/11

2e

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

BASES DE CALCULO ACTUARIAL CON SERIES DE CRECIMIENTO GEOMETRICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

MARCO ANTONIO VELAZQUEZ VAZQUEZ

DIRECTOR: ACT. PEDRO AGUILAR BELTRAN

1998

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNᵒMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

realizado por Marco Antonio Velázquez Vázquez

con número de cuenta 9052084-6 , pasante de la carrera de Actuario

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. Pedro Aguilar Beltrán
Propietario	Act. Maximino Gómez Mendoza
Propietario	M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes
Suplente	Act. Miguel Angel Beltrán Prado
Suplente	Act. Oscar Aranda Martínez

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en A. P. María del Pilar Alonso Reyes

Índice

BASES DE CÁLCULO ACTUARIAL CON SERIES DE CRECIMIENTO GEOMÉTRICO

Marco Antonio Velázquez Vázquez

UNAM

INTERES: 0.080
RADIX 1,000,000

TABLA DE MORTALIDAD

EDAD	(1) qx	(2) px	(3) lx	(4) dx	(5) Dx	(6) Nx	(7) Sx	(8) Cx	(9) Mx	(10) Rx	X
12	0.001120	0.99888	1,000,000	1,120	397,113.76	5,219,052.48	66,248,711.43	411.82	11,257.76	313,580.66	12
13	0.001141	0.99886	998,880	1,139	367,286.10	4,821,938.72	61,029,658.96	387.90	10,845.94	302,322.90	13
14	0.001162	0.99884	998,861	1,161	340,073.14	4,454,652.62	56,207,720.24	365.81	10,458.04	291,476.96	14
15	0.001185	0.99881	998,839	1,184	314,875.79	4,114,579.48	51,753,067.62	345.62	10,092.13	281,018.92	15
16	0.001211	0.99879	997,658	1,208	291,208.04	3,799,703.69	47,638,488.14	326.51	9,746.51	270,926.79	16
17	0.001239	0.99876	996,447	1,234	269,308.71	3,508,497.64	43,838,784.45	308.90	9,420.00	261,180.28	17
18	0.001269	0.99873	995,213	1,263	249,051.02	3,239,188.93	40,330,286.81	292.67	9,111.09	251,760.28	18
19	0.001302	0.99870	993,950	1,294	230,310.12	2,990,137.92	37,091,097.88	277.71	8,818.43	242,649.19	19
20	0.001338	0.99866	992,655	1,329	212,972.41	2,759,827.79	34,100,959.96	263.93	8,540.72	233,830.76	20
21	0.001378	0.99862	991,327	1,366	196,932.75	2,546,855.39	31,341,132.16	251.24	8,276.79	225,290.04	21
22	0.001421	0.99858	989,961	1,407	182,093.90	2,349,922.64	28,794,276.78	239.56	8,025.65	217,013.25	22
23	0.001468	0.99853	988,554	1,451	168,365.90	2,167,828.74	26,444,354.14	228.81	7,786.00	208,987.69	23
24	0.001519	0.99848	987,103	1,499	155,665.54	1,999,462.84	24,276,525.40	218.93	7,557.18	201,201.70	24
25	0.001575	0.99843	985,604	1,552	143,815.83	1,843,797.30	22,277,062.56	209.84	7,338.25	193,644.52	25
26	0.001636	0.99836	984,052	1,610	133,045.55	1,699,881.47	20,433,265.26	201.50	7,128.41	186,306.26	26
27	0.001702	0.99830	982,442	1,672	122,988.83	1,566,835.91	18,733,383.79	193.84	6,926.91	179,177.85	27
28	0.001775	0.99823	980,770	1,740	113,684.71	1,443,847.08	17,166,547.88	186.80	6,733.08	172,250.94	28
29	0.001854	0.99815	979,030	1,815	105,076.82	1,330,162.37	15,722,700.80	180.35	6,546.27	165,517.87	29
30	0.001940	0.99806	977,215	1,896	97,113.00	1,225,085.55	14,392,538.43	174.44	6,365.92	158,971.60	30
31	0.002034	0.99797	975,319	1,984	89,745.00	1,127,972.55	13,167,452.87	169.03	6,191.48	152,605.67	31
32	0.002137	0.99786	973,335	2,080	82,928.20	1,038,227.55	12,039,480.32	164.07	6,022.45	146,414.19	32
33	0.002249	0.99775	971,255	2,184	76,621.30	955,299.35	11,001,252.77	159.54	5,858.38	140,391.74	33
34	0.002371	0.99763	969,071	2,298	70,786.11	878,678.05	10,045,953.41	155.39	5,698.85	134,533.36	34
35	0.002504	0.99750	966,774	2,421	65,387.30	807,891.94	9,167,275.36	151.61	5,543.45	128,834.51	35
36	0.002650	0.99735	964,353	2,555	60,392.19	742,504.64	8,359,383.42	148.16	5,391.84	123,291.06	36
37	0.002808	0.99719	961,798	2,701	55,770.53	682,112.46	7,616,878.78	145.01	5,243.68	117,899.21	37
38	0.002981	0.99702	959,097	2,859	51,494.37	626,341.92	6,934,766.32	142.14	5,098.67	112,655.53	38
39	0.003170	0.99683	956,238	3,031	47,537.84	574,847.55	6,308,424.40	139.52	4,956.54	107,556.86	39
40	0.003376	0.99662	953,207	3,218	43,877.00	527,309.71	5,733,576.84	137.14	4,817.02	102,600.32	40
41	0.003600	0.99640	949,989	3,420	40,489.71	483,432.72	5,206,267.13	134.97	4,679.88	97,783.30	41
42	0.003845	0.99616	946,569	3,639	37,355.51	442,943.01	4,722,834.41	132.99	4,544.91	93,103.42	42
43	0.004112	0.99589	942,930	3,877	34,455.44	405,587.50	4,279,891.40	131.18	4,411.93	88,558.51	43
44	0.004403	0.99560	939,053	4,135	31,772.01	371,132.06	3,874,303.90	129.53	4,280.74	84,146.58	44
45	0.004721	0.99528	934,918	4,414	29,288.99	339,360.05	3,503,171.84	128.03	4,151.21	79,865.84	45
46	0.005067	0.99493	930,504	4,715	26,991.41	310,071.06	3,163,811.79	126.64	4,023.18	75,714.63	46
47	0.005445	0.99455	925,789	5,041	24,865.40	283,079.65	2,853,740.73	125.37	3,896.54	71,691.45	47
48	0.005857	0.99414	920,748	5,393	22,898.15	258,214.25	2,570,661.08	124.18	3,771.17	67,794.91	48
49	0.006307	0.99369	915,355	5,773	21,077.81	235,316.10	2,312,446.83	123.08	3,646.99	64,023.74	49
50	0.006797	0.99320	909,582	6,182	19,393.41	214,238.29	2,077,130.73	122.04	3,523.91	60,376.75	50
51	0.007331	0.99267	903,400	6,623	17,834.82	194,844.88	1,862,892.44	121.06	3,401.86	56,852.84	51
52	0.007913	0.99209	896,777	7,097	16,392.66	177,010.06	1,668,047.57	120.11	3,280.80	53,450.98	52
53	0.008549	0.99145	889,681	7,606	15,058.27	160,617.40	1,491,037.51	119.19	3,160.69	50,170.18	53
54	0.009241	0.99076	882,075	8,151	13,823.65	145,559.13	1,330,420.11	118.28	3,041.50	47,009.49	54
55	0.009996	0.99000	873,924	8,736	12,681.40	131,735.47	1,184,860.98	117.38	2,923.21	43,967.99	55
56	0.010819	0.98918	865,188	9,361	11,624.66	119,054.08	1,053,125.51	116.45	2,805.84	41,044.78	56
57	0.011716	0.98828	855,827	10,027	10,647.12	107,429.42	934,071.43	115.51	2,689.38	38,238.94	57
58	0.012694	0.98731	845,800	10,737	9,742.94	96,782.30	826,642.02	114.52	2,573.88	35,549.56	58
59	0.013760	0.98624	835,063	11,490	8,906.72	87,039.36	729,859.71	113.48	2,459.36	32,975.68	59
60	0.014921	0.98508	823,573	12,289	8,133.49	78,132.64	642,820.35	112.37	2,345.88	30,516.32	60
61	0.016187	0.98381	811,284	13,132	7,418.63	69,999.16	564,687.70	111.19	2,233.51	28,170.44	61
62	0.017566	0.98243	798,152	14,020	6,757.92	62,580.53	494,688.54	109.91	2,122.32	25,936.93	62
63	0.019068	0.98093	784,132	14,951	6,147.42	55,822.61	432,108.02	108.53	2,012.41	23,814.61	63
64	0.020704	0.97930	769,181	15,925	5,583.52	49,675.20	376,285.40	107.04	1,903.87	21,802.20	64
65	0.022485	0.97751	753,256	16,937	5,062.89	44,091.68	326,610.21	105.41	1,796.84	19,898.33	65
66	0.024425	0.97557	736,319	17,985	4,582.45	39,028.79	282,518.53	103.64	1,691.43	18,101.49	66
67	0.026538	0.97346	718,334	19,063	4,139.37	34,446.34	243,489.74	101.71	1,587.79	16,410.06	67
68	0.028837	0.97116	699,271	20,165	3,731.04	30,306.96	209,043.40	99.62	1,486.08	14,822.27	68
69	0.031339	0.96866	679,106	21,283	3,355.04	26,575.92	178,736.44	97.36	1,386.46	13,336.19	69
70	0.034062	0.96594	657,823	22,407	3,009.17	23,220.88	152,160.52	94.91	1,289.10	11,949.73	70
71	0.037024	0.96298	635,416	23,525	2,691.36	20,211.71	128,939.64	92.26	1,194.19	10,660.83	71
72	0.040244	0.95976	611,891	24,625	2,399.74	17,520.35	108,727.92	89.42	1,101.93	9,466.43	72
73	0.043746	0.95625	587,266	25,690	2,132.56	15,120.62	91,207.57	86.38	1,012.51	8,364.50	73
74	0.047551	0.95245	561,575	26,704	1,888.21	12,988.06	76,086.95	83.14	926.13	7,351.99	74
75	0.051686	0.94831	534,872	27,645	1,665.21	11,099.85	63,098.89	79.69	842.99	6,425.86	75
76	0.056176	0.94382	507,226	28,494	1,462.17	9,434.65	51,999.03	76.05	763.30	5,582.87	76
77	0.061050	0.93895	478,733	29,227	1,277.80	7,972.48	42,564.39	72.23	687.25	4,819.57	77
78	0.066339	0.93366	449,506	29,820	1,110.92	6,694.68	34,591.90	68.24	615.02	4,132.32	78
79	0.072076	0.92792	419,686	30,249	960.39	5,583.76	27,897.22	64.09	546.78	3,517.30	79
80	0.078294	0.92171	389,437	30,491	825.16	4,623.37	22,313.46	59.82	482.68	2,970.52	80
81	0.085031	0.91497	358,946	30,521	704.21	3,798.22	17,690.09	55.44	422.86	2,487.84	81
82	0.092324	0.90768	328,425	30,321	596.61	3,094.00	13,891.87	51.00	367.42	2,064.97	82
83	0.100214	0.89979	298,103	29,874	501.41	2,497.40	10,797.87	46.53	316.42	1,697.55	83
84	0.108745	0.89126	268,229	29,168	417.74	1,995.98	8,300.48	42.06	269.89	1,381.13	84
85	0.117959	0.88204	239,060	28,199	344.74	1,578.24	6,304.49	37.65	227.83	1,111.24	85
86	0.127902	0.87210	210,861	26,970	281.55	1,233.50	4,726.25	33.34	190.18	883.41	86
87	0.138623	0.86138	183,892	25,492	227.35	951.95	3,492.75	29.18	156.84	693.23	87
88	0.150169	0.84983	158,400	23,787	181.33	724.60	2,540.60	25.21	127.65	536.40	88
89	0.162589	0.83741	134,613	21,887	142.68	543.28	1,816.20	21.48	102.44	408.74	89
90	0.175932	0.82407	112,727	19,832	110.63	400.59	1,272.92	18.02	80.96	306.30	90
91	0.190247	0.80975	92,894	17,673	84.42	289.96	872.33	14.87	62.94	225.34	91
92	0.205580	0.79442	75,221	15,464	63.29	205.54	582.37	12.05	48.07	162.40	92
93	0.221978	0.77802	59,757	13,265	46.56	142.25	376.83	9.57	36.02	114.34	93
94	0.239482	0.76052	46,493	11,134	33.54	95.69	234.58	7.44	26.45	78.32	94
95	0.258129	0.74187	35,358	9,127	23.62	62.15	138.89	5.64	19.01	51.86	95
96	0.277952	0.72205	26,231	7,291	16.22	38.53	76.74	4.18	13.37	32.85	96
97	0.298975	0.70102	18,940	5,663	10.85	22.31	38.20	3.00	9.19	19.48	97
98	0.321214	0.67879	13,278	4,265	7.04	11.47	15.89	2.09	6.19	10.29	98
99	1.000000	0.00000	9,013	9,013	4.42	4.42	4.42	4.10	4.10	4.10	99

Tabla-2

INTERES: 0.028571429 = 1.08/1.05-1
RADIX 1,000,000

TABLA DE MORTALIDAD

EDAD	(1) qx	(2) px	(3) lx	(4) dx	(5) D´x	(6) N´x	(7) S´x	(8) C´x	(9) M´x	(10) R´x	X
12	0.001120	0.99888	1,000,000	1,120	713,159.26	20,584,414.07	473,881,419.19	776.55	142,871.64	7,424,791.34	12
13	0.001141	0.99886	998,880	1,139	692,572.73	19,871,254.81	453,297,005.12	768.02	142,095.09	7,281,919.69	13
14	0.001162	0.99884	998,861	1,161	673,321.55	19,178,682.09	433,425,750.31	760.70	141,327.07	7,139,824.60	14
15	0.001185	0.99881	998,839	1,184	654,604.16	18,505,360.54	414,247,068.22	754.44	140,566.37	6,998,497.53	15
16	0.001211	0.99879	997,655	1,208	635,666.27	17,850,756.38	395,741,707.69	748.38	139,811.93	6,857,931.16	16
17	0.001239	0.99876	996,447	1,234	617,260.50	17,215,090.10	377,890,951.31	743.41	139,063.55	6,718,119.23	17
18	0.001269	0.99873	995,213	1,263	599,370.96	16,597,829.61	360,675,861.20	739.56	138,320.14	6,579,055.68	18
19	0.001302	0.99870	993,950	1,294	581,982.21	15,998,458.64	344,078,031.60	736.84	137,580.59	6,440,735.54	19
20	0.001338	0.99866	992,656	1,329	565,079.20	15,416,476.43	328,079,572.95	735.29	136,843.74	6,303,154.96	20
21	0.001378	0.99862	991,327	1,366	548,647.26	14,851,397.23	312,663,096.52	734.94	136,108.45	6,166,311.21	21
22	0.001421	0.99858	989,961	1,407	532,672.13	14,302,749.96	297,811,699.29	735.81	135,373.52	6,030,202.76	22
23	0.001468	0.99853	988,554	1,451	517,139.87	13,770,077.84	283,508,949.33	737.94	134,637.71	5,894,829.25	23
24	0.001519	0.99848	987,103	1,499	502,036.93	13,252,937.97	269,738,871.49	741.37	133,899.76	5,760,191.54	24
25	0.001575	0.99843	985,604	1,552	487,350.09	12,750,901.04	256,485,933.52	746.14	133,158.39	5,626,291.78	25
26	0.001636	0.99836	984,052	1,610	473,066.44	12,263,550.96	243,735,032.47	752.29	132,412.25	5,493,133.39	26
27	0.001702	0.99830	982,442	1,672	459,173.42	11,790,484.51	231,471,481.52	759.86	131,659.96	5,360,721.14	27
28	0.001775	0.99823	980,770	1,740	445,658.75	11,331,311.09	219,680,997.01	768.90	130,900.11	5,229,061.17	28
29	0.001854	0.99815	979,030	1,815	432,510.43	10,885,652.34	208,349,685.92	779.47	130,131.20	5,098,161.07	29
30	0.001940	0.99806	977,215	1,896	419,716.78	10,453,141.91	197,464,033.58	791.62	129,351.73	4,968,029.86	30
31	0.002034	0.99797	975,319	1,984	407,266.37	10,033,425.12	187,010,891.67	805.40	128,560.11	4,838,678.13	31
32	0.002137	0.99786	973,335	2,080	395,148.02	9,626,158.75	176,977,466.55	820.87	127,754.72	4,710,118.02	32
33	0.002249	0.99775	971,255	2,184	383,350.81	9,231,010.74	167,351,307.79	838.11	126,933.84	4,582,363.30	33
34	0.002371	0.99763	969,071	2,298	371,864.07	8,847,659.93	158,120,297.05	857.16	126,095.74	4,455,429.46	34
35	0.002504	0.99750	966,774	2,421	360,677.35	8,475,795.86	149,272,637.12	878.10	125,238.58	4,329,333.72	35
36	0.002650	0.99735	964,353	2,555	349,780.43	8,115,118.51	140,796,841.26	901.01	124,360.47	4,204,095.14	36
37	0.002808	0.99719	961,798	2,701	339,163.30	7,765,338.08	132,681,722.75	925.85	123,459.47	4,079,734.67	37
38	0.002981	0.99702	959,097	2,859	328,816.15	7,426,174.78	124,916,384.67	952.99	122,533.52	3,956,275.20	38
39	0.003170	0.99683	956,238	3,031	318,729.37	7,097,358.63	117,490,209.90	982.23	121,580.52	3,833,741.68	39
40	0.003376	0.99662	953,207	3,218	308,893.65	6,778,629.25	110,392,851.27	1,013.72	120,598.30	3,712,161.16	40
41	0.003600	0.99640	949,989	3,420	299,299.46	6,469,735.70	103,614,222.02	1,047.55	119,584.58	3,591,562.86	41
42	0.003845	0.99616	946,569	3,639	289,938.03	6,170,436.24	97,144,486.32	1,083.80	118,537.03	3,471,978.29	42
43	0.004112	0.99589	942,930	3,877	260,800.39	5,880,498.21	90,974,050.08	1,122.55	117,453.22	3,353,441.26	43
44	0.004403	0.99560	939,053	4,135	271,877.83	5,599,697.81	85,093,551.88	1,163.87	116,330.67	3,235,988.04	44
45	0.004721	0.99528	934,918	4,414	263,161.80	5,327,819.98	79,493,854.06	1,207.84	115,166.80	3,119,657.37	45
46	0.005067	0.99493	930,504	4,715	254,643.91	5,064,658.18	74,166,034.08	1,254.51	113,958.96	3,004,490.57	46
47	0.005445	0.99455	925,789	5,041	246,315.96	4,810,014.27	69,101,375.90	1,303.97	112,704.45	2,890,531.61	47
48	0.005857	0.99414	920,748	5,393	238,169.88	4,563,698.31	64,291,361.62	1,356.26	111,400.48	2,777,827.16	48
49	0.006307	0.99369	915,355	5,773	230,197.79	4,325,528.43	59,727,663.31	1,411.43	110,044.23	2,666,426.68	49
50	0.006797	0.99320	909,582	6,182	222,391.99	4,095,330.64	55,402,134.88	1,469.51	108,632.80	2,556,382.45	50
51	0.007331	0.99267	903,400	6,623	214,744.92	3,872,938.65	51,306,804.24	1,530.53	107,163.29	2,447,749.65	51
52	0.007913	0.99209	896,777	7,097	207,249.25	3,658,193.73	47,433,865.58	1,594.50	105,632.76	2,340,686.36	52
53	0.008549	0.99145	889,681	7,606	199,897.83	3,450,944.49	43,775,671.85	1,661.39	104,038.26	2,234,953.60	53
54	0.009241	0.99076	882,075	8,151	192,683.72	3,251,046.66	40,324,727.36	1,731.17	102,376.87	2,130,915.35	54
55	0.009996	0.99000	873,924	8,736	185,600.22	3,058,362.94	37,073,680.70	1,803.76	100,645.70	2,028,538.48	55
56	0.010819	0.98918	865,188	9,361	178,640.90	2,872,762.72	34,015,317.75	1,879.07	98,841.93	1,927,892.78	56
57	0.011716	0.98828	855,827	10,027	171,799.58	2,694,121.82	31,142,555.03	1,956.96	96,962.86	1,829,050.85	57
58	0.012694	0.98731	845,800	10,737	165,070.41	2,522,322.25	28,448,433.21	2,037.24	95,005.90	1,732,087.99	58
59	0.013760	0.98624	835,063	11,490	158,447.88	2,357,251.84	25,926,110.96	2,119.67	92,968.66	1,637,082.09	59
60	0.014921	0.98508	823,573	12,289	151,926.88	2,198,803.96	23,568,859.12	2,203.98	90,848.39	1,544,113.42	60
61	0.016187	0.98381	811,284	13,132	145,502.71	2,046,877.08	21,370,055.17	2,289.80	88,645.02	1,453,264.43	61
62	0.017566	0.98243	798,152	14,020	139,171.17	1,901,374.36	19,323,178.09	2,376.71	86,355.22	1,364,619.42	62
63	0.019068	0.98093	784,132	14,951	132,928.60	1,762,203.19	17,421,803.73	2,464.21	83,978.51	1,278,264.20	63
64	0.020704	0.97930	769,181	15,925	126,771.93	1,629,274.59	15,659,600.54	2,551.72	81,514.30	1,194,285.69	64
65	0.022485	0.97751	753,256	16,937	120,698.76	1,502,502.67	14,030,325.94	2,638.56	78,962.58	1,112,771.39	65
66	0.024425	0.97557	736,319	17,985	114,707.46	1,381,803.90	12,527,823.28	2,723.96	76,324.02	1,033,808.81	66
67	0.026538	0.97346	718,334	19,063	108,797.18	1,267,096.44	11,146,019.37	2,807.04	73,600.06	957,484.80	67
68	0.028837	0.97116	699,271	20,165	102,968.00	1,158,299.26	9,878,922.93	2,886.82	70,793.02	883,884.74	68
69	0.031339	0.96866	679,106	21,283	97,220.96	1,055,331.27	8,720,623.67	2,962.21	67,906.20	813,091.72	69
70	0.034062	0.96594	657,823	22,407	91,558.16	958,110.31	7,665,292.40	3,032.03	64,943.99	745,185.52	70
71	0.037024	0.96298	635,416	23,525	85,982.85	866,552.15	6,707,182.09	3,094.97	61,911.96	680,241.53	71
72	0.040244	0.95976	611,891	24,625	80,499.47	780,569.29	5,840,629.95	3,149.66	58,816.99	618,329.57	72
73	0.043746	0.95625	587,266	25,690	75,113.72	700,069.82	5,060,060.66	3,194.63	55,667.33	559,512.58	73
74	0.047551	0.95245	561,576	26,704	69,832.59	624,956.10	4,359,990.84	3,228.39	52,472.70	503,845.25	74
75	0.051686	0.94831	534,872	27,645	64,664.41	555,123.51	3,735,034.73	3,249.39	49,244.31	451,372.55	75
76	0.056176	0.94382	507,228	28,494	59,618.79	490,459.11	3,179,911.22	3,256.10	45,994.92	402,128.24	76
77	0.061050	0.93895	478,733	29,227	54,706.61	430,840.32	2,689,452.11	3,247.08	42,738.82	356,133.32	77
78	0.066339	0.93366	449,506	29,820	49,939.90	376,133.71	2,258,611.79	3,220.96	39,491.74	313,394.50	78
79	0.072076	0.92792	419,686	30,249	45,331.72	326,193.81	1,882,478.08	3,176.57	36,270.78	273,902.76	79
80	0.078294	0.92171	389,437	30,491	40,895.94	280,862.09	1,556,284.26	3,112.97	33,094.21	237,631.98	80
81	0.085031	0.91497	358,946	30,521	36,646.97	239,966.16	1,275,422.17	3,029.56	29,981.24	204,537.76	81
82	0.092324	0.90768	328,425	30,321	32,599.44	203,319.19	1,035,456.01	2,926.10	26,951.68	174,556.52	82
83	0.100214	0.89979	298,103	29,874	28,767.80	170,719.75	832,136.82	2,802.86	24,025.58	147,604.84	83
84	0.108745	0.89126	268,229	29,168	25,165.83	141,951.95	661,417.07	2,660.63	21,222.72	123,579.26	84
85	0.117959	0.88204	239,060	28,199	21,806.15	116,786.13	519,465.11	2,500.77	18,562.09	102,356.54	85
86	0.127902	0.87210	210,861	26,970	18,699.65	94,979.88	402,678.99	2,325.29	16,061.32	83,794.45	86
87	0.138623	0.86138	183,892	25,492	15,854.92	76,280.33	307,699.01	2,136.81	13,736.02	67,733.14	87
88	0.150169	0.84983	158,400	23,787	13,277.70	60,425.41	231,418.68	1,938.51	11,599.21	53,997.11	88
89	0.162589	0.83741	134,613	21,887	10,970.36	47,147.71	170,993.27	1,734.11	9,660.70	42,397.90	89
90	0.175932	0.82407	112,727	19,832	8,931.51	36,177.35	123,845.56	1,527.69	7,926.59	32,737.20	90
91	0.190247	0.80975	92,894	17,673	7,155.72	27,245.84	87,668.20	1,323.54	6,398.90	24,810.61	91
92	0.205580	0.79442	75,221	15,464	5,633.42	20,090.12	60,422.36	1,125.95	5,075.36	18,411.72	92
93	0.221978	0.77802	59,757	13,265	4,350.98	14,456.70	40,332.24	938.99	3,949.41	13,336.36	93
94	0.239482	0.76052	46,493	11,134	3,291.13	10,105.72	25,875.54	766.27	3,010.41	9,386.95	94
95	0.258129	0.74187	35,358	9,127	2,433.44	6,814.59	15,769.82	610.69	2,244.14	6,376.54	95
96	0.277952	0.72205	26,231	7,291	1,755.15	4,381.15	8,955.23	474.30	1,633.45	4,132.40	96
97	0.298975	0.70102	18,940	5,663	1,232.10	2,626.00	4,574.08	358.13	1,159.15	2,498.95	97
98	0.321214	0.67879	13,278	4,265	839.74	1,393.91	1,948.08	262.24	801.02	1,339.79	98
99	1.000000	0.00000	9,013	9,013	554.17	554.17	554.17	538.78	538.78	538.78	99

Capítulo 1

Elementos de Cálculo Actuarial

1.1 Introducción

Para los efectos del presente trabajo, es indispensable presentar los elementos esenciales que constituyen la base del cálculo actuarial. Los mencionados elementos son en primer término, las funciones biométricas, éstas deben entenderse como aquellas donde intervienen elementos probabilísticos de supervivencia. En segundo término los valores conmutados son en esencia la afectación de las funciones biométricas por funciones de valor presente, que representan el valor que tienen en el momento de la valuación a un costo futuro generalmente contingente.Derivadas de las funciones biométricas y de los valores conmutados, se presentan también las aplicaciones más comunes, como son las anualidades contingentes, las primas únicas de seguros y las primas netas. Todos estos elementos tienen su equivalente en valores donde los costos varían con el tiempo, dícese así de anualidades y seguros variables, sin embargo, esta variabilidad no pasa de ser lineal y se les reconoce en la jerga actuarial como crecimiento aritmético.

El caso que nos ocupa, es encontrar el equivalente de los conceptos antes mencionados bajo el supuesto de que los costos varían en el tiempo en forma geométrica, que es justamente como ocurre en la realidad. Es evidente que los costos dentro de cualquier economía sujeta a los efectos de la inflación se incrementan a una tasa compuesta generalmente variable.

1.2 Funciones Biométricas

En principio, l_x — l tiene relación con la palabra inglesa *living*, vivo, viviente — la función biométrica representa el número de personas que de un grupo inicial alcanzan *exactamente* la edad x, representada por el subíndice x.

La función l_x, como lo indica el sentido común, es decreciente por efecto de los que fallecen en el transcurso del tiempo, es decir: $l_x \geq l_{x+1}$.

Ahora vamos a representar a d_x — donde d tiene relación con la palabra inglesa *dying*, moribundo, agonizante —, como el número de personas que *mueren* después de cumplir la edad x y antes de cumplir la edad $x+1$, así tenemos:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

También reconocemos como p_x, a la probabilidad que tiene una persona de edad x, de vivir un año más, es decir, de cumplir la edad $x+1$.

Esta probabilidad esta dada por:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Por otro lado existe la probabilidad de que una persona de edad x *no pueda vivir* un año más. Podemos representarla como:

$$q_x = 1 - p_x$$

también por:

$$q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

al sustituir d_x, queda:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

Las funciones biométricas referidas a períodos anuales, pueden ser extendidas a mayores períodos al cumplirse una serie de propiedades entre otras, las siguientes:

La probabilidad que tiene una persona con edad x, de encontrarse vivo dentro de n años, es:

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

El subíndice que está a la izquierda del signo, p, n, nos dice los años *que está diferido* el acontecimiento.

Por el contrario, si se quiere determinar la probabilidad de que una persona de *edad* x no alcance la edad $x + n$, resulta contraria a la anterior:

$$\begin{aligned} {}_{/n}q_x &= \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \\ &= 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \\ &= 1 - {}_np_x \end{aligned}$$

En general al conjunto de valores q_x, l_x, d_x, p_x, ${}_np_x$, ${}_nq_x$, etc., los reconoceremos con el nombre de *funciones biométricas* y son la base para la construcción de nuevos **valores**, como se verá en la siguiente sección.

1.3 Valores Conmutados

Desde el punto de vista matemático más simple, un valor conmutado no es más que una función de tres variables a saber, el interés i, una probabilidad q_x o p_x y el tiempo t. Sin embargo, la definición de esta función no es arbitraria, está definida de tal suerte que en su aplicación se cumplen una serie de propiedades que optimizan y simplifican sustancialmente el cálculo de un gran número de operaciones actuariales que han sido universalmente reconocidas y conforman la base de lo que ahora se conoce con el nombre de **Cálculo Actuarial**.

A continuación hacemos una reseña muy simplificada de los valores conmutados que hasta hoy se conocen y sus más frecuentes aplicaciones en la determinación de anualidades, primas, reservas, etc.

Se sabe que ${}_n\mathrm{E}_x$, es el *valor actual* — la *prima pura única* — que corresponde a un capital diferido de *la unidad monetaria de que se trate*. La letra E, es una relación con la palabra inglesa *endowment*, dotación, dote. Por otro lado, si recordamos que $v^n = (1+i)^{-n}$, representa el valor actual de un peso pagadero de n años y que ${}_np_x$, representa la probabilidad de que dentro de n años una persona de edad x esté aún con vida, se tiene:

$$ {}_n\mathrm{E}_x = \frac{v^n\, l_{x+n}}{l_x} $$

Decimos que esto es para facilitar los cálculos — y se verá más claramente cuando hablemos de rentas —.

Las tablas llamadas de conmutación son tablas auxiliares y conmutan, es decir, transforman los cálculos. Ahora, si multipilicamos por la unidad — numerador y denominador por el factor v^x —, no afectamos la fórmula y se tiene que:

$$ {}_n\mathrm{E}_x = \frac{v^{x+n}\, l_{x+n}}{v^x\, l_x} $$

Como podemos darnos cuenta, en los productos $v^x\, l_x$ y $v^{x+n}\, l_{x+n}$ el exponente de v es igual al subíndice de l. De esta manera se les conoce a esos productos como: D_x y D_{x+n}, respectivamente, — D es una relación con la palabra inglesa *denominator*, denominador —.

Vamos a introducir los valores respectivos de D en la fórmula anterior...

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

Al valor D_{x+n} se le puede dar una interpretación práctica, pensemos en que el *pago* de un peso está sujeto a la ocurrencia de un evento aleatorio, la supervivencia, y que dicho evento se va a verificar en n años, por lo que el *pago* de la mencionada unidad monetaria — peso — se efectuará n años después, si consideramos que nuestro año de análisis es x, entonces v^n , es el valor presente del peso de verificarse la supervivencia, sin embargo, ante la incertidumbre de ese suceso sólo podemos hablar de un valor probable, esto es l_{x+n}, con lo cual el producto $v^n \cdot l_{x+n}$ no es más que el valor presente esperado del total de *pagos*, que deberán efectuarse dentro de n años.

Ahora, N_x — donde N proviene de la palabra *numerator*, numerador —, es igual a la suma de las D_x hasta la última edad.

$$ \begin{aligned} N_x &= D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots \\ &= D_x + N_{x+1} \end{aligned} $$

en general

$$ N_{x+t} = \sum_{i=t}^{\infty} D_{x+i} $$

Otro valor conmutado que surge de la necesidad de evaluar rentas variables, como se verá más adelante, es:

$$ S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots $$

en consecuencia,

$$S_{x+t} = \sum_{i=t}^{\infty} N_{x+i}$$

Existen otros valores de conmutación, tales como C_x y M_x, de los cuales a continuación daremos una breve explicación...

l_x son los **asegurados** que contratan al mismo tiempo el seguro. Durante el primer aniversario fallecen d_x de ellos. El pago de un peso *al fin de ese primer aniversario* a cada uno de los d_x beneficiarios — d_x pesos en total —, vale para este momento vd_x, es decir, el total de los pesos que se pagarán en el primer aniversario.

Así mismo, los pesos al término de cada uno de los años que siguen son: d_{x+1}, $d_{x+2}\cdots$

Ahora, se define a C_x, C en relación con la palabra *Cash*, como:

$$C_{x+t} = v^{x+t+1} d_{x+t}$$

Y ahora, del mismo modo como se definieron D_x y N_x, tenemos que la suma de los valores actuales año con año es:

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots$$

En general

$$M_{x+t} = \sum_{i=t}^{\infty} C_{x+i}$$

Otro valor y último que en algún momento dado se tendrá que ocupar, en la valuación de seguros variables es:

$$R_{x+t} = M_{x+t} + M_{x+t+1} + M_{x+t+2} \cdots$$

FALTA PAGINA

No. 7

Capítulo 2

Anualidades Contingentes Constantes

2.1 Introducción

En este capítulo se muestra el desarrollo del costo que representa una serie de pagos cuyo principio y/o fin están sujetos al acontecimiento de un evento fortuito, por lo que a diferencia de las rentas ciertas, en éstas no se conoce el momento exacto en que habrán de terminar los mencionados pagos. El período de realización de cada pago se ha considerado casi siempre anual, en razón a que las probabilidades están referidas también a este período. Sin embargo, en la práctica ocurre que este período puede también ser mensual, trimestral, semestral, etc..

El uso de rentas contingentes en la práctica de los seguros es frecuente, ya que muchos problemas en los que se brinda protección vía seguro, en los que el asegurado queda sujeto al pago de primas *mientras viva*, no se conoce el tiempo exacto en que se dejarán de realizar dichos pagos, constituyendo un problema de renta contingente.

Otros problemas, como es el costo que tiene una pensión vitalicia para una persona, también implican el uso del concepto de **Renta Contingente**.

2.2 Anualidades Vencidas

2.2.1 Renta Vitalicia

Si son l_x, el número de personas que contratan simultáneamente la renta vitalicia, y cada uno deja una prima de a_x, entonces el compromiso global de todos ellos es:

$$l_x \cdot a_x$$

Por otro lado, el compromiso del asegurador es igual a la suma de los valores actuales de los pagos a realizar por los que sobrevivan en cada aniversario, de este modo tenemos:

$$vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \cdots$$

Como cada coeficiente de la renta es igual a la *unidad* y como consideramos que los compromisos del asegurador y de los asegurados se igualan, esto queda como:

$$l_x \cdot a_x = vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \cdots$$

al despejar a_x, se tiene:

$$a_x = \frac{vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \cdots}{l_x}$$

y en términos de valores conmutados tenemos que...

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + v^{x+3} l_{x+3} + \cdots}{v^x l_x} \\ &= \frac{\mathrm{D}_{x+1} + \mathrm{D}_{x+2} + \mathrm{D}_{x+3} + \cdots}{\mathrm{D}_x} \\ &= \frac{\mathrm{N}_{x+1}}{\mathrm{D}_x} \end{aligned}$$

2.2.2 Renta Diferida

Ahora queremos calcular la prima pura única — o el valor actual — para una renta de un peso *diferida* n años, que empieza a ser válida *después* de transcurridos n años, es decir, tomamos como punto de partida el término $n+1$.

Representada por ${}_n/a_x$ a la prima buscada, tenemos que el compromiso de los asegurados es:

$$l_x \cdot {}_n/a_x$$

Y el del asegurador

$$v^{n+1}\, l_{x+n+1} + v^{n+2}\, l_{x+n+2} + \cdots$$

Al igualar y despejar ${}_n/a_x$ y en términos de valores conmutados..

$$\begin{aligned} {}_n/a_x &= \frac{\mathrm{D}_{x+n+1} + \mathrm{D}_{x+n+2} + \mathrm{D}_{x+n+3} + \cdots}{\mathrm{D}_x} \\ &= \frac{\mathrm{N}_{x+n+1}}{\mathrm{D}_x} \end{aligned}$$

2.2.3 Renta Temporal

Se le llama *temporaria* o *temporal* por n años, cuando sólo se ha de pagar durante dicho plazo, obviamente estando en vida el asegurado. Ahora para calcular la prima única, basta *limitarnos* al cálculo de los n primeros términos. Esta prima queda como:

$$/_n a_x = a_{x:\overline{n|}}$$

Aunque se emplea más la segunda, las dos expresiones son adecuadas.

Otra vez, el compromiso de los asegurados es:

$$l_x \cdot a_{x:\overline{n}|}$$

y el compromiso del asegurador...

$$v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots + v^n l_{x+n}$$

al igualar los compromisos, se tiene:

$$l_x \cdot a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{t=n} v^t \, l_{x+t}$$

y al despejar $a_{x:\overline{n}|}$, (o $/_n a_x$), en términos de valores conmutados se tiene que:

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n}|} &= \frac{\mathrm{D}_{x+1} + \mathrm{D}_{x+2} + \cdots + \mathrm{D}_{x+n}}{\mathrm{D}_x} \\ &= \frac{\mathrm{N}_{x+1} - \mathrm{N}_{x+n+1}}{\mathrm{D}_x} \end{aligned}$$

2.2.4 Renta Interceptada

Se entiende por renta interceptada, a las rentas que además de ser *diferidas* son *temporales*.

Esta renta la vamos a obtener de la diferencia de dos rentas temporales. A una *temporal* por $n + m$ años, se le resta otra *temporal* por n y nos queda una renta *diferida* por n años y *temporaria* por m. Esto es lo que llamamos una renta *interceptada*. Ahora, la prima pura única — o su valor actual — de esta renta se representa por $_{n}/_{m}a_x$.

y así...

$$
\begin{aligned}
{}_{n/m}a_x &= a_{x:\overline{n+m|}} - a_{x:\overline{n|}} \\
&= \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x}
\end{aligned}
$$

2.3 Anualidades Anticipadas

Hasta ahora las distintas rentas que hemos estudiado se llaman *vencidas* porque los pagos se hacen *al término del año*. Si admitimos que esos pagos los hacen por *adelantado*, entonces tenemos las rentas llamadas *anticipadas*. La diferencia sólo consiste en el importe del *primer pago*, que se efectúa *de contado* al contratar la renta; el segundo pago de la anticipada *coincide* después con el primero de la vencida y asísucesivamente.

Se puede entonces escribir — si se representa por $\ddot{a}_x$ al valor actual de esta renta anticipada [1]—.

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= 1 + a_x \\
= 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} &= \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}
\end{aligned}
$$

Existen algunas relaciones interesantes: si la renta es *anticipada*, **diferida** por n años, se le puede reemplazar por una *vencida* diferida por uno menos.

$$
\begin{aligned}
{}_{n/}\ddot{a}_x &= {}_{n-1/}a_x \\
&= \frac{N_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

[1]La diéresis indica, *el pago anticipado.*

La renta *anticipada* — **temporaria** por n años — es igual al primer término — *pagado al contado* — de valor un peso, más una renta vencida temporaria por los $n-1$ años que restan.

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= 1 + a_{x:\overline{n-1}|} \\ &= \frac{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}}{\mathrm{D}_x} \end{aligned}$$

Una renta anticipada **inmediata**, es la suma de las dos anteriores:

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_n/\ddot{a}_x = \frac{\mathrm{N}_x}{\mathrm{D}_x}$$

Del mismo modo resulta para la **interceptada,**

$${}_{n/m}\ddot{a}_x = \frac{\mathrm{N}_{x+n} - \mathrm{N}_{x+n+m}}{\mathrm{D}_x}$$

2.4 Ejemplos

Calcular sobre la base de la tabla de mortalidad hipotética que se muestra al principio del trabajo, con un interés técnico del 8%, para una persona de edad 35, el valor de lo siguiente para los dos tipos de renta, vencida y anticipada:

a)Una Renta Vitalicia.

b)Una Renta Diferida por 10 años.

c)Una Renta Temporal por 15 años.

d)Una Renta Interceptada, diferida 5 años y temporal 10 años.

a)

$$a_{35} = \frac{\mathrm{N}_{36}}{\mathrm{D}_{35}} = \frac{742,504.64}{65,387.30} = 11.35548707471$$

$$\ddot{a}_{35} = \frac{N_{35}}{D_{35}} = \frac{807,891.94}{65,387.30} = 12.35548707471$$

b)

$$_{10}/a_{35} = \frac{N_{46}}{D_{35}} = \frac{310,071.06}{65,387.30} = 4.722068566832$$

$$_{10}/\ddot{a}_{35} = \frac{N_{45}}{D_{35}} = \frac{339,360.05}{65,387.30} = 5.189999434141$$

c)

$$a_{35:\overline{15|}} = \frac{N_{36} - N_{51}}{D_{35}} = \frac{742,504.64 - 194,844.88}{65,387.30} = 8.375628906531$$

$$\ddot{a}_{35:\overline{15|}} = \frac{N_{35} - N_{50}}{D_{35}} = \frac{807,891.94 - 214,238.29}{65,387.30} = 9.079035990169$$

d)

$$_{5/10}a_{35} = \frac{N_{41} - N_{51}}{D_{35}} = \frac{483,432.72 - 194,844.88}{65,387.30} = 4.413551516273$$

$$_{5/10}\ddot{a}_{35} = \frac{N_{40} - N_{50}}{D_{35}} = \frac{527,309.71 - 214,238.29}{65,387.30} = 4.787954541631$$

Capítulo 3

Primas de Seguros

3.1 Prima Neta Única

3.1.1 Seguro de Vida Entera

El seguro de vida entera es la cobertura del riesgo de muerte del asegurado, *cualquiera que sea el año del fallecimiento.* El asegurador se compromete a pagar a los *beneficiarios o beneficiario* , — según sea el caso — **la suma de uno** al fin del año en que fallezca el asegurado.

A_x — A es una relación con la palabra inglesa *assurance*, seguro — es la prima neta única — el valor actual —[1].

Para determinar el valor de la prima neta única A_x, recordamos el compromiso del asegurador.

$$vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \dots$$

Ahora, el compromiso de los asegurados es igual a todas las l_x primas de A_x, que deben pagar en el acto.

[1]Como de costumbre, el subíndice x es la edad a la que el seguro se contrata.

Si igualamos los compromisos:

$$l_x \cdot \mathrm{A}_x = vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \dots$$

y despejamos A_x, tenemos:

$$\mathrm{A}_x = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \dots}{l_x}$$

Al multiplicar por v^x el numerador y el denominador, se tiene que:

$$\mathrm{A}_x = \frac{v^{x+1} d_x + v^{x+2} d_{x+1} + v^{x+3} d_{x+2} + \dots}{v^x l_x}$$

Recordamos a C_x y M_x del capítulo uno y entonces A_x se convierte en:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_x &= \frac{\mathrm{C}_x + \mathrm{C}_{x+1} + \mathrm{C}_{x+2} + \dots}{\mathrm{D}_x} \\ &= \frac{\mathrm{M}_x}{\mathrm{D}_x} \end{aligned}$$

3.1.2 Seguro Diferido

Un seguro diferido consiste en brindar el beneficio contratado a un asegurado, si fallece después de n años de haberlo contratado. Como podemos apreciar, el compromiso del asegurador empieza a correr a partir del año $n+1$, así, se conoce como $_n/\mathrm{A}_x$, a la prima neta única de este seguro y de este modo...

$$\begin{aligned} {}_n/\mathrm{A}_x &= \frac{\mathrm{C}_{x+n} + \mathrm{C}_{x+n+1} + \mathrm{C}_{x+n+2} + \dots}{\mathrm{D}_x} \\ &= \frac{\mathrm{M}_{x+n}}{\mathrm{D}_x} \end{aligned}$$

3.1.3 Seguro Temporal

El seguro *temporario* por n años, es aquél que sólo es pagado si el asegurado fallece *dentro* de los n primeros años. La prima pura única que se representa por, $/_n\mathrm{A}_x$, es:

$$
\begin{aligned}
/_n\mathrm{A}_x &= \frac{\mathrm{C}_x + \mathrm{C}_{x+1} + \mathrm{C}_{x+2} + \cdots + \mathrm{C}_{x+n-1}}{\mathrm{D}_x} \\
&= \frac{\mathrm{M}_x - \mathrm{M}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}
\end{aligned}
$$

Otra forma es, restar a un seguro de vida entera, uno diferido por n años.

$$/_n\mathrm{A}_x = \mathrm{A}_x -_n/\mathrm{A}_x$$

3.1.4 Seguro Interceptado

Cuando tenemos un seguro temporario por m años y diferido por n, le llamamos seguro *interceptado*. El valor presente de la prima correspondiente a este seguro puede ser calculado a través de la diferencia entre la prima de un diferido n años menos la de un ordinario de vida por $n + m$ años.

$$
\begin{aligned}
{}_{n/m}\mathrm{A}_x &= {}_{n/}\mathrm{A}_x - {}_{n+m/}\mathrm{A}_x \\
{}_{n/m}\mathrm{A}_x &= \frac{\mathrm{M}_{x+n} - \mathrm{M}_{x+n+m}}{\mathrm{D}_x}
\end{aligned}
$$

3.1.5 Seguro Dotal Mixto

El seguro dotal mixto se compone de un seguro temporario por n años y un capital diferido también por n años, es decir, la protección consiste en garantizar al asegurado, el pago de la suma asegurada a él mismo, si permanece aún con vida pasados los n años, o a sus beneficiarios, si muere antes de los primeros n años.

La prima pura única, es por lo tanto, igual a la suma del seguro temporario más el capital diferido...

$$A_{x:\overline{n|}} = /_{n}A_x + {}_{n}E_x$$

con valores de conmutación,

$$A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

3.2 Prima Neta Anual

Hasta ahora sólo hemos considerado las primas únicas — los *valores actuales* —, de los seguros vistos anteriormente, es decir, los que se pagan en el momento de la contratación del seguro, esto es, *una sola vez*, o en periodos, generalmente anuales, que duran a lo más, el plazo establecido para el pago de primas.

En este caso, el principio fundamental para la determinación del valor que debe tener una prima anual o *nivelada*, es que el valor presente de las obligaciones del asegurado sea igual al valor presente de las obligaciones del asegurador, siempre bajo la hipótesis de que la operación de seguro se efectúa sobre una cohorte de individuos donde el número de participantes es suficientemente grande como para que se cumplan las leyes de probabilidad.

Es también un hecho que los pagos quedan sujetos a la condición de supervivencia del asegurado, lo que constituye una renta contingente cuyo plazo máximo de duración es convenido en el contrato sin perjuicio de que sea interrumpido por la muerte del asegurado.

Una vez contratado el seguro, la primera prima es pagada en forma inmediata, por lo que se puede decir que la serie de pagos constituye una renta anticipada.

Por ejemplo, para el *seguro de vida entera* se tiene:

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

con valores de conmutación[2],

$$P_x = \frac{M_x}{N_x}$$

Si se requiere que sean un *determinado* número de pagos, n, para el mismo seguro, entonces:

$${}_nP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Con valores de conmutación,

$${}_nP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}}$$

Si tenemos un seguro *diferido* por n años y pagadero el mismo tiempo, se tiene:

$${}_{n/}P_x = \frac{{}_{n/}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

o, lo que es igual,

$${}_{n/}P_x = \frac{M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Si tenemos un seguro *temporal* por n años y se paga con n primas, tenemos:

[2] A este se le conoce con el nombre de *seguro ordinario de vida*.

$$
\begin{aligned}
P^{\,1}_{x:\overline{n}|} &= \frac{{}_{/n}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
P^{\,1}_{x:\overline{n}|} &= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}
\end{aligned}
$$

Si es un *capital diferido* por n años pagadero con n primas anuales, se tiene:

$$
\begin{aligned}
P_{x:\overline{n}|}^{\;\;\;1} &= \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
P_{x:\overline{n}|}^{\;\;\;1} &= \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}
\end{aligned}
$$

Para el *seguro dotal mixto*, es:

$$
P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}
$$

y en valores de conmutación,

$$
P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}
$$

Para el *seguro interceptado*, con $n + m$ número de pagos, se tiene:

$$
= \frac{{}_{n/m}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n+m}|}}
$$

y en valores de conmutación,

$$= \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{N_x - N_{x+n+m}}$$

3.3 Ejemplos

Calcular sobre la base de la tabla de mortalidad hipotética, que se muestra al principio del trabajo, con un interés técnico del 8%, para una persona de edad 35, la prima pura única de lo siguiente:

a)Un Seguro de Vida Entera.

b)Un Seguro Diferido por 10 años.

c)Un Seguro Temporal por 15 años.

d)Un Seguro Interceptado, diferido 5 años y temporal 10 años.

e)Un Seguro Dotal Mixto por 10 años.

a)

$$A_{35} = \frac{M_{35}}{D_{35}} = \frac{5,543.45}{65,387.3} = 0.0847786955709$$

b)

$$_{10}/A_{35} = \frac{M_{45}}{D_{35}} = \frac{4,151.21}{65,387.3} = 0.06348648743716$$

c)

$$/_{15}A_{35} = \frac{M_{35} - M_{50}}{D_{35}} = \frac{5,543.45 - 3,523.91}{65,387.3} = 0.03088581421775$$

d)

$$_{5}/_{10}A_{35} = \frac{M_{40} - M_{50}}{D_{35}} = \frac{4,817.02 - 3,523.91}{65,387.3} = 0.019776164484554$$

e)

$$A_{35:\overline{10}|} = \frac{M_{35} - M_{45} + D_{45}}{D_{35}} = \frac{5,543.45 - 4,151.21 + 29,288.99}{65,387.3} = 0.469223075429$$

Ahora se pide encontrar las primas niveladas para los seguros anteriores con:
a)Un número ilimitado de pagos.
b)10 pagos para el Seguro de Vida Entera.
c)10 pagos para el Seguro Diferido.
d)15 pagos para el Seguro Temporal.
e)y 10 pagos para el Seguro Dotal Mixto.

a)

$$P_{35} = \frac{M_{35}}{N_{35}} = \frac{5,543.45}{807,891.94} = 0.00686162310271З$$

b)

$$_{10}P_{35} = \frac{M_{35}}{N_{35} - N_{45}} = \frac{5,543.45}{807,891.94 - 339,360.05} = 0.01183153189423$$

d)

$$P^{1}_{35:\overline{15|}} = \frac{M_{35} - M_{50}}{N_{35} - N_{50}} = \frac{5,543.45 - 3,523.91}{807,891.94 - 214,238.29} = 0.003401882562332$$

e)

$$P_{35:\overline{10|}} = \frac{M_{35} - M_{45} + D_{45}}{N_{35} - N_{45}} = \frac{5,543.45 - 4,151.21 + 29,288.99}{807,891.94 - 339,360.05} = 0.06548376034767$$

Capítulo 4

Anualidades Variables

4.1 Introducción

En este capítulo se explica como es una progresión aritmética y se definen los diferentes tipos de renta como se ha explicado a lo largo del trabajo; también se demuestra como las anualidades anteriores pueden ser un conjunto de los siguientes tipos de renta. Al final del capítulo se definen brevemente las anualidades anticipadas.

4.2 Anualidades Vencidas

Antes que nada recordamos como es una progresión aritmética.

Sean, k el primer término y h la razón; período tras período aumentan de la siguiente manera[1]:

$$k\,,\ k+h\,,\ k+2h\ \cdots$$

Por otro lado, si tomamos en consideración el valor presente de k *pesos* — siempre y cuando esté con vida el asegurado —, que se van a cobrar al cumplimiento del primer

[1] Estos son los los distintos pagos que el asegurado hace al asegurador, es decir, los que aporta año tras año.

aniversario, $k + h$ al cumplimiento del segundo, $k + 2h$ al del tercero,..., etc..

Es, en cada caso:

$$k\frac{l_{x+1}}{l_x}v; \qquad (k+h)\frac{l_{x+2}}{l_x}v^2; \qquad (k+2h)\frac{l_{x+3}}{l_x}v^3; \qquad \cdots$$

4.2.1 Rentas Inmediatas

El valor actual de la renta que crece en forma aritmética y que se representa por $(\mathrm{v}a)_x$, es:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{v}a)_x &= k\,\frac{l_{x+1}}{l_x}\,v + (k+h)\,\frac{l_{x+2}}{l_x}\,v^2 + (k+2h)\,\frac{l_{x+3}}{l_x}\,v^3 + \cdots \\
&= \frac{k\,l_{x+1}\,v + (k+h)\,l_{x+2}\,v^2 + (k+2h)\,l_{x+3}\,v^3 + \cdots}{l_x}
\end{aligned}$$

Al multiplicar numerador y denominador por v^x — sin alterar nada — nos queda como:

$$(\mathrm{v}a)_x = \frac{k\,l_{x+1}\,v^{x+1} + (k+h)\,l_{x+2}\,v^{x+2} + (k+2h)\,l_{x+3}\,v^{x+3} + \cdots}{v^x l_x}$$

Y si recordamos que $v^{x+t}\,l_{x+t} = \mathrm{D}_{x+t}$, tenemos

$$\begin{aligned}
(\mathrm{v}a)_x &= \frac{k\,\mathrm{D}_{x+1} + (k+h)\,\mathrm{D}_{x+2} + (k+2h)\,\mathrm{D}_{x+3} + \cdots}{\mathrm{D}_x} \\
(\mathrm{v}a)_x \cdot \mathrm{D}_x &= k\,\mathrm{D}_{x+1} + (k+h)\,\mathrm{D}_{x+2} + (k+2h)\,\mathrm{D}_{x+3} + \cdots
\end{aligned}$$

Al ordenar para que las D de igual subíndice queden en columna y al efectuar los cálculos resulta:

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
(\mathrm{v}a)_x \cdot \mathrm{D}_x & = & k\,\mathrm{D}_{x+1} & + & k\,\mathrm{D}_{x+2} & + & k\,\mathrm{D}_{x+3} & + & k\,\mathrm{D}_{x+4} & + & \cdots & + \\
 & & & + & h\,\mathrm{D}_{x+2} & + & h\,\mathrm{D}_{x+3} & + & h\,\mathrm{D}_{x+4} & + & \cdots & + \\
 & & & & & + & h\,\mathrm{D}_{x+3} & + & h\,\mathrm{D}_{x+4} & + & \cdots & + \\
 & & & & & & & + & h\,\mathrm{D}_{x+4} & + & \cdots & + \\
 & & & & & & & & & + & \cdots & +
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccccccccccc}
(\mathrm{v}a)_x\mathrm{D}_x & = & k(\,\mathrm{D}_{x+1} & + & \mathrm{D}_{x+2} & + & \mathrm{D}_{x+3} & + & \mathrm{D}_{x+4} & + & \cdots) & + \\
 & & + & h(\,\mathrm{D}_{x+2} & + & \mathrm{D}_{x+3} & + & \mathrm{D}_{x+4} & + & \cdots) & + \\
 & & & & + & h(\,\mathrm{D}_{x+3} & + & \mathrm{D}_{x+4} & + & \cdots) & + \\
 & & & & & & & h(\,\mathrm{D}_{x+4} & + & \cdots) & + \\
 & & & & & & & & + & \cdots & +
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= k\,\mathrm{N}_{x+1} + h\mathrm{N}_{x+2} + h\mathrm{N}_{x+3} + h\mathrm{N}_{x+4} + \cdots \\
&= k\,\mathrm{N}_{x+1} + h(\,\mathrm{N}_{x+2} + \mathrm{N}_{x+3} + \mathrm{N}_{x+4} + \cdots)
\end{aligned}
$$

hay que recordar a qué es igual S_x, ahora, usamos a S_{x+2} y tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{v}a)_x \cdot \mathrm{D}_x &= k\,\mathrm{N}_{n+1} + h\,\mathrm{S}_{x+2} \\
(\mathrm{v}a)_x &= \frac{k\,\mathrm{N}_{x+1} + h\,\mathrm{S}_{x+2}}{\mathrm{D}_x}
\end{aligned}
$$

Si ocurre que $k = h = 1$. Se tiene que el valor actual de una renta vitalicia aumenta en progresión aritmética cuyo primer término es un peso, el segundo dos, el tercero tres,...

Esta renta se representa por el símbolo $(\mathrm{I}a)_x$ — donde I es una relación con la palabra inglesa *increasing*, creciente —, pues la renta crece siempre.

Resulta:

$$(\mathbf{I}a)_x = \frac{\mathrm{N}_{x+1} + \mathrm{S}_{x+2}}{\mathrm{D}_x}$$

Pero,

$$\mathrm{S}_{x+1} = \mathrm{N}_{x+1} + \mathrm{S}_{x+2}$$

Entonces:

$$(\mathbf{I}a)_x = \frac{\mathrm{S}_{x+1}}{\mathrm{D}_x}$$

Observaciones. I. Llegamos a la fórmula de $(\mathbf{v}a)_x$ sin especificar si la progresión es creciente o decreciente. Y es que hay que asignarle un valor a h positivo o negativo, para que sea creciente o decreciente, respectivamente.

II. Si h y $k + r\,h$ son negativos, quiere decir que en un momento dado, el asegurado *deja de cobrar* la renta para *pagarla*, es decir, las posiciones se invierten. Como esto nunca se pacta, entonces, si h es negativo se tiene cuidado de que no lo sea $k + r\,h$.

4.2.2 Rentas Temporales y Diferidas

En este caso *temporal* sólo consideramos los n primeros términos. El valor actual de esa renta es:

$$(\mathbf{v}a)_{x:\overline{n|}} = \frac{k\mathrm{D}_{x+1} + (k+h)\mathrm{D}_{x+2} + \ldots + [k+(n-1)h]\mathrm{D}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}$$

Al agrupar hay que recordar a que es igual N_x y S_x, para llegar a lo siguiente:

$$(\mathbf{v}a)_{x:\overline{n}|} = \frac{k(N_{x+1} - N_{x+n+1}) + h(S_{x+2} - S_{x+n+2} - nN_{x+n+1})}{D_x}$$

Si $h = k = 1$ se tiene:

$$(\mathbf{I}a)_{x:\overline{n}|} = \frac{(S_{x+1} - S_{x+n+1}) - nN_{x+n+1}}{D_x}$$

En el caso en que no sea la renta, sino la variación de la misma la que para los próximos n años ha de terminar. Hay que tomar una temporal y añadirle una renta constante de $k + (n-1)$ diferida por n años.

El valor actual de ese tipo de renta es:

$$(\mathbf{v}_{\overline{n}|}a)_x = \frac{kN_{x+1} + h(S_{x+2} - S_{x+n+1})}{D_x}$$

Otra vez, en caso de que $h = k = 1$, se tiene:

$$(\mathbf{I}_{\overline{n}|}a)_x = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1}}{D_x}$$

Para traer a valor actual la renta que ha de empezarse a pagar a la edad $x+n$, existen dos maneras, a saber que:

$$\begin{aligned} {}_{n}/a_x &= {}_{n}E_x \cdot a_{x+n} \\ (\mathbf{v}_n/a)_x &= {}_{n}E_x(\mathbf{v}a)_{x+n} \\ (\mathbf{I}_n/a)_x &= {}_{n}E_x(\mathbf{I}a)_{x+n} \end{aligned}$$

No debemos de cometer el error de hacer este tipo de sustituciones cuando la renta es variable.

4.2.3 Anualidades Interceptadas

Para la anualidad interceptada, sólo tomamos los primeros m términos de una anualidad diferida vencida n años, así...

$$(\mathrm{v}_n/_m\mathrm{a})_x \cdot \mathrm{D}_x = k\mathrm{D}_{x+n+1} + (k+h)\mathrm{D}_{x+n+2} + (k+2h)\mathrm{D}_{x+n+3} + \ldots + [k+(n-1)h]\mathrm{D}_{x+n+m}$$

Al agrupar los valores de conmutación ya conocidos N_x, S_x y despejar el valor actual de esta anualidad $(\mathrm{v}_n/_m\mathrm{a})_x$, tenemos:

$$(\mathrm{v}_n/_m\mathrm{a})_x = \frac{k(\mathrm{N}_{x+n+1} - \mathrm{N}_{x+n+m+1}) + h(\mathrm{S}_{x+n+2} - \mathrm{S}_{x+n+m+2} - n\mathrm{N}_{x+n+m+1})}{\mathrm{D}_x}$$

En el caso en que $k = h = 1$, esto queda como:

$$(\mathbf{I}_n/_m\mathrm{a})_x = \frac{\mathrm{S}_{x+n+1} - \mathrm{S}_{x+n+m+1} - n\mathrm{N}_{x+n+m+1}}{\mathrm{D}_x}$$

4.3 Anualidades Anticipadas

4.3.1 Rentas Anticipadas

Al tomar en cuenta la forma de pago, se encuentra que para las rentas *anticipadas* los valores:

$$(\mathrm{v}\ddot{a})_x = \frac{k\mathrm{N}_x + h\mathrm{S}_{x+1}}{\mathrm{D}_x}$$

y,

$$(\mathbf{I}\ddot{a})_x = \frac{\mathrm{S}_x}{\mathrm{D}_x}$$

así,

$$(\mathbf{v}\,\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{k(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}) + h(\mathrm{S}_{x+1} - \mathrm{S}_{x+n+1} - n\mathrm{N}_{x+n})}{\mathrm{D}_x}$$

$$(\mathbf{I}\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{(\mathrm{S}_x - \mathrm{S}_{x+n}) - \mathrm{N}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}$$

$$(\mathbf{v}_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \frac{k\mathrm{N}_x + h(\mathrm{S}_{x+1} - \mathrm{S}_{x+n})}{\mathrm{D}_x}$$

$$(\mathbf{I}_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \frac{\mathrm{S}_x - \mathrm{S}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}$$

$$(\mathbf{v}_n/\ddot{a})_x = {}_n\mathrm{E}_x\,(\mathbf{v}\,\ddot{a})_{x+n}$$

$$(\mathbf{I}_n/\ddot{a})_x = {}_n\mathrm{E}_x\,(\mathbf{I}\,\ddot{a})_{x+n}$$

$$(\mathbf{v}_n/_m\ddot{a})_x = \frac{k(\mathrm{N}_{x+n} - \mathrm{N}_{x+n+m}) + h(\mathrm{S}_{x+n+1} - \mathrm{S}_{x+n+m+1} - n\mathrm{N}_{x+n+m})}{\mathrm{D}_x}$$

En el caso en que $k = h = 1$, esto queda como:

$$(\mathbf{I}_n/_m\ddot{a})_x = \frac{\mathrm{S}_{x+n} - \mathrm{S}_{x+n+m} - n\mathrm{N}_{x+n+m}}{\mathrm{D}_x}$$

4.4 Ejemplos

Calcular sobre la base de la tabla de mortalidad hipotética que se muestra al principio del trabajo, con un interés técnico del 8%; para una persona de edad 35, el valor actual de lo siguiente para los dos tipos de renta, vencida y anticipada:

a)Dos Rentas Vitalicias que comienzen en 1 y una que crezca a razón de 0.05 por periodo y otra que crezca una unidad por periodo.

b)Dos Rentas Temporales por 10 años con el mismo crecimiento que las anteriores.

c)Dos Rentas Diferidas por 15 años también con los mismos crecimientos en el comienzo del diferimiento.

d)Una renta que deje de crecer después de transcurridos cinco aos y después sea constante con los mismos tipos de crecimiento que las anteriores.

e)Dos Rentas Interceptadas, diferidas 15 aos y temporales 10 y que en el cumplimiento del cincuagésimo periodo empieze a crecer como en los casos anteriores.

Antes que nada observamos como se comporta el crecimiento, en el primer periodo tenemos la unidad en el segundo 0.05 más, etc., entonces:

$$1.0\,,\ 1.05\,,\ 1.10\,,\ 1.15\,,\ 1.20\,,\ 1.25\,, ..., (1\ +\ t\cdot 0.05)$$

a)

$$\begin{aligned}
(\mathrm{v}a)_{35} &= \frac{1\cdot \mathrm{N}_{36}\ +\ 0.5\cdot \mathrm{S}_{37}}{\mathrm{D}_{35}} \\
&= \frac{742,504.64 + 0.05\cdot 7,616,878.78}{65,387.30} = 17.179919342135 \\
(\mathrm{I}a)_{35} &= \frac{\mathrm{S}_{36}}{\mathrm{D}_{35}} \\
&= \frac{8,359,383.42}{65,387.30} = 127.8441443522 \\
(\mathrm{v}\ddot{a})_{35} &= \frac{\mathrm{N}_{35}\ +\ 0.05\mathrm{S}_{36}}{\mathrm{D}_{35}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{807,891.94 + 0.05 \cdot 8,359,383.42}{65,387.30} = 18.747694292317$$

$$(\mathbf{I}\ddot{a})_{35} = \frac{S_{35}}{D_{35}}$$

$$= \frac{9,167,275.36}{65,387.30} = 140.1996314269$$

b)

$$(\mathbf{v}a)_{35:\overline{10|}} = \frac{(N_{36} - N_{46}) + 0.05 \cdot (S_{37} - S_{47} - 10 \cdot N_{46})}{D_{35}}$$

$$= \frac{(742,504.64 - 310,071.06) + 0.05 \cdot (7,616,878.78 - 2,853,740.73 - 10 \cdot 310,071.}{65,387.30}$$

$$= 7.884634363248$$

$$(\mathbf{I}a)_{35:\overline{10|}} = \frac{(S_{36} - S_{46}) - 10 \cdot N_{46}}{D_{35}}$$

$$= \frac{(8,359,383.42 - 3,163,811.79) - 10 \cdot 310,071.06}{65,387.30}$$

$$= 32.03773561533$$

$$(\mathbf{v}\ddot{a})_{35:\overline{10|}} = \frac{(N_{35} - N_{45}) + 0.05 \cdot (S_{36} - S_{46} - nN_{45})}{D_{35}}$$

$$= \frac{(807,891.94 - 339,360.05) + 0.05 \cdot (8,359,383.42 - 3,163,811.79 - 10 \cdot 339,360}{65,387.30}$$

$$= 8.543408987678$$

$$(\mathbf{I}\ddot{a})_{35:\overline{10|}} = \frac{(S_{35} - S_{45}) - N_{45}}{D_{35}}$$

$$= \frac{(9,167,275.36 - 3,503,171.84) - 339,360.05}{65,387.30} = 81.43390949007$$

c)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{v}_{15}/a)_{35} &= {}_{15}\mathrm{E}_{35}(\mathbf{v}a)_{50} \\
&= \frac{\mathrm{N}_{51} + 0.05 \cdot \mathrm{S}_{52}}{\mathrm{D}_{35}} \\
&= \frac{194,844.88 + 0.05 \cdot 1,668,047.57}{65,387.30} \\
&= 4.25537158592 \\
(\mathbf{I}_{15}/a)_{35} &= {}_{15}\mathrm{E}_{35}(\mathbf{I}a)_{50} = \frac{\mathrm{N}_{51} + \mathrm{S}_{52}}{\mathrm{D}_{35}} \\
&= \frac{194,844.88 + 1,668,047.57}{65,387.30} \\
&= 28.49012652304 \\
(\mathbf{v}_{15}/\ddot{a})_{35} &= \frac{\mathrm{N}_{50} + 0.05 \cdot \mathrm{S}_{51}}{\mathrm{D}_{35}} \\
&= \frac{214,238.29 + 0.05 \cdot 1,862,892.44}{65,387.30} = 4.700957403043
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}_{15}/\ddot{a})_{35} &= \frac{\mathrm{S}_{50}}{\mathrm{D}_{35}} \\
&= \frac{2,077,130.73}{65,387.30} = 31.7665662904
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{v}_{\overline{5}|}a)_{35} &= \frac{\mathrm{N}_{36} + 0.05 \cdot (\mathrm{S}_{37} - \mathrm{S}_{41})}{\mathrm{D}_{35}} \\
&= \frac{742,504.64 + 0.05 \cdot (7,616,878.78 - 5,206,267.13)}{65,387.30} \\
&= 13.198820298437 \\
(\mathbf{I}_{\overline{5}|}a)_{35} &= \frac{\mathrm{S}_{36} - \mathrm{S}_{41}}{\mathrm{D}_{35}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{8,359,383.42 - 5,206,267.13}{65,387.30} = 48.22215154931$$

$$(\mathbf{v}_{\overline{5|}}\ddot{a})_{35} = \frac{N_{35} + 0.05 \cdot (S_{36} - S_{40})}{D_{35}}$$

$$= \frac{807,891.94 + 0.05 \cdot (8,359,383.42 - 5,733,576.84)}{65,387.30} = 14.3633743708 64$$

$$(\mathbf{I}_{\overline{5|}}\ddot{a})_{35} = \frac{S_{35} - S_{40}}{D_{35}}$$

$$= \frac{9,167,275.36 - 5,733,576.84}{65,387.30} = 52.51323299785$$

e)

$$(\mathbf{v}_{15}/_{10}a)_{35} = \frac{(N_{51} - N_{61}) + 0.05(S_{52} - S_{62} - 15 \cdot N_{61})}{D_{35}}$$

$$= \frac{(194,844.88 - 69,999.16) + 0.05(1,668,047.57 - 494,688.54 - 15 \cdot 69,999.16)}{65,387.30}$$

$$= 2.003657461005$$

$$(\mathbf{I}_{15}/_{10}a)_{35} = \frac{S_{51} - S_{61} - 15 \cdot N_{61}}{D_{35}}$$

$$= \frac{1,862,892.44 - 564,687.70 - 15 \cdot 69,999.61}{65,387.30}$$

$$= 3.796006105161$$

$$(\mathbf{v}_{15}/_{10}\ddot{a})_{35} = \frac{(N_{50} - N_{60}) + 0.05(S_{51} - S_{61} - nN_{60})}{D_{35}}$$

$$= \frac{(214,238.29 - 78,132.64) + 0.05(1,862,892.44 - 564,687.70 - 15 \cdot 78,132.64)}{65,387.30}$$

$$= 2.178043855611$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}_{15}/_{10}\ddot{a})_{35} &= \frac{\mathrm{S}_{50} - \mathrm{S}_{60} - 15 \cdot \mathrm{N}_{60}}{\mathrm{D}_{35}} \\
&= \frac{2,077,130.73 - 642,820.35 - 15 \cdot 78,132.64}{65,387.30} \\
&= 4.011800150794
\end{aligned}
$$

Capítulo 5

Seguros Variables

5.1 Prima Neta Única

5.1.1 Seguro de Vida Entera

Como vimos en las anualidades crecientes aritméticamente, este seguro es tal que si el asegurado muere en el curso del primer año, los beneficiarios recibirían una cantidad, k; en el caso de que falleciera en el curso del año dos, recibirían la cantidad $k+h$; en el curso del tercer año, $k+2h$ y así sucesivamente.

Si en el año t, el asegurado muere, éste mismo abona la suma de $k+(t-1)h$. Y como en la teoría el pago se hace a fin del año su valor presente es $v^t \cdot [k+(t-1)h]$.

Por otro lado la probabilidad de que una persona de edad x *fallezca* es:

$$_{t-1}/q_x = \frac{d_{x+t-1}}{l_x}$$

Y entonces el *valor actual de ese compromiso parcial es:*

$$v^t \cdot [k+(t-1)h]\,_{t-1}/q_x$$

Todos los valores que puede tomar t, — entre 1 y $w - x$ — que son los *compromisos parciales*, nos da el compromiso total del asegurador, llamamos a este $(\mathbf{v}A)_x$.

Resulta entonces que la prima pura única es igual a:

$$(\mathbf{v}A)_x = \sum_{t=1}^{t=w-x} v^t \cdot [k + (t-1)h]\,{}_{t-1}/q_x$$

Al hacer algunas operaciones con los valores de conmutacion de D_x y C_x tenemos que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}A)_x D_x &= \sum_{t=1}^{t=w-x} [k + (t-1)h] \cdot C_{x+t-1} \\ &= kC_x + (k+h)C_{x+1} + (k+2h)C_{x+2} + \ldots \end{aligned}$$

Hay que recordar que es M_x en valores de conmutación y tenemos:

$$(\mathbf{v}A)_x D_x = kM_x + h(M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots)$$

Por último recordamos quien es R_x y queda:

$$(\mathbf{v}A)_x D_x = kM_x + hR_{x+1}$$

y, por fin,[1]

$$(\mathbf{v}A)_x = \frac{kM_x + hR_{x+1}}{D_x}$$

Si tomamos el caso de que $k = h = 1$, entonces resulta que:

$$(IA)_x = \frac{M_x + R_{x+1}}{D_x}$$

[1]Como se puede observar hay una gran similitud con las rentas variables del capítulo 4.

La cual queda como:

$$(\mathrm{IA})_x = \frac{\mathrm{R}_x}{\mathrm{D}_x}$$

Otra forma es, usar valores de conmutación:

$$\begin{aligned}(\mathrm{IA})_x &= \frac{v\mathrm{S}_x}{\mathrm{D}_x} - \frac{\mathrm{S}_{x+1}}{\mathrm{D}_x} \\ &= \frac{v\mathrm{S}_x - \mathrm{S}_{x+1}}{\mathrm{D}_x}\end{aligned}$$

5.1.2 Seguros Diferidos y Temporales

Si el seguro es *temporario*, basta sumar los n primeros términos de la fórmula $(\mathbf{v}\mathrm{A})_x \cdot \mathrm{D}_x$ para obtener así:

$$(\mathbf{v}/_n\mathrm{A})_x \cdot \mathrm{D}_x = k\mathrm{C}_x + (k+h)\mathrm{C}_{x+1} + (k+2h)\mathrm{C}_{x+2} + \ldots + [k+(n-1)h]\mathrm{C}_{x+n-1}$$

Al agrupar, usamos los valores de conmutación de M_x y después de R_x. Y al despejar $(\mathbf{v}/_n\mathrm{A})_x$, tenemos:

$$(\mathbf{v}/_n\mathrm{A})_x = \frac{k(\mathrm{M}_x - \mathrm{M}_{x+n}) + h(\mathrm{R}_{x+1} - \mathrm{R}_{x+n+1} - n\mathrm{M}_{x+n})}{\mathrm{D}_x}$$

En el caso en que $k = h = 1$, esto queda como:

$$(\mathbf{I}/_n\mathrm{A})_x = \frac{\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n} - n\mathrm{M}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}$$

Ahora se requiere que la suma asegurada *deje de crecer* después de pasados n años, y por lo tanto:

$$(\mathbf{v}_{\overline{n}|}\mathrm{A})_x = \frac{k\mathrm{M}_x + h(\mathrm{R}_{x+1} - \mathrm{R}_{x+n})}{\mathrm{D}_x}$$

En el caso en que $k = h = 1$, se tiene:

$$(\mathbf{I}_{\overline{n}|}\mathrm{A})_x = \frac{\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}$$

y, el valor actual de un seguro diferido es:

$$(\mathbf{v}_n/\mathrm{A})_x = {}_n\mathrm{E}_x(\mathbf{v}\mathrm{A})_{x+n}$$

En el caso que $k = h = 1$...

$$(\mathbf{I}_n/\mathrm{A})_x = {}_n\mathrm{E}_x(\mathbf{I}\mathrm{A})_{x+n}$$

5.1.3 Seguro Interceptado

Para el seguro interceptado, sólo tomamos los primeros m términos de un seguro diferido n años, así...

$$(\mathbf{v}_n/_m\mathrm{A})_x \cdot \mathrm{D}_x = k\mathrm{C}_{x+n} + (k+h)\mathrm{C}_{x+n+1} + (k+2h)\mathrm{C}_{x+n+2} + \ldots + [k+(n-1)h]\mathrm{C}_{x+n+m-1}$$

Al agrupar los valores de conmutación ya conocidos M_x, R_x y despejar el valor actual de esta prima $(\mathbf{v}_n/_m\mathrm{A})_x$, tenemos:

$$(\mathbf{v}_n/_m\mathrm{A})_x = \frac{k(\mathrm{M}_{x+n} - \mathrm{M}_{x+n+m}) + h(\mathrm{R}_{x+n+1} - \mathrm{R}_{x+n+m+1} - n\mathrm{M}_{x+n+m})}{\mathrm{D}_x}$$

En el caso en que $k = h = 1$, esto queda como:

$$(\mathrm{I}_n/_m\mathrm{A})_x = \frac{\mathrm{R}_{x+n} - \mathrm{R}_{x+n+m} - n\mathrm{M}_{x+n+m}}{\mathrm{D}_x}$$

5.1.4 Seguro Dotal Mixto

Como sabemos se compone de un seguro *temporario* por n años y un capital diferido por los mismos años.

La prima pura única es igual a la suma de un seguro temporario con un capital diferido del último pago, que sería de $|\,k + n \cdot h\,|$, en fórmulas:

$$(\mathrm{vA})_{x:\overline{n}|} = (\mathrm{v}/_n\mathrm{A})_x + |\,k + n \cdot h\,| \cdot_n \mathrm{E}_x$$

esto es:

$$= \frac{k(\mathrm{M}_x - \mathrm{M}_{x+n}) + h(\mathrm{R}_{x+1} - \mathrm{R}_{x+n+1} - n\mathrm{M}_{x+n})}{\mathrm{D}_x} + |\,k + n \cdot h\,| \cdot_n \mathrm{E}_x$$

$$= \frac{k(\mathrm{M}_x - \mathrm{M}_{x+n}) + h(\mathrm{R}_{x+1} - \mathrm{R}_{x+n+1} - n\mathrm{M}_{x+n}) + |\,k + n \cdot h\,| \cdot \mathrm{D}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}$$

en el caso $h = k = 1$...

$$(\mathrm{IA})_{x:\overline{n}|} = \frac{\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n} - n\mathrm{M}_{x+n}}{\mathrm{D}_x} + |1 + n| \cdot_n \mathrm{E}_x$$

$$(\mathrm{IA})_{x:\overline{n}|} = \frac{\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n} - n\mathrm{M}_{x+n} + |1 + n| \cdot \mathrm{D}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}$$

5.2 Prima Neta Anual

Hemos considerado pagos únicos, por lo que sigue mencionar las rentas y seguros crecientes aritméticamente para períodos anuales — ya hemos mencionado las constantes — para las diferentes combinaciones de los seguros hasta ahora expuestos.

Tenemos ahora más de doce combinaciones de primas variables y constantes, nos resta mencionar las siguientes:

En primer lugar, para pagar en forma aritmética el *seguro de vida entera*, se tiene:

$$= \frac{\mathrm{A}_x}{(\mathrm{v}\ddot{a})_x}$$

y en valores conmutados...

$$= \frac{\mathrm{M}_x}{k\,\mathrm{N}_x + h\mathrm{S}_{x+1}}$$

Para el *seguro de vida entera*, con crecimiento variable y con pagos en forma constante, se tiene:

$$= \frac{(\mathrm{v}\mathrm{A})_x}{\ddot{a}_x}$$

con valores de conmutación,

$$= \frac{k\,\mathrm{M}_x + h\mathrm{R}_x}{\mathrm{N}_x}$$

Ahora si se quiere que los pagos sean en forma aritmética, para el mismo seguro se tiene:

$$= \frac{(\mathrm{v}\mathrm{A})_x}{(\mathrm{v}\ddot{a})_x}$$

y con valores de conmutación,

$$= \frac{k\,\mathrm{M}_x + h\mathrm{R}_x}{k\,\mathrm{N}_x + h\mathrm{S}_{x+1}}$$

Si se requiere que sean un *determinado* número de pagos, n, crecientes aritméticamente, para el seguro de vida entera de forma constante, tenemos:

$$= \frac{\mathrm{A}_x}{(\mathbf{v}\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}$$

y, con valores de conmutación...

$$= \frac{\mathrm{M}_x}{k\,(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}) + h\,(\mathrm{S}_{x+1} - \mathrm{S}_{x+n+1} - n\mathrm{N}_{x+n})}$$

En el caso de un seguro variable, y pagos constantes. Lo siguiente:

$$= \frac{(\mathbf{v}\mathrm{A})_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

con valores de conmutación...

$$\frac{k\,\mathrm{M}_x + h\mathrm{R}_x}{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}}$$

Ahora para el mismo seguro variable aritméticamente y n pagos crecientes de la misma manera, se tiene:

$$= \frac{(\mathbf{v}\mathrm{A})_x}{(\mathbf{v}\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}$$

con valores de conmutación,

$$= \frac{k\,\mathrm{M}_x + h\mathrm{R}_x}{k\,(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}) + h\,(\mathrm{S}_{x+1} - \mathrm{S}_{x+n+1} - n\mathrm{N}_{x+n})}$$

Para un seguro constante *diferido* por n años la prima neta anual es igual a:

$$= \frac{{}_{n/}\mathrm{A}_x}{(\mathbf{v}\,\ddot{a})_x}$$

o, lo que es igual,

$$= \frac{\mathrm{M}_{x+n}}{k\,\mathrm{N}_x + h\mathrm{S}_{x+1}}$$

Para el mismo seguro, constante *diferido* por n años y ahora pagadero el mismo tiempo con primas crecientes aritméticamente, se tiene:

$$= \frac{{}_{n/}\mathrm{A}_x}{(\mathbf{v}\,\ddot{a})_{x:\overline{n|}}}$$

o, lo que es igual,

$$= \frac{\mathrm{M}_{x+n}}{k(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}) + h(\mathrm{S}_{x+1} - \mathrm{S}_{x+n+1} - n\mathrm{N}_{x+n})}$$

Para un seguro variable aritméticamente *diferido* damos las siguientes combinaciones:

Con pagos constantes...

$$= \frac{(\mathbf{v}_{n/}\mathrm{A})_x}{\ddot{a}_x}$$

o también con valores comutados,

$$= \frac{k\,\mathrm{M}_{x+n} + h\mathrm{R}_{x+n}}{\mathrm{N}_x}$$

Con pagos variables...

$$= \frac{(\mathbf{v}_n/\mathrm{A})_x}{(\mathbf{v}\,\ddot{a})_x}$$

o, lo que es igual,

$$= \frac{k\,\mathrm{M}_{x+n} + h\mathrm{R}_{x+n}}{k\,\mathrm{N}_x + h\mathrm{S}_{x+1}}$$

Con n pagos variables...

$$= \frac{(\mathbf{v}_n/\mathrm{A})_x}{(\mathbf{v}\,\ddot{a})_{x:\overline{n|}}}$$

o, lo que es igual,

$$= \frac{k\,\mathrm{M}_{x+n} + h\mathrm{R}_{x+n}}{k\,(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}) + h\,(\mathrm{S}_{x+1} - \mathrm{S}_{x+n+1} - n\mathrm{N}_{x+n})}$$

Con n pagos constantes...

$$= \frac{(\mathbf{v}_n/\mathrm{A})_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

o con valores conmutados,

$$= \frac{k\,\mathrm{M}_{x+n} + h\mathrm{R}_{x+n}}{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}}$$

Si tenemos un seguro variable aritméticamente y *temporal* por n años y se paga con n primas iguales, es:

$$= \frac{(\mathrm{v}/_n\mathrm{A})_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

en valores de conmutación...

$$= \frac{\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n} - n\mathrm{M}_{x+n}}{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}}$$

Para el mismo seguro pero ahora con n primas anuales crecientes aritméticamente, se tiene que las primas son iguales a:

$$= \frac{(\mathrm{v}/_n\mathrm{A})_x}{(\mathrm{v}\,\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}$$

en valores de conmutación...

$$= \frac{\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n} - n\mathrm{M}_{x+n}}{k\,(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}) + h\,(\mathrm{S}_{x+1} - \mathrm{S}_{x+n+1} - n\mathrm{N}_{x+n})}$$

Si es un *capital diferido* por n años pagadero con n primas anuales, se tiene:

$$= \frac{{}_n\mathrm{E}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\mathrm{D}_{x+n}}{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}}$$

Con n primas variables aritmticamente...

$$= \frac{{}_n\mathrm{E}_x}{(\mathrm{v}\,\ddot{a})_{x:\overline{n}|}} = \frac{\mathrm{D}_{x+n}}{k\,(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}) + h\,(\mathrm{S}_{x+1} - \mathrm{S}_{x+n+1} - n\mathrm{N}_{x+n})}$$

Para el *seguro dotal mixto*, con primas anuales constantes, se tiene:

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

y en valores de conmutación,

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Para el mismo seguro pero con n pagos aritmticos es:

$$= \frac{A_{x:\overline{n}|}}{(\mathbf{v}\,\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}$$

y en valores de conmutación,

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{k\,(N_x - N_{x+n}) + h\,(S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n})}$$

Ahora una prima constante de un *seguro variable* que deje de crecer en en el periodo n.

$$= \frac{(\mathbf{v}_{\overline{n}|}A)_x}{\ddot{a}_x}$$

en valores conmutados:

$$= \frac{kM_x + h(R_{x+1} - R_{x+n})}{N_x}$$

El mismo seguro pero con n primas constantes

$$= \frac{(\mathbf{v}_{\overline{n}|}A)_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

en valores conmutados:

$$= \frac{k\mathrm{M}_x + h(\mathrm{R}_{x+1} - \mathrm{R}_{x+n})}{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}}$$

Con primas variables....

$$= \frac{(\mathbf{v}_{\overline{n|}}\mathrm{A})_x}{(\mathbf{v}\,\ddot{a})_x}$$

en valores conmutados:

$$= \frac{k\mathrm{M}_x + h(\mathrm{R}_{x+1} - \mathrm{R}_{x+n})}{k\mathrm{N}_x - h\mathrm{S}_{x+1}}$$

Con n primas variables

$$= \frac{(\mathbf{v}_{\overline{n|}}\mathrm{A})_x}{(\mathbf{v}\,\ddot{a})_{x:\overline{n|}}}$$

en valores conmutados:

$$= \frac{k\mathrm{M}_x + h(\mathrm{R}_{x+1} - \mathrm{R}_{x+n})}{k\,(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}) + h\,(\mathrm{S}_{x+1} - \mathrm{S}_{x+n+1} - n\mathrm{N}_{x+n})}$$

Para un *seguro interceptado*:

Con $n+m$ pagos constantes...

$$= \frac{(\mathbf{v}_n/_m\mathrm{A})_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n+m|}}}$$

en valores de conmutación...

$$= \frac{k(M_{x+n} - M_{x+n+m}) + h(R_{x+n+1} - R_{x+n+m+1} - nM_{x+n+m})}{N_x - N_{x+n+m}}$$

Con $n + m$ pagos aritméticos

$$= \frac{(v_n/_m A)_x}{(v\ddot{a})_{x:\overline{n+m}|}}$$

en valores conmutados:

$$= \frac{k(M_{x+n} - M_{x+n+m}) + h(R_{x+n+1} - R_{x+n+m+1} - nM_{x+n+m})}{k(N_x - N_{x+n+m}) + h(S_{x+1} - S_{x+n+m+1} - (n+m) \cdot N_{x+n+m})}$$

Ahora primas para el *seguro dotal mixto a n aos aritmético*, con n pagos constantes.

$$= \frac{(vA)_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

en valores de conmutación, se tiene:

$$= \frac{k(M_x - M_{x+n}) + h(R_{x+1} - R_{x+n+1} - nM_{x+n}) + |k + n \cdot h| \cdot D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Con n pagos variables.

$$= \frac{(vA)_{x:\overline{n}|}}{(v\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}$$

$$= \frac{k(M_x - M_{x+n}) + h(R_{x+1} - R_{x+n+1} - nM_{x+n}) + |k + n \cdot h| \cdot D_{x+n}}{k(N_x - N_{x+n}) + h(S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n})}$$

5.3 Ejemplos

Calcular sobre la base de la tabla de mortalidad hipotética que se muestra al principio del trabajo para una persona de edad 35, la prima pura única de los siguientes seguros crecientes aritméticamente, para dos tipos de crecimento, uno con el comienzo de una unidad y una razón de 0.05 y el otro que crezca una unidad por periodo para:

a)Un Seguros de Vida Entera.

b)Un Seguro Temporal por 15 años.

c)Un Seguro en donde la suma asegurada deje de crecer pasados 10 años.

d)Un Seguro Diferido por 10 años.

e)Un Seguro Interceptado, diferido 5 años y temporal 10 años.

f)Un Seguro Dotal Mixto por 10 años.

a)

$$\begin{aligned}(vA)_{35} &= \frac{M_{35} + 0.05 \cdot R_{36}}{D_{35}} \\ &= \frac{5,543.45 + 0.05 \cdot 123,291.06}{65,387.30} \\ &= 0.179056223456\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(IA)_{35} &= \frac{R_{35}}{D_{35}} \\ &= \frac{128,834.51}{65,387.30} \\ &= 1.97032925354\end{aligned}$$

b)

$$(v/_{15}A)_{35} = \frac{(M_{35} - M_{50}) + 0.05 \cdot (R_{36} - R_{51} - 15 \cdot M_{50})}{D_{35}}$$

$$= \frac{(5,543.45 - 3,523.91) + 0.05 \cdot (123,291.06 - 56,852.84 - 15 \cdot 3,523.91)}{65,387.30}$$

$$= 0.041269764924$$

$$(I/_{15}A)_{35} = \frac{R_{35} - R_{50} - 15 \cdot M_{50}}{D_{35}}$$

$$= \frac{128,834.51 - 60,376.75 - 15 \cdot 3,523.91}{65,387.30}$$

$$= 0.2385648283382$$

c)

$$\begin{aligned}(v_{\overline{10|}}A)_{35} &= \frac{M_{35} + 0.05 \cdot (R_{36} - R_{45})}{D_{35}} \\ &= \frac{5,543.45 + 0.05 \cdot (123,291.06 - 79,865.84)}{65,387.30} \\ &= 0.117984853328\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(I_{\overline{10|}}A)_{35} &= \frac{R_{35} - R_{45}}{D_{35}} \\ &= \frac{128,834.51 - 79,865.84}{65,387.30} \\ &= 0.7489018509711\end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{v}_{10}/A)_{35} &= \frac{M_{45} + 0.05 \cdot R_{46}}{D_{35}} \\
&= \frac{4,151.21 + 0.05 \cdot 75,714.63}{65,387.30} \\
&= 0.121383533194
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}_{10}/A)_{x} &= \frac{R_{45}}{D_{35}} \\
&= \frac{79,865.84}{65,387.30} \\
&= 0.121383533194
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{v}_{5}/_{10}A)_{35} &= \frac{(M_{40} - M_{50}) + 0.05(R_{41} - R_{51} - 5 \cdot M_{50})}{D_{35}} \\
&= \frac{(4,817.02 - 3,523.91) + 0.05(97,783.30 - 56,852.84 - 5 \cdot 3,523.91)}{65,387.30} \\
&= 0.0376014226
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}_{5}/_{10}A)_{35} &= \frac{R_{40} - R_{50} - 5 \cdot M_{50}}{D_{35}} \\
&= \frac{102,600.32 - 60,376.75 - 5 \cdot 3,523.91}{65,387.30} \\
&= 0.376281326802
\end{aligned}
$$

f)

$$(vA)_{35:\overline{10}|} = (v/_{10}A)_{35} + [6] \cdot {}_{10}E_{35}$$

$$= \frac{(M_{35} - M_{45}) + 0.05(R_{36} - R_{46} - 10 \cdot M_{45}) + [6] \cdot D_{45}}{D_{35}}$$

$$= \frac{(5,543.45 - 4,151.21) + 0.05(123,291.06 - 75,714.63 - 10 \cdot 4,151.21) + [6] \cdot 29,288.99}{65,387.30}$$

$$= 2.713514650398$$

$$(IA)_{35:\overline{10}|} = \frac{R_{35} - R_{45} - 10 \cdot M_{45} + [11] \cdot D_{45}}{D_{35}}$$

$$= \frac{128,834.51 - 79,865.84 - 10 \cdot 4,151.21 + [11] \cdot 29,288.99}{65,387.30}$$

$$= 5.0412725616999$$

Ahora se pide encontrar las primas netas niveladas para algunos de los seguros que se han dasarrollado hasta ahora, usando las formas de crecimiento que se han seguido en los ejemplos hasta ahora mencionados y para una persona de edad 35, con las formas de pago siguientes:

a)Pagos en forma aritmética para un Seguro de Vida Entera.

b)Pagos en forma constante y aritmética para un Seguro de Vida Entera con crecimiento variable.

c)10 pagos en forma aritmética para un Seguro de Vida Entera y para un Seguro de Vida Entera con crecimiento aritmético.

d)15 pagos constantes para un Seguro de Vida Entera con crecimiento aritmético.

e)10 pagos variables para un seguro diferido 10 años.

f)Pagos aritméticos y constantes para un seguro aritmético diferido 10 años.

g)10 pagos variables para un seguro temporal aritmético de 15 años.

h)15 pagos constantes y 10 pagos aritméticos para un seguro interceptado aritmético, diferido 5 años y temporal 10 años.

a)

$$= \frac{A_{35}}{(v\ddot{a})_{35}}$$

$$= \frac{0.0847786955709}{76.2775592508}$$

$$= 0.00111450030687$$

b)

$$= \frac{(vA)_{35}}{\ddot{a}_{35}}$$

$$= \frac{1.027553974549}{12.35548707471}$$

$$0.08316580067439$$

$$= \frac{(vA)_x}{(v\ddot{a})_x}$$

$$= \frac{1.027553974549}{76.2775592508}$$

$$= 0.01347124874788$$

c)

$$= \frac{A_{35}}{(\mathbf{v}\ddot{a})_{35:\overline{10|}}}$$

$$= \frac{0.0847786955709}{20.94470111168}$$

$$= 0.004077395747$$

$$= \frac{(\mathbf{v}A)_{35}}{(\mathbf{v}\ddot{a})_{35:\overline{10|}}}$$

$$= \frac{1.027553974549}{20.94470111168}$$

$$= 0.04906033125371$$

d)

$$= \frac{(\mathbf{v}A)_{35}}{\ddot{a}_{35:\overline{15|}}}$$

$$= \frac{1.027553974549}{9.079035990169}$$

$$= 0.1131787533017$$

e)

$$= \frac{{}_{10}/A_{35}}{(\mathrm{v}\,\ddot{a})_{35:\overline{10}|}}$$

$$= \frac{0.6348648743716}{20.94470111168}$$

$$= 0.03031147930858$$

f)

$$= \frac{(\mathrm{v}_{10}/A)_{35}}{\ddot{a}_{35}}$$

$$= \frac{0.6424569450031}{12.35548707471}$$

$$= 0.0519770281157$$

$$= \frac{(\mathrm{v}_{10}/A)_{35}}{(\mathrm{v}\,\ddot{a})_{35}}$$

$$= \frac{0.6424569450031}{20.94470111168}$$

$$= 0.03067396099745$$

g)

$$= \frac{(\mathrm{v}/_{15}A)_{35}}{(\mathrm{v}\,\ddot{a})_{35:\overline{10}|}}$$

$$= \frac{0.134725321278}{20.94470111168}$$

$$= 0.05138323325759$$

h)

$$= \frac{(\mathbf{v}_5/{}_{10}\Lambda)_{35}}{\ddot{a}_{35:\overline{15|}}}$$

$$= \frac{0.1980287456433}{9.079035990169}$$

$$= 0.02181164893029$$

$$= \frac{(\mathbf{v}_5/{}_{10}\Lambda)_{35}}{(\mathbf{v}\ddot{a})_{35:\overline{10|}}}$$

$$= \frac{0.1980287456433}{20.94470111168}$$

$$= 0.009454837506971$$

Capítulo 6

Anualidades con Crecimiento Geométrico

6.1 Introducción

Algunos planes de seguros se operan bajo condiciones de actualización de beneficios y prima, esto significa que la suma asegurada y la prima pueden variar según algún índice inflacionario, lo cual implica que el crecimiento previsto es de tipo geométrico, ya que crece en función de un valor alcanzado hasta el período inmediato anterior.

En un plano más complejo, este crecimiento debería ser geométrico pero variable, sin embargo, en la práctica del seguro los planes deben ser contratados bajo condiciones de certidumbre, lo cual significa que se debe suponer una tasa constante de crecimiento geométrico.

Son típicos los casos en que la aseguradora se obliga a pagar, en caso de muerte, una suma asegurada inicial con el reconocimiento de un crecimiento anual compuesto de un $r\%$. Así mismo es frecuente también que el asegurado quede obligado a pagar primas que son crecientes a razón de un $r\%$ anual compuesto.

Todo esto implica que se tenga que desarrollar un planteamiento actuarial de cálculo de primas, sumas aseguradas y en consecuencia reservas con una variable de crecimiento geométrico.

En el presente capítulo se establece el desarrollo actuarial de primas con crecimiento geométrico.

6.2 Anualidades Vencidas

Antes que nada recordemos cómo es una progresión geométrica.

Sean, a el primer término y h la razón; período tras período aumenta de la siguiente manera:

$$a,\ ah,\ ah^2,\ ah^3,\ ah^4, \cdots$$

Hacemos que el primer término sea $a = 1$; por lo que vamos a multiplicar cada período, al tomar en cuenta la potencia de éste, va a ser por $(1 + r)$, que hace a $h^t = (1 + r)^t$, donde t, es el número del período; esta progresión queda como:

$$1,\ (1 + r),\ (1 + r)^2,\ (1 + r)^3,\ (1 + r)^4, \cdots$$

De aquí haremos una distinción con rentas con *crecimiento inmediato* y *diferido.*

6.2.1 Rentas Inmediatas

Sea $(Ga)_x$ — G es una relación con la palabra *geométrico* — el *valor actual* de una renta anticipada vitalicia que crece en forma geométrica, de forma tal que en el primer período tenemos el factor de $(1 + r)$, es decir con *crecimiento inmediato*[1].

Si tomamos el valor presente de cada uno de los pagos que se hacen en forma geométrica, se tiene:

$$(1 + r)\frac{l_{x+1}}{l_x}v + (1 + r)^2\frac{l_{x+2}}{l_x}v^2 + (1 + r)^3\frac{l_{x+3}}{l_x}v^3 + \cdots$$

[1] Más adelante se toma en cuenta el caso en que la renta comience en otro. *Crecimiento diferido.*

Entonces, la renta considerada es[2]:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{G}a)_x &= (1+r)\,\frac{l_{x+1}}{l_x}\,v + (1+r)^2\,\frac{l_{x+2}}{l_x}\,v^2 + (1+r)^3\,\frac{l_{x+3}}{l_x}\,v^3 + \cdots \\
&= \frac{(1+r)\,l_{x+1}\,v + (1+r)^2\,l_{x+2}\,v^2 + (1+r)^3\,l_{x+3}\,v^3 + \cdots}{l_x}
\end{aligned}
$$

Al multiplicar numerador y denominador por v^x, nos queda como:

$$
(\mathrm{G}a)_x = \frac{(1+r)\,l_{x+1}\,v^{x+1} + (1+r)^2\,l_{x+2}\,v^{x+2} + (1+r)^3\,l_{x+3}\,v^{x+3} + \cdots}{v^x l_x}
$$

Hay que recordar el ya conocido $v^{x+t}\,l_{x+t} = \mathrm{D}_{x+t}$ para tener:

$$
(\mathrm{G}a)_x = \frac{(1+r)\,\mathrm{D}_{x+1} + (1+r)^2\,\mathrm{D}_{x+2} + (1+r)^3\,\mathrm{D}_{x+3} + \cdots}{\mathrm{D}_x}
$$

Otra forma de verlo es a través de los compromisos:

de los asegurados,

$$
(\mathrm{G}a)_x \cdot \mathrm{D}_x
$$

y del asegurador...

$$
(1+r)\,\mathrm{D}_{x+1} + (1+r)^2\,\mathrm{D}_{x+2} + (1+r)^3\,\mathrm{D}_{x+3} + \cdots
$$

[2]El primer pago de la renta no es igual a uno, porque se ve afectado por el incremento geométrico al momento de la contratación.

Lo cual quedaría como:

$$(\mathrm{G}a)_x \cdot \mathrm{D}_x = (1+r)\,\mathrm{D}_{x+1} + (1+r)^2\,\mathrm{D}_{x+2} + (1+r)^3\,\mathrm{D}_{x+3} + \cdots$$

Ahora, vamos a introducir un *nuevo valor conmutado.*

Si multiplicamos y dividimos la fórmula anterior por el factor $(1+r)^x$, nos queda:

$$(\mathrm{G}a)_x = \frac{(1+r)^{x+1}\mathrm{D}_{x+1} + (1+r)^{x+2}\,\mathrm{D}_{x+2} + (1+r)^{x+3}\,\mathrm{D}_{x+3} + \cdots}{(1+r)^x\mathrm{D}_x}$$

Sea D' un *nuevo valor conmutado* que es igual a:

$$\begin{aligned} D'_x &= (1+r)^x\mathrm{D}_x \\ &= (1+r)^x\, v^x\, l_x \\ &= \frac{(1+r)^x}{(1+i)^x}\, l_x \\ &= \left(\frac{1+r}{1+i}\right)^x l_x \end{aligned}$$

Sea $v' = (1+i')^{-1} \Rightarrow D'_x = (1+i')^{-x} \cdot l_x$

Donde $i' = \frac{1+i}{1+r} - 1$

Como r e i son tasas de crecimiento, siempre son positivas.

En el caso de que $r = 0$, tenemos una anualidad constante a_x.

Retomando el caso de la anualidad $(\mathbf{G}a)_x$ con este nuevo valor conmutado,

$$(\mathbf{G}a)_x = \frac{D'_{x+1} + D'_{x+2} + D'_{x+3} + \cdots}{D'_x}$$

Ahora: Sea — como la definición de la N_x ya conocida — $N'_x = D'_x + D'_{x+1} + \cdots$, la cual lo tomaremos como otro *nuevo valor conmutado.*

$$(\mathbf{G}a)_x = \frac{N'_{x+1}}{D'_x}$$

6.2.2 Renta Temporal

Como se sabe en el caso temporal de cualquier tipo de renta, se toman en consideración sólo los primeros n términos[3]: A saber, el compromiso de los asegurados es, como sabemos:

$$\mathrm{D}_x \cdot (\mathbf{G}a)_{x:\overline{n}|}$$

el compromiso del asegurador...

$$(1 + r)\,\mathrm{D}_{x+1} + (1 + r)^2\,\mathrm{D}_{x+2} + (1 + r)^3\,\mathrm{D}_{x+3} + \cdots + (1 + r)^n\,\mathrm{D}_{x+n}$$

Al igualar los compromisos del asegurador y de los asegurados, queda como:

$$\mathrm{D}_x \cdot (\mathbf{G}a)_{x:\overline{n}|} = (1 + r)\,\mathrm{D}_{x+1} + (1 + r)^2\,\mathrm{D}_{x+2} + \cdots + (1 + r)^n\,\mathrm{D}_{x+n}$$

$$(\mathbf{G}a)_{x:\overline{n}|} = \frac{(1 + r)\,\mathrm{D}_{x+1} + (1 + r)^2\,\mathrm{D}_{x+2} + \cdots + (1 + r)^n\,\mathrm{D}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}$$

[3]En algún momento se utilizará la siguiente igualdad: $(\mathbf{G}a)_{x:\overline{n}|} = (\mathbf{G}/_n a)_x$.

Ahora, al multiplicar y dividir por $(1 + r)^x$, tenemos:

$$(\mathrm{G}a)_{x:\overline{n}|} = \frac{(1+r)^{x+1}\,\mathrm{D}_{x+1} + (1+r)^{x+2}\,\mathrm{D}_{x+2} + \cdots + (1+r)^{x+n}\,\mathrm{D}_{x+n}}{(1+r)^{x}\,\mathrm{D}_{x}}$$

Con los *nuevos valores de conmutación* D'_x y N'_x...

$$\begin{aligned}(\mathrm{G}a)_{x:\overline{n}|} &= \frac{D'_{x+1} + D'_{x+2} + \cdots + D'_{x+n}}{D'_x}\\ &= \frac{N'_{x+1} - N'_{x+n+1}}{D'_x}\end{aligned}$$

6.2.3 Renta Diferida con Crecimiento Inmediato

Como sabemos ésta empieza a ser válida después de transcurridos n años, es decir, tomamos como punto de partida el térmimo $n + 1$.

Una vez más, recordamos que el compromiso de todos los asegurados es pagar esa prima y que la denotaremos como sigue:

$$(\mathrm{G}_n/a)_x \cdot \mathrm{D}_x$$

y el del asegurador es[4]:

$$(1 + r)^{n+1}\,\mathrm{D}_{x+n+1} + (1 + r)^{n+2}\,\mathrm{D}_{x+n+2} + (1 + r)^{n+3}\,\mathrm{D}_{x+n+3} + \cdots$$

al igualar y despejar $(\mathrm{G}_n/a)_x$, tenemos que:

$$(\mathrm{G}_n/a)_x = \frac{(1 + r)^{n+1}\,\mathrm{D}_{x+n+1} + (1 + r)^{n+2}\,\mathrm{D}_{x+n+2} + \cdots}{\mathrm{D}_x}$$

[4]El primer factor se ve afectado por $(1 + r)^{n+1}$, porque se encuentra en el período $n + 1$.

Como lo hicimos anteriormente, multiplicamos y dividimos por $(1 + r)^x$, y usamos los nuevos valores de conmutación, D'_x y N'_x, entonces la fórmula anterior nos queda:

$$\begin{aligned}(\mathrm{G}_n/a)_x &= \frac{D'_{x+n+1} + D'_{x+n+2} + D'_{x+n+3} + \cdots}{D'_x} \\ &= \frac{N'_{x+n+1}}{D'_x}\end{aligned}$$

6.2.4 Renta Diferida con Crecimiento Diferido

La diferencia de esta renta con la anterior es que su crecimiento geométrico es después de transcurridos n períodos. El compromiso de todos los asegurados es pagar esa prima y la denotaremos como sigue:

$$(\mathrm{G}_n/a)_x^{dn} \cdot \mathrm{D}_x$$

y el del asegurador es[5]:

$$(1 + r)\,\mathrm{D}_{x+n+1} + (1 + r)^2\,\mathrm{D}_{x+n+2} + (1 + r)^3\,\mathrm{D}_{x+n+3} + \cdots$$

Al igualar y despejar $(\mathrm{G}_n/a)_x^{dn}$, tenemos que:

$$(\mathrm{G}_n/a)_x^{dn} = \frac{(1 + r)\,\mathrm{D}_{x+n+1} + (1 + r)^2\,\mathrm{D}_{x+n+2} + \cdots}{\mathrm{D}_x}$$

Como lo hicimos anteriormente, multiplicamos y dividimos por $(1 + r)^{x+n}$, y usamos los nuevos valores de conmutación, D'_x y N'_x, entonces la fórmula anterior nos queda:

$$(\mathrm{G}_n/a)_x^{dn} = \frac{D'_{x+n+1} + D'_{x+n+2} + D'_{x+n+3} + \cdots}{(1 + r)^n D'_x}$$

[5]El primer factor sólo se ve afectado por $(1 + r)$, porque se encuentra en el período $n + 1$.

$$= \frac{N'_{x+n+1}}{(1 + r)^n D'_x}$$

$$= \frac{(\mathrm{G}_n/a)_x}{(1 + r)^n}$$

Para el caso más general donde el período de crecimiento sea m, con $m \leq n$. Que denotaremos como: $(\mathrm{G}_n/a)_x^{dm}$.

El compromiso de los asegurados es:

$$(\mathrm{G}_n/a)_x^{dm} \cdot \mathrm{D}_x$$

y el del asegurador...

$$(1 + r)^{n-m+1}\,\mathrm{D}_{x+n+1} + (1 + r)^{n-m+2}\,\mathrm{D}_{x+n+2} + (1 + r)^{n-m+3}\,\mathrm{D}_{x+n+3} + \cdots$$

Al igualar y despejar $(\mathrm{G}_n/a)_x^{dm}$, tenemos que:

$$(\mathrm{G}_n/a)_x^{dm} = \frac{(1 + r)^{n+1}\,\mathrm{D}_{x+n+1} + (1 + r)^{n+2}\,\mathrm{D}_{x+n+2} + \cdots}{\mathrm{D}_x} \cdot (1 + r)^{-m}$$

Como lo hicimos anteriormente, pero ahora multiplicamos y dividimos por $(1 + r)^x$, y usamos los nuevos valores de conmutación, D'_x y N'_x, entonces la fórmula anterior nos queda:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{G}_n/a)_x^{dm} &= \frac{D'_{x+n+1} + D'_{x+n+2} + D'_{x+n+3} + \cdots}{(1 + r)^m D'_x} \\
&= \frac{N'_{x+n+1}}{(1 + r)^m D'_x} \\
&= \frac{(\mathrm{G}_n/a)_x}{(1 + r)^m}
\end{aligned}$$

6.2.5 Renta Interceptada con Crecimiento Inmediato

Estas rentas como sabemos son diferidas y temporales. Decimos que es diferida por n años y temporal por m. Tomamos desde el período $n+1$, hasta el $n+m$, y la denotamos como $(\mathrm{G}_n/_m a)_x$.

el compromiso de los asegurados queda como:

$$\mathrm{D}_x \cdot (\mathrm{G}_n/_m a)_x$$

y, el del asegurador...

$$(1+r)^{n+1}\mathrm{D}_{x+n+1} + (1+r)^{n+2}\mathrm{D}_{x+n+2} + \cdots + (1+r)^{n+m}\mathrm{D}_{x+n+m}$$

Al igualar los compromisos y despejar *el valor actual* hay que multiplicarlo y dividirlo por $(1+r)^x$, y con la sustitución de los *nuevos valores de conmutación*, se forma lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\mathrm{G}_n/_m a)_x &= \frac{D'_{x+n+1} + D'_{x+n+2} + \cdots + D'_{x+n+m}}{D'_x} \\ &= \frac{N'_{x+n+1} - N'_{x+n+m+1}}{D'_x}\end{aligned}$$

6.2.6 Renta Interceptada con Crecimiento Diferido

Estas rentas como sabemos son diferidas y temporales. Decimos que es diferida por n años y temporal por m. Tomamos desde el período $n+1$, hasta el $n+m$, y la denotamos como $(\mathrm{G}_n/_m a)_x^{dn}$.[6]

[6]Esto es dado que el crecimiento geométrico empieza en el período n.

El compromiso de los asegurados queda como:

$$\mathrm{D}_x \cdot (\mathbf{G}_n/_m a)_x^{dn}$$

y el del asegurador...

$$(1 + r)\mathrm{D}_{x+n+1} + (1 + r)^2\, \mathrm{D}_{x+n+2} + \cdots + (1 + r)^m\, \mathrm{D}_{x+n+m}$$

Igualados los compromisos, despejado *el valor actual*, hay que multiplicar y dividir por $(1 + r)^{x+n}$, y sustituir los *nuevos valores de conmutación*, para formar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{G}_n/_m a)_x^{dn} &= \frac{D'_{x+n+1} + D'_{x+n+2} + \cdots + D'_{x+n+m}}{(1 + r)^n D'_x} \\
&= \frac{N'_{x+n+1} - N'_{x+n+m+1}}{(1 + r)^n D'_x} \\
&= \frac{(\mathbf{G}_n/_m a)_x}{(1 + r)^n}
\end{aligned}$$

Si queremos el crecimiento geomtrico antes del periodo n, digamos p entonces denotamos a $(\mathbf{G}_n/_m a)_x^{dp}$.[7]

El compromiso de los asegurados queda como:

$$\mathrm{D}_x \cdot (\mathbf{G}_n/_m a)_x^{dp}$$

y el del asegurador...

$$(1 + r)^{n-p+1}\mathrm{D}_{x+n+1} + (1 + r)^{n-p+2}\, \mathrm{D}_{x+n+2} + \cdots + (1 + r)^{n-p+m}\, \mathrm{D}_{x+n+m}$$

[7]Esto es dado que el crecimiento geométrico empieza en el período p, en donde $p \leq n$.

Igualados los compromisos, despejado *el valor actual*, hay que multiplicar y dividir por $(1 + r)^x$, y sustituir los *nuevos valores de conmutación*, para formar lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}_n/_m a)_x^{dp} &= \frac{D'_{x+n+1} + D'_{x+n+2} + \cdots + D'_{x+n+m}}{(1 + r)^p D'_x} \\
&= \frac{N'_{x+n+1} - N'_{x+n+m+1}}{(1 + r)^p D'_x} \\
&= \frac{(\mathbf{G}_n/_m a)_x}{(1 + r)^p}
\end{aligned}
$$

Si $p = n$ obtenemos la anterior.

6.2.7 Relaciones Interesantes

Existen muchas relaciones entre las distintas rentas.

Por ejemplo, con la renta *temporal* — a n años vencida —, que es igual a una renta inmediata, menos una renta diferida de n años, es decir:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}a)_{x:\overline{n|}} &= (\mathbf{G}a)_x - (\mathbf{G}_n a)_x \\
&= \frac{N'_{x+1}}{D'_x} - \frac{N'_{x+n+1}}{D'_x} \\
&= \frac{N'_{x+1} - N'_{x+n+1}}{D'_x}
\end{aligned}
$$

Para el caso diferido...

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}_n/a)_x &= (\mathbf{G}a)_x - (\mathbf{G}a)_{x:\overline{n|}} \\
&= \frac{N'_{x+1}}{D'_x} - \frac{N'_{x+1} - N'_{x+n+1}}{D'_x}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{N'_{x+n+1}}{D'_x}$$

Para la *renta interceptada*, tomamos una renta diferida por n años menos una diferida por $n + m$, en fórmulas, lo anterior queda como:

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}_n/_m a)_x &= (\mathbf{G}_n/a)_x - (\mathbf{G}_{n+m}/a)_x \\ &= \frac{N'_{x+n+1}}{D'_x} - \frac{N'_{x+n+m+1}}{D'_x} \\ &= \frac{N'_{x+n+1} - N'_{x+n+m+1}}{D'_x}\end{aligned}$$

Para el de crecimiento diferido...

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}_n/_m a)_x^{dp} &= (\mathbf{G}_n/a)_x^{dp} - /(\mathbf{G}_{n+m} a)_x^{dp} \\ &= \frac{N'_{x+n+1}}{(1+r)^p D'_x} - \frac{N'_{x+n+m+1}}{(1+r)^p D'_x} \\ &= \frac{N'_{x+n+1} - N'_{x+n+m+1}}{(1+r)^p D'_x}\end{aligned}$$

Hay otra forma de obtener esta renta y es por medio de la diferencia de dos rentas temporales. A una *temporal* por $n + m$ años, se le resta una *temporal* por n y así:

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}_n/_m a)_x &= (\mathbf{G}a)_{x:\overline{n+m}|} - (\mathbf{G}a)_{x:\overline{n}|} \\ &= \frac{N'_{x+n+1} - N'_{x+n+m+1}}{D'_x}\end{aligned}$$

6.3 Anualidades Anticipadas

Este tipo de anualidades no siempre se van a comportar exactamente igual que el caso de anualidades constantes y no basta con sumar una *unidad* a una anualidad *vencida* para obtener una *anticipada*, salvo algunas excepciones que se estudiarán durante el capítulo. En seguida se desarrollan las anualidades conocidas pero con crecimiento geométrico.

6.3.1 Renta Inmediata

Existen algunas combinaciones de este tipo de rentas; puesto que nosotros podemos elegir el momento del crecimiento, primero analizaremos los tipos de renta que son convenientes para el desarrollo de una analogía entre las rentas ya conocidas y las de crecimiento geométrico.

Empezaremos por estudiar las rentas anticipadas y geométricas que vamos a denotar como:

$$(\mathbf{G}\,\ddot{a})_x$$

Donde el compromiso de los asegurados, queda, como sabemos:

$$(\mathbf{G}\,\ddot{a})_x \cdot \mathrm{D}_x$$

y el del asegurador...

$$\mathrm{D}_x + (1+r)\mathrm{D}_{x+1} + (1+r)^2\,\mathrm{D}_{x+2} + (1+r)^3\,\mathrm{D}_{x+3} + \cdots$$

Al igualar los compromisos,

$$(\mathbf{G}\,\ddot{a})_x \cdot \mathrm{D}_x = \mathrm{D}_x + (1+r)\mathrm{D}_{x+1} + (1+r)^2\,\mathrm{D}_{x+2} + (1+r)^3\,\mathrm{D}_{x+3} + \cdots$$

y despejar el *valor actual* quedaría como:

$$(\mathbf{G}\,\ddot{a})_x = \frac{\mathrm{D}_x + (1+r)\mathrm{D}_{x+1} + (1+r)^2\,\mathrm{D}_{x+2} + \cdots}{\mathrm{D}_x}$$

Si se multiplica y divide por el factor $(1 + r)^x$, tenemos:

$$(\mathbf{G}\,\ddot{a})_x = \frac{(1+r)^x\,\mathrm{D}_x + (1+r)^{x+1}\mathrm{D}_{x+1} + (1+r)^{x+2}\,\mathrm{D}_{x+2} + \cdots}{(1+r)^x\mathrm{D}_x}$$

Y al usar los nuevos *valores de conmutación*...

$$\begin{aligned}
(\mathbf{G}\,\ddot{a})_x &= \frac{(1+r)^x\,\mathrm{D}_x + (1+r)^{x+1}\mathrm{D}_{x+1} + (1+r)^{x+2}\,\mathrm{D}_{x+2} + \cdots}{(1+r)^x\mathrm{D}_x} \\
&= \frac{D'_x + D'_{x+1} + D'_{x+2} + \cdots}{D'_x} \\
&= \frac{N'_x}{D'_x}
\end{aligned}$$

6.3.2 Renta Temporal

Como sabemos, se toman a consideración sólo los primeros n términos.

Entonces el compromiso de los asegurados es:

$$\mathrm{D}_x \cdot (\mathbf{G}\,\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$$

el compromiso del asegurador...

$$\mathrm{D}_x + (1+r)\,\mathrm{D}_{x+1} + (1+r)^2\,\mathrm{D}_{x+2} + \cdots + (1+r)^{n-1}\,\mathrm{D}_{x+n-1}$$

Al igualar los compromisos, el del asegurador y el de los asegurados, nos queda como:

$$\begin{aligned} D_x \cdot (G\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= D_x + (1+r)\, D_{x+1} + \cdots + (1+r)^{n-1}\, D_{x+n-1} \\ \Rightarrow (G\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \frac{D_x + (1+r)\, D_{x+1} + \cdots + (1+r)^{n-1}\, D_{x+n-1}}{D_x} \end{aligned}$$

Ahora, si multiplimos y dividimos por $(1+r)^x$, tenemos:

$$(G\ddot{a}\,)_{x:\overline{n}|} = \frac{(1+r)^x\, D_x + (1+r)^{x+1}\, D_{x+1} + \cdots + (1+r)^{x+n-1}\, D_{x+n-1}}{(1+r)^x\, D_x}$$

Al sustituir los *nuevos valores de conmutación* D'_x y N'_x...

$$\begin{aligned} (G\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \frac{D'_x + D'_{x+1} + D'_{x+2} + \cdots + D'_{x+n-1}}{D'_x} \\ &= \frac{N'_x - N'_{x+n}}{D'_x} \end{aligned}$$

6.3.3 Renta Diferida con Crecimiento Inmediato

Esta anualidad empieza a ser válida después de transcurridos n años, y como es anticipada tomamos como punto de partida el términmo n, para el diferimiento del pago que esta comprometido el asegurador más no para el crecimiento geométrico, que será válido desde el comienzo de la contratación[8].

Una vez más recordamos que el compromiso de todos los asegurados es pagar esa prima y que lo denotaremos como sigue:

$$(G_n/\ddot{a})_x \cdot D_x$$

[8] De esta manera el crecimiento geométrico empezará desde el primer período.

y el del asegurador es:

$$(1 + r)^n \, \mathrm{D}_{x+n} + (1 + r)^{n+1} \, \mathrm{D}_{x+n+1} + (1 + r)^{n+2} \, \mathrm{D}_{x+n+2} + \cdots$$

Al igualar y despejar $(\mathbf{G}_n/\ddot{a})_x$, tenemos que:

$$(\mathbf{G}_n/\ddot{a})_x = \frac{(1 + r)^n \, \mathrm{D}_{x+n} + (1 + r)^{n+1} \, \mathrm{D}_{x+n+1} + \cdots}{\mathrm{D}_x}$$

Como lo hicimos anteriormente, multiplicamos y dividimos ahora por $(1 + r)^x$, y usamos los nuevos valores de conmutación, D'_x y N'_x, entonces la fórmula anterior nos queda:

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}_n/\ddot{a})_x &= \frac{D'_{x+n} + D'_{x+n+1} + D'_{x+n+2} + \cdots}{D'_x} \\ &= \frac{N'_{x+n}}{D'_x}\end{aligned}$$

6.3.4 Renta Diferida con Crecimiento Diferido

Ahora lo que se puede hacer es una anualidad con crecimiento diferido el mismo tiempo que el diferimiento de la renta n.[9]

A esta renta la denotaremos como sigue:

$$(\mathbf{G}_n/\ddot{a})_x^{dn} \cdot \mathrm{D}_x$$

Donde

$$(\mathbf{G}_n/\ddot{a})_x^{dn} = \frac{N'_{x+n}}{D'_x(1 + r)^n}$$

[9] En este caso el primer pago que el asegurador se compromete a hacer es de una unidad monetaria.

Podríamos también intentar con una renta con crecimiento geométrico diferido en un período m y diferida n, con $m \leq n$.

$$(\mathrm{G}_n/\ddot{a})_x^{dm} = \frac{N'_{x+n}}{D'_x(1 + r)^m}$$

6.3.5 Renta Interceptada

Vamos a decir que esta renta es diferida por n años y temporal por m. Tomamos desde el período n, hasta el $n + m - 1$, y la denotamos como ${}_n/_m(\mathrm{G}\,\ddot{a})_x$.

El compromiso de los asegurados queda como:

$$\mathrm{D}_x \cdot (\mathrm{G}_n/_m\ddot{a})_x$$

y el del asegurador...

$$(1 + r)^n\,\mathrm{D}_{x+n} + (1 + r)^{n+1}\,\mathrm{D}_{x+n+1} + \cdots + (1 + r)^{n+m-1}\,\mathrm{D}_{x+n+m-1}$$

Otra vez igualamos los compromisos, despejamos *el valor actual* y al multiplicar y dividir por $(1+r)^x$, se sustituyen los nuevos valores de conmutación y se forma lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\mathrm{G}_n/_m\ddot{a})_x &= \frac{D'_{x+n} + D'_{x+n+1} + \cdots + D'_{x+n+m-1}}{D'_x} \\ &= \frac{N'_{x+n} - N'_{x+n+m}}{D'_x}\end{aligned}$$

Por otro lado podemos hacer otro tipo de renta en donde el crecimiento sea independiente del diferimiento de la renta.

Sea p el período de comienzo del crecimiento geométrico, en donde $p \leq n$. [10]

[10] El periodo p también podría estar después de n sólo que se tendría cuidado de como sumar una renta constante después del periodo n hasta el p.

Si denotamos este tipo de renta como:

$$({\bf G}_n/_m\ddot{a})_x^{dp}$$

Entonces quedaría como:

$$({\bf G}_n/_m\ddot{a})_x^{dp} = \frac{N'_{x+n} - N'_{x+n+m}}{D'_x(1 + r)^p}$$

6.3.6 Relaciones Interesantes

Una renta vitalicia anticipada es igual a una renta vencida más uno, es decir:

$$\begin{aligned}
({\bf G}\ddot{a})_x &= 1 + ({\bf G}a)_x \\
&= 1 + \frac{N'_{x+1}}{D'_x} \\
&= \frac{D'_x + N'_{x+1}}{D'_x} \\
&= \frac{N'_x}{D'_x}
\end{aligned}$$

De este modo para la renta *temporal* se tiene una relación análoga, es decir:

$$\begin{aligned}
({\bf G}\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= 1 + ({\bf G}a)_{x:\overline{n-1}|} \\
&= 1 + \frac{N'_{x+1} - N'_{x+n}}{D'_x} \\
&= \frac{D'_x + N'_{x+1} - N'_{x+n}}{D'_x} \\
&= \frac{N'_x - N'_{x+n}}{D'_x}
\end{aligned}$$

Con la renta *temporal* — a n años anticipada —, que es igual a una renta inmediata anticipada menos una renta diferida n años, anticipada también:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}\,\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= (\mathbf{G}\,\ddot{a})_x - (\mathbf{G}_n/\,\ddot{a})_x \\
&= \frac{N'_x}{D'_x} - \frac{N'_{x+n}}{D'_x} \\
&= \frac{N'_x - N'_{x+n}}{D'_x} \\
&= (\mathbf{G}\,\ddot{a})_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

Para la renta *interceptada*, tenemos la siguiente relación:

Vamos a restar de una renta *diferida inmediata* n años, una diferida, también inmediata por $n + m$, en fórmulas, lo anterior queda como:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}_n/_m\ddot{a})_x &= (\mathbf{G}_n/\,\ddot{a})_x - (\mathbf{G}_{n+m}/\,\ddot{a})_x \\
&= \frac{N'_{x+n}}{D'_x} - \frac{N'_{x+n+m}}{D'_x} \\
&= \frac{N'_{x+n} - N'_{x+n+m}}{D'_x} \\
&= (\mathbf{G}_n/_m\ddot{a})_x
\end{aligned}
$$

Para el caso *interceptado con crecimiento geométrico diferido* p, tenemos la siguiente relación[11]:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}_n/_m\ddot{a})_x^{dp} &= (\mathbf{G}_n/\,\ddot{a})_x^{dp} - (\mathbf{G}_{n+m}/\,\ddot{a})_x^{dp} \\
&= \frac{N'_{x+n}}{D'_x(1\,+\,r)^p} - \frac{N'_{x+n+m}}{D'_x(1\,+\,r)^p}
\end{aligned}
$$

[11]Por supuesto en este caso $p \leq n$.

$$= \frac{N'_{x+n} - N'_{x+n+m}}{D'_x(1 + r)^p}$$

Existen otras relaciones no menos interesantes, por ejemplo se puede relacionar una renta diferida inmediata con una diferida también pero con el crecimiento geométrico diferido p períodos...

$$(\mathrm{G}_n/_m\ddot{a})_x = (\mathrm{G}_m/\ddot{a})_x^{dp} \cdot (1 + r)^p$$

6.4 Ejemplos

Calcular sobre la base de las tablas de mortalidad hipotéticas que se muestran al principio del trabajo, para una persona de edad 35, el valor actual de lo siguiente para los dos tipos de renta, vencida y anticipada, cuando el crecimiento geométrico es de 5% por periodo y el interés técnico del 8con la unidad:
a)Una Renta Inmediata.
b)Una Renta Temporal por 10 periodos.
c)Una Renta Diferida 15 años con Crecimiento Inmediato.
d)Dos Rentas Diferidas 15 años, una con Crecimiento Diferido el mismo tiempo y otra con el crecimiento diferido 10 años.
e)Dos Rentas Interceptadas diferida por 5 y temporal por 10 periodos, una con crecimiento geométrico inmediato y otra con crecimiento diferido por 5 periodos .

Antes que nada observamos la Tabla-1 y en lugar de poner la tasa de interés, vamos a poner ahora el equivalente en los nuevos valores conmutados, que es:

Recordemos que:

$$D'_x = (1.05)^x \mathrm{D}_x$$

Por otro lado tenemos:

$$D'_x = \left(\frac{1+r}{1+i}\right)^x \cdot l_x$$

$\Rightarrow$

$$i' = \frac{1.08}{1.05} - 1 = 0.028571429$$

Y ese valor lo ponemos en la nueva *tasa de interés*, obteniéndo así la Tabla-2, la que vamos a ocupar para los siguientes ejemplos:

Observamos como es el crecimiento geométrico:

$$1.0\,,\ 1.05\,,\ 1.103\,,\ 1.158\,,\ 1.216\ \ldots,\ (1.05)^t$$

a)

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}a)_{35} &= \frac{N'_{36}}{D'_{35}} \\ &= \frac{8,115,118.51}{360,677.35} \\ &= 22.49966197\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}\ddot{a})_{35} &= \frac{N'_{35}}{D'_{35}} \\ &= \frac{8,475,795.86}{360,677.35} \\ &= 23.49966212\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}a)_{35:\overline{10|}} &= \frac{N'_{36} - N'_{46}}{D'_{35}} \\
&= \frac{8,115,118.51 - 5,064,658.18}{360,677.35} \\
&= 21.79364616
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}\ddot{a})_{35:\overline{10|}} &= \frac{N'_{35} - N'_{45}}{D'_{35}} \\
&= \frac{8,475,795.86 - 5,327,819.98}{360,677.35} \\
&= 8.72795549
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}_{15}/a)_{35} &= \frac{N'_{51}}{D'_{35}} \\
&= \frac{3,872,938.65}{360,677.35} \\
&= 10.73795909
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}_{15}/\ddot{a})_{35} &= \frac{N'_{50}}{D'_{35}} \\
&= \frac{4,095,330.64}{360,677.35} \\
&= 11.35455446
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}_{15}/a)^{d15}_{35} &= \frac{(\mathbf{G}_{15}/a)_{35}}{(1.05)^{15}} \\
&= \frac{10.73795909}{(1.05)^{15}} \\
&= 5.16514192
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}_{15}/\ddot{a})^{d15}_{35} &= \frac{(\mathbf{G}_{15}/\ddot{a})_{35}}{(1.05)^{10}} \\
&= \frac{11.35455446}{(1.05)^{15}} \\
&= 5.46173984
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}_{15}/a)^{d10}_{35} &= \frac{(\mathbf{G}_{15}/a)_{35}}{(1.05)^{10}} \\
&= \frac{10.73795909}{(1.05)^{10}} \\
&= 6.59217540
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}_{15}/\ddot{a})^{d10}_{35} &= \frac{(\mathbf{G}_{15}/\ddot{a})_{35}}{(1.05)^{10}} \\
&= \frac{11.35455446}{(1.05)^{10}} \\
&= 6.97071147
\end{aligned}
$$

e)

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}_5/{}_{10}a)_{35} &= \frac{N'_{41} - N'_{51}}{D'_{35}} \\ &= \frac{6,469,735.70 - 3,872,938.65}{360,677.35} \\ &= 7.19977849\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}_5/{}_{10}\ddot{a})_{35} &= \frac{N'_{40} - N'_{50}}{D'_{35}} \\ &= \frac{6,778,629.25 - 4,095,330.64}{360,677.35} \\ &= 7.43960937\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}_5/{}_{10}a)^{d5}_{35} &= \frac{(\mathbf{G}_5/{}_{10}a)_{35}}{(1.05)^5} \\ &= \frac{7.19977849}{(1.05)^5} \\ &= 5.64121484\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}_5/{}_{10}\ddot{a})^{d5}_{35} &= \frac{(\mathbf{G}_5/{}_{10}\ddot{a})_{35}}{(1.05)^5} \\ &= \frac{7.43960937}{(1.05)^5} \\ &= 5.82912861\end{aligned}$$

Capítulo 7

Seguros Variables con Crecimiento Geométrico

7.1 Prima Neta Única

7.1.1 Seguro de Vida Entera

Como sabemos el seguro de vida entera cubre el riesgo de muerte del asegurado. Como vimos en las anualidades crecientes geométricamente. Este seguro será tal, que si el asegurado muere en el curso del primer año, los beneficiarios recibirían una cantidad de $(1 + r)$, en el caso de que falleciera en el curso del año dos, recibirían la cantidad $(1 + r)^2$, en el curso del tercer año, $(1 + r)^3$, y así sucesivamente.

Si en el año t, el asegurado muere, éste mismo abona la suma de $(1 + r)^t$. Y como en la teoría el pago se hace a fin del año su valor presente es $v^t \cdot (1 + r)^t$.

Para determinar el valor de la prima pura única $(GA)_x$ — G es una relación con la palabra *Geométrico* —. Recordamos el compromiso del asegurador:

$$(1 + r)\, v d_x + (1 + r)^2 v^2 d_{x+1} + (1 + r)^3 v^3 d_{x+2} + \dots$$

Ahora, el compromiso de los asegurados es igual a todas las l_x primas de $(GA)_x$ cada una, que deben pagar en el acto.

Al igualar los compromisos:

$$l_x \cdot (\mathrm{GA})_x = (1 + r)\,vd_x + (1 + r)^2 v^2 d_{x+1} + (1 + r)^3 v^3 d_{x+2} + \dots$$

y despejar $(\mathrm{GA})_x$, tenemos:

$$(\mathrm{GA})_x = \frac{(1 + r)\,vd_x + (1 + r)^2 v^2 d_{x+1} + (1 + r)^3 v^3 d_{x+2} + \dots}{l_x}$$

Al multiplicar por v^x el numerador y el denominador, se tiene que:

$$(\mathrm{GA})_x = \frac{(1 + r)\,v^{x+1} d_x + (1 + r)^2 v^{x+2} d_{x+1} + (1 + r)^3 v^{x+3} d_{x+2} + \dots}{v^x l_x}$$

Recordamos a C_x y M_x y entonces $(\mathrm{GA})_x$ se convierte en:

$$(\mathrm{GA})_x = \frac{(1 + r)\,\mathrm{C}_x + (1 + r)^2\,\mathrm{C}_{x+1} + (1 + r)^3\,\mathrm{C}_{x+2} + \dots}{\mathrm{D}_x}$$

Vamos a multiplicar numerador y denominador por $(1 + r)^x$...

$$(\mathrm{GA})_x = \frac{(1 + r)^{x+1}\,\mathrm{C}_x + (1 + r)^{x+2}\,\mathrm{C}_{x+1} + (1 + r)^{x+3}\,\mathrm{C}_{x+2} + \dots}{(1 + r)^x\,\mathrm{D}_x}$$

Sea C'_x un *nuevo valor conmutado*, tal que:

$$C'_x = (1 + r)^{x+1}\,\mathrm{C}_x$$

En general...

$$C'_{x+t} = (1 + r)^{x+t+1}\,\mathrm{C}_{x+t}$$

Además recordemos del capítulo anterior quien es D'_x, se tiene:

$$(\text{ GA})_x = \frac{C'_x + C'_{x+1} + C'_{x+2} + \dots}{D'_x}$$

Hagamos una analogía con M_x...

Sea M'_x otro *nuevo valor conmutado*, que es igual a:

$$M'_x = C'_x + C'_{x+1} + C'_{x+2} + \cdots$$

y entonces,

$$(\text{ GA})_x = \frac{M'_x}{D'_x}$$

7.1.2 Seguro Diferido con Crecimiento Inmediato

Como ya sabemos un seguro brinda el beneficio contratado a un asegurado, si fallece después de n años de haberlo contratado.

Sea $(\mathbf{G}_n/\text{A})_x$ la prima neta única de este seguro y de este modo...

El compromiso de los asegurados es:

$$\text{D}_x \cdot (\mathbf{G}_n/\text{A})_x$$

Como podemos ver, el compromiso del asegurador empieza a correr a partir del año $n+1$, sin embargo, el crecimiento geométrico es inmediato desde el momento de la contratación, así:

$$(1 + r)^{n+1}\,\text{C}_{x+n} + (1 + r)^{n+2}\,\text{C}_{x+n+1} + (1 + r)^{n+3}\,\text{C}_{x+n+2} + \dots$$

al igualar los compromisos y despejar la prima neta única, se tiene:

$$(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x = \frac{(1+r)^{n+1}\,\mathrm{C}_{x+n} + (1+r)^{n+2}\,\mathrm{C}_{x+n+1} + \cdots}{\mathrm{D}_x}$$

al multiplicar numerador y denominador por $(1+r)^x$, tenemos que:

$$(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x = \frac{(1+r)^{x+n+1}\,\mathrm{C}_{x+n} + (1+r)^{x+n+2}\,\mathrm{C}_{x+n+1} + \cdots}{(1+r)^x\,\mathrm{D}_x}$$

Con el *nuevo valor de conmutación* C'_x...

$$(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x = \frac{C'_{x+n} + C'_{x+n+1} + C'_{x+n+2} + \ldots}{D'_x}$$

y si recordamos el otro *nuevo valor de conmutación* M'_x, entonces:

$$(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x = \frac{M'_{x+n}}{D'_x}$$

7.1.3 Seguro Diferido con Crecimiento Diferido

Para este caso podemos dar el ejemplo general para un diferimiento en el crecimiento geométrico de p años de haberlo contratado y mantenido el diferimiento del seguro de n períodos. En donde $p \leq n$.

Sea $(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x^{dp}$ la prima neta única de este seguro y de este modo...

El compromiso de los asegurados es:

$$\mathrm{D}_x \cdot (\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x^{dp}$$

Como podemos ver, el compromiso del asegurador empieza a correr a partir del año $n+1$, más sin embargo, el crecimiento geométrico comienza con una unidad en el período p, así:

$$(1+r)^{n+1-p}\,C_{x+n} + (1+r)^{n+2-p}\,C_{x+n+1} + (1+r)^{n+3-p}\,C_{x+n+2} + \dots$$

al igualar los compromisos y despejar la prima neta única, se tiene:

$$(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x^{dp} = \frac{(1+r)^{n+1}\,C_{x+n} + (1+r)^{n+2}\,C_{x+n+1} + \cdots}{\mathrm{D}_x} \cdot \frac{1}{(1+r)^p}$$

al multiplicar numerador y denominador por $(1+r)^x$, y usar los nuevos valores conmutados se llega a:

$$(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x^{dp} = \frac{M'_{x+n}}{D'_x}\frac{1}{(1+r)^p}$$

7.1.4 Seguro Temporal

Como ya sabemos este seguro sólo es pagado si el asegurado fallece *dentro* de los n primeros años. Y la prima pura única vamos a denotarla por, $(\mathrm{G}/_n\mathrm{A})_x$. En este caso se supone un crecimiento geométrico anticipado.

Para su cálculo sólo vamos a tomar los primeros n términos del seguro de vida entera y así:

$$\begin{aligned}(\mathrm{G}/_n\mathrm{A})_x &= \frac{C'_x + C'_{x+1} + C'_{x+2} + \cdots + C'_{x+n-1}}{D'_x} \\ &= \frac{M'_x - M'_{x+n}}{D'_x}\end{aligned}$$

7.1.5 Seguro Interceptado con Crecimiento Inmediato

El valor presente de la prima correspondiente a este seguro puede ser calculado como la diferencia entre la prima de una seguro diferido n años con crecimiento anticipado y la prima de un seguro ordinario de vida por $n + m$ años.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{G}_n/_m\mathrm{A})_x &= (\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x - (\mathrm{G}_{n+m}/\mathrm{A})_x \\
(\mathrm{G}_n/_m\mathrm{A})_x &= \frac{M'_{x+n} - M'_{x+n+m}}{D'_x}
\end{aligned}
$$

7.1.6 Seguro Interceptado con Crecimiento Diferido

En este caso hacemos el diferimiento geométrico de p períodos.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{G}_n/_m\mathrm{A})_x^{dp} &= (\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x^{dp} - (\mathrm{G}_{n+m}/\mathrm{A})_x^{dp} \\
&= \frac{M'_{x+n} - M'_{x+n+m}}{D'_x} \cdot \frac{1}{(1 + r)^p}
\end{aligned}
$$

7.1.7 Seguro Dotal Mixto con Crecimiento Inmediato

Para el seguro dotal mixto tenemos un seguro temporario por n años más un capital diferido también por n años, multiplicado por el término que le corresponde de la progresión [1] $(1 + r)^n$.

La prima pura única es, por lo tanto, igual a la suma del seguro temporario con el capital diferido...

$$(\mathrm{GA})_{x:\overline{n|}} = (\mathrm{G}/_n\mathrm{A})_x + (1 + r)^n \cdot {}_n\mathrm{E}_x$$

[1] puesto que consideramos la progresión inmediata.

con valores de conmutación,

$$= \frac{M'_x - M'_{x+n} + D'_{x+n}}{D'_x}$$

7.1.8 Relaciones Interesantes

Podemos relacionar un seguro diferido n períodos con crecimiento inmediato con otro diferido n pero con crecimiento diferido de p de la siguiente manera[2]:

$$(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x^{dp} = \frac{(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x}{(1+r)^p}$$

Otra forma de calcular un seguro temporal es restar a un *seguro de vida entera* un *seguro diferido inmediato* por n años.

$$(\mathrm{G}/_n\mathrm{A})_x = (\mathrm{GA})_x - (\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x$$

Otra relación interesante sería entre los seguros *interceptados diferidos* m períodos e *interceptados con crecimiento geométrico diferido* p.

$$(\mathrm{G}_n/_m\mathrm{A})_x^{dp} = \frac{(\mathrm{G}_n/_m\mathrm{A})_x}{(1+r)^p}$$

7.2 Prima Neta Anual

Hasta ahora sólo hemos considerado las primas únicas — los *valores actuales* —, de los seguros vistos anteriormente. En la realidad, el seguro es pagadero en pagos periódicos generalmente anuales que duran a lo más el plazo establecido para el pago de primas.

[2]Otra vez se pide que $p \leq n$.

En este caso el principio fundamental para la determinación del valor que debe tener una prima anual o *nivelada* es que el valor presente de las obligaciones del asegurado, debe ser igual al valor presente de las obligaciones del asegurador, siempre bajo la hipótesis de que la operación de seguro se efectúa sobre una cohorte de individuos, donde el número de participantes es suficientemente grande como para que se cumplan las leyes de probabilidad.

Es también un hecho que la serie de pagos forma una renta contingente cuyo plazo máximo de duración es convenido en el contrato sin perjuicio de que se vea interrumpido por la muerte del mencionado asegurado.

Una vez contratado el seguro, la primera prima es pagada en forma inmediata, por lo que se puede decir que la serie de pago constituye una renta anticipada.

Por ejemplo para el *seguro geométrico de vida entera*, se tiene:

$$\mathrm{GP}_x = \frac{(\mathrm{GA})_x}{\ddot{a}_x}$$

Con valores de conmutación,

$$\mathrm{GP}_x = \frac{M'_x}{(1+r)^x \mathrm{N}_x}$$

Si se requiere que sean un *determinado* número de pagos, n, para el mismo seguro, entonces:

$$\mathrm{GP}_{x:\overline{n}|} = \frac{(\mathrm{GA})_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Con valores de conmutación,

$$= \frac{M'_x}{(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}) \cdot (1+r)^x}$$

Ahora para el mismo seguro pero con pagos aritméticos; se tiene:

$$G_0^a P_x = \frac{(G\,A)_x}{(v\,\ddot{a})_x}$$

Con valores de conmutación,

$$G_0^a P_x = \frac{M'_x}{(k N_x + h S_{x+1}) \cdot (1 + r)^x}$$

Otra vez el mismo seguro pero con n pagos *aritméticos.*

$$G_0^g P_{x:\overline{n}|} = \frac{(G\,A)_x}{(v\,\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}$$

O, lo que es igual a:

$$= \frac{M'_x}{[k\,(N_x - N_{x+n}) + h\,(S_{x+1} - S_{x+n+1} - n N_{x+n})] \cdot (1 + r)^x}$$

Ahora para el mismo seguro pero con pagos geométricos; se tiene:

$$G_0^g P_x = \frac{(G\,A)_x}{(G\,\ddot{a})_x}$$

Con valores de conmutación,

$$G_0^g P_x = \frac{M'_x}{N'_x}$$

Otra vez el mismo seguro pero con n pagos *geométricos.*

$$G_0^g P_{x:\overline{n}|} = \frac{(G\,A)_x}{(G\,\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}$$

O, lo que es igual a:

$$= \frac{M'_x}{N'_x - N'_{x+n}}$$

Si tenemos un seguro *geométrico, inmediato y diferido* por n años y con pagos iguales:

$$\mathbf{G}_n/\mathrm{P}_x = \frac{(\mathbf{G}_n/\mathrm{A})_x}{\ddot{a}_x}$$

Con valores de conmutación,

$$\mathbf{G}_n/\mathrm{P}_x = \frac{M'_{x+n}}{(1+r)^x \cdot \mathrm{N}_x}$$

Si se requiere que sean un *determinado* número n de pagos constantes para el mismo seguro:

$$\mathbf{G}_n/\mathrm{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{(\mathbf{G}_n/\mathrm{A})_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Con valores de conmutación,

$$\mathbf{G}_n/\mathrm{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{M'_{x+n}}{(1+r)^x \cdot (\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n})}$$

Ahora para el mismo seguro pero con pagos aritméticos; se tiene:

$$\mathbf{G}^a_0\,n/\mathrm{P}_x = \frac{(\mathbf{G}_n/\mathrm{A})_x}{(\mathbf{v}\,\ddot{a})_x}$$

Con valores de conmutación,

$$\mathbf{G}^a_0\,n/\mathrm{P}_x = \frac{M'_{x+n}}{(1+r)^x \cdot (k\mathrm{N}_x + h\mathrm{S}_{x+1})}$$

Otra vez el mismo seguro pero con m pagos *aritméticos.* Donde regularmente $m \leq n$, pero no necesariamente.

$$\mathrm{G}^{a}_{0\,n}/\mathrm{P}_{x:\overline{m}|} = \frac{(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x}{(\mathbf{v}\,\ddot{a})_{x:\overline{m}|}}$$

que es igual a:

$$= \frac{M'_{x+n}}{[k\,(\mathrm{N}_x \;-\; \mathrm{N}_{x+n}) \;+\; h\,(\mathrm{S}_{x+1} \;-\; \mathrm{S}_{x+n+1} \;-\; n\mathrm{N}_{x+n})]\cdot(1\;+\;r)^x}$$

Ahora para el mismo seguro pero con pagos geométricos; se tiene:

$$\mathrm{G}^{g}_{0\,n}/\mathrm{P}_x = \frac{(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x}{(\mathrm{G}\,\ddot{a})_x}$$

Con valores de conmutación,

$$\mathrm{G}^{g}_{0\,n}/\mathrm{P}_x = \frac{M'_{x+n}}{N'_x}$$

Otra vez el mismo seguro pero con m pagos *geométricos.* Donde regularmente $m \leq n$, pero no necesariamente.

$$\mathrm{G}^{g}_{0\,n}/\mathrm{P}_{x:\overline{m}|} = \frac{(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})_x}{(\mathrm{G}\,\ddot{a})_{x:\overline{m}|}}$$

que es igual a:

$$= \frac{M'_{x+n}}{N'_x \;-\; N'_{x+m}}$$

Estas mismas relaciones se pueden sacar muy fácilmente con un seguro diferido n períodos con crecimiento diferido p períodos, $(\mathrm{G}_n/\mathrm{A})^{dp}_x$. Puesto que se ha dado la relación entre un seguro diferido con crecimiento inmediato y un seguro diferido con crecimiento diferido.

Si se requiere que sean un *determinado* número m de pagos constantes, donde $m \leq n$, entonces para el seguro *geométrico temporal* por n años se tiene que:

$$\mathbf{G}/_n\mathrm{P}_{x:\overline{m|}} = \frac{(\mathbf{G}/_n\mathrm{A})_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}$$

Con valores de conmutación,

$$\mathbf{G}/_n\mathrm{P}_{x:\overline{m|}} = \frac{M'_x - M'_{x+n}}{(1 + r)^x \cdot (\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+m})}$$

Otra vez el mismo seguro pero con m pagos *aritméticos*. Donde $m < n$ necesariamente.

$$\mathbf{G}_0^a\,/_n\mathrm{P}_{x:\overline{m|}} = \frac{(\mathbf{G}_n/\mathrm{A})_x}{(\mathbf{v}\,\ddot{a})_{x:\overline{m|}}}$$

o,

$$= \frac{M'_x - M'_{x+n}}{[k\,(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}) + h\,(\mathrm{S}_{x+1} - \mathrm{S}_{x+n+1} - n\mathrm{N}_{x+n})] \cdot (1 + r)^x}$$

Una vez ms el mismo seguro pero con m pagos *geométricos*. Donde $m \leq n$ necesariamente.

$$\mathbf{G}_0^g\,/_n\mathrm{P}_{x:\overline{m|}} = \frac{(\mathbf{G}_n/\mathrm{A})_x}{(\mathbf{G}\,\ddot{a})_{x:\overline{m|}}}$$

o,

$$= \frac{M'_x - M'_{x+n}}{N'_x - N'_{x+m}}$$

Para un *dotal mixto* de n periodos y con m pagos constantes, donde $m \leq n$ y entonces se tiene:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(GA)_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \\
&= \frac{M'_{x+n} - M'_{x+n} + D_{x+n}}{(N_x - N_{x+m})(1 + r)^x}
\end{aligned}
$$

con m pagos aritméticos:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(GA)_{x:\overline{n}|}}{(v\ddot{a})_{x:\overline{m}|}} \\
&= \frac{M'_x - M'_{x+n} + D_{x+n}}{[k\,(N_x - N_{x+m}) + h\,(S_{x+1} - S_{x+m+1} - mN_{x+m})] \cdot (1 + r)^x}
\end{aligned}
$$

Ahora con m pagos geométricos.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(GA)_{x:\overline{n}|}}{(G\ddot{a})_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{M'_x - M'_{x+n} + D_{x+n}}{N'_x - N'_{x+n}}
\end{aligned}
$$

Donde $m \leq n$.

7.3 Ejemplos

Calcular sobre las bases de las tablas de mortalidad hipotéticas que se muestran al principio del trabajo seleccionadas al 8% y, en particular la Tabla-2 con un crecimiento geométrico de 5%, para una persona de edad 35, la prima pura única de los siguientes seguros

crecientes geométricamente, en donde el primer periodo es una unidad y donde la suma asegurada se paga al final del año del suceso:
a)Un Seguro de Vida Entera.
b)Dos Seguros Diferidos 25 periodos, uno con Crecimiento Geométrico Inmediato y el otro con crecimiento diferido 10 periodos.
c)Un Seguro Temporal a 10 años.
d)Dos Seguros Interceptados, diferido 10 años y temporal 15 años, uno con crecimiento inmediato y otro diferido 5 periodos.
e)Un Seguro Dotal Mixto por 10 años.

a)

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}\mathrm{A})_{35} &= \frac{M'_{35}}{D'_{35}} \\ &= \frac{125,238.58}{360,677.35} \\ &= 0.34723161\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}_{25}/\mathrm{A})_{35} &= \frac{M'_{60}}{D'_{35}} \\ &= \frac{90,848.99}{360,677.35} \\ &= 0.25188438\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}_{25}/\mathrm{A})^{d10}_{35} &= \frac{M'_{60}}{D'_{35}}\frac{1}{(1.05)^{10}} \\ &= \frac{0.34723161}{(1.05)^{10}}\end{aligned}$$

$$= \quad 0.21317009$$

c)

$$\begin{aligned}
(\mathrm{G}/_{10}\mathrm{A})_{35} &= \frac{M'_{35} - M'_{45}}{D'_{35}} \\
&= \frac{125,238.58 - 115,166.80}{360,677.35} \\
&= 0.02792463
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
(\mathrm{G}_{10}/_{15}\mathrm{A})_{35} &= \frac{M'_{45} - M'_{60}}{D'_{35}} \\
&= \frac{115,1666.80 - 90,848.99}{360,677.35} \\
&= 0.0674226
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{G}_{10}/_{15}\mathrm{A})^{d5}_{35} &= \frac{M'_{45} - M'_{60}}{D'_{35}} \cdot \frac{1}{(1.20)^5} \\
&= \frac{0.0674226.}{(1.05)^5} \\
&= 0.05282737
\end{aligned}$$

e)

$$(\mathrm{GA})_{35:\overline{10|}} = \frac{M'_{35} - M'_{45} + D'_{45}}{D'_{35}}$$

$$= \frac{125,238.58 - 115,166.80 + 263,161.80}{360,677.35}$$
$$= 0.75755679$$

Ahora se pide encontrar las primas netas niveladas para algunos de los seguros que se han dasarrollado hasta ahora, usando las formas de crecimiento que se han seguido en los ejemplos mencionados otra vez para una persona de edad 35, con las formas de pago siguientes:

a)Pagos en forma constante, aritmética y geométrica para un Seguro Geométrico de Vida Entera.

b)Pagos en forma geométrica para un Seguro de Vida Entera con crecimiento variable.

c)10 pagos en forma geométrica para un Seguro de Vida Entera, para un Seguro de Vida Entera con crecimiento aritmético y otro con crecimiento geométrico.

d)15 pagos constantes para un Seguro Geométrico de Vida Entera.

e)Pagos constantes, aritméticos y geométricos para un seguro geométrico diferido 25 años.

f)10 pagos aritméticos para un seguro geométrico temporal de 10 años.

g)15 pagos constantes, 10 pagos aritméticos y 10 geométricos para un seguro interceptado geométrico, diferido 10 años y temporal 15 años.

a)

$$\begin{aligned} GP_{35} &= \frac{(GA)_{35}}{\ddot{a}_{35}} \\ &= \frac{0.34723161}{12.35548707471} \\ &= 0.02810343 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_0^aP_{35} &= \frac{(GA)_{35}}{(v\ddot{a})_{35}} \\ &= \frac{0.34723161}{76.2775592508} \end{aligned}$$

$$= 0.00455221$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_0^g\mathrm{P}_x &= \frac{(\mathbf{G}\mathrm{A})_{35}}{(\mathbf{G}\,\ddot{a})_{35}} \\
&= \frac{0.34723161}{23.49966212} \\
&= 0.01477603
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\mathbf{v}\mathrm{A})_{35}}{(\mathbf{G}\,\ddot{a})_{35}} \\
&= \frac{1.027553974549}{23.49966212} \\
&= 0.4372633
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{A}_{35}}{(\mathbf{G}\,\ddot{a})_{35:\overline{10|}}} \\
&= \frac{0.0847786955709}{8.72795909} \\
&= 0.0097135656
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\mathbf{v}\mathrm{A})_{35}}{(\mathbf{G}\,\ddot{a})_{35:\overline{10|}}} \\
&= \frac{1.027553974549}{8.72795909} \\
&= 0.1177313005
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\mathbf{G}\,\mathrm{A})_{35}}{(\mathbf{G}\,\ddot{a})_{35:\overline{10|}}} \\
&= \frac{0.34723161}{8.72795909} \\
&= 0.0397838\dot{2}65
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\mathbf{G}\,\mathrm{A})_{35}}{\ddot{a}_{35:\overline{15|}}} \\
&= \frac{0.34723161}{9.079035990169} \\
&= 0.0382454272
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{25}/\mathrm{P}_{35} &= \frac{(\mathbf{G}_{25}/\mathrm{A})_{35}}{\ddot{a}_{35}} \\
&= \frac{0.25188438}{12.35548707471} \\
&= 0.02038643871
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}^{a}_{0\,25}/\mathrm{P}_{35} &= \frac{(\mathbf{G}_{25}/\mathrm{A})_{35}}{(\mathbf{v}\,\ddot{a})_{35}} \\
&= \frac{0.25188438}{76.2775592508} \\
&= 0.00330220818
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} G_{0\ 25}^{g}/P_{35} &= \frac{(G_{25}/A)_{35}}{(G\,\ddot{a})_{35}} \\ &= \frac{0.25188438}{23.49966212} \\ &= 0.01071863837 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} G_0^a\,/_{10}P_{35:\overline{10}|} &= \frac{(G_{10}/A)_{35}}{(v\,\ddot{a})_{35:\overline{10}|}} \\ &= \frac{0.0.06742269}{20.94470111168} \\ &= 0.0032190810 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} G\ {}_{10}/_{15}P_{35} &= \frac{(G_{10}/_{15}A)_{35}}{\ddot{a}_{35:\overline{15}|}} \\ &= \frac{0.0.06742269}{9.079035990169} \\ &= 0.007426118490 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_0^a\ {}_{10}/_{15}P_{35:\overline{10}|} &= \frac{(G_{10}/_{15}A)_{35}}{(v\,\ddot{a})_{35:\overline{10}|}} \\ &= \frac{0.0.06742269}{20.94470111168} \\ &= 0.00321907673 \end{aligned}$$

Capítulo 8

Reservas Matemáticas

8.1 Introducción

En el caso general de una operación de seguros mediante primas anuales netas, en el momento de concertar la operación se verifica el principio de equivalencia actuarial, es decir, el valor actuarial de las primas futuras es igual al valor actuarial de las prestaciones futuras por parte del asegurador, por lo que la pérdida esperada del asegurador será nula.

Más aún, las operaciones de seguros tienen una vigencia de larga duración y la equivalencia entre pagos futuros y prestaciones futuras no existe, en general, a lo largo del tiempo. Debido a esto se define una variable aleatoria que sea la diferencia en el momento t entre el valor actual de las prestaciones futuras del asegurador y el valor actual de los pagos de primas futuras por parte del asegurado.

En las operaciones de seguros de vida se supone que las reservas matemáticas a primas netas son positivas o al menos no negativas, por lo que al asegurado le convendrá mantener la operación. Esto nos da como resultado que el valor esperado de las prestaciones futuras será siempre mayor que el valor esperado de las primas futuras y es por esto que el asegurado deberá mantener un pasivo, *reserva matemática*, para cubrir tal diferencia.

8.1.1 Reservas Matemáticas

En todo seguro contratado a primas anuales, *el compromiso del asegurador es igual al del asegurado*, es decir que no hay diferencias en las obligaciones.

A partir de ese momento en adelante esas diferencias dejan de ser iguales, porque en la gran mayoría de los casos, *la prima crece al crecer la edad*, es decir:

$$\mathrm{P}_{(m)} > \mathrm{P}$$

De este modo, el compromiso del asegurador es mayor...

$$\mathrm{A}_{(m)} = \mathrm{P}_{(m)}\, \ddot{a}_{(m)} > \mathrm{P}\, \ddot{a}_{(m)}$$

Donde $\mathrm{A}_{(m)}$ es, como ya sabemos, la prima pura única —de cualquier seguro —. $\ddot{a}_{(m)}$ es el valor actual de una renta vitalicia, todo m años después del momento inicial.

A esta diferencia se le llama *reserva matemática* y se simboliza con la letra V — por una relación con la palabra inglesa *Value* —, entonces:

$$\mathrm{V}_{(m)} = \mathrm{A}_{(m)} - \mathrm{P}\, \ddot{a}_{(m)}$$

Observación, si el seguro es contratado a prima única, el compromiso del asegurado no existe, sólo queda el del asegurador.

$$\mathrm{V}_{(m)} = \mathrm{A}_{(m)}$$

En trminos de valores conmutados...

$$= \frac{M'_x}{(k\mathrm{N} + h\mathrm{S}_{x+1}) \cdot (1+r)^x} \cdot (k + t \cdot h)$$

Y el valor de la reserva es:

$$= (\mathrm{GA})_{x+t} - \mathrm{G}^a_t\mathrm{P}_x \cdot (\mathrm{v}\ddot{a})_{x+t}$$

o,

$$= \frac{M'_{x+t}}{D'_{x+t}} - \frac{M'_x \cdot (k + t \cdot h)}{(k\mathrm{N} + h\mathrm{S}_{x+1}) \cdot (1+r)^x} \cdot \frac{(k\mathrm{N}_{x+t} + h\mathrm{S}_{x+t+1})}{\mathrm{D}_{x+t}}$$

Otra vez el mismo seguro pero con n pagos *aritméticos*. Entonces el valor de la reserva es:

$$= \begin{cases} (\mathrm{GA})_{x+t} & \text{si } t \geq n \\ (\mathrm{GA})_{x+t} - \mathrm{G}^a_t\mathrm{P}_{x:\overline{n|}} \cdot (\mathrm{v}\ddot{a})_{x+t:\overline{n-t|}} & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

En valores conmutados...

$$= \begin{cases} \frac{M'_{x+t}}{D'_{x+t}} & \text{si } t \geq n \\ \frac{M'_{x+t}}{D'_{x+t}} - \frac{M'_x \cdot (k + t \cdot h)}{(k\mathrm{N} + h\mathrm{S}_{x+1}) \cdot (1+r)^x} \cdot \frac{k(\mathrm{N}_{x+t} - \mathrm{N}_{x+n}) + (\mathrm{S}_{x+t+1} - \mathrm{S}_{x+n+1} - (n-t) \cdot \mathrm{N}_{x+n})}{\mathrm{D}_{x+t}} & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Ahora para el mismo seguro pero con *pagos geométricos* se define:

$$\mathrm{G}^g_t\mathrm{P}_x = \mathrm{G}^g_0\mathrm{P}_x \cdot (1 + r)^t$$

Y el valor de la reserva es:

$$= (\mathrm{GA})_{x+t} - \mathrm{G}^g_t\mathrm{P}_x \cdot (\mathrm{G}\ddot{a})_{x+t}$$

o,

$$= \frac{M'_{x+t}}{D'_{x+t}} - \frac{M'_x}{N'_x} \cdot (1+r)^t \frac{N'_{x+t}}{D'_{x+t}}$$

Otra vez el mismo seguro pero con n pagos *geométricos*. Entonces el valor de la reserva es:

$$= \begin{cases} (\mathrm{G\,A})_{x+t} & \text{si } t \geq n \\ (\mathrm{G\,A})_{x+t} - \mathrm{G}^g_t \mathrm{P}_{x:\overline{n}|} \cdot (\mathrm{G}\,\ddot{a})_{x+t:\overline{n-t}|} & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

En valores conmutados...

$$= \begin{cases} \frac{M'_{x+t}}{D'_{x+t}} & \text{si } t \geq n \\ \frac{M'_{x+t}}{D'_{x+t}} - \frac{M'_x}{N'_x - N'_{x+n}} \cdot (1+r)^t \frac{N'_{x+t} - N'_{x+n}}{D'_x} & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Si se requieren un *determinado* número m de pagos constantes, donde $m \leq n$ y $t \leq n$, entonces para el seguro *geométrico temporal* por n años se tiene que la reserva es igual a:

$$= \begin{cases} (\mathrm{G}/_{n-t}\mathrm{A})_{x+t} - \mathrm{G}/_n\mathrm{P}_{x:\overline{m}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} & \text{si } t < m \\ (\mathrm{G}/_{n-t}\mathrm{A})_{x+t} & \text{si } t \geq m \end{cases}$$

En valores conmutados:

$$= \begin{cases} \frac{M'_{x+t} - M'_{x+n}}{D'_{x+t}} - \frac{M'_x - M'_{x+n}}{(1+r)^x \cdot (N'_x - N'_{x+n})} \cdot \frac{\mathrm{N}_{x+t} - \mathrm{N}_{x+n}}{\mathrm{D}_{x+t}} & \text{si } t < m \\ \frac{M'_{x+t} - M'_{x+n}}{D'_{x+t}} . & \text{si } t \geq m \end{cases}$$

Para el mismo seguro pero con m pagos *aritméticos*. Donde $m \leq n$ necesariamente,

$$= \begin{cases} (\mathrm{G}/_{n-t}\mathrm{A})_{x+t} - \mathrm{G}^a_t\,/_n\mathrm{P}_{x:\overline{m}|} \cdot (\mathrm{v}\,\ddot{a})_{x+t:\overline{m-t}|} & \text{si } t < m \\ (\mathrm{G}/_{n-t}\mathrm{A})_{x+t} & \text{si } t \geq m \end{cases}$$

o,

$$
= \begin{cases} \dfrac{M'_{x+t} - M'_{x+n}}{D'_{x+t}} - \dfrac{(M'_x - M'_{x+n}) \cdot [k(\mathrm{N}_{x+t} - \mathrm{N}_{x+m}) + h(\mathrm{S}_{x+t+1} - \mathrm{S}_{x+m+1} - (m-t)\mathrm{N}_{x+m})]}{[k(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+m}) + h(\mathrm{S}_{x+1} - \mathrm{S}_{x+m+1} - m\mathrm{N}_{x+m})] \cdot (1+r)^x \mathrm{D}_{x+t}} & \text{si } t < m \\ \dfrac{M'_{x+t} - M'_{x+n}}{D'_{x+t}} & \text{si } t \geq m \end{cases}
$$

Donde $t \leq n$.

Otra vez el mismo seguro pero con m pagos *geométricos*. Donde $m \leq n$ necesariamente,

$$
= \begin{cases} (\mathrm{G}/_{n-t}\mathrm{A})_{x+t} - \mathrm{G}_t^g /_n\mathrm{P}_{x:\overline{m}|} \cdot (\mathrm{G}\,\ddot{a})_{x+t:\overline{m-t}|} & \text{si } t < m \\ (\mathrm{G}/_{n-t}\mathrm{A})_{x+t} & \text{si } t \geq m \end{cases}
$$

En valores conmutados:

$$
= \begin{cases} \dfrac{M'_{x+t} - M'_{x+n}}{D'_{x+t}} - \dfrac{M'_x - M'_{x+n}}{N'_x - N'_{x+m}} \cdot \dfrac{N'_{x+t} - N'_{x+m}}{D'_{x+t}} \cdot (1+r)^t & \text{si } t < m \\ \dfrac{M'_{x+t} - M'_{x+n}}{D'_{x+t}} & \text{si } t \geq m \end{cases}
$$

También en este último caso $t \leq n$.

Para el caso *diferido geométrico inmediato* con pagos constantes, se tiene:

$$
= (\mathrm{G}_{n-t}/\mathrm{A})_{x+t} - \mathrm{G}_n/\mathrm{P}_x \cdot \ddot{a}_{x+t}
$$

$$
= \frac{M'_{x+n}}{D'_{x+t}} - \frac{M'_{x+n}}{(1+r)^x \cdot \mathrm{N}_x} \cdot \frac{\mathrm{N}_{x+t}}{\mathrm{D}_{x+t}}
$$

O usando los nuevos valores de conmutación, tenemos:

$$
= \frac{M'_{x+n}}{D'_{x+t}} - \frac{M'_{x+n}}{D'_{x+t}} \cdot \frac{\mathrm{N}_{x+t}}{\mathrm{N}_x} \cdot (1+r)^t
$$

El mismo seguro, aunque ahora con m *pagos* constantes:

$$= \begin{cases} (\mathrm{G}_{n-t}/\mathrm{A})_{x+t} & \text{si } t \geq m \\ (\mathrm{G}_{n-t}/\mathrm{A})_{x+t} \; - \; \mathrm{G}_n/\mathrm{P}_{x:\overline{m}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

En valores de conmutación.

$$= \begin{cases} \dfrac{M'_{x+n}}{D'_{x+t}} & \text{si } t \geq m \\ \dfrac{M'_{x+n}}{D'_{x+t}} - \dfrac{M'_{x+n}}{(1+r)^x \cdot (k\mathrm{N}_x + h\mathrm{S}_{x+1})} \cdot \dfrac{k\mathrm{N}_{x+t} + h\mathrm{S}_{x+t+1}}{\mathrm{D}_{x+t}} & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

con pagos aritméticos:

$$= (\mathrm{G}_{n-t}/\mathrm{A})_{x+t} \; - \; \mathrm{G}^a_{t\;n}/\mathrm{P}_x \cdot (\mathbf{v}\,\ddot{a})_x$$

o,

$$= \frac{M'_{x+n}}{D'_{x+t}} - \frac{M'_{x+n}}{(1+r)^x \cdot (k\mathrm{N}_x \; + \; h\mathrm{S}_{x+1})} \cdot \frac{(k\mathrm{N}_{x+t} \; + \; h\mathrm{S}_{x+t+1})}{\mathrm{D}_{x+t}}$$

con m pagos ariméticos:

$$= \begin{cases} (\mathrm{G}_{n-t}/\mathrm{A})_{x+t} \; - \; \mathrm{G}^a_{t\;n}/\mathrm{P}_{x:\overline{m}|} \cdot (\mathbf{v}\,\ddot{a})_{x+t:\overline{m-t}|} & \text{si } t < m \\ (\mathrm{G}_{n-t}/\mathrm{A})_{x+t} & \text{si } t \geq m \end{cases}$$

o,

$$= \begin{cases} \dfrac{M'_{x+n}}{D'_{x+t}} - \dfrac{M'_{x+n} \cdot (k + t \cdot h)[(k\mathrm{N}_{x+t} - \mathrm{N}_{x+m}) + h(\mathrm{S}_{x+t+1} - \mathrm{S}_{x+m+1} - (m-t)\mathrm{N}_{x+m})]}{(1+r)^x \cdot [(k\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+m}) + h(\mathrm{S}_{x+1} - \mathrm{S}_{x+m+1} - m\mathrm{N}_{x+m})] \cdot \mathrm{D}_{x+t}} & \text{si } t < m \\ \dfrac{M'_{x+n}}{D'_{x+t}} & \text{si } t \geq m \end{cases}$$

Con pagos geométricos:

$$= (\mathrm{G}_{n-t}/\mathrm{A})_{x+t} - \mathrm{G}^{g}_{t\ n}/\mathrm{P}_x \cdot (\mathrm{G}\,\ddot{a})_{x+t}$$

o,

$$= \frac{M'_{x+n}}{D'_{x+t}} - \frac{M'_{x+n}}{N'_x} \cdot (1+r)^t \cdot \frac{N'_{x+t}}{D'_{x+t}}$$

con m pagos geométricos:

$$= \begin{cases} (\mathrm{G}_{n-t}/\mathrm{A})_{x+t} - \mathrm{G}^{g}_{t\ n}/\mathrm{P}_{x:\overline{m|}} \cdot (\mathrm{G}\,\ddot{a})_{x+t:\overline{m-t|}} & \text{si } t < m \\ (\mathrm{G}_{n-t}/\mathrm{A})_{x+t} & \text{si } t \geq m \end{cases}$$

En valores de conmutación:

$$= \begin{cases} \dfrac{M'_{x+n}}{D'_{x+t}} - \dfrac{M'_{x+n}}{N'_x - N'_{x+m}} \cdot \dfrac{N'_{x+t} - N'_{x+m}}{D'_{x+t}} & \text{si } t < m \\ \dfrac{M'_{x+n}}{D'_{x+t}} & \text{si } t \geq m \end{cases}$$

Como mencionábamos antes también se podrían mostrar las reservas de los seguros interceptados y de los dotales mixtos con pagos coherentes con el raciocinio de la empresa aseguradora, aunque en la práctica no se utilizen mucho, simplemente se sustituyen las relaciones dadas en las secciones anteriores.

Para los ejemplos de este capítulo se muestran diferentes tipos de reservas.

RESERVA
VITALICIA

PLAN VITALICIO (X=12), A PRIMA NIVELADA				
Px+t	Ax+t	äx+t	tVx	tVx (media)
0.00694	0.2003	28.8637	0.0000	0.003470
0.00694	0.2052	28.6919	6.0258	3.016383
0.00694	0.2099	28.4837	12.1967	9.114722
0.00694	0.2147	28.2695	18.5226	15.363094
0.00694	0.2199	28.0820	25.0351	21.782304
0.00694	0.2253	27.8895	31.7169	28.379479
0.00694	0.2308	27.6921	38.5712	35.147528
0.00694	0.2364	27.4896	45.6010	42.089587
0.00694	0.2422	27.2820	52.8095	49.208745
0.00694	0.2481	27.0691	60.1996	56.508028
0.00694	0.2541	26.8509	67.7742	63.990389
0.00694	0.2604	26.6274	75.5362	71.658694
0.00694	0.2667	26.3983	83.4883	79.515713
0.00694	0.2732	26.1637	91.6330	87.564098
0.00694	0.2799	25.9235	99.9728	95.806376
0.00694	0.2867	25.6776	108.5101	104.244922
0.00694	0.2937	25.4260	117.2469	112.881957
0.00694	0.3009	25.1685	126.1852	121.719515
0.00694	0.3082	24.9052	135.3267	130.759431
0.00694	0.3157	24.6360	144.6730	140.003321
0.00694	0.3233	24.3609	154.2252	149.452557
0.00694	0.3311	24.0798	163.9844	159.108251
0.00694	0.3391	23.7927	173.9511	168.971227
0.00694	0.3472	23.4997	184.1259	179.041999
0.00694	0.3555	23.2006	194.5086	189.320748
0.00694	0.3640	22.8956	205.0990	199.807295
0.00694	0.3727	22.5846	215.8962	210.501076
0.00694	0.3815	22.2677	226.8991	221.401116
0.00694	0.3904	21.9449	238.1060	232.506003
0.00694	0.3995	21.6163	249.5148	243.813859
0.00694	0.4088	21.2819	261.1229	255.322315
0.00694	0.4183	20.9419	272.9271	267.028485
0.00694	0.4279	20.5964	284.9238	278.928939
0.00694	0.4376	20.2454	297.1086	291.019675
0.00694	0.4475	19.8892	309.4767	303.296100
0.00694	0.4576	19.5278	322.0224	315.752998
0.00694	0.4677	19.1615	334.7397	328.384515
0.00694	0.4780	18.7905	347.6216	341.184138
0.00694	0.4885	18.4149	360.6608	354.144671
0.00694	0.4990	18.0351	373.8488	367.258224
0.00694	0.5097	17.6512	387.1767	380.516201
0.00694	0.5205	17.2635	400.6349	393.909287
0.00694	0.5313	16.8725	414.2130	407.427444
0.00694	0.5423	16.4782	427.8999	421.059908
0.00694	0.5533	16.0812	441.6836	434.795195
0.00694	0.5644	15.6818	455.5517	448.621104
0.00694	0.5755	15.2803	469.4909	462.524737
0.00694	0.5867	14.8771	483.4872	476.492509
0.00694	0.5980	14.4728	497.5262	490.510182
0.00694	0.6092	14.0676	511.5926	504.562891
0.00694	0.6205	13.6621	525.6708	518.635182
0.00694	0.6318	13.2568	539.7444	532.711063
0.00694	0.6430	12.8520	553.7968	546.774048
0.00694	0.6542	12.4484	567.8108	560.807225
0.00694	0.6654	12.0463	581.7689	574.793314
0.00694	0.6765	11.6464	595.6536	588.714750
0.00694	0.6875	11.2491	609.4469	602.553755
0.00694	0.6985	10.8550	623.1310	616.292434
0.00694	0.7093	10.4645	636.6878	629.912865
0.00694	0.7201	10.0782	650.0997	643.397200
0.00694	0.7307	9.6966	663.3490	656.727775
0.00694	0.7411	9.3201	676.4185	669.887219
0.00694	0.7514	8.9493	689.2917	682.858577
0.00694	0.7615	8.5847	701.9522	695.625432
0.00694	0.7715	8.2266	714.3849	708.172037
0.00694	0.7812	7.8755	726.5751	720.483452
0.00694	0.7908	7.5317	738.5094	732.545695
0.00694	0.8001	7.1957	750.1755	744.345896
0.00694	0.8092	6.8677	761.5625	755.872478
0.00694	0.8181	6.5480	772.6612	767.115356
0.00694	0.8268	6.2369	783.4642	778.066176
0.00694	0.8352	5.9344	793.9661	788.718605
0.00694	0.8433	5.6407	804.1644	799.068708
0.00694	0.8512	5.3557	814.0596	809.115446
0.00694	0.8589	5.0792	823.6562	818.861366
0.00694	0.8664	4.8111	832.9640	828.313588
0.00694	0.8736	4.5509	841.9995	837.485245
0.00694	0.8806	4.2977	850.7888	846.397653
0.00694	0.8875	4.0505	859.3715	855.083642
0.00694	0.8942	3.8076	867.8071	863.592771
0.00694	0.9009	3.5662	876.1853	871.999675
0.00694	0.9077	3.3226	884.6432	880.417717
0.00694	0.9147	3.0706	893.3935	889.021788
0.00694	0.9222	2.8004	902.7743	898.087336
0.00694	0.9307	2.4962	913.3365	908.058856
0.00694	0.9408	2.1313	926.0034	919.673401
0.00694	0.9539	1.6599	942.3696	934.189951
0.00694	0.9722	1.0000	965.2815	953.826998

RESERVAS

PLAN TEMPORAL T-20 (X = 12) A PRIMA NIVELADA					h =	0.10	Seguro Variable Temporal: (X = 12)(T = 20) Prima Nivelada Constante a 20 años			
Px+t	Ax+t:n-t	ax+t:n-t	tVx	tVx (media)	t	Px:n	Ax+t:n-t	ax+t:n-t	tVx	tVx (media)
0.001380	0.021197	15.365790	0.000000	0.000690	0	0.002698	0.041454	15.365790	0.000000	0.000690
0.001380	0.020706	14.792809	0.000299	0.000839	1	0.002698	0.043444	14.792809	0.003536	0.002458
0.001380	0.020157	14.187164	0.000586	0.001132	2	0.002698	0.044960	14.187164	0.006686	0.005801
0.001380	0.019572	13.564231	0.000860	0.001413	3	0.002698	0.046045	13.564231	0.009451	0.008758
0.001380	0.018968	12.938547	0.001119	0.001679	4	0.002698	0.046747	12.938547	0.011841	0.011336
0.001380	0.018321	12.294536	0.001361	0.001930	5	0.002698	0.047013	12.294536	0.013844	0.013533
0.001380	0.017628	11.631646	0.001582	0.002161	6	0.002698	0.046839	11.631646	0.015459	0.015341
0.001380	0.016883	10.949303	0.001779	0.002370	7	0.002698	0.046222	10.949303	0.016683	0.016761
0.001380	0.016085	10.246913	0.001949	0.002554	8	0.002698	0.045163	10.246913	0.017519	0.017791
0.001380	0.015226	9.523858	0.002088	0.002708	9	0.002698	0.043661	9.523858	0.017967	0.018433
0.001380	0.014303	8.779493	0.002192	0.002830	10	0.002698	0.041717	8.779493	0.018031	0.018689
0.001380	0.013310	8.013150	0.002256	0.002913	11	0.002698	0.039335	8.013150	0.017717	0.018564
0.001380	0.012240	7.224128	0.002275	0.002955	12	0.002698	0.036521	7.224128	0.017032	0.018064
0.001380	0.011088	6.411699	0.002243	0.002948	13	0.002698	0.033283	6.411699	0.015986	0.017199
0.001380	0.009845	5.575099	0.002155	0.002888	14	0.002698	0.029630	5.575099	0.014590	0.015978
0.001380	0.008505	4.713526	0.002003	0.002768	15	0.002698	0.025577	4.713526	0.012861	0.014415
0.001380	0.007058	3.826139	0.001780	0.002581	16	0.002698	0.021138	3.826139	0.010816	0.012528
0.001380	0.005495	2.912054	0.001477	0.002318	17	0.002698	0.016335	2.912054	0.008479	0.010337
0.001380	0.003805	1.970336	0.001087	0.001972	18	0.002698	0.011191	1.970336	0.005876	0.007867
0.001380	0.001978	1.000000	0.000598	0.001532	19	0.002698	0.005735	1.000000	0.003037	0.005146
0.001380	0.000000	0.000000	0.000000	0.000989	20	0.002698	0.000000	0.000000	0.000000	0.002208

Capítulo 9

Conclusiones

No hace mucho tiempo había sólo tres tipos básicos de seguros (pólizas) de vida, seguro temporal, de vida entera, dotal y por supuesto sus combinaciones; a partir de los años setentas la situación ha cambiado dramáticamente, una variedad de seguros han llenado los mercados.

La meta de este trabajo fue dar las *bases del cálculo para planes de seguros con crecimiento geométrico*; esto pudiera ser con el propósito de dar una solución técnica a los problemas de tarificación y constitución de reservas para este tipo de seguros y al problema de los cambios del costo de la vida con respecto a los cambios en los precios, entre otros. Muchos han tratado de resolver el problema de los cambios en el costo de la vida reflejados en la inflación, por ejemplo. Algunas propuestas, entre muchas, ha sido la de invertir las primas en un portafolio diversificado que crezca al menos como los precios. Una solución es lo que se conoce como *Variable Life Insurance* en donde se paga una prima fija y la reserva se invierte, si la inversión fue satisfactoria aumenta la suma asegurada; si no lo fue no disminuye la suma asegurada pactada en el contrato; pero en este caso el riesgo no es compartido y el excedente lo absorve la compañía.

Un contrato de un seguro de vida puede ser de muy larga duración y una vez que el contrato está concluido el asegurador usualmente no puede cambiar los términos en los que se fijó este. Cuando el asegurador fija una cuota (prima) su cálculo debe estar basado sobre proyecciones de la tasa de interés y la tasa de mortalidad de muchas décadas en el futuro. Es natural y sin duda necesario que esas proyecciones deban incluir márgenes considerablemente seguros.

El crecimiento geométrico que aquí se propone es uno fijo y no cambia periodo tras periodo como lo hace la inflación. El problema que aquí se plantea no es un problema de variables aleatorias aunque se podría tomar el crecimiento geométrico como un promedio ponderado de estimaciones de la inflación, (por decir un ejemplo de un estimador) sin que esto sea una solución perfecta, nos ayuda a mantener la cobertura del seguro conforme a los costos reales. La teoría de la probabilidad nos permite ir más allá de los resultados inmediatos de los datos observados y nos indica lo que podemos suponer para el futuro a la luz de la experiencia pasada, pero esto no es un hecho para la inflación esperada, puesto que existen factores que no se pueden medir como son los cambios estructurales, políticos, etc., de un país. Si supieramos con exactitud los cambios que tendría la inflación esperada traeríamos a valor presente todos los pagos con su respectiva pérdida inflacionaria y de esta manera calcular primas, reservas, etc.; la incertidumbre escencialmente es debida a nuestro conocimiento imperfecto de las cosas, por ejemplo, la inflación. En teoría podríamos eliminar tal incertidumbre teniendo información completa acerca del estado de la naturaleza en cada punto.

Otra solución al problema de los cambios anuales o periódicos de la inflación es tomar seguros temporales de periódos pequeños y renovarlos, obviamente con crecimiento geométrico, lo malo es que sabemos que mientras más avanza la edad de una persona el seguro o la prima son mayores, así que los seguros temporales cada vez son más caros.

En este trabajo se desarrolló y se establecieron fórmulas actuariales que permiten determinar el valor de primas y reservas de planes indexados a una tasa de crecimiento geométrico a travez de valores conmutados. Lo anterior contribuye a complementar los métodos actuariales que hoy existen y dentro de los cuales no se ha formulado una solución al caso de Primas de Seguros, Reservas y Anualidades que esten sujetas a un crecimiento de tipo geométrico.

Actualmente los planes de seguros y rentas vitalicias con crecimiento geométrico, se dan en la práctica común y la determinación de algunos conceptos actuariales como es la reserva y la prima nivelada son motivo de confución en virtud de que no se ha establecido un estudio formal de estos casos.

Existen muchas razones para que exista variabilidad en las anualidades y en los seguros y aunque muchas soluciones pudieran ser insatisfactorias tenemos una necesidad obvia de buscar una solución, así que una solución imperfecta es mejor que ninguna.

Bibliografía

[1] José Glez. Galé: *Elementos de Cálculo Actuarial*, Buenos Aires (1910).

[2] Julio García Villalon: *Operaciones de Seguros Clásicas y Modernas*, Ediciones Pirámide (1997).

[3] Newton L. Bowers, Jr.: *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries (1986).

[4] Robert E. Larson: *Life Insurance Mathematics*, John Willey & Sons (1964).

[5] Emmett J. Vaughan: *Fundamental Risk of an Insurance*, John Willey & Sons (1986).

[6] Hans U. Berger: *Life Insurance Mathematics*, Springer (1997).

[7] Jordan C. Wallace: *Life Contingencies*, The Society of Actuaries (1952).

[8] Joseph B. Maclean: *El Seguro de Vida*, Continental(1985).

[9] Mark S. Dorfman: *Introduction to Risk Managment and Insurance*, Prentice Hall (1994).

[10] M. J. Goovaerts: *Efective Actuarial Methods*, North Holland (1990).

[11] John H. Magee: *Life Insurance*, Hispano-Americana (1964).

[12] Kenneth Black Jr.: *Life Insurance*, Prentice Hall (1994).

[13] George E. Redja: *Principles of Risk Managment and Insurance*, Harper Collins (1995).

[14] Karl H. Borch: *Economics of Insurance*, North Holland (1990).