

11
28/04



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EL FENOMENO STARK Y EL VECTOR DE HAMILTON"

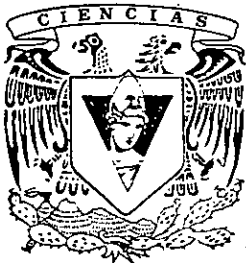
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

OCTAVIO JAVIER CAMPUZANO CARDONA



DIRECTOR DE TESIS: DRA. HILDA NOEMI NUÑEZ YEPEZ.



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

265780



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVÉÑMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"El fenómeno Stark y el vector de Hamilton"

realizado por CAMPUZANO CARDONA OCTAVIO JAVIER

con número de cuenta 8752652-9 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. HILDA NOEMI NÚÑEZ YEPEZ

Propietario

DR. JUAN MANUEL LOZANO MEJIA

Propietario

DR. ROSOLFO PATRICIO MARTINEZ Y ROMERO

Suplente

DR. LUIS BENET FERNANDEZ

Suplente

DR. JOSE LUIS DEL RIO CORREA

[Handwritten signature: Juan Manuel Lozano Mejia]

[Handwritten signature: Rosolfo Patricio Martínez y Romero]

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
Coordinador de Licenciatura.



Agradecimientos

A mi madre, mujer fuerte y decidida, con todo mi cariño y admiración.

A Nelly, a quien amo aún más después de su valiente afrenta al destino.

A Gerardo, Claudia, Sergio, Alfonso, Edgardo, Augusto y César, mi incondicional y maravillosa familia.

También a Abelino, Agustín, Atahualpa, Claudia, Elsa, Elisa, Eliel, Fernán, Heliodoro, Ignacio, Javier, Juan Luis, y Luis, mis amigos más cercanos, quienes me han tenido que soportar desde hace ya mucho tiempo.

A Noemí y Alvaro, por su perseverancia y paciencia, pero sobre todo por su amistad.

A la LIEndre's Foundation (a través del proyecto 6107 627A) y al CONACYT (a través del proyecto 4313-E9607) que hicieron posible la culminación de esta obra.

Índice

Introducción	1
Capítulo I. Acercamiento a la mecánica clásica	5
I.1. Integrabilidad	5
I.2. Cantidades conservadas	9
I.2.a. Vector de Hamilton	9
I.2.b. Vector de Runge-Lenz-Laplace	11
Capítulo II. Átomo de hidrógeno en un campo eléctrico: fenómeno de Stark	15
Capítulo III. Resolución del problema	23
III.1 Reducción a cuadraturas	33
Conclusiones	41
Referencias	45

Introducción

Desde principios de este siglo se consideró a la mecánica clásica como una rama de la física prácticamente cerrada; aún se estudiaban algunos problemas teóricos pero como meras curiosidades o como problemas con un interés puramente matemático (esto explicaría el desarrollo de la mecánica estadística, de gran importancia en la actualidad). Quizás los últimos que entonces se esforzaron por profundizar en el estudio de la mecánica hayan sido Poincaré (1892, 1893 y 1899) y Birkhoff (1927, 1931). No había nada nuevo que decir en este campo, los resultados obtenidos a partir de esta teoría se consideraban obsoletos desde el mismo momento en que se abordaban los problemas. La mecánica clásica era útil desde el punto de vista de la resolución de problemas prácticos, pero nadie esperaba de ella nuevas aportaciones en el terreno de la teoría. Había surgido, durante el primer cuarto de siglo, un nuevo paradigma: la mecánica cuántica. Por años a ésta se le tuvo como la panacea del mundo de la física y casi todos los problemas, principalmente los microscópicos, se abordaron bajo su cobijo. Este punto de vista permea la presentación de libros de texto como el de Goldstein (1980) que justifica el aprendizaje de la mecánica clásica, más que nada, como una oportunidad para introducir conceptos y técnicas que pudieran ser útiles en regiones que se consideraban más "vivas" de la física.

No es sino hasta las décadas de los años sesenta y setenta, cuando el nuevo enfoque planteado por Kolmogorov (1954), Arnold (1963), Moser (1962) y los estudios numéricos de Hénon y Heiles (1964), Walker y Ford (1969) y otros (Toda 1969, Ornstein 1974, Piesin 1976, Berry 1978) comenzó a difundirse entre los físicos,

cuando la mecánica clásica se revaloriza y con ella se abordan nuevamente problemas teóricos importantes incluso a nivel microscópico (Arnold 1978, Gutzwiller 1990, Reichl 1992). El enfoque clásico, más que deducir resultados, permite inferir algunas de las características cualitativas de los problemas atómicos. El principio de complementareidad, como se recordará, permite, bajo condiciones bien determinadas, extender ciertas interpretaciones de una teoría a otra. En este trabajo se estudia un sistema típicamente cuántico usualmente conocido como el fenómeno de Stark, con las herramientas de la mecánica clásica.

El fenómeno de Stark que, como se sabe, resulta de introducir un átomo de hidrógeno en un campo eléctrico, en general uniforme, desde su observación inicial (Stark 1916), se ha tenido que explicar cuánticamente y, de hecho, en los cursos de esta materia, se ha estudiado como ilustración de las técnicas perturbativas para casos degenerados (en el átomo de hidrógeno) (Hezel *et al* 1992). La contribución que representa el enfoque clásico se decidió a partir de observar el hecho de que el átomo de hidrógeno, entendido como el sistema de un electrón que se mueve en torno a un protón, tiene un potencial igual al del legendario problema de Kepler (*i.e.* como $1/r$). Para el análisis clásico que se propone en este trabajo, no se toman en cuenta la radiación debida a la aceleración de cualquier partícula cargada, el campo magnético ocasionado por las corrientes amperianas ni los efectos y correcciones relativistas; por otro lado, para el fenómeno de Stark, se considera un campo eléctrico uniforme como interacción adicional.

El problema de Stark ha sido abordado con diversos enfoques (Redmond 1964, Hezel *et al.* 1992, Greenberg 1966) y hasta hace poco prácticamente todos los autores habían utilizado el vector de Runge-Lenz-Laplace (R-L-L) en sus distintos tratamientos. Aquí se explora un tratamiento a partir del poco conocido vector de Hamilton (Heintz 1974, Moreno 1990, Martínez y Romero *et al.* 1993, del Río Correa 1997), que es una cantidad conservada "adicional" del átomo de hidrógeno y que está estrechamente relacionado con sus propiedades en el espacio de las velocidades y, por ende, con su hodógrafa, esto es, con la trayectoria del sistema

en el espacio de las velocidades (González Villanueva *et al.* 1996, 1998a,b,c).

Con el fin de dar un contexto adecuado al estudio del fenómeno de Stark se introduce una breve discusión acerca de la integrabilidad y superintegrabilidad de los sistemas clásicos y una revisión acerca de las integrales de movimiento: en particular acerca de los vectores de Runge-Lenz-Laplace y de Hamilton (Capítulo 1), de vital importancia para este trabajo (Martínez-y-Romero *et al.* 1992, 1993).

En lo que se refiere a los resultados, se encuentran tres cantidades escalares conservadas, la energía, la componente del momento angular en la dirección del campo eléctrico y la que aquí se ha llamado Ω , que, como se demuestra, está asociada con el vector de Hamilton (Capítulo 2). La existencia de estas tres constantes muestra que este sistema es integrable. En el capítulo 3, para aprovechar su integrabilidad, se utilizan coordenadas parabólicas rotacionales expresando el problema en forma hamiltoniana, y se introducen las tres constantes antes mencionadas, las que permiten separar el problema en dos unidimensionales equivalentes, lo que, a su vez, permite especificar las regiones donde el sistema tiene órbitas ligadas y, finalmente, se expresa su solución en cuadraturas.

Capítulo I

Acercamiento a la Mecánica Clásica

En el transcurso de los años se han desarrollado diversos métodos para la descripción del estado y evolución de los sistemas mecánicos. Las distintas formulaciones se utilizan de acuerdo al tipo de sistemas que se pretende estudiar o interés en sólo algunos aspectos de un mismo problema. Los primeros sistemas que se consideran, por su relativa simplicidad, son los integrables, de los cuales se puede obtener, en algunos casos, información precisa sobre su evolución (Arnold 1978, Gutzwiller 1990).

1.1 Integrabilidad

Un problema no es ni integrable ni no integrable, sino más o menos integrable.

*Poincaré**

El estudio de los sistemas mecánicos ha mostrado, desde el siglo pasado, que la inmensa mayoría de éstos no se puede integrar. Se dice que prácticamente todos son caóticos y que no es posible siquiera obtener una solución aproximada (Gutzwiller 1990). Por este motivo se hace aún más importante estudiar la integrabilidad de un sistema: existen muy pocas joyas de este tipo. Resulta paradójico que durante muchos años el ejemplo para ilustrar los sistemas mecánicos fueran los sistemas in-

* No se asume necesariamente la postura de Poincaré, es sólo un hermoso epígrafe fuera de contexto.

tegrables y que los que no lo eran . . . simplemente no se estudiaran; Poincaré decía, a principios del siglo, que estudiar los sistemas no integrables era como abrirle la puerta a monstruos desconocidos y en su tiempo eso era muy cierto (Szebeheli 1974). Actualmente la atención en la mecánica se enfoca a los sistemas caóticos, y los integrables son casos excepcionales; éstos últimos abren ahora las puertas a problemas fascinantes.

Una forma de abordar la integrabilidad de los sistemas dinámicos es acercarse primero a los movimientos periódicos. La gran importancia de las soluciones periódicas y el por qué éstas merecen atención probablemente se deba al hecho de que otras soluciones presentan grandes complicaciones; dicho en palabras llanas, su importancia reside en su simplicidad (Arnold 1978, Pérez Pascual 1998).

La mecánica tuvo que esperar más de medio siglo, desde principios de esta centuria, para que se ampliaran los criterios de integrabilidad y se pudieran considerar problemas que hasta entonces solamente cumplían parte de los requisitos mínimos para ser considerados integrables. Esto fue posible gracias al desarrollo de la matemática durante ese largo periodo, así como a la ruptura de los tabúes que rodeaban a los sistemas no integrables. El cambio fue radical, desgarrador, y los frutos de esta “revolución” aún no se digieren del todo. Los artífices del nuevo camino fueron Kolmogorov, Arnold y Moser y se sintetiza en el teorema que lleva sus respectivas siglas (Reichl 1992, Pérez Pascual 1998).

¿Cómo se entiende la integrabilidad hoy? La primera idea que se maneja en los cursos básicos de mecánica acerca de integrabilidad es que un sistema es integrable si todas las coordenadas pueden ser expresadas como “funciones conocidas” del tiempo (Symon 1968). Evidentemente existen muy pocos problemas que se puedan llevar a una expresión tal, por lo que ha sido necesario ampliar el criterio de integrabilidad de tal forma que abarque a aquellos sistemas en los cuales se puede analizar el movimiento de manera por lo menos cualitativa. Existen al menos dos criterios para definir si un sistema es integrable: el primero consiste en encontrar tantas integrales de movimiento como grados de libertad tenga el sistema; más con-

cretamente, los sistemas mecánicos conservativos de N grados de libertad deben tener N constantes de movimiento independientes del tiempo, en involución y aislantes, para considerarse integrables; éste es un resultado clásico conocido como el teorema de Liouville (Kozlov 1996). La involución implica que los paréntesis de Poisson entre aquellas integrales deben ser nulos. Más precisamente, cada cantidad conservada tiene una imagen en el espacio de fases —una subvariedad de éste— que es una “sábana”, i.e. una hipersuperficie. Sobre la sábana viven las líneas de flujo (o, simplemente, el flujo). Estas líneas de flujo son generadas por el paréntesis de Poisson entre el vector de fase v (v es el “estado” del sistema en el espacio de fases cuyas componentes son $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$) y la cantidad conservada I . El flujo de cada cantidad mecánica conservada vive sobre su propia hipersuperficie, pero no necesariamente sobre la hipersuperficie de otra cantidad conservada. Ahora bien, el paréntesis de Poisson de cualesquiera dos cantidades describe la intersección de sus respectivos flujos. Si el paréntesis de Poisson entre dos cantidades mecánicas es cero, sus superficies de nivel son comunes y las cantidades mecánicas que ellas representan son constantes a lo largo de ambos flujos. Así el espacio fase tiene una organización simple con respecto a esas cantidades. Además, una constante es aislante si puede reducir en una dimensión la variedad donde están confinadas las trayectorias fásicas y es capaz de aislar regiones completas del espacio fase. (Evans 1990, Martínez y Romero *et al.* 1992, Oliver 1994).

El segundo criterio de integrabilidad, de alguna manera relacionado con el anterior, considera la separación de la ecuación de Hamilton-Jacobi en por lo menos un sistema de coordenadas. En el espacio de N dimensiones si S es la acción en la ecuación de Hamilton-Jacobi y se propone una solución del tipo $S = S_1 + S_2 + \dots + S_N$, donde S_i es una acción que sólo depende de una de las coordenadas y S_{i+1} depende de otra diferente, entonces se deben obtener N ecuaciones diferenciales independientes, lo que en principio permite encontrar una integral completa en cada ecuación (Landau y Lifshitz 1977, Gutzwiller 1990).

Arriba se habló de lo escasos que resultan los sistemas mecánicos integrables, por

ello resulta realmente extraordinario encontrar sistemas que proporcionan, siguiendo el criterio de las constantes de movimiento, más integrales de movimiento que el número de sus grados de libertad. A estos sistemas se les llama superintegrables (Evans 1990). Una manera de reconocer estas rarezas es que la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede separar en, por lo menos, dos sistemas de coordenadas diferentes; otra es simplemente encontrar, para sistemas de N grados de libertad, más de N constantes de movimiento, aislantes, globalmente definidas, univaluadas y funcionalmente independientes: las constantes de movimiento del sistema son funcionalmente independientes entre sí cuando, en el espacio de fases, el contradominio del jacobiano

$$\partial(I_n)/\partial(q_\alpha, p_\alpha); \quad (1)$$

también tiene dimensión N . Aquí las I_n son las constantes de movimiento. Deben estar globalmente definidas para poder asociarlas con las simetrías útiles del problema; éstas, se dice, son constantes "buenas" del movimiento. Esto porque en el problema puede haber integrales de movimiento que cumplan localmente la condición de aislante en el espacio de fases, pero que no lo hagan fuera del mismo, lo que puede no servir para delimitar todas las soluciones. Ahora no pueden estar todas en involución dado que en un sistema de N dimensiones la superficie común de los flujos sólo puede ser de $2N$ dimensiones (Evans 1990).

El átomo de hidrógeno clásico (también el problema de Kepler) y el oscilador armónico son los únicos problemas máximamente superintegrables en los cuales las trayectorias viven sobre una superficie de menor dimensión que el número de grados de libertad (todas son planas, i.e. están confinadas a un plano aunque su potencial actúa en tres dimensiones). Se debe destacar que se pueden encontrar muchas constantes de movimiento pero no todas son funcionalmente independientes o univaluadas, por lo que no son de interés. En un sistema de tres grados de libertad, si existen cinco integrales aislantes, todas las trayectorias clásicas finitas son cerradas y su orientación está completamente especificada (consecuencia

de la constancia del vector de Hamilton). Si únicamente hay cuatro, entonces las trayectorias están restringidas a una superficie de dos dimensiones. Un aspecto importante de algunos de estos sistemas superintegrables (p. ej. átomo de hidrógeno) es que ante ciertas perturbaciones no se destruye completamente la frágil degeneración (Martínez-y-Romero *et al.* 1992). Este hecho permite, como se verá en el siguiente capítulo, resolver el problema del fenómeno Stark y demostrar que es integrable.

1.2 Cantidades conservadas

En el átomo de hidrógeno clásico, la energía es una constante del movimiento porque en el hamiltoniano no aparece explícitamente el tiempo. Una segunda constante del movimiento, el momento angular, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, también se puede extraer del hamiltoniano, donde no aparece la coordenada angular (es decir, es una coordenada ignorable) (Symon 1968, Landau y Lifshitz 1977, Gutzwiller 1990). La conservación del momento angular implica que el movimiento se desarrolla en un plano caracterizado por la dirección del propio momento angular (Landau y Lifshitz 1977, Arnold 1978). La tercera integral de movimiento a deducir es el vector de Hamilton (figura 1).

1.2.a Vector de Hamilton

El camino que se sigue aquí para la obtención de este invariante es similar al de Leach and Gorrige (1988) y al de González Villanueva *et al.* (1996, 1998a,b): se considera la segunda ley de Newton

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{-k\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}, \quad (2)$$

o bien, si se usa la magnitud del momento angular $L = mr^2\dot{\theta}$,

$$\dot{\mathbf{p}} + \frac{mk\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_r}{L} = 0 \quad (3)$$

ésta se puede reescribir de otra manera

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{p} - \frac{mk}{L} \hat{\mathbf{e}}_\theta \right) = 0, \quad (4)$$

dato que el momento angular es una integral de movimiento la cantidad entre paréntesis es una constante de movimiento

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} - \frac{mk}{L} \hat{\mathbf{e}}_\theta. \quad (5)$$

Esta cantidad es el vector de Hamilton. Una forma más general de escribirlo es

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} - \frac{mk}{r l^2} \mathbf{L} \times \mathbf{r}. \quad (6)$$

Basta observar a $\mathbf{M} \cdot \mathbf{L}$ y ver que este vector habita en el plano de la órbita; además es paralelo al semi-lado recto de la cónica (Moreno 1990, del Río Correa 1997). Este invariante tiene especial importancia porque describe las propiedades de la hodógrafa (la curva trazada por la punta del vector velocidad cuando la base del mismo está situada en el centro de fuerzas) y permite construir las trayectorias a partir del espacio de velocidades; utilizando la ecuación (5),

$$v_\theta = r\dot{\theta} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta = M \cos \theta + \frac{mk}{L}, \quad (7)$$

entonces

$$r = \frac{p}{\epsilon \cos \theta - 1}; \quad (8)$$

en donde $p \equiv L^2/mk$ y $\epsilon \equiv LM/k$. La ecuación (8) es una sección cónica de excentricidad ϵ y semi-lado recto p . También se puede estudiar la precesión del pericentro de la órbita a partir de este vector y, por otra parte, usando \mathbf{M} , el vector de Runge-Lenz-Laplace (R-L-L) \mathbf{A} se calcula simplemente como el producto $\mathbf{M} \times \mathbf{L}$ (Sivardiére 1992 y 1994, González-Villanueva *et al.* 1998a).

I.2.b Vector de Runge-Lenz-Laplace

Una cuarta integral de movimiento a deducir es el vector de (R-L-L) (Kaplan 1986, Sivardièrè 1986). Para hacerlo se procederá nuevamente a partir de la segunda ley de Newton. Esta se escribe de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{-k\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}, \quad (9)$$

o también

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{f(r)\mathbf{r}}{r}, \quad (10)$$

donde $f(r)$ es una función cuya forma explícita se reserva.

Considérese el producto vectorial de la ecuación (10) con el vector momento angular

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = m \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] \quad (11)$$

o,

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = m \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - r^2 \ddot{\mathbf{r}}]; \quad (12)$$

debe observarse la relación entre las derivadas vectorial y escalar

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = r\dot{r}. \quad (13)$$

Al usar éste resultado en la ecuación (12), el segundo miembro se puede reescribir como una derivada total respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (14)$$

luego, si $f(r) = -k/r^2$ (campo central para el átomo de hidrógeno: $k = Ze^2$, para el problema de Kepler $k = Gm_1m_2$)

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = mk \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (15)$$

se reacomodan términos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{l} - mk \frac{\mathbf{r}}{r}) = 0; \quad (16)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} - mk \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (17)$$

Donde \mathbf{A} es el vector que se estaba buscando. En la órbita del problema de Kepler el vector de R-L-L está dirigido hacia el pericentro. Del producto escalar de \mathbf{A} con el vector posición \mathbf{r} se obtiene la trayectoria de la partícula y la excentricidad de la trayectoria resulta del cociente entre la magnitud de \mathbf{A} y mk (Leach and Gorrington 1988, Sivardière 1994); físicamente la invariabilidad de \mathbf{A} implica que el pericentro de la órbita no precesa (Hezel *et al.* 1992, Garavaglia 1987).

Si se hace un recuento de las constantes obtenidas para el átomo de hidrógeno, resulta un total de diez: la energía, tres componentes del momento angular, tres más del vector de Hamilton y otras tres del vector de Runge-Lenz-Laplace. Parecen demasiadas para un sistema con 3 grados de libertad; sin embargo, es claro que no todas las constantes son funcionalmente independientes. De hecho, para el problema del átomo de hidrógeno, el número de constantes con estas características se reduce a cinco (Evans 1990, Salas Brito *et al.* 1997).

En este capítulo se ilustró cómo se obtienen algunas cantidades mecánicas constantes para el problema de Kepler, que servirá de base importante en este trabajo. En el siguiente capítulo se obtendrán tres integrales de movimiento para mostrar que el fenómeno de Stark es un problema mecánico integrable.

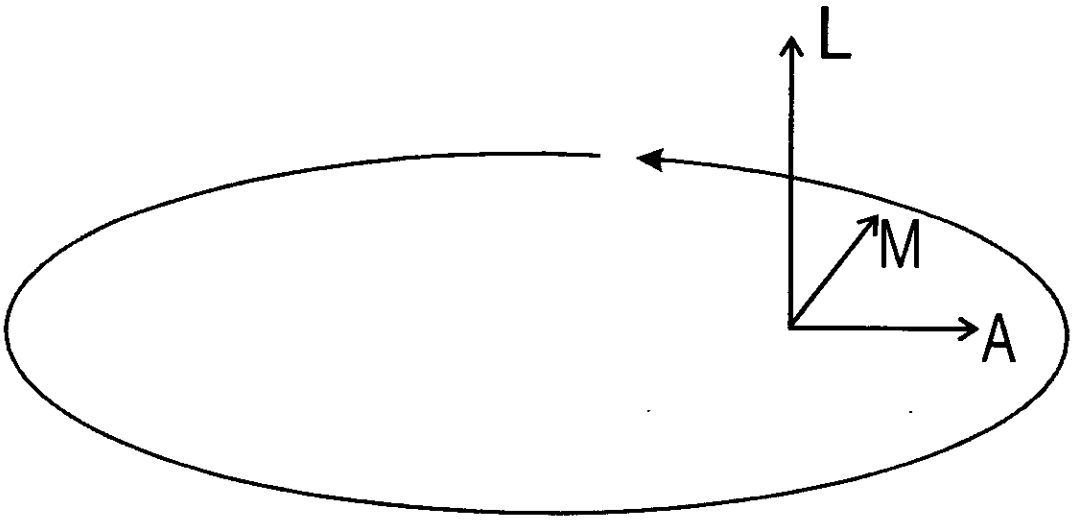


Figura 1. Ubicación de los vectores momento angular (L), Hamilton (M) y Runge-Lenz-Laplace (A) en una órbita elíptica.

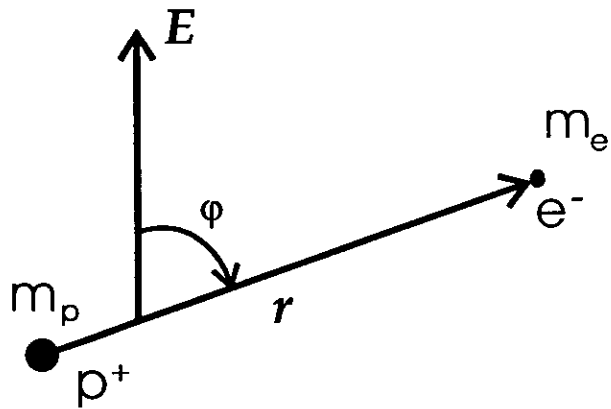


Figura 2a. Fenómeno de Stark: un átomo de hidrógeno perturbado por un campo eléctrico uniforme.

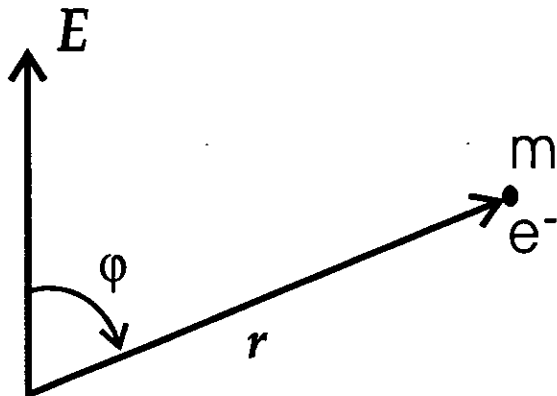


Figura 2b. El problema se transforma al de un sólo cuerpo.

Capítulo II

Átomo de hidrógeno en un campo eléctrico: fenómeno de Stark

El átomo de hidrógeno es uno de los problemas más relevantes y significativos en la física clásica y cuántica contemporáneas. Este problema tiene tres grados de libertad y diez integrales de movimiento. Sin embargo, sólo cinco de éstas son funcionalmente independientes: la energía, la magnitud y dos componentes del momento angular y una componente del vector de Hamilton. También son funcionalmente independientes los mismos cuatro primeros invariantes más una componente del vector R-L-L. Es por lo tanto un sistema superintegrable (Evans 1990, Martínez y Romero *et al* 1992).

Ahora bien, si el átomo de hidrógeno se introduce en un campo eléctrico uniforme, se tiene un nuevo problema (figuras 2a y 2b). El interés en el presente capítulo es mostrar que este nuevo sistema es integrable y esto es posible debido a la superintegrabilidad del átomo de hidrógeno. Para demostrar dicha integrabilidad es necesario, como se señaló en el capítulo anterior, encontrar por lo menos tres constantes de movimiento independientes del tiempo y que estén en involución.

Para encontrar tales integrales de movimiento se procederá a partir de la analogía entre el fenómeno Stark y el átomo de hidrógeno clásico (o problema de Kepler). Así, se partirá de este último sistema —donde no se toma en cuenta la radiación debida a una carga acelerada, los campos magnéticos de Ampère ni los efectos relativistas— y a partir de algunos de sus invariantes asociados, se buscarán los

que corresponden al fenómeno de Stark. El hamiltoniano para el problema del átomo de hidrógeno (H_h) es:

$$H_h = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}; \quad (18)$$

obviamente el hamiltoniano que corresponde al fenómeno de Stark se construye agregando al anterior un término de potencial debido al campo eléctrico. Éste se expresa matemáticamente como $e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$ (Landau y Lifshitz 1977),

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}. \quad (19)$$

Al revisar someramente esta expresión, se observa que no depende explícitamente del tiempo, lo que indica que el hamiltoniano corresponde a la energía del sistema y es una cantidad conservada (Symon 1968, Landau y Lifshitz 1977, Arnold 1978).

A partir del formalismo hamiltoniano se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad (20a)$$

y

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r} - e\mathbf{E}. \quad (20b)$$

El primer conjunto de ecuaciones se refiere a las relaciones triviales que describen la definición de momento como una variación de la posición y la masa con el tiempo; por su parte el segundo grupo de ecuaciones introducen la dinámica del problema, incluida, por supuesto, la interacción con el campo eléctrico.

El momento angular es una de las cantidades conservadas del átomo de hidrógeno, por lo que es plausible que en el fenómeno de Stark también esté relacionado con alguna de las integrales de movimiento (Redmond 1969). A partir de la derivada del momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ con respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -e\mathbf{r} \times \mathbf{E}, \quad (21)$$

donde se ha utilizado el segundo conjunto de las ecuaciones de Hamilton. A continuación se realiza el producto escalar de $d\mathbf{L}/dt$ con $e\mathbf{E}$ y puesto que $d\mathbf{E}/dt = 0$, se tiene

$$\frac{d(\mathbf{L} \cdot e\mathbf{E})}{dt} = 0. \quad (22)$$

La cantidad dentro del paréntesis es una cantidad conservada a la que se denominará Γ :

$$\Gamma = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}. \quad (23)$$

Otra cantidad conservada en el átomo de hidrógeno es el vector de Hamilton, y análogamente al caso anterior se buscará otra integral de movimiento asociada con aquella.

Para encontrar la tercera integral de movimiento se partirá de la derivada del vector de Hamilton (ecuación 6)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - km \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{rL^2} (\mathbf{L} \times \mathbf{r}) \right]; \quad (24)$$

al desarrollar las derivadas e introducir las ecuaciones de Hamilton y la derivada de \mathbf{L} con respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}}{dt} = & -\frac{k}{r^3} \mathbf{r} - e\mathbf{E} + \frac{k}{r^3 L^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{L} \times \mathbf{r} \\ & - \frac{2kme}{rL^4} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \mathbf{L} \times \mathbf{r} \\ & + \frac{kme}{rL^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{r} - \frac{k}{rL^2} \mathbf{L} \times \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (25)$$

Un poco de álgebra permite simplificar la expresión anterior y tener términos más cómodos para trabajar, esto es

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2kme}{rL^4} [\mathbf{E} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{r})] (\mathbf{L} \times \mathbf{r}) + \frac{kme}{rL^2} [r^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{r}] - e\mathbf{E}. \quad (26)$$

Ahora conviene hacer la proyección de $d\mathbf{M}/dt$ sobre $\mathbf{L} \times e\mathbf{E}$ para obtener

$$e \frac{d\mathbf{M}}{dt} \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{E} = - \frac{2kme^2}{rL^4} [\mathbf{E} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{r})] (\mathbf{L} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{E} + \frac{kme^2}{rL^2} r^2 \mathbf{E} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{E}) - \frac{kme^2}{rL^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) [\mathbf{r} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{E})] - e^2 \mathbf{E} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{E}); \quad (27)$$

evidentemente el segundo y cuarto términos desaparecen porque $\mathbf{E} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{E})$ es cero. Los dos términos que sobreviven se pueden escribir de la siguiente forma

$$e \frac{d\mathbf{M}}{dt} \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{E} = - \frac{2kme^2}{rL^4} [\mathbf{E} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{r})] (\mathbf{L} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{E}) + \frac{kme^2}{rL^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) [\mathbf{E} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{r})], \quad (28)$$

con el fin de reducir aún más la última expresión, conviene desarrollar el siguiente término

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{E}) &= [r^2 \mathbf{p} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{r}] \cdot [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{r}] \\ &= r^2 p^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) - r^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) + r^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \\ &= r^2 p^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \\ &= L^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}), \end{aligned} \quad (29)$$

la ecuación (28) toma entonces una forma muy simple:

$$\begin{aligned} e \frac{d\mathbf{M}}{dt} \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{E} &= - \frac{2kme^2}{rL^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) [\mathbf{E} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{r})] + \frac{kme^2}{rL^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) [\mathbf{E} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{r})] \\ &= - \frac{kme^2}{rL^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) [\mathbf{E} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{r})] \\ &= - \frac{kme^2}{rL^2} (\mathbf{L} \times \mathbf{r}) \cdot [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (30)$$

Se puede observar que $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} = (\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} + E^2\mathbf{r}$ por lo que la ecuación anterior se puede reescribir como sigue

$$\begin{aligned} e \frac{d\mathbf{M}}{dt} \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{E} &= -\frac{kme^2}{rL^2} (\mathbf{L} \times \mathbf{r}) \cdot [(\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} + E^2\mathbf{r}] \\ &= -\frac{kme^2}{rL^2} (\mathbf{L} \times \mathbf{r}) \cdot [(\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}] \\ &= \frac{kme}{rL^2} (\mathbf{L} \times \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \times \mathbf{E}\right); \end{aligned} \quad (31)$$

con ayuda de la ecuación (21). Enseguida, con el objetivo de encontrar una derivada total que involucre al vector de Hamilton \mathbf{M} , se debe restar y sumar $e\mathbf{p} \cdot (d\mathbf{L}/dt \times \mathbf{E})$ a la ecuación anterior, donde resulta

$$\begin{aligned} e \frac{d\mathbf{M}}{dt} \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{E} &= \left\{ \frac{kme}{rL^2} (\mathbf{L} \times \mathbf{r}) - e\mathbf{p} \right\} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \times \mathbf{E}\right) + e\mathbf{p} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \times \mathbf{E}\right) \\ &= -e\mathbf{M} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \times \mathbf{E}\right) - e^2\mathbf{p} \cdot [(\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}] \\ &= -e\mathbf{M} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \times \mathbf{E}\right) + e^2(\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{E}); \end{aligned} \quad (32)$$

finalmente se reacomodan los términos para obtener la siguiente expresión

$$\begin{aligned} e \frac{d\mathbf{M}}{dt} \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{E} + e\mathbf{M} \cdot \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \times \mathbf{E}\right) - e^2(\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{E}) \\ \frac{d}{dt} [e\mathbf{M} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{E})] - \frac{d}{dt} \left[\frac{e^2}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{E})^2\right] \\ \frac{d}{dt} [e\mathbf{M} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{E}) - \frac{me^2}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{E})^2] = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

y la integral de movimiento a la que se denominará Ω es:

$$\Omega = e\mathbf{M} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{E}) - \frac{me^2}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{E})^2. \quad (34)$$

Al observar la ecuación (34) se puede detectar un vector más general que el vector de Hamilton, éste es

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M} \times \mathbf{L} - \frac{me}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{r}, \quad (35)$$

donde la proyección del vector $\mathbf{\Lambda}$ sobre el campo eléctrico $e\mathbf{E}$ es justamente la constante Ω (figuras 3 y 4).

Se ha demostrado que el fenómeno Stark posee tres constantes de movimiento H , Γ y Ω . Cada una de ellas está asociada con uno de los invariantes del átomo de hidrógeno: la primera es la energía, en la segunda esta involucrado el momento angular y en la última el vector de Hamilton.

Se han utilizado las constantes de movimiento del átomo de hidrógeno como guía para obtener otras constantes relativas al fenómeno de Stark. Se ha mostrado así que el problema es integrable.

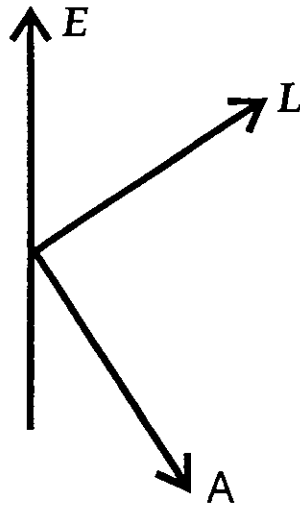


Figura 3. Orientación relativa de los vectores campo eléctrico (E), momento angular (L) y R-L-L (A).

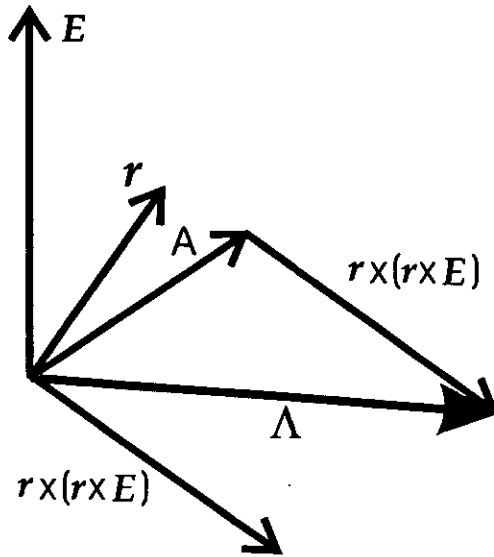


Figura 4. Ubicación del vector Λ

Capítulo III

Resolución del problema

El átomo de hidrógeno clásico posee una simetría oculta $SO(4)$ —que implica rotaciones en el espacio de cuatro dimensiones— directamente relacionada con la superintegrabilidad del mismo (Goldstein 1980, Prince and Eliezer 1981, Martínez y Romero *et al* 1992). Tal simetría permite que todas sus órbitas habiten en un plano (conservación del momento angular) y tengan un pericentro fijo durante todo el movimiento (consecuencia de la conservación del vector de Hamilton). Para cierto tipo de perturbaciones a este sistema, las órbitas aún permanecen en el plano pero su pericentro precesa, señal de que el vector de Hamilton ya no se conserva (Garavaglia 1987, Hezel 1990, Sivardière 1992). Conocido el hecho de que el fenómeno de Stark es un problema integrable, ahora sigue determinar la evolución del sistema; más exactamente, una vez obtenidas las integrales de movimiento para el fenómeno de Stark, el siguiente paso es utilizarlas para encontrar en qué regiones es acotado el movimiento. Hecho esto, se intentará encontrar una expresión analítica cerrada para la órbitas del problema (*i.e.* una relación entre las coordenadas que describen al sistema).

En primer lugar se separará el problema utilizando las constantes Ω y Γ obtenidas en el capítulo anterior. Por la simetría axial del problema, determinada por la dirección constante del campo eléctrico, las coordenadas más adecuadas para separar el hamiltoniano del sistema son las parabólicas rotacionales (Hauser 1965, Banks y Leopold 1978, Landau y Lifshitz 1977, Arfken 1970, Hezel 1990). En

aras de simplificar el problema, pero sin restarle generalidad, el campo eléctrico se orientará en la dirección z , o sea $\mathbf{E} = \mathcal{E}_0 \hat{\mathbf{e}}_z$. Las coordenadas que aquí se utilizarán son las usadas por Banks y Leopold (1978), que difieren en un factor de 2 respecto a las que emplean Landau y Lifshitz (1977):

$$x = 2\sqrt{\xi\eta} \cos \phi \quad (36a)$$

$$y = 2\sqrt{\xi\eta} \sin \phi \quad (36b)$$

$$z = \xi - \eta; \quad (36c)$$

a partir de las cuales se puede encontrar que:

$$r = \xi + \eta, \quad (37)$$

$$\mathbf{r} = \sqrt{\frac{\xi+\eta}{\xi}} \xi \hat{\mathbf{e}}_\xi + \sqrt{\frac{\xi+\eta}{\eta}} \eta \hat{\mathbf{e}}_\eta + 0 \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (38)$$

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\xi+\eta}{\xi}} \dot{\xi} \hat{\mathbf{e}}_\xi + \sqrt{\frac{\xi+\eta}{\eta}} \dot{\eta} \hat{\mathbf{e}}_\eta + 2\sqrt{\xi\eta} \dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (39)$$

la función lagrangiana del sistema es:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{k}{r} - e \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}; \quad (40)$$

el hamiltoniano $H = p_i \dot{q}_i - L$ se puede escribir en coordenadas parabólicas rotacionales como

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\xi}{\xi+\eta} \right) p_\xi^2 + \left(\frac{\eta}{\xi+\eta} \right) p_\eta^2 \right] + \frac{p_\phi^2}{8m\xi\eta} - \frac{k}{\xi+\eta} + e\mathcal{E}_0(\xi - \eta) = E; \quad (41)$$

donde se observa que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = \mathcal{E}_0 z$. A partir de este momento la expresión (41) se considerará simplemente como la energía E , pues las transformaciones que se efectuarán en el capítulo no permitirán utilizar plenamente la estructura hamiltoniana (*i.e.* no son canónicas).

Se multiplica la energía por $2m(\xi + \eta)$ y se obtiene

$$2m(\xi + \eta)E = \xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2 + \frac{p_\phi^2(\xi + \eta)}{4\xi\eta} - 2km + 2me\mathcal{E}_0(\xi^2 - \eta^2); \quad (42)$$

se agrupan ahora todos los términos de ξ al lado izquierdo de la igualdad y los relativos a η al lado derecho, es decir

$$2m\xi E - \xi p_\xi^2 - \frac{p_\phi^2}{4\xi} + km - 2me\mathcal{E}_0\xi^2 = -2m\eta E + \eta p_\eta^2 + \frac{p_\phi^2}{4\eta} - km - 2me\mathcal{E}_0\eta^2. \quad (43)$$

Como esta ecuación es válida en general, o sea para toda ξ y toda η , la única posibilidad es que cada lado de la igualdad sea idéntico a una constante C

$$2m\xi E - \xi p_\xi^2 - \frac{p_\phi^2}{4\xi} + km - 2me\mathcal{E}_0\xi^2 = C, \quad (44)$$

y

$$-2m\eta E + \eta p_\eta^2 + \frac{p_\phi^2}{4\eta} - km - 2me\mathcal{E}_0\eta^2 = C; \quad (45)$$

si se acomodan los términos en cada una de las ecuaciones se obtiene la energía E en términos de cada una de las coordenadas

$$E = \frac{p_\xi^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{8m\xi^2} - \left(\frac{k}{2} - \frac{C}{2m}\right) \frac{1}{\xi} + e\mathcal{E}_0\xi \quad (46a)$$

y

$$E = \frac{p_\eta^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{8m\eta^2} - \left(\frac{k}{2} + \frac{C}{2m}\right) \frac{1}{\eta} - e\mathcal{E}_0\eta. \quad (46b)$$

Puesto que $\Gamma = ep_\phi\mathcal{E}_0$ de acuerdo con la ecuación (23), la expresión anterior contiene dos de las tres constantes de movimiento (E y Γ) en términos de las cuales se pretende resolver el problema, faltando por introducir Ω . La ecuación (34) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Omega = e\left(p^2 - \frac{km}{r}\right)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) - e(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - \frac{e^2 m}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{E})^2, \quad (47)$$

si en ella se sustituye el momento lineal previamente despejado de la energía (ecuación (41)) resulta

$$\Omega = e\left(2mE + \frac{2km}{r} - 2me\mathcal{E}_0z - \frac{km}{r}\right)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) - e(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - \frac{e^2 m}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{E})^2. \quad (48)$$

Ahora se expresa esta ecuación en coordenadas parabólicas rotacionales

$$\begin{aligned} \Omega = & 2mEe\mathcal{E}_0(\xi + \eta) + \frac{kme\mathcal{E}_0}{(\xi + \eta)}(\xi - \eta) - 2e^2\mathcal{E}_0^2(\xi - \eta)^2 \\ & - \frac{e\mathcal{E}_0}{(\xi + \eta)}(\xi p_\xi + \eta p_\eta) \cdot (\xi p_\xi - \eta p_\eta) - 2e^2 m \xi \eta \mathcal{E}_0^2; \end{aligned} \quad (49)$$

al igual que para la energía, se multiplicó (49) por $(\xi + \eta)$, se simplifica y se agrupa; para obtener entonces otra ecuación que se pueda reescribir como una expresión que sólo dependa de ξ , igual a otra expresión que sólo dependa de η

$$\begin{aligned} 2me^2\mathcal{E}_0^2\xi^3 + (e\mathcal{E}_0p_\xi^2 - 2me\mathcal{E}_0E)\xi^2 + (\Omega - kme\mathcal{E}_0)\xi = \\ -2me^2\mathcal{E}_0^2\eta^3 + (e\mathcal{E}_0p_\eta^2 - 2me\mathcal{E}_0E)\eta^2 - (\Omega + kme\mathcal{E}_0)\eta. \end{aligned} \quad (50)$$

Análogamente, las expresiones que dependen de ξ y η se igualan nuevamente a una constante, que, por supuesto, debe ser diferente de la anterior, y que se llamará D .

$$2me^2\mathcal{E}_0^2\xi^3 + (e\mathcal{E}_0p_\xi^2 - 2me\mathcal{E}_0E)\xi^2 + (\Omega - kme\mathcal{E}_0)\xi = D, \quad (51)$$

$$-2me^2\mathcal{E}_0^2\eta^3 + (e\mathcal{E}_0p_\eta^2 - 2me\mathcal{E}_0E)\eta^2 - (\Omega + kme\mathcal{E}_0)\eta = D. \quad (52)$$

Al reacomodar términos resultan

$$E = \frac{p_{\xi}^2}{2m} - \frac{D}{2me\mathcal{E}_0} \frac{1}{\xi^2} - \left(\frac{k}{2} - \frac{\Omega}{2me\mathcal{E}_0} \right) \frac{1}{\xi} + e\mathcal{E}_0\xi, \quad (53a)$$

$$E = \frac{p_{\eta}^2}{2m} - \frac{D}{2me\mathcal{E}_0} \frac{1}{\eta^2} - \left(\frac{k}{2} + \frac{\Omega}{2me\mathcal{E}_0} \right) \frac{1}{\eta} - e\mathcal{E}_0\eta; \quad (53b)$$

las ecuaciones (53) son muy similares a las ecuaciones (46) y de la comparación directa de ambos pares se pueden extraer los valores precisos de C y D :

$$D = -\frac{p_{\phi}^2 e\mathcal{E}_0}{4}, \quad (54)$$

y

$$C = \frac{\Omega}{e\mathcal{E}_0}. \quad (55)$$

Este resultado era de esperar, dado que el problema únicamente tiene tres constantes de movimiento en involución. Finalmente considerando que $k \equiv Ze^2$, las ecuaciones para E se escriben en términos de las integrales de movimiento (Ω, Γ) obtenidas en el capítulo anterior como sigue

$$E = \frac{p_{\xi}^2}{2m} + \frac{\Gamma^2}{8me^2\mathcal{E}_0^2} \frac{1}{\xi^2} - \left(\frac{Z}{2} - \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0} \right) \frac{e^2}{\xi} + e\mathcal{E}_0\xi, \quad (56)$$

$$E = \frac{p_{\eta}^2}{2m} + \frac{\Gamma^2}{8me^2\mathcal{E}_0^2} \frac{1}{\eta^2} - \left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0} \right) \frac{e^2}{\eta} - e\mathcal{E}_0\eta, \quad (57)$$

donde las ecuaciones (56) y (57) son, cada una, un potencial unidimensional que tiene una parte cinética y otra potencial.

$$V_{\xi} = \frac{\Gamma^2}{8me^2\mathcal{E}_0^2} \frac{1}{\xi^2} - \left(\frac{Z}{2} - \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0} \right) \frac{e^2}{\xi} + e\mathcal{E}_0\xi, \quad (58)$$

$$V_{\eta} = \frac{\Gamma^2}{8me^2\mathcal{E}_0^2} \frac{1}{\eta^2} - \left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0} \right) \frac{e^2}{\eta} - e\mathcal{E}_0\eta, \quad (59)$$

son los potenciales de ξ y de η , respectivamente.

A continuación se buscan las condiciones necesarias, en términos de las cantidades conservadas y el campo eléctrico, para la existencia de trayectorias acotadas en el sistema. La clave para ello es considerar los puntos de retorno $V_\xi = E$ y $V_\eta = E$. Cuando en la ecuación de ξ existen dos puntos de retorno positivos y en la correspondiente a η los tres son mayores que cero, entonces el sistema tiene trayectorias acotadas. En este caso, ambos potenciales tienen "pozos" del lado positivo y uno "está" dentro del otro; además, ambos son intersecados por la energía (figuras 6a y 6b).

Una condición equivalente resulta de considerar los puntos críticos de los potenciales, esto es

$$\max(V_{\xi_{\min}}, V_{\eta_{\min}}) \leq E \leq V_{\eta_{\max}}. \quad (60)$$

Las ecuaciones cuyas raíces son los puntos de retorno se pueden escribir como sigue

$$\xi^3 - \frac{E}{e\mathcal{E}_0}\xi^2 - \left(\frac{Z}{2} - \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0}\right)\frac{e}{\mathcal{E}_0}\xi + \frac{\Gamma^2}{8me^3\mathcal{E}_0^3} = 0, \quad (61)$$

$$\eta^3 + \frac{E}{e\mathcal{E}_0}\eta^2 + \left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0}\right)\frac{e}{\mathcal{E}_0}\eta - \frac{\Gamma^2}{8me^3\mathcal{E}_0^3} = 0. \quad (62)$$

También es posible reescribirlas como sigue

$$\left(\xi - \frac{E}{2\mathcal{E}'_0}\right)^2 = -\frac{\Gamma'^2}{8\mathcal{E}_0\xi} + \frac{E^2}{4\mathcal{E}'_0{}^2} + \frac{k - \omega}{2\mathcal{E}'_0} \quad (63)$$

$$\left(\eta + \frac{E}{2\mathcal{E}'_0}\right)^2 = \frac{\Gamma'^2}{8\mathcal{E}_0\eta} + \frac{E^2}{4\mathcal{E}'_0{}^2} - \frac{k + \omega}{2\mathcal{E}'_0} \quad (64)$$

donde $k = Ze^2$, $\mathcal{E}'_0 = e\mathcal{E}_0$, $\Gamma' = m^{\frac{1}{2}}e\mathcal{E}_0\Gamma$ y $\omega = e\mathcal{E}_0\Omega$.

Se puede observar que en ambas ecuaciones, (63) y (64), se tiene una parábola del lado izquierdo de la igualdad y una hipérbola del lado derecho. Las raíces de las ecuaciones cúbicas originarias (61) y (62) son justamente las intersecciones entre estas cónicas. Para que en ambas ecuaciones existan tres raíces reales, de acuerdo con las figuras (5a) y (5b), la energía debe ser negativa. También $k + \omega$ y

$k - \omega$ deben ser mayores que cero para que las ecuaciones (63) y (64) posiblemente contengan dos y tres soluciones positivas, respectivamente. Ahora bien, la ecuación (63) poseerá de manera segura dos raíces positivas desde el momento en que la parábola y la hipérbola son tangentes y seguirán así conforme Γ' disminuya su valor. La condición de tangencia en un punto se expresa matemáticamente al igualar las pendientes de las curvas en tal punto, esto es

$$2\xi - \frac{E}{\mathcal{E}'_0} = \frac{\Gamma'^2}{8\mathcal{E}'_0\xi^2}, \quad (65)$$

que se puede escribir de la siguiente forma

$$\xi^3 - \frac{E}{2\mathcal{E}'_0}\xi^2 - \frac{\Gamma'^2}{16\mathcal{E}'_0} = 0. \quad (66)$$

De las ecuaciones (63) y (66) conviene eliminar Γ'^2 . Resulta ahora una expresión más simple

$$3\xi \left(\xi^2 - \frac{2E}{3\mathcal{E}'_0}\xi - \frac{(k - \omega)}{6\mathcal{E}'_0} \right) = 0. \quad (67)$$

Existen dos posibles soluciones

$$\xi = 0 \quad (68a)$$

o

$$\xi^2 - \frac{2E}{3\mathcal{E}'_0}\xi - \frac{(k - \omega)}{6\mathcal{E}'_0} = 0; \quad (68b)$$

la primera es la solución cuando $\Gamma = 0$ y no se tomará en cuenta por el momento.

De la ecuación (68) se obtienen dos puntos críticos, pero sólo uno es positivo:

$$\xi_c = \frac{E}{3\mathcal{E}'_0} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{3\mathcal{E}'_0(k - \omega)}{2E^2}} \right), \quad (69)$$

donde se ha hecho el cambio $E = -\epsilon$ con $\epsilon > 0$.

Ahora se sustituye este punto crítico en la ecuación (66) y se obtiene la condición sobre la constante Γ'_ξ

$$\Gamma_{\xi}^{\prime 2} < 16\mathcal{E}'_0 \left(\xi_c^3 + \frac{\epsilon}{\mathcal{E}'_0} \xi_c^2 \right). \quad (70)$$

En resumen, para la existencia de los puntos de retorno positivos en ξ , además de la ecuación (70) deben cumplirse las siguientes relaciones

$$E < 0, \quad (71a)$$

$$k - \omega > 0, \quad (71b)$$

y

$$k + \frac{2\epsilon^2}{3\mathcal{E}'_0} < \omega. \quad (71c)$$

Un tratamiento similar para la ecuación (64) (esto es, buscar las condiciones para que ésta contenga tres puntos de retorno positivos y el cuadrado del momento angular resulte positivo) arroja las siguientes condiciones

$$E < 0, \quad (72a)$$

$$k + \omega > 0 \quad (72b)$$

y

$$\omega < -k + \frac{2\epsilon^2}{3\mathcal{E}'_0}, \quad (72c)$$

los cuales se pueden expresar en una sola desigualdad

$$-k < \omega < -k + \frac{2\epsilon^2}{3\mathcal{E}'_0}. \quad (72d)$$

Los puntos críticos y sus respectivas constantes Γ' son

$$\eta_{c+} = \frac{\epsilon}{3\mathcal{E}'_0} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{3\mathcal{E}'_0}{2\epsilon^2} (k + \omega)} \right], \quad (73a)$$

$$\eta_{c-} = \frac{\epsilon}{3\mathcal{E}'_0} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{3\mathcal{E}'_0}{2\epsilon^2}(k + \omega)} \right], \quad (73b)$$

$$\Gamma_{\eta+}^{\prime 2} < 16\mathcal{E}'_0 \eta_{c+}^2 \left(-\eta_{c+} + \frac{\epsilon}{2\mathcal{E}'_0} \right) \quad (74a)$$

y

$$\Gamma_{\eta-}^{\prime 2} < 16\mathcal{E}'_0 \eta_{c-}^2 \left(-\eta_{c-} + \frac{\epsilon}{2\mathcal{E}'_0} \right). \quad (74b)$$

Para que $\Gamma_{\eta+}^{\prime 2}$ siempre resulte un número real, es necesario que ω cumpla la siguiente relación

$$k - \frac{\epsilon^2}{2\mathcal{E}'_0} < \omega. \quad (75)$$

Las desigualdades (71c), (72d) y (75) tienen un intervalo en común sólo cuando

$$k < \frac{\epsilon^2}{3\mathcal{E}'_0} \quad (76)$$

entonces la ecuación para ω resulta

$$k - \frac{\epsilon^2}{2\mathcal{E}'_0} < \omega < -k + \frac{2\epsilon^2}{3\mathcal{E}'_0} \quad (77)$$

De la relación (76) también se obtiene una restricción para la energía del sistema, ésta es

$$E < \sqrt{3\mathcal{E}'_0 k} \quad (78)$$

Debe tomarse el mínimo de $\Gamma_{\eta+}^{\prime}$, $\Gamma_{\eta-}^{\prime}$ y $\Gamma_{\xi+}^{\prime}$.

En el apéndice se encuentra el programa desarrollado para obtener trayectorias acotadas, considerando los criterios obtenidos arriba, en el programa de manipulación simbólica *Mathematica*.

Para completar el presente análisis, se describe un procedimiento para obtener los puntos críticos de los potenciales asociados al problema.

Los puntos extremos de los potenciales (esto es, sus máximos y mínimos) se obtienen al derivar las V_ξ y V_η e igualar el resultado a cero. En cada caso resulta nuevamente una ecuación cúbica:

$$\eta^3 - \left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0} \right) \frac{e}{\mathcal{E}_0} \eta + \frac{\Gamma^2}{4me^3\mathcal{E}_0^3} = 0 \quad (79a)$$

$$\xi^3 + \left(\frac{Z}{2} - \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0} \right) \frac{e}{\mathcal{E}_0} \xi - \frac{\Gamma^2}{4me^3\mathcal{E}_0^3} = 0 \quad (79b)$$

Así pues, según Uspensky (1988), el discriminante de la variable η es el siguiente

$$\Delta = -4 \left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0} \right)^3 \left(\frac{e}{\mathcal{E}_0} \right)^3 + 27 \left(\frac{\Gamma^2}{4me^3\mathcal{E}_0^3} \right)^2, \quad (80)$$

si éste es menor que cero tiene tres soluciones reales, que son las siguientes:

$$\eta_1 = 2 \sqrt[3]{ \frac{\left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0} \right) \frac{e}{\mathcal{E}_0}}{3} \cos \left(\frac{\phi}{3} \right) }, \quad (81a)$$

$$\eta_2 = -2 \sqrt[3]{ \frac{\left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0} \right) \frac{e}{\mathcal{E}_0}}{3} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\phi}{3} \right) }, \quad (81b)$$

$$\eta_3 = -2 \sqrt[3]{ \frac{\left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0} \right) \frac{e}{\mathcal{E}_0}}{3} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\phi}{3} \right) }. \quad (81c)$$

Se debe agregar además la condición para que dos de las soluciones sean positivas; esto sucede cuando

$$\left(Z + \frac{\Omega}{me^3\mathcal{E}_0} \right) > 0, \quad (82)$$

no se debe olvidar que ϕ está dado por (siempre según Uspensky (1988))

$$\cos \phi = - \frac{\sqrt{27} \frac{\Gamma^4}{4em\mathcal{E}_0}}{2 \left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0} \right) \frac{e}{\mathcal{E}_0} \sqrt{\left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0} \right) \frac{e}{\mathcal{E}_0}}}. \quad (83)$$

ξ también tiene tres raíces reales, pero sólo una de ellas positiva:

$$\xi_3 = -2\sqrt{\frac{\left(\frac{Z}{2} - \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0}\right) \frac{e}{\mathcal{E}_0}}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\phi}{3}\right), \quad (84)$$

Como se sabe los valores críticos de los potenciales se obtienen evaluando en ellos los puntos extremos; los puntos que interesan son los positivos.

$$V_{\xi_{min}} = V_{\xi}(\xi_r), \quad (85a)$$

$$V_{\eta_{min}} = V_{\eta}(\eta_2) \quad (85b)$$

y

$$V_{\eta_{max}} = V_{\eta}(\eta_3). \quad (85c)$$

III.1 Reducción del problema a cuadraturas

Por otra parte, se puede deducir una relación entre ξ y η que permite, en principio, encontrar la trayectoria del electrón para este problema. Se parte de las ecuaciones (56) y (57), de las cuales se despejan los términos cuadráticos en el momento lineal, $p_{\xi}^2/2m$ y $p_{\eta}^2/2m$,

$$\frac{p_{\xi}^2}{2m} = E - \frac{\Gamma^2}{8me^2\mathcal{E}_0^2} \frac{1}{\xi^2} + \left(\frac{Z}{2} - \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0}\right) \frac{e^2}{\xi} - e\mathcal{E}_0\xi, \quad (86)$$

$$\frac{p_{\eta}^2}{2m} = E - \frac{\Gamma^2}{8me^2\mathcal{E}_0^2} \frac{1}{\eta^2} + \left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0}\right) \frac{e^2}{\eta} + e\mathcal{E}_0\eta. \quad (87)$$

Si ahora se considera otro cambio que permite expresar a las ecuaciones como función de las variables

$$p_{\xi}^2 = m^2 \left(\frac{\xi + \eta}{\xi}\right)^2 \xi^2, \quad (88a)$$

$$p_{\eta}^2 = m^2 \left(\frac{\xi + \eta}{\eta}\right)^2 \eta^2, \quad (88b)$$

y además, si se divide la primera expresión entre la segunda y se extrae la raíz cuadrada de ambos lados, se obtiene

$$\frac{\dot{\xi}}{\dot{\eta}} = \frac{\left(-e\mathcal{E}_0\xi^3 + E\xi^2 + \left(\frac{Z}{2} - \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0}\right)e^2\xi - \frac{\Gamma^2}{8me^2\mathcal{E}_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(e\mathcal{E}_0\eta^3 + E\eta^2 + \left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0}\right)e^2\eta + \frac{\Gamma^2}{8me^2\mathcal{E}_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (89)$$

como $\dot{\xi} = d\xi/dt$ y $\dot{\eta} = d\eta/dt$, se obtiene fácilmente la siguiente relación

$$\int \left(-e\mathcal{E}_0\xi^3 + E\xi^2 + \left(\frac{Z}{2} - \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0}\right)e^2\xi - \frac{\Gamma^2}{8me^2\mathcal{E}_0^2}\right)^{-1/2} d\xi = \int \left(e\mathcal{E}_0\eta^3 + E\eta^2 + \left(\frac{Z}{2} + \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0}\right)e^2\eta + \frac{\Gamma^2}{8me^2\mathcal{E}_0^2}\right)^{-1/2} d\eta, \quad (90)$$

con lo que se ha reducido el problema de encontrar las órbitas de un electrón en el fenómeno de Stark a una simple cuadratura. Cuando el campo eléctrico es cero, las integrales anteriores corresponden a las que se obtienen en la resolución del átomo de hidrógeno en las mismas coordenadas, como debe ser.

Todo se reduce ahora a efectuar las integrales de la ecuación (90). La integral en ξ , que se denominará J_ξ , se puede evaluar de manera explícita y, evidentemente, sucede lo mismo con la integral sobre la variable η . Luego

$$J_\xi = \int \left(-e\mathcal{E}_0\xi^3 + E\xi^2 + \left(\frac{Z}{2} - \frac{\Omega}{2me^3\mathcal{E}_0}\right)e^2\xi - \frac{\Gamma^2}{8me^2\mathcal{E}_0^2}\right)^{-1/2} d\xi \quad (91)$$

de acuerdo a las tablas de Gradshteyn y Rishyk (1978) corroboradas con ayuda del programa de manipulación simbólica *Mathematica*

$$J_\xi = \frac{2}{\sqrt{\xi_a - \xi_c}(\xi_b - \xi_c)} F(\phi_\xi | m_\xi) \quad (92)$$

en donde $F(\phi|m)$ es la integral elíptica de primera clase. Además, se han definido las cantidades

$$\phi_{\xi} = \arcsen \left(\sqrt{\frac{\xi - \xi_c}{\xi_b - \xi_c}} \right), \quad (93)$$

$$m_{\xi} = \frac{\xi_b - \xi_c}{\xi_a - \xi_c}$$

en donde los números ξ_a , ξ_b y ξ_c (el orden que siguen estos números es del más pequeño ξ_a al más grande ξ_c) son las raíces del polinomio que aparece en el denominador de (79), pero una vez "normalizado",

$$P(\xi) = \xi^3 - \frac{E}{e\mathcal{E}_0} \xi^2 - \left(\frac{Ze}{2\mathcal{E}_0} - \frac{\Omega}{2me^2\mathcal{E}_0^2} \right) \xi + \frac{\Gamma^2}{8e^3m\mathcal{E}_0^3}. \quad (94)$$

Encontrar tales raíces se puede hacer empleando el método descrito por Uspensky (1988) y mencionado arriba. La solución de la integral en η es

$$J_{\eta} = \frac{2}{\sqrt{\eta_a - \eta_c}(\eta_b - \eta_c)} F(\phi_{\eta}|m_{\eta}), \quad (95)$$

donde $F(\phi_{\eta}|m_{\eta})$ es la integral elíptica de primera clase. Además, se han definido las cantidades

$$\phi_{\eta} = \arcsen \left(\sqrt{\frac{\eta - \eta_c}{\eta_b - \eta_c}} \right), \quad (96)$$

$$m_{\eta} = \frac{\eta_b - \eta_c}{\eta_a - \eta_c}.$$

Las raíces de η se obtienen del siguiente polinomio

$$P(\eta) = \eta^3 + \frac{E}{e\mathcal{E}_0} \eta^2 + \left(\frac{Ze}{2\mathcal{E}_0} + \frac{\Omega}{2me^2\mathcal{E}_0^2} \right) \eta + \frac{\Gamma^2}{8e^3m\mathcal{E}_0^3}; \quad (97)$$

para obtener la trayectoria hay que igualar la ecuación (92) con la (95) y resolver para η como función de ξ ; esto es algo que puede hacerse numéricamente o con ayuda de programas de manipulación simbólica. Para que tales trayectorias sean acotadas, las raíces de ambos polinomios (92) y (95) deben ser reales. Sin embargo, por simplicidad, aquí se obtendrán las trayectorias descritas por el electrón a partir de las ecuaciones de Hamilton del sistema (las cuales se obtienen a partir de la ecuación (41)).

Las ecuaciones de Hamilton en coordenadas cartesianas son las siguientes

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad (98a)$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad (98b)$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m}, \quad (98c)$$

$$\dot{p}_x = \frac{kx}{r}, \quad (98d)$$

$$\dot{p}_y = \frac{ky}{r}, \quad (98e)$$

$$\dot{p}_z = \frac{kz}{r} - eE; \quad (98f)$$

para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales anterior, pueden utilizarse las siguientes condiciones iniciales

$$L_x = y_0 p_{z0} - z_0 p_{y0} = 0, \quad (99a)$$

$$L_y = -(x_0 p_{z0} - z_0 p_{x0}) = 0, \quad (99b)$$

$$L_x = x_0 p_{y0} - y_0 p_{x0} = \Gamma'. \quad (99c)$$

Estas relaciones implican $z_0 = 0$ y $p_{z0} = 0$, además, por comodidad es posible especificar los valores de las variables restantes, $y_0 = 0$ y $p_{x0} = 0$ y únicamente basta designar un valor adecuado para x_0 y determinar p_{y0} de la ecuación (99c). En las figuras 7 y 8 se muestran algunas trayectorias

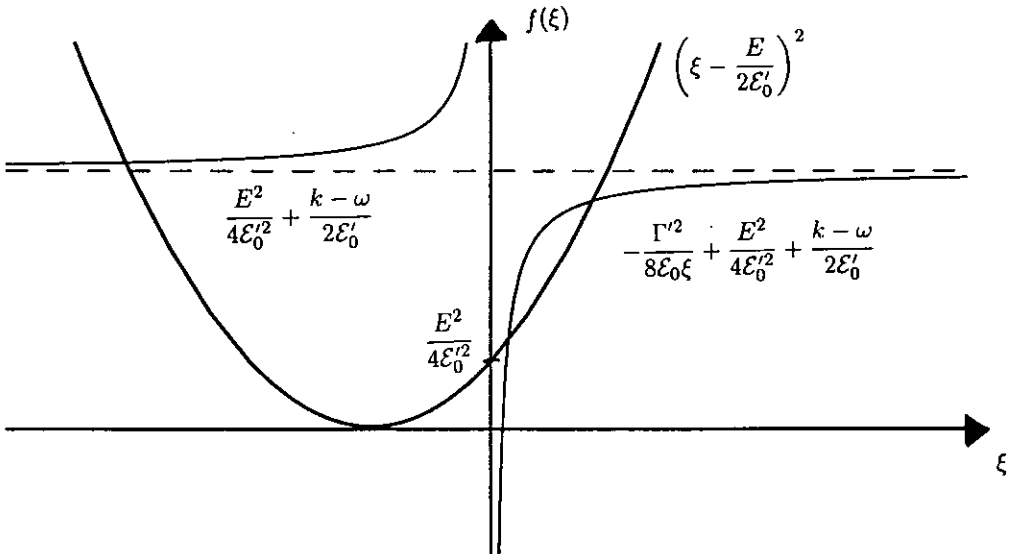


Figura 5a. Dos cónicas que se intersecan para ξ

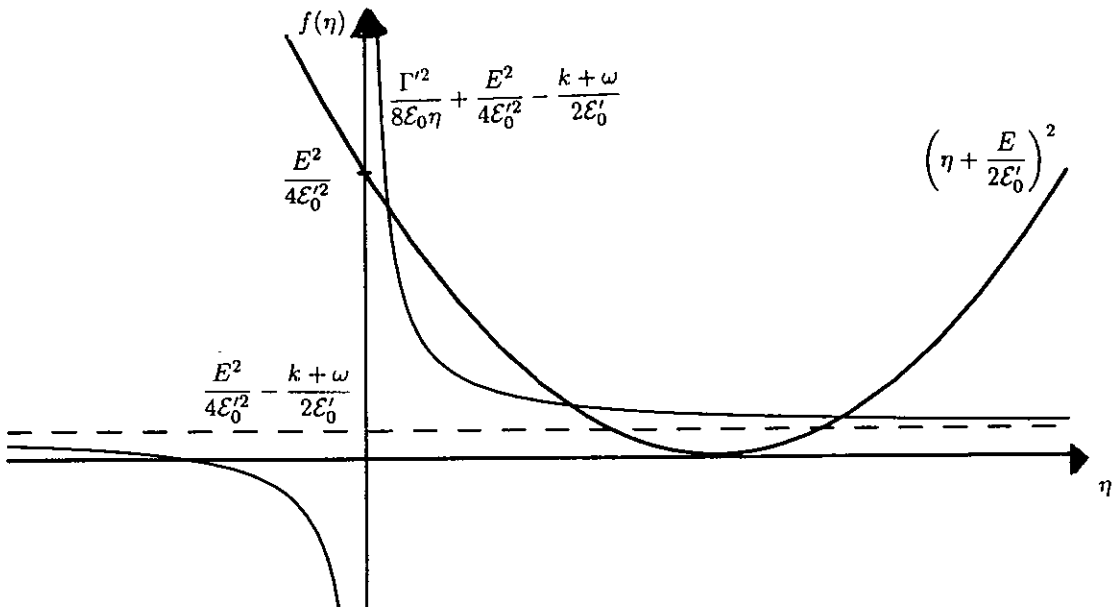
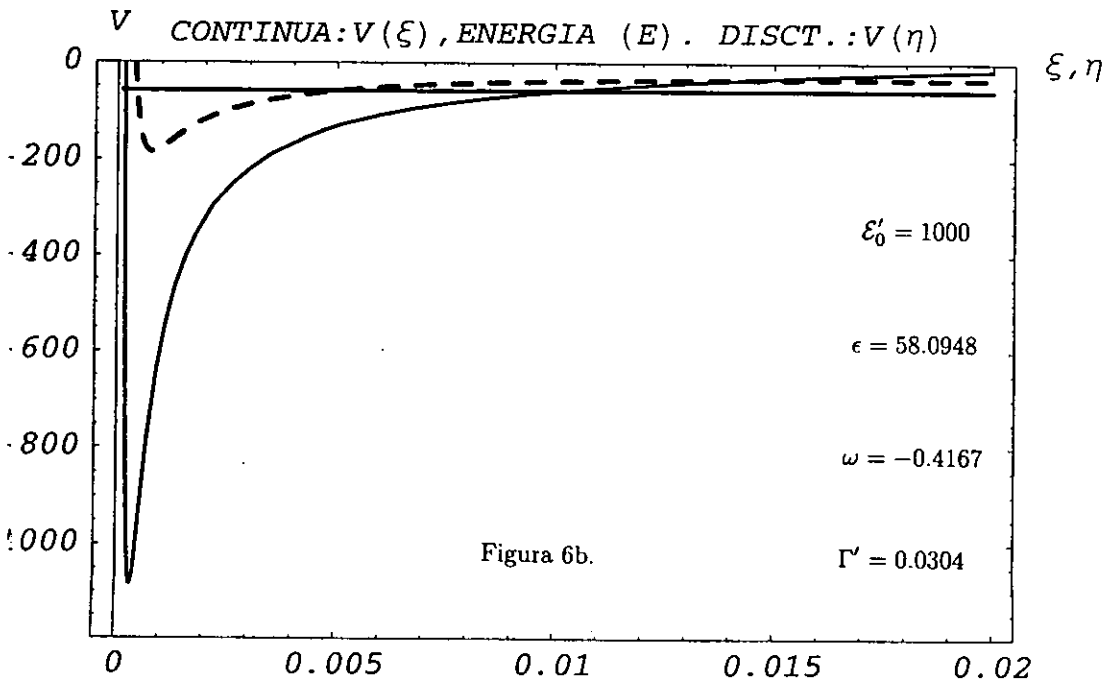
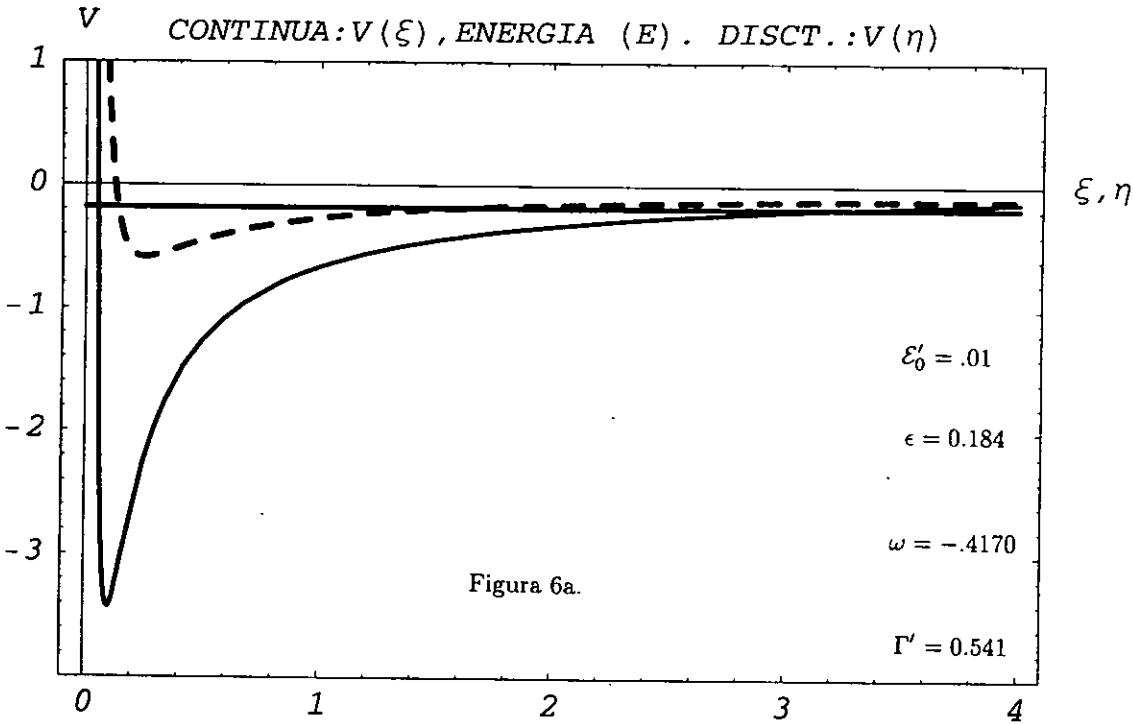


Figura 5b. Dos cónicas que se intersecan para η



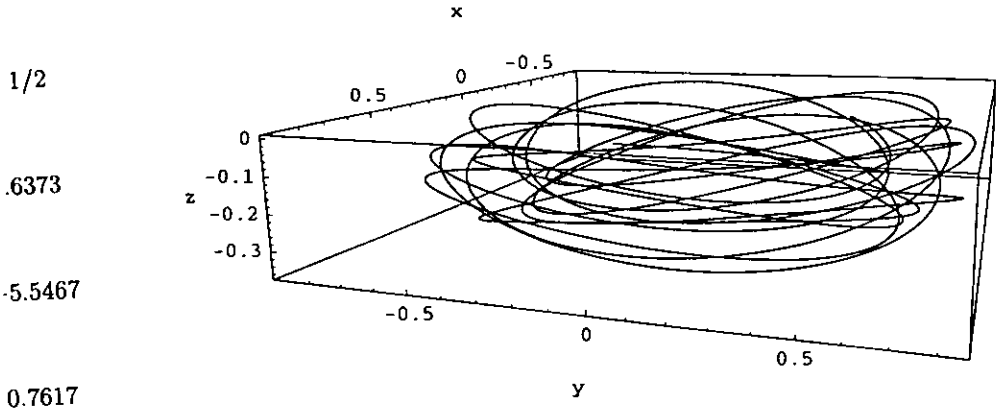
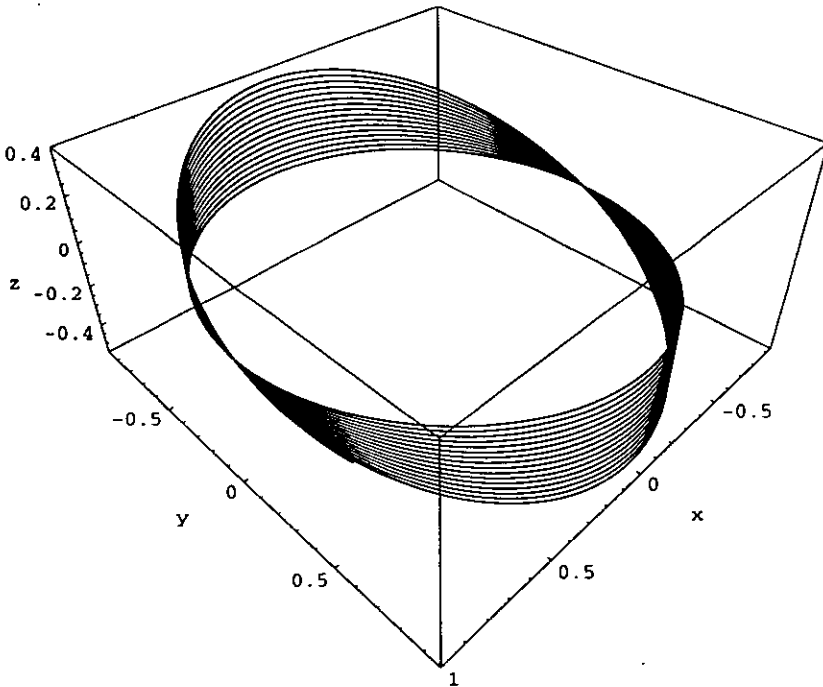


Figura 7a. Trayectoria del electrón



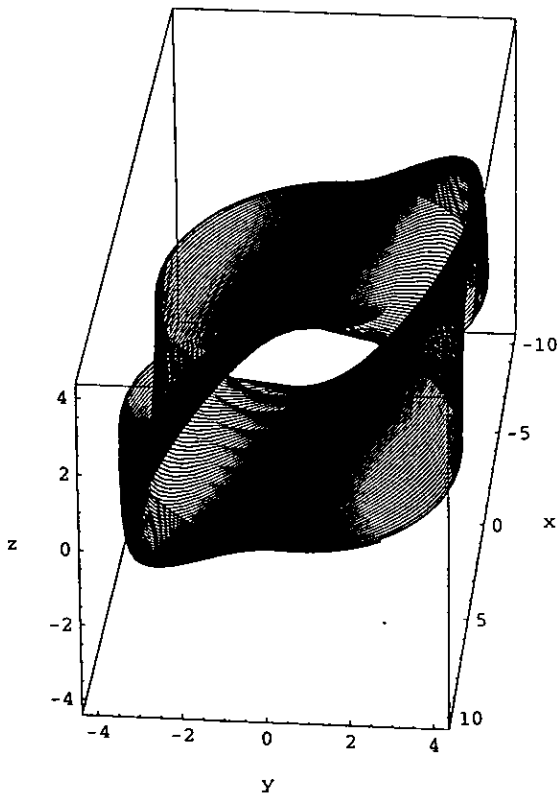
$$\mathcal{E}'_0 = 1/10$$

$$\epsilon = .0581$$

$$\omega = -0.4167$$

$$\Gamma' = 0.9615$$

Figura 7b. Trayectoria del electrón



$$\mathcal{E}'_0 = 1/10000$$

$$\epsilon = 0.0184$$

$$\omega = -0.4167$$

$$\Gamma' = 1.7098$$

Figura 8. Trayectoria del electrón

Conclusiones

La mecánica, como se ha sostenido aquí desde el principio, a través de su poderosa herramienta, permite estudiar una buena cantidad de problemas físicos (incluso microscópicos). Algunos de tales problemas los resuelve por completo dentro de su estructura; a otros –aquellos en los que no es suficiente un estudio clásico– los desnuda lo suficiente como para entender cualitativamente algunos de sus aspectos fundamentales (p. . ej. si existen estados ligados). Un ejemplo representativo de estos últimos problemas es el átomo de hidrógeno perturbado por un campo eléctrico.

Las razones específicas para optar por un tratamiento clásico del fenómeno de Stark son, entre otras, que en el estudio cuántico los cálculos deben ser repetidos para cada estado inicial de interés; hay muchos estados involucrados y, además, los resultados pueden ser extremadamente sensibles al método de aproximación empleado (Banks y Leopold 1978). En cambio en el problema clásico, el suponer un sólo electrón, permite encontrar de manera sencilla un intervalo de energías en el continuo para los cuales el problema tiene estados ligados. Resulta que el intervalo de energías obtenidas clásicamente es muy aproximado a lo que resulta en el experimento (Hezel *et al.* 1992).

Por lo que toca a este trabajo, a partir de las integrales de movimiento del átomo de hidrógeno clásico, y con el formalismo hamiltoniano como marco, se han encontrado tres cantidades conservadas independientes del tiempo, aislantes y en involución para el fenómeno de Stark. Esta condición, como se explicó en el

primer capítulo, es necesaria y suficiente para considerar el problema integrable. Con la idea de separar el hamiltoniano a partir de las constantes del movimiento obtenidas, se han escrito los resultados parciales en coordenadas parabólicas rotacionales —las que también permiten separar la ecuación de Hamilton-Jacobi del sistema (Landau y Lifshitz 1977).

Una vez obtenidas las expresiones de la energía en términos de ξ y η , (ecuaciones 56 y 57) se ha procedido a analizar sus respectivos potenciales V_ξ y V_η con el objetivo de encontrar las condiciones bajo las cuales el sistema tiene trayectorias acotadas o bien, cuánticamente, tiene estados ligados. Tales condiciones se sintetizan en las tres expresiones que deben cumplir el campo eléctrico y las constantes Ω y Γ . Los puntos extremos de los potenciales juegan un papel relevante en esta parte del trabajo. Finalmente, pero no por ello menos importante, se deduce una relación entre las coordenadas ξ y η que se puede expresar en cuadraturas y que, en principio, permite dibujar la trayectoria que sigue el electrón para cualquier valor de la energía.

Es interesante comparar los resultados aquí obtenidos con otros relativos al mismo problema. Hauser (1965) se ocupa del problema con fines didácticos apoyado en el formalismo de Lagrange. Su estudio se limita a encontrar una integral de movimiento —la que corresponde al momento angular— y, por otra parte, a mostrar que la energía del sistema también es una cantidad conservada. Por su parte, Landau y Lifshitz (1977) tratan el problema indirectamente al separar en coordenadas parabólicas una ecuación de Hamilton-Jacobi relativa a un problema más general que el que nos ocupa; se puede decir que se trata también de un ejercicio didáctico para explicar la separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Hezel y colaboradores (1992) aplican un enfoque semiclásico al fenómeno de Stark. En su excelente contribución se “relacionan” parámetros y resultados clásicos con cuánticos. Estudian el problema considerando una pequeña perturbación eléctrica al átomo de hidrógeno. También suponen el movimiento del electrón en la órbita más rápido que el cambio en el tiempo del plano de la órbita. La trayectoria

sigue siendo una elipse, pero esta se deforma y el plano donde vive se mueve. La variación del vector de R-L-L describe la deformación de la órbita y, por su parte, la evolución en el tiempo del momento angular describe el movimiento del plano en el espacio. Su principal resultado es que el vector de momento angular precesa alrededor del campo eléctrico con una frecuencia (llamada de Stark) $\omega_s = (3/2)n\mathcal{E}_0$. También así lo hace el vector de R-L-L, lo que significa que la elipse "pulsas" con la frecuencia Stark. Acaso lo cuestionable de este bello artículo es que hace suposiciones muy rígidas para el campo eléctrico (ellos admiten que debe ser suficientemente pequeño para que sea permisible no considerar términos cuadráticos en el campo) a diferencia de la presente contribución donde sólo se pide un campo típico que cumpla las relaciones descritas y sin restricción alguna sobre su magnitud.

El tratamiento aquí seguido es semejante, pero sólo en su último trayecto, a una pequeña parte del que siguen Banks y Leopold (1978). Ellos también evaden el tratamiento cuántico del problema de Stark; su tratamiento clásico considera los invariantes adiabáticos de las variables de ángulo-acción (Landau y Lifshitz 1977) para poder obtener conclusiones que puedan ser contrastadas con resultados experimentales ángulo-acción (Landau y Lifshitz 1977). En el camino también separan el hamiltoniano en coordenadas parabólicas y analizan los potenciales en cada coordenada. En la contribución que aquí se comenta, restringen su estudio al caso crítico, en el cual $\eta_2 = \eta_3$ (obtenidos en el capítulo 3). De capital importancia resulta el hecho de enfocar sus análisis a buscar resultados que se pueden comprobar experimentalmente: aterrizan el problema teórico. Una parte oscura de su desarrollo es el uso de las constantes de separación: ¿qué significan? ¿de dónde salen? En el presente trabajo se tiene la respuesta: las constantes de separación no son otras que las integrales de movimiento del sistema que aquí se encontraron explícitamente (en realidad este comentario es más aplicable a Ω que a Γ ya que la última es una constante "trivial").

Referencias

Arfken G 1970 *Mathematical Methods for Physicists* (New York: Academic Press).

Arnold V I 1963 *Russ. Math. Survey* **18** 9, 85.

Arnold V I 1978 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer - Verlag).

Banks D and Leopold J G 1978 Ionization of highly-excited atoms by electric fields I. Classical theory of the critical electric field for hydrogenic ions *J. Phys. B: Atom. Molec. Phys.* **11** 37.

Baugh J F, Edmons P T, Burkhart C E and Leventhal J J 1997 Coherent states composed of Stark eigenfunctions of the hydrogen atom *Am. J. Phys.* **65** 1097.

Berry M V 1978 *AIP Conference Proceedings* **46** 16. Reprinted in [MacKay and Meis 1987]

Birkhoff G 1927 *Dynamical Systems*, Colloquium Publications IX, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Birkhoff G 1931 Proof of the ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **17**, 656.

del Río-Correa J L 1997 Comunicación personal.

Evans N W 1990 Superintegrability in Classical Mechanics *Physical Review A* **41** 5666.

- Garavaglia T 1987 The Runge-Lenz vector and Einstein perihelion precession *Am. J. Phys.* **55** 164.
- Goldstein H 1980 *Classical Mechanics* (Washington: Addison Wesley).
- González Villanueva A, Núñez Yépez H N y Salas Brito A L 1996 In velocity space the Kepler orbits are circular *Eur. J. Phys.* **17** 168.
- González Villanueva A, Núñez Yépez H N y Salas Brito A L 1998a The Coulomb problem and the Rutherford scattering using the Hamilton vector *Rev. Mex. Fis.* **44** 183.
- González Villanueva A, Guillaumin España E, Núñez Yépez H N y Salas Brito A L 1998b From the circular paths to elliptic orbits: A geometric approach to Kepler's motion. Por aparecer en *Eur. J. Phys.*.
- González Villanueva A, Guillaumin España E, Núñez Yépez H N y Salas Brito A L 1998c Scattering in a Coulomb potential: a velocity space point of view. Por aparecer en *Rev. Mex. Fis.*.
- Gradshteyn I S y Ryzhik I M 1978 *Tables of Integrals, Series, and Products* (New York: Academic Press)
- Greenberg D F 1967 Symmetry Origin of Dynamics *Am. J. Phys.* **35** 1073.
- Gutzwiller M C 1990 *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (New York: Springer-Verlag)
- Hauser W 1965 *Introduction to the Principles of Mechanics* (Massachusetts: Addison Wesley)
- Heintz W H 1974 Determination of the Runge-Lenz Vector *Am. J. Phys.* **42** 1078.
- Hénon M Heiles C 1964 *Astron. J.* **69** 73.
- Hezel T P, Burkhardt C E, Ciocca M and Leventhal J J 1992 Classical view of the Stark effect in hydrogen atoms *Am. J. Phys.* **60** 324.
- Octavio J. Campuzano Cardona

- Kaplan H 1986 The Runge-Lenz vector as an "extra" constant of the motion *Am. J. Phys.* 54 157.
- Kolmogorov A N 1954 *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 98 527 (An english version appears in R. Abraham, *Foundations of Mechanics* (W.A. Benjamin, New York, 1967).
- Kozlov V V 1996 *Symmetries, Topology, and Resonances in Hamiltonian Mechanics* (Berlin: Spriger-Verlag).
- Landau L y Lifshitz E M 1977 *Mecánica (Curso de Física Teórica 1)* (Barcelona, España: Reverté).
- Leach P G L Gorrige V M 1988 A conserved Laplace-Runge-Lenz-like vector for a class of three-dimensional motions *Physics Letters A* 133 289.
- Martínez-y-Romero R P, Nuñez Yépez H N y Salas Brito A L 1992 Closed orbits and constants of motions in classical mechanics *Eur. J. Phys.* 13 26.
- Martínez-y-Romero R P, Nuñez Yépez H N y Salas Brito A L 1993 The Hamilton vector as an extra constant of motion in the Kepler problem *Eur. J. Phys.* 14 71.
- Moreno D 1990 *Gravitación Newtoniana* (D.F., México: Facultad de Ciencias, UNAM).
- Moser J 1962 *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen II, Math. Phys. Kd* 1 75.
- Oliver D 1994 *The Shaggy Steed of Physics* (New York, EUA: Springer-Verlag).
- Ornstein 1974 *Ergodic Theory, Randomness, and Dynamical Systems*, Yale Mathematical Monographs 5, Yale University Press, New Haven, Connecticut.
- Pérez Pascual R 1998 Comunicación personal
- Piesin Ya G 1976 *Math. Dokl.* 17 197
- Poncairé H *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (Vol. 1, 1892; Vol. 2, 1893; Vol. 3, 1899, Gauthier-Villars, Paris).

- Prince G E and Eliezer C J 1981 On the Lie symmetries of the classical Kepler problem *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** 587.
- Redmond P J 1964 Generalization of the Runge-Lenz vector in the presence of an electric field *Phys. Rev.* **133** B1352.
- Reichl L 1992 *The Transition to Chaos* (New York, EUA: Springer-Verlag).
- Salas Brito A et al 1997 *Int. J. Mod. Phys. A* **12** 271.
- Sivardiére J 1984 Precession of elliptic orbits *Am. J. Phys.* **52** 909.
- Sivardiére J 1986 Perturbed elliptic motion *Eur. J. Phys.* **7** 283.
- Sivardiére J 1992 Comments on the dynamical invariants of the Kepler and harmonic motions *Eur. J. Phys.* **13** 64.
- Sivardiére J 1994 Symmetry and the derivation of invariant vectors for planar motion *Am. J. Phys.* **62** 328.
- Stark J 1916 *Ann. d. Phys.* **49** 731.
- Symon K 1968 *Mecánica* (Madrid, España: Aguilar).
- Szebehely V 1974 *The General and Restricted Problems of Three Bodies (International Centre for Mechanical Sciences)* (New York, EUA: Springer-Verlag)
- Toda M 1969 *Phys. Lett. A* **48** 335.
- Uspensky 1988 *Teoría de ecuaciones* (México, D.F.: Limusa).
- Walker G H Ford J 1969 *Phys. Rev.* **188** 416.

```

In[1]:=
(* programa para calcular las orbitas del efecto stark *)
el = 1/10000; (* campo electrico *)
m = 1; (* masa *)
q = 1; (* carga electrica *)
Z = 1; (* numero atómico *)
k = 1; (* interaccion coulombiana *)

In[2]:=
en3 = Sqrt[3*el*k/2];
en = 1.5*en3 (* energia *)
om1 = k - (2*en^2)/(3*el);
om2 = -k + (2*en^2)/(3*el);
om = om1 + (om2 - om1)/3 (* omega *)

In[7]:=
delmas = k + om;
delmenos = k - om;
ximas = (en/(3*el))*(-1 + Sqrt[1 + (3*el*delmenos/(2*en^2))]);
etamas = (en/(3*el))*(1 + Sqrt[1 - (3*el*delmas/(2*en^2))]);
etamenos = (en/(3*el))*(1 - Sqrt[1 - (3*el*delmas/(2*en^2))]);
gamxia = 4 + Sqrt[el*ximas^3 + en*ximas^2/2];
gamxi = gamxia/2;
gameta = 4 + Sqrt[el*etamas^3 + en*etamas^2/2];
gameto = 4 + Sqrt[el*etamenos^3 + en*etamenos^2/2];
gametmas = gameta/2;
gametmenos = gameto/2;
N[ximas, 5];
N[etamas, 5];
N[gamxi, 5];
N[gametmas, 5];
N[gametmenos, 5];

In[10]:=
gama = Min[gamxi, gametmas, gametmenos]

In[11]:=
r[t_] = Sqrt[x[t]^2 + y[t]^2 + z[t]^2];

In[12]:=
sol = NDSolve[
  {x'[t] - px[t] == 0,
   y'[t] - py[t] == 0,
   z'[t] - pz[t] == 0,
   px'[t] + k*x[t]/r[t]^3 == 0,
   py'[t] + k*y[t]/r[t]^3 == 0,
   pz'[t] + k*z[t]/r[t]^3 + el == 0,
   px[0] == 0, py[0] == 1, pz[0] == 0,
   y[0] == 0, x[0] == (gama + y[0]*px[0])/py[0], z[0] == 0},
  {x, y, z, px, py, pz},
  {t, 0, 9000},
  MaxSteps -> 10000]

In[31]:=
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. sol], {t, 0, 9000},
  PlotPoints -> 4500, ViewPoint -> {0, -5, -5}, Axes -> True,
  AxesLabel -> {"x", "y", "z"}]

```

```
Plot[{gamxia, gameta, gameto}, {el, .1, 10},
PlotStyle -> {
  {Thickness[.0043], RGBColor[1, 0, 0]},
  {Thickness[.0065], Dashing[.02, .02], RGBColor[0, 0, 1]},
  Thickness[.0054]},
Axes -> True,
PlotRange -> {-1200, 0},
AxesLabel -> {"E", "gama critico"},
Frame -> True,
FrameLabel -> {"E=1000, Ec=58.0948, Q=-0.4167, Lc= 0.0304",
  " ", "CONTINUA:V(ξ), ENERGIA (E). DISCR.:V(η)", " "},
TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 16},
Background -> RGBColor[1, 1, 0.72]]
```