UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y DE POSGRADO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DE LAS SERIES INFINITAS A LA FORMALIZACION DEL LIMITE. LA GENESIS DE UN CONCEPTO.

Una propuesta de material potencialmente significativo para el curso del Desarrollo del Cálculo y del Análisis.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN EDUCACION EN MATEMATICAS

P R E S E N T A:

JORGE JAVIER JIMENEZ ZAMUDIO

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. JUAN RECIO ZUBIETA.

MEXICO, D. F. 1998.

Agradecimientos

A mi familia por su apoyo y
comprensión, a lo largo de la vida.

A mis profesores, Maestros en Ciencias:
Lorenzo Alanís Solís, Óscar Cuevas de la Rosa,
César Cristóbal Escalante, María del Refugio Gispert
Castañeda y Víctor Manuel Menchaca Hernández,
por compartir sus conocimientos.

Al apoyo administrativo atento y diligente de
C. Ana Vega Ortiz, C. Brenda Edith Martínez
Jiménez y Lic. Claudia Valtierra Torres.

Por sus aportaciones y valiosos comentarios al proyecto:
con relación al marco teórico a la Lic. Guadalupe García Aban
y en lo relativo al contenido matemático al Fís. Manuel Valadez Rodríguez.
A la Lic. Jeanett López García por ideas innovadoras
y creativas para realización de este trabajo.

A la Dra. Patricia Balderas Cañas,
E. en E. M. Sergio Cruz Contreras y
M. en C. Gustavo Marquina Rojo,
miembros del jurado para el examen de grado
y del comité revisor de la tesis.

Al M. en I. Víctor J. Palencia Gómez por sus sugerencias
no sólo al momento de revisar el proyecto, sino a lo largo de
dieciséis años de vida universitaria—incluido el período de
realización de mis estudios—

Al M. en C Juan Recio Zubieta por su valiosa y plural
intervención académica y administrativa, así como por
la confianza depositada en el proyecto.

En suma: Gracias a Dios.

Prefacio.

El presente trabajo de tesis de maestría, pretende ser un material potencialmente significativo, relativo a tres aspectos matemáticos cuyo denominador común es el concepto del infinito: a saber, series infinitas, infinitesimales y límites. El contexto, filosófico, matemático y educativo, del cual deriva el presente trabajo corresponde a los valores de la *cultura occidental*.

El material fue organizado de la siguiente forma: una primera parte relativa a la educación y la historia de las matemáticas que da un marco referencial, del por qué del trabajo y de los aspectos pedagógicos que guiaron el pensamiento en el proceso de elaboración (capítulos 1 y 2); a continuación (capítulo 3) se desarrolla la parte vinculada a los aspectos filosóficos que han coexistido con el quehacer de la ciencia, y en particular de las matemáticas —ahora abordadas desde el punto de vista histórico— ; la tercera parte que contiene, la propuesta en sí del presente trabajo (capítulos 4, 5 y 6); el capítulo 7 cierra la propuesta con los comentarios finales a guisa de conclusiones —reflexiones— que incluye, a manera de epítome, las citas que he considerado más relevantes para conformar una incipiente columna vertebral del desarrollo de las series infinitas, los infinitesimales y los límites, con una referencia explícita a la página en la que se vincula aquélla al contexto en el que se encuentra inscrita.

Después del cuerpo de la propuesta, he agregado dos apéndices, uno relativo a algunas notas breves sobre continuidad y funciones, por considerarlas necesarias y de relevancia para los aspectos desarrollados; y otro con un listado en orden alfabético de la totalidad de los personajes mencionados en alguna de las partes del trabajo, a excepción de aquéllos de los cuales no fue posible obtener referencia alguna.

La numeración de las citas realizadas a lo largo del trabajo se presenta en números romanos si la cita es a pie de página y en números arábigos si se halla la cita al final del trabajo. Las razones para optar por esta doble numeración fueron: en el caso de citas a pie de página, aportar elementos para una mayor comprensión de las ideas expuestas y de rápido acceso, dejando las citas bibliográficas o comentarios de menor peso para el final del trabajo para permitir una lectura más fluida del documento.

CONTENIDOS

"Al que leyere:

No hay cosa más difícil en el mundo que agradar a todos,
Ni más fácil y usada que censurar los libros que salen a la luz pública.
Al común riesgo de entrambos daños, salen sujetas todas las obras que se publican,
aunque amparadas de la mayor protección.
¿Qué será de este pequeño librillo sin patrocinio,
cuyo manjar, por místico y mal guisado,
lleva consigo la común censura y el desabrigamiento? ... "

Fragmento.
Miguel de Molinos, 1628-1696.

1. EXPOSICIÓN DE MOTIVOS.

La enseñanza es tal vez tan antigua como la raza humana, inclusive existen indicios de que hasta los animales enseñan intencionalmente a sus crias. No ha faltado quién, entre los teóricos, asegure que la infancia y la niñez tan prolongadas en la especie humana, están relacionadas con la necesidad de preparar al futuro "hombre" para que pueda ocupar un lugar en la sociedad.

"En una sociedad simple o primitiva, la educación y la enseñanza suelen ser informales, y se encomiendan a ciertos individuos o familias, pero en una sociedad compleja la enseñanza es organizada y formal"[1] Así, ante la necesidad de una enseñanza formal, la sociedad ha inventado o desarrollado amplios sistemas educativos en los que coloca a quienes son susceptibles de ser instruidos.

Es interesante observar que, a pesar de que la enseñanza informal de los jóvenes se ha verificado por milenios y de que la instrucción formal se ha impartido ya por centenares de años, no existe en la actualidad ningún método de enseñanza generalmente aceptado, teórica y prácticamente, no obstante que a lo largo de la historia ha habido educadores que han desarrollado y promulgado diversos métodos o enfoques de la enseñanza.

No se puede ignorar que la educación, como función social a través de la enseñanza o instrucción formalizada, pretende inducir deliberadamente ciertos cambios que se consideren deseables en los miembros de una sociedad, sin embargo tampoco se puedo soslayar el hecho de que no existe un acuerdo general sobre cómo ocurre el aprendizaje o si existe un modo único o varios modos de aprender.[2] No obstante, no falta quien opine, por ejemplo Hilgard[3], que no es necesario esperar a que todos los teóricos de la educación se pongan de acuerdo para desarrollar un método de instrucción con bases científicas.

En particular, la enseñanza de la matemática, ha hecho énfasis "en la acumulación de conocimientos matemáticos, en el amontonamiento de hechos que abarca una teoría, sin pararse demasiado a considerar el crecimiento del conocimiento matemático mismo, ni intentar comprender por qué una teoría matemática se desarrolló y tomó la forma que tomó, sin mostrar que es el resultado del esfuerzo humano, del pasado y de las motivaciones inherentes a su época, [y en consecuencia], no es la manera más motivante, ni por mucho, la más fácil para comprenderla".[4]

El constructivismo psicológico, que tiene como iniciador a Piaget, considera el desarrollo cognitivo progresivo, escalonado, no meramente acumulativo, sino transformante, en donde el que aprende, logre pasar de una primera etapa sin normas, anomía; a otra intermedia de aceptación de normas dictadas, heteronomía; para finalmente alcanzar la autonomía. Esto implica una transferencia progresiva del control y la responsabilidad, obligando a aquel que aprende a ser cada vez más autónomo. Así, no basta que un profesor conozca las reglas, por ejemplo de límites, sino que sé autorregule y transmita esa actitud de autorregulación a sus alumnos.

El aprendizaje escolar es un proceso que requiere de la participación colectiva, dado que "la cultura nos hace, nos forma, y en cierto modo somos el resultado de apropiarnos de ella. Revisarla críticamente y contribuir a renovarla supone, a su vez, responsabilizarnos de nuestra identidad. "Sin la contribución del profesorado consciente de que el conocimiento es una construcción, el aprendizaje escolar sería un incierto viaje de dudosas consecuencias."[5].

De acuerdo a la teoría de la asimilación cognoscitiva de Ausubel una de las condiciones para que tenga lugar el aprendizaje significativo es que los nuevos materiales que van a ser aprendidos sean potencialmente significativos; es decir, suficientemente sustantivos y no arbitrarios para poder ser relacionados con las ideas relevantes que posea el sujeto. Así, en esta teoría, en opinión de García Madruga[6], Ausubel presupone una contundente defensa del aprendizaje significativo por recepción y, por la tanto, de los métodos de exposición, tanto oral como escrita, y en consecuencia, para este último, los *organizadores previos*[i], que coadyuven la formación de una red semántica[7], que favorezca el aprendizaje por comprensión. Es decir que sirvan de puente entre lo que el sujeto ya conoce y lo que necesita conocer para asimilar significativamente el nuevo conocimiento.

Si nos remontamos a la obra de Juan Amós Comenio, quien vivió de 1592 a 1670, en su Didáctica Magna, ya señala la necesidad de *textos reales* para los discípulos y *textos informatorios* para los profesores. Reitera que la insuficiente provisión de libros panmetódicos, es decir, los que abarquen todo el *método*[ii], es uno de los cinco impedimentos de las escuelas que han de ser reformadas.

Debe tenerse en cuenta que cualquier materia de estudio supone la adquisición de conocimiento mediante el aprendizaje de algún material y que la escuela, a través de sus docentes, no puede renunciar a su responsabilidad de guiar dicho aprendizaje, por lo que debe asumir la misión de presentar a sus estudiantes los materiales de aprendizaje que sean sustancialmente válidos y pedagógicamente apropiados.

Sin embargo, "en el mayor número de las investigaciones sobre la enseñanza, las ideas acerca del contenido que debe ser enseñado, han sido frecuentemente ignoradas o simplemente dadas por un hecho"[8]. Así son pocos trabajos que plantean modelos de instrucción que incluyen el contenido como un componente[iii]. En particular pareciera que los investigadores en educación ubicados en esta tradición, no incursionan sobre cuestiones de contenido de la matemática. No obstante, de acuerdo con Zorrilla Fierro[9], Harnischfeger y Wiley propusieron incluir en los modelos un componente al que llamaron *carácter de los materiales de instrucción*, con lo que sugieren que la estructura del material a ser aprendido influye en la tarea y su complejidad, y en el ritmo y claridad de la instrucción. Sin embargo, dado que la estructura del contenido a ser aprendido no era especificada por modelo alguno, es decir, no había una referencia de direccionalidad, se ha considerado que la mayor parte de los estudios sobre enseñanza de las matemáticas se realiza desde un paradigma global.

Uno de los hallazgos más relevantes derivados de la investigación señala que "la enseñanza es cada día diferente en cada salón de clases y cada salón de clases es diferente a cualquier otro salón de clases"[10], es decir, existe una variabilidad, que incluye a los materiales textuales de los que se dispone.

No obstante que se reconoce la importancia de la organización del conocimiento y la estructuración del mismo con fines de aprendizaje, "ésta quizá es uno de los aspectos más descuidados por los profesores. Suele ser más fácil introducir cambios en la forma de abordar el conocimiento, es decir, en la metodología didáctica, que pensar en diversas formas de articulación del conocimiento que permitan una relación más estrecha entre el objeto y el sujeto de conocimiento"[11].

---

[i] Según Ausubel (Ausubel, Novak y Hanesian, 1978), los organizadores previos son un material introductorio de mayor nivel de abstracción, generalidad e inclusividad que nuevo material que se va a aprender.

[ii] Se refiere al método propuesto por Juan Amós Comenio en su obra Didáctica Magna.

[iii] Uno de los modelos que sí considera los contenidos es el llamado modelo tecnológico, pero está más enfocado hacia la enseñanza de ciencias experimentales.

En la investigación que se desarrolla actualmente en el campo del currículo, adquieren prioridad, los estudios empíricos tales como: análisis de mercado, perfiles de ingreso y egreso, que si bien son necesarios, no son suficientes para determinar criterios de selección de los contenidos que deben dominar los estudiantes.

El avance de los conocimientos científicos y tecnológicos pone a los currículos frente al reto de permitir experiencias de aprendizaje que lleven a los alumnos a dominar los métodos y técnicas que a su vez contribuyan a la construcción de conocimientos. Pero por otra parte, es necesario que al diseñar el currículo se dé un momento de reflexión epistemológica, que permita afrontar los problemas relativos a la génesis, construcción y transmisión del conocimiento científico.

Una fase importante en la construcción de un currículo la constituye el análisis de las disciplinas, que presenta una estrecha relación con el concepto de necesidad, considerado como guía por muchos constructores de currículo. Así, surgen las siguientes interrogantes: ¿ Qué conocimientos se necesitan en el currículo? ¿Quiénes determinan la necesidad de ellos y conforme a qué criterios?

Si bien Hook[12] manifiesta que el problema del contenido en el currículo no ha sido suficientemente trabajado, añade que los contenidos deben ser significativos, pues es a través de éstos que se resuelve en alguna forma el criterio de temporalidad del conocimiento.

Por cuanto a su alcance, el análisis de las disciplinas implica abordar el currículo[i] en tres dimensiones: la epistemológica, la psicológica y la moral. Piaget aborda el nivel epistemológico a través de la epistemología genética y la psicológica, con su teoría de la inteligencia.

Así, el análisis de las disciplinas nos remite al problema de la construcción y clasificación de la ciencia, con una concepción dialéctica[ii], entre otras, considerando a la ciencia como abierta; " ... se alimenta de crisis internas imprevistas y luego, de superaciones, ..."[13]. La ciencia, más que como un listado lineal jerárquico, se construye como una espiral dialéctica donde los límites disciplinarios son relativos y no absolutos.

Pero: ¿Es el conocimiento una copia de la realidad? Los empiristas consideran al conocimiento como una copia de la realidad y dan al sujeto un papel más pasivo. Piaget, por su parte, lo percibe como fruto de la interacción de sujeto y objeto, en el cual el sujeto, por aproximaciones sucesivas, va construyendo el objeto mediante la asimilación y acomodación.

Para analizar el cómo se han incrementado los conocimientos es necesario vincularlos a su devenir en el tiempo, considerando una serie de estadios en donde, el estadio anterior respecto a un conocimiento servirá para el establecimiento del estadio siguiente.

Con relación a la evolución de las series infinitas, los infinitesimales y el límite, podemos asumir como válida una extrapolación de lo que Piaget señala con relación a las ciencias, en el sentido de ver en la historia de éstas su significación epistemológica; que un conocimiento no puede ser disociado de su contexto histórico, ya que la historia de esa cuestión provee la significación epistemológica.

Es un hecho que casi todos [los investigadores] reconocen el alcance epistemológico del estudio de los períodos históricos y el poder de información que contiene la historia por cuanto analiza la construcción del conocimiento[14].

---

[i] Por currículo se puede entender una serie estructurada de conocimientos y experiencias de aprendizaje que en forma intencionada se articulan para producir aprendizaje. En el caso de la educación superior, se tienen que considerar estos aprendizajes con la incorporación de los asuntos de la vida laboral, es decir, el qué.

[ii] Evolución de las cosas mediante la oposición y la superación de la oposición.

Lo esencial, siguiendo el método histórico crítico es "caracterizar los grandes períodos sucesivos del desarrollo de un concepto, de una estructura o de las perspectivas de conjunto sobre una disciplina dada, y todo esto con aceleraciones y regresiones, o sin ellas, con acciones de precursores o rupturas epistemológicas"[15].

El mecanismo de pasaje de un período histórico al siguiente, se caracteriza porque cada vez que hay un rebasamiento lo que fue rebasado está de alguna manera integrado en el rebasante.

Retomando a Comenio, éste señala como otro de los puntos relevantes, "la falta de hombres peritos en el método que, una vez abiertas las escuelas en todas partes, pudieran ser regidas [por esos hombres peritos] con el provechoso resultado que pretendemos"[16]. Sin embargo, todavía en nuestros días, no obstante los grandes esfuerzos de algunas instituciones, se reconoce la necesidad de reforzar las actividades de formación docente, que consoliden una cuerpo de profesores suficientemente preparado para el quehacer universitario.

Es indudable que en la actualidad los estudiantes de ciencias e ingeniería, durante la licenciatura reciben y aprenden, al menos eso se espera, cantidades substanciales de matemáticas con gran detalle e inclusive con sus respectivas demostraciones, pero generalmente reciben poca información histórica sobre los orígenes y/o motivaciones que condujeron a su creación y evolución. Cuando estos estudiantes, durante su proceso de desarrollo profesional, llegan una vez más a las aulas, ahora como formadores de las nuevas generaciones, es decir como profesores, tienen a su mano, en general, un sin número de textos que versan sobre la materia que impartirán, la misma que abordarán una vez más con detalle y rigurosidad, pero tal vez sin haber tenido la oportunidad de revisar los orígenes históricos de lo que enseñarán.

Así, no son pocos los profesores que en la actualidad no han tenido acceso dentro de su proceso de formación, a un seguimiento del desarrollo histórico de uno o varios de los conceptos involucrados con su materia y que podrían estar relacionados íntimamente unos con otros, como pudieran ser las series infinitas, los infinitesimales y el concepto de límite.

Puede señalarse, que lo usual en los autores de los libros de texto actuales sobre matemáticas, es que pretendan, en general, presentar lo "esencial" de una rama particular, seguramente en forma rigurosa y sintética, prevaleciendo la sintaxis y omitiéndose en mucho el carácter semántico real como histórico, lo cual entre otras consecuencias hace que la matemática parezca estar completa y terminada Así, si bien el texto puede estar escrito en una forma clara, los contenidos pueden llegar a presentarse insulsos por la ausencia de un contexto histórico que los justifique.

Con relación a los libros sobre Historia de la Matemáticas, en general, su presentación se da más en el tenor de las épocas que a la humanidad le ha tocado vivir, por ejemplo: "el renacimiento", "la Europa medieval" o "la matemática en la época de Euler"; o en el contexto de los propios protagonistas, como por ejemplo: Arquímedes, Apolonio de Perga, Newton, Leibniz, o por regiones geográficas como lo serían Egipto, la India, Grecia, etcétera, pero poco a casi nada en el seguimiento de una idea, es decir, cuáles son los orígenes, su evolución, sus dificultades de validación y aceptación ante la propia comunidad científica y finalmente cómo se dio su consolidación, si es que pudiera decirse que ya se alcanzó y aún más difícilmente se alude a la discusión actual. Como ejemplos de lo dicho, basta revisar algunos de los libros clásicos y con posibilidades de ser consultados, como pudiesen ser, sólo por citar algunos, los dos tomos de Historia de las Matemáticas de Jean-Paul Collette, El mundo de las matemáticas, de James R Newman; The Historical Development of the Calculus, de C. H. Edwards Jr.; Historia de la Matemática, de Carl B. Boyer; o Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, de I. Grattan-Guinness.

Es necesario señalar que los docentes han recibido una fuerte influencia de parte de los matemáticos profesionales y científicos en buscar atribuir siempre los grandes descubrimientos e inventos a sólo una persona. Tal atribución, sirve desde luego, a un fin didáctico, al centrar la atención sobre ciertos aspectos fundamentales de las materias.

Hay en tales atribuciones y divisiones, sin embargo, un serio peligro. Raramente, o quizá nunca, un único matemático o científico ha tenido el derecho a recibir el crédito completo de una "innovación", así como tampoco época alguna puede ser la única llamada "renacentista" en el aspecto cultural. Atrás de cualquier descubrimiento o invento existe invariablemente una evolución de ideas que hacen posible su gestación. La historia del cálculo suministra un notable ejemplo de este hecho[17].

De este modo por ejemplo, Newton con el método de fluxiones y Leibniz con el cálculo diferencial han sido considerados como los inventores del cálculo, en el sentido de que ellos dieron a los procedimientos infinitesimales de sus predecesores la unidad algoritmíca y precisión necesaria para posteriores desarrollos. Sin embargo, sus trabajos difieren de los correspondientes métodos de sus antecesores, Barrow y Fermat, más en actitud y generalidad que en contenido y detalle. Los procedimientos de Barrow y Fermat fueron a su vez elaboraciones sobre las opiniones de hombres como Torricelli, Cavalieri y Galileo. Los logros de estos primeros inventores de los recursos infinitesimales estuvieron en relación directa con las contribuciones de Oresme, el Calculador, Arquímedes y Eudoxo. Finalmente, el trabajo de estos últimos fue inspirado por los problemas matemáticos y filosóficos sugeridos por Aristóteles, Platón, Zenón y Pitágoras. Sin la filiación de ideas sobre las cuales se edificó, por estos y otros hombres más, el cálculo de Newton y Leibniz hubiera sido impensable.

Así como los matemáticos han sido propensos a olvidar los períodos de inspiración y anticipación al surgimiento del cálculo, algunos profesores del área quizá han fallado en no pocas ocasiones al no apreciar la significación de la transición del análisis hacia formulaciones rigurosas, dado que casi todas las referencias a los sucesos históricos de dichos temas, a menudo terminan con los trabajos de Newton y Leibniz, a pesar de que ninguno de ellos fue capaz de proporcionar la precisión de pensamiento que siguió en los dos siglos posteriores.

Esta revaloración *conceptual histórica* sobre las bases, aportaciones, limitaciones, e inclusive las mismas contradicciones y vacíos que los conceptos matemáticos han tenido en su evolución histórica, podría resultar relevante en los procesos de formación docente, en tanto que suministraría al profesor un elemento adicional para comprender el proceso de construcción de la matemática al contar con más elementos *semánticos* que apoyen su tarea docente en lo relativo a las series infinitas, los infinitesimales y los límites.

En particular, en caso de que un profesor del área de cálculo o análisis matemático, desease revisar la forma en que se desarrollaron históricamente los conceptos vinculados con las series infinitas, los infinitesimales y los límites, además del problema señalado, deberá enfrentar al menos dos dificultades adicionales, una, la carencia en general, de una disponibilidad real de libros sobre historia de las matemáticas, ya sea en cantidad, en variedad e inclusive en un idioma diferente al español, y la otra, en cuanto a la temática ya señalada, que se encuentra inmersa en la vasta historia matemática y que ni por mucho viene preseleccionada para el lector, al menos en el sentido que el presente trabajo pretende.

Por lo anteriormente expuesto, el trabajo de investigación sobre la evolución de las series infinitas, los infinitesimales y los límites busca favorecer la formación de profesores en el área de cálculo y análisis a través de un material que sea potencialmente significativo, y cuyo cuerpo estará conformado por los hechos matemáticos más relevantes en la historia de los aspectos ya señalados y que permitan:

- ✓ Dar seguimiento a los hechos relevantes, presentados cronológicamente, vinculados a la evolución de las series infinitas, infinitésimos y límites;
- ✓ Reconocer el momento de la historia de las matemáticas que permitió que emergiera el vago concepto de infinitesimal;
- ✓ Entender la necesidad que históricamente tuvo la rama matemática en superar el concepto de infinitesimal a través del concepto de límite;
- ✓ Vincular el concepto de número irracional, con el concepto del límite;
- ✓ Analizar las características matemáticas en que se sustentaron los conceptos;
- ✓ Tender un puente entre los conocimientos históricos y los conceptos que en la actualidad usamos;
- ✓ Hacer patente que las matemáticas han estado en permanente evolución y revisión y qué por mucho, no son un tema totalmente acabado;
- ✓ Identificar a los infinitesimales como los precursores del análisis no estándar
- ✓ Disponer de un material histórico-matemático, que sirva de base para posibles *organizadores previos*, proporcionando un elemento que coadyuve a enriquecer el quehacer docente de los profesores de matemáticas;
- ✓ Proporcionar un entorno a los conceptos que actualmente se enseñan, del cual se puedan obtener motivaciones adicionales para los alumnos. No olvidemos lo que respecto a la motivación decía Piaget, al señalar a ésta como el motor de nuestra conducta.
- ✓ Proporcionar una fuente documental a manera de texto para uso en el desarrollo de cursos de historia del cálculo y el análisis matemático.
- ✓ Favorecer la formación de profesores del área del cálculo diferencial e integral.

En consecuencia me permito plantear para el presente trabajo de investigación, el siguiente:

Objetivo general

Proponer un material potencialmente significativo sobre las series infinitas, los infinitesimales y el concepto de límite, con base a un seguimiento histórico de los mismos.

2. MARCO TEÓRICO.

2.1. ASPECTOS PEDAGÓGICOS.

2.1.1. PIAGET Y LA EPISTEMOLOGÍA.

Respecto a las ciencias, Piaget señala que se ve en la historia de éstas su significación epistemológica, que un conocimiento no puede ser disociado de su contexto histórico, ya que es precisamente su historia la que provee su significación epistemológica.

Así, Piaget establece que en las ciencias existen:

i) Una *epistemología interna* que consiste en el examen crítico de los procedimientos utilizados y está destinada a instituir los fundamentos de cada disciplina.
ii) Una *epistemología derivada* que consiste en un análisis de la naturaleza de sus procedimientos de conocimiento cuyo objetivo es determinar las respectivas partes del sujeto y el objeto, en el modo particular de conocimiento que caracteriza a esa ciencia.
iii) Una *epistemología genética* que toma en cuenta las estructuras y la génesis, cuya pregunta central es el cómo se incrementan los conocimientos.

"Determinar como se incrementan los conocimientos implica que se adopte como método el considerar todo conocimiento bajo el ángulo de su desarrollo en el tiempo, es decir, como un proceso continuo cuyo comienzo o finalización no puede alcanzarse nunca. En otras palabras, todo conocimiento debe enfocarse siempre, metodológicamente, como siendo relativo a un estadio anterior de menor conocimiento y como susceptible de constituirse a su vez en el [nuevo] estadio anterior respecto de un conocimiento más profundo"[18].

Para abordar la génesis del conocimiento, desde el punto de vista de las disciplinas, Piaget propone el método histórico crítico en el análisis de los estadios colectivos de la construcción de los conceptos disciplinarios y el método psicogenético para el estudio de las formas concretas de apropiación por el sujeto. Estos dos métodos mencionados son la esencia de la epistemología genética

Como ya se ha señalado en la exposición de motivos, lo esencial, siguiendo el método histórico crítico es "caracterizar los grandes periodos sucesivos del desarrollo de un concepto, de una estructura o de las perspectivas de conjunto sobre una disciplina dada. Todo esto con aceleraciones y regresiones, o sin ellas; con acciones de precursores o rupturas epistemológicas".

Así como el conocimiento no se da en forma lineal, en las etapas del saber tampoco sucede lo mismo. Cada estadio o período comienza por una reorganización de lo que heredó de los precedentes estadios o períodos.

La ciencia es construida por un sujeto histórico, que retoma el saber de su tiempo para superar las estructuras y operaciones a partir de una reorganización; la ciencia está construida por abstracciones reflexivas y generalizaciones. En el curso de la historia del pensamiento científico, los progresos logrados de una etapa a la siguiente pueden ser seriados, como en el curso de la psicogénesis[i], bajo la forma de estadios secuenciales. Los mecanismos de pasaje de un período histórico al siguiente, son análogos a los del pasaje de un estadio psicogénico al siguiente.

El mecanismo de pasaje de un período histórico al siguiente, se caracteriza porque cada vez que hay un rebasamiento, lo que fue rebasado está de alguna manera integrado en el rebasante. Conlleva una triada dialéctica que constituyen un argumento de una epistemología constructivista de las actividades cognoscitivas, a saber: se verifica un proceso que conduce del análisis de los objetos al estudio de las relaciones y transformaciones y de ahí a la construcción de las estructuras.

Para Piaget, la revolución científica es un cambio de marco epistemológico que engloba el paradigma humano de revolución científica, y son los cambios en el marco epistemológico los que hacen evolucionar las disciplinas. Sólo en momentos de crisis, de revoluciones científicas, hay una ruptura de la ideología científica dominante y pasa a un estadio diferente con un nuevo marco epistemológico, que implica desde luego una concepción diferente del mundo.

Así mismo, Piaget señala que la *historia de la ciencia* ofrece un claro ejemplo de la influencia del medio social en el proceso cognitivo. Que la concentración de esfuerzos en el estudio de ciertos tipos de fenómenos o problemas, desempeñan un papel predominante en la dirección que adquiere el desarrollo de las teorías científicas. Precisa que la concentración de esfuerzos responde algunas veces a factores de inspiración puramente científica, como por ejemplo, la necesidad de remover contradicciones en una teoría que ha demostrado ser aplicable a diversos dominios.

2.1.2. AUSUBEL Y LA TEORÍA DEL APRENDIZAJE VERBAL SIGNIFICATIVO.

> "Si tuviese que reducir toda la psicología
> educativa a un solo principio, enunciaría este:
> *el factor más importante que influye*
> *en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe.*
> *Averígüese esto*
> *y enséñese consecuentemente.*"
>
> Ausubel, Novak y Hanesian.

Durante los años de hegemonía conductista en la psicología, los estudios en el campo educativo se centraron, principalmente, en áreas como la programación y la evaluación, la dinámica de grupos, la orientación y el desarrollo de la personalidad quedando casi completamente abandonado el estudio del aprendizaje en el aula. Detrás de esta minusvaloración del estudio del aprendizaje escolar estaba la concepción de que el aprendizaje humano podía ser adecuadamente comprendido y explicado a partir de las leyes establecidas en el estudio del aprendizaje animal o, en cualquier caso, mediante investigaciones realizadas con tareas simples en el laboratorio[19].

[i] Según Piaget y García (1982), el término psicogénesis se usa indistintamente para la psicogénesis de los conocimientos o estudio de la formación y de la naturaleza de los instrumentos cognitivos, y la psicogénesis de los procesos fácticos —relativos a los hechos—.

Es en este contexto en el que Ausubel se propone desarrollar una teoría cognitiva[i] del aprendizaje, cuyas características más relevantes son:

i) su carácter cognitivo, manifiesto en la importancia que en su concepción tiene el conocimiento y la integración de los nuevos contenidos en las estructuras cognoscitivas previas del sujeto; y

ii) su carácter aplicativo, centrándose en los problemas y tipos de aprendizaje que se plantean en una situación socialmente determinada, como es el aula, en la que el lenguaje es el sistema básico de comunicación y transmisión de conocimientos.

Con relación al aprendizaje escolar, Ausubel propone dos distinciones que hacen referencia a dos tipos diferentes de procesos o dimensiones, que dan lugar a las cuatro clases fundamentales de aprendizaje que incorpora su teoría. La primera distinción alude a la diferencia entre los aprendizajes por recepción y aprendizajes por descubrimiento; y la segunda, se ocupa de los aprendizajes significativos en oposición a los mecánicos o repetitivos. Mediante estas dos dimensiones, consideradas como continuos y no como compartimentos independientes uno del otro, caracteriza distintas actividades humanas en las que se pone de manifiesto el aprendizaje. El cuadro siguiente caracteriza lo expresado.

Cuadro 2.1.2.1. Matriz de representación e ilustración de las dos dimensiones propuestas de aprendizaje, con algunas actividades características.

APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	Clarificación de relaciones entre conceptos. Relaciona los contenidos nuevos con los que ya posee,	Instrucción audio-tutorial bien diseñada	Investigación científica
	Conferencias y la mayoría de las presentaciones en libros de texto. Se pretende dotar de significado propio a los contenidos	Trabajo en el laboratorio escolar	Incluye la mayoría de la investigación o producción intelectual rutinaria
APRENDIZAJE MEMORÍSTICO	Le son dadas las reglas sobre límites y la internaliza al pie de la letra.	Aplicación de las reglas que ha aprendido para resolver problemas	Solución de ejercicios en forma mecánica, por ensayo y error
	APRENDIZAJE RECEPTIVO	APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO GUIADO	APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO AUTÓNOMO

Del cuadro anterior se pueden identificar las cuatro clases fundamentales de aprendizaje siendo éstas:

[i] Cognitivo. Relativo al conjunto de estructuras y actividades psicológicas cuya función es el conocimiento, por oposición a los dominios de la afectividad.

- *Aprendizaje por recepción*. El alumno recibe los contenidos que debe aprender en su forma final, acabada; no necesita realizar ningún descubrimiento más allá de la comprensión y asimilación de los mismos, de manera que sea capaz de reproducirlos cuando sea requerido.

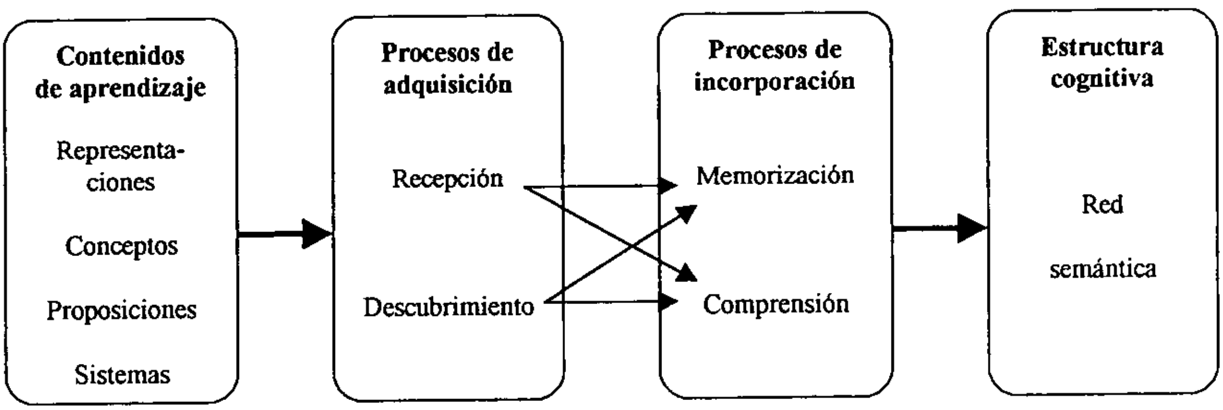
- *Aprendizaje por descubrimiento*. El alumno debe descubrir el contenido principal de lo que va a ser aprendido, dado que dicho contenido no da en forma acabada. Este descubrimiento o *reorganización* del material debe realizarse antes de poder asimilarlo; el alumno reordena el material adaptándolo a su estructura cognoscitiva previa hasta descubrir las relaciones, leyes o conceptos que posteriormente asimila.

- *Aprendizaje significativo*. El alumno debe relacionar los nuevos contenidos con sus conocimientos previos de un modo sustantivo, es decir, no arbitrario o al pie de la letra, y debe asumir una actitud favorable para la tarea, dotando de significado propio a los contenidos que asimila.

- *Aprendizaje repetitivo*. El alumno asume una actitud de asimilar los contenidos al pie de la letra y de modo arbitrario, sin relación con conocimientos previos, o bien el alumno carece de los conocimientos necesarios para que los contenidos resulten significativos.

Gráficamente se podrían representar como las diferentes combinaciones entre los elementos de la estructura siguiente:

Cuadro resumen de la teoría del aprendizaje significativo[20].



Comentarios adicionales al cuadro resumen:

Contenidos de aprendizaje. Aquello que se enseña, de carácter verbal o discursivo.

- *Representaciones.* Signos que se vinculan arbitrariamente con alguna entidad única o con otro signo —v. gr. nombre de un objeto o sinónimos— Permite un mínimo de enriquecimiento conceptual.
- *Conceptos.* Palabra o idea que se relaciona con una clase de elementos —v. gr. verbos, adjetivos, sustantivos—
- *Proposiciones.* Enunciados que pueden referirse a hechos específicos o situaciones generales.
- *Sistemas conceptuales.* Conjuntos de representaciones, conceptos y proposiciones articuladas en el discurso verbal.

Procesos de adquisición. Se refieren a la forma en que se establece una idea, una representación, un concepto, una proposición o combinaciones entre ellos.

- *Aprendizaje por recepción.* El contenido principal de lo que se va a aprender se le presenta al alumno en su forma final o más o menos terminado —v. gr. reglas generales de integración—. De acuerdo con Ausubel es característico de los adultos y deseable en la escuela.
- *Aprendizaje por descubrimiento.* El contenido principal de lo que se va a aprender debe ser descubierto. Según Ausubel es característico de la niñez y no de la edad adulta.

Procesos de incorporación. Se refieren a la forma en que se internalizan o asimilan las ideas previamente recibidas o descubiertas.

- *Aprendizaje memorístico.* Las ideas o contenidos se aprenden literalmente o casi literalmente, con consecuencias tales como: mínima comprensión, escasa retención a largo plazo, dificultades para aplicación o generalización de la idea.
- *Aprendizaje significativo.* Las ideas se relacionan de manera no arbitraria y sustancial con la estructura semántica previa. Los determinantes para que se aprenda son:
  i) Disposición del alumno.
  ii) Naturaleza de la estructura cognitiva.
  iii) Naturaleza del material o de la exposición.

Red semántica.

- Es una combinación de representaciones, conceptos y proposiciones, que forma parte de la estructura cognitiva.
- Jerárquicamente organizada por niveles de generalidad o inclusividad.
- Permite establecer relaciones de tipos diversos: causales, funcionales, de analogía o contraste, etc.
- Ausubel dice que "es el contenido y organización totales de las ideas de una persona dada.

Ausubel pone énfasis en los aprendizajes significativos, aplicando su empeño en la eliminación, tanto como sea posible, de los aprendizajes repetitivos y memorísticos. Asimismo considera que la principal fuente de conocimientos proviene del aprendizaje significativo por recepción. Si bien el aprendizaje por descubrimiento tiene una importancia real en la escuela, por ejemplo para establecer los primeros conceptos de una disciplina en todas las edades, el cuerpo básico de conocimientos de cualquier rama académica se adquiere mediante el aprendizaje por recepción significativa y precisamente es merced a este tipo de aprendizaje, a través del lenguaje, como la humanidad ha construido, almacenado y acumulado su conocimiento y su cultura[21].

Desde esta perspectiva, la tarea del docente consiste en programar, organizar y secuenciar los contenidos de forma que el alumno pueda realizar un aprendizaje significativo, encajando los nuevos conocimientos en su estructura cognoscitiva previa y evitando, por tanto, el aprendizaje memorístico repetitivo.

Para que el aprendizaje significativo tenga lugar, tienen que cumplirse tres condiciones:

- i) Los nuevos materiales que deben ser aprendidos deben ser potencialmente significativos, para poder ser relacionados con las ideas relevantes que posea el sujeto.
- ii) La estructura cognoscitiva previa del sujeto debe poseer las ideas relevantes necesarias para que puedan ser relacionadas con los nuevos conocimientos.
- iii) El sujeto debe manifestar una disposición significativa hacia el aprendizaje, lo que plantea la exigencia de una actitud activa y la importancia de los factores de atención y motivación.

Así, Ausubel señala que " el resultado de la interacción que tiene lugar entre el nuevo material que va a ser aprendido y la estructura cognoscitiva existente es una *asimilación* entre los viejos y nuevos significados para *formar una estructura cognoscitiva más altamente diferenciada* "

Ausubel postula, tal y como lo hace la psicología cognitiva actual, que la estructura cognitiva humana está organizada en forma jerárquica respecto al nivel de abstracción, generalidad e inclusividad. Así, el proceso de asimilación cognoscitiva característico del aprendizaje significativo puede realizarse de tres formas diferentes:

⇒ *Aprendizaje subordinado o subsunción.* Es la principal forma de aprendizaje significativo y se produce cuando las nuevas ideas son relacionadas subordinadamente con ideas relevantes de mayor nivel de abstracción, generalidad e inclusividad. Estas ideas o conceptos previos de orden superior son llamados *inclusores* y sirven de anclaje para las nuevas ideas o conceptos.

Se tienen dos tipos de aprendizaje subordinado o subsunción:
a) *Subsunción derivativa* que se produce cuando los nuevos conceptos tienen un carácter de ejemplo o ilustración de los conceptos ya existentes o inclusores; es decir pueden ser *derivados* de forma relativamente fácil a partir de los inclusores ya existentes. El tipo de aprendizaje más frecuente en este caso se da cuando los nuevos conocimientos son una extensión, elaboración, modificación o cualificación de los conocimientos que ya posee el sujeto.
b) *Subsunción correlativa* que implica que los nuevos conocimientos no pueden ser derivados de los conocimientos supraordenados ya existentes o inclusores. La nueva información es vinculada a una idea de mayor nivel de abstracción, de la cual es una extensión, modificación o limitación.

⇒ *Aprendizaje supraordenado.* Los conceptos o ideas relevantes existentes en la estructura cognoscitiva del sujeto son de menor nivel de generalidad, abstracción e inclusividad que los nuevos conceptos a aprender. Este tipo de aprendizaje se da cuando el sujeto integra conceptos ya aprendidos anteriormente dentro de un nuevo concepto integrador más amplio e inclusivo.

⇒ *Aprendizaje combinatorio.* Se caracteriza por el hecho de que los nuevos conceptos no pueden relacionarse, ya sea de forma subordinada o supraordenada, con ideas relevantes específicas en la estructura cognoscitiva del sujeto. Por el contrario, estos nuevos conceptos pueden ser relacionados de *una forma general* con la estructura cognoscitiva ya existente, lo cual hace más difícil aprenderlos y recordarlos cómo en los casos del aprendizaje subordinado o supraordenado. Un ejemplo de este tipo de aprendizaje podría darse con los conceptos de *estructura* y *cambio*, en diferentes materias como la Física, las Ciencias Naturales y la Historia, en donde pueden presentarse ciertos rasgos generales comunes que permitirían un aprendizaje combinatorio.

La teoría de la asimilación de Ausubel sostiene que la interacción entre los nuevos conceptos y los ya existentes, se realiza siempre de forma transformadora y que el producto final supone una modificación tanto de las nuevas ideas aprendidas, como de los conocimientos ya existentes.

Ausubel señala que durante el curso del aprendizaje significativo tienen lugar dos procesos relacionados de gran importancia educativa:

1. *La diferenciación progresiva.* A medida que el aprendizaje significativo tiene lugar, los conceptos inclusores se modifican y desarrollan, haciéndose cada vez más diferenciados. Este proceso de diferenciación progresiva produce un refinamiento conceptual, y un fortalecimiento de las posibilidades de aprendizaje significativo, al aumentar la densidad de ideas relevantes en las que pueden anclar los nuevos conocimientos. Es este proceso de diferenciación progresiva el que explica la superioridad del aprendizaje subsuntivo respecto al supraordenado y aconseja la presentación, en el desarrollo de una lección de un curso, de las ideas más generales e inclusivas al principio de la misma y propone, la utilización de *organizadores previos*.

2. *La reconciliación integradora.* Se refiere a que, en el curso del aprendizaje significativo supraordenado o combinatorio, las modificaciones producidas en la estructura cognoscitiva, permiten el establecimiento de nuevas relaciones entre conceptos, evitando la agrupación del material en islas de conocimiento, a la que los programas en cierta medida obligan.

Así, la teoría de Ausubel sostiene que el aprendizaje significativo se produce, al relacionar las nuevas ideas con las ya existentes en la estructura cognoscitiva del sujeto. Este proceso de asimilación explica también el olvido, al considerar que éste se produce cuando las nuevas ideas o conceptos no pueden ser disociados de las ideas o conceptos que les han servido de anclaje. Según este tipo de asimilación, llamada obliterativa[i], las nuevas ideas tienden a ser reducidas a los más estables significados de las ideas ya establecidas, haciéndose espontánea y progresivamente menos disociables de sus ideas ancla, hasta llegar el momento en que se confunden con ellas y se dice, entonces, que se ha producido el olvido.

Este proceso de olvido en el aprendizaje significativo, mediante asimilación obliterativa, pone de manifiesto una vez más las diferencias entre el aprendizaje significativo y el repetitivo, siendo el primero superior al segundo. dado que establece conexiones significativas entre los nuevos conocimientos y los ya existentes, prestándoles a estos últimos su estabilidad. En consecuencia, después que ha ocurrido la asimilación obliterativa, es decir, se ha dado el olvido, los conceptos que han servido de anclaje para el aprendizaje significativo han adquirido una mayor diferenciación y un mayor poder para establecer relaciones significativas con nuevos materiales. Por el contrario, en el aprendizaje repetitivo, no se produce la misma intensificación de las posibilidades de nuevos aprendizajes[22].

Ausubel considera que los métodos de exposición, tanto oral como escrita, han sido mal utilizados, entre otras razones, por la presentación arbitraria de hechos no relacionados, sin organización o principios explicativos, por lo que propone la utilización de definiciones claras y la explicitación de las similitudes y diferencias entre conceptos relacionados, así como la presentación de las ideas básicas unificadoras de una disciplina antes de la presentación de los conceptos más periféricos.

La idea clave, es proporcionar al alumno los conceptos de mayor generalidad, los inclusores que deben ser activados para lograr una adecuada integración de los nuevos conocimientos en la estructura previa del sujeto. Ésta es, precisamente, la función de una técnica que se ha convertido en la más conocida de las aplicaciones educativas de la teoría de Ausubel: *los organizadores previos.*

Los organizadores previos, no son resúmenes ni sumarios dado que estos últimos son sólo una macroestructura de los propios contenidos en los que se ha omitido la información de detalle, pero no son conceptos de mayor nivel que el nuevo material. Los organizadores previos son entonces, un material introductorio de mayor nivel de abstracción, generalidad e inclusividad con respecto al nuevo material que se va a presentar, y tratan de ser un "puente" entre lo que el sujeto ya conoce y lo que necesita conocer para asimilar significativamente los nuevos materiales.

La función del organizador previo es proporcionar un "andamiaje ideacional[ii]" para la retención e incorporación estable del material más detallado y diferenciado que se va a aprender. Dado que su función es servir de anclaje para los nuevos conocimientos, es singularmente importante que estén expresados en la forma más familiar y sencilla, para que sean más fácilmente comprensibles por el alumno.

Se ha criticado a los organizadores previos porque les falta precisión y operacionalización en la definición de los mismos, sin embargo el propio Ausubel ha sostenido que el mayor grado de especificidad que puede

---

[i] Obliterar. Cubrir con una señal o una marca especial. Sus sinónimos son obturar, obstruir, ocluir.
[ii] Ideación. Génesis y proceso en la formación de las ideas.

lograrse en la definición de los organizadores previos consiste, en describirlos en términos generales y proporcionar un ejemplo adecuado, dependiendo siempre de las características del material, la madurez del alumno y su nivel de familiaridad con la información que se le presenta.

García Madruga[23], señala que los estudios de Mayer, 1979,1983; Mayer y Bromage, 1980, parecen mostrar que la utilización de organizadores previos a un texto produce, en determinadas circunstancias, una mejora los resultados del aprendizaje.

Los factores que favorecen su uso son:

- i) *La recepción*. Se refiere a que la información proveniente del medio sea correctamente recibida.
- II) *La disponibilidad* de la existencia de conocimientos ancla en la estructura cognoscitiva previa de los sujetos, y
- III) *La activación* de los conocimientos previos para lograr la integración de los nuevos conocimientos.

También se han señalado tres situaciones en las que los organizadores previos no resultan útiles:

- 1. Cuando el nuevo material a aprender contiene en sí mismo los conocimientos prerrequisito.
- 2. Cuando el organizador no sirve adecuadamente para proporcionar el contexto asimilativo, ni fomenta una activa integración de la nueva información.
- 3. Cuando el alumno posee ya un conocimiento profundo de la información que va a aprender.

2.1.3. EL LIBRO Y EL LIBRO DE TEXTO.

Una de las más exactas expresiones de la esencia de libro la da Platón en *Fedro* (275, 6) dice: que los libros son "decires escritos". Ortega y Gasset analiza los conceptos y problemas implícitos en las palabras del diálogo platónico, señalando que las notas que constituyen el concepto de "libros" son tres: a) *lo que hay que decir*, b) *la necesidad y ejemplaridad de ese decir*; c) *su permanencia o fijación supratemporal*. En ocasiones se ha adicionado una cuarta: *cierta extensión*.

Para la pedagogía, el libro es cuestión de capital importancia. Su interés es triple:

- 1) Por hallarse en ellos objetivada y latente la cultura de cuya realización y transmisión se ocupa la educación.
- 2) Por constituir el mejor depósito del saber pedagógico conseguido hasta lo presente.
- 3) Como realidad frente a la cual se dan en el hombre determinadas limitaciones (desconocimiento, perplejidad, torpeza para su manejo y localización, etc.) y cuya superación es tema propio de la tarea educativa.

Frente al libro como continente de la cultura, la Pedagogía ha de ocuparse de la *selección* de acuerdo con diversos criterios, uno de los cuales, además de los axiológicos[i] de verdad, bondad, belleza, etc., es el de la actualidad en el doble sentido de lo "*de hoy y de este lugar*" y de "*la perenne actualidad de lo clásico*". Como consecuencia de ello surge el libro con valor pedagógico, que no sólo es el expresamente escrito para el sector destinado a leerlo con fruto, sino, el creado quizá con una finalidad distinta, pero con características tales que lo hacen plenamente fecundo en su nuevo destino. Por otra parte, se debe anotar, que el auténtico libro educativo conserva su valor más allá del círculo de lectores a quienes se dirigió.

---

[i] Relativos a los valores morales.

"Libro de texto es todo libro escolar que sirve para orientar a los alumnos en el aprendizaje sistemático de las distintas materias del programa"[24]: es el libro escolar adaptado lo más posible al cuestionamiento del centro docente y a las explicaciones del profesor. Se ha señalado por diversos pedagogos, que ha pesar de haberse tachado de librescas a las escuelas antiguas, continua aceptándose el uso del libro, ***porque la lectura es uno de los medios principales sino el principal de la instrucción***. El libro de texto subsiste como antología de lecturas que, si bien se encuentran en tomos separados, adquieren unidad por los propósitos del docente y por la naturaleza de cada materia. "*El libro de texto es, por tanto, una realidad de la que no se debe prescindir*"[25].

2.2. FUENTES HISTÓRICO-MATEMÁTICAS

Las fuentes que se consultaron, desgraciadamente no pudieron ser las *primarias* escritas en latín, francés, inglés o alemán, sino que se tuvo que recurrir a fuentes secundarias, ampliamente reconocidas y respetadas por su rigurosidad al citar los trabajos de los matemáticos que se abordarán en el transcurso del presente trabajo.

No puede negarse que en la actualidad ya existen en el ámbito internacional grandes esfuerzos encaminados a dar a conocer la historia de las matemáticas. La intención de algunos por la forma en que están escritos —se puede calificar de enciclopedista— es sólo la de proporcionar una serie de conocimientos un tanto elementales, desde el punto de vista de formación matemática, pues únicamente se concretan a mencionar los logros que tuvieron algunos matemáticos famosos, sin mostrar en detalle alguno los procesos matemáticos que podrían enriquecer y coadyuvar en la formación de nuevas generaciones de profesores del área matemática, en particular la vinculada con el análisis matemático. Otros, dan por sentado una serie de antecedentes matemáticos no siempre presentes en el lector, que por lo menos no hacen fácil su lectura y comprensión. Por la importancia y reconocimiento de algunas de las fuentes, me permito resumir la postura manifiesta por los autores, respetando en lo posible sus propias palabras. La presentación se realizará a un orden estrictamente alfabético y no corresponde a fin alguno de preferencias.

2.2.1. BELL. HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS[26].

Bell empieza su introducción citando a un crítico, del cual no menciona el nombre, y al que se refiere diciendo que revisando un libro sobre la teoría de la transformación de grupos (1888), hizo la siguiente observación:

"Probablemente no hay ciencia como las matemáticas que presente tan distinta apariencia a los ojos de quien no las cultiva. Para este [último] es antigua, venerable y completa; un cuerpo de razonamiento árido, irrefutable y lúcido. En cambio, para el matemático su ciencia está todavía en el purpúreo florecimiento de la juventud vigorosa, extendiéndose por doquier tras lo "asequible pero no logrado", y traspasa de la excitación de los pensamientos nacientes; su lógica acosada de ambigüedades y sus procesos analíticos, como el camino de Bunyan[27], discurren entre terreno fangoso, de un lado, y del otro un profundo canal, y se ramifican en múltiples veredas que van todas a dar a un yermo".

Bell prosigue con la presentación de su libro diciendo que deseaba mostrar una historia narrativa de las épocas decisivas en el desarrollo de las matemáticas. Comenta que le fue pedido, principalmente por estudiantes y maestros, que presentara una amplia información del desarrollo general de las matemáticas, con una referencia particular a los principales conceptos y métodos que en cierta medida han sobrevivido. También consideró una razón de interés particular para todo el que profese el magisterio, estimando que una visión de las principales direcciones en que se desarrollaron las matemáticas actuales, podría ayudarles a decidir más inteligentemente el terreno particular de las matemáticas, si es que hubiera alguno, en que pudieran ellos encontrar una satisfacción duradera.

Añade que existe un número sorprendente de estudiantes que se dedican a un trabajo serio, en matemáticas o en sus aplicaciones, que no tienen ni una vaga idea del camino real, de las trampas y de los callejones sin salida que les acechan. En consecuencia, es la cosa más fácil del mundo para un profesor entusiasta, "de conocimientos maduros, reconocida aptitud y carácter intachable", vender a sus despistados alumnos una materia muerta ya desde hace cuarenta o cien años, con la ilusión sincera de estar disciplinando sus mentes. Sólo con una breve ojeada a lo que son las matemáticas en el siglo XX, cualquier estudiante de inteligencia normal podría ser capaz de distinguir entre una instrucción viva y la matemática muerta.

Señala que los temas seleccionados para su libro, fueron escogidos después de una consulta con gran cantidad de profesionales, los cuales conocían por una dura experiencia personal lo que significa una invención matemática. Así, siguiendo sus consejos, de los pasados 6000 años sólo consideró *las tendencias principales y aun éstas se presentaban sólo a través de episodios típicos de máxima importancia en cada caso*. Apunta que, como cualquier matemático podría figurarse, las conclusiones que se sacan siguiendo tales consejos tienen que diferir, a las voces, de las consagradas por la tradición puramente histórica. Cuando esto ocurra, las referencias a otras versiones ayudarán a que el lector se forme su opinión. Nada hay absoluto en matemáticas o en su historia.

Por otra parte, nada más fácil que ajustar una engañosa curva suave a las discontinuidades de la invención matemática. Todo parece entonces como una ordenada progresión que marcha desde Egipto, 4000 a.C., y Babilonia, 2000 a.C. hasta Estados Unidos, 1945; con un Cavalieri, por ejemplo, que apenas se diferencia de Newton en las proximidades del cálculo. Comenta que los "historiadores profesionales pueden, a veces, inclinarse a exagerar la suavidad de la curva; [sin embargo] los matemáticos profesionales, que tienen bien presente la parte dominante que desempeñan en geometría las singularidades de las curvas, prestan atención a las discontinuidades. Éste es el origen de la mayor parte de las diferencias de opinión entre los que cultivan la matemática y la mayoría de los que no la cultivan. Y nada tiene de desastroso el que haya tales diferencias. Disentir es siempre saludable".

Comenta que un eminente analítico francés del siglo XX declaró que, aparte de un par de colegas, nadie tenía el más leve interés en la historia de las matemáticas, tal como la concebían los historiadores. Amplió su declaración observando que la única historia de las matemáticas que tiene algún sentido para un matemático son los miles de escritos técnicos con que tropieza uno al repasar las revistas dedicadas exclusivamente a la investigación matemática. Éstos, afirmó, constituyen la verdadera historia de las matemáticas. Por fortuna, señala Bell, él trató de no escribir una historia "formal" de las matemáticas.

Finaliza haciendo mención a tres aspectos: el primero, que su libro fue una oportunidad de apartarse un poco del camino trillado y mostrar al lector general de dónde salieron las matemáticas que le son familiares y hacia donde se encaminan; segundo, que tanto se ha apartado de lo que es un libro tradicional, que sólo un maestro muy ingenioso podría poner un examen con base al libro; y tercero, que después de una convivencia prolongada y no siempre agradable con obras de historiadores discrepantes, de eruditos pedantes y de matemáticos litigiosos, que con frecuencia se contradicen acaloradamente, transmite, por lo que valga la pena, lo que ha aprendido a estimar como nunca y que se halla en el último consejo de Buda a sus discípulos:

"No creáis nada de oídas. No creáis en las tradiciones por ser viejas, ni en nada por la mera autoridad mía o de cualquier maestro".

Comentarios:

Libro escrito en los años 1940s, con alrededor de 650 páginas que dan cabida a 23 capítulos con una presentación temática narrativa de carácter más informativo que matemático tradicional. Ideal para seguir a grandes pasos el desarrollo de las ideas, pero sin entrar en detalles formales. Un texto muy crítico, con posturas perfectamente definidas, que señala tanto los logros como errores que se cometieron en el desarrollo y argumentación de los conceptos. Se requiere tener ideas claras sobre la matemática que ahí trata para poder entender precisamente los señalamientos críticos.

2.2.2. CARL. B. BOYER. HISTORIA DE LA MATEMÁTICA[28].

Señala que no obstante que a lo largo del siglo se han publicado numerosas historias de la matemática, en realidad pocas de las disponibles, son *verdaderos libros de texto*, por lo que supuso que había lugar para un nuevo libro, (el suyo). Hace mención de los siguientes libros: de J. F. Scott, *A History of Mathematics*, señalando que no es un verdadero libro de texto, o por lo menos no lo es en el sentido americano del término (sic); de David Eugene Smith, *History of Mathematics*, advirtiendo que cubre un área muy extensa a un nivel matemático bajo para los "modernos cursos de *college*" y que le faltan además problemas de tipos variados; de Florian Cajori, *History of Mathematics*, que no se adapta a su utilización en el aula.

Aclara que para él, el texto más adecuado y de mayor éxito parece ser el de Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, que el mismo ha utilizado con considerable satisfacción por lo menos en una docena de cursos a partir de que se publicó en 1953. Sin embargo, indica, que en ocasiones se apartó de la ordenación de los temas que presenta el libro, *en un esfuerzo por conseguir un sentido realzado de la mentalidad histórica*, así como la necesidad de complementarlo con otro texto, por ejemplo, el de D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*.

Boyer establece que su libro se distingue del de Eves, por presentar una adhesión más estricta al orden cronológico de los hechos y en que subraya de una manera más enérgica los elementos puramente históricos. "Siempre está presente la tentación de que, en una clase de historia de la matemática, la finalidad fundamental es la de enseñar matemática, y que, en consecuencia, cualquier desviación de las normas matemáticas usuales es un pecado mortal, mientras que un error histórico es simplemente venial". Aclara su posición en el sentido de que ha tratado de evitar esta actitud, por lo que la finalidad del libro es la de presentar la historia de la matemática con toda la fidelidad posible, no sólo en lo que se refiere a la estructura matemática y a la exactitud en sí, sino también a la perspectiva y al detalle histórico.

Boyer establece que "sería una verdadera locura esperar que en un libro de este tipo (como el de él), cada fecha sea absolutamente correcta", así como que "no pretende de ninguna manera presentar la historia de la matemática en su integridad", por lo que "no raro será el lector que no note aquí y allá lo que puede considerar como omisiones excesivas", haciendo hincapié sobre todo en lo relativo al siglo XX.

Comentarios:

Es una obra de 37 capítulos con alrededor de 800 páginas, en donde combina una presentación por capítulos dedicados a matemáticos destacados, por ejemplo uno para *Newton y Leibniz*; así como también, un tratamiento a través de épocas, por ejemplo, un capítulo para *El Renacimiento y ocaso de la matemática griega*. Su tratamiento en general es de gran calidad, sólo con las restricciones que el propio autor establece.

2.2.3. FLORIAN CAJORI, A HISTORY OF MATHEMATICS[29].

Señala que la observación de las varias etapas por las cuales la humanidad ha llegado a la posesión del vasto conocimiento matemático puede difícilmente dejar de interesar a los matemáticos. A ellos enorgullece el hecho de que su ciencia, más que cualquier otra, es una ciencia exacta, y que dudosamente alguna cosa hecha en matemáticas puede considerarse inútil. Añade que los químicos han sonreído por las niñerías de los alquimistas, pero los matemáticos han encontrado en la geometría de los griegos y la aritmética de los hindúes algo útil y admirable en cualquier investigación hoy en día. Es agradable observar que no obstante, en su desarrollo, las matemáticas han tenido períodos de lento crecimiento, aun en el entendido que ha sido preeminentemente una ciencia progresiva.

Opina que la historia de las matemáticas puede ser instructiva y agradable, que puede no sólo recordarnos lo que tenemos, sino que también puede enseñarnos como incrementar nuestras reservas. Retoma las palabras de De Morgan: "La historia inicial del pensamiento de los hombres con respecto a las matemáticas, nos conduce a señalar nuestros errores y en este respecto es bueno poner atención en la historia de las matemáticas". Nos previene contra conclusiones precipitadas; nos hace ver la importancia de una buena notación para el progreso de la ciencia; se opone a una excesiva especialización de parte de los investigadores mostrando como, aparentemente distintas ramas han encontrado que poseen inesperadas conexiones; salva a los estudiantes de una pérdida de tiempo y esfuerzo sobre problemas que fueron resueltos, quizá hace largo tiempo; se opone a atacar un problema no resuelto por el mismo método que condujo a otros matemáticos al fracaso.

Pone un ejemplo de la importancia de lo anterior, enfatizado un caso contrario a lo mencionado. Comenta que nunca se ha dicho la cantidad de energía intelectual que ha sido consumida sobre la cuadratura del círculo desde la época de Arquímedes. Después de innumerables fracasos para resolver el problema, aun cuando los investigadores poseían herramientas más potentes como el cálculo diferencial, algunas personas versadas en matemáticas abandonaron el tema, mientras que otras todavía persistieron completamente ignorantes de su historia y sin entender las condiciones del problema. Así, Lambert probó en 1781 que la relación de la circunferencia de un círculo con su diámetro es irracional, y algunos años antes, Linderman demostró que la relación es también trascendente y que la cuadratura del círculo por regla y compás es imposible.

Agrega que otra razón para recomendar el estudio de la historia es el valor del conocimiento histórico del profesor de matemáticas. El interés que los alumnos toman en sus estudios puede ser poderosamente incrementado si la solución de los problemas y la fría lógica de las demostraciones son interpretadas con remembranzas y anécdotas. Una clase de aritmética puede ser placentera al escuchar acerca de los babilonios e hindúes y su invención de la notación arábiga; se sorprenderían en los miles de años transcurridos antes de que la gente pensara en el cero y se hallarían atónitos de que esto les hubiese llevado tan largo tiempo en inventar una notación que ellos mismo podrían aprender en un mes.

Pone algunos ejemplos que no parecerían triviales a la luz de la ignorancia: menciona que después de que los alumnos han aprendido como bisecar un ángulo, se sorprenderían de saber de los muchos fracasos para resolver un problema que parece muy simple, que corresponde a trisecar un ángulo con sólo regla y compás. O quizá, cuando ya saben construir un cuadrado cuya área sea el doble del área dada, decirles de la duplicación del cubo, de su origen místico: cómo la cólera de Apolo sería apaciguada con la construcción de un altar cúbico doble a un altar dado, y como los matemáticos batallaron con el problema.

Comenta que los estudiantes de geometría analítica deberían saber algo de Descartes y después continuar con el cálculo diferencial e integral, familiarizándose con el papel creativo que jugaron Newton, Leibniz y Lagrange en la ciencia. Hace énfasis en señalar que a través de la historia, el profesor puede enseñar a los alumnos que las matemáticas no son una ciencia muerta, sino viva y progresiva.

Luego vierte una opinión similar a la de Henry S. White: "Las verdades aceptadas hoy día, aun las más comunes de cualquier ciencia, fueron las dudas o las teorías insólitas del ayer. Algo de suma importancia fue largamente estimado como de poco interés y casi olvidado. El primer efecto de leer la historia de la ciencia es un asombro algo ingenuo de la oscuridad de los siglos pasados, pero al final el efecto es de ferviente admiración por el progreso logrado por las primeras generaciones, por los triunfos de la persistencia y el genio. La fácil credulidad con la que un joven estudiante supone, que todas las ecuaciones algebraicas deben tener raíces, lo coloca finalmente en el encanto de una lenta conquista del mundo de los números imaginarios y en contacto con el juvenil genio de Gauss quien demostró esta incomprendida proposición fundamental."

La historia de las matemáticas es también importante por su valiosa contribución a la historia de la civilización. El progreso humano es cerradamente identificado con el pensamiento científico. Las investigaciones matemáticas y físicas son un registro importante del progreso intelectual. La historia de las matemáticas es una de las más grandes ventanas a través de las cuales, el ojo del filósofo mira al pasados y delínea el desarrollo intelectual.

Comentarios:

Es un texto de cerca de 500 páginas, organizado por secciones que en ocasiones hacen referencia a las culturas, por ejemplo los griegos, y en otras ocasiones a los períodos, como el siglo diecinueve y el siglo veinte. También hace referencia a las diferentes ramas de la matemática, por ejemplo el análisis o el álgebra. Es un texto de difícil lectura, por su redacción más enciclopédica, menos específica y por lo tanto con menos notación matemática que otros textos de su género, que requiere de conocimientos previos muy sólidos tanto de los contenidos matemáticos a que hace referencia como de los personajes involucrados. Esto puede señalarse como una virtud o un defecto según la apreciación que se tenga para su uso. Pero es definitivo que para la formación de docentes en matemáticas, no permea las dificultades inherentes a los cálculos requeridos para una mejor contextualización de sus contenidos. Fuera de estas observaciones, es un texto con excelentes comentarios sobre la temática que aborda.

2.2.4. C. H. EDWARDS, JR. THE HISTORICAL DEVELOPMENT OF CALCULUS[30].

Inicia comentando que el cálculo ha servido por tres siglo como el principal lenguaje de la ciencia occidental. En el curso de su génesis y evolución, algunos de los problemas más fundamentales de las matemáticas, fueron primero confrontados y a través de perseverantes esfuerzos, finalmente resueltos. Por lo tanto, el desarrollo histórico del cálculo, mantiene un especial interés para cualquiera que aprecie el valor de una perspectiva histórica en la enseñanza y disfrute de las matemáticas y sus aplicaciones.

Edwards señala que su meta al escribir el libro fue presentar una investigación de su desarrollo, que fuese accesible no solamente a estudiantes de la historia de las matemáticas, sino también a una comunidad matemática más amplia, destinada intencionalmente para aquéllos que estudian, enseñan o usan el cálculo.

Comenta que el reconocido libro de C. B. Boyer intitulado en su versión original como *The Concepts of the Calculus*, proporciona un excelente informe del desarrollo histórico de los conceptos que se encuentran en los fundamentos del cálculo, en oposición a la evolución del cálculo mismo, como una disciplina para calcular; su exposición esencialmente verbal estuvo bien adaptada a su énfasis en lo que usualmente se llama la metafísica del cálculo.

Añade que el cálculo como una disciplina destacada de la matemática, no es sólo un cuerpo abstracto de conceptos fundamentales, sino sobre todo, un instrumento por excelencia para calcular y sus más grandes éxitos han sido las respuestas a la pregunta de ¿Cómo calculo realmente esto?. Así, la solución de problemas específicos con frecuencia, en el desarrollo del cálculo, ha desempeñado un papel no sólo distinto al *experimentum crucis* en ciencias naturales. Tradicionalmente, la solución a un problema particular produce, por inferencia, una técnica o procedimiento general que primero confronta la cuestión sobre *qué nuevos problemas pude resolver* y luego levanta cuestiones conceptuales en cuanto al rango de su aplicabilidad. Así, Edwards trata de que su libro sea un espejo de este complejo proceso histórico, anclándolo al desarrollo de conceptos fundamentales y métodos generales en los paradigmas de cálculo que ha desempeñado un papel central en el desarrollo del *cálculo*.

Comentarios:

Se trata de un texto de alrededor de 350 páginas, dividido en 12 capítulos, iniciando su presentación con la Geometría babilónica y egipcia, hasta llegar al siglo XX con una breve referencia al análisis no estándar.

No obstante su orientación al cálculo, algunos de los conceptos de la disciplina no son fácilmente accesibles, dada las características propias de la narrativa.

La lectura del texto requiere de una gran dedicación y un buen conocimiento de las bases matemáticas en que se sustenta. Su lectura requiere de un análisis minucioso, que generalmente debe hacerse con lápiz y papel a la mano. Su calidad matemática e histórica es innegable.

2.2.5. Howard Whitley Eves. An Introduction to the History of Mathematics[31].

Se señala que el libro pretende ser una introducción a la historia de las matemáticas que pueda ser usado en el salón de clases de una licenciatura y no sólo como un libro de consulta. Por lo tanto, además de la narrativa histórica, hay aplicaciones pedagógicas diseñadas para interesar e involucrar a los estudiantes.

Precisa que, asimismo incluye una lista de problemas de estudio al final de cada capítulo. Cada problema de estudio contiene un número de problemas laterales y cuestiones que conciernen a alguna parte del material del capítulo.

Cita que “una verdadera apreciación de una rama de las matemáticas es imposible sin algún conocimiento de la historia de esa rama, y que para los matemáticos el estudio y genuino entendimiento de las ideas, no es posible sin un análisis de los orígenes.

Finalmente, señala que la historia de las matemáticas es tan vasta que sólo una introducción (como él pretende en su libro) es posible para ser cubierta en un año de clases por estudiantes avanzados de una licenciatura en matemáticas.

Comentarios:

Libro de aproximadamente 550 páginas, presentado en 15 capítulos y dividido en dos grandes parte, una primera, relativa a los hechos matemáticos previos al siglo XVII y otra posterior a este siglo hasta llegar al siglo XX.

Es un texto reconocido por diversos autores de libros sobre historia de las matemáticas y como el propio autor señala, se requiere leerlo "arrastrando el lápiz". Si se tomaran como referencia las ideas de Vygtsky, del nivel de desarrollo potencial y de la *zona de desarrollo próximo*[i], éste podría ser un claro ejemplo donde algunos alumnos se hallasen con ciertas capacidades y algunos conocimientos previos, quizá por sí solos no podrían asimilarlo, pero que con la ayuda de un profesor o de compañeros con un mayor nivel de conocimientos seguramente lo lograrían. Los problemas que deja para resolución por parte del lector, en general tienen un grado de dificultad no fácilmente superable. En general una obra muy valiosa, pero que requiere de una inversión relativamente alta de esfuerzo y de suficiente tiempo para su lectura.

2.2.6. Grattan-Guinness. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910[32].

El libro presenta el desarrollo del cálculo diferencial e integral desde comienzos del siglo XVII hasta finales del siglo XVIII, así como una inclusión en el marco más amplio del análisis matemático durante el siglo XIX, y describe los progresos realizados en este campo hasta comienzos del siglo XX.

Señala que todos los temas que presenta, han sido tratados ya en ocasiones anteriores por los historiadores de la matemática, diferenciándose su presentación en que "al mismo tiempo que se discute la matemática en cuestión con cierto detalle, se trató también de introducir al lector en su desarrollo histórico". Añade que espera que el libro "sea útil en la enseñanza de la matemática".

Comenta que la historia de la matemática puede ser de utilidad, dado que, cualquier teoría matemática es el resultado de unos esfuerzos humanos en el pasado, y algunas ideas por lo menos de sus motivaciones originales pueden muy bien ser oportunas todavía o tener un valor educativo. Añade que, "...En qué medida puede hacerse uso de los aspectos históricos, y cómo pueden utilizarse estos de la forma más provechosa posible, son cuestiones difíciles de contestar..." por lo que no las trata en su libro. Sin embargo, menciona que "...en cualquier caso lo que sí hay que subrayar es que mientras los estudiantes [sí] podrían conseguir así una mejor comprensión de la matemática", sin esperar "que la matemática se torne más fácil".

En el texto se señala que, los distintos capítulos están ordenados siguiendo más o menos un orden cronológico del desarrollo histórico y, a medida que se va desenvolviendo la historia, la matemática va adquiriendo normalmente un carácter más complejo según el contexto histórico se va acercando a la situación moderna. Añade que "con objeto de mantener el libro dentro de una longitud razonable", se decidió concentrarse en los

---

[i] Vygotsky define la *zona de desarrollo potencial* como la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de alguien más capaz.

aspectos puros (sic) y fundamentales del tema, sin pasar por alto los aspectos técnicos y las aplicaciones, que quizá alguien los encuentre dignos de un tratamiento análogo.

Comentarios:

Es un libro de alrededor de 350 páginas, organizado en seis capítulos. Su presentación, si bien sí es en orden cronológica en general, no presenta los logros matemáticos particulares sobre un concepto, sino más bien enfocado a aspectos un tanto más generales, por ejemplo, en el tratamiento de Leibniz, lo mismo hace mención a su concepción de diferenciales, como a sus procesos de integración, lo cual obviamente responde a una forma particular de enfrentar los hechos matemáticos e históricos, y no corresponde desde luego a error alguno.

Su nivel matemático para lectores medianamente versados en el tema, permite su comprensión, y su contenido presenta en general, ejemplos muy *ad-hoc* al tema desarrollado.

2.2.7. JAMES R NEWMAN. SIGMA. EL MUNDO DE LA MATEMÁTICAS[33].

"La más ambiciosa y amplia, a la vez que didáctica antología del pensamiento matemático".
Newman señala que los escritos populares sobre la naturaleza, el uso y la historia de las matemáticas no le proporcionaban lo que él esperaba, dado que era difícil hallar ensayos inteligibles entre los fundamentos y la filosofía de las matemáticas. Así, pensó en un agrupamiento de los temas, en la interpretación del modo de como habían sido escritos y el lugar que ocupaban en la evolución del pensamiento matemático.

Añade que seleccionó lo que mejor mostrase el campo de las matemáticas, la riqueza de sus ideas y la multiplicidad de los aspectos, desde un punto de vista amplio, que revele un cuerpo de conocimientos hecho por los hombres y que permanece independiente de ellos. Señala que esperaria que en su *colección* se encuentren los elementos adecuados para cada afición y para cada capacidad.

Al continuar describiendo su obra menciona que "algunas secciones son extensas", otras, "son difíciles, pero sorprendentemente es que muchas pueden ser comprendidas sin aptitud extraordinaria ni entrenamiento especial".

Antes de dar sus agradecimientos, el autor cierra su presentación señalando que "Una antología es una obra de prejuicios. Esto no es menos cierto en una obra de matemáticas qué cuando se trata de poesía o ficción".

Comentarios:

Es una obra de seis tomos de alrededor de 2900 páginas en las cuales trata una gran diversidad de temas relacionados con la ciencia de la matemática, desde el Arenario de Arquímedes hasta por ejemplo, Entretenimientos, Rompecabezas y Fantasías. Su intención es más bien descriptiva de los sucesos y de no mucha profundidad en su concepción, con relación a la formalidad que debe adquirirse en un proceso de formación de profesores del área matemática. Esto no demerita en absoluto su riqueza como fuente de conocimientos y cultura matemática general. Con relación al contenido vinculado con el análisis y su historia, me permito señalar un aspecto que me parece relevante: el número de partes con sus respectivos capítulos es de 26, y en contrapartida, cuando habla de Newton, le dedica 30 páginas sin una sola expresión matemática explícita. Desde luego que la obra en su conjunto sí cuenta con expresiones matemáticas, pero que no permitirían una profundización de consideración para un lector dedicado a la enseñanza del cálculo infinitesimal. En sí, parece más una obra para la enseñanza de tipo enciclopédico.

2.3. Metodología.

Al preparar el material del presente trabajo, se ha tomado en cuenta, siempre que se pudo y tanto como se pudo, los preceptos y teorías que se ha considerado proporcionen una base pedagógica que dé soporte a los contenidos que se pretenden exponer. Se ha procurado que este documento pueda actuar como un agente cultural que medie el contacto del lector con el conocimiento que se expone, que coadyuve en la evolución de los conceptos debido a la actividad mental de la persona.

Se ha tratado de caracterizar a los grandes períodos sucesivos en el desarrollo de los conceptos de las series infinitas, los infinitesimales y el límite, resaltando que el conocimiento no se da en forma lineal, sino que existe en el ámbito de ciencia, una reorganización de los conocimientos previos, para avanzar a otros de mayor profundidad, quizá con una necesaria ruptura de la ideología científica dominante en algún momento.

Se ha pretendido que la investigación dé una muestra de que el incremento de los conocimientos es un proceso continuo, cuya finalización no puede alcanzarse nunca, como lo señala Piaget, y que es en la historia de la propia ciencia en donde se halla su significación epistemológica.

La revisión histórica del surgimiento de los conceptos, no sólo es una muestra fehaciente de utilidad de la intuición, sino también una invitación al lector a practicarla, dejándola ser fuente de nuevas hipótesis y de ideas creadoras. En la escritura del texto se buscó dar transparencia al ejercicio de la intuición como elemento creador de los diferentes matemáticos abordados, como antecedente del consiguiente discurso analítico, que en los temas que se tratarán, llevó a la humanidad cientos de años desarrollarlos.

Con la incorporación de las ideas de los diferentes exponentes de la psicología aplicada a la educación, se ha cuidado que en el desarrollo del presente trabajo sobre la génesis de las series infinitas, los infinitesimales y los límites, se cuente con una adecuada estructuración de los conocimientos que se pretenden transmitir, tomando en consideración que los nuevos contenidos pudiesen ser incorporados con una construcción en espiral, en donde a los antecedentes previos, se les enfoque de una manera diferente y con un mayor detalle.

La presentación de los materiales se ha diseñado pensado —de acuerdo a la teoría de la asimilación de Ausubel— en las diferentes jerarquías del conocimiento, tomando en cuenta los niveles de abstracción, generalidad e inclusividad, que faciliten tanto la diferenciación progresiva como la reconciliación integradora, dando al material un orden y una secuencia que facilite el anclaje de nuevos conocimientos. Se ha pretendido tomar como base una serie de conocimientos y habilidades cognitivas previos, tales como la operatividad en el cálculo de límites, conocimiento de las derivadas e integrales, manejo de simetrías y congruencias de triángulos, que aunados a los nuevos materiales se conviertan en los andamiajes que sustenten un nivel mayor del conocimiento.

La adquisición de conocimiento a través de la presentación escrita se ha considerado como un requisito para el logro de otros aprendizajes, siempre que la información se dé en una secuencia lógica que permita el logro de los objetivos, procurando el desarrollo de habilidades intelectuales para operar con símbolos sobre el conocimiento, realizar discriminaciones, asimilar conceptos y reglas.

No cabe la menor duda que quizá el principal medio para la instrucción al nivel superior es la lectura, y es por ello precisamente que se ha dado el presente trabajo como un elemento más en la adquisición de conocimientos y participación en los procesos de instrucción.

Las opiniones y comentarios que se incluirán a lo largo de las páginas siguientes, estarán basados en el *análisis matemático clásico*, sin tomar en consideración la concepción matemática del *análisis no estándar* desarrollado por autores tales como Robinson.

En general este trabajo pretende dar respuesta a inquietudes relativas a la génesis correspondiente a las series infinitas, infinitésimos y límites, para las cuales no existe un texto que dé un seguimiento específico. Un compendio que permita accesar al usuario a una revisión que le resuelva algunas interrogantes sobre los temas señalados. Sólo por mencionar algunas de estas posibles cuestiones señalaré: ¿Cuáles fueron las primeras series numéricas manipuladas por la comunidad científica?, ¿Cuáles fueron las herramientas o bases matemáticas que sirvieron para resolver las series infinitas, si no se contaba con los conceptos de función, convergencia o límite?, ¿Quiénes fueron los matemáticos que trascendieron su tiempo y se les reconoce en la formalizaron el análisis?, ¿Qué conceptos fueron necesarios desarrollar para formalizar el análisis?, ¿Qué debe entenderse con el señalamiento de que "El análisis trata de lo continuo, lo no entero"?, ¿En qué momento se da la aritmetización del cálculo?, ¿Quiénes contribuyeron a la aritmetización del cálculo?, ¿Cuáles son las diferencias o coincidencias entre Newton, Leibniz y Euler con relación a la forma de concebir los infinitesimales?, ¿Quién hizo el señalamiento de que el cálculo trata sobre las razones donde el número n es el resultado de cero entre cero?.

Las partes siguientes, tratarán de dar a conocer un enfoque que quizá algunos profesores de matemáticas no habían tenido oportunidad de analizar y reflexionar con cierto detenimiento. Inicio con un breve recorrido sobre las dificultades, quizá más filosóficas que matemáticas sobre el concepto de infinito, mismo que indudablemente está inmerso en las series infinitas, en los infinitesimales y el concepto de límite. Posteriormente, se presenta parte del inmenso tema que constituyen las series infinitas, restringiéndome a solamente aquellas de variable real y de una sola variable. En un momento de su desarrollo, se tratará de que el lector se percate de como las series infinitas son el campo del cual se cosecha el concepto de infinitesimal o diferencial. Finalmente, se presenta la génesis del concepto de límite como una respuesta a una necesidad, vinculada con el concepto de número irracional y el continuo.

En espera de que la lectura le sea amena y sobre todo fructífera le deseo un buen viaje a través de los siguientes capítulos.

3. ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DEL INFINITO.

3.1. LO ILIMITADO.

Existen un sin número de referencias con relación al horror al infinito que sintieron los griegos. Para ayudar a entender el por qué de aquella situación, se presenta esta breve introducción.

José Luis Borges inicia su breve biografía del Infinito en *Otras Inquisiciones* diciendo:

"Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del Mal cuyo limitado imperio es la ética; hablo del infinito".

En otros lugares de su obra se entrevé su concepción del infinito, como *mal metafísico absoluto: semilla de desorden y de absurdo en el cosmos. Nada más peligroso que la pérdida del límite y de la mesura: el error del infinito es la pérdida del valor contenido en la relativa perfección de lo que está concretamente determinado y formalmente concluido, y por eso induce a extraviarse en la nada o por un laberinto sin salida.*

Paolo Zellini, en su *Breve Historia del Infinito*, señala que para comenzar a entender la concepción del infinito, convendría recordar una sugerencia de Kant[34], "...A pesar de la riqueza de nuestras lenguas, el pensador tropieza a menudo con dificultades para dar con una expresión que se adapte exactamente a su concepto, y a falta de ella no puede hacerse comprender rectamente por los demás, ni aún por sí mismo. Acuñar palabras nuevas es pretender legislar en materia de lenguaje, en lo que rara vez se alcanza el éxito, y antes de emplear ese recurso desesperado es aconsejable indagar en una lengua muerta y docta, por si en ella se hallase el concepto juntamente con su expresión adecuada"

Para hallar una justificación metafísica al *horror infiniti* y la fascinación por la infinitud que caracterizan a la experiencia literaria de Borges, se podría recurrir entonces a una palabra griega y transferir momentáneamente todo pensamiento y consideración al punto de vista deducible de la metafísica de Anaximandro, de los pitagóricos o de Aristóteles.

En el pensamiento griego, referirse a la *infinitud* era referirse a un término cuyo significado es idéntico al que encierra en la actualidad el vocablo *infinito*. El término usado era απειρον, (apeiron), que literalmente quiere decir *sin límites* y por tanto, ilimitado.

Aristóteles atribuyó al infinito valor de *principio*. Así, dice:

Toda cosa o es *principio* o procede de un *principio*: pero no hay del infinito *principio* alguno, que sería su límite. Además, es no engendrado e incorruptible, por cuanto es un *principio*, porque necesariamente toda cosa engendrada debe tener un fin y hay un término a toda destrucción. Por eso, como decimos, aquél no tiene *principio*; antes bien, parece ser *principio* de todas las demás cosas y abarcarlas y regirlas todas, como dicen quienes admiten causas distintas al infinito.... ...porqué es inmortal e indestructible, como afirman Anaximandro[35] y la mayor parte de los filósofos.

La dificultad que plantea el infinito radica, en su inagotabilidad: lo que es infinito no puede estar nunca presente en su totalidad en el pensamiento[36]. Aristóteles señala como pruebas de la existencia del infinito, el tiempo y la división de magnitudes, y señala que el infinito (απειρον) "no es aquello fuera de lo cual no hay nada, sino aquello fuera de lo cual hay siempre algo". Así, en ningún caso cabe considerar a lo ilimitado como un todo completo: lo completo tiene fin, y el fin es un elemento que limita, en tanto que el infinito indica justamente, por su significado intrínseco, la ausencia de cualquier límite.

Con el απειρον queda por consiguiente indisolublemente asociada una idea negativa, expresión de su incompletud y potencialidad no realizada y no realizable. Lo "infinito" puede, aludir a una idea de perfección ajena a lo que el απειρον pretende indicar y, por consiguiente, ocultar una primera tentación de agotar la incompletitud de lo ilimitado designado por la palabra griega en una *actualidad*[i] que no le es propia. Es importante precisarlo porque, entre otras, contiene razones últimas de algunos tipos de resolución de problemas matemáticos y geométricos en los que interviene el infinito. No se puede comprender la negativa a introducir el *infinito actual* en la matemática griega, a menos que se tenga presente la idea negativa que alude el απειρον.

La existencia de un conjunto ilimitado se puede explicar mediante la idea del devenir[ii]; sus elementos constitutivos, por no existir todos ellos simultáneamente, es decir, al no estar todos, uno a uno, *actualmente* dados, únicamente existen bajo la especie de una sucesión histórica, es decir, uno tras otro, en una sucesión interminable. En este sentido, para Aristóteles, la existencia del infinito no es *actual*, sino *potencial*, es decir, representable como incalculable número de pasos sucesivos que, salvados uno a uno, no llevan nunca a la meta.

Para Aristóteles, lo que no tiene límite (límite=περαζ=peras) no es representable exhaustivamente en el pensamiento, y por lo tanto es incognoscible.

Para Anaxágoras, "en lo pequeño no existe un mínimo, sino siempre algo más pequeño, igual que para lo grande existe siempre algo más grande: y por cantidad es igual a lo pequeño y con respecto a sí mismas todas las cosas son grandes y pequeñas". Esto resume el pensar de que las partículas son ellas mismas divisibles hasta el infinito de un número de elementos infinitas veces infinitos.

El caso de la división de los cuerpos es una de las revelaciones más puras del irreductible conflicto entre unidad y multiplicidad, que pueden ser sinónimos del límite y de lo ilimitado. El problema, según Platón, puede resolverse en concreto por la existencia efectiva, en las cosas, de una síntesis del límite y lo ilimitado. El número, sinónimo de mesura y armonía, es como una pausa, o un punto de mediación entre el límite y lo ilimitado.

En la antigüedad, el *horror infiniti* culminó con escritos de Boecio[37], quien llegó a hablar de lo ilimitado como de un monstruo de malicia, no sostenido por principio alguno, huidizo siempre a cualquier definibilidad; un objeto que la ciencia y la filosofía de común acuerdo repudian, al reconocer que es opuesto a cualquier intento de comprensión. El obstáculo principal, denunciado ya por Aristóteles, se debía a la contradicción de la regla en virtud de la cual el acto antecede a la lógica y naturalmente a la potencia. La excepción más característica es el número, que aún pudiendo aumentar ilimitadamente al configurarse en cada momento como entidad actual, no alcanza nunca conclusión a la que su indefinida posibilidad de aumento parece orientada; el acto que debería concluir y conferir sentido a esa potencialidad parece, a decir verdad inexistente.

---

[i]. Entiéndase *actualidad* como condición presente, estado presente o realizado.
[ii] Devenir. En filosofía, es el movimiento por el cual las cosas se transforman. En consecuencia es llegar a ser, transformarse

En la época moderna, Spinoza, Hegel y Leopardi[38] aprehendieron la negatividad del infinito potencial remitiéndolo al deseo y a la imaginación. Leopardi escribió que el infinito es un "parto de la imaginación, de nuestra pequeñez al tiempo que de nuestra soberbia...un sueño, no una realidad, porque ni una sola prueba poseemos de su existencia, ni aun por analogía".

3.2. IDEAS RESPECTO AL LÍMITE, DE LO INFINITAMENTE GRANDE Y LO INFINITAMENTE PEQUEÑO.

Ya en el pensamiento clásico, existe alusión a la posibilidad de actualizar el infinito, absolviéndolo así de la negatividad de su ser meramente potencial. Aparentemente, una primera pesquisa en esa dirección parece conducir a los intentos atomistas de determinación de un *minimun*, es decir de un infinitesimal dado en acto, capaz de resolver en Ser el devenir ilimitado de la divisibilidad del continuo. Pero los átomos de Demócrito y Leucipo se atenían a las partes elementales de la materia y no pretendían representar la esencia de lo que cabría llamar un infinitesimal; los átomos eran pequeños, más no infinitamente pequeños. Así, una alusión implícita a los infinitesimales se halla más en los intentos de Antifón de cuadrar el círculo, pues él creía poder hallar un cuadrado cuya área fuese igual a la de un círculo dado, basándose en la evidencia de que son indistinguibles el arco mínimo de circunferencia y segmento mínimo de recta. Por consiguiente, argumentaba, sin la menor duda al respecto, que es posible inscribir en un círculo un polígono regular con un número de lados arbitrariamente grande.

Las argumentaciones como la anterior no alcanzaron mucho crédito. Si bien el conjunto de polígonos inscritos en la circunferencia es evidentemente un conjunto ilimitado, dado que, para cada polígono con un número arbitrariamente grande de lados muy pequeños, existe un polígono sucesivo de lados aún más pequeños, el cual a su vez no coincidirá con la circunferencia, sino que admitirá después de él, un polígono ulterior. Este es un claro ejemplo del enunciado aristotélico que describe el infinito como algo más allá de lo cual se halla siempre algo. Así, el απειρον, no admite término final alguno, sino solamente un desenvolvimiento indefinido.

Aristóteles sostenía que los matemáticos no tenían necesidad alguna de introducir magnitudes actualmente infinitas en sus demostraciones, lo cual no prejuzgaba en absoluto la posibilidad de éxito de sus estudios. Sin embargo, el reconocimiento de que la inagotabilidad del infinito no ponía en tela de juicio los resultados de muchas demostraciones matemáticas, fue establecido hasta el siglo pasado por Weierstrass, en el contexto de una reformulación rigurosa de los principios del análisis. Se demostró entonces, que la alusión a esa potencialidad podía ser al menos celada, mediante un lenguaje matemático que aludiese a cantidades simplemente finitas y eliminase, sin mas, el uso explícito del término infinito.

Retomando los argumentos de Antifón, se tiene que en ellos interviene una sucesión de polígonos que no es ciegamente ilimitada, pues su ilimitación se halla orientada hacia un fin representado por la circunferencia. Así, la circunferencia es un límite que *comprende* la sucesión ilimitada de los polígonos, que aun no constituyendo su término efectivo, con todo, sí constituye una solución a la indefinida potencialidad de desarrollo de la sucesión, aun situándose *fuera* de dicha sucesión.

Lo anterior significaba, que era posible representar concretamente la solución final de un proceso ilimitado, aun sin renunciar al carácter potencial de éste. La inagotabilidad de lo ilimitado seguía siendo irrenunciable, pero no obligaba por ello a limitarse a una simple aproximación a lo que se quiere alcanzar.

Considérese por ejemplo cualquier serie infinita convergente; se trata de un límite concretable en un ente matemático perfectamente definido que, sin embargo, no pertenece a la sucesión indefinida de las sumas parciales que tienden a él. El límite no es un término de la sucesión y no es, por lo tanto una mera aproximación al resultado que se quiere alcanzar; se llega a él renunciando al análisis indefinido de la sucesión que lo antecede y situándose en un punto de referencia externo que resulta invisible a quien se limite a la comprobación -correcta- de su indefinida lejanía e inancanzabilidad.

En la geometría de Eudoxo y Arquímedes se ve algo similar a la solución final de un proceso ilimitado; de ella se extrae, sin embargo, una intención peculiar e irrepetible, aunque quizá no suficientemente asimilada por las técnicas del *paso al límite*, análogas en cierto sentido al método de exhaución, que aparecerían varios siglos después, en las obras de Cauchy y Weierstrass. El lenguaje de Cauchy aún estaría cargado de alusiones al infinitesimal y Weierstrass, lo evitaría, pero sería capaz de esbozar una teoría que era preludio a la noción matemática del infinito actual.

En las demostraciones por exhaución de Eudoxo se hallan ocultos los significados del infinito sin que se le nombre jamás. Mucho después, y especialmente con la primera fundación del análisis, se buscaría indicar explícitamente el infinito mediante "algo", así fuese indiferentemente un diferencial, un número trasfinito o un punto en el infinito sobre el plano complejo. Leibniz, Bolzano y Cantor trataron de hacerlo, convencidos de que la matemática ofrecía la oportunidad de representar ese "algo" como objeto caracterizado por una evidencia incontrovertible y susceptible además, de ser manipulado como un signo tangible por la mecánica algebraica. Pero el intento sólo se logró en parte, y quedó intacta la opinión de que lo que se quería representar estaba abocado a una irreductible impenetrabilidad.

En la búsqueda de los centros de gravedad de las representaciones geométricas de Arquímedes se halla anclado también el sentido de una resolución final de lo ilimitado. En el cálculo del área de un segmento parabólico, se observa que todo en él se basa en la existencia de un centro de equilibrio entre un triángulo y dicho segmento trasladado a una región adecuada del plano. Ese centro de gravedad, capaz de anular, si se sostiene, los desequilibrios provocados por el peso, ejerce su poder de equilibrio en la infinidad de los segmentos rectilíneos de que cabe imaginar están compuestos respectivamente el triángulo y el segmento de parábola. De esta función equilibradora se desprende, el descubrimiento de una perfecta armonía de la relación entre el área del segmento parabólico y el área del triángulo inscrito: uno es cuatro tercios del otro.

El significado a meditar radica entonces plenamente en la circunstancia de la referencia a un punto geométrico, definido negativamente por Euclides, como lo que no tiene partes, es en definitiva una *nada*. El punto, con todo, existe y es el sostén de la estructura ordenada de la apariencia visible: la razón para que así sea, radica en que en él se encierra una relación, una mediación armónica entre dos infinidades de segmentos; pero toda mediación armónica, explicaría Plotino[39], es justamente lo que hace reconocer, en aquello en lo que ejercita la propia función del confín delimitador, la naturaleza de la infinitud.

Aunque ésta [la infinitud] está delimitada, es justamente por ello infinita; en realidad no se delimita el límite sino el infinito, ya que, ciertamente, no hay allá algo entre finito e infinito que pueda acoger la naturaleza del límite.

El punto es un límite, escribiría Proclo[40], si bien posee lo ilimitado de forma latente, y de ahí el que lo hallemos por doquier en la geometría.

Existe un ejemplo clásico en el que se presenta la oportunidad de distinguir diversas formas de infinito: el primer argumento de Zenón contra el movimiento. En él se sostiene que quien desee recorrer una unidad de longitud no podrá llevar nunca a cabo su empresa porque deberá recorrer la infinita sucesión de intervalos en que es divisible la unidad por dicotomía. Quien quiera llegar a 1 partiendo de cero deberá alcanzar antes 1/2, luego 3/4, posteriormente 7/8, etcétera, recorriendo sucesivamente los intervalos espaciales de longitudes 1/2, 1/4, 1/8, ... , $1/2^n$, , que sigue siendo infinita. Pero como la suma parcial

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)\to 1, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.1)$$

cuando $n \to \infty$

el tiempo total de recorrido no puede sobrepasar la unidad.

Así pues, con la noción matemática de límite cabe pensar que se dispone de una especie de solución de la paradoja, resolviendo la indefinición del απειρον, que haría inagotable la serie en una entidad total, formalmente realizada, como es el recorrido realizado de la unidad de longitud en la unidad de tiempo. Y ésta es también una propiedad característica del límite, tal como fue definido en el siglo XIX, en particular por Weierstrass. Aun conservando en sí la idea de un proceso y de una potencialidad ilimitada, el límite tiene la capacidad de resolver esa potencialidad en una unidad formal; de manera que resulta cierto lo que afirma H Weyl: que es engañosa la apariencia según la cual el proceso en último término parece cambiar definitivamente el Ser en Devenir.

Recientemente, A. Grünbaum demostró que la aplicación de la teoría aritmética de los límites a la solución de la paradoja de Zenón, se justifica por la estructura métrica del tiempo físico. La conciencia humana del tiempo admite un límite inferior de perceptibilidad o un umbral mínimo más allá del cual los intervalos temporales se diluyen en una pequeñez inimaginable. Así, para Grünbaum el argumento de Zenón es ilegítimo porque se vale de lo que en el fondo es una inevitable confusión entre dos formas incompatibles del pensamiento. Explica que no experimentamos los subintervalos en que se divide la unidad del recorrido como si transcurriesen en una forma métrica correspondiente a su naturaleza; extraemos, antes bien, la impresión de duración del tiempo en que transcurren nuestros actos de contemplación mental, el cual, para cada fracción del recorrido, no puede dejar de hallarse más allá de un umbral o por encima de un límite mínimo. Y esa impresión se superpone indebidamente a los tiempos elaborados por un acto analítico de pura abstracción intelectual, que prescinde totalmente de la observabilidad y de la accesibilidad experimental. Imaginar que se recorre un intervalo infinitamente pequeño quiere decir, en tal caso, chocar con la ficción, o con lo que trasciende los esquemas de una representatividad directa del acontecimiento regida por el principio del *límite*. Con el artificio aritmético del *paso al límite*, se obvia el riesgo de pensar uno a uno los intervalos de la expresión (3.2.1) y caer en el error de confundir dos duraciones incompatibles; pero es, con todo, cierto que se trata de un puente alzado sobre la nada y se tiene la impresión de que es precisamente esa *nada* la que *forma* el acontecimiento.

Aristóteles, también sostiene la existencia de un intervalo de tiempo mínimo necesario para la realización de una acción cualquiera; no es posible infinitesimar la vida concreta, so pena de incurrir en ambigüedades y de caer en lo absurdo. No obstante, la principal objeción de Aristóteles a Zenón consistió, en la distinción entre lo infinito por suma e infinito por división. Si se considera una unidad de longitud y se suma consigo misma infinitas veces, se obtiene sin duda una distancia ilimitada no recorrible en un tiempo finito. Pero si se prefigura lo ilimitado conforme a un procedimiento en cierto modo opuesto, es decir, dividiendo por dicotomía la unidad de longitud en infinitos intervalos, entonces la infinitud puede considerarse en cierto modo agotable en un intervalo limitado de tiempo.

La infinidad de los subintervalos en que es divisible la unidad de longitud tiene esta característica notable: está contenida enteramente en una totalidad limitada que puede constituir el objeto de una intuición empírica. De este modo, una materia dada dentro de los límites de un cuerpo finito es visible y tangible enteramente, aun implicando la imposibilidad de un análisis exhaustivo de todos los componentes.

Kant observó la distinción entre *progressus in infinitum*, como típicamente ejemplificable en los infinitos por división de una totalidad empíricamente intuible, y *progressus in indefinitum,* que no conoce limitación de especie, salvo la provisional, que se le puede aplicar a cada caso, antes de pasar al paso sucesivo.

Si se reduce por dicotomía un segmento unitario a partes cada vez más pequeñas, también los elementos más remotos de la división se hallan ya en realidad asignados y presentes en el todo aun antes de que esa misma división haya comenzado. Su existencia se da por descontada; ya está implícita en la pertenencia a una forma limitada de la que no logran apartarse y en la que pueden ser hallados en el curso de un proceso que alcanza inevitablemente a cada uno de ellos.

En el primer caso, escribe Kant, los elementos sucesivos del conjunto infinito se encuentran en un todo preexistente. En el segundo caso, se buscan fuera de la totalidad parcial; siempre finita que no se deja nunca de alcanzar. Ambos son infinitos esencialmente potenciales, pero el *progressus in infinitum* posee el privilegio de admitir un límite que lo envuelve, y en eso se oculta la naturaleza de toda verdadera infinitud, que no es nunca un desarrollo incondicionalmente ilimitado, y es referible siempre a un orden formal, limitador. La actualidad y el límite constituyeron en todo momento el presupuesto irrenunciable de cualquier teoría del conocimiento.

Para Giodano Bruno[41], el fundamento real del continuo había que buscarlo no mediante la facultad discursiva de la imaginación abstracta, que considera de antemano indefinidamente divisible cualquier extensión, sino mediante el *intelecto*, que llega a donde no alcanza ningún progreso ilimitado. El *minimum* indivisible no era resultado de un último paso alcanzado en el proceso imaginario de una serie ilimitada; la verdadera infinitud representada en éste se asemejaba a la simbolizada por el límite. Y nada excluía que el límite fuese representado como un mínimo geométrico, como un punto o como una cantidad infinitesimal, en caso de que alguna de esas cantidades pudiese indicar una esencia cualitativa o una relación. Así, según Simone. Weil :

"Un *límite* es algo infinitamente pequeño. El límite es la presencia, en un orden, en forma de lo infinitamente pequeño, del orden trascendente. El límite es trascendente respecto a lo que delimita".

Ese límite, es precisamente, los que pretendió representar G. Bruno con los mínimos geométricos.

La exclusiva inteligibilidad de lo que es actual, y se halla, en consecuencia, regulado por el principio del límite, fue reconocida desde diferentes perspectivas, por filósofos como Descartes y Whitehead.

3.3. LOS NÚMEROS IRRACIONALES

La verdad conforme a la cual nada "existe" salvo lo que es actual parecería contradicha por una circunstancia: la existencia de los números irracionales, que no pueden ser escritos en modo alguno como secuencia finita de cifras. Un número irracional parece, con todo, desprovisto de existencia actual; no puede ser mostrado como el conjunto de *todas* sus cifras. Si se acepta que "el infinito, como infinito, por eludir cualquier proporción, es ignoto", entonces el número irracional, al eludir cualquier proporción, también es ignoto e incognoscible. No obstante, puede ser computado[i] como número de acuerdo a la teoría de Dedekind en 1872.

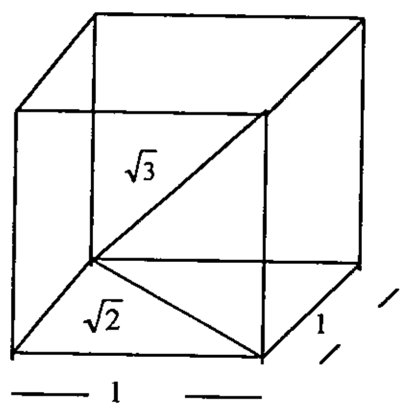
Por ejemplo, si se construyen las fracciones sucesivas

[i] Computar. Determinar indirectamente una cantidad por el cálculo de ciertos datos.

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}},\ \ldots$$

se obtienen valores 1, 1.5, 1.4, $1.41\overline{6}$, 1.41139303, que son valores alternativamente menores y mayores que $\sqrt{2}$ tales que cada valor difiere de $\sqrt{2}$ en una cantidad menor que el anterior. La sucesión anterior, prolongada al infinito, converge hacia $\sqrt{2}$ en el sentido que, asignada una cantidad cualquiera ε, todos sus elementos, salvo un número finito de ellos, elevados al cuadrado difieren de 2 en una cantidad menor que ε. Así pues, también lo irracional es, en último término, un número.

Lo anterior no se aparta de la clave que revela S. Weil, en el sentido de imaginar poner en una balanza de dos platillos, dos grupos de pesos de forma cúbica con los lados de los pesos



del primer grupo, iguales a las diagonales de los pesos del segundo grupo, con ningún número de ellos se lograría el equilibrio. Todas las relaciones posibles entre los pesos contenidos en el primer y segundo grupo estarían distribuidas entonces en dos clases, según que la balanza se inclinase de un lado o del otro, y en el medio se configuraría el acercamiento paulatino a un punto ideal de mediación, carente de una existencia experimental efectiva y concreta.

Señala S. Weil, que el equilibrio inexistente es un λόγοζ-αλόγοζ, (logos-alogos), una realidad de algún modo existente pero insondable que escapa a una denominación efectiva; conceptualmente aproximable, por consiguiente, a toda verdad que se configura siempre como el punto innombrable, en griego αλόγοζ, con relación al cual se puede ordenar, trabándolas en su posición correcta, todas las opiniones posibles sobre la cuestión. Pero el punto de mediación por excelencia, la verdad última en que se desvanecen todos los desequilibrios y oscilaciones que reproducen la eterna bipolaridad entre el límite y lo ilimitado.

Las características de *continuidad* y *completitud* de la recta, empleando ambos términos en el sentido momentáneamente sugerido por la intuición, no son reproducidas por el cuerpo de los números racionales; en éste existen *vacíos* que vuelven problemático cualquier intento de aritmetización del continuo geométrico utilizando únicamente los números racionales. El problema fue resuelto por Dedekind, fijando axiomáticamente una propiedad que caracterizase a la recta y definiendo los números reales de modo que satisficiesen a una versión aritmética de la propiedad de continuidad de la recta.

Así, un número irracional parece de ese modo tanto más "real" cuanto que es vinculado a un punto de la recta. Lo irracional no es un infinito actual en el sentido categórico. Más bien por el contrario, lo análogo de cualquier otra cosa que se plantea como solución invisible de un proceso ilimitado y dogmáticamente ordenado. No es el verdadero infinito, matemáticamente irrepresentable, sino un análogo de la transfinitud, posteriormente descrita por Cantor, como noción meramente alusiva a la infinitud absoluta. Conviene imaginarse al número irracional como una aproximación sucesiva de dos límites adyacentes entre sí.

En realidad, la expresión "recta a la que le falta un punto" es espantosamente engañosa, pues la imagen de la recta numérica es absolutamente natural sólo hasta cierto punto, hasta el punto en que no se utilice para una teoría general de los números reales.

Haciendo una recapitulación de los testimonios más conocidos de los aspectos negativos del continuo se pueden citar:

- 1. Platón había establecido que los puntos son una *ficción* de los geómetras, y les atribuyó la sola propiedad de delimitar porciones de recta. Posteriormente, los platónicos, para expresar la imposibilidad de reducir el continuo a un conjunto actual de indivisibles, hablaron de la línea como *flujo* de un punto, expresión que utilizó Newton en su teoría del infinitesimal.

- 2. Aristóteles negó, polemizando con los atomistas, que la continuidad procediese de una composición de puntos contiguos y enunció que el continuo no tiene partes constitutivas simples.

- 3. Roger Bacon observó que si las líneas estuvieran compuestas de puntos, la relación entre el lado y la diagonal de un cuadrado sería equivalente a una relación entre enteros y por lo tanto, contrariamente a la lógica, a un número racional.

- 4. Guillermo de Ockham[42] distinguió entre *continuidad* y *contigüidad*, excluyendo que la primera pudiera resolverse en una yuxtaposición de partes indivisibles contiguas. (Esto es puntos contiguos). En analogía con la continuidad del tiempo que no puede resolverse en una composición de instantes., dado que un instante no es una entidad absoluta tal que pueda distinguirse de cualquier entidad divisible. Igual que la actualidad de un continuo no consiste en las partes en que es divisible.

En torno a estas conclusiones estuvieron esencialmente de acuerdo los filósofos de los siglos XIII y XIV. La mayoría negó la posibilidad de resolver el continuo en un conjunto de puntos, y algunos, como el propio Ockham, privaron al punto de la función de confín delimitador de porciones finitas de recta; no era necesario admitir la existencia del punto para que una magnitud tuviese término.

A finales del siglo XIX, Cantor dio una definición matemática digna de consideración del continuo. Demostró que el continuo no es numerable, es decir, que no se pueden contar todos los elementos que lo constituyen, uno a uno, mediante los números enteros. Borel, en un escrito de 1909, interpretaba el resultado de Cantor como prueba de la existencia de un componente indefinido del continuo.

3.4. LA POSICIÓN DESCARTES Y LEIBNIZ

Con relación al infinito Descartes escribió

Sitúo aquí la distinción entre lo indefinido y el infinito. Y nada hay a lo que llame propiamente infinito salvo aquello en lo que por ninguna parte hallo límite alguno, sentido en el cual únicamente Dios es infinito. Pero a las cosas a las que no veo un fin bajo ningún aspecto, como la extensión de los espacios imaginarios, la multitud de los números, la divisibilidad de las partes de la cantidad y otras semejantes, las llamo *indefinidas*, y no *infinitas* porque no carecen por todas partes de fin ni de límites.

La posición que establece entre infinito e indefinido refleja la posición tradicional entre infinitud actual e infinitud potencial.

En una carta de 1630, refutaba a Mersenne un argumento demostrativo bastante difundido acerca de la inexistencia de conjuntos infinitos. Mersenne se limitaba a exponer la observación de que una eventual línea infinita debería contener infinitos *pies* y además infinitas *toesas*, cada una de las cuales, es seis veces más grande que un *pie*. El conjunto infinito de *toesas* habría debido contener, pues, al igual que su subconjunto mismo, el infinito conjunto de *pies*, aun coincidiendo ambos con la línea infinita. La conclusión que obtenía era la siguiente: la línea infinita no puede existir, dado que, de existir, debería coincidir con cada uno de los dos conjuntos infinitos, uno de los cuales sería mayor que el otro.

Descartes aceptó sin más la paradoja, pero negó que se pudiesen obtener las conclusiones que a Mersenne le parecían evidentes. La paradoja, en cambio revelaba una característica previsible de todo conjunto que apareciese como infinito: la relación entre una *toesa* y un *pie* es un número finito, lo que hace a priori incompatible la observación de Mersenne, sin embargo, es pertinente al infinito y sus leyes. Las normas que rigen una eventual posibilidad de cotejo entre conjuntos infinitos no pueden sino trascender absolutamente cualquier proporción finita como la que establece la relación entre un *pie* y una *toesa*.

En realidad, la objeción de Descartes era profunda y captaba uno de los puntos esenciales del problema. Cauchy, dos siglos después de Mersenne, presentó un ejemplo parecido, para demostrar la inexistencia de los conjuntos infinitos. Cauchy argumentaba que si se asume como dada toda la serie de los números enteros, se puede formar también la serie de sus cuadrados, haciendo corresponder a cada entero n con su cuadrado n^2. La naturaleza de esa correspondencia hace que las dos series contengan el mismo número de elementos, mientras que es evidente que el conjunto de los cuadrados n^2, es sólo una parte del conjunto "más grande" formado por todos los números enteros n.

Este ejemplo paradójico, atribuido por Cauchy a Galileo, debía mostrar la imposibilidad de concebir los números enteros como totalidad actual, esto es, como un conjunto actualmente infinito.

Sin embargo, Descartes no negaba la paradoja, sino que afirmaba que era una consecuencia indefectible del infinito: "el infinito es paradójico justamente porque no se adaptan a él las leyes de medición de lo finito.

Dedekind utilizó la paradoja, no como prueba de la inexistencia del infinito, sino como contenido esencial de su propia definición. Los conjuntos infinitos se convirtieron para Dedekind en los conjuntos que pueden ser situados en correspondencia biunívoca con sus cuadrados, o con los números pares. $(n \leftrightarrow 2n)$.

En una carta de Leibniz a L'Hôpital en 1693, aquél señala que

"La perfección del análisis de los trascendentes y de la geometría en que entra la consideración de algún infinito sería sin duda de la máxima importancia a causa de la aplicación que se le puede dar con respecto a las operaciones de la naturaleza, la cual hace intervenir al infinito en todo lo que hace. ... Toda porción de materia puede ser comparada a un jardín lleno de peces. Pero cada rama de la planta, cada miembro de un animal es también un jardín similar, un estanque similar... ."

La matemática de Leibniz, según L. Brunschvicg, al prever la existencia de distintos órdenes de infinitud y de diversos grados de diferenciabilidad, permitía representarse lo real, y los infinitos que en él se pudieran hallar, como inmersos en una tesitura más sutil, entrelazada con la inmensa variedad de combinaciones de lo *posible*.

Los diferenciales de Leibniz, eran susceptibles de una existencia ideal más que real. Concibió sus resultados como una especie de extrapolación al infinito de los conceptos referibles al cálculo de sucesiones finitas, y esos mismos resultados, al plantearse como la meta última de un recorrido ilimitado, eran la demostración visible de la existencia del infinito actual.

Desde esa perspectiva, una curva podía ser considerada -y esa era una de las ideas que más se ha repetido en el cálculo diferencial- como una línea poligonal con un número infinito de lados. Del mismo modo, una serie *discreta* de números era extensible al caso *continuo* de una suma infinita de diferenciales, esto es, la integral concebida como actualidad infinita efectiva, resultado tangible de una evidente aplicación del principio de continuidad. Conceptualmente, se trataba de una aproximación a las tesis sostenidas por Antifón[43] acerca de la cuadratura del círculo, dos siglos antes

A falta de una descripción más rigurosa de los resultados del Análisis mediante la idea de "paso al límite", Leibniz continuó señalando a los infinitesimales *dx* como *ficciones* útiles para el arte de la invención matemática, como entidades imaginarias que no corresponden forzosamente a cosas actualmente existentes fuera de la mente que las concibe. Así, el infinito actual que intervenía en las operaciones matemáticas en que entraba el infinitesimal, podía ser sustituido por el infinito potencial de las demostraciones de Eudoxo y Arquímedes. El propio Leibniz era consciente de la existencia de determinadas anomalías y ambigüedades que entrañaba el empleo de incrementos infinitamente pequeños. Señalaba que "tales incrementos no pueden ser mostrados por construcción alguna"

"Las técnicas del "nuevo" cálculo en el siglo XVIII imponían, *pasar por alto* los infinitesimales con respecto a las cantidades finitas ordinarias, y esa regla se convirtió luego en uno de los primeros axiomas del primer libro escrito sobre cálculo infinitesimal del Marqués de L'Hôpital: Dos cantidades que difieren en un infinitesimal son iguales."

En el análisis clásico, es evidente que, si dos cantidades difieren en una cantidad, por pequeñísima que sea ésta, no pueden ser iguales, salvo a costa de una contradicción lógica o de tratarse de una aproximación, pero el cálculo infinitesimal *no fue un método de aproximación*. Adicionalmente, el infinitesimal no era "arquimedeo[i]", pues su empleo en el cálculo infinitesimal estipulaba que la multiplicación por un número finito arbitrariamente grande no podía alterar su condición característica de entidad próxima a cero: un infinitesimal multiplicado por cualquier número *finito* sigue siendo un infinitesimal.

Las ficciones infinitesimales fueron para Leibniz *ficciones bien fundadas*, y la referencia concreta a que no podían dejar de aludir en la realidad natural, donde el infinito intervenía ya casi constantemente. Así, Leibniz señalaba que "los infinitos y los infinitamente pequeños están fundados a tal punto que todo sucede en la geometría, y otro tanto en la naturaleza, como si fueran realidades perfectas".

---

[i] Relativo al principio que establece que cualquier magnitud, aún pequeñísima, sumada a sí misma un número suficiente de veces puede engendrar una magnitud grande.

El proceso de integración podía ser considerado como la transición ideal a un cumplimiento efectivo de la forma, realizada no como límite, sino como síntesis compendiadora de una infinita multiplicidad y, en definitiva, como infinito actual. Así, no fue de extrañar que la certeza de ver al *infinito* presente y actuante por doquier, acabase por suscitar la idea de designarlo como *simple signo algebraico*. Y esa fue quizá la innovación más revolucionaria.

El infinito, aun experimentado negativamente como carencia de límite, se había convertido en algo explícito y positivo, perdiendo definitivamente la característica originaria de sinónimo de la negación y del *no-ser*, que lo convertía en el αλογοζ por excelencia, en lo innombrable sin remedio.

Sin embargo, ni en los escritos de Descartes, ni de otros matemáticos como Fermat, Pascal o Cavalieri, el empleo matemático del infinito apareció aún como un auténtico *mecanismo*, como cálculo que reproduce en otros símbolos los automatismos del álgebra.

El infinito había estado sin duda presente e intuible en la matemática que precedió al análisis diferencial, inclusive las demostraciones del *Método* de Arquímedes ya habían ofrecido una imagen reconocible de él. Pero los griegos no quisieron o no pudieron entender o aceptar las ventajas de la generalización algebraica y fue, en cambio Leibniz, quien las exaltó. Escribía Huygens en 1691 "Lo que más estimo en este nuevo cálculo, es que ofrece las mismas ventajas sobre los antiguos en la Geometría de Arquímedes que Viète y Descartes ofrecieron en la geometría de Eudoxo o de Apolonio, liberándonos de trabajar con la imaginación".

En opinión de Abraham Robinson[44], para quien el análisis no estándar podía proponer una versión actualizada de la historia del Cálculo, orientada hacia una revaluación del infinitesimal, la mezcolanza de permisividad lingüística aplicativa e incompatibilidad lógica que se desarrollo basándose en las declaraciones de Leibniz, mismas que habían subsistido hasta la obra de Weierstrass, pudieron haber disminuido la comprensión de las verdaderas intenciones de algunos de los matemáticos tradicionalmente situados en los inicios de la refundación del análisis del siglo XIX. Así por ejemplo, para algunos no es suficientemente claro hasta que punto Cauchy, quien emplea constantemente los infinitesimales en sus definiciones fundamentales, los consideraba una mera abreviatura lingüística de fórmulas más rigurosas o una parte insustituible de las demostraciones y enunciados de los teoremas. Algunos de los teoremas, en los cuales Cauchy utilizó lo infinitamente pequeño, pueden considerarse correctos, si se traducen al lenguaje del análisis no estándar, sustituyendo los infinitesimales como incremento de variables por los infinitesimales como entidades perfectamente definidas en una atinada ampliación del campo de los reales en el sentido de Robinson.

El propio Robinson señala que "Cauchy está encuadrado en la historia del cálculo, no como un hombre que rompe con la tradición, sino como un enlace entre el pasado y el futuro. Produce una síntesis entre la doctrina de los límites, por un lado, y la doctrina de las cantidades infinitamente pequeñas y grandes, por el otro, asignando un papel esencial a la noción de variable tendente a un límite, en particular al límite cero".

La desaparición paulatina del infinitesimal culminó con la obra de Weierstrass, pero después de él, hubo varios intentos de recuperación por parte de Du Bois-Reymond, Stolz y Skolen. Abraham Robinson, basándose en los trabajos de Skolen sobre los modelos no estándar de la aritmética, enunció que *las ficciones de Leibniz sí existían.*

3.5. EL INFINITO ACTUAL, INDEFINIDO Y TRANSFINITO.

Se ha señalado como cierto que el infinito potencial halla en la serie infinita una consumación natural en lo finito y, por lo tanto, en algo quieto y estático. Hegel afirma esa exigencia de estaticidad que el infinito debe satisfacer para dejar de existir como puro sinónimo del devenir temporal. El diferencial de Leibniz, según observó M. Milhaud, no es sino el *momento infinitesimal de todo devenir*, y lo finito es el acto final de una generación dinámica dominada por el tiempo.

Así, la igualdad final alcanzada por las series alternantes, cuyas sumas parciales sean una vez mayores y una vez menores que la suma total, es para Leibniz una cantidad *dinámica atrapada* en el infinitesimal del paso del movimiento a la quietud. Fermat acuñó un nuevo término para definirla, la *adigualdad*, en lugar de la *igualdad*. En consecuencia, la adigualdad puede entonces ser considerada una desigualdad muy pequeña, y con permisividad para aproximar a ambas entre sí a voluntad[45].

Descartes, que no llegaba a admitir la posibilidad de "comprender" todo el infinito, señalaba que, si se concebía "algo", no se podía por consiguiente concebir el infinito, ya que el infinito trasciende cualquier "cosa" concebida, pero se estaba entonces en la conciencia de ello, y esa conciencia revelaba la existencia y la verdad de la idea. Con lo anterior Descartes proponía un infinito garantizado por un contenido de objetividad legítimo, aun considerando que no cabría remitirlo a nada concreto.

Pese a la cautela de Leibniz, con relación al título de *ficciones* aplicado a los diferenciales, Fontenelle[46] escribió en 1727, en el prefacio a los *Éléments de la géométrie de l'infini*, que a partir de entonces había que considerar a los infinitos y los infinitesimales un hecho establecido para siempre, una adquisición fundada de las especulaciones de la Geometría. "La Geometría es enteramente intelectual, independientemente de la descripción actual y de la existencia de las figuras cuyas propiedades descubre. Todo lo que concibe como necesario es real con la realidad que aquélla supone en su objeto. El infinito que demuestra es, así pues, tan real como lo finito, y la idea que de aquél se tiene es, como cualquier otra, fruto de la suposición de que no se trata sino de algo útil llamado a desaparecer una vez utilizado"[47].

Las disputas que se dieron en el siglo XVIII acerca de las bases metafísicas del diferencial y del principio de continuidad no modificaron en ningún caso la convicción de que era menester que se afirmase y consolidase de alguna manera en el lenguaje matemático una idea aceptable del infinito. Si bien el infinitesimal no se había prestado a una fundamentación lógica, su solidez en la práctica, reforzó la convicción de la existencia del infinito, al menos como realidad intelectual.

Bolzano, en la primera mitad del siglo XIX, señalaba que las ideas no eran en general algo calificado de "inexistente", sino simplemente "algo" que no deja de subsistir aun cuando nadie las piense. Existían ideas "objetivas" dotadas de una inequivocabilidad propia, a las que, empero, no correspondía objeto alguno concretamente existente, por ejemplo, la idea de "nada", o de "0", o de $\sqrt{-1}$. Bolzano concluía que la determinación de una cosa cualquiera no debía basarse forzosamente en la existencia efectiva de un objeto. En ese sentido, el infinito no tenía por que ser una excepción; desde luego que un conjunto infinito no es determinable como descripción exhaustiva de los elementos que pertenecen a él, pero existen, no obstante, métodos que permiten definirlo sin ambigüedad.

Bolzano da a entender que se pretende distinguir entre diferentes tipos de proposiciones existenciales; por ejemplo, decir "A existe" es diferente a decir "Hay un A", porque en la primera proposición la existencia aparece como predicado[i] y en la segunda no. La fórmula "hay un A", alude solamente al hecho de que la idea A es referencial. Esto es equivalente a decir "hay una ley moral suprema", que no significa que exista realmente algo que sea una ley moral suprema. No es absurdo pensar en el contenido referencial de una idea respecto a algo inexistente. Basta con pensar que la idea de "proposición" puede referirse a objetos como el teorema de Pitágoras, sin que sea necesario suponer que alguien lo piense o escriba en un momento dado, es decir, no existe como realidad actual.

Bolzano formuló la propuesta que de una clase de objetos fuera definible como tal, prescindiendo de que fuese finita o infinita. Adelantándose a Cantor, consideró que a la idea de conjunto correspondía una verificación de coherencia mediante el principio aristotélico del tercio excluso. Una cosa es determinada o determinable si de dos atributos contradictorios, (b o no b), sólo uno le corresponde; y esta regla se aplica tanto a lo finito como al infinito. Aunque sea infinito, un conjunto puede ser determinable por la circunstancia de que, en principio, cada uno de sus elementos posee o no una propiedad específica.

Así, Bolzano se adelantó en varias décadas a todo el período del siglo XIX que se caracterizó por la invención de un lenguaje matemático que buscó formar del infinito una totalidad actual y estática, que no estuviese regida por el devenir temporal. Tal fue el lenguaje de la teoría de conjuntos que pretendió justificar, junto al infinito potencial de las sucesiones infinitas, la infinidad actual de todos los subconjuntos de dichas sucesiones como colección cerrada de objetos existentes por sí mismos. Bolzano consideró que los agregados se forman mediante operaciones sintéticas del pensamiento fuera de tiempo, sin estar en obligación de enumerar uno a uno, por separado todos los términos de una serie infinita, dado que todos los términos de esta serie, son especificables por la ley de formación de la propia serie, que hace superfluo enumerar sus términos. Así, es la ley la que especifica la serie, pero no todos los términos contados uno a uno.

El método de ε-δ de Weierstrass refleja esa misma exigencia de estaticidad. Si se afirma que una función $f(x)$ es continua en un punto $x=a$, se entiende que $f(x)$ converge a $f(a)$ cuando x se acerca indefinidamente a a. Pero esa convergencia que sugiere la idea del devenir y de la potencialidad, también se puede describir en los términos siguientes:

"Para *toda* cantidad ε positiva, *existe* una cantidad δ positiva correspondiente tal que, para *todos* los números reales x que se hallen alrededor de a, a una distancia menor que δ, el valor de $f(x)$ se halla a una distancia de $f(a)$ menor que ε. Esto es

$$a - \delta < x < a + \delta \quad \rightarrow \quad f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon."$$

Los términos clave de la definición son: *toda*, *existe*, *todos*, que sugieren totalidades infinitas estáticas, que preceden lógicamente a la elección definitiva de los puntos contenidos en ellas, y que no dependen de su eventual ubicación, conforme a cualquier ley matemática, en una sucesión potencialmente infinita y sometida, por lo tanto, a la inagotabilidad del devenir temporal.

También Weierstrass propuso basar por vez primera una teoría de los números irracionales en la noción de conjunto, ampliando operaciones y relaciones de magnitud a agregados infinitos de números racionales. De ese modo, toda la aritmética de los reales era susceptible de una descripción a partir de la teoría de los conjuntos. La infinidad potencial del desarrollo de cifras de los números irracionales quedaba encerrada en una entidad actual regida por leyes independientes de toda idea de sucesión temporal.

[i] En lógica, es lo que se afirma o niega del sujeto de una proposición.

Entre los hechos matemáticos que anticiparon los mecanismos de generación de los números transfinitos y de los conjuntos de potencia superior a lo numerable, se encuentra el camino seguido para llegar al teorema de Du Bois-Reymond, descrito por E. Borel y que es el siguiente:

"Si escogemos una sucesión de funciones crecientes $f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots,$ por ejemplo:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x, \\ f_2(x) &= 2x, \\ &\vdots \\ f_m(x) &= mx, \\ &\vdots \end{aligned}$$

es decir que $f_m(x)$ es la función que asocia a cada número el producto de ese número por m. Dicha sucesión goza de una propiedad evidente: si hacemos variar entre los números enteros positivos, los valores que toma $f_m(x)$ son menores que los valores que toma $f_n(x)$ en caso de que n sea mayor que m, ($n > m$). Se puede describir sintéticamente esta circunstancia escribiendo

$$f_m(x) < f_n(x)$$

si $n > m$.

Las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), \ldots,$ forman entonces una sucesión *indefinida* tal que cada elemento de la sucesión es "mayor" que los que lo preceden en el sentido definido por la relación anterior. Entonces se pude escribir

$$f_1(x) < f_2(x) < \ldots < f_m(x) \ldots$$

de donde surge la pregunta sobre la posible existencia de una función $f(x)$ creciente "mayor" que *todas* las funciones $f_m(x)$. Si la búsqueda de semejante función permanece ligada a la sucesión, la respuesta es obviamente negativa, pero si la investigación se puede desenvolver fuera de la sucesión, en cierto sentido existe semejante función. Pensemos en $f(x) = x^2$, es decir, la función que asocia a cada entero positivo su correspondiente cuadrado. Dicha función posee la propiedad de "superar" a cualquier otra $f_m(x)$, para cualquier m fijado de antemano, al menos a partir de determinado x; en ese sentido, "crece" más rápido que *todas* las funciones $f_m(x)$, y en el mismo sentido podremos afirmar que $f(x) = x^2$ es "mayor" que éstas. Entonces, se podría reemplazar desde este punto con una nueva sucesión de funciones

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f(x) = x^2, \\ g_2(x) &= x^3, \\ &\vdots \\ g_m(x) &= x^{m+1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

También en este caso, si se piensa que x recorre la sucesión de enteros positivos, se tiene sin más

$$g_m(x) < g_n(x)$$

si $n > m$.

Existe, entonces, una función $g(x)$ "mayor" que todas las funciones $g_m(x)$ sin pertenecer a la sucesión $\{g_m(x)\}$. Basta con escribir $g(x)=2^x$, dado que toda función exponencial es más "veloz" que cualquier potencia x^m. La propia función 2^x podría engendrar entonces otra sucesión indefinida de funciones crecientes aumentables con una ulterior función $h(x)$ que así se habría hallado y sería el inicio de un nuevo procedimiento análogo. Se obtendría entonces una sucesión de funciones

$$f(x),\ g(x),\ h(x),\ \ldots$$

con respecto a la cual se podría inferir la existencia de una función mayor que $f(x)$, que $g(x)$, que $h(x)$ y que *todas* las restantes funciones siguientes."

En realidad, la existencia de funciones que dominan una infinidad potencial de funciones crecientes queda asegurada para cada caso específico por un teorema de Du. Bois-Reymond, cuyo enunciado se puede formular del modo siguiente:

"Dada una sucesión numerable cualquiera de funciones crecientes:

$$f_1(x), f_2(x),\ \ldots\ , f_m(x),\ \ldots$$

de la variable real x, existe una función creciente y efectivamente construible $f(x)$ tal que

$$f(x) > f_m(x)\ ."$$

En consecuencia, el teorema transpone a la categoría de "hecho" matemático la regla subyacente a cualquier intento creíble de mostrar el infinito actual como acontecimiento concreto: una entidad capaz de limitar a una infinidad potencial de objetos de los que no forma parte. Debe quedar claro que ninguna sucesión numerable logra colmar la clase de funciones "construibles" mediante el teorema de Du. Bois-Reymond. De hecho, cualquier *indefinidad* de funciones crecientes, (esto es, infinitud numerable), admite fuera de sí, una nueva función, lo cual significa que la palabra *indefinido* es inadecuada para la descripción sintética de la clase de funciones generadas mediante el mecanismo sugerido por el teorema.

La insaturación del απειρον pasa de ese modo de lo *indefinido* al *transfinito*. La circunstancia por la que después de cada número hay otro, lo que define el término de *indefinido*, se transpone a la circunstancia análoga que estipula tras una sucesión indefinida cualquiera, un término limitador que produce una nueva unidad, y por consiguiente una infinitud numerable ulterior, lo que define el sentido de la palabra *transfinito*.

No existe evidencia alguna de que Du. Bois-Reymond se hubiese referido explícitamente a la transfinitud, sino Cantor.

Alrededor de 1883, se da la posibilidad a Cantor, de introducir una nueva especie de infinito. La investigación acerca de la estructura de los intervalos de convergencia de las series trigonométricas llevaba a considerar sistemas de puntos a los que se pudiese aplicar un número infinito de veces la operación de derivación, lo cual implicaba que, cabría concebir un infinito *propio*, perfectamente determinado y por lo tanto *actual*, junto con el infinito *potencial* o *impropio* de Arquímedes.

Del teorema de Du. Bois-Reymond debe tenerse presente:

i. Puede aplicarse indefinidamente a cualquier cantidad infinita numerable de funciones crecientes.
ii. Esa aplicación indefinida sólo requiere una función $f(x)$ para generar la sucesión.

Para visualizar las implicaciones del teorema, se tomará a $f(x) = 2^x$ como ejemplo, generando entonces la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= f(x) = 2^x \\
f_2(x) &= f(f_1(x)) = 2^{2^x} \\
f_3(x) &= f(f_2(x)) = 2^{2^{2^x}} \\
&\vdots \\
f_m(x) &= f(f_{m-1}(x)) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{x}}}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Así, si una función que generase semejante sucesión podría ser reescrita como $f_\omega(x)$, con una relación desarrollo de la forma

$$f_\omega(x) > f_m(x) \text{ para toda } m,$$

y que con objeto de contar con una notación abreviada para posteriores referencias, se podría reescribir, por convención:

$$\omega > m$$

para toda m.

La función $f_\omega(x)$, a su vez, podría generar una nueva infinitud numerable de funciones, siendo estas:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_\omega(x) \\
f_{2\omega}(x) &= f_\omega(f(x)) \\
f_{3\omega}(x) &= f_\omega(f_{2\omega}(x)) \\
&\vdots \\
f_{m\omega}(x) &= f_\omega(f_{(m-1)\omega}(x)) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Desde luego, no hay limitación alguna que impidiese volver a aplicar el teorema de Du. Bois-Reymond. En forma análoga al caso anterior, la nueva función generadora se podría llamar $f_{\omega 2}(x)$, y describir la condición

$$f_{\omega 2}(x) > f_{m\omega}(x) \text{ para toda } m,$$

escribiendo por convención

$$\omega^2 > m\omega \qquad \text{para toda } m.$$

Así, la función $f_{\omega 2}(x)$ se utilizaría para generar, una vez más, otra infinidad numerable de funciones. Ahora bien, del mismo modo que contar plantea para cada entero un entero sucesivo, para cada infinidad numerable de funciones establece una futura infinidad numerable construida mediante su función generadora o dominante.

Las posteriores aplicaciones del teorema de Du. Bois-Reymond sugieren entonces una sucesión de símbolos

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3, \ldots,\ \omega^\omega, \ldots,\ \omega^{\omega^\omega}, \ldots,\ \alpha,\ \ldots$$

pensables como indicios sucesivos de las funciones definidas una tras otra. Semejante secuencia hace imaginar una extensión del procedimiento del contar que refleja de algún modo el nivel de infinitud de la clase de las funciones generadas mediante el teorema de Du. Bois-Reymond.

Si bien, la numeración transfinita de Cantor se puede introducir de manera totalmente autónoma a este teorema, éste le confiere el aspecto de legitimidad que habitualmente se deduce de todo lo que presenta el aspecto de una demostración matemática. Se trata de una *analogía*, dado que los números transfinitos de Cantor fueron justificados por principios *a priori*, y no por teoremas matemáticos. Como en el caso de los números reales definidos por Dedekind, fueron algunos postulados y en definitiva un acto libre de creación de quienes decidieron la existencia de los nuevos objetos.

Utilizando las palabras de Cantor, de un pasaje, casi integro, de una memoria de 1883:

"Ahora debemos mostrar cómo nos vemos llevados a las definiciones de estos nuevos números, y de qué manera se obtienen, en la sucesión de los números reales absolutamente infinita, las divisiones naturales que yo llamo clases de números. La serie (I) de los números enteros reales positivos

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

debe su formación a la repetición y a la agrupación de unidades que se han tomado por punto de partida y que se han considerado iguales. El número ν expresa un número finito determinado de repeticiones sucesivas de este género, así como la agrupación de las unidades escogidas en una totalidad única. La formación de los números enteros finitos se basa, así pues, en el principio de la adición de la unidad a un número ya formado.

Llamo *primer principio de formación* a ese momento que, como en breve veremos, desempeña un papel esencial en la producción de los números enteros superiores. El número de los números ν de la clase (I) formada de esa manera es infinito, y entre todos esos números no hay uno que sea mayor que todos los demás. Sería, entonces, contradictorio hablar de un número máximo de la clase (I). Ahora bien, se puede, por otra parte, imaginar un nuevo número, al que llamaremos ω, que *servirá para expresar que todo el conjunto* (I) *está dado en virtud de la ley en su sucesión natural.* También podemos representarnos el número ω como el límite hacia el cual tienden los números ν, a condición de entender con ello que ω será *el primer* número entero que *seguirá a todos* los números ν, de manera que haya que declararlo superior a *todos* los números ν. Si asociamos el número ω a las unidades primitivas, obtenemos con ayuda del *primer principio* de formación los números más extensos:

$$\omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\nu, \ldots$$

Ya que de esa manera no se llega, una vez más, a ningún número máximo, imaginamos uno nuevo, que se puede llamar 2ω y que será el *primero* después de todos los números hasta ahora obtenidos

$$\nu \text{ y } \omega+\nu$$

Si aplicamos una vez más al número 2ω el primer principio de formación, llegaremos a prolongar del modo siguiente los números obtenidos hasta ese momento

$$2\omega+1, 2\omega+2, \ldots, 2\omega+\nu, \ldots$$

La función lógica que nos ha dado los dos números ω y $\omega+2$, es evidentemente, distinta del primer principio de formación, y lo llamo ***segundo principio*** de formación de los números reales enteros y defino mejor ese principio al decir que

Dada una sucesión determinada cualquiera de números enteros reales definidos, entre los que no hay uno que sea mayor que todos los demás, se supone, basándose en ese segundo principio de formación, un nuevo número que se considera límite de los primeros, que por consiguiente se define inmediatamente superior a todos estos números.

Aplicando y combinando estos *dos principios* de formación se obtienen, entonces, sucesivamente las continuaciones de los dos números que hasta ahora hemos obtenido, es decir:

$$3\omega+1, 3\omega+2, \ldots, 3\omega+\nu, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu\omega+1, \mu\omega+2, \ldots, \mu\omega+\nu, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ahora bien, aun no hemos llegado al final, ya que entre los números no hay ni siquiera uno mayor que todos los demás.

El *segundo principio de formación nos* permite, entonces, introducir un número que siga a todos los demás $\mu\omega+\nu$, y que se puede denominar ω^2. A ese número se referirán en un orden de sucesión determinado:

$$\lambda\omega^2+\mu\omega+\nu$$

y llegamos entonces, conforme a los dos principios de sucesión, a números de la forma:

$$\nu_0\omega^{\mu}+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_{\mu}$$

pero entonces, el segundo principio de formación nos lleva a definir un nuevo número que será inmediatamente superior a todos estos números y que se podrá designar con ω^{ω}.

La formación de nuevos números, *carece de final.* Siguiendo los dos principios de formación, se obtienen siempre nuevos números y nuevas series de números, con una *sucesión perfectamente determinada.*

Se podría creer, en principio, que vamos a perdernos en lo indefinido en esa formación de nuevos números enteros infinitos determinados y que no estamos en condiciones de *detener momentáneamente* este procedimiento sin fin, para llegar con ello a una *limitación semejante a la que hemos hallado, de hecho, en cierto sentido, con respecto a la anterior clase de números* (I); ...

Pero si observamos que todos los números obtenidos hasta ahora y los que le siguen inmediatamente satisfacen determinada condición, veremos que esa condición, *si se plantea como obligatoria para todos los números a formar inmediatamente*, se nos aparece como un ***tercer principio***, que se suma a los dos primeros y al que llamo ***principio de detención o de limitación***. En virtud de ese principio, como haré ver, la segunda clase de números (II), definida mediante la añadidura de este principio, no sólo adquiere una potencia más elevada que la (I), sino *justamente la potencia inmediata superior*, y por consiguiente la *segunda potencia.*

La condición que se acaba de mencionar y que es satisfecha, por cada uno de los números infinitos α hasta ahora indefinidos, es *que el sistema de los números que se hallan, en la sucesión de los números, antes del que se considera* y a partir de 1, sea de la misma potencia que la primera clase de números (I) ...[48]

Así pues, definimos la segunda clase de números (II) como el conjunto de todos los números a que se pueden formar mediante los dos principios de formación, que se siguen conforme α un orden determinado:

$$\omega,\omega+1,\ldots,\nu_0\omega^{\mu}+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_{\mu}\ ,\omega^{\omega},\ldots,\omega^{\omega^{\omega}},\ldots,\alpha,\ldots$$

Y que están sometidos a la condición de que todos los números que preceden al número α, a partir de 1, forman un sistema de la misma potencia que la clase de números (I)."

Por consiguiente, el primer número transfinito, ω, debe ser entendido como un *límite* al que tiende la variable entera finita ν, del mismo modo que un número irracional, por ejemplo $\sqrt{x}$ puede ser considerado como el *límite* de una variable. Así, dice Cantor, los números transfinitos, se semejan en cierto sentido a nuevas entidades irracionales o, mejor, imitan su naturaleza más profunda, pues ambos dibujan los rasgos y las características imprescindibles del infinito actual.

Las analogías entre Dedekind y Cantor penetran en el estilo fundamental del pensamiento y en las convicciones más profundas acerca de la naturaleza de la invención matemática. Dedekind afirmó que la matemática se desenvuelve con plena independencia de las intuiciones y que el concepto de número es resultado inmediato de las leyes del pensamiento.

Cantor afirmó que los números enteros, incluidos los transfinitos, podían considerarse como actuales, en tanto que, basándose en las definiciones, ocupan un lugar perfectamente determinado en el conocimiento y se distinguen perfectamente de todos los demás elementos del pensamiento, y sostienen relaciones definidas con ellos.

El término *actual* implica, de algún modo, la realidad del mundo externo en la que Cantor intuye que puede hallarse una continuación de las invenciones intelectuales. Así, escribió, que "los números enteros con sus leyes y relaciones constituyen una totalidad, del mismo modo que los cuerpos celestes.

Cantor no se atrevió a pronunciarse sobre la *existencia* efectiva de los nuevos entes matemáticos. Separó la matemática de la metafísica, sosteniendo que la primera tenía la libertad para desarrollarse con autonomía, estando sometida únicamente a la condición de la no-contrariedad y la coherencia intrínseca de sus enunciados. En cuanto al Absoluto, reconoció que no podía, ni siquiera con los números transfinitos, dar una comprensión aproximada de él. El Absoluto puede ser reconocido, pero nunca conocido, ni aun aproximadamente.

Esa idea de *imposibilidad* designa las más de las veces el obstáculo insuperable de la potencia connaturalizada a cualquier objeto pensado. Entonces siempre hay, como observó Aristóteles, *un más allá*, un *además* aún no calculado o previsto.

La última publicación importante de Cantor fue su obra *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos*[49], publicada en dos partes, en 1895 y 1897. La comienza con la definición de conjunto, considerada ya como clásica y después define también potencia:

Por un "conjunto" entendemos una colección *M* cualquiera de objetos definidos y distintos de nuestra percepción o de nuestro pensamiento (a los cuales llamaremos los elementos de *M*) en un todo.

Potencia o número cardinal de *M* a aquel concepto que surge del conjunto *M* con ayuda de nuestro proceso de pensamiento activo.

Introduce por primera vez su notación especial para los números cardinales transfinitos, los *alef*, $\aleph$, donde en particular el alef cero, representa el cardinal de los conjuntos infinitos numerables y es, por lo tanto, el más pequeño de los alefs.

Gottlob Frege criticó con dureza las formulaciones tan vagas y tan poco rigurosas sobre las cuales Cantor se apoyó, sin embargo creía que la teoría de éste podría ser salvada dado que los resultados de la teoría de conjuntos transfinita eran básicamente correctos, aunque su fundamento requería de un análisis mucho más cuidadoso.

Cantor había demostrado que dados dos números cardinales cualesquiera, *a* y *b*, sólo puede darse una de las tres relaciones de orden

$$a=b, \quad o \quad a>b \quad o \quad a<b$$

pero no pudo demostrar que siempre tenía que ser verdadera *exactamente* una de ellas. La complicación se refería al caso de dos cardinales representados por los conjuntos *A* y *B*, tales que A no es equivalente a ninguna parte de B, y B no es equivalente a ninguna parte de A. Cantor aventuró la conjetura de que eso sólo podía ocurrir para conjuntos finitos A y B equivalentes, pero no pudo demostrar que no pudiera ocurrir lo mismo para conjuntos infinitos, y en consecuencia no había manera de establecer la necesaria comparación de todos los números cardinales finitos e infinitos. El asunto era relevante dado que, si hubiera cardinales no comparables, sería imposible disponer de todos los números cardinales en una sucesión ordenada y, a su vez, sería imposible decir cual es el mayor con relación a otro. Esta era una cuestión grave para la hipótesis del continuo, ya que si la potencia del continuo fuera un número cardinal de los no comparables, entonces nunca se podría demostrar si es, de hecho, equivalente a la potencia de la segunda clase de números, la cual era ciertamente un cardinal comparable en virtud de su misma definición en términos de conjuntos bien ordenados.

En nuestros días la hipótesis del continuo[i] permanece sin probarse o desecharse. La cuestión de Cantor está todavía sin respuesta[50]. No obstante, decir sólo esto podría ser solo parte de la historia y sería llevar a conclusiones erróneas. "El señalamiento sería que los matemáticos no han sido lo suficientemente asiduos. Si ellos aplicaran un poco más de esfuerzo podrían haber establecido la cuestión. Pero recuérdese que la práctica matemática ha sido guiada por los nueve axiomas de **ZF** (Teoria de conjuntos de Zermelo-Frænkel), los cuales intentan constituir una descripción precisa y formal de lo que los conjuntos parecen ser"[51]

Es precisamente sobre esta base que la respuesta a la cuestión debe ser inicialmente buscada. En 1938 Gödel probó que, usando los nueve axiomas, sería imposible mostrar que la hipótesis del continuo es falsa; mientras Cohen probó, en 1963, que sobre la misma base sería imposible mostrar que es verdadera.

[i] La hipótesis del continuo de Cantor, conocida como la hipótesis del continuo es: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

4. SERIES INFINITAS

4.1. SIGLO III a.C.

Las series hacen su aparición desde la época de Arquímedes, (287-212 a.C.), quien para probar *la cuadratura de la parábola*, utilizó la serie

$$a(P_n)= a+\frac{a}{4}+\frac{a}{4^2}+\frac{a}{4^3}+\cdots+\frac{a}{4^n}+\cdots \qquad (4.1.1)$$

y en un intento de simplificar la suma cuando $n\rightarrow\infty$ obtuvo la identidad

$$A(P_n)=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3} \qquad (4.1.2)$$

Si bien actualmente podemos reconocer la serie, como una de tipo geométrico, cuando $n\rightarrow\infty$ y cuya suma se puede calcular fácilmente con la aplicación de la fórmula

$$S=\frac{a}{1-r};\ \text{con } r=\tfrac{1}{4} \qquad (4.1.3)$$

y que para este caso particular corresponde a $r=\frac{4}{3}$ y $a=1$.

Dado que se carecía de la expresión (4.1.3), para resolverla, Arquímedes hizo uso de la siguiente igualdad

$$\frac{1}{4^k}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^k}=\frac{4}{3\cdot4^k}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{k-1}} \qquad (4.1.4)$$

que aplicada a la serie anterior, origina

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\left(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}\right) &= 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\left(\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\right) \qquad (4.1.5)\\ &=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\left(\frac{1}{4^{n-3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-3}}\right)\\ &=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\left(\frac{1}{4^{n-4}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-4}}\right)\\ &\ \ \vdots\\ &=1+\left(\frac{1}{4^{n-n+1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-n+1}}\right)\\ &=1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right) \qquad (4.1.6)\\ &=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Obsérvese que el hecho de sumar $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}$ .cuando $n\rightarrow\infty$, a la serie infinita

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots,$$

no modifica el resultado de la serie.

Otras series que Arquímedes usó, fueron las correspondientes a la suma de los números naturales y de sus cuadrados, cuyas fórmulas para calcularlas son

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1) \qquad (4.1.7)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \qquad (4.1.8)$$

Comentarios adicionales:

El método utilizado en las demostraciones llamado por exhaución, implica un procedimiento de aproximación. Implícitamente se encuentra un proceso que involucra los conceptos de infinito y límite, destacándose que los griegos, al primero le tenían "horror" y que, el segundo nunca fue formulado por ellos. Además, carecían del concepto de función, de continuidad y de límite, y por lo tanto, sus razonamientos fueron de índole geométrico. Arquímedes debe haberse dado cuenta que al usar $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}$ .cuando $n\to\infty$ en la serie geométrica (4.1.2), la cantidad era extremadamente pequeña. Esto correspondería a lo que en el siglo XVII se empezó a usar con cierta libertad, aunque aún sin precisar, es decir, los infinitesimales. Las series finitas (4.1.7) y (4.1.8), desde luego, no requirieron de los conceptos ya mencionados. Tampoco existían los conceptos de constante, variable y función, que nacieron de las ideas de movimiento. No contaban, ni siquiera en una forma primitiva de lo que ahora llamamos la representación gráfica de las funciones.

4.2. SIGLO XIV. LAS SERIES NUMÉRICAS.

Los matemáticos de occidente de Europa, mostraron durante el siglo XIV, no sólo imaginación, sino una notable claridad de pensamiento, por lo que sus contribuciones no consistieron en una extensión de la obra de los clásicos, sino en la exploración de nuevos puntos de vista. Entre éstos, destacó por su importancia el tratamiento de las series infinitas. A diferencia de los griegos que habían mostrado un *horror infiniti*, los filósofos escolásticos de la baja Edad Media recurrían frecuentemente al infinito, tanto en su sentido *potencial* como *actual*.

Así, se dice que las series infinitas fascinaron tanto a los filósofos medievales como a los matemáticos, quienes se sintieron cautivados por las *deliciosas* disputas a raíz de las paradojas matemáticas, así como por la atracción del *infinito*. El trabajo de los estudiosos del Merton College sobre la *latitud de las* formas[i] condujo en forma natural a varios problemas de series infinitas. Por ejemplo, Swineshead resolvió un problema, que enunciado en términos de movimiento dice:

Si un punto se mueve a lo largo de la primera mitad de un cierto intervalo de tiempo con una velocidad constante; a lo largo del siguiente cuarto de intervalo al doble de la velocidad inicial, a lo largo del siguiente octavo de intervalo con el triple de la velocidad inicial: y así al infinito, entonces la velocidad promedio durante el intervalo entero de tiempo, será el doble de la velocidad inicial.[52]

[i] La *latitud de formas* es una referencia la representación gráfica de funciones. Si bien la representación gráfica no era nueva en sí, lo innovador fue la propuesta de ya no mantener la homogeneidad entre la abscisa y la ordenada; así una puede ser distancia y la otra el tiempo. Oresme, sugirió inclusive el extenderla a tres dimensiones, representando como un volumen una función de dos variables independientes, aunque, tuvo la dificultad de no contar con una geometría de tipo algebraico.

Swineshead dio una larga y tediosa prueba verbal de su enunciado, que equivale a argumentar que el efecto de doblar la velocidad durante la última mitad del intervalo es equivalente a duplicarla durante la primera mitad del mismo, de longitud de un medio; que el efecto adicional del triplicar la velocidad durante el último cuarto del intervalo equivale a duplicarlo durante el segundo subintervalo, de longitud de un cuarto; que el efecto de cuadruplicarlo durante el último octavo del intervalo es equivalente a duplicarlo durante el tercer subintervalo, de longitud de un octavo; y así al infinito. De aquí, que el efecto total acumulado es el mismo que el de duplicar la velocidad inicial durante todos los subintervalos.

Tomando tanto al intervalo de tiempo como la velocidad inicial como unitarias, se llega a la siguiente expresión equivalente:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2 \qquad (4.2.1)$$

Ésta parece ser la primera serie infinita tratada como tal, pues aunque ya se tenía la serie usada por Arquímedes

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3} \qquad (4.2.2)$$

realmente él no la asumió como infinita.

A Oresme se le ocurrió, alrededor del año 1361, la idea de hacer un dibujo o gráfica de la manera en que las cosas varían[53], es decir, sugiere en forma primitiva de lo que ahora llamamos *la representación gráfica de las funciones*. Oresme también da la prueba general para la serie geométrica (4.2.2), prueba la serie (4.2.1) y también proporciona una prueba de que la serie armónica diverge.

La prueba para (4.2.1) la realiza por un método geométrico, en que muestra las dos disecciones asociadas a la configuración del movimiento de Swineshead

En la primera disección, (Figura 4.2.1.a), las alturas corresponden a una velocidad de 1 para la primera mitad, una velocidad de 2 para el siguiente cuarto del intervalo, una velocidad de 3 durante el octavo de intervalo siguiente y así sucesivamente. Esto daría origen a la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots \qquad (4.2.3)$$

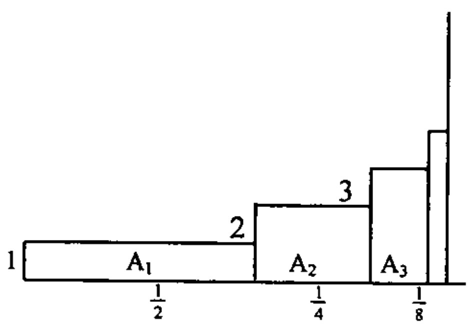


Figura 4.2.1.a

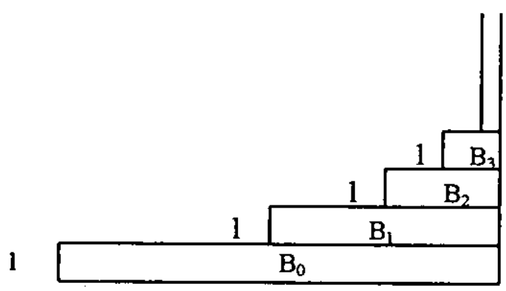


Figura 4.2.1.b

En esta segunda disección, (Figura 4.2.1.b), se tiene la suma de los siguientes productos:

$$1\cdot 1+1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{8}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

por lo que concluye que las dos series se pueden considere como equivalentes. Véase entonces que:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{2^n}+\frac{n}{2^n}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\frac{1}{2^n}+\cdots \qquad \text{.................(4.2.4)}$$

$$=2$$

dado que la parte derecha de (4.2.4) corresponde a la serie geométrica del tipo de (4.1.3), con a=1 y $r=\frac{1}{2}$.

Luego, Oresme propone la prueba para la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

conocida como la *serie armónica* y que es todavía usada como demostración en la actualidad en algunos textos de cálculo diferencial e integral (como por ejemplo en el libro de Granville, Smith y Longley); se basa en la suma de términos sucesivos que se van agrupando en la forma que a continuación se describe y en donde el total vendrá a ser *infinito*. Se procede como sigue: se coloca el primer término en el primer grupo, los siguientes dos $1/3$ y $1/4$ en el segundo, en donde su suma será mayor a $1/2$; en el tercer grupo, los siguientes cuatro términos, desde $1/5$ hasta $1/8$; en donde también su suma será mayor a $1/2$; ahora los siguientes ocho términos, desde $1/9$ hasta $1/16$, cuya suma una vez más será mayor a $1/2$; y así sucesivamente, de manera que el grupo *m-ésimo* incluye 2^{m-1} términos de la serie, en donde la suma de cada grupo es mayor o igual a $1/2$, y por lo tanto, sumando una cantidad suficiente de términos, en su orden, se podrá superar cualquier número dado. **Así, este fue un primer ejemplo de una serie divergente** la cual parece converger dado que sus términos se aproximan a **cero**.

Comentarios adicionales:

Obsérvese que pasaron 17 siglos desde las series propuestas por Arquímedes hasta las series que trató Oresme, quién pertenecía al movimiento escolástico. Se puede apreciar en sus propuestas, el avance significativo que representó el tratar con entes matemáticos vinculados al concepto de *infinito*. Dio cabida al concepto de divergencia, aún sin definir, quizá sentando el precedente para un posterior análisis sobre la convergencia de las series. La *latitud de formas* vino a ser un avance en el manejo primitivo de la representación gráfica de la funciones. Se usaron en forma implícita los equivalentes a indivisibles, infinito y continuidad. Parte de las demostraciones son de carácter geométrico, como en el caso de la serie (4.2.1) y de carácter aritmético, como en el caso de la serie armónica. Persiste la ausencia de los conceptos de constante, variable y función, así como de continuidad, límite e infinitesimal. Se empieza, aunque con reservas a incluir la cuantificación de la formas variables, es decir aquellas vinculadas con el movimiento.

4.3. SIGLO XVII

4.3.1. LA ARITMÉTICA DE LOS INFINITOS DE WALLIS, 1655.

La mayor parte de los resultados basados en un método de integración numérica fueron conseguidos por John Wallis. Su tratado sobre el tema, *La aritmética de los infinitos*[54] es una obra acerca de las relaciones entre las sumas de diferentes series y que no está sobrecargada de demostraciones, pues según comentarios de Grattan-Guinness, se basaba en su intuición, la cual era realmente asombrosa.

A su método favorito le llamaba *inducción incompleta*, aunque también se le podría llamar *conclusión por analogía*.

Wallis empieza su tratado estableciendo los siguientes resultados:

$$\frac{\sum_{i=0}^{l} i}{(l+1)l}=\frac{1}{2} \quad\text{.....(4.3.1.1)}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{l} i^2}{(l+1)l^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6l} \quad\text{.....(4.3.1.2)}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{l} i^3}{(l+1)l^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4l} \quad\text{.....(4.3.1.3)}$$

y culminaba diciendo. "análogamente"

$$\frac{\sum_{i=0}^{l} i^n}{(l+1)l^n}=\frac{1}{n+1}+\frac{a_1}{l}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{l^{n-1}} \quad\text{.....(4.3.1.4)}$$

donde las a_i son números racionales, l es un número natural y n=4,5,6;

Analicemos como es que se llega a obtener la expresión (4.3.1.4).
Seguramente Wallis recurrió a las fórmulas ya conocidas desde la antigüedad, (Arquímedes usó resultados equivalentes para calcular la cuadratura de la espiral y de la parábola) y que son:

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2} \quad\text{.....(4.3.1.5)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad\text{.....(4.3.1.6)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad\text{.....(4.3.1.7)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} \quad\text{.....(4.3.1.8)}$$

Empecemos por reescribir las ecuaciones (4.3.1.1), (4.3.1.2), (4.3.1.3) y (4.3.1.4) de la forma siguiente:

$$\frac{\sum_{i=0}^{l} i}{(l+1)l} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{l} i^2}{(l+1)l^2} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{6}}{l}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{l} i^3}{(l+1)l^3} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{l}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{l} i^n}{(l+1)l^n} = \frac{1}{n+1} + \frac{a_1}{l} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{l^{n-1}}$$

Obsérvese que los numeradores de la parte izquierda de las expresiones son de grado n en tanto que el grado de los denominadores es de $n+1$. La razón para ello se verá enseguida.

Nótese además que todos los primeros términos de la parte derecha de las expresiones son de la forma $1/_{n+1}$.
Despejando los términos que contienen las sumatorias e igualando los resultados con las respectivas expresiones (4.3.1.5), (4.3.1.6), (4.3.1.7) y (4.3.1.8), pero sustituyendo la n por l:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(l+1)l}{2} = \frac{(l+1)l}{2}$$ cancelando los términos semejantes que contienen l:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Aunque parece que no se ha avanzado, en breve podremos percibir la regla de formación buscada. Pasemos a la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = (l+1)l^2\left(\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{6}}{l}\right) = \frac{l(l+1)(2l+1)}{6}$$

$$= \frac{(l+1)l^2(2+\frac{1}{l})}{6}$$

cancelando términos semejantes:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{6}}{l}\right) = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{6}}{l}$$

Procedamos de igual manera con la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (l+1)l^3\left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{l}\right) = \frac{l^2(l+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(l+1)l^3(1+\frac{1}{l})}{4}$$

procediendo a la cancelación de términos semejantes:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{4}}{l}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{4}}{l}$$

Repitamos una vez más el procedimiento:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4=(l+1)l^4\left(\frac{1}{4+l}+\frac{a_1}{l}+\frac{a_2}{l^2}+\frac{a_3}{l^3}\right)=\frac{l(l+1)(6l^3+9l^2+l-1)}{30}$$

$$=(l+1)l^4\left(\frac{6+\frac{9}{l}+\frac{1}{l^2}-\frac{1}{l^3}}{30}\right)$$

simplificando se obtiene:

$$\left(\frac{1}{4+l}+\frac{a_1}{l}+\frac{a_2}{l^2}+\frac{a_3}{l^3}\right)=\frac{1}{5}+\frac{\frac{9}{30}}{l}+\frac{\frac{1}{30}}{l^2}+\frac{\left(-\frac{1}{30}\right)}{l^3}$$

Tómese en cuenta que en realidad no se tienen que calcular los valores de los a_i. Dado que los cálculos para cualquier valor de n y l se empiezan a complicar como se puede apreciar en el desarrollado previo, seguramente Wallis tomó l lo suficientemente grande como para despreciar las cantidades del estilo $\frac{a_k}{l^k}$.

Así, Wallis parte de (4.3.1.4) para concluir que:

$$\lim_{l\to\infty}\left\{\frac{\sum_{i=0}^{l} i^n}{(l+1)l^n}\right\}=\frac{1}{n+1} \quad\text{...(4.3.1.9)}$$

Adicionalmente, debe tenerse en cuenta que Cavalieri en su método de los indivisibles, logró realizar las cuadraturas utilizando, para k=1, 2, 3, 4, 5, 6 y 9, dándolas a conocer en 1635. También cabe señalar que Fermat en una carta que envía al padre Mersenne establece la fórmula (sin demostración), que permite calcular las sumatorias para cualquier k entero, en función de potencias inferiores. La expresión, es:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k=\frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{(k+1)}-\left[a_1\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}+\cdots+a_{k-1}\sum_{i=1}^{n} i\right] \text{.....(4.3.1.10)}$$

Para la aplicación de (4.3.1.10) debe considerarse que

$$i(i+1)(i+2)\cdots(i+k-1)=i^k+a_1 i^{k-1}+\cdots+a_{k-1}i$$

donde los a_n, se deben calcular para n=1, 2, ... , k-1.

Para ejemplificar (4.3.1.10), se calculará $\sum i^4$:

- Primero se desarrolla

$$i(i+1)(i+2)(1+3)=i^4+6i^3+11i^2+6i$$

de donde se obtienen los coeficientes 6, 11 y 6; luego,

$$\sum i^4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(4+1)} - \left[6\sum i^3 + 11\sum i^2 + 6\sum i\right]$$
$$= \frac{n^5 + 10n^4 + 35n^3 + 50n^2 + 24n}{5} - \frac{6n^2(n+1)^2}{4} - \frac{11n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{6n(n+1)}{2};$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Retomando la relación (4.3.1.9)

$$\lim_{l\to\infty}\left\{\frac{\sum_{i=0}^{l} i^n}{(l+1)l^n}\right\} = \frac{1}{n+1}$$

se sabe que ésta le permitió hacer la cuadratura de las curvas $y = x^n$, como la que se muestra en la figura (4.3.1.11)

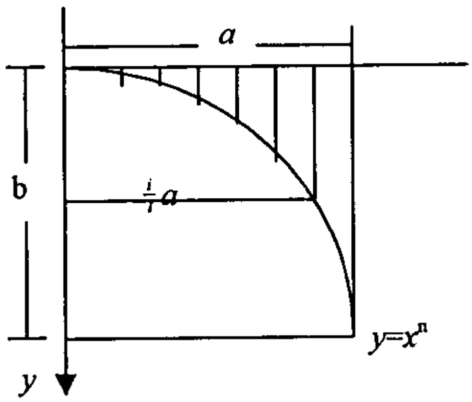


Figura 4.3.1.11

obteniendo:

$$\frac{\sum_{x=0}^{a} y}{\sum_{x=0}^{a} b} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{a\cdot 0}{l}\right)^n + \left(\frac{a\cdot 1}{l}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a\cdot l}{l}\right)^n}{a^n + a^n + \cdots + a^n}\right) \quad \text{.........(4.3.1.12)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{i^n}{(l+1)l^n}\right) \quad \text{.........(4.3.1.13)}$$

$$= \frac{1}{n+1} \quad \text{.........(4.3.1.14)}$$

resultado que corresponde a

$$\frac{\int_0^a x^n dx}{a^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \quad \text{.........(4.3.1.15)}$$

De hecho, este resultado no era nuevo, pero Wallis había extendido el dominio de n de la expresión (4.3.1.9), hasta incluir por lo menos todos los números racionales, excepto n=-1.

Revisemos el desarrollo lógico de lo anterior:

Consideremos primero solamente el numerador de (4.3.1.12). Véase que

$$\sum_{x=0}^{l} y = \sum_{x=0}^{l} x^n \text{ , por tanto si } x_0 = \frac{0}{l}a,\ x_1 = \frac{1}{l}a, \cdots, x_2 = \frac{2}{l}a, \text{ entonces } x_l = \frac{l}{l}a,$$

$$\sum_{x=0}^{l} y = \left(\frac{0}{l}a\right)^n + \left(\frac{1}{l}a\right)^n + \left(\frac{2}{l}a\right)^n + \cdots + \left(\frac{l}{l}a\right)^n$$

$$= \frac{a^n}{l^n}\left(0^n + 1^n + 2^n + \cdots + l^n\right) \text{......... ....(A)}$$

Ahora analicemos el denominador:

obsérvese que b siempre será el extremo de la curva, o sea que $b=x^n$; así, si $x=a$ entonces $b=a^n$

así, el número de términos para la sumatoria $\sum_{x=0}^{a} b$ será (l+1), es decir, $\sum_{x=0}^{a} b = (l+1)(a^n)$ ....(B)

Tomando la razón de (A) y (B) y realizando las simplificaciones pertinentes:

$$\frac{\sum_{x=0}^{l} y}{\sum_{x=0}^{a} b} \approx \frac{\frac{a^n}{l^n}\left(0^n + 1^n + 2^n + \cdots + l^n\right)}{(l+1)a^n}$$

$$\approx \frac{\sum_{i=0}^{l} i}{(l+1)l^n}$$

tomando el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{x=0}^{l} y}{\sum_{x=0}^{a} b}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=0}^{l} i}{(l+1)l^n}\right) \quad \text{pero de (4.3.1.4)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{x=0}^{l} y}{\sum_{x=0}^{a} b}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{a_1}{l} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{l^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

que es lo que se quería mostrar.

Esto desde luego es el resultado de interpretar $\frac{a_k}{l^k}$ como $\frac{a_k}{\infty}$=0, para obtener (4.3.1.9).

4.3.2. DESARROLLOS EN SERIES DE POTENCIAS. BINOMIO DE NEWTON. 1664-1666

Newton concedió una gran importancia a los *desarrollos en series de potencias*[i] debido a que suministraban un método para reducir las fórmulas analíticas de expresar las curvas, en la que todos los términos se expresaban como el producto de un coeficiente constante por una potencia de la variable. Así, las curvas trascendentes como también las algebraicas con una expresión "complicada" podían ser representadas por expresiones mucho más sencillas, aunque con un número infinito de términos.

Newton vio que el uso de las series de potencias presentaban dos grandes ventajas:
i) Aplicar a un dominio más amplio de curvas, reglas y algoritmos que sólo estaban definidas para ecuaciones sencillas, por ejemplo,

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \qquad (4.3.2.1)$$

que era una relación ampliamente conocida en los años 1660s y que podía ser usada para calcular las cuadraturas de casi todas las curvas, toda vez que éstas se hubiesen expresado como series infinitas de potencias.
ii) Suministraban un método fácil y uniforme para aproximar o simplificar fórmulas, despreciando los términos de orden superior.

El más famoso desarrollo en serie de Newton es sin duda el *teorema de binomio*, que descubrió durante el invierno de 1664-1665 cuya expresión matemática es

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2 + \cdots + x^n \qquad (4.3.2.2)$$

que corresponde a una serie finita y que es válido para potencias de exponente natural n, pero que se podía generalizar a exponentes fraccionarios de la forma $k=p/q$, en cuyo caso la serie resultante será *infinita*

$$(a+x)^k = a^k + \frac{k}{1}a^{k-1}x + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}a^{k-2}x^2 + \cdots \qquad (4.3.2.3)$$

Newton, al estar trabajando sobre la cuadratura del círculo $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ descubrió la relación anterior, al analizar lo que sucedía con las cuadraturas de las siguientes expresiones

$y=(1-x^2)^0$; su cuadratura es x,

$$y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.3.2.4)$$

$$y=(1-x^2)^{\frac{2}{2}}\text{; su cuadratura es } x-\tfrac{1}{3}x^3 \qquad (4.3.2.5)$$

$$y=(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \qquad (4.3.2.6)$$

$$y=(1-x^2)^{\frac{4}{2}}\text{; su cuadratura es } x-\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5 \qquad (4.3.2.7)$$

$$y=(1-x^2)^{\frac{5}{2}} \qquad (4.3.2.8)$$

$$y=(1-x^2)^{\frac{6}{2}}\text{, su cuadratura es } x-\frac{3x^3}{3}+\frac{3x^5}{5}-\frac{x^7}{7} \qquad (4.3.2.9)$$

observó que para las expresiones que no contienen raíz alguna, las cuadraturas correspondientes a esas curvas eran fáciles de calcular. Adicionalmente, pudo darse cuenta de que los denominadores corresponden a la sucesión de números impares 1, 3, 5, 7, . . . y que los numeradores son sucesivamente

---

[i] Una serie de potencias se define como $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

$$\begin{aligned} &\{1\},\\ &\{1,1\},\\ &\{1,2,1\},\\ &\{1,3,3,1\},\\ &\vdots \end{aligned}$$

es decir, los números que forman el triángulo de Pascal[55], que, cómo ya se sabía, se podían expresar para valores sucesivos de n en la forma

$$\left\{1, n, \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},,,\right\} \quad\text{.......................................(4.3.2.10)}$$

Newton entonces propuso aplicar para valores *fraccionarios de* n, las expresiones anteriores considerando un comportamiento análogo. Así, para n=1/2 y n=1/3, se tendría:

curva	desarrollo en serie	Cuadratura
$y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$	$1-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}-\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3}+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{2\cdot 3\cdot 4}-\cdots$ $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{5}{128}-\cdots$	$x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-\frac{\frac{5}{128}x^9}{9}-\cdots$
$y=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$	$1-\frac{3}{2}+\frac{\frac{3}{2}(\frac{1}{2})}{2}-\frac{\frac{3}{2}(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2\cdot 3}+\frac{\frac{3}{2}(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3\cdot 4}-\cdots$ $1-\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{16}+\frac{3}{128}+\cdots$	$x-\frac{\frac{3}{2}x^3}{3}+\frac{\frac{3}{8}x^5}{5}+\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}+\frac{\frac{3}{128}x^9}{9}+\cdots$

Newton decidió comprobar sus resultados, aplicando un método usual de extracción de raíces, conocido como *método de galera* a (1-x^2), obteniendo la misma serie.[56]

$$\sqrt{\begin{array}{c} 1-x^2+(0)+(0)+\cdots \\ -1+(0)+(0)+(0)+\cdots \\ \hline (0)-x^2+(0)+(0)+\cdots \\ (0)+x^2-\frac{1}{4}x^4+(0)+\cdots \\ \hline (0)+(0)-\frac{1}{4}x^4+(0)+\cdots \\ (0)+(0)-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^6+\cdots \end{array}}\;\left|\;\begin{array}{c} 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8} \\ \hline (2\cdot 1-\frac{x^2}{2})(-\frac{x^2}{2}) \\ \hline 2(1-\frac{x^2}{2})(-\frac{x^4}{8}) \end{array}\right.$$

La cuestión de convergencia no preocupaba esencialmente y en general ni se planteaba. Se extrapolaba a las series infinitas el comportamiento y las propiedades familiares de las cantidades algebraicas finitas frente a las operaciones de suma, diferencia, producto, etcétera. De hecho parece ser que hasta 1667 es cuando aparece el concepto de convergencia que es introducido por James Gregory en su obra *Vera circuli et hiperbolae quadratura*[57].

Comentarios adicionales:

La idea de Newton con relación a despreciar en las series alternantes que utilizó, los términos de orden superior, actualmente se puede justificar a través del teorema que establece:

"*Si* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *es una serie alternante tal que* $a_k > a_{k+1} > 0$ *para todo entero positivo k y si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *entonces el error E que se comete al estimar la suma S mediante la n-ésima suma parcial de* S_n *es menor que* a_{n+1}."

Puede observarse la potencia del teorema con relación a las series del estilo de (4.3.2.4), en donde para el quinto término, el valor de la variable debe multiplicarse por; $\frac{5}{1152}$si además se toma en cuenta que el intervalo de convergencia de las series mencionadas sólo acepta valores tales que $|x|<1$, entonces, para uno de los valores más o menos grandes del intervalo, digamos 0.9, el valor de x^9 sería alrededor de 0.387420, por lo que el término quinto de la serie valdría alrededor de 0.0016815, lo que implica que si sólo se tomaran para calcular la suma los primeros cuatro términos, entonces el error que se cometería sería menor a 0.0016815. Así, Newton realmente no se equivocaba al despreciar los términos de orden superior. Tómese en cuenta que aquí no interviene el concepto ni de infinitesimal ni del límite, aunque sí los conceptos relativos a convergencia, serie alternante y función monótona.

Puede apreciarse también la facilidad del manejo numérico de las series, cuyo tratamiento es similar al que se le da a un polinomio, en comparación al mismo manejo numérico que podría darse a las funciones originales. Adicionalmente, si aceptamos que en análisis "intuición" quiere decir fe irrazonable en la validez universal de lo que los sentidos transmiten al cerebro respecto al movimiento y a los diagramas geométricos, entonces en este sentido Newton y en menor medida Leibniz fueron dos grandes exponentes del intuicionismo.

4.3.3. CÁLCULOS LOGARÍTMICOS DE NEWTON, 1667.

Las tablas de Napier y Briggs y sus seguidores, revolucionaron el arte de los cálculos numéricos. Sin embargo, la importancia de los logaritmos en el desarrollo histórico fue consecuencia de un descubrimiento publicado en 1647 por Gregory St. Vincent, que proporcionó una sorprendente conexión entre los logaritmos naturales y la hipérbola rectangular $xy=1$.

Lo que Gregory descubrió puede ser expuesto como sigue:
Si $[a,b]$ es un intervalo cerrado sobre el semieje positivo, denotando por $A_{a,b}$ el área de la región que cae sobre el intervalo y bajo la hipérbola $xy=1$, y si $t>0$, entonces

$$A_{ta,tb}=A_{a,b}\text{...}(4.3.3.1)$$

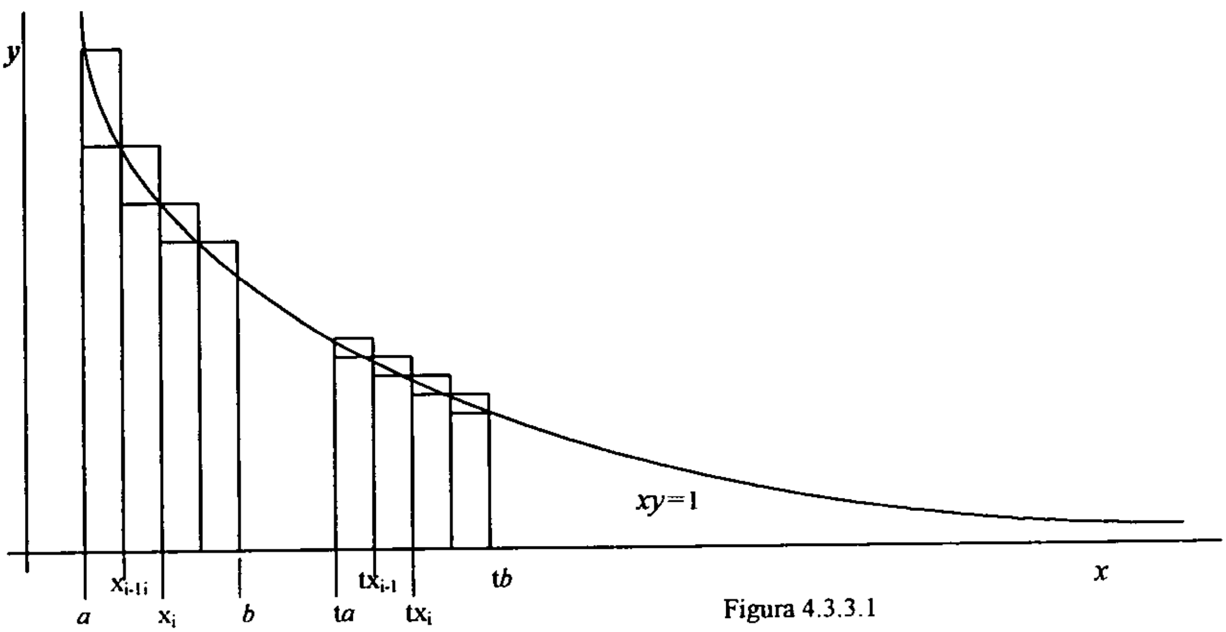


Figura 4.3.3.1

Veamos como se da la explicación del por qué esto es verdadero. Sean:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

puntos igualmente espaciados, dividiendo el intervalo $[a,b]$ en un número grande de n subintervalos y sobre estos subintervalos se inscriben y circunscriben rectángulos como se indica en la figura 4.3.3.1. De tal forma que los rectángulos inscrito y circunscrito sobre el *i-ésimo* subintervalo de $[a,b]$,tienen base $(b-a)/n$ y alturas $1/x_i$ y $1/x_{i-1}$, respectivamente.

Por lo tanto, el área de un rectángulo cualquiera es:

$$A_i = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{1}{x_i}\right) \qquad (4.3.3.2)$$

y el área total será:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{nx_1} < A_{a,b} < \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{nx_{i-1}} \qquad (4.3.3.3)$$

ahora, si consideramos los puntos

$$ta = tx_0 < tx_1 < \cdots < tx_{i-1} < tx_i < \cdots < tx_n = tb$$

y subdividiendo similarmente el intervalo $[ta,tb]$ en n subintervalos iguales, los rectángulos sobre el *i-ésimo* subintervalo $[tx_i, tx_{i-1}]$ de $[ta,tb]$ tienen base $(tb-ta)/n$ y alturas $1/tx_i$ y $1/tx_{i-1}$, respectivamente.

Por lo tanto, el área de un rectángulo cualquiera es.

$$A_i = \left(\frac{tb-ta}{n}\right)\left(\frac{1}{tx_i}\right) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{1}{x_i}\right) \qquad (4.3.3.4)$$

y en consecuencia, sus áreas son iguales a aquellas de los rectángulos inscrito y circunscrito sobre $[x_{i-1},x_1]$. Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{nx_1} < A_{ta,tb} < \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{nx_{i-1}} \qquad (4.3.3.5)$$

La comparación de las expresiones (4.3.3.2) y (4.3.3.4) hace evidente la expresión (4.3.3.1). A. A. de Sarasa, observó que la expresión (4.3.3.1) implicaba que el área asociada a la hipérbola $xy=1$ tiene la propiedad aditiva que es característica de los logaritmos. Esto es, cumple con la ley que establece que

$$L(xy)=L(x)+L(y) \qquad (4.3.3.6)$$

así, por ejemplo, para $x>1$ y $y>1$, se tiene:

$$\begin{aligned} L(xy) &= A_{1,xy} \\ &= A_{1,x}+A_{x,xy} \quad \text{... (ver figura 4.3.3.2)} \\ &= A_{1,x}+A_{1,y} \quad \text{por la ecuación(4.3.3.1)} \\ L(xy) &= L(x)+L(y) \end{aligned}$$

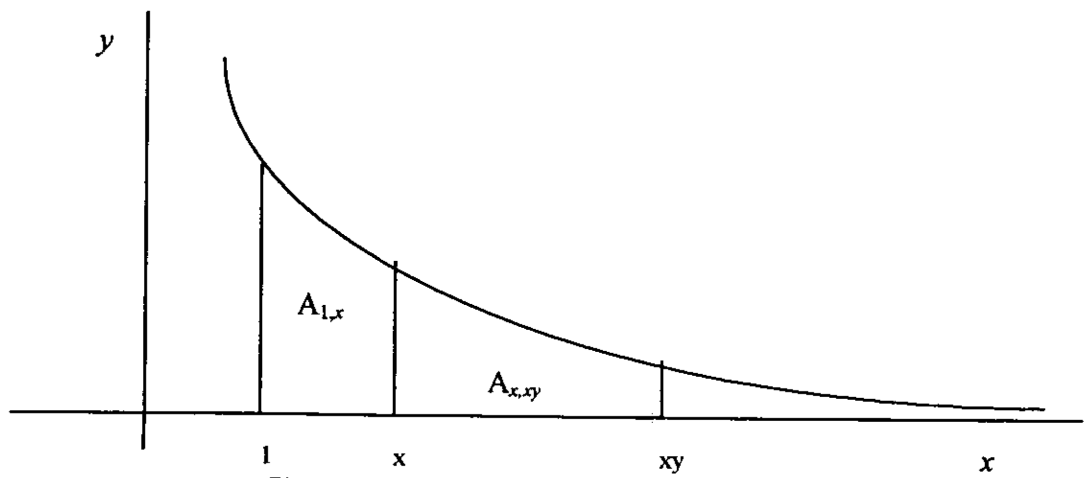


Figura 4.3.3.2. Gráfica de xy=1

No obstante la relación exacta entre logaritmos y áreas hiperbólicas, no fue totalmente comprendida sino hasta inicios del siglo XVII, así como tampoco los logaritmos naturales fueron reconocidos como logaritmos en base e. El carácter logarítmico del área hiperbólica estimuló su estudio, y esas investigaciones desempeñaron un papel importante en la introducción de series infinitas y técnicas algorítmicas del cálculo, a principios de 1650s y 1660s. Aparentemente, los primeros cálculos sistemáticos de logaritmos como áreas hiperbólicas fueron realizados por Newton a mediados de 1660s.

Comentarios adicionales:

Nótese que en términos modernos se tendría:

$$\int_a^b \tfrac{1}{u}du = \ln u\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \tfrac{b}{a} \quad\text{..........(4.3.3.7)}$$

$$\int_{ta}^{tb} \tfrac{1}{u}du = \ln u\Big|_{ta}^{tb} = \ln tb - t\ln a = \ln \tfrac{tb}{ta} = \ln \tfrac{b}{a} \quad\text{..........(4.3.3.8)}$$

de donde se tiene que las expresiones (4.3.3.7) y (4.3.3.8) son iguales.

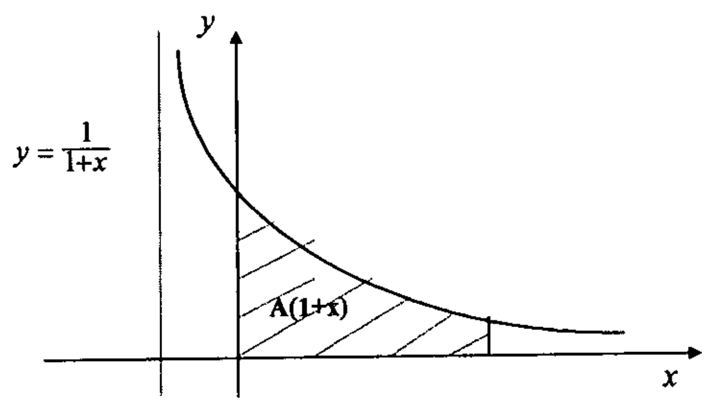
Así también, obsérvese que aplicando las propiedades de la integral se comprueba la expresión . (4.3.3.4):

$$\int_1^{xy} \frac{1}{u}du = \int_1^{x} \frac{1}{u}du + \int_x^{xy} \frac{1}{u}du$$

En un manuscrito escrito probablemente en 1667[58], Newton comenzó con la hipérbola

$$y = \frac{1}{1+x}, \qquad (x>-1)$$

y calculó el área $A(1+x)$ bajo la hipérbola y sobre el intervalo [0,x]



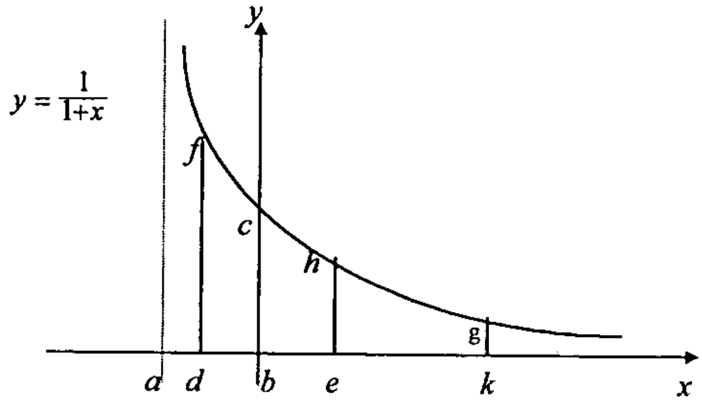
Escribiendo:

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad\text{..........(4.3.3.9)}$$

que es la serie infinita[59] resultante de la simple división de 1 entre 1+x, de donde Newton integra término a término para obtener

$$A(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad\text{..........(4.3.3.10)}$$

Aquí, toma A(x)=log$\frac{1}{1+x}$ y considera a log$\frac{1}{1+x}$ como el logaritmo natural de $1+x$. A pesar de que Newton no hace una referencia explícita de A(x)=log$\frac{1}{1+x}$ como un logaritmo; él reconoce el carácter logarítmico, quizá del conocimiento directo o indirecto del resultado de Gregory St. Vincent. Así, dice en referencia a la figura, siguiente:



"Ya que las líneas *ad, ae,* etc. conducen respecto a y' [áreas] *bcfd, bche,* etc. como los números a sus logaritmos, a saber, las líneas *ad, ae,* etc. se incrementan en progresión geométrica y las superficies *bcfd, bche,* etc. se incrementan en progresión aritmética, entonces, si dos o más de esas líneas se multiplican o dividen, una a otra, con su respectiva pareja, producen alguna otra línea *ak* y su correspondiente área, que adicionada o sustraída una de la otra producirá la respectiva área *bcgh* correspondiente a la línea *ak* de y'."

Así, Newton pensó el área de la hipérbola sobre [0,x] como la correspondiente a la línea de longitud 1+x, (de aquí la notación actual de A(1+x)) y la afirmación de que

$$A((1+x)(1+y))=A(1+x)+A(1+y) \qquad (4.3.3.11)$$

$$A\left(\frac{1+x}{1+y}\right)=A(1+x)-A(1+y) \qquad (4.3.3.12)$$

donde las expresiones (4.3.3.11) y (4.3.3.12), corresponden a las leyes de los logaritmos.

Sobre esta base, él procedió a calcular una pequeña tabla de logaritmos de números enteros: primero, tomó $x=\pm 0.1, x=\pm 0.2$ en (4.3.3.10) y calculó $A(0.8)$, $A(0.9)$, $A(1.1)$ y $A(1.2)$ (con ¡57 cifras decimales!) y observó que

$$2=\frac{1.2\times 1.2}{0.8\times 0.9}$$

$$3=\frac{1.2\times 2}{0.8}$$

$$5=\frac{2\times 2}{0.8}$$

$$11=10\times 1.1$$

$$10=2\times 5$$

$$100=10\times 10$$

así, Newton pudo obtener A(2), A(3), A(5), A(10), A(100) con sólo sumas o restas, por ejemplo:

$$A(2)=2A(1.2)-A(0.8)-A(0.9)$$

después él sustituye $x=\pm 0.02, x=\pm 0.001$ en (4.3..3.10) para calcular $A(0.98)$, $A(1.02)$, $A(0.999)$ y $A(1.001)$. Esto a su vez le permite calcular los logaritmos de 7, 13, 17, debido a que

$$7=\sqrt{\frac{100\times 0.98}{2}}$$

así $A(7)=\frac{1}{2}\left[A(100)+A(0.98)-A(2)\right]$

$$13=\frac{1000\times1.001}{7\times11}$$
$$17=\frac{100\times1.02}{6}$$

Para verificar la exactitud de sus resultados Newton calculó $A(0.9984)$ de dos maneras diferentes, siendo la primera:
sustituye x=-0.0016 en (4.3.3.10) y luego observa la factorización
$$0.9984=\frac{2^8\times3\times13}{10^5}$$
así
$$A(0.9984)=8A(2)+A(3)+A(13)-5A(10)$$
encontrando con agrado que los dos resultados concuerdan en más de 50 cifras decimales.

Comentarios adicionales:

Obsérvese que ya se usan series de potencias, aunque sin considerar explícitamente lo que ahora se conoce como el intervalo de convergencia. Al establecer para la serie (4.3.3.9) que $x>-1$, evita dividir por cero. Un apoyo adicional que tuvieron los matemáticos de esta época fue el de la geometría analítica que les permitió estudiar a los logaritmos por el método de las coordenadas.

Véase que en las series alternantes se pueden omitir los términos a partir de $n=k$, y en consecuencia su error máximo sería menor al valor del término con $n=k+1$

4.3.4. LA SERIE DE MERCATOR PARA LOS LOGARITMOS, 1668.

La *Logaritmotechnia* de Nicolás Mercator (quien se reconoce como pionero de las series enteras) fue publicada en 1668. El libro dividido en tres partes, contiene en la correspondiente a la tercera parte su famosa serie[60]
$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\quad\text{.....(4.3.4.1)}$$
para el área bajo la hipérbola $y=1/(1+x)$, sobre el intervalo $[0,x]$
Empieza sus cálculos, haciendo una división para obtener
$$y=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\quad\text{.....(4.3.4.2)}$$
Algunas veces se ha afirmado incorrectamente que Mercator obtuvo (4.3.4.1) de una simple integración término a término de (4.3.4.2). Él realmente calculó el área del segmento hiperbólico, basado en la técnica de los indivisibles de Cavalieri. Mercator alude sólo brevemente a los detalles, aunque Wallis presentó una más clara exposición en 1668, en su publicación *Philosophical Transactions*.

Así, con relación al trabajo de Mercator, se ha preferido introducir los cálculos de Wallis presentados a grandes rasgos, y en términos modernos serían:

Dividamos el intervalo [0,x] (figura 4.3.4.3) en n subintervalos iguales, cada uno de longitud $h=x/n$, y construyamos rectángulos circunscritos cuyas bases son precisamente estos subintervalos, y cuyas alturas son:
$$1,\frac{1}{1+h},\frac{1}{1+2h},\cdots,\frac{1}{1+(n-1)h}\quad\text{.....(4.3.4.4)}$$

expandiendo cada una de esas alturas en sus respectivas series geométricas, y multiplicando éstas por su base, hallaremos el área deseada

$$A \cong h + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h}{1+jh} \quad \text{.......(4.3.4.5)}$$

$$= h + h(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k h^k) + h(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (2h^k)) + \cdots + h(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k ((n-1)h^k))$$

agrupando los términos con igual exponente de h, se obtiene

$$A \cong nh - h[h + 2h + \cdots + (n-1)h] + h[h^2 + (2h)^2 + \cdots + (n-1)^2 h^2] \cdots + (-1)^k h[h^k + (2h)^k + \cdots + (n-1)^k h^k] + \cdots \text{s}$$

ustituyendo $h = x/n$

$$A = x - h^2[1 + 2 + \cdots + (n-1)] + h^3[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] + \cdots + (-1)^k h^{k+1}[1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k] +$$

$$A = x - \frac{x^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right) + \frac{x^3}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n-1} i^2\right) + \cdots + (-1)^k \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}}\left(\sum_{i=1}^{n-1} i^k\right) + \cdots \quad \text{.......(4.3.4.6)}$$

pero Wallis en 1656, en su *Arithmetica infinitorum*, había mostrado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}(n \text{ términos en el numerador}) \quad \text{.......(4.3.4.7)}$$

y aplicándolo a la serie (4.3.4.6) se obtiene la serie de Mercator

$$A = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \text{.......(4.3.4.8)}$$

Wallis señala que es necesario que x<1 para la convergencia.

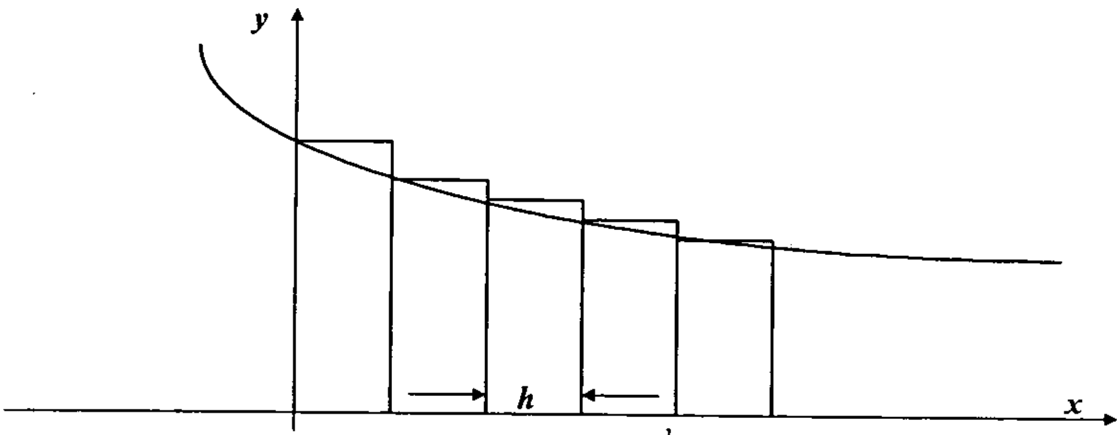


Figura (4.3.4.3) con $y = \dfrac{1}{1+x}$

Comentarios adicionales:

Ya existe una referencia a cuidar lo que en la actualidad conocemos como el intervalo de convergencia. Wallis hace de hecho uso de él, al señalar atinadamente que x debía ser menor a 1, aunque en realidad lo que debería haber establecido era $|x| < 1$. Obsérvese que los procesos de cálculo son aritméticos, aunque cabe reiterar que en esa época los conceptos de función, límite y continuidad aún no se habían definido como los conocemos en la actualidad y por lo tanto no existe una referencia explícita de ellos, aunque está implícito el paso al límite para que Wallis pueda aplicar sus resultados en la explicación que da a la serie de Mercator.

4.3.5. LOS TRABAJOS DE LEIBNIZ SOBRE SERIES, 1675.

La Historia de las Matemáticas señala que las investigaciones de Leibniz que le llevaron a sus manuscritos de 1675, estuvieron regidas por tres ideas principales fundamentales:

i) una idea filosófica relativa a la construcción de un lenguaje simbólico general[61] mediante el cual se pudieran escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de argumentación y de razonamiento, que obedeciendo ciertas reglas de combinación entre ellos garantizasen la corrección de los argumentos formulados en dicho lenguaje.

ii) otra relativa a sucesiones numéricas, tanto de diferencias como de sumas asociadas a éstas.

iii)una más, relativa al uso *del triángulo característico* en la transformación de cuadraturas que lo condujo a lo que Leibniz llamó *la transmutación*.

El desarrollo de su segunda idea fundamental, relativa al estudio sobre sucesiones numéricas

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

y las sucesiones de diferencias asociadas a las primeras

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - a_2, \\ b_2 &= a_2 - a_3, \\ b_3 &= a_3 - a_4, \\ &\vdots \\ b_n &= a_n - a_{n-1} \text{...} (4.3.5.1) \end{aligned}$$

llevaron a Leibniz a darse cuenta de la relación

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = a_n - a_1, \text{.................................} (4.3.5.2)$$

resultado que implicaba que, las sucesiones de diferencias se podían sumar fácilmente, descubrimiento que usó para resolver el problema planteado por Huygens en 1672, relativo a la suma de la serie

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots$$

en donde los denominadores son los llamados *números triangulares*[62] de la forma $\frac{r(r+1)}{2}$. Leibniz descubrió que los términos de la serie podían expresarse como diferencias de la forma

$$\frac{2}{r(r+1)}=\frac{2}{r}-\frac{2}{r+1} \text{...} (4.3.5.3)$$

de donde su suma sería

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{2}{r(r+1)}=2-\frac{2}{n+1} \text{.................................} (4.3.5.4)$$

Este resultado lo motivó a estudiar sistemas de sucesiones de diferencias y sus respectivas sumas, dando por resultado lo que él llamó el *triángulo armónico*, en donde las filas oblicuas, son las sucesivas sucesiones de las diferencias de su antecesora. Primero veamos el triángulo y posteriormente analizaremos la forma de interpretarlo.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & k=0 & & & & & & & & & \\
 & & & & k=1 & & 1 & & & & & & & \cdots & & n=0 \\
 & & & k=2 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & & \cdots & & n=1 \\
 & & k=3 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & & \cdots & & n=2 \\
 & k=4 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & & \cdots & & n=3 \\
k=5 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & & \cdots & & n=4 \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & & \cdots & & n=5 \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} & \cdots & & n=6
\end{array}
$$

Los k=0, 1, 2, 3, ... se refieren a las filas oblicuas, en tanto las n=0, 1, 2, 3, ... aluden a las filas horizontales. Así, los números que aparecen en la fila *n-ésima* se pueden calcular con la fórmula

$$\left[(n+1)\binom{n}{k}\right]^{-1} \text{.....................................}(4.3.5.5)$$

Recuérdese que

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!}=\frac{n!}{k!(n\text{-}k)!} \text{................}(4.3.5.6)$$

Notas adicionales de apoyo:

Analizando la formación del triángulo armónico a través de (4.3.5.5), se tiene:

Para n=0; k=0; $\Rightarrow\left[(0+1)\frac{0!}{0!(0-0)!}\right]^{-1}=[1]^{-1}=1$

Para n=1; k=0; $\Rightarrow\left[(1+1)\frac{1!}{0!(1-0)!}\right]^{-1}=[2]^{-1}=\frac{1}{2}$

k=1; $\Rightarrow\left[(1+1)\frac{1!}{1!(1-1)!}\right]^{-1}=[2]^{-1}=\frac{1}{2}$

Para n=2; k=0: $\Rightarrow\left[(2+1)\frac{2!}{0!(2-0)!}\right]^{-1}=[3]^{-1}=\frac{1}{3}$

k=1; $\Rightarrow\left[(2+1)\frac{2!}{1!(2-1)!}\right]^{-1}=[6]^{-1}=\frac{1}{6}$

k=2; $\Rightarrow\left[(2+1)\frac{2!}{2!(2-2)!}\right]^{-1}=[3]^{-1}=\frac{1}{3}$

y así sucesivamente.

Obsérvese ahora como se pueden obtener las sumas directamente del *triángulo armónico*, por ejemplo para la tercera fila oblicua, es decir k=3:

La serie es:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\cdots=\frac{1}{2}-\left[\frac{n!}{(n-1)!}\right]^{-1}$$

donde la n del miembro de la derecha de la igualdad es muy grande, tan grande que el último término se puede despreciar y por tanto, se tiene:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\cdots=\frac{1}{2}$$

Si bien las ideas no eran del todo nuevas, la reciprocidad de las operaciones al tomar sumas y diferencias, le permitió a Leibniz obtener la conclusión de que al ser éstas, aplicadas a la geometría, las determinaciones de las cuadraturas y las tangentes eran también operaciones inversas una de la otra.

4.4. SIGLO XVIII

4.4.1. GENERALIDADES DEL PERÍODO Y PRECURSORES DE LAS SERIES DE TAYLOR

Grattan-Guinness señala que el pensamiento del siglo XVIII sobre convergencia fue el de creer ciegamente que todas las series eran convergentes. Si bien los matemáticos del siglo XVIII interpretaban una serie infinita como un proceso de adición de término en término de sus elementos, sólo limitado por sus propios sucesores; fueron generalmente cuidadosos de los riesgos de usar series divergentes en el análisis. Sin embargo se encontraron por casualidad con dificultades no vistas sobre cuestiones del método de suma; sumar término a término una serie infinita podría ser un camino difícil para hallar el resultado, así que fueron buscados los más sofisticados métodos para hacerlo más fácil.

Por ejemplo, para la serie geométrica siguiente, se plantea un proceso que facilita el hallar su suma:

Sea la progresión geométrica

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n$$

ahora, multiplicando por x la progresión:

$$xS_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots + x^{n+1}$$

haciendo la diferencia entre las dos progresiones, se obtiene

$$(1-x)S_n = 1$$

de donde si $|x| < 1$, al aplicar el límite cuando $n\to\infty$ se halla que

$$S = \frac{1}{(1-x)}$$

La expansión en series infinitas de algunas funciones particulares, jugó un papel central en el análisis, primero de Newton y sus contemporáneos y posteriormente con Euler. Al inicio del siglo XVIII fueron descubiertas las expansiones en serie de varias funciones trascendentes sencillas, siendo todas ellas casos especiales de la expansión general que actualmente es llamada *Serie de Taylor. El descubrimiento de estas series infinitas está íntimamente ligado con el desarrollo de los métodos de interpolación.*

La construcción de tablas matemáticas, para funciones logarítmicas y trigonométricas, durante el siglo XVII dirigieron la atención hacia el problema de la exactitud de la interpolación entre valores tabulados. La meta era limitarse sólo a un número restringido de cálculos directos para disminuir el enorme esfuerzo de construir una tabla, y posteriormente, completar el resto de valores por interpolación entre aquellos calculados directamente.

Sin embargo, el proceso de interpolación lineal no era lo suficientemente exacto para el propósito en cuestión; por ejemplo,

$$\log 40 = 3.69876 \text{ y } \log 41 = 3.71357,$$

entonces, por interpolación lineal

$\log 40.4 = 3.68888+ (0.4)(3.71357-3.68888) = 3.69876$ vs $3.69883\ldots$; que es el valor real; de donde se puede apreciar sólo una exactitud de tres decimales.

Para reconocer el porqué los procesos de interpolación están ligados al tema que nos ocupa se presentará la generalización del caso particular que se ha dado:

- Sean dos valores $y_0 = f(x_0)$ y $y_1 = f(x_1)$
- de donde, $\Delta x = x_1 - x_0$
- ahora, considérese como *la primera diferencia* $\Delta y = y_1 - y_0$
- entonces la interpolación lineal se define por:
  $f(x_0 + s\Delta x) \cong y_0 + s\Delta y$ ....(4.4.1.1)

Para obtener una mayor exactitud[63], se procede de la siguiente forma:

- Dados los valores $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$
- con $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$
- ahora, considérese como *las primeras diferencias*
  $\Delta y_0 = y_1 - y_0$; $\Delta y_1 = y_2 - y_1$
- y *las segundas diferencias* $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$
- entonces su interpolación para $f(x_0 + s\Delta x)$ sería dada por
- $f(x_0 + s\Delta x) \cong y_0 + s\Delta y_0 + \frac{1}{2}s(s-1)\Delta^2 y_0$ ....(4.4.1.2)

Así, para el ejemplo dado, el valor del logaritmo es

$$\log 40.4 = 3.69883\ldots \text{ vs } 3.69883\ldots$$

que representa una exactitud de hasta cienmilésimos.

Haciendo una revisión sobre la generalización de las expresiones (4.4.1.1) y (4.4.1.2), se tiene:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)\\ &= y_3 - 2y_2 + y_1\end{aligned}$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0)$$
$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

de donde para diferencias de orden superior se tiene la fórmula recurrente:

$$\Delta^{k+1} y_j = \Delta(\Delta^k y_j) = \Delta^k y_{j+1} - \Delta^k y_j$$

aunque existe el señalamiento por C. H. Edwards Jr[64]. De que ni Briggs ni Newton los usaron.

La tabla siguiente es una muestra de lo expresado.

$$\begin{array}{cccccc}
y_0 & & & & & \\
 & \Delta y_0 & & & & \\
y_1 & & \Delta^2 y_0 & & & \\
 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & & \\
y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 & \\
 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & & \Delta^5 y_0 \\
y_3 & & \Delta^2 y_2 & & \Delta^4 y_1 & \\
 & \Delta y_3 & & \Delta^3 y_2 & & \\
y_4 & & \Delta^2 y_3 & & & \\
 & \Delta y_4 & & & & \\
y_5 & & & & &
\end{array}$$

La fórmula de *diferencias sucesivas* dada por Newton sin su prueba, para la interpolación de valores está expresada por:

$$f(x_0 + s\Delta x) \cong \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{i} \Delta^i y_0 \quad \text{.......................(4.4.1.3)}$$
$$\cong y_0 + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots + \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

La misma fórmula, pero con diferente notación fue dada a conocer por James Gregory en 1670, a través de una carta dirigida a John Collins.

$$(1+a)^s \cong 1 + sa + \frac{s(s-1)}{2!}a^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}a^3 + \cdots + \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!}a^n \text{......(4.4.1.4)}$$

Aparentemente esta expresión que corresponde a una expansión binomial, la obtuvo de su fórmula de interpolación. Para ello, considérese lo siguiente:

$$f(x) = (1+a)^s$$
$$x_j = j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \mathrm{n}$$
$$\Delta x = 1$$
$$\Delta^k y_j = a^k y_j$$

Así, la idea básica de la interpolación de Gregory-Newton es determinar un polinomio de grado n el cual coincida con f(x) en los n+1 puntos igualmente espaciados, de donde, para i=0, 1, ... , n.

$$p(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \text{......................(4.4.1.5)}$$

Por lo tanto, para cualquier punto intermedio de x, el valor de $p(x)$ puede ser usado como una interpolación aproximada del valor de $f(x)$.

Ahora, para obtener la expresión de la cual partió Taylor para obtener su fórmula, presentemos la expresión (4.4.1.5) de la manera siguiente:

$$p(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+A_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \text{ ....(4.4.1.6)}$$

Si $x - x_0 = s\Delta x$, entonces $x - x_1 = (s-1)\Delta x$, $x - x_2 = (s-2)\Delta x$, y sustituyendo en (4.4.1.6), se obtiene:

$$p(x_0 + s\Delta x) = B_0 + B_1 s + B_2 s(s-1) + B_3 s(s-1)(s-2) + \cdots + B_n s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)$$

donde $B_k = A_k(\Delta x)^k$.

Para poder llegar a la fórmula de interpolación correspondiente a la expresión (4.4.1.3), es necesario mostrar que

$$B_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!}, \qquad \text{para } k = 0,\ 1,\ \ldots,\ \text{n} \text{ ....(4.4.1.7)}$$

La imposición de que $p(x_0 + k\Delta x) = y_k$, para cada k= 0, 1, ... ,n da las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
y_0 &= B_0 \\
y_1 &= B_0 + B_1 \\
y_2 &= B_0 + 2B_1 + (2)(1)B_2 \\
y_3 &= B_0 + 3B_1 + (3)(2)B_2 + (3)(2)(1)B_3 \\
&\ \vdots \qquad \vdots \\
y_n &= B_0 + nB_1 + n(n-1)B_2 + n(n-1)B_3 + \cdots + n!\,B_n
\end{aligned} \qquad \text{........................(4.4.1.8)}$$

Retomando que $B_k = \dfrac{\Delta^k y_0}{k!}$, para $k < n$, entonces

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+2)}{n-1!}\Delta^{n-1} y_0 + n!\,B_n$$

y dado que

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \Delta y_0 = (1+\Delta)y_0 \\
&\ \vdots \\
y_k &= y_{k-1} + \Delta y_{k-1} = (1+\Delta)y_{k-1} \\
y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k = (1+\Delta)y_k = (1+\Delta)(1+\Delta)y_{k-1} = (1+\Delta)(1+\Delta)(1+\Delta)y_{k-2} = \cdots
\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
y_n &= y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+2)}{n-1!}\Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0 \\
&= (1+\Delta)^n y_0
\end{aligned}$$

....(4.4.1.9)

De este modo se completa la obtención de la *fórmula de interpolación de Gregory-Newton.*

Observaciones adicionales:

Puede señalarse que la fórmula de interpolación de Gregory-Newton tiene semejanzas significativas con la fórmula que posteriormente se reconocería como de Taylor. Véase la secuencia de las $\Delta^k y_0$ para k= 0, 1, 2, ... y los factoriales en los denominadores.

4.4.2. LA SERIE DE TAYLOR, 1717.

Es indudable que todo estudiante de cálculo está familiarizado con los nombres de Taylor y Maclaurin mediante las tan usuales expansiones, de Taylor o Maclaurin para una función. Fue en 1715 que Taylor, discípulo de Newton, publicó su *Methodus incrementorum Directa & Inversa*. Su tratado consta de dos partes, la primera dedicada al teorema que lleva su nombre y al método de Newton de integración por series y fórmulas de sumatoria; la segunda sobre interpolación y solución a problemas mecánicos, tales como hallar el centro de oscilación y percusión, el problema de la cuerda vibrante y el cálculo de la densidad de la atmósfera.

Taylor usó

$\underset{\cdot}{x},\ \underset{\cdot\cdot}{x},\ \underset{\therefore}{x},$ ... para designar las diferencias finitas $\Delta x, \Delta^2 x, \Delta^3 x,$

y

$\dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x},$ para designar las fluxiones de x.

Es interesante el que haya aplicado los enteros positivos y negativos como superíndices y subíndices para diferenciales y fluxiones de orden superior

La notación actual de la serie, permite escribirla como:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots \quad \text{....................(4.4.2.1)}$$

Taylor obtuvo su serie con base a la fórmula de interpolación de Gregory-Newton, (4.4.1.9), cuyo proceso puede describirse de la manera siguiente:

Si $x = x_0 + n\Delta x$ en la fórmula de interpolación dada por $y = f(x) = f(x_0 + n\Delta x)$ como

$$y = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+2)}{n-1!}\Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0$$

ahora, si en la ecuación anterior sustituimos las expresiones siguientes

$$n = \frac{x - x_0}{\Delta x},\quad n - 1 = \frac{x - x_1}{\Delta x},\quad n - 2 = \frac{x - x_2}{\Delta x},\quad \text{etc. ,}$$

se tendrá

$$y = y_0 + (x - x_0)\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!}\frac{\Delta^3 y_0}{(\Delta x)^3} + \cdots \text{........(4.4.2.2)}$$

Aquí Taylor propone sustituir *por incrementos evanescentes* las fluxiones proporcionales a ellos. Taylor considera a x y y como funciones de t, con x incrementándose uniformemente en progresión lineal con

$$x(0) = x_0,\ x(h) = x_1,\ x(2h) = x_2,\ \text{etc.}$$

Sin embargo, si h es muy pequeña, entonces

$$\Delta x = x_1 - x_0 = x(h) - x(0) \cong \dot{x}_0 h \quad \text{...(4.4.2.3)}$$

donde $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$ es la fluxión de x cuando t es cero. Similarmente

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = y(ih + h) - y(ih) \cong \dot{y}_i h$$

así $\Delta y_0 = \dot{y}_0 h$ donde $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$ es la fluxión de y cuando t es cero. Por lo tanto

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \cong \dot{y}(h)h - \dot{y}(0)h \cong \ddot{y}_0 h^2$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 \cong \ddot{y}(h)h^2 - \ddot{y}(0)h^2 \cong \dddot{y}_0 h^3$$

y así sucesivamente. Se sigue entonces que

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} \cong \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}, \quad \frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2} \cong \frac{\ddot{y}_0}{(\dot{x}_0)^2}, \quad \frac{\Delta^3 y_0}{(\Delta x)^3} \cong \frac{\dddot{y}_0}{(\dot{x}_0)^3}, \quad \text{etc.}$$

pero, por la condición dada para (4.4.2.3), todos los x_i se aproximan a x_0 cuando Δx se acerca a cero, entonces la expresión (4.4.2.2) se puede reescribir como

$$y = y_0 + (x - x_0)\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{\ddot{y}_0}{(\ddot{x}_0)^2} + \frac{(x-x_0)^3}{3!}\frac{\dddot{y}_0}{(\dot{x}_0)^3} + \cdots \quad ....(4.4.2.4)$$

La fórmula anterior (4.4.2.4) corresponde a la serie original de Taylor. Interpretándose la razón de fluxiones, $\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}, \frac{\ddot{y}_0}{(\dot{x}_0)^2}, \frac{\dddot{y}_0}{(\dot{x}_0)^3}, \ldots$, como derivadas, se obtiene la notación actual de la serie (4.4.2.1):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

Si bien el reconocimiento de la total importancia de la serie de Taylor tuvo que esperar hasta 1755, cuando Euler la aplica a su cálculo diferencial y todavía más tarde, cuando Lagrange usa la serie con residuo como el fundamento de su teoría de funciones, Taylor para 1717, aplicó su serie a la solución de ecuaciones numéricas, bajo el esquema que sigue:

- Sea una aproximación a la raíz de *f(x)*=0; fijemos *f(a)=k*, *f '(a)=k '*, *f '' (a)=k ''*, y *x=a+h*.
- expandamos con la serie 0=*f(a+h)*
- descartemos todas las potencias de *h* superiores a la segunda
- sustituyamos los valores de *k*, *k '*, *k ''*, y
- resolvamos para *h*.

finalmente. culmina diciendo: por aplicaciones sucesivas de este proceso, se podrán obtener aproximaciones cada vez más cercanas

Comentarios adicionales:

Gregory, alrededor de 50 años antes de la publicación de la serie de Taylor, había obtenido los primeros cinco o seis términos de algunas de las funciones trascendentes, como por ejemplo: $tan\, x$, $tan^{-1}x$, $\log\ \sec x$, $\sec^{-1}(\sqrt{2}e^x)$.

La influencia de Newton en el trabajo de Taylor, es obvia en la notación, pero además utiliza las *cantidades evanescentes* en sustitución de lo que actualmente se trataría de procesos al límite. Obsérvese además que en ningún momento Taylor hace referencia a concepto alguno de convergencia.

4.4.3. La serie de Maclaurin, 1742

Maclaurin fue uno de los matemáticos más capaces del siglo XVIII. La tan llamada expansión de Maclaurin sólo es el caso cuando x_0=0 en la expansión de Taylor, la cual fue dada explícitamente por el propio Taylor y también por James Stirling, un cuarto de siglo antes de que Maclaurin la usara en su *Tratado de Fluxiones* en 1742.

Escribiendo la serie de Taylor

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots$$

y haciendo x_0=0, entonces se obtiene

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x)^3+\cdots\text{.....}(4.4.2.5)$$

que a menudo es llamada *serie de Maclaurin*. Él

escribió (4.4.2.5) con notación de fluxiones en lugar de derivadas. Maclaurin utilizó la serie para obtener las condiciones suficientes para la existencia de máximos y mínimos locales. Asumía que los términos de grado mayores a dos, eran insignificantes cuando x era los suficientemente pequeña, por lo que podía concluir que

- si $f''(0)>0$, entonces $f(x)>f(0)$ a ambos lados de $x=0$
- si $f''(0)<0$, entonces $f(x)<f(0)$ a ambos lados de $x=0$.

Así,

- las condiciones $f'(0)=0$ y $f''(0)>0$ implican un mínimo local,
- mientras las condiciones $f'(0)=0$ y $f''(0)<0$ implican un máximo local.
- sin embargo, si $f'(0)=f''(0)=0$ y $f'''(0)\neq 0$ entonces no existirá ni máximo ni mínimo.

La última expresión la justifica señalando que si x es suficientemente pequeña, entonces $f(x)>f(0)$ en uno de los lados de x = 0, pero $f(x)<f(0)$ en el otro lado. De aquí que si en

$$f(x)=f(0)+\frac{f'''(0)}{3!}(x)^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x)^4+\cdots$$

la tercera derivada es la primera en no desvanecerse, entonces no ocurre ni un máximo ni un mínimo.

Pero, si en general las primeras n derivadas desaparecen cuando x = 0, entonces

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+\cdots$$

por lo que Maclaurin concluye

"La *ordenada* es un mínimo o un máximo, si la primera fluxión de la *ordenada*, con sus fluxiones de varios órdenes subsecuentes se anulan, siempre que, el número de todas aquellas fluxiones que desaparecen sea 1, 3, 5, o cualquier número impar. La *ordenada* es un *mínimo*, cuando la fluxión siguiente a aquellas que se anulan es positiva; pero corresponde a un *máximo* cuando esta fluxión es negativa. ...Pero si el número de todas las fluxiones del primero y sucesivos órdenes que desaparecen son números pares, la *ordenada* no es ni *máximo* ni *mínimo*."

Comentarios adicionales:

En el trabajo de Maclaurin también se puede apreciar la influencia de Newton, primero por su notación y segundo por la idea de manejar los infinitesimales con una doble significación. Si bien, como ya se mencionó, la expresión que hoy se conoce como serie de Maclaurin fue utilizada por Stirling 25 años antes, la aportación importante de aquél se puede considerar la determinación de los criterios que permiten identificar los extremos relativos.

4.4.4. EULER, 1750S.

Euler, en una parte de su reporte del año de 1754, critica con razón, el uso de la progresión geométrica

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

cuya suma se encuentra con la fórmula

$$S = \frac{1}{(1-x)}$$

Procede a considerar $x = 2$, lo cual daría

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} + \cdots = \frac{1}{1-2} = -1$$

resultado que implica la divergencia de la serie. Por lo tanto la suma no es válida para ese valor de x.

Euler señala lo que en terminología moderna sería:

El método de suma de una serie infinita, que es convergente de acuerdo al método ortodoxo de sumar con las reglas término a término, se dice que es *regular* si da la misma suma que el método ortodoxo. En cualquier otro caso se dice que el método es *irregular*.

Así, con base a lo expresado, entonces el método

$$S = \frac{1}{(1-x)}$$

para la suma de la serie geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

debe ser considerado irregular.

La dificultad de Euler con las series fue el asumir *que todos los métodos de suma eran regulares* y en consecuencia dan la suma de la serie; el hecho de que no sólo la suma de las series, sino también la distinción entre *convergencia* y *no-convergencia*, debían ser formulados con relación al método involucrado, escapó a la atención de él y sus contemporáneos.

Se ha escrito que la situación resultante se puede interpretar como un "culto a la suma"; así el problema con las series infinitas fue percibirlo como el de hallar simplemente la suma. Si la suma era finita entonces la serie era convergente, pero si la suma era infinita entonces era divergente.

Euler fue un gran representante del "culto a la suma" y en razón de su superior inteligencia inventó métodos no-ortodoxos de suma, y en consecuencia él padeció más que cualquier otro, de la displicente suposición que eran equivalentes a las sumas término a término. La situación fue empeorada por el hecho de que algunas a veces obtenían resultados correctos y en otras ocasiones erróneos.

Se señala que Euler tenía una gran habilidad para efectuar sumas de series y que en su obra dejó una masa de resultados sobre sumabilidad y sobre series *divergentes*, que si bien fueron estudiados durante el siglo XIX, la teoría dentro de la cual tenían que integrarse todos estos resultados sólo comenzó a surgir hasta finales del mismo XIX.

Euler al igual que Newton seguramente se dio cuenta de que en general las series, para que fuesen útiles en la práctica debían ser convergentes, pero al contrario de Newton, no pudo contenerse ante este aspecto. Al parecer Euler creía que las fórmulas no pueden hacer ningún mal, y que mientras continuasen proporcionándole a su creador variaciones nuevas y más prolíferas de sí mismas, merecían crecer y multiplicarse, confiando sin duda en que algún día todos sus vástagos quedarían legitimados[65]. Así, la historia señala como uno de los misterios más inexplicables de las matemáticas la capitulación casi total de Euler a las seducciones del formalismo.

En análisis, "formalismo"[i] significa una manipulación de fórmulas que implican procesos infinitos sin prestar suficiente atención a las cuestiones de convergencia y de existencia matemática. Cabe señalar a la expresión $(1\text{-}2)^{-1}$ como uno de los ejemplos sobresalientes del formalismo, o "manipulación", en el cual no se puso atención a las cuestiones de convergencia y existencia al aplicar fórmulas que involucraban procesos infinitos. Así, si se le aplica "formalmente" el teorema del binomio se obtiene:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

que es un resultado desprovisto de significado.

Otro ejemplo, es la suma de dos series:

$$x + x^2 + \cdots = \frac{x}{1-x}$$

y

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots = \frac{x}{x-1}$$

encontrando Euler que

$$\cdots \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \cdots = 0$$

4.5. SIGLO XIX

4.5.1. CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL PERÍODO.

Es fácil subestimar el tratamiento de convergencia durante el siglo anterior al XIX, ya que en esa época e incluso mucho antes, se había demostrado la convergencia de algunas series sencillas, y se aceptaba usualmente la interpretación básica de una serie como la suma ordenada de sus términos. Sin embargo, exceptuando esto, había muchas ambigüedades importantes. Así, el calificativo de *convergente* se le aplicaba indistintamente a las series cuyo n-ésimo término tendía a cero al crecer n, mientras que las series *divergentes* incluían tanto a las que tienen suma infinita, como a las que oscilaban finita o infinitamente. Así, había series que ¡aceptaban la aplicación de ambos términos!

Por ejemplo, en un reporte de D'Alembert de 1768, apareció una advertencia sobre la serie binomial

$$(1+\mu)^m = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\mu^r$$

---

[i] Formalismo. Epistemológicamente es la tesis que sostiene que la verdad de las ciencias sólo depende de las reglas de utilización de los símbolos convencionales, por oposición al *intuicionismo*. En Lógica, doctrina según la cual los enunciados matemáticos son conjuntos de signos, vacíos de sentido en tanto que tales. Diccionario Enciclopédico Larousse 1998. Colombia 1997.

donde inclusive afirma que la serie es convergente o divergente de acuerdo a

$$\left|\frac{n\text{-ésimo término}}{(n+1)\text{-ésimo término}}\right| = \left|\frac{m-n+1}{n}\mu\right| \quad \text{si} \begin{cases} <1 \therefore \text{es convergente} \\ >1 \therefore \text{es divergente} \end{cases}$$

Pero si esto parece haber sido un avance, se contra resta cuando él comenta unas páginas después que si μ=0.99 y m=-2, entonces la serie es divergente hasta el término 99 avo y convergente después, porque en la expresión siguiente se muestra que está todavía distante del punto real:

$$\left|\frac{m-n+1}{n}\mu\right| = \left|\frac{-2-n+1}{n}\right| \cdot \left|\frac{99}{100}\right| = \left|\frac{-1-n}{n}\right| \cdot \left|\frac{99}{100}\right|$$

$$= \frac{99}{100}\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{así es} \begin{cases} >1 & \text{si} \quad n<99 \quad \to \quad \text{divergencia} \\ <1 & \text{si} \quad n>99 \quad \to \quad \text{convergencia} \end{cases}$$

Sin embargo la apreciación vinculada con la el valor de 1, parece ser el origen de la prueba de la razón que aparecería posteriormente y que se conoce como prueba de D'Alembert.

Al desarrollarse métodos "no ortodoxos" para sumar series, especialmente series de potencias, para las que era posible definir la *suma* como el valor límite, si es que existe, de la sucesión correspondiente de sumas parciales se dio un grave problema. Dado que el ingenio puesto en juego para calcular las sumas, no se veía correspondido por una adecuada reflexión sobre la interpretación de los resultados obtenidos, se tuvo que la *suma* de una serie dependía del método utilizado para realizarla, y en consecuencia, una misma serie podía tener varios resultados o simplemente no tener *suma*.

Se ha señalado a D'Alembert como el primero (año de 1754) en enunciar que la teoría de los límites es la verdadera metafísica del cálculo diferencial e integral. El esfuerzo en el siglo XIX de proporcionar rigor al análisis fue consecuencia de la acumulación de absurdos tales como los aquí mostrados. Así, D'Alembert se dio cuenta de que lo el cálculo necesitaba no eran más fórmulas, sino un cimiento.

En tal contexto, se comprende el porqué Cauchy exigía que el estudio de las series infinitas estuviera precedido de un análisis de su convergencia. Si bien antes de él ya había algunas tendencias al respecto, con Lacroix, Fourier y Gauss, fue el propio Cauchy el que alcanzó niveles de detalle inéditos hasta entonces al señalar que "Una serie divergente no tiene suma". En su libro *Cours d'analyse* explica que "si, para valores siempre crecientes de n, la suma parcial n-ésima s_n se va acercando indefinidamente a un cierto valor límite s, entonces la serie se llamará *convergente*, y el límite en cuestión recibirá el nombre de *suma* de la serie. Pero, si la suma parcial n-ésima s_n crece indefinidamente, la serie se llamará *divergente*, y no tendrá *suma*".

D'Alembert señala que "para que una serie sea convergente, *es necesario y suficiente* que para valores infinitamente grandes de n, las sumas parciales s_n, s_{n+1} y s_{n+2}, difieran entre sí, así como del valor límite s, una cantidad infinitamente pequeña". Este último resultado reviste una gran importancia sobre todo en el señalamiento de que "s_n, s_{n+1} y s_{n+2}, difieran entre sí, valores infinitamente pequeños", pues con ello no requiere de conocer el valor de la *suma* s para dar por sentada la convergencia[66]. Cauchy no intentó demostrar la condición de suficiencia, la cual no es fácil, ya que asegura la existencia del límite, y necesita por tanto, un conocimiento preciso de la estructura de la recta real.

4.5.2. PRIMERA MITAD DEL SIGLO XIX. GAUSS, BOLZANO, FOURIER, POISSON, CAUCHY, ABEL Y DIRICHLET.

4.5.2.1. Gauss, 1812.

Uno de los matemáticos más brillantes de la primera mitad del siglo XIX fue el alemán Carl F. Gauss, quien consideraba a la matemática como la reina de las ciencias y a la aritmética como la reina de la matemática. En el año de 1812 da a conocer un artículo sobre la serie hipergeométrica, la cual permite, desde un solo punto de vista, la exposición de un gran número de funciones. Se considera la primera investigación sistemática en la convergencia de una serie.

Así, dada la serie hipergeométrica

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \text{donde } p \text{ es una constante,}$$

se tiene que la serie converge si $p>1$, y diverge si $p \leq 1$.

Comentarios adicionales:

La aportación de Gauss con relación a series infinitas es significativa en cuanto establece, además de una serie de carácter sistémico, una de las series más trascendentes por su utilidad para la formación de series de términos positivos que pudiesen servir para aplicación de alguno de loas criterios de comparación, en la determinación de convergencia o divergencia de otras series.

4.5.2.2. Bolzano, 1817.

Bolzano se ve influenciado por algunos trabajos de Lacroix, Fourier y Gauss, en donde además de considerar la suma de las series, término a término, formula la convergencia y divergencia únicamente en razón del comportamiento de los n primeros términos de las series, previo a las sumas de éstas. Así, en un reporte sobre las raíces de una función continua, escribe $s_n(x)$ para la suma de los primeros n términos de $\sum_{r=0}^{\infty} u_r(x)$, y $r_n(x)$ para el residuo, correspondiendo entonces

$$s_n(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots+u_{n-1}(x)=\sum_{r=0}^{n-1} u_r(x)$$

y

$$r_n(x)=u_n(x)+u_{n+1}(x)+\cdots=\sum_{r=n}^{\infty} u_r(x)$$

en consecuencia, Bolzano establece en 1817, en un "teorema general"

...que la convergencia o no-convergencia de las series sería juzgada sólo por el comportamiento de la sucesión $\overset{n}{F}x$ (que en términos actuales es $s_n(x)$), cuando n crece. Por tanto, puede haber series con una suma infinita, series que oscilan y en especial "la clase [de series]... que poseen la propiedad que la variación (incremento o decremento) que su valor experimenta a través de una prolongación [de términos] tan grande como se desee, siempre permanece más pequeña que un cierto valor, el cual otra vez puede ser tomado tan pequeño como uno desee, si uno ha prolongado la serie lo suficiente".[67]

A esta característica de una serie se le ha llamado "propiedad de Bolzano", y puede enunciársele como
La serie $\sum_{r=0}^{\infty} u_r(x)$ posee la **propiedad de Bolzano** si, dado un orden de pequeñez d, hay un valor n para el cual

$$|s_{n+r}(x) - s_n(x)| < d \ , \qquad \text{para} \qquad r > 0$$

Ahora, si la serie tiene la propiedad de Bolzano,

...entonces ahí siempre existe un cierto valor constante, y únicamente uno, al cual los términos de esta serie siempre se aproximan más, y hacia el cual pueden llegar a estar tan próximos como deseen, si uno prolonga la serie lo suficiente.[68]

En otras palabras, la serie es *convergente* a una suma, la cual se puede escribir como $s(x)$

Para probar lo anterior, Bolzano lo presenta en dos partes. En la primera muestra la existencia de la *función-suma*, y en la segunda, su unicidad. Ya que la prueba de existencia, fue previa a la unicidad, él supone que podía tomar un valor variable de la función-suma, (independientemente de ser una función de x), el cual podía por lo tanto ser seleccionado dentro de un grado arbitrario de proximidad, lo cual fue llamado como "el valor verdadero" de sí mismo.

i) *Prueba de la existencia*

Si se escoge una n para la cual

$$|s_{n+r}(x) - s_n(x)| < d \ , \quad \text{para} \qquad r > 0 \qquad \text{.......................................(4.5.2.2.1)}$$

entonces, se tiene que,

$$|s(x) - s_{n+r}(x)| < \omega$$

para una ω convenientemente pequeña, por lo tanto

$$|s_{n+r}(x) - s_n(x)| + |s(x) - s_{n+r}(x)| < d + \omega$$

$$|s(x) - s_n(x)| < d + \omega$$

y así, $s_n(x)$ es también arbitrariamente próximo al "valor verdadero" de $s(x)$ y por lo tanto toma a $s(x)$ como su valor límite.

Con relación a la prueba de existencia, se puede señalar que no puede ser aceptada por considerarse incorrecta.

ii) *Prueba de unicidad.*

Sean $s(x)$ y $t(x)$, dos sumas diferentes,

$$[s(x) - s_n(x)] < e_1$$

y sea también

$$[t(x) - s_n(x)] < e_2$$

por lo tanto

$$[s(x) - t(x)] < e_1 - e_2 \qquad \text{.......................................(4.5.2.2.2)}$$

de donde se concluye que $s(x)$ y $t(x)$ son iguales.

Con relación a esta prueba de unicidad, se puede señalar que es insuficiente, pero se puede subsanar su deficiencia con sólo sustituir los paréntesis cuadrados por barras de valor absoluto, por lo que la demostración correcta sería

Sean $s(x)$ y $t(x)$, dos sumas diferentes, entonces

$$|s(x) - s_n(x)| < e_1$$

y sea también

$$|t(x) - s_n(x)| < e_2$$

por lo tanto, aplicando la desigualdad del triángulo:

$$|s(x) - s_n(x) - t(x) + s_n(x)| \leq |s(x) - s_n(x)| + |t(x) - s_n(x)| < e_1 + e_2$$

en consecuencia

$$|s(x) - t(x)| < e_1 - e_2$$

de donde se concluye que $s(x)$ y $t(x)$ son iguales.

Para la proposición:
Si la serie converge a la suma $s(x)$, entonces la propiedad de Bolzano se cumple. La prueba, para n suficientemente grande, se puede proponer como sigue:

$$|s_n(x) - s(x)| < e_1 \qquad \text{.......................................(4.5.2.2.3)}$$

y también

$$|s_{n+r}(x) - s(x)| < e_1 \qquad \text{.......................................(4.5.2.2.4)}$$

ahora, aplicando la desigualdad del triángulo

$$|s_{n+r}(x) - s_n(x)| < |[s_n(x) - s(x)] - [s_{n+r}(x) - s(x)]| \leq |s_n(x) - s(x)| + |s_{n+r}(x) - s(x)| < 2e_1$$

de donde, por (4.5.2.2.3) y (4.5.2.2.4) se prueba la propiedad de Bolzano.

Bolzano sabia que su trabajo era bueno, sin embargo estaba consciente que su lejanía de Praga, impediría que su trabajo recibiera la debida atención, por lo que solicitó "al mundo científico" que su trabajo no se viese por encima sólo por lo limitado de su tamaño, (dado que su artículo sólo ocupaba un fragmento de un libro grande), sino que se examinase con la mayor rigidez posible, de manera de poder dar mayores explicaciones si era necesario o que lo revocaran si estaba totalmente equivocado, pero que le permitieran una aceptación general si estaba correcto.

No obstante que en las páginas siguientes se analizará el trabajo de Cauchy, se presenta a continuación una breve muestra de la influencia de Bolzano en los trabajos de aquél.

La teoría de convergencia de Bolzano en su forma original está contenido en el *Cours d'analyse* de Cauchy, que no se centró tanto en la formulación de convergencia, sino en una presentación en términos de la propiedad de Bolzano, la cual era considerada como necesaria y suficiente. Así, en 1821, Cauchy afirma que

"Para que la serie $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ sea convergente ... es necesario que al incrementar los valores de n las diferentes sumas

$$u_n,$$
$$u_n + u_{n+1},$$
$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\vdots$$

...terminen por alcanzar un valor numérico más pequeño que cualquier límite asignado. Recíprocamente, cuando estas condiciones son satisfechas, la convergencia de la serie está asegurada".

Se observa que Cauchy evita la difícil prueba de la "ligera" expresión que dice que "las sumas s_n, s_{n+1}, ... difieren del límite s por cantidades infinitesimales, entonces también difieren entre sí esas mismas cantidades."

De lo anteriormente expresado se pueden señalar dos aspectos importantes:

i. La condición de Bolzano-Cauchy para la convergencia o divergencia de las series, estaba basada en el comportamiento de $|s_{ni} - s_n|$, cuando $i \to \infty$. Pero, considerando la condición particular cuando r es un múltiplo de n, ésta deja de ser suficiente para la serie

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r \log r}$$

la cual es una serie divergente, no obstante de que

$$\lim_{i\to\infty} |s_{ni} - s_n| = 0$$

ii. El comentario de Bolzano, incluido al final de *Cours d'analyse,* especifica que un número irracional puede ser tomado como el límite de una sucesión de racionales, aunque señala que no necesariamente el límite de una sucesión racional deba ser irracional, y pone por ejemplo la suma de la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^r$$

cuyas sumas parciales son todas racionales, y $s = \frac{1}{9}$.

Agrega que, cuando B es un número irracional, uno puede obtener a través de los números racionales valores más y más cercanos a éste.

La estructura de la clase de los números reales fue parte significativa de los esfuerzos de Bolzano por aritmetizar el análisis, sin embargo Cauchy no le dio importancia, ni antes ni después de su *Cours d'analyse*.

Comentarios adicionales:

Bolzano introduce una terminología que serviría de base para la consolidación de los fundamentos del cálculo, por ejemplo: el límite no-tocado, la diferencia entre dos términos inmediatos de una sucesión de sumas parcialess_{n+1} - s_n. También muestra ya una tendencia a dar un mayor rigor matemático al cálculo.

4.5.2.3.Fourier, 1822.

Hablar del análisis es hablar del estudio de los procesos infinitos. Lo habían entendido tanto Newton como Leibniz como referido a las llamadas magnitudes continuas, tales como velocidad, longitud, área. En contraparte, al hablar de la teoría de números es abordar el mundo discreto de los números naturales. Klein, abordó una unificación de los aspectos continuos y discretos de la matemática, bajo el concepto de grupo. Así, el siglo XIX fue un período de la aritmetización del análisis.

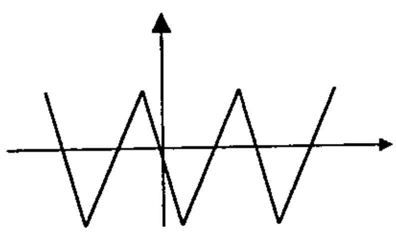
Con la clarificación del concepto de *función*, que es una palabra clave del análisis, fue surgiendo la tendencia a la aritmetización de éste. Cierto es que durante el siglo XVIII, habían surgido diferencias de opinión sobre la manera de representar funciones, por ejemplo, cuando D'Alembert y Euler dieron soluciones al problema de la cuerda vibrante, en la llamada "forma cerrada", utilizando un par de funciones arbitrarias, mientras que Daniel Bernoulli había encontrado una solución en términos de una serie infinita de funciones trigonométricas. Sin embargo se considera que es a Fourier a quien le corresponde el honor de haber ampliado el campo de estudio de función.

La obra de Fourier puede considerarse como la primera realmente típica de la fisica matemática. Atraído por un problema ampliamente discutido en su época, la propagación del calor, presentó ante la Academia de Ciencias en 1807, una primera *memoria*. Lagrange, Laplace y Legendre, designados para juzgar el documento, criticaron severamente el ensayo a causa de la imprecisión, rechazándola en consecuencia. Si bien en 1811 presenta su segunda versión sobre propagación del calor, que lo hizo ganador del premio, la presencia entre los jueces de quienes lo rechazaron años antes, ocasionó que su trabajo no fuese publicado, dado que una vez más había recibido críticas a causa de su falta de rigor. Sin embargo, Fourier no cejó en su intento y presentó en 1822 una tercera versión, *La teoria analitica del calor*, en donde estableció la teoría matemática de las leyes de propagación del calor, que comprendía sus ideas fundamentales sobre las series conocidas como series de Fourier.

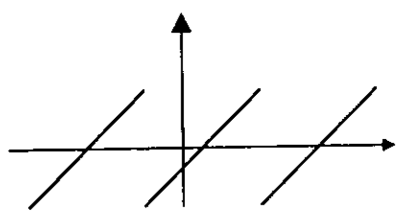
Así, su principal idea es que toda función $f(x)$ puede ser representada por una serie de la forma

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots \\ + b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + b_n \operatorname{sen} nx + \cdots \end{aligned}$$

Las representaciones por medio de tales series permitían un grado de generalidad mucho mayor, en cuanto al tipo de funciones a las que se podían aplicar para estudiarlas, que el que permite la serie de Taylor. Los trabajos de Fourier mostraron que se podía representar una función en un *intervalo completo*, mientras que la serie de Taylor sólo podía representar una función en un entorno de un punto para el cual la función fuese analítica[1]. Incluso, la función puede tener un desarrollo en serie de Fourier, aún si hay muchos puntos en los que no exista la derivada de la función o en la que la función no sea continua, como las figuras siguientes:



Función con puntos no diferenciables



Función con puntos de discontinuidad

Una función como cualquiera de las anteriores, no puede representarse mediante una expresión analítica finita, no obstante que los predecesores de Fourier insistían en que una función debía ser representable mediante una sola expresión analítica.

Los coeficientes se pueden determinar mediante las siguientes expresiones[69]:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx dx$$

Se señala que la obtención por Fourier de la fórmula integral de los coeficientes a_n y b_n fue algo larga y tortuosa y que adolecía de una cierta falta de rigor. Aunque en su tratado no se encuentra una demostración completa, sin duda alguna, su principal contribución, esbozada por Daniel Bernoulli, fue la idea de que toda función $f(x)$ puede ser representada por una serie, la serie de Fourier.

Con lo anterior, las funciones ya no necesitaban ser de *buen comportamiento* en su forma, tal como los matemáticos las habían manejado hasta entonces. En consecuencia, hubo nuevas propuestas de $\dot{x}$

[1] Para que una función f sea analítica en x_0, se requiere que tenga derivadas de todo orden en la vecindad de x_0 .

Dirichlet dio la primera demostración rigurosa de la convergencia de una serie de Fourier para una función que cumpliese con algunas restricciones, llamadas condiciones de Dirichlet[70]. Una serie de Fourier obtenida de una función no siempre converge al valor de la función dada, pero Dirichlet demostró, en un artículo publicado el año de 1828 en el *Journal de Crelle*, el siguiente

Teorema. Si $f(x)$ es periódica de período 2π, si para $-\pi < x < \pi$ la función $f(x)$ tiene un número finito de máximos y mínimos y un número finito de discontinuidades, y si

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,,$$

es finita, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge al valor $f(x)$ en todos los puntos en los que la función f es continua, y en los puntos de discontinuidad de salto converge a la media aritmética de los límites de la función por la derecha y la izquierda.

Otro de los avances con relación a la convergencia de series, está dado por el teorema que se conoce como Criterio de Dirichlet. Si los términos de la serie $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n + \cdots$ son tales que los b_i son todos positivos y tienden monótonamente a cero, y si existe un número M tal que $|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m + \cdots| < M$ para todos los valores de m, entonces la serie dada converge.

4.5.2.4. Poisson, 1823.

En relación con la cuerda vibrante, Daniel Bernoulli y Euler tuvieron una controversia en los 1770s sobre las series trigonométricas y sus propiedades. Sobre esta discusión Poisson escribió

"Admitimos junto con Euler que las sumas de estas series, consideradas por sí solas, no tienen valores determinados, pero agregaríamos que cada una de ellas, tiene es un valor único, y el mismo podría ser usado en análisis, cuando éste es considerado como el límite de las series convergentes, es decir, cuando implícitamente, cada una de ellas supone a sus términos sucesivos multiplicados por potencias de una fracción infinitamente pequeña, diferente de la unidad".

En otras palabras, una serie trigonométrica tal como

$$a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x + \cdots \qquad \text{..............................(4.5.2.4.1)}$$

podría conducir a problemas de divergencia. Pero

$$pa\cos x + p^2b\cos 2x + p^3c\cos 3x + \cdots \quad \text{, con } 0<p<1 \qquad \text{.........(4.5.2.4.2)}$$

sin duda será convergente y (4.5.2.4.1) podría ser considerado el valor límite de (4.5.2.4.2) cuando $p=1$.

Aun escribiendo lo anterior en 1823, Poisson no entendió la implicación de un rango de convergencia, es más, ni aún después de que en 1826 Abel diese a conocer su teorema[i]. Ya en 1820 Poisson lo había usado en desarrollar la primera prueba matemática completa de convergencia para las series de Fourier, con relación a su propio trabajo sobre la difusión del calor, y a pesar de posteriores desarrollos, él sólo hizo variaciones menores en su presentación.

Su trabajo estaba condenado desde un principio, ya que la proposición básica de Poisson asume el teorema generalizado de Abel del límite, y por lo tanto la convergencia de las series de Fourier que se supone debía de demostrar. No obstante, los historiadores de las matemáticas consideran que vale la pena describir la proposición, tanto por ser un caso de estudio del análisis de la época, como por su influencia en los sucesores de Poisson.

[i] Teorema: Si las funciones $v_0(x)$, $v_1(x)$, ... son continuas —en el sentido de Cauchy— cuando $a\le x\le b$ y $v_0(x)+v_1(x)\delta+v_2(x)\delta^2+ \ldots$ es convergente, entonces la serie $f(x,\alpha)= v_0(x)+v_1(x)\alpha+v_2(x)\alpha^2+ \ldots$con $\alpha<\beta$, es convergente y una función continua de x cuando $a\le x\le b$.

Poisson empieza sumando como una progresión geométrica para $|p| < 1$

$$\frac{1-p^2}{1-2p\cos(x-\alpha)+p^2} = 1+2\sum_{r=1}^{\infty} p^r \cos r(x-\alpha) \qquad \text{.......................(4.5.2.4.3)}$$

Multiplicando por $f(\alpha)$ e integrando sobre $[-\pi,+\pi]$ que contenga a $x=\alpha$, le da la "integral de Poisson".

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{(1-p^2)f(\alpha)}{1-2p\cos(x-\alpha)+p^2}\right]d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\left[1+2\sum_{r=1}^{\infty} p^r \cos r(x-\alpha)\right]d\alpha \qquad \text{....(4.5.2.4.4) y (5)}$$
$$= G(p)$$

En tanto la integral (4.5.2.4.4) pueda ser definida, el anterior razonamiento será correcto. Pero cuando Poisson pone $p=1$ sobre ambos lados de (4.5.2.4.4), sucede que del lado izquierdo de la igualdad tiene un integrando de la forma 0/0 y por tanto requiere de un manejo cuidadoso. Poisson se ocupa de esto de una manera nada apropiada, considerando el componente I_x de esa integral en el intervalo $[x\text{-}\varepsilon, x+\varepsilon]$, donde ε y ε' son pequeños.
Así él sustituye

$$x\text{-}\alpha = z \quad \text{y} \quad p = 1 - g, \qquad \text{..........................(4.5.2.4.6)}$$

donde g y z son pequeños, y por tanto deduce

$$\cos(x\text{-}\alpha) = \cos z = 1 - \tfrac{1}{2}z^2 \qquad \text{........................(4.5.2.4.7)}$$

tómese en cuenta que $1 - \frac{1}{2}z^2$, corresponden a los dos primeros términos del desarrollo en serie de Maclaurin para la función cos z.
Pero también encontró que

$$f(\alpha) = f(x\text{-}z) = f(x) \qquad \text{........................(4.5.2.4.8)}$$

que es en el mejor de los casos un argumento infinitesimal, y obtuvo del lado izquierdo de (4.5.2.4.4) después de todas las sustituciones

$$I_x = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon'} \frac{[1-(1-g)^2]f(x)}{1-2(1-g)(1-\frac{1}{2}z^2)+(1-g)^2}dz \qquad \text{................(4.5.2.4.9)}$$
$$= f(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon'}\frac{2g-g^2}{g^2+(1-g)z^2}dz$$

él entonces se permite ir más allá, en la aproximación que da

$$I_x = f(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon'}\frac{2g}{g^2+z^2}dz \qquad \text{..............(4.52.4.10)}$$
$$= 2f(x)\left[tan^{-1}\left(\frac{\varepsilon'}{g}\right)+tan^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{g}\right)\right] \qquad \text{............(4.5.2.4.11)}$$
$$= 2\pi f(x) \qquad \text{...............(4.5.2.4.12)}$$

donde considera el valor límite para g igual a 0, esto es, el valor límite de 1 para p, tomado en (4.5.2.4.11)

Ya que el resto de la integral —una parte es I_x—sobre la parte izquierda de la igualdad de (4.5.2.4.4) es evidentemente cero, se obtiene de (4.5.2.4.5) y (4.5.2.4.12)

$$G(1)=2\pi f(x) \qquad \text{........ ....(4.5.2.4.13)}$$

Haciendo $p=1$ sobre el otro lado de (4.5.2.4.4) se obtiene

$$G(1) = \int_{-\pi}^{\pi}\left[1+2\sum_{r=1}^{\infty}\cos r(x-\alpha)\right]d\alpha \qquad \text{. ....(4.5.2.4.14)}$$

Por lo tanto, igualando las expresiones (4.5.2.4.13) y(4.5.2.4.14), y aplicando la identidad trigonométrica para $\cos(x\text{-}\alpha)$[i], se obtiene

[i] $cos(x\text{-}\alpha)=cosx cos\alpha+senx sen\alpha$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)d\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\left[\cos rx\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\cos r\alpha\, d\alpha+\operatorname{sen} rx\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\operatorname{sen} r\alpha\, d\alpha\right] \quad (\ldots 4.15)$$

que muestra que la serie completa de Fourier de $f(x)$ sobre $[-\pi,+\pi]$ es de hecho convergente a $f(x)$. Obsérvese la presencia de los coeficientes de Fourier: $a_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\cos r\alpha\, d\alpha$ y $b_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\operatorname{sen} r\alpha\, d\alpha$.

La prueba de Poisson se indetermina prácticamente en todos los pasos después de (4.5.2.4.5) y por razones adicionales a la suposición de convergencia requerida por tomar el valor límite de p en éstos. La expresión (4.5.2.4.8) daña a (4.5.2.4.9), a pesar de que esta última podía ser obtenida usando la serie de Taylor para funciones en las cuales fuese aplicable.

Las aproximaciones sobre (4.5.2.4.10) se verifican de la siguiente forma:
$\frac{2g-g^2}{g^2+(1-g)z^2}=\frac{2g(1-\frac{g}{2})}{g^2+(1-g)z^2}\approx\frac{2g}{g^2+z^2}$, dado que g es muy pequeña. Así, estas aproximaciones son escogidas como lo que mesuradamente podría describirse como "buen gusto", no obstante (4.5.2.4.11) podría ser obtenida de (4.5.2.4.9) de manera una más cuidadosa; pero entonces, no sólo tendría que usar el valor límite de p (o de g), sino también cambiar a un límite doble, de la forma de

$$\lim_{g\to 0}\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon'}$$

sobre (4.5.2.4.11) para deducir (4.5.2.4.12) y entonces intercambiar la suma e integral con objeto de obtener (4.5.2.4.15) a partir de (4.5.2.4.14) las cuales suponen una vez más la convergencia de las series. Si bien, esta prueba fue impugnada por algunos matemáticos posteriores, entre otros Cauchy.

4.5.2.5.Cauchy, 1821.

Si bien ya se mencionó que Cauchy incluyó en su forma original el reporte de Bolzano sobre convergencia, en ninguna parte menciona su nombre. Cabe agregar que no sólo omitió mencionar a Bolzano, sino a otros más, por ejemplo a Fourier.

En 1821 con relación a la convergencia de las series, Cauchy señala:
Teorema.
Cuando los diferentes términos de la serie $\sum_{r=0}^{\infty}u_r$ son funciones de la misma variable x, continuas con respecto a esa variable en la vecindad de un valor particular para el cual la serie es convergente, la suma s de la serie es también una función continua de x en la vecindad de ese valor particular.

Grattan-Guinness comenta que el término *continuo* es usado desde luego en el sentido de su propia formulación, pero si Cauchy pensaba extender su interpretación es incierta. En cualquier caso, su interpretación conduce al problema que tenía en mente: las series de Fourier.

Las funciones seno y coseno son continuas aún en el sentido más limitado; sin embargo, las series de Fourier para tales funciones, son series infinitas. Por lo tanto, de acuerdo al teorema enunciado, la serie de Fourier de cualquier función discontinua no sería convergente a ésta.

Durante todo su tratado sobre convergencia, Cauchy no hace distinción entre las series numéricas y las series de funciones. Así, escribe

$$\begin{aligned} s &= u_0 + u_1 + u_2 + \\ &= s_n + r_n \end{aligned} \qquad \text{..................................(4.5.2.5.1)}$$

donde s_n es la n-ésima suma parcial y r_n es el residuo. La prueba de su teorema puede dividirse en los siguientes pasos:

1. s_n es continua para un n finito.
2. Por tanto, para un incremento infinitamente pequeño α de x, el incremento sobre s_n es también infinitamente pequeño.
3. Dado que se supone, la serie convergente para $x=x_0$, r_n es pequeño y el incremento sobre aquél debido a α viene a ser imperceptible al mismo tiempo como para r_n.
4. De (4.5.2.5.1), el incremento sobre s es igual a la suma de los incrementos sobre s_n y r_n.
5. De los pasos 2 y 3 se tiene que los últimos dos incrementos son pequeños. Por lo tanto, del paso 4 se tiene que el incremento sobre s es también pequeño, y por lo tanto s es continua, como se exigió.

Cauchy daba la siguiente advertencia en la introducción de su *Cours d'analyse*
"...antes de efectuar la sumación de cualquier serie, habría que examinar en que casos la serie puede ser sumada, o en otras palabras, cuales son las condiciones de su convergencia. Sobre este tema, he establecido reglas generales las cuales me parecen merecer alguna atención[71]."

Habiendo aprendido a interpretar la sumación de una serie únicamente en términos del comportamiento de su n-ésima suma parcial, y la condición necesaria y suficiente de convergencia, Cauchy se dio cuenta que esa condición podría en la práctica ser difícil de establecer, y por tanto creó un nuevo problema el cual Bolzano no enfrentó, pero que originó una importante aplicación al análisis puro, es decir, el descubrimiento de condiciones suficientes o "pruebas" para la convergencia de una serie.

La cuestión era totalmente independiente, y de hecho anterior, a la sumación de una serie; una explicación de su estructura lógica que serviría de valioso antecedente para la comprensión del resultado obtenido.

Cauchy propuso el primer grupo de "tales" pruebas en su *Cours d'analyse* seguido inmediatamente por un encubierto ataque a las series de Fourier. De todas maneras, él no escudriñó la relación lógica entre las pruebas ahí, pero por otro lado, fue cuidadoso de distinguir entre las series de términos de un solo signo y los de signos mezclados. Cauchy probó sus resultados para cada clase de series por separado y enunció teoremas análogos en la teoría de funciones cuando fue posible.

Todas sus expresiones "E"[i] eran valores límites, cuando n tendía a infinito, de alguna función asociada con el término n-ésimo de la serie y mostró una vez más la influencia del reporte de 1817 de Bolzano, al operar siempre con la idea del *límite superior* de los valores de la sucesión.

Aparentemente Cauchy obtuvo sus pruebas por comparación de series especiales de las que se conocía su convergencia. Por ejemplo, tomando la progresión geométrica convergente

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{para } |x| < 1 \text{ ....(4.5.2.5.2)}$$

comenta que en la serie de términos positivos

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \qquad \text{............................(4.5.2.5.3)}$$

la propiedad de que

$$0 < u_n < x^n < 1 \qquad \text{cuando} \quad n > N \text{ ....(4.5.2.5.4)}$$

[i] "E" puede asumirse como un infinitesimal, al cual Cauchy identificó con esa letra.

implica *a fortiori* la convergencia de (4.5.2.5.3) dada la convergencia de (4.5.2.5.2) Además, (4.5.2.5.4) y (4.5.2.5.2) muestran que

$$0<(u_n)^{\frac{1}{n}}<x<1$$

y por lo tanto conduce a la prueba de la raíz que él propone, y que en términos más generales, actualmente incluye a series de términos no solamente positivos, es decir

Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left[|u_n|^{\frac{1}{n}}\right]$ existe y si

i) es menor de 1, entonces $\sum_{r=o}^{\infty} u_r$ es convergente, o si

ii) es mayor de 1, entonces $\sum_{r=o}^{\infty} u_r$ es divergente, pero si

iii) es otra cosa, la prueba es incierta.

La progresión geométrica

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}, \qquad \text{para } |x|<1 \text{..........(4.5.2.5.2)}$$

pudo también haberle dado la idea de otra prueba, así sustituyendo $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en lugar de $(u_n)^{\frac{1}{n}}$, dando lugar a la "prueba de la razón", anticipada por D'Alembert

Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]$ existe y si

i) es menor de 1, entonces $\sum_{r=o}^{\infty} u_r$ es convergente, o si

ii) es mayor de 1, entonces $\sum_{r=o}^{\infty} u_r$ es divergente, pero si

iii) es otra cosa, la prueba es incierta.

Probablemente la siguiente prueba de convergencia se dio a partir de la serie

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots \qquad \text{.................... (4.5.2.5.5)}$$

dado que seguramente Cauchy pudo haberse dado cuenta que esta prueba de la razón era menos poderosa para basar otras pruebas, pues era también incierta en todas las ocasiones en que era incierta la prueba de la raíz. Se conocía que (4.5.2.5.5) era convergente si $p>1$y divergente si $p\leq 1$. Bolzano había señalado que p = 1, era un ejemplo de que

$$(\ u_n \to 0 \ \text{ cuando } \ n\to\infty\ )$$

era una condición necesaria, pero no suficiente para la convergencia de la serie. El caso de p = 1 conduciría a la serie armónica, misma cuya divergencia había sido probada analíticamente por Oresme.
Cauchy entonces enuncia

"Si $u_n>u_{n+1}>0$, entonces $\sum_{r=0}^{\infty}u_r$ y $\sum_{r=0}^{\infty}2^r u_{2^r-1}$ ambas convergen o ambas divergen.
La prueba se fundó en

$$u_0+2u_1+2u_2+2u_3+2u_4+2u_5+2u_6+2u_7+\cdots$$
$$>u_0+2u_1+2u_3+2u_3+2u_5+2u_5+2u_7+2u_7+\cdots$$

en el caso de convergencia, y

$$u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+\cdots$$
$$<u_0+u_1+u_1+u_3+u_3+u_5+u_5+u_7+\cdots$$

en el caso de divergencia".

De hecho, la convergencia de (4.5.2.5.5) podría ser probada con lo anteriormente expuesto, como equivalente a la serie geométrica; pero lo más trascendente es que Cauchy concibe así la idea para una nueva prueba, que también podía ser usada en las ocasiones en que la prueba de la razón fuese incierta.

Supóngase que se tiene la condición

$$0 < u_n < \frac{1}{n^p} < 1 \quad \text{cuando} \quad n > N, \quad p > 1 \qquad \text{..........} (4.5.2.5.6)$$

entonces

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^p} \quad \text{es convergente,}$$

por tratarse de una serie geométrica, y también

$$* \; \frac{\log(u_n)}{\log\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)} = \frac{\log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\log(\mathrm{n})} > p > 1 \cdot$$

*Para obtener el último resultado, se parte de tomar logaritmo a los términos de la desigualdad (4.5.2.5.6). Así:

$$\log u_n = -(-\log u_n)$$
$$= -\log \frac{1}{u_n}$$

similarmente

$$\log \frac{1}{n} = \log 1 - \log n$$
$$= -\log n$$

realizando las siguientes operaciones algebraicas

$$-\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log u_n} = -\frac{\log n}{\log \frac{1}{n}} = 1$$

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} = \frac{\log u_n}{\log \frac{1}{n}} \neq 1$$

esta última desigualdad se da como resultado del siguiente razonamiento

$$0 < u_n < \frac{1}{n^p} < 1 \quad \text{cuando} \quad n > N, \quad p > 1$$

$$\frac{1}{u_n} > n^p > p > 1$$

$$\left|\log \frac{1}{u_n}\right| > \log n^p > \log n > p > \log p > \log 1$$

de donde Cauchy obtiene, en 1821, el resultado siguiente

$$\text{Si} \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}\right] \text{ existe y si}$$

i) es menor de 1, entonces $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ es convergente, o si

ii) es mayor de 1, entonces $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ es divergente, pero si

iii) es otra cosa, la prueba es incierta.

Después, Cauchy intenta poner a prueba series inventadas a partir de dos series dadas, siendo uno de los resultados más interesantes el siguiente:

"Sea $\sum_{r=0}^{\infty} u_n$ y $\sum_{r=0}^{\infty} v_n$ dos series absolutamente convergentes con sumas s y s'. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$, es convergente, donde w_n es el producto de Cauchy y corresponde a $w_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_{n-i}$".

Por último Cauchy dio la prueba para series alternantes, conocidas desde el siglo XVII como un medio para estimar sumas de series. El enunciado fue el siguiente:

"Si u_n cambia en signo para valores sucesivos de n y tiende a cero cuando n tiende a infinito, entonces $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ es convergente"

Nótese que falta la condición necesaria de que para todo n se tenga que $a_n > a_{n+1}$.

Posteriormente, aplicó sus resultados a problemas analíticos, siendo los primeros los que tenían que ver con series de potencias, descubriendo para la prueba de la raíz que

i) $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ es convergente para todos los valores de $|x| < \left[\lim_{n\to\infty}\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{-1}$ ... (4.5.2.5.7)

ii) $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ es divergente para todos los valores de $|x| > \left[\lim_{n\to\infty}\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{-1}$".

Obsérvese que el resultado anterior conlleva la aplicación del *radio de convergencia*. Además nótese que

$$|x| < \left[\lim_{n\to\infty}\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{-1}$$

$$|x| < \left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x| < 1$$

Cauchy también en 1821 manifestó la propiedad siguiente:

Teorema:

Una función continua de una variable x solamente puede ser desarrollada de una manera única en una serie convergente, en arreglo al incremento de las potencias enteras de la potencia.

Tanto el teorema anterior como (4.5.2.5.7) tienen implicaciones con la serie de Taylor

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

así, la desigualdad (4.5.2.5.7) indica el rango de convergencia de la serie y el teorema da a entender que, para ciertas funciones convenientes, la serie será la serie de Taylor. Cauchy se ocupó de las series en el *Résumé*, obteniendo las formas de Lagrange para residuos:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1} f^{(n)}(x+t)dt \ldots\ldots\ldots\ldots(4.5.2.5.8)$$

y

$$\frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x+\theta h) \ , \qquad \text{para } 0<\theta<1$$

los cuales tienen que decrecer cuando n aumenta, para que la convergencia tenga lugar.

Si bien, el propio Lagrange asumió que las series de Taylor eran convergentes, posteriormente en 1813 en *Funciones*$_2$[72], "anduvo a tientas" con relación a las formas (4.5.2.5.8) arriba mencionadas.

Con relación a la fórmula de Taylor, en la introducción de su *Résumé*, Cauchy en 1823,escribió
"No ignoro que el ilustre autor de la *Mécanique analytique*, Lagrange, ha tomado dicha fórmula como la base de su teoría de funciones derivables. Pero a pesar de todo el respeto que esa gran autoridad merece, la mayoría de los geómetras coinciden en reconocer la incertidumbre de los resultados a los cuales puede conducir el uso de las series divergentes".

No obstante la fe de Lagrange en las series de Taylor, hizo evidente que las funciones representadas por las series de Taylor no abarcaran todas las funciones que son usadas en el análisis, y además consideró también la distinción entre tales funciones y el resto, involucrando la cuestión de convergencia de la propia serie de Taylor, y de aquí la convergencia de todas las series infinitas en general.

Posteriormente muestra con un contra ejemplo que lo inverso del teorema no es verdadero. Toma

$$e^{-\frac{1}{x^2}}$$

el cual es cero para todas sus derivadas evaluadas cuando $x = 0$, pero no tiene una serie de Taylor alrededor de ese valor. Por lo tanto, para cualquier función $f(x)$ que tenga una serie de Taylor convergente alrededor de $x = 0$, será la misma que para la función

$$f(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$$

lo cual contradice lo inverso del teorema de Cauchy, así como también acaba por último con el residuo de Lagrange como base para la fundamentación del cálculo.

4.5.2.6.Abel, 1826.

Los teoremas de Abel en la teoría de las series infinitas son una muestra de que lo él hubiera sido capaz de establecer con una base confiable sobre esta teoría. (Murió a los 27 años, cuando su grandeza matemática empezaba a ser reconocida por Legendre, Jacobi y Gauss). Se señala que escribió en 1826, lo siguiente en una carta a Holmboë:

> "... Las series divergentes son en general trabajo del diablo ...es una lástima que uno se atreva a encontrar cualquier prueba de ellas ... . ¿Puede usted imaginar algo más terrible que pretender que $0 = 1^n - 2^n + 3^n - 4 +^n$, etcétera, siendo n un entero positivo?. ... no existe en general en las matemáticas una

serie infinita cuya suma esté determinada de una manera rigurosa; en otras palabras, lo más notable en matemáticas es sostenerse de pie, sin una base firme ..., inclusive, la fórmula binomial no ha sido probada."

Una de las características más sobresalientes de la manipulación no rigurosa de las series infinitas había sido la de suponer que lo que era verdadero siempre antes del límite, lo era también en el límite. En consecuencia, Abel formula de la manera siguiente, su

Primer teorema:

"Si la serie

$$f(\alpha) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots + v_m\alpha^m + \cdots$$

es convergente para un cierto valor δ de α, también será convergente para todo valor menor que δ y, para valores siempre decrecientes de β, la función $f(\alpha-\beta)$ se aproxima indefinidamente al límite $f(\alpha)$, siempre que α sea menor o igual que δ."

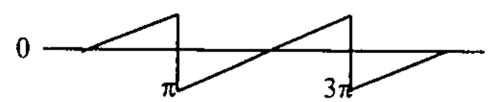
Es difícil ver inmediatamente el significado de este teorema. En realidad el punto se oculta en la palabra "igual" en el final. Cuando se sabe que si una serie de potencias es convergente a un valor límite δ de α, entonces ella converge a la suma $f(\delta)$, y por lo tanto es continua (de acuerdo con la definición de Cauchy) en $\alpha = \delta$. Así, es el primero de los teoremas relativos al análisis de variable real que trata sobre la importante cuestión del *comportamiento de una serie de funciones en los puntos extremos y su rango de convergencia*.

Toma, por ejemplo, el caso de la serie geométrica $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$ y señala que no es válida para $x=-1$.

Se ha señalado que Abel fue el primer gran converso del *Cours d'analyse* de Cauchy llegando a ser más "cauchyano" que el propio Cauchy. Sin embargo, en el mismo artículo de 1826, Abel generaliza el teorema anterior al caso en que los v_m sean funciones continuas de una variable x, y de paso, en una nota de pie de página, hace una crítica importante al teorema del *Cours* de Cauchy, que dice:

Cuando los diferentes términos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ son funciones de la misma variable x, continuas con respecto a esta variable en las proximidades de un valor particular para el que la serie es convergente, entonces la suma s de la serie es también una función continua de x en las proximidades de ese valor particular.

En su nota al pie, Abel señala que la serie de Fourier de senos de la función $\frac{1}{2}x$ sobre el intervalo $[0,\pi]$ es un contra ejemplo a este teorema, ya que "es discontinua para todos los valores $(2m+1)\pi$ de x, con m entero". Pero, para Fourier, una representación como ésta *no tenía saltos*, (véase la figura), pues él consideraba que las rectas inclinadas correspondientes a la función, estaban unidas por líneas verticales, y que si estos segmentos se pudieran interpretar como de una pendiente infinita, entonces la serie en cuestión y el teorema volverán a reconciliarse.



Abel llegó a considerar que el teorema podía admitir excepciones, siendo la serie de los senos una de ellas. Así escribe:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \cdots$$

pero si $x = \pi$, entonces

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen} \pi - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\pi - \cdots = 0 \quad \text{lo cual es absurdo.}$$

4.5.2.7.Dirichlet, 1829 y 1837.

Dirichlet decidió conocer y resolver el problema de convergencia de las series de Fourier cuando se dio cuenta que la suma de una serie infinita condicionalmente convergente podía ser modificada por un reordenamiento de términos. En 1837 escribió que una serie de términos positivos tiene la misma suma en cualquier orden que se use, pero para una serie de términos mixtos, si "la convergencia tiene lugar para un cierto orden, puede complicarse mediante un cambio de este orden, o si no fuese el caso, la suma de la serie puede ser totalmente diferente", y citó como ejemplos, las siguientes series:

i) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots,$

que es convergente, (condicionalmente convergente), pero modificando el orden, da una serie divergente:

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

y también

ii) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-$ que es convergente, contra

$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$ la cual converge a diferentes valores[73].

Obsérvese que el cambio de orden en los términos no sólo violenta la condición necesaria de convergencia relativa a que todo a_n sea mayor de inmediato sucesor a_{n+1}, sino que el término n-ésimo que describe la formación de la serie ya no es el mismo, es decir, no se está en la misma serie inicial.

El descubrimiento fue importante para el análisis, dado que conducía al problema del *reordenamiento de los términos en una serie*, lo cual usualmente se había aceptado como válido, y subrayaba la distinción entre las series con un mismo signo y las series con signos mixtos. Para Dirichlet fue trascendente porque esto aumentaba el problema de las series de Fourier en una forma interesante. Así, este problema era "más que una cuestión de convergencia"; era un problema de sumación también, cuya empresa era mostrar no sólo que las series -con coeficientes definidos por las formas integrales- eran convergentes, sino que también éstas convergían a la función. Fue esta combinación de las dos ideas, la que parece que Cauchy no comprendió y le transmitieron sus dificultades especiales.

Dirichlet en su reporte de 1829, después de una breve alusión al reporte original de 1807 de Fourier, señala que Cauchy reconoce que su propia prueba es incorrecta para ciertas funciones, por lo que la convergencia es discutible. Dirichlet hizo varias críticas a los reportes de Cauchy, la mayoría de ellas dirigidas contra el uso de números complejos, que parecían estar mal orientados, ya que el uso de tales métodos parecían válidos dentro de ciertas limitaciones sobre la función. Pero lo que consideró la "llamada a muertos" de la prueba fue mostrar la falsedad de la suposición de Cauchy de que "la convergencia de $\sum_{r=1}^{\infty} w_r$ implicaba la convergencia de $\sum_{r=1}^{\infty} v_r$ cuando $v_n \to w_n$ cuando $n \to \infty$". Dirichlet utilizó el siguiente contra ejemplo

$$w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \text{ para el cual } \sum_{r=1}^{\infty} w_r \text{ es convergente}$$

y

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, \text{ para el cual } \sum_{r=1}^{\infty} v_r \text{ es divergente}$$

a pesar de que $v_n \to w_n$ cuándo $n \to \infty$.

Nota. Tómese en cuenta que la propuesta anterior implica la suma de una serie convergente con una divergente.

Dirichlet propuso su propio acercamiento al problema del libro de Fourier sobre difusión del calor, así, después de desarrollar la teoría del "teorema de la integral de Fourier", el cual se escribe aquí de la forma[74] que el propio Fourier había dado a la consideración general de los matemáticos y que había usado en 1822

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)d\alpha\int_0^{\infty}\cos p(x-\alpha)dp \qquad \text{.............................(4.5.2.7.1)}$$

la cual transforma en

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\frac{\operatorname{sen} p(x-\alpha)}{x-\alpha}d\alpha \qquad \text{.............................(4.5.2.7.2)}$$

con p infinito y discute su interpretación geométrica como una sucesión finita de componentes de signos alternantes, creados por la oscilación de sen $p(x\text{-}\alpha)$, [Fourier 1822]. Un poco después él delínea una prueba similar para la convergencia de las series. Había varios pequeños errores en su argumento, pero podría considerarse como sigue:

Tomemos la serie completa de Fourier sobre [-X/2,+X/2]

$$f(x)=\frac{1}{X}\int_{-\frac{X}{2}}^{+\frac{X}{2}} f(\alpha)d\alpha+\frac{2}{X}\sum_{r=1}^{\infty}\left[\cos\frac{2r\pi x}{X}\int_{-\frac{X}{2}}^{+\frac{X}{2}} f(\alpha)\cos\frac{2r\pi\alpha}{X}d\alpha+\operatorname{sen}\frac{2r\pi x}{X}\int_{-\frac{X}{2}}^{+\frac{X}{2}} f(\alpha)\operatorname{sen}\frac{2r\pi\alpha}{X}d\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{X}\int_{-\frac{X}{2}}^{+\frac{X}{2}} f(\alpha)\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\cos\left[\frac{2r\pi}{X}(\alpha-x)\right]d\alpha \qquad \text{......(4.5.2.7.3)}$$

y usando la ecuación

$$\sum_{r=-n}^{r=+n}\cos ru=\cos nu+\operatorname{sen} nu\frac{\operatorname{sen} u}{1-\cos u} \qquad \text{...................................(4.5.2.7.4)}$$

que corresponde a los $(2n+1)$ términos intermedios de la sumación en (4.5.2.7.4). Escribiendo

$$u=\frac{2\pi}{X}(\alpha-x) \qquad \text{...(4.5.2.7.5)}$$

en (4.5.2.7.4) y la integral de (4.5.2.7.3) por aquellos $(2n+1)$ términos

$$\frac{1}{X}\int_{-\frac{X}{2}}^{+\frac{X}{2}} f(\alpha)\cos nu\,d\alpha+\frac{1}{X}\int_{-\frac{X}{2}}^{+\frac{X}{2}} f(\alpha)\operatorname{sen} nu\frac{\operatorname{sen} u}{1-\cos u}d\alpha \qquad \text{..................(4.5.2.7.6)}$$

Ahora, la oscilación del cos nu muestra que la primera integral se hace cero cuando n tiende a infinito. Lo mismo es para sen nu, pero el comportamiento de la segunda integral de (4.5.2.7.6) es afectado también por el factor $\frac{\operatorname{sen} u}{1-\cos u}$. "Uno se da cuenta claramente", escribió Fourier, "que la integral $\int f(\alpha)\operatorname{sen} nu\frac{\operatorname{sen} u}{1-\cos u}d\alpha$ toma valores sólo para ciertos intervalos infinitamente pequeños, es decir, cuando la "ordenada" $\frac{\operatorname{sen} u}{1-\cos u}$ llega a ser infinita. Eso sucederá si u o $\frac{2\pi}{x}(\alpha-x)$ son nada, y en el intervalo donde α difiere infinitamente poco de x, el valor de $f(\alpha)$ es idéntico al valor de $f(x)$"

Por lo tanto el valor límite de la segunda integral de (4.5.2.7.6) a partir de (4.5.2.7.5) es

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{X}\int_0^{\delta} f(x)\,\text{sen}\,nu\,\frac{u}{\frac{1}{2}u^2}\frac{Xdu}{2\pi}\right] \qquad \text{.............................}(4.5.2.7.7)$$

y la aproximación

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}f(x)\int_0^{\delta}\frac{\text{sen}\,nu}{u}du = f(x) \quad , \quad \delta > 0 \quad ,$$

lo cual establece la convergencia requerida.

Los errores del libro de Fourier son los siguientes:

1. Una versión escrita de la serie completa de Fourier sobre $[0,X]$, correspondiente (4.5.2.7.3), él introduce la expresión con $1/2\pi$ en lugar de $1/X$ .Luego comenta que la serie podría ser convertida en el teorema integral (4.5.2.7.1) tomando un intervalo infinito y creando una segunda integral fuera de la sumación sobre r. Pero entonces el error llega a ser no trivial, por el faltante $1/X$ es necesario formar la segunda diferencial.
2. En la serie que cita en su trabajo, todavía escribe $1/2\pi$, pero toma el intervalo de integración $[-X,+X]$ en lugar de $[0, X]$. Así, en la expresión simplificada él escribe $X=2\pi$.
3. En su expresión equivalente a la aquí escrita como (4.5.2.7.7) usó $[0,\infty]$ en lugar de $[0, \delta]$

De este modo, como Poisson y Cauchy, Fourier mantuvo una vaga creencia de que la convergencia tenía lugar para "cualquier" función, pero los sobrepasó por la calidad con que atacó el problema y el bosquejo del argumento proporcionado a Dirichlet el comienzo que éste necesitaba. Usando el intervalo $[-\pi,+\pi]$ en lugar del de Fourier $[-X/2,+X/2]$, tomó la versión alternativa de Fourier (4.5.2.7.4)

$$\sum_{r=-n}^{r=+n}\cos ru = \frac{\text{sen}(n+\frac{1}{2})u}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}u}$$

para obtener la famosa "fórmula para la suma parcial de Dirichlet", correspondiente a la expresión de Fourier (4.5.2.7.6)

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{\text{sen}[(n+\frac{1}{2})(x-t)]}{2\,\text{sen}[\frac{1}{2}(x-t)]}dt \qquad \text{.............................}(4.5.2.7.8)$$

y enfrenta el problema de convergencia en la nueva forma de examinar el comportamiento de $s_n(x)$ cuando n se incrementa. Descomponiendo $[-\pi,+\pi]$ en los subintervalos $[-\pi,x]$ y $[x,\pi]$ y sustituyendo

$$x\text{-}2u=t \quad \text{y} \quad x+2u=t \qquad \text{...}(4.5.2.7.9)$$

en las respectivas "subintegrales" de (4.5.2.7.8), se encuentra que

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2u)\frac{\text{sen}(2n+1)u}{\text{sen}\,u}du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2u)\frac{\text{sen}(2n+1)u}{\text{sen}\,u}du \;\text{.......}\quad (4.5.2.7.10)$$

que son ejemplos de la forma general

$$I = \int_0^h f(x)\frac{\text{sen}\,mx}{\text{sen}\,x}dx \quad , \quad h \le \frac{\pi}{2} \qquad \text{.......................}(4.5.2.7.11)$$

la cual es conocida como la "*integral de Dirichlet*", debido al análisis que hizo de esto en su reporte de 1829.

Como Fourier había observado, el componente crucial del integrando es sen mx, el cual cambia de signo para cada subintervalo $[((j\text{-}1)\pi\,/\,m\,,j\pi\,/\,m\,]$ de $[0,h]$. Si se define r de tal forma que sea un entero para el cual

$$\frac{r}{m}\pi < h < \frac{r+1}{m}\pi \qquad \text{..(4.5.2.7.12)}$$

entonces, habrá r subáreas, más un residuo sobre $[r\pi / m,\ h]$, a través del cual sen mx toma signos alternantes, y al mismo tiempo, el denominador sen x se incrementa monótonamente, ya que $h<\pi/2$.

Si se deja que m tienda al infinito—correspondiendo al incremento de n en $s_n(x)$—entonces esas áreas serán un número infinito y corresponderían a los términos de una serie infinita. Si las condiciones impuestas a $f(x)$ hacen que la serie sea convergente, entonces la integral, y por lo tanto la serie de Fourier, será también convergente. Sobre la propia fuerza del razonamiento de Fourier se tendría que la suma debería ser la función $f(x)$ misma.

El pensamiento de Dirichlet estuvo inspirado en estos antecedentes desarrollados por Fourier, y con objeto de obtener la convergencia de su integral, impuso a $f(x)$ las condiciones de ser:

i) continua,
ii) positiva, y
iii) monótona decreciente

de tal forma que las subáreas formasen una serie de términos de signos alternantes y magnitud decreciente. Así, la convergencia parecería estar bien asegurada, pero el argumento necesitaría estar respaldado por un cuidadoso análisis, el cual también habría de asegurar que la suma de la serie convergente fuese de hecho la función misma.

Usando (4.5.2.7.12) en (4.5.2.7.11) Dirichlet encontró que

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^{r}\int_{(j-1)\pi/m}^{j\pi/m} f(x)\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x}dx + \int_{r\pi/m}^{\pi} f(x)\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x}dx \\ &= \sum_{j=1}^{r} I_j + H \end{aligned} \qquad \text{....... (4.5.2.7.13 y 14)}$$

pero aplicando el teorema del valor medio de Cauchy que dice

Si $f(x)$ es finita y continua sobre $[x_0, X]$, entonces

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (X-x_0)f\left(x_0+\theta(X-x_0)\right) \quad , \quad 0\le\theta\le 1$$

se tiene que

$$I_j = \rho_j\sum_{j=1}^{r}\int_{(j-1)\pi/m}^{j\pi/m} f(x)\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x}dx \qquad \text{....................................(4.5.2.7.15)}$$

donde

$$f\left((j-1)\frac{\pi}{m}\right) > \rho_j > f\left(j\frac{\pi}{m}\right) \quad , \qquad \text{..................................(4.5.2.7.16)}$$

y por tanto,

$$I_j = (-1)^{j+1}\rho_j K_j \qquad \text{................................(4.5.2.7.17)}$$

donde K_j es el valor numérico de la integral en (4.5.2.7.15). La sustitución $y=mx$ convierte a (4.5.2.7.15) en

$$I_j = \rho_j\sum_{j=1}^{r}\int_{(j-1)\pi}^{j\pi} f(x)\frac{\operatorname{sen} y}{m\operatorname{sen}\left(\frac{y}{m}\right)}dy \qquad \text{...............................(4.5.2.7.18)}$$

y cuando m es grande

$$\operatorname{sen}\frac{y}{m} = \frac{y}{m} \quad . \qquad \text{...............................(4.5.2.7.19)}$$

Por lo tanto, en (4.5.2.7.18)

$$I_j = \rho_j \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} f(x)\frac{\text{sen}\, y}{y}dy \qquad \text{.........(4.5.2.7.20) y (4.5.2.7.21)}$$
$$= (-1)^{j+1}\rho_j k_j$$

donde k_j es el valor numérico de la integral en (4.5.2.7.20). Ahora que un resultado conocido es

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty}\frac{\text{sen}\, y}{y}dy = \sum_{j=1}^{r}\int_{(j-1)\pi}^{j\pi}\frac{\text{sen}\, y}{y}dy \qquad \text{.........(4.5.2.7.22)}$$

que de (4.5.2.7.20) y (4.5.2.7.21) viene a ser

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}k_j \quad . \qquad \text{.........(4.5.2.7.23)}$$

Usando (4.5.2.7.17) y (4.5.2.7.14), se encuentra que

$$I = \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+1}\rho_j K_j + H \qquad \text{.........(4.5.2.7.24)}$$

y el cometido es probar, a partir de conocer la convergencia en (4.5.2.7.23), la convergencia de I cuando m, y en consecuencia r, crece. Por último, se escribe

$$I = \left(K_1\rho_1 - K_2\rho_2 + \cdots - K_m\rho_m\right) + \left(K_{m+1}\rho_{m+1} - K_{m+2}\rho_{m+2j} + \cdots\right) + H \qquad \text{......(4.5.2.7.25)}$$
$$= s_m + r_m \qquad \text{.........(4.5.2.7.26)}$$

para m par, y obsérvese que (4.5.2.7.16) muestra que cada $\rho_j \to f\,(0)$ cuando $m\to\infty$ y por lo tanto, de (4.5.2.7.17) y (4.5.2.7.21) se tiene que

$$K_j \to k_j \qquad \text{.........(4.5.2.7.27)}$$

ya que en (4.5.2.7.26)

$$0 < r_m \to (k_{m+1} - \cdots)f(0) + 0 \qquad \text{.........(4.5.2.7.28) y (4.5.2.7.29)}$$
$$< k_{m+1}f(0)$$

ya que (4.5.2.7.20) muestra que la expresión $1/y$ de la integral hace que el integrando disminuya cuando y crece, y por lo tanto, que el valor de k_r decrece sucesivamente. Además, la convergencia de (4.5.2.7.23) implica que

$$k_{m+1} \to 0 \qquad \text{cuando } m\to\infty \qquad \text{.........(4.5.2.7.30)}$$

así, por (4.5.2.7.28) y (4.5.2.7.29) se tiene que

$$r_m \to 0 \qquad \text{cuando } m\to\infty \qquad \text{.........(4.5.2.7.31)}$$

y por tanto I es convergente cuando $m\to\infty$.

De (4.5.2.7.26) y (4.5.2.7.27), se pueden obtener los valores para los cuales tiene lugar la convergencia

$$s_m \to f(0)\sum_{r=1}^{m}(-1)^{j+1}k_j \qquad \text{cuando} \quad m\to\infty \qquad \text{.........(4.5.2.7.32)}$$

y por lo tanto, de (4.5.2.7.23) y (4.5.2.7.11), finalmente se encuentra

$$\underset{m\to\infty}{lim}[I] = \underset{m\to\infty}{lim}\int_0^h f(x)\frac{\text{sen}\, mx}{\text{sen}\, x}dx = \frac{\pi}{2}f(0) \qquad \text{.........(4.5.2.7.33)}$$

Dirichlet hizo entonces extensiones a esta evaluación de I, en consideración a las propiedades de la función. Primeramente, el análisis sostiene que si $f\,(x)$ es monótonamente creciente sobre $[0,h]$ o si $f\,(x)$ es constante sobre el intervalo, entonces por (4.5.2.7.11), y en consideración a la sustitución de $y=mx$, de (4.5.2.7.19) y (4.5.2.7.23), valor de I es

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^h c\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x}dx = \lim_{m\to\infty}\int_0^{mh} c\frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen}\frac{y}{m}}\frac{dy}{m}$$
$$= \int_0^{\infty} c\frac{\operatorname{sen} y}{y}dy \qquad \text{..................(4.5.2.7.34)}$$
$$= c\,\tfrac{\pi}{2}$$

En consecuencia, la evaluación de I es verdadera si $f(x)$ cambia de signo dentro de $[0,h]$. Ahora, si se hace la evaluación sobre la función $(C + f(x))$, donde C es una constante suficientemente grande para asegurar que la función sea positiva sobre $[0,h]$, y sustrayéndole el mismo resultado de la función constante. Después, el análisis podría ser también verdadero sobre el intervalo$[0,g]$ donde $0< g <h$, y restando (4.5.2.7.33) de aplicarse él mismo sobre $[0,g]$, se obtiene

$$\lim_{m\to\infty}\int_g^h f(x)\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x}dx = 0 \qquad \text{....................................(4.5.2.7.35)}$$

Por lo tanto, si la función es discontinua en $x = g$ y/o $x = h$, el análisis tiene que ser modificado, de forma que $f(g + \varepsilon)$ esté dado por $f(g)$ y $f(h - \varepsilon)$ para $f(h)$, donde ε es una cantidad positiva pequeña. Esta es la extensión más significativa, como se verá; pero conservando unidos tanto el resultado básico (4.5.2.7.33) como sus extensiones, se puede escribir el siguiente:

Teorema[75].

Sea $0<g<h\leq\pi/2$, y sea $f(x)$ continua y monótona sobre (g,h), y posiblemente también en $x=g$ y $x=h$. Entonces

$$\lim_{m\to\infty}\int_g^h f(x)\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x}dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } g=0\\ 0 & \text{si } g\neq 0\end{cases} \qquad \text{......................(4.5.2.7.36)}$$

4.5.3. Condiciones del Fin del siglo XIX

Hasta mediados del siglo XIX se había admitido generalmente que si una serie convergía sobre un intervalo a una función continua y diferenciable $f(x)$, entonces la serie obtenida diferenciando la primera término a término convergía necesariamente a $f'(x)$ en el mismo intervalo. Sin embargo, varios matemáticos llamaron la atención sobre el hecho de que éste no era necesariamente el caso, y que sólo se puede confiar en la diferenciación término a término si la serie en cuestión es *uniformemente convergente* sobre el intervalo, es decir, si puede encontrarse un N fijo, tal que para todo valor de x en el intervalo, la suma parcial $S_n(x)$ difiera de la suma de la serie $S(x)$ en menos que un ε dado de antemano, para todo $n>N$. Weierstrass demostró por su parte, que para series uniformemente convergentes, también era correcta la integración término a término.

Se señala que en el estudio de la convergencia uniforme, coincidieron con el mismo concepto casi simultáneamente Cauchy en Francia, quizá en 1853; G. Stokes en Cambridge, en 1847 y P. L. V. Seidel en Alemania, en 1848. Sin embargo se considera que nadie mejor que Weierstrass, merece el calificativo de padre del movimiento crítico del análisis. Así, Weierstrass desde 1857 hasta su retiro en 1890 impulsó a varias generaciones de estudiantes a utilizar con cuidado las representaciones de funciones por medio de series infinitas, y uno de sus estudiantes, Heine, demostró en 1870 que el desarrollo en serie de Fourier de una función continua es único si se añade la condición extra de que la convergencia sea uniforme.

RECAPITULACIÓN SOBRE SERIES INFINITAS.

El material presentado en este capítulo fue seleccionado con el objeto dar un seguimiento a la evolución de las series infinitas, desde sus orígenes como series numéricas vinculadas al método de exhaución hasta las series de potencias. De su uso en aplicaciones de contenidos geométricos hasta su utilización para sustituir representaciones algebraicas complejas, por elementales expresiones de tipo polinómico. Pero aún más importante es el haber destacado la esencia de los principales problemas en la consolidación y formalización de las series infinitas, a saber: el proceso de "acercarse tanto como se quiera" que involucra tanto al concepto del límite como el concepto del infinito y mejor aún, de lo infinitamente pequeño, siendo esto último el tema del material que se tratará en el siguiente capítulo.

Resumen.

Si bien el desarrollo sustancial de las series infinitas se dio en el siglo XVII, éstas hicieron su aparición desde la época de Arquímedes, quien para probar *la cuadratura de la parábola*, utilizó la serie numérica

$$A(P_n) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3}.$$

El método utilizado en las demostraciones llamado por exhaución, encierra en sí el uso de las series infinitas. Su uso básicamente fue para la cuadratura de curvas, con una fuerte carga geométrica en sus razonamientos. Posteriormente los matemáticos de occidente de Europa, mostraron durante el siglo XIV, inclinación hacia las series infinitas. Así, por ejemplo, Swineshead resolvió una de las paradojas de Zenón, a través de una larga y tediosa prueba verbal de su enunciado, dado que aún el álgebra no se había desarrollado lo suficiente. A Oresme se le ocurrió, alrededor del año 1361, la idea de hacer un dibujo o gráfica de la manera en que las cosas varían, es decir, sugiere en forma primitiva de lo que ahora llamamos *la representación gráfica de las funciones*. Oresme también proporcionó una prueba de la divergencia de la serie armónica, siendo ésta un primer ejemplo de una serie divergente la cual parece converger dado que sus términos se aproximan a cero.

Posteriormente, en los años 1660s Wallis realizó un tratado sobre las relaciones entre las sumas de diferentes series, aunque su trabajo careció del rigor matemático en su fundamentación. Seguramente recurrió a las fórmulas ya conocidas desde la antigüedad, para obtener la expresión:

$$\frac{\sum_{i=0}^{l} i^n}{(l+1)l^n} = \frac{1}{n+1} + \frac{a_1}{l} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{l^{n-1}}$$

De hecho, este resultado no era nuevo, pero Wallis intentó generalizar el procedimiento para la cuadratura de curvas extendiendo el dominio de n hasta incluir por lo menos todos los números racionales, excepto $n=-1$. Esto desde luego requería interpretar $\frac{a_k}{l^k}$ como $\frac{a_k}{\infty}=0$.

En esa misma época, Newton vio que los *desarrollos en series de potencias* suministraban un método para reducir las fórmulas analíticas para expresar las curvas trascendentes así como también las algebraicas. En consecuencia, expresiones "complicadas" como éstas, podían ser representadas por expresiones mucho más sencillas, aunque con un número infinito de términos, y que le permitían aplicar a un dominio más amplio de curvas, reglas y algoritmos que sólo estaban definidas para ecuaciones sencillas.

Si bien pareciese que a Newton la cuestión de convergencia no le preocupaba esencialmente y aunque en general ni se planteaba, existen evidencias de que sí tuvo cuidado en cuanto qué valores debería usar para hacer sus desarrollos de potencias. Su proceder con relación a despreciar los términos de orden superior en las series alternantes que utilizó, actualmente se puede justificar sin mayor problema. Adicionalmente, el carácter logarítmico del área hiperbólica estimuló el estudio de las series infinitas y técnicas algorítmicas del cálculo. Así, Mercator en 1668 da a conocer su famosa serie

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

para el área bajo la hipérbola, sobre el intervalo $[0,x]$

Leibniz, entre otras investigaciones, desarrolló una relativa a sucesiones numéricas, tanto de diferencias como de sumas asociadas a éstas, encontrando que las sucesiones de diferencias se podían sumar fácilmente. La reciprocidad de las operaciones al tomar sumas y diferencias, le permitió obtener la conclusión de que las determinaciones de las cuadraturas y las tangentes eran también operaciones inversas una de la otra.

El problema generado durante el siglo XVII por la construcción de tablas matemáticas para funciones logarítmicas y trigonométricas, dirigió la atención hacia el problema de la exactitud de la interpolación entre valores tabulados. La fórmula de *diferencias sucesivas* dada por Newton, es la misma fórmula, dada a conocer por James Gregory en 1670, pero con diferente notación y cuya idea básica de la interpolación era determinar un polinomio de grado n el cual coincida con f(x) en los n+1 puntos igualmente espaciados, para i=0, 1, ... , n. Así, Gregory, alrededor de 50 años antes de la publicación de la serie de Taylor, había obtenido los primeros cinco o seis términos de algunas de las funciones trascendentes, como por ejemplo: $\tan x,\ \tan^{-1}x,\ \log\ \sec x,\ \sec^{-1}(\sqrt{2}e^{x})$.

Taylor obtuvo su serie con base a la fórmula de interpolación de Gregory-Newton, cuya influencia es evidenciada a través de la notación utilizada:

$\underset{.}{x},\ \underset{..}{x},\ \underset{\therefore}{x},$ ... para designar las diferencias finitas $\Delta x, \Delta^2 x, \Delta^3 x,$

y

$\dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x},$ para designar las fluxiones de x.

Taylor al igual que Newton, no hace referencia a concepto alguno de convergencia, aunque Euler, en los 1750s, señala que la distinción entre *convergencia* y *no-convergencia*, de una serie debía ser formulada con relación al método involucrado, situación que lo llevó a que algunas a veces obtuviese resultados correctos y en otras ocasiones, erróneos.

Ya para el siglo XIX se había demostrado la convergencia de algunas series sencillas, y se aceptaba usualmente la interpretación básica de una serie como la suma ordenada de sus términos. No obstante existían algunas ambigüedades, así el calificativo de *convergente* se le aplicaba indistintamente a las series cuyo n-ésimo término tendía a cero al crecer n, mientras que las series *divergentes* incluían tanto a las que tienen suma infinita, como a las que oscilaban finita o infinitamente. En consecuencia había series que ¡aceptaban la aplicación de ambos términos!

El uso indiscriminado de métodos "no ortodoxos" para sumar series, dio un grave problema, dado que el ingenio puesto en juego para calcular las sumas, no se veía correspondido por una adecuada reflexión sobre la interpretación de los resultados obtenidos. Se tuvo que la *suma* de una serie dependía del método utilizado para realizarla, y en consecuencia, una misma serie podía tener varios resultados o simplemente no tener *suma*. Así, el esfuerzo en el siglo XIX de proporcionar rigor al análisis fue consecuencia de la acumulación de absurdos, a lo cual D'Alembert se dio cuenta y entendió que lo el cálculo necesitaba no eran más fórmulas, sino un cimiento. Así propuso que "para que una serie sea convergente, *es necesario y suficiente* que para valores infinitamente grandes de n, las sumas parciales s_n, s_{n+1} y s_{n+2}, difieran entre sí, así como del valor límite s, una cantidad infinitamente pequeña".

Posteriormente fue Gauss el primero en dar un carácter sistémico al tratamiento de las series, a través de la serie hipergeométrica, por su utilidad para la formación de infinidad de series de términos positivos que pudiesen servir para aplicación de alguno de los criterios de comparación, en la determinación de convergencia o divergencia de otras series.

Bolzano consideró la suma de las series, término a término y formuló la convergencia y divergencia únicamente en razón del comportamiento de los n primeros términos de las series, previo a las sumas de éstas. Propone que la condición para la convergencia o divergencia de las series, estaba basada en el comportamiento de $|s_{ni} - s_n|$, cuando $i \to \infty$. Sin embargo la condición particular cuando r es un múltiplo de n, deja de manifiesto que ésta ya no es suficiente para la serie

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r \log r}$$

la cual es una serie divergente, no obstante de que

$$\lim_{i \to \infty} |s_{ni} - s_n| = 0$$

En 1822 Fourier mostró que sus series permitían un grado de generalidad mucho mayor, que el que permite la serie de Taylor. Si bien la serie de Taylor sólo podía representar una función en un entorno de un punto para el cual la función fuese analítica, las funciones podían tener un desarrollo en serie de Fourier, aún si hubiese muchos puntos en los que no existiera la derivada de la función o en la que la función no fuese continua.

Cauchy no hizo distinción entre las series numéricas y las series de funciones, aunque advertía:
"...antes de efectuar la sumación de cualquier serie, habría que examinar en que casos la serie puede ser sumada, o en otras palabras, cuales son las condiciones de su convergencia. Sobre este tema, he establecido reglas generales las cuales me parecen merecer alguna atención". Adicionalmente Cauchy propuso el criterio básico de comparación de series, el criterio de la raíz, prueba de la razón —anticipada por D'Alembert—

Dirichlet dio la primera demostración rigurosa de la convergencia de una serie de Fourier para una función que cumpliese con algunas restricciones, llamadas condiciones de Dirichlet. En 1837 escribió que una serie de términos positivos tiene la misma suma en cualquier orden que se use, pero no para una serie de términos alternantes pues el cambio de orden en los términos no sólo violenta la condición necesaria de convergencia relativa a que todo a_n sea mayor de inmediato sucesor a_{n+1}, sino que el término n-ésimo que describe la formación de la serie ya no es el mismo, es decir, no se está en la misma serie inicial. El descubrimiento fue importante para el análisis, dado que conducía al problema del *reordenamiento de los términos en una serie*, lo cual usualmente se había aceptado como válido, y subrayaba la distinción entre las series con un mismo signo y las series con signos alternantes.

Nota final del capítulo.

Con objeto de contar con una breve visión general del proceso histórico de las series infinitas, en el capítulo 7 se presenta un prontuario para la ubicación de los diferentes estadios de las series infinitas dentro del proceso de construcción de la ciencia matemática.

5. INFINITÉSIMOS

5.1. SIGLO IV a.C.

Se ha considerado que los primeros planteamientos *infinitesimales* subyacen en el atomismo físico fundado por Demócrito de Abdera quien escribió algunas obras matemáticas, en particular *Sobre la Geometría y Sobre los irracionales.* Arquímedes en *El Método*, atribuye a Demócrito el descubrimiento y la demostración no rigurosa, del volumen de la pirámide y el cono, como la tercera parte de los correspondientes prisma y cilindro, respectivamente. Bajo un atomismo geométrico, Demócrito considera estos sólidos como si estuvieran formados por innumerables capas paralelas, anticipándose así, al famoso *principio de Cavalieri.*

Esto da muestra de como los filósofos griegos iban introduciendo ciertos interrogantes para intentar resolver los problemas más profundos de las matemáticas, aquellos que contienen *al infinito,* al intentar explicar la composición de los entes geométricos, aunque en el caso de Demócrito, éste no intenta ir más allá en la metafísica en cuestión.

En la línea del rastro del infinito, el filósofo Anaxágoras, experto en geometría, establece una aguda definición de lo que podría ser llamado "*axioma de continuidad*"[76]

[...]. En lo pequeño no existe lo extremadamente pequeño, sino algo cada vez más pequeño, [...]. De igual modo, en lo grande siempre hay algo más grande, [...].

Los griegos no usaron la noción de movimiento en sus obras sistemáticas, aunque sí realizaron bastantes descubrimientos ayudándose imaginativamente con puntos móviles imaginarios. Esto puede atribuirse a la escuela eleática[77], a la cual perteneció Zenón (495-435 a.C.), quien inventó algunas aporías[i] sumamente sutiles para resaltar las dificultades de la noción de movimiento, si se admite que el tiempo y el espacio sean infinitamente divisibles. Un ejemplo clásico, es el relativo al de *Aquiles y la tortuga.*

Para evitar los infinitesimales, Eudoxo arbitró un método que expone Euclides en el libro XII de sus *Elementos*, el conocido método de exhaución, que incluye "sospechosas consideraciones sobre infinitesimales"[78].

Es usualmente conocido que cuando los griegos deseaban hallar el área circunscrita por una curva, consideraban la curva como la frontera fija a la que se aproximan ***continuamente*** los polígonos inscritos y circunscritos, a medida que aumentan el número de sus lados, tanto como se quiera. Así, agotaban en cierta medida el espacio comprendido entre esos polígonos y la curva; Por lo tanto, los griegos se apoyaban en ***la ley de continuidad o axioma de continuidad***[79] como su guía y podían, en ciertos casos llegar a un conocimiento exacto de las propiedades de las curvas.

A manera de ejemplo, revisaremos el Método de Antifón, llamado *el sofista*, contemporáneo de Sócrates, y de quien se conoce su trabajo a través de Aristóteles, en su *Física*, y que para cuadrar un círculo, establece:

---

[i] Aporía: dentro de la filosofía significa incertidumbre o contradicción insoluble.

"... inscribe sobre el círculo un polígono regular, por ejemplo un triángulo o un cuadrado. Sobre cada lado del polígono construye un triángulo isósceles, obteniendo un polígono regular de doble número de lados que el anterior; se repite la operación continuamente".

Antifón piensa que de esta manera el área del círculo podría ser cuadrada, ya que después de un cierto número de veces de realizar la operación de duplicar los lados del polígono tendríamos un polígono inscrito en el círculo, cuyos lados debido a su pequeñez coincidirían con la circunferencia del círculo. Y puesto que para todo polígono podríamos construir un cuadrado equivalente, [sic], estaríamos en disposición de conseguir un cuadrado igual al círculo.

Diversos comentadores señalan que, en su argumentación, Antifón infringe el principio según el cual *"un círculo debe cortar a un segmento en un sólo punto"*. Eudemo[80] apunta más atinadamente que el principio infringido es que *"las magnitudes son divisibles sin límite"*. Así, siendo el área divisible *sin límite*, el proceso descrito por Antifón nunca alcanzará a toda el área, por tanto los lados del polígono inscrito se acercan *en potencia* a la circunferencia, pero nunca ocuparán *en acto* la posición de la misma.

Se señala que no obstante el discurso falaz de Antifón, éste ocupa una posición honorable en la pléyade de geómetras griegos, porque su método supone un avance hacia la idea de "*acercarse con tanta aproximación como se quiera*"

Aristóteles considera toda magnitud finita pero, como admite la infinita divisibilidad, rechaza el atomismo geométrico. La antinomia[i] entre rechazo o admisión del infinito es resuelta acuñando los términos *actual* y *potencial*. Un infinito *en acto*, es decir, un todo constituido de una infinidad actual de cosas dadas, no puede ser pensado como intelegible[ii]; sin embargo, sí se puede pensar en una magnitud creciente por encima, *en potencia*, de todo límite, o en una serie de magnitudes cada vez más pequeñas que *en potencia* pueden hacerse más pequeñas que cualquier magnitud. Pero de estas magnitudes que no están dadas como una infinidad acabada, siendo susceptibles de ser prolongadas *tanto como uno quiera*, puede decirse que son *infinitas en potencia*.

Para Aristóteles el infinito es como una ilusión del pensamiento que puede traspasar potencialmente un límite prefijado, pero distingue la cuestión del infinitamente grande y el infinitamente pequeño en las magnitudes y en los números. Aristóteles se ocupó ampliamente de las paradojas de Zenón e intentó rebatirlas con base en el sentido común aplicando, la doctrina de la potencia y del acto. Por ejemplo, concibe el movimiento como una actualización de potencias, es decir, como un transito de la potencia al acto.

El pensamiento y la obra de Arquímedes han ejercido siempre una irresistible atracción, por su genialidad y originalidad, que han hecho de su legado una fuente para varias ramas de la ciencia, especialmente la matemática y singularmente el cálculo infinitesimal.

El método de exhaución, en manos de Arquímedes, se convirtió en un poderoso instrumento infinitesimal rigurosamente lógico que permitió obtener intuitivamente y convalidar numerosos resultados sobre cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad que aún hoy en día se siguen obteniendo, desde luego con los ya perfeccionados métodos del cálculo.

En el tratado aristotélico *Phisics*[81] se presentó un análisis del infinito, la existencia de indivisibles o infinitesimales y la divisibilidad de cantidades continuas, tales como tiempo, movimiento y magnitudes

---

[i] Contradicción entre dos ideas o principios dentro de una teoría deductiva.

[ii] En filosofía, que sólo es conocido por el entendimiento.

geométricas. Partiendo de que el movimiento pertenece a la clase de cosas que son continuas y dado que el infinito representa en sí mismo el primero de los continuos, a menudo éste será usado en las definiciones del continuo. (lo que es infinitamente divisible es continuo)[82]

La teoría de las razones y proporciones entre magnitudes geométricas propone que estas magnitudes componen un sistema ordenado y satisfacen las condiciones ordinarias de adición, sustracción y multiplicación, extensibles a sus partes y sus múltiplos. Señala que si x es un m-múltiplo de y, es decir x mide m veces y, entonces y es una m-ésima-parte de x. Así, dos magnitudes guardan entre sí una razón si, al ser multiplicadas, una puede exceder a la otra.[83].

Como siempre cabe considerar la m-parte de una magnitud, se deduce que no hay una magnitud mínima. El sistema contiene al menos una magnitud y las iguales a ella y admite magnitudes inconmensurables. En consecuencia, la axiomatización de la teoría de las proporciones utilizada en la matemática del siglo III incluye la asunción de la no-existencia de una magnitud máxima ni mínima; la existencia de m-partes, la condición arquimedea, la de densidad y la de continuidad.

Comentarios adicionales:

Obsérvese como la matemática griega rehuyó el referirse a situaciones explícitas que involucraran fenómenos vinculados al movimiento, por su carácter de continuo y su directa implicación de infinitamente divisible. No obstante su método de exhaución lleva implícito el infinito y la continuidad. Nótese que se habla de magnitudes inconmensurables, que podrían interpretarse como los números irracionales. Se inicia el uso de "*acercarse con tanta aproximación como se quiera*" y se hace referencia (Eudemo) aunque sin definir al *infinito potencial* y al *infinito actual*.

5.2. SIGLO XIV

Los escolásticos de la edad media trataron de responder al cuestionamiento de Aristóteles sobre "la existencia o no del infinito, y si éste existe qué es"[84]. Su respuesta a este desafío fue entusiasta; sus especulaciones detalladas y cuestionamientos sobre el infinito, la naturaleza del continuo y la existencia de los indivisibles, fueron de carácter más filosófico que matemático y generalmente inciertas para un punto de vista científico. Sin embargo, frecuentemente mostraron una aguda apreciación de las dificultades lógicas, que sólo fueron resueltas hasta finales del siglo XIX. Esta actividad submatemática sin duda, aumentó la aceptación de las técnicas infinitesimales que fueron tabú en la matemática griega, pero libremente usada con grandes ventajas en el siglo XVII.

Una de las consecuencias inmediatas fueron los estudios sobre cambio de movimiento que empezaron en los inicios del siglo XIV. El concepto de variación continua de las cantidades no fue utilizada por los matemáticos griegos, dado que sus cantidades fueron en lo numérico: discretas y en lo geométrico: estáticas; ellos estudiaron sólo movimientos uniformes tales como movimiento rectilíneo y movimiento circular, por lo que los conceptos tales como aceleración y velocidad instantánea, no tenían sentido.

El problema de cantidades variables fue atacado durante el segundo cuarto del siglo XIV por un grupo de filósofos lógicos del Merton College en Oxford, entre los que estaban Thomas Bradwardine, arzobispo de Canterbury y Richard Swineshead, conocido en el medievo como el Calculador. Ellos se interesaron específicamente por lo que llamaron la *latitud de las formas*, y que podría ser descrita como *la cuantificación* *de las formas variables,* un concepto de Aristóteles equivalente al de las cualidades. En la filosofía aristotélica, *las cualidades* fueron atributos que admiten variación de la *intensidad* (en un punto del cuerpo o en un instante en el tiempo) tales como la variación de la temperatura y la densidad, a partir de un punto inicial, (por ejemplo T_0 o D_0). *La intensidad de cualidades* fue diferenciada de las correspondientes cantidades globales, tales como el peso. Análogamente, la velocidad instantánea fue considerada como *una cualidad,* la *intensidad* de movimiento; cuya cantidad correspondiente fue el movimiento total, es decir la distancia recorrida. Los escolásticos de Merton buscaron estudiar las variaciones en la intensidad de la cualidad.

Ellos reconocieron que el fondo del asunto está en formular las definiciones de aquellos términos que provean una adecuada base para el análisis cuantitativo. Definieron el movimiento uniforme, "si iguales distancias son cubiertas en tiempos iguales"; la aceleración uniforme, fue definida a través de iguales incrementos de velocidad en iguales intervalos de tiempo. Pero aún el más simple caso de variación del movimiento, necesitaba de la definición de *movimiento instantáneo.* Faltando la noción del límite de una razón, ellos sólo pudieron definir la velocidad instantánea en términos de la distancia que sería atravesada por un punto, si éste se moviese uniformemente sobre un período de tiempo con la misma velocidad que poseyera en el instante en cuestión

Bradwardine distinguió dos tipos de magnitud infinita, una infinita *a secas*, que no tiene fin, y otra tal que para cada magnitud finita existe otra mayor, sin pararse nunca. Algunos historiadores aprecian en esta distinción una analogía con el infinito y transfinito de Cantor. Bradwardine consideraba que una magnitud continua no podía estar formada por un número finito de magnitudes indivisibles, sino que incluiría un número infinito de indivisibles, pero no estarían constituidas por átomos matemáticos, sino que cada continuo estaría formado por un número infinito de elementos continuos de la misma naturaleza, así por ejemplo, un segmento, un área o un volumen estaría compuesto, cada uno, por infinitos segmentos, áreas o volúmenes.

Bradwardine, también distinguió entre el *continuo fijo*, que se manifiesta en las líneas, las superficies y los volúmenes y el *continuo progresivo* que acontece en el tiempo y el movimiento. Como síntesis de lo anterior, se citan las siguientes frases:
... Lo indivisible es lo que no puede dividirse nunca. El punto es lo indivisible determinado por su posición ... . El movimiento es lo continuo sucesivo medido en el tiempo.

5.3. SIGLO XVII

5.3.1. CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL PERÍODO

La matemática de este período estuvo fuertemente influida por la matemática griega clásica y también por la del período precedente. Se había hecho usual que los matemáticos del siglo XVI adquirieran los conocimientos de esta materia, pues constituía un elemento básico de la formación matemática. La matemática griega fue admirada especialmente por su alto grado de rigor, sin embargo sus métodos no eran heurísticos[i], es decir, no se adaptaban bien a sugerir ideas sobre cómo atacar un problema nuevo[ii]. Así, fue natural buscar otros

[i] Relativo a la disciplina que trata de establecer las reglas de la investigación.

[ii] Para los psicólogos educativos, enfrentarse a un problema implica necesariamente que éste sea nuevo.

métodos que, si bien no estaban al nivel de la exigencia griega de exactitud, por lo menos fueran capaces de sugerir ideas para la solución de los problemas.

Las causas que produjeron tales métodos se dieron a finales del siglo XVI y principios del XVII, que fue una época fértil para las ciencias exactas como un todo. La Astronomía con Kepler, la Estática con Simon Stevin, en Mecánica con Galileo quien dio auge al rompimiento de la física aristotélica.

Se puede señalar que el mayor logro del siglo XVII fue el cálculo infinitesimal. De él fructificaron importantes ramas de la matemática, tales como las ecuaciones diferenciales, la geometría diferencial, el cálculo de variaciones, las series infinitas y otras más. La semilla para el florecimiento estuvo dada básicamente en los trabajos de Newton y Leibniz. Se introdujo y usó la concepción más elemental de función, destacando un avance sobre las funciones más simples tales como las algebraicas y las trascendentes que alcanzaron un nivel de conocimiento y desarrollo prácticamente equivalente al actual; como ejemplos se pueden citar:

i. La función logarítmica, originada como relación entre los términos de una progresión geométrica y una aritmética, y que fue tratada como la serie resultante de la integración de $\frac{1}{1+x}$. Los estudios realizados por Wallis, Newton, Leibniz y Jean Bernoulli sobre la función logarítmica, mostraron que era la inversa de la exponencial, cuyas propiedades se consideraban relativamente simples.
ii. Se dieron por parte de Newton y Leibniz, los desarrollos en serie de las funciones trigonométricas.

Newton hizo hincapié en el uso de la derivada y la antiderivada, en tanto que Leibniz puso énfasis en los diferenciales y su suma. Galileo tuvo la intención de escribir un libro sobre indivisibles, pero éste nunca se publicó.[85]. Kepler hizo uso de los métodos infinitesimales en sus obras; en el cálculo de volúmenes de toneles de vino[86], él consideraba sólidos de revolución como si estuvieran compuestos de diversas maneras por una cantidad infinita de partes sólidas. Por ejemplo, él consideraba una esfera como si estuviera formada por un número infinito de conos con vértice común en el centro y base en la superficie de la esfera.

Cabe señalar que la mayoría de los matemáticos del siglo XVII no eran matemáticos profesionales, así, Fermat era abogado lo mismo que Vieta; Descartes y Pascal, disponían de recursos privados y se ocupaban, además de la matemática con la que no tenían conexión oficial alguna, de la física y la filosofía. Así en la Francia de aquella época sólo Roverbal ocupaba una cátedra de matemáticas.

El período considerado ofreció varios buenos ejemplos del descubrimiento independiente y casi simultáneo de métodos sorprendentemente parecidos, que dieron lugar frecuentemente a disputas sobre prioridad y a acusaciones de plagio; baste con recordar Newton y Leibniz. Fue hasta el último tercio del siglo XVII en que aparecieron las revistas científicas; hasta entonces, los matemáticos se comunicaban sus resultados por carta.

5.3.2. EL MÉTODO DE LOS INDIVISIBLES DE CAVALIERI, 1635.

El siguiente camino que tomaron los matemáticos de principios del siglo XVII fue derivado de una concepción intuitiva inmediata a las magnitudes geométricas. Se imaginaron, por ejemplo, la línea formada por un número infinito de puntos, él área como formada por un número infinito de rectas paralelas y el volumen formado por un número infinito de planos también paralelos. Se señala que Heiberg encontró en 1906 *El Método* de Arquímedes, que éste también había adoptado este punto de vista en su búsqueda de resultados, pero no obstante no lo consideró lo suficientemente riguroso[87] como para aplicarlo a las demostraciones.

Kepler también usó técnicas que implicaban consideraciones intuitivas análogas y la primera exposición sistemática del método de los indivisibles. Cavalieri en 1635 publicó "Geometría de los continuos por indivisibles, presentada por un nuevo método"[88], (La *Geometría*), y que tenía por objeto legitimar tales técnicas.

La mayoría de los matemáticos vinculados con el método de los indivisibles, lo creían sólo un método heurístico, cuyos resultados aún requerían de una rigurosa demostración, por exhaución, pues no se mostraban satisfechos con el valor de la demostración por indivisibles.

El enfoque de Cavalieri podría resumirse en lo siguiente:

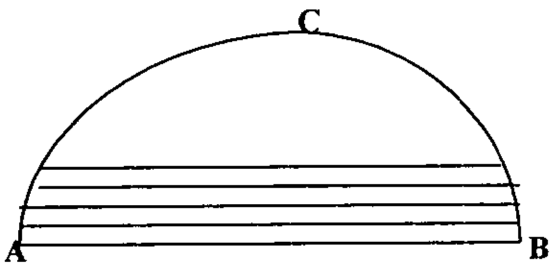


Figura 5.3.2.1

- Sea una figura plana dada F=ABC limitada por una curva ABC y una recta AB que se llamará "regula"
- Cavalieri consideraba una línea recta que, partiendo de la posición AB en la figura, se desplazaba uniformemente conservándose siempre paralela a AB y que en sus posiciones sucesivas a lo largo de su movimiento, generaba un haz de segmentos paralelos que determinaba la figura F. A estos segmentos paralelos los llamó "*todas las líneas de la figura dada*"[89], aunque a veces también se refería a ellos como "*los indivisibles de la figura dada*".
- Si se representa el haz de segmentos por $O_F(l)$ y lo expresamos en términos modernos, entonces se tendría la aplicación del conjunto de figuras planas a un conjunto formado por haces de segmentos paralelos

: $F \rightarrow O_F(l)$..(5.3.2.2)

- A continuación, extendía la teoría de magnitudes de Eudoxo, incluyendo en ellas $\{O_F(l)\}$
- Después establecía entre las dos figuras planas la relación fundamental[i]

  $F_1 : F_2 = O_{F_1}(l) : O_{F_2}(l)$ ....(5.3.2.3)

- Si la *regula* fuese un plano en lugar de una recta, se tendría una relación de manera análoga, donde si S_i fuese un sólido y $O_{S_i}(p)$ todos los planos que corresponden a él, para $i=1,2$ entonces:

  $S_1 : S_2 = O_{S_1}(p) : O_{S_2}(p)$ ....(5.3.2.4)

El objetivo de Cavalieri era hallar la razón de la izquierda de (5.3.2.3) por medio del cálculo de la razón de la derecha, lo que condujo al "teorema de Cavalieri" utilizando el postulado[90] que dice:

"Si en dos figuras dadas de la misma altura F_1 y F_2, todo par de segmentos correspondientes (es decir, segmentos a distancias iguales de la regla común) tiene la misma razón, entonces $O_{F_1}(l)$ y $O_{F_2}(l)$ también tienen esta misma razón".

---

[i] La relación no es matemáticamente del todo satisfactoria.

El teorema de Cavalieri en notación moderna dice:
"Si para todo x tal que $0<x<a$ se tiene que $f_1(x){:}\,f_2(x)=b{:}c$, entonces $F_1{:}F_2=b{:}c$"

La habilidad con que Cavalieri utiliza sus resultados basados en los infinitesimales puede verse en el siguiente ejemplo:

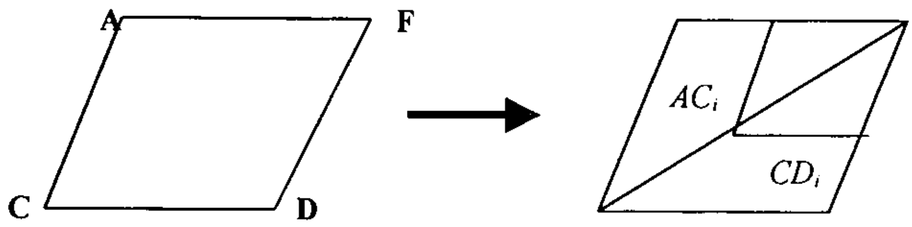


Figura 5.3.2.5

Se construye un paralelogramo $ACDF$ con $CA=CD$, de tal forma que el área del triángulo CAF sea igual al área del triángulo CDF; la suma de las dos áreas de los triángulos será el área del paralelogramo. Utilizando la notación de Cavalieri:

$$O_{ACF}(l)=O_{CDF}(l) \text{ y } O_{ACDF}(l)=O_{ACF}(l)+O_{CDF}(l) \text{ ....(5.3.2.6)}$$

Tomando AC y CD y desplazando cada una de ellas para formar un haz sobre CAF y CDF, respectivamente, de tal forma que $AC_i=CD_i$ para toda i, de tal forma que se verifique (5.3.2.6), entonces,

$$\frac{\text{area de un triangulo}}{\text{area del paralelogramo}}=\frac{1}{2}\text{, o bien, con la notación de Cavalieri}$$

$$\frac{O_{ACF}(l)}{O_{ACF}(l)+O_{CDF}(l)}=\frac{O_{ACF}(l)}{O_{ACDF}(l)}=\frac{1}{2} \text{ ....(5.3.2.7)}$$

ahora utilizando la notación moderna, se puede reescribir como

$$\frac{\int_0^a x\,dx}{\int_0^a a\,dx}=\frac{1}{2} \text{ ....(5.3.2.8)}$$

con $a=AC$ y $x=AC_i$

Comentarios adicionales:

Las críticas que recibieron los métodos de Cavalieri, se debían básicamente a:
i) La naturaleza de sus *indivisibles*. Faltaba dar una definición precisa de un *indivisible*, pues habia que entender perfectamente que significaba una magnitud infinitesimal y qué debía entenderse por una suma infinita.
ii) El problema de la estructura del continuo. Los indivisibles iban contra la concepción aristotélica del continuo como divisible en partes del mismo tipo de magnitud original, siendo estas partes de nuevo divisibles indefinidamente. Es decir, al considerar una figura plana, cuya dimensión es dos y corresponde a un área, entonces al dividirla, sus partes deberían de ser otra vez áreas de dimensión dos. Para tratar de evitar este problema de dimensionalidad, se propuso formarla por rectángulos de anchura infinitesimal Δx, pero realmente no se resolvía el problema.

5.3.3. USO DE INFINITESIMALES POR FERMAT, 1636.

Alrededor de 1636, circuló entre los matemáticos franceses una memoria de Fermat titulada *Methodus ad disquirendam maximam et minimum*[91], en donde se proponía el primer método general conocido para determinar máximos y mínimos, pero que presentaba otra característica notable, como lo era la idea de dar un incremento a una magnitud que podríamos interpretar como la variable independiente.

El método o regla se enunció de la siguiente manera:

- I. Sea A un término relacionado con el problema.
- II. La cantidad máxima o mínima está expresada en términos que contienen sólo potencias de A.
- III. Se sustituye A por A+E, y el máximo o mínimo queda entonces expresado en términos de potencias de A y E.
- IV. Las dos expresiones del máximo o mínimo se hacen "adiguales"[i], lo que significa algo así como "tan aproximadamente iguales como sea posible"
- V. Los términos comunes se eliminan.
- VI. Se dividen todos los términos por una misma potencia de E de manera que al menos uno de los términos resultantes no contenga a E.
- VII. Se ignoran los términos que aún contienen a E.
- VIII. Los restos se hacen iguales.

Al final del paso VIII, se obtendrá una ecuación que deberá resolverse y que proporcionará el valor de A que haga que la expresión tome un máximo o un mínimo.

En el proceso actual para hallar máximos y mínimos, correspondería a lo que algunos autores llaman los *valores críticos de la función*. Para poder visualizar más fácilmente el método y en el uso de los infinitesimales, se propone analizar el ejemplo que el propio Fermat utilizaba:

"Hallar el punto E de un segmento CD que hace máximo el área de un rectángulo DE · EC"

- Para facilitar la notación, se propone hacer: CD=b; CE=A=x; E=e; por lo tanto la expresión que se desea maximizar es
  $$x(b-x) \qquad (5.3.3.1)$$
  obsérvese que la expresión (3.2.1) satisface los puntos I y II propuestos en la regla.
- Aplicando los pasos III y IV
  $$(x+e)(b-(x+e)) \approx x(b-x) \qquad (5.3.3.2)$$
  donde el símbolo $\approx$ representa la relación de adigualdad.
- Eliminando los términos comunes, como lo propone la regla V, se obtiene
  $$be \approx 2xe + e^2 \qquad (5.3.3.3)$$
- Dividiendo por e como se propone en la regla VI
  $$b \approx 2x + e \qquad (5.3.3.4)$$
- Por último, aplicando la regla VII,
  $$b = 2x \qquad (5.3.3.5)$$
- Así, la ecuación (5.3.3.5) será la que permita hallar los valores críticos.

[i] Fermat usó la palabra latina *adaequo* que se tradujo como hacer *adigual*. La idea de adigualdad deriva de Diofanto.

Varios autores han propuesto reproducir el método de Fermat proponiendo A=x, E=Δx y la cantidad a hacer máxima $f(x)$.

Aplicando la regla nos daría:

- Pasos IV y V $\quad f(x+\Delta x)-f(x)\approx 0$ ....(5.3.3.6)
- Paso VI $\quad \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\approx 0$ ....(5.3.3.7)
- Pasos VII y VIII $\quad \left(\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)_{\Delta x=0}=0$ ....(5.3.3.8)

Aventurándose aún más en la especulación, se podría decir que si x_0 hiciese que la función $f(x)$ tomase un extremo relativo, y fuese el resultado de la ecuación

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)_{\Delta x=0}=0 \text{ ....(5.3.3.9)}$$

aunque esto, significaría ir demasiado lejos, en razón de que Fermat no existe evidencia de que pensara en una cantidad como una función y no decía nada acerca de que E fuese un infinitesimal, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y finalmente el método no implicaba concepto alguno de límite.

Comentarios adicionales:

Su trabajo presenta una magnífica aproximación de lo que serían las funciones y los incrementos tal como ahora se conocen. De alguna manera, conserva el sentido dual en sus incrementos, uno como cantidades despreciables cuando se hallan como sumandos y otro como cantidades que son susceptibles de ser divisores. Su método, si bien no considera el concepto de límite, pudiera tomarse como uno de los precursores del actual proceso para determinar extremos relativos.

5.3.4. NEWTON Y SU TEORÍA DE LAS RAZONES PRIMERAS Y ÚLTIMAS, 1669.

En el *De Analysi* (1669) Newton da un método general para hallar la relación entre la cuadratura de una curva y su ordenada. Este método da muestra de que él se dio cuenta de la relación inversa existente entre la integración y la diferenciación, aunque no utilizó tales términos.

No obstante que explica su método mediante un ejemplo, queda perfectamente claro el carácter general del mismo. Procede del siguiente modo

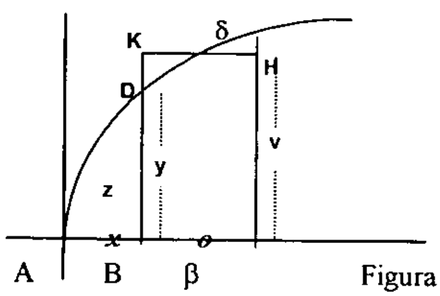


Figura 5.3.4.1

Sea la figura (5.3.4.1), el área $ABD=z$, $AB=x$; sean $B\beta=o$ y $BK=v$.

- Tómese, por ejemplo, la curva

$$z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \text{ es decir } z^2=\frac{4}{9}x^3 \qquad (5.3.4.2)$$

- dése un incremento pequeño o para x y uno ov para z, de donde

$$(z+ov)^2=\frac{4}{9}(x+o)^3 \qquad (5.3.4.3)$$

- desarrollando los binomios

$$z^2+2zov+o^2v^2=\frac{4}{9}(x^3+3x^2o+3xo^2+o^3) \qquad (5.3.4.4)$$

$$\frac{4}{9}x^3+2zov+o^2v^2=\frac{4}{9}(x^3+3x^2o+3xo^2+o^3) \qquad (5.3.4.5)$$

- simplificando y dividiendo toda la expresión por o

$$2zv+ov^2=\tfrac{4}{9}(3x^2+3xo+o^2) \qquad (5.3.4.6)$$

- tomando o infinitamente pequeño , en cuyo caso, v=y, tal como se puede apreciar en la figura, y eliminando los términos que aún contengan a o, resulta

$$2zy=\frac{4}{3}x^2 \qquad (5.3.4.7)$$

- sustituyendo el valor de z por $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$,entonces

$$y=x^{\frac{1}{2}} \qquad (5.3.4.8)$$

Debe notarse que este procedimiento puede aplicarse a todas las funciones polinómicas que se den de z, en términos de x. Obsérvese que en el procedimiento, el uso de los *infinitamente pequeños*, sirve para calcular la derivada (en este caso de la z dada) de una función algebraica del tipo $f(x,z)$. Desde luego, Newton se dio cuenta que los problemas de cuadraturas debían de enfocarse de manera inversa, así, si se calcula la y para cada función algebraica de z, se podrían determinar todos los tipos de curvas (y,x) que se pueden cuadrar.

Con el método anterior, Newton determinó las y de tales curvas cuadrables, formando así las primeras tablas de integrales. Extendiendo su uso, Newton desarrolló diversos algoritmos para calcular extremos relativos, tangentes y curvaturas en términos de *fluentes* y *fluxiones*.

Los términos de *fluentes* y *fluxiones* señalan la forma en que Newton concebía las cantidades variables en su geometría analítica. Así, las *cantidades fluyentes* son las cantidades que varían con el tiempo. Con la idea de ser más explícito, veamos el ejemplo anterior, con referencia a la figura (5.3.4.1), en donde Newton suponía que el punto genérico D se mueve a lo largo de la curva, mientras que su correspondiente ordenada, su abscisa y su cuadratura, o sea y, x y z respectivamente, o cualquier otra cantidad relacionada con la curva, aumentaría o disminuiría, es decir *fluiría*.

A las cantidades que fluyen, las llamo *fluentes*, en este caso las variables x, y y z, por oposición a las cantidades constantes que apareciesen en el problema en cuestión, y a su *velocidad de cambio con respecto al tiempo* le llamó *fluxión*.

Para referirse a sus *fluxiones*, en 1671 introdujo la notación "punteada", véase el siguiente cuadro:

fluentes	x	y	z
fluxiones de las fuentes	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{z}$

A Newton, realmente no le interesa la forma en que las fluentes varían con el tiempo, por lo tanto a menudo supone que se mueven uniformemente, es decir $\dot{x}=1$. Lo que para él tiene mayor trascendencia es la razón entre las *fluxiones*, es decir $\dot{y}/\dot{x}$, que proporciona la pendiente de la recta tangente.

La idea de Newton de considerar cantidades que se movieran en el tiempo, era para resolver las dificultades de fundamentación que planteaba el uso de *incrementos pequeños* de las respectivas variables, los cuales son tan pequeños que se pueden despreciar, pero que no son nulos, ya que se pueden establecer razones entre ellos.

Newton afirmaba que su cálculo de fluxiones no dependía de la existencia o no, de las cantidades infinitamente pequeñas, pues su concepto fundamental era la *fluxión*, o mejor aún las razones entre ellas. Además explicaba que la razón de las fluxiones $\dot{y}/\dot{x}$ era igual a la *primera* o *última* de las razones de los incrementos o decrementos de *y* y de *x*, respectivamente, es decir la *primera* si se tienen incrementos y la última si se tienen decrementos.

La *razón primera* corresponde a los incrementos *nacientes* y es la que tienen justamente al llegar a ser. La *razón última* es la que alcanzan los decrementos exactamente antes de desvanecerse, por lo que también les llamó *incrementos evanescentes*.

Con base a sus métodos propuestos, Newton consiguió resolver lo que él mismo consideraba como los dos problemas fundamentales del cálculo infinitesimal:

i) Dadas las fluentes y sus relaciones, hallar las fluxiones correspondientes.
Esto implica determinar la tangente a la curva.
ii) Dada la relación entre fluxiones, hallar la relación entre las fluentes.
Esto implica poder resolver una ecuación diferencial.

Con objeto de tener una visión precisa sobre el uso de sus *incrementos de tiempo infinitesimales*, se analiza el siguiente ejemplo:

Considérese la curva dada por la ecuación

$$x^2-axy+y^2=0 \qquad (5.3.4.9)$$

sea o un incremento de tiempo infinitesimal y sean $\dot{x}o$ $\dot{y}o$ los incrementos correspondientes a las *fluentes x y y* respectivamente, entonces la expresión (5.3.4.9) se modificará a

$$(x+\dot{x}o)^2-a(x+\dot{x}o)(y+\dot{y}o)+(y+\dot{y}o)^2=0 \qquad (5.3.4.10)$$

$$x^2+2x\dot{x}o+\dot{x}^2o^2-axy-ax\dot{y}o-ay\dot{x}o-a\dot{x}o\dot{y}o+y^2+2y\dot{y}o+\dot{y}^2o^2=0 \qquad (5.3.4.11)$$

ahora, se debe eliminar $x^2-axy+y^2=0$ de la expresión (5.3.4.11), por tanto

$$x^2+2x\dot{x}o+\dot{x}^2o^2-axy-ax\dot{y}o-ay\dot{x}o-a\dot{x}o\dot{y}o+y^2+2y\dot{y}o+\dot{y}^2o^2-x^2+axy-y^2=0 \qquad (5.3.4.12)$$

$$2x\dot{x}o+\dot{x}^2o^2-ax\dot{y}o-ay\dot{x}o-a\dot{x}o\dot{y}o+2y\dot{y}o+\dot{y}^2o^2=0 \qquad (5.3.4.13)$$

dividiendo toda la expresión por o, se tiene

$$2x\dot{x}+\dot{x}^2o-ax\dot{y}-ay\dot{x}-a\dot{x}\dot{y}o+2y\dot{y}+\dot{y}^2o=0 \qquad (5.3.4.14)$$

eliminando los términos que aún contienen o

$$2x\dot{x}-ax\dot{y}-ay\dot{x}+2y\dot{y}=0 \qquad (5.3.4.15)$$

despejando la razón $\dot{y}/\dot{x}$, entonces el resultado buscado es

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{ay-2x}{2y-ax} \qquad (5.3.4.16)$$

Obsérvese que salvo por el signo, la expresión (5.3.4.16) corresponde a $-\frac{f_x}{f_y}$

Comentarios adicionales:

Newton, si bien no justifica la existencia de los infinitesimales, sí los usa para poder obtener resultados correctos. Contrario a la posición de los griegos de no manejar los problemas en contextos que impliquen movimiento, él sí hace uso de este elemento, con lo cual justifica sus razones primera y última. De alguna manera da por sentado la continuidad de las funciones, al introducir el movimiento en el tiempo. Establece una nueva notación, la que corresponde a letras con un punto sobre ellas, misma que aún en la actualidad varios textos manejan. Empieza a diferenciar las cantidades variables de las cantidades constantes, aunque aún no existe la definición de función y todavía no existe el concepto de límite.

5.3.5. Los problemas geométrico-infinitesimales de Leibniz, 1684 y 1686[92].

De los resultados obtenidos por Leibniz sobre sucesiones numéricas del tipo

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots$$

y sus sucesiones de diferencias primeras asociadas,

$$b_1 = a_1 - a_2,\ b_2 = a_2 - a_3,\ b_3 = a_3 - a_4,\ldots$$

cayendo en cuenta de que,

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1}$$

y que dieron lugar a su *triángulo armónico* como se vio en el capítulo sobre series, página 67, Leibniz pudo darse cuenta de que al formar las sucesiones de diferencias y las sucesiones de sumas, éstas eran operaciones inversas una de la otra, surgiendo una idea fundamental, que adquirió todo su significado al aplicarla a la geometría.

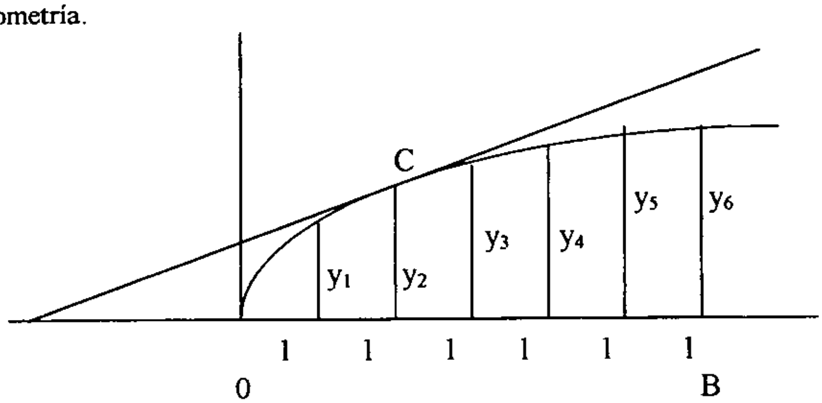


Figura 5.3.5.1

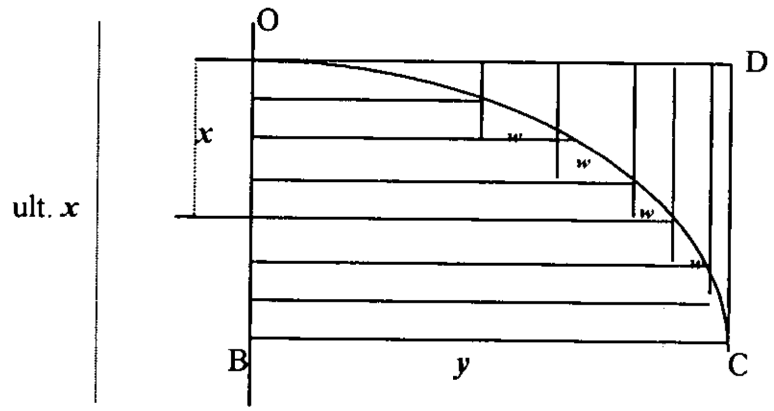
Si se toma como referencia a la figura (5.3.5.1), que define una sucesión de ordenadas equidistantes *y*, colocadas una de la otra a una distancia de 1, es decir su longitud es de una unidad, entonces, una aproximación de la cuadratura será la suma de estas ordenadas, y la diferencia de dos ordenadas sucesivas dará una aproximación de la pendiente de la correspondiente tangente. Así Leibniz plantea que si la unidad de longitud, pudiera ser tomada ***infinitamente pequeña***, estas aproximaciones de la cuadratura y de la tangente se harían exactas. En consecuencia, la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas.

Aunque de manera imprecisa, hacia 1673, Leibniz ya sugería un cálculo infinitesimal de sumas y diferencias de ordenadas, mediante el cual podían ser determinadas cuadraturas y tangentes y que, estas determinaciones aparecían como procesos inversos.

Es conveniente reiterar que una de las ideas principales en el descubrimiento de Leibniz era la de construir un lenguaje simbólico general para escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de argumentación y de razonamiento. Los símbolos deberían obedecer ciertas reglas de combinación entre ellos para garantizar la corrección de los argumentos formulados en este lenguaje. Congruente con lo anterior Leibniz empieza a utilizar el símbolo $\int l$, para sustituir la notación de Cavalieri de omn.l que significa la suma de todas las l; el símbolo "$\int$" tiene la forma de una letra "s" tal como se usaban en los manuscritos de la época de Leibniz, además de ser la primera letra de la palabra *summa*. Para la diferenciación propone el símbolo "d".

Para poder tener una idea más precisa del contexto que lo llevó a su propuesta, se revisará a detalle un ejemplo típico de las investigaciones de Leibniz, y que tienen que ver con la creación de su cálculo. El ejemplo, si bien se refiere a la cuadratura de curvas, puede dar una idea de los antecedentes al concepto de diferencial y con ello al de infinitamente pequeño.

En un diagrama como el siguiente, se considera una sucesión de ordenadas y correspondientes a la curva OC, siendo las distancias sucesivas entre estas ordenadas, la unidad infinitesimalmente pequeña, representadas por w, con lo cual el área OBC es igual a la suma de las ordenadas y.



Los rectángulos $(w)(x)$ se interpretan como los momentos de las diferencias de w con respecto al eje OD[93] En consecuencia el área OCD representa el momento total de las diferencias w , y como el área OCB es el complemento de OCD en el rectángulo $ODCB$, Leibniz encuentra que "los momentos de las diferencias con respecto a una línea recta perpendicular al eje son iguales al complemento de la suma de los términos"

Los "términos" son la ordenadas y, es decir la sucesión $(y_1, y_2, y_3,...)$y w es la sucesión $(w_1, w_2, w_3,\ )$ de las diferencias de la sucesión de ordenadas y, es decir, $w_1=y_1-y_0$, $w_2=y_2-y_1$,...y recíprocamente y es la sucesión de sumas de las w, veámoslo:

$$y_1=w_1+y_0; \qquad \text{si } y_0=0\text{, entonces} \qquad y_1=w_1$$
$$y_2=w_2+y_1 \qquad \text{si } y_1=w_1 \text{ entonces} \qquad y_2=w_1+w_2 \quad ......(5.3.5.2)$$

y así sucesivamente, de modo que eliminando de la notación las y, entonces queda la sucesión en términos de w

$$w_1,\ w_1+w_2,\ w_1+w_2+w_3,... \qquad ....(5.3.5.3)$$

de donde se tiene que
"los momentos de los "términos" son iguales al complemento de la suma de las sumas". En esta proposición, los "términos" son las w.

Leibniz escribe este resultado por medio de una fórmula que utiliza para la suma el símbolo omn. de Cavalieri, que es la abreviatura de *omnes linae*, que significa todas las líneas. La fórmula exactamente igual a la que él usó, contiene además el símbolo

$$\sqcap$$

utilizado para la igualdad; *ult.* x que significa el *ultimus* x, el último de los x, es decir OB, y se usan además líneas por encima de los términos y comas, donde ahora se pondrían paréntesis.

$$\underbrace{\text{omn.}\overline{xw}}_{\substack{\text{suma de momentos}\\ \text{de los términos de } w}} = \underbrace{\underbrace{\text{ult. } x, \overline{\text{omn. } w},}_{\text{total}} - \underbrace{\overline{\text{omn. omn. } w}}_{\substack{\text{suma de las sumas}\\ \text{de los términos}}}}_{\text{complemento de la suma de las sumas de los términos.}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5.3.5.4)$$

En un manuscrito posterior, Leibniz parte de la expresión (5.3.5.4), ahora escrita de la forma

$$\text{omn.}xl = \text{ult. } x, \text{ omn. } l, - \text{omn. omn. } l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.3.5.5)$$

donde l se refiere a las líneas que, colocadas una tras otra, llenan un área. Aquí recalca la concepción de la sucesión de ordenadas a una distancia infinitamente pequeña, unas de otras; señala "...se toma l como un término de la progresión, y x es el número que expresa la posición u orden de la l correspondiente a él; o bien x es el número ordinal y l la cosa ordenada".

Con objeto de acercarnos a la noción de infinitesimal que se encuentra fuertemente vinculado con el concepto de diferencial de Leibniz, se expone lo siguiente: él buscó poder mantener su notación congruente con la *Ley de Homogeneidad Dimensional*, que era conocida desde el análisis cartesiano de curvas, en el cual todos los términos que aparecían en las fórmulas debían ser de la misma dimensión, y en consecuencia propone:

i) *omn.* antepuesto a una línea tal como l, da un área, por ser correspondiente a una cuadratura.
ii) *omn.* antepuesto a un área como xl da un sólido, y así sucesivamente.

Obsérvese que en la expresión (5.3.5.5) todos los términos son de dimensión tres. Dado que Leibniz a continuación escribe en su trabajo: "Sería conveniente escribir "$\int$ " en lugar de "omn.", de tal manera que $\int l$ represente omn.l, es decir, la suma de todas las l" se supone que estas consideraciones de homogeneidad le sugirieron usar una única letra en vez del símbolo *omn.* Consecuentemente, Leibniz reescribe inmediatamente después la ecuación (5.3.5.5) utilizando el nuevo simbolismo:

$$\int xl = x\int l - \int\int l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.3.5.6)$$

en términos de sumas su equivalente sería:

$$\sum xl = x\sum l - \sum\sum l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.3.5.7)$$

Nótese que xl correspondería a un área, por lo que al aplicarle Σ, se obtendría un sólido; Σl también corresponde a un área, que al ser multiplicada por x, su dimensión equivaldría a la de un sólido; y por último Σ aplicado Σl, también daría un sólido, verificándose así la ley de homogeneidad.

Leibniz hizo hincapié en que estas reglas se aplican a "las series en las que la razón de las diferencias de los términos, a los términos mismos es menor que cualquier cantidad dada", es decir, a las series cuyas diferencias son infinitamente pequeñas. Así entonces,

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} < \text{cualquier cantidad dada}$$

Unas líneas más adelante, Leibniz introdujo el símbolo "*d*" para la diferenciación. Citando sus propias palabras:
"Dada l y su relación con x, hallar $\int l$. Esto se puede obtener mediante el cálculo inverso, es decir, supongamos que $\int l = ya$, y sea $l = ya/d$; entonces de la misma manera que la $\int$ aumenta las dimensiones, d las disminuirá. Pero la $\int$ representa la suma y d la diferencia, y de la y dada podemos encontrar siempre y/d o l, es decir, la diferencia de las y".

Obsérvese que se introdujo en la notación $1/d$ para la diferencial, con objeto de hacer coincidir las dimensiones en la expresión $l=ya/d$, dado que l representa una línea o sea está en una dimensión y el producto ya, representa un área o sea está en dos dimensiones, luego la d colocada como denominador haría homogéneas las dimensiones en la igualdad. Sin embargo, al darse cuenta de esta desventaja notacional, que no se compensaba con la ventaja de la interpretación dimensional de la $\int$ y de la d, empieza a escribir $d(ya)$ en vez de ya/d, y de ahí en adelante reinterpretaba la d y la $\int$ como símbolos adimensionales.

Leibniz traduce viejos resultados a este nuevo simbolismo, dedicándose a explorar las reglas operacionales que lo rigen. Para él entonces, la *diferencial* de una variable y es *la diferencia infinitamente pequeña* entre dos valores sucesivos de y, es decir, él considera que:

i) Los términos sucesivos de una sucesión de y están infinitamente próximos, de donde dy es la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas de y.
ii) Similarmente, dx es la diferencia infinitamente pequeña entre dos abscisas x sucesivas.
iii) Una suma tal como $\int ydx$[i] es la suma de los rectángulos infinitamente pequeños de base dx y de altura y; por tanto la cuadratura de la curva es igual a $\int ydx$.

Leibniz, quién se mostraba una tanto renuente a presentar su nuevo cálculo (el de 1675) a la comunidad matemática en general, tuvo que hacer frente al problema de que este cálculo utilizaba cantidades infinitamente pequeñas que no estaban definidas rigurosamente y por lo tanto no eran aceptables del todo en las matemáticas. Esto lo llevo a tomar la decisión de presentar un concepto de diferencial en el cual, éste ya no era infinitamente pequeño, sino que era un segmento finito, pero que cumplía las mismas reglas de los infinitamente pequeños.

Observaciones adicionales:

Debe notarse que las diferencias infinitamente pequeñas de Leibniz, corresponden a variables que no realizan ningún recorrido, sino que representan las diferencias entre valores sucesivos de una variable en una sucesión. Así, estas diferencias infinitamente pequeñas no tienen como propiedad la posibilidad de aumentar o disminuir. No deja de ser impresionante como su notación ha trascendido en el tiempo, por lo que es absolutamente común encontrarla en los libros de texto del área de cálculo.

[i] Lo que posteriormente los Bernoulli llamaron *la integral*. Quien introdujo el término fue James (Jakob=Jacobo) y posteriormente lo continuó Jean (John=Johann).

5.3.6. L'HÔPITAL Y JOHN Y JAMES BERNOULLI, 1690S.

Mientras los matemáticos ingleses estaban fuertemente ocupados en cuanto a la validez de los criterios involucrados en el método de fluxiones, el cálculo diferencial fue ganando rápidamente popularidad en el continente europeo. El algoritmo esencial del cálculo diferencial de Leibniz había aparecido en el *Acta eruditorum* por 1684 y en 1686 el *calculus summatorius* o cálculo integral. Esto último fue consecuencia de que Leibniz a diferencia de Newton, mantuvo una extensa correspondencia con numerosos matemáticos sobre el tema del nuevo análisis, buscando las formas más adecuadas de notación y presentación, por lo que creció el grupo de adeptos al tema, quienes pronto pudieron hacer sus propias contribuciones.

Así, entre 1691 y 1692, John y James Bernoulli, fueron los primeros en escribir un pequeño tratado de cálculo diferencial, sin embargo este no fue publicado sino hasta el presente siglo, en 1924. La primera publicación en 1696 de un libro de texto, *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*, fue debido al Marques de L'Hôpital. Cuyo trabajo estuvo basado al menos en una parte, en los primeros trabajos de John Bernoulli. A pesar que en el libro L'Hôpital no discute la naturaleza de los conceptos básicos del cálculo, él representó un papel importante en la divulgación del nuevo tema.

No obstante la popularidad que alcanzó el cálculo de Leibniz, había una total falta de claridad y acuerdo en cuanto a las bases del análisis. Así Voltaire llamó al cálculo "El arte de numerar y medir exactamente una cosa cuya existencia no puede ser percibida". La imprecisión que Leibniz había mostrado fue también compartida por sus seguidores; por ejemplo, John Bernoulli en su pequeño libro sobre cálculo diferencial inicia con un postulado paradójico en que señala que "una cantidad que es disminuida o incrementada por una cantidad infinitamente pequeña, no ha sido disminuida ni aumentada".

Leibniz consideró generalmente sus diferenciales como solamente indefinidos o incomparablemente pequeños, pero John Bernoulli audazmente afirma en una carta a Leibniz en 1698 qué, en tanto el número de términos en la naturaleza es infinito, los infinitesimales existen *ipso facto*. Con esta afirmación intenta aclarar reconstruyendo la exposición de Pascal en la que al final había identificado, a través de una relación recíproca, que la existencia de indefinidamente pequeños estaba implicada por la existencia de los infinitamente grandes. Bernoulli vio la aplicación de este tipo de argumentos al caso de los infinitésimos *actuales*, de donde propone:

> Sea la serie infinita $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$
> entonces, si hay diez términos, existe el décimo;
> si hay cien términos, existe el centésimo; y
> si el número de términos es infinito, como aquí se supone, entones existe el infinitesimal.

En su respuesta, Leibniz, juiciosamente cuidó su argumento relativo a que lo finito no necesitaba valerse de lo infinito, y que además, el infinito y el infinitesimal podrían ser imaginarios, aunque incluso ellos determinen relaciones reales. Sin embargo, Bernoulli no hizo caso de esta advertencia y persistió su punto de vista con respecto a los infinitamente grandes e infinitamente pequeños, lo que invocó los primeros trabajos de Wallis

Mientras John Bernoulli exteriorizó una actitud positiva con referencia a los infinitesimales, James expresó más consideraciones sobre el punto de vista de Leibniz; sostenía que los infinitamente pequeños no podían ser pensados como una cantidad determinada, sino como una ficción del espíritu —una fluxión perpetua hacia la nada—.

En consecuencia, "la razón $\frac{2ydy+dy^2}{4ydy-dy^2}$ es siempre variable y no llega a hacerse constante a menos que *dy* sea exactamente cero" Este punto de vista de la diferencial como una variable, asociaría el cálculo con el método de límites, aunque James Bernoulli fue incapaz de expresar esta noción claramente porque no pudo, al igual que Leibniz, distinguir entre la variable dependiente y la independiente, es decir, el concepto de función no había llegado a ser importante.

A pesar de que James Bernoulli intentó evitar los *pseudo infinitesimales* y mantener que una cantidad más pequeña que cualquier magnitud dada es cero, tuvo dudas sobre su propia actitud. En una ocasión él afirmó que el axioma euclidiano

> "Si cantidades iguales son disminuidas de una igualdad, el resultado es una igualdad"

no necesariamente es absolutamente cierto cuando cantidades incomparablemente pequeñas están implicadas[94]. Por esta razón advirtió que en el cálculo de los infinitamente pequeños uno debe proceder con cuidado y evitar falacias.

Así como unos matemáticos, como Wolff, negaron la existencia de los infinitamente pequeños, otros asumieron el punto de vista opuesto como el italiano Guido Grandi, quien sostuvo la existencia de magnitudes infinitas absolutas e infinitesimales, de varios órdenes.

> "Una cantidad que se aumenta o se disminuye en una cantidad infinitamente pequeña no resulta ni aumentada ni disminuida"[95]

John Bernoulli escribió durante 1691-1692 dos pequeños tratados inéditos sobre el cálculo diferencial e integral y poco tiempo después, estuvo de acuerdo en enseñar la materia al joven Marqués de L'Hôpital a cambio de un salario permanente y comunicarle sus propios descubrimientos matemáticos. Así, sorprendentemente L'Hôpital publica una introducción al cálculo diferencial, de mucho más fácil acceso que las publicaciones de Leibniz y de los Bernoulli. El libro llamado el *Analyse*[96] comienza dando las definiciones de las variables, de sus diferenciales y de los postulados sobre estas diferenciales. Así, escribe la siguiente definición:

> "La parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable es aumentada o disminuida de manera continua, se llama la diferencial de esta cantidad".

Si bien no aborda la cuestión acerca de si tales cantidades existen, sí especifica cómo se comportan. Véanse los siguientes postulados que él enunció:

Postulado 1. Postúlese que dos cantidades cuya diferencia es otra cantidad infinitamente pequeña pueden intercambiarse una por la otra; o bien (lo que es lo mismo) que una cantidad que está incrementada o disminuida solamente en una cantidad infinitamente menor, puede considerarse que permanece constante.

Postulado 2. Una curva puede ser considerada como un polígono de un número infinito de lados, cada uno de ellos de longitud infinitamente pequeña, los cuales determinan la curvatura de la curva por los ángulos que hacen unos con otros.

El primer postulado le permite a L'Hôpital derivar las reglas usuales del cálculo, como por ejemplo:

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x+dx)(y+dy)-xy \\ &= xdy+ydx+dxdy \qquad \text{..................}(5.3.6.1) \\ &= xdy+ydx \end{aligned}$$

"porque *dxdy* es una cantidad infinitamente pequeña con respecto a los otros dos términos *ydx* y *xdy*; puesto que si dividimos, por ejemplo, la expresión *ydx* y *dxdy*, por *dx*, obtendremos como cocientes *y* y *dy*, (donde) el segundo de los cuales es infinitamente menor que el primero".

Es de hacerse notar que el concepto que tiene, L'Hôpital de los diferenciales, es diferente a la de Leibniz, puesto que para éste, los diferenciales son diferencias infinitamente pequeñas entre los valores sucesivos de una variable y para L'Hôpital, las variables van creciendo o decreciendo de manera continua.

Observaciones adicionales:

Nótese que la forma de despreciar las cantidades infinitamente pequeñas, no responde a un concepto matemático preciso, sino más bien en una idea de sentido común, basado en la comparación de dos cantidades. Si bien el proceso es criticable, era suficientemente funcional. También vale la pena reconocer que en el ejemplo que lleva a las expresiones (5.3.6.1), aún se sigue manejando en los textos de cálculo actuales, con la inclusión desde luego del concepto de límite.

5.4. SIGLO XVIII

5.4.1. FONTENELLE, 1727.

El trabajo de Bernard Fontenelle en 1727, *Élèments de la géomètrie de l'infini*, muestra un absoluto dogmatismo con respecto al infinito, reconociendo que la geometría es enteramente intelectual e independiente de la descripción y existencia real de las figuras. Él no argumenta el tema desde el punto de vista de la ciencia o de la metafísica, como lo hicieron Aristóteles o Leibniz; se oponía a considerar al infinito como un misterio y afirma que Cavalieri fue mucho más modesto en su tratamiento. Resuelto seguidor de Wallis escribe

$$\infty$$

como el último término de la sucesión infinita

$$0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

aunque se dio cuenta que la manera en la cual la sucesión pasa de lo finito a lo infinito es incomprensible.

Sobre la base de esta definición del infinito, Fontenelle procede a incluir en sus cálculos, no sólo potencias enteras de ∞ , sino incluso potencias fraccionarias e infinitas, es decir

$$\infty^{3/4}, \qquad \infty^{\infty}, \quad \infty \cdot \infty^{\infty-1} = \infty^{\infty} , \quad \frac{1}{\infty}$$

Esta última expresión corresponde a lo que Wallis había escrito como los infinitamente pequeños; así mismo, derivó sus órdenes de infinitesimales como los recíprocos de las potencias del infinito. No obstante que *dy* y *dx* Fontenelle los había definido en términos del triángulo característico de Leibniz, él consideró que los diferenciales debían ser magnitudes como del orden de $\frac{1}{\infty}$.

Observaciones adicionales:

Debe observarse que tanto como Wallis, como John Bernoulli y Fontenelle, trataron de derivar de una manera aritmética los infinitamente pequeños, considerándolos como los recíprocos de los infinitamente grandes. Sus esfuerzos fueron contrarios a la tendencia general de la época, la cual hallaba las bases de las matemáticas en las concepciones geométricas, dado que la aritmética no había llegado a ser suficientemente abstracta y simbólica, libre de interpretaciones espaciales. El número era todavía interpretado métricamente como la relación entre dos magnitudes.

5.4.2. LOS INFINITESIMALES Y EL OBISPO BERKELEY. 1734.

> Y así pasa que los matemáticos de este tiempo actúan como hombres de ciencia, empleando mucho más esfuerzo en aplicar sus principios que en comprenderlos.
>
> Berkeley.

Una de las mayores polémicas en filosofía es un tratado titulado *The Analyst*[i], publicado en 1734, por un famoso filósofo irlandés, el obispo Berkeley, quien era un pensador agudo y escritor brillante. El blanco del ataque fue el *nuevo cálculo*, especialmente el concepto de *infinitésimo* tal como lo había establecido Isaac Newton. Berkeley, que no era matemático[97], logró exponer los débiles y confusos fundamentos del tema. Se ha descrito *The Analyst* como que marcaba "un punto de transformación en la historia del pensamiento matemático en Gran Bretaña"[98]

La crítica de Berkeley puede considerarse en dos tipos:

1. Ontológica. Señala que los objetos a los cuales Newton hace referencia, no existen. Esta fue la crítica más fuerte para los "fluxionistas", por atribuir un carácter científico a una teoría en la cual se usaron símbolos sin sentido. Una teoría, para ser aceptada como científica debe evitar referencias a entes hipotéticas o ficticias.
2. Lógica. Por la forma de obtener resultados, negando la hipótesis que al mismo tiempo los sustenta.

Berkeley escribió antes que cualquiera la igualdad entre los diferenciales y los momentos:

> "El Punto o Límite de las líneas nacientes son indudablemente iguales, al no tener más magnitud uno del otro, un Límite como tal no es Cantidad. Si por Momento usted quiere decir más que el exacto Límite inicial, este debe ser tanto una Cantidad finita o un Infinitesimal. Pero todas las Cantidades finitas serán expresamente excluidas de la Noción de un Momento. Sin embargo el Momento debe ser un Infinitesimal".[99]

Berkeley no sólo se preocupó sobre las cuestiones ontológicas relativas a los términos tales como *fluxión*, *momento* y *diferencial*, sino también él puso atención en las técnicas deductivas del cálculo. Critica el aspecto lógico en el sentido de que, tanto el cálculo de los límites como de los infinitesimales, fueron obtenidos de la negación de la propia hipótesis dada que los sustenta.

The Analyst está dedicado *a un matemático infiel*, suponiéndose en referencia al astrónomo Edmond Halley, amigo de Newton, y quien había hecho comentarios acerca de la "incomprensibilidad de las doctrinas del cristianismo", por lo cual el obispo Berkeley se dedicó a demostrar que la *gran innovación de los diferenciales* no era ni más clara ni se hallaba mejor fundada que los principios de la teología[100]

The Analyst "no negó la utilidad de los nuevos inventos ni la validez de los resultados obtenidos. Meramente afirmó, con algún grado de justicia, que los matemáticos no habían dado explicación legítima alguna de su procedimiento,..."[101]. Los señalamientos de Berkeley hicieron ver las contradicciones existentes y la necesidad de definiciones más exactas de conceptos cruciales. Entre otros señalamientos, podemos citar:

i) El concepto de "términos evanescentes", a los que Berkeley llamó "los fantasmas de las cantidades desaparecidas"

ii) La incoherencia del infinitésimo, al ser una cantidad mayor de cero, pero tan pequeña que ningún múltiplo de ella alcanza un tamaño mesurable.

---

[i] *El Analista* es un libro de 104 páginas.

iii) La sugerencia de que el cálculo, aunque se basaba en nociones falsas y contradictorias, proporcionaba resultados correctos por "una compensación de errores"(un doble error).

iv) La falta de claridad en lo que son las fluxiones, así dice: "¿Qué son las fluxiones? ¿Las velocidades de Incrementos evanescentes? ¿Y qué son estos mismos Incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas sin ser tampoco un simple nada"[i]

v) Todo lo extenso *debe* estar compuesto de partes extensas ya que, de otra manera, lo *no* extenso formaría la extensión, lo cual es contradictorio[102].

Sólo con objeto de tener una idea más clara de la trascendencia matemática de los infinitésimos, se anota a continuación una cita del *Discurso dirigido a un matemático infiel* del libro El Analista.

> "El método de los infinitesimales es la clave general con cuya ayuda abren las matemáticas modernas los secretos de la geometría y, en consecuencia, de la naturaleza. Y, puesto que esto es lo que les ha permitido superar tan notablemente a los antiguos en el descubrimiento de teoremas y la resolución de problemas, su ejercicio y aplicación se ha convertido en la principal, si no la única, ocupación de todos aquellos que pasan en esta época por geómetras profundos. Pero, sea este método claro u oscuro, consistente o repugnante, demostrativo o precario, investigaré con la máxima imparcialidad; así, someto mi investigación a su juicio y al de cualquier lector inocente."

En otra parte del texto apunta con relación a la regla para hallar la diferencial de x^n. Dice:

> "...Hagamos desaparecer ahora los incrementos, y su última será: 1 es a nx^{n-1}. Pero debería parecer que este razonamiento no es claro ni definitivo. pues cuando se dice, hagamos desaparecer los incrementos, esto es, que los incrementos no sean nada, o que no haya incrementos, destruye la suposición anterior de que los incrementos eran algo, o de que había incrementos, y, no obstante, se conserva una consecuencia de la suposición, esto es, una expresión obtenida en virtud de aquélla. Lo que, según el lema precedente, es una forma de razonamiento falsa. Ciertamente, cuando suponemos que los incrementos desaparecen, debemos suponer que con ellos desaparecen sus proposiciones, sus expresiones y todo lo que se deriva de la suposición de su existencia..."

> " ...Ahora observo, en primer lugar, que la conclusión sale bien, no porque el cuadrado rechazado de dy fuera infinitamente pequeño, sino porque este error se compensaba por otro error igual y contrario..."

Observaciones adicionales:

Los investigadores de la Historia de la Matemática coinciden en señalar la enorme trascendencia que tuvo la crítica del obispo Berkeley para realizar esfuerzos para superar las dificultades inherentes al todavía precario desarrollo del cálculo. Así, se anota que entre los escritores que ayudaron a resolver los problemas planteados fueron Benjamín Robins, *A Discurse Concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac* Newton; y Colin Maclaurin, *A Treatise of Fluxions*.

Todavía en 1797, 63 años posteriores a las críticas de Berkeley, Carnot utilizaba la idea de la compensación de errores en su escrito *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal*, pues señalaba a los infinitesimales sólo como cantidades auxiliares, que se podían introducir en el proceso, pero que deberían desaparecer del resultado, precisamente con base a ese carácter auxiliar.

[i] Esta cita se acepta como la más famosa del *The Analyst*.

5.4.3. JURIN Y ROBINS, 1730S

Si bien Jurin había negado la posibilidad de constantes infinitamente pequeñas, había aceptado, con confusión, las variables infinitamente pequeñas o cantidades evanescentes. Robins fue más enfático en su negativa a los infinitesimales de cualquier clase y dijo que las afirmaciones de Newton involucrando momentos debían ser interpretadas en términos de las razones primera y última. Por ejemplo, mientras Jurin decía que $Ab+Ba$ era igual a $Ab+Ba+ab$ cuando a y b se desvanecían, Robins sostenía que $Aa+Bb$ era un tanto del incremento de AB como fuese necesario para expresar la última razón. Esto indica que Robins se dio cuenta más claramente que la base lógica debía hallarse en el método de límites, aunque no le fue claro, puesto que el producto AB involucra dos variables.

La concepción del límite de Robins representa una formulación de ideas que indican su dependencia del movimiento, en su opinión, con base en la intuición geométrica, no sólo habló de los límites de las razones de "cantidades evanescentes", sino también de los límites de las "formas de figuras cambiantes", dando como ejemplo el círculo como el límite de un polígono regular inscrito, cuando su número de lados crece indefinidamente. Esta mezcolanza de lo aritmético con lo geométrico había sido responsable de muchas vaguedades en los trabajos de Newton y Leibniz y estuvieron presentes durante el siguiente siglo. No obstante, Robins se dio cuenta más claramente que Jurin de la naturaleza del concepto de límite.

Él reconoció la frase " la última razón de cantidades evanescentes" como una expresión figurativa, referida no sólo a la última razón, sino en una "cantidad dada que varía en alguna proporción, por un continuo crecimiento o disminución en una aproximación perpetua, ... con tal de que la cantidad variante pueda ser tan próxima a otra, que difiera de ésta menos que cualquier cantidad que pueda ser asignada, ... a pesar que nunca pueda ser absolutamente igual a ésta"

Robins se dio cuenta, aunque Jurin no, que la cantidad variante no necesitaba ser considerada como finalmente comprendida por la cantidad dada como su último valor, a pesar de que al último "es considerada como la cantidad a la cual la cantidad variante llegará a ser igual". En la controversia entre Robins y Jurin, la cuestión en cuanto a si una variable podía ser considerada como necesariamente alcanzando su límite, jugó una gran parte. Robins sostuvo la parte que lo negaba, aunque Jurin insistió que había variables las cuales alcanzaban sus límites y acusó vigorosamente a su oponente de malinterpretar el significado verdadero de Newton, aunque es difícil juzgar de las palabras exactas de Newton lo que él entendió. La frase "última razón" ciertamente favorece la interpretación de Jurin, pero rehusa la dificultad lógica inherente en las cuestiones infinitesimales y el significado de $\frac{0}{0}$, siendo necesario el paso del tiempo para aceptar la visión más lógica de Robins en el sentido de que la variable no necesita alcanzar su límite.

A pesar de las posibles ventajas pedagógicas, Robins fue recientemente criticado por haber definido el límite de tal forma que la variable nunca alcanza su límite, dado que involucra una concepción menos general que la de Jurin, además de que bajo esta concepción del límite, Aquiles nunca adelantaría a la tortuga en la paradoja de Zenón. Esta crítica ha sido seguida por la afirmación que uno puede asumir que al duplicar sucesivamente los lados de un polígono inscrito en un círculo, el límite, que corresponde a la circunferencia, es alcanzado por el polígono. Obsérvese que el argumento es enteramente adicional al punto que confunde el concepto numérico con la representación geométrica.

La cuestión de si la variable S_n alcanza el límite S es enteramente irrelevante y ambiguo, a menos que sepamos que significa *alcanzar* un valor y como los términos *límite* y *número* son definidos independientemente de la idea de alcanzar algo, ***lo cual en sí representa el punto de partida del análisis***.

Las definiciones de número, como fueron dadas por algunos matemáticos posteriores, hacen el límite de una sucesión infinita idéntico con la sucesión misma. Bajo esta perspectiva, la cuestión de si la variable alcanza su límite carece de significado lógico. Así, la sucesión infinita 0.9, 0.99, 0.999, ... , es el número uno, y la cuestión ¿Alguna vez alcanza al uno? Es un intento de dar un argumento metafisico que satisficiese la intuición.

Observaciones adicionales:

Actualmente, a la luz de las definiciones modernas, la cuestión sobre si la variable alcanza o no su límite carece de significado. Sin embargo en esa época fue importante, por señalar lo que los matemáticos aún sentían; que el cálculo debía de ser interpretado en términos que fueran razonablemente intuitivos, en lugar de que fueran lógicamente consistentes, es decir, ***este era el problema***.

5.4.4. LOS TRABAJOS DE EULER. 1748 Y 1755

Leonhard Euler escribió un buen número de libros y artículos promoviendo el nuevo análisis, organizándolo y poniéndolo sobre bases formales. La mayoría de sus predecesores habían considerado el cálculo unido a la geometría, pero él hizo de la materia una teoría formal de funciones que no necesitaba volver a la forma anterior de concepciones geométricas.

Leibniz había usado la palabra función más o menos en el sentido actual, y había presumido que su método infinitesimal no estaba limitado a funciones algebraicas, como lo era el de Descartes, sino que también era aplicable a los logaritmos y exponenciales. Sin embargo, fue Euler el primer matemático en dar importancia al concepto de función y hacer un estudio sistemático y de clasificación de todas las funciones elementales, junto con sus diferenciales e integrales.

La palabra función significó, no tanto una cantidad formulada como dependiente de variables, sino como una expresión analítica, en constantes y variables que, podía ser representada por símbolos simples. Funcionalmente fue más un asunto de representación formal que de un reconocimiento conceptual de una relación.

Euler consideró que las bases del cálculo eran extremadamente elementales pareciéndose en algo a lo de Wallis, Taylor, John Bernoulli y Fontenelle. Sintió que las nociones del infinitamente grande y del infinitamente pequeño no escondían tanto misterio como comúnmente se pensaba. Un infinitamente pequeño o cantidad evanescente podría ser simplemente algo que sería cero.

Este punto de vista podría haber servido como la base para una interpretación en términos de límites, en la cual los diferenciales serían simplemente variables aproximándose a cero como su límite, sin embargo no procedió así. Durante todo el desarrollo del cálculo, la "epidemia" infinitesimal sustentó la posibilidad de una cantidad constante menor que cualquier cantidad dada. Euler enfáticamente rechazó tal noción de atomismo matemático o mónade[i], "protestando enérgicamente contra esto como un abuso del principio de razón suficiente". Afirmaba como lo hizo James Bernoulli, que un número menor que cualquier cantidad dada debía ser necesariamente cero, si bien él admitía la existencia de un número infinito de infinitesimales, como los hallados en los diferenciales de orden superior, que desde luego deberían sostenerse como cero.

[i] Ente simple y sin partes, de que se componen los demás seres o sustancias, según el sistema de Leibniz. El espíritu, ser uno e indivisible cuya totalidad constituye el universo, doctrina de Leibniz.

Con respecto al infinito Euler adoptó el punto de vista de Wallis y Fontenelle, puesto que la suma de 1+2+3+ ... podía llegar a ser más grande que cualquier cantidad finita, ésta debía ser infinita y podía ser representada por el símbolo ∞. Otro punto que sugirió fue que ∞ era una clase de límite entre los números positivos y negativos, en cuanto a eso parecería el número cero. De manera similar sostenía que la razón $\frac{a}{0}=\infty$ debía ser interpretada como que cero veces infinito podía resultar una magnitud finita. Además, $\frac{a}{dx}=\infty$ dado que dx=0, así como $\frac{a}{dx^2}=\infty$ debería ser infinito de segundo orden y aún más general, debería de haber un número infinito de grados de infinito. Si x era infinito, entonces Euler afirmaba que entre 1 y x^{1000} habría 1000 grados de infinito.

Desde el final de la década de los 1680s, en la cual Leibniz dio a conocer los resultados de sus trabajos hasta la publicación por parte de Euler de su *Introductio in Analysin infititorum* en 1748, *Institutiones calculi differentialis* en 1755 y su *Institutiones calculi integralis*, de 1786 a 1794 hubo varios matemáticos que contribuyeron para pasar de una vaga colección de métodos para resolver problemas sobre curvas hasta convertir el análisis en una disciplina matemática unificada y coherente, entre otros D'Alembert, Clairaut, algunos de los Bernoulli y desde luego el propio Euler, quien contribuyó con gran cantidad de descubrimientos y ordenó y unificó ese vasto campo de conocimientos, en los tres textos que se han citado

El punto de partida con Leibniz fue un Cálculo consistente en una colección de métodos analíticos para resolver problemas sobre curvas, donde los *objetos principales* que se manejaban eran *cantidades geométricas variables* tal como aparecían en los problemas. Luego entonces, para poder darle forma al Análisis, para lograr convertirlo en una rama coherente de la matemática fue necesario situar los problemas bajo otra perspectiva. Los problemas cada vez iban siendo más complicados y por lo tanto el manejo de fórmulas más intrincado; en consecuencia, fue una de las principales razones por las que en forma natural, el origen geométrico de las variables fue dejado atrás, convirtiéndose entonces en una disciplina que básicamente se ocupaba de fórmulas. Euler que ha sido señalado como "un formalista" vino a reforzar esta transición afirmando explícitamente que el Análisis es una rama de la matemática que trabaja con *expresiones analíticas* y especialmente con *funciones*.

En su *Introducción al análisis de los infinitos*[103], pretende dar un panorama de los conceptos y métodos del análisis y de la geometría analítica que son preliminares necesarios para el estudio del cálculo diferencial e integral. Euler hizo en este panorama una demostración magistral de cómo introducir tanto análisis como fuera posible sin usar diferenciación ni integración. En particular, introdujo las funciones trascendentes "elementales" sin recurrir al cálculo integral, lo que no fue pequeña proeza, dado que el logaritmo se consideraba tradicionalmente ligado a la cuadratura de la hipérbola y las funciones trigonométricas al cálculo de la longitud del arco de la circunferencia.

Para poder lograr lo anterior, Euler tuvo que utilizar algunos tipos de procedimientos propiamente infinitesimales, como por ejemplo el desarrollo binomial, y la sustitución en las fórmulas de números infinitamente grandes o infinitamente pequeños.

Un ejemplo típico de esta manera de proceder se da en la deducción del desarrollo en serie de potencias de a^z. Así entonces:

Razonamiento:

- Sea a>1 y
- sea ω un *número infinitamente pequeño* o una fracción tan pequeña que apenas es distinta de cero entonces:

$$a^{\omega}=1+\psi$$

- con ψ un número infinitamente pequeño, digamos
$$\psi = k\omega$$
- donde k depende sólo de a, entonces
$$a^{\omega} = 1 + k\omega \qquad \text{...(5.4.4.1)}$$
- elevando a la potencia i, con i$\in \Re$
$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^{i}$$
- aplicando el desarrollo binomial
$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}k^4\omega^4 + \cdots$$
- si suponemos z cualquier número positivo finito, entonces
$$i = \frac{z}{\omega} \text{ es infinitamente grande;}$$
- si de la expresión anterior hacemos $\omega = \frac{z}{i}$ y lo sustituimos en el desarrollo en serie, entonces
$$a^z = a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}kz + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3 + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}k^4z^4 + \cdots$$
- pero, se propuso i suficientemente grande, entonces
$$\frac{i-1}{i} = 1,\ \frac{i-2}{i} = 1,\ \frac{i-3}{i} = 1,\ \cdots$$
- el resultado que se obtiene es
$$a^z = 1 + kz + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \qquad \text{................(5.4.4.2)}$$
- con lo que se concluye el ejemplo propuesto.

Con la serie (5.4.4.2), Euler calcula el valor de a con 23 decimales, aplicando los valores particulares de k=1 y z=1, y lo representa por la letra e, símbolo ampliamente difundido y en consecuencia familiar. Así, reescribe la serie (5.4.4.2) como
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \qquad \text{................(5.4.4.3)}$$
serie ampliamente considerada en los libros de texto actuales en el capítulo relativo a series de potencias. Ahora, tomando logaritmos en la expresión (5.4.4.1), se obtiene la expresión: $\omega = \log(1+k\omega)$ con el logaritmo en base a. Si a=e, se tienen entonces los logaritmos naturales.

La obra de Euler *Textos sobre el cálculo diferencial*[104], comienza con dos capítulos sobre diferencias finitas, y a continuación introduce el cálculo diferencial como un cálculo de *diferencias infinitamente pequeñas*, volviendo así a una concepción más afín a la de Leibniz. Señala que "El análisis de los infinitos..., no será otra cosa que un caso especial del método de diferencias ..., que se presenta cuando las diferencias que previamente habíamos supuesto finitas, se toman infinitamente pequeñas".

Euler considera que las cantidades infinitamente pequeñas son, de hecho, iguales a cero, pero pueden tener entre sí razones finitas. En consecuencia, opina que, la igualdad $0\cdot n = 0$ implica que $\frac{0}{0}$ puede valer n en algunos casos, y el cálculo diferencial investiga precisamente los valores de tales *razones entre ceros*.

Observaciones adicionales:

Si bien se puede juzgar de formalista el trabajo de Euler, es indudable su grandiosa aportación a las matemáticas, lo que lo han hecho acreedor a ser reconocido como "el príncipe del Análisis[105]. Su señalamiento de que el cálculo diferencial debiera abocarse a tratar los casos donde cero entre cero valen n, si bien no es estrictamente cierto, dado que el análisis matemático se define como la parte de las matemáticas cuyo objeto de estudio es, entre otros, los límites y las derivadas como un caso particular de éstos, entonces se puede aceptar su declaración como un antecedente a lo que sería el resultado de las transformaciones que dieron origen al análisis, tal como se conoce actualmente.

5.4.5. EL CÁLCULO INFINITESIMAL DE CARNOT, 1797.

Durante la segunda mitad del siglo XVIII aumentó el entusiasmo debido a los resultados producidos por el cálculo infinitesimal, pero la confusión en torno a sus fundamentos seguían sin resolverse. No parecían satisfactorios ni los planteamientos de las fluxiones de Newton, ni los diferenciales de Leibniz, ni los límites de D'Alembert[i], por tanto Carnot trató de mostrar en qué consistía el verdadero espíritu del nuevo análisis. Él llegó a la conclusión de que los *verdaderos principios metafísicos* son los *principios de compensación de errores*. Así, las *ecuaciones imperfectas* se hacen en el cálculo *perfectamente exactas*.

Nazaré Carnot, publicó en 1797 su obra *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal*[106], en la cual trata de realizar una fundamentación sobre el cálculo infinitesimal. En su obra Carnot señala:

> "Llamo cantidad infinitamente pequeña a toda cantidad que se considera como continuamente decreciente, de tal modo que podría ser tan pequeña como uno quiera, sin que uno esté obligado por eso a hacer variar aquellas [cantidades] de las cuales uno busca la relación"

Para poder resolver los problemas que se planteaban, Carnot consideraba que existían tres tipos diferentes de cantidades que podían intervenir en el cálculo:

- i) Aquéllas que se encontraban determinadas e invariables por la misma naturaleza del problema.
- ii) Aquéllas que, siendo variables, podían llegar a tomar valores determinados por las hipótesis mismas del problema.
- iii) Aquéllas que debían permanecer siempre indeterminadas durante el desarrollo del proceso.

Con base en lo expuesto, para resolver un problema, Carnot contaba con cierta información, dada por las cantidades del primer tipo, y que eran constantes; se buscaban las relaciones entre las cantidades variables, correspondientes al segundo tipo auxiliándose, para lograr esto último, de cantidades indeterminadas, o sea del tercer tipo y que serían los infinitesimales. Así, "*el análisis infinitesimal no es otra cosa que el arte de auxiliarse de las cantidades infinitesimales para encontrar las relaciones existentes entre ciertas cantidades propuestas*". Esta declaración deja clara la percepción de Carnot, del carácter auxiliar de las cantidades infinitesimales, y en consecuencia, éstas no deberían conservarse en el resultado final.

El procedimiento que plantea Carnot, en donde establece una compensación de errores, se puede resumir en las siguientes etapas:

1. Plantear un problema.
2. Introducir las cantidades auxiliares, es decir, los infinitesimales, originándose un primer error.
3. Se realizan los cálculos necesarios, arrastrando el primer error, hasta obtener resultados provisionales.
4. Toca despreciar las cantidades muy pequeñas respecto a las cantidades "normales"; es decir, eliminar los infinitesimales que se introdujeron en el paso 2, cometiéndose aquí un segundo error.
5. El resultado obtenido es exacto.

---

[i] El trabajo de D'Alembert sobre límites se abordará en la página 6-133.

El principio fundamental sobre el cual Carnot basa su análisis infinitesimal establece que *"dos cantidades no arbitrarias sólo pueden diferir entre ellas por una cantidad no arbitraria"*.

La explicación correspondiente es:
"Como las dos cantidades propuestas son no arbitrarias, no se pueden modificar ni una ni otra, y en consecuencia, su diferencia tampoco puede modificarse, luego entonces, es también no arbitraria". Aquí entonces, da cabida a la justificación de su método; señalando que:

i) dos cantidades P y Q, no arbitrarias son rigurosamente iguales entre sí, si su diferencia, en caso de existir, puede hacerse *tan pequeña como se quiera*.

ii) para probar que dos cantidades designadas son rigurosamente iguales, es suficiente probar que su diferencia, si existe alguna, no es una cantidad designada, es decir, *su diferencia es arbitraria*. Es decir:

$$|P-Q|=0$$

ó

$$|P-Q| = \text{cantidad arbitrariamente pequeña}$$

iii) todo valor que se puede hacer tan aproximado como uno quiera a la verdadera cantidad que él representa, sin que por eso se vea uno obligado a cambiar ni el primero ni el segundo, es necesaria y rigurosamente exacto.

iv) toda cantidad que se pueda suponer tan pequeña como uno quiera, puede ser considerada como absolutamente nula, en comparación de cualquier otra cantidad que no pueda ser considerada *tan pequeña como uno quiera*, sin que los errores que se puedan cometer con este hecho afecten el resultado final del cálculo, cuando en él desaparezcan todas las cantidades arbitrariamente pequeñas.

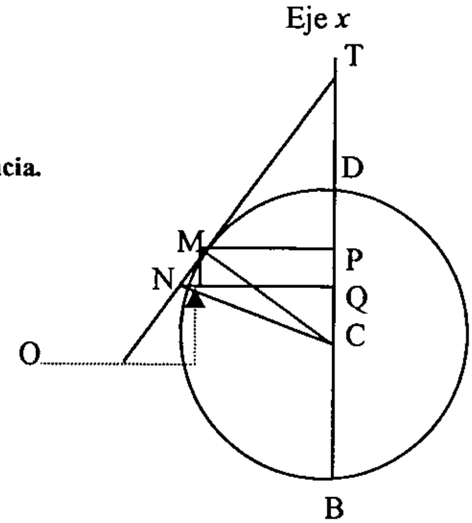
v) toda cantidad, la cual es, con relación a otra, tan pequeña como se quiera, *puede ser despreciada* en comparación con esta última, sin que los errores introducidos por este hecho en el transcurso del cálculo, influyan en el resultado final cuando todas las variables arbitrarias (los infinitesimales) son eliminadas

En resumen, su formalización del análisis infinitesimal supone:

- Principio fundamental: $|P-Q|$ es no arbitrario
- Corolario 1. Si $|P-Q|$ es arbitrario (arbitrariamente pequeño), entonces P = Q
- Corolario 2.
  $P=Q$ si:
  i) $|P-Q|=0$ o
  ii) $|P-Q|$ es arbitrario, (arbitrariamente pequeño), entonces P = Q
- Corolario 3. P = (P + infinitamente pequeños).
- Corolario 4. En un problema determinado podemos hacer
  $P+\alpha=P$, α = infinitamente pequeño
  sin que nuestro resultado se afecte en nada.
- Corolario 5. En un problema determinado, podemos hacer que
  $\alpha+\beta=\alpha$, α y β son infinitamente pequeños
  sin que el resultado exacto se afecte en nada.

Para ilustrar el método de Carnot, hagamos un ejemplo que él mismo propone[107], relativo al trazado de la tangente a una circunferencia en un punto dado:

Figura de referencia.



1)

Considérese la circunferencia *MBD* con centro en *C* y diámetro *BD*.
Sea el punto *M* el punto sobre la circunferencia por el cual se desea trazar la tangente.
Sea *CM=a* el radio de la circunferencia.
Considérese a *PD=x* y *PM=y*.
Se desea determinar *PT* (la subtangente a la circunferencia por el punto *M*)

2)

Considérese la circunferencia como un polígono de un número infinito de lados, y cada uno de éstos, con magnitud infinitamente pequeña. Aquí introducimos entonces *el primer error*, dado que esta consideración no puede ser cierta.

3)

Sea *NM* uno de esos lados, (en realidad *N* no se encuentra sobre la circunferencia, pero se acepta bajo el supuesto del primer error) el cual se prolonga hasta cortar en *T* al eje *BD* (eje *x*). La recta *NMT* será la tangente buscada.
Se traza *QN* paralela a *PM* y *MO* perpendicular a *QN*.
De los triángulos NMO y MTP, que son semejantes, tenemos

$$\frac{OM}{ON}=\frac{PT}{PM}=\frac{PT}{Y}$$

pero, del triángulo *MPC*:

$$(MP)^2+(PC)^2=(MC)^2$$

ó

$$y^2+(a-x)^2=a^2$$

$$y^2=2ax-x^2$$

Similarmente, para el triángulo *NQC* se tiene:

$(NQ)^2 + (QC)^2 = (NC)^2$, ahora aceptando N como un punto de la circunferencia —el primer error— y realizando las sustituciones pertinentes, se tiene:

$(y + NO)^2 + (a - (x + PQ))^2 = a^2$ de donde

$(y + NO)^2 + (a - (x + MO))^2 = a^2$ así

$$(y + NO)^2 = 2a(x + MO) - (x + MO)^2$$
$$y^2 + 2yNO + (NO)^2 = 2ax + 2aMO - x^2 - 2xMO - (MO)^2$$

sustituyendo y^2

$$2ax - x^2 + 2yNO + (NO)^2 = 2ax + 2aMO - x^2 - 2xMO - (MO)^2$$

simplificando y despejando se tiene:

$$\frac{MO}{NO} = \frac{2y + NO}{2a - 2x - MO}$$

de donde despejando TP de la primera igualdad,

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}$$

4)
Dado que en el paso 2, se supuso que NM era un lado infinitamente pequeño de la circunferencia, y que esto se identificó como un primer error, entonces si NM es muy pequeño, más lo serán NO y MO por ser lados del triángulo, y por lo tanto podremos despreciar su valor frente a $2y$ y frente a $2a$-$2x$, por lo que quedaría:

5)

$$TP = \frac{y^2}{a - x}$$

que corresponde a la subtangente que se estaba buscando, para con ella poder trazar la tangente.

Comentarios adicionales:

Las *Reflexiones* de Carnot tuvieron una gran popularidad, publicándose incluso en varios idiomas. No obstante de que su intento de justificación no fue el correcto, ante la insatisfacción que producían los "pequeños ceros" del siglo XVIII, se dio un paso más en la dirección que conduciría a la *edad del rigor* del siglo XIX.

Obsérvese que al señalar la diferencia entre las cantidades P y Q del principio fundamental, Carnot hace referencia a lo que actualmente se conoce como la propiedad de cerradura para la suma y que corresponde a uno de los postulados de campo para los números reales, sin embargo, debe considerarse que Carnot publicó su trabajo casi un siglo antes de los trabajos de Dedekind sobre los números reales. También tómese en cuenta que en 1634, 63 años antes, el obispo Berkeley ya había escrito sobre la falta de claridad en los conceptos relativos a infinitesimales, no obstante se obtuvieran correctos los resultados[108]., señalando éstos como la consecuencia de una compensación de errores, los cuales Carnot justifica. En el trabajo de Carnot, sigue latente la necesidad de pasar al proceso del límite. En otro orden de ideas, obsérvese que el método del trazado de tangentes, se basa en hallar primero algún otro dato, en este caso la subtangente; a diferencia de Descartes, que primero halla la subnormal.

5.5. SIGLO XIX

El siglo XIX resultó ser un período de cambio de paradigma, decayendo la idea del infinitesimal por la del concepto de límite, que había empezado a difundirse desde finales del siglo XVIII. Lo más significativo del siglo XIX fue quizá el intento de Cantor por terminar con el uso de los infinitesimales.

Cantor había objetado que los infinitésimos tuviesen algo que ver con la naturaleza de la continuidad, y por el año de 1886 propuso una demostración de la inexistencia de tales entidades[109]. Su argumentación se fundaba en su teoría de conjuntos y el carácter de sus números transfinitos. Cantor señalaba que sus números transfinitos surgían de manera natural y necesaria de la concepción de lo que era un conjunto, por lo que estaba convencido de que *su caracterización* del infinito era la *única* posible.

Por la época en que Cantor escribió los *Beiträge*[110], la hipótesis del continuo parecía tan evasiva como siempre, a pesar de la esperanza prometedora de que los recubrimientos[i], que habían conducido a formularla como $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, pudieran suministrar la clave de la solución tan largamente buscada. Cantor insistió en señalar que su concepto de "tipo ordinal", junto con el de "número cardinal" o "potencia", incluía a *todo aquello imaginable* capaz de ser numerado; así, para él no era posible alguna generalización adicional.

Los infinitésimos, en el extremo opuesto a los números infinitamente grandes, fueron mal recibidos por Cantor y se vieron catalogados en un lugar de privilegio en la lista de fantasmas y quimeras. Su demostración se basaba en la característica de *linealidad*[ii] de los números finitos y que viene expresada por el Axioma de Arquímedes, que además consideraba equivalente al Axioma de Continuidad, pues suponía que uno podía deducirse del otro. Cantor estaba tan convencido de su posición de rechazar los infinitesimales que convenció a de esto a Peano, quien escribió que "los matemáticos, habiendo entendido completamente la naturaleza de los números reales, podían concluir con toda seguridad que la inexistencia de los infinitésimos estaba firmemente establecida". Pero, Russell, precautoriamente añadió que, si fuera posible hablar alguna vez de números infinitesimales, entonces tendría que ser en un sentido radicalmente nuevo.

RECAPITULACIÓN SOBRE LOS INFINITÉSIMOS.

Una de las primeras muestras de como los filósofos griegos intentaron resolver problemas a través de procedimientos que involucran *al infinito*, se presenta en *El Método*, de Arquímedes, quien atribuye a Demócrito el descubrimiento y la demostración no rigurosa, a través de planteamientos *infinitesimales*, del volumen de la pirámide y el cono, como la tercera parte de los correspondientes prisma y cilindro, respectivamente. En la línea del rastro del infinito, el filósofo Anaxágoras, experto en geometría, establece una aguda definición de lo que podría ser llamado *axioma de continuidad* que dice: "En lo pequeño no existe lo extremadamente pequeño, sino algo cada vez más pequeño, ... De igual modo, en lo grande siempre hay algo más grande, ...".

Si bien no hay una referencia explícita a los infinitesimales, el conocido método de exhaución, de manera implícita los contempla dado que cuando los griegos deseaban hallar el área circunscrita por una curva,

---

[i] Los recubrimientos o cubiertas se refieren a la idea de que cada uno de todos los puntos de un conjunto en una recta pueden ser incluidos en un conjunto de intervalos de longitud arbitraria, por ejemplo $\varepsilon/10^n$.

[ii] Los números reciben el nombre de lineales si una cantidad finita o infinita de ellos pueden ser sumados para dar lugar a otra magnitud lineal.

consideraban ésta como la frontera fija a la que se aproximan ***continuamente*** los polígonos inscritos y circunscritos, a medida que aumentan el número de sus lados, tanto como se quiera. Sin embargo, es preciso señalar que los lados de los polígonos se acercan *en potencia* a la curva, pero nunca ocuparán *en acto* la posición de la misma.

Aristóteles considera toda magnitud finita pero como admite la infinita divisibilidad. Para él, el infinito es como una ilusión del pensamiento que puede traspasar potencialmente un límite prefijado, pero distingue la cuestión del infinitamente grande y el infinitamente pequeño en las magnitudes y en los números.

Diecisiete siglos después, los escolásticos de la edad media abordaron los cuestionamientos sobre el infinito, la naturaleza del continuo y la existencia de los indivisibles; sin embargo sus respuestas fueron de carácter más filosófico que matemático y poco sostenibles para un punto de vista científico. Bradwardine consideraba que una magnitud continua no podía estar formada por un número finito de magnitudes indivisibles, sino que incluiría un número infinito de indivisibles, pero no estarían constituidas por átomos matemáticos, sino que cada continuo estaría formado por un número infinito de elementos continuos de la misma naturaleza, así por ejemplo, un segmento, un área o un volumen estaría compuesto, cada uno, por infinitos segmentos, áreas o volúmenes.

Posteriormente, los matemáticos de principios del siglo XVII con una concepción intuitiva inmediata a las magnitudes geométricas, se imaginaron por ejemplo, la línea formada por un número infinito de puntos, él área como formada por un número infinito de rectas paralelas y el volumen formado por un número infinito de planos también paralelos. La mayoría de los matemáticos vinculados con el método de los indivisibles, lo creían sólo un método heurístico, cuyos resultados aún requerían de una rigurosa demostración, pues no se mostraban satisfechos con el valor de la demostración por indivisibles.

Cavalieri en 1635 publicó "Geometría de los continuos por indivisibles, presentada por un nuevo método", y que tenía por objeto legitimar tales técnicas. Su enfoque podría resumirse en lo siguiente:
Consideraba una línea recta que, partiendo de una posición en una figura, se desplazaba uniformemente conservándose siempre paralela a su origen y que en sus posiciones sucesivas a lo largo de su movimiento, generaba un haz de segmentos paralelos que determinaba dicha figura. A estos segmentos paralelos los llamó "*todas las líneas de la figura dada*", aunque a veces también se refería a ellos como "*los indivisibles de la figura dada*". Sin embargo, faltaba dar una definición precisa de un *indivisible*, para poder entender lo que significaba una magnitud infinitesimal.

Alrededor de 1636, Fermat propuso un método cuya idea central era dar un incremento a una magnitud que podríamos interpretar como la variable independiente, con un sentido dual en éste: uno como cantidad despreciable cuando se halla como sumando y otro como una cantidad que es susceptible de ser divisor.

Newton aplicó un procedimiento, basado en los *infinitamente pequeños*, que servía para calcular la derivada, problema al cual le interesaba dar solución. En su método, a las cantidades que fluyen las llamo *fluentes*, en este caso las variables x, y y z, por oposición a las cantidades constantes que apareciesen en el problema en cuestión, y a su *velocidad de cambio con respecto al tiempo* le llamó *fluxión*. La idea de considerar cantidades que se movieran en el tiempo, era para resolver las dificultades de fundamentación que planteaba el uso de *incrementos pequeños* de las respectivas variables, los cuales son tan pequeños que se pueden despreciar, pero que no son nulos, ya que se podían establecer razones entre ellos. Así mismo, señalaba que su cálculo de fluxiones no dependía de la existencia o no, de las cantidades infinitamente pequeñas, pues su concepto fundamental era la razón entre las fluxiones, donde $\dot{y}/\dot{x}$ era igual a la *primera* o *última* de las razones de los incrementos o decrementos de y y de x, respectivamente. La *razón primera* corresponde a los incrementos *nacientes* y es la que tienen justamente al llegar a ser. La *razón última* es la que alcanzan los decrementos exactamente antes de desvanecerse, por lo que también les llamó *incrementos evanescentes*.

Aunque de manera imprecisa, hacia 1673, Leibniz ya sugería un cálculo infinitesimal de sumas y diferencias de ordenadas para determinar cuadraturas y tangentes. Hizo hincapié en que las reglas se aplicaban a "las series en las que la razón de las diferencias de los términos, a los términos mismos es menor que cualquier cantidad dada", es decir, a las series cuyas diferencias son infinitamente pequeñas. Así, la *diferencial* de una variable y es *la diferencia infinitamente pequeña* —pero constante— entre dos valores sucesivos de y. Los términos sucesivos de una sucesión de y están infinitamente próximos, de donde dy es la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas de y similarmente, dx es la diferencia infinitamente pequeña entre dos abscisas x sucesivas. No obstante la popularidad que alcanzó el cálculo de Leibniz, había una total falta de claridad y acuerdo en cuanto a las bases del análisis. Así Voltaire llamó al cálculo "El arte de numerar y medir exactamente una cosa cuya existencia no puede ser percibida".

La primera publicación en 1696 de un libro de texto, *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*, representó un papel importante en la divulgación del nuevo tema. Su autor fue el Marques de L'Hôpital, cuyo trabajo estuvo basado al menos en una parte, en los primeros trabajos de John Bernoulli. Aunque L'Hôpital no discute la naturaleza de los conceptos básicos del cálculo, sí especificó, a través de postulados, cómo se comportan los infinitesimales, implicando que éstos van creciendo o decreciendo de manera continua.

El trabajo de Fontenelle muestra un absoluto dogmatismo con respecto al infinito, reconociendo que la geometría es enteramente intelectual e independiente de la descripción y existencia real de las figuras. Resuelto seguidor de Wallis escribe ∞ como el último término de la sucesión infinita 0, 1, 2, 3, ... aunque se dio cuenta que la manera en la cual la sucesión pasa de lo finito a lo infinito es incomprensible. Así, él consideró que los diferenciales debían ser magnitudes como del orden de $\frac{1}{\infty}$.

Una de las mayores polémicas en la historia de las matemáticas la origino el obispo Berkeley, quien atacó especialmente el concepto de *infinitésimo* tal como lo había establecido Isaac Newton. Su crítica fue en dos sentidos: una de carácter ontológico en la que señala que los objetos a los cuales Newton hace referencia, no existen; su segundo señalamiento fue de carácter lógico, por la forma de obtener resultados, negando la hipótesis que al mismo tiempo los sustentaba. Los señalamientos de Berkeley hicieron ver las contradicciones existentes y la necesidad de definiciones más exactas de conceptos cruciales.

Entre los matemáticos que dieron respuesta a Berkeley se cita a Jurin quien había negado la posibilidad de constantes infinitamente pequeñas, pero había aceptado, con confusión, las variables infinitamente pequeñas o cantidades evanescentes. En consecuencia decía que $Ab+Ba$ era igual a $Ab+Ba+ab$ cuando a y b se desvanecían. Otro defensor de Newton fue Robins, quien negó la existencia de los infinitesimales de cualquier clase y dijo que las afirmaciones de Newton, involucrando momentos, debían ser interpretadas en términos de las razones primera y última. Así sostenía que $Aa+Bb$ era un tanto del incremento de AB como fuese necesario para expresar la última razón, es decir, implicaba un acercamiento al concepto del límite, aunque basada éste en una mezcla de concepciones aritméticas e intuiciones geométricas, como lo muestra el hecho de hablar de los límites de las razones de "cantidades evanescentes" así como también de los límites de las "formas de figuras cambiantes", dando como ejemplo el círculo como el límite de un polígono regular inscrito, cuando su número de lados crece indefinidamente.

La mayoría de predecesores de Euler habían considerado el cálculo unido a la geometría, pero él hizo de la materia una teoría formal de funciones que no necesitaba volver a la forma anterior de concepciones geométricas. Sintió que las nociones del infinitamente grande y del infinitamente pequeño no escondían tanto misterio como comúnmente se pensaba. Así un infinitamente pequeño o cantidad evanescente podría ser simplemente algo que sería cero. Afirmaba como lo hizo James Bernoulli, que un número menor que cualquier cantidad dada debía ser necesariamente cero, aunque admitía la existencia de un número infinito de infinitesimales, como los hallados en los diferenciales de orden superior, que desde luego deberían sostenerse como cero. Sugirió que ∞ era una clase de límite entre los números positivos y negativos, por cuanto, parecería el número cero. De manera similar sostenía que la razón $\frac{a}{0}=\infty$ debía ser interpretada como que, cero veces infinito podía resultar una magnitud finita. Además, $\frac{a}{dx}=\infty$ dado que dx=0, así como $\frac{a}{dx^2}=\infty$ debería ser infinito de segundo orden y aún más general, debería de haber un número infinito de grados de infinito. Introduce el cálculo diferencial como un cálculo de *diferencias infinitamente pequeñas*, volviendo así a una concepción más afín a la de Leibniz y agrega que "El análisis de los infinitos..., no será otra cosa que un caso especial del método de diferencias ..., que se presenta cuando las diferencias que previamente habíamos supuesto finitas, se tornan infinitamente pequeñas". Euler considera que las cantidades infinitamente pequeñas son, de hecho, iguales a cero, pero pueden tener entre sí razones finitas. En consecuencia, opina que, la igualdad $\mathbf{0}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{0}$ implica que $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ puede valer $\boldsymbol{n}$ en algunos casos, y tocaba al cálculo diferencial investigar precisamente los valores de tales *razones entre ceros*.

Durante la segunda mitad del siglo XVIII aumentó el entusiasmo debido a los resultados producidos por el cálculo infinitesimal, pero la confusión en torno a sus fundamentos seguían sin resolverse. Por tanto Carnot trató de mostrar el verdadero espíritu del nuevo análisis señalando que los *verdaderos principios metafísicos* eran los *principios de compensación de errores*. Así, las *ecuaciones imperfectas* se hacen en el cálculo *perfectamente exactas*. En consecuencia formuló definiciones y teoremas vinculados a su propuesta. Carnot propuso un procedimiento de cálculo basado en una compensación de errores de donde concluye que "*el análisis infinitesimal no es otra cosa que el arte de auxiliarse de las cantidades infinitesimales para encontrar las relaciones existentes entre ciertas cantidades propuestas*" dejando ver el carácter auxiliar de las cantidades infinitesimales, por lo que éstas no deberían conservarse en el resultado final.

Por su parte Cantor había objetado que los infinitésimos tuviesen algo que ver con la naturaleza de la continuidad, y por el año de 1886 propuso una demostración de la inexistencia de tales entidades. Su argumentación se fundaba en su teoría de conjuntos y el carácter de sus números transfinitos. Declaró que los infinitésimos, en el extremo opuesto a los números infinitamente grandes, y fueron mal recibidos por él, quien los catalogó en un lugar de privilegio en la lista de fantasmas y quimeras.

En consecuencia, el siglo XIX resultó ser un periodo de cambio de paradigma, decayendo la idea del infinitesimal por la del concepto de límite, que había empezado a difundirse desde finales del siglo XVIII y que será tratado en el siguiente capítulo.

6. LÍMITES

6.1. PUNTOS DE VISTA MODERNOS SOBRE LÍMITES Y NÚMEROS.

A través de las siguientes páginas, se pretende presentar el proceso mediante el cual se alcanzó un concepto que ha resultado fundamental en los principios del análisis, o sea, la noción de límite.

Tómese en cuenta que no se puede demostrar que una sucesión tenga un límite, a menos que el límite buscado se encuentre entre los números definidos, por tanto, el límite de una sucesión tiene que ser un número ya definido.

Pongamos dos ejemplos, i) y ii) para revisar parte de lo dicho:

i) Los racionales menores de $\frac{1}{2}$ y mayores de $\frac{1}{2}$ forman dos conjuntos separados por $\frac{1}{2}$, y cuyo límite, por la izquierda para el primero y por la derecha para el segundo, es el número racional $\frac{1}{2}$.

ii) Los racionales x tales que x^2 es menor que 2 y x^2 es mayor de 2 forman dos conjuntos análogos, pero sólo habrá un análogo al número $\frac{1}{2}$ que separaba los otros dos conjuntos, si se postula la existencia de un número $\sqrt{2}$, que desde luego ya no pertenece a los números racionales.

Debe observarse que si no se define la existencia de $\sqrt{2}$ entonces no existe un número que se pueda considerar el límite entre los dos conjuntos involucrados. Inclusive, Michael Stifel (siglo XVI) dice acerca de los irracionales:

"... otras consideraciones nos impulsan a negar que de alguna manera sean números los números irracionales. A saber, cuando intentamos sujetarlos a numeración encontramos que huyen perpetuamente de tal manera que ninguno de ellos puede aprenderse precisamente y en sí mismo ... ahora bien, aquello que es de tal naturaleza que carece de precisión, no puede denominarse un número verdadero ... por tanto, así como un número infinito no es un número, así un número irracional no es un número verdadero, sino que se encuentra oculto tras una especie de nube de infinitud."

Los griegos tenían razón al distinguir tan tajantemente entre números y magnitudes, y la suposición tácita, natural e injustificada de que la serie de los números, completada con la serie de lo que se llama números reales, corresponde exactamente a la serie de los puntos de una línea recta resultó correcta. La serie de puntos que representa la sucesión citada en último lugar parece, sin duda poseer un límite; se supuso que ese punto límite debía representar algún número, y como no podía representar ni un entero ni una razón, se dijo que representaba un número irracional.

Ahora bien, si el sistema de números debe formar un *continuo* tal como parece serlo una línea, entonces a todo punto de una línea tiene que corresponder un número sujeto a las mismas reglas de cálculo que las razones o los enteros. Para justificar desde un punto de vista lógico el modo de proceder en los métodos matemáticos, se deben mostrar qué son los irracionales y definirlos *antes* de poder demostrar que hay límites.

El tema de los límites conquistó un lugar importante en los siglos XVII y XVIII, a causa del uso de series infinitas como medios de cálculo aproximado. Si una serie tiene un número finito de términos, es posible hallar la suma de todos los términos; pero si la serie es infinita, es evidente que no podemos calcularla. No obstante, en algunos casos la sucesión[i] correspondiente tiene un límite y este límite es llamado por los matemáticos "la suma en el infinito de la serie".

6.2. SIGLO XVII Y SUS ANTECEDENTES

El método de integración geométrica que se consideraba ideal durante la primera mitad del siglo XVII era el método de exhaución que había inventado Eudoxo y perfeccionado Arquímedes. La idea central del método era evitar el infinito, para lo cual se pretendía llegar a un "agotamiento" de la figura a determinar, lo cual realmente no se lograba.

El método pretendía demostrar que un área o un volumen que se esté investigando, por decir, X es igual a una magnitud conocida K del mismo tipo. Entonces, si se construyen dos sucesiones, una monótona creciente I_n y otra monótona decreciente C_n que estén respectivamente inscritas y circunscritas a X, de tal forma que, para todo n se tiene:

$$I_n < X < C_n \qquad \text{(6.2.1)}$$

A partir de ésta expresión se demostraba por reducción al absurdo que X tenía que ser la K propuesta. La demostración siempre procedía de la misma forma, al ser independiente de las magnitudes en cuestión. Sin embargo, los matemáticos griegos, cuando aplicaban el método, escribían el razonamiento hasta sus últimos detalles, y la razón por la cual se hacía esto, podía ser, el hecho de no contar con una notación que les facilitara el tratar el caso general. Cabe señalar, que establecer las desigualdades básicas de la demostración en casos particulares era en general complicado y sólo podía usarse este método si se conocía de antemano K, lo cual implicaba que debía usarse otro método para descubrir los resultados. Así, el deseo de los matemáticos de principios del siglo XVII, era encontrar un método que fuera directo para obtener resultados, y que sustituyera al de exhaución, y mejor aún si pudiera dicho método, ser utilizado para demostrarlos. Ese método podría haberse conseguido si se hubiese caído en la cuenta de que

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} I_n$$

y se hubiera igualado X a este límite. Sin embargo, esto no era posible por la falta de elementos que permitieran dicha abstracción.

El desarrollo de los conceptos y las técnicas del cálculo infinitesimal fue acompañado de esfuerzos para dotarlo de los fundamentos de que carecía. Los libros que aparecieron después no lograron explicar los conceptos ni justificar los procedimientos empleados por Newton y Leibniz.

El cálculo infinitesimal de Leibniz era más fluido y más práctico, razón que hizo que los europeos continentales intentaran dotar de rigor a los diferenciales. Sin embargo, siendo potencialmente más fácil rigorizar el cálculo de Newton —dado que la idea del límite es intuitivamente más cercana a la primera y última razón— los ingleses intentaron ligarlo a la geometría de Euclides, pero confundieron los momentos de Newton, sus incrementos indivisibles, con sus fluxiones, las cuales se refieren a variables continuas.

Taylor intentó clarificar las ideas del cálculo infinitesimal, pero no logró muchos partidarios a causa de la naturaleza aritmética de su propuesta, cuando los británicos intentaban relacionarlo con la geometría o con la

[i] Aquí deberá entenderse *sucesión* como los términos que resultan de las sumas parciales de la serie infinita.

noción de velocidad. Rolle, como otros matemáticos, se dio por vencido y señaló que "el cálculo infinitesimal era una colección de falacias ingeniosas".

Berkeley señaló que los matemáticos estaban procediendo más bien inductiva que deductivamente y que no daban la lógica o las razones de sus pasos. Las críticas del obispo Berkeley sobre "conceptos" tales como cantidades evanescentes o los infinitésimos, fueron sólo un comienzo de un largo debate sobre los fundamentos del cálculo. Así, entre los intentos de resolución que se dieron se pueden citar:

- ✓ Los trabajos de Euler, que consideraba que el cálculo se ocupaba de funciones, pero para él, el concepto principal era todavía el del *diferencial*, al que consideraba como igual a cero pero pudiendo tener razones finitas cuando se comparaba con otros diferenciales.
- ✓ Los trabajos de Lazare Carnot, que trata de utilizar la idea de la compensación de errores planteada por Berkeley, pretendiendo demostrar que el cálculo, lejos de proceder a ciegas, compensa escrupulosamente los errores para así, llegar a la verdad a lo largo de un camino seguro y bien equilibrado.
- ✓ Los trabajos de Joseph Louis Lagrange, quien suponía que para toda función f y para todo x se podía desarrollar $f(x+h)$ en una serie
  $$f(x+h)=f(x)+Ah+Bh^2+Ch^3+\cdots$$
  Así Lagrange definía la "función derivada" $f'(x)$, sencillamente como el cociente de h en este desarrollo. Sin embargo la idea no es totalmente válida, dado que no toda $f(x+h)$ puede desarrollarse de este modo, además de la cuestión relativa a la convergencia.
- ✓ Los trabajos de Benjamín Robins defendidos por D'Alembert, que consideraban los límites de las variables como los valores limitadores a los que dichas variables se pueden aproximar tanto como se quiera.

A la larga, el enfoque que se mostró como el más importante para resolver las cuestiones fundamentales del cálculo, fue el del uso de la idea del límite. Si bien Robins y D'Alembert no fueron los primeros en considerar este concepto, pues aparece implícitamente en la matemática griega y posteriormente con Simon Stevin, sí propagaron su uso, sin embargo el enfoque basándose en límites sólo fue uno más para resolver los problemas de los fundamentos. La razón era que tanto Robins como D'Alembert consideraron sólo *límites de variables*, por lo que hubo que esperar a su aplicación en *funciones* bajo condiciones de comportamiento de la variable independiente de manera explícita.

6.3. SIGLO XVIII

6.3.1. CARACTERÍSTICAS GENERALIDADES DEL PERÍODO

Si el siglo XVII ha sido atinadamente llamado el siglo de los genios, al siglo XVIII se le ha llamado el siglo de los ingeniosos. Correspondió a los genios del siglo XVII la invención de los conceptos, sin embargo a los matemáticos del siglo siguiente les tocó desarrollar las aplicaciones de aquellos conceptos. Al emplear el cálculo a áreas tales como las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, el cálculo de variaciones y las series infinitas desarrollaron las ramas de lo que se ha llamado el análisis. Así en particular, Euler y Lagrange reconocieron la superioridad de los métodos analíticos, lo que originó un desplazamiento gradual y deliberado de los argumentos geométricos.

En el prefacio de su *Mecánique analytique* Lagrange escribe:

... Me he propuesto el problema de reducir esta ciencia [la mecánica] y el arte de resolver problemas pertenecientes a ella, a fórmulas generales cuyo simple desarrollo proporciona todas las ecuaciones necesarias para la solución de cada problema ... . No se encontrarán diagramas en este trabajo. Los métodos que expongo en él no demandan ni construcciones ni razonamientos geométricos ni mecánicos, sino únicamente operaciones algebraicas analíticas sujetas a un procedimiento uniforme y regular.

Así, se reconocía la capacidad del análisis para traducir dentro de su lenguaje las particularidades propias de otras disciplinas. Como consecuencia de su aplicación, fundamentalmente a problemas físicos, se profundizó la separación entre el concepto de número y la geometría.

Si bien los fundamentos del cálculo habían estado en duda casi desde el inicio de los trabajos desarrollados en el siglo XVII, y aún resultaban poco claros, los matemáticos habían logrado avances significativos gracias a que las reglas para operar eran suficientemente transparentes. La mezcla de las matemáticas y la física constituyó un hecho crucial en el siglo XVIII, pues el significado físico de las matemáticas guió los pasos matemáticos y aportó continuamente los argumentos parciales para cubrir los pasos no matemáticos. Así, lo exacto de las conclusiones físicas, ofreció seguridad de que las conclusiones matemáticas debían ser correctas. Un elemento adicional del siglo XVIII, fue el de confiar más en los símbolos que en la lógica de los argumentos. Por ejemplo, las series infinitas tenían ya la misma forma simbólica para todos los valores de x para los cuales convergía, aunque debe señalarse que en general se ignoró lo relativo a su convergencia. El éxito obtenido con los argumentos relacionados con la física hizo que los matemáticos se mostraran cada vez más indiferentes al rigor que faltaba. Esta confianza en el formalismo contribuyó al retraso del rigor matemático, por ejemplo:

i. Sylvestre François Lacroix, en el prefacio al volumen I, de la segunda edición de sus tres volúmenes de su *Tratado de cálculo diferencial y cálculo integral* dice:
   "... tales pequeñeces como aquellas por las que se preocuparon los griegos, nosotros no las necesitamos."
   y que resumía la actitud típica del siglo, en el sentido de
   "... no complicarse probando con razonamientos obscuros cosas de las que uno nunca duda en primera instancia, o por demostrar lo que es más que evidente por medio de lo que es menos evidente."

ii. Josef María Hoene-Wronski, quien no obstante haber sido reconocido como un gran algoritmista, La Comisión de la Academia de Ciencia de París criticó severamente uno de sus ensayos por falta de rigor, a lo que él contestó:
   "... es pedantería, que prefiere el medio al fin."

En contrapartida a las posiciones anteriores, se tuvo la posición por ejemplo de D'Alembert que era consciente de la indiferencia existente hacia el rigor, y que señalaba:

"Hasta el presente (...) más importancia se ha dado en engrandecer el edificio que a iluminar la entrada, a elevarlo aún más, que a asentar los cimientos."

Cabe señalar, que más que las Universidades, fueron las academias de ciencias, fundadas en la mitad y final del siglo XVII, quienes patrocinaron y apoyaron la investigación matemática a lo largo del siglo XVIII y sólo fue en vísperas del siglo XIX cuando se inició un cambio. Por ejemplo, a partir de 1810 en que se funda la Universidad de Berlín, los profesores tuvieron la oportunidad de disertar sobre sus investigaciones, o bien con la fundación en 1794 de La Ecole Polytechnique, con Monge y Lagrange como sus primeros profesores de matemáticas, quienes impartieron cursos de muy alto nivel matemático, permitió a los graduados estar capacitados para realizar investigación matemática.

6.3.2. D'ALEMBERT. 1764.

D'Alembert representa una rara combinación de precaución y atrevimiento en su concepción del desarrollo matemático y a pesar de los éxitos conseguidos por Euler, consideró objetable la suposición de éste, de que los diferenciales son símbolos para cantidades que son cero, y sin embargo son cualitativamente diferentes. Así, D'Alembert, creía que la verdadera metafísica del cálculo habría que encontrarla basada en la idea de límite.

Afirmaba en un artículo escrito para la *Enciclopèdie* que
"la diferenciación de ecuaciones consiste simplemente en hallar los límites de las razones de diferencias finitas de dos variables incluidas en a ecuación".

D'Alembert insistía, oponiéndose a los puntos de vista de Leibniz y Euler, que
"...una cantidad es algo o nada; si es algo, aun no se ha desvanecido; si es nada, ya se ha desvanecido literalmente. La suposición de que hay un estado intermedio entre estos dos es una quimera"[111].

En consecuencia, interpretaba las "razones primera y última" de Newton, como límites y no como la primera y última razón de dos cantidades que están exactamente surgiendo a ser o desvaneciéndose, respectivamente. Así, sostenía que la notación de diferenciales no era más que una manera conveniente de hablar, que dependía para su justificación, del lenguaje de los límites.

D'Alembert, ante la critica del obispo Berkeley sobre el nuevo cálculo, consideró que para resolver las cuestiones de fundamentos podía hacer uso de la idea de límite, definiéndolo como:
"Una magnitud se dice que es *límite* de otra magnitud cuando la segunda se puede aproximar a la primera en menos que cualquier magnitud dada, por pequeña que ésta sea, aunque la segunda magnitud no pueda superar a la magnitud a la que se aproxima"

Al dejar al margen los infinitésimos, y en contraposición con Euler que definía las cantidades infinitamente grandes como las inversas a las infinitamente pequeñas, D'Alembert definió lo infinitamente grande en términos de límites; por ejemplo decía que un segmento es infinito con respecto a otro, si su razón puede hacerse mayor que cualquier número dado. Sin embargo, su orientación a pensar en magnitudes geométricas y no en términos de la teoria de conjuntos, la cual aún no existía, hizo que negara la existencia del *infinito actual*.

En el artículo *Différentiel* de la *Encyclopédie* en 1764, D'Alembert da una larga y prolija explicación tomando como ejemplo a la parábola $y^2=ax$. Sus razonamientos con base en la figura (6.3.2.1), se pueden resumir de la forma siguiente:

$$\frac{MP}{PQ} \text{ es el limite de } \frac{mO}{OM}=\frac{a}{2y}+z \; *$$

obsérvese que la expresión implica que la secante se convertirá en la tangente.

* Se puede ver de manera algebraica que el límite de $\frac{a}{2y}+z$ es $\frac{a}{2y}$

nótese que si P fuese el foco, entonces $AQ=x$ dado que Q estaría en la directriz de la parábola; así,

$$MP=y;\ PQ=2x \text{ y } z=dy,$$

de donde

$$\frac{MP}{PQ}=\frac{mO}{OM} \text{ se reescribiría } \frac{y}{2x}=\frac{dy}{dx};$$

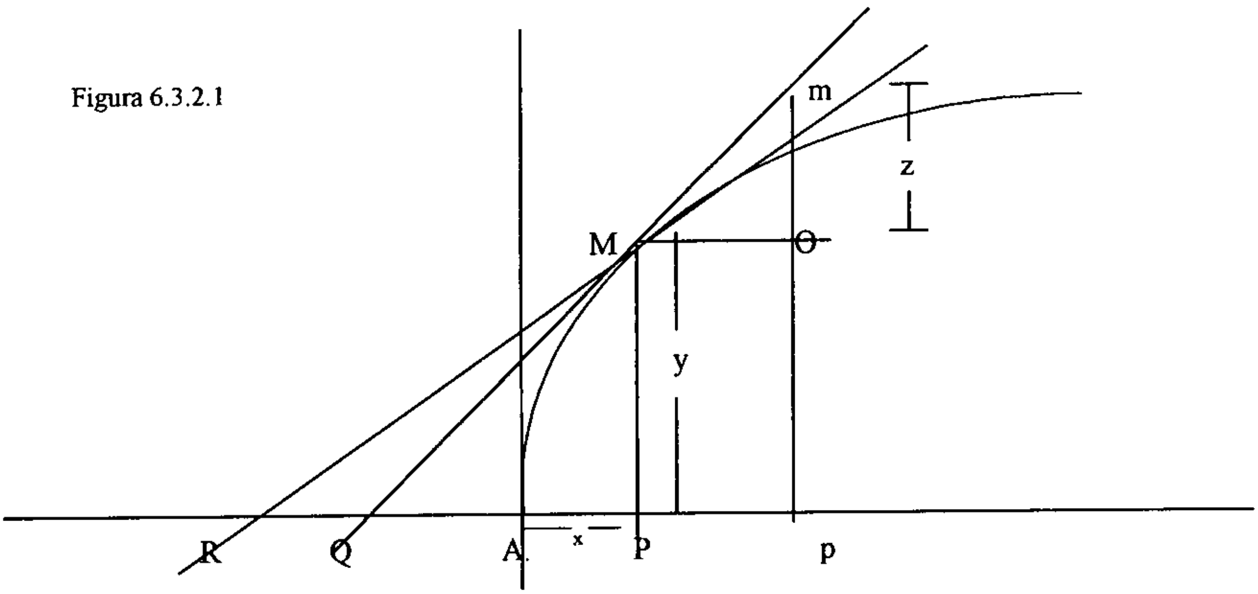
pero despejando x de la fórmula de la parábola $y^2=ax$, *entonces*

$x = \frac{y^2}{a}$ y sustituyendo queda

$$\frac{y}{2(\frac{y^2}{a})} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y} \qquad \text{L.Q.Q.D}$$

Así, $\frac{dy}{dx}$ ya no se interpreta como una razón de diferenciales, sino como el límite de la razón de diferencias finitas $\frac{mO}{OM}$, al igual que Leibniz.

Figura 6.3.2.1



Comentarios adicionales:

La formulación del concepto de límite carecía de la precisión y exactitud necesarias para hacerla operativa, por lo que su propuesta no pudo lograr que sus contemporáneos abandonasen el lenguaje y concepción de Newton y Leibniz. La definición que da sobre límite continúa matizada por la carga geométrica en su proceso de construcción.

6.3.3. LAGRANGE. LOS 1770S

Lagrange, quien además de Carnot, también se había visto influido por la idea de Berkeley de la compensación de errores, a partir de su artículo *Sobre una nueva especie de cálculo* del año de 1772, afirma que toda función puede ser desarrollada en una serie de Taylor[112] de la forma

$$f(x+i) = a_0 + a_1 i + \frac{1}{2!} a_2 i^2 + \cdots$$

y que en el desarrollo de la serie, sus coeficientes diferenciales, a los que llamaba "funciones derivadas" venían definidas como los coeficientes a_0, a_1, a_2,.... Luego añadía que los coeficientes podían ser calculados por unos métodos que estaban "libres completamente de cualquier consideración relativa a los infinitamente pequeños, a las cantidades evanescentes, a los límites y las fluxiones, y que se reducían al análisis algebraico de cantidades finitas.

En la segunda edición de su artículo, *Teoría de funciones analíticas*, en el año de 1813 inicia con lo siguiente:

"Llamamos función de una o varias variables a cualquier expresión del cálculo en la que entran dichas cantidades de una manera arbitraria... La palabra *función* fue utilizada por los primeros analistas para denotar las potencias de una cantidad en general. Desde entonces el significado de esta palabra se ha extendido para designar cualquier cantidad formada de una manera arbitraria a partir de otra cantidad... Cuando le atribuimos un incremento cualquiera a la variable de una función, sumándole una cantidad indeterminada, entonces, si la función es algebraica, podemos desarrollarla según las potencias de esta [cantidad] indeterminada, por medio de las reglas usuales del Álgebra. El primer término del desarrollo sería la función propuesta, a la que llamaremos la *función primitiva*; los términos siguientes estarán formados por diferentes funciones de la misma variable multiplicadas por las sucesivas potencias de la [cantidad] indeterminada. Estas nuevas funciones dependen únicamente de la función primitiva de la que se derivan, y podemos llamarlas *funciones derivadas*... En este libro veremos que el Análisis que usualmente recibe el nombre de *trascendental o infinitesimal* no era otra cosa en su raíz, que el Análisis de la funciones primitivas y derivadas, y que los Cálculos Diferencial e Integral se reducen, propiamente hablando, al cálculo de esas mismas funciones."

Si bien Lagrange demostraba los teoremas básicos del cálculo, sólo pudo obtener por medios algebraicos las *funciones derivadas*[113] en el caso de funciones sencillas. Algo debió de haber inquietado a Lagrange, dado que siendo director de la sección matemática de la Academia de Berlín, en el año de 1784 emitió una convocatoria de un premio para *una teoría clara y precisa de lo que se llama el infinito en matemáticas.*

"Es bien sabido que la geometría superior emplea regularmente lo *infinitamente grande* y *lo infinitamente pequeño...* La Academia, en consecuencia, desea una explicación de cómo es posible que se hayan conseguido deducir tantos teoremas correctos a partir de unos presupuestos contradictorios, así como... un principio verdaderamente matemático que pueda sustituir correctamente al del infinito ...[114]"

El premio le fue concedido en 1786 a Simon Lhuilier, por su estudio sobre los límites y su significación para el cálculo. El segundo lugar lo obtuvo Carnot.

6.3.4. **LHUILIER.(L'HUILIER) 1786.**

En su ensayo *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* publicado en 1787 proponía mostrar "que el método de los griegos de la antigüedad, conocido como exhaución, convenientemente profundizado bastaba para establecer con certeza los principios del nuevo cálculo"[115]. Así, modificó el método de exhaución y lo interpretó en términos de límites. Haciendo del concepto de límite la base de su exposición, coincide con D'Alembert, al señalar "que en el cálculo diferencial no es necesario hablar del nombre de cantidad diferencial".

Como en los textos actuales, Lhuilier presentó la razón diferencial o cociente fundamental, definido como el límite de la razón del incremento de la función y su correspondiente de la variable independiente. Centra su atención sobre un solo número, la derivada; como el límite de una sola variable, la razón de sus incrementos, en lugar de la última razón de dos cantidades evanescentes, o de dos fluxiones, o de cualesquiera dos cantidades las cuales tienen esa misma razón.

A pesar del nombre de "cociente diferencial" que da una idea de relación de dos cantidades, él insiste en que el símbolo $\frac{dy}{dx}$ que representa la cantidad, debe interpretarse como un solo número. Al tratar con los cocientes diferenciales de orden superior, una vez más advierte que el símbolo $\frac{d^2y}{dx^2}$ no puede ser separado como un cociente. Esto era un contraste con los trabajos de Newton y Leibniz, en los cuales las fluxiones y los diferenciales de cualquier orden eran considerados con un significado independiente al de la razón o ecuación en la cual ellos intervenían.

Si bien la definición de cociente diferencial puede ser encontrado en textos elementales de cálculo de hoy día, Lhuilier no pareció haber tenido precaución con las posibles dificultades que rodean al concepto de límite. Evitó el misticismo del infinitesimal, la vaguedad de la última razón y la vacuidad del símbolo $\frac{0}{0}$; pero no pudo apreciar la sutileza del concepto de límite y cuidar en extremo la definición esencial. Trató sólo con funciones sencillas, así entonces pasaron inadvertidos los inconvenientes de su presentación. Su variable siempre fue menor o mayor que su límite. "Dada una cantidad variable siempre más pequeña o más grande que cualquier cantidad constante dada, pero de la cual difiera al final, menos que cualquier cantidad propuesta aunque pequeña, esta cantidad constante es llamada el límite en lo grande o en lo pequeño de la cantidad variable". Por tanto, para Lhuilier, la variable no podía oscilar lo cual limita el punto de vista más general.

Aún más grave fue el error que sugiere la vaga idea de uniformidad expresada en la ley de continuidad de Leibniz. Dijo que "si una cantidad variable en todas sus etapas goza de una cierta propiedad, su límite gozará de esa misma propiedad". Esto persistió durante el siglo XIX, aparentemente en la afirmación de William Whewell: "... lo que es verdadero cerca del límite es verdadero en el límite". La falsedad de esta declaración es absolutamente evidente si se tiene en mente a los números irracionales, que pueden ser fácilmente definidos como límites de sucesiones de números racionales, o de la observación de las propiedades de un polígono inscrito en un círculo

Si bien Lhuilier buscó correctamente en el concepto de límite las bases del cálculo, su exposición fue una sobre simplificación de lo que más tarde se dio cuenta iba a ser una cuestión muy difícil. Siguiendo a D'Alembert al considerar al infinito desde el punto de vista de magnitud, más que como un conjunto o colección, él negó la existencia de una cantidad infinita actual (realizada) porque percibía que su aceptación lo conduciría a contradicciones tales como $\infty + n = \infty - n$. Consecuentemente, mantuvo que había mostrado que el cálculo era independiente toda idea del infinito, ya fuese muy grande o muy pequeño. Así, no pudo darse cuenta que la teoría completa de límites está basada, y por último el análisis, en esos conjuntos infinitos, hecho que fue reconocido hasta el siglo siguiente.

El trabajo que le valió el premio a Lhuilier contenía:

- La definición de límite al estilo de D'Alembert: como el valor del que una variable puede llegar a diferir en menos que una cantidad arbitrariamente pequeña.
- Introdujo la notación de "lim"
- Demostraba los teoremas del cociente y del producto:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(p_n)}{\lim_{n\to\infty}(q_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \left[\lim_{n\to\infty}(p_n)\right]\left[\lim_{n\to\infty}(q_n)\right]$$

Define la derivada de la manera moderna, esto es: $\frac{dy}{dx}$ es el límite del cociente de las diferencias o cociente incremental, y $\frac{dy}{dx}$ debe ser leído como un símbolo único y no como una razón. Sin embargo, se menciona que irónicamente le denominó "razón diferencial", lo que suponía un desajuste entre la definición considerando un todo y su denominación implicando partes.

Se señala que el estilo pomposo de la mayor parte de la exposición de Lhuilier neutralizó en buena medida la claridad de su teoría de límites. Por aquella época era más leída una monografía de Lazare Carnot, quien presentó la primera versión de su ensayo en el mismo concurso en el que Lhuilier ganó el premio. En una versión revisada de su memoria hizo notar el hecho obvio, pero que aparentemente había pasado desapercibido hasta entonces, de que el paso al límite no tenía por que ser de una manera monótona.

6.3.5. LACROIX, 1797

En 1797 fue publicado el más famoso y ambicioso libro de texto que había aparecido hasta ese tiempo sobre el tema, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix. En el prefacio señalaba que había sido el nuevo método de Lagrange el que lo había inspirado a realizar un tratado sobre el cálculo, y que éste debería tener como base la idea de sustituir a los infinitamente pequeños. Sin embargo su texto, dejó la fundamentación en duda a pesar de haber declarado abiertamente la orientación de su trabajo, lo que posteriormente se interpretó como una clara muestra de la indefinición del período.

Lacroix había interpretado el método de las series de Lagrange en términos de los límites de D'Alembert y Lhuilier, sin embargo, enturbió el significado de esta relación hablando del *límite de las series divergentes*, y dar seguimiento a los trabajos de Euler en el estudio de series infinitas tales como

$$1-1+2-6+24-120+\cdots$$

No compartió la sospecha de que el método de Leibniz estaba basado sobre una idea falsa de los infinitamente pequeños, y en consecuencia admitió el uso de los infinitesimales[116], e hizo uso, también de su notación. Este hecho a veces desorientó su pensamiento y le condujo, como a Euler, a considerar lo que el propio Lacroix llamó *coeficiente diferencial* como un cociente de ceros.

La falta de una distinción crítica entre los tratamientos de Newton, Leibniz y Lagrange, dieron a su trabajo una apariencia de algo parecido al intento de Carnot de demostrar la congruencia y armonía de las numerosas representaciones del cálculo. Laplace elogió esta actitud de Lacroix, diciendo que tal *reconciliación* de métodos servía para una mutua clarificación, que la verdadera metafísica probablemente sería encontrar la parte que tuviesen en común. Esto último, sin embargo, fue deplorable en esa época, dado que conducía a una confusión del pensamiento sobre el tema, justo cuando lo que más se necesitaba era una precisión lógica.

En 1802, en su trabajo *Traité élémentaire*, que es un compendio de su extenso tratado, Lacroix omite el método de Lagrange y presenta una explicación en términos de límites básicos, aunque una vez más, con una carencia de rigor al hacer las interpretaciones en términos de posibles infinitesimales. El éxito de su trabajo, medido a través de la traducción a varios idiomas y de sus muchas ediciones —la novena apareció en 1881— condujo a otros textos del mismo tipo y fue en gran parte gracias a éstos que el método de los límites llegó a hacerse popular, sí bien no riguroso. Fue a través de tales textos que la notación de Leibniz y la doctrina de los límites reemplazaron en Inglaterra al método de fluxiones por una parte, y por otra, las interpretaciones que ya habían llegado a ser desesperadamente confusas con los infinitamente pequeños.

Se señala el año 1816, cuando el compendio de Lacroix fue traducido al inglés, como el año que "marcó un importante período de transición"[117] porque testimoniaba el triunfo en Inglaterra de los métodos usados en el *Continente*. Este punto particular en la historia de las matemáticas marcó una nueva época, dado que al siguiente año apareció el trabajo de Bolzano que indicaba el surgimiento del período del rigor matemático en todas las ramas de las materias. La nueva actitud en el cálculo, del establecimiento lógico de un análisis superior sobre la base del concepto del límite, rompió y puso fin al período de incertidumbre que había comenzado con la invención del método de fluxiones y del cálculo diferencial.

6.4. SIGLO XIX

6.4.1. CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL PERÍODO.

Para algunos matemáticos el concepto de límite de D'Alembert les pareció estar inmerso en una oscuridad metafísica como lo eran los infinitamente pequeños. Consecuentemente, la mayoría de los libros de texto publicados en esa época sobre cálculo continuaban prefiriendo las explicaciones de Leibniz. De 28 publicaciones aparecidas entre 1754 y 1784, quince estaban en la terminología de Leibniz, seis en términos de límites y cuatro en términos de los ceros de Euler, dos en términos de fluxiones y uno en términos de una secante que pasa a ser una tangente.

La revolución francesa y el período napoleónico crearon condiciones extremadamente favorables para el desarrollo de la matemática. Las ideas democráticas invadieron la vida académica, surgió la crítica contra las anticuadas formas del pensamiento y las escuelas y universidades tuvieron que ser reformadas y rejuvenecidas. Se puede señalar que la matemática progresó fuertemente en Francia y más tarde en Alemania. La nueva investigación matemática se emancipó gradualmente de la antigua tendencia de ver la mecánica y la astronomía como la meta final de las ciencias exactas. La principal ocupación de los matemáticos del siglo XIX era en las universidades, como profesores e investigadores. Si bien ocasionalmente los Bernoulli, Lagrange y Laplace habían participado en la enseñanza, en este siglo la responsabilidad de enseñar aumentó.

Existe una cita con relación a la nueva forma de visualizar la matemática, hecha por Jacobi a las opiniones de Fourier, dice:

"Es verdad que el señor Fourier creyó que el principal fin de las matemáticas era la utilidad pública y la explicación de los fenómenos de la naturaleza, pero un filósofo como él debería haber sabido que el solo fin de la ciencia es el honor del espíritu humano, y que, desde este punto de vista, una cuestión concerniente al número es tan importante como una cuestión relativa al sistema del mundo"[118].

Los comienzos del nuevo período en la historia de la matemática francesa puede fecharse probablemente desde el establecimiento de las escuelas y academias militares que tuvo lugar durante la última parte del siglo XVIII. Entre ellas, la fundación de la École Polytechnique de París en 1794, de la cual muchos de los más grandes matemáticos franceses, fueron estudiantes, profesores o examinadores, entre ellos Euler, quien escribió varios de sus textos específicamente para la enseñanza en esta institución.

Las objeciones surgidas en el siglo XVIII al método de fluxiones, las razones primera y última, los límites y los diferenciales, quedaron en gran medida sin contestar en los términos propios de la época. Las discusiones fueron al final equivalentes a aquellas que Zenón levantó dos mil años antes y que estaban basadas en el infinito y la continuidad. Durante este período se trajeron al primer plano del pensamiento matemático, problemas no resueltos desde la época de Eudoxo, tales como la existencia del infinito potencial y actual Las propuestas de todos los métodos excepto el de diferenciales, después de todo, afirmaban, que no tenían necesidad de involucrar la noción de infinito y no hicieron caso de la continuidad. Los partidarios en turno del cálculo diferencial, si bien trataron de justificar los procedimientos en términos de esos conceptos, fueron totalmente incapaces de proporcionar explicaciones consistentemente lógicas; para la mayoría de esos matemáticos, aquéllas ideas fueron consideradas como metafísicas y por lo tanto, se encontraban más allá de la esfera de las definiciones matemáticas.

Así, parece paradójico, ver que los métodos más adversos a la introducción de los conceptos de infinito y continuidad, fueron aquéllos que hicieron posible su inclusión. El método de límites, que en esa época parecía que no conduciría ni al infinito ni a la continuidad, fue el que proporcionó sus bases, y el método de Lagrange[i], el cual se desarrolló para evitar esas dificultades, trajo cuestiones que apuntaban en esa dirección para su solución. Surgieron preguntas con relación al significado de lo que es en general una función y en particular una función continua, así como una crítica al uso casi indiscriminado de las series infinitas. Lagrange había puesto en marcha el cuidado en el uso de las series al considerar el residuo en cada caso. Esta advertencia sirvió para señalar, quizá, el por qué había que evitar el uso de infinitos e infinitésimos. Al igual que Arquímedes, evidentemente no consideró las series extendidas hasta el infinito, pero cuidando que el residuo fuera lo suficientemente pequeño. Sin embargo, en el siglo XIX, el concepto de infinito llegó a ser básico en el cálculo por el uso de series infinitas y conjuntos infinitos.

6.4.2. Bolzano, 1817.

Uno de los primeros representantes de la escuela crítica y filosófica de los matemáticos en el siglo XIX fue Bolzano. En 1816 dio una prueba de la fórmula binomial y mostró claras nociones sobre la convergencia de las series. Sostuvo ideas previas sobre variables, continuidad y límites. H. A. Schwarz en 1872 consideró a Bolzano como el inventor de la línea de razonamiento desarrollada posteriormente por Weierstrass. En 1881, O. Stolz declaró que todo lo que Bolzano había escrito era memorable, puesto que fue el inicio de "una imparcial y aguda crítica de las contribuciones de la literatura anterior"[119]. Fue un reformador del cálculo, y su trabajo fue retomado por sus contemporáneos, como Cauchy quien logró arraigar sus ideas como la base del cálculo.

Bolzano percibió, a pesar de las paradojas presentadas por las nociones de espacio y tiempo, que cualquier continuo debía ser pensado como conjunto esencialmente de puntos. Su opinión a este respecto se parecería a la de Galileo[ii], a quien él hace referencia. Aunque negó la existencia de las magnitudes infinitamente grandes e infinitamente pequeñas, sostuvo, como Galileo, la posibilidad de un infinito actual con respecto a un conjunto. Sin embargo hizo referencia a tales conjuntos, como el de la paradoja de Galileo, en la cual se especificaba que la parte podía ponerse en una correspondencia uno a uno con su todo, por ejemplo, que los números entre 0 y 5 podían acoplarse con aquellos entre 0 y 12. Así, la opinión de Bolzano sobre el infinito era sustancialmente aquella que los matemáticos han adoptado desde el tiempo de Cantor, excepto que Bolzano había considerado que las diferentes potencias del infinito debían ser de la misma potencia. Así, Boyer señala que Bolzano pareció haberse dado cuenta que la infinitud de los números reales es de un tipo diferente a la infinitud de los números naturales, en razón de que aquéllos no son numerables.

---

[i] Se refiere a la propuesta de Lagrange de considerar que toda función continua puede ser expresada por medio de la serie de Taylor.

[ii] Establece la correspondencia biunívoca entre los números naturales y los cuadrados perfectos.

Aunque las ideas de Bolzano señalaban la dirección hacia la cual la fundamentación del cálculo descansaría y que mucho del pensamiento del siglo XIX prosiguió, aquéllas no constituyeron la influencia decisiva en su determinación. Su trabajo permaneció largamente desapercibido hasta que, más de medio siglo después, Hermann Hankel lo redescubrió. Así, Boyer ha señalado que Bolzano fue "una voz gritando en el desierto".

Bolzano no sólo desconfió de los infinitesimales, sino también resolvió el problema de los límites introduciendo el límite-no-tocado. Su idea da una muestra de como utilizando el límite-no-tocado se puede obtener $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ al considerar que

$$\left|\frac{(x+\delta x)^n - x^n}{\delta x} - nx^{n-1}\right| \text{ es pequeño si, } |\,\delta x\,| \text{ es pequeño.}$$

Bolzano señala en su reporte de 1817 que en un continuo no-infinitesimal, $\frac{dy}{dx}$ hace el papel de sólo un símbolo para denotar el valor límite de la relación, pero si se usa en un continuo infinitesimal, $\frac{dy}{dx}$ parece ser más versátil. Por ejemplo se puede multiplicar la expresión $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ por dx y obtener $dy=nx^{n-1}dx$.

"Es importante darse cuenta que $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ y $dy=nx^{n-1}dx$. *son totalmente diferentes en especie;* no son formas equivalentes de expresar la misma situación. La primera nos informa sobre la razón de cambio de la función y la segunda relaciona dos incrementos pequeños, de la variable y de la función, en un punto particular"[120].

Debe tenerse en cuenta que en la actualidad, Courant ha señalado que el diferencial no necesariamente tiene que ser pequeño. Además, la diferencia entre la derivada y el diferencial puede situarse en los siguientes términos: La derivada es una función de una variable, en tanto que el diferencial de una función, es de dos variables, es decir, $\frac{dy}{dx} = f(x)$ y $dy=f(x, dx)$.

La definición que Bolzano propuso con relación al límite, se verá en la sección correspondiente a Cauchy.

6.4.3. CAUCHY. 1821.

"Dado que en el siglo XVIII se había caracterizado por ser un período de experimentación, en el cual los resultados habían llegado a fluir con excesiva abundancia, y en consecuencia los matemáticos de esa época no habían puesto suficiente atención a la fundamentación de sus obras"[121], tocó a Cauchy junto con sus contemporáneos, Gauss, Abel y Bolzano, modificar el rumbo y pertenecer a los pioneros de la nueva insistencia en el rigor de la matemática. Era tiempo para una recapitulación de los resultados. Así se planteaban: ¿Qué era una función de variable real, la cual mostraba un comportamiento tan diferente en el caso de una serie de Fourier y en el caso de una serie de potencias?

Toda vez que los primeros profesores de la École Polytechnique habían sentado el precedente de que ni aun los más grandes matemáticos podían considerarse excluidos de escribir libros de texto a todos los niveles, tocó a Cauchy seguir con esa tradición, dando como resultados tres libros, el *Cours d'analyse del École*

Polytechnique en 1821, el *Résumé des leçons sur le calcul infinnitésimal* en 1823 y las *Leçons sur le calcul différentiel* en 1829 con los cuales dio al cálculo infinitesimal elemental la forma que tiene hoy[122].

El primero y más importante, *Cours d'analyse*, revolucionó el análisis entero y creó las reglas del rigor matemático al cual actualmente se está acostumbrado. Se puede afirmar que él marcó un gran paso adelante de sus predecesores, pero hubo también muchos puntos débiles cruciales cuya solución por otros fue, en parte, el crear las reglas del rigor de que estábamos hablando. En el texto hay tres alusiones a series convergentes, divergentes y condiciones de convergencia. En un punto Cauchy dice:
"...hablando de la continuidad de funciones, no se podría prescindir de conocer las principales propiedades de las cantidades infinitamente pequeñas, las cuales servirían de base para el cálculo infinitesimal".

Así hay un doble interés:

i) El uso propiamente dicho de los infinitesimales que reflejaba una situación de permanecer básicamente igual, lo cual fue un contratiempo para los propósitos del análisis.
ii) La formulación de la continuidad de una función; este fue un cambio abrupto y totalmente inesperado de acercamiento. El tipo de continuidad normalmente aplicada era la euleriana, identificada con un buen comportamiento de las expresiones algebraicas diferenciables. En su reporte de 1814, él hace referencia a la continuidad en la forma tradicional, pero en el Cours d'analyse es muy diferente. [123]"

Se considera que una de las definiciones básicas en los trabajos de Cauchy es su definición sobre *la continuidad de una función*:
"La función *f(x)* permanecerá continua con respecto a x entre los límites dados, si entre estos límites un incremento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma"

Este es el famoso "Teorema de Continuidad" de Cauchy; que si bien su interpretación actual abarca funciones con esquinas así como también curvas diferenciables, tales como las que se hallan en las series de Fourier, parecería que su enunciado rebasó las pretensiones del propio Cauchy. No obstante, teniendo en cuenta la propia definición de Cauchy de las cantidades infinitamente pequeñas en términos de límites implicaría que su definición de continuidad sería completamente análoga a la que utilizamos hoy.

La frase de Cauchy "entre dos límites dados" parece implicar que estaba interesado por especificar el intervalo de valores de una función, tal como había recalcado en las series de Fourier. Grattan-Guinness señala que sería temerario pensar que su nueva teoría de continuidad hubiese estado influida totalmente por las series de Fourier. Las expresiones que siguieron inmediatamente después de la formulación de continuidad fueron expresiones algebraicas, restringidas a funciones *finitas* por ejemplo, propuso como discontinuas en $x=0$ a las funciones

$$x^a \text{ con } a \text{ negativa, y } \frac{a}{x}$$

ya que ellas serían infinitas.

Existe una sólida señal de que Cauchy realmente no estaba extendiendo el uso del término *continuidad a funciones con esquinas, sino reformulando* el antiguo sentido algebraico euleriano en términos aritméticos. Las implicaciones geométricas de esta reformulación de abarcar funciones con esquinas, no fue intentada en 1821. Cauchy escribió:

"En los trabajos de Euler y Lagrange, una función es llamada continua o discontinua, como creyendo que los diversos valores de esa función correspondientes a diversos valores de la variable ... son o no son producidos por una misma función ... . Sin embargo esta definición que sólo hemos evocado está lejos de ofrecer una precisión matemática; las leyes analíticas a las cuales las funciones tienen que sujetarse son generalmente fórmulas algebraicas o trascendentes, y puede suceder que varias fórmulas representen, para ciertos valores de la variable x, la misma función: entonces, para distintos valores de x, diferentes funciones."

Cauchy escogió como un ejemplo de una expresión algebraica "mal portada", la clase de integral con la cual él había trabajado en 1814:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^2}{t^2+x^2}dt=\begin{cases} x & si \quad x\geq 0 \\ -x & si \quad x<0 \end{cases}$$

y señala que en la teoría de Euler, el lado izquierdo de la expresión anterior es continuo, mientras que el lado derecho es discontinuo[i]; pero la indeterminación se elimina si la definición de Euler se sustituye por la que se propuso en el Cours d'analyse.

Si bien no existen indicios claros sobre la fecha desde la cual Cauchy tenía ideas como la anterior, se ha sugerido por algunos historiadores que es posible que la fuente se encuentre en los escritos de Bolzano. La definición que él da establece que:

Definición (6.4.3.1).

Una función $f(x)$ varia de acuerdo a la ley de continuidad para todos los valores de x los cuales caen dentro o fuera de ciertos límites, no es otra cosa que, para cualquier valor de x, la diferencia de $f(x+\omega)$-$f(x)$ puede hacerse más pequeño que cualquier cantidad dada, si uno hace ω tan pequeña como uno desee,...

La formulación de continuidad de 1821 por Cauchy es casi idéntica, aún en la mención sobre "los límites dados"; sin embargo, mientras Cauchy parece considerarla sólo como una reformulación del estilo usual de continuidad, Bolzano había ampliado su interpretación, al darse cuenta de las propiedades de las funciones y mostrar la diferencia entre la continuidad euleriana y la continuidad, en el sentido propio, por construcciones posteriores de funciones continuas no diferenciables.

Grattan-Guinness establece que, si esta definición (6.4.3.1) se reescribiera como:

$f(x)$ es continua en $x = x_0$ si $[f(x_0+\alpha)$-$f(x_0)]$ es pequeña cuando α es pequeña ..... (6.4.3.2)

la expresión permitiría reinterpretar la definición, como la definición del valor límite $f(x_0)$ de $f(x_0+\alpha)$ cuando α tiende a cero, dado que es la continuidad lo que garantiza que el límite exista, porque hace explícito que debe cumplirse para cualquier valor de x. Para evitar confusión alguna, enseguida propone introducir el símbolo B, el cual está desvinculado de $f(x)$, en lugar de $f(x_0)$; así se tendría:

Definición (6.4.3.3).

La función $f(x_0+\alpha)$ tiene un *límite* (único), de valor B, cuando $\alpha\to 0$, si $[f(x_0+\alpha) - B]$ es pequeño cuando α es pequeño.

En otras palabras, podemos movernos tan cercano como deseemos al límite B, mientras se evita el límite mismo. El significado completo de la definición (6.4.3.2) de Bolzano sólo puede ser comprendido cuando se mire en términos del esquema de la definición (6.4.3.3). Bolzano definió continuidad ahí, pero lo había hecho en una forma de *límite-no-tocado*, en términos de diferencias aritméticas. Esta es la más pura esencia de lo que él llamó el análisis teórico o abstracto[124], con lo que inició una transformación: *la aritmetización por medio de técnicas del límite-no-tocado, tal como en su definición.*

Cauchy, repentinamente empezó a utilizarla al escribir sus libros, por ejemplo, en el capítulo preliminar de su Cours d'analyse dice:

[i] Para Euler, la función era discontinua si se trataba de una función no diferenciable en algún punto.

"Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor dado, con el propósito de lograr diferenciarse de éste en tan poco como uno desee, este último es llamado el *límite* de todos los otros."

Debe observarse que la cuestión de usar o no infinitesimales no había surgido como una necesidad. La razón se da porque *el problema de los tipos de magnitudes admisible en el análisis, son lógicamente independientes del problema de los límites.* El límite-no-tocado o el límite logrado puede llevarse a cabo en un continuo infinitesimal o no-infinitesimal; sin embargo desde Newton y Leibniz hacia delante fue común pensar que estos dos problemas estaban ligados fuertemente, por las dificultades que habían sido encontradas en la formulación de la derivada de una función $y = f(x)$ por medio de la expresión

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}\right]$$

en donde la principal dificultad se presenta cuando δx realmente toma el valor de 0, dado que la razón del lado derecho llega a ser la indeterminación $\frac{0}{0}$. ¿Luego entonces, cómo es que la derivada ha sido calculada?

Un problema que parece ser más agudo se tiene con la derivada de $y = x^n$, que haciendo uso del teorema de Newton se obtiene:

$$(x+\delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\delta x)^2 + \cdots$$

pero el teorema sólo aplica si $\delta x \neq 0$, de donde, cómo puede ser considerada correcta la respuesta

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Debe entenderse que la atracción de los infinitesimales para resolver el problema estuvo en que, siendo más pequeños que los números ordinarios, ellos cumplían la ley de

$$a + h = a$$

donde a es un número ordinario y h un infinitesimal.

Como ya se mencionó, Bolzano no sólo desconfió de los infinitesimales, sino también *resolvió el problema de los límites introduciendo el límite-no-tocado*, sin embargo nada muestra que esto sea mejor que lo aportado por Cauchy, quien practicó tanto el límite-no-tocado como los infinitesimales al mismo tiempo.

En sus trabajos Cauchy utilizó lo que consideró más valioso de sus antecesores, así, sin hacer concesión alguna a la fundamentación algebraica de Lagrange, usó su notación y el teorema del valor medio y el residuo de la serie de Taylor, tal como Lagrange las había derivado y muchas de sus contribuciones a la teoria de variable real. Tomó como fundamental, el concepto de límite de D'Alembert, aunque dándole un carácter aritmético más preciso. En contraposición, prescindió de la geometría, de los infinitésimos y de las velocidades de cambio. En el libro *Cours d'analyse* expone la teoría de límites con mucho más detalle que nadie antes que él, basándose en la siguiente formulación de la **definición de límite:**

"Cuando los valores que va tomando sucesivamente una variable particular, se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acaban de diferir de él tan poco como queramos, entonces, este último valor recibe el nombre de *límite* de todos los anteriores[125].

Si bien algunos matemáticos previos habían considerado un infinitésimo como un *número* constante muy pequeño, Cauchy utilizando la definición anterior **define *infinitésimo***:

"Decimos que una cantidad variable se hace *infinitamente pequeña* cuando su valor numérico disminuye indefinidamente hasta converger al límite cero"

Las dos definiciones anteriores plantean algunas cuestiones importantes acerca del análisis de Cauchy. Actualmente la palabra *variable*[i] se usa para designar un símbolo; así, la variable x es un símbolo que representa indistintamente uno cualquiera de una cierta colección de valores, pero no representa una cantidad[ii] variable, porque sencillamente tal cosa no existe. La literatura matemática de los siglos XVIII y anteriores es poco clara al respecto, y con base en ella, parecería que la definición de infinitésimo de Cauchy, implicaría una *cantidad* variable cuyos *valores* numéricos tendieran hacia cero.

Esto último estaría en contraste con el punto de vista adoptado a partir de Weierstrass, en que un infinitésimo es una variable que tiene límite cero, y en que hablar de lo infinitamente pequeño no presupone la existencia de valores infinitamente pequeños. Sin embargo en las definiciones de Cauchy con las frases "tan pequeño como queramos" y "disminuir indefinidamente hasta converger al límite cero", dejan abierta la cuestión de si hay realmente o no valores infinitamente pequeños que pueda recorrer la variable. Dicho en otras palabras, esas frases dejen sin explicar el tipo de variable independiente con respecto a la cual la sucesión de valores tiende a su límite.

Una característica a destacar del análisis de Cauchy, es que no se apoya en consideraciones geométricas, sino que utilizando la teoría de límites como punto de partida de las definiciones de propiedades básicas, y la aritmética de las desigualdades como mecanismo principal en las demostraciones, consiguió llevar al análisis matemático a una situación de autonomía con respecto a la geometría y al álgebra. Cauchy aplicó sus ideas para abordar el cálculo diferencial, así presenta:

- i) consideremos una función continua $f(x)$ y sea i un infinitesimal.
- ii) entonces por la definición de continuidad $f(x+i)$-$f(x)$ es también un infinitésimo
- iii) si la razón entre ellos tiende a un límite, entonces ese límite es la función derivada de Lagrange

$$f'(x) = \lim_{i\to 0}\left[\frac{f(x+i)-f(x)}{i}\right] \quad \text{..............................(6.4.3.3)}$$

También definía la *diferencial* $df(x)$ de $f(x)$ como:

$$df(x) = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}\right] \quad \text{..............................(6.4.3.4)}$$

donde α es un infinitesimal pero h es finito.

Este tipo de diferencial difiere del de Leibniz, porque puede tomar valores *finitos* a la vez que *infinitamente pequeños*. Cauchy para ejemplificar lo anterior desarrollaba:

- Primero, sustituía i=αh en (6.4.3.3), obteniendo

$$f'(x) = \lim_{\alpha h\to 0}\left[\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}\right]$$

- luego, lo multiplicaba por h y obtenía

---

[i] Variable, magnitud variable: en general, cualquier símbolo para designar una posición vacía; para símbolos iguales han de ponerse valores iguales. Diccionario de Matemática. Ediciones Rioduero. Madrid. 1977.

[ii] Cantidad. Carácter de lo que puede ser medido o contado, de lo que es susceptible de crecimiento o disminución. Porción de alguna cosa. Pequeño Larousse 1998. Diccionario Enciclopédico. Colombia. 1997. El Diccionario de Matemática. Ediciones Rioduero. Madrid. 1977, no contempla su definición.

$$
\begin{aligned}
hf'(x) &= h\left[\lim_{\alpha h\to 0}\left[\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}\right]\right]\\
&= \lim_{\alpha h\to 0}\left[\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}\right]\\
&= \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}\right]\\
&= df(x) \qquad \text{............................(6.4.3.5)}
\end{aligned}
$$

- Ahora suponiendo que f $(x)=x$, entonces (6.4.3.5) se convierte en
  $dx=h$

con lo que la **diferencial toma un valor finito.**

Esta curiosa mezcla del "nuevo" estilo de los límites con el estilo del pasado, le imprimió una forma inesperada al cálculo de Cauchy, pues

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

es ahora un teorema, y ya no es una definición, dado que es una proposición que se puede construir con base a definiciones previas. Así, la derivada queda definida por (6.4.3.3) como el *límite del cociente incremental*, difiriendo de la expresión $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, donde $y = f(x)$, del sentido moderno de entenderse como un símbolo único, con base en el operador derivada $\frac{d}{dx}$

Partiendo de la definición de límite, Cauchy dio ejemplos tales como el límite de $\frac{\operatorname{sen} a}{a}$ para $a \to 0$.

En el trabajo de Cauchy, el concepto de límite viene a ser como el pensado por Bolzano, clara y definitivamente aritmético más que geométrico. Si bien Newton se había restringido él mismo a infinitesimales, o cantidades evanescentes, de primer orden, Leibniz había intentado, aunque con mucha vaguedad, definir los de orden superior; Cauchy agregó las definiciones de infinitesimales de orden superior, retomando la idea de D'Alembert de definirlos en términos de los límites de sus relaciones. Así, define $y=f(x)$ como un infinitesimal de orden n con respecto a un infinitesimal x si

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{y}{x^{n-\varepsilon}}\right)=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{y}{x^{n+\varepsilon}}\right)=\pm\infty \quad \text{..... (6.4.3.6)}$$

donde ε tiene el significado clásico de ser una constante positiva, no obstante pequeña.

Obsérvese que si y es un diferencial de orden n, el orden del diferencial $x^{n-\varepsilon}$ hará que esta última cantidad sea de un orden mayor a la primera, lo que produce el cero, y lo inverso haría el resultado infinito.

Este ejemplo es otra muestra, en el trabajo de Cauchy, del dominio de las ideas de variable, función y límite, ya que en su definición él habla del orden de la diferencial y, con respecto a otra, x. Esto se entiende como que, la última es la variable independiente, la cual produce una sucesión de valores que tienden a 0 como su límite; la sucesión de valores corresponde a la variable y, encontrándose en consecuencia una relación funcional entre y y x.

La definición (6.4.3.6) es equivalente a la actual que señala que

"y es un diferencial de orden n con respecto a otro diferencial x, si $\lim_{x\to 0}\frac{y}{x^n}$ es una constante diferente de cero".

Cauchy continuó con su trabajo de probar lo que se conoce como el *teorema de Cauchy*, que establece que la condición necesaria y suficiente para que una serie converja a su límite es que la diferencia entre S_p y S_q, para cualquier valor de p y q mayores que n puede hacerse menor en valor absoluto, que cualquier cantidad dada, tomando a n lo suficientemente grande. Una serie que satisface esta condición se dice que es convergente a sí misma. Debe tenerse en cuenta que la prueba de la condición de suficiencia requiere una definición previa del sistema de los números reales, donde se supone que el límite S es único. Sin una definición de los números irracionales, la prueba es lógicamente imposible. Es decir, uno no puede definir $\sqrt{2}$ como el límite de una sucesión de la forma 1, 1.4, 1.41, 1.414, ... porque para probar que la sucesión tiene el límite, se debe asumir, con base en la definición de límite y convergencia, la existencia de este número como previamente demostrado y definido. Cauchy había afirmado en su *Cours d'analyse* que los números irracionales debían considerarse como los límites de sucesiones de números racionales.

A pesar del cuidado con el que Cauchy trabajó, hubieron numerosas frases en su exposición que requerían una mayor explicación. Las expresiones tales como: "aproximándose indefinidamente", "tan pequeño como uno desee", "la última relación de incrementos infinitamente pequeños" debían ser entendidas en términos del método de límites, pero ellas recordaron indirectamente, las dificultades que se habían levantado en el siglo anterior: la idea real de una variable aproximándose al límite en consideración a la vaga intuición del movimiento y la generación de cantidades

Comentarios adicionales:

Debe verse que en el cálculo de Cauchy, los conceptos de función, continuidad y de límite de una función son fundamentales para lograr los avances tan significativos que tuvo. Su gran productividad con relación a la aplicación del concepto de límite para tratar los problemas de convergencia trascendieron por su importancia y consolidaron el inicio de una nueva perspectiva matemática. Su cálculo es en parte ecléctico, pues fue retomando los descubrimientos de sus antecesores de acuerdo a sus convicciones y necesidades, aunque bien tratando de dar la formalidad que la época empezaba a demandar. Su audacia para proponer, no siempre correspondida con el rigor para demostrar, es una muestra clara de la expresión de la intuición que sólo puede verse ligeramente demeritada por su incapacidad de fundar sólidamente el cálculo. Desde luego no debe olvidarse que aún no se contaba con la definición de los números irracionales de Dedekind, ni de la definición de continuidad uniforme.

6.4.4. HACIA LA RECONSTRUCCIÓN DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO.

A finales de la década de los 1850, era manifiesta la tendencia a la sistematización lógica de la matemática y a la sustitución de los argumentos y explicaciones llamados *intuitivos*, por demostraciones formales basadas en definiciones lógicamente precisas y en sistemas de axiomas. La primera de las teorías matemáticas en ser reconstruida según este esquema fue el análisis matemático. Si bien para el año de 1858, Dedekind había ya desarrollado sus definiciones básicas de su obra *Continuidad y números irracionales*, ésta no fue publicada hasta 1872. Con sus primeras experiencias en la enseñanza del cálculo diferencial, pudo darse cuenta, más que en otro momento, de la falta de una fundamentación realmente científica de la aritmética y el cálculo.

La intención principal de su obra *Continuidad y números irracionales* era reemplazar los conceptos indefinidos, más o menos geométricos, y las justificaciones llamadas intuitivas, por demostraciones a partir de definiciones formuladas de una manera precisa. Dedekind quería hallar definiciones a partir de las cuales se pudieran demostrar los teoremas básicos sobre la existencia de límites, pero para conseguirlo, necesitaba definir primero un sistema que tuviera un cierto tipo de propiedades de completitud[i] o continuidad. Si bien se acostumbraba presentar el cálculo como el estudio de las magnitudes continuas, esta propiedad de continuidad se atribuía a cosas tales como segmentos lineales y el movimiento, pero no se definía, o al menos no se definía de una manera que pudiera servir de base a demostraciones rigurosas. En palabras del propio Dedekind:

"Por medio de observaciones vagas sobre la conexión sin ruptura entre las partes más pequeñas, obviamente no se gana nada: el problema está en señalar una característica precisa que pueda servir como base para hacer deducciones válidas."

El tipo de sistema completo que necesitaba definir Dedekind debía ser densamente ordenado, característica que ya cumplían los números racionales, sobre el cual se pudieran definir las operaciones, y en el que se pudieran demostrar proposiciones tales como que todo elemento positivo del sistema tiene raíz cuadrada. Esta forma de completitud para las operaciones aritméticas podría describirse diciendo "que el sistema tiene que ser cerrado para las operaciones aritméticas que satisfacen las leyes del álgebra elemental, y además el sistema tiene que ser completo con respecto a los límites, es decir, toda sucesión convergente de sus elementos debe tener un límite".

La propiedad de completitud o continuidad que Dedekind halló suficiente para sus fines es una propiedad característica para los sistemas ordenados: *Una cortadura.* El sistema continuo en que iba a consistir la fundamentación, tenía que ser aritmético, en el sentido de que sus operaciones estarían definidas en último término sobre la base de las operaciones entre números naturales y no debía hacerse mención alguna a ningún objeto geométrico. Así, a la vez que obtenía una base para construir demostraciones, conseguía también una fundamentación puramente aritmética para el cálculo.

Dedekind, utilizando su sistema de cortaduras, define una relación de orden entre los números reales de la que puede demostrar que tiene las propiedades de un orden denso. Puede además demostrar que el sistema de los números reales es *completo*, y este es el punto considerado como el más importante de la definición de los números reales y de la definición de su ordenación "<". Así, para toda cortadura sobre el sistema de los números reales, o en su sección inferior tiene un máximo o en su sección superior tiene un mínimo.

En particular Dedekind demostró

1. que toda sucesión creciente acotada de números reales tiene un límite, y
2. que una función f cuyos argumentos y valores son números reales tiene un límite cuando $x \to \infty$, si para todo δ positivo existe x_0 tal que $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ para todo $x > x_0$.

Dedekind recibió un comentario de Heinrich Weber en el que se señala que un número irracional debería tomarse como la cortadura misma, en vez de algo nuevo que es creado por la mente y que se supone en correspondencia con la cortadura, a lo que aquél replicó:

"Tenemos el derecho de atribuirnos a nosotros mismos un poder tal de creación, y además es mucho más adecuado el proceder así debido a la semejanza entre todos los números. Los números racionales desde luego producen también cortaduras, pero no identificaremos el número racional con la cortadura engendrada por él; y también al introducir los números irracionales hablaremos frecuentemente de fenómenos de cortadura con tales expresiones, atribuyéndoles propiedades tales que aplicadas a los números mismos nos sonarían de una manera muy extraña."

Lo anterior da una muestra de la vigencia del problema filosófico sobre la existencia de los entes. Para unos, las entidades abstractas existen de manera independiente de nuestro pensamiento, esta posición es la correspondiente a la filosofía de Platón. Para otros, sólo son creaciones de la mente y no existen por si solas;

[i] Propiedad de una teoría deductiva no contradictoria, en la que toda fórmula es deducible.

como lo señala la filosofía aristotélica. Como consecuencia de las preferencias y convicciones filosóficas, se puede señalar que las diferencias entre los matemáticos clásicos y los constructivistas, dieron como resultado teorías matemáticas diferentes, es decir:

a) "El idealismo clásico defendido por los matemáticos podría denominarse *quasi-realismo*, porque, aunque se dice que una estructura matemática es creada en el sentido de ser imaginada o inventada, en vez de ser descubierta, se la concibe sin embargo, por así decirlo, como un sistema de entidades existentes simultáneamente e interrelacionados. Esta concepción lleva a un *infinito actual*.
b) El idealismo constructivista concibe las entidades matemáticas como cosas que vienen una tras otra, creadas individualmente cada una. Esta interpretación implica un *infinito potencial*."[126]

Mientras que la definición de Dedekind de los números reales se vio aceptada rápidamente por muchos matemáticos interesados en un mayor rigor en la fundamentación del análisis, Leopold Kronecker encontraba tales definiciones completamente inaceptables. Kronecker tenía la convicción de que el infinito no debía introducirse excepto en aquellos casos en que pudiera eliminarse, y sostenía que los diversos conceptos de número irracional son de un tipo que *debe ser evitado en teorías aritmético-algebraicas*.

En 1883 Cantor señala que los que rechazan el método de introducción de los números irracionales por medio de sucesiones o conjuntos infinitos, proponen que "los números irracionales deberían tener en la matemática pura un significado meramente *formal*, en cuanto sirven solamente como si dijéramos, como señales de computación para fijar y describir propiedades de grupos de números enteros de una manera sencilla y uniforme"

Añade que

"Las ventajas de reducir el contenido del análisis a relaciones entre enteros finitos, son las de una mayor seguridad y completitud en su fundamentación, así como la mejora en su metodología, por lo tanto en este procedimiento se supone un principio definido, si bien bastante obvio y prosaico, que es recomendable para todos como un principio director, debe servir para indicar los verdaderos límites a los vuelos del deseo de especulación y concepción matemática, donde no se corre el peligro de caer en los abismos de lo trascendente, en los que, como se suele decir con miedo y santo pavor, "todo es posible"."

6.4.5. El Concepto. 1872

El año de 1872 fue un año extraordinario tanto para la geometría como para el análisis. Durante este año, se publicaron importantes contribuciones a la aritmetización del análisis, debidas a cinco matemáticos distintos:

- Charles Méray.
- Karl Weierstrass.
- H. E. Heine.
- Georg Cantor.
- J. W. R. Dedekind.

Estos hombres representaban en cierto sentido la culminación de medio siglo de investigaciones en torno a la idea de función que habían comenzado en 1822 con la teoría del calor de Fourier y con un intento de reducir todo el análisis a la aritmética, realizado ese mismo año por Martin Ohm. Hubo dos causas principales de inquietud en el período de 1822 a 1872:

i) Una primera causa radicaba en la falta de confianza en las operaciones efectuadas con series infinitas, pues no era claro ni siquiera si una serie de funciones, de potencias o de senos y cosenos por ejemplo, convergía siempre o no, a la función de la que se había obtenido.
ii) Una segunda causa, radicaba en la falta de una definición precisa de "número real", que constituye el núcleo de cualquier programa de aritmetización.

Cabe señalar que ya en 1817 Bolzano había mostrado la necesidad del rigor en el análisis, incluso Felix Klein lo consideró *el padre de la aritmetización*. Bolzano enunció un teorema, que al parecer ya conocía Cauchy y que divulgo Weierstrass, por lo que es conocido como Teorema de bolzano-weierstrass, que dice:
"Todo conjunto acotado S que contenga infinitos elementos tales como puntos o números, tiene al menos un punto de acumulación o punto límite".

La aritmetización plena y correcta del análisis se hizo posible cuando los matemáticos entendieron que los "números reales" había que considerarlos como *estructuras intelectuales* y no como las magnitudes dadas intuitivamente, heredadas por la geometría euclidiana.

Méray publicó en 1869 un artículo en el que llamaba la atención sobre un grave *lapsus* de razonamiento del que se habían mostrado culpables prácticamente todos los matemáticos desde la época de Cauchy. El debate en cuestión consistía esencialmente en definir el límite de una sucesión como un número real y después, a su vez, definir un número real como el límite de una sucesión de números racionales. Cabe señalar que tanto Bolzano como Cauchy habían intentado demostrar que una sucesión "converge a sí misma", es decir, una S_m tal que S_{m+p} difiere de S_m en menos que cualquier magnitud ε dada de antemano, (para m suficientemente grande y p cualquier número natural), también converge en el sentido de su relación "externa" con un número real S, el límite de la sucesión. Méray, en su obra *Nouveau preçis d'analyse infinitésimale* de 1872, renuncia a utilizar la condición externa de convergencia, es decir, el número real S. Así, él consideraba que una sucesión convergente determinaba:

- ✓ un número racional como límite, o
- ✓ un *número ficticio* como su *límite ficticio*.

Agregaba que los *números ficticios* podían ordenarse, aunque no precisaba si su sucesión convergente era o no, el mismo número. El planteamiento de Heine fue esencialmente muy parecido al de Méray, y por tal razón no se reproduce en particular.

Weierstrass también trataba de separar el análisis de la geometría, y basarlo únicamente en el concepto de número, pero al igual que Méray, se dio cuenta que para ello era necesario dar una definición de número irracional, independiente del concepto de límite, puesto que hasta ese momento, el concepto de límite había supuesto el concepto de irracional. En forma simple, lo cual no corresponde a la exposición de Weierstrass, lo que se puede resumir es que por ejemplo señala que

$\frac{1}{3}$ *no es* el *límite* de la sucesión

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

sino que *es* la sucesión misma asociada a la serie

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

Debe entenderse que lo que pretende decir, al señalar que $\frac{1}{3}$ no es el límite de la sucesión, es que no corresponde a S_n sino que es la S asociada a la serie. Así, definía al número irracional y no al límite. Se señala en los textos que, en la teoría de Weierstrass, la definición de número irracional es de manera aún más general, como conjuntos racionales, más bien que como meras *sucesiones ordenadas* de racionales como se deduce del ejemplo.

Dedekind, cuando se encontraba dando clases de análisis, llegó a la conclusión de que el concepto de límite había que desarrollarlo de una manera totalmente aritmética, sin referencia alguna a la geometría, lo que era lo usual, si se quería que fuese un concepto riguroso. En consecuencia, Dedekind tuvo que entender qué era lo que distinguía a las magnitudes geométricas continuas de los números racionales. Ya existían antecedentes con Galileo y Leibniz, que habían pensado que la "continuidad" de los puntos de una recta era el resultado de su densidad, es decir, del hecho de que entre dos puntos distintos cualesquiera hay siempre otro; sin embargo, los números racionales no obstante, de no ser continuos, presentan esta propiedad. Dedekind concluyó que la esencia de la continuidad de un segmento no se debe a una vaga cohesión sino a una propiedad opuesta exactamente a ésta, es decir, a la división de un segmento en dos partes por un punto del segmento. En cualquier división de los puntos del segmento en dos clases tales que cada punto pertenezca a una y sólo una de las dos clases, y de tal que todo punto de una de las dos clases esté a la izquierda de cualquier punto de la otra clase. Además, existe uno y sólo un punto que produce tal división.

Lo expresado por Dedekind en el contexto aritmético significa que, para cualquier partición de números racionales en dos clases disjuntas A y B, tales que todo número de la primera clase A sea menor que todo número de la segunda clase B, existe uno y sólo un número real que produce esta cortadura de Dedekind. Si en A hay un número máximo o en B hay un número mínimo, entonces la cortadura define un número racional, pero si en A no hay un número máximo ni en B hay un número mínimo, entonces la cortadura define un número irracional. Con lo anterior, señalaba Dedekind, se pueden demostrar rigurosamente los teoremas fundamentales sobre límites, sin necesidad de recurrir a la intuición geométrica. Conviene ver en la partición de Dedekind no tanto una "cortadura" que indica una localización efectiva de un número, sino como una aproximación sucesiva de dos límites adyacentes entre sí, de la clase inferior A y de la clase superior B.

Weierstrass contribuyó al programa de aritmetización con una definición depurada del concepto de límite. La definición de Cauchy hacía uso de expresiones tales como "valores sucesivos", "aproximarse indefinidamente" o "tan pequeño como se quiera". Si bien, estas expresiones son muy sugestivas y seguramente satisfactorias desde el punto de vista pedagógico, les falta, no obstante, la precisión que se suele esperar de las matemáticas. Así, Heine, en sus *Elemente* de 1872, escrito bajo la influencia directa de las lecciones de Weierstrass, definía límite de una función $f(x)$ en x_0 de la siguiente forma:

"Si dado cualquier ε existe un η_0 tal que, para $0<\eta<\eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta_0) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$."

Con esta definición, ya no existen referencias a cantidades que fluyan engendrando magnitudes de dimensiones superiores, ni puntos moviéndose sobre curvas, ni a despreciar cantidades infinitamente pequeñas. En consecuencia, tanto el lenguaje como el simbolismo utilizados por Heine y Weierstrass, son precisos e inequívocos, desterrando del análisis la antigua y sugestiva idea de variabilidad continua, y haciendo innecesario el persistente recurso de los infinitésimos constantes. Hoy en día, la η de Weierstrass se ha visto reemplazada casi universalmente por la letra δ, pero éste ha sido prácticamente el único cambio, y la definición de límite de una función que aparece en los textos actuales es esencialmente la misma que introdujeron Heine y Weierstrass hace alrededor de 125 años. Así, lo que se conoce como demostraciones tipo ε-δ forma parte del patrimonio de todo matemático.

6.5. SIGLO XX

Durante todo este siglo y para la mayor parte del siglo pasado, desde Weierstrass, los estudiantes de cálculo habían sido insistentemente instruidos de que los infinitesimales no existían, y en consecuencia no debían ser considerados en el discurso matemático formal. Pero en 1960 Abraham Robinson probó que los infinitesimales sí existen como auténticos entes matemáticos y podían servir como la base para una alternativa rigurosa del cálculo. En 1966, en su libro *Non-standard Analysis* mostró cómo desarrollar mucho del análisis moderno en términos de infinitesimales, y en 1976 apareció un libro de texto introductorio al cálculo no estándar escrito por H. J. Keisler, *Foundations of Infinitesimal Calculus*, considerado como la mejor introducción al cálculo infinitesimal y no estándar para nivel intermedio. Recapitula que el campo ordenado de los números reales $\boldsymbol{R}$ es completo, y satisface el axioma del supremo y del ínfimo. De hecho, todo campo completo y ordenado es isomorfo con el campo $\boldsymbol{R}$ de los números reales. El análisis no estándar está basado en el hecho de que existe un campo (no completo) $\boldsymbol{R}^*$ de números "hiperreales" que contiene $\boldsymbol{R}$ como un subconjunto propio, tal que cada función $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables reales tiene una extensión natural f^* que es función de n "hiperreales variables y tales que si dos sistemas de fórmulas tienen la misma solución real, entonces tienen las mismas soluciones "hiperreales".

Los elementos de $\boldsymbol{R}^*$ son llamados números hiperreales; así, un elemento $x \in \boldsymbol{R}^*$:

- es llamado *infinitesimal* si $|x| < r$ para todo número real positivo r;
- es llamado *finito* si $|x| < r$ para algún número real positivo;
- es llamado *infinito* si $|x| > r$ para todo número real r.

De acuerdo con uno de los teoremas enunciados por Robinson, tanto los números hiperreales infinitesimales e infinitos verdaderamente existen. Asimismo, él define los axiomas equivalentes a los de campo, sólo que para los hiperreales. Continúa señalando que, dos elementos $x, y \in \boldsymbol{R}^*$ se dice que están infinitamente cercanos, y se escriben $x \approx y$, si su diferencia $x - y$ da un infinitesimal. De acuerdo al "teorema de la parte estándar", todo número *finito* hiperreal x esta infinitamente cerca a un único número real r. Este único $r \approx x$ es llamado *parte estándar de x*, y se escribe $r = st(x)$. Si x y y son finitos, entonces $x \approx y$, si y sólo si $st(x) = st(y)$.
Cuando no existe posibilidad de confusión, se escribe f en lugar de f^*.

La función f de una variable real es diferenciables en $a \in \boldsymbol{R}^*$ si el cociente

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \qquad \text{.............................(6.5.1)}$$

es finito y tiene la misma parte estándar para todo infinitesimal *no-cero* $\Delta x \approx 0$. Así, su derivada a a es

$$f'(a) = st\left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right) \qquad \text{.............................(6.5.2)}$$

Desde luego la definición al final es equivalente a la usual en términos de límites de números reales. Aplicando (6.5.2) directamente, se pueden calcular derivadas tomando la parte estándar en lugar de usar límites. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\sqrt{x})}{dx} &= st\left(\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}\right) \\
&= st\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{st\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{1}{st\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Si se escribe

$$y = f(x),$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x), \text{ entonces}$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

y si Δx es un infinitesimal y $\Delta y \approx 0$, entonces

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x), \text{ también será un infinitesimal.}$$

6.5.1. RECAPITULACIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE LÍMITE.

No se podría entender la génesis del concepto de límite —base fundamental para el análisis—sin reconocer que su creación está totalmente vinculada a la necesidad de dar rigor a los planteamientos del cálculo infinitesimal desarrollados, en principio, por Newton y Leibniz. Así, el auge de los conceptos y las técnicas del cálculo infinitesimal fue acompañado de esfuerzos para dotarlo de los fundamentos de que carecía. Las críticas del obispo Berkeley sobre "conceptos" tales como cantidades evanescentes o los infinitésimos, fueron sólo un comienzo de un largo debate sobre los fundamentos del cálculo. D'Alembert que era consciente de la indiferencia existente hacia el rigor señalaba: "Hasta el presente más importancia se ha dado en engrandecer el edificio que a iluminar la entrada, a elevarlo aún más, que a asentar los cimientos."

Los antecedentes de la idea del límite, se remontan al método de exhaución que había inventado Eudoxo y perfeccionado Arquímedes, cuya idea central era evitar el infinito, para lo cual se pretendía llegar a un "agotamiento" de la figura a determinar, es decir a su límite. Posteriormente, el tema de los límites conquistó un lugar importante en los siglos XVII y XVIII, a causa del uso de series infinitas como medios de cálculo aproximado. Si una serie tiene un número finito de términos, es posible hallar la suma de todos los términos; pero si la serie es infinita, es evidente que no podemos calcularla. No obstante, en algunos casos la sucesión correspondiente tiene un límite y este límite es llamado, "la suma en el infinito de la serie".

Alrededor de 80 años después de los trabajos de Newton y Leibniz, unos cuantos posteriores a Euler, D'Alembert consideró que "*una cantidad es algo o nada; si es algo, aun no se ha desvanecido; si es nada, ya se ha desvanecido literalmente. La suposición de que hay un estado intermedio entre estos dos es una quimera*". Así, creía que la verdadera metafísica del cálculo habría que encontrarla basada en la idea de límite. Interpretaba las "razones primera y última" de Newton, como límites y no como la primera y última razón de dos cantidades que están exactamente surgiendo a ser o desvaneciéndose, respectivamente. Así, sostenía que la notación de diferenciales no era más que una manera conveniente de hablar, que dependía para su justificación, del lenguaje de los límites. En consecuencia, D'Alembert propuso la definición: "Una magnitud se dice que es *límite* de otra magnitud cuando la segunda se puede aproximar a la primera en menos que cualquier magnitud dada, por pequeña que ésta sea, aunque la segunda magnitud no pueda superar a la magnitud a la que se aproxima"

Lhuilier, se proponía mostrar "que el método de los griegos de la antigüedad, conocido como exhaución, convenientemente profundizado bastaba para establecer con certeza los principios del nuevo cálculo". Así, modificó el método de exhaución y lo interpretó en términos de límites. Lhuilier evitó el infinitesimal, la vaguedad de la última razón y la vacuidad del símbolo $\frac{0}{0}$; pero no pudo darse cuenta que la variable no necesariamente debe de no podía oscilar. Él propuso la siguiente definición: "Dada una cantidad variable siempre más pequeña o más grande que cualquier cantidad constante dada, pero de la cual difiera al final, menos que cualquier cantidad propuesta aunque pequeña, esta cantidad constante es llamada el límite en lo grande o en lo pequeño de la cantidad variable". Otra falla importante fue considerar que "si una cantidad variable en todas sus etapas goza de una cierta propiedad, su límite gozará de esa misma propiedad". Esto persistió durante el siglo XIX, entendiéndose que: "lo que es verdadero cerca del límite es verdadero en el límite". La falsedad de esta declaración es evidente si se tiene en mente a los números irracionales, que pueden ser fácilmente definidos como límites de sucesiones de números racionales, o de la observación de las propiedades de un polígono inscrito en un círculo

En 1797 fue publicado el más famoso y ambicioso libro de texto que había aparecido hasta ese tiempo sobre el tema. Su autor Lacroix señalaba que tenía la idea de sustituir a los infinitamente pequeños, sin embargo no ocurrió así y sólo condujo a comentarios que contribuyeron a una mantener la confusión del pensamiento sobre el tema, justo cuando lo que más se necesitaba era una precisión lógica. Sin embargo, el éxito de su trabajo, medido a través de la traducción a varios idiomas y de sus muchas ediciones —la novena apareció en 1881— condujo a otros textos del mismo tipo y fue en gran parte gracias a éstos que el método de los límites llegó a hacerse popular, sí bien no riguroso. Fue a través de tales textos que la notación de Leibniz y la doctrina de los límites reemplazaron en Inglaterra al método de fluxiones por una parte, y por otra, las interpretaciones que ya habían llegado a ser desesperadamente confusas con los infinitamente pequeños.

Sin embargo, para algunos matemáticos el concepto de límite de D'Alembert les pareció estar inmerso en una oscuridad metafísica como lo eran los infinitamente pequeños. Consecuentemente, la mayoría de los libros de texto publicados en esa época sobre cálculo continuaban prefiriendo las explicaciones de Leibniz. De 28 publicaciones aparecidas entre 1754 y 1784, quince estaban en la terminología de Leibniz, seis en términos de límites y cuatro en términos de los ceros de Euler, dos en términos de fluxiones y uno en términos de una secante que pasa a ser una tangente.

Parece paradójico, ver que los métodos más adversos a la introducción de los conceptos de infinito y continuidad, téngase en mente el método de exhaución de los griegos o las paradojas de Zenón, fueron aquéllos que hicieron posible su inclusión, aunque parecía que el método de límites no conduciría ni al infinito ni a la continuidad. Sin embargo, en el siglo XIX, el concepto de infinito llegó a ser básico en el cálculo por el uso de series infinitas y conjuntos infinitos.

Bolzano percibió, a pesar de las paradojas presentadas por las nociones de espacio y tiempo, que cualquier continuo debía ser pensado como conjunto esencialmente de puntos. Aunque negó la existencia de las magnitudes infinitamente grandes e infinitamente pequeñas, sostuvo la posibilidad de un infinito actual con respecto a un conjunto. Sin embargo hizo referencia a tales conjuntos, como el de la paradoja de Galileo, en la cual se especificaba que la parte podía ponerse en una correspondencia uno a uno con su todo, por ejemplo, que los números entre 0 y 5 podían acoplarse con aquellos entre 0 y 12. Así, la opinión de Bolzano sobre el infinito era sustancialmente aquella que los matemáticos han adoptado desde el tiempo de Cantor, excepto que Bolzano había considerado que las diferentes potencias del infinito debían ser de la misma potencia. Así, Boyer señala que Bolzano pareció haberse dado cuenta que la infinitud de los números reales es de un tipo diferente a la infinitud de los números naturales, en razón de que aquéllos no son numerables.

La definición propuesta por Bolzano con relación al límite dice: "La función $f(x_0+\alpha)$ tiene un *límite* (único), de valor B, cuando $\alpha \to 0$, si $[f(x_0+\alpha) - B]$ es pequeño cuando α es pequeño". Así propuso la idea de *movernos tan cercano como deseemos al límite B, mientras se evita el límite mismo*, es decir, se concibe la idea del *límite-no-tocado*, en términos de diferencias aritméticas, dándose inició: *la aritmetización por medio de técnicas del límite-no-tocado.* El límite-no-tocado o el límite logrado puede llevarse a cabo en un continuo infinitesimal o no-infinitesimal; sin embargo desde Newton y Leibniz hacia delante fue común pensar que estos dos problemas estaban ligados fuertemente, por las dificultades que habían sido encontradas en la formulación de la derivada de una función $y = f(x)$ por medio de la expresión $\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}\right]$ en donde la principal dificultad se presenta cuando □x realmente toma el valor de 0, dado que la razón del lado derecho llega a ser la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Cauchy, quien tomó como fundamental el concepto de límite de D'Alembert, propuso la siguiente definición de límite: "*Cuando los valores que va tomando sucesivamente una variable particular, se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acaban de diferir de él tan poco como queramos, entonces, este último valor recibe el nombre de límite de todos los anteriores*". El mismo concepto del límite permitió a Cauchy abordar a los infinitesimales cuando señala que: "Decimos que una cantidad variable se hace *infinitamente pequeña* cuando su valor numérico disminuye indefinidamente hasta converger al límite cero". Una característica a destacar del análisis de Cauchy, es que no se apoya en consideraciones geométricas, sino que utilizando la teoría de límites como punto de partida de las definiciones de propiedades básicas, y la aritmética de las desigualdades como mecanismo principal en las demostraciones, consiguió llevar al análisis matemático a una situación de autonomía con respecto a la geometría y al álgebra.

En un natural proceso de reconciliación de las partes que generaron el concepto del límite, Cauchy prueba que la condición necesaria y suficiente para que una serie converja a su límite es que la diferencia entre S_p y S_q, para cualquier valor de p y q mayores que n puede hacerse menor en valor absoluto, que cualquier cantidad dada, tomando a n lo suficientemente grande. Debe tenerse en cuenta que la prueba de la condición de suficiencia requiere una definición previa del sistema de los números reales, donde se supone que el límite S es único. Sin una definición de los números irracionales, la prueba es lógicamente imposible. Es decir, uno no puede definir $\sqrt{2}$ como el límite de una sucesión de la forma 1, 1.4, 1.41, 1.414, ... porque para probar que la sucesión tiene el límite, se debe asumir, con base en la definición de límite y convergencia, la existencia de este número como previamente demostrado y definido. En consecuencia, otro punto de partida para entender parte del problema se puede resumir en la siguiente situación: no se puede demostrar que una sucesión tenga un límite, a menos que el límite buscado se encuentre entre los números definidos, por tanto, el límite de una sucesión tiene que ser un número ya definido. El problema se asocia a la concepción de que la serie de lo que se llama números reales, corresponde exactamente a la serie de los puntos de una línea recta.

Ahora bien, si el sistema de números debe formar un *continuo* tal como parece serlo una línea, entonces a todo punto de una línea tiene que corresponder un número sujeto a las mismas reglas de cálculo que las razones o los enteros. Esto implicaba la intención principal de la obra de Dedekind *Continuidad y números irracionales* era reemplazar los conceptos indefinidos, más o menos geométricos, y las justificaciones llamadas intuitivas, por demostraciones a partir de definiciones formuladas de una manera precisa. Quería hallar definiciones a partir de las cuales se pudieran demostrar los teoremas básicos sobre la existencia de límites, pero para conseguirlo, necesitaba definir primero un sistema que tuviera un cierto tipo de propiedades de completitud o continuidad. Si bien se acostumbraba presentar el cálculo como el estudio de las magnitudes continuas, esta propiedad de continuidad se atribuía a cosas tales como segmentos lineales y el movimiento, pero no se definía, o al menos no se definía de una manera que pudiera servir de base a demostraciones rigurosas.

El año de 1872 fue extraordinario para el análisis, dándose a conocer importantes contribuciones en su aritmetización, debidas a cinco matemáticos distintos: Méray, Weierstrass, Heine, Cantor y Dedekind, quienes representaban en cierto sentido la culminación de medio siglo de investigaciones en torno a la idea de función que habían comenzado en 1822. Hubo dos causas principales de inquietud en el período de 1822 a 1872: una radicaba en la falta de confianza en las operaciones efectuadas con series infinitas, pues no era claro ni siquiera si una serie de funciones, convergía siempre o no, a la función de la que se había obtenido; y una segunda causa, radicaba en la falta de una definición precisa de "número real", que constituye el núcleo de cualquier programa de aritmetización.

Cabe señalar que ya en 1817 Bolzano había mostrado la necesidad del rigor en el análisis, incluso Felix Klein lo consideró *el padre de la aritmetización*. Bolzano enunció un teorema, que divulgo Weierstrass, por lo que es conocido como Teorema de Bolzano-Weierstrass, que dice: "*Todo conjunto acotado S que contenga infinitos elementos tales como puntos o números, tiene al menos un punto de acumulación o punto límite*".

El debate en cuestión consistía esencialmente en definir el límite de una sucesión como un número real y después, a su vez, definir un número real como el límite de una sucesión de números racionales. Cabe señalar que tanto Bolzano como Cauchy habían intentado demostrar que una sucesión "converge a sí misma". Por su parte, Méray, renuncia a utilizar la condición externa de convergencia, es decir, el número real S. Así, él consideraba que una sucesión convergente determinaba: un número racional como límite, o un *número ficticio* como su *límite ficticio*. Agregaba que los *números ficticios* podían ordenarse, aunque no precisaba si su sucesión convergente era o no, el mismo número. Weierstrass también trataba de separar el análisis de la geometría, y basarlo únicamente en el concepto de número, pero al igual que Méray, se dio cuenta que para ello era necesario dar una definición de número irracional, independiente del concepto de límite, puesto que hasta ese momento, el concepto de límite había supuesto el concepto de irracional.

Dedekind se había percatado de que el concepto de límite había que desarrollarlo de una manera totalmente aritmética, sin referencia alguna a la geometría, lo que era lo usual, si se quería que fuese un concepto riguroso. En consecuencia, tuvo que entender qué era lo que distinguía a las magnitudes geométricas continuas de los números racionales. Ya existían antecedentes con Galileo y Leibniz, que habían pensado que la "continuidad" de los puntos de una recta era el resultado de su densidad, es decir, del hecho de que entre dos puntos distintos cualesquiera hay siempre otro; sin embargo, los números racionales no obstante, de no ser continuos, presentan esta propiedad. Así, Dedekind concluyó que la esencia de la continuidad de un segmento no se debe a una vaga cohesión sino a una propiedad opuesta exactamente a ésta, es decir, a la división de un segmento en dos partes por un punto del segmento. En cualquier división de los puntos del segmento en dos clases tales que cada punto pertenezca a una y sólo una de las dos clases, y de tal que todo punto de una de las dos clases esté a la izquierda de cualquier punto de la otra clase. Además, existe uno y sólo un punto que produce tal división. Con lo anterior, señalaba Dedekind, se pueden demostrar rigurosamente los teoremas fundamentales sobre límites, sin necesidad de recurrir a la intuición geométrica. Conviene ver en la partición de Dedekind no tanto una "cortadura" que indica una localización efectiva de un número, sino como una aproximación sucesiva de dos límites adyacentes entre sí, de la clase inferior A y de la clase superior B.

Adicionalmente, Weierstrass contribuyó al programa de aritmetización con una definición depurada del concepto de límite. Así, Heine, en 1872, bajo la influencia directa de las lecciones de Weierstrass, definía límite de una función $f(x)$ en x_0 de la siguiente forma: "Si dado cualquier ε existe un η_0 tal que, para $0<\eta<\eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta_0) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$."

Con esta definición, ya no se tuvo necesidad de hacer referencias a cantidades que fluyan, ni puntos moviéndose sobre curvas, ni a despreciar cantidades infinitamente pequeñas. En consecuencia, tanto el lenguaje como el simbolismo utilizados por Heine y Weierstrass, son precisos e inequívocos, desterrando del análisis la antigua y sugestiva idea de variabilidad continua, y haciendo innecesario el persistente recurso de los infinitésimos constantes. Hoy en día, la η de Weierstrass se ha visto reemplazada casi universalmente por la letra δ, pero éste ha sido prácticamente el único cambio, y la definición de límite de una función que aparece en los textos actuales es esencialmente la misma que introdujeron Heine y Weierstrass hace alrededor de 125 años. Así, lo que se conoce como demostraciones tipo ε-δ forma parte del patrimonio de todo matemático.

7. COMENTARIOS FINALES.

Aunque en la enseñanza intervienen gran cantidad de factores interrelacionados y en consecuencia, el mejoramiento de la misma, hay que considerarla desde una perspectiva global, es indudable que el profesor y los elementos documentales con los que éste cuente, siguen siendo partes decisivas en el aprendizaje de los alumnos. Así, este material ha sido pensado tomando como ejes de referencia por un lado al profesor en activo o potencial del área de matemáticas, y por otro, el abordar algunas propuestas y contenidos matemáticos, que desde mi particular perspectiva, son relevantes y formadores para todo aquél que, no contando con los elementos que aquí se han tratado, asuma su lectura.

Considerando válidas las investigaciones que asignan a los profesores "concepciones tradicionales transmisivas sobre la enseñanza, y que aquéllos enseñarán no sólo con los métodos didácticos muy similares a los que preferían como alumnos"[127], así como también con los textos y documentos de apoyo que ya conocen por su propia experiencia de estudiantes, se ha pretendido que los temas aquí desarrollados en la medida de sus alcances y limitaciones, modifiquen esa inercia a través de *nueva información*, propiciando el incorporar diferentes esquemas, fuentes de conocimientos poco difundidas o casi inéditas, y que en algún momento puedan promover a través de su lectura: un *problema cognitivo* o nuevas capacidades discriminatorias orientadas hacia *esquemas distintos*.

Si se me permitiese una analogía con la naturaleza, diría que este trabajo de tesis ha pretendido ser una semilla, cuya cosecha depende del tiempo y el lugar en que se siembre; que cada lector podrá incorporar lo que vaya acorde a sus esquemas de pensamiento, a sus propias redes cognitivas con las que contase antes de la lectura y a su posible aplicación o implicación en quehaceres docentes futuros.

¿En el momento de dar término a la presente tesis, qué conclusiones o inferencias se pueden sacar de entre la vasta variedad de estudios, técnicas de resolución y diversidad de formas de entender y enfrentar algunos de los conceptos matemáticos vertidos a través de las páginas de la presente tesis?

Quisiera compartir mis reflexiones con relación al trabajo presentado:

Se intentó caracterizar los períodos sucesivos en el desarrollo de las series infinitas, procurando mostrar los diferentes estadios secuenciales, los cambios en los paradigmas —por ejemplo: la sustitución de los infinitesimales por el concepto de límite o la fundamentación del análisis en conceptos aritméticos, dejando atrás las concepciones geométricas o la confianza depositada por los matemáticos en los símbolos en lugar de la lógica de los argumentos— que permitió la génesis del concepto de límite; inclusive el concepto de convergencia de las series infinitas no puede ser disociado del límite.

El material fue cuidadosamente seleccionado, organizado y redactado de manera tal que los profesores del área del cálculo y los alumnos de la maestría en Educación Matemática fuesen capaces de relacionarlo, con los conocimientos que en principio se encuentran en su estructura cognitiva, es decir, se ha pretendido que el material sea potencialmente significativo. Cabe señalar que el propio Ausubel precisa que el "aprendizaje significativo no es sinónimo de material significativo" dado que este último es sólo *potencialmente significativo* y que lo primero requiere de una actitud de aprendizaje significativo.

En cuanto al orden seguido en la propuesta se atendió lo que Ausubel precisa señalando que "es importante reconocer ... que la planeación del curriculum es distinta a la planeación de la enseñanza. La primera centra su atención en la estructura conceptual y metodológica de las disciplinas, mientras que la segunda la dirige a la selección de actividades de aprendizaje que guarden una relación más estrecha con la estructura cognitiva existente en el alumno..."

Se aspiró poder incorporar en el acervo cultural previo, el contexto del cómo se fue construyendo aquello que en las escuelas enseñamos como objetos terminados; evitando en consecuencia transmitir un cuerpo de conocimientos carentes del *toque* humano *del ensayo y error* y el frío, aunque preciso y necesario, razonamiento de un teorema o aplicación de una técnica cualquiera; confío en haber propuesto un contexto que permita percibir el desarrollo de la ciencia matemática vinculado al ejercicio diario de la intuición, y en su momento en su formalización.

Confío en que el lector se haya podido percatar que una gran parte del conocimiento científico no se va expandiendo de una manera estrictamente racional en respuesta a una problemática interna, sino de una forma un tanto arbitraria y por un conjunto de impulsos orientados por requerimientos externos impuestos por la sociedad.

Estimo que se podrá enriquecer el quehacer docente, al haber sensibilizado al lector de la necesidad que existió en el área del análisis, de una base sobre la cual proponer y construir más conocimientos matemáticos, ya sea que tuviesen como objetivo sus posibles aplicaciones o el formalizar aquellos conocimientos empíricos que se sabía que funcionan o por la posibilidad de recreación a través del ingenio mostrado por aquellos a quienes debemos parte de las matemáticas que hoy utilizamos.

Espero que el presente trabajo haya sensibilizado al lector que el punto de partida de un avance espectacular en una rama de la ciencia ha provenido de un descubrimiento un tanto al azar, y que el concepto de los infinitesimales y el límite, son ejemplos clásicos de desarrollos de la matemática que han permitido el tratamiento de problemas hasta entonces inaccesibles a la teoría. Así, tuvieron que pasar más de dos mil años para poder dar una salida nítida a las paradojas como las que planteó Zenón alrededor del año 450 a.C. A los antiguos griegos les faltaban muchas de las herramientas matemáticas que hoy podemos usar, sin embargo hicieron derroche de imaginación. Que toca ahora a los profesores impedir que se repitan los grandes períodos de improductividad matemática y de infecundidad intelectual, pero al mismo tiempo reconocer que la herencia de los matemáticos está presente aun en nuestros textos; así, sólo por mencionar uno de los múltiples ejemplos que los antepasados nos han legado pregunto: ¿Quién no ha visto en los libros actuales alguna alusión a la inscripción de un polígono en un círculo como parte de una introducción o aproximación a la explicación del concepto de límite? El presente trabajo debe haber permitido al lector percatarse de que ésta es la misma idea de Demócrito alrededor del año 400 a. C.

Se compartió la opinión de los psicólogos educativos que han manifestado que el conocimiento se va incorporando en los individuos en forma de espiral, y que, al paso del tiempo, un concepto vuelve a ser retomado, pero a un nivel mayor de abstracción. Eso mismo ha sucedido con la forma de que la humanidad ha construido su conocimiento, manifestado en el presente trabajo a través de la idea de los infinitesimales –con su natural vinculación con las series infinitas– primero no abordados explícitamente por la matemática griega, luego usada con éxito en los siglos XVII y XVIII, desechada en el XIX y retomada a mediados del siglo XX por la concepción del cálculo no estándar. Podríamos ser aventurados al decir, en términos ausubelianos, que la propia comunidad matemática experimentó primero *una diferenciación progresiva* para después volver a *una reconciliación integradora* o por qué no, ser más aventurados y señalar la formalización del análisis como el resultado de *un problema cognitivo* superado, tal como lo proponía Piaget.

Se pretendió mostrar el cómo partiendo de las series infinitas, fuente de numerosas aplicaciones al mundo físico, Leibniz logró proponer los diferenciales y Newton las cantidades evanescentes, y que ambas implicaciones, con todas sus deficiencias de definición propia, por sí solas, resolvían exacta y sistemáticamente una gran cantidad de problemas, y que, como resultado natural de su propia evolución, desembocaron al concepto de límite. Y este concepto de límite consolidó el manejo de las series infinitas, culminando así sólo una vuelta más de la espiral del conocimiento.

Se procuró mostrar como la matemática por ser una ciencia viva ha crecido y evolucionado. Toca a los profesores no sólo trasmitir nuestros conocimientos como parte de la cadena encargada de perpetuar el conocimiento, sino de sembrar en nuestros estudiantes el deseo de ir más allá de lo que ellos han recibido y para ello es indispensable una actitud docente acorde con la dinámica de la ciencia, que hagamos partícipe a los futuros profesionales que existen un sin número de aspectos en constante evolución. ¿Se puede decir que el haber alcanzado el concepto de límite –no obstante que con él definimos la derivada, la integral, los criterios de convergencia y da base a numerosas interpretaciones en probabilidad– es el fin de la formalización del análisis o que es acaso la única manera de formalizarlo? No debemos olvidar que el límite y los infinitesimales están fuertemente vinculados al tortuoso concepto del infinito y que sobre el infinito matemático aun no se ha dicho la última palabra.

Creo conveniente procurar dar respuesta a una pregunta que pudiese estar en la mente de quien hubiese leído —o pretenda leer— el material aquí propuesto, y que en términos llanos sería: *¿Cómo usarlo?* Considerando que la pregunta es abrumadora, cualquier respuesta que pretenda dar será necesariamente insuficiente, sin embargo me permito sugerir algunos aspectos a tener en mente para poder llegar a una respuesta que obligadamente debe ser diferente para cada persona, pues su estructura cognitiva y sus capacidades son únicas para cada individuo. Así, se debe aprovechar que el material es impreso y que por ende, la velocidad con que el profesor o los alumnos pueden usarlo, podrá ajustar la cantidad de tiempo requerido de acuerdo con su habilidad de lectura y el dominio previo de los antecedentes académicos requeridos, o simplemente del tiempo que se quiera uno tomar para recrearse en los contenidos, reflexionar en el material y poder relacionarlo con otras ideas pertinentes. También creo necesario señalar que algunos aspectos tratados seguramente no serán tan claros para algunos lectores, por lo tanto sugiero se consulten las referencias bibliográficas de las cuales se obtuvo parte del material, con objeto de que quizá otra visión de los mismos contenidos, pueda resultar más asimilable; es más, aún en el caso de que se haya entendido el material, la recomendación anterior debería seguirse para todo lector.

Espero que las páginas que han quedado atrás, sirvan a mis compañeros profesores, quizá como base para posibles organizadores previos dentro de sus cursos. Posiblemente los ayude a sentirse más motivados a continuar su labor docente en la maravillosa área de lo que conocemos como análisis. Pero esencialmente a su propio crecimiento personal, que les permita una nueva combinación de representaciones, conceptos y proposiciones, organizados jerárquicamente por niveles de generalidad o inclusividad, que les permita establecer relaciones de tipos diversos: causales, funcionales, de analogía o contraste, es decir, una ***red semántica***.

Reconozco que han quedado fuera de las páginas previas, multitud de aspectos; y sólo por señalar algunos mencionaré: las series en el plano complejo, las series divergentes, la evolución de las universidades y la función de los matemáticos en ellas, la evolución del concepto de función, la teoría relativa a la numerabilidad de los números reales, la evolución de las ecuaciones diferenciales y otro más. Así mismo, estas páginas no han pretendido ser un curso introductorio de ninguno de los temas abordados, sino presentar algunas de las intuiciones y descubrimientos básicos que tuvieron los *hacedores* del cálculo, una muestra de cómo los paradigmas matemáticos han cambiado.

Quede mi retrospección hasta aquí y permítaseme señalar que con objeto de facilitar una revisión expedita que invite a profundizar en los temas abordados, presento a continuación unos *prontuarios*, como una muestra de los paradigmas correspondientes a las etapas sucesivas del desarrollo, de sus aceleraciones y regresiones, como acciones de precursores o rupturas epistemológicas, con relación de lo aquí tratado sobre las series infinitas, los infinitesimales y el límite, y con el firme propósito de coadyuvar a visualizar la forma en que algunos conceptos matemáticos se fueron creando y que ni por mucho, su *paternidad* es privilegio de un solo científico.

Finalmente, con relación a los alcances planeados al inicio del presente proyecto debo decir que voluntariamente me someto al sano juicio del amable lector.

Prontuario histórico de las ideas vinculadas a las series infinitas.

Zenón. Alrededor del año 450 a.C. →

La paradoja de Aquiles y la tortuga, misma que no pudo resolverse en su tiempo, dio origen a la serie siguiente, que desde luego no fue escrita con la notación matemática actual.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ \cdots\ +\frac{1}{2^n}+\ \cdots\right)\to 1,$$

cuando $n \to \infty$

p 3-29

Arquímedes. 250 a.C. →

Prueba la cuadratura de la parábola a través de la siguiente serie, que resuelve a través de un algoritmo aritmético recursivo.

$$a(P_n)=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3}$$

p 4-45

Richard Swineshead, el Calculador. Siglo XIV. →

Da una prueba verbal larga y tediosa de la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2$$

p 4-47

Oresme. 1321. →

Con base en ideas gráficas, sustituye la serie original por una serie geométrica para la cual ya en esa época se conocía la forma de sumarla.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{2^n}+\frac{n}{2^n}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\frac{1}{2^n}+\cdots=2$$

p 4-48

Oresme. 1321.

Prueba la divergencia de la serie armónica a través de un razonamiento aritmético.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

p 48

Wallis. 1655.

Sin notación de límite, y sin demostración propone :

$$\lim_{l\to\infty}\left\{\frac{\sum_{i=0}^{l} i^n}{(l+1)l^n}\right\}=\frac{1}{n+1}$$

p 4-49

A partir de

$$\frac{\sum_{x=0}^{a} y}{\sum_{x=0}^{a} b}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{a\cdot 0}{l}\right)^n+\left(\frac{a\cdot 1}{l}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a\cdot l}{l}\right)^n}{a^n+a^n+\cdots+a^n}\right)$$

propone

$$\frac{\int_0^a x^n dx}{a^{n+1}}=\frac{1}{n+1}$$

p 4-52

Newton. 1664-1665.

Teorema del binomio, comprobado por aplicación del método de galera para obtener raíz cuadrada y por simple división larga.

$$(a+x)^k=a^k+\frac{k}{1}a^{k-1}x+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}a^{k-2}x^2+\cdots$$

p 4-54

Obtiene la serie siguiente para la función logarítmica

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

a partir de realizar una integración término a término de la serie

$$y=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots,$$

p 4-58

Mercator. 1668.

Utilizando $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum i^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$ (n términos en el numerador) obtiene

$$\log\frac{1}{1+x}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

p 4-60

James Gregory. 1670.

La siguiente fórmula de interpolación

$$(1+a)^s \cong 1+sa+\frac{s(s-1)}{2!}a^2+\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}a^3+\cdots+\frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!}a^n$$

tenía por objeto determinar un polinomio de grado n

$$p(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

que coincidiera con $f(x)$ en los n+1 puntos igualmente espaciados.

p 4-66

Leibniz. 1675.

Para calcular los valores de cada una de las posiciones del triángulo armónico utiliza la siguiente fórmula:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!}=\frac{n!}{k!(n\text{-}k)!}$$

con la cual puede calcular la suma de determinadas series infinitas.

p 4-63

Taylor. 1715.

Esta fórmula tuvo que esperar hasta 1755 para el total reconocimiento de su importancia.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots$$

p 4-69

Euler. 1750s.

El método de suma de una serie infinita, que es convergente de acuerdo al método ortodoxo de sumar con las reglas término a término, se dice que es *regular* si da la misma suma que el método ortodoxo. En cualquier otro caso se dice que el método es *irregular*.

p 4-71

En análisis, "formalismo" significa una manipulación de fórmulas que implican procesos infinitos sin prestar suficiente atención a las cuestiones de convergencia y de existencia matemática. Cabe señalar la expresión $(1\text{-}2)^{-1}$ como uno de los ejemplos sobresalientes del formalismo, o "manipulación", en el cual no se puso atención a las cuestiones de convergencia y existencia al aplicar fórmulas que involucraban procesos infinitos. Así, si se le aplica "formalmente" el teorema del binomio se obtiene: $-1=1+2+4+8+16+\cdots$ que es un resultado desprovisto de significado. Otro ejemplo, es la suma de dos series: $x+x^2+\cdots=\frac{x}{1-x}$ y $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots=\frac{x}{x-1}$ encontrando Euler que $\cdots\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+\cdots=0$

p 4-72

D'Alembert. 1768

En un reporte advierte sobre la serie binomial $(1+\mu)^m = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\mu^r$, donde inclusive afirma que la serie es convergente o divergente de acuerdo a $\left|\frac{n\text{-ésimo término}}{(n+1)\text{-ésimo término}}\right| = \left|\frac{m-n+1}{n}\mu\right|$ si $\begin{cases} <1 \therefore \text{es convergente} \\ >1 \therefore \text{es divergente} \end{cases}$

Este avance, se contrarresta cuando él comenta que si μ=0.99 y m=-2, entonces la serie es divergente hasta el término 99 avo y convergente después, porque en la expresión siguiente se muestra que está todavía distante del punto real: $\left|\frac{m-n+1}{n}\mu\right| = \left|\frac{-2-n+1}{n}\right| \cdot \left|\frac{99}{100}\right| = \left|\frac{-1-n}{n}\right| \cdot \left|\frac{99}{100}\right|$

$$= \frac{99}{100}\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ así es } \begin{cases} >1 \text{ si } n<99 \rightarrow \text{divergenci a} \\ <1 \text{ si } n>99 \rightarrow \text{convergenc ia} \end{cases}$$

4-73

Gauss. 1812.

Presenta la primera investigación sistemática en la convergencia de una serie. Propone la serie hipergeométrica: $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\ldots$ donde p es una constante, se tiene que la serie converge si $p>1$, y diverge si $p \leq 1$.

p 4-74

Bolzano. 1817.

Propone lo que con el tiempo se conoce como propiedad de Bolzano. La serie $\sum_{r=0}^{\infty} u_r(x)$ posee la ***propiedad de Bolzano*** si, dado un orden de pequeñez d, hay un valor n para el cual $|s_{n+r}(x)-s_n(x)|<d$, para $r>0$ Ahora, si la serie tiene la propiedad de Bolzano, "...entonces ahí siempre existe un cierto valor constante, y únicamente uno, al cual los términos de esta serie siempre se aproximan más, y hacia el cual pueden llegar a estar tan próximos como se desee, si uno prolonga la serie lo suficiente."

p 4-75

Cauchy. 1821.

Daba la siguiente advertencia en la introducción de su *Cours d'analyse*. "...antes de efectuar la sumación de cualquier serie, habría que examinar en que casos la serie puede ser sumada, o en otras palabras, cuales son las condiciones de su convergencia. Sobre este tema, he establecido reglas generales las cuales me parecen merecer alguna atención"

p 4-82

Hace distinción entre series de términos positivos y las series alternantes, pero no así entre las series numéricas y de potencias.

p 4-81 y 82

Señala que una serie divergente no tiene suma.
p 4-79

Aparentemente realiza pruebas de convergencia por comparación de series. Por ejemplo, toma la progresión geométrica convergente $1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$, para $|x|<1$. Comenta que en la serie de términos positivos $u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots$ la propiedad de que $0<u_n<x^n<1$ cuando $n>N$ implica *a fortiori* la convergencia de la segunda dada la convergencia de primera Además muestra que $0<(u_n)^{\frac{1}{n}}<x<1$, y por lo tanto conduce a la prueba de la raíz que él propone.
p 4-82

Cauchy. 1821.

Se piensa que la serie geométrica también pudo darle la idea de sustituir $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en lugar de $(u_n)^{\frac{1}{n}}$, para dar lugar a la "prueba de la razón", anticipada por D'Alembert: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]$
p 4-83

A partir de la prueba de la razón propone el siguiente resultado:

Si $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}\right]$ existe y si

i) es menor de 1, entonces $\sum_{r=0}^{\infty}u_r$ es convergente, o si

ii) es mayor de 1, entonces $\sum_{r=0}^{\infty}u_r$ es divergente,

iii) pero si es otra cosa, la prueba es incierta.

p 4-84

Obtiene el siguiente resultado para series de potencias:

i) $\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^r$ es convergente para todos los valores de $|x|<\left[\lim_{n\to\infty}\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{-1}$

ii) $\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^r$ es divergente para todos los valores de $|x|>\left[\lim_{n\to\infty}\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{-1}$.

p 4-85

Fourier. 1822.

Pretende representar toda función $f(x)$ por una serie de la forma:

$$y = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$
$$+ b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + b_n \operatorname{sen} nx + \cdots$$

p 4-78

Poisson. 1823.

Desarrolla erróneamente lo que pretende ser la primera prueba matemática completa de convergencia para series de Fourier.

p 4-79

Abel. 1826

Propone el primer teorema que aborda el comportamiento de una serie de potencias en su intervalo de convergencia. "Si la serie $f(\alpha) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots + v_m\alpha^m + \cdots$ es convergente para un cierto valor δ de α, también será convergente para todo valor menor que δ y, para valores siempre decrecientes de β, la función $f(\alpha-\beta)$ se aproxima indefinidamente al límite $f(\alpha)$, siempre que α sea menor o igual que δ."

p 4-87

Se señala que escribió en una carta a Holmboë:"... Las series divergentes son en general trabajo del diablo ...es una lástima que uno se atreva a encontrar cualquier prueba de ellas ... ¿Puede usted imaginar algo más terrible que pretender que $0 = 1^n - 2^n + 3^n - 4^n + \cdots$, etcétera, siendo n un entero positivo?. ... no existe en general en las matemáticas una serie infinita cuya suma esté determinada de una manera rigurosa; en otras palabras, lo más notable en matemáticas es sostenerse de pie, sin una base firme ... , inclusive, la fórmula binomial no ha sido probada."

p 4-86

Dirichlet. 1828 y1837.

Si los términos de la serie $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n + \cdots$ son tales que los b_i son todos positivos y tienden monótonamente a cero, y si existe un número M tal que $|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m + \cdots| < M$ para todos los valores de m, entonces la serie dada converge.

p 4-79

La suma de una serie condicionalmente convergente puede ser modificada por un reordenamiento de los términos.

p 4-88

Méray. 1872.	Renuncia a utilizar la condición externa de convergencia, es decir, el número real *S*. Así, él consideraba que una sucesión convergente determinaba: un número racional como límite, o un *número ficticio* como su *límite ficticio*. .p 6-149

Prontuario histórico de las ideas vinculadas a los infinitesimales.

Anaxágoras. Alrededor del 450 a.C..	En lo pequeño no existe mínimo, sino algo más pequeño, igual que para lo grande siempre existe algo más grande. p 4-97
Eudemo. Alrededor del año 350 a.C.	Las magnitudes son divisibles sin límite. 5-98
Aristóteles. Alrededor del año 350 a.C.	Lo que es infinitamente divisible es continuo. p 5-98
Arquímedes. Alrededor del año 350 a.C.	Convirtió el método de exhaución 1 en un poderoso instrumento infinitesimal. No lo consideró riguroso al infinitesimal. p 5-98
Bradwardine. 1320.	Lo indivisible es lo que no puede dividirse nunca. Por ejemplo: el punto, el movimiento. p 5-100
Cavalieri. 1635.	Todas las líneas de la figura dada, corresponden a sus indivisibles. p 5-102
Fermat. 1636.	Son los términos que producen la adigualdad y que en determinado momento se ignoran. p 5-104

Newton. 1669.

Incrementos infinitamente pequeños que si bien se pueden despreciar, no son nulos dado que se pueden establecer razones entre ellos. ($\dot{x}$)
p 5-107

Leibniz. 1684 y 1686

El diferencial de una variable es la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de aquélla. Posteriormente lo consideró como un segmento muy pequeño, pero finito.
p 5-111

Los infinitesimales son ficciones útiles en el arte de la invención matemática.
p 3-34

La igualdad final alcanzada por las series alternantes, cuyas sumas parciales sean una vez mayores y una vez menores que la suma total, es una cantidad dinámica atrapada en el infinitesimal del paso del movimiento a la quietud.
p 4-52

John Bernoulli. 1691-1692.

En tanto el número de términos en la naturaleza es infinito, los infinitesimales existen *ipso facto*.
p 5-112

Sea la serie infinita $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ entonces, si hay diez términos, existe el décimo; si hay cien términos, existe el centésimo; y si el número de términos es infinito, como aquí se supone, entones existe el infinitesimal.
5-112

James Bernoulli. 1691-1692

Los infinitamente pequeños no podían ser pensados como una cantidad determinada, sino como una ficción del espíritu —una fluxión perpetua hacia la nada—.
p 5-112

L'Hôpital. 1696

No discute la naturaleza de los infinitésimos, pero si difunde su uso a través de su libro de texto.
p 5-112

L'Hôpital. 1696

La parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable puede ser aumentada o disminuida de manera continua se llama diferencial de esa variable.
p 5-113

Fontenelle. 1727.

Los diferenciales *dy* o *dx* deben ser magnitudes del orden de $1/\infty$
p 5-114

Berkeley. 1734.

Los términos evanescentes son los fantasmas de las cantidades desaparecidas.
p 5-115

Todo lo extenso debe estar compuesto de partes extensas ya que, de otra manera, lo *no* extenso formaría la extensión, lo cual es contradictorio.
p 5-116

Da una crítica de carácter ontológico al señalar que los objetos a los cuales hace referencia Newton no existen y que usa símbolos sin sentido alguno.
p 5-115

Jurin. 1730s.

No existen constantes infinitamente pequeñas, pero sí variables infinitamente pequeñas o cantidades evanescentes.
p 5-117

Robins. 1730s.

La última razón de cantidades evanescentes es una expresión figurativa, con tal de que la diferencia entre la cantidad variante y otra sea menor a cualquier cantidad dada.
p 5-117

Voltaire. 1730s.

El cálculo es el arte de numerar y medir exactamente una cosa cuya existencia no puede ser percibida.
p 5-112

Rolle. Alrededor del año de 1746.

El cálculo infinitesimal es una colección de falacias ingeniosas.
p 6-131

Euler. 1748 y 1755

Las cantidades infinitamente pequeñas son, de hecho iguales a cero, pero pueden tener entre sí razones finitas. La igualdad **(0)(*n*)=0** implica que **0/0** puede valer ***n*** en algunos casos.
p 5-120

Las cantidades infinitamente grandes son las inversas de las infinitamente pequeñas.
p 4-95

D'Alembert. 1764.

Una cantidad es algo o nada; si es algo, aun no se ha desvanecido; si es nada, ya se ha desvanecido literalmente.
p 6-133

Lhuilier. 1786.

Evitó el misticismo del infinitesimal, la vaguedad de la última razón y la vacuidad del símbolo **0/0.**
p 6-136

Carnot. 1797.

Llamo cantidad infinitamente pequeña a toda cantidad que se considera como continuamente decreciente, de tal modo que podría ser tan pequeña como uno quiera, sin que uno esté obligado por eso a hacer variar aquellas cantidades de las cuales uno busca la relación.
p 5-121

Lacroix. 1797.

Su intención manifiesta era sustituir la teoría basada en los infinitamente pequeños, pero no lo logró
p 6-137

Cauchy. 1821.

Una función $f\,(x)$ permanecerá continua con respecto a x entre los límites dados, si entre éstos, un incremento infinitamente pequeño en la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma.
p 6-141

Cauchy. 1821.

Una función f (x) permanecerá continua con respecto a x entre los límites dados, si entre éstos, un incremento infinitamente pequeño en la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma.
p 6-141

Definición. Decimos que una cantidad variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico disminuye indefinidamente hasta converger al límite cero.
p 6-144

Weierstrass. 1872

Propicia la desaparición paulatina del infinitesimal.
p 3-35

Cantor. 1886

Los infinitesimales ocupan un lugar de privilegio en la lista de fantasmas y quimeras.
p 5-125

Russell. Alrededor de 1910.

Si fuera posible alguna vez hablar de números infinitesimales, entonces tendría que ser en un sentido radicalmente nuevo.
p 5-125

Robinson. 1960.

Prueba rigurosamente la existencia de los infinitesimales como entes matemáticos.
p 6-150

Prontuario histórico de las ideas vinculadas a los límites.

Eudoxo. Alrededor del año 370 a.C.	Se infiere una intención del paso al límite. Una mera aproximación al resultado al que se quiere llegar. p 3-28
Arquímedes. Alrededor de 250 a.C.	La concepción de que el límite no es un término de la sucesión. p 3-28
Proclo. 450 d.C.	El punto es un límite. Posee lo ilimitado en forma latente. p 3-28
Descartes. 1640s.	La divisibilidad de las partes de la cantidad y otras semejantes, las llamó indefinidas y no infinitas porque no carecen por todas partes de fin ni de límites. p 3-33
Newton. 1669.	Introduce la idea de primera y última razones. 5-107
Giordano Bruno. 1680s	El *minimum* indivisible no es resultado de un último paso alcanzado en el proceso imaginario de una serie ilimitada- p 3-30
Berkeley. 1734.	El punto o límite de las líneas nacientes como tal no es una cantidad. p 5-115
Jurin. 1730s.	Sostiene que las variables necesariamente deben alcanzar sus límites. p 5-117

Robins. 1730s.

La cantidad variante no necesita ser considerada como finalmente comprendida por la cantidad dada como último valor
5-117

La cantidad variante puede estar tan próxima otra, que difiera de ésta menos que cualquier cantidad que pueda ser asignada.
p 5-117

Consideró que la base lógica de los infinitesimales o cantidades evanescentes debería estar en el método de límites.
5-117

Su concepción de límite incluye a las "formas de figuras cambiantes", por ejemplo el círculo como límite de un polígono regular inscrito cuando el número de sus lados crece indefinidamente.
p 5-117

D'Alembert. 1764.

Definición. Una magnitud se dice que es *límite* de otra cuando la segunda se puede aproximar a la primera en menos que cualquier magnitud dada, por pequeña que ésta sea, aunque la segunda magnitud no pueda superar a la magnitud que se aproxima.
p 6-133

Kant. 1780s.

El *progressus in infinitum*, posee el privilegio de admitir un límite; los elementos sucesivos de un conjunto infinito se encuentran en un todo preexistente.
3-30

Lhuilier. 1786.

Definición. Dada una cantidad variable siempre más pequeña o más grande que cualquier cantidad constante dada, pero de la cual difiera al final, menos que cualquier cantidad propuesta aunque pequeña, esta cantidad constante es llamada el límite en lo grande o en lo pequeño de la cantidad variable.
p 6-138

Lhuilier. 1786.

Introduce la notación de "*lim*"
p 6-136

Demuestra los teoremas del cociente y del producto.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(p_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(q_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}[(p_n)(q_n)]=[\lim_{n\to\infty}(p_n)][\lim_{n\to\infty}(q_n)]$$

p 6-136

Lacroix. 1802.

Publica un libro, considerado el más famoso y ambicioso hasta esa época, cuyo objetivo era sustituir los infinitesimales. Se tradujo a varios idiomas y 80 años después estaba en la novena edición. Favoreció la amplia difusión del método de límites.
p 6-137

Bolzano. 1817.

Introduce la noción del *límite-no-tocado* , cuyo contenido establece la idea de *aproximarse tan cerca como se quiera*, para evitar el uso de infinitesimales.
p 6-189

Definición de límite. La función $f\,(x_0+\alpha)$ tiene un *límite* (único), de valor B, cuando $\alpha\to 0$, si $[f(x_0+\alpha) - B]$ es pequeño cuando α es pequeño.
p 6-142

Cauchy. 1821.

Definición de función con base en límites. Una función $f(x)$ varia de acuerdo a la ley de continuidad para todos los valores de x los cuales caen dentro o fuera de ciertos límites, no es otra cosa que, para cualquier valor de x, la diferencia de $f\,(x+\omega)$-$f\,(x)$ puede hacerse más pequeño que cualquier cantidad dada, si uno hace ω suficientemente pequeña,...
p 6-142

Definición de continuidad con base en límites. "La función *f(x)* permanecerá continua con respecto a x entre los límites dados, si entre estos límites un incremento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma"
p 6-141

Cauchy. 1821.

Utilizó la letra E para identificar los valores límite cuando n tendía a infinito.
p 4-82

El número irracional $\sqrt{2}$ como el límite de la sucesión

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}},\ \cdots$$

pp 3-31 y 6-146

Dedekind. 1858 y 1872.

Dando clases de análisis llegó a la conclusión de que el concepto de límite había que desarrollarlo de una manera totalmente aritmética.
p 5-149

Heine. 1872. Bajo influencia directa de las lecciones de Weierstrass.

Definición de límite de una función. "Si, dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0<\eta<\eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta_0) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ en $x = x_0$."
p 6-150

Simene Weil. 1940s.

Con otras palabras expone la idea equivalente a imaginar poner en una balanza de dos platillos, dos sucesiones de números, los mayores a $\sqrt{2}$ y los menores a éste. La balanza se inclinaría a uno u otro lado conforme nos acercáramos a $\sqrt{2}$ y precisamente en él, se tendría el punto de ideal de equilibrio, carente de existencia experimental efectiva y que correspondería al límite.
p 3-31

Textos actuales. 1998.

La η de Weierstrass ha sido reemplazada casi mundialmente por la letra δ, pero éste ha sido prácticamente el único cambio en la definición de Heine y Weierstrass. Así hace 125 años se dio origen a lo que se conoce como las demostraciones tipo ε–δ.
p 6-150

Principales matemáticos vinculados a los conceptos de Series Infinitas, Infinitesimales y Límites, presentados en orden cronológico.

	Series infinitas	*Infinitesimales*	*Límites*
Zenón	450 a. C.		
Anaxágoras		450 a. C.	
Eudoxo			370 a. C.
Eudemo		350 a. C.	
Aristóteles		350 a. C.	
Arquímedes	250 a. C.	250 a. C.	250 a. C.
Proclo			450 d. C.
Swineshead	1300		
Bradwardine		1320	
Oresme	1321		
Cavalieri		1635	
Fermat	1636	1636	
Descartes			1640s
Wallis	1656		
Newton	1664-1665	1669	1669
Mercator	1668		
Gregory	1670		
Leibniz	1675	1684 y 1686	
Giordano Bruno			1680s
John Bernoulli		1691-1692	
L'Hôpital		1696	
Taylor	1715	1717	
Fontenelle		1727	
Berkeley		1734	1734
Jurin		1730s	1730s
Robins		1730s	1730s
Voltaire		1730s	
Rolle		1746	
Euler	1750s	1748 y 1755	
D'Alembert	1768	1764	1764
Kant			1780s
Lhuilier		1786	1786
Carnot		1797	
Lacroix		1797	1802
Gauss	1812		
Bolzano	1817		1817
Cauchy	1821	1821	1821
Fourier	1822		
Poisson	1823		
Abel	1826		
Dirichlet	1828 y 1837		
Dedekind	1872		1858 y 1872
Méray	1872		
Weierstrass		1872	1872
Heine			1872
Cantor		1886	
Russell		1910	
Simone Weil			1940s
Robinson		1960	

ANEXO 1. SOBRE CONTINUIDAD Y FUNCIONES.

Notas generales.

Desde principios del siglo XIX ha habido más de un millar de funciones especiales a las que se ha considerado de interés suficiente como para merecer una investigación más o menos detallada, de las cuales muchas están olvidadas. En otros casos, la simple historia de un tipo de funciones llenaría un libro grande. No hay una teoría suficientemente amplia para abarcar a todas las funciones especiales. Hacia 1800 se debía de haber apreciado ya la necesidad de métodos generales para deducir propiedades comunes a las funciones de cada una de las diversas clases, pero parece que no fue sino hasta alrededor de 1825, cuando Cauchy empezó a crear de manera sistemática la teoría de funciones de variable compleja.

Para que sea útil, una teoría de funciones no ha de ser tan general que sólo produzca trivialidades comunes a todas las funciones que incluye. Aquí, como en todo el resto de la matemática moderna, los creadores de las **tres teorías** más importantes han conservado, quizá de modo subconsciente, la máxima lógica "de que cuanto mayor sea la extensión, menor es la profundidad". En el orden histórico de desarrollo, son:

- la teoría de funciones de una variable compleja,
- la teoría de funciones de variables reales y
- el análisis general o abstracto.

Matemáticamente, la teoría de funciones de variables reales está antes que las otras; pero desde un punto de vista histórico no surgió como disciplina independiente sino hasta el último tercio del siglo XIX cuando la teoría de funciones de variable compleja ya estaba muy adelantada. En el siglo XVIII se sentía una aguda necesidad de una teoría de este tipo para justificar el cálculo. Sin embargo, no empezó a llegar en su forma válida hasta después de 1870, con la revisión de los números reales.

VARIABLES REALES

La teoría de funciones de una o más variables reales, se ha ocupado menos que la teoría de variables complejas, de la investigación de funciones útiles principalmente por sus aplicaciones; sin embargo su importancia para el desarrollo del conjunto de las matemáticas ha sido incomparablemente mayor. No obstante, los orígenes de esta teoría se encuentran con facilidad en la astronomía dinámica de los siglos XVII y XVIII y en la física matemática de los siglos XVIII y XIX. El impulso inicial fue el cálculo aproximado de resultados numéricos en las soluciones de problemas astronómicos y físicos expresadas mediante **series infinitas** u otros algoritmos indefinidos tales como los productos infinitos y las fracciones continuas infinitas.

Las series infinitas han pesado mucho más que todos los otros procedimientos infinitos, tanto por su importancia práctica como teórica.

Fue en las variables reales donde se reconoció por vez primera la necesidad que existía de una teoría rigurosa del sistema numérico del análisis. La reconstrucción que hizo Weierstrass poco después de 1860 y Dedekind y Cantor a partir de 1870 del sistema de números reales, condujo en los tres últimos decenios del siglo XIX a una revaluación de todo el análisis, y después, en el siglo XX, a una profunda revisión de la naturaleza de todo el razonamiento matemático.

Con respecto a la teoría estrictamente matemática, la opinión de los expertos es casi por completo unánime en que antes de la reconstrucción del sistema de los números reales, no había nada que se pudiera llamar *teoría de funciones de una variable real*. Por ejemplo, se afirma en el libro de texto "K. Knopp, *Theory and application of infinite series*, Londres, 1928, Notas Históricas"[128] que: "...no hay ningún tratado ni conferencia que se ocupe de las partes fundamentales del análisis superior que pueda pretender ser válido, a menos que tome como punto de partida el concepto perfeccionado de número real... Porque una teoría de las series infinitas... estaría en las nubes de no estar firmemente basada en el sistema de los números reales, único fundamento posible"

La teoría de funciones de una variable real tiene tan enorme extensión, que sólo se pueden registrar algunos de sus puntos más importantes. Su evolución parece presentar tres fases principales, siendo las dos primeras de carácter preparatorio:

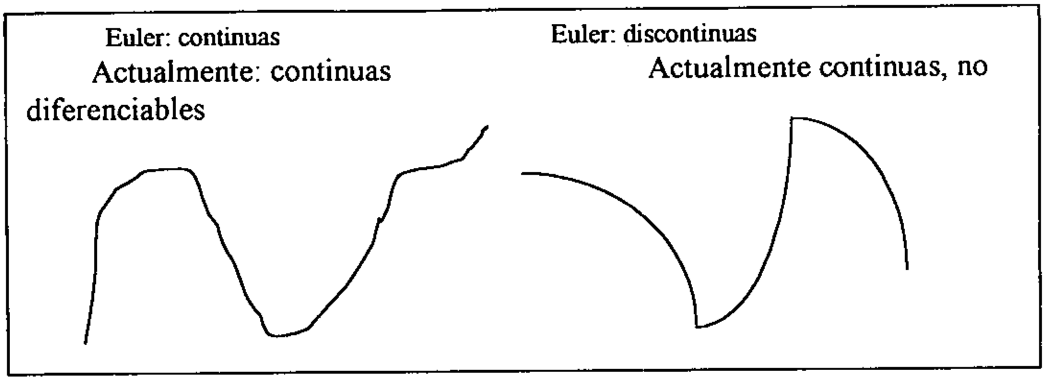
I. La primera se extiende desde el sigo XVII hasta 1821. Corresponde al período de Newton, Leibniz, los Bernoulli, D'Alembert, Euler y Lagrange, en el cual se plantea el problema.

II. De 1821 hasta 1870-1880. El gran maestro de este período fue Euler, cuya inventiva dotó al análisis de una riqueza de algoritmos que fijó el modelo formal del análisis durante bastante más de un siglo. La precisión de la fecha de 1821 deriva de las conferencias que dio Cauchy sobre lo que llamó *análisis algebraico: series infinitas, límites, continuidad, cálculo*. Abrió un abismo separando lo antiguo de lo nuevo, lo cual es claramente visible si se comparan sus obras clásicas.

III. La última desde 1880 en adelante. La diferencia entre este período y su anterior es sumamente marcada, dado que establece el paso del análisis tal como era entes de la reconstrucción del sistema de los números reales, a lo que fue después. Marca su inició, la revisión que hicieron Poincaré y Stieltjes (holandés, 1856-1894) de las series divergentes. En 1902, Lebesque revolucionó la teoría de la integración y abrió una nueva era del análisis real comparable a la que habían iniciado Cauchy y Abel

Euler y su contribución a las funciones.

Si bien las contribuciones de Euler a las matemáticas son numerosas, conviene recordar básicamente las siguientes dos:
i) Σ para el signo de suma o sumatoria.
ii) $f(x)$ para la notación funcional.
iii) Introduce la clasificación de funciones algebraicas o trascendentes, implícitas o explícitas y hace la distinción de continuas o discontinuas de la forma que se ilustra en el cuadro siguiente.



Arbogast y su definición de Continuidad. 1791.

Sin duda bajo la influencia de Euler, no obstante suceder después de su muerte, se convocó un concurso en 1787 por la Academia de San Petersburgo, sobre la siguiente cuestión:

"... Si las funciones arbitrarias a las que se llega integrando ecuaciones [diferenciales] en tres o varias variables, representan cualquier curva o superficie, bien sea algebraica o trascendente, bien sea mecánica, discontinua o producida por un movimiento voluntario de la mano; o bien si estas funciones incluyen sólo a las curvas continuas representadas por una ecuación algebraica o trascendente ..."

Debe observarse que la fraseología de la cuestión muestra claramente el caótico estado de la teoría de funciones en aquella época, pues hace referencia a una colección de términos sacados de varias fuentes, la mecánica, la geometría, el álgebra y de la materia misma todavía incoherente conocida por *análisis*.

El premio lo ganó Louis Arbogast, quien apoyaba las ideas de Lagrange sobre la fundamentación del cálculo y que abordó la cuestión en su ensayò de 1791. Ya se conocía que el cálculo tendía a operar con objetos continuos, curvas, valores funciones y, si era posible, también diferenciales. Arbogast extendió el campo de lo que se puede llamar continuidad "segura", distinguiendo entre dos maneras en que podía verse rota la continuidad:

1. La función puede cambiar de forma, es decir, la ley según la cual la función depende de la variable, puede cambiar súbitamente. Una curva formada por una colección de varias partes de curvas distintas está en este caso. Sea la curva un trozo de parábola de A a B, de B a C un trozo de elipse, de C a D un trozo de círculo. La continuidad quedará rota en los puntos B y C.

   Llamaremos *curvas discontinuas* tanto a aquellas que están formadas por la unión de varias partes de curvas como a las que, trazadas por medio de un movimiento libre de la mano, no están sujetas a ninguna ley en ninguna parte de su recorrido, con tal que todas las partes de las curvas se unan una tras otra sin interrupción... Por *funciones discontinuas* entendemos las funciones que se supone corresponden a curvas de esta naturaleza.

2. La ley de continuidad queda rota de nuevo cuando las diferentes partes de una curva no se unen entre sí sin interrupción ... A las curvas de este tipo las llamaremos *curvas discontiguas*, porque no todas sus partes se unen, o bien, no son contiguas sin interrupción... Daremos el nombre de *funciones discontiguas* a las funciones que se supone corresponden a curvas de esta naturaleza.

Nótese que las curvas que se proponen *discontinuas*, no lo serían en la actualidad, aunque sí serían *no diferenciables*; las curvas que propone *discontiguas*, serían en la actualidad las correspondientes a *discontinuidades de salto*.

Tómese en cuenta también la carga geométrica de las definiciones anteriores.

Lagrange y su definición de función. 1813

En la segunda edición de su artículo, Lagrange en el año de 1813 inicia con lo siguiente:

Llamamos función de una o varias variables a cualquier expresión del cálculo en la que entran dichas cantidades de una manera arbitraria... La palabra *función* fue utilizada por los primeros analistas para denotar las potencias de una cantidad en general. Desde entonces el significado de esta palabra se ha extendido para designar cualquier cantidad formada de una manera arbitraria a partir de otra cantidad... Cuando le atribuimos un incremento cualquiera a la variable de una función, sumándole una cantidad indeterminada, entonces, si la función es algebraica, podemos desarrollarla según las potencias de esta [cantidad] indeterminada, por medio de las reglas usuales del Álgebra. El primer término del desarrollo sería la función propuesta, a la que llamaremos la *función primitiva*; los términos siguientes estarán formados por diferentes funciones de la misma variable multiplicadas por las sucesivas potencias de la [cantidad] indeterminada. Estas nuevas funciones dependen únicamente de la función primitiva de la que se derivan, y podemos llamarlas *funciones derivadas*... En este libro veremos que el Análisis que usualmente recibe el nombre de *trascendental o infinitesimal* no era otra cosa en su raíz, que el Análisis de la funciones primitivas y derivadas, y que los Cálculos Diferencial e Integral se reducen, propiamente hablando, al cálculo de esas mismas funciones.

Cauchy y su definición de Continuidad. 1821.

La función $f(x)$ permanecerá continua con respecto a x entre los límites dados, si entre estos límites un incremento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma

Teniendo en cuenta la propia definición de Cauchy de las cantidades infinitamente pequeñas en términos de límites, su definición de continuidad es completamente análoga a la que utilizamos hoy.

Definición de Función de Dirichlet. 1837

Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla común según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.

Si bien esta definición se acerca mucho a la idea moderna de una correspondencia general entre dos conjuntos de números reales, lo cierto es que los conceptos de *conjunto* y *número real*, aún estaban lejos de tener un significado preciso en la época de Dirichlet. Basta observar que en ningún momento se hace referencia a la cualidad que debe tener la x en cuestión.

Continuidad Uniforme.

A continuación se presentarán las diferentes versiones que se han seleccionado con relación a la continuidad uniforme.

Definición 1.

I. Un punto de acumulación x_0 es aquel en el cual la función f presenta un límite, si se tiene un intervalo abierto que además de contener a , aquél contiene también un punto $x = x_0$ en el dominio de f.

II. Sea C un número. Decimos que C es un punto de acumulación de la sucesión $\{a_n\}$, (n=1, 2, 3, ...) si, dado ε>0, existen infinidad de enteros n tales que $|a_n - C| < \varepsilon$, lo que implica la unicidad del límite.

Un contraejemplo para un x_0 que no sea un punto de acumulación es:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{para } x \neq 3 \\ 5 & \text{para } x = 3 \end{cases}$$

así, si x_0 = 3, entonces no es un punto de acumulación y en consecuencia no es límite para la función dada.

Definición 2.

Frecuentemente se tiene la necesidad de asociar con un punto x_0 los diferentes intervalos abiertos que contienen a x_0 o bien, específicamente, tenerlo en el centro; a esos intervalos los llamamos *vecindades* o entornos del punto. Más precisamente, para todo número positivo ε, la *vecindad* de punto x_0 consiste de los valores de x para los cuales $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$.

Definición 3

- La *continuidad uniforme* significa que dado ε>0, no sólo se encuentra un valor δ_1 que funcione para x_1, un valor δ_2 que funcione x_2, etcétera, sino además, que se pueda encontrar un valor general δ que funcione para todos los valores de x_i en el intervalo. En cualquier caso, la *continuidad uniforme* de f en un intervalo, implica su continuidad ahí.
- La función f es uniformemente continua sobre un intervalo I del dominio de f si para cualquier ε>0 existe un δ>0 tal que para toda x del intervalo I

  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ siempre que $x_0 \in (x-\delta, x+\delta) \cap I$.

Obsérvese que para la continuidad uniforme se debe cumplir que δ sólo sea función de ε y no de la variable x.

Debe tomarse en consideración que la continuidad uniforme es una condición más exigente que sólo la continuidad. Así, si f es uniformemente continua sobre un intervalo, entonces f es continua en dicho intervalo; lo recíproco no necesariamente es cierto.

PERSONAJES NOTABLES VINCULADOS A LAS SERIES INFINITAS, LOS INFINITESIMALES Y EL LÍMITE.

- Abel, Niels Henrik. Noruego. 1802-1829.
- Anaxágoras de Clazomene. Griego. 500-428 a. C.
- Antifón de Atenas. Griego. Hacia 430 a. C.
- Arbogast, Louis. Francés 1759-1803.
- Aristóteles. Griego. 384-322 a. C.
- Arquímedes. Griego. 287-212 a. C.
- Berkeley, George. Inglés. 1685-1753.
- Bernoulli, Jacques. Suizo. 1654-1705.
- Bernoulli, Daniel. Suizo. 1700-1782.
- Bernoulli, John. Suizo. 1667-1748.
- Bolzano, Bernard. Checoslovaco. 1781-1848.
- Bradwardine, Thomas. Inglés. 1290-1349.
- Briggs, Henry. Inglés. 1561-1630.
- Bruno, Giordano. Italiano. 1548-1600.
- Cajori, Florian. Suizo. 1859-1930.
- Cantor, Georg. Alemán. 1845-1918.
- Carnot, Lazaré. Francés. 1753-1823.
- Cauchy, Augustin-Louis. Francés. 1789-1857.
- Cavalieri, Bonaventura. Italiano. 1598-1647.
- D'Alembert, Jean Le Rond. Francés. 1717-1783.
- Dedekind, J. W. Richard. Alemán. 1831-1916.
- Demócrito de Abdera. Griego. 460-370 a. C.
- Descartes, René. Francés. 1596-1650.
- Dirichlet, Peter Gustav Lejeune-. Alemán. 1805-1859.
- Du Bois-Reymond. Francés. 1831-1889.
- Eudemo de Rodas. Griego. Finales del siglo IV a. C.
- Eudoxo. Griego. 408-355 a. C.
- Euler, Leonhard. Suizo. 1707-1783.
- Frænkel. Adolf Abraham Halevi. Alemán. 1891-1965.
- Fontenelle, Bernard. Francés. 1657-1757.
- Fourier, Joseph. Francés. 1768-1830.
- Gauss, Carl Friedrich. Alemán. 1777-1855.
- Hankel, Hermann. Alemán. 1839-1903.
- Heine, H. E. Alemán. 1821-1881.
- Hipócrates de Quíos. Griego. Hacia 440 a. C.
- Kant, Immanuel. Alemán. 1724-1804.
- Kepler, Johannes. Alemán. 1571-1630.
- Klein, Felix. Alemán.1849-1925.

- Kronecker, Leopold. Alemán. 1823-1891-
- L'Hôpital (Hospital), Guillaume de L',Marqués. Francés. 1661-1704.
- Lacroix, Sylvestre François. Francés. 1765 1843.
- Lagrange, Joseph-Louis. Francés. 1736-1813.
- Laplace, Pierre Simon. Francés. 1749-1827.
- Leibniz, Gottfried. Leipzig. Alemán. 1646-1716.
- Lhuilier, Simon Antoine. Suizo. 1750-1840.
- Maclaurin, Colin. Escocés. 1698-1746.
- Méray, Charles. Francés. 1835-1911.
- Mercator, Nicolas. Alemán. 1620-1687.
- Mersenne, Marin. Francés. 1588-1648.
- Napier, John. Escocés. 1550-1617.
- Newton, Isaac. Inglés. 1642-1727
- Oresme, Nicolás de. Francés. ¿1323?-1382.
- Poisson, Siméon Denis. Francés, 1781-1840.
- Proclo. Griego. 410-485 d. C.
- Roberval, Gilles Personne de. Francés. 1602-1675.
- Riemann, Bernard. Alemán. 1826-1866.
- Robins, Bath. Inglés. 1707-1751.
- Robinson, Abraham. Alemán. 1918-1974.
- Rolle, Michael. Francés. 1652-1719.
- Russel, Bertrand. Inglés. 1872-1970.
- Saint.-Vincent, Gregory. Inglés. 1584-1667.
- Schwarz, Karl Herman Amandus. Alemán. 1843-1921.
- Stevin, Simon. Belga. 1548-1620
- Stolz, Otto. Austriaco. 1842-1905.
- Swineshead, Richard. (Sin datos sobre su origen)
- Taylor, Brook. Inglés. 1685-1731.
- Wallis, John,. Inglés. 1616-1703.
- Weber, Heinrich. Alemán. 1824-1913.
- Weierstrass, Karl. Alemán. 1815-1897.
- Weil, Simone. Francesa. 1909-1943.
- Weyl, Hermann Klauss Hugo. Alemán. 1885-1955.
- Wronski, Hoene. Polaco. 1776 ó1778-1853.
- Zenón de Elea. Griego. 490 ó 485-430 a.C.
- Zermelo, Ernest Friedrich Ferdinand. Alemán.1871-1951 ó 1953.

Notas

[1] Paterson, C.H. (1982) *Bases para una teoría de la enseñanza y psicología de la educación. México. Manual Moderno.*
[2] La enseñanza ha estado influenciada por diferentes teorías, entre las que se pueden citar el conexionismo de Thorndike, el conductismo de Watson, la psicología de la Gestalt y el conductismo de Skinner.
[3] Hilgard, *A perspective on the relationships between learning*
[4]I. Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1639-1910.* Madrid: Alianza Editorial.
[5] Coll, C. *Desarrollo psicológico y educación*. Madrid. Alianza. Capítulo 4. Teresa Mauri.
[6] Idem. Capítulo 5. Juan García Madruga. "Aprendizaje por descubrimiento frente a aprendizaje por recepción: la teoría del aprendizaje verbal significativo". p 86.
[7] Ausubel en su libro Psicología Educativa, revisado en 1969 con Novak y Harrison, dice que " es el contenido y organización totales de las ideas de una persona dada".
[8] Zorrilla Fierro, M. M. (1992). Matemáticas y Educación. Una mirada al interior de la relación. *Investigación Educativa*, reporte # 31. Universidad Autónoma de Aguascalientes. p 46.
[9] Idem. p 47.
[10] Idem. p 49,
[11] Pansza González, M. (1988). Las aportaciones de Jean Piaget al análisis en el currículo. *Sobre la Universidad,* número (7), p 8.
[12] Idem, en referencia a Hook, S. (19)*On certain for selecting aims and Content of education.* p 105.
[13] Idem, p 10, en referencia Piaget, Jean. *Autobiografía. El nacimiento de la inteligencia*, p 74.
[14] Piaget, J. García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Siglo veintiuno editores. p. 15
[15] Idem. pp 14-15.
[16] Capítulo XXIII de la obra Didáctica Magna de Comenio. De la vigencia del contenido del texto da fe, Jean Piaget en su obra *La actualidad de Comenio, UNESCO 1957.*
[17] Cf. Karpinski, "*Is there Progress in Mathematical Discovery?*" pp 47-48. Carl Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, p 299.
[18]Piaget, J.(1975). *Introducción a la epistemología genética.* Buenos Aires: Paidos. Vol I, p 31.
[19] Coll. C. (1990) *Desarrollo psicológico y Educación.* Madrid. Alianza. Capítulo 5. Juan A: García Madruga. "Aprendizaje por descubrimiento frente a aprendizaje por recepción: la teoría del aprendizaje verbal significativo". Capítulo parcialmente basado en una conferencia dictada en el Simposio Psicología del Aprendizaje y Desarrollo Curricular, Oviedo 1986, organizado por la Subdirección General de Formación de Profesorado Y la Dirección Provincial del Ministerio de Educación y Ciencia.
[20] Aportación: Dr. Marco Antonio Rigo Limini, Fac. de Psicología, U.N.A.M.
[21]Ausubel, D. P. Novak, J. D. Hanesian, H.. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.1978, pp.67 -68.
[22] Idem pp. 138 y 144.
[23] Coll. C. (1990) *Desarrollo psicológico y Educación.* Madrid. Alianza. Capítulo 5. Juan A: García Madruga. "Aprendizaje por descubrimiento frente a aprendizaje por recepción: la teoría del aprendizaje verbal significativo".
[24] Diccionario de Pedagogía Labor. Editorial Labor. México. 1964, en referencia a Aguayo,. A.M., *Lecciones de Higiene Escolar*. La habana 1929.
[25] Diccionario de Pedagogía Labor. Editorial Labor. México. 1964.
[26] Bell, E. T. *Historia de las Matemáticas.* Fondo de Cultura económica. México. 1985.
[27] Parece ser una alusión a John Bunyan, autor de una alegoría religiosa que ejerció una profunda influencia en las clases populares. *El viaje del peregrino, 1678 a1684.*
[28] Boyer, C. B.. *Historia de la matemática.* Alianza Editorial. Madrid. 1968. Título original *A History of Mathematics.*
[29] Cajori, F.. *A History of Mathematics.* Chelsea. New York. 1980.

[30] Edwards, C. H. Jr. *The Historical Development of Calculus*. Sringer-Verlag. New York. 1979.
[31] Eves, H. *An introduction to the history of mathematics*. Holt, Rinehart y Winston. New York. 1976.
[32] Grattan-Guinness, I. *Del cálculo a la teoria de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza Editorial. España. 1980.
[33] Newman, J. R. SIGMA: *El Mundo de las Matemáticas*. Grijalvo. Barcelona. 1994. Título original *The World of Mathematics*.
[34] Kant, I. Filósofo alemán. 1724-1804. *Critica de la Razón Pura,* Dialéctica trascendental. Paolo Zellini, p 11, *Breve Historia del Infinito*. Ediciones Siruela, Madrid, 1991.
[35] Anaximandro. Filósofo griego de la escuela jonia. 610-547, a.C. Consideró al infinito, lo indefinido, como elemento primordial de todas las cosas.
[36] Aristóteles pone como ejemplo el conjunto de los números, correspondiendo esta expresión al *infinito potencial*.
[37] Filósofo y poeta latino. 480-524 d.C. Autor de tratados de filosofía y aritmética.
[38] Baruch Spinoza, filósofo neerlandés, 1623-1677; Friedrich Hegel, alemán, 1770-1831; Giacomo Leopardi, italiano, 1798-1837.
[39] Filósofo neoplatónico. 205-270, d.C.
[40] Filósofo griego. 412-485, d.C.
[41] Filósofo italiano. 1548-1600.
[42] Filósofo inglés. 1285-1349.
[43] Alrededor del año 430 a.C.
[44] Autor del libro *Non-standard Analysis,* New Jersey: Princeton University. 1966.
[45] Zellini, p 163. Breve Historia del Infinito. Citando a L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, París, 1929. p.209.
[46] Fontenelle, B. 1657-1757. Escritor francés, quien se hizo célebre por sus tratados de divulgación científica.
[47] Zellini, p 163. Breve Historia del Infinito. Citando a L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, París, 1929. pp 243-244.
[48] Fondements d'une théorie générale des ensembles, en *Acta mathematica*, 2, 1883, pp 385-386. Paolo Zellini, *Breve Historia del Infinito*. pp 181- 184.
[49] En algunos textos se refieren a esta obra como "*los Beiträge*" en economía del título completo *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*.
[50] Moore. *The infinite*. p 154.
[51] Idem.
[52] Edwards, C. H. Jr. The Historical Development of Calculus, p 91.
[53] Según Boyer, Marshall Clagett en Science of Mechanics in the middle ages, pp 332,333 y 414, descubrió una gráfica anterior a las de Oresme, dibujada por Giovanni de Cosali, pero la cual fue superada por mucho en cuanto a claridad como influencia, por lo que suponer la idea como de Oresme, no violenta la historia de manera esencial.
[54] "*Aritthmetica infinitorum*"
[55] Blas Pascal, francés. 1623-1662.
[56] Método para raíz cuadrada de polinomios.
1. Una vez ordenado el polinomio, se halla la raíz cuadrada de su primer término, que será el primer término de la raíz cuadrada del polinomio; se eleva al cuadrado esta raíz y se resta del polinomio dado.
2. Se bajan los siguientes dos términos del polinomio dado y se divide el primero de éstos por el duplo del primer término de la raíz. Este segundo término de la raíz con su propio signo, se escribe al lado del duplo del primer término de la raíz y se forma un binomio; este binomio se multiplica por dicho segundo término y el producto se resta de los términos que se habían bajado.
3. Se bajan los siguientes tres términos y se itera el proceso.
[57] González Urbaneja, P. M. *Las raíces del cálculo infinitesimal en el sigloXVII*. Alianza Universidad. p 220.
[58] Páginas 184-189, volumen II de Newton's Mathematical Papers.
[59] Según Herbert Westren Turnbull, autor de la parte denominada *Los grandes matemáticos* de la enciclopedia Sigma, Gregory de Saint Vincent ya había utilizado en 1647 la serie $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$
[60] Aparentemente utilizada por Newton.
[61] En los estudios de 1675 Leibniz utilizó por vez primera los símbolos $\int$ y **d**.

3 6 10

[62] l

[63] Briggs lo realizó así alrededor del año 1620.
[64] *The historical development of the calculus.* P 285.
[65] Bell, E. T. *Historia de las Matemáticas.* Fondo de Cultura Económica. México. 1949. p. 300.
[66] Interpretación de Grattan-Guinness. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. p 154.
[67] Bolzano 1817, artículo 5. I. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann.* MIT Press. Cambridge. 1970.
[68] Bolzano 1817, artículo 7. I. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann.* MIT Press. Cambridge. 1970.
[69] La fórmula integral de los coeficientes a_n y b_n habían sido obtenida para funciones específicas por Clairaut y Euler.
[70] Boyer, C. B. p. 687. *Historia de la Matemática.* Alianza Editorial. Madrid. 1984.
[71] Cauchy 1821, *Cours d'analyse.* Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann,* p. 132.
[72] Lagrange *Funciones*$_2$, parte I, arts. 35 38-40. Ideas aun más incipientes se pueden hallar en *Funciones*$_1$, de 1797, arts. 47-50. I. Grattan-Guinness. *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann.* MIT Press. Cambridge. 1970.
[73] Dirichlet, 1837, pp 48-49; *Works*, vol.1, pp 318-319. Grattan-Guinnesss, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann,* p 95.
[74] La expresión actual es de la forma: $f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega(t-x)dxd\omega$
[75] Dirichlet 1829, pp 159-165; *Works*, vol.1, pp121-127. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann,* p102.
[76] González Urbaneja, P. M. Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. página 21.
[77] Zenón fue uno de los principales representantes de la escuela filosófica de Elea
[78] Newman, J. R. S*igma , el mundo de las matemáticas, página 378.*
[79] Los Elementos de Euclides, definición V.4. *Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra.* Este enunciado equivale a establecer la continuidad de las magnitudes.
[80] Discípulo de Aristóteles.
[81] En referencia a *Aristotle's Phisics* editado por W. D. Ross, Oxford, 1936.
[82] Phisics Libro III, capítulo 1 de Aristóteles. Fuente: C. H. Edwards, The Historical Development of the Calculus.
[83] Euclides. *Elementos*, V, definición. 4)
[84] Phisics Libro III, capítulo 4 de Aristóteles. Fuente: C. H. Edwards, The Historical Development of the Calculus.
[85] Grattan-Guinness. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910, página 24.
[86] Dichos cálculos dieron origen al libro "*Nova stereometria doliorum vinariorum* (*Nueva medida de volúmenes de toneles para vino.)*
[87] En la introducción y notas de Luis Vega a *El Método* señala que uno de los rasgos de las demostraciones de Arquímedes era el contraerse a la consideración de unos pocos problemas con deducciones rigurosas pero informales, al servicio de un desarrollo sustancial del conocimiento matemático. Página 28 de la edición El libro de Bolsillo, Alianza Editorial, Secretaría de Educación Pública. Con relación a los planteamientos estáticos, Arquímedes sugiere que las figuras se llenan de sus cuerdas y los sólidos se forman de sus secciones, página 29.
[88] "*Geometría indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*"
[89] "*Omnes lineae propositae figurae*"
[90] Corolario del Teorema 4 del libro II de *Geometría.*
[91] "Método para investigar máximos y mínimos"
[92] La publicación de dos artículos del Cálculo de Leibniz se dio en los años 1684 y 1686, sin embargo los descubrimientos fueron realizados en 1673 y 1675.
[93] Momento=(fuerza)(distancia al eje OD)

[94] *Philosophia prima, sive ontologia*, pp 597-602. Carl. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, p 240.
[95] John Bernoulli.
[96] *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.* Análisis de los infinitamente pequeños para la comprensión de curvas.
[97] Según Grattan-Guinness Berkeley era un profano en la materia. *Del cálculo a la teoria de conjuntos, 1630-1910.* p 118.
[98] SIGMA en referencia a Florian Cajori, *A History of the Conception of Limits and Fluxions in Great Britain/From Newton to Woodhouse*, Chicago, 1919, p. 89.
[99] Berkeley (1734) citado por Niccolò Guicciardini. The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800. p 41. p 18.
[100] SIGMA, p 212, en referencia a Florian Cajori, *A History of Mathematics*, New York, 2a edición, p 128.
[101] Carl B. Boyer. *The Concepts of the Calculus*, New York, 1939, p 225.
[102] Robles, J. A. *Las ideas matemáticas de George Berkeley*. p 32.
[103] *Introductio in Analysin infititorum*
[104] *Institutiones calculi differentialis* publicado en 1755.
[105] SIGMA, El mundo de las Matemáticas. p 77. Tomo 1
[106] *Reflexions sur la Metaphysique du calcul infinitesimal.* Claudio Pita Ruiz, tesis de maestría. CINVESTAV.
[107] El problema de trazado de tangentes puede considerarse como un problema de la época, y fue también estudiado por métodos infinitesimales por Fermat, en 1629-1636.
[108] En el tratado titulado *The Analyst* (El Analista)
[109] *Artículos* pp 407 y 408. Grattan-Guinness. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910.
[110] Primera palabra del título en alemán de *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinita.*
[111] Boyer, C.B. *Historia de la matemática.* p567. Alianza Universidad. 1986. Cita *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie* (1767) pp 249-250.
[112] La serie de Taylor era ya conocida por Newton, Leibniz y otros. Su publicación se dio en el año de 1715.
[113] Su terminología de *función derivada* y sus notaciones *f(x)*, *f'(x)*, *f''(x)*,...tuvieron gran aceptación entre la comunidad matemática.
[114] I. Grattan-Guinness, Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Alianza Editorial. citando a *Nouveaux mémoires de l'Académic Royale des Sciences, Arts et Belles-Lettres.*(1784; publ. 1786) pp 12 y 13.
[115] *Exposition élèmentaire*, p 6. Carl Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, p 255.
[116] *Traité du calcul*, III p 389. Carl Boyer, *The history of the calculus and his conceptual development*, p 265.
[117] Cajori, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions*, pp 270-271. Carl Boyer, *The history of the calculus and his conceptual development*, p 266.
[118] Struik, D. J. *Historia Concisa de las Matemáticas*.p.204.I. P. N. México. 1994.
[119] Bergman, H. *Das Philosophische Werk Bernard Bolzano*, Halle, 1909. Citado por Florian Cajori, *A history of mathematics*, p 368.
[120] Grattan-Guinness, I. *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann.* Cambridge: MIT. p 58.
[121] Como una apología a la falta de rigor, se le atribuye a D'Alembert el haber dicho "*Marcha hacia adelante y la fe vendrá a ti*". D. J. Struik. p 219. Historia Concisa de las Matemáticas. I. P. N. México. 1994.
[122] Boyer, C. B. Historia de la Matemática. p. 647. Alianza Universidad Madrid. 1986.
[123] Cauchy 1821, pp 34-35, *Works*. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann.* P 50.
[124] El término usado en lengua inglesa por Grattan-Guinness es "pure"
[125] Grattan-Guinness. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. *Cours d'analyse*. p. 4, edición 1821.
[126] Idem, p 289.
[127] Mellado, Ruiz y Blanco. (1997). Aprender a enseñar ciencias experimentales en la formación inicial de maestros. *Bodón*, 49 (3), 275-286. en atención a Porlán , 1989; Smith y Neale, 1991.
[128] E. T. Bell. *Historia de las Matemáticas.* p 485.Fondo de Cultura Económica. México. !996.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arquímedes. (1988). *El Método*. Introducción y notas por L. Vega. México: Alianza Editorial Mexicana.

Ausubel, D. P. Novak, J. D. Hanesian. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Bell, E. T. (1985). *Historia de las Matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, C. B. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover.

Boyer, C. B. (1986) *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Bruner, J. (1986). *Acción, pensamiento y lenguaje*. México: Alianza Editorial Mexicana.

Cajori, F. (1980). *A history of mathematics*. New York: Chelsea.

Coll, C. (1990). *Desarrollo psicológico y educación*. Madrid. Alianza.

Collete, J. P. (1996). *Historia de las Matemáticas*. México: Siglo XXI.

Courant, R. John. (1988). *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. México: Limusa.

Díaz-Barriga y otros autores. (1990). *Metodología de Diseño Curricular para educación superior*. México: Trillas.

Diccionario de Matemática. (1977). Madrid: Rioduero. Ediciones.

Diccionario Enciclopédico Larousse. (1998). Colombia: Larousse.

Edwards, C. H. Jr. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlang.

Euclides. (1956). *The Elements*. New York: Dover.

Eves, H. (1976). *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Library of Congress.

Eves, H. (1983). *Great moments in mathematics after 1650*. The mathematical association of América # 7.

Gagné, R. M. (1979). *Principios básicos del aprendizaje para la instrucción*. México: Diana.

González Urbaneja, P. M. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. España: Alianza Editorial.

Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1639-1910.* Madrid: Alianza Editorial.

Grattan-Guinness, I. (1970) *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Cambridge: MIT.

Gronlund, N. E. (1965). *Medición y evaluación de la enseñanza*. México: Pax.

Guicciardini, N. (1989). *The Development of Newtonian Calculus in Britain* 1700-1800. Cambridge: University Press.

Haaser, H. B. La Salle, J. P. Sullivan, J. A. (1985). *Análisis matemático*. México: Trillas.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford: University Press.

Kline, M. (1980) *Mathematics. The Lost of Certainly.* London: Oxford University.

Lang, S. (1986) *Calculo*. México: SITESA.

Mellado, Ruiz y Blanco. (1997). Aprender a enseñar ciencias experimentales en la formación inicial de maestros. *Bodón*, 49 (3), 275-286. en atención a Porlán , 1989; Smith y Neale; 1991.

Moore, A. W. (1993). *The Infinite*. London: Honderich.

Newman. J. R.. (1994). *Sigma, el mundo de las matemáticas.* España: Grijalbo.

Ore, O. (1974). *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary.* New York: Chelsea.

Pansza González, M. (1988). Las aportaciones de Jean Piaget al análisis en el currículo. *Sobre la Universidad*, número (7), p 8.

Patterson, C. H. (1982). *Bases para una teoría de la enseñanza y psicología de la educación.* México:

Piaget, J. (1971). *Psicologia y Epistemología.* Barcelona: Ariel.

Piaget, J. (1975). *Introducción a la epistemología genética*. Buenos Aires: Paidos.

Piaget, J. García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo veintiuno editores.

Pita Ruiz V. C. de J. (1983).*Usos y fundamentos de los infinitésimos en el siglo XVIII.* México: Tesis de maestría. CINVESTAV. No publicada.

Robles, J. A. (1993). *Las ideas matemáticas de George Berkeley*. México: U.N.A.M.

Russell, B. (1988). *Introducción a la filosofía matemática.* México: Paidos.

Struik, D. J.. (1994). *Historia concisa de las Matemáticas*. México: Instituto Politécnico Nacional.

Vygotski, (Vygotsky) L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Grijalbo.

Zellini, P. (1991). *Breve Historia del Infinito.* Madrid: Siruela.

Zorrilla Fierro, M. M. (1992). Matemáticas y Educación. Una mirada al interior de la relación. *Investigación Educativa*, reporte # 31. Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Direcciones consultadas en internet

I. *An overview of the history of mathematics.* www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/HistTopics/History_overview.html
II. *Everything You need to know about the History of Philosophy.* www.arts.ubc.ca/~irvine/eyntk1.htm#TM
III. *Mathematicians born before 1000 d.C..* to 1953 www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Indexes/1953.html
IV. *Memory, mental arithmetic and mathematics.* www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/HistTopics/Mentalarithmetic.html
V. *The rise of calculus.* www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/HistTopics/The_rise_of_calculus.html
VI. *Weil, Simone.* www.rivertext.com/simone_weil.shtml
VII. *Weyl, Hermann Klaus Hugo.* www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Weyl.html