aplicación de gravilla
- Aplicación de Bitucolor color rojo

CONCLUSIONES

Según la inquietud que tuve hace algunos años en mis épocas de estudiante preparatorio, en los cursos de geometría analítica y de cálculo diferencial e integral, al ver en ellos las diferentes superficies que existen y que pensaba podrían utilizarse para construir cubiertas con formas curvas, a diferencia de las cubiertas con forma recta que se ven a lo largo y ancho de las ciudades.

Al ver que aproximadamente en un 98 % de las cubiertas son edificadas con variantes de la línea recta, me propuse que cuando pudiera estudiar arquitectura trataría de aprender a diseñar y a calcular preferentemente utilizando cubiertas con formas curvas para mi muy novedosas, ¡o decepción! no enseñaban a diseñar con estas formas en la carrera en mi etapa de estudiante.

En la materia de diseño en licenciatura dejan proponer, pero siempre se termina planteando las mismas cubiertas con forma recta.

Por temor a reprobado o quizá por ignorancia al desconocer su solución geométrica y estructural, no se proponen soluciones utilizando superficies curvas, que además ofrecen muchas alternativas y pueden dividirse en una gran variedad como las cilíndricas, esféricas, cónicas, de revolución y regladas.

Por una gran fortuna se abrió un curso piloto de cubiertas ligeras por el año de 1983. A cargo de los Doctores López Carmona y Oliva Salinas con la colaboración del Maestro Francisco Reyna Gómez y los arquitectos Ricardo Arancón y Jorge Sánchez Ochoa en donde se trataría todo lo relacionado a este tipo de superficies, me involucré en el curso, donde pude darme cuenta de la información sustanciosa y de sus diferentes aplicaciones que existe de algunas de estas formas como son las cilíndricas, regladas y la de traslación de distancia nodal constante, pero nada más, de las esféricas y las de revolución existe información aislada, ante esta carencia decidí abocarme a obtenerla de una de ellas como lo es la superficie esférica.

Tratando de obtener diferentes alternativas de diseño de estas pretendidas cubiertas como pueden ser el triángulo, cuadrado, pentágono y hexágonos esféricos, etc..

Para poder diseñar con esta variedad, diferentes cubiertas esféricas, se logra circunscribiendo la superficie esférica a los poliedros regulares o Platónicos como se explica detalladamente en este documento.

Indudablemente que la elaboración de esta investigación no fue en absoluto rápida, ni fácil, ya que hubo la necesidad de salvar algunos escollos como el que en ese tiempo pensaba, prefabricar una pieza triangular y con ella cubrir toda la superficie, o la dificultad de diseñar los programas de computo que fueran útiles para resolver la propuesta específica o la de proponer un sistema constructivo que ayudara agilizar la construcción de estas cubiertas, además que no fuera la misma de las que se han utilizado, solo por el hecho de proponer una alternativa de construcción diferente.

Dos de estos escollos fueron solventados: El programa de computo y la alternativa de construcción, únicamente pudimos darnos cuenta que cubrir con una sola pieza la superficie esférica no es posible debido a que esta superficie es de n grados, siendo n las divisiones que se hacen a los arcos de una de las caras de los sólidos Platónicos, obteniendo por consecuencia si $n=5$ quince piezas diferentes repetidas según el número de caras de los sólidos 4, 6, 8, 12, 20, este contratiempo finalmente no nos perjudicó ya que sigue siendo prefabricable esta alternativa de construcción.

Lo que da por concluida una paciente labor de muchos años y que en mi modesta opinión aportó a la tecnología el procedimiento de análisis geométrico y estructural por computadora, así como la alternativa de construcción, todo esto me deja satisfecho al haberse cumplido satisfactoriamente los objetivos trazados inicialmente.

BIBLIOGRAFÍA

- AYRES, FRANK Jr. Trigonometría plana y esférica
México : McGraw Hill , 1970.
- ANFOSSI, AGUSTÍN; M.A. FLORES MEYER . Geometría analítica
México, Progreso, 1972.
- COLIN, FABER. Las estructuras de Candela
México: CECSA, 1981 .
- CAMPOS, NEWMAN, LUIS E. Redes y mallas de estructuras geodésicas
México: UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA, 1989.
- CEBALLOS, FRANCISCO JAVIER. Qbasic y MS-dos 5
USA: ADDISON WESLEY IBEROAMERICANA , 1992.
- DE LA TORRE , CARBO , MIGUEL . Geometría descriptiva
México : UNAM , 1975.
- GARCIA , SALGADO , TOMAS. Perspectiva modular
México, UNAM , 1981 .
- GRANVILLE ;SMITH ; MIKESH . Trigonometría plana y esférica
México : UTEHA , 1982.
- GOLSTEIN, JOEL LARRY. IBM pc y compatibles
México: PRENTICE HALL , 1987.
- HOOPER, ALFRED ; GRISWOLD, ALICE. Trigonometría
México: PUBLICACIONES CULTURAL ,1975.
- HEARN; DONALD; BAKER PAULINE . Gráficas por computadora
México: PRENTICE HALL, 1988.
- JOYANES, AGUILAR, LUIS. Turbo basic manual de programación
España : McGraw - Hill , 1989.
- J., HEINEN, T.; J., GUTIERREZ, V. Estructuras
México: PROEESA, 1992.
- LEHMANN , CHARLES H. Geometría analítica.
México: UTEHA , 1977.
- LANDAVERDE , FELIPE DE JESÚS . Geometría
México: Progreso , 1970.
- MENNA, GONCALVEZ, ZOZIMO. Geometría analítica del espacio enfoque vectorial
México: LIMUSA, 1981 .
- NÁÑEZ, MARTÍNEZ , JORGE . Modelos proporcionados.
México : Apuntes , 1987.
- OLVERA, LÓPEZ, ALFONSO. Análisis , cálculo y diseño de las bóvedas de cascará.
México : C.E.C.S.A. , 1982.
- PLASTOCK, ROY, A.; KALLEY GORDON. Gráficas con P.C
México: SCHAUM, 1987.
- ROSEN, SIDNEY. El mago de la cúpula
México: Diana , 1970.
- ROBLES FERNANDEZ, VILLEGAS, F. Estructuras de madera
México: LIMUSA , 1983.
- TERRAZAS, BOLÍVAR , HECTOR CARLOS. Vectores y el espacio Euclidiano tridimensional
México: UNAM , 1986.
- WENTWORT , JORGE ; SMITH , DAVID E. Geometría plana y del espacio.
México: Porrúa , 1984.