

13  
2 ejm



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**El teorema de cirugía de Kirby**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**M A T E M A T I C O**  
P R E S E N T A :  
**ALEJANDRO GONZALEZ ROMERO**

DIRECTOR DE TESIS: DR. MARIO EDOARDO MUÑOZ.



**TESIS CON**  
**FALLA DE ORIGEN**  
1998  
FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

266287



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

El teorema de cirugía de Kirby

realizado por Alejandro González Romero

con número de cuenta 8621539-8 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

Dr. Mario Eudave Muñoz

*Mario Eudave Muñoz*

Propietario

Dr. Max Neumann Coto

*Max Neumann Coto*

Propietario

Dr. Víctor Núñez Hernández

*Víctor Núñez Hernández*

Suplente

M.C. Lorena Armas Sanabria

*Lorena Armas Sanabria*

Suplente

M.C. Gabriel Ruiz Hernández

*Gabriel Ruiz Hernández*

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. Julio César Guevara Bravo

*Julio César Guevara Bravo*

---

Con cariño a ...

Dios, por todas las cosas que nos brinda a diario.

Mis Padres, porque he contado con ellos en todo momento.

    Mi vocabulario no es tan amplio para poder  
    externar el profundo amor que siento por ustedes.  
¡Gracias, en verdad se los agradezco de todo corazón!.

Laura y Ricardo, mis hermanos, por el tiempo  
que pasamos juntos, su amistad y ayuda.

    Ojalá que la fraternidad que se creó cuando  
éramos niños perdure a lo largo de nuestras vidas.

Angélica, mi novia, una mujer maravillosa  
con quien he compartido bellos momentos.

    Espero que al pasar del tiempo,  
cuando las hojas caigan al llegar el otoño,  
ella abra este libro y recuerde cuanto la quiero.

Mi familia, cuya convivencia ha sido muy grata.

---

**Gracias a ...**

**Dios,**

**Mario**, por la dirección en este trabajo, sus acertadas correcciones y el tiempo que siempre amablemente me brindó.

**Víctor**, por sus valiosas observaciones que ayudaron a mejorar notoriamente la tesis.

**Max**, por su interés en el trabajo.

**Lorena y Gabriel** por su apoyo y sugerencias.

**Maestro Ian**, por toda la ayuda y cariño que me ha brindado, no sólo en este trabajo sino a lo largo de nuestro haber.

**Maestro Amador**, un gran amigo que siempre me ha tendido una mano.

**Armando**, un amigo en quien he podido confiar.

**Hugo y Ana**, por los ánimos que me han dado y todo lo que hemos compartido.

**Sr. Héctor Loza**, por sus sabios consejos.

**Adriana Loza**, porque es buena onda.

**Gerardo Ernesto y Aydé**, por sus consejos y las enseñanzas a través de su forma de vivir.

**Gerardo y Lorena**, por sus ánimos y ayuda.

---

Adriana Ortíz, por su manera alegre de compartir la vida.

Leonardo, por todas sus atenciones.

Iván Arcos, por su cariño y fortaleza.

Rosalía, por que siempre estuvo cuando lo necesité.

Bueno, si sigo nunca me voy a titular, así que comprendan tanto los amigos a quienes menciono rápidamente como los que no menciono.

Gracias por múltiples razones a: Lorena, Ana, Reyna, Maistro Gustavo, Malaquías, Maistro Jorge, Luis, Giorgio, Bernardo, Germán, Héctor, Claudia Reyes, Andrés, Germán, Manuel, Paco, Julio, Antonio, Paty, Lety, Miguel Angel, la familia Bernal, Octavio, Aredí, Erick y sus papás una hermosa familia con quien siempre he contado, Hayde, Elsa ...

Quiero agradecer al Laboratorio de Visualización (DGSCA) por su apoyo en el uso de herramientas de computo para dibujos, especialmente a Joaquín Hernández jefe de este departamento, así como también a sus demás miembros de quienes recibí no sólo ayuda sino también un grato trato, ellos son: Ian García Olmedo mi gran gran amigo y un gran maistro, Víctor Godoy (Alias Master), amigo también quien me ayudó y asesoró en varios dibujos. Carmen, Reyna, José Luis Villarreal y Lizbeth Heras, muy buenos amigos todos ellos. No sobra en este renglón agradecer a Angélica Loza Orozco, mi novia quien me ayudó bastante en varios dibujos en *Showcase* y también en la escritura de la tesis en *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*.

Finalmente aunque no por ello en menor medida, agradezco a mis maestros y asesores de toda la carrera, ello son: Alejandro Bravo, por sus enseñanzas y por habernos concedido un espacio para las divertidas reuniones de ajedrez, Ana Meda, por ser como es, Hugo Rincón, un buen amigo, Guillermo Gómez, por su comprensión y sabios consejos, María Emilia, Santiago, Laura Hidalgo, Laura Pastrana, Abdón Sánchez, ...

Una disculpa a todos los que no mencioné por falta de tiempo y memoria, ustedes saben que los estimo.

# El teorema de cirugía de Kirby

Alejandro González Romero

Octubre 1998

## Índice General

0	Introducción	1
1	Preliminares	4
2	Jugadas de Kirby	18
3	Enlaces y variedades	24
4	Teorema de Kirby	35
A	El análogo del teorema de Kirby en dimensión 1	60
A.1	Preliminares . . . . .	60
A.2	Jugadas de Kirby . . . . .	63
A.3	0-Enlaces y 1-Variedades . . . . .	65
A.4	$(1, 0)$ -Teorema de Kirby . . . . .	68
	Referencias	80

## 0 Introducción

La presente tesis trata sobre la demostración de Lu [Lu2] del Teorema de Kirby [K] en el cual se basa el llamado Cálculo de Kirby que es el estudio de las modificaciones de enlaces enmarcados que no cambian la 3-variedad que determinan via cirugía. Este teorema, o más bien la versión de Fenn-Rourke [FR] del teorema de Kirby, establece que dos enlaces enmarcados  $L_1$  y  $L_2$  definen la misma 3-variedad orientada si y sólo si es posible pasar de  $L_1$  a  $L_2$  haciendo un número finito de modificaciones, llamadas jugadas  $K$  y jugadas  $K^{-1}$ , que se describen pictóricamente en la figura siguiente.

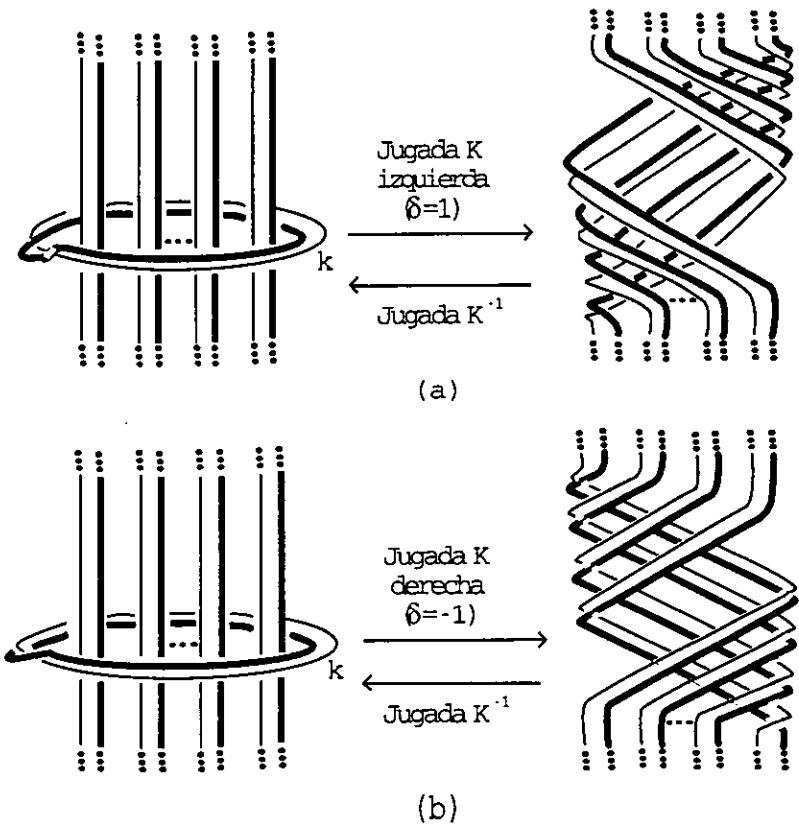


Figura 0.1



Como ejemplo consideremos los enlaces con coeficientes  $L_1$  y  $L_2$  de las Figuras 0.2(a) y 0.2(d).

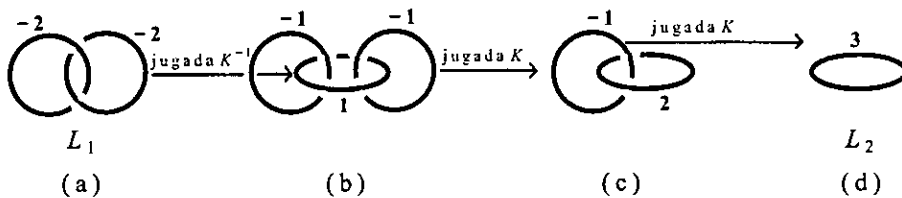


Figura 0.2

Estos enlaces determinan, por cirugía, la misma 3-variedad. Por el teorema de Kirby,  $L_2$  debe obtenerse de  $L_1$  haciendo jugadas  $K$  y  $K^{-1}$ . En efecto, la Figura 0.2 muestra cómo pasar de  $L_1$  a  $L_2$  mediante jugadas  $K$  y  $K^{-1}$  (los cambios en los coeficientes de cirugía se explican en la Proposición 2.1).

La versión original de Kirby [K] utilizaba en vez de la  $K$ -jugada como movimiento elemental, dos jugadas una de las cuales es la jugada discoidal que es una  $K$ -jugada en la que la componente  $k$  de  $L$  que se elimina no enlaza a  $L - k$ . La equivalencia de las dos versiones no es difícil (ver por ejemplo [PS], Teorema 19.5). En la demostración original de Kirby la teoría de Cerf, que no es fácilmente entendible, jugaba un papel central. Más intuitiva es la demostración de Lu en la que se utiliza una presentación del grupo de homeotopía  $Homeo^+(\Sigma_g)$  de una superficie  $\Sigma_g$  dada por Wajnryb [Waj], basada en un artículo previo de Hatcher y Thurston [HT]. Supondremos válida esta presentación, el teorema clásico de Singer-Reidemeister sobre equivalencia estable de descomposiciones de Heegaard de una 3-variedad (ver [C]) y un resultado de Lu [Lu1] que da un conjunto de generadores para el subgrupo de  $Homeo^+(\Sigma_g)$  de elementos representados por homeomorfismos que se extienden a homeomorfismos de un cubo con asas  $H_g$  con  $\partial H_g = \Sigma_g$ .

En la sección 1 damos las definiciones necesarias, incluyendo la de enlace enmarcado, y describimos la 3-variedad orientada obtenida haciendo cirugía en éste. También definimos cubo con asas, descomposición de Heegaard y enunciamos el teorema de Reidemeister-Singer. Si  $W$  y  $W'$  son cubos con asas determinamos cuándo un homeomorfismo de  $\partial W$  sobre  $\partial W'$  se extiende a uno de  $W$  sobre  $W'$ . Definimos el concepto central de giro en una superficie, y damos un teorema sobre composiciones de giros (Teorema 1.2) del cual se deduce después el teorema de Wallace-Lickorish (Teorema 3.2) que afirma que toda 3-variedad orientable cerrada se obtiene haciendo cirugía en un enlace enmarcado de  $S^3$ .

En la sección 2 definimos la jugada de Kirby (o jugada  $K$ ) y describimos, usando giros, el efecto de una jugada  $K$  en una curva paralela a un meridiano (Proposición 2.2).

En la sección 3 definimos para cada sucesión finita  $\sigma$  de giros un homeomorfismo  $f_\sigma$ , que es la composición de los giros de  $\sigma$ , y un enlace enmarcado  $L_\sigma$ . Pegando dos cubos con asas por el homeomorfismo  $f_\sigma$  se obtiene una 3-variedad  $M(f_\sigma)$ , y haciendo cirugía en  $L_\sigma$

---

obtenemos  $M(L_\sigma)$ . Se prueba que  $M(f_\sigma)$  y  $M(L_\sigma)$  son homeomorfos ( $M(f_\sigma) \approx M(L_\sigma)$ ). También se hace ver que todo enlace enmarcado es de la forma  $L_\sigma$ .

En la sección 4 enunciamos y probamos el teorema de Kirby (Teorema 4.1), usando el teorema de Reidemeister-Singer (Teorema 1.1), el de Lu (Teorema 4.2) y el de Wajnryb (Teorema 4.3). Para probar que si  $M(L_\sigma) \approx M(L_{\sigma'})$  entonces  $L_{\sigma'}$  se obtiene haciendo jugadas  $K$  y  $K^{-1}$  adecuadas en  $L_\sigma$  ( $L_\sigma \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma'}$ ) se siguen los siguientes pasos:

0. Usando el teorema de Reidemeister-Singer se puede suponer que la descomposición de Heegaard natural de  $M(f_\sigma)$  es equivalente a la de  $M(f_{\sigma'})$ .
1. Usando el teorema de Lu 4.2 se obtiene  $\sigma_1$  tal que  $L_\sigma \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1}$  y  $f_{\sigma_1} = f_{\sigma'}$ .
2. Usando el lema de conjugación 4.2 se obtienen  $\sigma_2$  y  $\sigma'_2$  tales que  $f_{\sigma_2} = f_{\sigma_1} = f_{\sigma'} = f_{\sigma'_2}$ , las componentes de  $\sigma_2$  y de  $\sigma'_2$  son giros de las curvas de la Figura 1.8,  $L_{\sigma_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1}$  y  $L_{\sigma'_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma'}$ .
3. Usando la presentación de Wajnryb se prueba que  $L_{\sigma_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma'_2}$ .

En el apéndice se demuestra una versión unidimensional del teorema de Kirby, en la cual aparecen las ideas principales de la prueba del Teorema 4.1.

Usaremos notación de Nielsen, es decir, la composición  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  de funciones  $f$  y  $g$  la denotaremos por  $fg$  como en los artículos previos de Lu, Wajnryb y Hatcher-Thurston. También la imagen de  $a \in A$  bajo una función  $f : A \rightarrow B$  la denotaremos por  $(a)f$ .

---

## 1 Preliminares

Un espacio topológico  $X$  es de *Hausdorff* si puntos distintos de  $X$  tienen vecindades ajenas.

Un espacio topológico  $X$  tiene *base numerable* si existe una familia numerable  $\mathfrak{B}$  de abiertos de  $X$  tal que todo abierto de  $X$  es unión de miembros de la familia  $\mathfrak{B}$ .

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos,  $A \subset X$  y  $\varphi : A \rightarrow Y$ . Entonces  $X \cup_{\varphi} Y$  denota el espacio obtenido de la unión ajena  $X \amalg Y$  identificando, para toda  $x \in A$ ,  $x$  con  $(x)\varphi$ .

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Un *homeomorfismo* de  $X$  sobre  $Y$  (resp. *encaje* de  $X$  en  $Y$ ) es una biyección (resp. inyección) continua  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  (resp.  $f^{-1} : (X)f \rightarrow X$ ) es continua. La frase "homeomorfismo de  $X$ " querrá decir "homeomorfismo de  $X$  sobre  $X$ ".  $X$  es *homeomorfo* a  $Y$  si existe un homeomorfismo de  $X$  sobre  $Y$ .

Utilizaremos con frecuencia la siguiente proposición o su corolario.

**Proposición 1.1** Sean  $A_1$  y  $A_2$  cerrados de  $X$  tales que  $A_1 \cup A_2 = X$ . Sea  $f : X \rightarrow Y$  suprayectiva y tal que  $f|_{A_i} : A_i \rightarrow (A_i)f$  es homeomorfismo ( $i = 1, 2$ ). Supongamos que  $(A_1)f$  y  $(A_2)f$  son cerrados de  $Y$  cuya intersección es  $(A_1 \cap A_2)f$ . Entonces  $f$  es homeomorfismo.  $\square$

**Corolario 1.1** Sean  $f_i : A_i \rightarrow B_i$  homeomorfismo ( $i = 1, 2$ ),  $\varphi : C \rightarrow A_2$  y  $\psi : (C)f_1 \rightarrow B_2$  tales que  $C, (C)\varphi, (C)f_1$  y  $(C)f_1\psi$  son cerrados en  $A_1, A_2, B_1$  y  $B_2$  respectivamente. Supongamos que  $(c)\varphi f_2 = (c)f_1\psi \forall c \in C$ . Entonces existe un homeomorfismo de  $A_1 \cup_{\varphi} A_2$  sobre  $B_1 \cup_{\psi} B_2$  que coincide con  $f_i$  en  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ).  $\square$

Dos homeomorfismos (resp. encajes)  $f$  y  $g$  de  $X$  sobre  $Y$  (resp. de  $X$  en  $Y$ ) son *isotópicos* si existe  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  continua tal que:

- (i) La función  $f_t : X \rightarrow Y$ , definida por  $(x)f_t = (x, t)H$ , es un homeomorfismo de  $X$  sobre  $Y$  (resp. encaje de  $X$  en  $Y$ ) para toda  $t \in [0, 1]$ .
- (ii)  $f_0 = f$  y  $f_1 = g$ .

Decimos entonces que  $\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$  es una *isotopía* de  $f$  a  $g$ .

La isotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de homeomorfismos de  $X$  sobre  $Y$  (resp. encajes de  $X$  en  $Y$ ). Una clase de equivalencia se llama una *clase de isotopía*.

Frecuentemente identificaremos dos homeomorfismos  $f, g$  de  $X$  sobre  $Y$  si son isotópicos y escribiremos  $f = g$ .

Usaremos después las siguientes observaciones. Si  $f_0, f_1, g_0$  y  $g_1$  son homeomorfismos de  $X$  tales que  $f_0$  es isotópico a  $f_1$  y  $g_0$  es isotópico a  $g_1$  entonces  $f_0 g_0$  es isotópico a

$f_{1g_1}$ . Si  $h$  es un homeomorfismo de  $X$  isotópico a la identidad entonces, para cualquier homeomorfismo  $f$  de  $X$ ,  $f^{-1}hf$  es isotópico a la identidad.

Consideraremos además del espacio euclidiano  $R^n$  los subespacios siguientes:

$$\begin{aligned} H^n &= \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n \geq 0\} \\ D^n &= \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

También identificaremos a  $D^2$  (resp. a  $S^1$ ) con el espacio de los complejos de módulo menor o igual que 1 (resp. módulo igual a 1).

El término *curva* significará curva simple cerrada, es decir, espacio homeomorfo a  $S^1$ .

Una  $n$ -variedad  $M^n$  es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable tal que todo punto de  $M^n$  tiene una vecindad abierta homeomorfa a  $R^n$  o a  $H^n$ .

Un punto  $x$  de la  $n$ -variedad  $M^n$  es *interior* (resp. *frontera*) si  $x$  tiene (resp. no tiene) una vecindad abierta homeomorfa a  $R^n$ . El conjunto de puntos interiores (resp. puntos frontera) de  $M^n$  se llama *el interior* (resp. *la frontera*) de  $M^n$  y se denota por  $\text{int}M^n$  (resp.  $\partial M^n$ ). Por ejemplo  $\partial D^2 = S^1$ .

Una  $n$ -variedad  $M^n$  es *cerrada* si  $M^n$  es compacta, conexa y  $\partial M^n = \emptyset$ .

Un subespacio  $W^n$  de la  $n$ -variedad  $M^n$  tal que  $W^n$  y  $\overline{M^n - W^n}$  son  $n$ -variedades se llama una  $n$ -*subvariedad* de  $M^n$ .

Una  $n$ -variedad  $M^n$  es *orientable* si ningún subespacio de  $M^n$  es homeomorfo a  $F^2 \times D^{n-2}$  donde  $F^2$  es la cinta de Möbius.

Una *orientación* de la  $n$ -variedad orientable conexa  $M^n$  es una clase de isotopía de encajes de  $D^n$  en  $M^n$ .

Puede probarse que una  $n$ -variedad orientable conexa  $M^n$  tiene exactamente dos orientaciones: si  $\varphi : D^n \rightarrow M^n$  representa una orientación entonces  $\rho\varphi : D^n \rightarrow M^n$  representa la otra, donde  $\rho : D^n \rightarrow D^n$  está definida por  $(x_1, x_2, \dots, x_n)\rho = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Una  $n$ -variedad *orientada* es una  $n$ -variedad orientable conexa  $M^n$  junto con una orientación de  $M^n$ .

Sean  $M_1^n$  y  $M_2^n$   $n$ -variedades orientadas en donde  $\varphi_1 : D^n \rightarrow M_1^n$  y  $\varphi_2 : D^n \rightarrow M_2^n$  representan las orientaciones de  $M_1$  y  $M_2$ . Un encaje (que puede ser homeomorfismo)  $h : M_1^n \rightarrow M_2^n$  *conserva orientación* si  $\varphi_1 h$  es isotópico a  $\varphi_2$ . Obsérvese que si el homeomorfismo  $h$  conserva orientación entonces todo homeomorfismo isotópico a  $h$  también conserva orientación.

Si existe un homeomorfismo que conserve orientación de la  $n$ -variedad orientada  $M_1^n$  sobre la  $n$ -variedad orientada  $M_2^n$ , escribiremos  $M_1^n \approx M_2^n$ . El símbolo  $(M_1^n, X_1, Y_1) \approx (M_2^n, X_2, Y_2)$  significa que existe un homeomorfismo  $h$  de  $M_1^n$  sobre  $M_2^n$  que conserva orientación tal que  $(X_1)h = X_2$  y  $(Y_1)h = Y_2$ .

Sea  $M^n$  variedad orientada; el conjunto de clases de isotopía de homeomorfismos  $h$  de  $M^n$  sobre  $M^n$  que conservan orientación es un grupo que llamaremos el *grupo de homeotopía*

de  $M^n$  y que denotaremos por  $\text{Homeo}^+(M^n)$ . Nótese que si  $h : M^n \rightarrow M^n$  es un homeomorfismo que conserva orientación cuando se da una orientación a  $M^n$  en dominio y codominio, entonces  $h$  también conserva orientación si se cambia, en dominio y codominio, la orientación de  $M^n$ . Por lo tanto podemos hablar del grupo de homeotopía de la  $n$ -variedad orientable conexa  $M^n$  (aunque no esté orientada).

Si  $W^n$  es  $n$ -subvariedad conexa de la variedad orientada  $M^n$  entonces  $W^n$  es orientable y la *orientación inducida* en  $W^n$  es la representada por  $\varphi : D^n \rightarrow W^n$  tal que  $\varphi i : D^n \rightarrow M^n$  representa la orientación de  $M^n$ , donde  $i : W^n \rightarrow M^n$  es la inclusión. Nótese que si cambia la orientación de  $M^n$  entonces cambia la orientación inducida en  $W^n$ .

La orientación que damos a  $D^n$  es la representada por la identidad y la que damos a  $R^n$  es la representada por la inclusión de  $D^n$  en  $R^n$ .

Orientamos  $D^2 \times [0, 1]$  de tal manera que el encaje de  $D^2 \times [0, 1]$  en  $R^3$  que manda a  $((x_1, x_2), t)$  en  $(x_1, x_2, t)$  conserve orientación.

Sea  $S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$ , la compactificación unipuntual de  $R^3$ ;  $S^3$  es orientable y cerrada. La orientación estándar en  $S^3$  es la representada por la inclusión de  $D^3$  en  $R^3 \cup \{\infty\}$ . Orientamos  $S^1 \times [0, 1]$  de tal manera que induzca en  $S^1 \times (0, 1]$  una orientación tal que el encaje de  $S^1 \times (0, 1]$  en  $D^2$  que manda a  $(z, t)$  en  $tz$  conserva orientación.

A  $S^1$ , el espacio de los complejos de módulo 1, le damos la orientación representada por el encaje de  $D^1$  en  $S^1$  que manda a  $t$  en  $e^{it}$ . A ésta la llamamos la orientación usual de  $S^1$ .

Si  $k$  es homeomorfo a  $S^1$  una orientación de  $k$ , representada por un encaje  $e : D^1 \rightarrow k$ , frecuentemente se indicará con una flecha dibujada en  $k$  que indica el sentido en el que  $(t)e$  se mueve cuando  $t$  crece; esta flecha determina la orientación de  $k$ . Por ejemplo, en la Figura 1.1 la flecha indica la orientación usual de  $S^1$ .

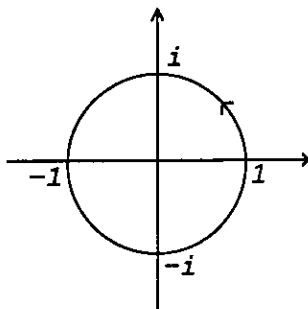


Figura 1.1

Sean  $k_1$  y  $k_2$  curvas orientadas en una variedad  $Y$ . Diremos que  $k_1$  y  $k_2$  son *isotópicas* en  $Y$  si existen homeomorfismos  $\alpha_i : S^1 \rightarrow k_i$  ( $i = 1, 2$ ) que conservan orientación, tales

que los encajes  $\alpha_1 j_1$  y  $\alpha_2 j_2$  son isotópicos donde  $j_i : k_i \rightarrow Y$  es la inclusión.

Un *toro sólido* es un espacio homeomorfo a  $S^1 \times D^2$ . Sean  $T$  un toro sólido y  $k$  una circunferencia contenida en  $T$ . Se dice que  $k$  es *ánima* de  $T$  si existe un homeomorfismo  $\Psi$  de  $S^1 \times D^2$  sobre  $T$  que manda a  $S^1 \times \{0\}$  en  $k$ .

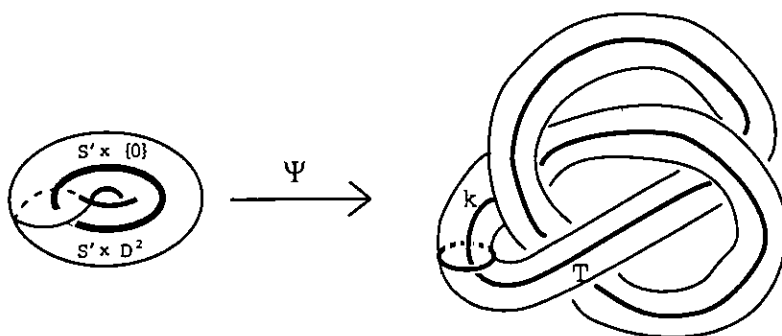


Figura 1.2

Un cubo con  $g$  asas es una 3-variedad orientable  $W^3$  tal que existen  $g$  encajes  $e_i : D^2 \times [-1, 1] \rightarrow W^3$  ( $i = 1, \dots, g$ ) con imágenes ajenas tales que  $(\partial W^3)e_i^{-1} = (\partial D^2) \times [-1, 1]$  ( $i = 1, \dots, g$ ) y  $W^3 - \bigcup_{i=1}^g (D^2 \times [-1, 1])e_i$  es homeomorfo a una 3-bola.

Si  $W^3$  es un cubo con  $g$  asas y se tienen encajes  $e_i$  de  $D^2 \times [-1, 1]$  en  $W^3$  que satisfacen las condiciones de la definición anterior diremos que  $\bigcup_{i=1}^g (\partial D^2 \times \{0\})e_i$  es un *conjunto meridiano* de  $W^3$ , que cualquiera de sus componentes es un *meridiano* de  $W^3$  y que  $\bigcup_{i=1}^g (D^2 \times \{0\})e_i$  es un *conjunto discoidal meridiano* de  $W^3$ . Cuando digamos que  $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_g$  es un conjunto meridiano de  $W$  se sobreentenderá que cada  $S_i$  es un meridiano de  $W$ .

Obsérvese que un toro sólido es un cubo con 1 asa.

Nótese que la frontera de un cubo con  $g$  asas es una superficie orientable de género  $g$ . Veremos después, en la Proposición 1.3, que si  $W$  y  $W'$  son ambos cubos con  $g$  asas, entonces  $W$  y  $W'$  son homeomorfos.

Si  $W$  y  $W'$  son cubos con  $g$  asas queremos saber cuándo un homeomorfismo de  $\partial W$  sobre  $\partial W'$  se extiende a uno de  $W$  sobre  $W'$ .

**Lema 1.1 (Alexander)** Si  $A$  y  $B$  son homeomorfos a  $D^n$  entonces todo homeomorfismo  $h$  de  $\partial A$  sobre  $\partial B$  se extiende a un homeomorfismo de  $A$  sobre  $B$ .

*Demostración:* (Truco de Alexander) Sean  $\alpha : D^n \rightarrow A$  y  $\beta : D^n \rightarrow B$  homeomorfismos y  $f = \alpha\beta^{-1}$ . Definimos  $F : D^n \rightarrow D^n$  por  $(t \cdot x)F = t \cdot (x)f$ , con  $x \in \partial D^n$  y  $0 \leq t \leq 1$ .

Entonces  $F$  es un homeomorfismo (su inversa  $F^{-1}$  se define como  $(t \cdot x)F^{-1} = t \cdot (x)f^{-1}$ ) y es extensión de  $f$ .  $\square$

**Proposición 1.2** Sean  $W$  y  $W'$  cubos con  $g$  asas y  $S_1, \dots, S_g$  circunferencias cuya unión es un conjunto meridiano de  $W$ . Sea  $h : \partial W \rightarrow \partial W'$  homeomorfismo tal que  $(\bigcup_{i=1}^g S_i)h$  es un conjunto meridiano de  $W'$ . Entonces  $h$  se extiende a un homeomorfismo de  $W$  sobre  $W'$ .

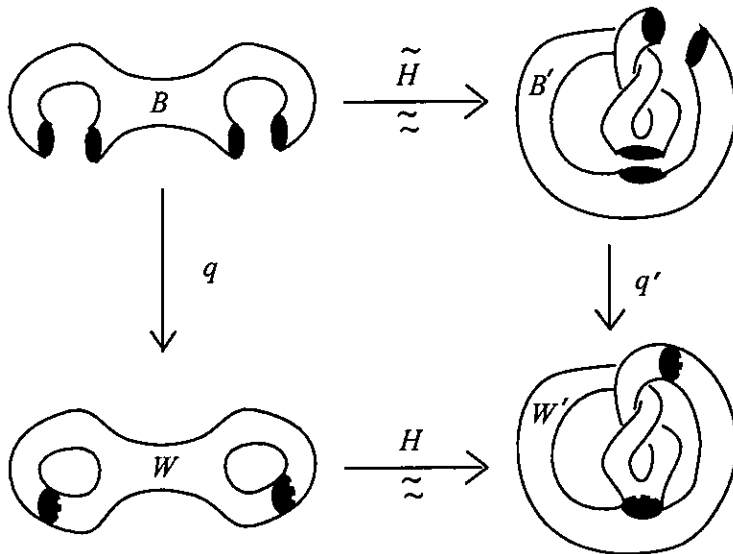


Figura 1.3

*Demostración:* Sea  $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g$  conjunto discoidal meridiano de  $W$  tal que  $\partial D_i = S_i$ . Sean  $S'_i = (S_i)h$  ( $i = 1, \dots, g$ ) y  $D'_1 \cup D'_2 \cup \dots \cup D'_g$  conjunto discoidal meridiano de  $W'$  tal que  $\partial D'_i = S'_i$ . Por el Lema de Alexander con  $n = 2$ ,  $h$  se extiende a un homeomorfismo  $h_1$  de  $(\partial W) \cup D_1 \cup \dots \cup D_g$  sobre  $(\partial W') \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_g$ . Lo que haremos a continuación será cortar  $W$  a lo largo de  $\bigcup_{i=1}^g D_i$  (resp. cortar  $W'$  a lo largo de  $\bigcup_{i=1}^g D'_i$ ) obteniendo así una 3-bola  $B$  (resp.  $B'$ ) de tal manera que  $h_1$  induce un homeomorfismo  $\tilde{h}_1 : \partial B \rightarrow \partial B'$  el cual se extiende a  $\tilde{H} : B \rightarrow B'$  que induce el homeomorfismo  $H : W \rightarrow W'$  buscado. (Ver Figura 1.3).

Parametrizamos una vecindad de  $D_i$  en  $W$  como  $D_i \times [-1, 1]$  de tal manera que  $(D_i \times [-1, 1]) \cap \partial W = (\partial D_i) \times [-1, 1]$ . En lo que sigue  $[0, -1]$  denota el intervalo  $[-1, 0]$ . En la unión ajena  $(W - \bigcup_{i=1}^g D_i) \amalg (\amalg (D_j \times [0, \epsilon]))$ , donde  $j$  y  $\epsilon$  recorren respectivamente  $\{1, \dots, g\}$  y  $\{-1, 1\}$ , si  $0 < |t| \leq 1$  identificamos  $(x, t) \in D_j \times [0, \frac{t}{|t|}]$  con

$(x, t) \in W - \bigcup_{i=1}^g D_i$ . Al espacio que resulta, que llamamos  $W$  cortado a lo largo de  $\bigcup_{i=1}^g D_i$ , lo denotamos por  $B$ . Si en  $B$  identificamos  $(x, 0) \in D_j \times [0, 1]$  con  $(x, 0) \in D_j \times [0, -1]$ , donde  $1 \leq j \leq g$  y  $x \in D_j$ , obtenemos  $W$  como cociente; denotamos por  $q : B \rightarrow W$  a la función canónica. Nótese que  $\partial B$  es la unión de  $\partial W - \bigcup_{i=1}^g S_i$  con  $2g$  discos que son las copias de  $D_j \times \{0\}$  en  $\Pi(D_j \times [0, \varepsilon])$ .

De manera análoga, utilizando vecindades  $D'_i \times [-1, 1]$  de  $D'_i$  en  $W'$ , definimos  $W'$  cortado a lo largo de  $\bigcup_{i=1}^g D'_i$ , espacio que denotamos por  $B'$  y  $q' : B' \rightarrow W'$  la función canónica.

Definimos  $\tilde{h}_1 : \partial B \rightarrow \partial B'$  como  $(p)\tilde{h}_1 = (p)h_1 \in \partial W' - \bigcup_{i=1}^g S'_i$  si  $p \in W - \bigcup_{i=1}^g S_i$  y, si  $p = (x, 0) \in D_j \times [0, \varepsilon]$ , entonces  $(p)\tilde{h}_1 = ((x)h_1, 0) \in D'_j \times [0, \varepsilon]$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ). Es fácil ver que  $\tilde{h}_1$  es un homeomorfismo así que por el Lema de Alexander para  $n = 3$ , se extiende a un homeomorfismo  $\tilde{H}$  de  $B$  sobre  $B'$ . Nótese que, si  $(p_1)q = (p_2)q$ , entonces  $(p_1)\tilde{H}q' = (p_2)\tilde{H}q'$ . Se ve entonces que  $\tilde{H}$  induce un homeomorfismo  $H : W \rightarrow W'$  y que  $H$  restringido a  $\partial W$  es  $h$ .  $\square$

**Corolario 1.2** Sean  $T$  y  $T'$  toros sólidos. Si  $f$  es un homeomorfismo del toro  $\partial T$  en el toro  $\partial T'$  que manda un meridiano de  $T$  en un meridiano de  $T'$  entonces  $f$  se extiende a un homeomorfismo de  $T$  sobre  $T'$ .  $\square$

Sea  $M^3$  una 3-variedad cerrada orientada. Un enlace  $L$  de  $M^3$  es una unión de circunferencias ajenas  $k_1, \dots, k_n$  ( $n \geq 0$ ) en  $M^3$ . Siempre supondremos que el enlace es manso, es decir, que existen toros sólidos ajenos  $T_1, \dots, T_n$  tales que  $k_i$  es ánima de  $T_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) y  $S^3 - \text{int}(T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n)$  es variedad. A  $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$  se le llama una *vecindad tubular de  $L$* .

Si  $L$  es un enlace y tanto  $T$  como  $T'$  son vecindades tubulares de  $L$  se puede probar que existe un homeomorfismo de  $S^3$  sobre  $S^3$  que manda a  $T$  sobre  $T'$  ([RS], Teorema 3.24).

El exterior de un enlace  $L$  de  $M^3$  se define como  $M^3 - \text{int}T$  donde  $T$  es vecindad tubular de  $L$ .

Un *enlace enmarcado de  $M^3$*  es un enlace  $L = k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_n$  de  $M^3$  junto con curvas (llamadas *marcos*)  $f_1, \dots, f_n$  tales que  $f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_n \subset \partial T$ , donde  $T$  es vecindad tubular de  $L$ , y existen anillos ajenos  $A_1, \dots, A_n$  contenidos en  $T$  tales que  $\partial A_i = k_i \cup f_i$ . Diremos entonces que  $f_i$  es el *marco de  $k_i$* .

El enlace enmarcado  $L$  de  $M$  es *equivalente* al enlace enmarcado  $L'$  de  $M'$  si podemos numerar las componentes de  $L$  como  $k_1, \dots, k_n$  y las de  $L'$  como  $k'_1, \dots, k'_n$  de tal manera que existe un homeomorfismo de  $M$  sobre  $M'$  que conserva orientación, manda a  $k_i$  en  $k'_i$  y al marco de  $k_i$  en el de  $k'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Las frases "enlace" y "enlace enmarcado" significarán respectivamente "enlace de  $S^3$ " y "enlace enmarcado de  $S^3$ ".

Un *nudo* es un enlace que consta de una sola componente.

Al enlace vacío lo denotaremos por  $\emptyset$ .



Sea  $L = k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_n$  un enlace enmarcado con marcos respectivos  $f_1, \dots, f_n$ . La 3-variedad cerrada orientada  $M(L)$  obtenida por cirugía en  $L$  se define como sigue:

Sea  $L = k_1 \cup \dots \cup k_n$  con marcos respectivos  $f_1, \dots, f_n$ . Sea  $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$  vecindad tubular de  $L$  con  $k_i \subset T_i$  y  $f_i \subset \partial T_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Sean  $D_1^2, \dots, D_n^2$   $n$  copias de  $D^2$ , y  $\varphi : \prod_{i=1}^n S^1 \times \partial D_i^2 \rightarrow S^3 - \text{int}T$  encaje con imagen  $\partial T$  tal que  $(\{1\} \times \partial D_i^2)\varphi = f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Entonces  $M(L) = (\prod_{i=1}^n S^1 \times D_i^2) \cup_{\varphi} (S^3 - \text{int}T)$ .

No es difícil probar, usando otra vez el lema de Alexander, que si  $\varphi'$  es otro homeomorfismo de  $\prod_{i=1}^n S^1 \times \partial D_i^2$  sobre  $\partial T$  tal que  $(1 \times \partial D_i^2)\varphi' = f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) entonces  $(\prod_{i=1}^n S^1 \times D_i^2) \cup_{\varphi'} (S^3 - \text{int}T)$  es homeomorfo a  $(\prod_{i=1}^n S^1 \times D_i^2) \cup_{\varphi} (S^3 - \text{int}T)$ .

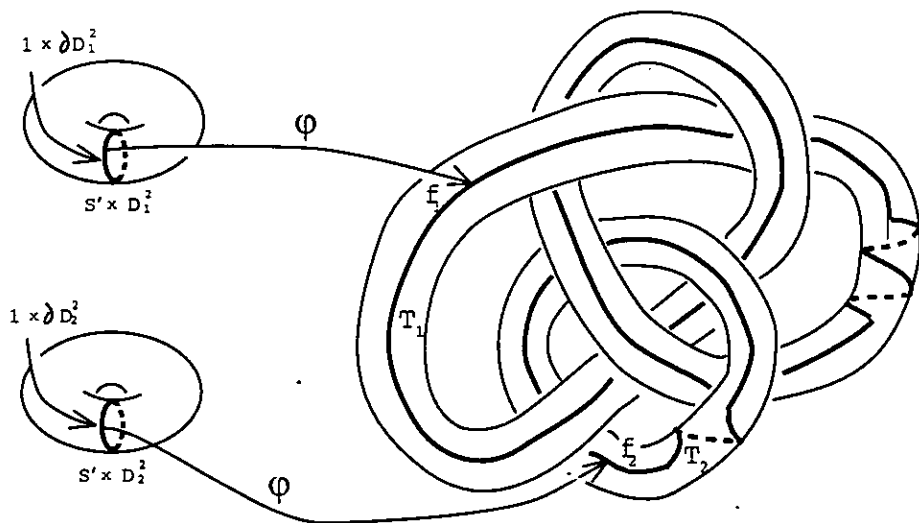


Figura 1.4

Nótese que  $S^3 - \text{int}T$  es 3-subvariedad conexas de  $S^3$  y de  $M(L)$ . Damos a  $M(L)$  la orientación que induce en  $S^3 - \text{int}T$  la misma orientación que la orientación estándar de  $S^3$ .

Si  $L = \emptyset$ , entonces  $M(L) = S^3$ .

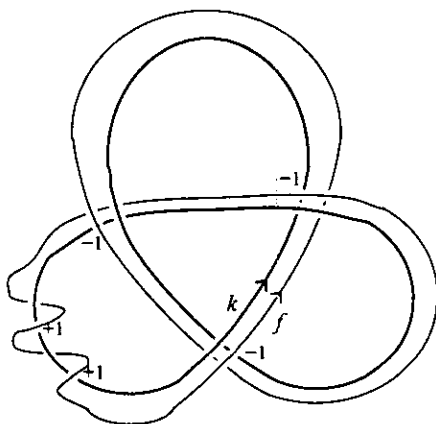
Hagamos ver ahora que si  $L$  y  $L'$  son enlaces enmarcados equivalentes entonces

$$M(L) \approx M(L').$$

Sean  $L = k_1 \cup \dots \cup k_n$  con marcos respectivos  $f_1, \dots, f_n$  y  $L' = k'_1 \cup \dots \cup k'_n$  con marcos respectivos  $f'_1, \dots, f'_n$ . Sea  $h : S^3 \rightarrow S^3$  homeomorfismo que conserva orientación tal que  $(k_i)h = k'_i$  y  $(f_i)h = f'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Sea  $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$  vecindad tubular de  $L$  con  $f_i \subset \partial T_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Escribimos  $T' = (T)h$ . Se tiene que  $M(L) = (\prod_{i=1}^n S^1 \times$

$D_i^2) \cup_{\varphi} (S^3 - \text{int}T)$  y  $M(L') = (\prod_{i=1}^n S^1 \times D_i^2) \cup_{\varphi} (S^3 - \text{int}T')$  con  $(\{1\} \times \partial D_i^2)\varphi = f_i$  y  $(\{1\} \times \partial D_i^2)\varphi' = f'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Como  $(\prod_{i=1}^n \{1\} \times \partial D_i^2)\varphi h(\varphi')^{-1} = \prod_{i=1}^n \{1\} \times \partial D_i^2$ , se extiende el homeomorfismo  $\varphi h(\varphi')^{-1}$  de  $\prod_{i=1}^n S^1 \times \partial D_i^2$  a un homeomorfismo de  $\prod_{i=1}^n S^1 \times D_i^2$  por el Corolario 1.2. Se tiene entonces que  $M(L) \approx M(L')$  por el Corolario 1.1.

Sean  $k$  y  $f$  dos nudos orientados ajenos en  $R^3$ . El número de enlace de  $k$  con  $f$ , que se denota por  $lk(k, f)$ , es un entero que se puede calcular como sigue (ver [Ro], p. 132). Considérese una proyección regular de  $k \cup f$ , es decir una proyección sobre un plano en la que hay un número finito de puntos múltiples, los cuales son todos dobles y en cada uno de ellos un arco cruza a otro (ver [CF] Capitulo VI pags 72-73); un punto doble es positivo (resp. negativo) si  $f$  cruza sobre  $k$  de la izquierda de  $k$  a la derecha de  $k$  (resp. de la derecha de  $k$  a la izquierda de  $k$ ), donde izquierda y derecha se definen con respecto a un observador que viaje por  $k$  en la dirección de  $k$ . No se contabilizan los puntos dobles en los que  $f$  cruza a  $k$  por debajo ni aquellos en los que  $f$  cruza a  $f$  o  $k$  cruza a  $k$ . Entonces  $lk(k, f)$  es el número de puntos dobles positivos menos el número de puntos dobles negativos. Por ejemplo en la Figura 1.5  $lk(k, f) = -1$ .



$$lk(k, f) = -1$$

Figura 1.5

Puede probarse que  $lk(k, f) = lk(f, k)$ . También si se cambia la orientación de una de las componentes entonces el número de enlace cambia de signo. Si  $k$  es frontera de una superficie orientable en  $R^3$  que no interseca a  $f$  entonces  $lk(k, f) = 0$ .

Si  $L = k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_n$  es un enlace enmarcado, donde los marcos respectivos son  $f_1, \dots, f_n$ , el coeficiente de cirugía de  $k_i$  es el número de enlace  $lk(k_i, f_i)$  en donde  $k_i$  y  $f_i$  se han orientado de tal manera que son isotópicos en una vecindad tubular de  $k_i$  que contiene a  $f_i$ . En la Figura 1.5, en que  $f$  es marco de  $k$ , el coeficiente de cirugía de  $k$  correspondiente a  $f$  es  $-1$ .

Dado un enlace  $L = k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_n$  y enteros (coeficientes de cirugía)  $c_1, \dots, c_n$  es fácil ver que existen marcos  $f_1, \dots, f_n$  de  $L$  tales que  $c_i = lk(k_i, f_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Sea  $L$  el enlace enmarcado  $k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_n$  con marcos  $f_1, \dots, f_n$  y sea  $L'$  el enlace  $k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_n$  con marcos  $f'_1, \dots, f'_n$ . Supongamos que  $lk(k_i, f_i) = lk(k_i, f'_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), es decir, que los coeficientes de cirugía de  $L$  coinciden con los de  $L'$ . Entonces  $L$  es equivalente a  $L'$  y, por tanto,  $M(L) \approx M(L')$ . Así,  $M(L)$  depende sólo del enlace  $L$  y de los coeficientes de cirugía. Por lo anterior un enlace enmarcado se puede describir como un enlace  $k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_n$  con marcos  $f_1, \dots, f_n$  o bien con coeficientes de cirugía asociados a sus componentes.

Consideramos  $S^2 = R^2 \cup \{\infty\}$  como el plano  $xy$  junto con el punto  $\infty$ .

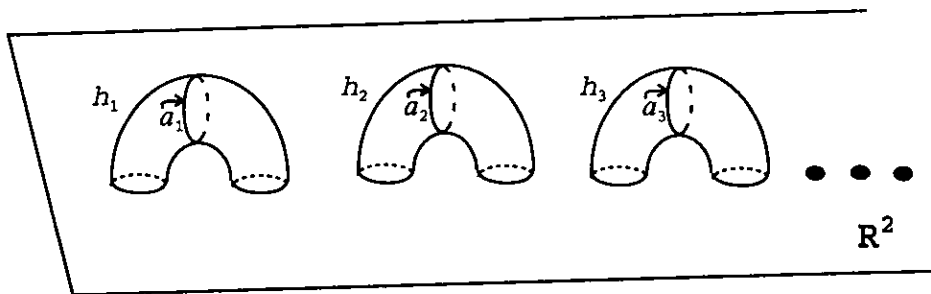


Figura 1.6

Sean  $h = \{(x, y, z) : x^2 + (\sqrt{y^2 + z^2} - 2)^2 \leq 1, z \geq 0\}$ ,  $T : R^3 \rightarrow R^3$  la traslación definida por  $(x, y, z)T = (x, y + 8, z)$  y  $h_i = (h)T^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Las  $h_i$  son asas (es decir,  $h_i$  es homeomorfo a  $D^2 \times I$ ) ajenas, sin puntos abajo del plano  $xy$  y tales que  $S^2 \cap \partial h_i$  es la unión de dos discos ajenos. Definimos, para  $g \geq 1$ ,

$$\Sigma_g = S^2 \cup (\partial h_1 \cup \partial h_2 \cup \dots \cup \partial h_g) - (\text{int}(S^2 \cap h_1) \cup \dots \cup \text{int}(S^2 \cap h_g))$$

$H_g$  es la unión de  $(h_1 \cup h_2 \cup \dots \cup h_g \cup \{\infty\})$  con el conjunto de puntos de  $R^3$  cuya tercera coordenada es menor o igual que cero y  $H'_g = S^3 - \overline{H_g}$ .

Es decir  $H_g$  y  $H'_g$  son las cerraduras de las componentes de  $S^3 - \Sigma_g$ .

La orientación que damos a  $\Sigma_g$  es la representada por el encaje de  $D^2$  en  $\Sigma_g$  que manda a  $(x, y)$  en  $(x, y, 0)$ .

Sea  $M^3$  una 3-variedad cerrada orientada. Una *descomposición de Heegaard* de  $M^3$  es una pareja de cubos con asas  $(U, U')$  tal que  $U \cup U' = M$  y  $U \cap U' = \partial U = \partial U'$ .

Del hecho de que toda 3-variedad es triangulable ([M] Teorema 35.3) se sigue que para toda 3-variedad cerrada orientable  $M^3$  existe una descomposición de Heegaard de  $M^3$ : la vecindad regular  $U$  de la unión de las aristas de una triangulación de  $M^3$  es un cubo con

asas y  $\overline{M^3 - U}$  también lo es. (Véase [He] Teorema 2.5 p. 17; [Li3] Lema 12.12 y [Ro] Cap. 9, Teorema 2, p. 240).

Sean  $(U_1, U'_1)$  y  $(U_2, U'_2)$  descomposiciones de Heegaard de  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente. Decimos que  $(U_1, U'_1)$  y  $(U_2, U'_2)$  son equivalentes si existe un homeomorfismo  $h : M_1 \rightarrow M_2$  que conserva orientación,  $(U_1)h = U_2$  (y, por consiguiente  $(U'_1)h = U'_2$ ).

La pareja  $(H_g, H'_g)$  se llama la descomposición estándar de género  $g$  de  $S^3$ .

Sea  $B^3_+ = \{(x, y, z) \in R^3 : y \geq 0\} \cup \{\infty\} \subset S^3$ .

Sean  $(U, U')$  una descomposición de Heegaard de  $M^3$ , y  $r$  un entero positivo. Sea  $B$  una 3-bola en  $M^3$  tal que  $B \cap \partial U$  es un 2-disco con  $\text{int}(B \cap \partial U) \subset \text{int}B$ . Sean  $e_1, \dots, e_r$  encajes de  $D^2 \times [0, 1]$  en  $U' \cap \text{int}B$  con imágenes ajenas tales que  $(\partial U')e_i^{-1} = D^2 \times \{0, 1\}$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Escribamos  $t_i = (D^2 \times [0, 1])e_i$  y supongamos además que existe un homeomorfismo de  $B$  sobre  $B^3_+$  que manda a  $(U \cap B) \cup t_1 \cup \dots \cup t_r$  sobre  $B^3_+ \cap H_r$ . Entonces no es difícil ver que  $(U \cup t_1 \cup \dots \cup t_r)$  y  $\overline{U' - (t_1 \cup \dots \cup t_r)}$  son ambos cubos con asas; luego  $(U \cup t_1 \cup \dots \cup t_r, \overline{U' - (t_1 \cup \dots \cup t_r)})$  es una descomposición de Heegaard de  $M^3$  que decimos se obtiene de  $(U, U')$  agregando  $r$  asas triviales.

**Teorema 1.1** (Reidemeister [Re], Singer [S]) Sean  $(U, U')$  y  $(V, V')$  dos descomposiciones de Heegaard de  $M^3$ . Entonces existen descomposiciones de Heegaard equivalentes  $(\tilde{U}, \tilde{U}')$  y  $(\tilde{V}, \tilde{V}')$  de  $M^3$  que se obtienen respectivamente de  $(U, U')$  y  $(V, V')$  agregando asas triviales. (Ver [C]).  $\square$

Sea  $\theta$  una curva simple cerrada en una superficie  $F$ , que no es frontera de un 2-disco de  $F$ . Una vecindad anular de  $\theta$  en  $F$  es una vecindad de  $\theta$  que es homeomorfa a un anillo.

Sean  $F$  una superficie orientada y  $\theta$  una curva simple cerrada (no necesariamente orientada) en  $F$ . Definiremos un homeomorfismo  $\Theta : F \rightarrow F$  como sigue: Parametrizamos una vecindad anular  $A$  de  $\theta$  en  $F$  como  $S^1 \times [0, 1]$  por un encaje de  $S^1 \times [0, 1]$  en  $F$  que conserve orientación; entonces  $\Theta : F \rightarrow F$  es la identidad fuera de  $A$  y  $(z, t)\Theta = (ze^{-2\pi it}, t)$  si  $(z, t) \in S^1 \times [0, 1]$ . Nótese que si cambiamos la vecindad  $A$  o la parametrización obtenemos un homeomorfismo isotópico a  $\Theta$ . A  $\Theta$  lo llamamos un giro positivo de  $\theta$  y a  $\Theta^{-1}$  un giro negativo de  $\theta$ . (Véase la Figura 1.7).

Si  $F$  es una superficie orientable y  $\theta$  es una curva en  $F$ , un giro de  $\theta$  es un homeomorfismo  $\Theta$  de  $F$  tal que, dando a  $F$  una orientación,  $\Theta$  es un giro positivo o negativo de  $\theta$ . A las curvas en  $\Sigma_g$  indicadas en la Figura 1.8 las llamaremos curvas de Lickorish y a los giros positivos y negativos de estas curvas giros de Lickorish.

Notación: Si una curva simple cerrada la denotamos por  $\theta_i$ , entonces al giro positivo de  $\theta_i$  lo denotamos por  $\Theta_i$ . (El giro negativo de  $\theta_i$  sería  $\Theta_i^{-1}$ ).

Sea  $F$  superficie compacta y sean  $\alpha$  y  $\beta$  curvas simples cerradas en  $\text{int}F$ . Definimos  $\alpha \cdot \beta$  como el mínimo número  $m$  tal que  $\alpha \cap (\beta)h$  consta de  $m$  puntos, donde  $h$  es un homeomorfismo de  $F$  isotópico a la identidad y  $\alpha$  interseca transversalmente a  $(\beta)h$ . Nótese que  $\alpha \cdot \beta$  está bien definido y  $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ .

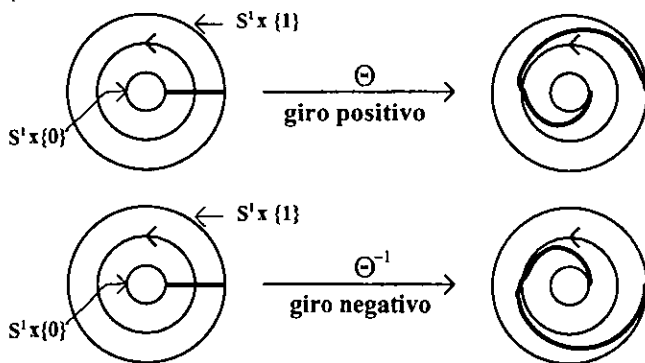


Figura 1.7 Giros

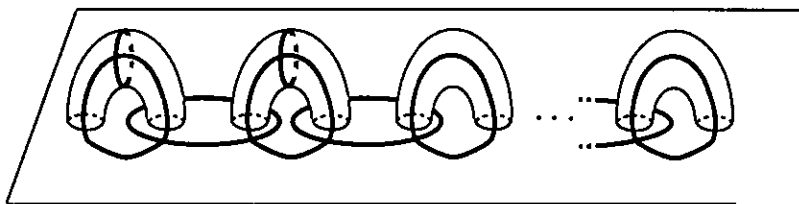


Figura 1.8

Diremos que una curva  $\alpha$  en la superficie  $F$  es *separante* si  $F - \alpha$  no es conexo.

El símbolo  $|X|$  significará el número de puntos del conjunto  $X$ .

Denotaremos por  $G_F$  al conjunto de homeomorfismos de la superficie orientable compacta  $F$  que son isotópicos a una composición de giros y son la identidad en  $\partial F$ . Es fácil ver que  $G_F$  es un subgrupo del grupo de homeomorfismos de  $F$ .

**Teorema 1.2** Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  curvas simples cerradas ajenas en el interior de una superficie orientable compacta  $F$  tales que  $F - \bigcup_{i=1}^n \alpha_i$  es conexo. Sean  $\beta_1, \dots, \beta_n$  curvas simples cerradas ajenas en  $\text{int}F$  tales que  $F - \bigcup_{i=1}^n \beta_i$  es conexo. Entonces existe un homeomorfismo  $h \in G_F$ , tal que  $(\alpha_i)h = \beta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

*Demostración:* La prueba será por inducción en  $n$ . Demostraremos primero el caso  $n = 1$  por inducción en  $\alpha_1 \cdot \beta_1$ . Escribamos  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\beta = \beta_1$  y  $m = \alpha \cdot \beta$ . Podemos suponer  $|\alpha \cap \beta| = m$  y que  $\alpha$  interseca transversalmente a  $\beta$ .

Caso I:  $m = 1$ .

Aplicando un giro  $\tau_\beta$  de  $\beta$  seguido de un giro  $\tau_\alpha$  de  $\alpha$  se transforma  $\alpha$  en una curva  $\beta'$  tal que  $(\beta')\iota = \beta$  para algún homeomorfismo  $\iota$  de  $F$  isotópico a la identidad con  $\iota|_{\partial F}$  la identidad (véase la Figura 1.9). Entonces  $\tau_\beta\tau_\alpha\iota \in G_F$  y  $(\alpha)\tau_\beta\tau_\alpha\iota = \beta$ .

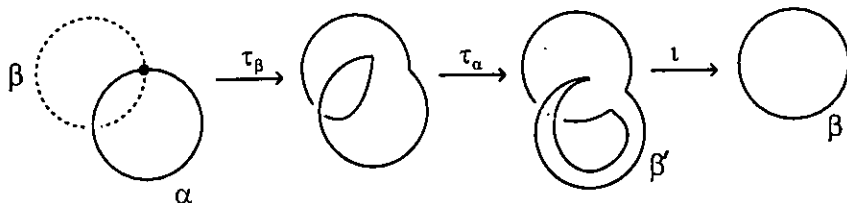


Figura 1.9

Caso II:  $m = 0$ .

En las dos situaciones posibles,  $F - (\alpha \cup \beta)$  conexo y  $F - (\alpha \cup \beta)$  con dos componentes, ejemplificadas en las Figuras 1.10(a) y 1.10(b), es fácil ver que existe una curva no separante  $\gamma$ , que interseca transversalmente a  $\alpha$  y  $\beta$  con  $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta = 1$  así que, por el Caso I, podemos transformar a  $\alpha$  en  $\gamma$  y a  $\gamma$  en  $\beta$  con homeomorfismos en  $G_F$ .

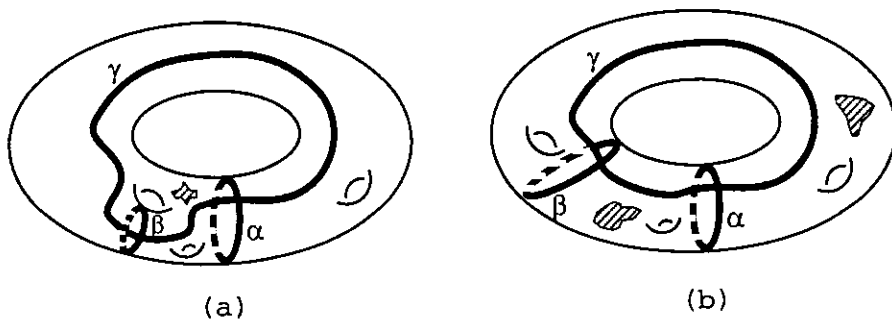


Figura 1.10

Caso III:  $m > 1$ .

Razonaremos por inducción en  $m$ . Será entonces suficiente probar que existe una curva no separante  $\gamma$  tal que  $\gamma \cdot \alpha \leq 1$  y  $\gamma \cdot \beta < m$ . En efecto, si se tiene tal curva  $\gamma$  podemos transformar con homeomorfismos en  $G_F$  a  $\alpha$  en  $\gamma$  por los Casos I y II, y a  $\gamma$ , en  $\beta$  por inducción.

Para probar la existencia de tal  $\gamma$ , considérese un arco  $l$  contenido en  $\beta$  tal que  $l \cap \alpha = \partial l$ . Los puntos de  $\partial l$  subdividen a  $\alpha$  en dos arcos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Si los extremos de  $l$  están en lados distintos de  $\alpha$ , entonces tanto  $l \cup \alpha_1$  como  $l \cup \alpha_2$  son curvas no separantes pues son isotópicas

a curvas que tocan a  $\alpha$  en un punto y, tomando  $\gamma = \alpha_1 \cup l$ , se tiene  $\gamma \cdot \beta < |\alpha \cap \beta| = m$ , lo que termina la prueba en este caso. Supóngase ahora que los extremos de  $l$  están en el mismo lado de  $\alpha$ . Sean  $A$ ,  $A_1$  y  $A_2$  los subespacios de  $F$  mostrados en la Figura 1.11 que son homeomorfos a  $S^1 \times [0, 1)$  y son tales que  $\partial A = \alpha$ ,  $\partial A_1 = \alpha_1 \cup l$  y  $\partial A_2 = \alpha_2 \cup l$ .

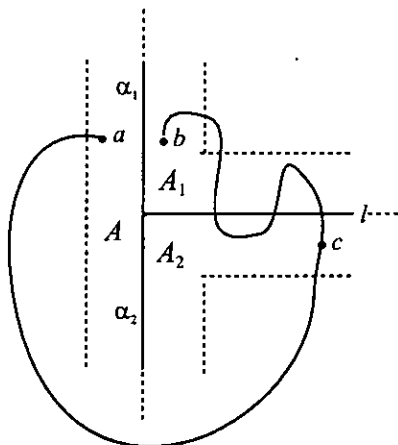


Figura 1.11

Como  $\alpha$  no es separante existe un arco en  $F - \alpha$  que une un punto  $a$  de  $A$  con un punto  $b$  de  $A_1$ . Este arco llega a  $\text{int}A_1 \cup \text{int}A_2$  antes de intersectar a  $l$ , es decir, se tiene un arco en  $F - (\alpha \cup l)$  con extremos  $a$  y  $c$  donde  $c \in A_j$  ( $j = 1$  o  $2$ ). Ahora existe un arco en  $A_j \cup A$ , que une  $a$  y  $c$ , e intersecta a  $\alpha$  en un solo punto, lo cual muestra que  $\alpha_j \cup l$  no es separante. Definimos entonces  $\gamma = \alpha_j \cup l$ . Nótese que  $\gamma \cdot \alpha \leq 1$  y que  $\gamma \cdot \beta = (\alpha_j \cup l) \cdot \beta < |\alpha_j \cap \beta| \leq |\alpha \cap \beta| = m$ . Esto termina la demostración del Caso III y, por tanto del teorema para el caso  $n = 1$ .

Supongamos ahora  $n > 1$ . Por la hipótesis de inducción existe un homeomorfismo  $h_1 \in G_F$  tal que  $(\alpha_i) h_1 = \beta_i$  para  $i = 1, \dots, n-1$ . Sea  $\widehat{F}$  la cerradura del complemento de una vecindad tubular  $N$  de  $\beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_{n-1}$ . Por lo ya demostrado existe un homeomorfismo en  $G_{\widehat{F}}$  que manda a  $(\alpha_n) h$  en  $\beta_n$ ; extendemos este homeomorfismo a un homeomorfismo  $h_2$  en  $G_F$  definiéndolo como la identidad en  $N$ . Entonces  $h_1 h_2 \in G_F$  y  $(\alpha_i) h_1 h_2 = \beta_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .  $\square$

Nota: Con algo más de trabajo se puede probar el Teorema de Dehn [D] y Lickorish [Li1] que afirma que si  $F$  es orientable cerrada entonces  $G_F$  es el conjunto de homeomorfismos de  $F$  que conservan orientación. De hecho, por [Li2] y [Hu] se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 1.3** Si  $F$  es una superficie orientable cerrada entonces todo homeomorfismo de  $F$  es isotópico a una composición de giros de Lickorish.  $\square$

---

Aprovecharemos el Teorema 1.2 para probar que cualesquiera dos cubos con  $g$  asas son homeomorfos:

**Proposición 1.3** *Si  $W$  y  $W'$  son ambos cubos con  $g$  asas entonces  $W$  es homeomorfo a  $W'$ .*

*Demostración:* Sean  $S_1 \cup \dots \cup S_g$  y  $S'_1 \cup \dots \cup S'_g$  conjuntos meridianos de  $W$  y  $W'$  respectivamente. Las fronteras  $\partial W$  y  $\partial W'$  son superficies orientables cerradas de género  $g$ ;  $W - (S_1 \cup \dots \cup S_g)$  y  $W' - (S'_1 \cup \dots \cup S'_g)$  son ambos homeomorfos a una 2-esfera con  $2g$  agujeros. Sea  $h_1 : \partial W \rightarrow \partial W'$  homeomorfismo. Como  $W' - \bigcup_{i=1}^g (S'_i) h$  y  $W' - \bigcup_{i=1}^g S'_i$  son conexos existe, por el Teorema 1.2, un homeomorfismo  $h_2 : \partial W' \rightarrow \partial W'$  tal que  $(S'_i) h_1 h_2 = S'_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ). Por la Proposición 1.2  $h_1 h_2$  se extiende a un homeomorfismo de  $W$  sobre  $W'$ .  $\square$



## 2 Jugadas de Kirby

Sea  $L$  un enlace enmarcado en  $S^3$ . Supongamos que una de sus componentes  $k$  está desanudada y tiene coeficiente de cirugía  $\delta = \pm 1$ . Sea  $E_k$  el exterior de  $k$ , esto es, la cerradura del complemento de una vecindad tubular  $T$  de  $k$  que no interseca a  $L - k$ . Como  $k$  está desanudado  $E_k$  es un toro sólido, y existe un subespacio de  $E_k$  el cual identificamos con  $D^2 \times [0, 1]$ , cuya intersección con  $\partial T$  es  $\partial D^2 \times [0, 1]$ . Aquí suponemos que el encaje de  $D^2 \times [0, 1]$  en  $S^3$  conserva orientación. Sea  $\Delta : E_k \rightarrow E_k$  el homeomorfismo tal que  $(x)\Delta = x$  si  $x \notin D^2 \times [0, 1]$  y  $(z, t)\Delta = (ze^{2\delta\pi it}, t)$  si  $(z, t) \in D^2 \times [0, 1]$ . Si el encaje de  $D^2 \times [0, 1]$  en  $S^3$  no conserva orientación, la misma  $\Delta$ , salvo por isotopía, estaría definida por  $(x)\Delta = x$  si  $x \notin D^2 \times [0, 1]$  y  $(z, t)\Delta = (ze^{-2\delta\pi it}, t)$  si  $(z, t) \in D^2 \times [0, 1]$ ; esto lo utilizaremos en la demostración de la Proposición 2.2. Nótese que la imagen bajo  $\Delta$  del marco de  $k$  es frontera de un disco en  $T$ . Sean  $k_1, \dots, k_n$  las componentes de  $L - k$  y sean  $f_1, \dots, f_n$  sus respectivos marcos. Sea  $L'$  el enlace  $(k_1)\Delta \cup \dots \cup (k_n)\Delta$  con marcos  $(f_1)\Delta, \dots, (f_n)\Delta$ . Decimos entonces que  $L'$  se obtiene de  $L$  haciendo una jugada  $K$  (o jugada de Kirby) en  $k$ ; si  $\delta = 1$  se dice que se hace una jugada  $K$  izquierda (o de mano izquierda), si  $\delta = -1$  se dice que se hace una jugada  $K$  derecha (o de mano derecha). (Véase la Figura 2.1).

Si  $L'$  se obtiene de  $L$  haciendo una jugada  $K$ , decimos que  $L$  se obtiene de  $L'$  haciendo una jugada  $K^{-1}$ .

Sean  $L$  y  $L'$  dos enlaces enmarcados en  $S^3$ . Decimos que  $L$  y  $L'$  son  $K$ -equivalentes (y escribimos  $L \stackrel{K}{\sim} L'$ ) si existe una sucesión finita de enlaces enmarcados  $L_1, \dots, L_n$  tal que  $L_1 = L$ ,  $L_n = L'$  y, para  $1 \leq i < n$ ,  $L_{i+1}$  se obtiene de  $L_i$  haciendo una jugada  $K$  o  $K^{-1}$ .

Si  $L'$  se obtiene de  $L$  haciendo una jugada  $K$  en  $k$  y si  $k$  es frontera de un disco en  $S^3$  cuyo interior no interseca a  $L$  entonces decimos que  $L'$  se obtiene de  $L$  haciendo una jugada discoidal.

Diremos que dos componentes  $k_1, k_2$  de un enlace  $L$  son paralelas en  $L$  si  $lk(k_1, k_2) = 0$  y existe un anillo  $A$  en  $S^3$  tal que  $\partial A = k_1 \cup k_2$  e  $\text{int} A \cap L = \emptyset$ .

Sean  $k_1$  y  $k_2$  componentes paralelas desanudadas en el enlace enmarcado  $L$  tales que los coeficientes de cirugía de  $k_1$  y  $k_2$  son 1 y  $-1$ , respectivamente. Sea  $L'$  el enlace enmarcado obtenido de  $L$  suprimiendo  $k_1$  y  $k_2$ . Entonces decimos que  $L'$  se obtiene de  $L$  haciendo una jugada anular. Nótese que  $L \stackrel{K}{\sim} L'$  porque haciendo una jugada  $K$  izquierda en  $k_1$  y luego una jugada  $K$  derecha en  $k_2$  se obtiene un enlace enmarcado equivalente a  $L'$ .

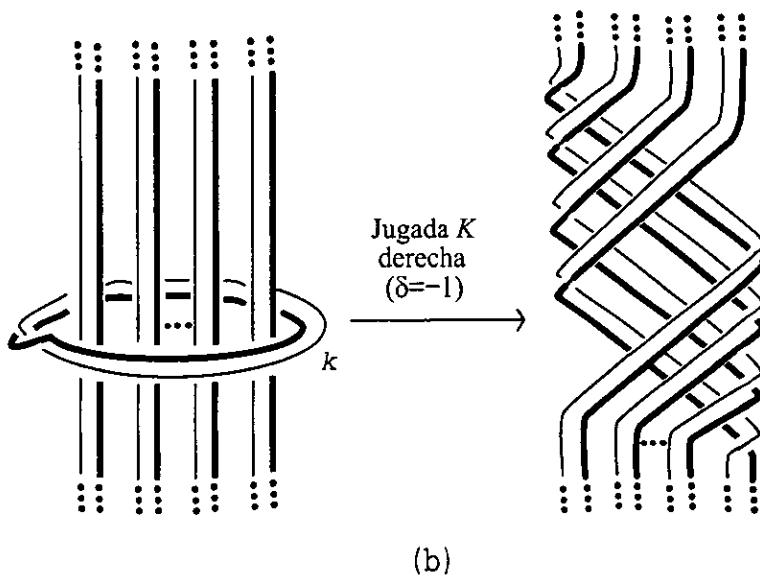
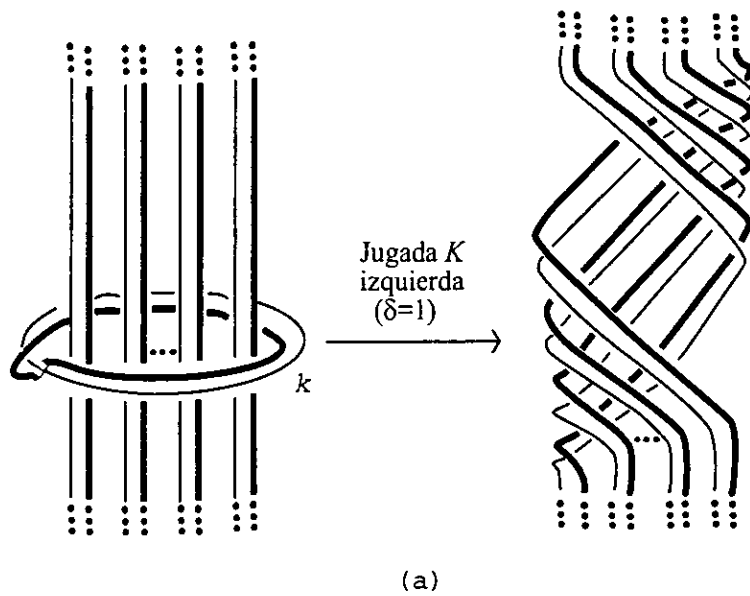


Figura 2.1

La siguiente proposición nos dice el cambio que debe hacerse en los coeficientes de cirugía cuando se hace una jugada  $K$ .

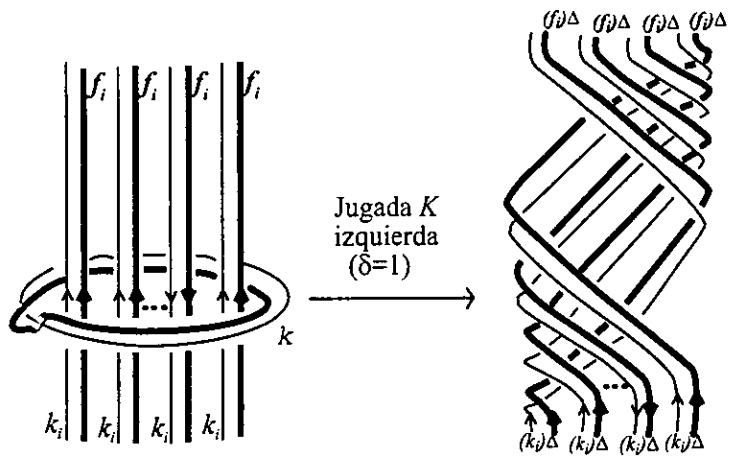
**Proposición 2.1** Sean  $L$  un enlace enmarcado,  $k$  una componente desanudada de  $L$  con coeficiente de cirugía  $\delta = \pm 1$  y  $k_i$  una componente de  $L$  con marco  $f_i$ . Sea  $\Delta : E_k \rightarrow E_k$  el homeomorfismo descrito anteriormente. Entonces  $lk((k_i)\Delta, (f_i)\Delta) = lk(k_i, f_i) - \delta l^2$  donde  $l = lk(k, k_i)$ .

*Demostración:* Orientemos a  $k_i$  y a  $f_i$  de tal manera que sean isotópicas en una vecindad tubular de  $k_i$  que contiene a  $f_i$ .

Consideremos la parte izquierda de la Figura 2.2(a), en que  $\delta = 1$ , y partes de  $k_i$  y de  $f_i$  aparecen como arcos verticales sin que  $f_i$  cruce a  $k_i$ . Sea  $p$  el número de arcos de  $k_i$  de la figura que se dirigen hacia arriba y  $n$  el número de arcos de  $k_i$  de la misma que se dirigen hacia abajo. En la parte derecha de la figura aparece la parte de  $k_i$  que cambia bajo  $\Delta$ . En ésta hay  $p + n$  arcos de  $(k_i)\Delta$  y  $p + n$  arcos de  $(f_i)\Delta$ . Si un arco  $s$  de  $(k_i)\Delta$  y uno  $t$  de  $(f_i)\Delta$  se dirigen ambos hacia arriba o ambos hacia abajo entonces  $s$  cruza una vez sobre  $t$  y de derecha a izquierda; si  $s$  y  $t$  tienen sentidos opuestos entonces  $s$  cruza una vez sobre  $t$ , y de izquierda a derecha. Luego, la contribución a  $lk((k_i)\Delta, (f_i)\Delta)$  de cada arco de  $k_i$  de la figura es  $n - p$  si se dirige hacia arriba y  $p - n$  si se dirige hacia abajo y, por tanto, la contribución a  $lk((k_i)\Delta, (f_i)\Delta)$  de la parte mostrada en la derecha de la Figura 2.2(a) es  $-p(p - n) + n(p - n) = (n - p)(p - n) = -(p - n)^2 = -l^2$  ya que  $\pm lk(k, k_i) = p - n$ .

Como en la parte no mostrada en la figura  $(k_i)\Delta$  coincide con  $k_i$  y  $(f_i)\Delta$  coincide con  $f_i$  se sigue que  $lk((k_i)\Delta, (f_i)\Delta) = lk(k_i, f_i) - l^2$ .

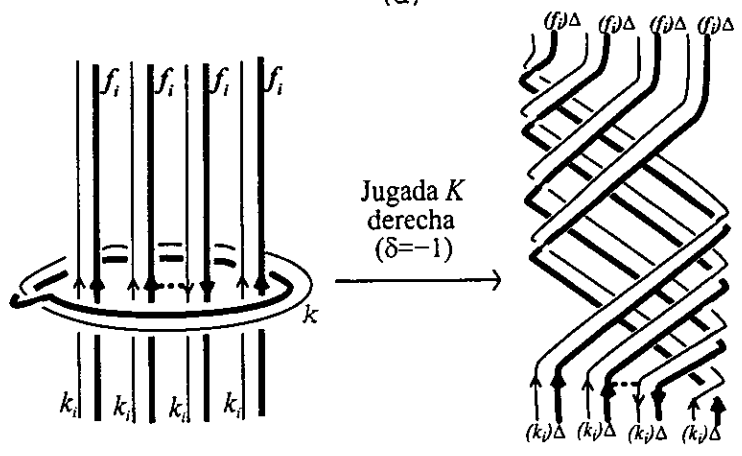
En el caso  $\delta = -1$ , mostrado en la Figura 2.2(b), si un arco  $s$  de  $(k_i)\Delta$  y uno  $t$  de  $(f_i)\Delta$  se dirigen ambos hacia arriba o ambos hacia abajo entonces  $s$  cruza una vez sobre  $t$ , y de izquierda a derecha; si  $s$  y  $t$  tienen sentidos opuestos entonces  $s$  cruza una vez sobre  $t$ , y de derecha a izquierda. Un cálculo análogo al anterior muestra también que  $lk((k_i)\Delta, (f_i)\Delta) = lk(k_i, f_i) + l^2$ .  $\square$



$$p=3, n=1$$

$$lk((k_j)\Delta, (f_j)\Delta) = lk(k_i, f_i) - P$$

(a)



$$p=3, n=1$$

$$lk((k_j)\Delta, (f_j)\Delta) = lk(k_i, f_i) + P$$

(b)

Figura 2.2

La siguiente proposición afirma que si se hace una jugada  $K$  derecha (resp. izquierda) en una curva en  $\text{int}H'_g$  (resp.  $\text{int}H_g$ ) paralela a una curva  $\lambda$  de  $\Sigma_g$  que bordea un disco en  $H_g$  (resp.  $H'_g$ ), el efecto en curvas de  $\Sigma_g$  es el mismo que el de un giro positivo de  $\lambda$ . Si intercambiamos las palabras derecha e izquierda el giro será negativo.

**Proposición 2.2** Sean  $\lambda$  y  $\theta$  curvas simples cerradas en  $\Sigma_g$  y  $D$  un 2-disco en  $S^3$  tales que  $D \cap \Sigma_g = \lambda \subset \text{int}D$ . Sea  $\lambda' = \partial D$  y  $\delta$  tal que  $|\delta| = 1$ . Sea  $L = \lambda' \cup \theta$  enlace enmarcado de dos componentes donde el coeficiente de cirugía de  $\lambda'$  es  $\delta$  si  $\lambda' \subset \text{int}H_g$  y es  $-\delta$  si  $\lambda' \subset \text{int}H'_g$ . Entonces el enlace obtenido de  $L$  haciendo una jugada  $K$  en  $\lambda'$  es  $(\theta)\Lambda^\delta$  donde  $\Lambda$  es el giro positivo de  $\lambda$ .

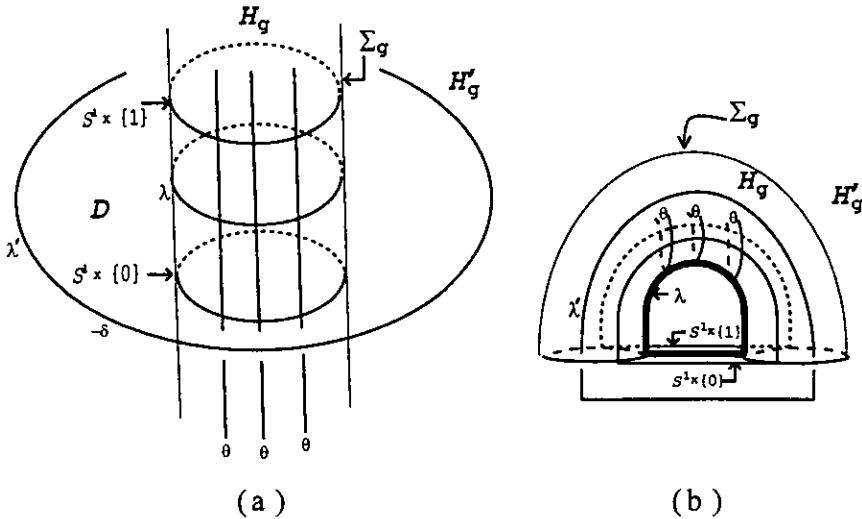


Figura 2.3

*Demostración:* Sea  $T$  vecindad tubular de  $\lambda'$  tal que  $\Sigma_g \cap T = \Sigma_g \cap \partial T$  y esta intersección es una vecindad anular de  $\lambda$  en  $\Sigma_g$ . Sea  $e : D^2 \times [0, 1] \rightarrow S^3$  encaje cuya imagen no interseca  $\text{int}T$ ,  $((\partial D^2) \times [0, 1])e = \Sigma_g \cap T$  y, si  $\lambda' \in \text{int}H'_g$  (resp.  $\lambda' \in \text{int}H_g$ ), conserva (resp. no conserva) orientación. Entonces puede verse que  $e|_{S^1 \times [0, 1]} : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \Sigma_g$  conserva orientación.

Parametrizamos el subespacio  $(D^2 \times [0, 1])e$  de  $S^3 - \text{int}T$  como  $D^2 \times [0, 1]$  via  $e$ , es decir, escribimos  $(z, t)$  en vez de  $(z, t)e$ . Sea  $\Delta$  el homeomorfismo de  $S^3 - \text{int}T$ , el exterior de  $\lambda'$ , que se define al hacer una jugada  $K$  en  $\lambda'$ . Si  $(z, t) \in D^2 \times [0, 1]$  entonces, en el caso en que  $\lambda' \in \text{int}H'_g$ ,  $(z, t)\Delta = (ze^{2(-\delta)\pi it}, t)$  y, en el caso en que  $\lambda' \in \text{int}H_g$ , también  $(z, t)\Delta = (ze^{-2\delta\pi it}, t)$ . Como  $(z, t)\Lambda^\delta = (ze^{2(-\delta)\pi it}, t)$  si  $(z, t) \in D^2 \times [0, 1]$  y además tanto

---

$\Delta$  como  $\Lambda^\delta$  son la identidad en  $\Sigma_g \times S^1 \times [0, 1]$ , se sigue que  $\Delta$  y  $\Lambda^\delta$  coinciden en  $\Sigma_g$ . En particular  $(\theta)\Delta$ , el enlace obtenido de  $L$  haciendo la jugada  $K$ , es  $(\theta)\Lambda^\delta$ .  $\square$

### 3 Enlaces y variedades

Si  $\theta$  es una curva simple cerrada en  $\Sigma_g$  el índice de encaje de  $\theta$  en  $\Sigma_g$ , que denotaremos por  $e(\theta)$ , es  $lk(\theta, \theta^+)$  donde  $\theta^+$  es una curva paralela a  $\theta$  contenida en  $\Sigma_g$  y las curvas  $\theta, \theta^+$  han sido orientadas de tal manera que son isotópicas en una vecindad tubular de  $\theta$  en  $\Sigma_g$  que contiene a  $\theta^+$ .

Sean  $\theta_r, \dots, \theta_1$  curvas simples cerradas en alguna  $\Sigma_g$  y  $\delta_r, \dots, \delta_1$  números tales que  $|\delta_i| = 1$ . Sea  $\sigma = (\Theta_r^{\delta_r}, \dots, \Theta_2^{\delta_2}, \Theta_1^{\delta_1})$  la sucesión de giros correspondiente. Definiremos  $L_\sigma$ . Vagamente  $L_\sigma$ , sin considerar los coeficientes de cirugía, es la unión de las  $\theta_i$  donde  $\theta_i$  "se empuja arriba de  $\theta_j$ " si  $i > j$ . Más precisamente consideramos una vecindad regular  $\Sigma_g \times [0, 1]$  de  $\Sigma_g$ , tal que,  $\Sigma_g \times \{0\} \subset H_g$ ,  $\Sigma_g \times \{\frac{1}{2}\} = \Sigma_g$  y  $\Sigma_g \times \{1\} \subset H'_g$ . Sean  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in (0, 1)$  tales que  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_r$ . Entonces  $L_\sigma = \bigcup_{i=1}^r (\theta_i \times \{\varepsilon_i\}) \subset \Sigma_g \times [0, 1]$ ; el coeficiente asociado a la componente  $\theta_i \times \{\varepsilon_i\}$  de  $L_\sigma$  es  $e(\theta_i) + \delta_i$ . Definimos también  $f_\sigma = \Theta_r^{\delta_r} \circ \Theta_{r-1}^{\delta_{r-1}} \circ \dots \circ \Theta_2^{\delta_2} \circ \Theta_1^{\delta_1} : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ .

**Lema 3.1** Sean  $\sigma$  y  $\tau$  sucesiones de giros y sea  $\theta$  una curva en  $\Sigma_g$  que es trivial como nudo en  $S^3$  y tal que  $e(\theta) = 0$ . Entonces, si  $\Theta$  es el giro de  $\theta$ ,  $L_{\sigma(\Theta, \Theta^{-1})\tau} \stackrel{K}{\approx} L_{\sigma\tau}$ .

*Demostración:* El enlace enmarcado  $L_{\sigma\tau}$  se obtiene de  $L_{\sigma(\Theta, \Theta^{-1})\tau}$  haciendo una jugada anular así que  $L_{\sigma(\Theta, \Theta^{-1})\tau} \stackrel{K}{\approx} L_{\sigma\tau}$ .  $\square$

**Corolario 3.1** Si  $\gamma = (\Theta_r^{\delta_r}, \dots, \Theta_2^{\delta_2}, \Theta_1^{\delta_1})$ ,  $\theta_i$ , es trivial como nudo en  $S^3$  y  $e(\theta_i) = 0$  ( $i = 1, \dots, r$ ) entonces  $L_{\gamma\tau^{-1}} \stackrel{K}{\approx} \emptyset$ .  $\square$

*Notación:* Si  $f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  es un homeomorfismo entonces  $M(f)$  es la 3-variedad que se obtiene identificando, en la unión ajena  $H_g \amalg H'_g$ ,  $x \in \partial H'_g = \Sigma_g$  con  $(x)f \in \partial H_g = \Sigma_g$ . Se le da a  $M(f)$  la orientación que induce en  $H_g$  la misma orientación que la orientación estándar de  $S^3$ . Nos referiremos a  $f$  como el homeomorfismo de pegado.  $M(f)$  tiene una descomposición de Heegaard natural, a saber,  $(H_g, H'_g)$ .

**Proposición 3.1** Si  $f_0$  y  $f_1$  son homeomorfismos isotópicos de  $\Sigma_g$  entonces

$$M(f_0) \approx M(f_1).$$

*Demostración:* Escogemos una vecindad de  $\Sigma_g$  en  $H'_g$  la cual parametrizamos como  $\Sigma_g \times [0, 1]$  con  $\Sigma_g \times \{0\} = \Sigma_g$ . Definimos un homeomorfismo  $h$  de  $M(f_0)$  sobre  $M(f_1)$  como la identidad en  $H_g \cup (H'_g - \Sigma_g \times [0, 1])$ , y en  $\Sigma_g \times [0, 1]$  por  $(x, t)h = ((x)f_1 f_0^{-1}, t)$  donde  $\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$  es la isotopía de  $f_0$  a  $f_1$ . Se sigue que  $M(f_0) \approx M(f_1)$  pues  $h$  conserva orientación.  $\square$

Demostremos ahora que  $M(L_\sigma) \approx M(f_\sigma)$ .

**Lema 3.2** Sea  $\Theta : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  giro positivo de  $\theta$ ,  $|\delta| = 1$  y  $A$  vecindad anular de  $\theta$  en  $\Sigma_g$  tal que  $\Theta$  es la identidad en  $\Sigma_g - A$ . Sean  $\hat{A}$  una copia de  $A$  y  $c : A \rightarrow \hat{A}$  homeomorfismo. Supongamos  $\alpha < \varepsilon^- < \varepsilon^+ < \beta$ . Sea  $\varphi : \partial(A \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]) \rightarrow \hat{A} \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]$  definida por

$$\begin{aligned} (a, \varepsilon^+) \varphi &= ((a)\Theta^\delta c, \varepsilon^+) \text{ si } a \in A \text{ y} \\ (a, t) \varphi &= ((a)c, t) \text{ si } (a, t) \in \partial(A \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]) - A \times \{\varepsilon^+\}. \end{aligned}$$

Entonces existe un homeomorfismo  $\Psi$  de  $(\Sigma_g \times [\alpha, \beta] - A \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]) \cup_\varphi (\hat{A} \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+])$  sobre  $\Sigma_g \times [\alpha, \beta]$  tal que  $(x, \beta)\Psi = ((x)\Theta^\delta, \beta)$  y  $(x, \alpha)\Psi = (x, \alpha)$  si  $x \in \Sigma_g$ .

*Demostración:* Se define  $\Psi$  como sigue:

$$(x, t)\Psi = \begin{cases} ((x)\Theta^\delta, t) & \text{si } x \in \Sigma_g \text{ y } \varepsilon^+ \leq t \leq \beta \\ (x, t) & \text{si } (x, t) \in \overline{\Sigma_g \times [\alpha, \varepsilon^+] - A \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]} \\ ((x)c^{-1}, t) & \text{si } (x, t) \in \hat{A} \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+] \end{cases}$$

(Véase el dibujo esquemático de la Figura 3.1).

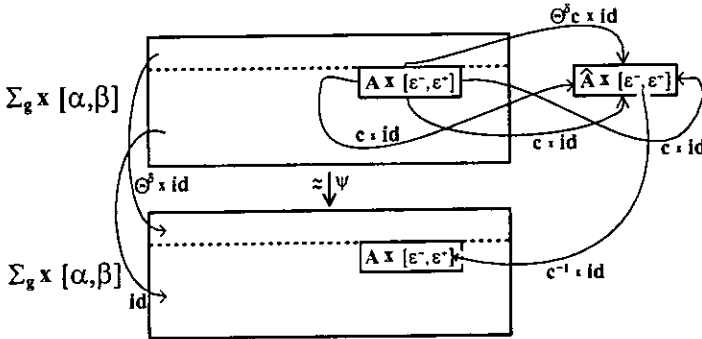


Figura 3.1

Nótese que:

- si  $x \in \overline{\Sigma_g - A}$  entonces  $((x)\Theta^\delta, \varepsilon^+) = (x, \varepsilon^+)$ ,
- si  $a \in A$  entonces  $((a)\Theta^\delta, \varepsilon^+) = ((a)\Theta^\delta c c^{-1}, \varepsilon^+)$  y
- si  $(a, t) \in \partial(A \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]) - A \times \{\varepsilon^+\}$  entonces  $(a, t) = ((a)c c^{-1}, t)$

así que  $\Psi$  está bien definida.



Por la Proposición 1.1, tomando

$$A_1 = \Sigma_g \times [\varepsilon^+, \beta] \text{ y } A_2 = \overline{\Sigma_g \times [\alpha, \varepsilon^+] - A \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]},$$

$\Psi$  manda homeomórficamente a

$$\overline{\Sigma_g \times [\alpha, \beta] - A \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]} \text{ en } \overline{\Sigma_g \times [\alpha, \beta] - A \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]}.$$

Aplicando nuevamente la Proposición 1.1 ahora con

$$A_1 = \overline{\Sigma_g \times [\alpha, \beta] - A \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]} \text{ y } A_2 = \widehat{A} \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]$$

se concluye que  $\Psi$  es un homeomorfismo.

Claramente  $(x, \beta)\Psi = ((x)\Theta^\delta, \beta)$  y  $(x, \alpha)\Psi = (x, \alpha)$ .  $\square$

**Teorema 3.1** Sea  $\sigma = (\Theta_r^{\delta_r}, \dots, \Theta_1^{\delta_1})$ . Entonces  $M(f_\sigma) \approx M(L_\sigma)$ .

*Demostración:*

Supongamos  $\varepsilon'_{i-1} < \varepsilon_i^- < \varepsilon_i < \varepsilon_i^+ < \varepsilon'_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) con  $\varepsilon'_0 = \frac{1}{2}$  y  $\varepsilon'_r = 1$

Podemos pensar en  $M(f_\sigma)$  como el espacio obtenido de la unión ajena

$$H_g \amalg \Sigma_g \times [\varepsilon'_0, \varepsilon'_1] \amalg \Sigma_g \times [\varepsilon'_1, \varepsilon'_2] \amalg \dots \amalg \Sigma_g \times [\varepsilon'_{r-1}, \varepsilon'_r] \amalg \overline{H'_g - \Sigma_g \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]}$$

haciendo las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned} \left(x, \frac{1}{2}\right) \in \Sigma_g \times [\varepsilon'_0, \varepsilon'_1] & \text{ se identifica con } (x)f_\sigma \in H_g; \text{ para } (i = 1, \dots, r-1), \\ (x, \varepsilon'_i) \in \Sigma_g \times [\varepsilon'_i, \varepsilon'_{i+1}] & \text{ se identifica con } (x, \varepsilon'_i) \in \Sigma_g \times [\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon'_i] \text{ y} \\ (x, 1) \in \overline{H'_g - \Sigma_g \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]} & \text{ se identifica con } (x, 1) \in \Sigma_g \times [\varepsilon'_{r-1}, \varepsilon'_r]. \end{aligned}$$

Consideramos también el espacio  $\widetilde{M}(f_\sigma)$  obtenido de la unión ajena

$$H_g \amalg \Sigma_g \times [\varepsilon'_0, \varepsilon'_1] \amalg \Sigma_g \times [\varepsilon'_1, \varepsilon'_2] \amalg \dots \amalg \Sigma_g \times [\varepsilon'_{r-1}, \varepsilon'_r] \amalg \overline{H'_g - \Sigma_g \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]}$$

haciendo las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned} \left(x, \frac{1}{2}\right) \in \Sigma_g \times [\varepsilon'_0, \varepsilon'_1] & \text{ se identifica con } \left(x, \frac{1}{2}\right) \in H_g; \text{ para } (i = 1, \dots, r-1), \\ (x, \varepsilon'_i) \in \Sigma_g \times [\varepsilon'_i, \varepsilon'_{i+1}] & \text{ se identifica con } ((x)\Theta_i^{\delta_i}, \varepsilon'_i) \in \Sigma_g \times [\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon'_i] \text{ y} \\ (x, 1) \in \overline{H'_g - \Sigma_g \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]} & \text{ se identifica con } ((x)\Theta_r^{\delta_r}, 1) \in \Sigma_g \times [\varepsilon'_{r-1}, \varepsilon'_r]. \end{aligned}$$

Usando el Corolario 1.1 se tiene un homeomorfismo de  $M(f_\sigma)$  sobre  $\widetilde{M}(f_\sigma)$  definido como:

$$\text{la identidad en } H_g \text{ y en } \overline{H'_g - \Sigma_g \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]},$$

y como

$$\Theta_r^{\delta_r} \Theta_{r-1}^{\delta_{r-1}} \dots \Theta_i^{\delta_i} \times id \text{ en } \Sigma_g \times [\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon'_i] \quad (i = 1, \dots, r)$$

(En la parte izquierda de la Figura 3.2 se ilustra esquemáticamente el caso  $r = 3$ ).

Para  $i = 1, \dots, r$  denotemos por  $Y_i$  a  $\overline{(\Sigma_g \times [\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon'_i] - A_i \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+])} \cup \varphi_i (\widehat{A}_i \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+])$  donde  $A_i$  es vecindad anular de  $\theta_i$ ,  $\widehat{A}_i$  es una copia de  $A_i$ ,  $c_i : A_i \rightarrow \widehat{A}_i$  es un homeomorfismo y  $\varphi_i : \partial(A_i \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+]) \rightarrow \widehat{A}_i \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+]$  está definido por  $(a, \varepsilon_i^+) \varphi_i = ((a) \Theta_i^{\delta_i} c_i, \varepsilon_i^+)$  si  $a \in A_i$  y  $(a, t) \varphi_i = ((a) c_i, t)$  si  $(a, t) \in \partial(A_i \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+]) - A_i \times \varepsilon_i^+$ .

Por el Lema 3.2 existe un homeomorfismo  $\Psi_i$  de  $Y_i$  sobre  $\Sigma_g \times [\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon'_i]$  tal que  $(x, \varepsilon'_i) \Psi_i = ((x) \Theta_i^{\delta_i}, \varepsilon'_i)$  y  $(x, \varepsilon'_{i-1}) \Psi_i = (x, \varepsilon'_{i-1})$  si  $x \in \Sigma_g$ .

Denotemos por  $\widetilde{M}(L_\sigma)$  al espacio obtenido de

$$H_g \amalg Y_1 \amalg Y_2 \amalg \dots \amalg Y_r \amalg \overline{H'_g - \Sigma_g \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]}$$

haciendo las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned} \left(x, \frac{1}{2}\right) \in Y_1 & \text{ se identifica con } \left(x, \frac{1}{2}\right) \in H_g, \\ (x, \varepsilon'_i) \in Y_{i+1} & \text{ se identifica con } (x, \varepsilon'_i) \in Y_i \quad (i = 1, \dots, r-1) \text{ y} \\ (x, 1) \in \overline{H'_g - \Sigma_g \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]} & \text{ se identifica con } (x, 1) \in Y_r. \end{aligned}$$

Usando el Corolario 1.1 se tiene un homeomorfismo de  $\widetilde{M}(L_\sigma)$  sobre  $\widetilde{M}(f_\sigma)$  definido como la identidad en  $H_g$  y en  $\overline{H'_g - \Sigma_g \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]}$ , y como  $\Psi_i$  en  $Y_i (i = 1, \dots, r)$ . (En la parte derecha de la Figura 3.2 se ilustra esquemáticamente el caso  $r = 3$ ).

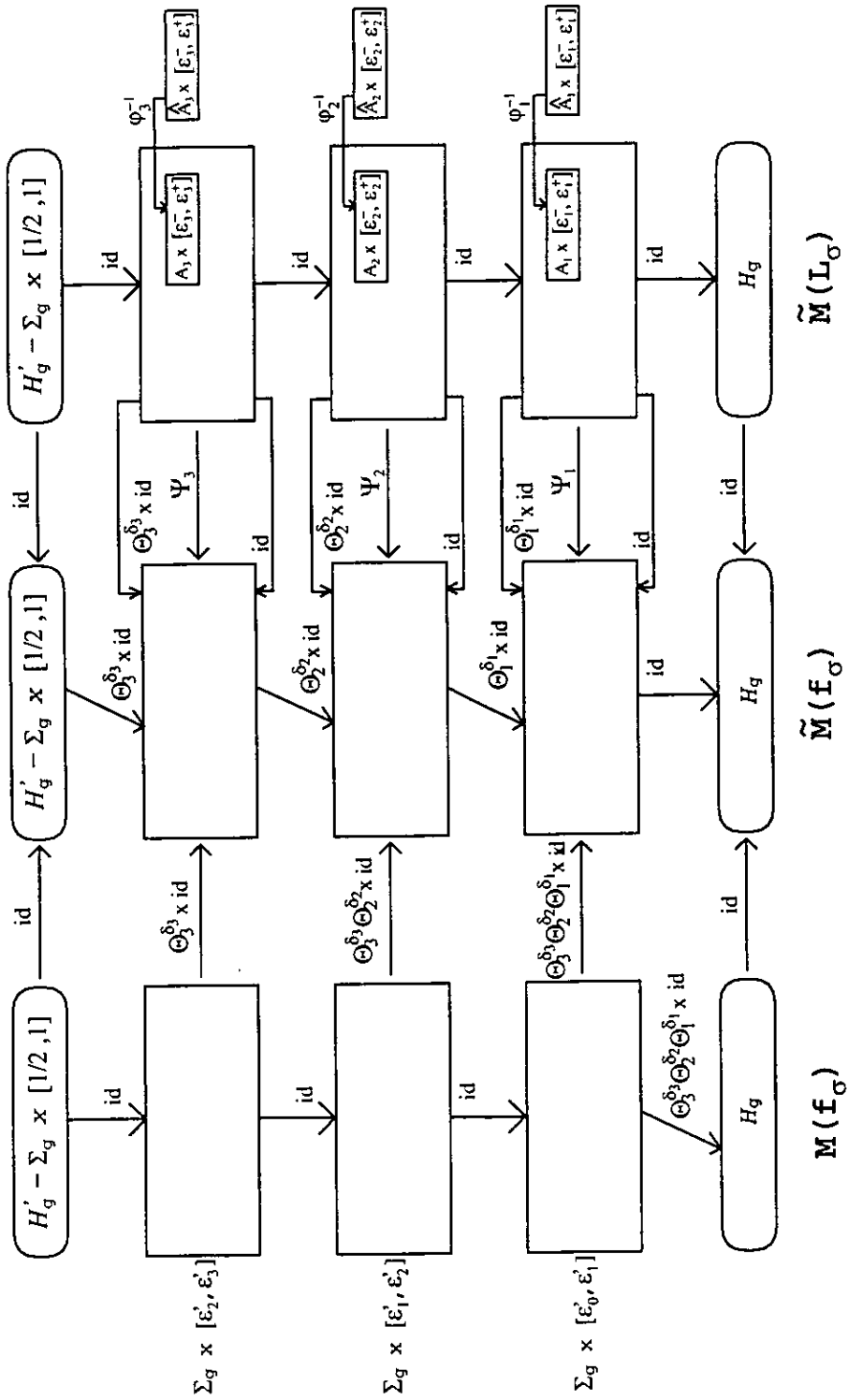


Figura 3.2

Nótese que

$$\widetilde{M}(L_\sigma) = \left( S^3 - \left( \bigcup_{i=1}^r A_i \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+] \right) \right) \cup_\varphi \left( \bigcup_{i=1}^r \widehat{A}_i \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+] \right)$$

donde:

$$\varphi : \bigcup_{i=1}^r \partial(A_i \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+]) \longrightarrow \bigcup_{i=1}^r \widehat{A}_i \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+]$$

es tal que

$$\varphi = \varphi_i \text{ en } \partial(A_i \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+]) \quad (i = 1, \dots, r).$$

Como  $\bigcup_{i=1}^r A_i \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+]$  es vecindad tubular de  $\bigcup_{i=1}^r \theta_i \times \{\varepsilon_i\}$ , se ve que  $\widetilde{M}(L_\sigma)$  se obtiene por cirugía en  $\bigcup_{i=1}^r \theta_i \times \{\varepsilon_i\}$  utilizando como marcos las curvas  $f_i$  definidas como  $f_i = (s_i \times \{\varepsilon_i^-\}) \cup ((\partial s_i) \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+]) \cup ((s_i) \Theta_i^{-\delta_i} \times \{\varepsilon_i^+\})$  donde  $s_i$  es un arco de  $A_i$  que une las dos componentes de  $\partial A_i$ . (Ver Figura 3.3).

Orientemos  $\theta_i \times \{\varepsilon_i\}$ ,  $((s_i) \Theta_i^{-\delta_i} \times \{\varepsilon_i^+\}) \cup (s_i \times \{\varepsilon_i^-\})$  y  $f_i$  de tal manera que sean isotópicas en  $A_i \times [\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+]$ . El número de enlace entre las dos primeras curvas es el índice de encaje  $e(\theta_i)$  de  $\theta_i$  en  $\Sigma_g$  y el número de enlace entre  $\theta_i \times \{\varepsilon_i\}$  y  $f_i$  es  $e(\theta_i) + \delta_i$ . Por lo tanto, recordando la definición de  $M(L_\sigma)$ , se ve que  $\widetilde{M}(L_\sigma) \approx M(L_\sigma)$ . Luego

$$M(f_\sigma) \approx \widetilde{M}(f_\sigma) \approx \widetilde{M}(L_\sigma) \approx M(L_\sigma). \quad \square$$

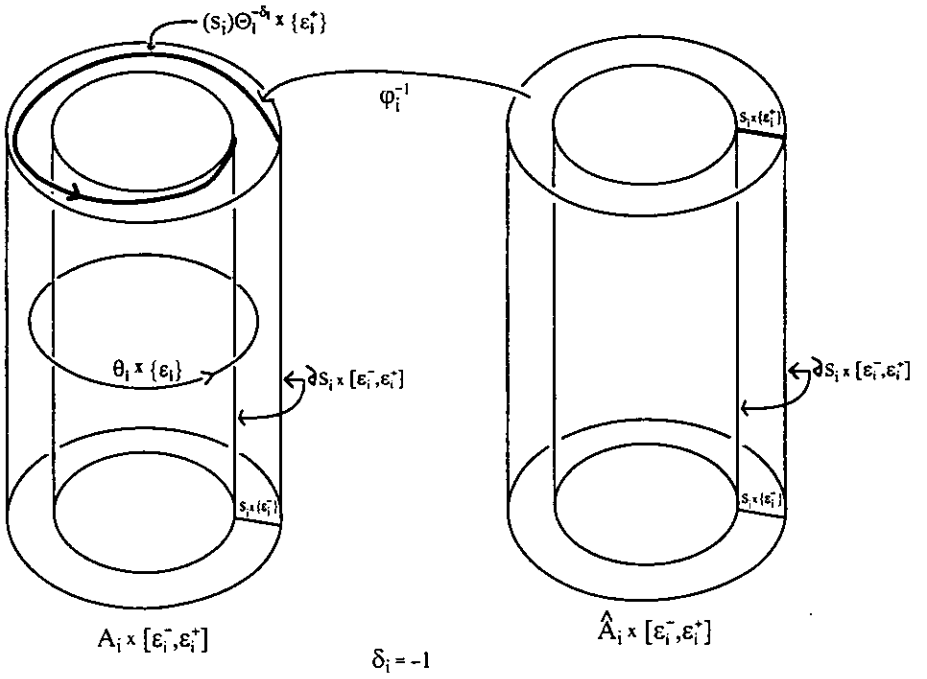
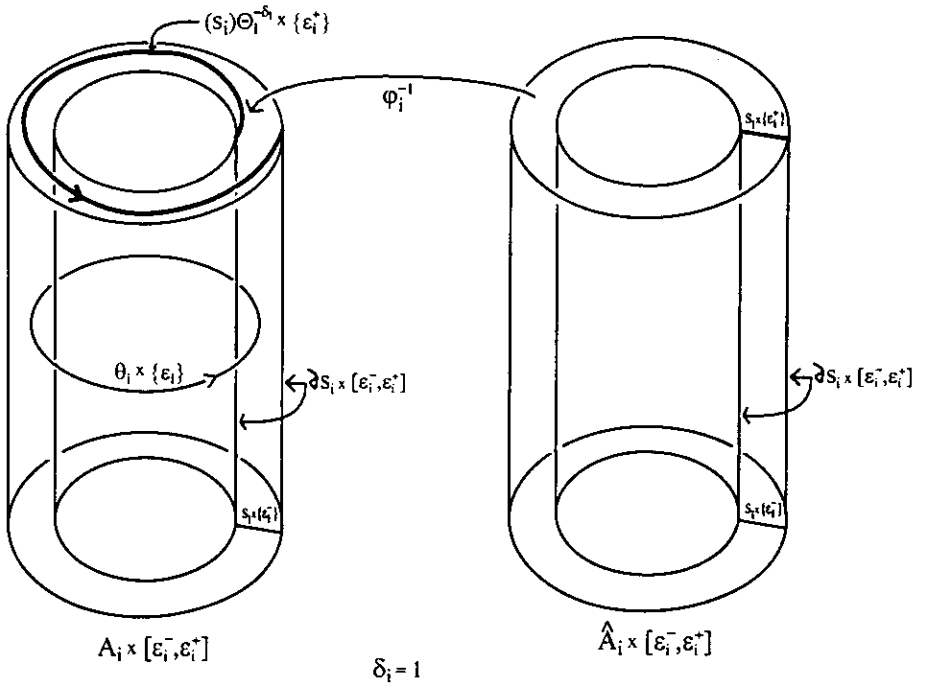


Figura 3.3

---

**Proposición 3.2** Sea  $\sigma = (\Theta_n^{\delta_n}, \dots, \Theta_1^{\delta_1})$ .

- (i) Si  $f_\sigma = id$  entonces existe un homeomorfismo de  $M(L_\sigma)$  sobre  $S^3$  que es la identidad fuera de  $\Sigma_g \times [0, 1]$ .
- (ii) Si  $f_\sigma$  se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$  entonces existe un homeomorfismo de  $M(L_\sigma)$  sobre  $S^3$  que es la identidad en  $H'_g - \Sigma_g \times [\frac{1}{2}, 1]$ .
- (iii) Si  $f_\sigma$  se extiende a un homeomorfismo de  $H'_g$  entonces existe un homeomorfismo de  $M(L_\sigma)$  sobre  $S^3$  que es la identidad en  $H_g - \Sigma_g \times [0, \frac{1}{2}]$ .

*Demostración:*

- (i) Como  $f_\sigma = id$  se tiene que  $M(f_\sigma) = S^3$ . La demostración del Teorema 3.1 da el homeomorfismo buscado.
- (ii) Usamos la notación de la demostración del Teorema 3.1. En la demostración del Teorema 3.1 se mostró que existe un homeomorfismo  $\alpha$  de  $M(L_\sigma)$  sobre  $\widetilde{M}(f_\sigma)$  que es la identidad en  $H'_g - \Sigma_g \times [\frac{1}{2}, 1]$ . Sea  $\beta$  el homeomorfismo de  $S^3$  sobre  $\widetilde{M}(f_\sigma)$  que es la identidad en  $H'_g - \Sigma_g \times [\frac{1}{2}, 1]$ , es  $\Theta_n^{\delta_n} \Theta_{n-1}^{\delta_{n-1}} \dots \Theta_i^{\delta_i} \times id$  en  $\Sigma_g \times [\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon'_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) y en  $H_g$  es un homeomorfismo sobre  $H_g$  cuya restricción a  $\Sigma_g$  es  $f_\sigma$ . El homeomorfismo  $\alpha\beta^{-1}$  es el buscado.
- (iii) Usamos otra vez la notación de la demostración del Teorema 3.1 excepto que tomamos  $\varepsilon'_0 = 0$  y  $\varepsilon'_n = \frac{1}{2}$ . Existe un homeomorfismo  $\alpha$  de  $M(L_\sigma)$  sobre  $\widetilde{M}(f_\sigma)$  que es la identidad en  $H_g - \Sigma_g \times [0, \frac{1}{2}]$ . Sea  $\beta$  el homeomorfismo de  $\widetilde{M}(f_\sigma)$  sobre  $S^3$  que es la identidad en  $H_g - \Sigma_g \times [0, \frac{1}{2}]$ , es  $\Theta_{i-1}^{\delta_{i-1}} \dots \Theta_2^{\delta_2} \Theta_1^{\delta_1} \times id$  en  $\Sigma_g \times [\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) y en  $H'_g$  es un homeomorfismo sobre  $H'_g$  cuya restricción a  $\Sigma_g$  es  $f_\sigma$ . El homeomorfismo  $\alpha\beta$  es el buscado.  $\square$

---

**Proposición 3.3** *Todo enlace enmarcado es equivalente a uno de la forma  $L_\sigma$ .*

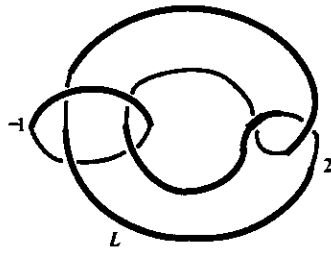
*Demostración:* Considérese un enlace arbitrario enmarcado  $L = k_1 \cup \dots \cup k_n$  con coeficientes de cirugía  $c_1, \dots, c_n$  y una proyección regular de él. Escogemos un subconjunto de  $L$  que consista de  $2g$  puntos que subdividan a  $L$  en  $2g$  arcos,  $g$  pasos superiores ajenos y  $g$  pasos inferiores ajenos, de tal manera que ningún paso superior contenga un cruce inferior y ningún paso inferior contenga un cruce superior (ver Figura 3.4(a)). Recuérdese la definición de las asas  $h, h_1, \dots, h_g$  y de la traslación  $T$  dadas en la página 12. Aplicando un homeomorfismo adecuado  $\varphi : S^3 \rightarrow S^3$  se transforma  $L$  en un enlace equivalente  $L'$  contenido en  $\Sigma_g$  y tal que, para  $i = 1, \dots, g$ ,  $L' \cap h_i$  es la imagen bajo  $T^i$  del conjunto de puntos de  $h$  a distancia 1 del origen. (Ver Figura 3.4(b)). Definimos  $k'_i = (k_i)\varphi$ .

Necesitamos ahora corregir coeficientes de cirugía.

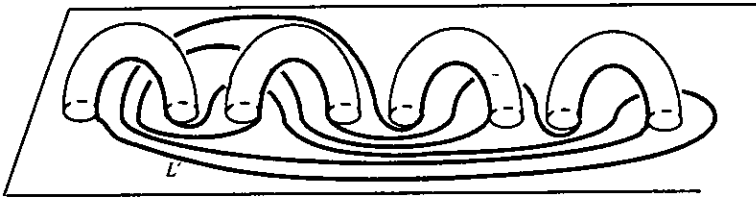
Para  $i = 1, \dots, n$ , sean  $m_i = c_i - e(k'_i) - 1$  y  $j_i$  tal que  $h_{j_i}$  interseca a  $k'_i$ . Considérese la curva meridiana  $a_{j_i}$  contenida en el asa  $h_{j_i}$  mostrada en la Figura 1.6. Sea  $A_{j_i}$  el giro positivo de  $a_{j_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Definimos  $L'' = (L')A_{j_1}^{m_1}A_{j_2}^{m_2} \dots A_{j_n}^{m_n}$ ,  $k''_i = (k'_i)A_{j_1}^{m_1}A_{j_2}^{m_2} \dots A_{j_n}^{m_n}$  y  $\sigma = (K''_1, \dots, K''_n)$  donde  $K''_i$  es el giro positivo de  $k''_i$ . (Ver Figura 3.4(c)).

Entonces  $L$  es un enlace equivalente a  $L''$  por un homeomorfismo que manda a  $k_i$  en  $k''_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Es decir, el enlace enmarcado  $L = k_1 \cup \dots \cup k_n$  con coeficientes de cirugía  $c_1, \dots, c_n$  es equivalente al enlace enmarcado  $L'' = k''_1 \cup \dots \cup k''_n$  con coeficientes de cirugía  $c_1, \dots, c_n$ .

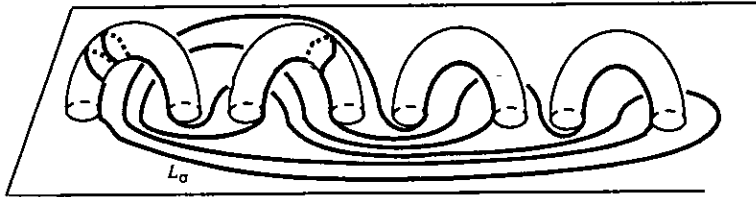
Nótese que  $L_\sigma$ , como enlace es equivalente a  $k''_1 \cup \dots \cup k''_n$ , es decir a  $L''$ , ya que  $k''_1, \dots, k''_n$  son curvas ajenas de  $\Sigma_g$ . El coeficiente de cirugía de  $k''_i$ , como componente de  $L_\sigma$ , es  $e(k''_i) + 1 = e(k'_i) + m_i + 1 = c_i$ , el coeficiente de cirugía de  $k_i$  en  $L$ . Por lo tanto, el enlace enmarcado  $L_\sigma$  es equivalente al enlace enmarcado  $L$ .  $\square$



(a)



(b)



(c)

Figura 3.4



---

Terminamos esta sección probando el Teorema de Wallace [Wal] y Lickorish [Lil] que afirma que toda 3-variedad cerrada orientada es de la forma  $M(L)$ .

**Teorema 3.2** *Sea  $M^3$  una 3-variedad cerrada orientada. Entonces existe una sucesión  $\sigma$  de giros tal que  $M^3 \approx M(L_\sigma)$ .*

*Demostración:* Como toda 3-variedad tiene una descomposición de Heegaard existe un número  $g$  y un homeomorfismo  $p$  de  $\Sigma_g$  tal que  $M^3 \approx M(p)$ . Sea  $S'_1 \cup \dots \cup S'_g$  un conjunto meridiano de  $H'_g$ . Por el Teorema 1.2 existe una sucesión  $\sigma$  de giros y un homeomorfismo  $h$  de  $\Sigma_g$  isotópico a  $f_\sigma$  tal que  $(S'_i)h = (S'_i)p$  ( $i = 1, \dots, g$ ). Como  $ph^{-1}$  manda al conjunto meridiano  $S'_1 \cup \dots \cup S'_g$  de  $H'_g$  en sí mismo, se extiende a un homeomorfismo  $E$  de  $H'_g$  por la Proposición 1.2. Se tiene entonces un homeomorfismo que conserva orientación de  $M(p)$  sobre  $M(h)$  definido como la identidad en  $H_g$  y como  $E$  en  $H'_g$ . Luego, usando la Proposición 3.1 y el Teorema 3.1 se tiene  $M^3 \approx M(p) \approx M(h) \approx M(f_\sigma) \approx M(L_\sigma)$ .  $\square$

## 4 Teorema de Kirby

El siguiente teorema es el principal de este trabajo.

**Teorema 4.1 (Kirby)**  $M(L) \approx M(L') \iff L \overset{K}{\approx} L'$

Para probar que  $L \overset{K}{\approx} L' \implies M(L) \approx M(L')$  basta probar que si  $L'$  se obtiene de  $L$  haciendo una jugada  $K$  en  $k$  entonces  $M(L) \approx M(L')$ . Sean  $L = k \cup k_1 \cup \dots \cup k_n$  y  $T \cup T_1 \cup \dots \cup T_n$  vecindad tubular de  $L$ , donde  $T$  es vecindad de  $k$  y  $T_i$  de  $k_i$ . Sean  $f, f_1, \dots, f_n$  los marcos respectivos. Consideramos el homeomorfismo  $\Delta$  de  $S^3 - \text{int}T$  que se utiliza al definir la jugada  $K$ . Escribimos  $k'_i = (k_i)\Delta$ ,  $f'_i = (f_i)\Delta$  y  $T' = (T_i)\Delta$ . Entonces  $\Delta$  define un homeomorfismo de  $S^3 - \text{int}(T \cup T_1 \cup \dots \cup T_n)$  sobre  $S^3 - \text{int}(T \cup T'_1 \cup \dots \cup T'_n)$ ,  $(f)\Delta$  es un meridiano  $m$  de  $\partial T$  y  $f'_i$  es el marco de  $k'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Recordemos que

$$M(L) = (S^1 \times D^2) \cup (S^1 \times D_1^2) \cup \dots \cup (S^1 \times D_n^2) \cup (S^3 - \text{int}(T \cup T_1 \cup \dots \cup T_n))$$

con  $1 \times \partial D^2 = f$  y  $1 \times \partial D_i^2 = f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Observemos que

$$\begin{aligned} M(L') &= (S^1 \times D_1^2) \cup \dots \cup (S^1 \times D_n^2) \cup (S^3 - \text{int}(T'_1 \cup \dots \cup T'_n)) \\ &= (S^1 \times D^2) \cup (S^1 \times D_1^2) \cup \dots \cup (S^1 \times D_n^2) \cup (S^3 - \text{int}(T \cup T'_1 \cup \dots \cup T'_n)) \end{aligned}$$

donde  $1 \times \partial D^2 = m$  y  $1 \times \partial D_i^2 = f'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Como el homeomorfismo  $\Delta$  de  $S^3 - \text{int}(T \cup T_1 \cup \dots \cup T_n)$  sobre  $S^3 - \text{int}(T \cup T'_1 \cup \dots \cup T'_n)$  manda los meridianos  $f, f_1, \dots, f_n$  de los toros sólidos  $S^1 \times D^2, S^1 \times D_1^2, \dots, S^1 \times D_n^2$  en los meridianos  $m, f'_1, \dots, f'_n$  de los toros sólidos  $S^1 \times D^2, S^1 \times D_1^2, \dots, S^1 \times D_n^2$ ,  $\Delta$  se extiende a un homeomorfismo  $\widehat{\Delta}$  de  $M(L)$  sobre  $M(L')$  por el Corolario 1.2 y el Corolario 1.1.

Esto prueba que  $L \overset{K}{\approx} L' \implies M(L) \approx M(L')$ .

La demostración de la implicación  $M(L) \approx M(L') \implies L \overset{K}{\approx} L'$  ocupará el resto de la tesis.

Supongamos entonces que  $M(L) \approx M(L')$ . Por la Proposición 3.3, podemos suponer que  $L = L_\sigma$  y  $L' = L'_\sigma$ .

Si las curvas  $\theta_i$  correspondientes a  $\sigma$  están contenidas en  $\Sigma_g$  entonces también están contenidas en  $\Sigma_{g+r}$  (porque podemos suponer que  $\theta_i$  no interseca a las asas  $h_{g+1}, h_{g+2}, \dots$ ), así que  $f_\sigma$  puede pensarse como un homeomorfismo de  $\Sigma_g$  o como uno de  $\Sigma_{g+r}$ . Sin embargo  $M(f_\sigma : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g) \approx M(f_\sigma : \Sigma_{g+r} \rightarrow \Sigma_{g+r})$  y de hecho la descomposición de Heegaard  $(H_{g+r}, H'_{g+r})$  de  $M(f_\sigma : \Sigma_{g+r} \rightarrow \Sigma_{g+r})$  se obtiene de la descomposición de Heegaard de  $M(f_\sigma : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g)$  agregando  $r$  asas triviales.

Se tiene  $M(f_\sigma) \approx M(L_\sigma) \approx M(L'_\sigma) \approx M(f'_\sigma)$ . Por el teorema de Reidemeister-Singer 1.1, si se agrega un número suficiente de asas triviales a  $M(f_\sigma)$  y a  $M(f'_\sigma)$  se obtienen

descomposiciones de Heegaard equivalentes. Es decir existen  $r$  y  $r'$  tales que:  $g+r = g'+r'$  y  $(M(f_\sigma : \Sigma_{g+r} \rightarrow \Sigma_{g+r}), H_g, H'_g) \approx (M(f_{\sigma'} : \Sigma_{g'+r'} \rightarrow \Sigma_{g'+r'}), H_g, H'_g)$ .

La demostración de que  $L_\sigma \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma'}$  se hará en 3 pasos:

**PASO 1 (Igualación de homeomorfismos de pegado):** Probar que existe  $\sigma_1$ , tal que

$$L_\sigma \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1} \text{ y } f_{\sigma_1} = f_{\sigma'}$$

**PASO 2 (Sustitución por giros de Lickorish):** Probar que existen  $\sigma_2$  y  $\sigma'_2$  tales que

$$f_{\sigma_2} = f_{\sigma_1} = f_{\sigma'} = f_{\sigma'_2},$$

las componentes de  $\sigma_2$  y de  $\sigma'_2$  son giros de Lickorish,  $L_{\sigma_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1}$  y  $L_{\sigma'_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma'}$ .

**PASO 3 (K-equivalencia de los enlaces):** Probar que  $L_{\sigma_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma'_2}$  (sabiendo que  $f_{\sigma_2} = f_{\sigma'_2}$  y que las componentes de  $\sigma_2$  y  $\sigma'_2$  son giros de Lickorish).

**PASO 1: Igualación de homeomorfismos de pegado.**

Sean  $L_\sigma$  y  $L_{\sigma'}$  tales que  $M(L_\sigma) \approx M(L_{\sigma'})$ . Probaremos que existe  $\sigma_1$ , tal que  $L_\sigma \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1}$  y  $f_{\sigma_1} = f_{\sigma'}$ .

Como se explicó anteriormente podemos suponer, agregando asas triviales si es necesario, que  $(M(f_\sigma), H_g, H'_g) \approx (M(f_{\sigma'}), H_g, H'_g)$ .

Existe entonces un homeomorfismo  $\varphi$  de  $M(f_\sigma)$  sobre  $M(f_{\sigma'})$  que conserva orientación y tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H'_g & \xrightarrow[\approx]{\varphi|_{H'_g}} & H'_g & & \\ \cup & \approx & \cup & & \\ \Sigma_g = \partial H'_g & \xrightarrow[\approx]{\Psi'} & \partial H'_g = \Sigma_g & & \\ \approx \downarrow f_\sigma & & \approx \downarrow f_{\sigma'} & & \\ \Sigma_g = \partial H_g & \xrightarrow[\approx]{\Psi} & \partial H_g = \Sigma_g & & \\ \cap & \approx & \cap & & \\ H_g & \xrightarrow[\varphi|_{H_g}]{\approx} & H_g & & \end{array}$$

donde  $\Psi' = \varphi|_{\partial H'_g}$  y  $\Psi = \varphi|_{\partial H_g}$ .

Entonces  $\Psi' \circ f_{\sigma'} = f_\sigma \circ \Psi$ , así que:  $f_{\sigma'} = \Psi'^{-1} \circ f_\sigma \circ \Psi$ .

Nótese que  $\Psi'^{-1}$  se extiende a un homeomorfismo de  $H'_g$  y  $\Psi$  se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$ .

Considérense las curvas  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, z_1, \dots, z_{g-1}$  contenidas en  $\Sigma_g$  y mostradas en la Figura 4.1.

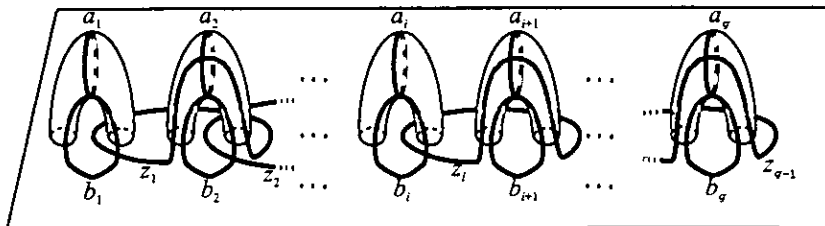


Figura 4.1

Sea  $A_i$  el giro positivo de  $a_i$ ,  $B_i$  el giro positivo de  $b_i$  y  $Z_i$  el giro positivo de  $z_i$ . Definimos los homeomorfismos  $\chi, \pi_i$  y  $\nu_i$  como sigue:

$$\chi = A_1 Z_1^{-1} B_2$$

$$\pi_i = (A_i B_i A_i)^2 \quad i = 1, \dots, g$$

$$\nu_i = (A_i B_i Z_i A_{i+1} B_{i+1})^3 \quad i = 1, \dots, g-1$$

Estos homeomorfismos tienen descripciones más geométricas:

$\pi_i$  rota el asa  $i$   $180^\circ$  y  $\nu_i$  intercambia las asas  $i$  e  $i+1$  con un giro de  $180^\circ$ . Sin embargo no utilizaremos estas descripciones.

Los homeomorfismos  $\chi, \pi_i$  y  $\nu_i$  se extienden a homeomorfismos de  $H_g$  y  $H'_g$ ;  $A_i$  se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$  y  $B_i$  se extiende a un homeomorfismo de  $H'_g$ .

Lu (en [Lu1]) ha probado el siguiente teorema:

**Teorema 4.2** *Sea  $h$  un homeomorfismo de  $\Sigma_g$  que se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$  (resp.  $H'_g$ ) que conserva orientación. Entonces  $h$  es isotópico a una composición de  $A_1$  (resp.  $B_1$ ),  $\chi, \pi_1, \dots, \pi_g, \nu_1, \dots, \nu_{g-1}$  y sus inversos.  $\square$*

Notación: Si  $\alpha$  es una sucesión finita de giros y  $\beta$  es otra, entonces  $\alpha\beta$  es la sucesión finita que se obtiene escribiendo  $\beta$  a continuación de  $\alpha$ . Por ejemplo si  $\alpha = (A_1, B_2)$  y  $\beta = (A_1^{-1}, B_3, B_2^{-1})$  entonces  $\alpha\beta = (A_1, B_2, A_1^{-1}, B_3, B_2^{-1})$ .

Si  $\alpha = (\Theta_r^{\delta_r}, \dots, \Theta_2^{\delta_2}, \Theta_1^{\delta_1})$  definimos la inversa de  $\alpha$  como:

$$\alpha^{-1} = (\Theta_1^{-\delta_1}, \dots, \Theta_{r-1}^{-\delta_{r-1}}, \Theta_r^{-\delta_r}).$$

Se tiene que  $f_{\alpha^{-1}} = f_\alpha^{-1}$  porque  $\Theta_1^{-\delta_1} \circ \Theta_2^{-\delta_2} \circ \dots \circ \Theta_{r-1}^{-\delta_{r-1}} \circ \Theta_r^{-\delta_r} = (\Theta_r^{\delta_r} \circ \dots \circ \Theta_2^{\delta_2} \circ \Theta_1^{\delta_1})^{-1}$ .

Si  $n$  es un número natural,  $\alpha^n$  denotará  $\alpha \alpha \dots \alpha$  ( $n$  veces) y  $\alpha^{-n}$  será  $\alpha^{-1} \alpha^{-1} \dots \alpha^{-1}$  ( $n$  veces).

Nótese que  $A_1 = f_{(A_1)}$ ,  $B_1 = f_{(B_1)}$ ,  $X = f_{(A_1, Z_1^{-1}, B_2)}$ ,  $\pi_i = f_{(A_i, B_i, A_i)^2}$ ,  $\nu_i = f_{(A_i, B_i, Z_i, A_{i+1}, B_{i+1})^2}$ .

Usando  $f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_n} = f_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$  y  $f_{\alpha^{-1}} = f_{\alpha^{-1}}$  se ve que cualquier composición de estos homeomorfismos y sus inversos es igual a  $f_\alpha$  para alguna sucesión  $\alpha$  de giros.

**Proposición 4.1** Sea  $\rho$  sucesión de giros tal que  $L_\rho \stackrel{K}{\sim} \emptyset$ .

- (i) Si  $f_\rho = id$  entonces  $L_{\sigma\rho\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma\tau}$  para cualesquiera sucesiones de giros  $\sigma$  y  $\tau$ .
- (ii) Si  $f_\rho$  se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$  entonces  $L_{\sigma\rho} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$  para cualquier sucesión de giros  $\sigma$ .
- (iii) Si  $f_\rho$  se extiende a un homeomorfismo de  $H'_g$  entonces  $L_{\rho\tau} \stackrel{K}{\sim} L_\tau$  para cualquier sucesión de giros  $\tau$ .

*Demostración:* Sea  $L = L_{\sigma\rho\tau}$  en el caso (i),  $L = L_{\sigma\rho}$  en el caso (ii) y  $L = L_{\rho\tau}$  en el caso (iii). Entonces  $L_\rho$  es un subenlace de  $L$  y podemos suponer que  $L - L_\rho$  no interseca a  $\Sigma_g \times [0, 1]$ .

Sean  $L'_0, L'_1, \dots, L'_n$  enlaces enmarcados tales que  $L'_0 = L_\rho$ ,  $L'_n = \emptyset$  y  $L'_i$  se obtiene de  $L'_{i-1}$  por una jugada  $K$ , en cuyo caso definimos  $\varepsilon_i = 1$ , o por una jugada  $K^{-1}$ , en cuyo caso definimos  $\varepsilon_i = -1$ . Si  $L'_i$  se obtiene de  $L'_{i-1}$ , o bien  $L'_{i-1}$  se obtiene de  $L'_i$ , por una jugada  $K$  en  $k_i$ , sea  $\Delta_i$  el homeomorfismo del exterior de  $k_i$  sobre sí mismo correspondiente a dicha jugada. Entonces  $L'_i$  es el enlace enmarcado obtenido al aplicar  $\Delta_i^{\varepsilon_i}$  al enlace enmarcado  $L'_{i-1}$ . Si hacemos una jugada  $K^{-1}$  podemos suponer que la nueva componente en  $L'_i$  está contenida en  $\Sigma_g \times [0, 1]$

Sea  $L_0 = L$  e, inductivamente, sea  $L_i$  el enlace enmarcado obtenido de  $L_{i-1}$  al hacer la misma jugada,  $K$  o  $K^{-1}$ , que cambia a  $L'_{i-1}$  en  $L'_i$ . Es decir,  $L_i$  es la unión del enlace enmarcado  $L'_i$  y el obtenido al aplicar  $\Delta_i^{\varepsilon_i}$  a  $L_i - L'_{i-1}$ .

Se tiene entonces  $L_0 \stackrel{K}{\sim} L_n$ .

En la demostración de la implicación  $L \stackrel{K}{\sim} L' \implies M(L) \approx M(L')$  al principio del Teorema 4.1 se muestra que hay un homeomorfismo  $\widehat{\Delta}_i^{\varepsilon_i} : M(L'_{i-1}) \rightarrow M(L'_i)$  que restringido al exterior de  $L'_{i-1}$  en  $S^3$  es  $\Delta_i^{\varepsilon_i}$ . Por lo tanto, la imagen bajo  $\widehat{\Delta}_i^{\varepsilon_i}$  del enlace enmarcado  $L_{i-1} - L'_{i-1}$  de  $M(L'_{i-1})$  es el enlace enmarcado  $L_i - L'_i$  de  $M(L'_i)$ . Luego  $\widehat{\Delta}_1^{\varepsilon_1} \widehat{\Delta}_2^{\varepsilon_2} \dots \widehat{\Delta}_n^{\varepsilon_n}$  es un homeomorfismo  $\chi$  que conserva orientación de  $M(L'_0)$  sobre  $M(L'_n) (= S^3)$  que manda al enlace enmarcado  $L_0 - L'_0$  de  $M(L'_0)$  en el enlace enmarcado  $L_n - L'_n (= L_n)$ .

Nótese que  $L_0 - L'_0$  no interseca a  $\Sigma_g \times [0, 1]$  y en el caso (ii) (resp. (iii)) está contenido en  $H'_g$  (resp. en  $H_g$ ) así que, por la Proposición 3.2, existe un homeomorfismo  $\xi$  que conserva orientación de  $M(L'_0)$  sobre  $S^3$  que manda a  $L_0 - L'_0$  en  $L_0 - L'_0$ .

Por lo tanto,  $\xi^{-1} \circ \chi$  es un homeomorfismo de  $S^3$  sobre  $S^3$  que conserva orientación y manda al enlace enmarcado  $L_0 - L'_0$  en  $L_n$ ; es decir,  $L_0 - L'_0$  y  $L_n$  son equivalentes. Como

$L_0 \stackrel{K}{\sim} L_n$ , se tiene  $L \stackrel{K}{\sim} L - L_\rho$ , es decir,  $L_{\sigma\rho\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma\tau}$  en el caso (i),  $L_{\sigma\rho} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$ , en el caso (ii) y  $L_{\rho\tau} \stackrel{K}{\sim} L_\tau$  en el caso (iii).  $\square$

**Corolario 4.1** Sea  $\gamma = (\Theta_r^{\delta_r}, \dots, \Theta_2^{\delta_2}, \Theta_1^{\delta_1})$  tal que  $\theta_i$  es trivial como nudo en  $S^3$  y  $e(\theta_i) = 0$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Supongamos que  $L_\gamma \stackrel{K}{\sim} \emptyset$  y  $f_\gamma$  se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$  o a uno de  $H'_g$ . Entonces  $L_{\gamma^{-1}} \stackrel{K}{\sim} \emptyset$ .

*Demostración:* Si  $f_\gamma$  se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$  (resp.  $H'_g$ ) entonces, por la Proposición 4.1,  $L_{\gamma^{-1}} \stackrel{K}{\sim} L_{\gamma^{-1}\gamma}$  (resp.  $L_{\gamma^{-1}} \stackrel{K}{\sim} L_{\gamma\gamma^{-1}}$ ) así que, por el Corolario 3.1,  $L_{\gamma^{-1}} \stackrel{K}{\sim} \emptyset$ .  $\square$

El siguiente lema se usará en la demostración de la Proposición 4.2. Recuérdese la definición de componentes paralelas dada en la sección 2.

**Lema 4.1** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  componentes paralelas desanudadas en un enlace enmarcado  $L$ . Supongamos que el coeficiente de cirugía de  $\alpha$  es 0 y el de  $\beta$  es  $\pm 1$ . Sea  $L'$  el enlace enmarcado obtenido de  $L$  eliminando  $\beta$ . Entonces  $L' \stackrel{K}{\sim} L$ .

*Demostración:* Supongamos que el coeficiente de  $\beta$  es 1.

La prueba se muestra en la Figura 4.2 (a),(b),(c),(d)

El enlace en (a) se obtiene del enlace en (b) haciendo una jugada  $K$  derecha en  $\gamma$ ; al hacerlo cambia el coeficiente de  $\alpha$  de  $-1$  a  $-1 + 1^2 = 0$ . El enlace en (c) se obtiene del enlace en (b) haciendo una jugada  $K$  izquierda en  $\beta$ ; los coeficientes de las componentes que intersecan al disco con frontera  $\beta$  pueden cambiar mas no los coeficientes de  $\alpha$  y  $\gamma$  que son  $-1$ . El enlace en (d), que es  $L'$ , se obtiene del enlace en (c) haciendo una jugada  $K$  derecha en  $\alpha$ . Nótese que  $L - (\alpha \cup \beta)$  en (b) se convierte en un enlace equivalente en  $S^3 - \alpha$ . También si  $L_j$  es una componente de  $L - (\alpha \cup \beta)$  en (b) y tiene coeficiente  $r_j$ , al transformarse  $L_j$  en  $L'_j$  (en la Figura 4.2 (c)) el coeficiente cambia a  $r_j - l_1^2$ , donde  $l_1 = lk(L_j, \beta)$ , y al transformarse  $L'_j$  de (c) a (d) el coeficiente cambia a  $r - l_1^2 + l_2^2$ , donde  $l_2 = lk(L'_j, \alpha)$ , el cual es igual a  $r_j$  porque  $l_1 = l_2$ . Esto demuestra el lema si  $\beta = 1$ .

Si  $\beta = -1$  la demostración es análoga.  $\square$

**Proposición 4.2** Sea  $\sigma$  cualquier sucesión de giros.

- (i) Si  $\alpha$  es  $(A_1)$  o  $(A_1^{-1})$  y si  $\beta$  es  $(B_1)$  o  $(B_1^{-1})$  entonces  $L_{\sigma\alpha} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$  y  $L_{\beta\sigma} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$ .
- (ii) Si  $\gamma$  es cualquiera de las sucesiones  $(A_1, Z_1^{-1}, B_2)$ ,  $(A_i, B_i, A_i)^2$ ,  $(A_i, B_i, Z_i, A_{i+1}, B_{i+1})^3$  o sus inversos entonces  $L_{\gamma\sigma} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$  y  $L_{\sigma\gamma} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$ .

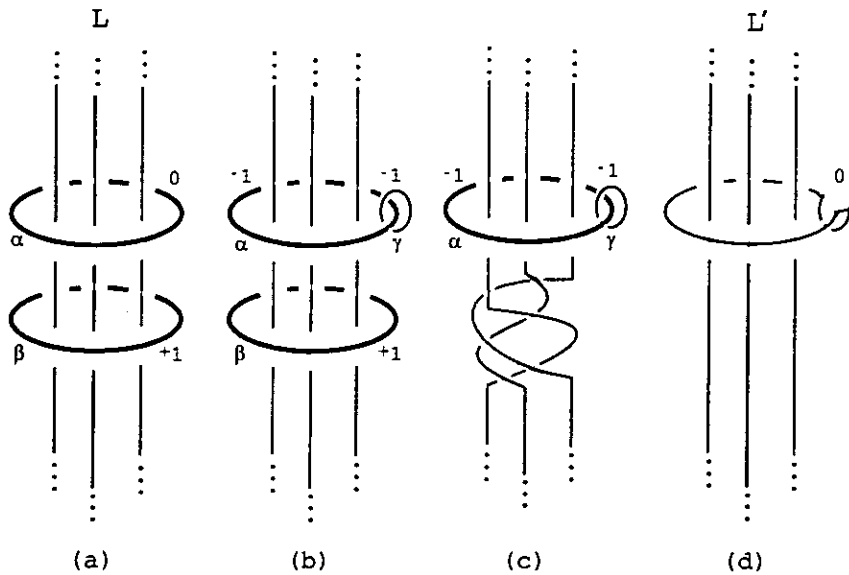


Figura 4.2

*Demostración:*

- (i) Nótese que  $f_\alpha$  es  $A_1$  o  $A_1^{-1}$  así que  $f_\alpha$  se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$ . Además  $L_\alpha$  es un nudo trivial con coeficiente  $\pm 1$  por lo que  $L_\alpha \stackrel{K}{\sim} \emptyset$ . Luego  $L_{\sigma\alpha} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$  por la Proposición 4.1.

Análogamente  $f_\beta$  es  $B_1$  o  $B_1^{-1}$ ,  $f_\beta$  se extiende a un homeomorfismo de  $H'_g$  y  $L_\beta \stackrel{K}{\sim} \emptyset$  así que, por la Proposición 4.1,  $L_{\beta\sigma} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$ .

- (ii) En cualquiera de los casos  $f_\gamma$  se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$  y también a un homeomorfismo de  $H'_g$  por lo que, por la Proposición 4.1, bastará probar que  $L_\gamma \stackrel{K}{\sim} \emptyset$  en cualquiera de los casos. De hecho, por el Corolario 4.1, bastará probar que  $L_{(A_1, Z_1^{-1}, B_2)} \stackrel{K}{\sim} \emptyset$ ,  $L_{(A_i, B_i, A_i)^2} \stackrel{K}{\sim} \emptyset$  y  $L_{(A_i, B_i, Z_i, A_{i+1}, B_{i+1})^3} \stackrel{K}{\sim} \emptyset$  pues  $a_i$ ,  $b_i$  y  $z_i$  son triviales como nudos en  $S^3$  y tienen número de encaje 0.

El enlace  $L_{(A_1, Z_1^{-1}, B_2)}$  es trivial, es decir, es frontera de la unión de tres discos ajenos en  $S^3$ . Sus coeficientes son 1,  $-1$  y 1. Por tanto, haciendo tres jugadas discoidales se convierte dicho enlace en el enlace vacío.

Consideremos al enlace  $L_{(A_i, B_i, A_i)^2}$  mostrado en la Figura 4.3. Una componente (paralela a  $a_i$ ) es frontera de un disco que no interseca al resto del enlace y se elimina con una jugada discoidal. Otra es frontera de un disco que interseca al resto del enlace en un punto que pertenece a una componente  $b'_i$ ; la suprimimos con una jugada K izquierda lo cual cambia el coeficiente de  $b'_i$  de 1 a 0. Una tercera componente es frontera de otro disco que interseca al resto del enlace en un punto que pertenece a  $b'_i$ ; la eliminamos también con una jugada K izquierda lo cual cambia el coeficiente de  $b'_i$  de 0 a -1. A continuación suprimimos  $b'_i$  y una curva paralela a  $b'_i$  con una jugada anular. Finalmente eliminamos la sexta y última componente con una jugada discoidal obteniendo así el enlace vacío.

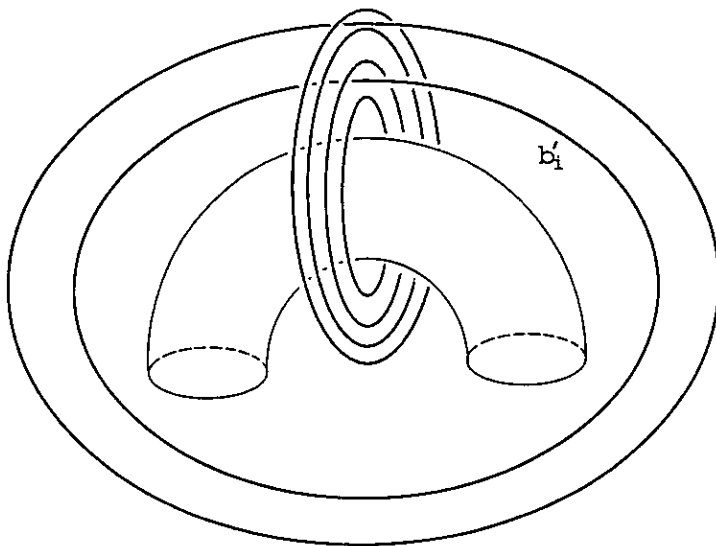


Figura 4.3

El enlace  $L_{(A_i, B_i, Z_i, A_{i+1}, B_{i+1})^3}$  se muestra en la Figura 4.4 (a). Hacemos jugadas K en  $a_i^3$ ,  $a_{i+1}^3$ ,  $b_i^1$  y  $b_{i+1}^1$  las cuales cambian los coeficientes de  $b_i^3$ ,  $b_{i+1}^3$ ,  $a_i^1$  y  $a_{i+1}^1$  de 1 a 0 (ver Fig. 4.4 (b)). Utilizando el Lema 4.1 eliminamos las curvas  $a_i^2$  y  $z_i^1$  por ser paralelas a  $a_i^1$  que tiene coeficiente 0, y eliminamos las curvas  $b_{i+1}^2$  y  $z_i^3$  por ser paralelas a  $b_{i+1}^3$  que tiene coeficiente 0 (ver Figura 4.4 (c)). Hacemos jugadas K en  $b_i^2$  y en  $a_{i+1}^2$  las cuales cambian los coeficientes de  $a_i^1$  y  $b_{i+1}^3$  de 0 a -1 (ver Fig. 4.4 (d)). Ahora hacemos jugadas K en  $a_i^1$  y en  $b_{i+1}^3$  cambiando los coeficientes de  $b_i^3$  y  $a_{i+1}^1$  de 0 a 1 (ver Figura 4.4 (e)). A continuación hacemos jugadas K en  $b_i^3$  y  $a_{i+1}^1$  las cuales cambian a -1 el coeficiente de  $z_i^2$  (ver Fig. 4.4 (f)). Finalmente haciendo una jugada K, en  $z_i^2$  se obtiene el enlace vacío.  $\square$



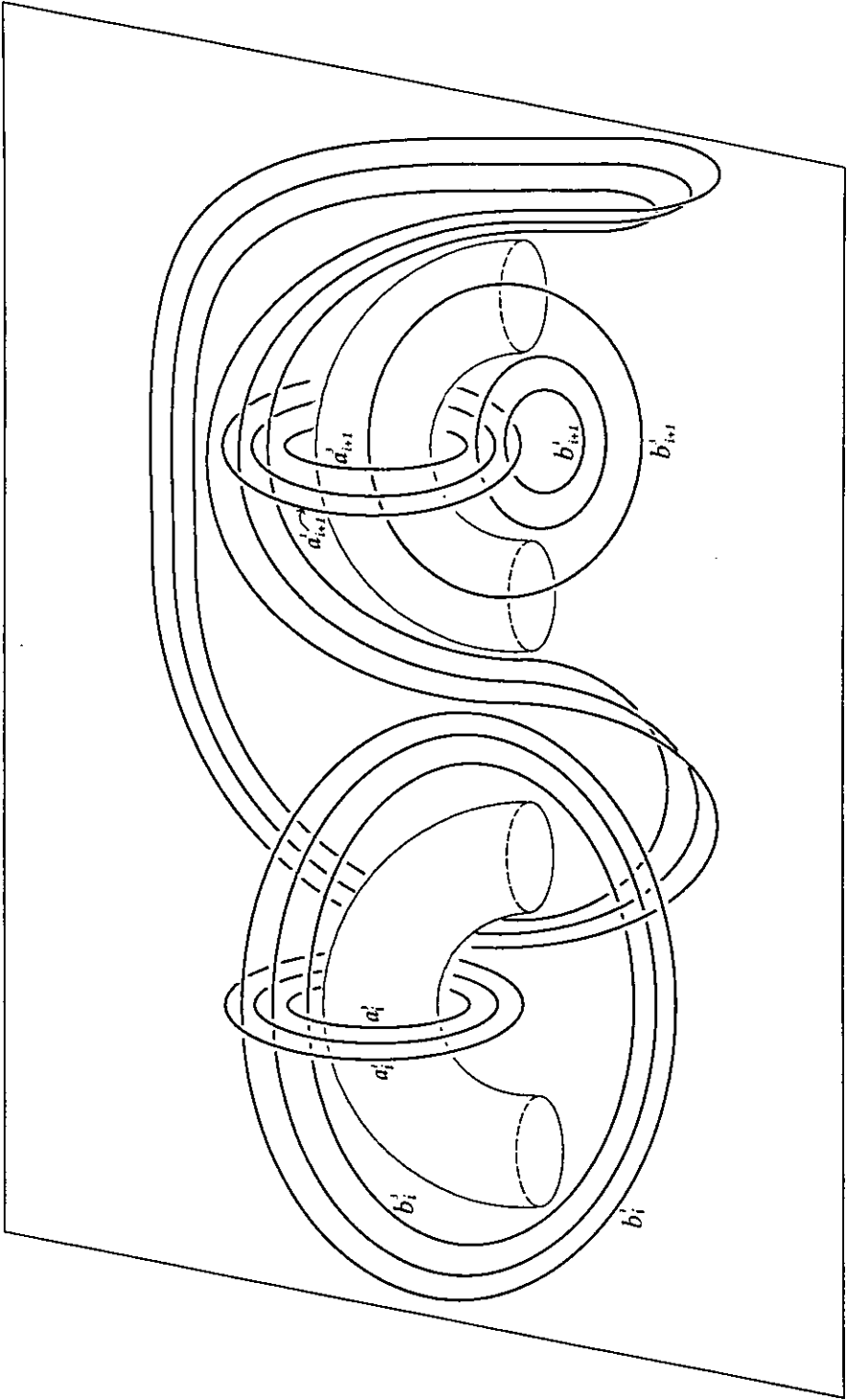


Figura 4.4 (a)

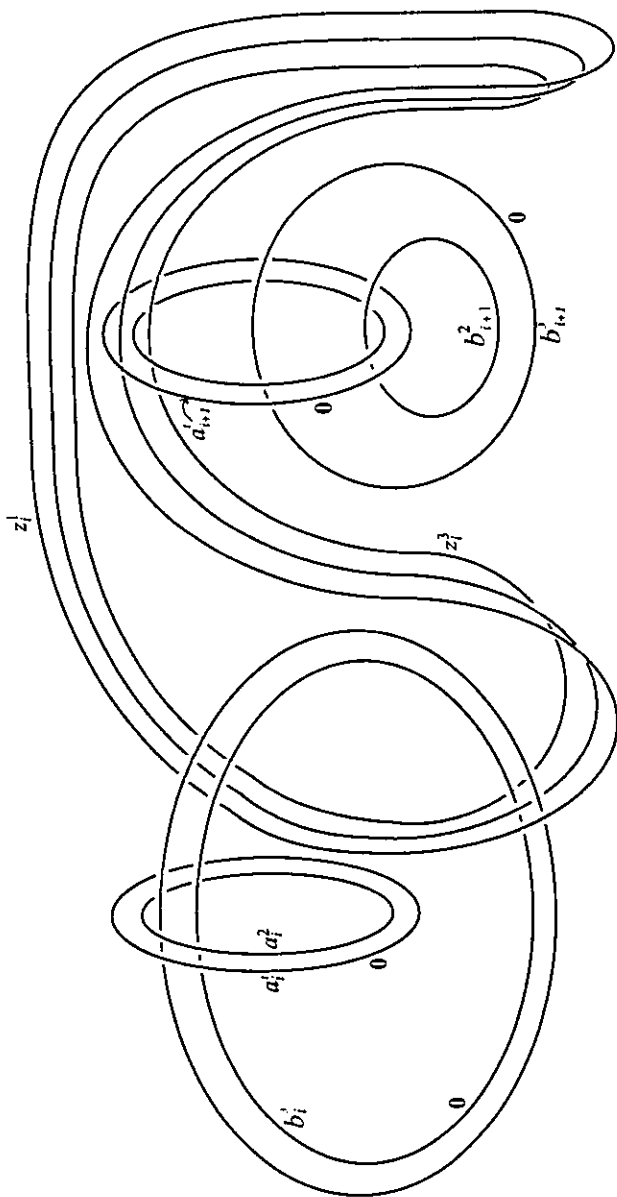


Figura 4.4 (b)

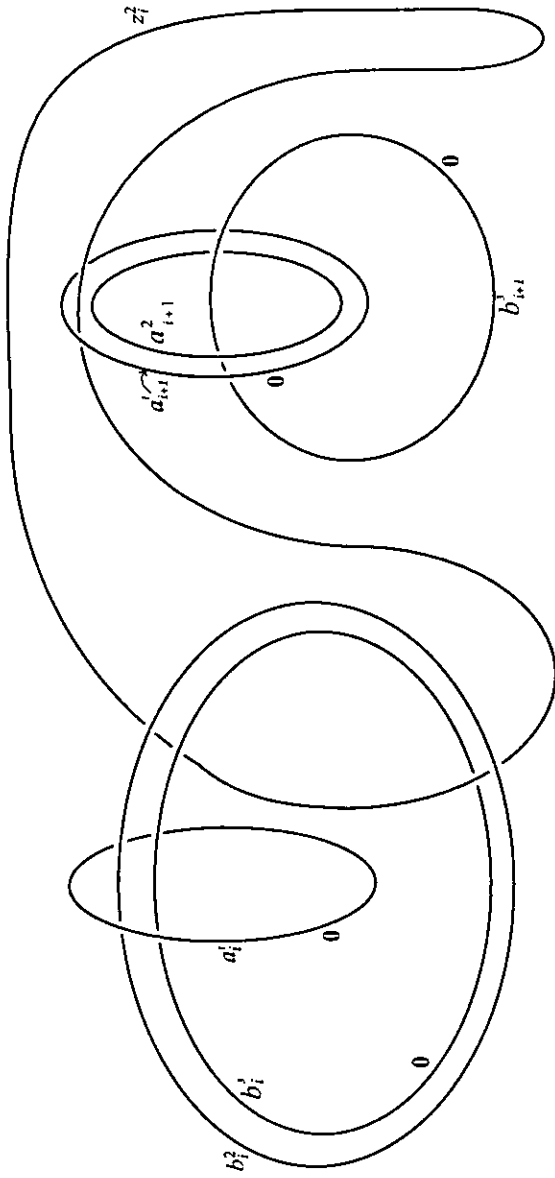


Figura 4.4 (c)

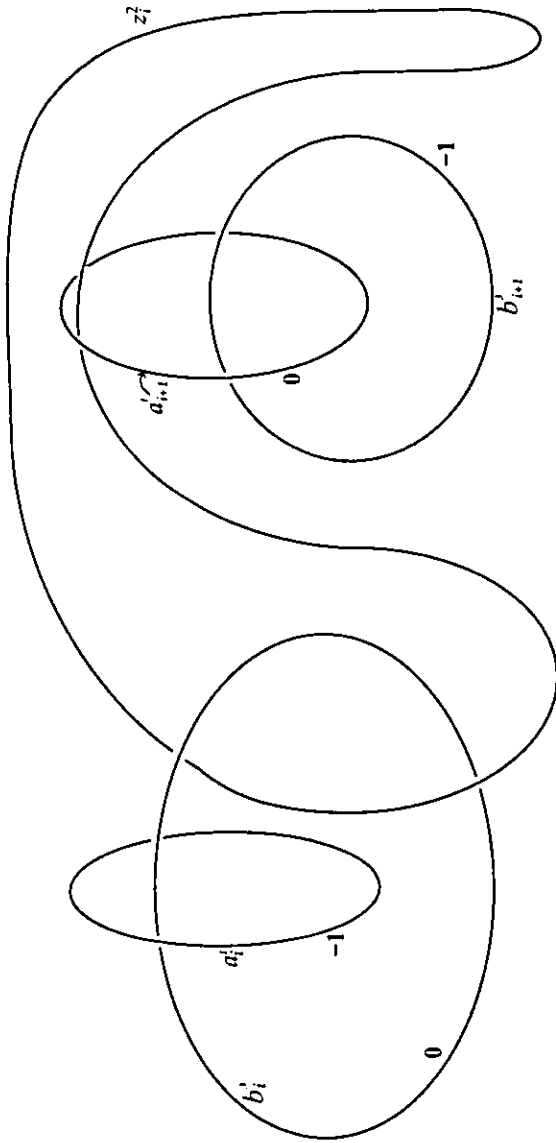


Figura 4.4 (d)

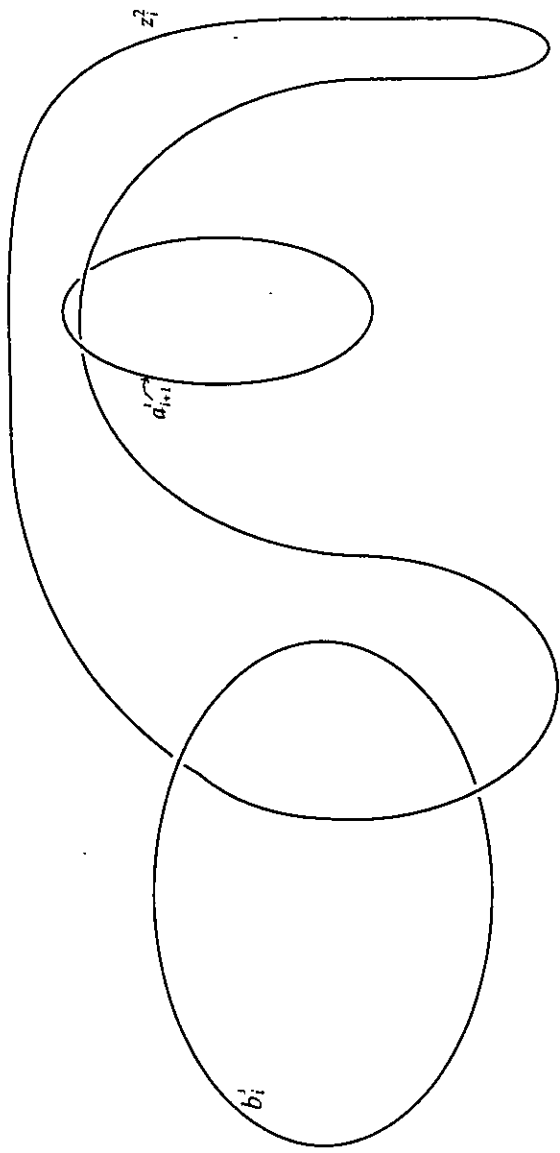


Figura 4.4 (e)

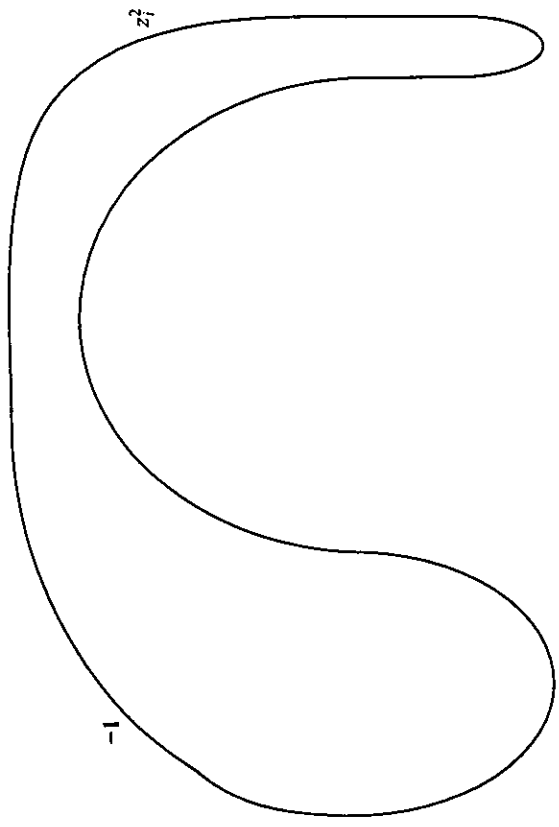


Figura 4.4 (f)

Terminaremos ahora el paso 1.

Por el Teorema 4.2  $\Psi'^{-1} = f_{\beta_1} \circ f_{\beta_2} \circ \dots \circ f_{\beta_m}$  y  $\Psi = f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}$  donde cada  $\beta_j$  es una de las sucesiones  $(B_1^{\pm 1}), (A_1, Z_1^{-1}, B_2)^{\pm 1}, (A_i, B_i, A_i)^{\pm 2}, (A_i, B_i, Z_i, A_{i+1}, B_{i+1})^{\pm 3}$  y cada  $\alpha_j$  es una de las sucesiones  $(A_1^{\pm 1}), (A_1, Z_1^{-1}, B_2)^{\pm 1}, (A_i, B_i, A_i)^{\pm 2}, (A_i, B_i, Z_i, A_{i+1}, B_{i+1})^{\pm 3}$ . Definimos  $\sigma_1 = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ . Entonces  $f_{\sigma'} = \Psi'^{-1} \circ f_{\sigma} \circ \Psi = f_{\beta_1} \circ f_{\beta_2} \circ \dots \circ f_{\beta_m} \circ f_{\sigma} \circ f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_n} = f_{\sigma_1}$  y, usando la Proposición 4.1,

$$L_{\sigma} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma \alpha_1} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma \alpha_1 \alpha_2} \stackrel{K}{\sim} \dots \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \stackrel{K}{\sim} L_{\beta_m \sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \stackrel{K}{\sim} \dots \stackrel{K}{\sim} L_{\beta_1 \dots \beta_m \sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = L_{\sigma_1}.$$

Esto concluye el paso 1.

## PASO 2 : Sustitución por giros de Lickorish.

Al terminar el paso 1 se tienen sucesiones de giros  $\sigma_1$  y  $\sigma'$  tales que  $f_{\sigma_1} = f_{\sigma'}$ ,  $L = L_{\sigma} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1}$  y  $L' = L_{\sigma'}$ .

En el paso presente probaremos que existe  $\sigma_2$  tal que  $f_{\sigma_2} = f_{\sigma_1}$ ,  $L_{\sigma_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1}$  donde las componentes de  $\sigma_2$  son giros de Lickorish.

De manera análoga se tendrá  $\sigma'_2$ , con componentes que son giros de Lickorish, tal que  $f_{\sigma'_2} = f_{\sigma'}$  y  $L_{\sigma'_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma'}$ .

**Lema 4.2 (Lema de Conjugación)** Sean  $\theta$  curva simple cerrada en  $\Sigma_g$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  curvas de Lickorish en  $\Sigma_g$ . Sean  $\delta, \delta_1, \dots, \delta_r$  números tales que  $|\delta| = |\delta_i| = 1$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Sean  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r, \Theta, \hat{\Theta}$  los giros positivos de  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \theta, \hat{\theta}$  donde  $\hat{\theta} = (\theta) \Lambda_1^{\delta_1} \Lambda_2^{\delta_2} \dots \Lambda_r^{\delta_r}$ . Sea  $\gamma = (\Lambda_1^{-\delta_r}, \dots, \Lambda_1^{-\delta_1}, \Theta^{\delta}, \Lambda_1^{\delta_1}, \dots, \Lambda_r^{\delta_r})$ . Entonces, si  $\sigma$  y  $\tau$  son sucesiones cualesquiera de giros,  $f_{\sigma\gamma\tau} = f_{\sigma(\hat{\Theta}^{\delta})\tau}$  y  $L_{\sigma\gamma\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma(\hat{\Theta}^{\delta})\tau}$ .

*Demostración:* Lo demostraremos por inducción en  $r$ .

Supongamos  $r = 1$ .

Sea  $A$  una vecindad anular de  $\theta$ . Entonces  $(A)\Lambda_1^{\delta_1}$  es vecindad anular de  $\hat{\theta}$  y  $\Lambda_1^{-\delta_1}\Theta\Lambda_1^{\delta_1}$  es la identidad en el complemento del anillo  $(A)\Lambda_1^{\delta_1}$  y se puede ver que es un giro positivo. Luego, puede escribirse  $\hat{\Theta} = \Lambda_1^{-\delta_1}\Theta\Lambda_1^{\delta_1}$  y, por tanto,  $\hat{\Theta}^{-1} = \Lambda_1^{-\delta_1}\Theta^{-1}\Lambda_1^{\delta_1}$ . Por consiguiente  $f_{\gamma} = f_{(\Lambda_1^{-\delta_1}, \Theta^{\delta}, \Lambda_1^{\delta_1})} = \Lambda_1^{-\delta_1}\Theta^{\delta}\Lambda_1^{\delta_1} = \hat{\Theta}^{\delta} = f_{(\hat{\Theta}^{\delta})}$  y  $f_{\sigma\gamma\tau} = f_{\sigma}f_{\gamma}f_{\tau} = f_{\sigma}f_{(\hat{\Theta}^{\delta})}f_{\tau} = f_{\sigma(\hat{\Theta}^{\delta})\tau}$ .

Probemos ahora que  $L_{\sigma\gamma\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma(\hat{\Theta}^{\delta})\tau}$ . (Véase la Figura 4.5).

Podemos suponer que  $L_{\sigma\gamma\tau} = L_{\sigma(\Lambda_1^{-\delta_1})} \cup \theta \cup L_{(\Lambda_1^{\delta_1})\tau}$  donde  $L_{\sigma(\Lambda_1^{-\delta_1})} \subset \text{int}H'_g$ ,  $L_{(\Lambda_1^{\delta_1})\tau} \subset \text{int}H_g$ , y el coeficiente de cirugía de  $\theta$  es  $e(\theta) + \delta$ . Nótese que  $\lambda_1$ , por ser curva de Lickorish, es frontera de un disco  $D$  contenido en  $H_g$  o en  $H'_g$ . Sean  $\lambda'_1$  y  $\lambda''_1$  las componentes de  $L_{\sigma\gamma\tau}$  que corresponden a  $\Lambda_1^{-\delta_1}$  y  $\Lambda_1^{\delta_1}$  donde  $\lambda''_1 \subset \text{int}D$ . El coeficiente de cirugía  $\delta'_1$  de  $\lambda'_1$  es  $-\delta_1$  si  $D \subset H_g$  y es  $\delta_1$  si  $D \subset H'_g$ . Haciendo jugadas  $K$  en  $\lambda'_1$  y  $\lambda''_1$  se obtiene un enlace enmarcado con dos componentes menos. La parte de éste contenida en  $\text{int}H'_g$ , es equivalente a  $L_{\sigma}$  y la

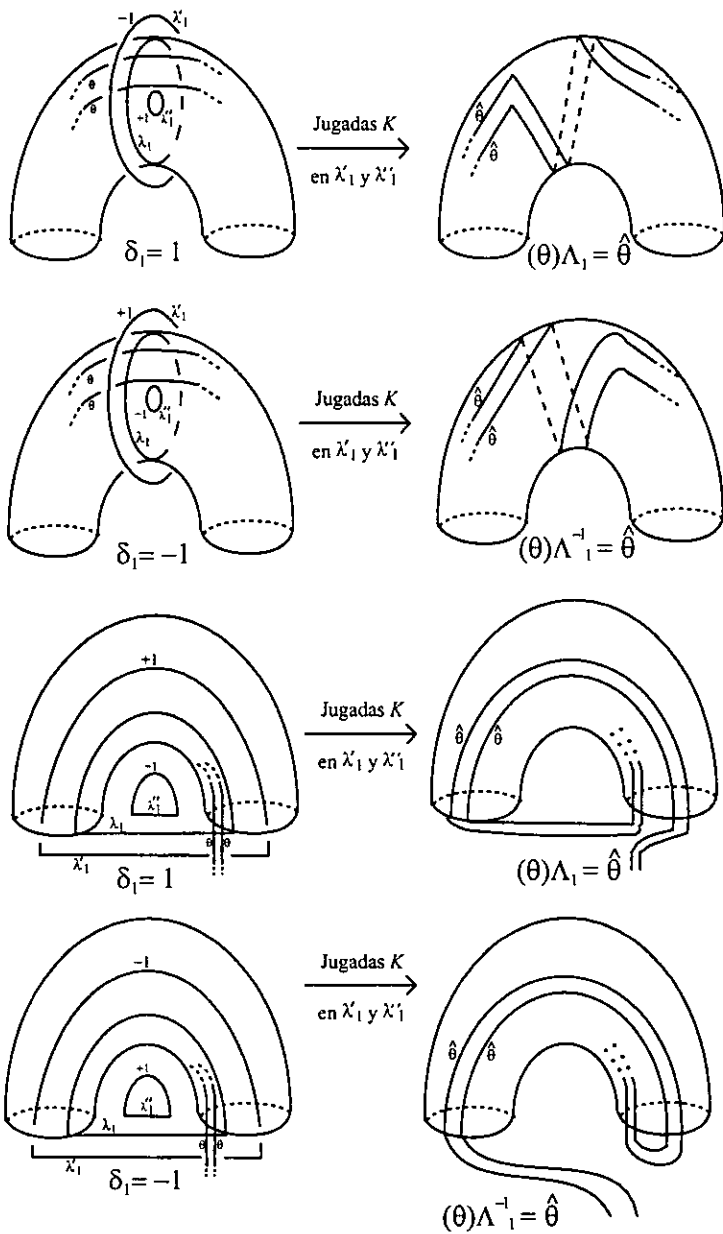


Figura 4.5



contenida en  $\text{int}H_g$  es equivalente a  $L_\tau$ , por tener signo distinto  $-\delta_1$  y  $\delta_1$ . Además, la parte contenida en  $\Sigma_g$  es  $\widehat{\theta}$ , por la Proposición 2.2: el coeficiente de cirugía de  $\widehat{\theta}$  es  $e(\theta) + \delta - \delta_1 l^2$  donde  $l^2$  es el cuadrado de  $lk(\theta, \lambda')$ . Nótese que, aplicando la Proposición 2.1, tomando como marco la curva paralela a  $\theta$  contenida en  $\Sigma_g$ , se ve que  $e(\widehat{\theta}) = e(\theta) - \delta_1 l^2$ .

Luego el enlace enmarcado obtenido de  $L_{\sigma\gamma\tau}$  haciendo jugadas K en  $\lambda'_1$  y  $\lambda''_1$  es  $L_{\sigma(\widehat{\theta}^\delta)_\tau}$ . Esto prueba el lema para el caso  $r = 1$ .

Sea ahora  $r > 1$ . Se tiene, por la hipótesis de inducción,  $f_{\sigma\gamma\tau} = f_{\sigma(\Lambda_r^{-\delta_r})(\widehat{\theta}^\delta)(\Lambda_r^{\delta_r})_\tau}$  y  $L_{\sigma\gamma\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma(\Lambda_r^{-\delta_r})(\widehat{\theta}^\delta)(\Lambda_r^{\delta_r})_\tau}$  donde  $\widetilde{\theta} = (\theta)\Lambda_1^{\delta_1}\Lambda_2^{\delta_2}\dots\Lambda_{r-1}^{\delta_{r-1}}$ . Como el lema es válido para  $r = 1$  y  $\widehat{\theta} = \widetilde{\theta}(\Lambda_r^{\delta_r})$  podemos escribir  $f_{\sigma(\Lambda_r^{-\delta_r})(\widehat{\theta}^\delta)(\Lambda_r^{\delta_r})_\tau} = f_{\sigma(\widehat{\theta}^\delta)_\tau}$  y  $L_{\sigma(\Lambda_r^{-\delta_r})(\widehat{\theta}^\delta)(\Lambda_r^{\delta_r})_\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma(\widehat{\theta}^\delta)_\tau}$ . Por tanto,  $f_{\sigma\gamma\tau} = f_{\sigma(\widehat{\theta}^\delta)_\tau}$  y  $L_{\sigma\gamma\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma(\widehat{\theta}^\delta)_\tau}$ .  $\square$

Supongamos que  $\sigma_1 = (\Theta_r^{\epsilon_r}, \dots, \Theta_1^{\epsilon_1})$ . Las curvas  $\theta_r, \dots, \theta_1$  son no separantes. (Las componentes de  $L_\sigma$  no separan porque atraviesan cada asa cuando mucho una vez. Las componentes de  $L_{\sigma_1}$  son o componentes de  $L_\sigma$ , o  $A_i$ , o  $B_i$ , o  $Z_i$ ; todas éstas son no separantes).

Sea  $1 \leq j \leq r$ . Por el Teorema 1.2 existe un homeomorfismo que conserva orientación  $h: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  tal que  $(\theta_j)h = a_1$ . El homeomorfismo  $h$  es composición de giros de Lickorish, es decir,  $h = \Lambda_r^{\delta_r} \circ \dots \circ \Lambda_2^{\delta_2} \circ \Lambda_1^{\delta_1}$  donde  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$  son giros positivos de curvas de Lickorish  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  (ver [Li2] y [Hu]). Se tiene entonces  $\theta_j = (a_1)\Lambda_1^{-\delta_1}\Lambda_2^{-\delta_2}\dots\Lambda_r^{-\delta_r}$ .

Sea  $\gamma = (\Lambda_r^{\delta_r}, \dots, \Lambda_2^{\delta_2}, \Lambda_1^{\delta_1}, A_1^{\epsilon_1}, \Lambda_1^{-\delta_1}, \Lambda_2^{-\delta_2}, \dots, \Lambda_r^{-\delta_r})$ . Nótese que todas las componentes de  $\gamma$  son giros de Lickorish.

Entonces, por el lema de conjugación 4.2. si sustituimos, en  $\sigma_1$ ,  $\Theta_j^{\epsilon_j}$  por  $\gamma$  se obtiene una sucesión  $\widehat{\sigma}_1$  tal que  $f_{\widehat{\sigma}_1} = f_{\sigma_1}$  y  $L_{\widehat{\sigma}_1} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1}$ .

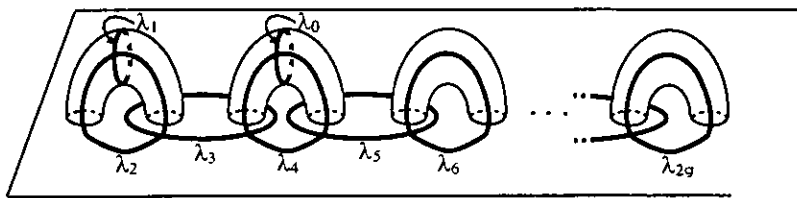
Si se hace esto para cada  $j$  se obtiene finalmente una sucesión  $\sigma_2$  tal que  $f_{\sigma_2} = f_{\sigma_1}$ ,  $L_{\sigma_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1}$  y todas las componentes de  $\sigma_2$  son giros de Lickorish.

Esto termina el paso 2.

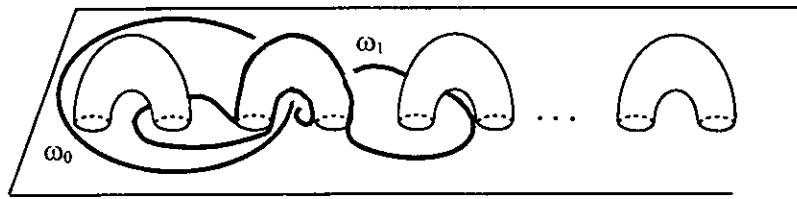
### PASO 3: Utilización de la presentación de Hatcher-Thurston-Wajnryb.

Se tienen ahora sucesiones de giros  $\sigma_2$  y  $\sigma'_2$  cuyas componentes son giros de las curvas  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$  indicadas en la Figura 4.6 (a) y tales que  $f_{\sigma_2} = f_{\sigma'_2}$ . Se quiere probar que  $L_{\sigma_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma'_2}$ . Para ello se utilizará una presentación finita del grupo de homeotopía de la superficie de género  $g$ , con  $g \geq 3$ , encontrada por Wajnryb y basada en un artículo previo de Hatcher y Thurston.

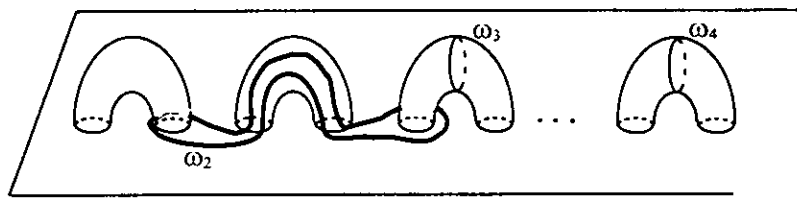
Sea  $\text{Homeo}^+(\Sigma_g)$  el grupo de homeotopía de  $\Sigma_g$ . Según el Teorema 1.3, este grupo está generado por los giros de Lickorish. Supongamos  $g \geq 3$ . Consideremos  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{2g}, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  y  $\Omega_4$  los giros de las curvas  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2g}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$  y  $\omega_4$  mostradas en las Figuras 4.6 (a), 4.6 (b) y 4.6 (c).



(a)

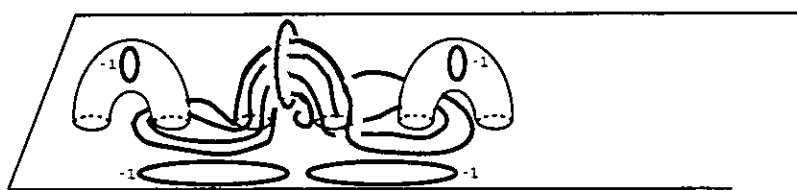


(b)



(c)

Figura 4.6



$$L(\Lambda_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3^{-1}, \Lambda_1^{-1}, \Lambda_3^{-1}, \Lambda_5^{-1})$$

Figura 4.7

Definimos las palabras  $P, F_0, F_1, F_2, F_3, F_4$  en  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{2g}$  como sigue:

$$* \begin{cases} P = \Lambda_{2g} \cdots \Lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \cdots \Lambda_{2g} \\ F_0 = (\Lambda_4 \Lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4)^{-1} \\ F_1 = \Lambda_4 \Lambda_3 \Lambda_5 \Lambda_4 \\ F_2 = \Lambda_2 \Lambda_1 \Lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_4 \Lambda_3 \Lambda_5 \Lambda_4 \\ F_3 = (\Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4 \Lambda_5 \Lambda_6)^{-1} \Lambda_5 \Lambda_6 \Lambda_4 \Lambda_3 \Lambda_5 \Lambda_4 \Lambda_0 (\Lambda_5 \Lambda_6 \Lambda_4 \Lambda_3 \Lambda_5 \Lambda_4)^{-1} \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4 \\ F_4 = (U_1 U_2 \cdots U_{g-1})^{-1} \Lambda_1 U_1 U_2 \cdots U_{g-1} \\ \text{donde} \begin{cases} U_i = \Lambda_{2i} \Lambda_{2i+1} \Lambda_{2i+2} V_i (\Lambda_{2i+2} \Lambda_{2i+1} \Lambda_{2i} \Lambda_{2i-1})^{-1} & (i = 1, \dots, g-1) \\ V_i = (\Lambda_4 \Lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4)^{-1} \Lambda_0 \Lambda_4 \Lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_4 \\ V_i = T_{i-1} T_i V_{i-1} (T_{i-1} T_i)^{-1} & (i = 2, \dots, g-1) \\ T_i = \Lambda_{2i} \Lambda_{2i-1} \Lambda_{2i+1} \Lambda_{2i} & (i = 1, \dots, g-1) \end{cases} \end{cases}$$

Estas palabras tienen las siguientes propiedades:  $(\omega_i)F_i = \Lambda_0$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) y  $(\omega_4)P = \omega_4$ . Esto permitirá la utilización del lema de conjugación 4.2 en la demostración de la Proposición 4.3.

Wajnryb [Waj], basado en un artículo previo de Hatcher y Thurston [HT], probó el siguiente teorema.

**Teorema 4.3** *Sea  $g \geq 3$ . Entonces  $\text{Homeo}^+(\Sigma_g)$  tiene una presentación con generadores  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{2g}, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  y  $\Omega_4$  y relaciones*

(a)  $\Lambda_i = \Lambda_j \Lambda_i \Lambda_j^{-1}$  si  $\lambda_i \cap \lambda_j = \emptyset$

(b)  $\Lambda_i = \Lambda_j \Lambda_i \Lambda_j \Lambda_i^{-1} \Lambda_j^{-1}$  si  $\lambda_i$  y  $\lambda_j$  se intersecan en un solo punto

(c)  $(\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3)^4 \Lambda_0^{-1} \Omega_0^{-1} = 1$

(d)  $\Lambda_0 \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3^{-1} \Lambda_1^{-1} \Lambda_3^{-1} \Lambda_5^{-1} = 1$

(e)  $\Omega_4 = P \Omega_4 P^{-1}$

(f)  $\Omega_i = F_i \Lambda_0 F_i^{-1}$   $i = 0, 1, 2, 3, 4.$   $\square$

Por el teorema de Wajnryb si dos palabras en los generadores  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{2g}, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  y  $\Omega_4$  representan el mismo elemento de  $M_g$  entonces se puede pasar de una palabra a la otra utilizando un número finito de veces las siguientes operaciones:

- (1) Inserción o eliminación de  $aa^{-1}$  o bien  $a^{-1}a$  donde  $a$  es un generador.
- (2) Sustitución del primer (resp. segundo) miembro de (a),(b),(c),(d),(e) o (f) por el segundo (resp. primero).

Ahora bien  $\sigma_2$  y  $\sigma'_2$  son palabras en  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{2g}$  que representan el mismo elemento de  $M_g$  ya que  $f_{\sigma_2} = f_{\sigma'_2}$ . Por lo tanto se puede pasar de  $\sigma_2$  a  $\sigma'_2$  aplicando un número finito de veces las operaciones (1) y (2). Por el Lema 3.1, si  $\sigma$  y  $\tau$  son palabras en los generadores  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{2g}, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  y  $\Omega_4$ , y si  $a$  es uno de estos generadores con  $|\delta| = 1$  entonces  $L_{\sigma a^{\delta} a^{-\delta} \tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma \tau}$ . Por lo tanto, para demostrar que  $L_{\sigma_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma'_2}$  será suficiente probar la siguiente proposición.

**Proposición 4.3** Sean  $\sigma$  y  $\tau$  palabras en los generadores  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{2g}, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  y  $\Omega_4$ . Sean  $p$  y  $s$  el primero y segundo miembros de (a), (b), (c), (d), (e) o (f), pensados como palabras en estos generadores. Entonces  $L_{\sigma p \tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma s \tau}$ .

*Demostración:*

$$(f) \Omega_i = F_i \Lambda_0 F_i^{-1}$$

Sea  $F_i = \Lambda_{j_r}^{\delta_r} \dots \Lambda_{j_1}^{\delta_1}$  la expresión para  $F_i$  dada en (\*), y sea  $\gamma = (\Lambda_{j_r}^{\delta_r}, \dots, \Lambda_{j_1}^{\delta_1}, \Lambda_0, \Lambda_{j_1}^{-\delta_1}, \dots, \Lambda_{j_r}^{-\delta_r})$ . Como se mencionó anteriormente  $\omega_i = (\Lambda_0) F_i^{-1} = (\Lambda_0) \Lambda_{j_1}^{-\delta_1} \dots \Lambda_{j_r}^{-\delta_r}$ . Por lo tanto, usando el lema de conjugación 4.2, con  $\sigma$  y  $\tau$  vacías, se tiene que  $L_{\sigma \gamma \tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma(\Omega_i) \tau}$ .

De forma análoga se prueban los casos correspondientes a (a), (b) y (e) pues en el caso (a)  $\lambda_i = (\lambda_i) \Lambda_j^{-1}$ , en el caso (b)  $\lambda_i = (\lambda_j) \Lambda_i^{-1} \Lambda_j^{-1}$  y, como se mencionó anteriormente, en el caso (e)  $\omega_4 = (\omega_4) P$ .

Para probar los casos que corresponden a (c) y (d) será suficiente, por la Proposición 4.1 (i), hacer ver que  $L_{(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)^4 (\Lambda_0^{-1}, \Omega_0^{-1})} \stackrel{K}{\sim} \emptyset$  y que  $L_{(\Lambda_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3^{-1}, \Lambda_1^{-1}, \Lambda_3^{-1}, \Lambda_5^{-1})} \stackrel{K}{\sim} \emptyset$ .

Ahora bien,  $L_{(\Lambda_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3^{-1}, \Lambda_1^{-1}, \Lambda_3^{-1}, \Lambda_5^{-1})}$  es un enlace trivial, es decir, es frontera de la unión de siete discos, y sus coeficientes son 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1 (ver Figura 4.7), por lo que haciendo siete jugadas discoidales se obtiene el enlace vacío.

Consideremos ahora el enlace enmarcado  $L_{(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)^4 (\Lambda_0^{-1}, \Omega_0^{-1})}$ , mostrado en la Figura 4.8 (a). Los coeficientes de  $\lambda_0$  y  $\omega_0$  son -1; los restantes son 1. Eliminamos primero  $\lambda_0, \omega_0$  y  $\lambda_{3,4}$  con jugadas discoidales (ver Figura 4.8 (b)). Después hacemos jugadas  $K$  en  $\lambda_{3,3}$  y en  $\lambda_{1,4}$  las cuales cambian el coeficiente de  $\lambda_{2,4}$ , de 1 a -1 (ver Fig. 4.8 (c)). A continuación suprimimos  $\lambda_{2,4}$  y  $\lambda_{2,3}$  con una jugada anular (ver Fig. 4.8 (d)). Después, con jugadas discoidales, quitamos  $\lambda_{3,2}$  y  $\lambda_{1,3}$  (ver Fig. 4.8 (e)). Hacemos jugadas  $K$  en  $\lambda_{3,1}$  y en  $\lambda_{1,2}$  las cuales cambian el coeficiente de  $\lambda_{2,2}$  de 1 a -1, (ver Figura 4.8 (f)). Ahora hacemos una jugada anular que elimina a  $\lambda_{2,2}$  y a  $\lambda_{2,1}$  (ver Fig. 4.8 (g)). Finalmente, con una jugada  $K$ , desaparece  $\lambda_{1,1}$  y queda el enlace vacío.  $\square$

Esto termina el paso 3 y, con ello, la demostración del teorema de Kirby.

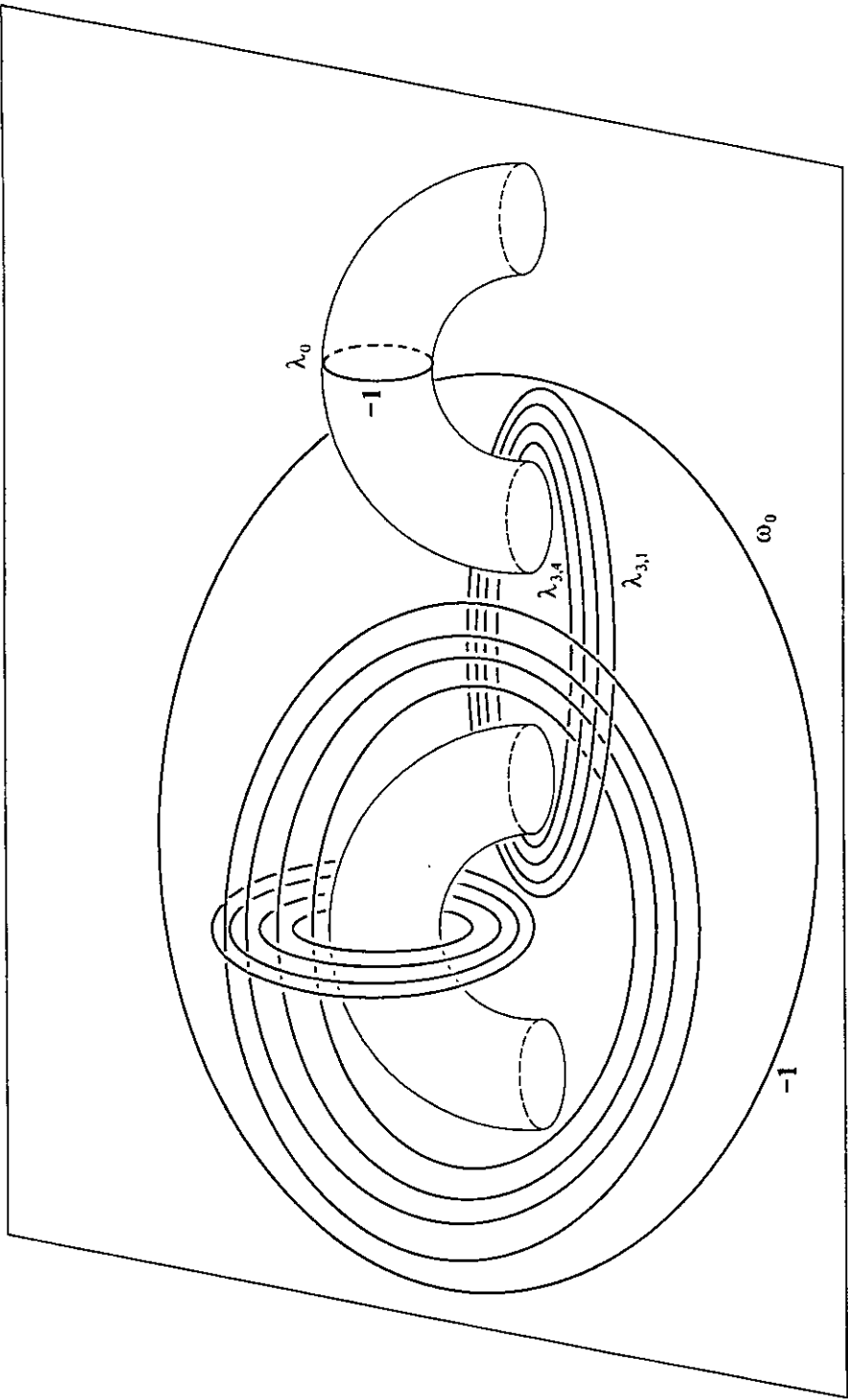


Figura 4.8 (a)

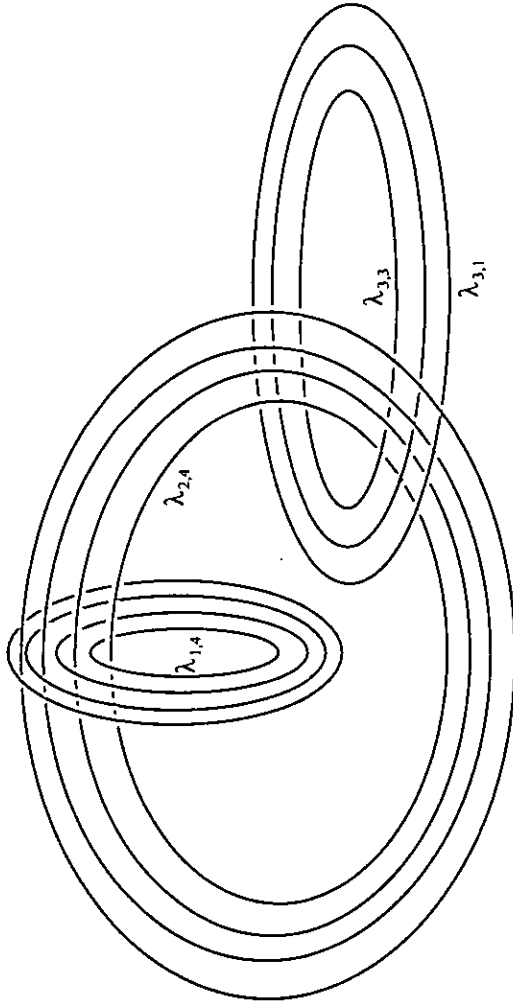


Figura 4.7 (b)

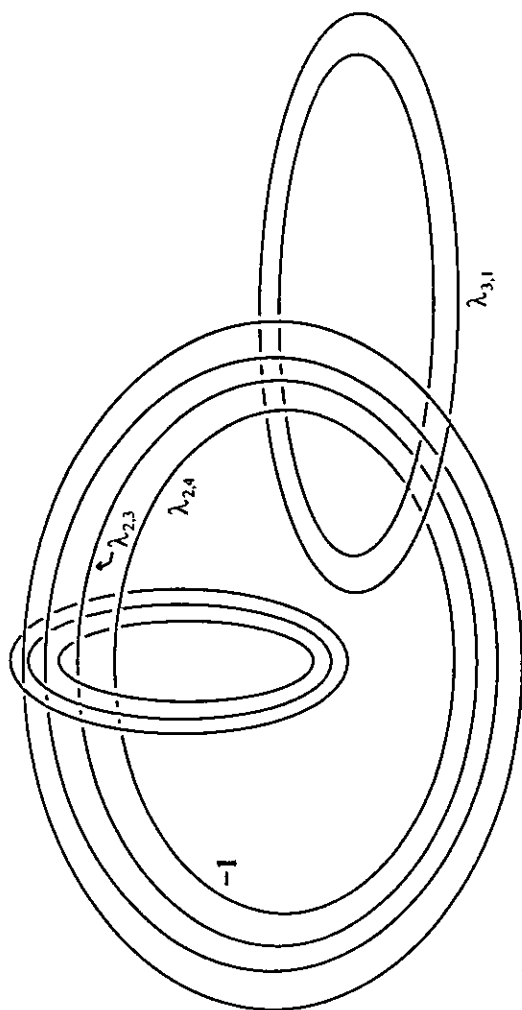


Figura 4.7 (c)

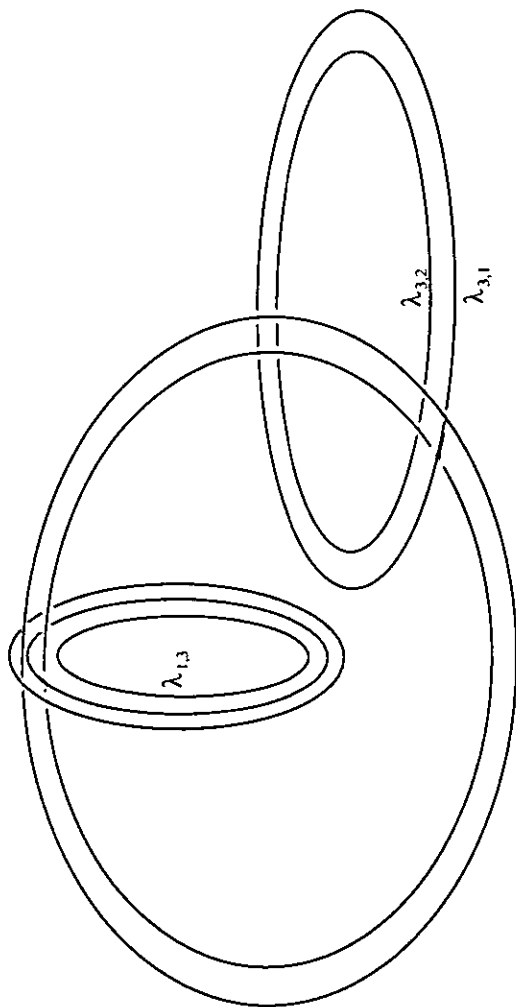


Figura 4.7 (d)



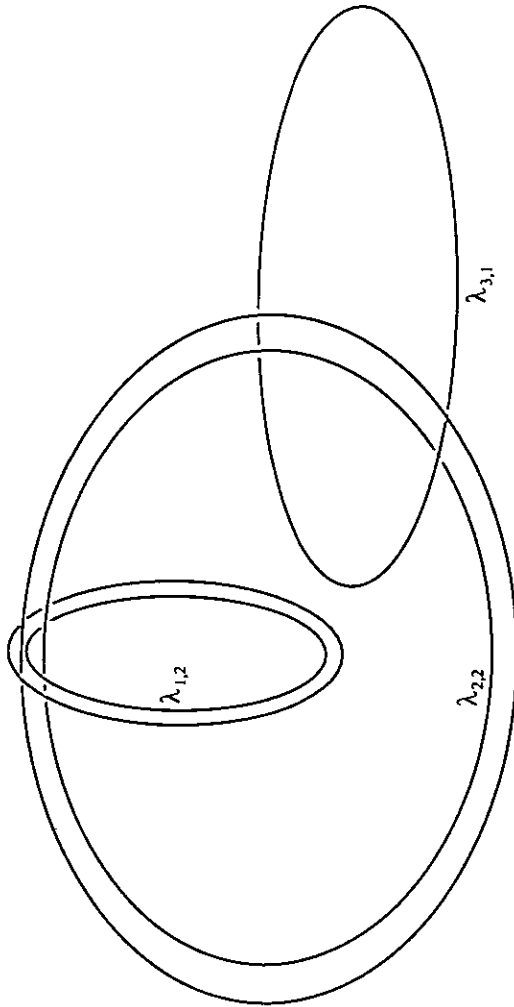


Figura 4.7 (c)

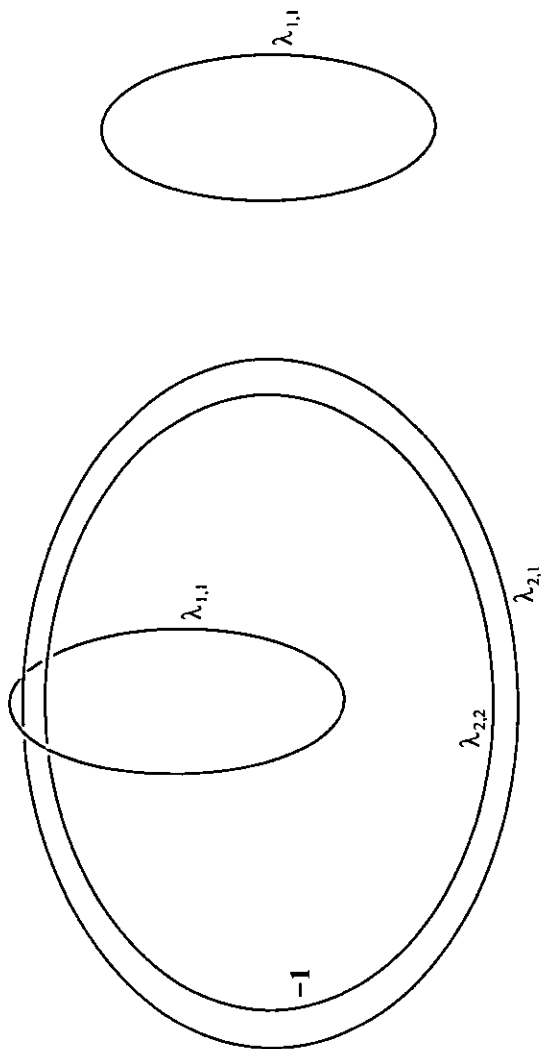


Figura 4.7 (B)

Figura 4.7 (O)

## A El análogo del teorema de Kirby en dimensión 1

Daremos aquí el (1,0) - análogo del teorema de Kirby (el cual es (3,1)). La razón principal por la cual damos esta versión unidimensional es que en ella aparecen las ideas importantes de la demostración de Lu del Teorema de Kirby aunque, naturalmente, las dificultades técnicas son mucho menores. Pensamos que esta versión ayuda a entender mejor dicha demostración.

Algunas pequeñas diferencias que aparecen son:

- (i) Se olvida uno de la palabra orientación.
- (ii) Sólo hay 2 marcos para un nudo y los coeficientes de cirugía son elementos de  $Z_2$ .
- (iii) Si  $\Theta$  es una transposición de  $\{1, 2, \dots, 2g\}$ , el análogo de un giro, entonces  $\Theta = \Theta^{-1}$ .
- (iv) No se distingue entre jugada  $K$  derecha y jugada  $K$  izquierda.

### A.1 Preliminares

Sean  $D^1 = [-1, 1]$ ,  $S^0 = \partial D^1 = \{-1, 1\}$ .  $X_1 \approx X_2$  significará " $X_1$  es homeomorfo a  $X_2$ " y  $(X_1, A_1, B_1) \approx (X_2, A_2, B_2)$  significará "existe un homeomorfismo  $h: X_1 \rightarrow X_2$  tal que  $(A_1)h = A_2$  y  $(B_1)h = B_2$ ".

El modelo de  $S^1$  que consideramos conveniente es el subespacio de  $R^2 \cup \{\infty\}$  definido por  $S^1 = \{(n, y) : n \in Z \text{ y } |y| \leq 1\} \cup (\cup_{n \in Z} S_n) \cup \{\infty\}$  donde  $S_n$  es la semicircunferencia con ecuación:

$$y = (-1)^n \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - n - \frac{1}{2}\right)^2} \right)$$

Al punto  $(n, 0)$  de  $S^1$  lo denotaremos por  $n$ .

Para cada  $g \geq 1$  definimos los siguientes subespacios de  $S^1$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_g &= \{1, 2, \dots, 2g\} \\ H_g &= \{(x, y) \in S^1 : 1 \leq x \leq 2g \text{ y } y \leq 0\} \\ H'_g &= S^1 - \text{int}H_g. \end{aligned}$$

(Ver Figuras A.1.1 y A.1.2).

También identificamos al subespacio  $\{(x, y) \in S^1 : x \in \{1, \dots, 2g\} \text{ y } |y| \leq 1\}$  con  $\Sigma_g \times [-1, 1]$ ; y a  $\{(1, \varepsilon), (2, \varepsilon), \dots, (2g, \varepsilon)\}$  con  $\Sigma_g \times \{\varepsilon\}$ .

En lo que resta de A.1,  $M$  y  $M'$  denotarán variedades homeomorfas a  $S^1$  y  $S^1$  es el modelo que se acaba de describir.

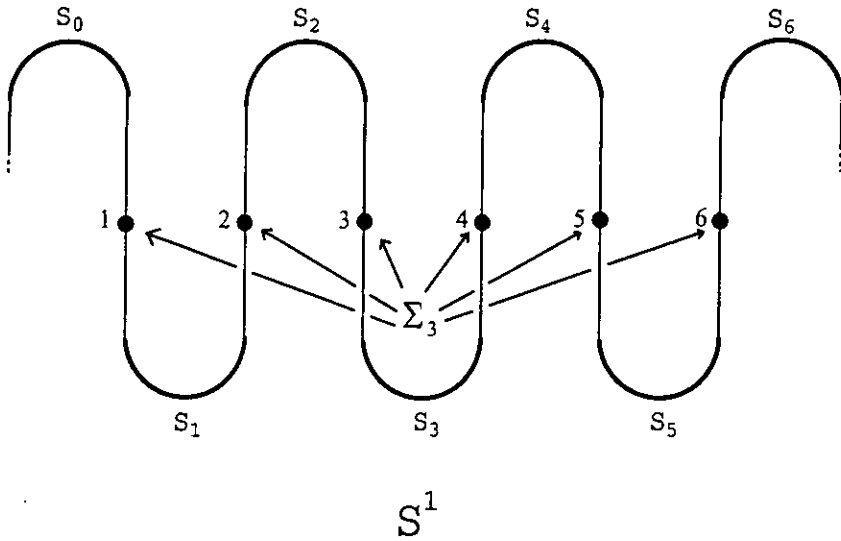


Figura A.1.1

Un  $(1, 0)$ -enlace de  $M$  (o *enlace de  $M$  simplemente*) es una colección  $\{k_1, \dots, k_n\}$ , con  $n \geq 0$ , de  $n$  subespacios ajenos de  $S^1$  homeomorfos a  $S^0$ . La palabra "enlace" significará "enlace de  $S^1$ ".

Se permite  $n = 0$ , es decir, el enlace vacío.

Si  $n = 1$  el enlace se llama *nudo*.

Si  $k$  y  $f$  son nudos ajenos en  $S^1$  entonces  $lk(k, f)$  es el elemento de  $Z_2$  definido como sigue:

$$lk(k, f) = \begin{cases} 0 & \text{si existe un 1-disco en } S^1 - f \text{ con frontera } k \\ 1 & \text{si no existe un 1-disco en } S^1 - f \text{ con frontera } k \end{cases}$$

Un marco de un nudo  $k$  es una  $0$ -esfera en  $M - k$ . Si  $lk(f, k) = \epsilon$  decimos que  $f$  es un  $\epsilon$ -marco de  $k$ .

Un *enlace enmarcado  $L$  de  $M$*  es un enlace  $\{k_1, \dots, k_n\}$  de  $M$  junto con marcos ajenos  $f_1, \dots, f_n$  de  $k_1, \dots, k_n$  respectivamente, tales que existen subespacios ajenos  $A_1, \dots, A_n$  de  $M$ , homeomorfos a  $S^0 \times I$ , con  $\partial A_i = k_i \cup f_i$ ; equivalentemente un enlace enmarcado de  $M$  es un enlace  $\varphi = \{k_1, \dots, k_n\}$  junto con elementos de  $Z_2$  asociados a  $k_1, \dots, k_n$ . Al elemento asociado a  $k_i$ , que es  $lk(k_i, f_i)$ , se le llama también *coeficiente de cirugía de  $k_i$* . La frase "enlace enmarcado" significará "enlace enmarcado de  $S^1$ ".

El enlace enmarcado  $L$  de  $M$  es *equivalente* al enlace enmarcado  $L'$  de  $M'$  si podemos

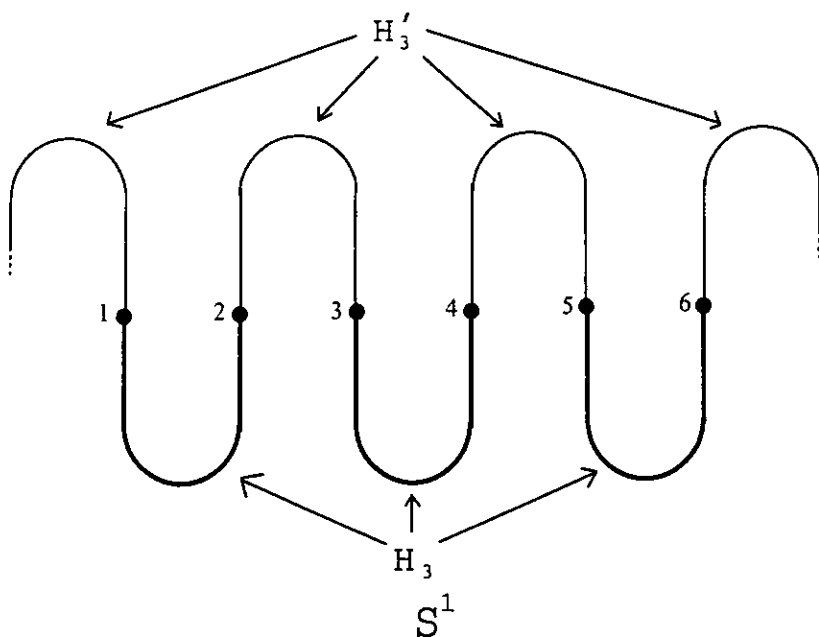


Figura A.1.2

numerar las componentes de  $L$  como  $k_1, \dots, k_n$  y las de  $L'$  como  $k'_1, \dots, k'_n$  de tal manera que existe un homeomorfismo de  $M$  sobre  $M'$  que manda a  $k_i$  en  $k'_i$  y, si el marco de  $k_i$  es un  $\varepsilon_i$ -marco, el de  $k'_i$  también es un  $\varepsilon_i$ -marco.

Una vecindad tubular de un enlace  $\{k_1, \dots, k_n\}$  es una colección  $\{T_1, \dots, T_n\}$  donde  $T_i$  es vecindad de  $k_i$  en  $S^1$  homeomorfa a  $S^0 \times D^1$  ( $i = 1, \dots, n$ ) y  $T_i \cap T_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ .

Definamos ahora la 1-variedad  $M(L)$  para un enlace enmarcado  $L$ .

Sea  $L$  el enlace enmarcado  $\{k_1, \dots, k_n\}$  con marcos  $f_1, \dots, f_n$ . Sean  $D_1^1, \dots, D_n^1$  copias de  $D^1$  y  $\varphi: \coprod_{i=1}^n (S^0 \times \partial D_i^1) \rightarrow \partial(\cup_{i=1}^n T_i)$  un homeomorfismo tal que  $(\{1\} \times \partial D_i^1)\varphi = f_i$ , donde  $\{T_1, \dots, T_n\}$  es vecindad tubular de  $\{k_1, \dots, k_n\}$  y  $f_i \in \partial T_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Entonces

$$M(L) = (\coprod_{i=1}^n (S^0 \times D_i^1)) \cup_{\varphi} (S^1 - \text{int}(\bigcup_{i=1}^n T_i)).$$

Nótese que  $M(L)$  está bien definido, independientemente de la copia de  $f_i$  que se elija.

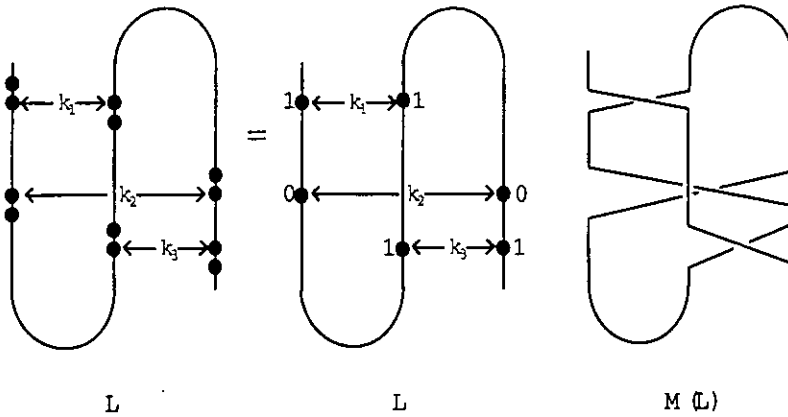


Figura A.1.3

Si  $L$  es el enlace vacío entonces  $M(L) = S^1$ .

Si  $L$  y  $L'$  son enlaces enmarcados equivalentes entonces  $M(L) \approx M(L')$ .

Sea  $\theta$  una 0-esfera contenida en  $\Sigma_g$ ; asociamos a  $\theta$  el homeomorfismo  $\Theta : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  que es la identidad en  $\Sigma_g - \theta$  e intercambia los puntos de  $\theta$ . Llamamos a  $\Theta$  la *transposición* de  $\theta$  y diremos que es una *transposición en  $\Sigma_g$* .

Si  $\theta$  es de la forma  $\{i, i+1\}$  a la transposición  $\Theta$  de  $\theta$  la llamaremos una *transposición de adyacentes*.

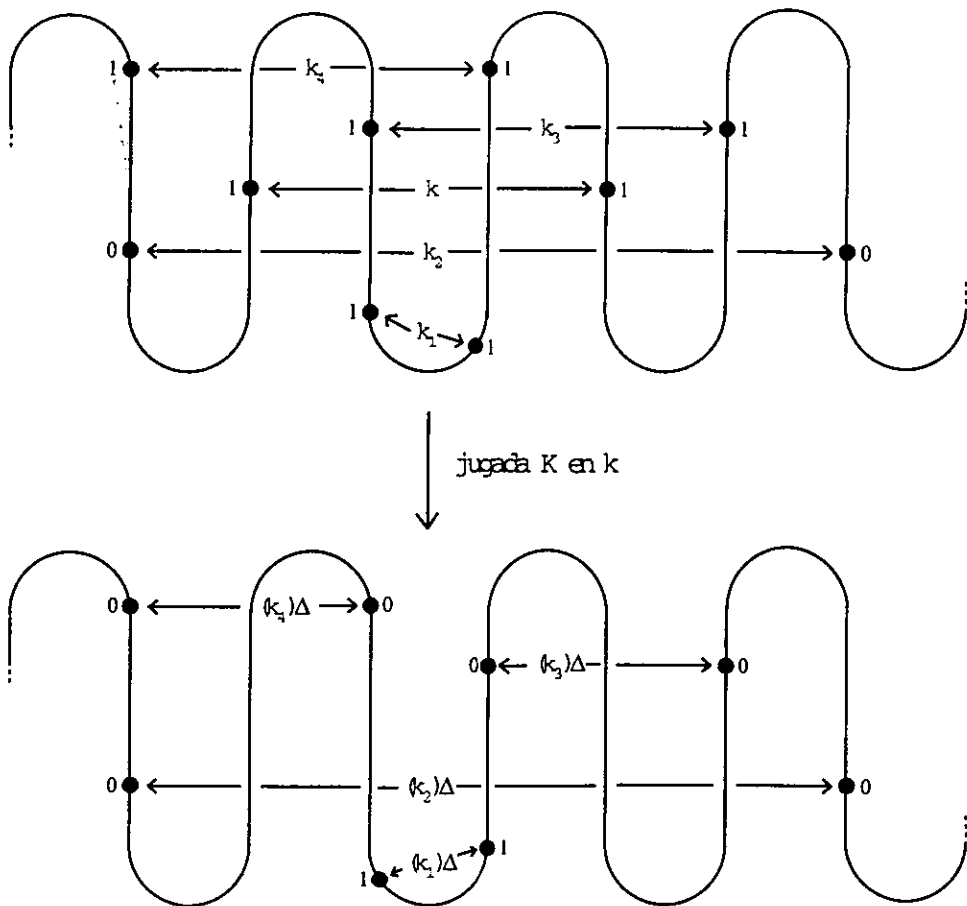
Una transposición es el análogo 0-dimensional de un giro y una transposición de adyacentes es el análogo 0-dimensional de un giro de Lickorish.

## A.2 Jugadas de Kirby

Sea  $L = \{k, k_1, \dots, k_n\}$  un enlace enmarcado de  $S^1$ . Supongamos que  $k$  tiene coeficiente de cirugía 1. Sea  $E_k$  el exterior de  $k$ , es decir, la cerradura del complemento de una vecindad tubular  $T$  de  $k$  que no interseca a  $L - k$ . Sea  $\Delta : E_k \rightarrow E_k$  homeomorfismo que es la identidad en una componente de  $E_k$  y no es la identidad en la frontera de la otra componente. Nótese que la imagen bajo  $\Delta$  del marco de  $k$  es frontera de un 1-disco en  $T$ . Sean  $f_1, \dots, f_n$  los marcos respectivos de  $k_1, \dots, k_n$ . Sea  $L'$  el enlace  $\{(k_1)\Delta, \dots, (k_n)\Delta\}$  con marcos  $(f_1)\Delta, \dots, (f_n)\Delta$ . Decimos entonces que  $L'$  se obtiene de  $L$  haciendo una *jugada K (ó jugada de Kirby)* en  $k$ .

Puede notarse que si se intercambian los papeles de las dos componentes de  $E_k$  en la definición de  $\Delta$  se obtiene un enlace enmarcado equivalente a  $L'$ .

En la Figura A.2.1 se ilustra un ejemplo; los cambios en los coeficientes de cirugía se



### JUGADA DE KIRBY

Figura A.2.1

explican en la Proposición A.2.1.

Nótese que hacer una jugada  $K$  en  $k$ , que cambia a  $L$  en  $L'$ , equivale a hacer cirugía en  $k$ , es decir,  $(S^1, L') \approx (M(k), L)$  donde  $k$  tiene coeficiente de cirugía 1.

Si  $L'$  se obtiene de  $L$  haciendo una jugada  $K$ , decimos que  $L$  se obtiene de  $L'$  haciendo

una jugada  $K^{-1}$ .

Sean  $L$  y  $L'$  dos enlaces enmarcados en  $S^1$ . Decimos que  $L$  y  $L'$  son  $K$ -equivalentes (y escribimos  $L \stackrel{K}{\sim} L'$ ) si existe una sucesión finita de enlaces enmarcados  $L_1, \dots, L_n$  tal que  $L_1 = L$ ,  $L_n = L'$  y, para  $1 \leq i \leq n$ ,  $L_{i+1}$  se obtiene de  $L_i$  haciendo una jugada  $K$  ó  $K^{-1}$ .

Si  $L'$  se obtiene de  $L$  haciendo una jugada  $K$  en  $k$  y si  $k$  es frontera de un 1-disco en  $S^1$  cuyo interior no interseca a  $L$  entonces decimos que  $L'$  se obtiene de  $L$  haciendo una jugada discoidal.

Sea  $L = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  enlace enmarcado con marcos  $f_1, f_2, \dots, f_n$  tales que  $lk(k_1, f_1) = lk(k_2, f_2) = 1$ ,  $lk(k_1, k_2) = 0$  y existe un subespacio  $A$  de  $S^1$  tal que  $A \approx S^0 \times I$ ,  $\partial A = k_1 \cup k_2$  y  $\text{int} A \cap L = \emptyset$ .

Sea  $L'$  el enlace enmarcado obtenido de  $L$  suprimiendo  $k_1$  y  $k_2$ . Entonces decimos que  $L'$  se obtiene de  $L$  haciendo una jugada anular. Nótese que  $L \stackrel{K}{\sim} L'$  porque haciendo una jugada  $K$  en  $k_1$  y luego otra en  $k_2$  se obtiene un enlace enmarcado equivalente a  $L'$ .

La siguiente proposición nos dice el cambio que hay que hacer en los coeficientes de cirugía cuando se hace una jugada  $K$ .

**Proposición A.2.1** Sean  $L = \{k, k_1, \dots, k_n\}$  enlace enmarcado con marcos  $f, f_1, \dots, f_n$  y  $lk(k, f) = 1$ . Sea  $\Delta : E_k \rightarrow E_k$  el homeomorfismo descrito anteriormente. Entonces  $lk((k_i)\Delta, (f_i)\Delta) = lk(k_i, f_i) + lk(k, k_i) \text{ mod } 2$   $\square$

### A.3 0-Enlaces y 1-Variedades

Sean  $\theta_1, \dots, \theta_r$  0-esferas en alguna  $\Sigma_g$  y sea  $\sigma = (\Theta_r, \dots, \Theta_1)$  la sucesión de transposiciones correspondiente. Definimos

$$L_\sigma = \bigcup_{i=1}^r (\theta_i \times \{\varepsilon_i\}) \subset \Sigma_g \times [-1, 1] \text{ donde } -1 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_r < 1;$$

si  $\theta_i = \{a_i, b_i\}$  el coeficiente de cirugía de  $\theta_i \times \{\varepsilon_i\}$  es  $b_i - a_i \text{ mod } 2$ .

Definimos también

$$f_\sigma = \Theta_r \circ \dots \circ \Theta_1 : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g.$$

*Notación:* Si  $f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  es un homeomorfismo entonces  $M(f)$  es la 1-variedad que se obtiene identificando, en la unión ajena  $H_g \amalg H'_g$ ,  $x \in \partial H'_g = \Sigma_g$  con  $(x)f \in \partial H_g = \Sigma_g$ .

Demostraremos que  $M(L_\sigma)$  es homeomorfo a  $M(f_\sigma)$ .

**Lema A.3.1** Sean  $\Theta : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  transposición de  $\theta$ ,  $A = \theta$ ,  $\widehat{A}$  una copia de  $A$  y  $c : A \rightarrow \widehat{A}$  homeomorfismo. Supongamos  $\alpha < \varepsilon^- < \varepsilon^+ < \beta$ . Sea  $\varphi : \partial(A \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]) \rightarrow \widehat{A} \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]$



definida por

$$\begin{aligned} (a, \varepsilon^+) \varphi &= ((a) \Theta c, \varepsilon^+) \text{ si } a \in A \\ \text{y } (a, t) \varphi &= ((a) c, t) \text{ si } (a, t) \in \partial(A \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]) - A \times \{\varepsilon^+\} \end{aligned}$$

Entonces existe un homeomorfismo  $\Psi$  de  $\overline{\Sigma_g \times [\alpha, \beta] - A \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]} \cup_p \widehat{A} \times [\varepsilon^-, \varepsilon^+]$  sobre  $\Sigma_g \times [\alpha, \beta]$  tal que  $(x, \beta) \Psi = ((x) \Theta, \beta)$  y  $(x, \alpha) \Psi = (x, \alpha)$  si  $x \in \Sigma_g$   $\square$

(Véase la Figura A.3.1)

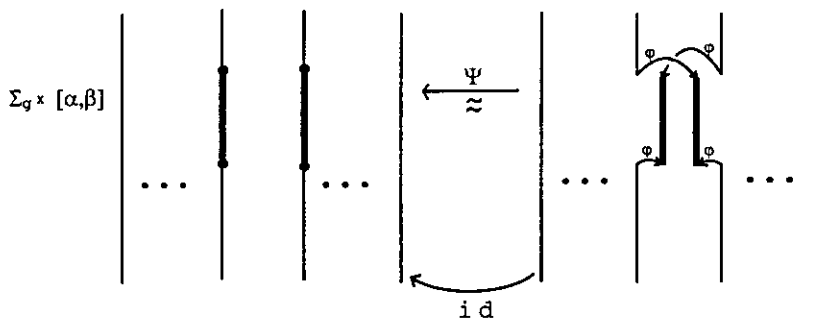


Figura A.3.1

**Teorema A.3.1** Sea  $\sigma = (\Theta_r, \dots, \Theta_1)$ . Entonces  $M(f_\sigma) \approx M(L_\sigma)$ .

(Véase la Figura A.3.2. La notación es la de la demostración del Teorema 3.1)  $\square$

**Proposición A.3.1** Todo enlace enmarcado  $L = \{k_1, \dots, k_n\}$ , es equivalente a uno de la forma  $L_\sigma$ .

*Demostración:* Sea  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  enlace equivalente a  $L$  tal que  $\bigcup_{i=1}^n \theta_i = \{1, 3, 5, \dots, 4n - 1\}$  y  $(k_i)h = \theta_i$  para algún homeomorfismo  $h : S^1 \rightarrow S^1$ . Escribamos  $\theta_i = \{a_i, b_i\}$  con  $a_i < b_i$ . Sea  $b'_i = b_i$  si el coeficiente de cirugía de  $k_i$  es  $b_i - a_i \pmod{2}$ ; en caso contrario sea  $b'_i = b_i - 1$ . Si  $\theta'_i = \{a_i, b'_i\}$  y  $-1 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_n < 1$  entonces  $\bigcup_{i=1}^n \theta'_i \times \{\varepsilon_i\}$ , donde el coeficiente (marco) de  $\theta'_i \times \{\varepsilon_i\}$  es  $b'_i - a_i \pmod{2}$ , es un enlace enmarcado de la forma  $L_\sigma$  que es equivalente a  $L$   $\square$

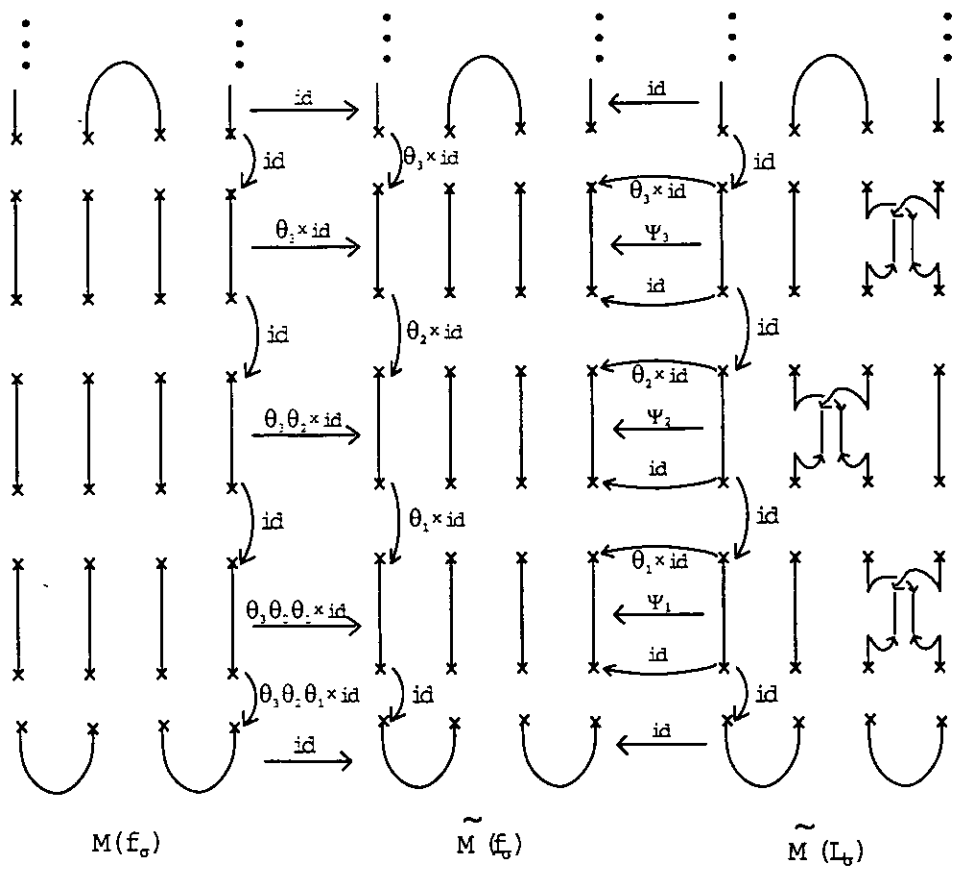


Figura A.3.2

---

#### A.4 (1, 0)-Teorema de Kirby

En los dibujos que aparecen en esta sección los nudos  $k$  de un enlace enmarcado se tomarán siempre "horizontales", es decir, los dos puntos de  $k$  tendrán la misma ordenada (nótese que los nudos de un enlace  $L_\sigma$  son horizontales); el marco de  $k$  será 1 a menos que se indique lo contrario con un par de ceros (0 0) cercanos a  $k$ .

**Teorema A.4.1**  $M(L) \approx M(L') \Leftrightarrow L \overset{K}{\sim} L'$

La demostración de que  $L \overset{K}{\sim} L' \Rightarrow M(L) \approx M(L')$  es análoga a la correspondiente del Teorema 4.1. La Figura A.4.1 ilustra un ejemplo.

En el resto de este apéndice probaremos la implicación  $M(L) \approx M(L') \Rightarrow L \overset{K}{\sim} L'$ .

Si  $n$  es un entero llamaremos  $n$ -desplazamiento a un homeomorfismo  $D$  de  $S^1$  (sobre  $S^1$ ) tal que

$$(x, y)D = \begin{cases} (x + 2, y) & \text{si } x \geq n \\ (x, y) & \text{si } x \leq n - 1 \end{cases}$$

y

$$(S_{n-1})D = S_{n-1} \cup S_n \cup S_{n+1} \cup \{(x, y) \in S^1 : x \in \{n, n+1\}, 0 \leq y \leq 1\}$$

Un *desplazamiento* es un  $n$ -desplazamiento para alguna  $n$ .

Denotemos por  $|X|$  al número de componentes de un espacio  $X$ . Sean  $g$  un número natural y  $\sigma$  una sucesión de transposiciones en  $\Sigma_g$ . Si  $C_1, \dots, C_r$  son las componentes de  $M(f_\sigma)$  numeradas de tal manera que  $|C_1 \cap H_g| \leq |C_2 \cap H_g| \leq \dots \leq |C_r \cap H_g|$  diremos que  $(|C_1 \cap H_g|, |C_2 \cap H_g|, \dots, |C_r \cap H_g|)$  es el *tipo* de  $\sigma$ . Puede verse que si  $\sigma$  y  $\tau$  son sucesiones de transposiciones en  $\Sigma_g$  entonces  $(M(f_\sigma), H_g, H'_g) \approx (M(f_\tau), H_g, H'_g)$  si y sólo si  $\sigma$  y  $\tau$  tienen el mismo tipo.

Si el punto  $n$  de  $\Sigma_g$  pertenece a la componente  $C_i$  de  $M(f_\sigma)$  y si  $\hat{\sigma}$  es la sucesión de transposiciones en  $\Sigma_{g+1}$  tal que  $L_{\hat{\sigma}}$  es la imagen del enlace enmarcado  $L_\sigma$  bajo un  $n$ -desplazamiento entonces el tipo de  $\hat{\sigma}$ , sólo difiere del tipo de  $\sigma$  en la componente correspondiente a  $C_i$  la cual aumenta en 1.

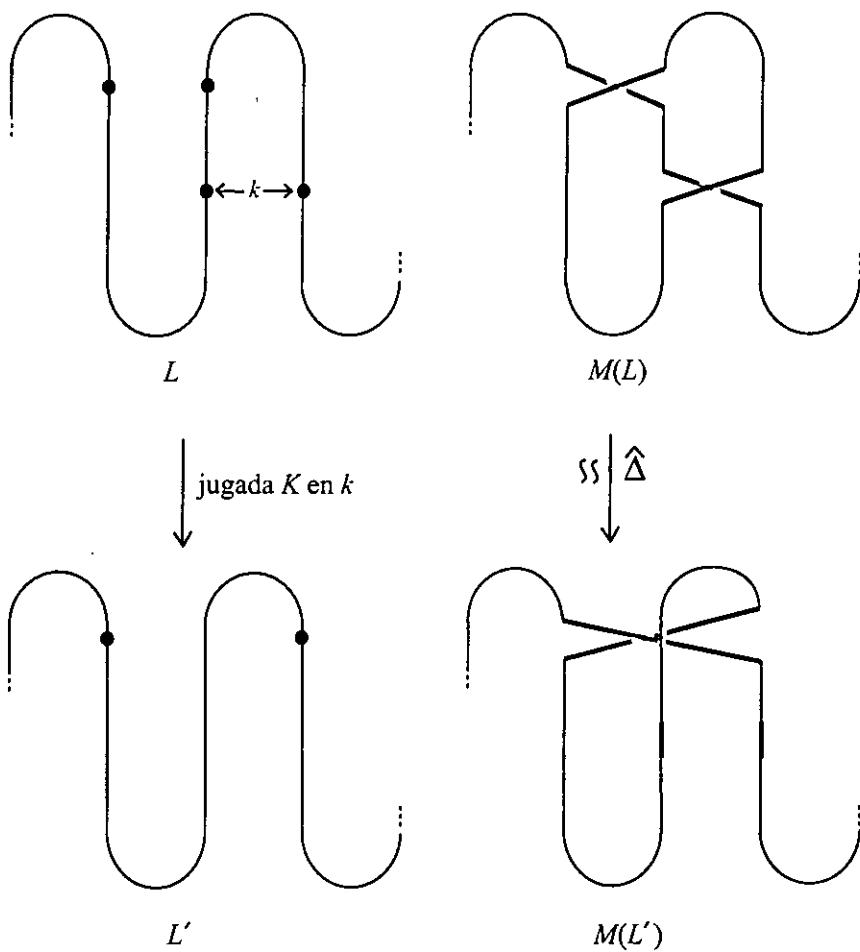


Figura A.4.1

**Proposición A.4.1** Sean  $\sigma$  y  $\tau$  sucesiones de transposiciones en  $\Sigma_g$  tales que

$$M(f_\sigma) \approx M(f_\tau)$$

Entonces existen  $\hat{g}$ , con  $\hat{g} \geq g$ , y sucesiones de transposiciones  $\hat{\sigma}$  y  $\hat{\tau}$  en  $\Sigma_{\hat{g}}$  tales que  $L_{\hat{\sigma}}$  es equivalente a  $L_\sigma$ ,  $L_{\hat{\tau}}$  es equivalente a  $L_\tau$  y

$$(M(f_{\hat{\sigma}}), H_{\hat{g}}, H'_{\hat{g}}) \approx (M(f_{\hat{\tau}}), H_{\hat{g}}, H'_{\hat{g}})$$

*Demostración:* En la Figura A.4.2 se muestra un ejemplo.

Sean  $(a_1, \dots, a_r)$  el tipo de  $\sigma$ ,  $(b_1, \dots, b_r)$  el tipo de  $\tau$ ,  $m_i = \max(a_i, b_i)$  y

$$\hat{g} = g + \sum_{i=1}^r (m_i - a_i) = g + \sum_{i=1}^r (m_i - b_i)$$

Con una composición de  $\sum_{i=1}^r (m_i - a_i)$  desplazamientos obtenemos una sucesión  $\hat{\sigma}$  de transposiciones en  $\Sigma_{\hat{g}}$  tal que  $L_{\hat{\sigma}}$  es equivalente a  $L_\sigma$  y el tipo de  $\hat{\sigma}$  es  $(m_1, \dots, m_r)$ . Análogamente con una composición de  $\sum_{i=1}^r (m_i - b_i)$  desplazamientos obtenemos una sucesión  $\hat{\tau}$  de transposiciones en  $\Sigma_{\hat{g}}$  tal que  $L_{\hat{\tau}}$  es equivalente a  $L_\tau$  y el tipo de  $\hat{\tau}$  es también  $(m_1, \dots, m_r)$ . Entonces  $(M(f_{\hat{\sigma}}), H_{\hat{g}}, H'_{\hat{g}}) \approx (M(f_{\hat{\tau}}), H_{\hat{g}}, H'_{\hat{g}})$   $\square$

Supongamos ahora que  $M(L) \approx M(L')$ . Por las Proposiciones A.3.1 y A.4.1 podemos suponer que  $L = L_\sigma$ ,  $L' = L_{\sigma'}$  y  $(M(f_\sigma), H_g, H'_g) \approx (M(f_{\sigma'}), H_g, H'_g)$ . (En la versión (3,1) esto se logra invocando al teorema de Reidemeister-Singer 1.1).

La demostración de que  $L_\sigma \overset{K}{\sim} L_{\sigma'}$  se hace en 3 pasos:

**PASO 1 (Igualación de homeomorfismos de pegado):** Probar que existe  $\sigma_1$ , tal que

$$L_\sigma \overset{K}{\sim} L_{\sigma_1} \quad \text{y} \quad f_{\sigma_1} = f_{\sigma'}$$

**PASO 2 (Sustitución por transposiciones de adyacentes):** Probar que existen  $\sigma_2$  y  $\sigma'_2$  tales que  $f_{\sigma_2} = f_{\sigma_1} = f_{\sigma'} = f_{\sigma'_2}$ , las componentes de  $\sigma_2$  y de  $\sigma'_2$  son transposiciones de adyacentes,  $L_{\sigma_2} \overset{K}{\sim} L_{\sigma_1}$  y  $L_{\sigma'_2} \overset{K}{\sim} L_{\sigma'}$ .

**PASO 3 (K-equivalencia de los enlaces):** Probar que  $L_{\sigma_2} \overset{K}{\sim} L_{\sigma'_2}$  (sabiendo que  $f_{\sigma_2} = f_{\sigma'_2}$  y que las componentes de  $\sigma_2$  y  $\sigma'_2$  son transposiciones de adyacentes).

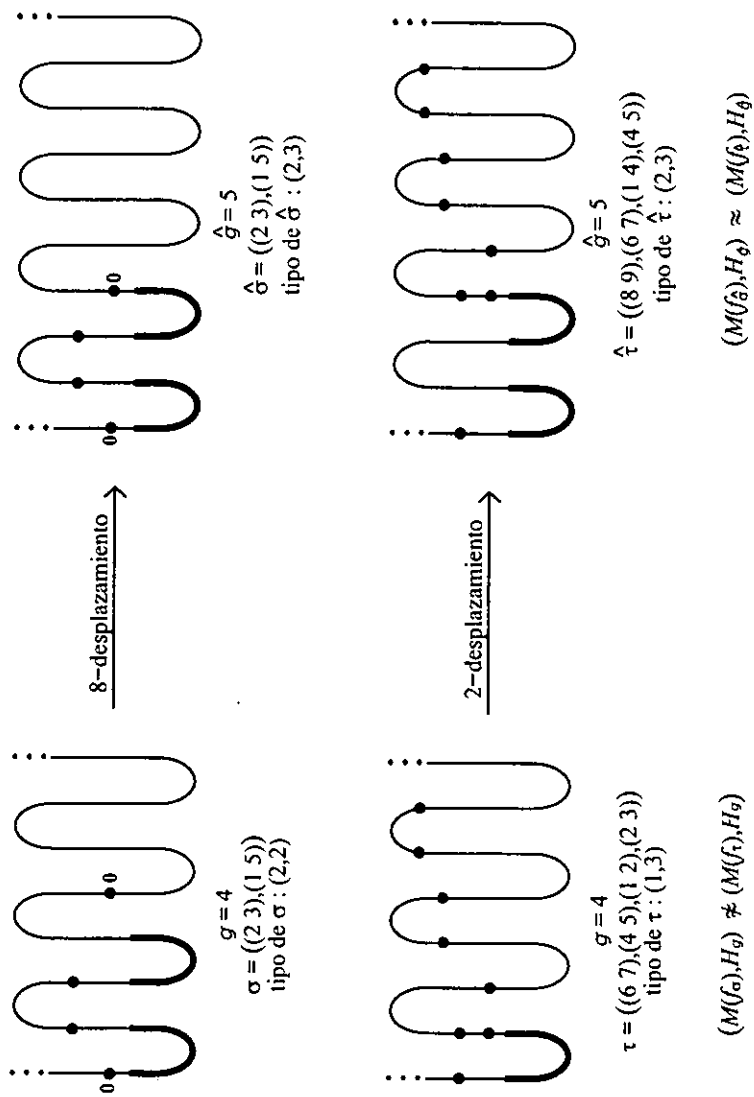


Figura A.4.2

**PASO 1: Igualación de homeomorfismos de pegado.**

Sean  $L_\sigma$  y  $L_{\sigma'}$  tales que  $M(L_\sigma) \approx M(L_{\sigma'})$ . Probaremos que existe  $\sigma_1$ , tal que  $L_\sigma \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1}$  y  $f_{\sigma_1} = f_{\sigma'}$ .

Como se explicó anteriormente podemos suponer que

$$(M(f_\sigma), H_g, H'_g) \approx (M(f_{\sigma'}), H_g, H'_g)$$

Existe entonces un homeomorfismo  $\varphi$  de  $M(f_\sigma)$  sobre  $M(f_{\sigma'})$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & H'_g & \xrightarrow[\approx]{\varphi|_{H'_g}} & H'_g & \\ & \cup & & \cup & \\ \Sigma_g & = \partial H'_g & \xrightarrow[\approx]{\Psi'} & \partial H'_g & = \Sigma_g \\ & \approx \downarrow f_\sigma & & \approx \downarrow f_{\sigma'} & \\ \Sigma_g & = \partial H_g & \xrightarrow[\approx]{\Psi} & \partial H_g & = \Sigma_g \\ & \cap & & \cap & \\ & H_g & \xrightarrow[\varphi|_{H_g}]{\approx} & H_g & \end{array}$$

donde  $\Psi' = \varphi|_{\partial H'_g}$  y  $\Psi = \varphi|_{\partial H_g}$ .

Entonces  $\Psi' \circ f_{\sigma'} = f_\sigma \circ \Psi$ , así que  $f_{\sigma'} = \Psi'^{-1} \circ f_\sigma \circ \Psi$ .

Nótese que  $\Psi'^{-1}$  se extiende a un homeomorfismo de  $H'_g$  sobre  $H'_g$  y  $\Psi$  se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$  sobre  $H_g$ .

Consideremos los siguientes homeomorfismos de  $\Sigma_g$ : la transposición  $(i \ j)$  que denotaremos por  $\Lambda_{i,j}$  y la permutación  $(i \ i+3)(i+1 \ i+2)$  que denotaremos por  $C_i$ ; los índices los tomamos mod  $2g$ . Escribimos también  $A_1 = \Lambda_{1,2}$  y  $B_1 = \Lambda_{2,3}$ .

El siguiente teorema, que es fácil de probar, es el análogo del teorema tridimensional de Lu [Lu1] que describe un conjunto de generadores para el grupo de clases de isotopía de homeomorfismos de la superficie  $\Sigma_g$  que se extienden a  $H_g$  (o a  $H'_g$ ).

**Teorema A.4.2** . *Todo homeomorfismo de  $\Sigma_g$  que se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$  (resp.  $H'_g$ ) es composición de  $A_1, C_1, C_3, \dots, C_{2g-5}$  y  $C_{2g-3}$  (resp.  $B_1, C_2, C_4, \dots, C_{2g-4}$  y  $C_{2g-2}$ ).  $\square$*

En lo que sigue utilizaremos la notación de la sección 4.

Las demostraciones de la siguiente proposición y corolario son iguales a las de la Proposición 4.1 y el Corolario 4.1.

---

**Proposición A.4.2** . Sea  $\rho$  sucesión de transposiciones tal que  $L_\rho \stackrel{K}{\sim} \emptyset$ .

- (i) Si  $f_\rho = id$  entonces  $L_{\sigma\rho} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma\tau}$  para cualesquiera sucesiones de transposiciones  $\sigma$  y  $\tau$ .
- (ii) Si  $f_\rho$  se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$  entonces  $L_{\sigma\rho} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$  para cualquier sucesión de transposiciones  $\sigma$ .
- (iii) Si  $f_\rho$  se extiende a un homeomorfismo de  $H'_g$  entonces  $L_{\rho\tau} \stackrel{K}{\sim} L_\tau$  para cualquier sucesión de transposiciones  $\tau$ .  $\square$

(Véase la Figura A.4.3).

**Corolario A.4.1** Sea  $\gamma$  una sucesión de transposiciones tal que  $L_\gamma \stackrel{K}{\sim} \emptyset$  y  $f_\gamma$  se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$  o a uno de  $H'_g$ . Entonces  $L_{\gamma^{-1}} \stackrel{K}{\sim} \emptyset$ .  $\square$

Probaremos ahora el análogo de la Proposición 4.2.

**Proposición A.4.3** Sea  $\sigma$  cualquier sucesión de transposiciones en  $\Sigma_g$ .

- (i) Si  $\alpha = (A_1)$  y  $\beta = (B_1)$  entonces  $L_{\sigma\alpha} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$  y  $L_{\beta\sigma} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$ .
- (ii) Si  $\gamma$  es  $(\Lambda_{i,i+3}, \Lambda_{i+1,i+2})$  o su inverso, con  $i$  impar entonces  $L_{\sigma\gamma} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$ .
- (iii) Si  $\gamma$  es  $(\Lambda_{i,i+3}, \Lambda_{i+1,i+2})$  o su inverso, con  $i$  par entonces  $L_{\gamma\sigma} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$ .

*Demostración:*

- (i) Nótese que  $f_\alpha = A_1$  así que  $f_\alpha$  se extiende a un homeomorfismo de  $H_g$ . Además  $L_\alpha \stackrel{K}{\sim} \emptyset$  por lo que  $L_{\sigma\alpha} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$  por la Proposición A.4.2(ii). Análogamente  $f_\beta = B$ ,  $f_\beta$  se extiende a un homeomorfismo de  $H'_g$  y  $L_\beta \stackrel{K}{\sim} \emptyset$  así que, por la Proposición A.4.2(iii),  $L_{\beta\sigma} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$ .
- (ii) Obsérvese que con dos jugadas discoidales pasamos del enlace enmarcado  $L_\gamma$ , ilustrado en la Figura A.4.4, al vacío. Por lo tanto, por la Proposición A.4.2 y el Corolario A.4.1,  $L_{\sigma\gamma} \stackrel{K}{\sim} L_\sigma$ .
- (iii) La demostración es análoga a la de (ii).  $\square$



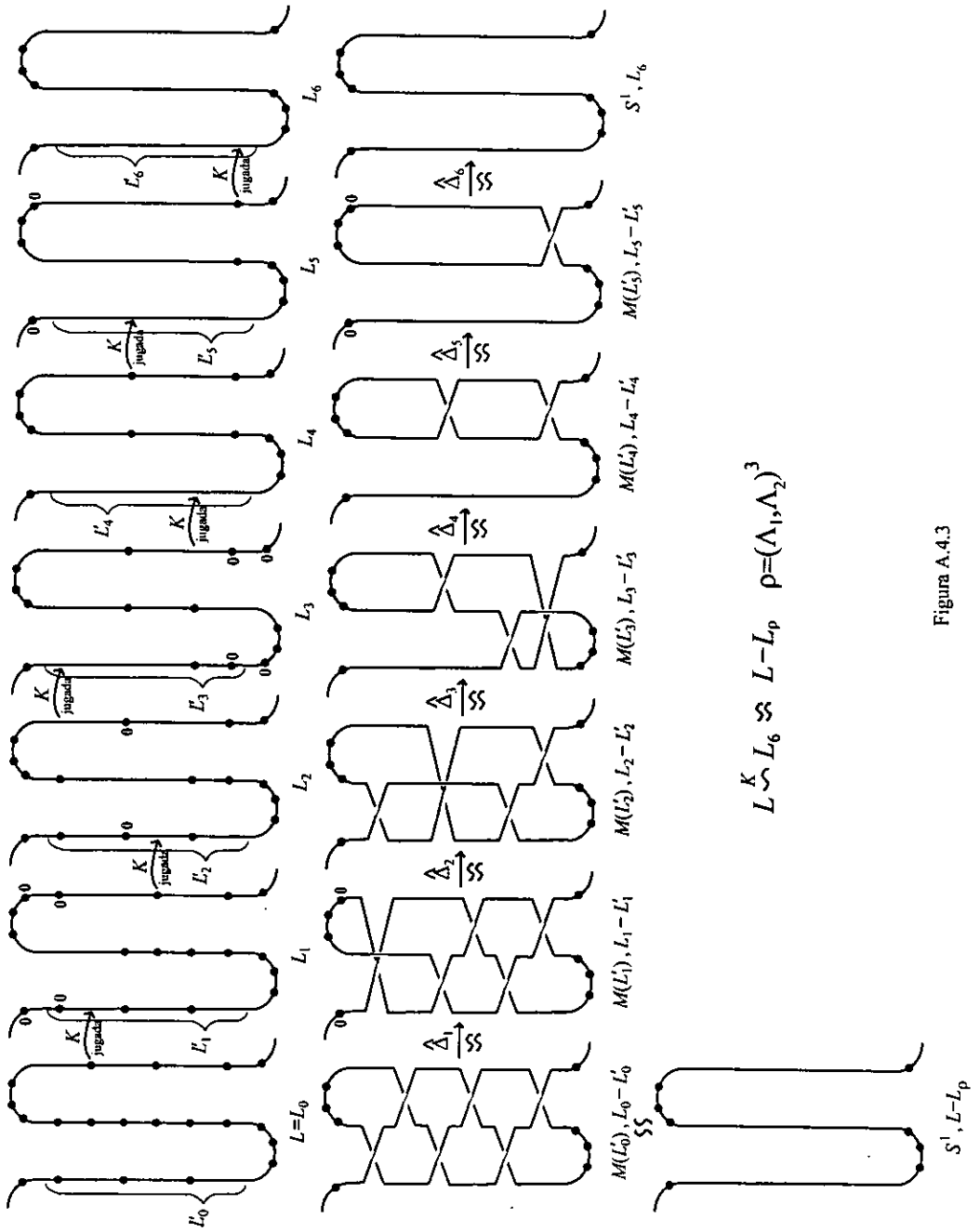
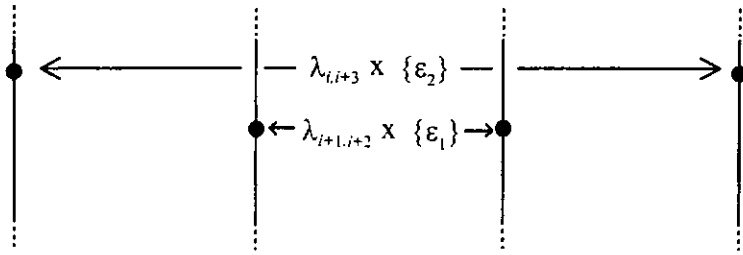


Figura A.4.3



$$L(\Lambda_{i,i+3}, \Lambda_{i+1,i+2})$$

Figura A.4.4

Terminaremos ahora el paso 1.

Tenemos que  $\Psi'^{-1} = f_{\beta_1} \circ f_{\beta_2} \circ \dots \circ f_{\beta_m}$  y que  $\Psi = f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}$  donde cada  $\beta_j$  es  $(B_1)$  o  $(\Lambda_{i,i+3}, \Lambda_{i+1,i+2})^{\pm 1}$  para alguna  $i$  par y cada  $\alpha_j$  es una de las sucesiones  $(A_1)$  o  $(\Lambda_{i,i+3}, \Lambda_{i+1,i+2})^{\pm 1}$  para alguna  $i$  impar. Definimos  $\sigma_1 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Entonces  $f_{\sigma'} = \Psi'^{-1} \circ f_{\sigma} \circ \Psi = f_{\beta_1} \circ f_{\beta_2} \circ \dots \circ f_{\beta_m} \circ f_{\sigma} \circ f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_n} = f_{\sigma_1}$  y, usando la Proposición A.4.3

$$L_{\sigma} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma\alpha_1} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma\alpha_1\alpha_2} \stackrel{K}{\sim} \dots \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} \stackrel{K}{\sim} L_{\beta_m\sigma\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} \stackrel{K}{\sim} \dots \stackrel{K}{\sim} L_{\beta_1\dots\beta_m\sigma\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = L_{\sigma_1}$$

Esto concluye el paso 1.

## PASO 2 : Sustitución por transposiciones de adyacentes

Al terminar el Paso 1 se tienen sucesiones de transposiciones  $\sigma_1$  y  $\sigma'$  tales que

$$f_{\sigma_1} = f_{\sigma'}, L = L_{\sigma} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1} \text{ y } L' = L_{\sigma'}$$

En el paso presente probaremos que existe  $\sigma_2$  tal que  $f_{\sigma_2} = f_{\sigma_1}$ ,  $L_{\sigma_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1}$ , donde las componentes de  $\sigma_2$  son transposiciones de adyacentes.

De manera análoga se tendrá  $\sigma'_2$ , con componentes que son transposiciones de adyacentes, tal que  $f_{\sigma'_2} = f_{\sigma'}$  y  $L_{\sigma'_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma'}$ .

Ahora probaremos el análogo del lema de conjugación 4.2.

**Lema A.4.1** Sean  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$  transposiciones de adyacentes de  $\Sigma_g$ ,  $\theta = \{a, b\}$  una  $\theta$ -esfera en  $\Sigma_g$  y  $\hat{\theta} = (\theta)\Lambda_1 \dots \Lambda_r$ . Sean  $\Theta$  y  $\hat{\Theta}$  las transposiciones de  $\theta$  y  $\hat{\theta}$ , y

$$\gamma = (\Lambda_r, \dots, \Lambda_1, \Theta, \Lambda_1, \dots, \Lambda_r)$$

entonces, si  $\sigma$  y  $\tau$  son sucesiones de transposiciones en  $\Sigma_g$ ,  $f_{\sigma\gamma\tau} = f_{\sigma(\hat{\Theta})\tau}$  y  $L_{\sigma\gamma\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma(\hat{\Theta})\tau}$ .

*Demostración:* Lo demostraremos por inducción en  $r$ .

Supongamos  $r = 1$ .

Obsérvese que  $\widehat{\Theta} = \Lambda_1 \Theta \Lambda_1$ . Por consiguiente

$$f_\gamma = f_{(\Lambda_1, \Theta, \Lambda_1)} = \Lambda_1 \Theta \Lambda_1 = \widehat{\Theta} \quad \text{y} \quad f_{\sigma\gamma\tau} = f_\sigma f_{(\widehat{\Theta})} f_\tau = f_{\sigma(\widehat{\Theta})\tau}$$

Probemos ahora que  $L_{\sigma\gamma\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma(\widehat{\Theta})\tau}$ . Podemos suponer que

$$L_{\sigma\gamma\tau} = L_{\sigma(\Lambda_1)} \cup \theta \cup L_{(\Lambda_1)\tau} \quad \text{donde} \quad L_{\sigma(\Lambda_1)} \subset \text{int}H'_g, \quad L_{(\Lambda_1)\tau} \subset \text{int}H_g,$$

y el coeficiente de cirugía de  $\theta$  es  $c_\theta = b - a \pmod 2$ . Sea  $\lambda_1 = \{a_1, a_1 + 1\}$  tal que  $\Lambda_1$  es la transposición de  $\lambda_1$ . Nótese que  $\lambda_1$  es frontera de un 1-disco  $D$  contenido en  $H_g$  o en  $H'_g$ . Sean  $\lambda'_1$  y  $\lambda''_1$  las componentes de  $L_{\sigma\gamma\tau}$  que corresponden a las dos copias de  $\Lambda_1$  en  $\gamma$ , donde  $\lambda''_1 \subset \text{int}D$ . Haciendo jugadas  $K$  en  $\lambda'_1$  y  $\lambda''_1$  se obtiene un enlace enmarcado con dos componentes menos. La parte de éste contenida en  $\text{int}H'_g$  es equivalente a  $L_\sigma$  y la contenida en  $\text{int}H_g$  es equivalente a  $L_\tau$  porque  $\Lambda_1 = \Lambda_1^{-1}$ . Además, la parte contenida en  $\Sigma_g$  es  $\widehat{\theta}$  con coeficiente de cirugía  $c_\theta + lk(\theta, \lambda'_1)$ . Luego el enlace enmarcado obtenido de  $L_{\sigma\gamma\tau}$  haciendo jugadas  $K$  en  $\lambda'_1$  y  $\lambda''_1$  es  $L_{\sigma(\widehat{\Theta})\tau}$ . Esto prueba el lema para el caso  $r = 1$ .

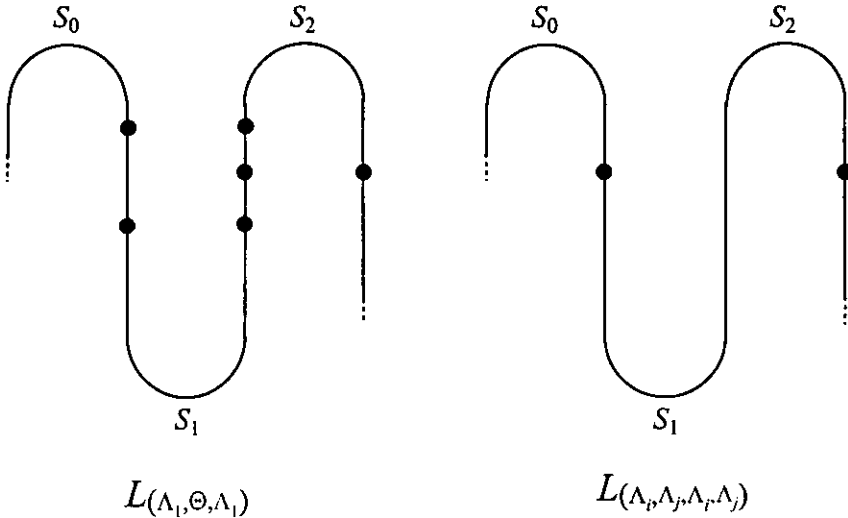


Figura A.4.5

Sea ahora  $r > 1$ . Se tiene, por la hipótesis de inducción,  $f_{\sigma\gamma\tau} = f_{\sigma(\Lambda_r)(\widehat{\Theta})(\Lambda_r)\tau}$  y  $L_{\sigma\gamma\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma(\Lambda_r)(\widehat{\Theta})(\Lambda_r)\tau}$  donde  $\widehat{\theta} = (\theta)\Lambda_1\Lambda_2 \cdots \Lambda_{r-1}$ . Como el lema es válido para  $r = 1$  y

$\hat{\theta} = \tilde{\theta}(\Lambda_r)$  podemos escribir  $f_{\sigma(\Lambda_r)(\tilde{\theta})(\Lambda_r)\tau} = f_{\sigma(\tilde{\theta})\tau}$  y  $L_{\sigma(\Lambda_r)(\tilde{\theta})(\Lambda_r)\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma(\tilde{\theta})\tau}$ . Por tanto,  $f_{\sigma_1\tau} = f_{\sigma(\tilde{\theta})\tau}$  y  $L_{\sigma_1\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma(\tilde{\theta})\tau}$ .  $\square$

Supongamos que  $\sigma_1 = (\Theta_r, \dots, \Theta_1)$  donde  $\Theta_i$  es la transposición de  $\theta_i$ . Sean  $a_1$  la 0-esfera  $\{1, 2\}$  y  $A_1$  la transposición de  $a_1$ . Sea  $1 \leq j \leq r$ . Sea  $h: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  homeomorfismo tal que  $(a_1)h = \theta_j$ . Podemos escribir  $h = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \dots \circ \Lambda_r$ , donde,  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_r$  son transposiciones de adyacentes.

Sea  $\gamma = (\Lambda_r, \dots, \Lambda_2, \Lambda_1, A_1, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_r)$ . Nótese que todas las componentes de  $\gamma$  son transposiciones de adyacentes. Entonces, por el Lema A.4.1, si sustituimos, en  $\sigma_1, \Theta_j$  por  $\gamma$  se obtiene una sucesión  $\hat{\sigma}_1$  tal que  $f_{\hat{\sigma}_1} = f_{\sigma_1}$  y  $L_{\hat{\sigma}_1} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1}$ .

Si se hace esto para cada  $j$  se obtiene finalmente una sucesión  $\sigma_2$  tal que

$$f_{\sigma} = f_{\sigma_1}, L_{\sigma_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma_1}$$

y todas las componentes de  $\sigma_2$  son transposiciones de adyacentes.

Esto termina el paso 2.

**Paso 3: Utilización de la presentación del grupo simétrico.** Se tienen ahora sucesiones de transposiciones de adyacentes  $\sigma_2$  y  $\sigma'_2$  tales que  $f_{\sigma_2} = f_{\sigma'_2}$ . Se quiere probar que  $L_{\sigma_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma'_2}$ . Para ello se utilizará una presentación finita de  $\text{Homeo}(\Sigma_g)$ , el grupo de permutaciones de  $\Sigma_g$  (ver [CM] p.63). Esta presentación no es difícil de obtener. Escribimos de ahora en adelante  $\Lambda_i$  en vez de  $\Lambda_{i,i+1}$ .

**Teorema A.4.3** *El grupo  $\text{Homeo}(\Sigma_g)$  tiene una presentación con generadores  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{g-1}$  y relaciones:*

- (i)  $\Lambda_i \Lambda_j \Lambda_i \Lambda_j = 1$  si  $i + 1 < j$
- (ii)  $\Lambda_i = \Lambda_{i+1} \Lambda_i \Lambda_{i+1} \Lambda_i \Lambda_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, g - 2$ )
- (iii)  $\Lambda_i \Lambda_i = 1$  ( $i = 1, \dots, g - 1$ ).  $\square$

Nótese que  $\Lambda_i = \Lambda_i^{-1}$ .

Por el Teorema A.4.3 si dos palabras en los generadores  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{g-1}$ , con todos los exponentes iguales a 1, representan el mismo elemento de  $\text{Homeo}(\Sigma_g)$  entonces se puede pasar de una palabra a la otra utilizando un número finito de veces, la siguiente operación:

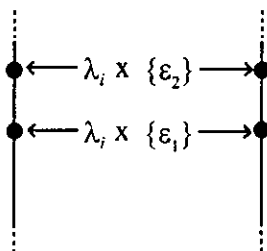
Sustitución del primer (resp. segundo) miembro de (i), (ii) o (iii) por el segundo (resp. primero).

Ahora bien,  $\sigma_2$  y  $\sigma'_2$  son palabras con exponentes iguales a 1 que representan el mismo elemento de  $\text{Homeo}(\Sigma_g)$  ya que  $f_{\sigma_2} = f_{\sigma'_2}$ . Por lo tanto se puede pasar de  $\sigma_2$  a  $\sigma'_2$  aplicando un número finito de veces la operación de sustitución. Luego, para demostrar que  $L_{\sigma_2} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma'_2}$ , será suficiente probar la siguiente proposición:

**Proposición A.4.4** Sean  $\sigma$  y  $\tau$  palabras en los generadores  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{g-1}$ , con todos los exponentes iguales a 1. Sean  $p$  y  $s$  el primero y segundo miembro de (i), (ii) o (iii) pensados como palabras en estos generadores. Entonces  $L_{\sigma p \tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma s \tau}$ .

*Demostración:*

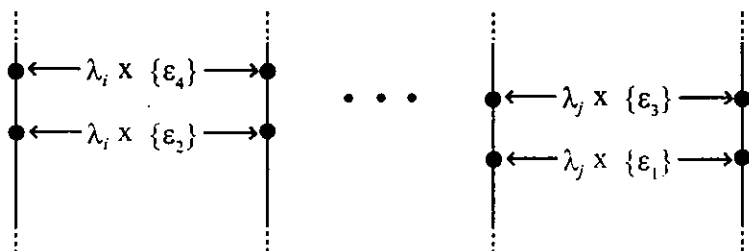
(iii) Nótese que es posible pasar de  $L_{(\Lambda_i, \Lambda_i)}$  al enlace vacío con dos jugadas discoidales así que  $L_{(\Lambda_i, \Lambda_i)} \stackrel{K}{\sim} \emptyset$  y, por la Proposición A.4.2(i),  $L_{\sigma(\Lambda_i, \Lambda_i)\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma\tau}$



$L(\Lambda_i, \Lambda_i)$

Figura A.4.6

(i) Siendo  $i + 1 < j$  se puede pasar de  $L_{(\Lambda_i, \Lambda_j, \Lambda_i, \Lambda_j)}$  al enlace vacío haciendo cuatro jugadas discoidales.



$L(\Lambda_i, \Lambda_j, \Lambda_i, \Lambda_j) \quad (i+1 < j)$

Figura A.4.7

Luego  $L_{(\Lambda_i, \Lambda_j, \Lambda_i, \Lambda_j)} \stackrel{K}{\sim} \emptyset$  y, por la Proposición A.4.2(i)

$$L_{\sigma(\Lambda_i, \Lambda_j, \Lambda_i, \Lambda_j)\tau} \stackrel{K}{\sim} L_{\sigma\tau}$$

---

## Referencias

- [CM] H. S. M. Coxeter y W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*. Ergebnisse der Mathematik. Springer-Verlag (1957).
- [C] R. Craggs, *A new proof of the Reidemeister-Singer theorem on stable equivalence of Heegaard splittings*. Proc. Amer. Math. Soc. **57** (1976) 143-147.
- [CF] R. Crowell y R. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Graduate Text in Mathematics **57** Springer-Verlag (1977).
- [D] M. Dehn, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Acta Math. **69** (1938), 135-206.
- [FR] R. P. Fenn y C. P. Rourke, *On Kirby's calculus of links*, Topology **18** (1979), 1-15.
- [HT] A. Hatcher y W. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, Topology **19** (1980) 221-237.
- [He] J. Hempel, *3-manifolds*, Ann. of Math. Studies **86** Princeton University Press (1976).
- [Hu] Humphries, *Generators for the mapping class group*, en Topology of Low-dimensional Manifolds, Lecture Notes in Mathematics **722** Springer (1979) 44-47.
- [K] R. C. Kirby, *A calculus for framed links in  $S^3$* , Invent. Math. **45** (1978) 35-56.
- [Li1] W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. (2) **76** (1962) 531-540.
- [Li2] W. B. R. Lickorish, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **60** (1964) 769-778 y **62** (1966) 679-681.
- [Li3] W. B. R. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Graduate Text in Mathematics **175** Springer-Verlag (1997).
- [Lu1] N. Lu, *Homeomorphisms of a handlebody and Heegaard splittings of the 3-sphere  $S^3$* . Topology Proc. **13** (1988) 325-350.
- [Lu2] N. Lu, *A simple proof of the fundamental theorem of Kirby calculus on links*, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992) 143-156.
- [M] E. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Graduate Text in Mathematics **47** Springer-Verlag (1997).
- [PS] V. V. Prasolov y A. B. Sossinsky, *Knot, Links, Braids and 3-Manifolds. An Introduction to the New Invariants in Low-Dimensional Topology*, Translations of Math. Monographs de la AMS **154** (1996).
- [Re] K. Reidemeister, *Zur dreidimensionalen Topologie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1933) 189-194.

- 
- [Ro] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Inc. Berkeley, CA, (1976).
- [RS] C. P. Rourke y B. J. Sanderson, *Introduction to piecewise-linear topology*, Ergebnisse der Mathematik. **69** Springer-Verlag (1972).
- [S] J. Singer *Three dimensional manifolds and their Heegaard diagrams*, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933) 88-111.
- [Waj] B. Wajnryb, *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*, Israel J. Math. **45** (1983) 157-174 y **88** (1994) 425-427.
- [Wal] A. H. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*. Canad. J. Math. **12** (1960) 503-528.