

01174



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

2  
2ef

UN SIMULADOR NUMERICO DEL FLOJO MULTIFASICO TRIDIMENSIONAL HACIA UN POZO NATURALMENTE FRACTURADO.

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRO EN INGENIERIA PETROLERA**  
P R E S E N T A  
**AGUSTIN PATRICIO GALINDO NAVA**

ASESOR DE TESIS: DR. FERNANDO RODRIGUEZ DE LA GARZA



MEXICO, D. F.

265642

1998

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UN SIMULADOR NUMÉRICO DEL FLUJO MULTIFÁSICO  
TRIDIMENSIONAL HACIA UN POZO NATURALMENTE  
FRACTURADO.

<b><u>AGRADECIMIENTOS.</u></b>	.....	5
<b><u>RESUMEN.</u></b>	.....	8
<b><u>1. INTRODUCCIÓN.</u></b>	.....	11
<b><u>2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA.</u></b>	.....	16
2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE FLUJO.	.....	17
2.2 CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA.	.....	32
2.3 ACUÍFERO ANALÍTICO.	.....	37
<b><u>3. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES</u></b>		
<b><u>PARCIALES.</u></b>	.....	42
3.1 DISCRETIZACIÓN DEL AREA DE DRENE.	.....	43
3.2 REPRESENTACIÓN DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS.	.....	45
3.3 SOLUCIÓN DEL SISTEMA NO-LINEAL DE ECUACIONES (MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON).	.....	52
<b><u>4. SOLUCIÓN DEL SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES.</u></b>	.....	75
4.1 MÉTODOS DIRECTOS.	.....	76
4.1.1 ORDENAMIENTO ESTANDARD.	.....	77
4.1.2 ORDENAMIENTO D4.	.....	82
4.1.3 NSPIV, ELIMINACIÓN GAUSSIANA DE MATRICES DISPERSAS CON PIVOTEOPARCIAL.	.....	87
4.1.4 MLDU, SOLUCIÓN DE MATRICES DISPERSAS NO-SIMÉTRICAS.	.....	93

4.1.5 COMPARACIÓN ENTRE LOS ORENAMIENTOS ESTÁNDAR Y D4.	.....	97
4.1.6 MANEJO ANÁLITICO Y NUMÉRICO DE ACUÍFEROS.	.....	112
4.2 MÉTODOS ITERATIVOS.	.....	126
4.2.1 MÉTODO DE SOBRERELAJACIÓN EN LÍNEA, LSOR.	.....	127
4.2.2 MÉTODO DE SOBRERELAJACIÓN EN BLOQUE, CON UN ORDENAMIENTO D4 Y UN ALGORITMO DE BANDA, BSORB.	.....	130
4.2.3 MÉTODO DE SOBRERELAJACIÓN EN BLOQUE, CON EL MÉTODO DE SOLUCIÓN DE MATRICES DISPERSAS NO-SIMÉTRICAS, MLDU, BSORY.	.....	132
4.2.4 ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DEL PARÁMETRO DE SOBRERELAJACIÓN.	.....	133
4.3 COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN.	.....	136
4.3.1 CASO 1: PROBLEMA HOMOGÉNEO-ISOTRÓPICO BIDIMENSIONAL (R-Z).	.....	140
4.3.2 CASO 2: PROBLEMA HOMOGÉNEO-ISOTRÓPICO TRIDIMENSIONAL (R- $\theta$ -Z).	.....	180
4.3.3 CASO 3: PROBLEMA HETEROGÉNEO-ANISOTRÓPICO BIDIMENSIONAL (R-Z).	.....	247
4.3.4 CASO 4: PROBLEMA HETEROGÉNEO-ANISOTRÓPICO TRIDIMENSIONAL (R- $\theta$ -Z).	.....	264
<b><u>5. APLICACIÓN A UN POZO NATURALMENTE FRACTURADO.</u></b>	.....	289
5.1 APLICACIÓN TEÓRICA.	.....	290
5.2 APLICACIÓN PRÁCTICA.	.....	292

<b><u>6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.</u></b>	..... 311
<b><u>NOMENCLATURA.</u></b>	..... 316
<b><u>REFERENCIAS.</u></b>	..... 324
<b><u>APENDICE A: ECUACIÓN DE CONTINUIDAD PARA UN SISTEMA COORDENADO CILÍNDRICO.</u></b>	..... 330
<b><u>APENDICE B: APROXIMACIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO MEDIANTE EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS.</u></b>	..... 337
<b><u>APENDICE C: ACOPLAMIENTO DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA EN LAS ECUACIONES DE FLUJO EN DIFERENCIAS.</u></b>	..... 348
<b><u>APENDICE D: ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE LOS BLOQUES DE MATRIZ EN LAS ECUACIONES DE LAS FRACTURAS.</u></b>	..... 359
<b><u>APENDICE E: DEFINICIÓN DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ JACOBIANA.</u></b>	..... 371
<b><u>APENDICE F: DESCRIPCIÓN GENERAL DEL SIMULADOR NUMÉRICO.</u></b>	..... 402
<b><u>APENDICE G: ALGORITMO DE THOMAS.</u></b>	..... 412
<b><u>APENDICE H: RUTINAS PARA EL LLENADO DE LOS VECTORES MANEJADOS POR LOS MÉTODOS DIRECTOS.</u></b>	..... 415

AGRADECIMIENTOS.

Para mi compañera de la vida:

**María Graciela Carreño Mijangos**

Con todo mi amor y gracias por tu gran paciencia, apoyo y motivación para seguir adelante y emprender nuevas metas.

Para mis princesitas:

**Jessica Graciela Galindo Carreño y**

**Erica Patricia Galindo Carreño**

Con todo mi amor y que ésto sirva de ejemplo para que logren alcanzar sus metas que se fijen en la vida.

Para mi madre:

**Ignacia Nava Astudillo**

Con todo mi amor y gracias por enseñarme a luchar en la vida; a que siempre existe una luz de esperanza para el mañana.

Para mi asesor:

**Dr. Fernando J. Rodríguez de la Garza**

Gracias por su gran disposición a enseñarme y apoyarme. Para mi Ud. siempre será el ejemplo a seguir.

Para mis profesores de la DEPFI y en especial:

**Dr. Rodolfo G. Camacho Velázquez, Dr. Fernando Samaniego V., Dr. Jesús Rivera Rodríguez y Dr. Guillermo C. Domínguez Vargas.**

Gracias por su tiempo para la revisión y sugerencias de este trabajo y por hacerme sentir parte de Uds.

Para mis compañeros:

Gracias por su amistad.

Para la DEPFI:

Gracias por preocuparse siempre por darnos la mejor formación académica posible.

Para el IMP:

Gracias por el apoyo recibido.

*Brindo por los bellos momentos,  
alegres y tristes, que no volveran!.*

RESUMEN.

Se presenta la formulación y el desarrollo de un simulador numérico del flujo trifásico - tridimensional hacia un pozo petrolero, en un yacimiento naturalmente fracturado.

El simulador numérico permite estudiar el flujo simultáneo de hasta tres fases, aceite - gas - agua, en tres dimensiones en coordenadas cilíndricas,  $r-\theta-z$ . En su formulación contempla el manejo de yacimientos de gas y condensado a través de dos pseudocomponentes hidrocarburos (tipo beta modificado), además del manejo de fluidos de aceite negro o tipo beta. Se consideran los efectos viscosos, gravitacionales y capilares, así como la anisotropía y las heterogeneidades presentes en la formación. También, se incluye el manejo de un acuífero de fondo y su interacción con el yacimiento puede simularse en forma analítica, empleando el modelo de Fetkovich, ó en forma numérica. El yacimiento fracturado se concibe como un medio de doble porosidad donde el intercambio de fluidos matriz - fractura se simula mediante la extensión del modelo de Warren y Root al flujo multifásico, desarrollada por Kazemi.

El conjunto de ecuaciones diferenciales no-lineales que gobierna el proceso de flujo en el yacimiento, se resuelve numéricamente empleando una formulación totalmente implícita, mediante el método iterativo de Newton - Raphson. El sistema lineal de ecuaciones que se genera en cada iteración, se resuelve mediante una técnica especial que permite acoplar las ecuaciones de la matriz en las ecuaciones de la fractura. Esto permite reducir el tamaño del sistema de ecuaciones y resolver en forma óptima el problema.

Se hace un análisis de la eficiencia de diversas técnicas, directas e iterativas, de solución del sistema de ecuaciones

generado en cada iteración newtoniana, al aplicarlas a un problema publicado en la literatura. Las técnicas directas analizadas son los métodos NSPIV y MLDU para solución de matrices dispersas. Las técnicas iterativas comprenden métodos de sobre-relajación en línea, LSOR, y en bloque, BSOR. Tanto en los métodos directos como en los iterativos en bloque se usó la técnica de ordenamiento D4. En los métodos iterativos se implementó un algoritmo para el cálculo automático del parámetro de sobre-relajación óptimo; se discute su efecto sobre la velocidad de convergencia a la solución. También se encontró una mejor estimación inicial de la solución que permite aumentar la tolerancia a la convergencia de estos métodos iterativos y mejorar su desempeño computacional, lo cual se ve reflejado en el balance de materia.

Se presenta una aplicación del simulador a un caso , en un yacimiento naturalmente fracturado.

Finalmente, se describe el uso y las aplicaciones del simulador en la Industria Petrolera.

1. INTRODUCCION.

El flujo multifásico en yacimientos naturalmente fracturados es un problema numéricamente difícil de simular, debido a la complejidad de los fenómenos inherentes en este tipo de yacimientos, como por ejemplo, el proceso de imbibición que ocurre en los bloques de matriz en la zona invadida por agua. Estos yacimientos están constituidos como sistemas de doble porosidad, en donde una porosidad está asociada a los bloques de matriz y la otra a las fracturas. En estas últimas, se considera que son las que proporcionan la dirección preferencial del flujo de fluidos hacia el pozo, de tal manera que los fluidos fluyen de los bloques de matriz hacia el espacio de las fracturas y éstas son la que finalmente conducen a estos fluidos hacia el pozo<sup>1,5</sup>. Por tales motivos, se requieren de simuladores especializados para estudiar y definir la política de explotación óptima de este tipo de yacimientos<sup>1</sup>.

El flujo multifásico hacia un pozo, también es un problema numéricamente difícil de simular, debido a las velocidades relativamente altas que se generan en las vecindades del pozo y a los consecuentes grandes gradientes de presión y de saturación que ocurren en esa región<sup>1,2</sup>.

Estudios de estabilidad numérica de simuladores de flujo multifásico hacia un pozo<sup>3</sup>, muestran la ineficiencia de las formulaciones con bajo grado de implícitud en la simulación numérica de este problema. Se reconoce que el tratamiento explícito de las transmisibilidades en los términos de flujo y en los términos de producción es la principal fuente de inestabilidad en la solución. Este problema se ha resuelto en forma práctica empleando formulaciones semi-implícitas<sup>2,3</sup> y totalmente implícitas<sup>1,4</sup>. La

---

\* REFERENCIAS DADAS AL FINAL

formulación totalmente implícita es, desde el punto de vista numérico, la más estable y permite emplear incrementos de tiempo mayores, en la simulación, pero cuidando de que no sean tan grandes, para evitar que los errores de truncamiento también afecten la estabilidad del simulador<sup>3</sup>. Sin embargo, mayor grado de implícitud requiere un mayor esfuerzo computacional, así como de mayores recursos del sistema de cómputo.

Dada la complejidad del flujo multifásico en yacimientos naturalmente fracturados es común emplear formulaciones altamente implícitas.

De acuerdo con lo anterior, en este trabajo se presenta la formulación y el desarrollo de un simulador numérico del flujo trifásico -tridimensional hacia un pozo, en un yacimiento naturalmente fracturado, empleando una formulación totalmente implícita mediante el empleo del método iterativo de Newton-Raphson<sup>1,4</sup>.

Rigurosamente, para manejar adecuadamente el flujo de fluidos de gas y condensado, es necesario emplear un simulador numérico composicional, en el que se resuelven las ecuaciones de flujo para cada componente que constituyen las fases presentes en el yacimiento. Dado el número relativamente alto de ecuaciones en este tipo de simuladores, se requiere del uso de sistemas de cómputo de gran porte, con suficiente capacidad de almacenamiento y una alta velocidad de procesamiento, de manera que se torne práctica la simulación. Aún teniendo estos recursos, la simulación numérica composicional es costosa, por consumir bastante memoria de cómputo y tiempo de ejecución. Lo anterior, ha obligado a buscar otras técnicas que permitan manejar este tipo de fluidos de una forma más sencilla, pero con un tipo de respuesta muy similar al obtenido con

los simuladores composicionales, y con un considerable ahorro de los recursos del sistema de cómputo. Por tal motivo, uno de los objetivos de este trabajo es implementar el método desarrollado por Spivak y Dixon<sup>9</sup> y posteriormente ampliado por Coats<sup>12</sup>, para el manejo de gas y condensado a través de la extensión de las ecuaciones para el flujo de fluidos tipo beta, en donde las fases gas y aceite en el yacimiento se consideran formadas por dos pseudocomponentes hidrocarburos, gas y aceite, obtenidos después del proceso de separación en la superficie, al cual se le denominó tipo beta modificado.

Por otra parte, la mayoría de los yacimientos están asociados a grandes extensiones de agua de fondo. La entrada de agua de fondo al yacimiento puede representarse numérica o analíticamente. La representación numérica forma parte integral de la solución numérica del problema, en donde se considera que el espesor total de la región drenada por el pozo está constituido por una fracción impregnada de hidrocarburos y otra asociada al acuífero. Esta forma de representar al acuífero repercute en un aumento en el número celdas de cálculo, las celdas de la región del acuífero, incrementando el tiempo de ejecución y la memoria de cómputo requeridos. En la representación analítica se requiere acoplar el modelo del acuífero al modelo numérico, en cada etapa de tiempo. Esto elimina las celdas del acuífero, reduciendo el tiempo de ejecución y la memoria de cómputo. Para modelar analíticamente el acuífero se empleó el método de Fetkovich<sup>10</sup>, que permite representar de forma simple, sin necesidad de superposición en tiempo, la entrada de agua al yacimiento.

Uno de los aspectos más importantes en un simulador

numérico de yacimientos es la solución de los sistemas de ecuaciones lineales, generados en cada etapa de tiempo. Normalmente ahí se consume la mayor parte del tiempo de cómputo y esto consecuentemente determina la eficiencia del simulador<sup>21,27</sup>.

Los métodos de solución para estos sistemas de ecuaciones lineales se dividen básicamente en dos grandes grupos: los métodos directos y los iterativos. Los métodos directos se emplean generalmente para resolver eficientemente sistemas de ecuaciones pequeños o medianos<sup>21</sup>, debido a que los requerimientos del sistema de cómputo, memoria y tiempo de ejecución, están en relación directa con el número de incógnitas que se resuelven simultáneamente. Entre mayor es este número, mayores son los requerimientos del sistema y la eficiencia disminuye drásticamente, por lo que es necesario recurrir a los métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones grandes<sup>15</sup>. El grado de efectividad de los métodos iterativos se ve afectado por el grado de heterogeneidad y anisotropía del yacimiento, provocando problemas de convergencia.

Es de particular importancia para el problema que nos ocupa, estudiar la aplicación de métodos directos para matrices dispersas<sup>22,23</sup> y de métodos iterativos de sobrerelajación, en línea o en bloque<sup>15,26,28,29</sup>, así como la implementación de algoritmos de ordenamiento<sup>21</sup> para optimizar la solución de los sistemas de ecuaciones lineales, y para la determinación del valor óptimo del parámetro de sobrerelajación<sup>15</sup>.

## 2. FORMULACION MATEMATICA DEL PROBLEMA.

En este capítulo se presenta el desarrollo de las ecuaciones de flujo trifásico-tridimensional hacia un pozo petrolero, en un yacimiento naturalmente fracturado. El yacimiento fracturado se concibe como un medio de doble porosidad, en donde las fracturas constituyen un medio continuo y los bloques de matriz un medio discontinuo<sup>8</sup>. Los fluidos que se consideran son: de aceite negro, de gas y condensado y de aceite volátil, a través de dos pseudocomponentes hidrocarburos. También, se toman en cuenta los efectos viscosos, gravitacionales y capilares en el flujo, la anisotropía y las heterogeneidades presentes en la formación, así como la entrada de agua de un acuífero de fondo.

## 2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE FLUJO.

La ecuación fundamental del flujo multifásico composicional isotérmico en un medio poroso, se obtiene al combinar una ecuación de conservación de masa para cada componente, que constituyen las fases, una ecuación de movimiento y una ecuación de estado para cada fase, y de constantes de equilibrio termodinámico entre fases para cada componente. La ecuación de conservación se obtiene al realizar un balance másico de cada componente, en un volumen de control, representativo del sistema. En la Fig. 2.1 se presenta el sistema de estudio en cuestión. La ecuación de conservación de masa del componente  $i$  para el medio continuo, fracturas, en un sistema coordenado cilíndrico,  $r-\theta-z$ , es<sup>xx</sup> (ver Apéndice A):

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( C_{10} \rho_o v_{o_r} + C_{1g} \rho_g v_{g_r} + C_{1w} \rho_w v_{w_r} \right) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( C_{10} \rho_o v_{o_\theta} + \right. \right.$$

xx NOMENCLATURA DADA AL FINAL.

# Sistema Coordenado Cilíndrico ( $r-\theta-z$ )

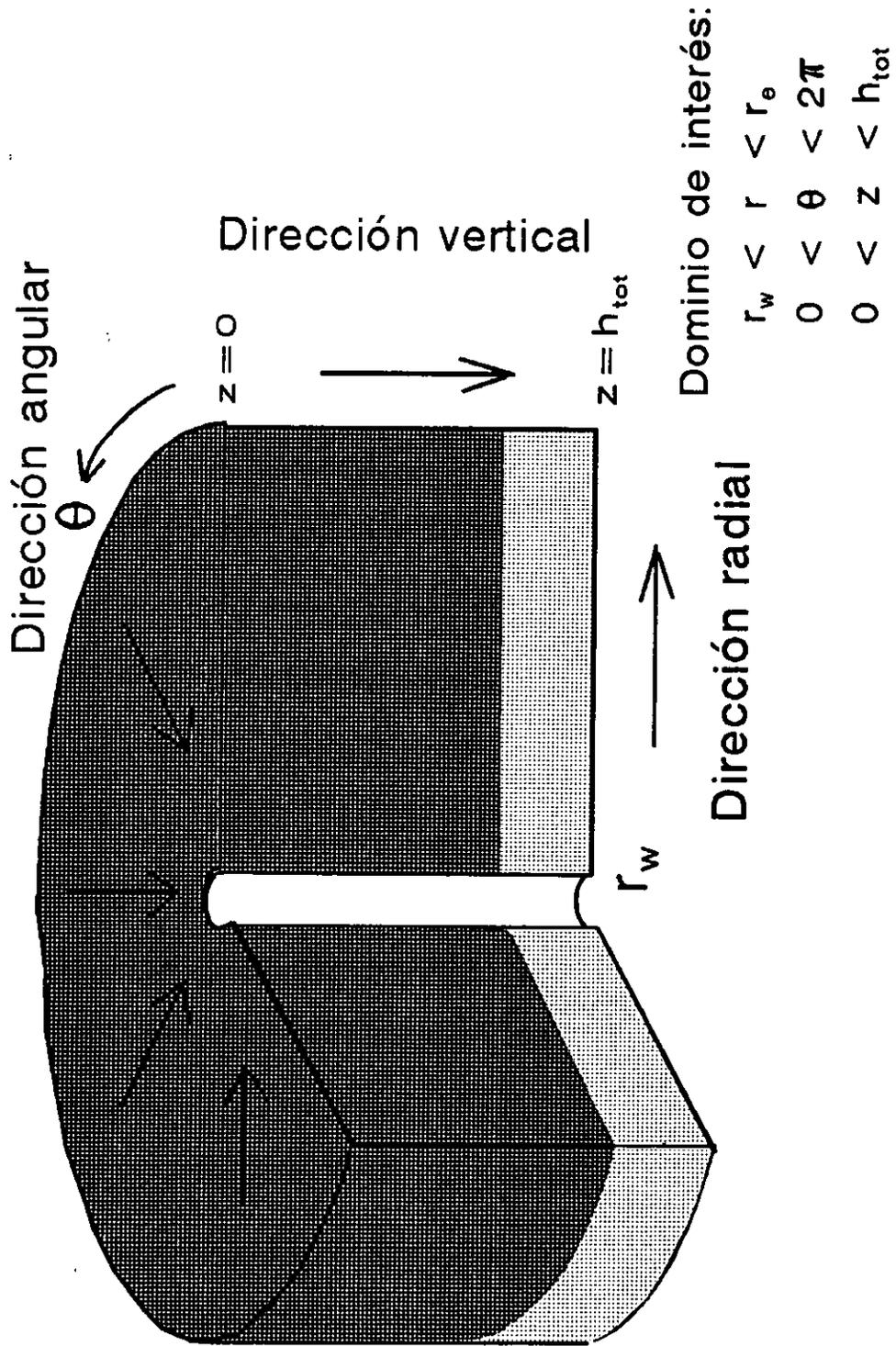


Fig. 2.1 Area de drene de un pozo.

$$\begin{aligned}
& \left. C_{1g}\rho_g v_{g\theta} + C_{1w}\rho_w v_{w\theta} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( C_{1o}\rho_o v_{oz} + C_{1g}\rho_g v_{gz} + C_{1w}\rho_w v_{wz} \right) \right] + \left( C_{1o}q_o^* \right. \\
& \left. + C_{1g}q_g^* + C_{1w}q_w^* \right)_{mf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \phi \left( C_{1o}\rho_o S_o + C_{1g}\rho_g S_g + C_{1w}\rho_w S_w \right) \right] \quad \dots (2.1)
\end{aligned}$$

i=1, 2, \dots, Nc

donde  $q_{omf}^*$ ,  $q_{gmf}^*$  y  $q_{wmf}^*$  representan los gastos másicos por unidad de volumen de roca a que se transfieren entre matriz y fractura las fases aceite, gas y agua, respectivamente.

La ecuación de movimiento empleada es la Ley de Darcy para cada fase, aplicada a este mismo sistema coordenado, en donde se considera que el eje z coincide con la dirección vertical de flujo. La velocidad del fluido en las diversas direcciones está dada como sigue:

Para la dirección radial:

$$v_{r_r} = - \frac{k_h k_{rf}}{\mu_r} \frac{\partial P_r}{\partial r} \quad \dots (2.2)$$

para la dirección angular:

$$v_{r_\theta} = - \frac{1}{r} \frac{k_\theta k_{rf}}{\mu_r} \frac{\partial P_r}{\partial \theta} \quad \dots (2.3)$$

y para la dirección vertical:

$$v_{r_z} = - \frac{k_v k_{rf}}{\mu_r} \left( \frac{\partial P_r}{\partial z} - \gamma_r \right) \quad \dots (2.4)$$

f=o, g, w

Substituyendo las Ecs. 2.2 a 2.4 en la Ec. 2.1, se obtiene la ecuación del flujo multifásico composicional, ésta es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( C_{1o}\rho_o \frac{k_h k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial P_o}{\partial r} + C_{1g}\rho_g \frac{k_h k_{rg}}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial r} + C_{1w}\rho_w \frac{k_h k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial P_w}{\partial r} \right) \right]$$

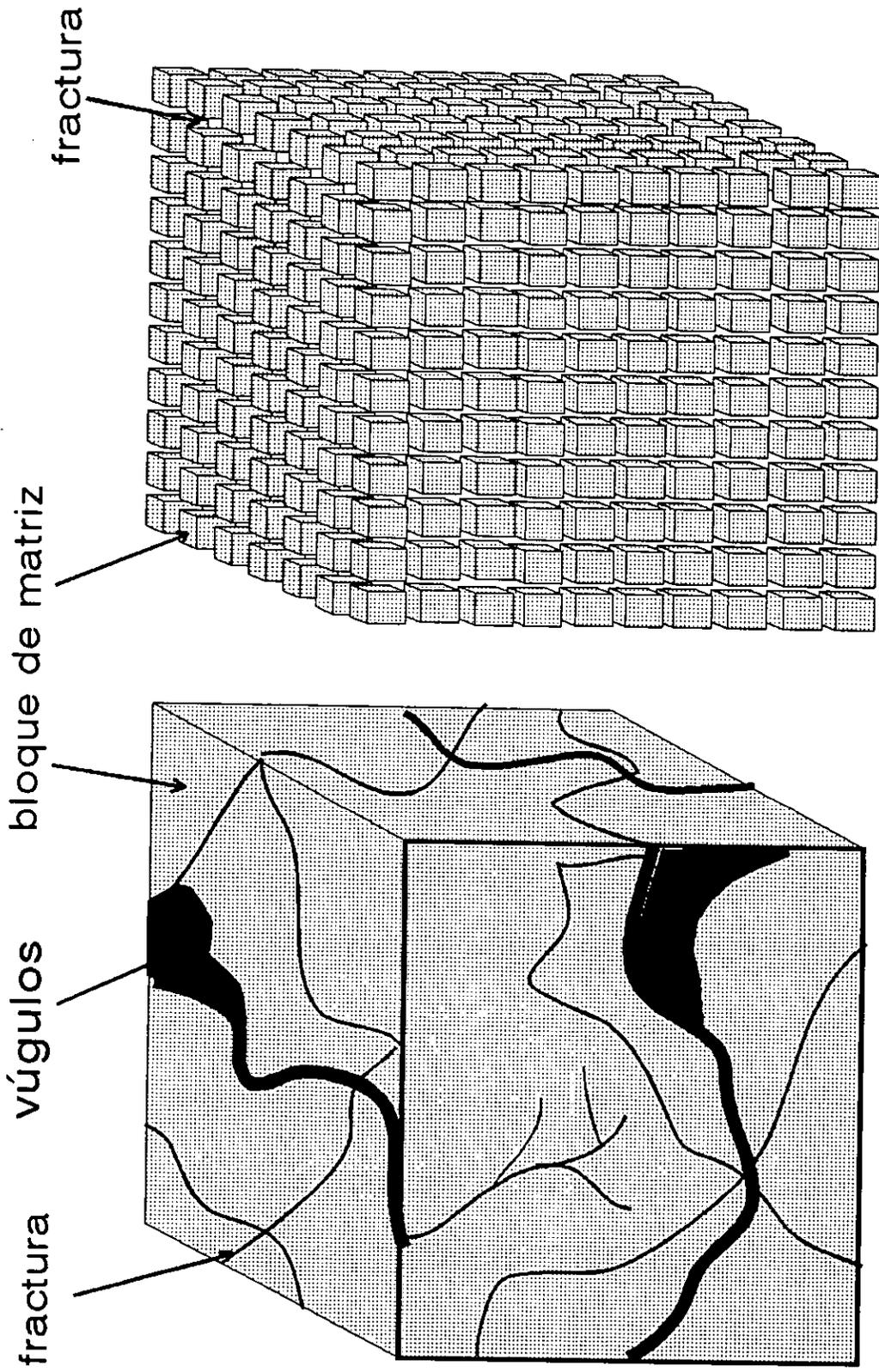
$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ C_{10}\rho_o \frac{k_\theta k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial P_o}{\partial \theta} + C_{1g}\rho_g \frac{k_\theta k_{rg}}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial \theta} + C_{1w}\rho_w \frac{k_\theta k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial P_w}{\partial \theta} \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial z} \left[ C_{10}\rho_o \frac{k_v k_{ro}}{\mu_o} \left( \frac{\partial P_o}{\partial z} - \gamma_o \right) + C_{1g}\rho_g \frac{k_v k_{rg}}{\mu_g} \left( \frac{\partial P_g}{\partial z} - \gamma_g \right) + C_{1w}\rho_w \frac{k_v k_{rw}}{\mu_w} \left( \frac{\partial P_w}{\partial z} - \gamma_w \right) \right] \\
& + \left( C_{10}q_o^* + C_{1g}q_g^* + C_{1w}q_w^* \right)_{mf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \phi \left( C_{10}\rho_o S_o + C_{1g}\rho_g S_g + C_{1w}\rho_w S_w \right) \right] \dots (2.5) \\
& \qquad \qquad \qquad i=1, 2, \dots, N_c
\end{aligned}$$

Como se mencionó previamente, el yacimiento fracturado se representa como un sistema de doble porosidad, las fracturas que conforman un medio continuo de alta permeabilidad y baja capacidad almacenadora, y los bloques de matriz que conforman un medio discontinuo de baja permeabilidad y alta capacidad almacenadora, que actúan como términos fuentes y/o sumideros en las fracturas<sup>6</sup>. Lo anterior implica que las fracturas sean las fronteras de los bloques de matriz<sup>5</sup>. La Fig.2.2 muestra una idealización del medio fracturado, propuesta por Warren y Root<sup>8</sup>.

De acuerdo con esto, la ecuación de conservación del componente *i* en el medio discontinuo, bloques de matriz, es:

$$\begin{aligned}
- \left( C_{10}q_o^* + C_{1g}q_g^* + C_{1w}q_w^* \right)_{mf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \phi \left( C_{10}\rho_o S_o + C_{1g}\rho_g S_g + C_{1w}\rho_w S_w \right) \right]_{mf} \dots (2.6) \\
\qquad \qquad \qquad i=1, 2, \dots, N_c
\end{aligned}$$

En el desarrollo de las ecuaciones del flujo multifásico, gas-aceite-agua, tanto en las fracturas como en los bloques de matriz, se consideran los efectos viscosos, gravitacionales y capilares, así como la anisotropía y heterogeneidades presentes en el medio poroso fracturado. La transferencia de fluidos matriz-fractura está basada en una extensión de la teoría de Warren y Root para flujo multifásico, desarrollada por Kazemi<sup>5</sup>; estos son:



Elemento representativo de un yacimiento naturalmente fracturado

Elemento representativo idealizado del yacimiento naturalmente fracturado

Fig. 2.2 Idealización del medio fracturado

$$q_{omf}^* = \sigma k_{hm} \rho_o \frac{k_{rom}}{\mu_{om}} (P_{om} - P_o) \quad \dots\dots (2.7)$$

$$q_{gmf}^* = \sigma k_{hm} \rho_g \frac{k_{rgm}}{\mu_{gm}} (P_{gm} - P_g) \quad \dots\dots (2.8)$$

$$q_{wmf}^* = \sigma k_{hm} \rho_w \frac{k_{rwm}}{\mu_{wm}} (P_{wm} - P_w) \quad \dots\dots (2.9)$$

Las propiedades de densidad y viscosidad de cada fase, son funciones de presión y composición de esa fase, es decir:

$$\begin{aligned} \rho_o &= \rho_o(P_o, C_{1,o}, C_{2,o}, \dots, C_{Nc,o}) \\ \rho_g &= \rho_g(P_g, C_{1,g}, C_{2,g}, \dots, C_{Nc,g}) \\ \rho_w &= \rho_w(P_w, C_{1,w}, C_{2,w}, \dots, C_{Nc,w}) \\ \mu_o &= \mu_o(P_o, C_{1,o}, C_{2,o}, \dots, C_{Nc,o}) \\ \mu_g &= \mu_g(P_g, C_{1,g}, C_{2,g}, \dots, C_{Nc,g}) \\ \mu_w &= \mu_w(P_w, C_{1,w}, C_{2,w}, \dots, C_{Nc,w}) \end{aligned} \quad \dots (2.10)$$

y las permeabilidades relativas de cada fase son funciones de saturación, ésto es:

$$\begin{aligned} k_{ro} &= k_{ro}(S_g, S_w) \\ k_{rg} &= k_{rg}(S_g) \\ k_{rw} &= k_{rw}(S_w) \end{aligned} \quad \dots (2.11)$$

De acuerdo con la Ec. 2.5, se tienen  $N_c$  ecuaciones diferenciales en las fracturas con las siguientes incógnitas o variables primarias:  $P_o, P_g, P_w, S_o, S_g, S_w, C_{1,o}, C_{2,o}, \dots, C_{Nc,o}, C_{1,g}, C_{2,g}, \dots, C_{Nc,g}, C_{1,w}, C_{2,w}, \dots, C_{Nc,w}$ , por lo que se tienen  $3N_c + 6$  incógnitas. Es necesario entonces especificar  $2N_c + 6$

ecuaciones más.

Estas ecuaciones adicionales son:

-Relaciones de presión capilar:

$$P_{cgo}(S_g) = P_g - P_o \quad \dots (2.12)$$

$$P_{cwo}(S_w) = P_o - P_w \quad \dots (2.13)$$

-Relación de saturaciones y de componentes másicos:

$$S_o + S_g + S_w = 1 \quad \dots (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} C_{i,o} = 1 \quad \dots (2.15)$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} C_{i,g} = 1 \quad \dots (2.16)$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} C_{i,w} = 1 \quad \dots (2.17)$$

-Relaciones de equilibrio de fases:

$$\frac{C_{i,g}}{C_{i,o}} = K_{i,g,o} \left( P_o, P_g, C_{1,o}, C_{2,o}, \dots, C_{N_c,o}, C_{1,g}, C_{2,g}, \dots, C_{N_c,g} \right) \quad \dots (2.18)$$

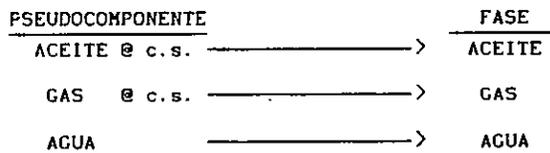
$$\frac{C_{i,g}}{C_{i,w}} = K_{i,g,w} \left( P_g, P_w, C_{1,g}, C_{2,g}, \dots, C_{N_c,g}, C_{1,w}, C_{2,w}, \dots, C_{N_c,w} \right) \quad \dots (2.19)$$

$i = 1, 2, \dots, N_c$

con lo que queda matemáticamente bien definido el problema del flujo multifásico composicional a través de las fracturas.

De acuerdo con la Ec. 2.6 se tienen  $N_c$  ecuaciones diferenciales en los bloques de matriz con las mismas incógnitas y ecuaciones adicionales que para las fracturas (Ecs 2.12-2.17), pero ahora actuando en este medio discontinuo.

La Ec. 2.5 es una ecuación general que permite manejar yacimientos de aceite negro, de gas, de gas y condensado y de aceite volátil, pero requiere de un mayor esfuerzo computacional para su solución, tanto de programación como de los recursos del sistema de cómputo, que una ecuación similar para estos mismos fluidos desarrollada por Spivak y Dixon<sup>9</sup>, y ampliada posteriormente por Coats<sup>12</sup>, denominado **MODELO DE ACEITE NEGRO EXTENDIDO**, en donde se tienen únicamente tres pseudocomponentes que constituyen las tres fases presentes en el yacimiento: dos pseudocomponentes hidrocarburos para las fases gas y aceite y un pseudocomponente para la fase agua. Los dos pseudocomponentes que constituyen las fases gas y aceite en el yacimiento son el gas y el aceite obtenidos en superficie en la salida de los separadores. Esto último está representado esquemáticamente como:



En este modelo de aceite negro extendido, se establece que las fases están en equilibrio termodinámico en todo momento y en cualquier punto del yacimiento. Existe intercambio másico de los pseudocomponentes hidrocarburos entre las fases aceite y gas, mientras que la fase agua no intercambia masa con las otras dos fases. La idea principal de este modelo, es que el gas contiene líquido como función únicamente de la presión. Se asume que la composición del líquido permanece constante. De esta manera, tanto la viscosidad como la compresibilidad de la fase líquida son exclusivamente funciones de presión.

Se ha observado, que en algunos yacimientos de gas y

condensado el líquido retrogrado es inmóvil por lo que su viscosidad no es importante y que también, la variación de la composición de este líquido no tiene un efecto significativo en su compresibilidad. Por lo anterior, se justifica, desde un punto de vista volumétrico y de flujo, la suposición de una composición constante del líquido retrogrado<sup>9</sup>.

Análogamente al término de la relación de solubilidad de la fase gas en la fase aceite,  $R_s$ , definido como:

$$R_s = \frac{V_g \text{ ec.s.}}{V_o \text{ ec.s.}} = \frac{m_g \rho_o \text{ ec.s.}}{m_o \rho_g \text{ ec.s.}} \quad \dots (2.20)$$

en la ecuación del gas al considerar el flujo de fluidos de aceite negro, se tiene un término similar definido como la relación de solubilidad de la fase aceite en la fase gas,  $r_s$ , el cual está dado como:

$$r_s = \frac{V_o \text{ ec.s.}}{V_g \text{ ec.s.}} = \frac{m_o \rho_g \text{ ec.s.}}{m_g \rho_o \text{ ec.s.}} \quad \dots (2.21)$$

en la ecuación del aceite, al manejar el flujo de fluidos de gas y condensado o de aceite volátil, para representar adecuadamente la transferencia de masa entre las fases gas y aceite<sup>12</sup>.

Ahora bien, la ecuación de estado para cada fase se obtiene a partir de la fracción másica de los pseudocomponentes en cada fase. Esta ecuación de estado representa las propiedades del fluido a diferentes condiciones de presión, volumen y temperatura<sup>11</sup>.

Considerando un sistema isotérmico, las fracciones másicas del pseudocomponente ACEITE en cada una de las fases, ACEITE, GAS y AGUA, está dada como:

Para la fase ACEITE,

$$C_{oo} = \frac{m_o}{m_o + m_g} \quad \dots (2.22)$$

y de acuerdo con la definición del factor de volumen de la fase ACEITE, dado como:

$$B_o = \frac{V_o}{V_o \text{ ec. s.}} = \frac{(m_o + m_g)}{m_o} \frac{\rho_o \text{ ec. s.}}{\rho_o} \quad \dots (2.23)$$

se tiene que:

$$C_{oo} = \frac{\rho_o \text{ ec. s.}}{\rho_o B_o} \quad \dots (2.24)$$

Para la fase GAS,

$$C_{og} = \frac{m_o}{m_g} \quad \dots (2.25)$$

y de acuerdo con la Ec. 2.21 y con la definición del factor de volumen de la fase GAS, dado como:

$$B_g = \frac{V_g}{V_g \text{ ec. s.}} = \frac{m_g}{m_g} \frac{\rho_g \text{ ec. s.}}{\rho_g} \quad \dots (2.26)$$

se tiene que:

$$C_{og} = \frac{\rho_o \text{ ec. s.}}{\rho_g B_g} r_s \quad \dots (2.27)$$

Y para la fase AGUA,

$$C_{ow} = 0 \quad \dots (2.28)$$

La fracción másica del pseudocomponente GAS en cada una de las fases está dadas como:

Para la fase ACEITE,

$$C_{go} = \frac{m_g}{m_o + m_g} \quad \dots (2.29)$$

y de acuerdo con las Ecs. 2.20 y 2.23 se tiene que:

$$C_{go} = \frac{\rho_g \text{ ec. s.}}{\rho_o B_o} R_S \quad \dots (2.30)$$

Para la fase GAS,

$$C_{gg} = \frac{m_g}{m_g} \quad \dots (2.31)$$

y de acuerdo con la Ec. 2.26 se tiene que:

$$C_{gg} = \frac{\rho_g \text{ @c. s.}}{\rho_g B_g} \quad \dots (2.32)$$

Y para la fase AGUA,

$$C_{gw} = 0 \quad \dots (2.33)$$

La fracción másica del pseudocomponente AGUA en cada una de las tres fases está dada como:

Para la fase ACEITE,

$$C_{wo} = 0 \quad \dots (2.34)$$

Para la fase GAS,

$$C_{wg} = 0 \quad \dots (2.35)$$

Y para la fase AGUA,

$$C_{ww} = \frac{m_w}{m_w} \quad \dots (2.36)$$

y de acuerdo con la definición del factor de volumen de la fase AGUA, dado como:

$$B_w = \frac{V_w}{V_w \text{ @c. s.}} = \frac{m_w}{m_w} \frac{\rho_w \text{ @c. s.}}{\rho_w} \quad \dots (2.37)$$

se tiene que:

$$C_{ww} = \frac{\rho_w \text{ @c. s.}}{\rho_w B_w} \quad \dots (2.38)$$

Substituyendo las Ecs. 2.24, 2.30 y 2.34 en la Ec. 2.15, se obtiene la ecuación de estado para la fase ACEITE, esto es:

$$C_{oo} + C_{go} + C_{wo} = \frac{\rho_o \text{ @c. s.}}{\rho_o B_o} + \frac{\rho_g \text{ @c. s.}}{\rho_o B_o} R_s + 0 = 1 \quad \dots (2.39)$$

de aquí que:

$$\rho_o = \frac{\rho_o \text{ ec. s.} + \rho_g \text{ ec. s. } R_S}{B_o} \quad \dots(2.40)$$

Substituyendo las Ecs. 2.27, 2.32 y 2.35 en la Ec. 2.16, se obtiene la ecuación de estado para la fase GAS, esto es:

$$C_{og} + C_{gg} + C_{wg} = \frac{\rho_o \text{ ec. s.}}{\rho_g B_g} r_s + \frac{\rho_g \text{ ec. s.}}{\rho_g B_g} + 0 = 1 \quad \dots(2.41)$$

de aquí que:

$$\rho_g = \frac{\rho_g \text{ ec. s.} + \rho_o \text{ ec. s. } r_s}{B_g} \quad \dots(2.42)$$

Y substituyendo las Ecs. 2.28, 2.33 y 2.39 en la Ec. 2.17, se obtiene la ecuación de estado para la fase AGUA, esto es:

$$C_{ow} + C_{gw} + C_{ww} = 0 + 0 + \frac{\rho_w \text{ ec. s.}}{\rho_w B_w} = 1 \quad \dots(2.43)$$

de aquí que:

$$\rho_w = \frac{\rho_w \text{ ec. s.}}{B_w} \quad \dots(2.44)$$

Ahora bien, de acuerdo con las consideraciones anteriores y substituyendo las fracciones másicas de los pseudocomponentes ACEITE, GAS y AGUA en las Ecs. 2.5 y 2.6, se obtienen las ecuaciones de flujo que constituyen el **MODELO DE ACEITE NEGRO EXTENDIDO** hacia un pozo, en un yacimiento naturalmente fracturado, éste es:

En las **FRACTURAS**:

Para el pseudocomponente **ACEITE**, substituyendo las Ecs. 2.24, 2.27 y 2.28 en la Ec. 2.5 y dividiendo a la ecuación resultante entre  $\rho_o$  ec. s., se tiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r k_h \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial P_o}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ k_\theta \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial P_o}{\partial \theta} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \left\{ k_v \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \left( \frac{\partial P_o}{\partial z} - \gamma_o \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r k_h \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} r_s \frac{\partial P_g}{\partial r} \right\} + \\
& \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ k_\theta \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} r_s \frac{\partial P_g}{\partial \theta} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ k_v \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} r_s \left( \frac{\partial P_g}{\partial z} - \gamma_g \right) \right\} + \\
& \sigma k_{hm} \frac{b_{om} k_{rom}}{\mu_{om}} (P_{om} - P_o) + \sigma k_{hm} \frac{b_{gm} k_{rgm}}{\mu_{gm}} r_{sm} (P_{gm} - P_g) \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi b_o s_o + \phi b_g r_s s_g \right) \quad \dots (2.45)
\end{aligned}$$

Para el pseudocomponente **GAS**, substituyendo las Ecs. 2.30, 2.32 y 2.33 en la Ec. 2.5 y dividiendo a la ecuación resultante entre  $\rho_g$  e.c.s., se tiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r k_h \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ k_\theta \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial \theta} \right\} + \\
& \frac{\partial}{\partial z} \left\{ k_v \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} \left( \frac{\partial P_g}{\partial z} - \gamma_g \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r k_h \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} r_s \frac{\partial P_o}{\partial r} \right\} + \\
& \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ k_\theta \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} r_s \frac{\partial P_o}{\partial \theta} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ k_v \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} r_s \left( \frac{\partial P_o}{\partial z} - \gamma_o \right) \right\} + \\
& \sigma k_{hm} \frac{b_{gm} k_{rgm}}{\mu_{gm}} (P_{gm} - P_g) + \sigma k_{hm} \frac{b_{om} k_{rom}}{\mu_{om}} r_{sm} (P_{om} - P_o)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi b_g S_g + \phi b_o R_s S_o \right) \quad \dots (2.46)$$

Para el pseudocomponente **AGUA**, substituyendo las Ecs. 2.34, 2.35 y 2.38 en la Ec. 2.5 y dividiendo a la ecuación resultante entre  $\rho_w$  ec.s., se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r k_h \frac{b_w k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial P_w}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ k_\theta \frac{b_w k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial P_w}{\partial \theta} \right\} + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left\{ k_v \frac{b_w k_{rw}}{\mu_w} \left( \frac{\partial P_w}{\partial z} - \gamma_w \right) \right\} + \sigma k_{hm} \frac{b_{wm} k_{rwm}}{\mu_{wm}} (P_{wm} - P_w) \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi b_w S_w \right) \quad \dots (2.47) \end{aligned}$$

y en los **BLOQUES DE MATRIZ**:

Para el pseudocomponente **ACEITE**, substituyendo las Ecs. 2.24, 2.27 y 2.28 en la Ec. 2.6 y dividiendo a la ecuación resultante entre  $\rho_o$  ec.s., se tiene:

$$\begin{aligned} & - \sigma k_{hm} \frac{b_{om} k_{rom}}{\mu_{om}} (P_{om} - P_o) - \sigma k_{hm} \frac{b_{gm} k_{rgm}}{\mu_{gm}} r_{sm} (P_{gm} - P_g) \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi_m b_{om} S_{om} + \phi_m b_{gm} r_{sm} S_{gm} \right) \quad \dots (2.48) \end{aligned}$$

Para el pseudocomponente **GAS**, substituyendo las Ecs. 2.30, 2.32 y 2.33 en la Ec. 2.6 y dividiendo a la ecuación resultante entre  $\rho_g$  ec.s., se tiene:

$$- \sigma k_{hm} \frac{b_{gm} k_{rgm}}{\mu_{gm}} (P_{gm} - P_g) - \sigma k_{hm} \frac{b_{om} k_{rom}}{\mu_{om}} R_{sm} (P_{om} - P_o)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi_m b_{gm} S_{gm} + \phi_m b_{om} R_{sm} S_{om} \right) \quad \dots (2.49)$$

Y para el pseudocomponente **AGUA**, substituyendo las Ecs. 2.34, 2.35 y 2.38 en la Ec. 2.6 y dividiendo a la ecuación resultante entre  $\rho_w$  ec.s., se tiene:

$$- \sigma k_{hm} \frac{b_{wm} k_{rwm}}{\mu_{wm}} \left( P_{wm} - P_w \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi_m b_{wm} S_{wm} \right) \quad \dots (2.50)$$

$$\begin{aligned} &\text{para } r_w < r < r_e \\ &0 < \theta < 2\pi \\ &0 < z < h_{\text{ror}} \\ &t > 0 \end{aligned}$$

donde  $b_r = \frac{1}{B_r}$ ,  $r = o, g, w$ .

El término  $\sigma k_{hm} \frac{b_{fm} k_{rfm}}{\mu_{fm}} \left( P_{fm} - P_f \right)$  representa el intercambio de flujo entre las fracturas y los bloques de matriz. Este término actúa, en las ecuaciones de las fracturas, como un término fuente y/o sumidero, en todo el dominio y tiempo del problema<sup>4</sup>. Por lo que, con excepción de este término, las ecuaciones de las fracturas son las mismas que se encuentran en un simulador convencional para yacimientos no-fracturados<sup>6</sup>.

El coeficiente  $\sigma$  es un factor geométrico que considera el área del bloque de matriz expuesta al intercambio de fluidos matriz-fractura por unidad de volumen y una longitud característica asociada con el flujo matriz-fractura<sup>5,6,8</sup>. Para el caso de bloques de matriz en forma de paralelepípedo rectangular, este coeficiente se expresa como sigue<sup>5</sup>:

$$\sigma = 4 \left( \frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} + \frac{1}{L_3^2} \right) \quad \dots (2.51)$$

Las Ecs. 2.45 a 2.50 conforman un conjunto de 6 ecuaciones

un simulador numérico PVT composicional y de esta forma, obtener las propiedades PVT de los fluidos de gas y condensado a partir de estos pseudocomponentes, así como la relación de solubilidad del líquido en el gas,  $r_g$ . Una vez obtenidas las propiedades de los fluidos, éstas servirán de datos de entrada al simulador numérico del flujo multifásico hacia un pozo y de esta forma poder simular el flujo de fluidos de gas y condensado a partir de un simulador de aceite negro. En este trabajo no se presenta dicha metodología.

## 2.2 CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA.

Las ecuaciones de flujo para las fracturas y los bloques de matriz, Ecs. 2.45 a 2.50, son ecuaciones diferenciales parciales no-lineales, de segundo y primer orden, respectivamente, que junto con las condiciones iniciales de presión y de saturación de los fluidos, y las condiciones de fronteras, definen matemáticamente el problema del flujo multifásico hacia un pozo en un yacimiento naturalmente fracturado.

Inicialmente, las presiones y saturaciones son calculadas usando un procedimiento de inicialización basado en los datos de presión capilar, de los contactos gas-aceite y/o aceite-agua y en los gradientes de presión de los fluidos. Esta inicialización, asegura que todo el sistema esté en equilibrio gravitacional y capilar al tiempo cero de la explotación<sup>7,13</sup>. La Fig. 2.3 presenta este equilibrio gravitacional y capilar.

Para incluir correctamente el equilibrio gravitacional en los términos de flujo, tanto de las fracturas como de los bloques de matriz, se emplean curvas de permeabilidades relativas y de presión capilar, definidas de la siguiente forma<sup>14</sup>:

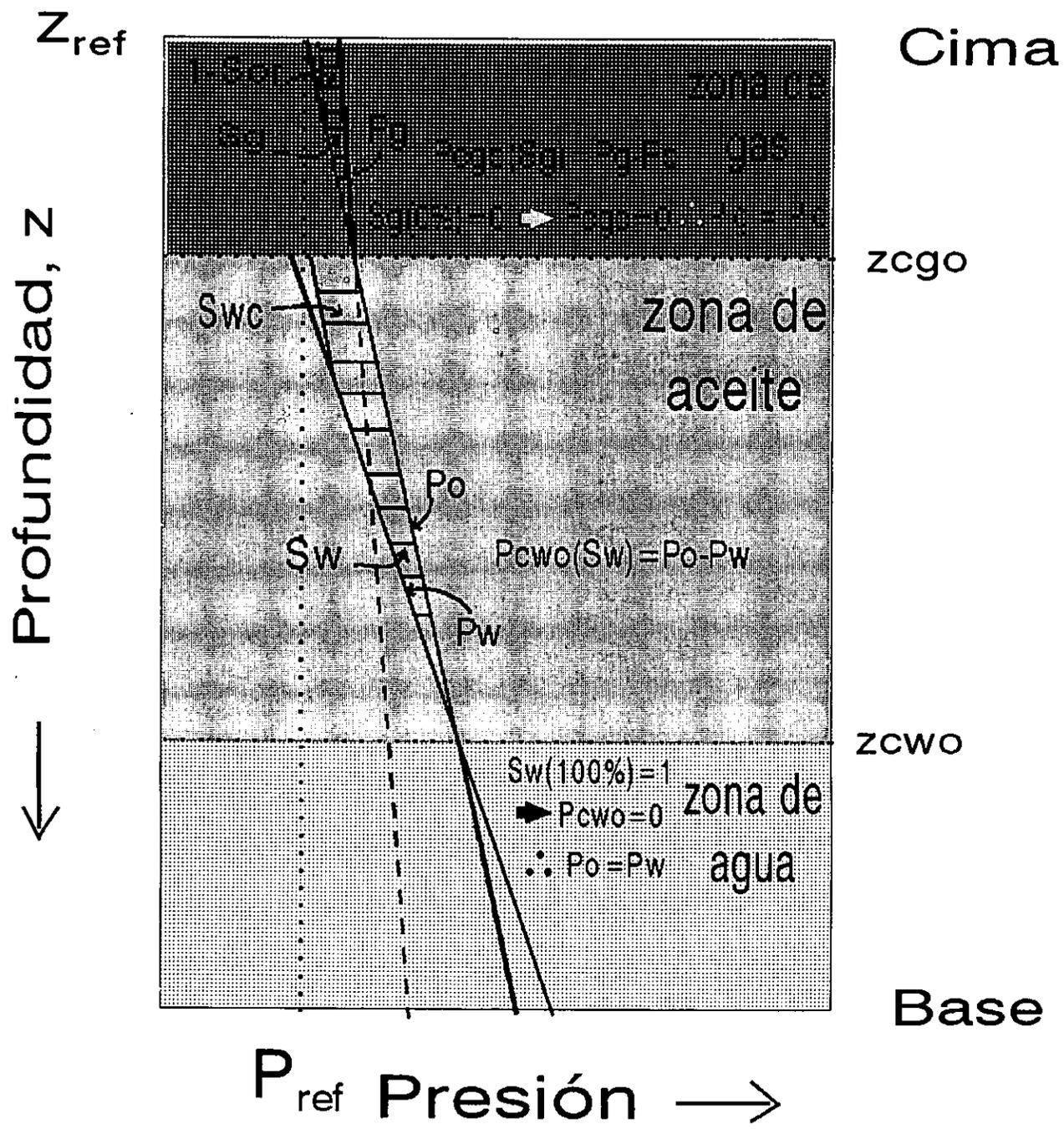


Fig. 2.3 Condiciones Iniciales en equilibrio gravitacional y capilar.

Las permeabilidades relativas en las fracturas, dependen linealmente de las saturaciones, cubriendo todo el rango de saturaciones (de 0 a 1). Mientras que, para los bloques de matriz están restringidas al rango de saturación móvil (de  $S_{wc}$  a  $1-S_{or}$ ).

El flujo a través de las fracturas es evaluado usando valores de presión capilar casi despreciables, pero cuidando que los valores de  $P_c$  correspondientes a las saturaciones inmóviles sean iguales a aquellas de las curvas de presión capilar de los bloques de matriz. Esto es necesario, para que exista equilibrio, cero flujo, entre ambos medios en las condiciones iniciales.

La Fig. 2.4 muestra esquemáticamente las curvas de permeabilidades relativas y de presión capilar para un sistema bifásico agua-aceite, para ambos medios. Se debe de emplear la curva de presión capilar en drenaje para el cálculo de estas condiciones iniciales.

De acuerdo con lo anterior, las condiciones iniciales se expresan matemáticamente de la siguiente manera<sup>1, 13</sup>:

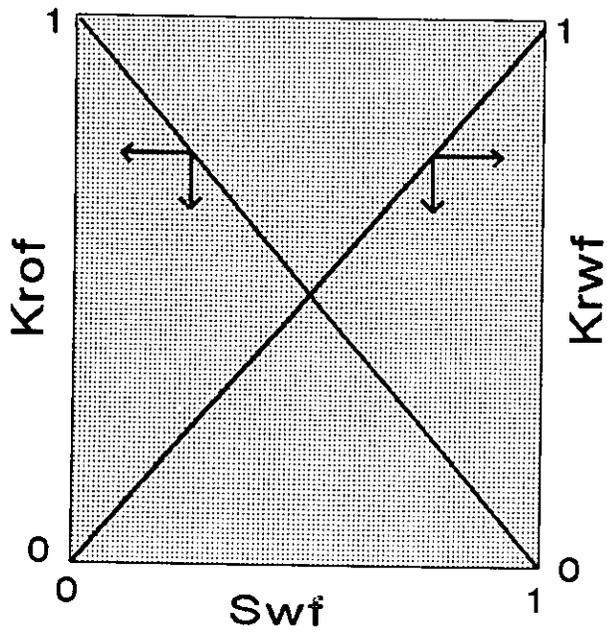
$$Pr(r, \theta, z, 0) = Pr_1(z) \quad \dots (2.55)$$

y

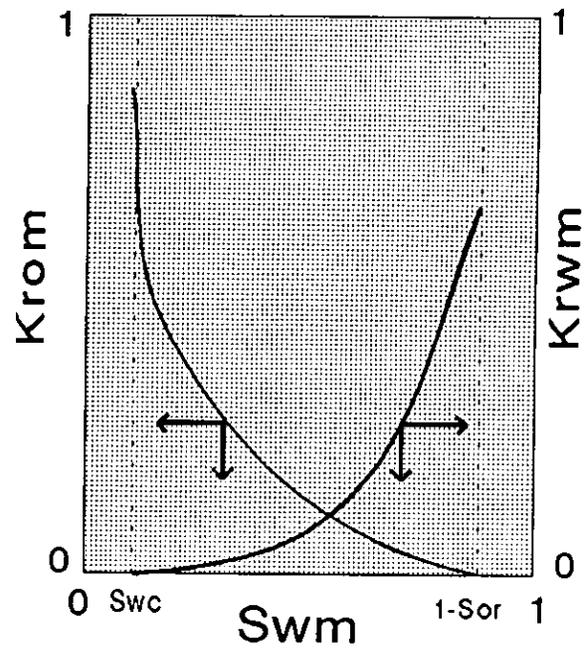
$$Sr(r, \theta, z, 0) = Sr_1(z) \quad \dots (2.56)$$

para  $f = o, g, w$

Las condiciones de frontera implican cero flujo en la dirección perpendicular a la frontera que define la región de drenaje del pozo, excepto a lo largo del intervalo disparado, en donde se manejan dos condiciones de frontera diferentes: 1) ritmo de producción de aceite o de gas especificado, y 2) presión de fondo especificada, que se usa cuando se alcanza un valor de presión de



fracturas



Bloques de matriz

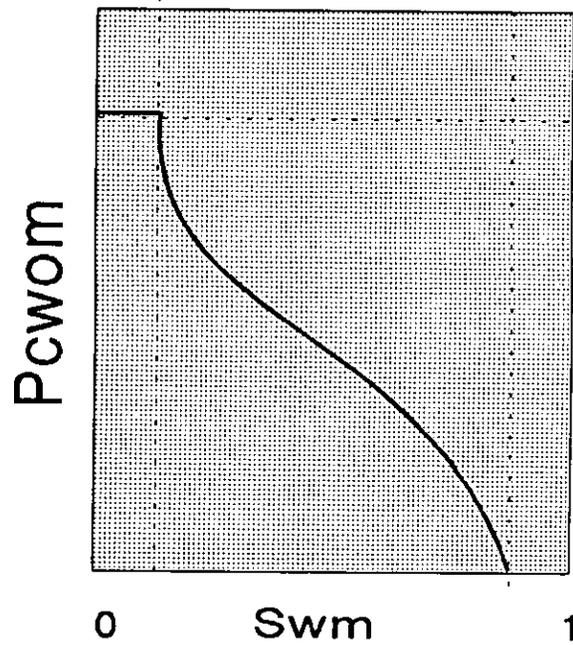
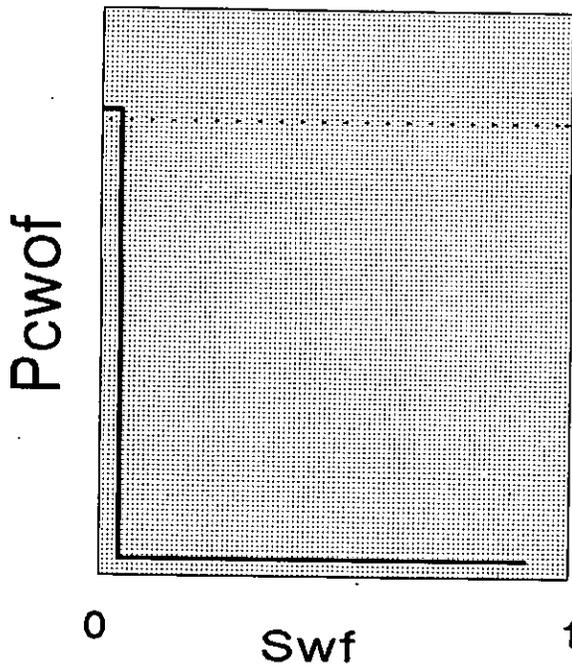


Fig. 2.4 Curvas de permeabilidades relativas y de presión capilar, en un sistema agua-aceite, para ambos medios.

fondo mínimo estipulado.

Estas condiciones de fronteras se definen matemáticamente de la siguiente manera:

En el intervalo disparado del pozo ( $z_a, z_b$ ), se puede especificar:

1.a) El gasto de producción de aceite,

$$q_o(t) = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{z_a}^{z_b} \left[ \left\{ r k_h \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial P_o}{\partial r} \right\}_{r=r_w} + \left\{ r k_h \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} r_s \frac{\partial P_g}{\partial r} \right\}_{r=r_w} \right] dz d\theta \quad \dots (2.57)$$

ó 1.b) El gasto de producción de gas,

$$q_g(t) = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{z_a}^{z_b} \left[ \left\{ r k_h \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial r} \right\}_{r=r_w} + \left\{ r k_h \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} R_s \frac{\partial P_o}{\partial r} \right\}_{r=r_w} \right] dz d\theta \quad \dots (2.58)$$

2) La presión de fondo,

$$P_p(r_w, \theta, z, t) = P_{wf}(t) \quad ; \quad \begin{matrix} z_a < z < z_b \\ \theta_a < \theta < \theta_b \end{matrix} \quad \dots (2.59)$$

Notar que para fluidos tipo beta convencionales,  $r_s = 0$  y el término

$r k_h \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} r_s \frac{\partial P_g}{\partial r}$  de la Ec. 2.57, se elimina.

Fuera del intervalo disparado, se tiene:

$$\left. \frac{\partial P_f}{\partial r} \right|_{r=r_w} = 0 \quad ; \quad \begin{matrix} \theta_a < \theta < \theta_b \\ 0 < z < z_a \\ z_b < z < h_{tot} \\ t > 0 \end{matrix} \quad \dots (2.60)$$

En la frontera externa,  $r = r_e$ , se tiene que:

$$\left. \frac{\partial P_f}{\partial r} \right|_{r=r_e} = 0 \quad ; \quad \begin{matrix} \theta_a < \theta < \theta_b \\ 0 < z < h_{tot} \\ t > 0 \end{matrix} \quad \dots (2.61)$$

En la dirección angular, se cumple la siguiente condición de continuidad, cuando la longitud de arco total es igual a  $2\pi^{15}$ :

$$\left. \frac{\partial P_f}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial P_f}{\partial \theta} \right|_{\theta=2\pi} ; \quad \begin{array}{l} r_w < r < r_e \\ 0 < z < h_{TOT} \\ t > 0 \end{array} \quad \dots (2.62)$$

O bien, cuando la longitud de arco es menor a  $2\pi$ , se manejan estas fronteras cerradas al flujo, esto es:

$$\left. \frac{\partial P_f}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_a} = 0 ; \quad \begin{array}{l} r_w < r < r_e \\ 0 < z < h_{TOT} \\ t > 0 \end{array} \quad \dots (2.63)$$

y

$$\left. \frac{\partial P_f}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_b} = 0 ; \quad \begin{array}{l} r_w < r < r_e \\ 0 < z < h_{TOT} \\ t > 0 \end{array} \quad \dots (2.64)$$

Y en la cima y en la base de la formación, se tiene:

$$\left. \frac{\partial \Phi_f}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 ; \quad \begin{array}{l} \theta_a < \theta < \theta_b \\ r_w < r < r_e \\ t > 0 \end{array} \quad \dots (2.65)$$

y

$$\left. \frac{\partial \Phi_f}{\partial z} \right|_{z=h_{TOT}} = 0 ; \quad \begin{array}{l} \theta_a < \theta < \theta_b \\ r_w < r < r_e \\ t > 0 \end{array} \quad \dots (2.66)$$

para  $f=o, g, w$

### 2.3 ACUIFERO ANALITICO.

Para modelar la entrada de agua de fondo, acuífero, al área de drene del pozo, en forma analítica, se emplea el método de Fetkovich<sup>10</sup>. Este método considera flujo del acuífero al yacimiento en régimen pseudo-permanente y una ecuación del balance de materia en el acuífero, para representar la interacción entre ambos sistemas. Esta aproximación ofrece un método útil y flexible para predecir el comportamiento del acuífero, sin necesidad de recurrir al principio de superposición, en donde se requiere disponer de una historia de datos de producción para ello, lo que hace que se simplifiquen y

faciliten los cálculos.

La ecuación general del ritmo de entrada de agua está dada por la siguiente expresión:

$$q_{ac} = j_{ac} \left( \bar{P}_{ac} - \bar{P}_y \right)^n \quad \dots(2.67)$$

en donde  $n$  usualmente es igual a 1, cuando se maneja la ecuación de Darcy y se tiene régimen pseudo-permanente, y  $j_{ac}$  es el índice de productividad del acuífero, que depende de la geometría de flujo acuífero-yacimiento.

La ecuación del balance de materia del acuífero, considerando al agua como un fluido de compresibilidad constante, está dada como:

$$\bar{P}_{ac}^{-n} = - \left( \frac{P_i}{WeI} \right) WeI^n + P_i \quad \dots(2.68)$$

Combinando las Ecs. 2.67 y 2.68, se puede obtener la ecuación para el gasto instantáneo de entrada de agua como una función del tiempo,  $e_w$ ;

$$e_w(t) = \frac{j_{ac} \left( \bar{P}_{ac} - \bar{P}_y \right)}{e^{[(q_{wl})_{max} / WeI]}} \quad \dots(2.69)$$

donde  $(q_{wl})_{max}$  es el potencial de flujo inicial del acuífero definido de la siguiente manera.

Los valores de los índices de productividad se calculan a partir de una ecuación para flujo lineal finito en régimen pseudo-permanente, dada como:

$$q_{ac} = \frac{3 * 8.36399 * k_{ac} * A_{ac}}{\mu_w * h_{ac}} \left[ \bar{P}_{ac} - \bar{P}_y \right] \quad \dots (2.70)$$

entonces, el índice de productividad para flujo lineal estabilizado, se define como:

$$j_{ac} = \frac{3 * 8.36399 * k_{ac} * A_{ac}}{\mu_w * h_{ac}} \quad \dots (2.71)$$

por lo que el potencial de flujo inicial, se puede definir como:

$$\left( q_{wl} \right)_{max} = j_{ac} P_i \quad \dots (2.72)$$

El volumen de agua inicial en el acuífero,  $We_i$ , para una geometría lineal se determina como:

$$We_i = A_{ac} h_{ac} \phi_{ac} C_T P_i \quad \dots (2.73)$$

donde la compresibilidad total,  $C_T$ , está dada por:

$$C_T = C_w + C_r \quad \dots (2.74)$$

La ecuación de entrada de agua acumulada, está dada como:

$$We = \frac{We_i}{P_i} \left( \bar{P}_{ac}^n - \gamma_w^n \Delta z - \bar{P}_y^{n+1} \right) \left\{ 1 - e^{-[(q_{wl})_{max} / We_i] t} \right\} \quad \dots (2.75)$$

La Ec. 2.75 se aplica únicamente en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , y con la ayuda de la ecuación del balance de materia, Ec. 2.68, entonces se puede determinar una nueva presión promedio del acuífero,  $\bar{P}_{ac}$ , y resolver ahora para el nuevo intervalo de tiempo, e ir acumulando en cada una de estas etapas de tiempo la entrada de agua al área de drene del pozo. De esta forma, se elimina la necesidad de

emplear el principio de superposición para evaluar la Ec. 2.75.

Nótese, que no siempre se necesita regresar a la presión promedio inicial del acuífero para comenzar con los cálculos de entrada de agua al área de drene del pozo. Ya que, como se mencionó anteriormente, se va actualizando esta presión promedio en cada etapa de tiempo, así como la entrada de agua acumulada.

De acuerdo con lo anterior, el ritmo de entrada de agua, en el nivel de tiempo  $n+1$ , se define como:

$$q_{we}^{n+1} = \frac{\Delta We}{\Delta t} = \frac{We_1}{P_i} \left[ \frac{\bar{P}_{ac}^n - \gamma_w \Delta z - \bar{P}_y^{n+1}}{\Delta t} \right] \left\{ 1 - e^{-[(q_{wl})_{max} / We_1] t} \right\} \quad \dots (2.76)$$

El intervalo de tiempo se determina como:

$$\Delta t = t^{n+1} - t^n \quad \dots (2.77)$$

y la presión promedio requerida por la Ec. 2.76 está dada por:

$$\bar{P}_y^{n+1} = \frac{P_y^n + P_y^{n+1}}{2} \quad \dots (2.78)$$

donde  $P_y^{n+1}$  es la presión promedio en el área de contacto acuífero-yacimiento, calculada como:

$$P_y^{n+1} = \frac{\sum_{l=1}^{NAC} (P_{b_l}^{n+1} V_{pb_l})}{\sum_{l=1}^{NAC} V_{pb_l}} \quad \dots (2.79)$$

donde:  $NAC$  es el número de celdas en la frontera yacimiento-acuífero.

La Ec. 2.76 puede expresarse en función de NAC como:

$$q_{we}^{n+1} = \sum_{i=1}^{NAC} q_{wb_i}^{n+1} \quad \dots (2.80)$$

donde el gasto de entrada de agua en cada celda del área de drene del pozo que está conectada al acuífero, se puede evaluar como:

$$q_{wb_i} = \frac{k_{b_i} A_{b_i} \Delta P_{b_i}}{\sum_{i=1}^{NAC} (k_{b_i} A_{b_i} \Delta P_{b_i})} q_{we} \quad \dots (2.81)$$

donde:

$$\Delta P_i = \bar{P}_{ac} - \bar{P}_y^{n+1} \quad \dots (2.82)$$

Finalmente, el volumen acumulado de entrada de agua al área de drene del pozo, se calcula con la siguiente expresión:

$$W_{e_i}^n = \sum_{t=1}^{NT} (q_{we_t}^{n+1} \Delta t) \quad \dots (2.83)$$

3. SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.

En este capítulo se presenta la forma en que se discretiza la región de drene del pozo y la aproximación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo multifásico de fluidos hacia un pozo, en un yacimiento naturalmente fracturado. También, se presenta el método de solución del sistema no-lineal de las ecuaciones en diferencias mediante **EL METODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON** y la técnica de acoplamiento de las ecuaciones de los bloques de matriz en las ecuaciones de las fracturas<sup>4,5</sup>, para reducir el número de incógnitas a ser resueltas simultáneamente.

### 3.1 DISCRETIZACION DEL AREA DE DRENE.

Dado que las Ecs. 2.45 a 2.50 son ecuaciones diferenciales parciales no-lineales, carecen de solución analítica. Lo anterior ocasiona que estas ecuaciones diferenciales solo puedan resolverse a través de métodos numéricos. La solución numérica requiere que el carácter continuo en espacio y tiempo, de estas ecuaciones, se cambie por un carácter discreto, para esto se puede emplear el método de diferencias finitas; paralelamente, la región de drene del pozo se discretiza en segmentos o bloques que constituyen una malla y el tiempo se discretiza en intervalos sucesivos.

La discretización de la región de drene de un pozo requiere de una malla no uniforme en la dirección radial, para representar adecuadamente las fuertes variaciones de presiones y saturaciones en las vecindades del pozo<sup>11,16</sup>.

La mejor representación de tales condiciones de flujo se obtiene definiendo el tamaño de las celdas de manera que la caída de

presión entre ellas sea de la misma magnitud<sup>15</sup>. Esto es posible mediante el empleo de una malla logarítmica convencional de nodos centrados, que se define como se indica a continuación:

Para el cálculo de los radios de los nodos, en la dirección radial, se emplea la siguiente ecuación:

$$r_{i+1} = \alpha r_i \quad \dots (3.1)$$

donde:  $\alpha$  es el factor geométrico, calculado a partir de:

$$\alpha = \left( \frac{r_e}{r_w} \right)^{1/NR} \quad \dots (3.2)$$

de tal forma que, el primer radio se evalúa en función de este factor, como:

$$r_1 = \frac{\alpha \ln \alpha}{(\alpha - 1)} r_w \quad \dots (3.3)$$

Una vez calculado el radio del primer nodo, los radios de los demás nodos son calculados empleando la Ec. 3.1.

Las fronteras de las celdas se calculan como el promedio logarítmico del radio de los nodos, de la siguiente forma:

$$r_{i+1/2} = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln \alpha} \quad \dots (3.4)$$

Despejando  $\ln \alpha$  de la Ec. 3.4, se establece la siguiente relación:

$$\ln \alpha = \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1/2}} = \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{i+1/2} = \left( \frac{\Delta r}{r} \right)_{i-1/2} \quad \dots (3.5)$$

la cual será utilizada al definir el factor geométrico de la transmisibilidad, en la dirección radial.

Otra forma de definir la malla logarítmica radial, es a

partir de la malla multimodal de bloques centrados<sup>16</sup>, la cual incluye como caso particular a la malla logarítmica convencional, descrita anteriormente. La discretización en este caso se establecer a partir de la relación de tamaños entre la última celda y la primera, o bien, a partir del tamaño de la primera celda, vecina al pozo. Estos parámetros, cuando son seleccionados adecuadamente, reducen substancialmente el esfuerzo computacional de la simulación ya que es posible avanzar con incrementos de tiempo mayores sin sacrificar la exactitud de la solución, como se muestra en la Ref. 16.

Por otra parte, tanto en la dirección angular como en la vertical, se emplea una malla normal de bloques centrados con celdas de longitud variable. La Fig. 3.1 muestra la discretización de la región de drene del pozo y la malla de cálculo en donde se aproximan las ecuaciones de flujo, Ecs. 2.45 a 2.50. La Fig. 3.2 muestra el núcleo típico de celdas de la malla de cálculo.

### 3.2 REPRESENTACION DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS.

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones diferenciales parciales no-lineales, se resuelven numéricamente. La discretización de estas ecuaciones se realiza empleando el método de diferencias finitas. De esta manera, las ecuaciones diferenciales, tanto en las fracturas como en los bloques de matriz, son transformadas en un sistema algebraico de ecuaciones en diferencias. Los términos de flujo de las ecuaciones son aproximadas mediante diferencias centrales en espacio y los términos de acumulación

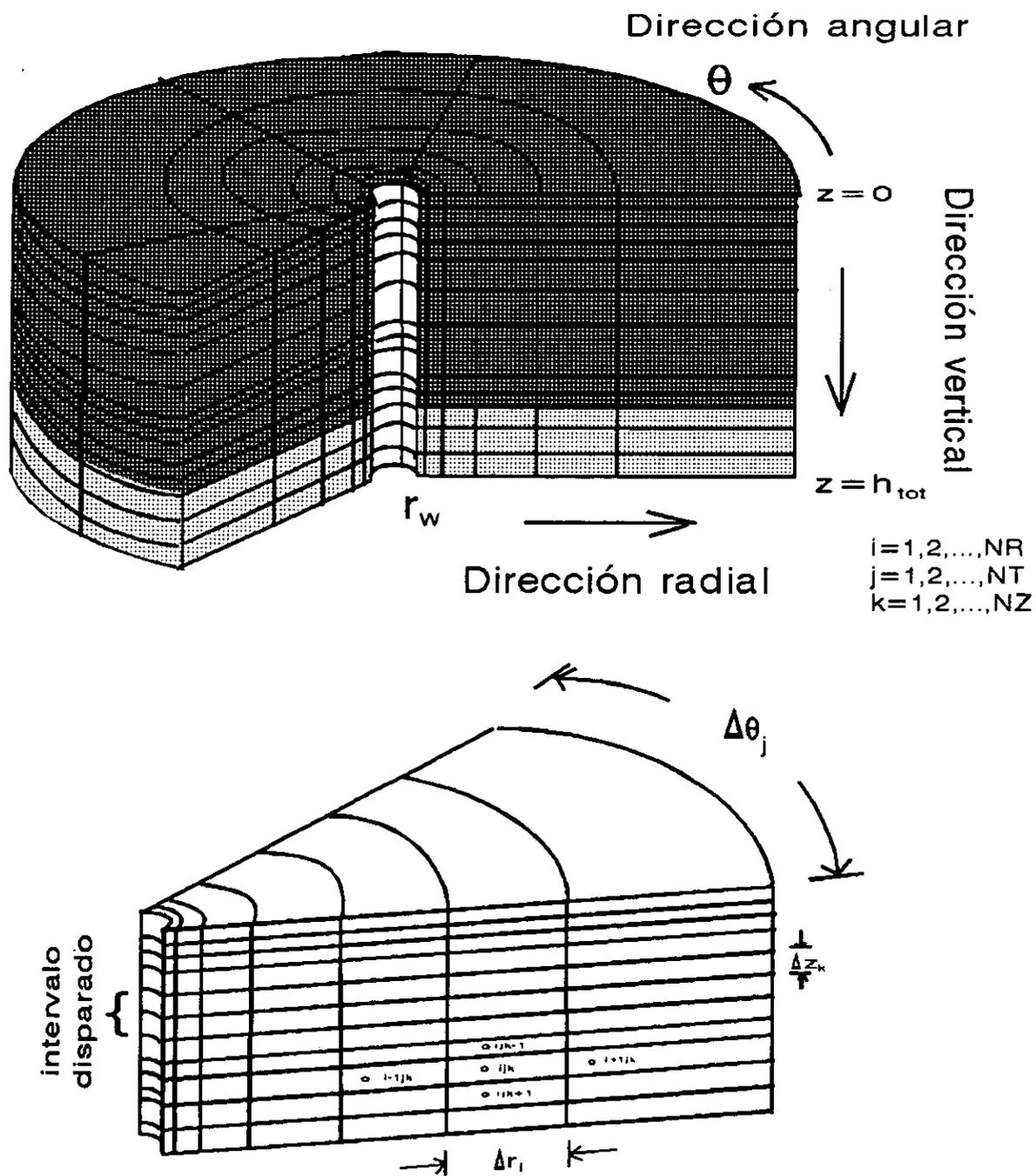


Fig. 3.1 Discretización del área de drene del pozo y malla de cálculo

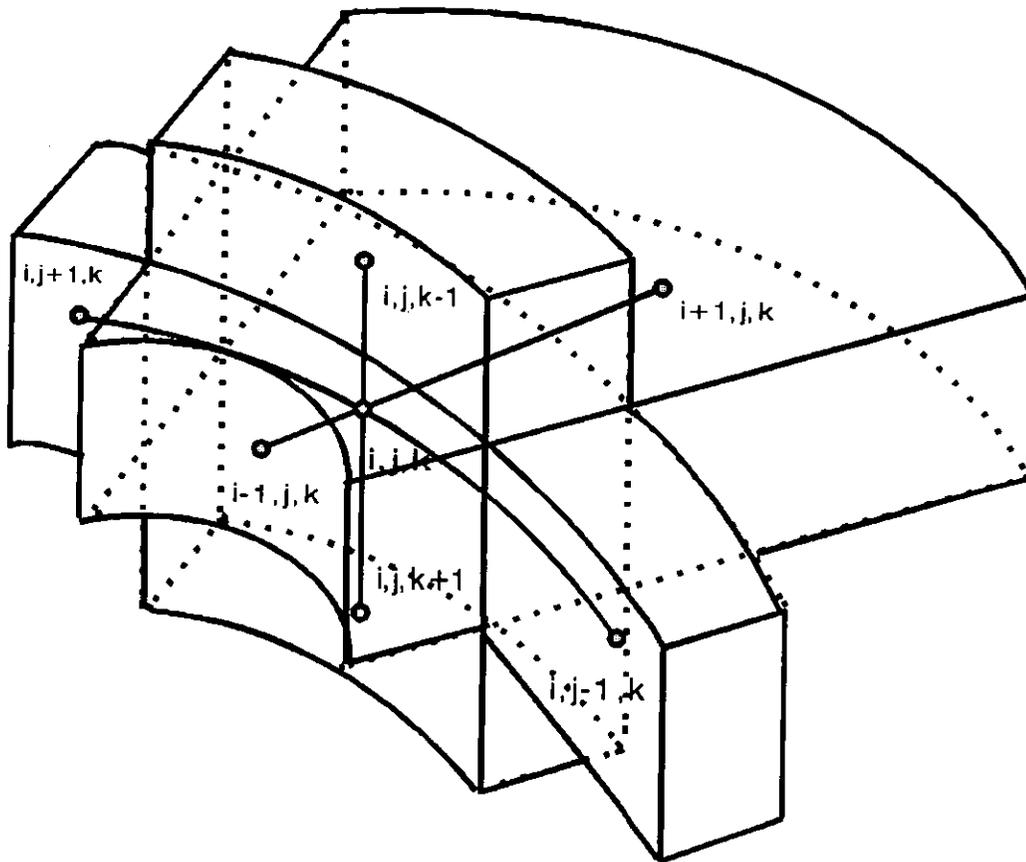


Fig. 3.2 Núcleo típico de la malla de cálculo

mediante diferencias regresivas en tiempo. En el Apéndice B se presenta la aproximación de estas ecuaciones. Las ecuaciones en diferencias, como se muestra en dicho apéndice, puede escribirse en términos de los operadores en diferencias y de las variables primarias: Po, Sg, Sw, Pom, Sgm y Swm, de la siguiente forma:

En las **FRACTURAS**.

**ACEITE,**

$$\begin{aligned} & \Delta \left[ T_o \left( \Delta P_o - \gamma_o \Delta D \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + \Delta \left[ T_g r_s \left( \Delta P_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta D \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + \\ & T_{om}^{n+1} \left( P_{om}^{n+1} - P_o^{n+1} \right) + \left( T_{gm} r_{sm} \right)_{i,j,k}^{n+1} \left( P_{om}^{n+1} + P_{cgom}^{n+1} \right. \\ & \left. - P_o^{n+1} - P_{cgo}^{n+1} \right) = \frac{V_{r,i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \left( \phi_{bo} (1 - S_g - S_w) \right) + \left( \phi_{bgr_s} S_g \right) \right\}_{i,j,k} \end{aligned} \quad \dots (3.6)$$

**GAS,**

$$\begin{aligned} & \Delta \left[ T_g \left( \Delta P_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta D \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + \Delta \left[ T_o R_s \left( \Delta P_o - \gamma_o \Delta D \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + \\ & T_{gm}^{n+1} \left( P_{om}^{n+1} + P_{cgom}^{n+1} - P_o^{n+1} - P_{cgo}^{n+1} \right) + \\ & \left( T_{om} R_{sm} \right)_{i,j,k}^{n+1} \left( P_{om}^{n+1} - P_o^{n+1} \right) \\ & = \frac{V_{r,i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \left( \phi_{bg} S_g \right) + \left( \phi_{bo} R_s (1 - S_g - S_w) \right) \right\}_{i,j,k} \end{aligned} \quad \dots (3.7)$$

**AGUA,**

$$\begin{aligned} & \Delta \left[ T_w \left( \Delta P_o - \Delta P_{cwo} - \gamma_w \Delta D \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + T_{wm}^{n+1} \left( P_{om}^{n+1} - P_{cwom}^{n+1} \right. \\ & \left. - P_o^{n+1} + P_{cwo}^{n+1} \right) = \frac{V_{r,i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \phi_{bw} S_w \right\}_{i,j,k} \end{aligned} \quad \dots (3.8)$$

En los **BLOQUES DE MATRIZ.**

**ACEITE.**

$$\begin{aligned}
 & - \text{Tom}_{i,j,k}^{n+1} \left( \text{Pom}_{i,j,k}^{n+1} - \text{Po}_{i,j,k}^{n+1} \right) - \left( \text{Tgm r}_{sm} \right)_{i,j,k}^{n+1} \left( \text{Pom}_{i,j,k}^{n+1} \right. \\
 & \quad \left. + \text{Pcgom}_{i,j,k}^{n+1} - \text{Po}_{i,j,k}^{n+1} - \text{Pcgo}_{i,j,k}^{n+1} \right) \\
 = & \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \left( \phi_{mbom} (1 - S_{gm} - S_{wm}) \right) + \left( \phi_{mbgmr}_{sm} S_{gm} \right) \right\}_{i,j,k} \dots (3.9)
 \end{aligned}$$

**GAS.**

$$\begin{aligned}
 & - \text{Tgm}_{i,j,k}^{n+1} \left( \text{Pom}_{i,j,k}^{n+1} + \text{Pcgom}_{i,j,k}^{n+1} - \text{Po}_{i,j,k}^{n+1} - \text{Pcgo}_{i,j,k}^{n+1} \right) - \\
 & \quad \left( \text{TomRsm} \right)_{i,j,k}^{n+1} \left( \text{Pom}_{i,j,k}^{n+1} - \text{Po}_{i,j,k}^{n+1} \right) \\
 = & \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \left( \phi_{mbgm} S_{gm} \right) + \left( \phi_{mbom} R_s (1 - S_{gm} - S_{wm}) \right) \right\}_{i,j,k} \dots (3.10)
 \end{aligned}$$

**AGUA.**

$$\begin{aligned}
 & - \text{Twm}_{i,j,k}^{n+1} \left( \text{Pom}_{i,j,k}^{n+1} - \text{Pcwom}_{i,j,k}^{n+1} - \text{Po}_{i,j,k}^{n+1} + \text{Pcwo}_{i,j,k}^{n+1} \right) \\
 = & \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \phi_{mbwm} S_{wm} \right\}_{i,j,k} \dots (3.11)
 \end{aligned}$$

para  $i=1,2,3,\dots, NR$   
 $j=1,2,3,\dots, NT$   
 $k=1,2,3,\dots, NZ$   
 $n=0,1,2,\dots, N$

Las transmisibilidades  $T_f$ ,  $f=o,g,w$ , que aparecen en la forma desarrollada de las ecuaciones en diferencias, son definidas en el Apéndice B, Ecs. B.14 a B.21 y B.30 a B.33. Las transmisibilidades de las fracturas son evaluadas implícitamente en

la frontera entre celdas y son calculadas en el nodo de mayor potencial<sup>4,15</sup>, esto es, considerando la transmisibilidad del aceite en la dirección radial, Ec. B.14, se tiene:

$$\text{Tor}_{i\pm 1/2, j, k}^{n+1} = 8.36399 \text{ COR}_{i\pm 1/2, j, k} \left[ \omega \left( \frac{b_0 k_{ro}}{\mu_0} \right)_{i\pm 1, j, k}^{n+1} + (1-\omega) \left( \frac{b_0 k_{ro}}{\mu_0} \right)_{i\pm 1/2, j, k}^{n+1} \right] \quad \dots (3.12)$$

donde:

$$\omega = 0 \quad \text{si } P_{O_{i, j, k}} \geq P_{O_{i\pm 1, j, k}}$$

ó

$$\omega = 1 \quad \text{si } P_{O_{i, j, k}} < P_{O_{i\pm 1, j, k}}$$

El factor geométrico COR se define de acuerdo con la Ec. B.14 e introduciendo la Ec. 3.5 como:

$$\text{COR}_{i\pm 1/2, j, k} = \left\{ \frac{\Delta\theta_j \Delta z_k}{\ln \alpha} k_{hi\pm 1/2, j, k} \right\} \quad \dots (3.13)$$

Las ecuaciones de las transmisibilidades en las otras dos direcciones, angular y vertical, Ecs. B.15 y B.16, son evaluadas de igual forma que la Ec. 3.12. Esto es:

$$\text{Tf}\theta_{i, j\pm 1/2, k} = \omega \text{Tf}\theta_{i, j\pm 1, k} + (1-\omega) \text{Tf}\theta_{i, j, k} \quad \dots (3.14)$$

donde:

$$\omega = 0 \quad \text{si } P_{O_{i, j, k}} \geq P_{O_{i, j\pm 1, k}}$$

ó

$$\omega = 1 \quad \text{si } P_{O_{i, j, k}} < P_{O_{i, j\pm 1, k}}$$

$$y \quad T_{fz}_{i,j,k\pm 1/2} = \omega T_{fz}_{i,j,k\pm 1} + (1-\omega) T_{fz}_{i,j,k} \quad \dots (3.15)$$

donde:

$$\omega = 0 \quad \text{si } \Phi_{i,j,k} \geq \Phi_{i,j,k\pm 1}$$

ó

$$\omega = 1 \quad \text{si } \Phi_{i,j,k} > \Phi_{i,j,k\pm 1}$$

para  $f=0,g,w$

El término  $k_{\beta}/\Delta\beta$ ,  $\beta=\theta,z$ , que aparece en los factores geométricos de las transmisibilidades se evalúan mediante un promedio armónico, definido de la siguiente manera<sup>15</sup>:

-para la dirección angular, se tiene:

$$\left(\frac{k_{\theta}}{\Delta\theta}\right)_{i,j\pm 1/2,k} = \frac{2 \left( k_{\theta i,j,k} * k_{\theta i,j\pm 1,k} \right)}{k_{\theta i,j,k} \Delta\theta_{i,j\pm 1,k} + k_{\theta i,j\pm 1,k} \Delta\theta_{i,j,k}} \quad \dots (3.16)$$

Para la dirección vertical,  $z$ , se tiene una expresión similar a la Ec. 3.16 pero evaluada en el nodo  $i,j,k\pm 1/2$ .

Las transmisibilidades de los bloques de matriz, Ecs. B.20, B.21 y B.33, son evaluadas corriente arriba en las funciones de saturación, dependiendo del sentido del flujo matriz-fracturas. Las funciones de presión de estas transmisibilidades son evaluadas a la presión existente en los nodos<sup>4,6</sup>; ésto se expresa de la siguiente forma:

$$T_{fm}_{i,j,k} = V_{r_{i,j,k}} \sigma \left( k_{hm} \frac{b_{fm}}{\mu_{fm}} \right)_{i,j,k} \left\{ \omega k_{r_{fm}} + (1-\omega) k_{r_{ff}} \right\} \dots (3.17)$$

donde:

$\omega = 0$  si el flujo es de la fractura a los bloques de matriz.

$$P_{fm} < P_f$$

o bien:

$\omega = 1$  si el flujo es de los bloques de matriz a las fracturas.

$$P_{fm} \geq P_f$$

para  $f=o,g,w$

Al aplicar las ecuaciones en diferencias, Ecs. 3.6 a 3.11, en cada punto de la malla de cálculo, se genera un sistema de ecuaciones algebraicas no-lineales en cada etapa de tiempo. Estas ecuaciones son las que finalmente constituyen el simulador numérico del flujo trifásico-tridimensional hacia un pozo, en un yacimiento naturalmente fracturado.

El acoplamiento de las condiciones de frontera en las ecuaciones de flujo en diferencias, se presenta en el Apéndice C.

### 3.3 SOLUCION DEL SISTEMA NO-LINEAL DE ECUACIONES

(METODO DE NEWTON - RAPHSON).

Dado que las Ecs. 3.6 a 3.11, son ecuaciones NO-LINEALES, es necesario recurrir a un método de linealización. La solución del sistema de ecuaciones no-lineales se efectúa en este trabajo mediante el METODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON. Este procedimiento constituye la base de una formulación totalmente implícita, que como se mencionó en el Capítulo 2 es la formulación más estable y apropiada para simular correctamente el problema en cuestión<sup>4</sup>.

De acuerdo con esta formulación, se definen las siguientes funciones de residuos:

De las ecuaciones de las **FRACTURAS:**

para el **ACEITE,**

$$\begin{aligned}
 F_{o, i, j, k}^{n+1} & \left\{ \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i, j, k-1}^{n+1}, \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i, j-1, k}^{n+1}, \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i-1, j, k}^{n+1}, \right. \\
 & \left. \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i, j, k}^{n+1}, \left( P_{om}, S_{gm}, S_{wm} \right)_{i, j, k}^{n+1}, \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i+1, j, k}^{n+1}, \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i, j+1, k}^{n+1}, \right. \\
 & \left. \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i, j, k+1}^{n+1} \right\} = \Delta \left[ T_o \left( \Delta P_o - \gamma_o \Delta D \right) \right]_{i, j, k}^{n+1} + \\
 & \Delta \left[ T_g r_s \left( \Delta P_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta D \right) \right]_{i, j, k}^{n+1} + T_{om, i, j, k}^{n+1} \left( P_{om, i, j, k}^{n+1} - P_{o, i, j, k}^{n+1} \right) \\
 & + \left( T_{gm} r_{sm} \right)_{i, j, k}^{n+1} \left( P_{om, i, j, k}^{n+1} + P_{cgom, i, j, k}^{n+1} - P_{o, i, j, k}^{n+1} - P_{cgo, i, j, k}^{n+1} \right) \\
 - \frac{V_r}{\Delta t} & \left. \left\{ \left( \phi b_o (1 - S_g - S_w) \right)_{i, j, k} + \left( \phi b_g r_s S_g \right)_{i, j, k} \right\} = 0 \quad \dots (3.18)
 \end{aligned}$$

para el **GAS,**

$$\begin{aligned}
 F_{g, i, j, k}^{n+1} & \left\{ \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i, j, k-1}^{n+1}, \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i, j-1, k}^{n+1}, \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i-1, j, k}^{n+1}, \right. \\
 & \left. \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i, j, k}^{n+1}, \left( P_{om}, S_{gm}, S_{wm} \right)_{i, j, k}^{n+1}, \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i+1, j, k}^{n+1}, \right. \\
 & \left. \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i, j+1, k}^{n+1}, \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i, j, k+1}^{n+1} \right\} = \\
 & \Delta \left[ T_g \left( \Delta P_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta D \right) \right]_{i, j, k}^{n+1} + \Delta \left[ T_o R_s \left( \Delta P_o - \gamma_o \Delta D \right) \right]_{i, j, k}^{n+1} + \\
 & T_{gm, i, j, k}^{n+1} \left( P_{om, i, j, k}^{n+1} + P_{cgom, i, j, k}^{n+1} - P_{o, i, j, k}^{n+1} - P_{cgo, i, j, k}^{n+1} \right) + \\
 & \left( T_{om} R_{sm} \right)_{i, j, k}^{n+1} \left( P_{om, i, j, k}^{n+1} - P_{o, i, j, k}^{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$- \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \left( \phi bg Sg \right) + \left( \phi bo Rs (1 - Sg - Sw) \right) \right\}_{i,j,k} = 0 \quad \dots (3.19)$$

para el **AGUA**,

$$\begin{aligned} & Fw_{i,j,k}^{n+1} \left\{ \left( P_o, Sg, Sw \right)_{i,j,k-1}^{n+1}, \left( P_o, Sg, Sw \right)_{i,j-1,k}^{n+1}, \left( P_o, Sg, Sw \right)_{i-1,j,k}^{n+1}, \right. \\ & \left. \left( P_o, Sg, Sw \right)_{i,j,k}^{n+1}, \left( P_{om}, Sgm, Swm \right)_{i,j,k}^{n+1}, \left( P_o, Sg, Sw \right)_{i+1,j,k}^{n+1}, \right. \\ & \left. \left( P_o, Sg, Sw \right)_{i,j+1,k}^{n+1}, \left( P_o, Sg, Sw \right)_{i,j,k+1}^{n+1} \right\} = \\ & \Delta \left[ Tw \left( \Delta P_o - \Delta P_{cwo} - \gamma w \Delta D \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + Twm_{i,j,k}^{n+1} \left( P_{om}^{n+1}_{i,j,k} - P_{cwo}^{n+1}_{i,j,k} \right. \\ & \left. - P_o^{n+1}_{i,j,k} + P_{cwo}^{n+1}_{i,j,k} \right) - \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \phi bw Sw \right\}_{i,j,k} = 0 \quad \dots (3.20) \end{aligned}$$

Como se puede observar, las ecuaciones anteriores, Ecs. 3.18, 3.19 y 3.20, están en función de 24 incógnitas.

De las ecuaciones de los **BLOQUES DE MATRIZ**:

para el **ACEITE**,

$$\begin{aligned} & Fom_{i,j,k}^{n+1} \left\{ \left( P_o, Sg, Sw \right)_{i,j,k}^{n+1}, \left( P_{om}, Sgm, Swm \right)_{i,j,k}^{n+1} \right\} = \\ & - Tom_{i,j,k}^{n+1} \left( P_{om}^{n+1}_{i,j,k} - P_o^{n+1}_{i,j,k} \right) - \left( Tgm r_{sm} \right)_{i,j,k}^{n+1} \left( P_{om}^{n+1}_{i,j,k} \right. \\ & \left. + P_{cgo}^{n+1}_{i,j,k} - P_o^{n+1}_{i,j,k} - P_{cgo}^{n+1}_{i,j,k} \right) - \\ & \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \left( \phi mbom (1 - Sgm - Swm) \right) + \left( \phi mbgmr_{sm} Sgm \right) \right\}_{i,j,k} = 0 \quad \dots (3.21) \end{aligned}$$

para el **GAS**,

$$\begin{aligned}
 & F_{gm, i, j, k}^{n+1} \left\{ \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i, j, k}^{n+1}, \left( P_{om}, S_{gm}, S_{wm} \right)_{i, j, k}^{n+1} \right\} = \\
 & - T_{gm, i, j, k}^{n+1} \left( P_{om, i, j, k}^{n+1} + P_{cgom, i, j, k}^{n+1} - P_{o, i, j, k}^{n+1} - P_{cgo, i, j, k}^{n+1} \right) - \\
 & \quad \left( T_{omRsm} \right)_{i, j, k}^{n+1} \left( P_{om, i, j, k}^{n+1} - P_{o, i, j, k}^{n+1} \right) \\
 & - \frac{V_r}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \left( \phi_{mbgmSgm} \right) + \left( \phi_{mbomRs} (1 - S_{gm} - S_{wm}) \right) \right\}_{i, j, k} = 0 \quad \dots (3.22)
 \end{aligned}$$

para el **AGUA**,

$$\begin{aligned}
 & F_{wm, i, j, k}^{n+1} \left\{ \left( P_o, S_g, S_w \right)_{i, j, k}^{n+1}, \left( P_{om}, S_{gm}, S_{wm} \right)_{i, j, k}^{n+1} \right\} = \\
 & - T_{wm, i, j, k}^{n+1} \left( P_{om, i, j, k}^{n+1} - P_{cwo, i, j, k}^{n+1} - P_{o, i, j, k}^{n+1} + P_{cwo, i, j, k}^{n+1} \right) - \\
 & \quad \frac{V_r}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \phi_{bws} \right\}_{i, j, k} = 0 \quad \dots (3.23)
 \end{aligned}$$

Como se puede observar, las ecuaciones anteriores, Ecs. 3.21, 3.22 y 3.23, están en función de 6 incógnitas.

Las funciones de residuos, Ecs. 3.18 a 3.23 adquieren una forma particular en los nodos localizados en las fronteras, debido al acoplamiento de las condiciones de frontera, como puede observarse en el Apéndice C.

Las funciones  $F_r$  y  $F_{fm}$ ,  $f=o, g, w$ , Ecs. 3.18 a 3.23, se expanden con base en la serie de Taylor, reteniendo únicamente los términos de menor orden. Esto conduce a la siguiente aproximación<sup>4</sup>:

Para las **FRACTURAS**:

**ACEITE.**

$$\begin{aligned}
 F_o^{(\nu+1)}_{1,j,k} &= F_o^{(\nu)}_{1,j,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial P_o^{(\nu)}} \right)_{1,j,k-1} \delta P_o^{(\nu+1)}_{1,j,k-1} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sg^{(\nu)}} \right)_{1,j,k-1} \delta Sg^{(\nu+1)}_{1,j,k-1} \\
 &+ \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sw^{(\nu)}} \right)_{1,j,k-1} \delta Sw^{(\nu+1)}_{1,j,k-1} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial P_o^{(\nu)}} \right)_{1,j-1,k} \delta P_o^{(\nu+1)}_{1,j-1,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sg^{(\nu)}} \right)_{1,j-1,k} \\
 &\quad \delta Sg^{(\nu+1)}_{1,j-1,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sw^{(\nu)}} \right)_{1,j-1,k} \delta Sw^{(\nu+1)}_{1,j-1,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial P_o^{(\nu)}} \right)_{1-1,j,k} \delta P_o^{(\nu+1)}_{1-1,j,k} \\
 &+ \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sg^{(\nu)}} \right)_{1-1,j,k} \delta Sg^{(\nu+1)}_{1-1,j,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sw^{(\nu)}} \right)_{1-1,j,k} \delta Sw^{(\nu+1)}_{1-1,j,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial P_o^{(\nu)}} \right)_{1,j,k} \\
 &\quad \delta P_o^{(\nu+1)}_{1,j,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sg^{(\nu)}} \right)_{1,j,k} \delta Sg^{(\nu+1)}_{1,j,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sw^{(\nu)}} \right)_{1,j,k} \delta Sw^{(\nu+1)}_{1,j,k} + \\
 &\left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial P_{om}^{(\nu)}} \right)_{1,j,k} \delta P_{om}^{(\nu+1)}_{1,j,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sg_{m}^{(\nu)}} \right)_{1,j,k} \delta Sg_{m}^{(\nu+1)}_{1,j,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sw_{m}^{(\nu)}} \right)_{1,j,k} \delta Sw_{m}^{(\nu+1)}_{1,j,k} \\
 &+ \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial P_o^{(\nu)}} \right)_{1+1,j,k} \delta P_o^{(\nu+1)}_{1+1,j,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sg^{(\nu)}} \right)_{1+1,j,k} \delta Sg^{(\nu+1)}_{1+1,j,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sw^{(\nu)}} \right)_{1+1,j,k} \\
 &\quad \delta Sw^{(\nu+1)}_{1+1,j,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial P_o^{(\nu)}} \right)_{1,j+1,k} \delta P_o^{(\nu+1)}_{1,j+1,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sg^{(\nu)}} \right)_{1,j+1,k} \delta Sg^{(\nu+1)}_{1,j+1,k} \\
 &+ \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sw^{(\nu)}} \right)_{1,j+1,k} \delta Sw^{(\nu+1)}_{1,j+1,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial P_o^{(\nu)}} \right)_{1,j,k+1} \delta P_o^{(\nu+1)}_{1,j,k+1} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sg^{(\nu)}} \right)_{1,j,k+1} \\
 &\quad \delta Sg^{(\nu+1)}_{1,j,k+1} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}}{\partial Sw^{(\nu)}} \right)_{1,j,k+1} \delta Sw^{(\nu+1)}_{1,j,k+1} \cong 0 \quad \dots (3.24)
 \end{aligned}$$

O escrita en forma compacta, se tiene:

$$\begin{aligned}
 F_o^{(\nu+1)}_{i,j,k} &= F_o^{(\nu)}_{i,j,k} + \sum_{lmn} \left\{ \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial P_o^{(\nu)}_{lmn}} \right) \delta P_o^{(\nu+1)}_{lmn} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial S_g^{(\nu)}_{lmn}} \right) \delta S_g^{(\nu+1)}_{lmn} \right. \\
 &+ \left. \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial S_w^{(\nu)}_{lmn}} \right) \delta S_w^{(\nu+1)}_{lmn} \right\} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial P_{om}^{(\nu)}_{i,j,k}} \right) \delta P_{om}^{(\nu+1)}_{i,j,k} + \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial S_{gm}^{(\nu)}_{i,j,k}} \right) \delta S_{gm}^{(\nu+1)}_{i,j,k} \\
 &+ \left( \frac{\partial F_o^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial S_{wm}^{(\nu)}_{i,j,k}} \right) \delta S_{wm}^{(\nu+1)}_{i,j,k} \cong 0 \quad \dots (3.25)
 \end{aligned}$$

donde:

$$lmn = i, j, k-1, i, j-1, k, i-1, j, k, i, j, k, i+1, j, k, i, j+1, k, i, j, k+1$$

**GAS**, escrita en forma compacta:

$$\begin{aligned}
 F_g^{(\nu+1)}_{i,j,k} &= F_g^{(\nu)}_{i,j,k} + \sum_{lmn} \left\{ \left( \frac{\partial F_g^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial P_o^{(\nu)}_{lmn}} \right) \delta P_o^{(\nu+1)}_{lmn} + \left( \frac{\partial F_g^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial S_g^{(\nu)}_{lmn}} \right) \delta S_g^{(\nu+1)}_{lmn} \right. \\
 &+ \left. \left( \frac{\partial F_g^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial S_w^{(\nu)}_{lmn}} \right) \delta S_w^{(\nu+1)}_{lmn} \right\} + \left( \frac{\partial F_g^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial P_{om}^{(\nu)}_{i,j,k}} \right) \delta P_{om}^{(\nu+1)}_{i,j,k} + \left( \frac{\partial F_g^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial S_{gm}^{(\nu)}_{i,j,k}} \right) \delta S_{gm}^{(\nu+1)}_{i,j,k} \\
 &+ \left( \frac{\partial F_g^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial S_{wm}^{(\nu)}_{i,j,k}} \right) \delta S_{wm}^{(\nu+1)}_{i,j,k} \cong 0 \quad \dots (3.26)
 \end{aligned}$$

**AGUA**, escrita en forma compacta:

$$\begin{aligned}
 F_w^{(\nu+1)}_{i,j,k} &= F_w^{(\nu)}_{i,j,k} + \sum_{lmn} \left\{ \left( \frac{\partial F_w^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial P_o^{(\nu)}_{lmn}} \right) \delta P_o^{(\nu+1)}_{lmn} + \left( \frac{\partial F_w^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial S_g^{(\nu)}_{lmn}} \right) \delta S_g^{(\nu+1)}_{lmn} \right. \\
 &+ \left. \left( \frac{\partial F_w^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial S_w^{(\nu)}_{lmn}} \right) \delta S_w^{(\nu+1)}_{lmn} \right\} + \left( \frac{\partial F_w^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial P_{om}^{(\nu)}_{i,j,k}} \right) \delta P_{om}^{(\nu+1)}_{i,j,k} + \left( \frac{\partial F_w^{(\nu)}_{i,j,k}}{\partial S_{gm}^{(\nu)}_{i,j,k}} \right) \delta S_{gm}^{(\nu+1)}_{i,j,k}
 \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{\partial F_w^{(V)}}{\partial S_{wm}^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta S_{wm}^{(V+1)} \cong 0 \quad \dots (3.27)$$

Para los **BLOQUES DE MATRIZ:**

**ACEITE,**

$$\begin{aligned} F_{om}^{(V+1)} &= F_{om}^{(V)} + \left( \frac{\partial F_{om}^{(V)}}{\partial P_o^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta P_o^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{om}^{(V)}}{\partial S_g^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta S_g^{(V+1)} \\ &+ \left( \frac{\partial F_{om}^{(V)}}{\partial S_w^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta S_w^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{om}^{(V)}}{\partial P_{om}^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta P_{om}^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{om}^{(V)}}{\partial S_{gm}^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta S_{gm}^{(V+1)} \\ &+ \left( \frac{\partial F_{om}^{(V)}}{\partial S_{wm}^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta S_{wm}^{(V+1)} \cong 0 \quad \dots (3.28) \end{aligned}$$

**GAS,**

$$\begin{aligned} F_{gm}^{(V+1)} &= F_{gm}^{(V)} + \left( \frac{\partial F_{gm}^{(V)}}{\partial P_o^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta P_o^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{gm}^{(V)}}{\partial S_g^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta S_g^{(V+1)} \\ &+ \left( \frac{\partial F_{gm}^{(V)}}{\partial S_w^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta S_w^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{gm}^{(V)}}{\partial P_{om}^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta P_{om}^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{gm}^{(V)}}{\partial S_{gm}^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta S_{gm}^{(V+1)} \\ &+ \left( \frac{\partial F_{gm}^{(V)}}{\partial S_{wm}^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta S_{wm}^{(V+1)} \cong 0 \quad \dots (3.29) \end{aligned}$$

**AGUA,**

$$F_{wm}^{(V+1)} = F_{wm}^{(V)} + \left( \frac{\partial F_{wm}^{(V)}}{\partial P_o^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta P_o^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{wm}^{(V)}}{\partial S_g^{(V)}} \right)_{i,j,k} \delta S_g^{(V+1)}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\partial F_{wm}^{(v)}}{\partial S_w^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta S_w^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_{wm}^{(v)}}{\partial P_{om}^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta P_{om}^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_{wm}^{(v)}}{\partial S_{gm}^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta S_{gm}^{(v+1)} \\
& + \left( \frac{\partial F_{wm}^{(v)}}{\partial S_{wm}^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta S_{wm}^{(v+1)} \cong 0 \quad \dots (3.30)
\end{aligned}$$

donde, los superíndices  $(v)$  y  $(v+1)$  indican los niveles de iteración, conocido e incógnita, respectivamente.

A partir de las ecuaciones anteriores se establece el siguiente sistema iterativo de ecuaciones lineales:

Para las **FRACTURAS**:

**ACEITE,**

$$\begin{aligned}
& \sum_{lmn} \left\{ \left( \frac{\partial F_o^{(v)}}{\partial P_o^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta P_o^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_o^{(v)}}{\partial S_g^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta S_g^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_o^{(v)}}{\partial S_w^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta S_w^{(v+1)} \right\} \\
& + \left( \frac{\partial F_o^{(v)}}{\partial P_{om}^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta P_{om}^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_o^{(v)}}{\partial S_{gm}^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta S_{gm}^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_o^{(v)}}{\partial S_{wm}^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta S_{wm}^{(v+1)} \\
& = - F_o^{(v)}_{i,j,k} \quad \dots (3.31)
\end{aligned}$$

**GAS,**

$$\begin{aligned}
& \sum_{lmn} \left\{ \left( \frac{\partial F_g^{(v)}}{\partial P_o^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta P_o^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_g^{(v)}}{\partial S_g^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta S_g^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_g^{(v)}}{\partial S_w^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta S_w^{(v+1)} \right\} \\
& + \left( \frac{\partial F_g^{(v)}}{\partial P_{om}^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta P_{om}^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_g^{(v)}}{\partial S_{gm}^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta S_{gm}^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_g^{(v)}}{\partial S_{wm}^{(v)}} \right)_{i,j,k} \delta S_{wm}^{(v+1)} \\
& = - F_g^{(v)}_{i,j,k} \quad \dots (3.32)
\end{aligned}$$

**AGUA.**

$$\begin{aligned}
 & \sum_{lmn} \left\{ \left( \frac{\partial F_w}{\partial P_o} \right)_{lmn}^{(V)} \delta P_o^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_g} \right)_{lmn}^{(V)} \delta S_g^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_w} \right)_{lmn}^{(V)} \delta S_w^{(V+1)} \right\} \\
 & + \left( \frac{\partial F_w}{\partial P_{om}} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta P_{om}^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_{gm}} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta S_{gm}^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_{wm}} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta S_{wm}^{(V+1)} \\
 & = - F_w^{(V)}_{i,j,k} \quad \dots (3.33)
 \end{aligned}$$

Para los **BLOQUES DE MATRIZ:**

**ACEITE.**

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial P_o} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta P_o^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial S_g} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta S_g^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial S_w} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta S_w^{(V+1)} \\
 & + \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial P_{om}} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta P_{om}^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{gm}} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta S_{gm}^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{wm}} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta S_{wm}^{(V+1)} \\
 & = - F_{om}^{(V)}_{i,j,k} \quad \dots (3.34)
 \end{aligned}$$

**GAS.**

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_o} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta P_o^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_g} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta S_g^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_w} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta S_w^{(V+1)} \\
 & + \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_{om}} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta P_{om}^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{gm}} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta S_{gm}^{(V+1)} + \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{wm}} \right)_{i,j,k}^{(V)} \delta S_{wm}^{(V+1)} \\
 & = - F_{gm}^{(V)}_{i,j,k} \quad \dots (3.35)
 \end{aligned}$$

**AGUA.**

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_{o}} \right)_{i,j,k}^{(\nu)} \delta P_{o,i,j,k}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_g} \right)_{i,j,k}^{(\nu)} \delta S_{g,i,j,k}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_w} \right)_{i,j,k}^{(\nu)} \delta S_{w,i,j,k}^{(\nu+1)} \\
 & + \left( \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_{om}} \right)_{i,j,k}^{(\nu)} \delta P_{om,i,j,k}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{gm}} \right)_{i,j,k}^{(\nu)} \delta S_{gm,i,j,k}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{wm}} \right)_{i,j,k}^{(\nu)} \delta S_{wm,i,j,k}^{(\nu+1)} \\
 & = - F_{wm,i,j,k}^{(\nu)} \dots (3.36)
 \end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, NR$   
 $j = 1, 2, 3, \dots, NT$   
 $k = 1, 2, 3, \dots, NZ$   
 $(\nu) = 0, 1, 2, 3, \dots$

Si existe continuidad angular en la dirección  $\theta$ , en las Ecs. 3.31 a 3.36 aplicadas a los índices  $j=1$  y  $j=NT$ , aparecen términos adicionales de la siguiente forma:

Para el índice  $j=1$  se tiene,

Para las **FRACTURAS**,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{lmn} \left\{ \left( \frac{\partial F_p}{\partial P_{o}} \right)_{i,1,k}^{(\nu)} \delta P_{o,lmn}^{(\nu+1)*} + \left( \frac{\partial F_p}{\partial S_g} \right)_{i,1,k}^{(\nu)} \delta S_{g,lmn}^{(\nu+1)*} + \left( \frac{\partial F_p}{\partial S_w} \right)_{i,1,k}^{(\nu)} \delta S_{w,lmn}^{(\nu+1)*} \right\} \\
 & + \left( \frac{\partial F_p}{\partial P_{om}} \right)_{i,1,k}^{(\nu)} \delta P_{om,i,1,k}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_p}{\partial S_{gm}} \right)_{i,1,k}^{(\nu)} \delta S_{gm,i,1,k}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_p}{\partial S_{wm}} \right)_{i,1,k}^{(\nu)} \delta S_{wm,i,1,k}^{(\nu+1)} \\
 & = - F_{p,i,1,k}^{(\nu)} \dots (3.37)
 \end{aligned}$$

donde  $lmn^* = i, 1, k-1, i, NT, k, i-1, 1, k, i, 1, k, i+1, 1, k, i, 2, k, i, 1, k+1$   
 $p = o, g, w$

Nótese que se origina una diagonal extra,  $i, NT, k$ , por efecto de esta

continuidad. En el caso de que no se considere esta continuidad no aparece esta diagonal.

Para los **BLOQUES DE MATRIZ**:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial F_{pm}}{\partial P_o} \right)_{1,1,k}^{(\nu)} \delta P_{o,1,1,k}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pm}}{\partial S_g} \right)_{1,1,k}^{(\nu)} \delta S_{g,1,1,k}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pm}}{\partial S_w} \right)_{1,1,k}^{(\nu)} \delta S_{w,1,1,k}^{(\nu+1)} \\
 & + \left( \frac{\partial F_{pm}}{\partial P_{om}} \right)_{1,1,k}^{(\nu)} \delta P_{om,1,1,k}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pm}}{\partial S_{gm}} \right)_{1,1,k}^{(\nu)} \delta S_{gm,1,1,k}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pm}}{\partial S_{wm}} \right)_{1,1,k}^{(\nu)} \delta S_{wm,1,1,k}^{(\nu+1)} \\
 & = - F_{pm,1,1,k}^{(\nu)} \dots (3.38)
 \end{aligned}$$

Para el índice  $j=NT$  se tiene,

Para las **FRACTURAS**,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l,m,n} \left\{ \left( \frac{\partial F_p}{\partial P_o} \right)_{l,NT,k}^{(\nu)} \delta P_{o,lmn}^{(\nu+1)*} + \left( \frac{\partial F_p}{\partial S_g} \right)_{l,NT,k}^{(\nu)} \delta S_{g,lmn}^{(\nu+1)*} + \left( \frac{\partial F_p}{\partial S_w} \right)_{l,NT,k}^{(\nu)} \delta S_{w,lmn}^{(\nu+1)*} \right\} \\
 & + \left( \frac{\partial F_p}{\partial P_{om}} \right)_{l,NT,k}^{(\nu)} \delta P_{om,l,NT,k}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_p}{\partial S_{gm}} \right)_{l,NT,k}^{(\nu)} \delta S_{gm,l,NT,k}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_p}{\partial S_{wm}} \right)_{l,NT,k}^{(\nu)} \delta S_{wm,l,NT,k}^{(\nu+1)} \\
 & = - F_{p,l,NT,k}^{(\nu)} \dots (3.39)
 \end{aligned}$$

donde  $lmn^* = 1,NT,k-1, 1,NT-1,k, i-1,NT,k, 1,NT,k, i+1,NT,k, 1,1,k,$   
 $1,NT,k+1$   
 $p = o, g, w$

Nótese que se origina la diagonal extra:  $1,1,k$ , por efecto de esta continuidad. En caso de que no se considere dicha continuidad, no aparece la diagonal extra.

Para los **BLOQUES DE MATRIZ**:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial F_{pm_{i,NT,k}}}{\partial P_{o_{i,NT,k}}} \right)^{(\nu)} \delta P_{o_{i,NT,k}}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pm_{i,NT,k}}}{\partial S_{g_{i,NT,k}}} \right)^{(\nu)} \delta S_{g_{i,NT,k}}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pm_{i,NT,k}}}{\partial S_{w_{i,NT,k}}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w_{i,NT,k}}^{(\nu+1)} \\
& + \left( \frac{\partial F_{pm_{i,NT,k}}}{\partial P_{om_{i,NT,k}}} \right)^{(\nu)} \delta P_{om_{i,NT,k}}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pm_{i,NT,k}}}{\partial S_{gm_{i,NT,k}}} \right)^{(\nu)} \delta S_{gm_{i,NT,k}}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{pm_{i,NT,k}}}{\partial S_{wm_{i,NT,k}}} \right)^{(\nu)} \delta S_{wm_{i,NT,k}}^{(\nu+1)} \\
& = - F_{pm_{i,NT,k}}^{(\nu)} \dots (3.40)
\end{aligned}$$

Las Ecs. 3.31 a 3.36, junto con las Ecs. 3.37 a 3.40 para el caso de continuidad angular, constituyen ahora un sistema lineal cuyas incógnitas son los cambios iterativos de las presiones y de las saturaciones, en las fracturas y en los bloques de matriz:  $\delta P_o$ ,  $\delta S_g$ ,  $\delta S_w$ ,  $\delta P_{om}$ ,  $\delta S_{gm}$  y  $\delta S_{wm}$ , en el nivel de iteración desconocido  $(\nu+1)$ , definido en general como:

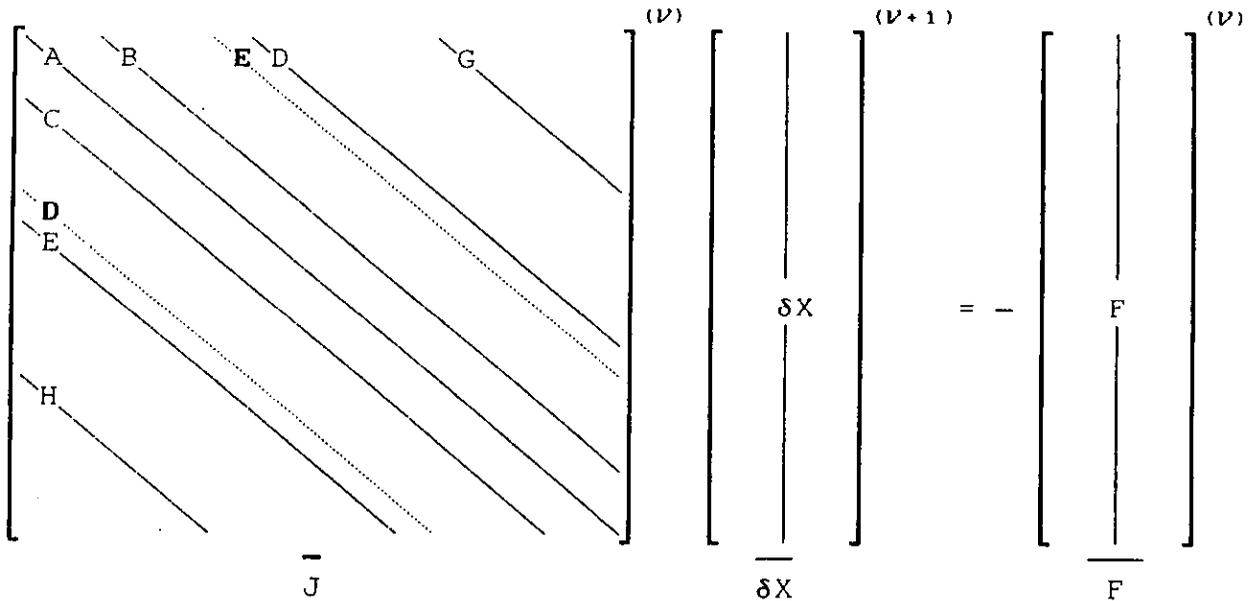
$$\delta X^{(\nu+1)} = X^{(\nu+1)} - X^{(\nu)} \dots (3.41)$$

El sistema lineal de ecuaciones puede expresarse mediante la siguiente ecuación general:

$$\begin{aligned}
& H_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1,j,k-1}^{(\nu+1)} + E_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1,j-1,k}^{(\nu+1)} + C_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1-1,j,k}^{(\nu+1)} + \\
& A_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1,j,k}^{(\nu+1)} + B_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1+1,j,k}^{(\nu+1)} + D_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1,j+1,k}^{(\nu+1)} + \\
& G_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1,j,k+1}^{(\nu+1)} = - F_{1,j,k}^{(\nu)} \dots (3.42)
\end{aligned}$$

La estructura matricial de este sistema de ecuaciones, Ec. 3.42,

para un ordenamiento normal y considerando continuidad en la dirección angular, Ecs. 3.37 a 3.40, es de la siguiente forma:



O en forma compacta:

$$\overline{J} \delta X = - \overline{F} \quad \dots (3.43)$$

donde, los elementos que constituyen a la matriz jacobiana son submatrices de 6x6, congruente con las 6 incógnitas que se tienen en cada celda de la malla de cálculo. Para un problema tridimensional en un sistema de coordenadas cartesianas se genera, para un ordenamiento normal de las ecuaciones y de las incógnitas, una matriz heptadiagonal (H, E, C, A, B, D, G); sin embargo para un sistema en coordenadas cilíndricas con continuidad en la dirección angular, aparecen 2 bandas adicionales (D y E). Los elementos que constituyen al vector de incógnitas,  $\delta X$ , y de residuos,  $\overline{F}$ , son subvectores de 6 elementos cada uno.

El subsistema de ecuaciones para el nodo  $i,j,k$  se puede particionar de la forma siguiente:

La submatriz  $A_{i,j,k}$  correspondiente al bloque-diagonal principal, se puede agrupar en submatrices de 3x3 como se indica a continuación<sup>4</sup>:

$$A_{i,j,k} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{F/F} & A_{F/M} \\ \hline A_{M/F} & A_{M/M} \end{array} \right]_{i,j,k} \quad \dots (3.44)$$

donde:  $A_{F/F,i,j,k}$ ,  $A_{F/M,i,j,k}$ ,  $A_{M/F,i,j,k}$  y  $A_{M/M,i,j,k}$  contienen derivadas de las funciones de residuos de la celda  $i,j,k$  con respecto a las incógnitas de esa misma celda, en particular:

$A_{F/F,i,j,k}$  es la submatriz de derivadas de las funciones de residuos de las fracturas con respecto a las incógnitas de las fracturas, la cual en forma matemática se expresa como:

$$A_{F/F,i,j,k} = \left[ \begin{array}{ccc} \left( \frac{\partial F_o}{\partial P_o} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_g} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_w} \right)_{i,j,k} \\ \left( \frac{\partial F_g}{\partial P_o} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_g} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_w} \right)_{i,j,k} \\ \left( \frac{\partial F_w}{\partial P_o} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_g} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_w} \right)_{i,j,k} \end{array} \right] \quad \dots (3.45)$$

$A_{F/M,i,j,k}$  es la submatriz de derivadas de las funciones de residuos de las fracturas con respecto a las incógnitas de los bloques de matriz.

$A_{M/F,i,j,k}$  es la submatriz de derivadas de las funciones de residuos de los bloques de matriz con respecto a las incógnitas de las fracturas.

$A_{M/M}^{i,j,k}$  es la submatriz de derivadas de las funciones de residuos de los bloques de matriz con respecto a las incógnitas de los bloques de matriz.

Las submatrices  $A_{F/M}^{i,j,k}$ ,  $A_{M/F}^{i,j,k}$  y  $A_{H/M}^{i,j,k}$  se definen en forma similar a la Ec. 3.45.

Las submatrices B, C, D, E, G y H correspondientes a los bloques-diagonales secundarios, se particionan consistentemente con la Ec. 3.45. Las submatrices correspondientes a los subíndices F/M, M/F y M/M son en este caso submatrices nulas. Tómese, por ejemplo, la submatriz  $B_{i,j,k}$ , que de acuerdo con lo anterior tiene la siguiente estructura:

$$B_{i,j,k} = \left[ \begin{array}{c|c} B_{F/F} & \square \\ \hline \square & \square \end{array} \right]_{i,j,k} \quad \dots (3.46)$$

donde:

$B_{F/F}^{i,j,k}$  es la submatriz de derivadas de las funciones de residuos de las fracturas de la celda  $i,j,k$  con respecto a las incógnitas de las fracturas de la celda  $i+1,j,k$ , o sea:

$$B_{F/F}^{i,j,k} = \left[ \begin{array}{ccc} \left( \frac{\partial F_o}{\partial P_o} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_g} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_w} \right)_{i,j,k} \\ \left( \frac{\partial F_g}{\partial P_o} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_g} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_w} \right)_{i,j,k} \\ \left( \frac{\partial F_w}{\partial P_o} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_g} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_w} \right)_{i,j,k} \end{array} \right] \quad \dots (3.47)$$

Los elementos de los vectores de incógnitas,  $\overline{\delta X}$ , y de términos conocidos,  $\overline{F}$ , se particionan en subvectores de 3 elementos, esto es:

para el vector de incógnitas,

$$\delta X_{i,j,k} = \begin{bmatrix} \delta P_o \\ \delta S_g \\ \delta S_w \\ \hline \delta P_{om} \\ \delta S_{gm} \\ \delta S_{wm} \end{bmatrix}_{i,j,k} \quad \dots (3.48)$$

y para el vector de residuos,

$$F_{i,j,k} = \begin{bmatrix} F_o \\ F_g \\ F_w \\ \hline F_{om} \\ F_{gm} \\ F_{wm} \end{bmatrix}_{i,j,k} \quad \dots (3.49)$$

Con base en esta estructura particular del sistema de ecuaciones, Ecs. 3.31 a 3.36, es posible acoplar las ecuaciones de los bloques de matriz en las ecuaciones de las fracturas<sup>4,6</sup> como se describe en el Apéndice D. Las ecuaciones acopladas son:

Para el **ACEITE**,

$$\sum_{l,m,n} \left\{ \left( \frac{\partial F_o}{\partial P_o} \right)_{l,j,k}^{(V)} \delta P_o^{(V+1)}_{l,m,n} + \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_g} \right)_{l,j,k}^{(V)} \delta S_g^{(V+1)}_{l,m,n} + \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_w} \right)_{l,j,k}^{(V)} \delta S_w^{(V+1)}_{l,m,n} \right\} \\ + \left\{ \left( \frac{\partial F_o}{\partial P_o} \right)_{l,j,k}^{(V)} + \theta_{oo}^{(V)}_{l,j,k} \right\} \delta P_o^{(V+1)}_{l,j,k} + \left\{ \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_g} \right)_{l,j,k}^{(V)} + \theta_{og}^{(V)}_{l,j,k} \right\} \delta S_g^{(V+1)}_{l,j,k}$$

$$+ \left\{ \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_w} \right)_{1,j,k}^{(\nu)} + \theta_{ow}^{(\nu)} \right\} \delta S_w^{(\nu+1)} = - \left\{ F_o^{(\nu)} + \epsilon_o^{(\nu)} \right\} \quad \dots (3.50)$$

donde:

$$1mn = 1,j,k-1, \quad 1,j-1,k, \quad 1-1,j,k, \quad 1+1,j,k, \quad 1,j+1,k, \quad 1,j,k+1$$

Para el **GAS**,

$$\begin{aligned} & \sum_{1mn} \left\{ \left( \frac{\partial F_g}{\partial P_o} \right)_{1mn}^{(\nu)} \delta P_o^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_g} \right)_{1mn}^{(\nu)} \delta S_g^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_w} \right)_{1mn}^{(\nu)} \delta S_w^{(\nu+1)} \right\} \\ & + \left\{ \left( \frac{\partial F_g}{\partial P_o} \right)_{1,j,k}^{(\nu)} + \theta_{go}^{(\nu)} \right\} \delta P_o^{(\nu+1)} + \left\{ \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_g} \right)_{1,j,k}^{(\nu)} + \theta_{gg}^{(\nu)} \right\} \delta S_g^{(\nu+1)} \\ & + \left\{ \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_w} \right)_{1,j,k}^{(\nu)} + \theta_{gw}^{(\nu)} \right\} \delta S_w^{(\nu+1)} = - \left\{ F_g^{(\nu)} + \epsilon_g^{(\nu)} \right\} \quad \dots (3.51) \end{aligned}$$

Y para el **AGUA**,

$$\begin{aligned} & \sum_{1mn} \left\{ \left( \frac{\partial F_w}{\partial P_o} \right)_{1mn}^{(\nu)} \delta P_o^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_g} \right)_{1mn}^{(\nu)} \delta S_g^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_w} \right)_{1mn}^{(\nu)} \delta S_w^{(\nu+1)} \right\} \\ & + \left\{ \left( \frac{\partial F_w}{\partial P_o} \right)_{1,j,k}^{(\nu)} + \theta_{wo}^{(\nu)} \right\} \delta P_o^{(\nu+1)} + \left\{ \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_g} \right)_{1,j,k}^{(\nu)} + \theta_{wg}^{(\nu)} \right\} \delta S_g^{(\nu+1)} \\ & + \left\{ \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_w} \right)_{1,j,k}^{(\nu)} + \theta_{ww}^{(\nu)} \right\} \delta S_w^{(\nu+1)} = - \left\{ F_w^{(\nu)} + \epsilon_w^{(\nu)} \right\} \quad \dots (3.52) \end{aligned}$$

donde  $\theta_{fo}$ ,  $\theta_{fg}$ ,  $\theta_{fw}$  y  $\epsilon_f$ ,  $f=o,g,w$ , son los términos resultantes del acoplamiento de las ecuaciones de los bloques de matriz en las ecuaciones de las fracturas, definidos en el Apéndice D.

Nuevamente se tiene una forma muy particular de las Ecs. 3.50 a 3.52 para los nodos  $j=1$  y  $j=NT$  al considerar la continuidad en la dirección angular, ya que aparecen contribuciones provenientes de los nodos  $i,NT,k$  e  $i,1,k$ , respectivamente, lo que da origen a dos diagonales mas. De igual forma, cuando no se considera esta continuidad no existen estos términos adicionales.

Mediante este acoplamiento, se ha reducido el sistema de ecuaciones a uno que contiene únicamente a las incógnitas de las fracturas,  $\delta P_o$ ,  $\delta S_g$  y  $\delta S_w$ .

Las Ecs. 3.50 a 3.52 pueden escribirse de una manera mas concisa como:

$$\begin{aligned}
 & h_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1,j,k-1}^{(\nu+1)} + e_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1,j-1,k}^{(\nu+1)} + c_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1-1,j,k}^{(\nu+1)} + \\
 & a_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1,j,k}^{(\nu+1)} + b_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1+1,j,k}^{(\nu+1)} + d_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1,j+1,k}^{(\nu+1)} + \\
 & g_{1,j,k}^{(\nu)} \delta X_{1,j,k+1}^{(\nu+1)} = - f_{1,j,k}^{(\nu)} \dots (3.53)
 \end{aligned}$$

para  $i=1, 2, \dots, NR$   
 $j=1, 2, \dots, NT$   
 $k=1, 2, \dots, NZ$   
 $(\nu)=0, 1, 2, \dots$

La estructura matricial del sistema reducido de ecuaciones, para un ordenamiento normal, es el siguiente:

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} a \\ c \\ d \\ e \\ h \end{array} \right] \begin{array}{c} \text{---} b \text{---} \\ \text{---} d \text{---} \\ \text{---} e \text{---} \\ \text{---} g \text{---} \end{array} \left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} (\nu) \\ \delta X^* \\ (\nu+1) \end{array} = - \left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} (\nu) \\ F^* \\ (\nu) \end{array}
 \end{array}$$

$\overline{J}^*$                        $\overline{\delta X}^*$                        $\overline{F}^*$

Que también puede escribirse en forma compacta como:

$$\overline{J}^* \overline{\delta X}^* = - \overline{F}^* \quad \dots (3.54)$$

Los elementos de la matriz jacobiana,  $\overline{J}^*$ , son ahora submatrices de 3x3, definidas como:

Para el bloque-diagonal principal,

$$a_{i,j,k} = A_{F/F}{}_{i,j,k} + \theta_{i,j,k} \quad \dots (3.55)$$

donde la matriz  $A_{F/F}{}_{i,j,k}$  está definida por la Ec. 3.45 y la matriz  $\theta$  está dada por:

$$\theta_{i,j,k} = \begin{bmatrix} \theta_{oo}{}_{i,j,k} & \theta_{og}{}_{i,j,k} & \theta_{ow}{}_{i,j,k} \\ \theta_{go}{}_{i,j,k} & \theta_{gg}{}_{i,j,k} & \theta_{gw}{}_{i,j,k} \\ \theta_{wo}{}_{i,j,k} & \theta_{wg}{}_{i,j,k} & \theta_{ww}{}_{i,j,k} \end{bmatrix} \quad \dots (3.56)$$

Los elementos de los bloques diagonales b, c, d, e, g y h están definidos en forma similar a la submatriz  $B_{F/F}{}_{i,j,k}$ , Ec. 3.47, es decir:

$$\begin{aligned}
 b_{1,j,k} &= B_{F/F \ 1,j,k} & c_{1,j,k} &= C_{F/F \ 1,j,k} & d_{1,j,k} &= D_{F/F \ 1,j,k} \\
 e_{1,j,k} &= E_{F/F \ 1,j,k} & g_{1,j,k} &= G_{F/F \ 1,j,k} & h_{1,j,k} &= H_{F/F \ 1,j,k}
 \end{aligned}$$

Los elementos de los vectores de incógnitas y de términos conocidos, están definidos de la siguiente manera:

$$\delta X_{1,j,k}^* = \begin{bmatrix} \delta P_{o \ 1,j,k} \\ \delta S_{g \ 1,j,k} \\ \delta S_{w \ 1,j,k} \end{bmatrix} \quad \dots (3.57)$$

Y

$$F_{1,j,k}^* = - \begin{bmatrix} F_{o \ 1,j,k} + \epsilon_{o \ 1,j,k} \\ F_{g \ 1,j,k} + \epsilon_{g \ 1,j,k} \\ F_{w \ 1,j,k} + \epsilon_{w \ 1,j,k} \end{bmatrix} \quad \dots (3.58)$$

Nótese que cuando la submatriz  $\theta$ , Ec. 3.56, y el subvector  $\epsilon$ , de la Ec. 3.58, son nulos, el sistema de ecuaciones se reduce al correspondiente al de un yacimiento no-fracturado<sup>4</sup>.

El acoplamiento de las ecuaciones de los bloques de matriz en las ecuaciones de las fracturas, de la manera descrita, reduce drásticamente la cantidad de memoria, de trabajo y de tiempo de cómputo, requeridos para la simulación del flujo de fluidos en yacimientos naturalmente fracturados. El trabajo computacional empleando esta técnica es ligeramente mayor que el trabajo requerido en la simulación de yacimientos no-fracturados.

En el Apéndice E se presentan las definiciones de las derivadas de las funciones de residuos de las fracturas con respecto a cada una de las incógnitas.

El proceso iterativo del método de Newton-Raphson se inicia suponiendo que en la iteración cero,  $\nu=0$ , la distribución de presiones y de saturaciones, tanto en las fracturas como en los bloques de matriz, es la que se tiene en el nivel de tiempo conocido  $n$ , esto es:

$$\begin{aligned}
 P_{o,i,j,k}^{(0)} &= P_{o,i,j,k}^n; & P_{om,i,j,k}^{(0)} &= P_{om,i,j,k}^n \\
 S_{g,i,j,k}^{(0)} &= S_{g,i,j,k}^n; & S_{gm,i,j,k}^{(0)} &= S_{gm,i,j,k}^n \\
 S_{w,i,j,k}^{(0)} &= S_{w,i,j,k}^n; & S_{wm,i,j,k}^{(0)} &= S_{wm,i,j,k}^n \quad \dots (3.59)
 \end{aligned}$$

para  $i = 1,2,3,\dots, NR$   
 $j = 1,2,3,\dots, NT$   
 $k = 1,2,3,\dots, NZ$

El sistema de ecuaciones lineales generado al aplicar las Ecs. 3.50 a 3.52 en cada una de las celdas, y en cada iteración newtoniana, puede resolverse mediante métodos directos o iterativos. Una vez que se resuelven los cambios iterativos de las incógnitas de las fracturas,  $\delta P_o$ ,  $\delta S_g$  y  $\delta S_w$ , se obtienen las incógnitas de presión y de saturación al nivel de iteración desconocido  $(\nu+1)$ , esto es:

$$\begin{aligned}
 P_{o,i,j,k}^{(\nu+1)} &= P_{o,i,j,k}^{(\nu)} + \delta P_{o,i,j,k}^{(\nu+1)} \\
 S_{g,i,j,k}^{(\nu+1)} &= S_{g,i,j,k}^{(\nu)} + \delta S_{g,i,j,k}^{(\nu+1)} \\
 S_{w,i,j,k}^{(\nu+1)} &= S_{w,i,j,k}^{(\nu)} + \delta S_{w,i,j,k}^{(\nu+1)} \quad \dots (3.60)
 \end{aligned}$$

Después de resolver las incógnitas de las fracturas, se evalúan los cambios iterativos de las incógnitas de los bloques de matriz,  $\delta P_{om}$ ,  $\delta S_{gm}$  y  $\delta S_{wm}$ , aplicando directamente las Ecs. D.25, en cada nodo  $i, j, k$ . De esta forma, se pueden calcular las incógnitas de presión y de saturación de los bloques de matriz, al nivel de iteración desconocido  $(\nu+1)$ , esto es:

$$\begin{aligned}
 P_{om, i, j, k}^{(\nu+1)} &= P_{om, i, j, k}^{(\nu)} + \delta P_{om, i, j, k}^{(\nu+1)} \\
 S_{gm, i, j, k}^{(\nu+1)} &= S_{gm, i, j, k}^{(\nu)} + \delta S_{gm, i, j, k}^{(\nu+1)} \\
 \text{Y} \\
 S_{wm, i, j, k}^{(\nu+1)} &= S_{wm, i, j, k}^{(\nu)} + \delta S_{wm, i, j, k}^{(\nu+1)} \quad \dots (3.61)
 \end{aligned}$$

El proceso de solución de las incógnitas en el nivel de tiempo  $n+1$ , termina cuando los cambios iterativos de las incógnitas, de las fracturas y de los bloques de matriz, convergen dentro de una tolerancia predeterminada, en todos los nodos  $i, j, k$ , es decir:

$$\begin{aligned}
 \left| \delta P_{o, i, j, k}^{(\nu+1)} \right| &\leq \text{TOL-PRE} & \left| \delta P_{om, i, j, k}^{(\nu+1)} \right| &\leq \text{TOL-PRE} \\
 \left| \delta S_{g, i, j, k}^{(\nu+1)} \right| &\leq \text{TOL-SAT} & \left| \delta S_{gm, i, j, k}^{(\nu+1)} \right| &\leq \text{TOL-SAT} \\
 \left| \delta S_{w, i, j, k}^{(\nu+1)} \right| &\leq \text{TOL-SAT} & \left| \delta S_{wm, i, j, k}^{(\nu+1)} \right| &\leq \text{TOL-SAT}
 \end{aligned}$$

... (3.62)

para toda  $i = 1, 2, 3, \dots, NR$   
 $j = 1, 2, 3, \dots, NT$   
 $k = 1, 2, 3, \dots, NZ$

Conocidas las distribuciones de presión y de saturación en las fracturas y en los bloques de matriz, es posible calcular los ritmos de producción de gas y de agua y los volúmenes de fluidos transferidos entre las fracturas y los bloques de matriz, durante un intervalo de tiempo.

Los métodos empleados en la solución de los sistemas lineales de ecuaciones, generados mediante el esquema iterativo del método de Newton-Raphson se describen en el siguiente capítulo.

4. SOLUCION DEL SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES.

En este Capítulo se presentan los métodos de solución de los sistemas lineales de ecuaciones, generados en cada iteración newtoniana. Se evaluará el desempeño de dos métodos directos y tres iterativos. Se compara la eficiencia de estos métodos resolviendo un problema específico, publicado en la literatura<sup>31</sup>, diseñado especialmente para probar la estabilidad de simuladores de conificación. También, se estudia la eficiencia del algoritmo de ordenamiento D4<sup>21</sup> y se compara su eficiencia contra un ordenamiento estándar o normal.

Con respecto a los métodos iterativos, se presenta un algoritmo para el cálculo automático del parámetro de sobrerelajación óptimo<sup>15</sup> y se discute su efecto sobre la velocidad de convergencia de la solución.

#### 4.1 METODOS DIRECTOS.

La solución numérica de los problemas del flujo de fluidos a través de medios porosos generan sistemas lineales de ecuaciones, que en forma matricial conforman una matriz dispersa con una estructura bandada, en la cual los elementos diferentes de cero de esta matriz están sobre una banda de ancho predecible.

En los métodos directos, el trabajo computacional y el requerimiento de memoria están directamente relacionados con el número de ecuaciones o de incógnitas a resolver. Entre mayor sea este número, el ancho de banda del sistema matricial de ecuaciones es generalmente mayor y la cantidad de memoria de cómputo y de tiempo de ejecución son también mayores<sup>21</sup>. El número de ecuaciones o de

incógnitas de un sistema (NES), está en función del número total de bloques o celdas en que se discretiza el dominio de interés,  $NCT = NR \cdot NT \cdot NZ$ , y del número de pseudocomponentes considerados,  $NF$ , 3, gas y aceite del separador y agua, esto es:  $NES = NF \cdot NCT$ .

Dadas las características de los sistemas de ecuaciones generados en la simulación numérica de yacimientos, un aspecto importante que afecta el trabajo computacional empleado en la solución de sistemas de ecuaciones, es el esquema de ordenamiento del sistema lineal de ecuaciones, por lo que se han desarrollado algoritmos para reducir el trabajo computacional. Entre estos está el esquema de ordenamiento D4, que juntamente con algoritmos especializados para tomar en cuenta el grado de dispersión de la matriz de coeficientes, permiten resolver de manera óptima los sistemas de ecuaciones generados en algunas aplicaciones de la simulación numérica de yacimientos.

Por otra parte, la ventaja de los métodos directos de solución es que no se tiene el problema de la elección de parámetros de iteración, que es la parte vulnerable de los métodos iterativos.

#### 4.1.1 ORDENAMIENTO ESTANDARD.

El esquema de ordenamiento estándar o normal, para un problema tridimensional, consiste en ordenar los nodos de la malla de cálculo, primero en la dirección con el número de nodos más pequeño, luego en la dirección con el siguiente menor número y finalmente en la dirección con el mayor número de nodos. Como ejemplo, considérese un sistema coordenado cartesiano donde se tienen 6 nodos en la

dirección X,  $NX=6$ ; 4 nodos en la dirección Y,  $NY=4$  y 2 en la dirección Z,  $NZ=2$ . Se considera también que se tiene una fase,  $NF=1$ , por lo que el número de ecuaciones está dado por:

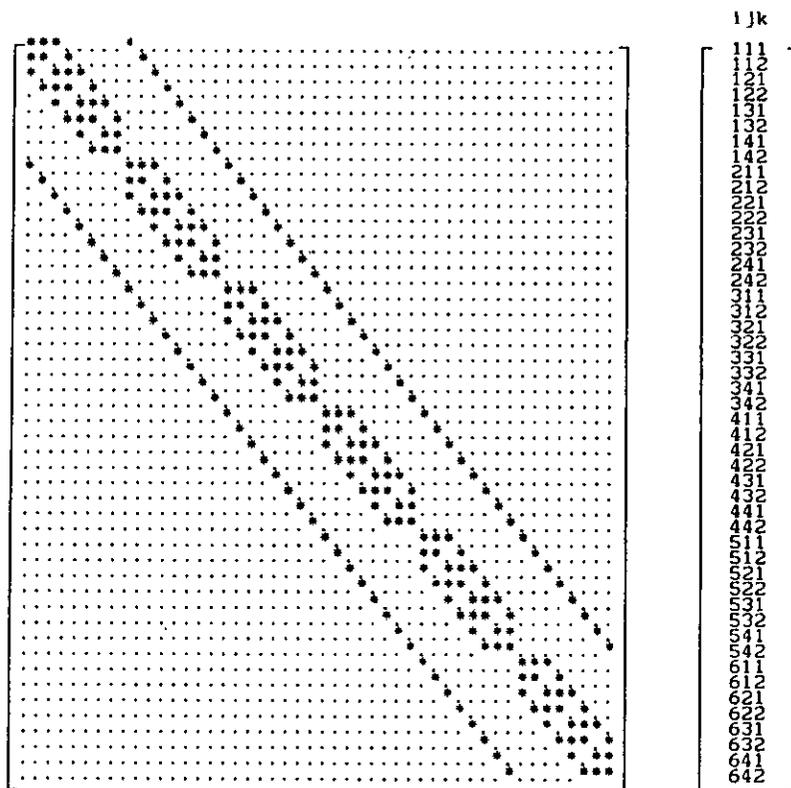
$$NES = NF * NCT = 1 * 48 = 48$$

El ordenamiento estándar o normal, para este ejemplo, es el siguiente:

k=1	i=	1	2	3	4	5	6
	j=1	1	9	17	25	33	41
	2	3	11	19	27	35	43
	3	5	13	21	29	37	45
	4	7	15	23	31	39	47

k=2	i=	1	2	3	4	5	6
	j=1	2	10	18	26	34	42
	2	4	12	20	28	36	44
	3	6	14	22	30	38	46
	4	8	16	24	32	40	48

Por lo que la forma de la matriz de coeficientes es:

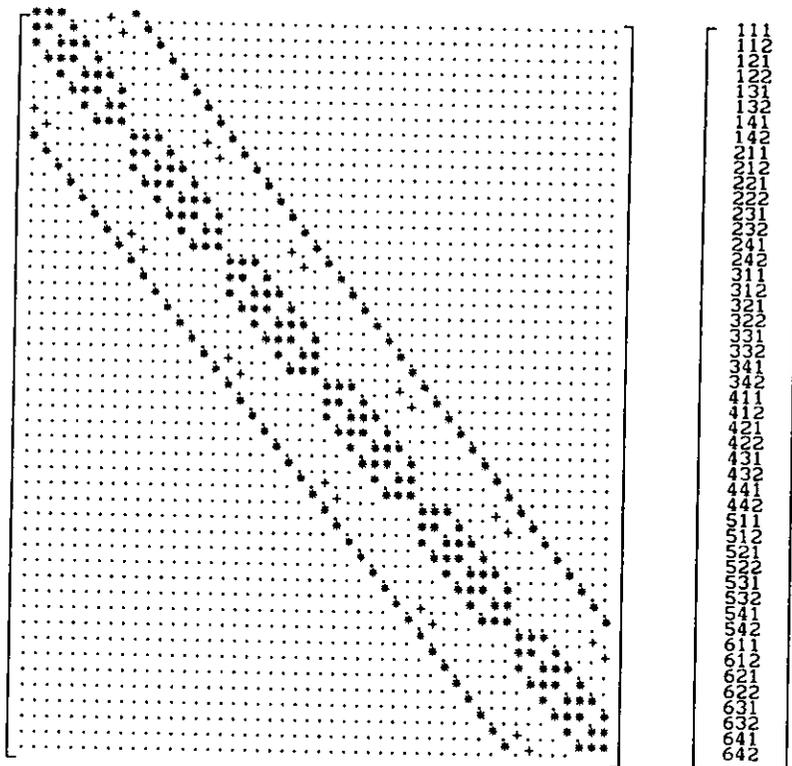


donde: los asteriscos (\*) representan elementos diferentes de cero,  
 y los puntos (.) corresponden a elementos iguales a cero.

Nótese que el ancho de banda de esta matriz, con el ordenamiento estándar, es  $NB = K*J = 8$ . Si se hubiésemos ordenado primero en la dirección X, luego en la dirección Y y por último en la dirección Z, el ancho de banda sería de  $NB = I*J = 24$ . Esto repercutiría fuertemente en la eficiencia del método directo de solución del sistema de ecuaciones.

Para este mismo ejemplo, pero considerando ahora un sistema de coordenadas cilíndricas,  $NR=6$ ,  $NT=4$  y  $NZ=2$ , el ordenamiento estándar óptimo o de menor tamaño de banda, genera un sistema de ecuaciones con la siguiente estructura:

**ESTA TESIS NO DEBE  
 SER DE LA BIBLIOTECA**



donde: el signo (+) es un elemento diferente de cero, generado a partir de las condiciones de continuidad que existe en la dirección angular. En el caso en que no exista tal continuidad, estos elementos son iguales a cero y no hay diferencia en la estructura de los sistemas de ecuaciones para ambos sistemas de coordenadas<sup>15</sup>. Nótese que el ancho de banda sigue siendo el mismo,  $NB=8$ .

En el caso de un sistema de coordenadas cilíndricas, Aziz et al.<sup>15</sup> recomiendan, cuando existe continuidad en la dirección angular, que esta dirección siempre sea ordenada en segundo lugar. En primer lugar deberá ordenarse aquella dirección, radial ó vertical, que tenga el menor número de nodos, y en tercer lugar la que tenga el mayor número de nodos.

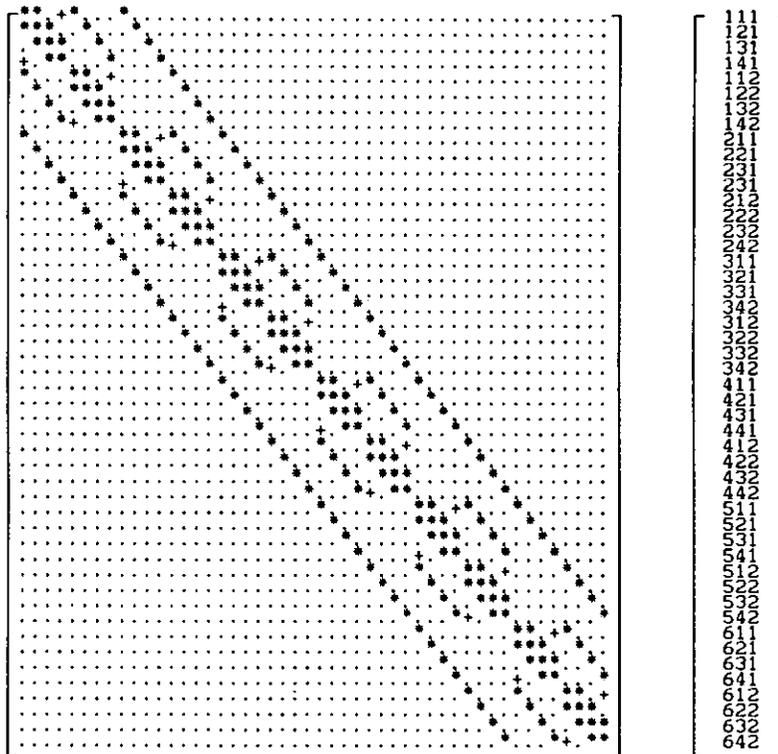
En este trabajo la forma de ordenar las ecuaciones se realiza de la siguiente manera: Se ordena primero en la dirección angular y luego en las otras dos direcciones, tomando primero la dirección con el menor número de nodos y posteriormente la que tiene el mayor número de nodos. Esto obedece al hecho, de tener normalmente un mayor número de nodos tanto en la dirección vertical como radial, más que en la dirección angular. El ordenamiento propuesto, es consistente con las recomendaciones antes descritas.

De acuerdo con lo anterior y para este ejemplo, se tiene el siguiente ordenamiento:

k=1	i=	1	2	3	4	5	6
	j=1	1	9	17	25	33	41
	2	2	10	18	26	34	42
	3	3	11	19	27	35	43
	4	4	12	20	28	36	44

k=2	i=	1	2	3	4	5	6
	j=1	5	13	21	29	37	45
	2	6	14	22	30	38	46
	3	7	15	23	31	39	47
	4	8	16	24	32	40	48

Y la forma de la matriz de coeficientes, es la siguiente:



Nótese que el ancho de banda sigue siendo el mismo:  $NB=8$ . Sin embargo, los elementos con el signo (+) están ahora en otra posición. Esto optimiza la solución del sistema de ecuaciones cuando se emplean métodos iterativos, como el BSOR.

#### 4.1.2 ORDENAMIENTO D4.

Price y Coats<sup>21</sup> presentan otro tipo de ordenamiento, denominado ORDENAMIENTO D4, que resulta ser más eficiente que el anterior, ya que de acuerdo con los autores, puede reducir hasta en un factor de 6 el tiempo de ejecución y hasta en un factor de 3 el requerimiento de memoria de cómputo. El esquema de ordenamiento D4 consiste en ordenar las ecuaciones conforme a planos diagonales alternados definidos como  $M$ . El número de planos diagonales totales

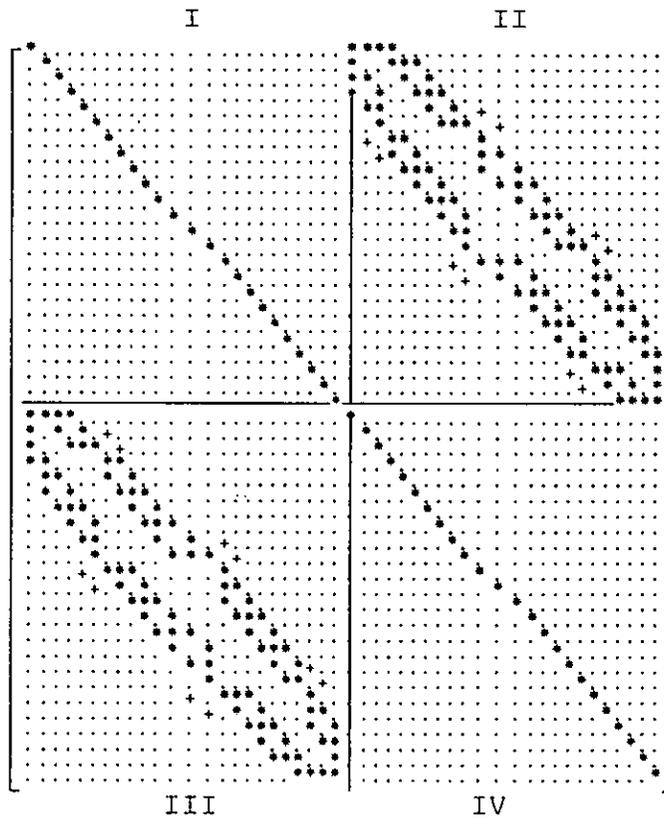
se calcula como:  $M = NR + NT + NZ - 2$ . Si  $M$  es par, entonces los planos se eligen en el siguiente orden:  $m=3,5,7,\dots,M-1,4,6,8,\dots,M$ . Si por el contrario,  $M$  es impar, se eligen en el siguiente orden:  $m=3,5,7,\dots,M,4,6,\dots,M-1$ .

Para el ejemplo presentado en la sección anterior, el número de planos diagonales totales está dado como:  $M = 6 + 4 + 2 - 2 = 10$ . Por lo tanto, de acuerdo con lo anterior, el ordenamiento  $D_4$  para este caso, comenzando por la dirección angular, luego por la vertical y finalmente por la radial, está dado como:

k=1	i=	1	2	3	4	5	6
	j=1	1	27	6	34	14	42
	2	25	4	32	12	40	20
	3	2	30	10	38	18	46
	4	28	8	36	16	44	23

k=2	i=	1	2	3	4	5	6
	j=1	26	5	33	13	41	21
	2	3	31	11	39	19	27
	3	29	9	37	17	45	24
	4	7	35	15	43	22	48

La forma de la matriz de coeficientes, para este ejemplo es la siguiente:



Esta matriz se puede particionar en cuatro cuadrantes, como se muestra en el esquema previo, en donde los cuadrantes I y IV son submatrices diagonales y los cuadrantes II y III son submatrices bandadas. La dificultad para el problema de flujo  $(r, \theta, z)$ , con continuidad en la dirección  $\theta$ , estriba en determinar el ancho de banda de los cuadrantes II y III. Este ancho de banda es mayor al que se tendría si no existiera continuidad en la dirección  $\theta$ . No es simple predecir en donde aparecerán los elementos (+), ya que en algunos casos pueden incluso aparecer en los cuadrantes I y IV. Esto dificulta la aplicación de algoritmos de banda para resolver este tipo de problemas.

El esquema de ordenamiento D4 y el algoritmo de banda<sup>1, 15</sup>

constituyen un método directo de solución, para resolver eficientemente los sistemas de ecuaciones aquí planteados, que matricialmente se expresa como:

$$\bar{P} \bar{\delta X}_p = - \bar{r}_p \quad \dots (4.1)$$

donde  $\bar{P}$  es la matriz de coeficientes,

$\bar{\delta X}_p$  es el vector solución o de incógnitas, y

$\bar{r}_p$  es el vector de términos conocidos.

La principal desventaja de los algoritmos de banda es que tratan a los ceros que están dentro de la banda como elementos diferentes de cero. Esto puede afectar la eficiencia de estos algoritmos, sobretodo si son aplicados a problemas con un número de incógnitas grande<sup>15</sup>.

De acuerdo con el esquema de ordenamiento D4, el sistema de ecuaciones, dado por la Ec. 4.1, se puede particionar como sigue:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 & \bar{P}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta X}_{p1} \\ \bar{\delta X}_{p2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{r}_{p1} \\ \bar{r}_{p2} \end{bmatrix} \quad \dots (4.2)$$

en donde  $\bar{P}_1$  y  $\bar{P}_4$  son submatrices diagonales y  $\bar{P}_2$  y  $\bar{P}_3$  son submatrices bandadas, correspondientes a los 4 cuadrantes obtenidos de este ordenamiento. Los subvectores  $\bar{\delta X}_{p1}$ ,  $\bar{\delta X}_{p2}$ ,  $\bar{r}_{p1}$  y  $\bar{r}_{p2}$  son congruentemente definidos. Como primera etapa, aplicando el proceso de eliminación hacia adelante en la mitad inferior de la matriz  $\bar{P}$ , es posible reducir la submatriz  $\bar{P}_3$  a una submatriz nula. Esto es:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ 0 & \bar{P}_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta X}_{P1} \\ \bar{\delta X}_{P2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{r}_{P1} \\ \bar{r}_{P2}^* \end{bmatrix} \quad \dots (4.3)$$

En el proceso de eliminación, la submatriz diagonal  $\bar{P}_4$  se transforma en una submatriz bandada,  $\bar{P}_4^*$ , y el vector  $\bar{r}_{P2}$  en  $\bar{r}_{P2}^*$ . Ahora es posible resolver en forma independiente el sistema de ecuaciones de la mitad inferior de la Ec. 4.3. Esto es:

$$\bar{P}_4^* \bar{\delta X}_{P2} = - \bar{r}_{P2}^* \quad \dots (4.4)$$

Se resuelve el subsistema dado en la Ec. 4.4 mediante un algoritmo de banda, para obtener el vector  $\bar{\delta X}_{P2}$ , y después se calcula el vector  $\bar{\delta X}_{P1}$  mediante una sustitución regresiva, ya que la submatriz  $\bar{P}_1$  es una submatriz diagonal, esto último se expresa matemáticamente como:

$$\bar{\delta X}_{P1} = - \bar{P}_1^{-1} \left[ \bar{r}_{P1} + \bar{P}_2 \bar{\delta X}_{P2} \right] \quad \dots (4.5)$$

Existen, sin embargo, otros métodos directos de solución, especializados en operar únicamente con elementos diferentes de cero, denominados métodos para matrices dispersas<sup>22</sup>, como se revisará a continuación.

### 4.1.3 NSPIV, ELIMINACION GAUSSIANA DE MATRICES DISPERSAS CON PIVOTEO PARCIAL.

El método NSPIV<sup>22</sup> permite resolver un sistema lineal de ecuaciones en forma directa. En este método se toma ventaja del grado de dispersión de la matriz para eliminar operaciones con elementos iguales a cero. Con esto, la solución se torna más eficiente, comparada con la eliminación Gaussiana normal<sup>25</sup>.

Además, tiene la capacidad de manejar ordenamientos arbitrarios de las ecuaciones para optimizar el proceso de eliminación, así como el pivoteo parcial cuando es necesario.

El procedimiento de solución es el siguiente.

Considérese el sistema lineal de ecuaciones expresado de la siguiente manera:

$$\bar{A} \bar{x} = \bar{b} \quad \dots (4.6)$$

donde  $\bar{A}$  es una matriz dispersa no singular de orden  $(NES \times NES)$ .

$\bar{x}$  es el vector de incógnitas, y

$\bar{b}$  es el vector de términos conocidos.

La eliminación Gaussiana se efectúa con intercambios de columnas en la matriz  $\bar{A}$ , para obtener una factorización de la forma:

$$\bar{A} \bar{Q} = \bar{L} \bar{U} \quad \dots (4.7)$$

donde  $\bar{L}$  es una matriz triangular inferior,

$\bar{U}$  es una matriz triangular superior.

$\bar{Q}$  es una matriz de permutación correspondiente a los cambios de columna.

Substituyendo la Ec. 4.7 en la Ec. 4.6, se establece el siguiente sistema:

$$\bar{L} \bar{U} \bar{Q}^T \bar{x} = \bar{b} \quad \dots (4.8)$$

Para no incrementar los requerimientos de memoria de cómputo, solamente se conserva la matriz  $\bar{U}$  de la eliminación Gaussiana. La Ec. 4.8 se puede descomponer en los siguientes subsistemas:

$$\bar{L} \bar{y} = \bar{b} \quad \dots (4.9)$$

y

$$\bar{U} \bar{Q}^T \bar{x} = \bar{y} \quad \dots (4.10)$$

Se resuelve primero el subsistema dado por la Ec. 4.9, mediante una sustitución hacia adelante para obtener el vector  $\bar{y}$ , y posteriormente se calcula el vector  $\bar{x}$ , de la Ec. 4.10, mediante una sustitución hacia atrás.

El algoritmo del método NSPIV está programado en lenguaje FORTRAN en la Ref. 22 y consiste de las siguientes dos subrutinas:

NSPIV - Subrutina principal, en donde se aparta el área de trabajo de los arreglos temporales y en donde se hace la llamada a la subrutina NSPIV1.

NSPIV1 - Esta subrutina es accesada por la anterior. En ella se efectúa la eliminación Gaussiana con pivoteo parcial.

Como se discutió anteriormente, la forma de ordenar las

incógnitas influye en la eficiencia del método de solución, por lo que el paquete NSPIV cuenta con 3 vectores para guardar el esquema de ordenamiento seleccionado, el cual puede ser el ordenamiento normal ó D4. Estos vectores son:

**R** Arreglo de variables enteras de orden  $NES$ , que especifica el orden de los renglones de la matriz  $\bar{A}$ .

**C** Arreglo de variables enteras de orden  $NES$ , que especifica el orden de las columnas de la matriz  $\bar{A}$ .

**IC** Arreglo de variables enteras de orden  $NES$ , el cual está en función del arreglo **C**.

El paquete de programas de NSPIV requiere de tres vectores para almacenar los elementos diferentes de cero de la matriz  $\bar{A}$ ; estos son: **M**, **JM** e **IM**.

**M** Vector que contiene los elementos diferentes de cero, renglón por renglón.

**JM** Vector que contiene el número de la columna correspondiente a los elementos almacenados en el vector **M** y

**IM** Vector que contiene la dirección del primer elemento diferente de cero de cada renglón.

La dirección del elemento diferente de cero  $l$  en el renglón  $p$  es igual al número acumulado de elementos diferentes de cero hasta el renglón  $p-1$  mas  $l$ . El último elemento del vector **IM** debe ser igual al número de elementos diferentes de cero de la matriz  $\bar{A}$  más uno, de tal manera que se cumpla lo siguiente:

$$\mathbf{IM}(1) - \mathbf{IM}(N+1) = \text{Al número de elementos diferentes de cero de } \bar{A}$$

A continuación se presenta un ejemplo para mostrar la forma de llenar estos vectores<sup>25</sup>:

Considérese la siguiente matriz  $\bar{A}$  de orden 6x6, para un ordenamiento estandard:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

El vector **M**, donde se almacenan los elementos diferentes de cero, está definido como:

$$\mathbf{M} = 7, 3, 1, 2, 8, 6, 3, 4, 1, 7, 5, 3, 2, 5, 6, 1, 3, 4, \\ 9, 2, 1, 6$$

El vector **JM**, donde se almacena el número de la columna de cada uno de estos elementos, está definido como:

$$\mathbf{JM} = 1, 2, 4, 1, 2, 3, 5, 2, 3, 4, 6, 1, 3, 4, 5, 2, 4, 5, \\ 6, 3, 5, 6$$

El vector **IM**, donde se almacena la dirección del primer elemento diferente de cero de cada renglón, está definido como:

$$\mathbf{IM} = 1, 4, 8, 12, 16, 20, 23$$

Las dimensiones de estos vectores son:

$$\mathbf{NED} \quad \text{para } \mathbf{M} \text{ y } \mathbf{JM}, \text{ y}$$

$$\mathbf{Nr} + 1 \quad \text{para } \mathbf{IM}$$

donde **NED** es el número de elementos diferentes de cero y

$Nr$  es el número de renglones de la matriz  $\bar{A}$ .

El vector  $R$ , donde se almacena el orden de los renglones de la matriz  $\bar{A}$ , está dado como:

$R = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,$   
 $19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34,$   
 $35, 36.$

El vector  $C$ , donde se almacena el orden de las columnas de la matriz  $\bar{A}$ , está dado como:

$C = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,$   
 $19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34,$   
 $35, 36.$

El vector  $IC$ , definido como  $IC( C(I) )=I$ , está dado como:

$IC = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,$   
 $19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34,$   
 $35, 36.$

Esta misma matriz  $\bar{A}$ , pero considerando ahora un ordenamiento D4, se define como:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

por lo que, el vector  $M$  se define ahora como:

**M** = 7, 3, 3, 2, 5, 1, 1, 6, 2, 3, 8, 3, 1, 6, 4, 2, 7, 1,  
9, 4, 6, 5

El vector **JM** se define como:

**JM** = 1, 2, 3, 4, 3, 5, 1, 2, 3, 5, 2, 3, 6, 1, 2, 4, 5, 6,  
1, 2, 5, 6

y el vector **IM** se define como:

**IM** = 1, 5, 7, 11, 14, 19, 23

El vector **R**, se define como:

**R** = 1, 3, 8, 13, 5, 10, 15, 20, 25, 12, 17, 22, 27, 32, 24, 29, 34,  
36, 2, 7, 4, 9, 14, 19, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 18, 23, 28, 33,  
30, 35.

El vector **C**, se define como:

**C** = 1, 3, 8, 13, 5, 10, 15, 20, 25, 12, 17, 22, 27, 32, 24, 29, 34,  
36, 2, 7, 4, 9, 14, 19, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 18, 23, 28, 33,  
30, 35.

El vector **IC**, se define como:

**IC** = 1, 19, 2, 21, 5, 25, 20, 3, 22, 6, 26, 10, 4, 23, 7, 27, 11,  
31, 24, 8, 28, 12, 32, 15, 9, 29, 13, 33, 16, 35, 30, 14, 34,  
17, 36, 18.

Para efectuar la eliminación Gaussiana, este paquete requiere que se especifique un área de trabajo en la memoria de cómputo para ciertos arreglos temporales, definida como:

$$\mathbf{MAX} = (\mathbf{NF}^{**2}) * (\mathbf{NR}^{**2}) * (\mathbf{NT}^{**2}) * (\mathbf{NZ}-1) \quad \dots(4.11)$$

En el Apéndice H se presentan las rutinas para el llenado

de los vectores: **M**, **JM**, **IM**, **R**, **C** e **IC**, programadas en lenguaje FORTRAN. Estas rutinas están diseñadas para el modelo desarrollado en este trabajo, es decir, para un problema trifásico-tridimensional en donde puede o no existir continuidad en la dirección angular. Estas rutinas consideran que se tienen tres fases fluyendo simultáneamente, por lo que los elementos de la matriz  $\bar{A}$  son en realidad submatrices de 3x3.

#### 4.1.4 MLDU, SOLUCION DE MATRICES DISPERSAS NO-SIMETRICAS.

El método de solución de matrices dispersas no-simétricas es un paquete de programas escrito en lenguaje FORTRAN, que fué desarrollado en la Universidad de YALE por Eisenstat et al.<sup>23</sup>, para resolver en forma directa sistemas de ecuaciones lineales con matrices dispersas no-simétricas. Este sistema lineal está representado por la Ec. 4.6. Al igual que en el método anterior, es recomendable reordenar los elementos de la matriz dispersa  $\bar{A}$  para minimizar las operaciones con los elementos diferentes de cero, y resolver el sistema de ecuaciones, pero empleando ahora la factorización L'DU. También se trabaja únicamente con los elementos diferentes de cero más los nuevos elementos diferentes de cero que aparezcan durante el cálculo.

La factorización L'DU consiste en efectuar una descomposición triangular de la matriz  $\bar{A}$  de la forma:

$$\bar{A} = \bar{L}' \bar{D} \bar{U} \quad \dots (4.12)$$

donde  $\bar{L}'$  es una matriz triangular inferior, con unos en la diagonal principal,

$\bar{D}$  es una matriz diagonal de los pivotes, y

$\bar{U}$  es una matriz triangular superior, con unos en la diagonal principal.

Substituyendo la Ec. 4.12 en la Ec. 4.6, se establece el siguiente sistema:

$$\bar{L}' \bar{D} \bar{U} \bar{x} = \bar{b} \quad \dots (4.13)$$

Considerando que  $\bar{z} = \bar{D} \bar{U} \bar{x}$  y  $\bar{w} = \bar{U} \bar{x}$ , entonces la Ec. 4.13 puede descomponerse en los siguientes tres subsistemas, definidos como:

$$\bar{L}' \bar{z} = \bar{b} \quad \dots (4.14)$$

$$\bar{D} \bar{w} = \bar{z} \quad \dots (4.15)$$

y 
$$\bar{U} \bar{x} = \bar{w} \quad \dots (4.16)$$

Se resuelve primero el subsistema dado por la Ec. 4.14, mediante una sustitución hacia adelante para obtener el vector  $\bar{z}$ , posteriormente el subsistema dado por la Ec. 4.15, mediante la inversa de  $\bar{D}$  para obtener el vector  $\bar{w}$  y finalmente el subsistema dado por la Ec. 4.16, mediante una sustitución hacia atrás para obtener el vector  $\bar{x}$ .

Tanto la eliminación Gaussiana como la factorización  $L'DU$ , requieren aproximadamente el mismo número de operaciones aritméticas, aunque en algunos casos la factorización  $L'DU$  tiene una ventaja importante sobre la primera. Considérese el caso en que la

matriz de coeficientes  $\bar{A}$  no cambia, esto se aprovecha para resolver el sistema dado por la Ec. 4.6 para cualquier vector  $\bar{b}$ , sin necesidad de estar repitiendo esta factorización. Lo que repercute en un importante ahorro en el tiempo de cómputo empleado para resolver dicho sistema lineal de ecuaciones<sup>25</sup>.

Al igual que en el método de NSPIV, los elementos diferentes de cero de la matriz de coeficientes  $\bar{A}$  son almacenados, renglón por renglón, en el arreglo **M**. Para identificar los elementos diferentes de cero en cada renglón, es necesario conocer en que columna se encuentra cada uno de estos elementos, por lo que el índice de estas columnas son almacenados en el arreglo **JM**. Además de esto, es necesario conocer en donde comienza cada renglón y que tan largo es, por lo que las posiciones de los índices en **JM** y **M**, donde comienzan los renglones de  $\bar{A}$ , son almacenados en el arreglo **IM**. Por otra parte, el índice en **JM** y **M** de la primera localidad seguida del último elemento en el último renglón es almacenado en **IM(N+1)**. De esta forma, el número de elementos diferentes de cero en el  $I^{\text{esimo}}$  renglón está dado como:

$$\mathbf{IM}(I+1) - \mathbf{IM}(I)$$

Los renglones y las columnas de la matriz de coeficientes  $\bar{A}$  pueden reordenarse, para reducir los requerimientos de la memoria de cómputo ó para asegurar la estabilidad numérica, antes de emplear este paquete de solución mediante los siguientes tres arreglos:

- R** - Ordenamiento de los renglones de  $\bar{A}$ ,
- C** - Ordenamiento de las columnas de  $\bar{A}$ , e
- IC** - Inverso del ordenamiento de las columnas de  $\bar{A}$ .

La forma esquemática de llenar los arreglos **M**, **JM**, **IM**, **R**, **C** e **IC** es similar al ejemplo presentado en el método de NSPIV, para los dos ordenamientos.

Este paquete necesita que se especifique un área de trabajo de la memoria de cómputo, requerida por dos arreglos temporales para poder efectuar esta descomposición. Esta área debe ser mayor o igual al valor máximo obtenido con las siguientes expresiones:

$$\text{NSP1} = 5 \cdot \text{NES} + 3 + 2 \cdot \text{NED} \quad \dots (4.17)$$

y

$$\text{NSP2} = 5 \cdot \text{NES} + 3 + 2 \cdot \text{NED} \quad \dots (4.18)$$

Este paquete está constituido por 5 subrutinas, definidas como:

- NDRV** - Subrutina principal, en donde se checan los requerimientos de la memoria de cómputo y en donde se efectúa el llamado a las demás subrutinas.
- NSF** - Subrutina en donde se procesa la matriz  $\bar{A}$  para determinar en donde ocurrirá el llenado durante la factorización.
- NNF** - Subrutina en donde se factoriza a la matriz  $\bar{A}$  en el producto  $L'DU$ .
- NNS** - Subrutina en donde se resuelve el sistema lineal  $\bar{A} \bar{x} = \bar{b}$  usando la factorización  $L'DU$  obtenida en la sub. **NNF**.
- NNT** - Subrutina en donde se resuelve el sistema lineal traspuesto  $\bar{A}^T \bar{x} = \bar{b}$ , empleando la factorización  $L'DU$ .

#### 4.1.5 COMPARACION ENTRE LOS ORDENAMIENTOS ESTANDARD Y D4.

En esta sección, se presenta un análisis de la eficiencia de los ordenamientos estándar y D4, al aplicarlos en la solución del problema del proyecto comparativo de la SPE<sup>31</sup>, referente a simuladores de conificación de gas y de agua. Esto tiene por finalidad probar que el ordenamiento D4 es más eficiente que el ordenamiento estándar.

Se considera el flujo trifásico-tridimensional, GAS-ACEITE-AGUA, hacia un pozo en un yacimiento no fracturado. El área de drene del pozo se discretiza en 6 celdas en la dirección radial, 4 celdas (arcos), en la dirección angular y 15 celdas (capas), en la dirección vertical. El intervalo productor se encuentra disparado en todos los arcos y únicamente en las capas 7 y 8, produciendo a un gasto constante de 159 m<sup>3</sup>/día durante los 365 días que dura la simulación.

Los datos para este problema se presentan en las Tablas 4.1 a 4.9, definidas de la siguiente forma:

La Tabla 4.1 muestra los datos generales del pozo.

La Tabla 4.2 presenta la malla de cálculo del simulador.

Las Tablas 4.3 a 4.5 contienen los datos PVT de los fluidos.

La Tabla 4.6 presenta los datos petrofísicos.

Las Tablas 4.7 y 4.8 muestran las permeabilidades relativas para los sistemas bifásicos: GAS-ACEITE y ACEITE-AGUA, respectivamente.

Y en la Tabla 4.9 se tiene la distribución inicial de

presiones y de saturaciones, así como el volumen original de los fluidos.

TABLA 4.1 DATOS GENERALES DEL POZO

** DATOS DE LA COMPARACION ENTRE ORD. NORMAL Y D4 **	
Espesor de la formación .....	(M) 111.64
Radio de drene .....	(M) 624.84
Radio del pozo .....	(M) 0.0762
Presión inicial .....	(kg/cm <sup>2</sup> ) 253.11
Nivel de referencia de la presión inicial ....	(MBNM) 2753.87
Prof. media de los disparos .....	(MBNM) 2779.10
Longitud del intervalo disparado .....	(M) 7.300
Prof. de la cima de la formación .....	(MBNM) 2743.20
Prof. del contacto gas-aceite .....	(MBNM) 2753.87
Prof. del contacto agua-aceite .....	(MBNM) 2806.90
Compresibilidad de la roca .....	(1/kg/cm <sup>2</sup> ) 0.000057

TABLA 4.2 MALLA DE CALCULO DEL SIMULADOR.

No. de celdas en la dirección radial .....						6		
No. de celdas en la dirección angular.....						4		
No. de celdas en la dirección vertical .....						15		
Posición del intervalo disparado:								
Arco(s) (Dirección angular) .....			1	2	3	4		
Capa(s) (Dirección vertical) .....			7	8				
DIRECCION RADIAL			DIRECCION ANGULAR			DIRECCION VERTICAL		
Celda	Longitud	Radio Nodo	Arco	Long.	Long. Nodo	Capa	Espesor	Prof. Nodo
	(M)	(M)		(Grad.)	(Grad.)		(M)	(M)
1	0.27	0.15	1	90.00	45.00	1	6.10	3.00
2	1.19	0.66	2	90.00	135.00	2	4.60	8.40
3	5.36	2.97	3	90.00	225.00	3	7.90	14.60
4	24.09	13.33	4	90.00	315.00	4	4.60	20.80
5	108.16	59.87				5	4.90	25.60
6	485.70	268.87				6	4.30	30.10
						7	4.90	34.70
						8	2.40	38.30
						9	5.50	42.30
						10	3.70	46.50
						11	5.80	51.60
						12	5.50	57.20
						13	6.10	63.00
						14	15.20	73.60
						15	30.40	96.40

TABLA 4.3 DATOS PVT DEL ACEITE

PRESION	FACTOR DE VOLUMEN	RELA. SOLUB. GAS/ACEITE	VISCOSIDAD	DENSIDAD
KG/CM2	M3 CY/M3 CS	M3 CS/m3 CS	CP	GR/CM3
28.1690	1.0120	29.39	1.1700	0.7448
56.3380	1.0255	59.66	1.1400	0.7705
84.5070	1.0380	89.05	1.1100	0.7909
112.6761	1.0510	118.43	1.0800	0.8126
140.8451	1.0630	147.46	1.0600	0.8341
169.0141	1.0750	175.42	1.0300	0.8541
197.1831	1.0870	201.25	1.0000	0.8714
225.3521	1.0985	226.18	0.9800	0.8878
253.5211	1.1100	247.55	0.9500	0.9003
281.6901	1.1200	267.14	0.9400	0.9119
309.8592	1.1300	284.95	0.9200	0.9216
338.0282	1.1400	298.49	0.9100	0.9269
366.1972	1.1480	311.67	0.9000	0.9334
394.3662	1.1550	322.35	0.8900	0.9381

TABLA 4.4 DATOS PVT DEL GAS

PRESION	FACTOR DE VOLUMEN	RELA. SOLUB. ACEITE/GAS	VISCOSIDAD	DENSIDAD
KG/CM2	M3 CY/M3 CS	M3 CS/m3 CS	CP	GR/CM3
28.1690	0.033129	0.0000	0.0130	0.0339
56.3380	0.016564	0.0000	0.0135	0.0679
84.5070	0.011005	0.0000	0.0140	0.1022
112.6761	0.008254	0.0000	0.0145	0.1363
140.8451	0.006626	0.0000	0.0150	0.1697
169.0141	0.005503	0.0000	0.0155	0.2044
197.1831	0.004717	0.0000	0.0160	0.2384
225.3521	0.004155	0.0000	0.0165	0.2707
253.5211	0.003650	0.0000	0.0170	0.3081
281.6901	0.003313	0.0000	0.0175	0.3395
309.8592	0.003032	0.0000	0.0180	0.3709
338.0282	0.002751	0.0000	0.0185	0.4088
366.1972	0.002527	0.0000	0.0190	0.4451
394.3662	0.002358	0.0000	0.0195	0.4769

TABLA 4.5 DATOS PVT DEL AGUA

PRESION	FACTOR DE VOLUMEN	VISCOSIDAD	DENSIDAD
KG/CM2	M3 CY/M3 CS	CP	GR/CM3
28.1690	1.01303	0.9600	0.9966
56.3380	1.01182	0.9600	0.9977
84.5070	1.01061	0.9600	0.9989
112.6761	1.00940	0.9600	1.0001
140.8451	1.00820	0.9600	1.0013
169.0141	1.00700	0.9600	1.0025
197.1831	1.00580	0.9600	1.0037
225.3521	1.00460	0.9600	1.0049
253.5211	1.00341	0.9600	1.0061
281.6901	1.00222	0.9600	1.0073
309.8592	1.00103	0.9600	1.0085
338.0282	0.99985	0.9600	1.0097
366.1972	0.99866	0.9600	1.0109
394.3662	0.99749	0.9600	1.0121

TABLA 4.6 DATOS PETROFISICOS.

CAPA	POROSIDAD	PERM. HORIZONTAL	PERM. ANGULAR	PERM. VERTICAL
	(FRACCION)	(DARCIES)	(DARCIES)	(DARCIES)
1	0.0870	0.0350	0.0350	0.00350
2	0.0970	0.0475	0.0475	0.00475
3	0.1110	0.1480	0.1480	0.01480
4	0.1600	0.2020	0.2020	0.02020
5	0.1300	0.0900	0.0900	0.00900
6	0.1700	0.4185	0.4185	0.04285
7	0.1700	0.7750	0.7750	0.07750
8	0.0800	0.0600	0.0600	0.00600
9	0.1400	0.6820	0.6820	0.06820
10	0.1300	0.4720	0.4720	0.04720
11	0.1200	0.1250	0.1250	0.01250
12	0.1050	0.3000	0.3000	0.03000
13	0.1200	0.1375	0.1375	0.01375
14	0.1160	0.1910	0.1910	0.01910
15	0.1570	0.3500	0.3500	0.03500

TABLA 4.7 DATOS DE PERMEABILIDADES RELATIVAS: GAS-ACEITE

SATURACION SG	PERM. REL. ACEITE KROG	PERM. REL. GAS KRG	PRESION CAPILAR PCGO
(FRACCION)	(FRACCION)	(FRACCION)	(KG/CM2)
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0400	0.6000	0.0000	0.0144
0.1000	0.3300	0.0220	0.0352
0.2000	0.1000	0.1000	0.0703
0.3000	0.0200	0.2400	0.1055
0.4000	0.0000	0.3400	0.1406
0.5000	0.0000	0.4200	0.1758
0.6000	0.0000	0.5000	0.2109
0.7000	0.0000	0.8125	0.2461
0.7800	0.0000	1.0000	0.2742
1.0000	0.0000	1.0000	0.2742

TABLA 4.8 DATOS DE PERMEABILIDADES RELATIVAS: AGUA-ACEITE

SATURACION SW	PERM. RELAT. ACEITE KROW	PERM. RELAT. AGUA KRW	PRES. CAPILAR DRENE PCWOD	PRES. CAPILAR IMBIBICION PCWOI
(FRACCION)	(FRACCION)	(FRACCION)	(KG/CM2)	(KG/CM2)
0.0000	1.0000	0.0000	0.4921	0.4921
0.2200	1.0000	0.0000	0.4921	0.4921
0.3000	0.4000	0.0700	0.2812	0.2812
0.4000	0.1250	0.1500	0.2109	0.2109
0.5000	0.0649	0.2400	0.1758	0.1758
0.6000	0.0048	0.3300	0.1406	0.1406
0.8000	0.0000	0.6500	0.0703	0.0703
0.9000	0.0000	0.8300	0.0352	0.0352
1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000

TABLA 4.9 DISTRIBUCION INICIAL DE PRES. Y DE SAT.

CAPA	SATURA. GAS (FRACCION)	SATURACION DE AGUA (FRACCION)	PRESION (KG/CM2)
1	0.7800	0.2200	252.88
2	0.3883	0.2200	253.04
3	0.0000	0.2200	253.46
4	0.0000	0.2361	254.03
5	0.0000	0.2550	254.45
6	0.0000	0.2732	254.86
7	0.0000	0.2914	255.27
8	0.0000	0.3225	255.60
9	0.0000	0.3815	255.96
10	0.0000	0.4993	256.37
11	0.0000	0.6395	256.79
12	0.0000	0.8068	257.30
13	0.0000	0.9784	257.82
14	0.0000	1.0000	258.89
15	0.0000	1.0000	261.18
VOLUMEN INICIAL DE FLUIDOS:			
Vol. inicial de aceite (m3 cs) .....			4661319.
Vol. inicial de gas (m3 cs) .....			1354493976.
Vol. inicial de agua (m3 cs) .....			12145845.

Los resultados de esta prueba se presentan en la Tabla 4.10, en donde se observa que al emplear el método directo de solución NSPIV con los ordenamientos estándar y D4, se resuelve el problema en 15:37 y 12:29 minutos, respectivamente. Mientras que empleando el método directo de solución MLDU, junto con estos ordenamientos se resuelve el problema en 5:34 y 4:01 minutos, respectivamente. Para realizar estas pruebas y cada una de las que se presentan en este trabajo, se utilizó una estación de trabajo Silicon Graphics modelo Iris Indy con las siguientes características: procesador R4400 SC @100/50 Mhz, 85 MIPS y 16 MFLOPS.

TABLA 4.10 RESULTADOS GENERALES DE LA COMPARACION DE ORDENAMIENTOS

METODO SOLUCION	TIPO DE ORDENA.	No. ITER. NEWTONIA.	No. ETAP. DE TIEMPO	MEMORIA REQUER.	TIEMPO SIMULADO	TIEMPO DE EJECUCION
				( Kb )	( DIAS )	( min. )
NSPIV	ESTAND.	165	27	171	365	15 : 37
NSPIV	D4	165	27	165	365	12 : 29
MLDU	ESTAND.	165	27	207	365	5 : 34
MLDU	D4	165	27	184	365	4 : 01

Los resultados obtenidos al resolver este problema con los métodos directos y con los diferentes ordenamientos, se presentan en las Figs. 4.1 a 4.8. En estas figuras se muestra el comportamiento de la presión de fondo fluyendo, de la presión promedio, de la relación gas/aceite, del flujo fraccional, del balance de materia del aceite, del número de iteraciones newtonianas, del gasto de aceite y de la producción acumulada contra el tiempo de simulación. Como se puede observar, los resultados son exactamente los mismos en todos los casos. La única diferencia que existe entre ellos, de acuerdo a la Tabla 4.10, es el tiempo de ejecución, mostrando que el método de MLDU con el ordenamiento D4 tiene el mejor desempeño. El tiempo requerido por este método es aproximadamente 67.4% menor que el realizado por el método de NSPIV con este mismo ordenamiento. Mientras que para el ordenamiento estándar se tiene que el método de MLDU es 65.3% menor que el tiempo requerido por el método de NSPIV para este ordenamiento. De lo anterior, se confirma que al emplear el ordenamiento D4 con cualquiera de estos métodos directos, se reduce el tiempo de ejecución.

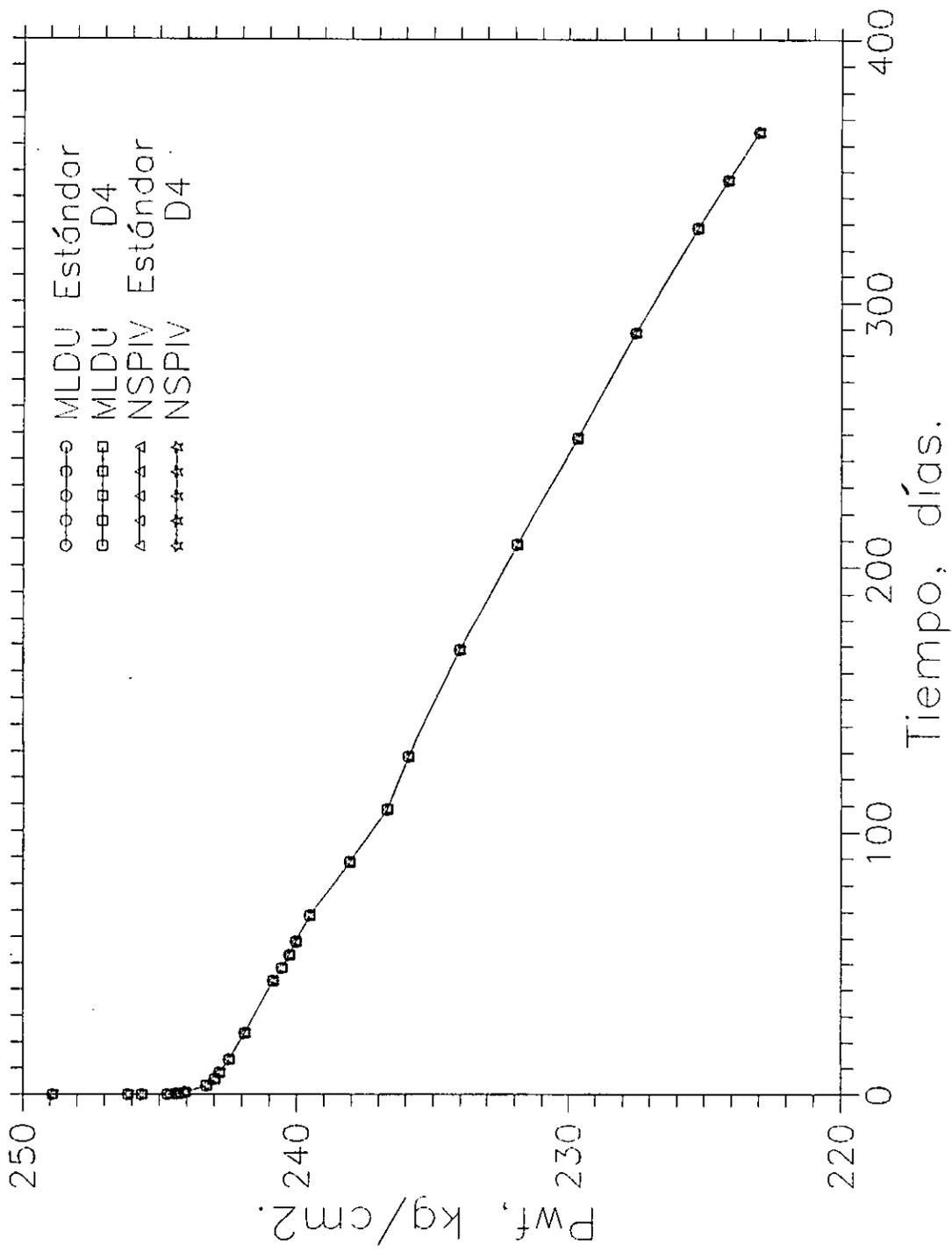


FIG. 4.1 Presión de Fondo Fluyendo vs Tiempo

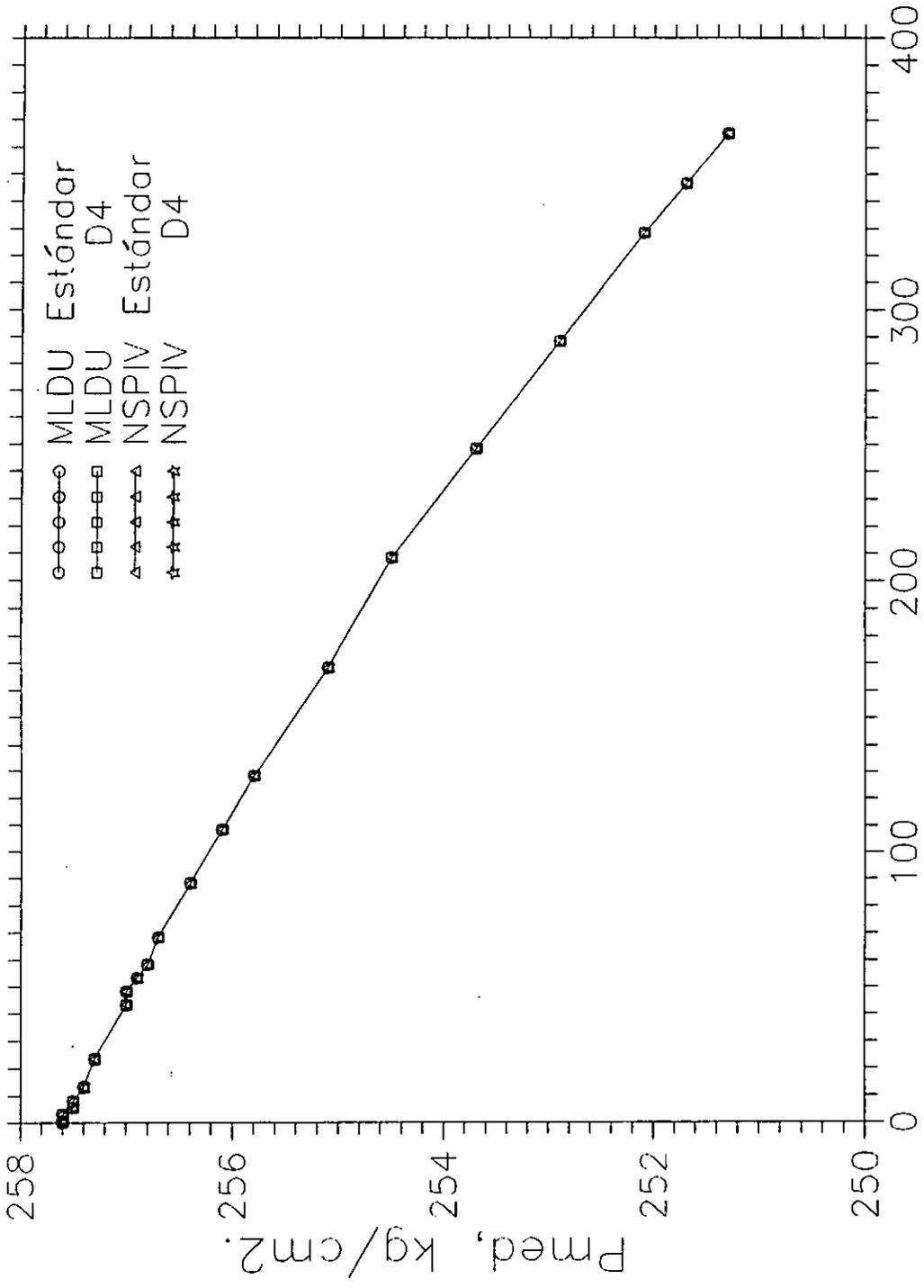


FIG. 4.2 Presión Media vs Tiempo

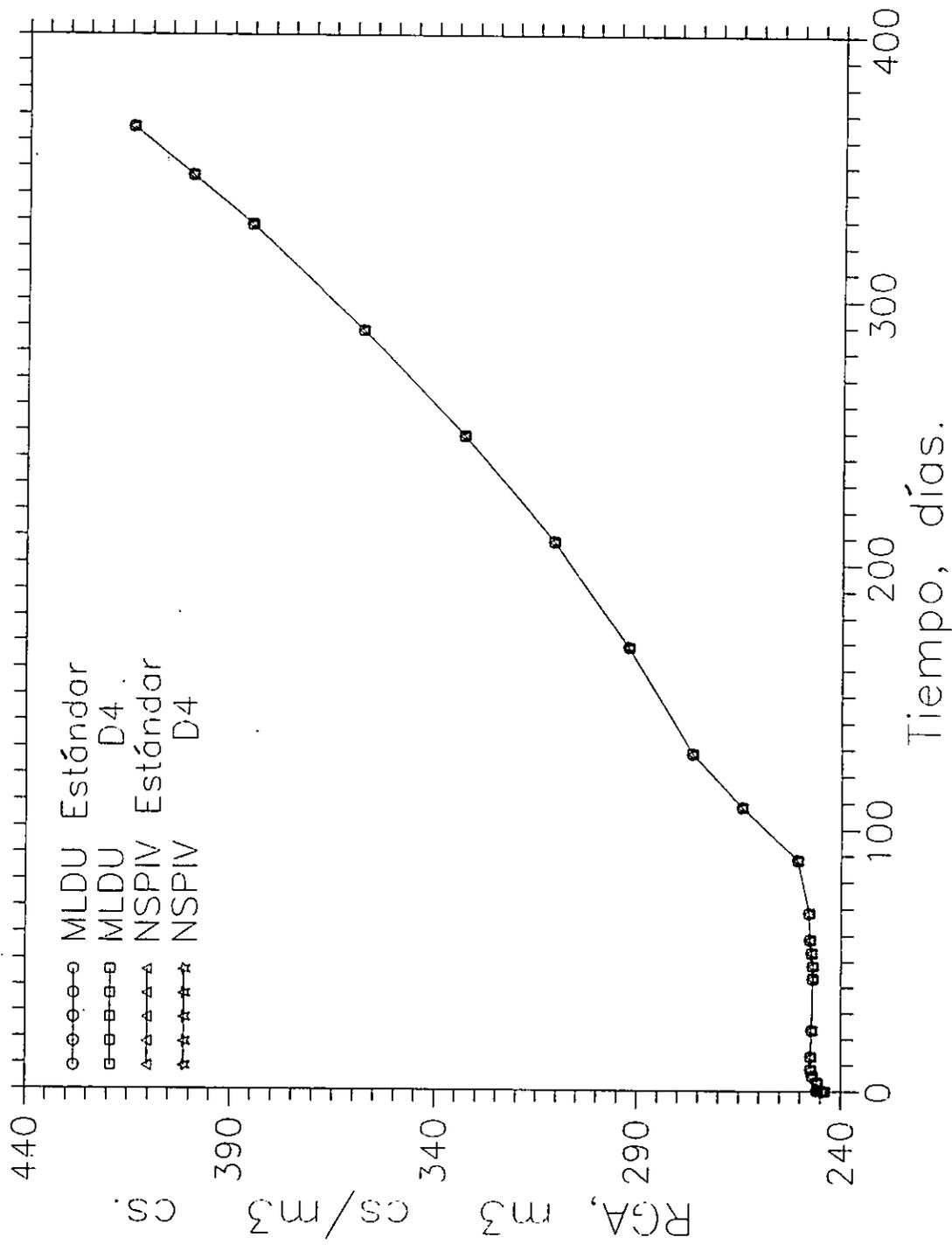


FIG. 4.3 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

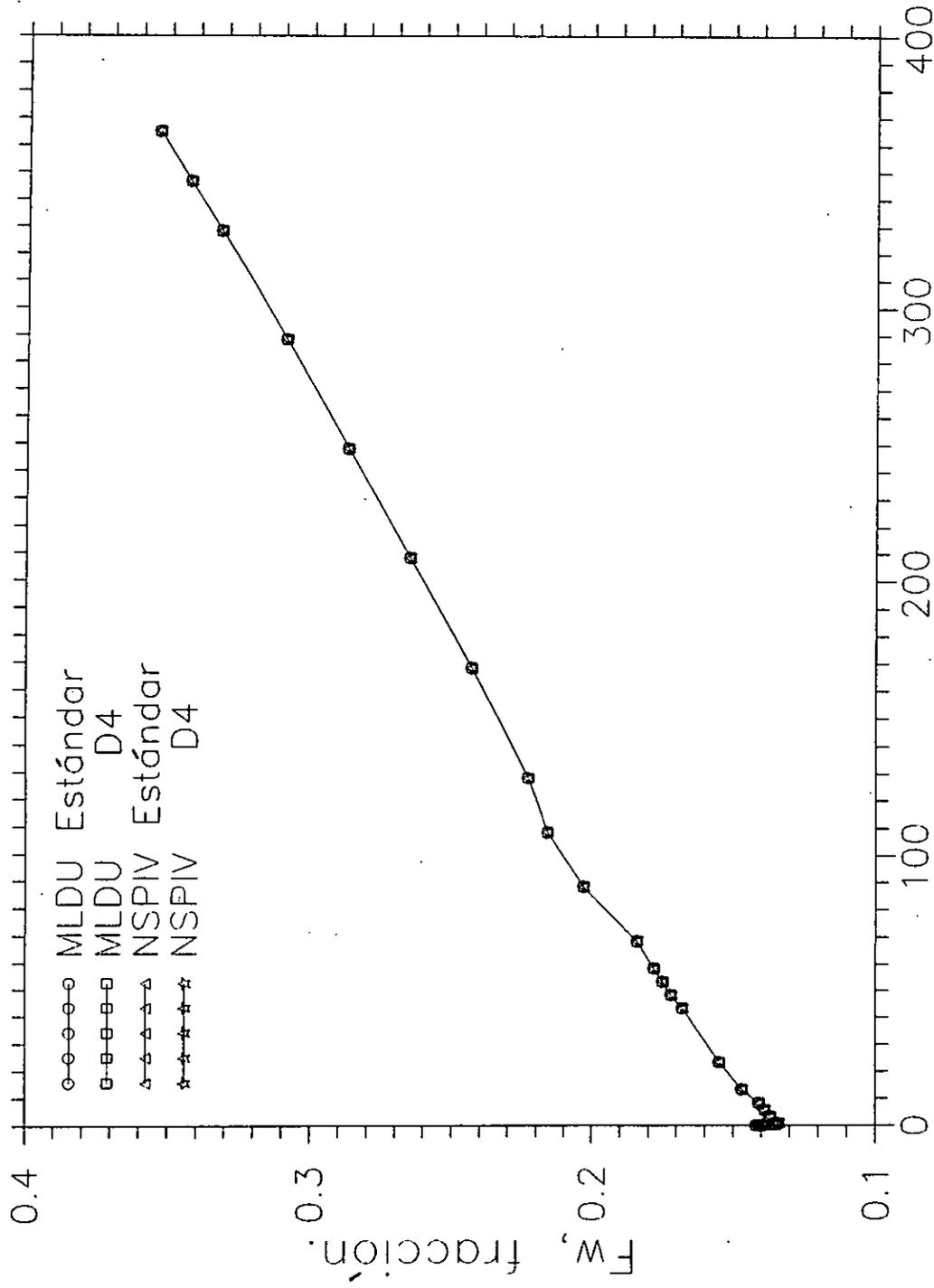


FIG. 4.4 Flujo Fraccional vs Tiempo.

FIG. 4.4 Flujo Fraccional vs Tiempo

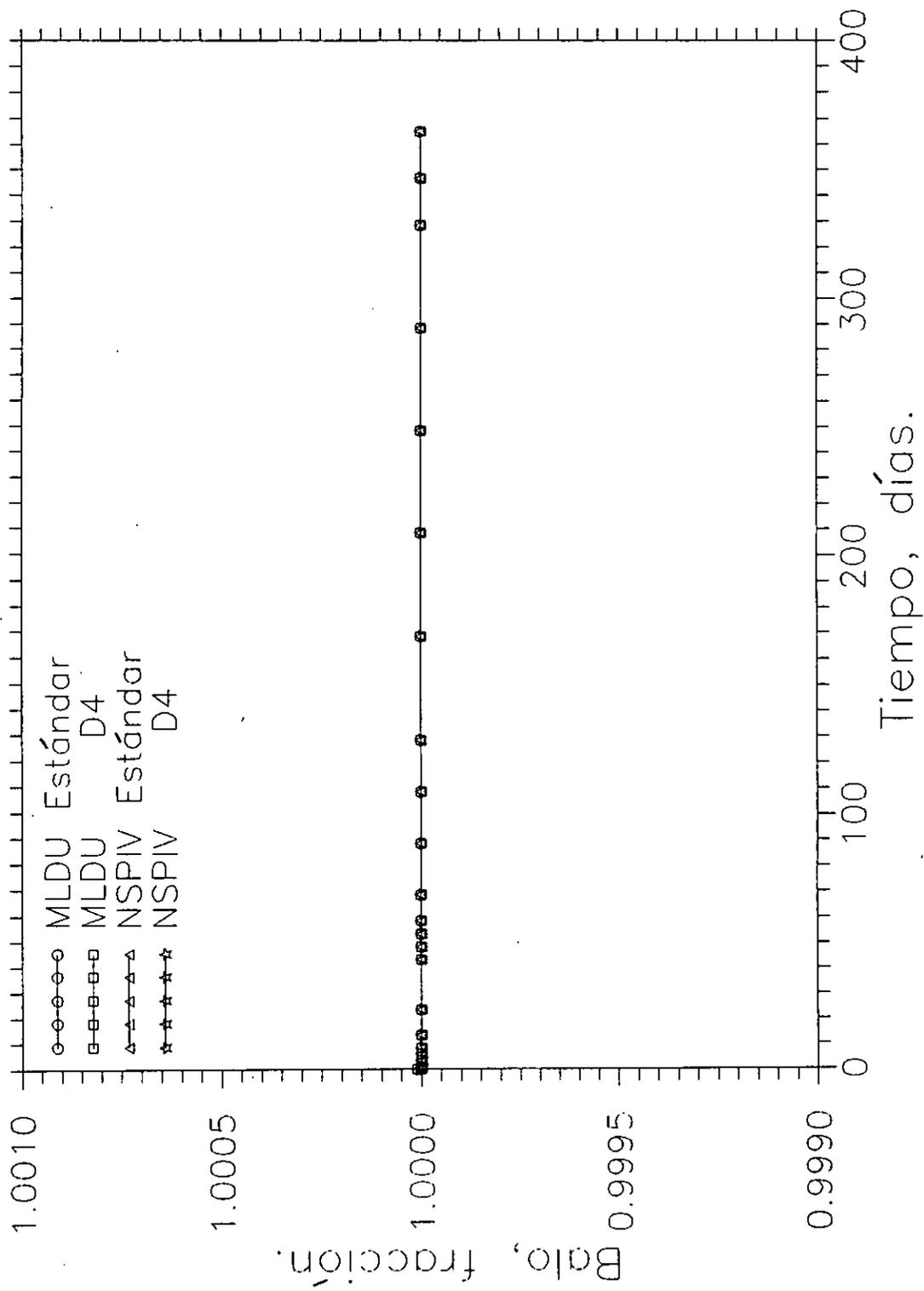


FIG. 4.5 Balance del Aceite vs Tiempo

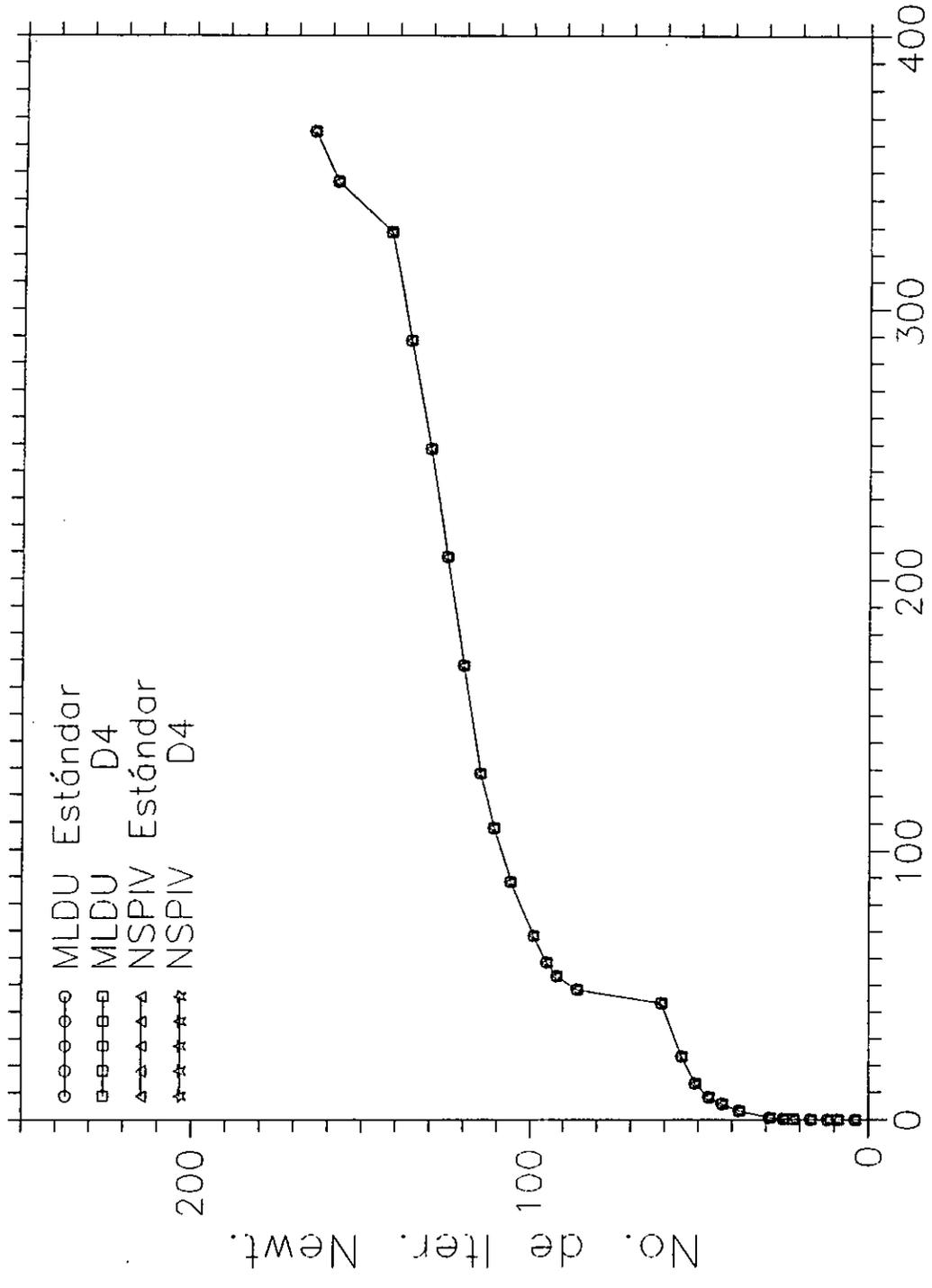


FIG. 4.6 No. de Iter. Newt. vs Tiempo

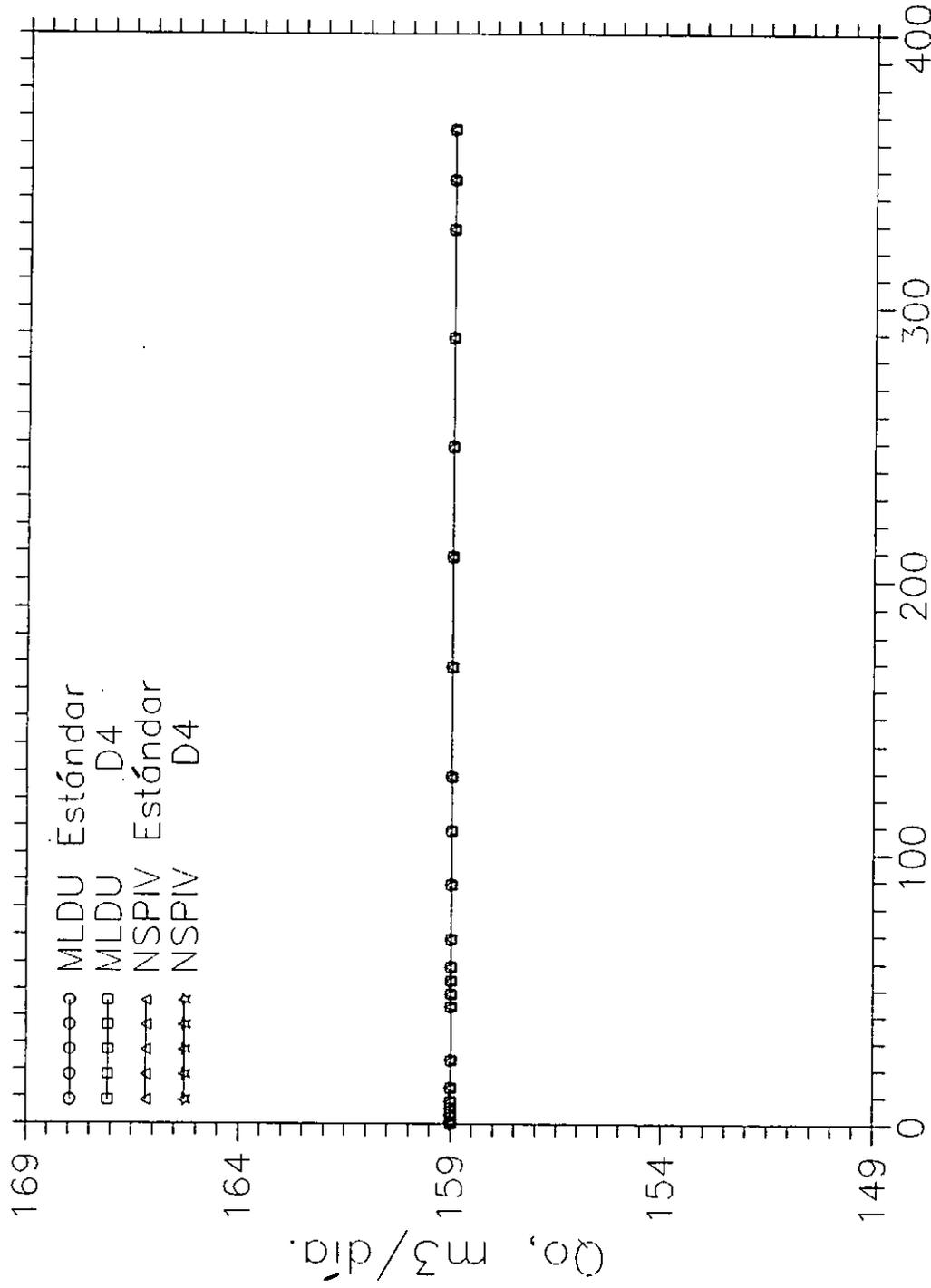


FIG. 4.7 Gasto del Aceite vs Tiempo

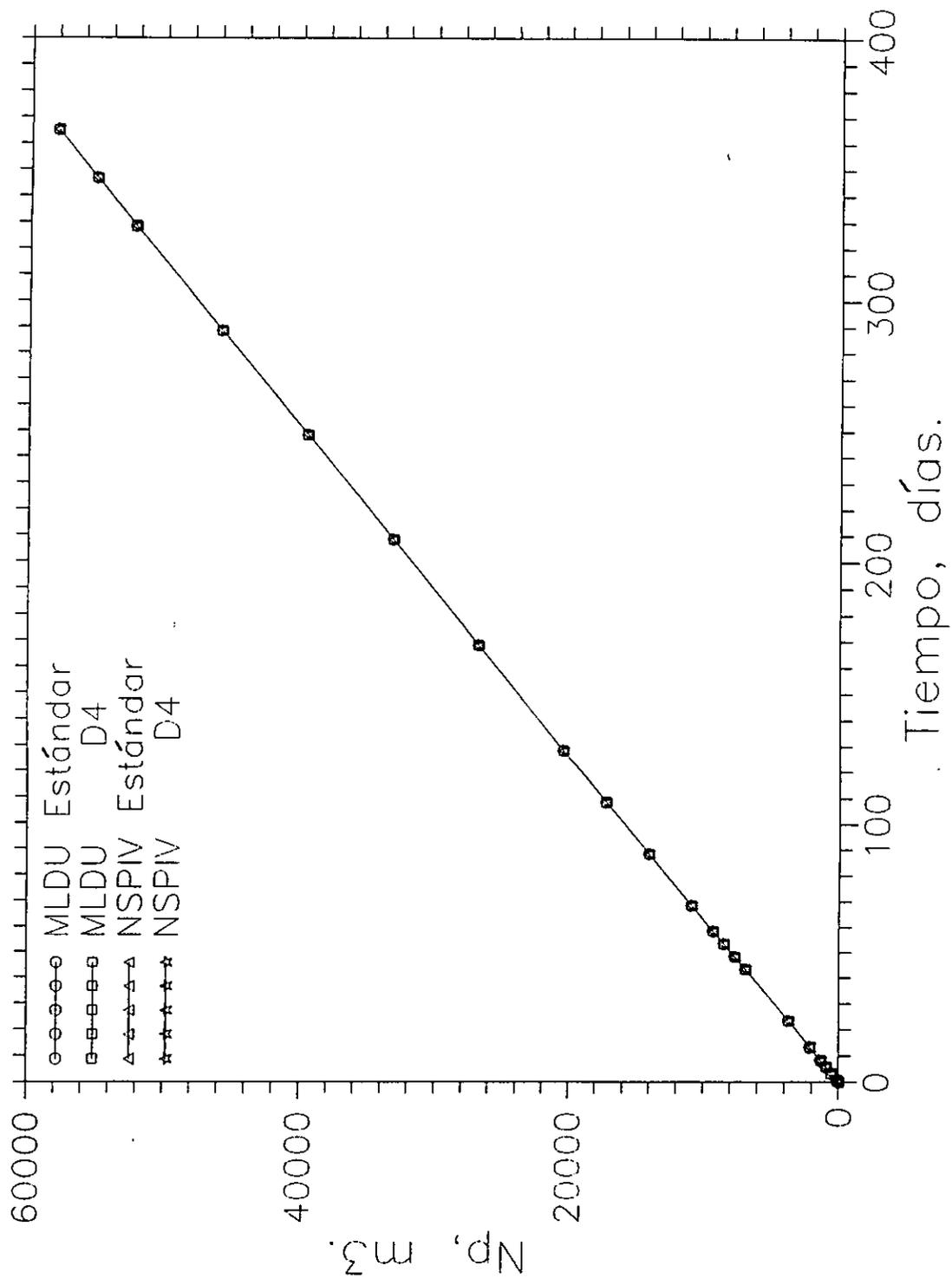


FIG. 4.8 Producción Acumulada del Aceite vs Tiempo

#### 4.1.6 MANEJO ANALITICO Y NUMERICO DE ACUIFEROS.

En esta sección, se presenta un análisis del comportamiento del simulador representando el acuífero analítica y numéricamente. El problema considerado es el mismo de la sección anterior. Por lo que, los datos están presentados en las Tablas 4.1 a 4.9.

El acuífero analítico está representado por las Ecs. 2.72 a 2.79, las cuales se acoplan como una condición de frontera, en la parte inferior del dominio de interés, en  $z=h_{TOT}$ , en la ecuación de flujo del agua del simulador. Este acuífero no forma parte del espesor total,  $h_{TOT}$ . Mientras que el acuífero numérico si forma parte de este espesor y está representado por la ecuación de flujo del agua del simulador, actuando en la(s) última(s) capa(s) de la dirección vertical discretizada.

Para representar adecuadamente el acuífero, tanto analítica como numéricamente, se emplearon valores promedio de las propiedades del yacimiento en la zona correspondiente al acuífero numérico manejado en la sección anterior. El acuífero se encuentra ubicado en las capas 14 y 15, con las siguientes propiedades por capa: un espesor de 15.21 m. y 30.42 m., una porosidad de 0.116 y 0.157, una permeabilidad absoluta en la dirección radial y angular de 0.191 D. y 0.35 D. y en la dirección vertical de 0.0191 D. y 0.035 D., respectivamente, como puede observar en la Tabla 4.11.

TABLA 4.11 PROPIEDADES DEL ACUIFERO NUMERICO (Secc. 4.1.5).

CAPA	ESPESOR (m)	POROSIDAD (fracc)	PERMEABILI. ABS. RADIAL/ANGULAR (Darcy)	PERMEABILI. ABS. VERTICAL (Darcy)
14	15.21	0.116	0.191	0.0191
15	30.42	0.157	0.350	0.0350

Los valores promedios manejados en esta sección se obtuvieron de la siguiente forma: se definió una sola capa con un espesor total de 45.63 m, una porosidad ponderada con respecto al espesor de 0.14333, una permeabilidad absoluta ponderada con respecto al espesor de 0.297 D., tanto en la dirección radial como angular y una permeabilidad absoluta de 0.0274 D. en la dirección vertical. Este último valor se obtuvo a través de un promedio armónico de los valores de permeabilidad en esa dirección. La Tabla 4.12 muestra las propiedades promedio empleadas en el acuífero numérico y la Tabla 4.13 presenta los datos generales del acuífero analítico.

TABLA 4.12 PROPIEDADES DEL ACUIFERO NUMERICO.

CAPA	ESPESOR (m)	POROSIDAD (fracc)	PERMEABILI. ABS. RADIAL/ANGULAR (Darcy)	PERMEABILI. ABS. VERTICAL (Darcy)
14	45.63	0.14333	0.2970	0.0274

TABLA 4.13 DATOS GENERALES DEL ACUIFERO ANALITICO.

*** ACUIFERO DE FONDO (METODO DE FETKOVICH) *** (ENTRADA GLOBAL A LA REGION DE DRENE DEL POZO)	
Espesor .....	(m) 45.63
Porosidad .....	(fracc.) 0.1433
Permeabilidad .....	(darcy) 0.2970
Presión inicial .....	(kg/cm <sup>2</sup> ) 260.42
Volumen de roca .....	(m <sup>3</sup> ) 5.5968E+07
Volumen de agua inicial .....	(m <sup>3</sup> ) 2.0623E+05
Índice de productividad .....	(m <sup>3</sup> /dia/kg/cm <sup>2</sup> ) 2.0867E+05
Gasto máximo inicial .....	(m <sup>3</sup> /dia) 5.4341E+07

Los resultados de esta prueba se presentan en la Tabla 4.14, donde se empleó el método directo MLDU con el ordenamiento D4, en la solución del sistema lineal de ecuaciones, por haber sido el más eficiente en la comparación anterior. En esta tabla también, se incluyen los resultados obtenidos al emplear una malla de 6x4x15 y el acuífero numérico de la sección anterior, así como los resultados correspondientes a una malla de 10x4x13 con un acuífero analítico. La idea principal de esta última prueba, fue observar el desempeño del simulador al emplear un acuífero analítico y un mayor refinamiento en el sentido radial.

TABLA 4.14 RESULTADOS GENERALES DE LA COMPARACION DE ACUIFEROS.

METODO SOLUCION	TIPO DE ACUIF.	No. ITER. NEWTONIA.	No. ETAP. DE TIEMPO	MEMORIA REQUER.	TIEMPO SIMULADO	TIEMPO DE EJECUCION
				( Kb )	( DIAS )	( min. )
MLDU (D4)	ANALIT. 6 x 4 x 13	188	33	125	365	3:58
	ANALIT. 10 x 4 x 13	191	32	275	365	12:03
	NUMER. 6 x 4 x 14	165	25	166	365	3:44
	NUMER. 6 x 4 x 15	165	27	184	365	4:01

Los resultados obtenidos al resolver el problema con el método MLDU y con los diferentes acuíferos, se presentan en las Figs. 4.9 a 4.19. En estas figuras se muestra el comportamiento de la presión de fondo fluyendo, de la presión promedio, de la relación gas/aceite, del flujo fraccional de agua, del balance de materia del aceite y del agua, del número de iteraciones newtonianas, del gasto de aceite y del agua, y de la producción acumulada tanto del aceite

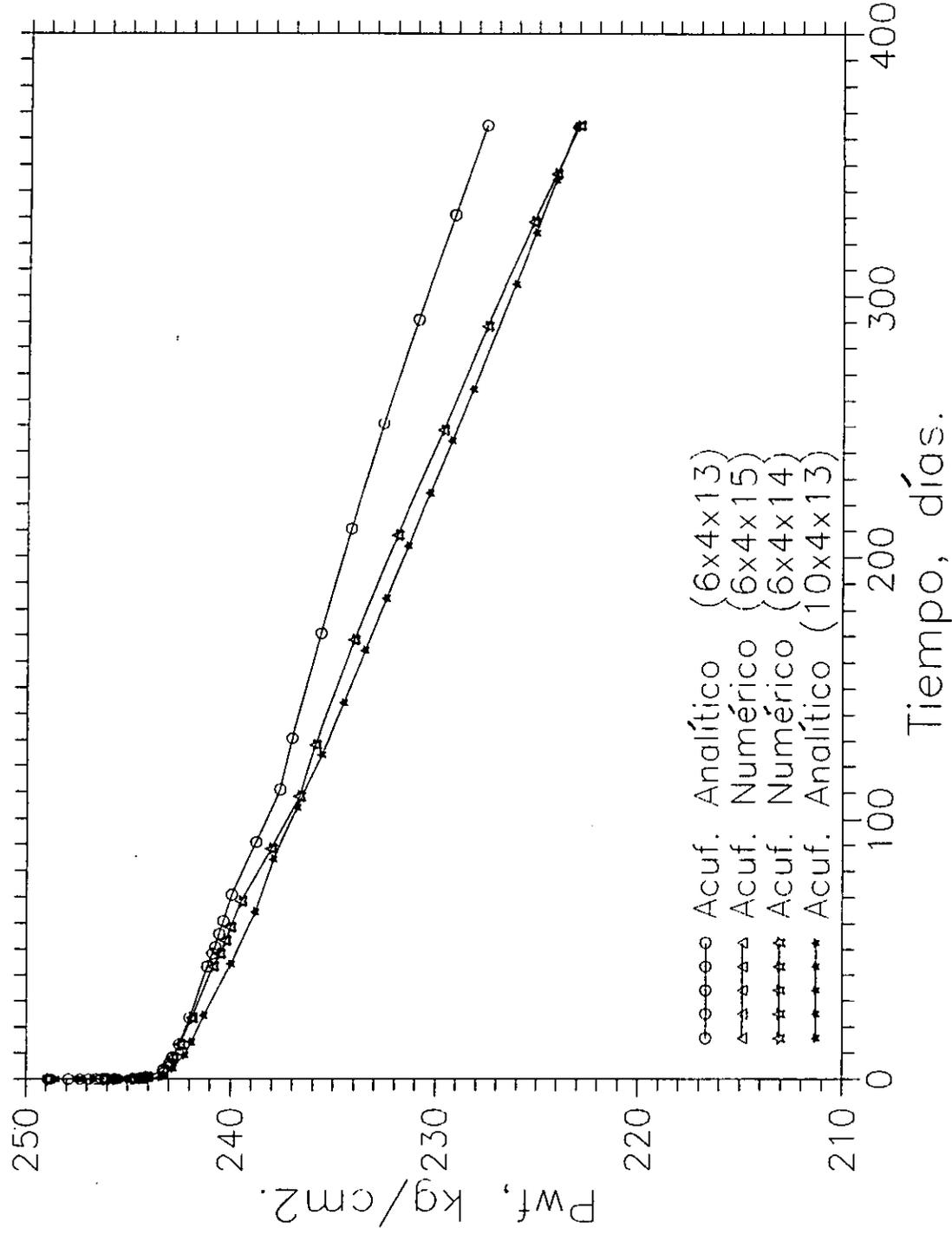


FIG. 4.9 Presión de Fondo Fluyendo vs Tiempo

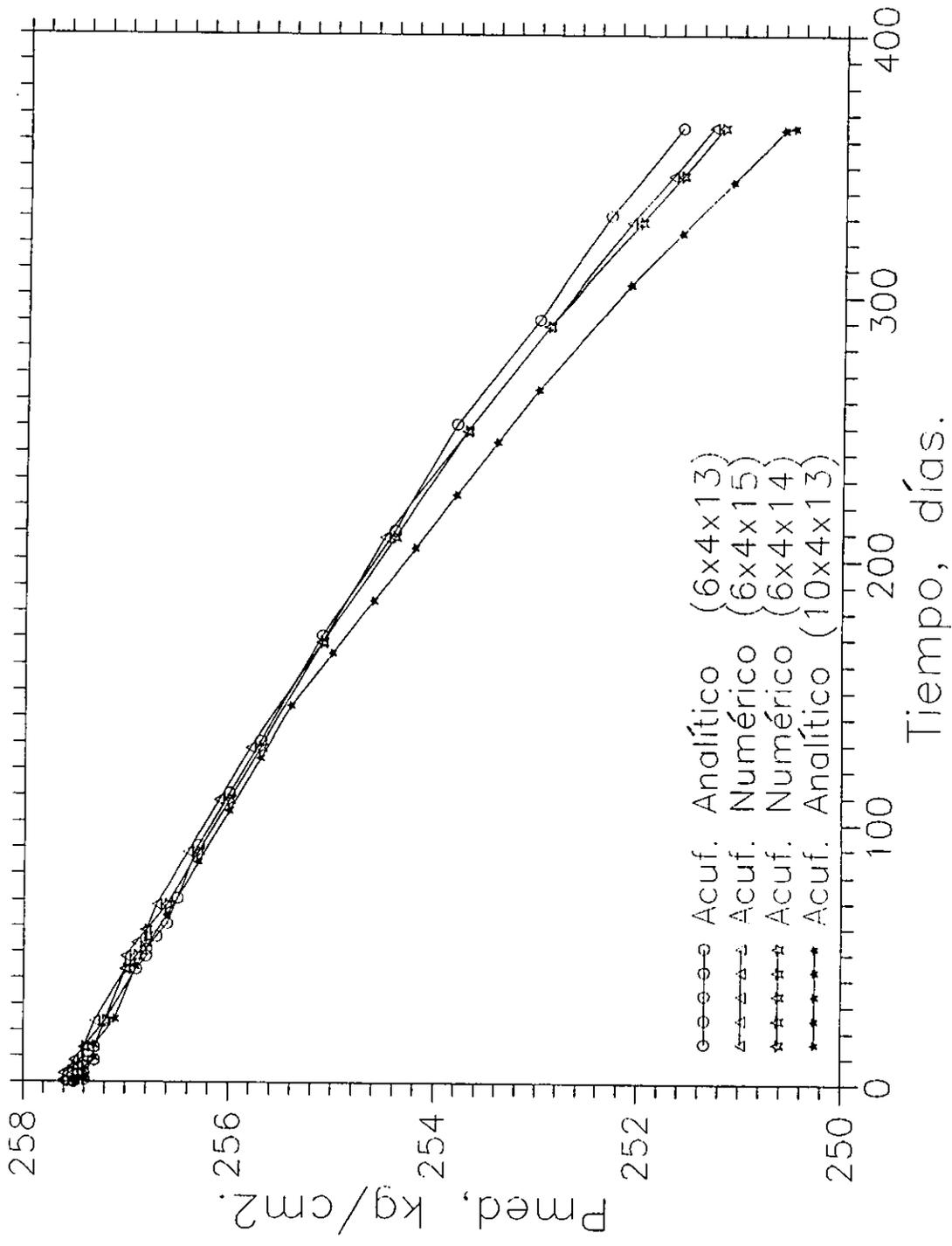


FIG. 4.10 Presión Media vs Tiempo

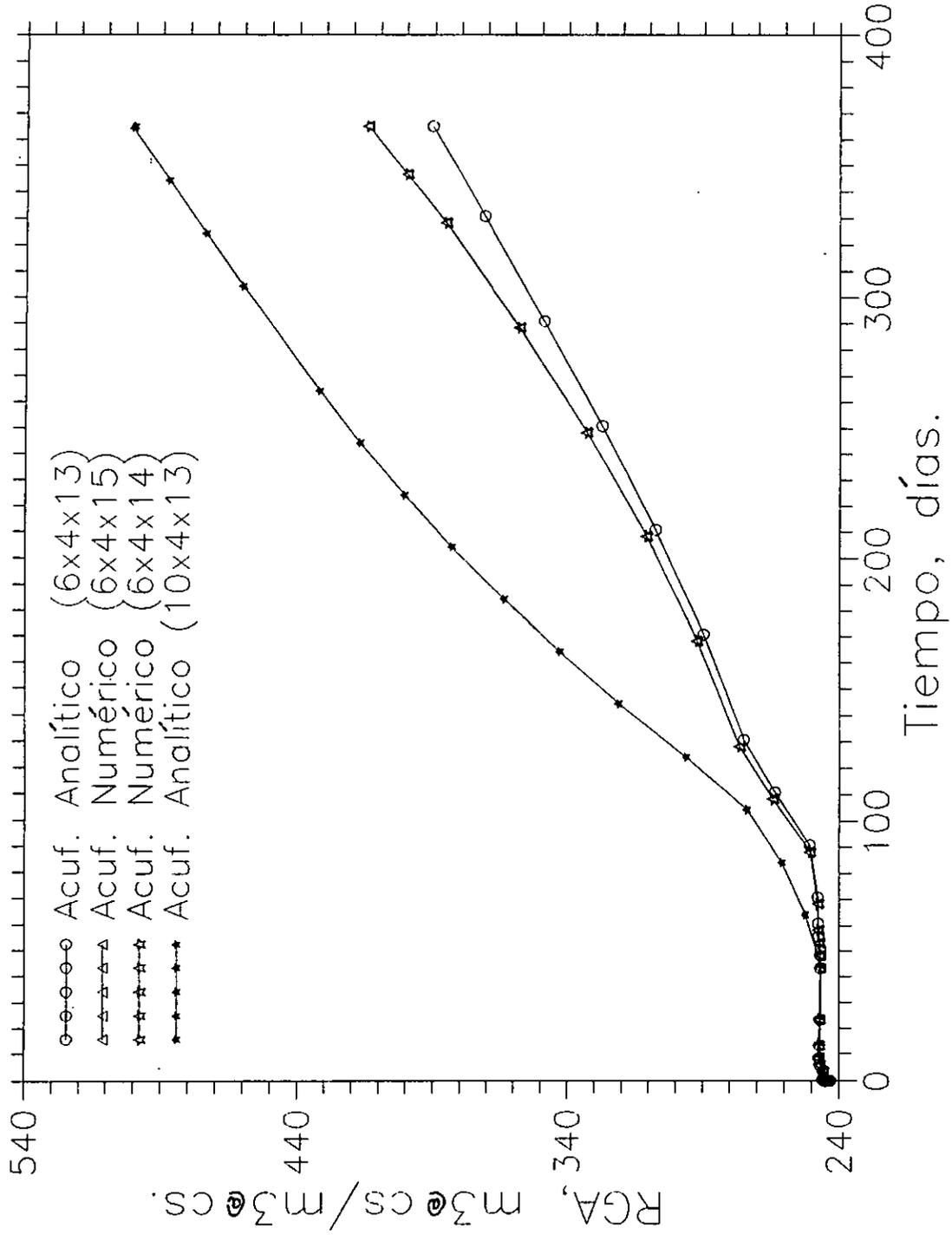


FIG. 4.11 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

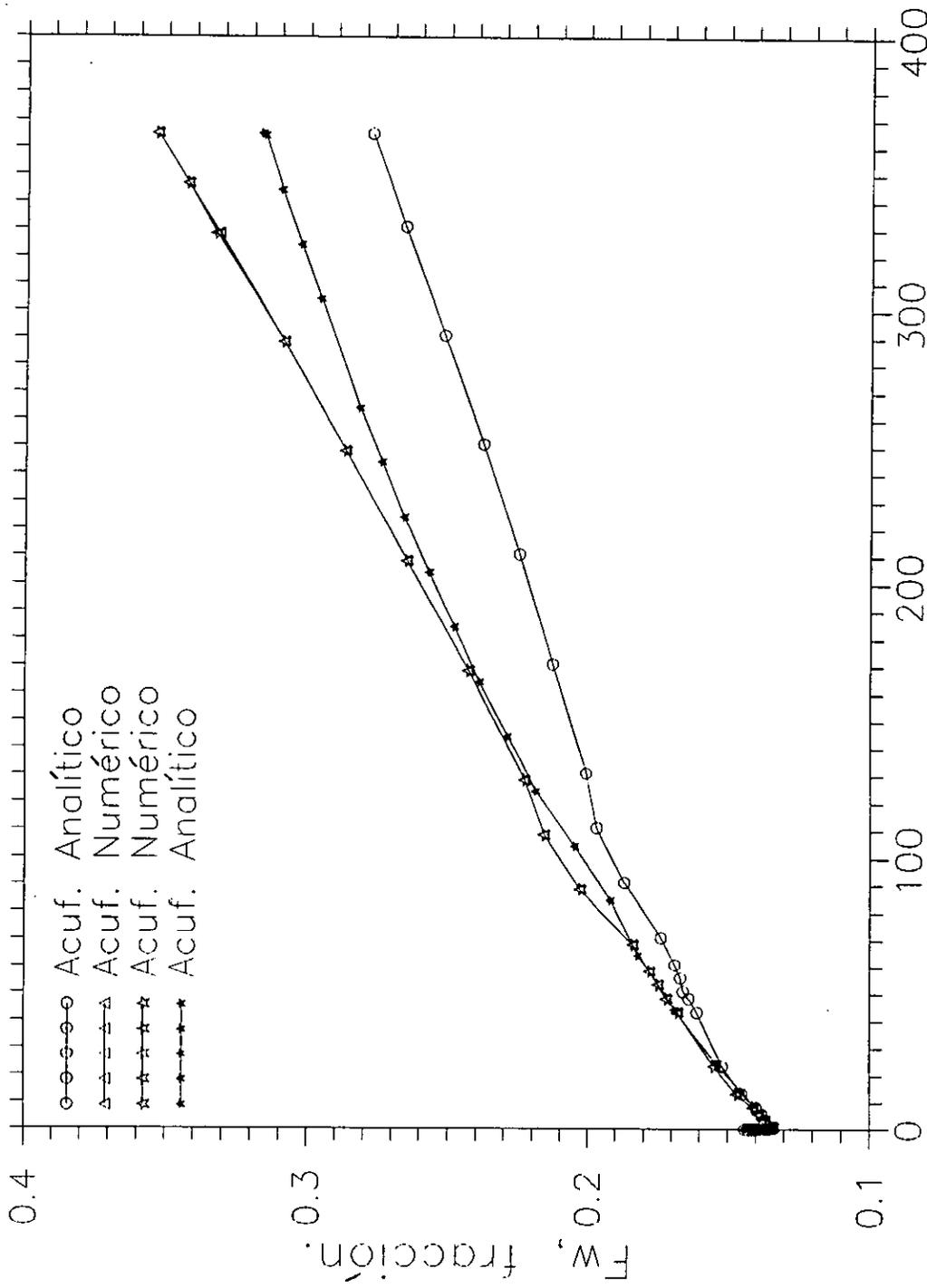


FIG. 4.12 Flujo Fraccional vs Tiempo

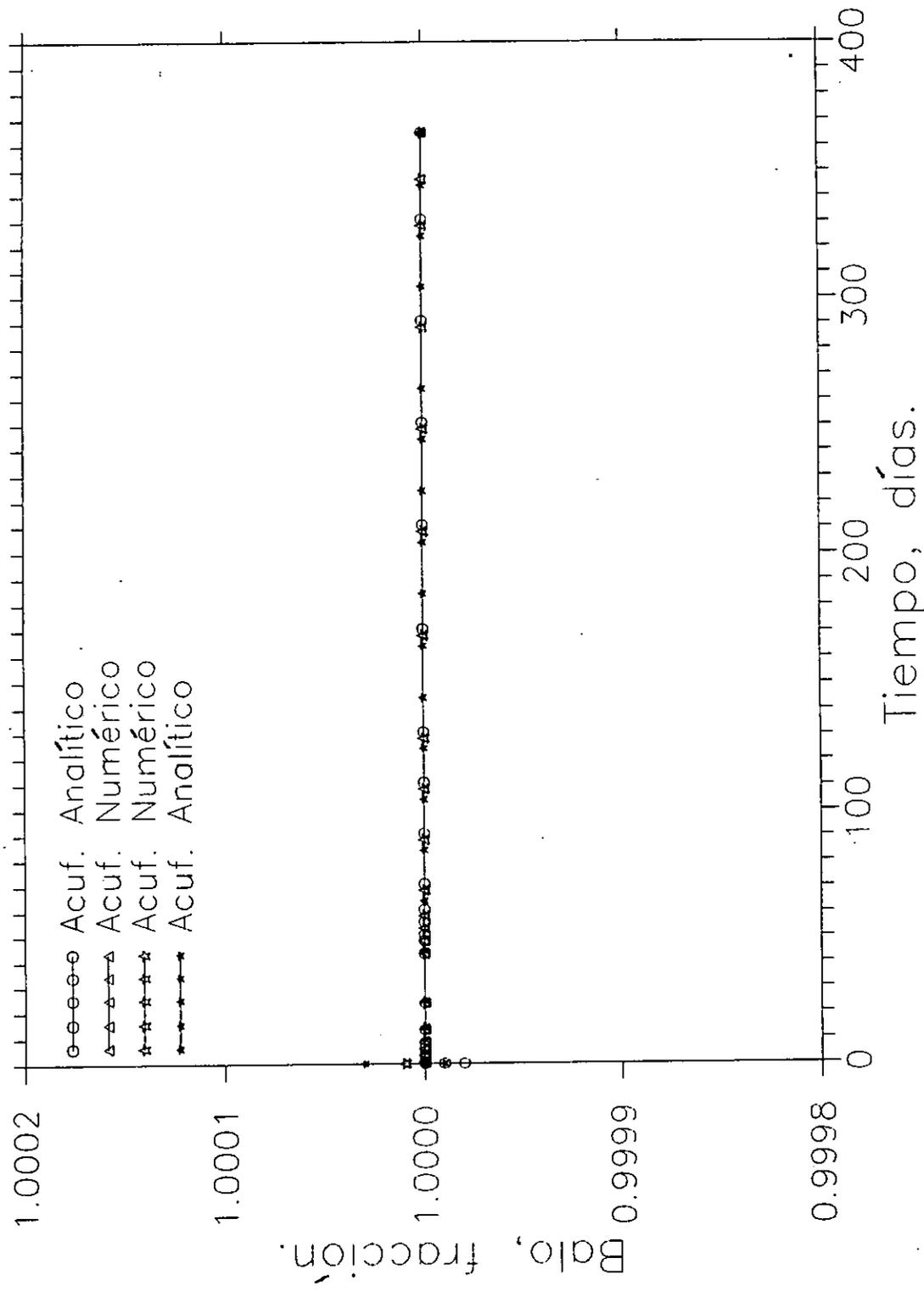


FIG. 4.13 Balance del Aceite vs Tiempo

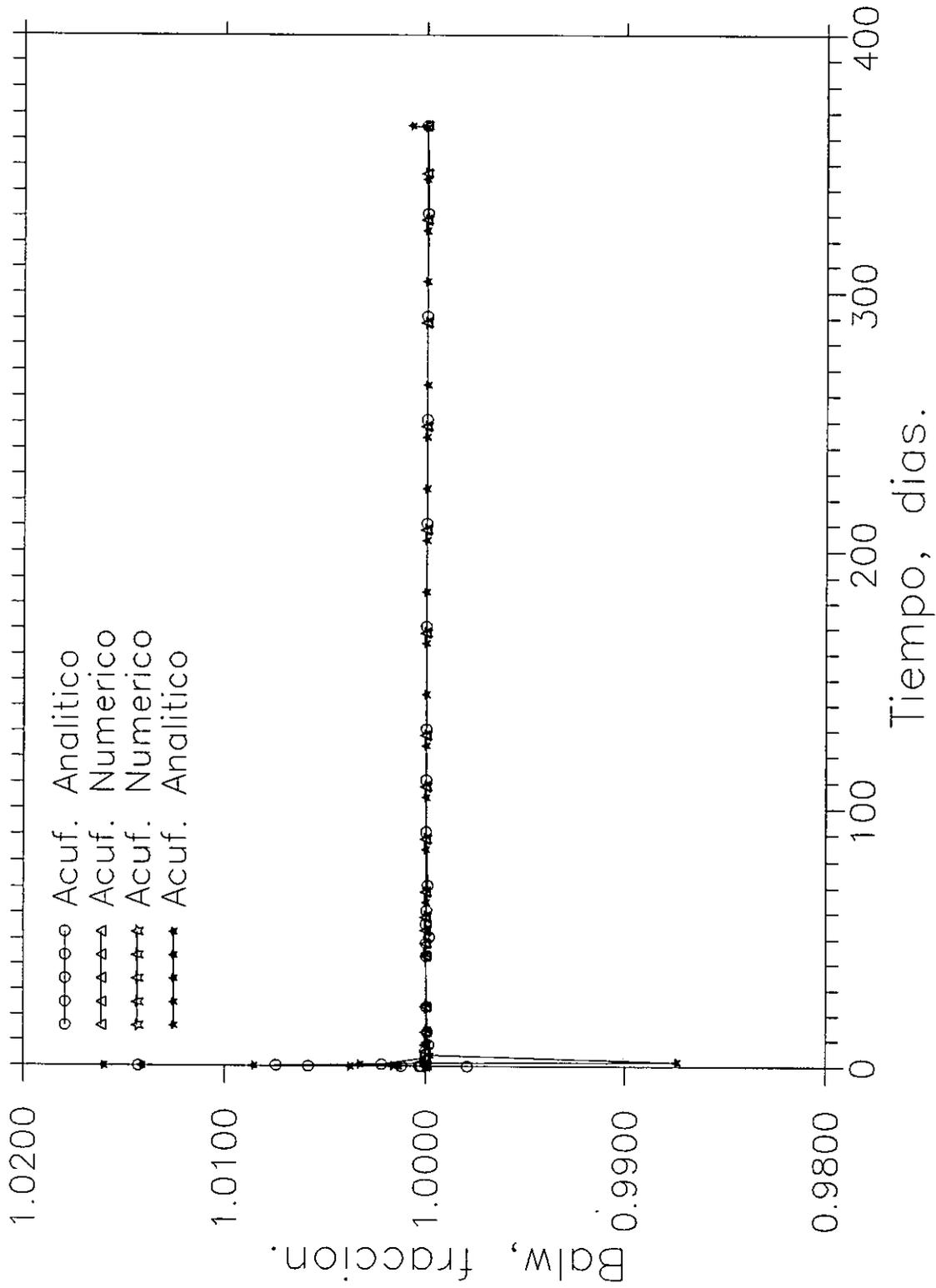


FIG. 4.14 Balance del Agua vs Tiempo

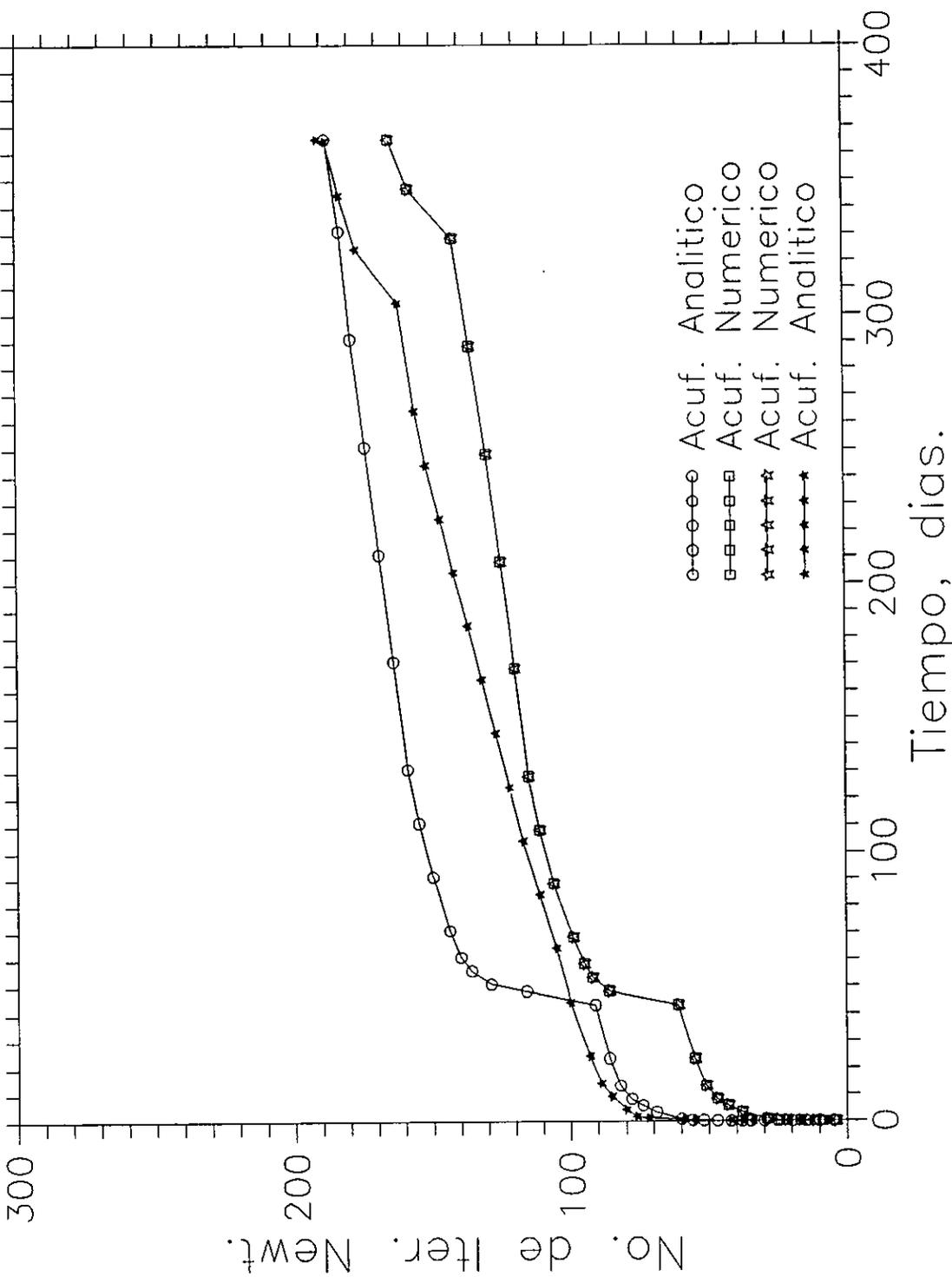


FIG. 4.15 No. de Iter. Newt. vs Tiempo

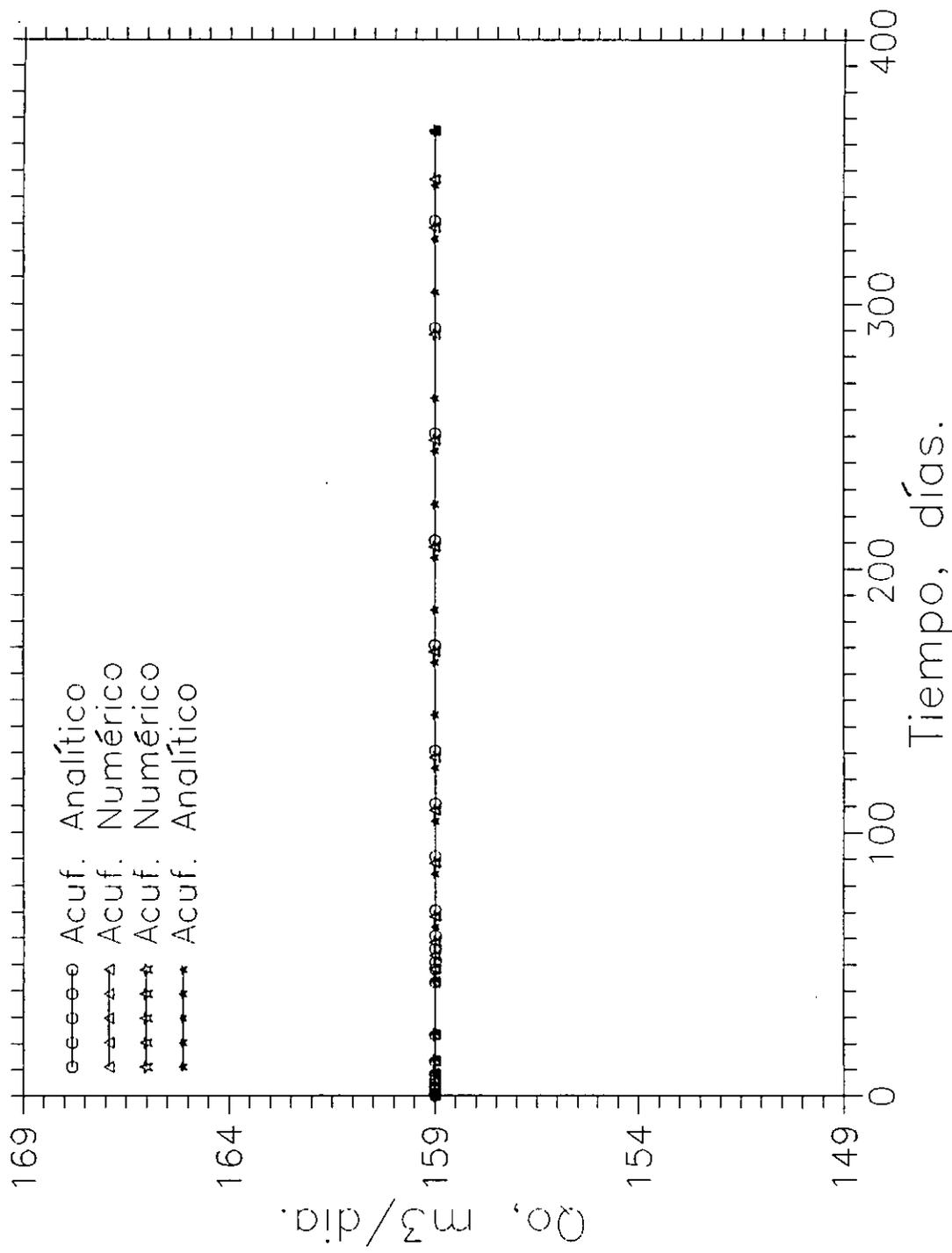


FIG. 4.16 Gasto del Aceite vs Tiempo

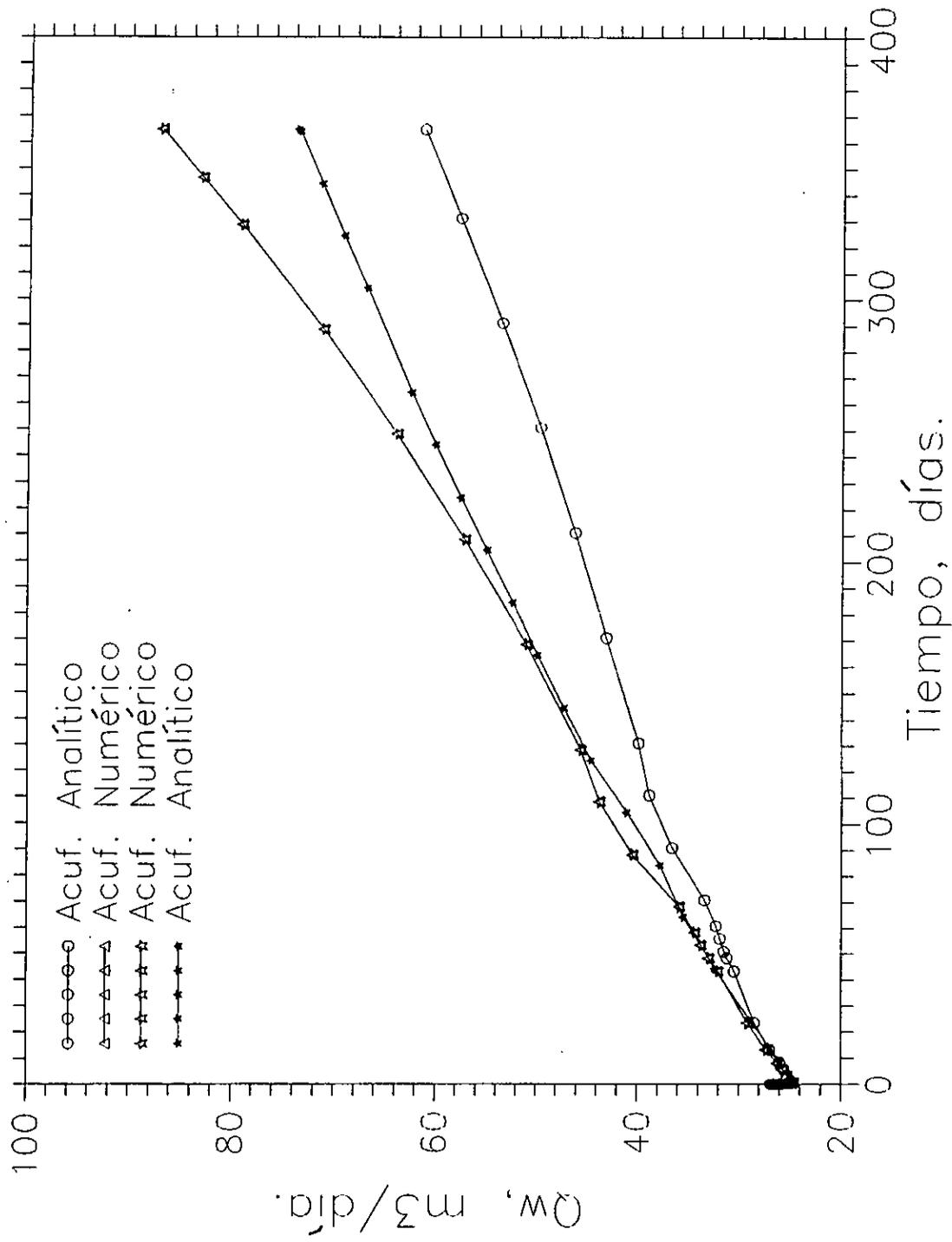


FIG. 4.17 Gasto del Agua vs Tiempo

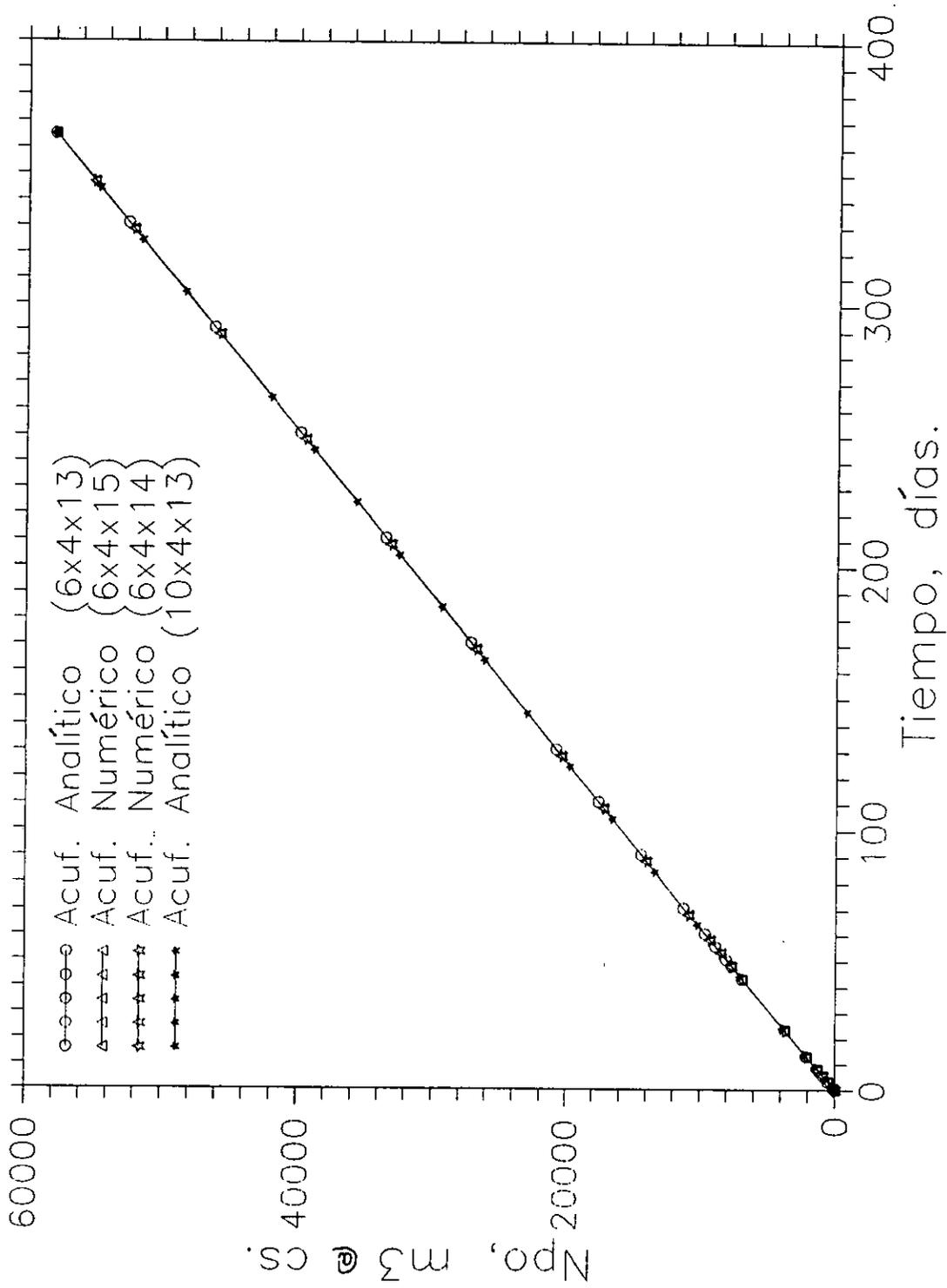


FIG. 4.18 Producción Acumulada del Aceite vs Tiempo

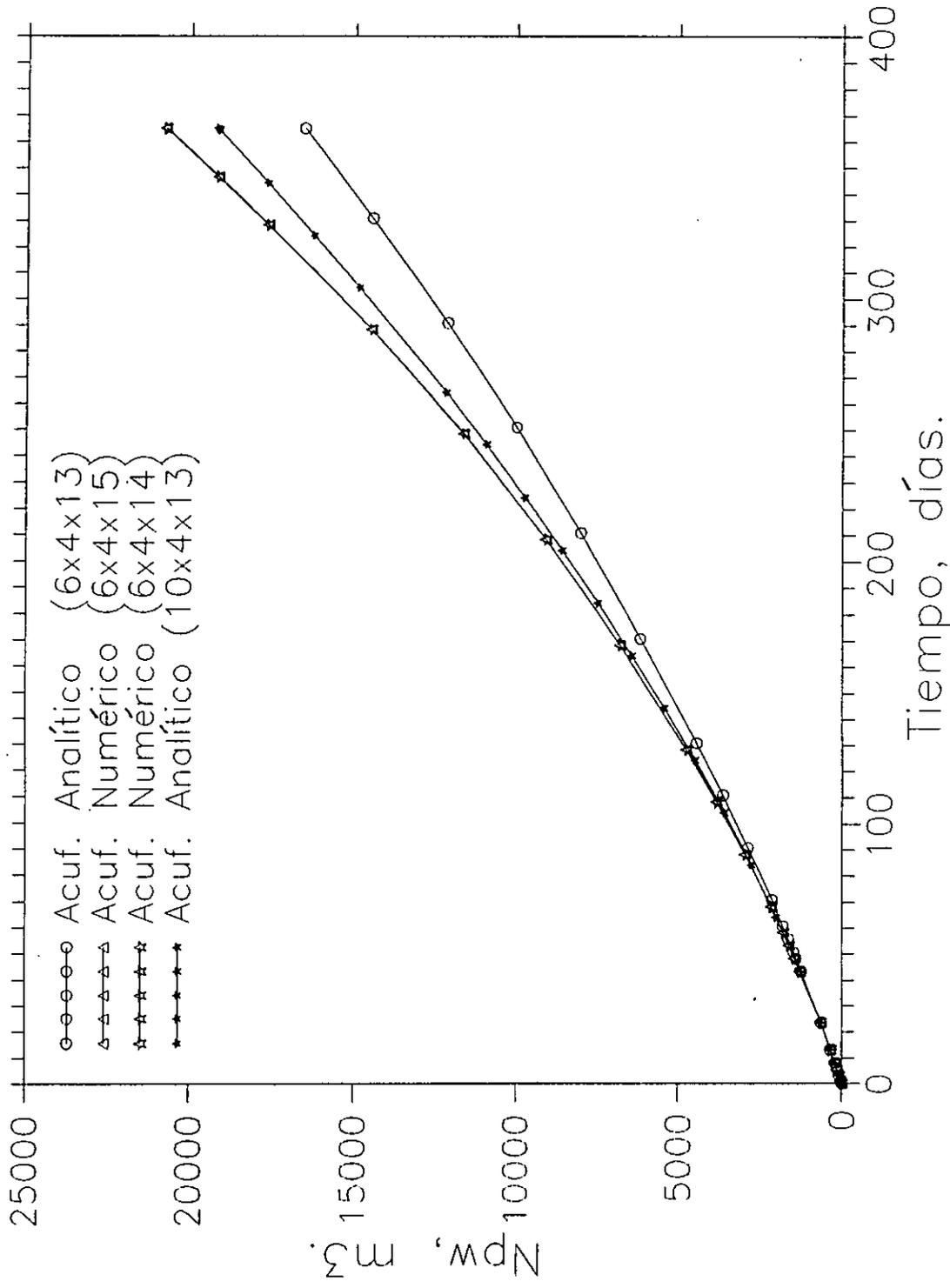


FIG. 4.19 Producción Acumulada del Agua vs Tiempo

como del agua contra el tiempo de simulación. Como se puede observar, en los casos del acuífero numérico, los resultados obtenidos con las mallas 6x4x14 y 6x4x15 son los mismos, aún cuando en uno de ellos se redujo el número de capas en el acuífero. La única diferencia entre ambas pruebas es el tiempo de ejecución, como puede verse en la tabla 4.14, en donde para la malla de 6x4x14 es de 3:44 minutos mientras que para la malla de 6x4x15 es de 4:01 minutos, 16.5% mayor.

## 4.2 METODOS ITERATIVOS.

Los métodos iterativos son ampliamente usados para resolver sistemas grandes de ecuaciones, debido a que requieren relativamente menos cantidad de memoria de cómputo y a que son más fácilmente programables, que los métodos directos.

Dentro de los métodos iterativos más empleados está el método de sobrerelajación, tanto en línea (LSOR) como en bloque (BSOR). La idea general de estos métodos es comenzar con una estimación inicial del vector de solución e iterar hasta lograr que esta estimación alcance la convergencia estipulada. Para acelerar el ritmo de convergencia a la solución, se emplea un factor de peso o parámetro de sobrerelajación entre la iteración anterior y actual, denominado omega,  $\omega$ , teniendo como límites:

$$1 \leq \omega \leq 2 \quad \dots (4.19)$$

Estos métodos iterativos son muy sensibles a este parámetro de iteración, si no se selecciona el valor óptimo, el ritmo de convergencia a la solución puede ser muy lento e incluso no alcanzar

dicha convergencia. El valor óptimo de este parámetro depende del grado de heterogeneidad y anisotropía presentes en la formación.

#### 4.2.1 METODO DE SOBRELAJACION EN LINEA, LSOR.

El esquema iterativo del método de sobrerrelajación en línea, LSOR, aplicado a la solución del sistema de ecuaciones dado por la Ec. 3.53 es:

$$\begin{aligned}
 h_{1,j,k} \delta X_{1,j,k-1}^* + e_{1,j,k} \delta X_{1,j-1,k}^* + c_{1,j,k} \delta X_{1-1,j,k}^* + a_{1,j,k} \delta X_{1,j,k}^* \\
 + b_{1,j,k} \delta X_{1+1,j,k}^* + d_{1,j,k} \delta X_{1,j+1,k}^* + g_{1,j,k} \delta X_{1,j,k+1}^* = -f_{1,j,k}
 \end{aligned}
 \dots (4.20)$$

La idea principal del método LSOR<sup>15</sup> aplicado a la Ec. 4.20 consiste en reorganizar las ecuaciones, de tal forma que el problema tridimensional se resuelva en una serie de barridos unidimensionales que son más fáciles de resolver, ya que generan una matriz de coeficientes de la forma tridiagonal. En la solución de las incógnitas de una línea determinada, se emplean los nuevos valores de las incógnitas obtenidos en líneas anteriores. Para tener un mejor comportamiento y evitar problemas de convergencia, los barridos deben seleccionarse en la dirección en donde se encuentren los valores más altos de transmisibilidad. Cada problema unidimensional se resuelve con el algoritmo de THOMAS, generando una solución intermedia que sirve de base para obtener la solución al nuevo nivel

de iteración,  $\eta+1$ .

De acuerdo con lo anterior, la Ec. 4.20 se rearrregla conservando en el lado izquierdo de la ecuación, los términos correspondientes a la dirección radial y a la diagonal principal, y se transfieren al lado derecho, los términos provenientes de las direcciones angular y vertical, así como los términos de residuos. Se establece el siguiente proceso iterativo:

$$\begin{aligned}
 c_{1,j,k}^{*(\eta+1)} \delta X_{1-1,j,k}^{*(\eta+1)} + e_{1,j,k}^{*(\eta+1)} \delta X_{1,j,k}^{*(\eta+1)} + b_{1,j,k}^{*(\eta+1)} \delta X_{1+1,j,k}^{*(\eta+1)} = -f_{1,j,k} - \\
 e_{1,j,k}^{(\eta)} \delta X_{1,j-1,k}^{(\eta)} - h_{1,j,k}^{(\eta)} \delta X_{1,j,k-1}^{(\eta)} - d_{1,j,k}^{(\eta)} \delta X_{1,j+1,k}^{(\eta)} - g_{1,j,k}^{(\eta)} \delta X_{1,j,k+1}^{(\eta)} \\
 \dots (4.21)
 \end{aligned}$$

donde:  $\delta X^{*(\eta+1)}$  es el vector de solución intermedia,

$\delta X^{(\eta)}$  es el vector de solución del nivel de iteración previo,  $\eta$ , y

$\delta X^{(\eta+1)}$  es el vector de solución del nivel de iteración desconocido,  $\eta+1$ .

La Ec. 4.21 se resuelve con el algoritmo de THOMAS, obteniéndose una solución intermedia  $\delta X^{*(\eta+1)}$  en cada barrido  $i=1,2,\dots,NR$ .

La solución en el nuevo nivel de iteración,  $\delta X_{1,j,k}^{(\eta+1)}$ , se obtiene de la siguiente forma:

$$\delta X_{i,j,k}^{(\eta+1)} = (1-\omega) \delta X_{i,j,k}^{(\eta)} + \omega \delta X_{i,j,k}^{*(\eta+1)} \quad \dots (4.22)$$

para toda  $i=1, 2, \dots, NR$   
 $j=1, 2, \dots, NT$   
 $k=1, 2, \dots, NZ$

donde  $\omega$  es un parámetro de sobrerelajación,  $1 < \omega < 2$ , que se emplea para acelerar el ritmo de convergencia a la solución.

El ritmo de convergencia del método iterativo LSOR, depende del valor del parámetro de iteración  $\omega$ . Existe un valor óptimo,  $\omega_b$ , que se puede obtener por ensaye y error o a través del algoritmo dado en la Sección 4.2.4.

El proceso iterativo del método LSOR comienza con la siguiente estimación inicial:

$$\delta X_{i,j,k}^{(0)} = \delta X_{i,j,k}^n \quad \dots (4.23)$$

y termina cuando los cambios iterativos de las incógnitas son, en valor absoluto, menores que una cierta tolerancia estipulada, esto es:

$$\left| \delta X_{i,j,k}^{(\eta+1)} - \delta X_{i,j,k}^{(\eta)} \right| \leq \text{TOLERANCIA} \quad \dots (4.24)$$

para toda  $i=1, 2, \dots, NR$   
 $j=1, 2, \dots, NT$   
 $k=1, 2, \dots, NZ$

Cabe hacer notar, que las operaciones involucradas en el proceso de solución del sistema de ecuaciones, Ec. 4.20, son operaciones matriciales debido al carácter matricial de los elementos:  $h, e, c, a, b, d$  y  $g$ , de la matriz jacobiana  $\bar{J}$  y al carácter vectorial de los elementos de  $\bar{\delta X}$  y  $\bar{F}$ .

En el Apéndice G se presenta brevemente el algoritmo de THOMAS usado en cada barrido del método LSOR.

#### 4.2.2 METODO DE SOBRELAJACION EN BLOQUE, CON UN ORDENAMIENTO D4 Y UN ALGORITMO DE BANDA, BSORB.

La idea principal de este método consiste en reorganizar por planos el sistema de ecuaciones dado por la Ec. 4.20, de tal forma que el problema tridimensional se resuelve mediante una serie de barridos bidimensionales. Al igual que en el método anterior, al resolver las incógnitas de un plano o bloque dado, se emplean los nuevos valores de las incógnitas de los planos previamente resueltos. El problema bidimensional genera, al emplear un ordenamiento normal, una matriz pentadiagonal de coeficientes que se resuelve más eficientemente que el problema original. Cada uno de estos problemas reducidos, se resuelve empleando el esquema de ordenamiento D4 y un algoritmo de banda, generando una solución intermedia que sirve de base para obtener la solución al nivel de iteración desconocido  $(\eta+1)$ .

El método de sobrerelajación en Bloque, BSORB, aplicado a la solución del sistema lineal de ecuaciones definido por la Ec. 4.20, consiste en conservar en el lado izquierdo de la ecuación, a los términos correspondientes a las direcciones radial y vertical y la diagonal principal, y transferir al lado derecho, los términos provenientes de la dirección angular y los términos de residuos, con lo que se establece el siguiente proceso iterativo:

$$\begin{aligned}
& h_{i,j,k} \delta X_{i,j,k-1}^{*(\eta+1)} + c_{i,j,k} \delta X_{i-1,j,k}^{*(\eta+1)} + a_{i,j,k} \delta X_{i,j,k}^{*(\eta+1)} + b_{i,j,k} \delta X_{i+1,j,k}^{*(\eta+1)} \\
& + g_{i,j,k} \delta X_{i,j,k+1}^{*(\eta+1)} = - f_{i,j,k} - e_{i,j,k} \delta X_{i,j-1,k}^{(\eta+1)} - d_{i,j,k} \delta X_{i,j+1,k}^{(\eta)}
\end{aligned}
\tag{4.25}$$

El sistema de ecuaciones, Ec. 4.25, que se genera en cada iteración del método BSORB, se resuelve empleando el método de ordenamiento D4 y un algoritmo de banda, obteniéndose una solución intermedia  $\delta X^{*(\eta+1)}$  en cada barrido  $i=1,2,\dots, NR$  y  $k=1,2,\dots, NZ$ . Esta solución se usa junto con la solución de la iteración previa  $\delta X^{(\eta)}$  y un parámetro de sobrerelajación  $\omega$ , para obtener el vector de solución al nuevo nivel de iteración,  $\delta X^{(\eta+1)}$ . Esto está dado por la Ec. 4.22.

En problemas donde el método LSOR no converge debido, por ejemplo, a que la formación es altamente heterogénea y anisotrópica, el método BSOR tiene un mejor comportamiento. Las propiedades de convergencia de los métodos iterativos mejoran a medida que el número de ecuaciones resueltas simultáneamente, aumenta. Esto, sin embargo, ocasiona un aumento en el trabajo computacional realizado en cada iteración.

Al igual que en el método LSOR, el proceso iterativo del método BSOR comienza con una estimación inicial, obtenida en el nivel de tiempo conocido  $n$ , dada por la Ec. 4.23, y termina cuando se cumple el criterio de convergencia estipulado, como se establece en la Ec. 4.24.

#### 4.2.3 METODO DE SOBRELAJACION EN BLOQUE, CON EL METODO DE SOLUCION DE MATRICES DISPERSAS NO-SIMETRICAS, BSORY.

En esencia, este método es el mismo que el presentado en la Sección anterior, definido por las Ecs. 4.22 y 4.25; sin embargo, en el proceso BSORY, los sistemas de ecuaciones generados en los barridos bidimensionales se resuelven mediante el método directo de solución de Matrices Dispersas No-Simétricas, definido por la Ec. 4.13, empleando tanto el ordenamiento estándar como el D4. Con el primer ordenamiento se genera una matriz de coeficientes pentadiagonal, mientras que con el segundo se genera una matriz de coeficientes con cuatro cuadrantes, definida en la Ec. 4.2.

Durante el proceso iterativo que resulta al aplicar el método BSOR, la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones permanece inalterada. Lo único que cambia en cada iteración, es el vector de términos independientes. Esto se aprovecha, ya que la factorización L'DU requerida al resolver el sistema bidimensional de ecuaciones empleando el método directo de solución, solo se efectúa una vez durante el proceso iterativo. Esto, a su vez, permite disminuir el tiempo de cómputo y el trabajo empleados en resolver dichos sistemas.

#### 4.2.4 ALGORITMO PARA EL CALCULO DEL PARAMETRO DE SOBRELAJACION.

Una forma de seleccionar el valor óptimo del parámetro de sobrerelajación  $\omega$ , de los métodos LSOR y BSOR es por ensaye y error<sup>15</sup>. Para esto, se realizan corridas de sensibilidad con diferentes valores de este parámetro y se obtiene una gráfica de los valores de  $\omega$  contra el número de iteraciones requeridas para resolver el sistema de ecuaciones. La Fig. 4.20 presenta una gráfica típica de este parámetro, en donde se observa su valor óptimo, obtenido con el menor número de iteraciones.

Otra manera de seleccionar el valor óptimo de  $\omega$ , es a través del procedimiento que a continuación se describe<sup>15</sup>:

Partiendo de considerar que cualquier esquema iterativo para resolver el sistema de Ecs. 4.6, puede expresarse de la siguiente forma:

$$\bar{x}^{(\eta+1)} = \bar{A} \bar{x}^{(\eta)} + \bar{b} \quad \dots (4.26)$$

donde la matriz  $\bar{A}$  y el vector  $\bar{b}$  dependen del problema que se quiere resolver y del método iterativo de solución, como se podrá ver a continuación.

$\eta+1$  es el nivel iterativo desconocido, y

$\eta$  es el nivel iterativo conocido.

Se demuestra<sup>30</sup> que el valor óptimo de  $\omega$  ( $\omega_b$ ) está en función del radio espectral  $\rho(A)$  de la matriz  $\bar{A}$ , esto es:

$$\omega_b = \frac{2}{1 + [1 - \rho(A)^2]^{1/2}} \quad \dots (4.27)$$

donde  $\rho(A)$  debe estar muy cerca de 1, para mejorar el ritmo de convergencia.

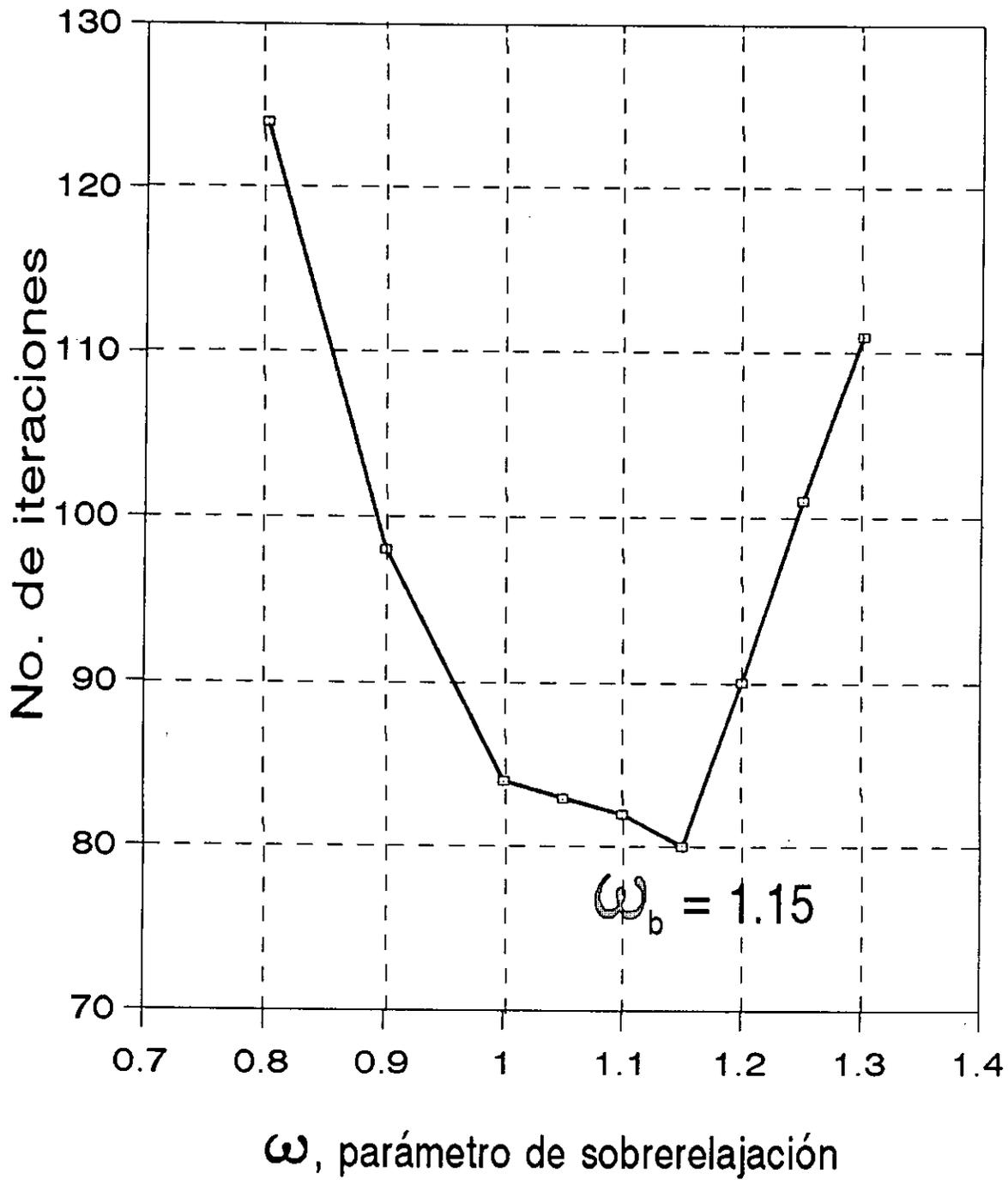


Fig. 4.20 Parámetro de Sobrerelajación vs. Número de Iteraciones

Uno de los métodos más comunes para evaluar  $\rho(A)$  es considerando el siguiente procedimiento iterativo<sup>15</sup>:

Se comienza con  $\omega=1$  y se toma la relación de los elementos correspondientes del vector de los cambios iterativos de la solución de  $\delta^{(\eta+1)}$  y  $\delta^{(\eta)}$ , donde:

$$\bar{\delta}^{(\eta)} = \bar{x}^{(\eta+1)} - \bar{x}^{(\eta)} \quad \dots (4.28)$$

$(\eta) = 0, 1, 2, \dots$

y se establece el siguiente criterio de convergencia a la solución, definido como:

$$|| \bar{\delta} ||_{\infty} < \text{TOLWB} \quad \dots (4.29)$$

donde  $|| \bar{\delta} ||_{\infty}$  es la norma infinita del vector  $\bar{\delta}^{(\eta)}$ , que es igual al valor máximo absoluto de sus componentes, y

TOLWB es la tolerancia estipulada, que comúnmente es un valor cercano a cero.

El ritmo al cual converge la solución se estima mediante la siguiente expresión:

$$\theta^{(\eta)} = || \bar{\delta} ||_{\infty}^{(\eta+1)} / || \bar{\delta} ||_{\infty}^{(\eta)} \quad \dots (4.30)$$

donde los valores de  $\theta^{(\eta)}$  deben estar muy próximos a un valor límite de  $\bar{\theta}$ , este valor se usa como una aproximación del radio espectral. Por tal motivo, los valores de  $\theta^{(\eta)}$  deben cumplir con la siguiente condición:

$$| \theta^{(\eta+1)} - \theta^{(\eta)} | \leq \text{TOLWB} \quad \dots (4.31)$$

Entonces, el radio espectral de la matriz A,  $\rho(A)$ , puede estimarse de la siguiente expresión:

$$\rho(A) \approx \left[ \bar{\theta} + \omega - 1 \right] / \omega (\bar{\theta})^{1/2} \quad \dots (4.32)$$

y calcular un nuevo valor de  $\omega$ , empleando la Ec. 4.27, donde  $\omega$  es el valor estimado de  $w_b$  usado en la generación de  $x^{(\eta)}$ , y  $\bar{\theta}$  es el valor promedio de  $\theta^{(\eta)}$  de la Ec. 4.30.

De la forma anterior se continúa con el proceso iterativo hasta lograr la convergencia estipulada. Cabe hacer notar, que este proceso converge sólo si el valor actual de  $\omega$  es menor que el nuevo valor de  $\omega$  calculado. De otra forma, los valores de  $\theta^{(\eta)}$  oscilarán y no se podrá obtener una aproximación correcta del radio espectral. En tal caso  $\omega$  debe reducirse hasta que  $\theta^{(\eta)}$  logre la convergencia.

#### 4.3 COMPARACION DE LOS METODOS DE SOLUCION.

En esta sección se estudia la eficiencia de los diferentes métodos de solución: NSPIV, MLDU, LSOR, y BSORY, presentados en las secciones anteriores de este capítulo. Estos métodos se probaron resolviendo el problema de prueba del SPE<sup>31</sup>, descrito en la Sección 4.1.5.

Es conveniente aclarar que existen dos niveles de iteración al emplear un método iterativo de solución del sistema lineal de ecuaciones junto con la formulación totalmente implícita: el interno definido por el método LSOR o BSORY y el externo definido por el método de Newton-Raphson.

Para probar el desempeño de los métodos iterativos, en la solución de problemas homogéneos y heterogéneos, los datos del proyecto comparativo de la SPE, que corresponden a un yacimiento heterogéneo, se modificaron y se definieron los siguientes cuatro casos de estudio:

- a) Caso 1: Problema homogéneo-isotrópico bidimensional (r-z).
- b) Caso 2: Problema homogéneo-isotrópico tridimensional (r- $\theta$ -z).
- c) Caso 3: Problema heterogéneo-anisotrópico bidimensional (r-z)<sup>31</sup>.
- d) Caso 4: Problema heterogéneo-anisotrópico tridimensional (r- $\theta$ -z).

En todos los casos, se consideró un acuífero numérico y se simularon 500 días de producción. Las dimensiones de la malla de cálculo para cada problema, se seleccionaron de tal forma que se tuviera una buena definición de la distribución de presiones y de saturaciones en el área de drene del pozo. Al igual que en las comparaciones anteriores, todos los casos, se corrieron en una estación de trabajo Silicon Graphics modelo INDY, con un procesador R4400 SC@100/50 Mhz, 85 MIPS y 16 MFLOPS.

Los datos empleados en el caso heterogéneo y anisotrópico se presentan en las Tablas 4.1 a 4.9, mientras que los datos del caso homogéneo e isotrópico se presentan en las Tablas 4.15 a 4.17.

En las Tablas 4.1 y 4.15 se presentan los datos generales del pozo para los casos homogéneo y heterogéneo, respectivamente, mientras que en las Tablas 4.2 y 4.16 se muestran las dimensiones de las mallas de cálculo empleadas en el simulador en ambos casos.

**TABLA 4.15 DATOS GENERALES DEL POZO: CASO HOMOGENEO E ISOTROP.**

** DATOS DEL PROYECTO COMPARATIVO DE SPE **	
Espesor de la formación .....	(M) 180.00
Radio de drene .....	(M) 624.84
Radio del pozo .....	(M) 0.0762
Presión inicial .....	(kg/cm <sup>2</sup> ) 253.11
Nivel de referencia de la presión inicial ....	(MBNM) 2763.20
Prof. media de los disparos .....	(MBNM) 2808.20
Longitud del intervalo disparado .....	(M) 10.000
Prof. de la cima de la formación .....	(MBNM) 2743.20
Prof. del contacto gas-aceite .....	(MBNM) 2763.20
Prof. del contacto agua-aceite .....	(MBNM) 2863.20
Compresibilidad de la roca .....	(1/kg/cm <sup>2</sup> ) 0.000057

TABLA 4.16 MALLA DE CALCULO DEL SIMULADOR: CASO HOMOG. E ISOTROP.

No. de celdas en la dirección radial .....						9		
No. de celdas en la dirección tangencial.....						1		
No. de celdas en la dirección vertical .....						15		
Posición del intervalo disparado:								
Arco(s) (Dirección tangencial) ...						1		
Capa(s) (Dirección vertical) .....						7            8		
DIRECCION RADIAL			DIRECCION TANGENCIAL			DIRECCION VERTICAL		
Celda	Longitud	Radio Nodo	Arco	Long.	Long. Nodo	Capa	Espesor	Prof. Nodo
	(M)	(M)		(Grad.)	(Grad.)		(M)	(M)
1	0.13	0.12	1	360.00	180.00	1	10.00	5.00
2	0.36	0.33				2	10.00	15.00
3	0.97	0.89				3	10.00	25.00
4	2.65	2.43				4	10.00	35.00
5	7.20	6.62				5	10.00	45.00
6	19.60	18.02				6	10.00	55.00
7	53.35	49.05				7	5.00	62.50
8	145.22	133.50				8	5.00	67.50
9	395.28	363.36				9	10.00	75.00
						10	10.00	85.00
						11	10.00	95.00
						12	10.00	105.00
						13	10.00	115.00
						14	20.00	130.00
						15	40.00	160.00

En las Tablas 4.3, 4.4 y 4.5 se presentan los datos PVT del aceite, del gas y del agua, respectivamente, empleados en ambos casos.

La Tabla 4.6 contiene los datos petrofísicos del caso heterogéneo y anisotrópico. En el caso homogéneo e isotrópico se consideró una porosidad constante de 14%, y una permeabilidad absoluta de 0.5 Darcies.

Las Tablas 4.7 y 4.8 muestran la información de permeabilidades relativas y de presión capilar para el sistema bifásico gas-aceite y para el sistema bifásico agua-aceite, respectivamente. Las permeabilidades relativas al aceite para un sistema trifásico se obtienen a partir del método de Stone<sup>18</sup>. Estas Tablas son empleadas tanto en el caso homogéneo como en el caso

heterogéneo.

Con respecto al programa de producción de aceite, empleado por los casos homogéneo y heterogéneo, se consideró que para el primer caso, el pozo produce a un gasto constante de 159 m<sup>3</sup>/día durante los 500 días que dura la simulación. En el segundo caso, el pozo produce 159 m<sup>3</sup>/día durante los primeros 10 días, luego se reduce el gasto de producción a 15.9 m<sup>3</sup>/día, durante los siguientes 40 días, y finalmente vuelve a producir a 159 m<sup>3</sup>/día durante el intervalo de tiempo restante, hasta completar el tiempo total de simulación especificado.

En las Tablas 4.9 y 4.17 se presenta la distribución inicial de presiones y de saturaciones, así como los volúmenes originales de fluidos, para los casos homogéneo y heterogéneo, respectivamente.

TABLA 4.17 DISTRIBUCION INICIAL DE PRES. Y SAT.:HOM. E ISO.

CAPA	SATURA. GAS	SATURACION DE AGUA	PRESION
	(FRACCION)	(FRACCION)	(KG/CM <sup>2</sup> )
1	0.7800	0.2200	252.65
2	0.7800	0.2200	252.96
3	0.0000	0.2200	253.56
4	0.0000	0.2200	254.46
5	0.0000	0.2200	255.36
6	0.0000	0.2200	256.26
7	0.0000	0.2200	256.94
8	0.0000	0.2200	257.39
9	0.0000	0.2302	258.07
10	0.0000	0.2696	258.97
11	0.0000	0.3335	259.87
12	0.0000	0.5609	260.77
13	0.0000	0.8538	261.68
14	0.0000	1.0000	263.14
15	0.0000	1.0000	266.16
VOLUMEN INICIAL DE FLUIDOS:			
Vol. inicial de aceite (m <sup>3</sup> cs) .....			10279091.
Vol. inicial de gas (m <sup>3</sup> cs) .....			3302090585.
Vol. inicial de agua (m <sup>3</sup> cs) .....			16757048.

A continuación se compara la eficiencia de los métodos en la solución de los cuatro casos de estudio mencionados al principio de esta sección.

**a)CASO 1: Problema homogéneo-isotrópico bidimensional (r-z).**

Se considera flujo trifásico- bidimensional y se discretiza al área de drene del pozo en 9 celdas en la dirección radial y 15 celdas (capas), en la dirección vertical. También, se considera que el intervalo productor se encuentra disparado en las capas 7 y 8, produciendo a gasto constante. Inicialmente, se tiene un casquete de gas en las primeras dos capas y un acuífero en las últimas dos capas, como se puede observar en la Tabla 4.17.

Los datos para este caso están presentados en las Tablas 4.1, 4.3, 4.5 y 4.7 a 4.12.

Dadas las características del problema y de la sensibilidad del parámetro de sobrerelajación del método LSOR, es necesario hacer un análisis previo de este parámetro y de las tolerancias empleadas como criterios de solución, antes de comparar su desempeño con el de los métodos directos. Esto obedece al requerimiento impuesto de satisfacer el balance de materia en cada una de estas pruebas, y de asegurar que el comportamiento de presión y saturación sea el correcto, dado que ciertos valores de  $\omega$  y de estas tolerancias pueden conducir a soluciones equivocadas.

De este análisis surgen los siguientes cuatro casos de sensibilidad:

- a.1) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , tanto en el método de Newton-Raphson como en el método LSOR, con una estimación inicial en la primera iteración newtoniana igual a cero.

Un punto importante de revisar es la estimación inicial de las incógnitas requeridas por el método LSOR. En este caso, esta estimación se igualó a cero en la primera iteración newtoniana,  $\delta X_{i,j,k}^{(V=1)} = 0$ . Con respecto al parámetro de sobrerelajación, se realizaron 13 corridas: En las primeras 7 corridas,  $\omega$  se mantuvo constante durante la simulación, en el rango de 1 a 1.75, y en las 6 restantes, se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo, descrito en la sección 4.2.4. En las corridas 8 y 9, se calculó el valor de  $\omega$  solamente al inicio de cada iteración newtoniana, y se mantuvo el valor calculado hasta que el método LSOR alcanzará la convergencia; se emplearon dos tolerancias para este algoritmo, 0.01 y 0.001, y se comenzó siempre con un valor de  $\omega$  igual a uno. En las corridas 10 y 11, se empleó nuevamente el algoritmo y en cada iteración newtoniana se permitió el cálculo de  $\omega$ , siendo su valor inicial y tolerancias iguales a los dos casos anteriores. En las corridas 12 y 13 se empleó una la tolerancia de 0.01 y los valores iniciales de  $\omega$  fueron 1.5 y 1.75, respectivamente.

La Tabla 4.18 muestra el desempeño computacional del método iterativo LSOR con respecto al parámetro de aceleramiento a la convergencia,  $\omega$  y para estas tolerancias en presión y en saturación, tanto del método de Newton como del método LSOR.

TABLA 4.18 METODO LSOR,  $TOLP = TOLPI = 1 \times 10^{-3}$  Y  $TOLS = TOLSI = 1 \times 10^{-4}$

	$\omega$	numero etapas	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu minutos
1	1.00	74	706	1750	1:30
2	1.10	73	625	1629	1:21
3	1.15	76	552	1463	1:12
4	1.25	67	468	1461	1:04
5	1.35	57	462	1701	1:07
6	1.50	57	515	2883	1:28
7	1.75	313	4041	30340	14:08
8	algoritmo de $\omega$ tl=.01	67	414	1737	1:08
9	algoritmo de $\omega$ tl=.001	69	594	1725	1:10
10	algoritmo de $\omega$ tl=.01	70	583	1928	1:21
11	algoritmo de $\omega$ tl=.001	69	617	1800	1:23
12	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.50$ tl=.01	54	451	2602	1:18
13	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.75$ tl=.01	384	4597	39553	16:10

Como puede observarse en la Tabla 4.18, desde el punto de vista computacional la corrida 4 es la más eficiente (1:04 min de tiempo de CPU y  $\omega=1.25$ ), dado que requiere un menor número de iteraciones newtonianas y del LSOR para alcanzar el tiempo total de simulación (500 días). Sin embargo, revisando el comportamiento de la relación Gas-Aceite, mostrado en la Fig. 4.21, de la presión de fondo fluyendo, mostrado en la Fig. 4.22, de la presión promedio del área

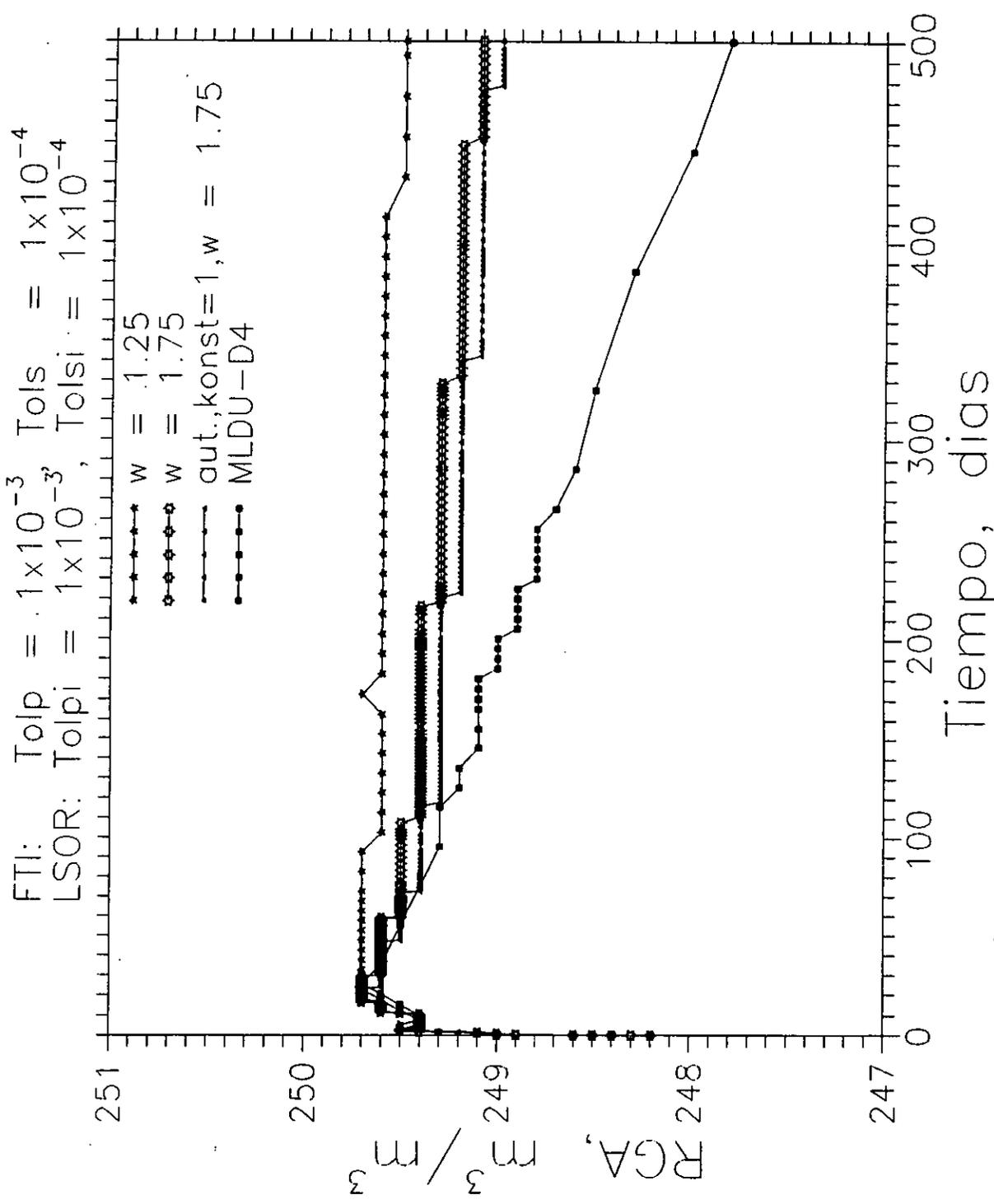


Fig. 4.21 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

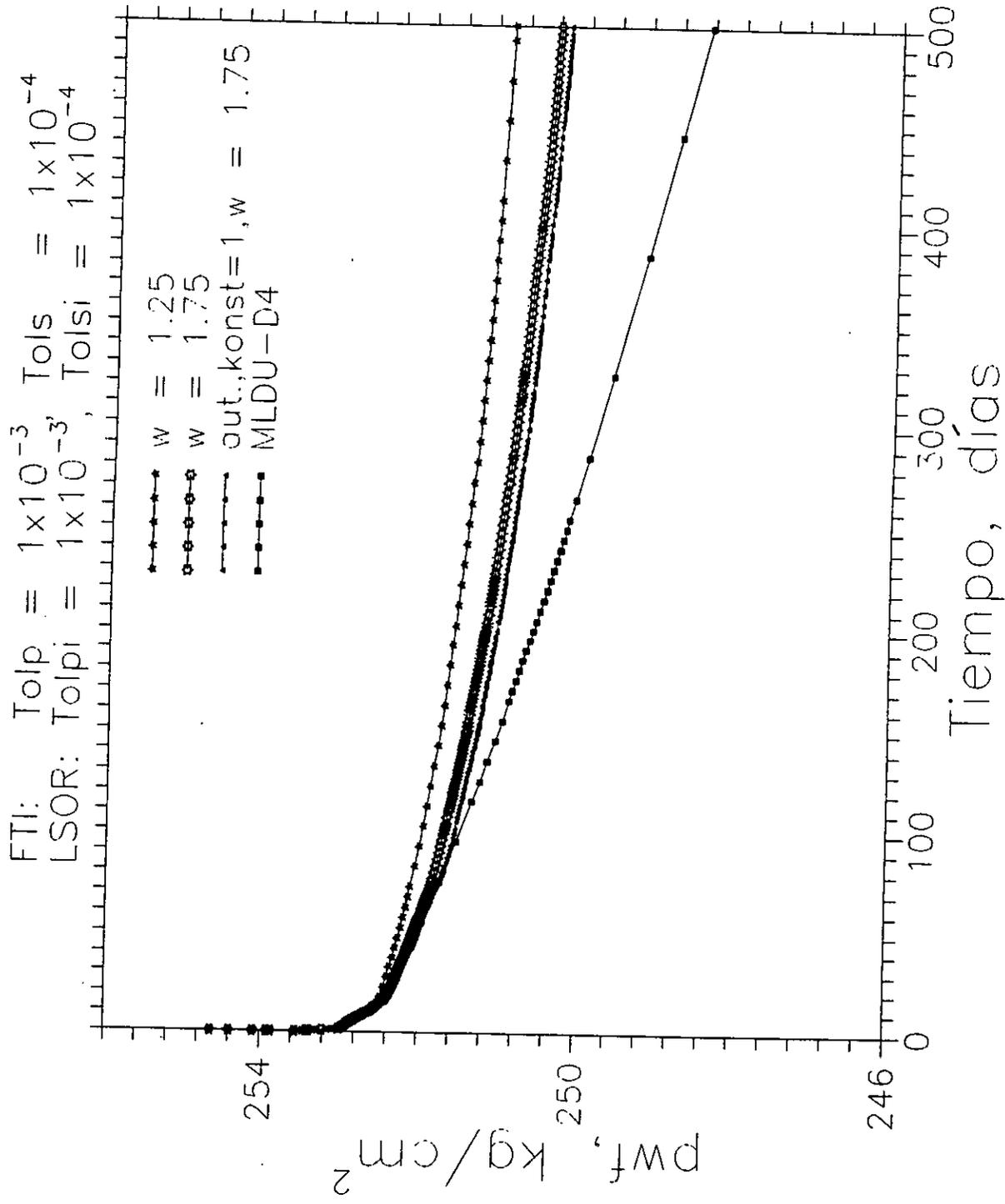


Fig. 4.22 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

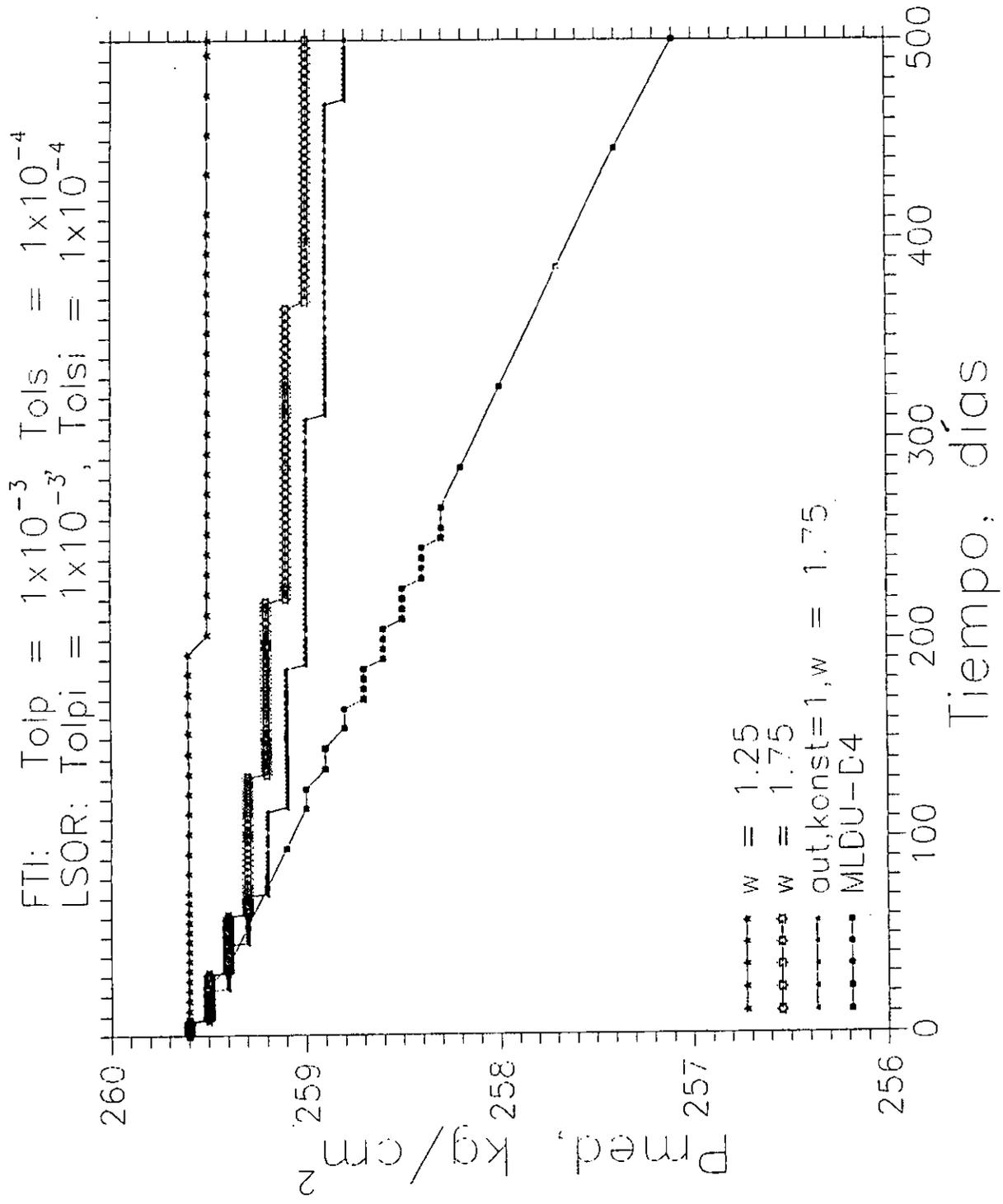


Fig. 4.23 Presión media vs Tiempo

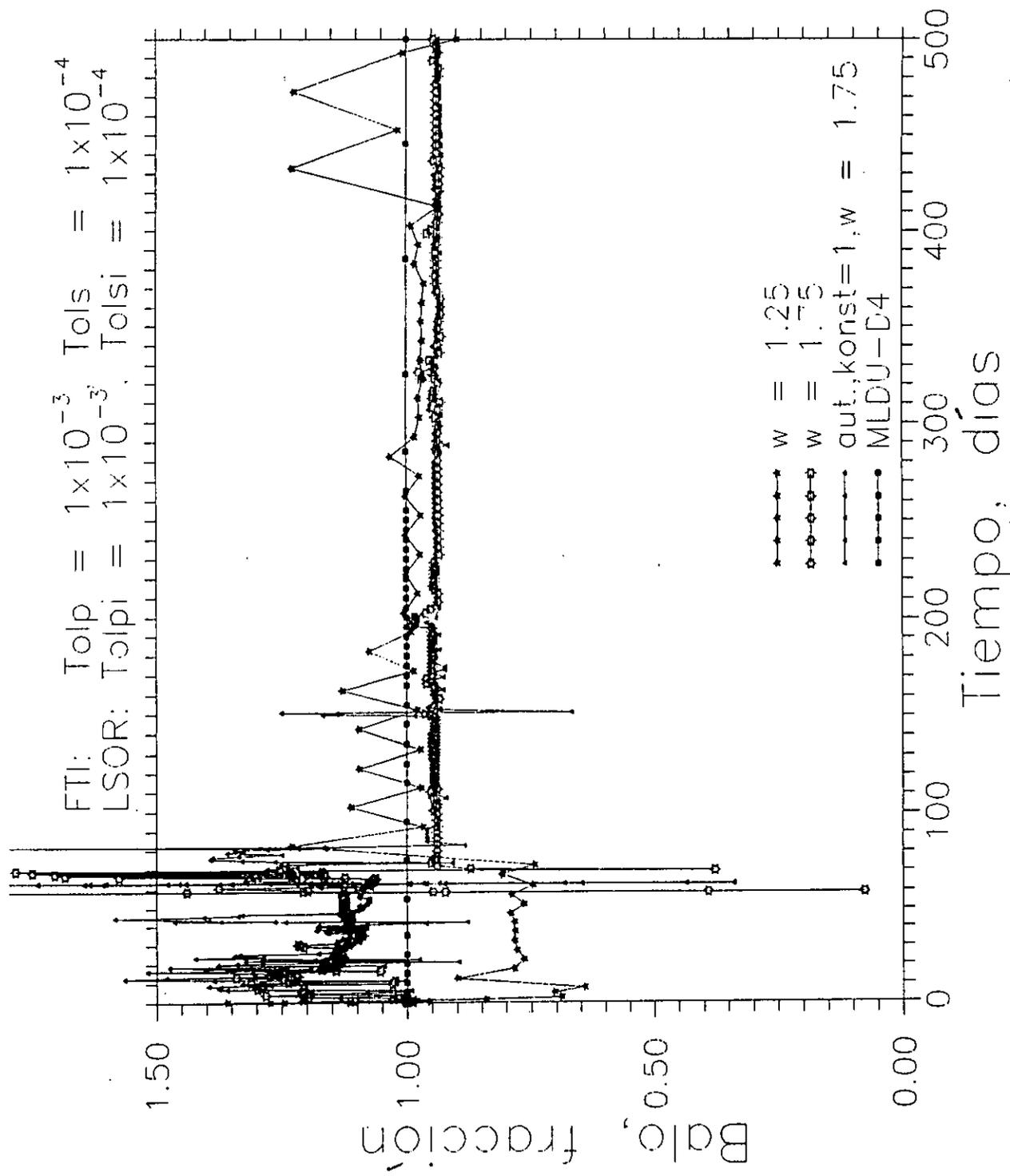


Fig. 4.24 Balance de materia del aceite vs Tiempo

de drene del pozo, mostrado en la Fig. 4.23 y del balance de materia del aceite, mostrado en la Fig. 4.24, se observa que la solución, dado por los símbolos de estrellas, está muy lejos de la correcta, dada por los símbolos de los cuadros llenos y generada con el método directo MLDU empleando el ordenamiento D4.

En estas figuras también se presentan las soluciones de las corridas 7 ( $\omega=1.75$ ) y 13 (algoritmo de  $\omega$  y  $\omega_{\min}=1.75$ ) y como puede observarse en ellas, sólo al inicio, antes de los 20 días, todas las corridas concuerdan perfectamente, excepto en el balance de materia; después se desvían de la solución correcta dado por los símbolos de cuadros llenos. También se observa que al final del tiempo de simulación se tiene una diferencia en la relación Gas-Aceite de  $1.2 \text{ m}^3/\text{m}^3$ , en la presión de fondo fluyendo de  $2 \text{ kg}/\text{cm}^2$  y en la presión promedio de  $1.7 \text{ kg}/\text{cm}^2$ ; es importante notar que se tienen problemas serios de balance de materia al inicio de la simulación, lo que al final se refleja en estas diferencias. Por lo que es necesario disminuir las tolerancias tanto en el método de Newton-Raphson como en el método LSOR, para corregir el balance de materia y de esta forma disminuir estas diferencias, como se ensayará en sub-secciones posteriores.

- a.2) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3} \text{ kg}/\text{cm}^2$  y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , en el método de Newton-Raphson como del método LSOR, con una estimación inicial en cada iteración newtoniana igual a cero..

La diferencia principal entre esta sub-sección y la anterior está en la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas del método LSOR, que en este caso se toma como cero en

cada iteración newtoniana,  $\delta X_{i,j,k}^{(V)} = 0$ . Se mantienen las mismas tolerancias en presión y en saturación que en el caso anterior.

Se realizaron 18 corridas; en las primeras 11 se mantuvo un único valor constante de omega, en el rango de 1 a 1.9, durante todo el tiempo de simulación. En las corridas 12 a 14 se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo y se calculó el valor de  $\omega$  solo al inicio de cada iteración newtoniana; se mantuvo este valor hasta alcanzar la convergencia del método LSOR. En este algoritmo se tomaron dos tolerancias, 0.01 y 0.001, y se comenzó siempre con un valor  $\omega$  igual a uno. Por otra parte, para la corrida 14 además de lo anterior, se restringió el paso de tiempo máximo permitido para avanzar la simulación de una etapa a otra a 10 días, mientras que en los otros casos,  $\Delta t_{\max} = 60$  días.

En las corridas 15 a 18, se empleó nuevamente este algoritmo y en cada iteración newtoniana se permitió el cálculo de  $\omega$ , comenzando en uno con las mismas dos tolerancias para este algoritmo. En las corridas 17 y 18 además de lo anterior, también se restringió el paso de tiempo máximo permitido para avanzar de una etapa de tiempo a otra a 10 días.

La Tabla 4.19 muestra el desempeño computacional del método iterativo LSOR con respecto al parámetro  $\omega$ , para las mismas tolerancias en presión y en saturación, tanto del método de Newton como del método LSOR. Como puede observarse en esta tabla, desde el punto de vista computacional la corrida 4, es la más eficiente (0:32 seg de tiempo de CPU y  $\omega=1.25$ ), dado que requiere un menor número de iteraciones newtonianas y del LSOR para alcanzar el tiempo total de simulación. Sin embargo, revisando el comportamiento de la relación Gas-Aceite, mostrado en la Fig. 4.25, de la presión de fondo

TABLA 4.19 METODO LSOR, TOLP = TOLPI =  $1 \times 10^{-3}$  Y TOLS = TOLSI =  $1 \times 10^{-4}$

	$\omega$	numero etapas	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu minutos
1	1.00	25	122	1400	0:31
2	1.10	25	128	1431	0:32
3	1.15	25	128	1430	0:32
4	1.25	25	128	1429	0:32
5	1.35	25	126	1448	0:32
6	1.50	26	133	1642	0:35
7	1.75	28	127	2994	0:53
8	1.75 $\Delta t=10$ d	65	282	4307	1:36
9	1.85	35	186	9805	2:31
10	1.875	65	354	28260	6:59
11	1.90	102	515	41427	10:17
12	algoritmo de $\omega$ $t1=.01$	29	145	4041	1:10
13	algoritmo de $\omega$ $t1=.001$	31	153	3663	1:05
14	algoritmo de $\omega$ $t1=.001$ $\Delta t=10$ d	63	245	1379	0:43
15	algoritmo de $\omega$ $t1=.01$	26	126	3103	0:55
16	algoritmo de $\omega$ $t1=.001$	30	143	2717	0:51
17	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.50$ $t1=.01$ $\Delta t=10$ d	63	245	1882	0:49
18	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.75$ $t1=.001$ $\Delta t=10$ d	63	245	1379	0:43

fluyendo, mostrado en la Fig. 4.26, de la presión promedio del área de drene del pozo, mostrado en la Fig. 4.27 y del balance de materia del aceite, mostrado por la Fig. 4.28, se observa que la solución, dada por los símbolos de las estrellas llenas, difiere de la correcta, dada por los símbolos de los cuadros pequeños llenos.

En estas figuras también se comparan las soluciones obtenidas en las corridas 5,7,8,9,10,12,14 y 17 con la solución correcta, obtenida con el método directo MLDU y un ordenamiento D4. Como puede observarse casi todas las soluciones, a excepción de la obtenida en la corrida 10, difieren de la correcta.

La solución obtenida en la corrida 10, dada por los símbolos de cuadros grandes llenos, aunque es la más cercana a la correcta, aún tiene problemas de balance de materia como lo muestra la Fig. 4.28 y los recursos de cómputo que requiere no son muy fuertes (6:59 min. de tiempo de CPU,  $\omega=1.875$ ), dado que realiza 354 iteraciones newtonianas y 28260 iteraciones en el método LSOR. En este punto, es conveniente remarcar que se logró el objetivo de reducir el tiempo de cómputo requerido por el método LSOR, al permitir que la estimación inicial del LSOR se iguale a cero en cada iteración newtoniana. Por ende, también se redujo el número de etapas de tiempo, el número de iteraciones newtonianas y del LSOR, requeridas para alcanzar el tiempo total de simulación de 500 días.

Nótese que el reducir el intervalo de tiempo máximo permitido, a 10 días, para avanzar de una etapa de tiempo a otra, no tuvo ningún efecto sobre la solución, dado que los cambios más importantes se dan antes de los 60 días de simulación y en ese período los intervalos de tiempo, seleccionados automáticamente por el simulador en todas las corridas son menores que 10 días.

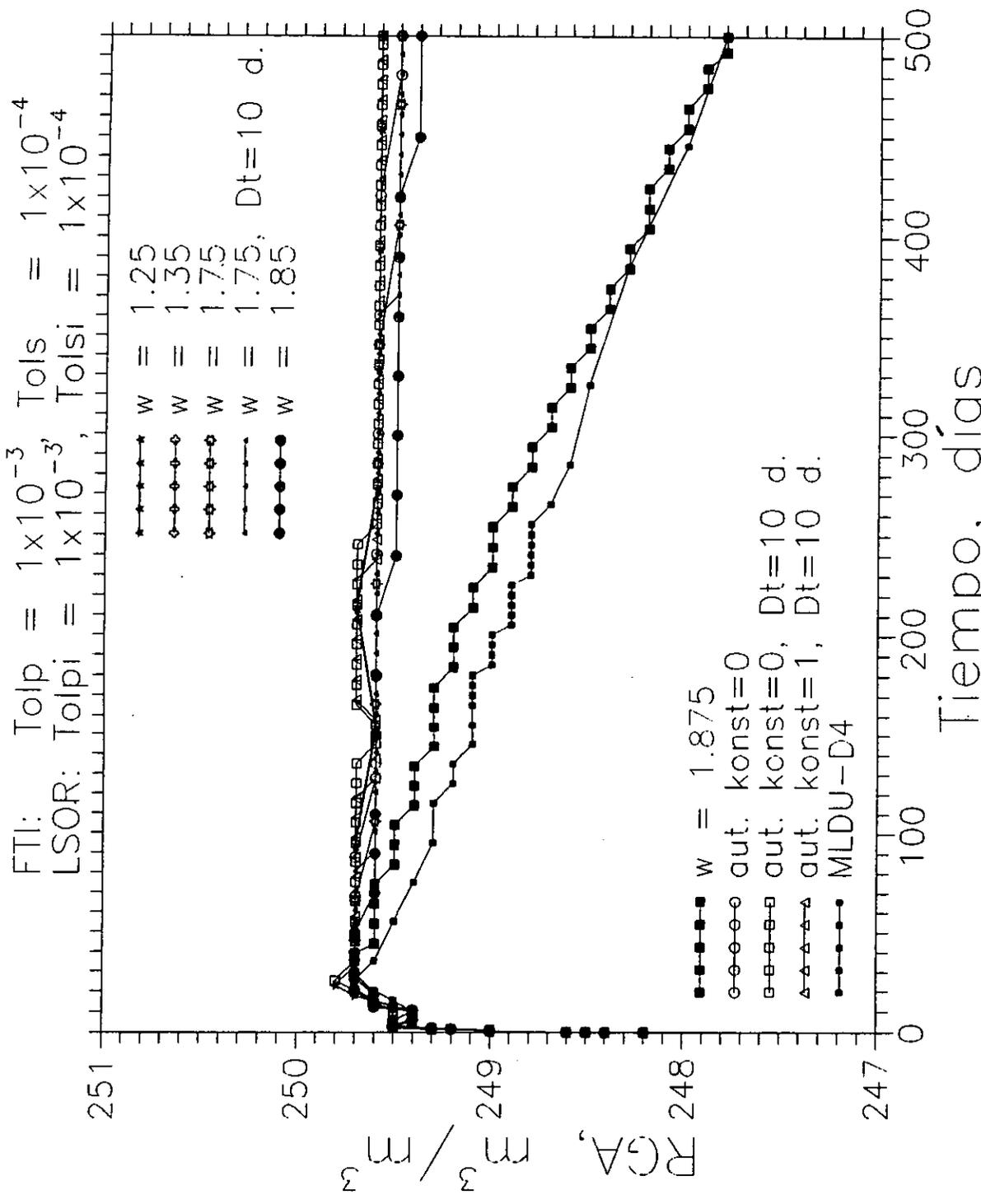


Fig. 4.25 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

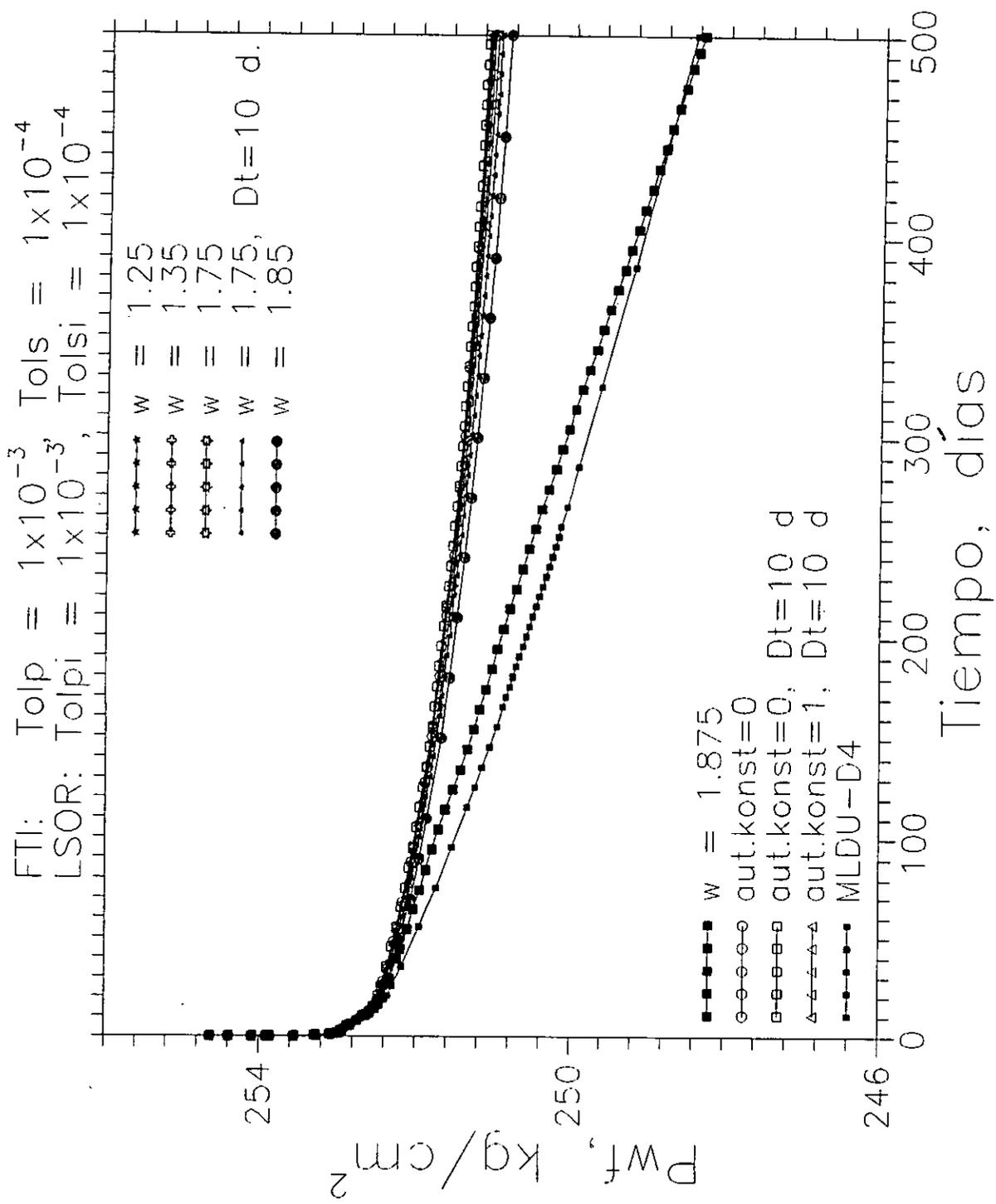


Fig. 4.26 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

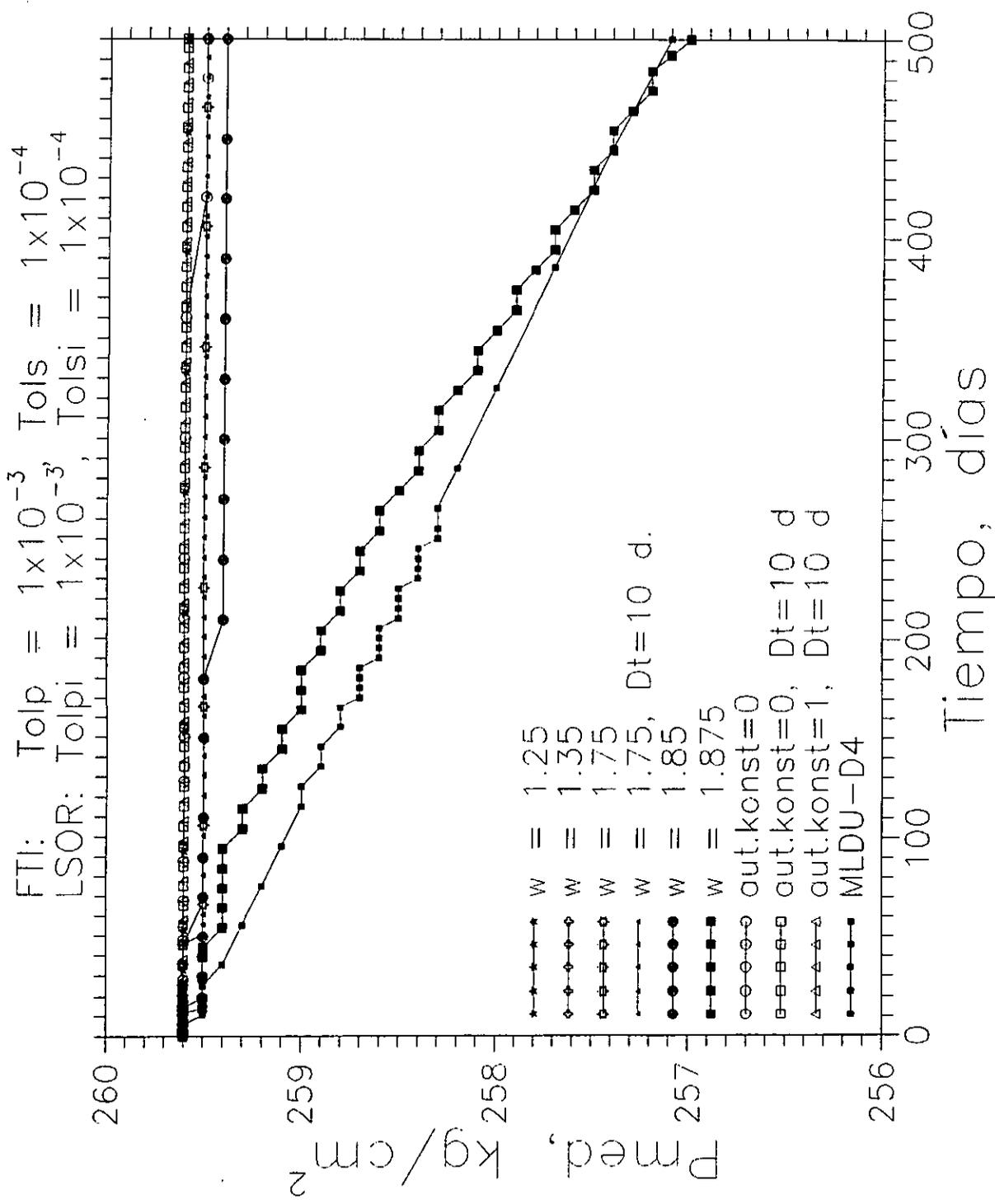


Fig. 4.27 Presión media vs Tiempo

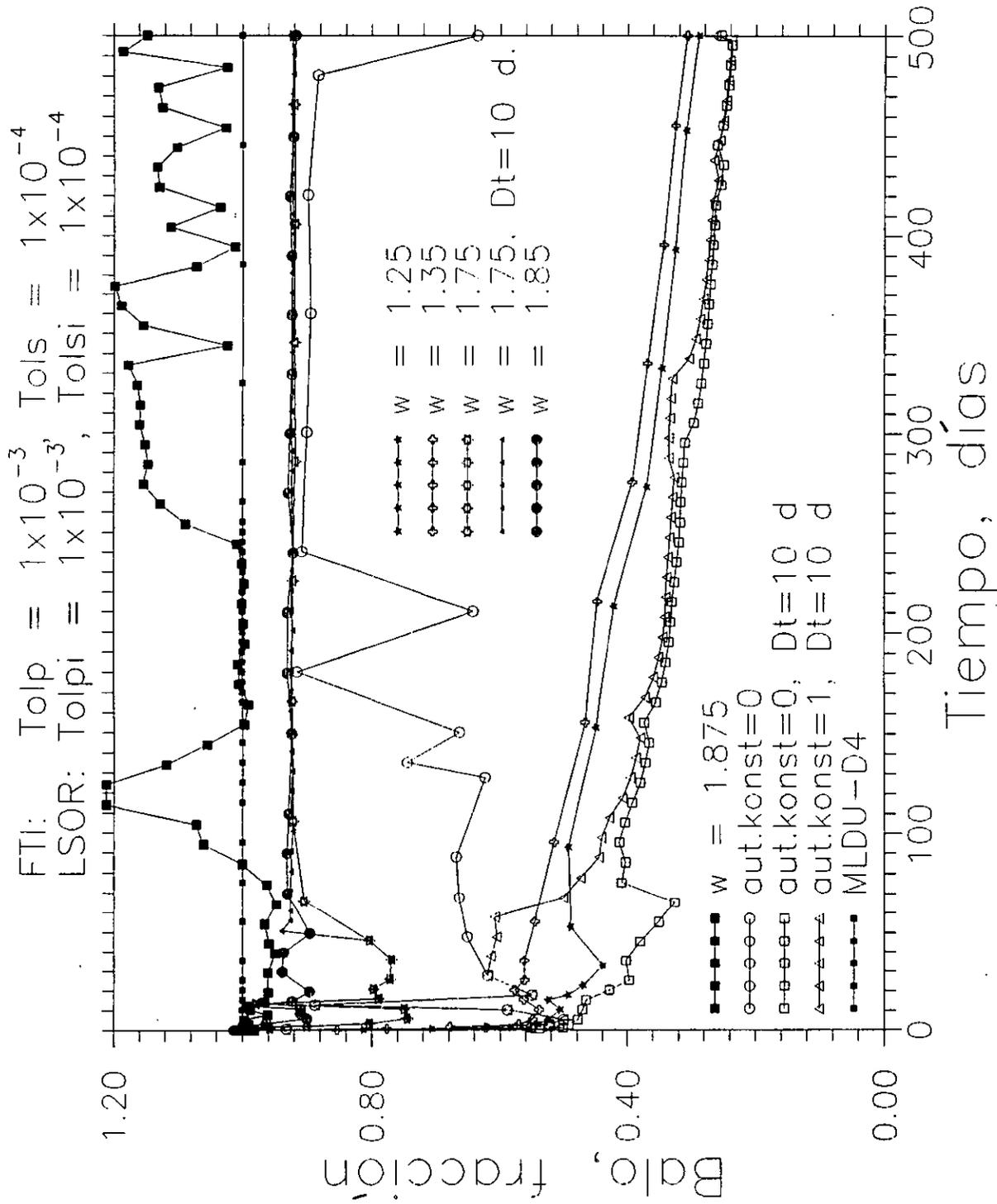


Fig. 4.28 Balance de materia del aceite vs Tiempo

a.3) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , en el método de Newton-Raphson y una tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-5}$  para el método LSOR.

En esta sub-sección, se toma la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas para el método LSOR, igual a cero en cada iteración newtoniana,  $\delta X_{i,j,k}^{(v)} = 0$ , con las tolerancias en presión y en saturación para el método de Newton-Raphson de  $1 \times 10^{-3}$  y  $1 \times 10^{-4}$ , respectivamente, y disminuyéndolas para el método LSOR a  $1 \times 10^{-4}$  en presión y a  $1 \times 10^{-5}$  en saturación. Con esto se pretende mejorar el balance de materia y por ende el comportamiento de presión y saturación en la región drenada por el pozo, tratando de que el tiempo de proceso para este método sea práctico y competitivo con respecto a los métodos directos.

Se realizaron 18 corridas: en las primeras 10 se mantuvo un único valor constante de omega, en el rango de 1 a 1.95, durante todo el tiempo de simulación. En las corridas 11 a 13 se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo, y se calculó  $\omega$  solo al inicio de cada iteración newtoniana, se mantuvo este valor calculado hasta alcanzar la convergencia del método LSOR. En este algoritmo se tomaron dos tolerancias, 0.01 y 0.001, y se comenzó siempre con un valor de  $\omega$  igual a uno. Por otra parte, para la corrida 13 además de lo anterior, se restringió el paso de tiempo máximo permitido para avanzar la simulación de una etapa a otra a 10 días y no a 60 días como a las demás.

En las corridas 14 a 18, se empleó nuevamente este algoritmo y en cada iteración newtoniana se permitió el cálculo de  $\omega$ .

comenzando en uno con las mismas dos tolerancias para este algoritmo. En las corridas 16 y 17 además de lo anterior, también se restringió el paso de tiempo máximo permitido para avanzar de una etapa de tiempo a otra a 10 días y para la corrida 18 se inició con un valor de  $\omega = 1.925$  en vez de  $\omega=1$  como en las demás.

La Tabla 4.20 muestra el desempeño computacional del método iterativo LSOR con respecto al parámetro  $\omega$ , para las tolerancias en presión de  $1 \times 10^{-3}$  y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$  para el método de Newton y de  $1 \times 10^{-4}$  y de  $1 \times 10^{-5}$  para el método LSOR, respectivamente. Como puede observarse en esta tabla, desde el punto de vista computacional la corrida 6, es la más eficiente (0:54 seg de tiempo de CPU y  $\omega=1.50$ ), dado que requiere un menor número de iteraciones newtonianas y del LSOR para alcanzar el tiempo total de simulación. Sin embargo, revisando el comportamiento de la relación Gas-Aceite, mostrado en la Fig. 4.29, de la presión de fondo fluyendo, mostrado en la Fig. 4.30, de la presión promedio del área de drene del pozo, mostrado en la Fig. 4.31 y del balance de materia del aceite, mostrado por la Fig. 4.32, se observa que la solución, dada por los símbolos de las cruces huecas, sigue estando muy lejos de la correcta, la cual está dada por los símbolos de los cuadros pequeños llenos.

En estas figuras también se comparan las soluciones obtenidas en las corridas 5,7,8,9,11,13,16 y 18 con la solución correcta, obtenida con el método directo MLDU y un ordenamiento D4. Como puede observarse casi todas las soluciones, a excepción de las obtenidas en las corridas 9 y 18, difieren de la correcta.

La solución obtenida por la corrida 9, dada por los símbolos de círculos grandes llenos, casi logra seguir la tendencia correcta, y los problemas de balance de materia ya no son tan

TABLA 4.20 METODO LSOR, TOLP =  $1 \times 10^{-3}$  Y TOLS =  $1 \times 10^{-4}$  (FTI)  
 TOLPI =  $1 \times 10^{-4}$  Y TOLSI =  $1 \times 10^{-5}$  (LSOR)

	$\omega$	numero etapas	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu minutos
1	1.00	28	129	4930	1:20
2	1.10	27	125	4424	1:13
3	1.15	27	125	4309	1:11
4	1.25	27	125	4081	1:08
5	1.35	26	121	3665	1:02
6	1.50	25	124	3031	0:54
7	1.75	26	124	4649	1:16
8	1.85	39	187	15001	3:44
9	1.90	112	464	54176	13:10
10	1.95	793	3966	266697	67:25
11	algoritmo de $\omega$ tl=.01	59	263	17207	4:25
12	algoritmo de $\omega$ tl=.001	35	157	8125	2:08
13	algoritmo de $\omega$ tl=.001 $\Delta t=10$ d	67	245	7400	2:07
14	algoritmo de $\omega$ tl=.01	68	300	21708	5:28
15	algoritmo de $\omega$ tl=.001	61	258	16799	4:19
16	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.00$ tl=.01 $\Delta t=10$ d	95	360	18808	4:56
17	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.00$ tl=.001 $\Delta t=10$ d	83	317	16697	4:24
18	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.925$ tl=0.01 $\Delta t=60$ d	217	933	123103	29:31

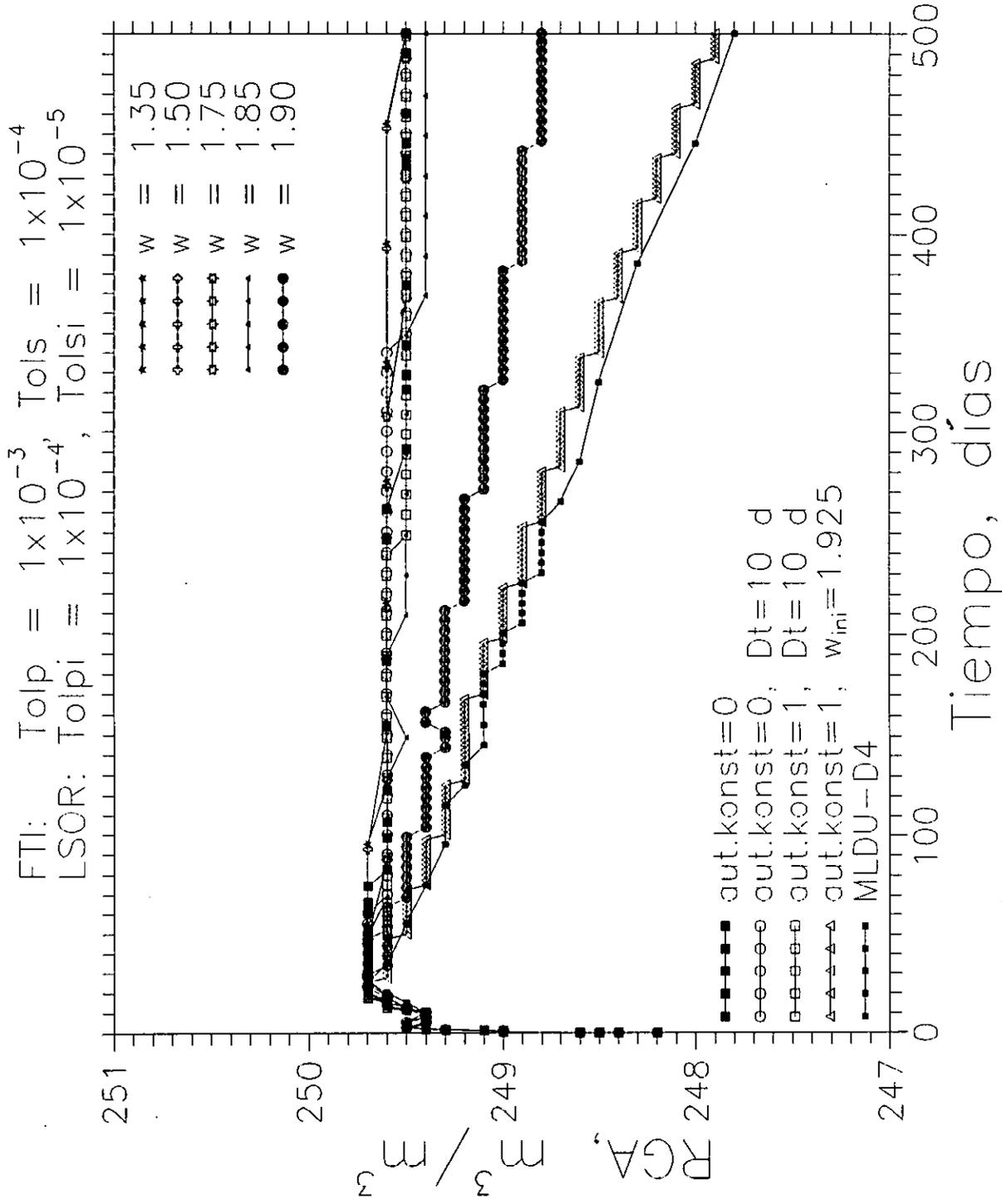


Fig. 4.29 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

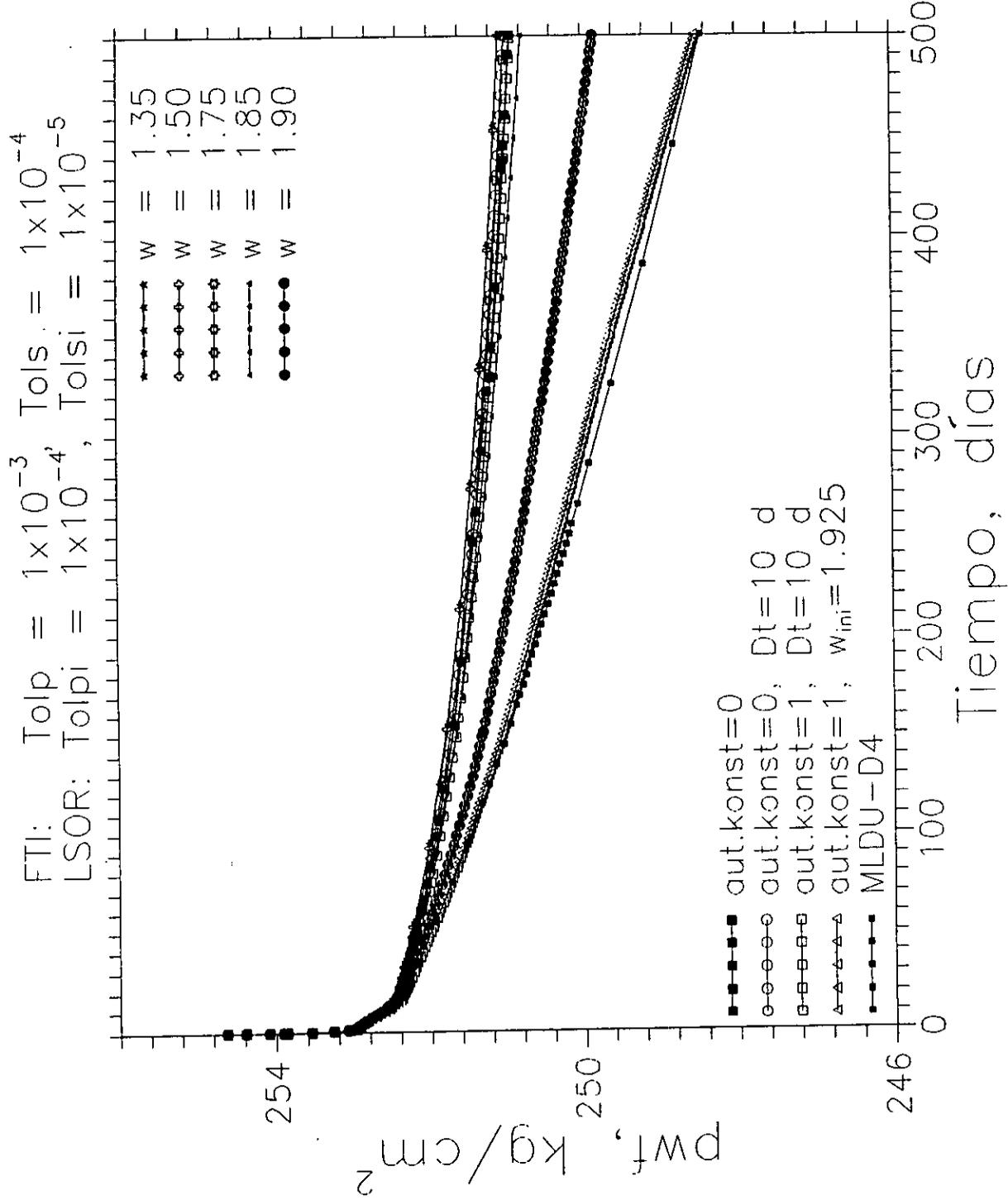


Fig. 4.30 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-3}$ , Tols =  $1 \times 10^{-4}$   
 LSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-4}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-5}$

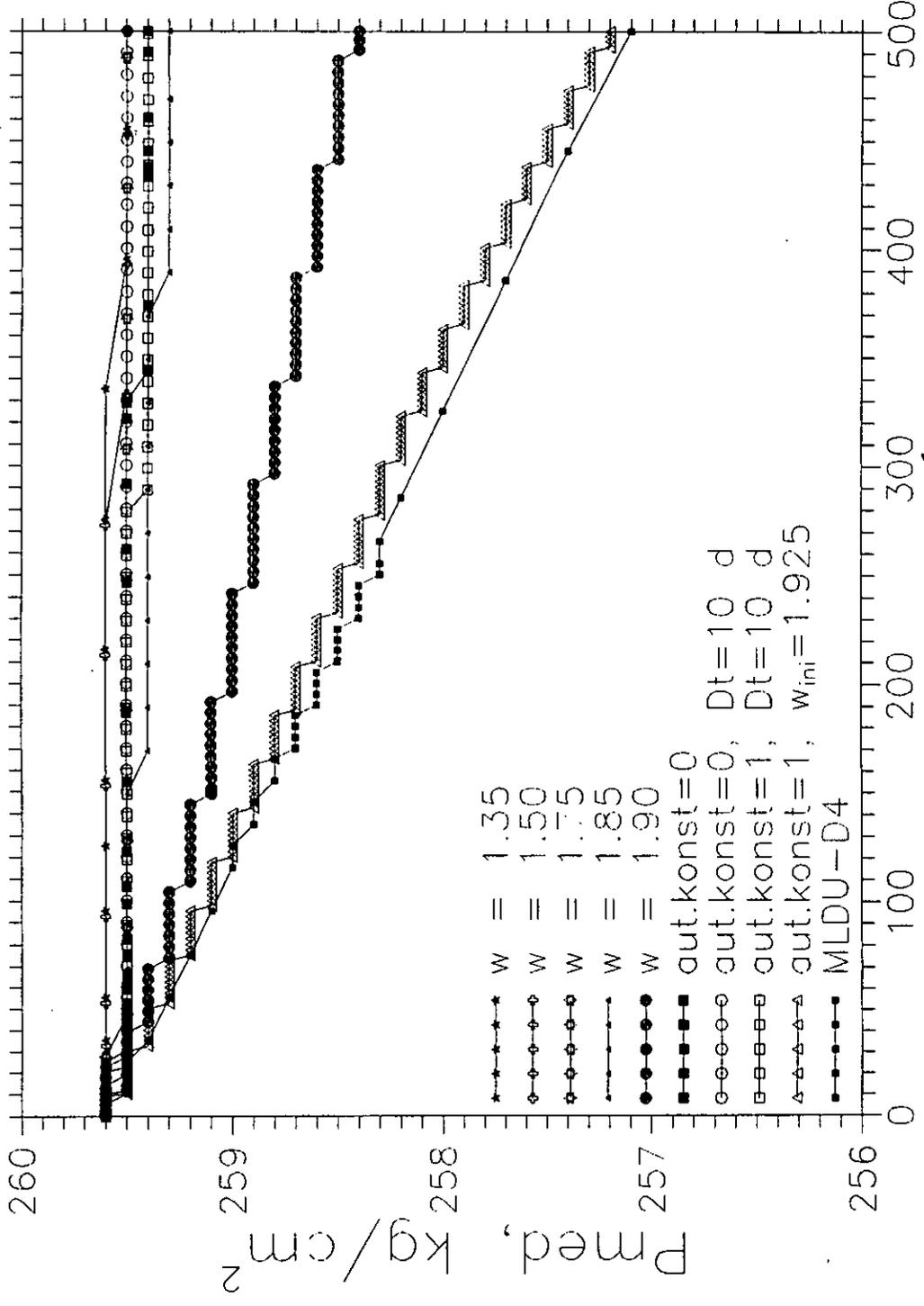
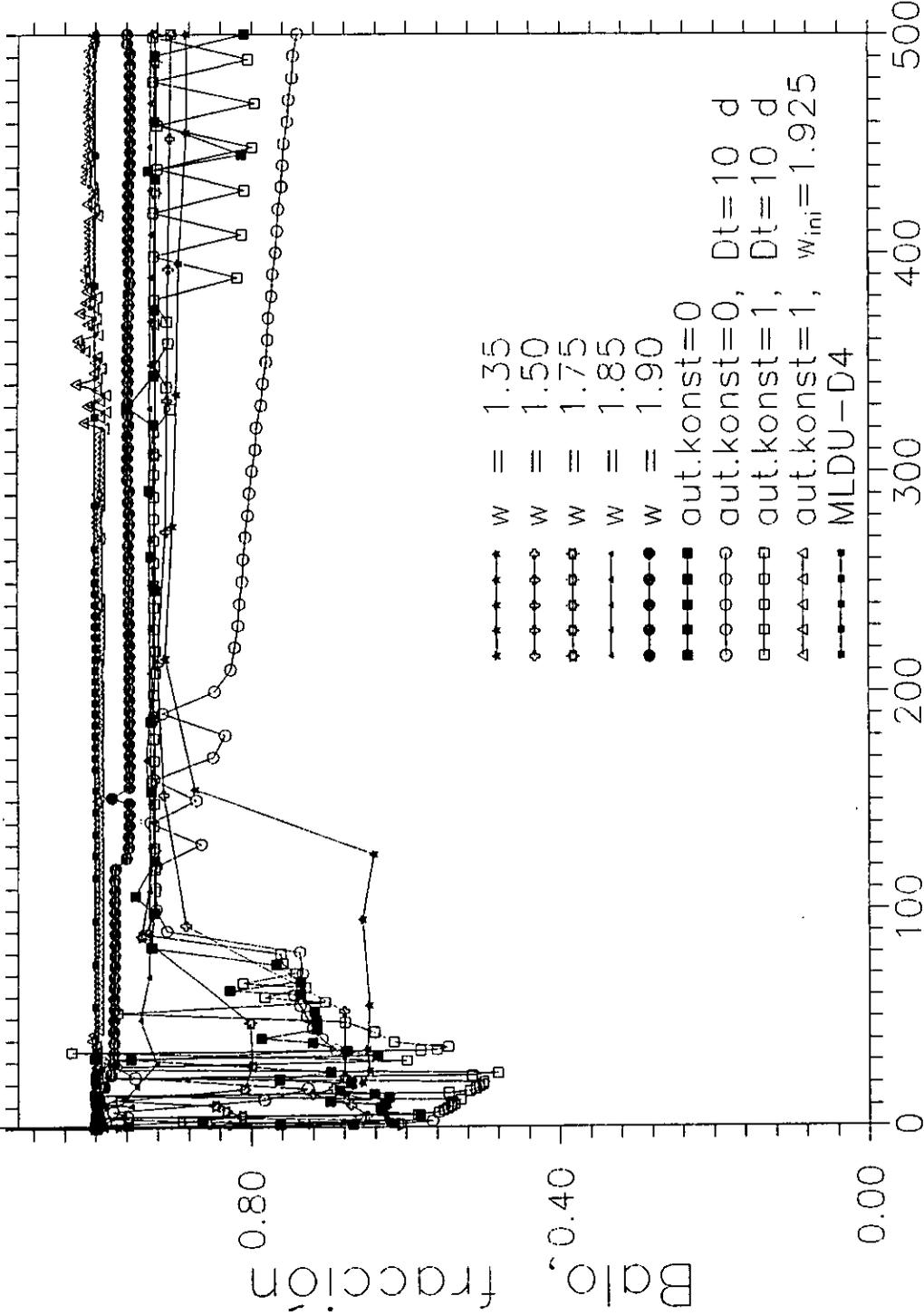


Fig. 4.31 Presión media vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-3}$ , Tols =  $1 \times 10^{-4}$   
 LSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-4}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-5}$



Tiempo, días

Fig. 4.32 Balance de materia del aceite vs Tiempo

críticos como lo muestra la Fig. 4.32 ya que casi se mantiene en una línea recta y se tienen errores de balance no mayores del 4% y consume un tiempo de CPU de 13:10 min.

La solución obtenida por la corrida 18, dada por los símbolos de triángulos huecos, logra seguir la tendencia correcta, dada por los símbolos de los cuadros pequeños llenos, y el balance de materia se mantiene prácticamente en uno, como lo muestra la Fig. 4.32, pero es la que mayores recursos de cómputo requiere (29:31 min de tiempo de CPU) realizando 217 etapas de tiempo, 933 iteraciones newtonianas y 123103 iteraciones del LSOR.

Revisando el comportamiento del  $\omega$  del método LSOR, se observa que durante la corrida debe ajustarse su valor conforme cambien las condiciones locales de presión y saturación. En otras palabras, para el problema de flujo multifásico hacia un pozo, mantener un solo valor de  $\omega$  durante toda la corrida funciona hasta cierto tiempo de simulación; sin embargo, cuando las condiciones de presión y saturación cambian fuertemente, este valor debe de cambiar para que sea óptimo y de esta manera la solución del sistema lineal de ecuaciones se realice en el menor número de iteraciones del LSOR y por consiguiente en un menor número de iteraciones newtonianas. Se observa que el algoritmo propuesto en la referencia 15 no funciona adecuadamente; es necesario modificarlo o desarrollar otro algoritmo más eficiente. Dentro de las modificaciones que se hicieron al algoritmo están:

- 1) Calcular  $\omega$  solo en la primera iteración newtoniana.
- 2) Calcular  $\omega$  en cada iteración newtoniana.
- 3) Iniciar el cálculo de  $\omega$  con un valor diferente de uno.
- 4) Incluir un factor de corrección a criterio del usuario.

- a.4) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-5}$ , tanto del método de Newton-Raphson como del método LSOR.

En esta sub-sección, se toma la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas para el método LSOR, igual a cero en cada iteración newtoniana,  $\delta X_{i,j,k}^{(v)} = 0$ . Las tolerancias en presión y en saturación, tanto para el método de Newton-Raphson como para el método LSOR se disminuyen ahora a:  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y  $1 \times 10^{-5}$ , respectivamente. El objetivo principal de este ensayo es mejorar el balance de materia, y por ende el comportamiento de presión y saturación en la región drenada por el pozo al disminuir las tolerancias para la convergencia del método de Newton, tratando de que el tiempo de proceso para el método LSOR sea práctico y competitivo con respecto a los métodos directos. Además, se ensayan diferentes valores iniciales de  $\omega$  para el cálculo de su valor óptimo empleando el algoritmo descrito en la Sección 4.2.4.

Se realizaron 18 corridas: en las primeras 9 se mantuvo un único valor constante de omega, en el rango de 1 a 1.875, durante todo el tiempo de simulación. En las corridas 10 y 12 se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo, y se calculó  $\omega$  solo al inicio de cada iteración newtoniana, se mantuvo este valor calculado hasta la convergencia del método LSOR. En este algoritmo se tomaron tres tolerancias: 0.1, 0.01 y 0.001, y se comenzó siempre con un valor  $\omega$  igual a uno.

En las corridas 13 a 18, se empleó nuevamente este algoritmo y en cada iteración newtoniana se permitió el cálculo de  $\omega$ , comenzando en uno con las tolerancias de 0.01 y 0.001 para este algoritmo. En las corridas 15 a 18 se inició con un valor de  $\omega =$

1.5, de  $\omega = 1.75$ , de  $\omega = 1.85$  y de  $\omega = 1.861$ , respectivamente, en vez de uno como en las anteriores, corridas 10 y 12.

La Tabla 4.21 muestra el desempeño computacional del método iterativo LSOR con respecto al parámetro de  $\omega$  para las tolerancias en presión de  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-5}$ , tanto para el método de Newton como para el método de LSOR. Como puede observarse en esta tabla, desde el punto de vista computacional, la corrida 5 es la más eficiente (1:02 min. de tiempo de CPU, con  $\omega = 1.35$ ), dado que requiere un menor número de iteraciones newtonianas y del LSOR para alcanzar el tiempo total de simulación estipulado. Sin embargo, revisando el comportamiento de la relación Gas-Aceite, mostrado en la Fig. 4.33, de la presión de fondo fluyendo, mostrado en la Fig. 4.34, de la presión promedio del área de drene del pozo ponderada con respecto al volumen poroso, mostrado en la Fig. 4.35 y del balance de materia del aceite, mostrado en la Fig. 4.36, se observa que la solución, dada por los símbolos de las estrellas llenas, sigue estando muy lejos de la correcta, dada por los símbolos de los cuadros pequeños llenos.

En estas figuras también se comparan las soluciones obtenidas en las corridas 6,8,9,10,11,15, 16 y 18 con la solución correcta, obtenida con el método directo MLDU y un ordenamiento D4.

La solución obtenida por la corrida 18, dada por los símbolos de triángulos huecos, casi logra seguir la tendencia correcta, dada por los símbolos de los cuadros pequeños llenos. También se tienen problemas de balance de materia, como lo muestra la Fig. 4.36, y es esta corrida la que mayores recursos de cómputo requiere (16:51 min. de tiempo de CPU, con  $\omega = 1.861$ ), dado que realiza el mayor número de iteraciones newtonianas y del LSOR. En este punto es necesario remarcar que al disminuir más las

TABLA 4.21 MÉTODO LSOR,  $TOLP = 1 \times 10^{-4}$  y  $TOLS = 1 \times 10^{-5}$  (FTI)  
 $TOLPI = 1 \times 10^{-4}$  y  $TOLSI = 1 \times 10^{-5}$  (LSOR).

	$\omega$	Número etapas	Número de iter. Newto.	Número de iter. LSOR	Tiempo de CPU minutos
1	1.00	31	168	4005	1:11
2	1.10	29	163	3739	1:06
3	1.15	31	171	3653	1:06
4	1.25	32	176	3443	1:04
5	1.35	32	175	3308	1:02
6	1.50	42	231	3466	1:09
7	1.75	37	206	5005	1:27
8	1.85	45	233	11001	2:51
9	1.875	65	345	19423	4:57
10	Algoritmo de $\omega$ $t_l=0.1$	143	749	28999	7:52
11	Algoritmo de $\omega$ $t_l=0.01$	72	381	11144	3:10
12	Algoritmo de $\omega$ $t_l=0.001$	72	363	14956	4:02
13	Algoritmo de $\omega$ $t_l=0.01$ $\Delta t=60$ d	62	320	11541	3:09
14	Algoritmo de $\omega$ $t_l=0.001$	72'	365	15239	4:05
15	Algoritmo de $\omega$ $\omega=1.50$ $t_l=0.01$	54	283	8800	2:28
16	Algoritmo de $\omega$ $\omega=1.75$ $t_l=0.01$	51	264	10511	2:49
17	Algoritmo de $\omega$ $\omega=1.85$ $t_l=0.01$	175	873	53271	13:37
18	Algoritmo de $\omega$ $\omega=1.861$	220	1096	65291	16:51

FTI:  $T_{olp} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $T_{ols} = 1 \times 10^{-5}$   
 LSOR:  $T_{olpi} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $T_{olsi} = 1 \times 10^{-5}$

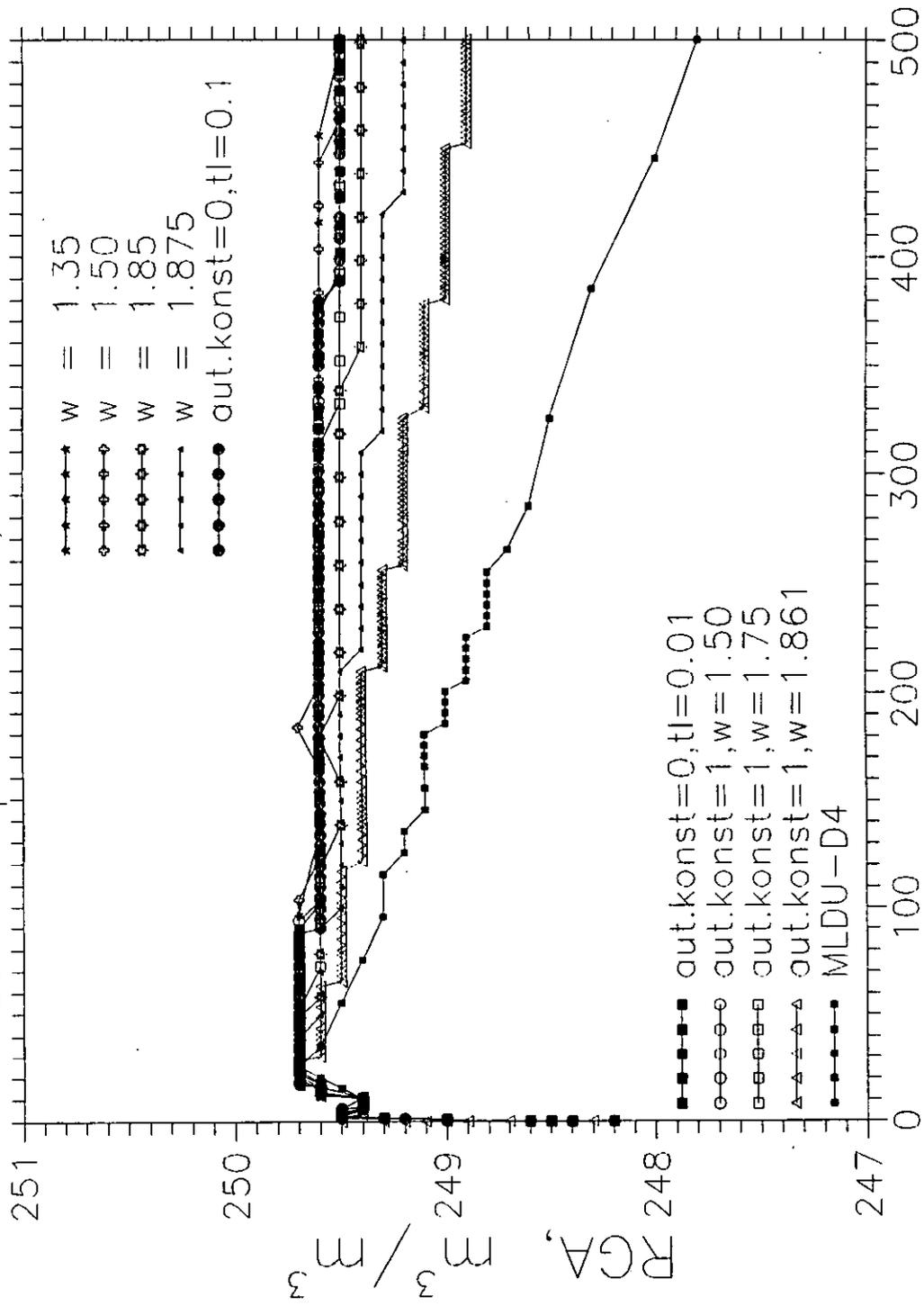


Fig. 4.33 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

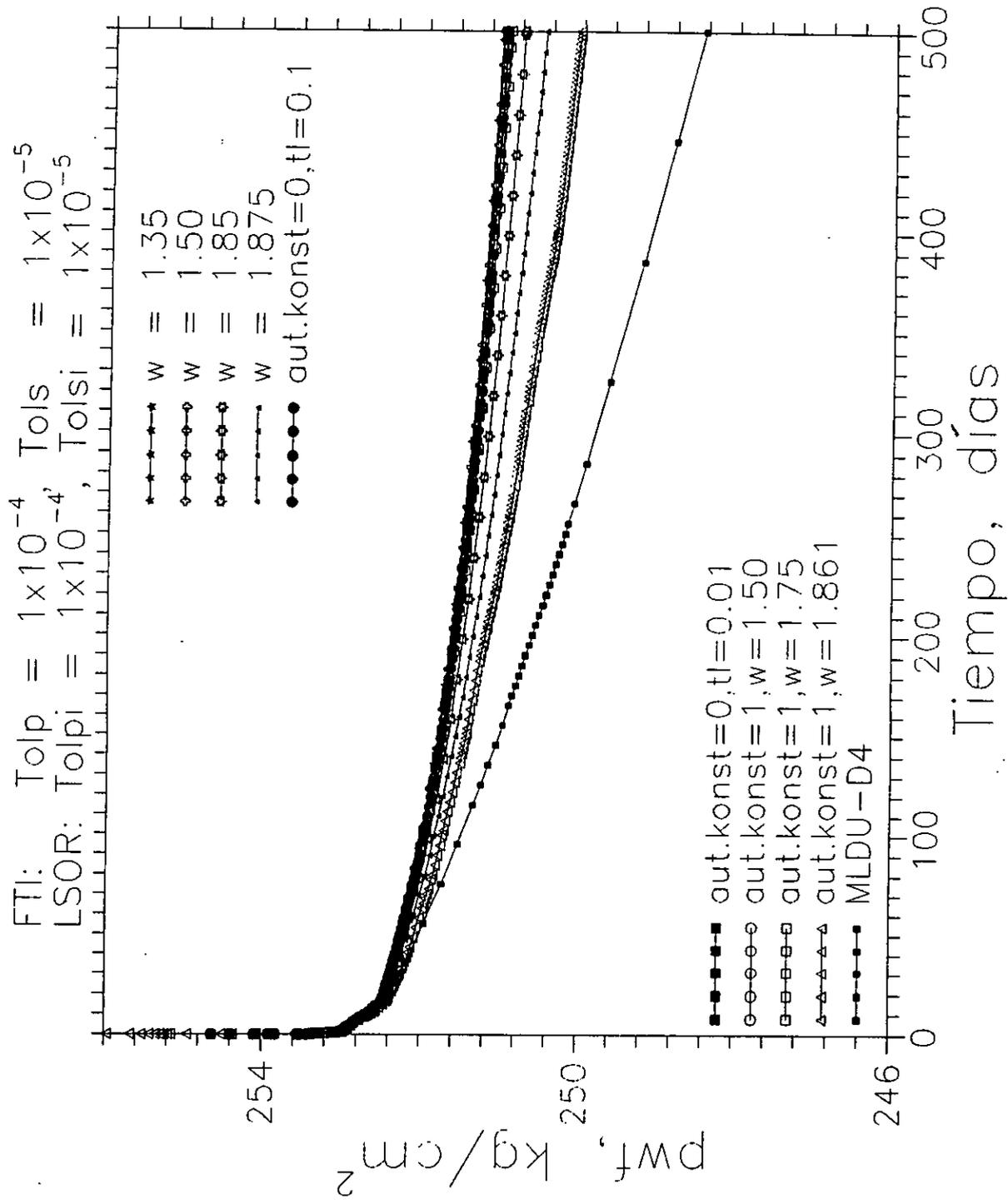


Fig. 4.34 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-4}$ , Tols =  $1 \times 10^{-5}$   
 LSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-4}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-5}$

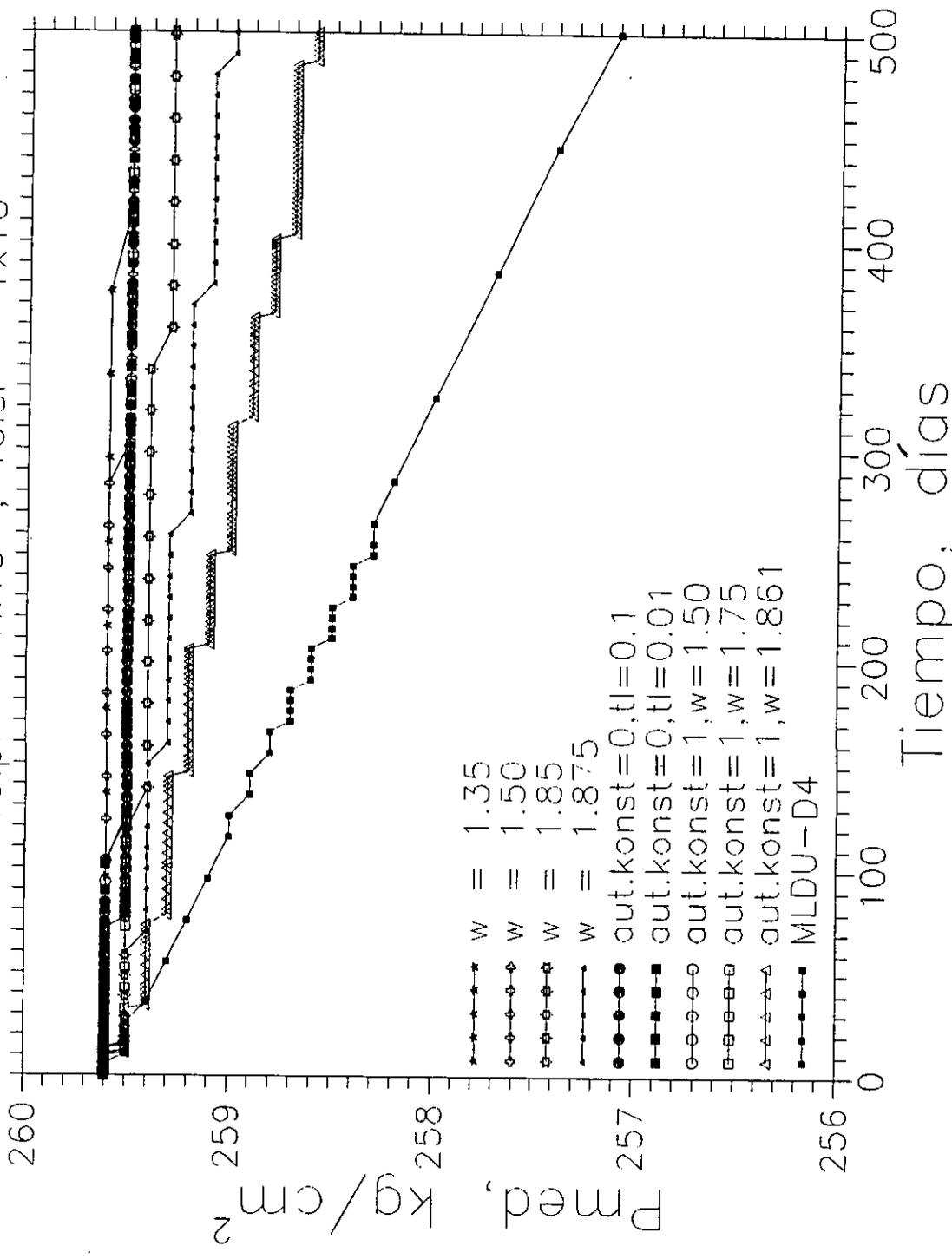


Fig. 4.35 Presión media vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-4}$ , Tols =  $1 \times 10^{-5}$   
 LSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-4}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-5}$

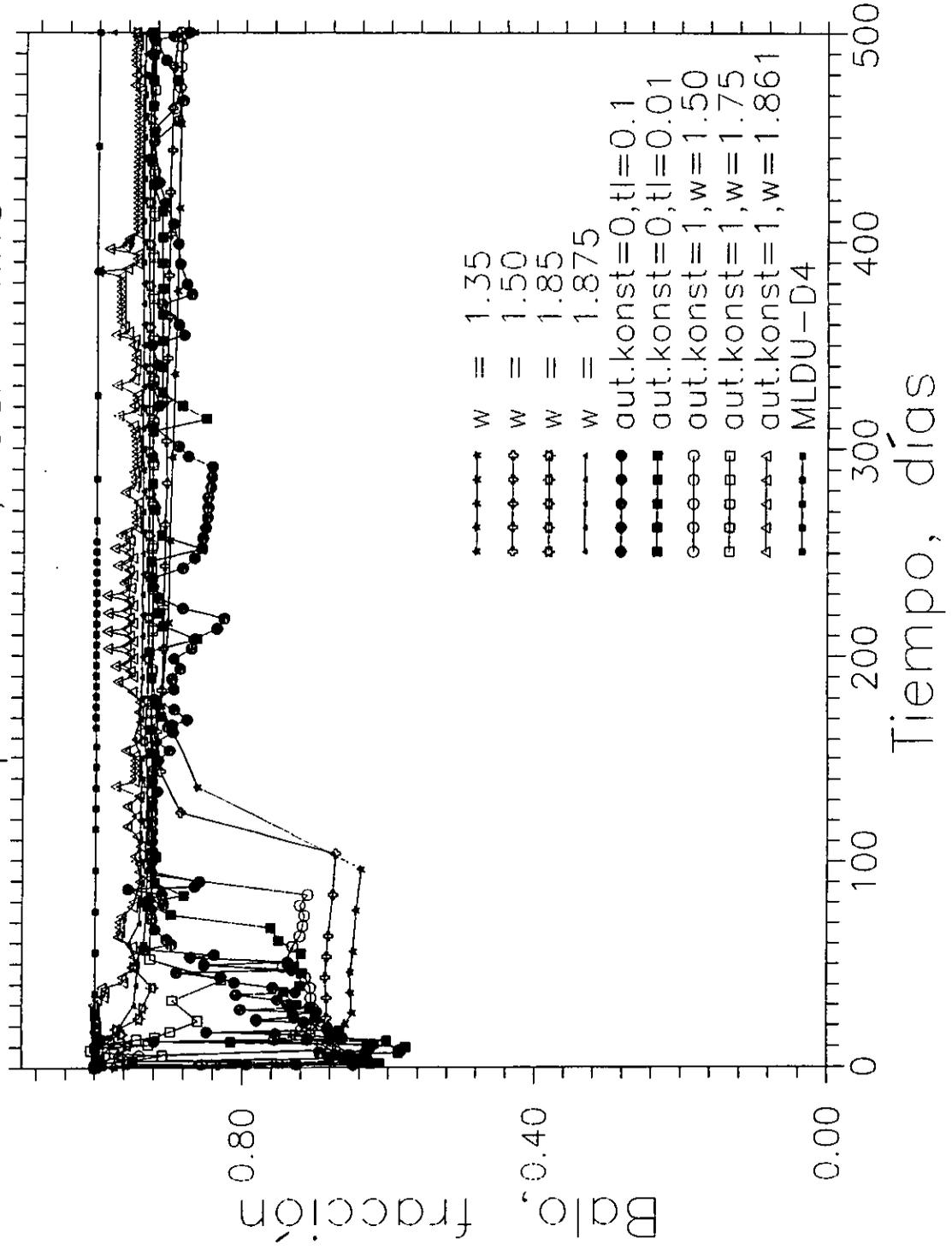


Fig. 4.36 Balance de materia del aceite vs Tiempo

tolerancias de presión y de saturación del método de Newton no mejora la respuesta del método LSOR y por ende tampoco mejora el balance de materia. También, el haber ensayado diferentes valores iniciales de omega ( $\omega$ ) para el cálculo del parámetro de sobrerelajación con el algoritmo dado en la sección 4.2.4 no mostró ningún beneficio, sino un retroceso, ya que ahora se tienen nuevamente problemas de balance y diferencias en la solución, dado que al final del tiempo de simulación se tiene una diferencia en la relación Gas-Aceite de  $1.1 \text{ m}^3/\text{m}^3$ , en la presión de fondo fluyendo de  $1.6 \text{ kg/cm}^2$  y en la presión promedio de  $1.5 \text{ kg/cm}^2$ , con respecto a la solución correcta.

Una vez que se ha realizado el análisis de sensibilidad, se está en condiciones de efectuar la comparación del desempeño de los métodos directos (NSPIV y MLDU) y del método iterativo LSOR para el problema homogéneo-isotrópico bidimensional (r-z).

Los resultados obtenidos con estos métodos se presentan en la Tabla 4.22. Se puede observar que el método directo MLDU es el más eficiente, realizando un tiempo de ejecución de 0:49 segundos. El segundo más eficiente es el método directo NSPIV, con un tiempo de ejecución de 1:09 minutos. En estos métodos directos, se utilizaron las siguientes tolerancias para alcanzar la convergencia del método iterativo de Newton-Raphson multivariable: Tolerancia en presión (Tolp) de  $1 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^2$  y Tolerancia en saturación (Tols) de  $1 \times 10^{-4}$ .

TABLA 4.22 RESULTADOS GENERALES: CASO HOMOG. E ISOTROP. BIDI.

METODO DE SOLUCION	TIEMPO DE EJECUCION	No. ITER. NEWTONIANAS	No. ITER. MET. SOL.	ETAPAS TIEMPO	TIEMPO DE SIMULACION
	(MIN.)				(DIAS)
NSPIV	1:09	283	—————	49	500
MLDU	0:49	283	—————	49	500
LSOR $w = 1.875$ $T_p = 1 \times 10^{-3}$	6:59	354	28260	65	500
LSOR $w_1 = 1.925$ $T_p = 1 \times 10^{-4}$	29:31	933	123103	217	500

En esta tabla se presentan los dos mejores comportamientos del método iterativo LSOR, obtenidos del análisis de sensibilidad al parámetro de sobrerelajación óptimo y a las tolerancias de presión y saturación. El primero de los casos corresponde a un valor constante de  $\omega$  a lo largo de todo el tiempo de simulación,  $\omega=1.875$ , junto con una tolerancia de presión de  $1 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>2</sup> y una de saturación de  $1 \times 10^{-4}$  para este método de solución y el cual realiza un tiempo de ejecución de 6:59 minutos. En el segundo de los casos se empleó el algoritmo para el cálculo del parámetro óptimo de sobrerelajación, con un valor inicial de  $\omega=1.925$ , y una tolerancia de 0.01, junto con unas tolerancias en presión de  $1 \times 10^{-4}$  y en saturación de  $1 \times 10^{-5}$  para el método LSOR, realizando un tiempo de ejecución de 29:31 minutos.

En las Figs. 4.37 a 4.42 se presenta el comportamiento de la presión de fondo fluyendo, de la relación gas-aceite, del flujo fraccional de agua, de la presión promedio ponderada con respecto al volumen poroso, del número de iteraciones newtonianas y del balance de materia del aceite contra el tiempo de simulación,

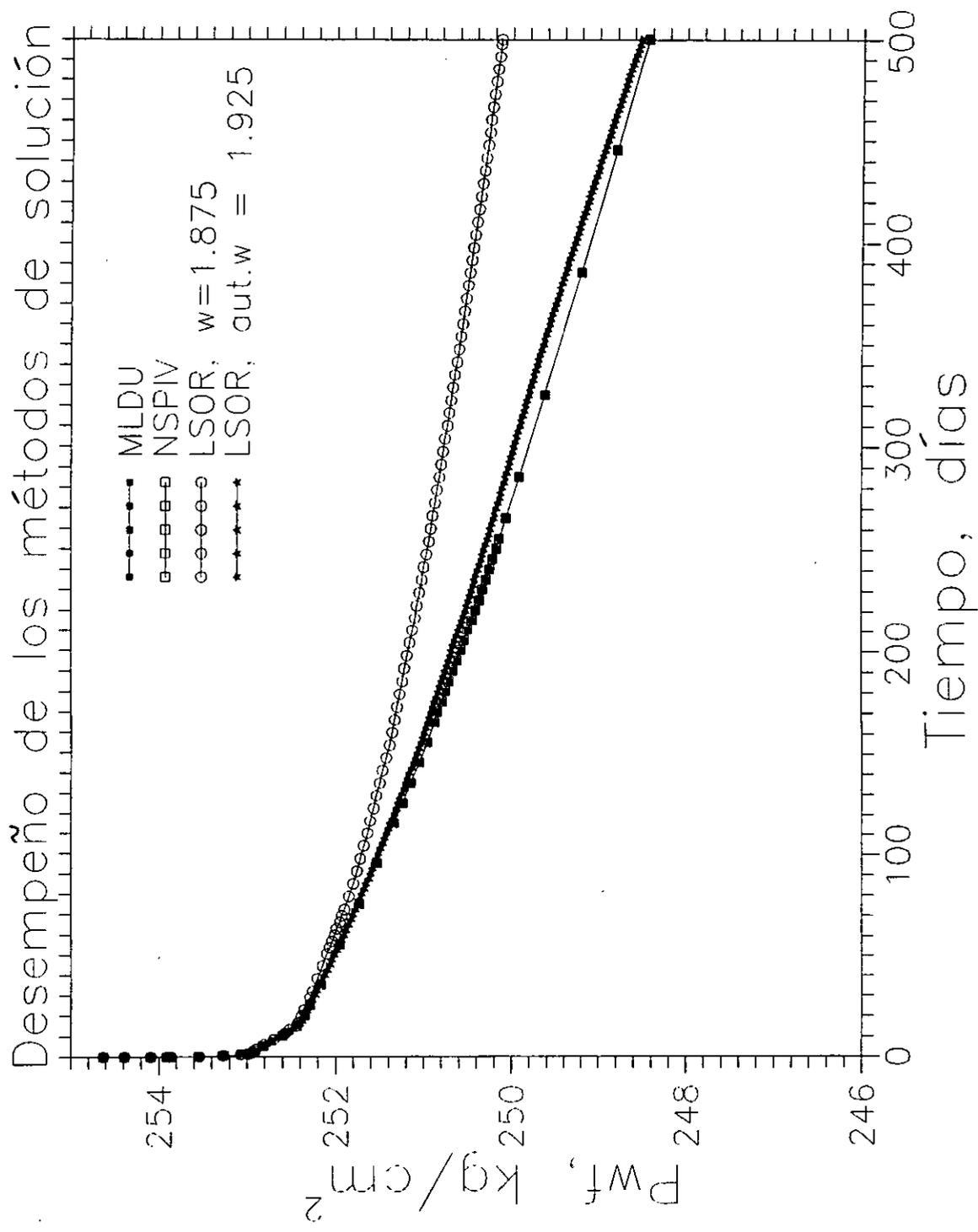


Fig. 4.37 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

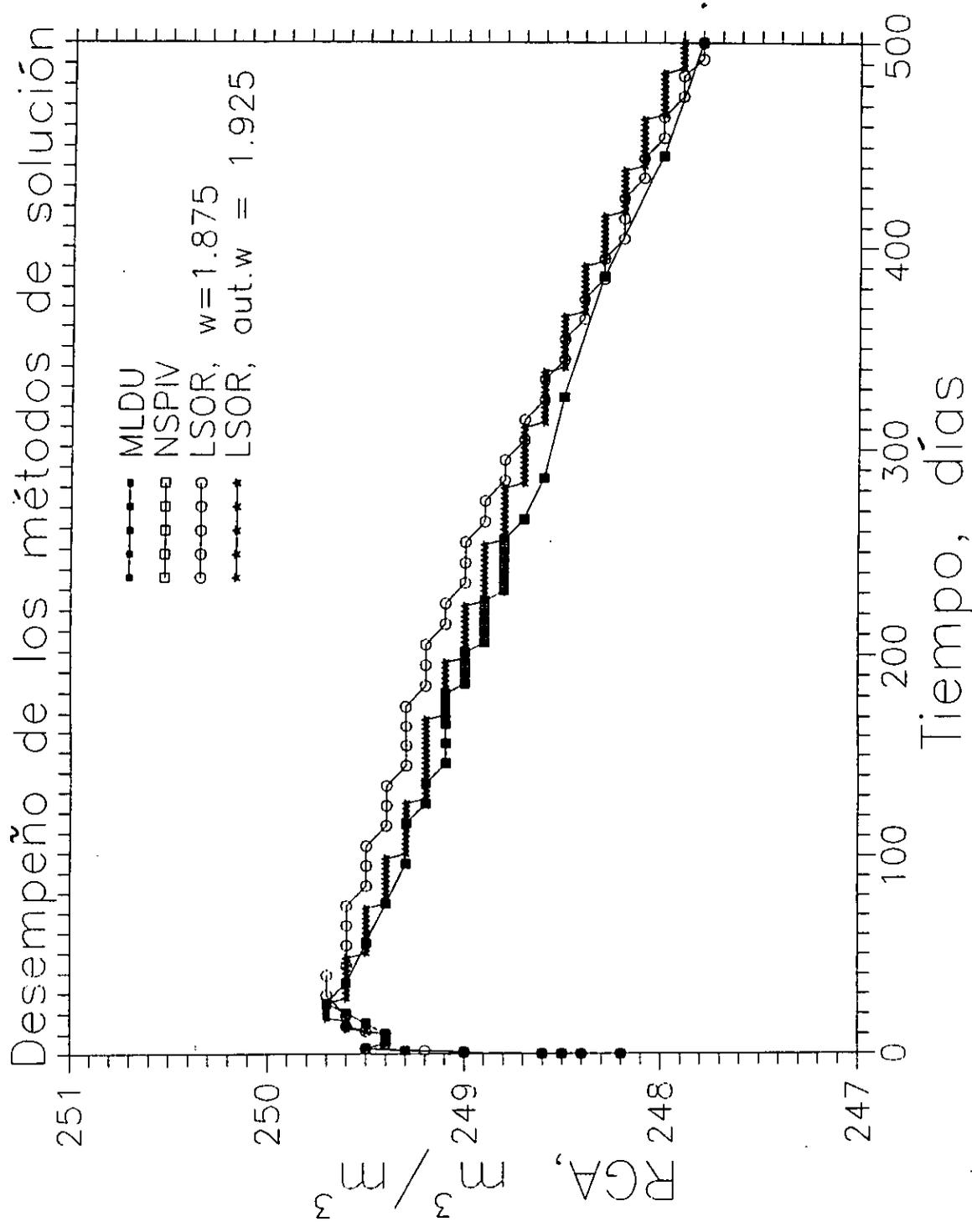


Fig. 4.38 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

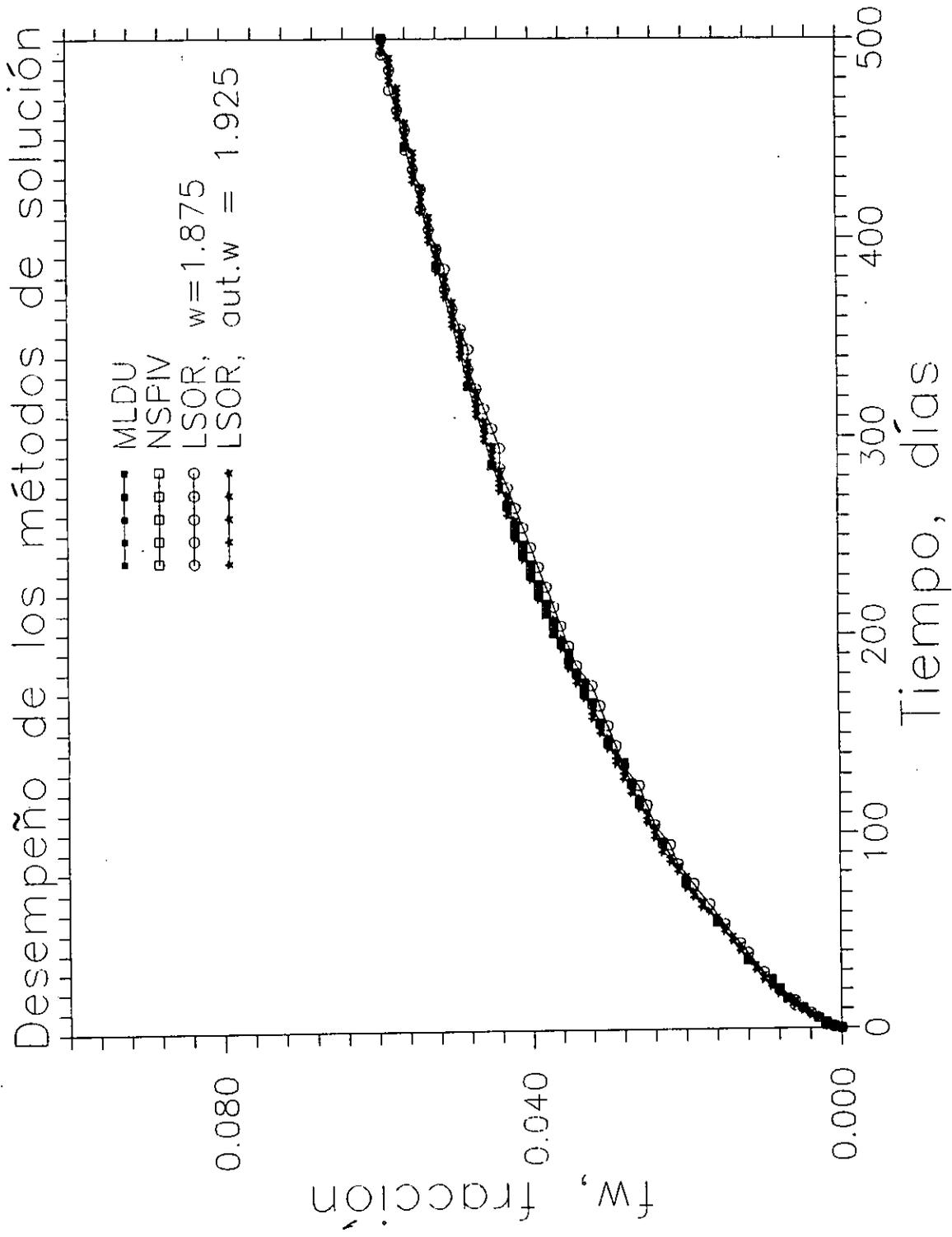


Fig. 4.39 Flujo fraccional de agua vs Tiempo

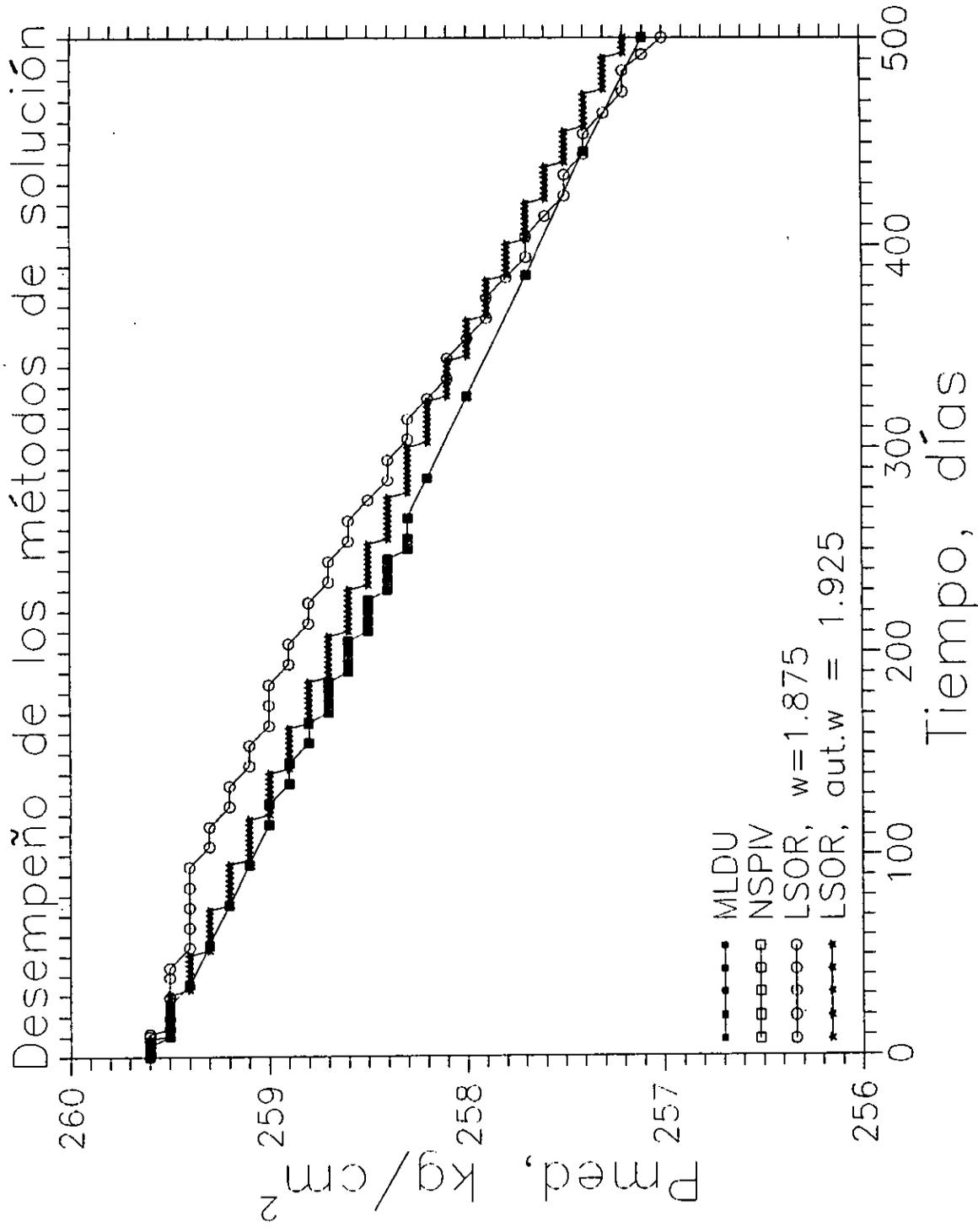


Fig. 4.40 Presión promedio vs Tiempo

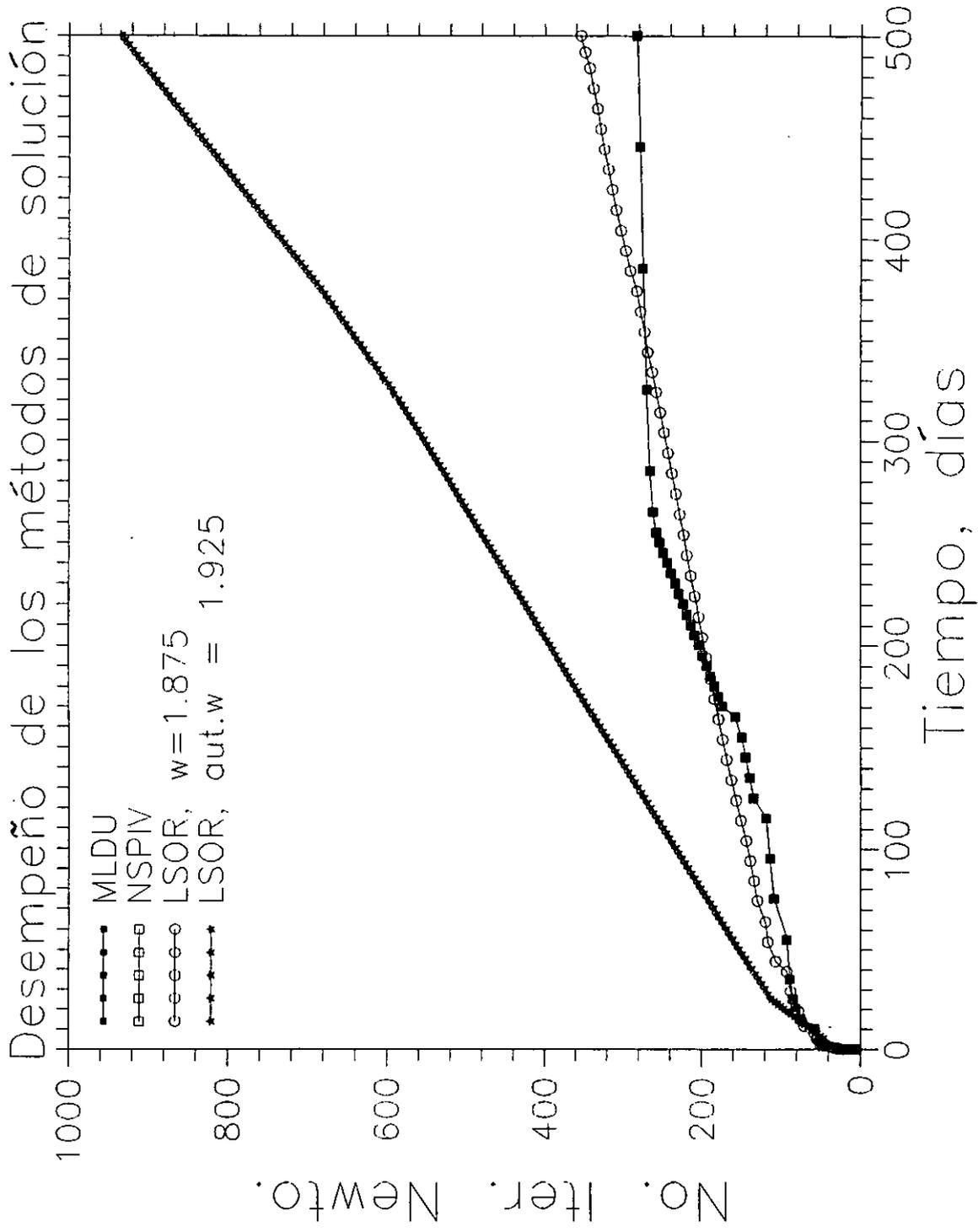


Fig. 4.41 Número de Iteraciones Newtonianas vs Tiempo

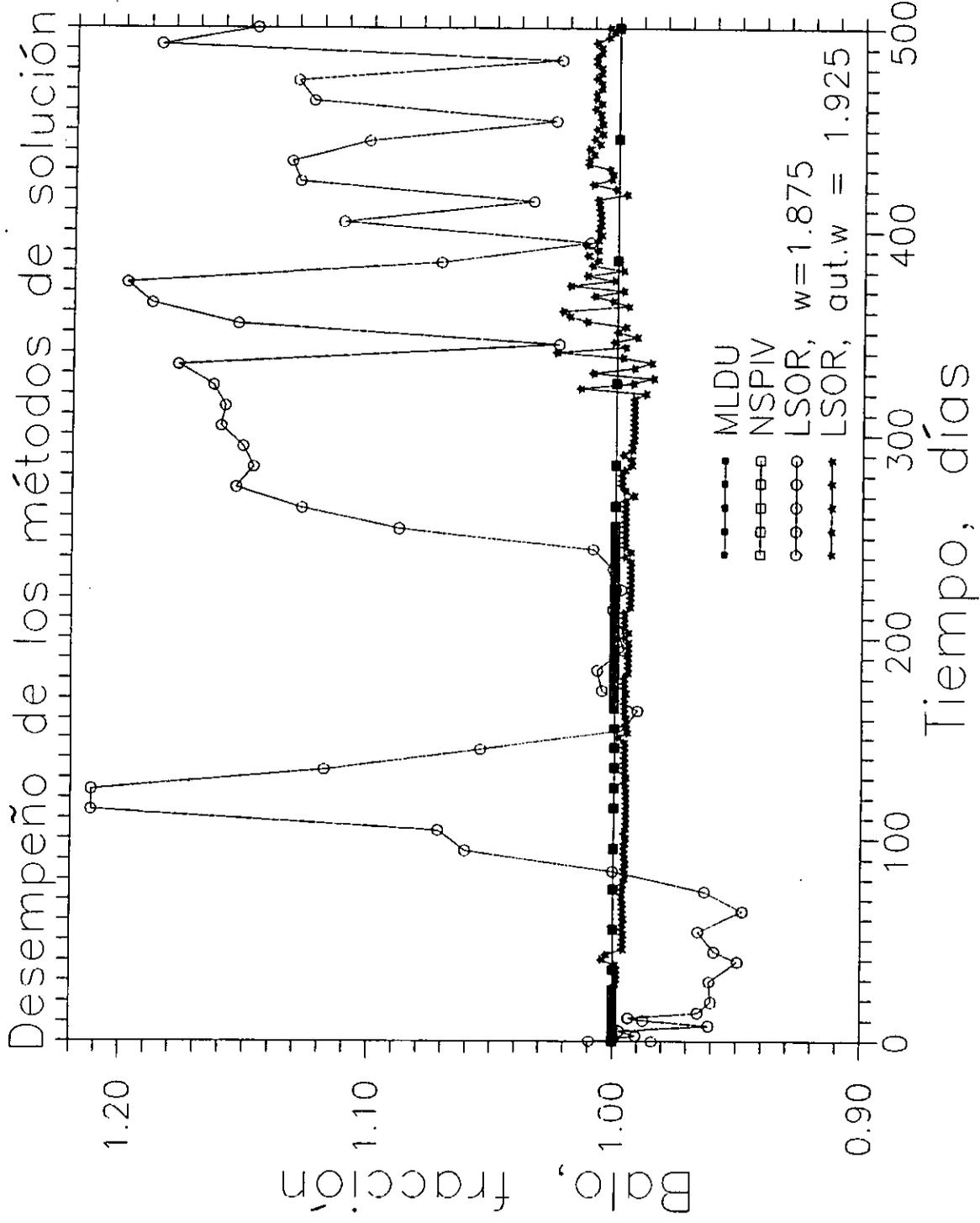


Fig. 4.42 Balance de materia del aceite vs Tiempo

respectivamente, obtenidos al resolver este primer caso con los 3 métodos de solución.

Como se puede observar en estas figuras, la solución de  $P_{wf}$  del método iterativo LSOR, con  $\omega$  constante ( $\omega=1.875$ ), dada por los símbolos de los círculos huecos, tiene una diferencia de  $1.7 \text{ kg/cm}^2$  al final del tiempo de simulación de 500 días. Nótese, sin embargo, que al emplear el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo, la solución de la presión de fondo fluyendo, dada por los símbolos de las estrellas llenas, es muy similar a la obtenida por los métodos directos, dada por los cuadros pequeños llenos o cuadros grandes huecos. Por otra parte, el comportamiento de la relación gas-aceite, del flujo fraccional del agua y de la presión promedio son muy similares para los 4 métodos de solución, como se ve en la Tabla 4.22. El número de iteraciones newtonianas obtenidos con los métodos directos (cuadros pequeños llenos o cuadros grandes huecos) es 20% más pequeño que el primer método LSOR ( $\omega=1.875$ ) (círculos huecos) y 69% con respecto al segundo método LSOR ( $\omega_{\text{ini}}=1.925$ ) (estrellas llenas). Con respecto al balance de materia del aceite, éste se mantiene en 1 para los métodos directos y con un error máximo del 22% para el primer método LSOR, mientras que para el segundo este error es del 2.5% como máximo.

De lo anterior, se puede establecer que en problemas homogéneos e isotrópicos, y sobretodo bidimensionales, los métodos directos de solución son más eficientes que los métodos iterativos. En este caso el método directo MLDU es más eficiente que el método iterativo LSOR. Esto se debe, a que el número de incógnitas que se manejan es menor a 1000 (  $NES = 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 15 = 405$  ) y los requerimientos del sistema de cómputo no son muy grandes al emplear un método

directo de solución, como se puede ver en la Tabla 4.22. Lo anterior es congruente con lo encontrado en la literatura especializada en simulación numérica de yacimientos<sup>21</sup>. Con respecto al parámetro de sobrerelajación, el algoritmo presentado en la sección 4.2.4 con un valor inicial de omega diferente de uno, muestra un mejor comportamiento que para el caso en que se estipuló este parámetro constante durante toda la simulación, presentando un mejor balance de materia del aceite, como puede verse en la Fig. 4.42. Por otra parte, el inconveniente del LSOR es que realiza un tiempo de ejecución impráctico, comparado con los métodos directos.

**b) CASO 2: Problema homogéneo-isotrópico tridimensional (r- $\theta$ -z).**

Los datos empleados en este problema son los mismos del primer caso; ahora, sin embargo, se considera flujo trifásico-tridimensional: gas-aceite-agua. El área de drenaje del pozo se discretizó en una malla de 9 celdas en la dirección radial, 4 celdas en la dirección angular y 15 celdas (capas), en la dirección vertical. Se considera que las permeabilidades en las direcciones radial y tangencial son iguales y que el intervalo productor se encuentra disparado en todos los arcos y en las capas 7 y 8 del pozo, produciendo a un gasto constante de  $159 \text{ m}^3/\text{día}$ . Las condiciones iniciales son las empleadas en el caso 1, ver Tabla 4.17, las cuales satisfacen el equilibrio gravitacional y capilar.

De manera similar al caso anterior, se realiza un análisis de sensibilidad de los métodos LSOR y BSOR al parámetro de sobrerelajación, a las tolerancias de presión y de saturación empleadas como criterio de convergencia en estos métodos y a las tolerancias de presión y de saturación empleadas en el método de Newton-Raphson. En esta sub-sección se presentan ocho casos donde se estudia la sensibilidad de los métodos LSOR y BSOR a todos estos parámetros.

- b.1) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^2$  y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , tanto en el método de Newton-Raphson como en el método LSOR, con una estimación inicial en la primera iteración newtoniana igual a cero.

La suposición básica que se establece en esta sub-sección es tomar la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas

en el método LSOR igual a cero solo en la primera iteración newtoniana,  $\delta X_{i,j,k}^{(v=1)} = 0$ , y no como se estipula originalmente en este método iterativo, la cual siempre debe igualarse con la solución del nivel de tiempo n.

Con respecto al parámetro de sobrerelajación, se realizaron 16 corridas: en las primeras 10 corridas,  $\omega$  se mantuvo constante durante la simulación, en el rango de 1 a 1.85, y en las 6 restantes, se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo, descrito en la Sección 4.2.4. En las corridas 11 y 12, se calculó el valor de  $\omega$  solamente al inicio de cada iteración newtoniana, y se mantuvo el valor calculado hasta que el método LSOR alcanzó la convergencia; se emplearon dos tolerancias para este algoritmo, 0.01 y 0.001, y se comenzó siempre con un valor de  $\omega=1$ . En las corridas 13 y 14, se empleó nuevamente este algoritmo y en cada iteración newtoniana se permitió el cálculo del valor de  $\omega$  óptimo, siendo su valor inicial y tolerancias iguales a los dos casos anteriores. En las corridas 15 y 16 se empleó una tolerancia de 0.01 y los valores iniciales de  $\omega$  fueron 1.35 y 1.50, respectivamente.

La Tabla 4.23 muestra el desempeño computacional del método iterativo LSOR con respecto al parámetro de aceleramiento a la convergencia,  $\omega$  y para estas tolerancias en presión y en saturación, tanto del método de Newton como del LSOR.

Como puede observarse en esta tabla, ninguna de las corridas logró alcanzar el tiempo total de simulación de 500 días, debido a que sobrepasaron la capacidad máxima de almacenamiento permitido de la máquina, fijado en un límite máximo de 9000 elementos. Este límite se estableció por seguridad para no saturar al 100% el disco duro de la estación de trabajo. Por otra parte, de

TABLA 4.23 METODO LSOR, TOLP = TOLPI =  $1 \times 10^{-3}$  Y TOLS = TOLSI =  $1 \times 10^{-4}$

	$\omega$	numero etapas	tiempo simula.	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu (horas)
1	1.00	211	46.7			2:24
2	1.10	144	51.5			2:20
3	1.15	169	46.9			3:26
4	1.25	192	57.1			3:54
5	1.35	151	22.2			4:19
6	1.50	304	102.5			3:39
7	1.75	316	205.3			9:11
8	1.779	337	234.6			12:11
9	1.823	424	396.7			15:23
10	1.850	118	80.1			19:50
11	algoritmo de $\omega$ tl=.01	110	71.2			1:58
12	algoritmo de $\omega$ tl=.001	115	95.4			2:06
13	algoritmo de $\omega$ tl=.01	113	98.5			2:16
14	algoritmo de $\omega$ tl=.001	101	63.8			2:04
15	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.35$ tl=.01	93	76.1			2:09
16	aut. konst=1 $\omega=1.50$ tl=.01	105	69.1			3:39

acuerdo al tiempo de CPU realizado y al tiempo de simulación alcanzado por cada una de estas corridas, aún cuando se libere este límite, éstas dejan de tener un interés práctico y competitivo con respecto a los otros métodos de solución.

En las Figs. 4.43 a 4.45 se presentan las soluciones de las

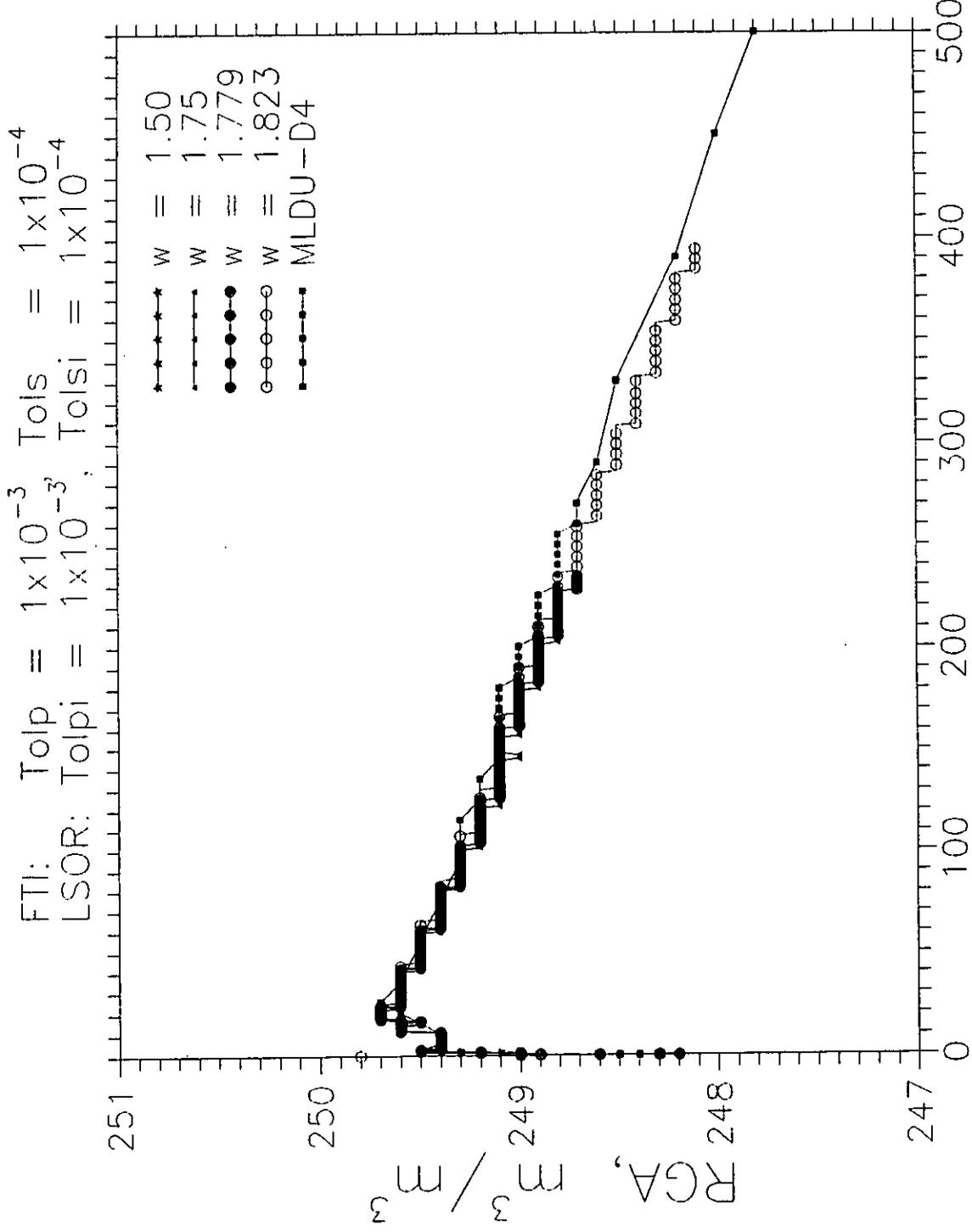


Fig. 4.43 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

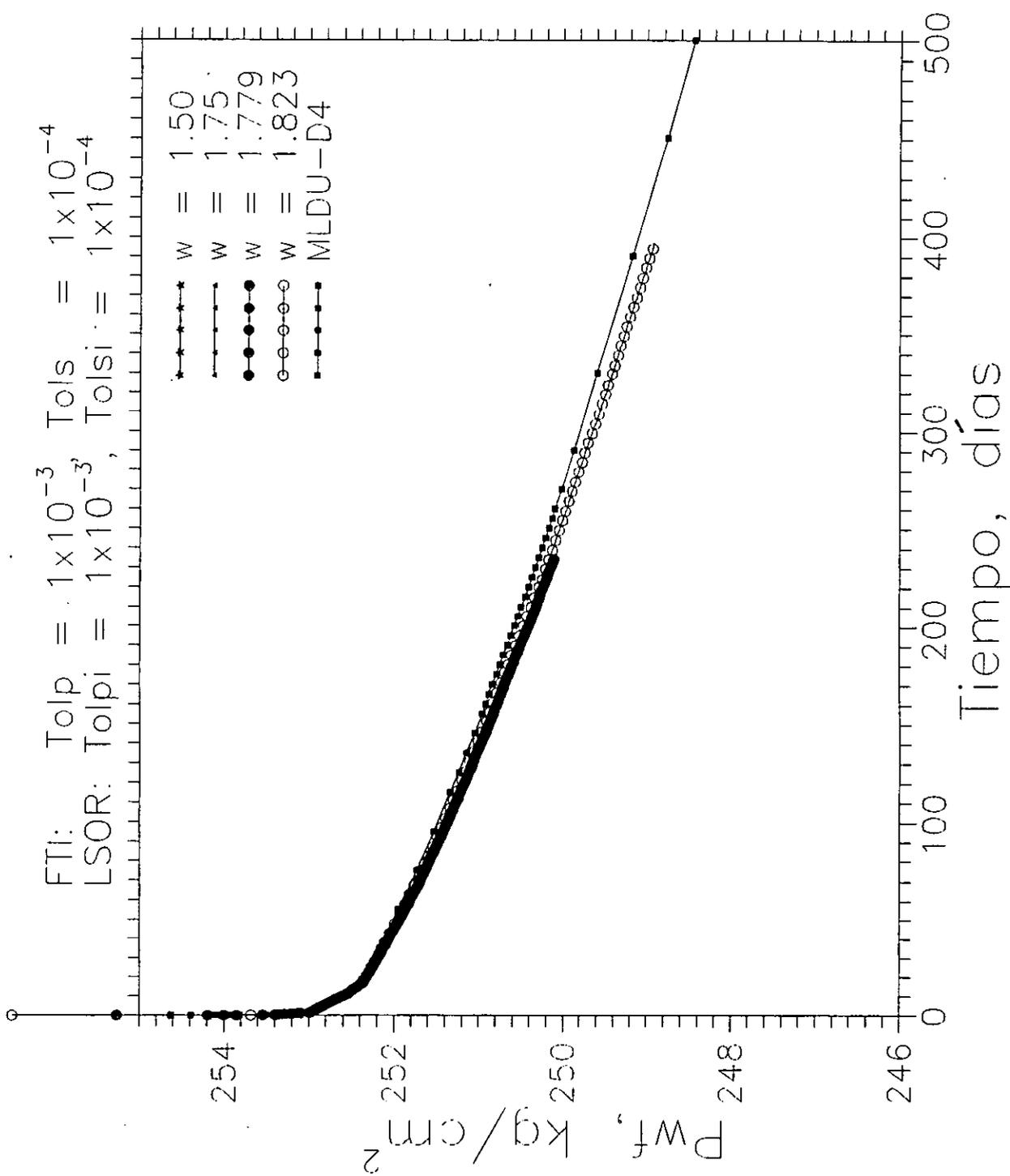


Fig. 4.44 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-3}$ , Tols =  $1 \times 10^{-4}$   
 LSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-3}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-4}$

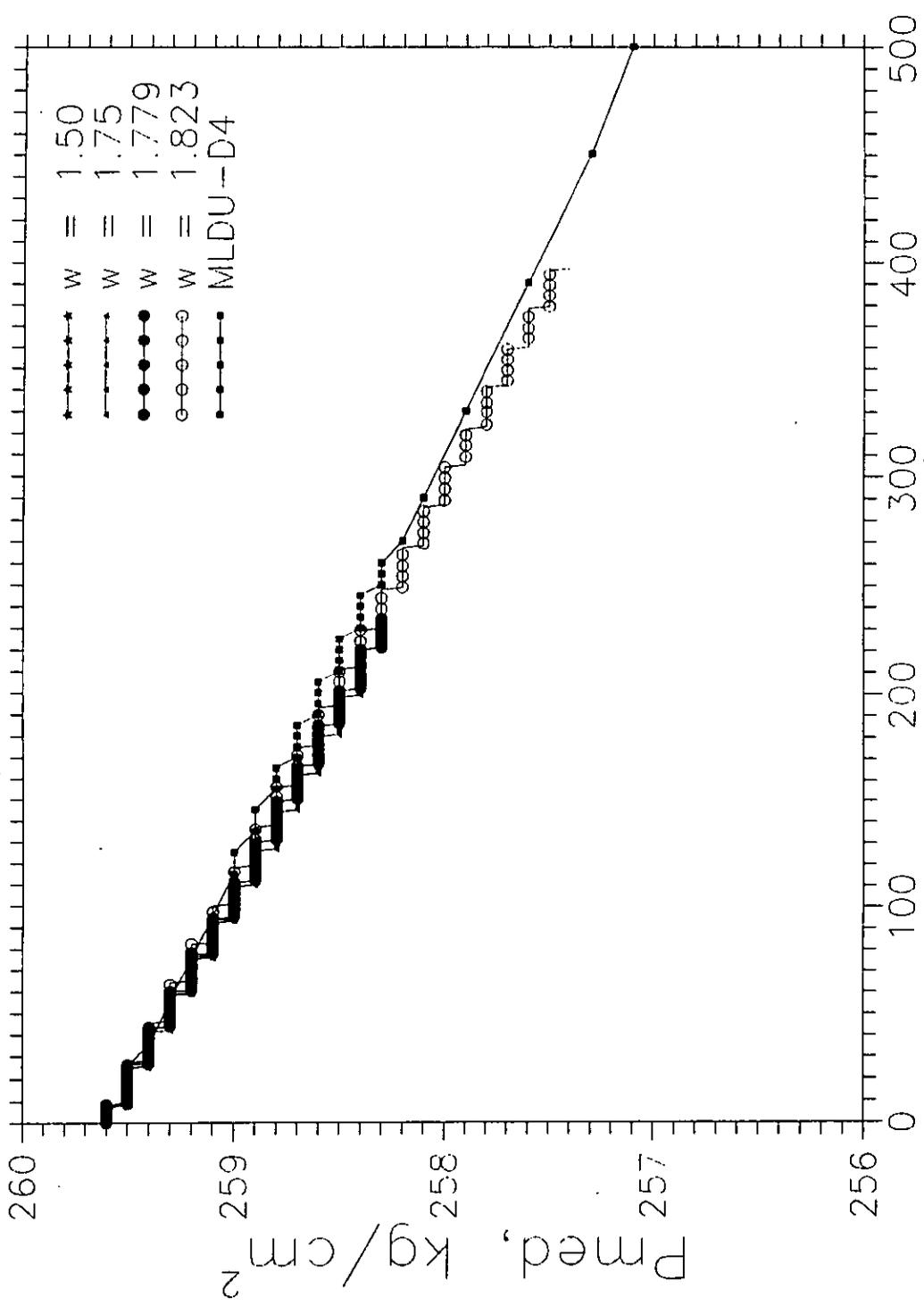


Fig. 4.45 Presión promedio vs Tiempo

corridas que alcanzaron el mayor tiempo de simulación, mostrando los comportamientos de la relación Gas-Aceite, de la presión de fondo fluyendo y de la presión promedio del área de drene contra el tiempo de simulación, respectivamente, para este análisis de sensibilidad. Como puede observarse en estas figuras, los comportamientos de estas 4 corridas del método LSOR: la corrida 6, dada por los símbolos de estrellas llenas, con un tiempo de simulación de 102.5 días, la corrida 7, dada por los símbolos de triángulos pequeños llenos, con un tiempo de simulación de 205.3 días, la corrida 8, dada por los símbolos de círculos grandes llenos, con un tiempo de simulación de 234.6 días y la corrida 9, dada por los símbolos de círculos grandes huecos, con un tiempo de simulación de 396.7 días, junto con la solución correcta, obtenida con el método directo MLDU-D4, dada por los símbolos de cuadros pequeños llenos, siguen la tendencia correcta.

- b.2) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , tanto del método de Newton-Raphson como del método LSOR, con una estimación inicial en cada iteración newtoniana igual a cero.

La diferencia principal entre esta sub-sección y la anterior está en la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas para el método LSOR, que en este caso se toma como cero en cada iteración newtoniana,  $\delta X_{i,j,k}^{(p)} = 0$ . Se mantienen las mismas tolerancias en presión y en saturación tanto en el método de Newton-Raphson como en el método LSOR. Al igual que en el caso bidimensional, esto tiene como objetivo el reducir los tiempos de CPU requeridos y alcanzar el tiempo total de simulación estipulado.

Se realizaron 15 corridas; en las primeras 8 corridas se mantuvo un único valor constante de omega, en el rango de 1 a 1.85, durante todo el tiempo de simulación. En las corridas 9 y 10 se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo y se calculó el valor de  $\omega$  solo al inicio de cada iteración newtoniana; se mantuvo este valor hasta alcanzar la convergencia del método LSOR. En este algoritmo se tomaron dos tolerancias, 0.01 y 0.001 y se comenzó siempre con un valor de  $\omega$  igual a uno. Por otra parte, para las corridas 11 y 12 se empleó nuevamente este algoritmo y en cada iteración newtoniana se permitió el cálculo de  $\omega$ , comenzando en uno con las mismas dos tolerancias para este algoritmo.

En las corridas 13, 14 y 15 se empleó una tolerancia de 0.01 para el cálculo de  $\omega$  óptimo con este algoritmo, y se inició con un valor de omega de 1.25, 1.35 y 1.50, respectivamente.

La Tabla 4.24 muestra el desempeño computacional del método iterativo LSOR con respecto al parámetro  $\omega$ , para las mismas tolerancias en presión y en saturación, tanto del método de Newton como del método LSOR.

Como puede observarse en esta tabla, todas las corridas alcanzaron el tiempo total de simulación de 500 días. El permitir que la estimación inicial de los cambios iterativos del LSOR se iguale a cero en cada iteración newtoniana reduce el tiempo de cómputo requerido, tal y como lo muestran las Tablas 4.23 y 4.24 y permite terminar la prueba.

En las Figs. 4.46 a 4.49 se presentan las soluciones obtenidas de estas corridas, mostrando los comportamientos de la relación Gas-Aceite, de la presión de fondo fluyendo, de la presión promedio del área de drene y del balance de materia del aceite contra

el tiempo de simulación, respectivamente.

TABLA 4.24 METODO LSOR,  $TOLP = TOLPI = 1 \times 10^{-3}$  Y  $TOLS = TOLSI = 1 \times 10^{-4}$

	$\omega$	numero etapas	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu (minutos)
1	1.00	86	435	2978	6:23
2	1.10	52	257	1939	3:58
3	1.15	33	171	2039	3:26
4	1.25	32	174	2051	3:28
5	1.35	30	158	2069	3:23
6	1.50	24	121	2807	3:54
7	1.75	54	291	19685	23:23
8	1.85	464	2259	242404	278:45
9	algoritmo de $\omega$ tl=.01	91	557	18973	24:48
10	algoritmo de $\omega$ tl=.001	31	162	3065	4:31
11	algoritmo de $\omega$ tl=.01	30	179	5713	7:26
12	algoritmo de $\omega$ tl=.001	26	135	2586	3:46
13	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.25$	25	123	2211	3:17
14	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.35$	23	118	2211	3:14
15	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.50$	178	625	44189	52:41

Desde el punto de vista computacional, la corrida 5,  $\omega=1.35$ , es la más eficiente con un tiempo de CPU de 3:23 minutos, con 30 etapas de tiempo, con 158 iteraciones newtonianas y con 2069 iteraciones del LSOR. Sin embargo, revisando el comportamiento de las Figs. 4.46 a 4.49, esta corrida, dada por los símbolos de las

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-3}$ , Tols =  $1 \times 10^{-4}$   
 LSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-3}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-4}$

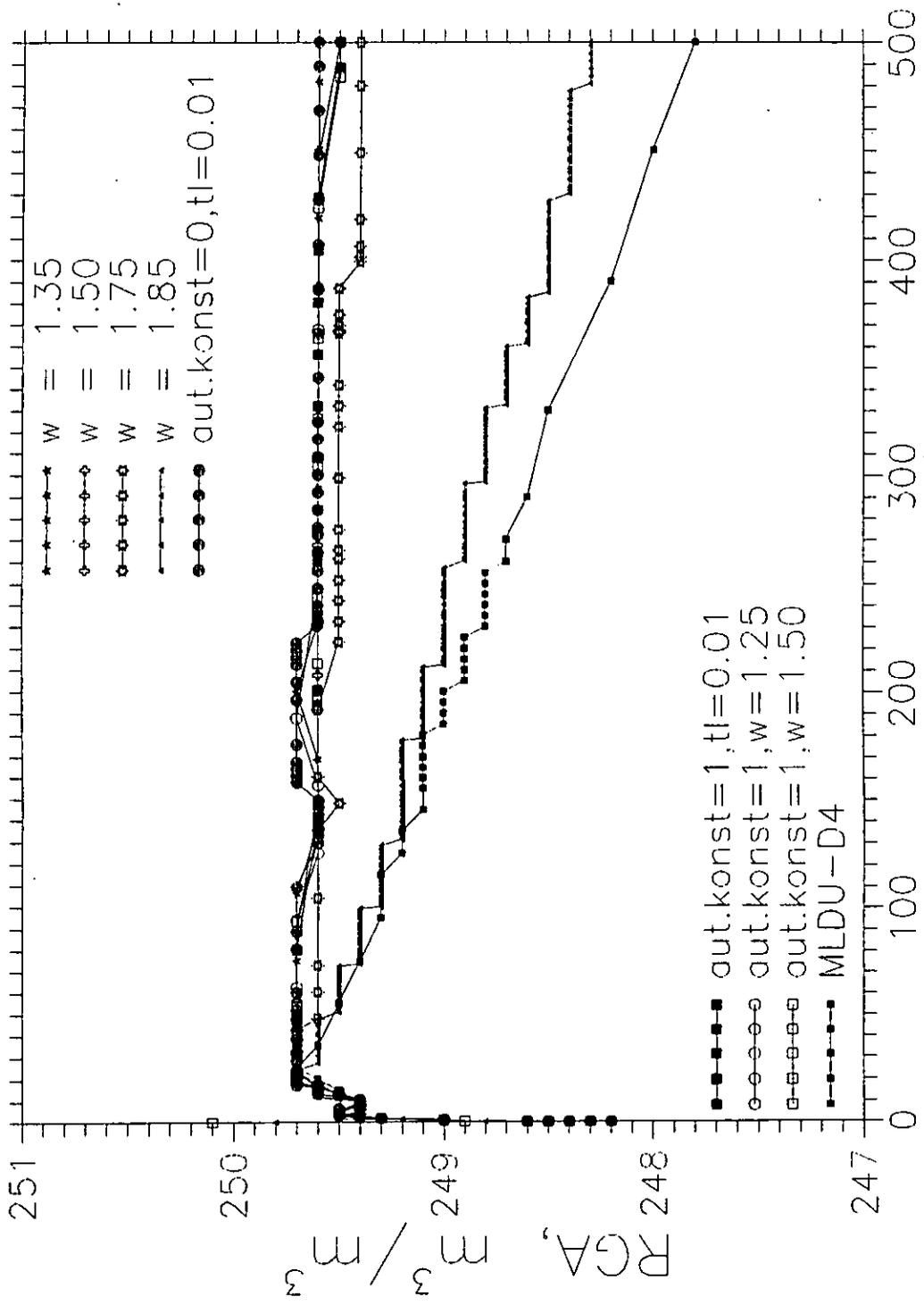


Fig. 4.46 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-3}$ , Tols =  $1 \times 10^{-4}$   
 LSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-3}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-4}$

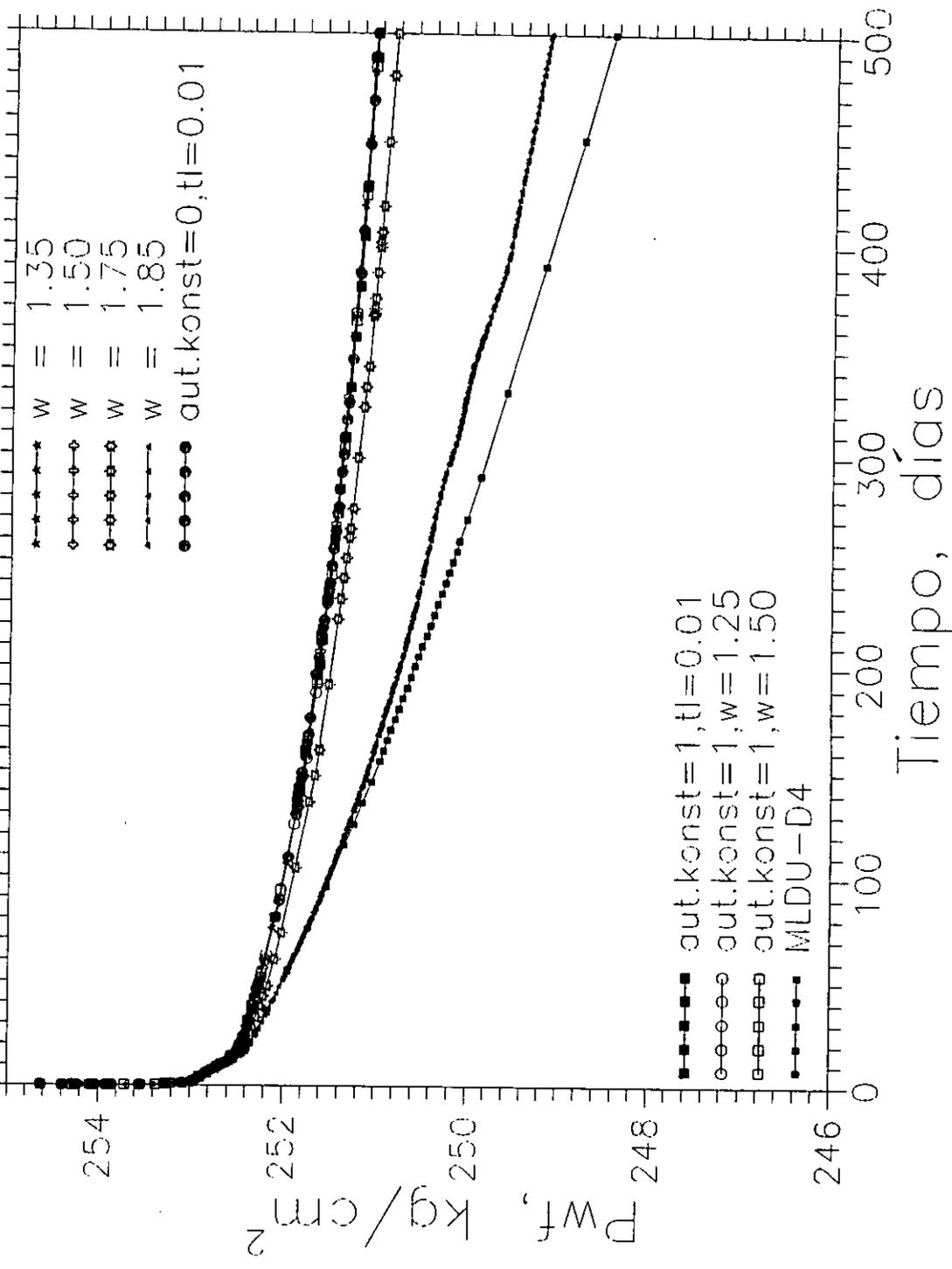


Fig. 4.47 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

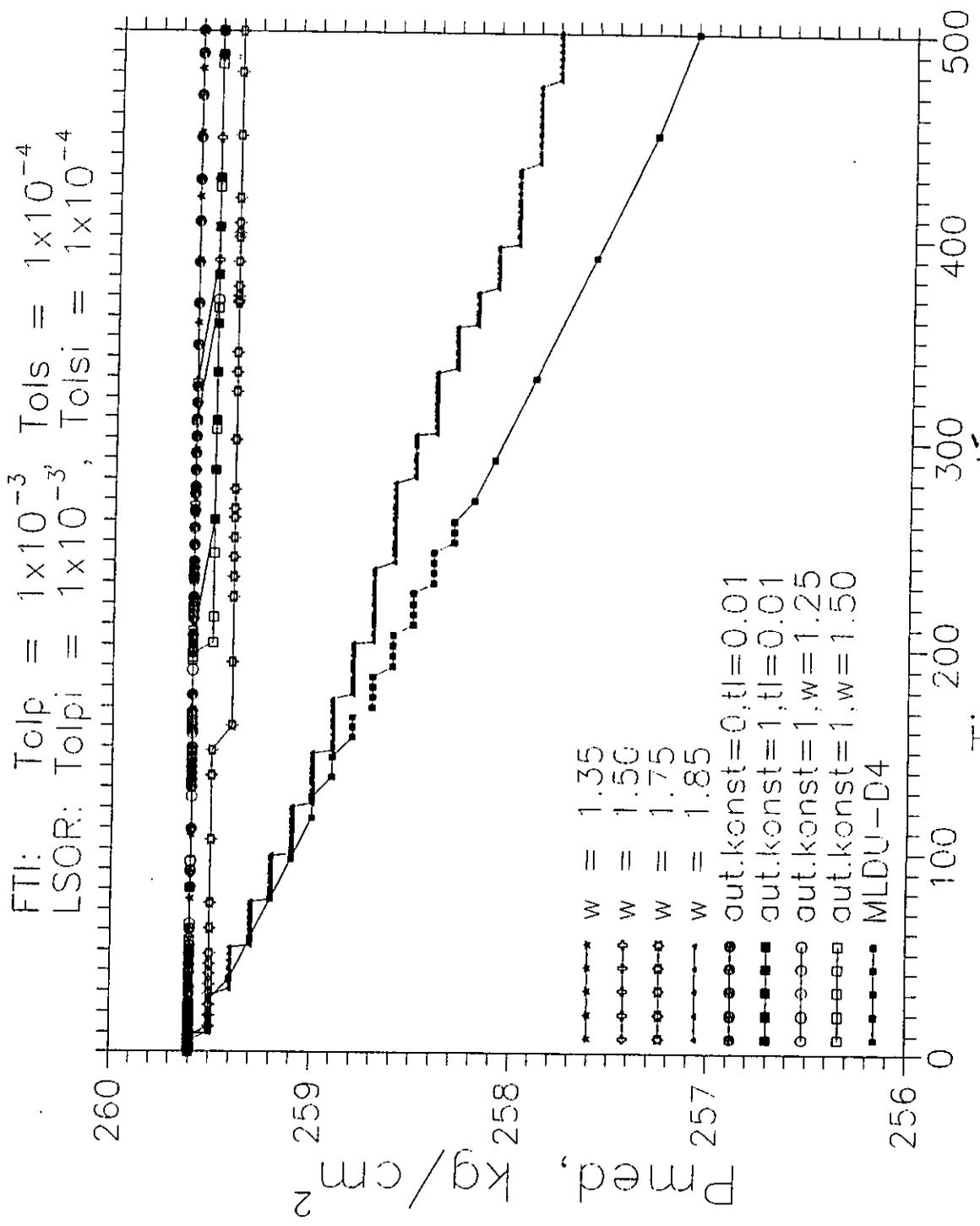


Fig. 4.48 Presión promedio vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-3}$ , Tols =  $1 \times 10^{-4}$   
 LSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-3}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-4}$

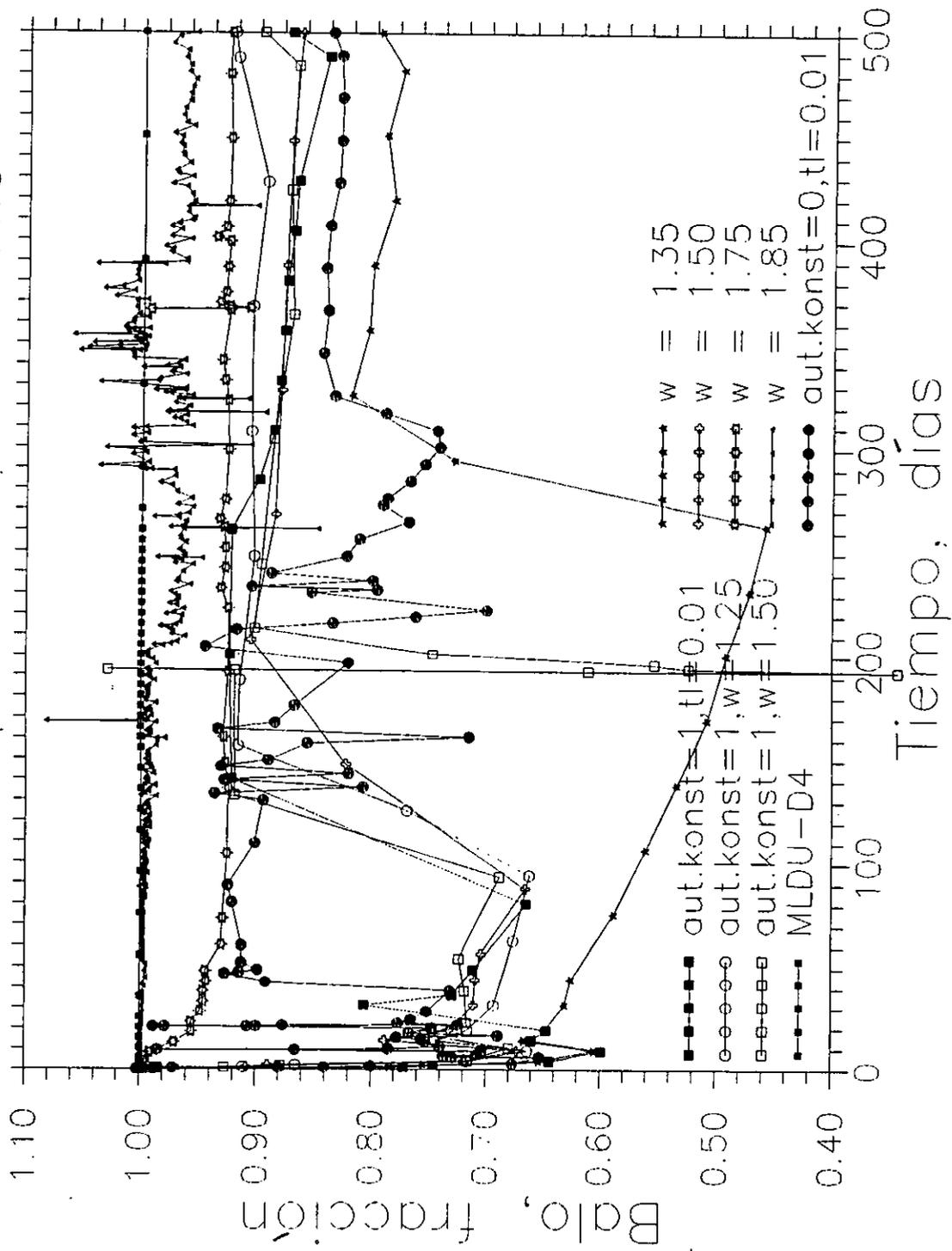


Fig. 4.49 Balance de materia del aceite vs Tiempo

estrellas llenas, difiere del comportamiento correcto, dado por los símbolos de los cuadros pequeños llenos.

En estas figuras, también se comparan las soluciones obtenidas en las corridas: 6 (cruces huecas), 7 (estrellas huecas), 8 (triángulos pequeños llenos), 9 (círculos grandes llenos), 11 (cuadrados grandes llenos), 13 (círculos grandes huecos) y 15 (cuadrados grandes huecos) con la solución correcta (cuadrados pequeños llenos). Como puede observarse casi todas, a excepción de la corrida 8, difieren de la correcta.

La solución obtenida en la corrida 8, tiene un mejor comportamiento y aunque es la más cercana a la correcta aún tiene problemas de balance de materia, como puede verse en la Fig. 4.49. El error de balance máximo que se comete está entre  $\pm 10\%$ , pero en términos generales es del orden del  $\pm 4\%$ . Al final del tiempo de simulación se tiene una diferencia máxima en la relación Gas-Aceite de  $0.5 \text{ m}^3/\text{m}^3$ , en la presión de fondo fluyendo de  $0.7 \text{ kg/cm}^2$  y en la presión promedio de  $0.7 \text{ kg/cm}^2$ .

Al igual que para el caso 1, para mejorar el balance de materia y el comportamiento de presión y saturación en este caso trifásico-tridimensional, se disminuyeron las tolerancias de presión y de saturación en el método LSOR y en el método de Newton.

- b.3) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^2$  y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , en el método de Newton-Raphson y una tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-4} \text{ kg/cm}^2$  y en saturación de  $1 \times 10^{-5}$  para el método LSOR.

En esta sub-sección, se toma la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas para el método LSOR, igual a cero

en cada iteración newtoniana,  $\delta X_{1,j,k}^{(v)} = 0$ , manteniendo las mismas tolerancias en presión y en saturación para el método de Newton y disminuyéndolas para el método LSOR a  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> en presión y a  $1 \times 10^{-5}$  en saturación. Con esto se pretende mejorar el balance de materia y como consecuencia el comportamiento de presión y de saturación en la región drenada por el pozo, con casi los mismos tiempos de CPU realizados en la sub-sección anterior.

Se realizaron 16 corridas; en las primeras 10 se mantuvo un único valor constante de omega, en el rango de 1 a 1.811, durante todo el tiempo de simulación. En las corridas 11 y 12 se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo, descrito en la Sección 4.2.4, y se calculó  $\omega$  solo al inicio de cada iteración newtoniana, se mantuvo este valor calculado hasta alcanzar la convergencia del método LSOR. En este algoritmo se emplearon dos tolerancias, 0.01 y 0.001, y se inició con un valor de  $\omega=1$ .

En las corridas 13 y 14 se emplearon estas mismas tolerancias y el valor inicial de  $\omega=1$  para este algoritmo, pero ahora se permitió el cálculo del valor de  $\omega$  óptimo en cada iteración newtoniana. En las corridas 15 y 16 se empleó una tolerancia de 0.01 para el cálculo del valor de  $\omega$  óptimo y se inició con un valor de  $\omega$  igual a 1.25 y de 1.35, respectivamente.

La Tabla 4.25 muestra el desempeño computacional de estas 16 corridas del método LSOR bajo las condiciones antes descritas y para las nuevas tolerancias estipuladas.

Como puede observarse en esta tabla, desde el punto de vista computacional, la corrida 5 ( $\omega=1.35$ ) es la más eficiente, dado que realiza un tiempo de CPU de 5:15 minutos con 24 etapas de tiempo, 113 iteraciones newtonianas y 4110 iteraciones del método LSOR y la

que mayores recursos de cómputo consume es la corrida 10 con un tiempo de CPU de 220:05 minutos, 207 etapas de tiempo, 1173 iteraciones newtonianas y 195406 iteraciones del método LSOR.

TABLA 4.25 METODO LSOR,  $TOLP = 1 \times 10^{-3}$  Y  $TOLS = 1 \times 10^{-4}$   
 $TOLPI = 1 \times 10^{-4}$  Y  $TOLSI = 1 \times 10^{-5}$

	$\omega$	numero etapas	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu (minutos)
1	1.00	26	123	5931	7:17
2	1.10	25	120	5269	6:33
3	1.15	25	120	5133	6:24
4	1.25	25	118	4866	6:06
5	1.35	24	113	4110	5:15
6	1.50	23	111	4560	5:43
7	1.719	66	360	31528	36:44
8	1.75	128	702	65693	64:16
9	1.775	118	857	97986	112:04
10	1.811	207	1173	195406	220:05
11	algoritmo de $\omega$ tl=.01	262	1355	108634	128:18
12	algoritmo de $\omega$ tl=.001	52	309	21493	25:41
13	algoritmo de $\omega$ tl=.01	46	265	19329	22:47
14	algoritmo de $\omega$ tl=.001	31	153	9850	11:00
15	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.25$ tl=0.01	51	291	20257	23:59
16	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.35$ tl=0.01	59	368	31347	36:30

En las Figs. 4.50 a 4.53 se presentan los comportamientos de la relación Gas-Aceite, de la presión de fondo fluyendo, de la

FTI:  $Tolp = 1 \times 10^{-3}$ ,  $Tols = 1 \times 10^{-4}$   
 LSOR:  $Tolp = 1 \times 10^{-4}$ ,  $Tols = 1 \times 10^{-5}$

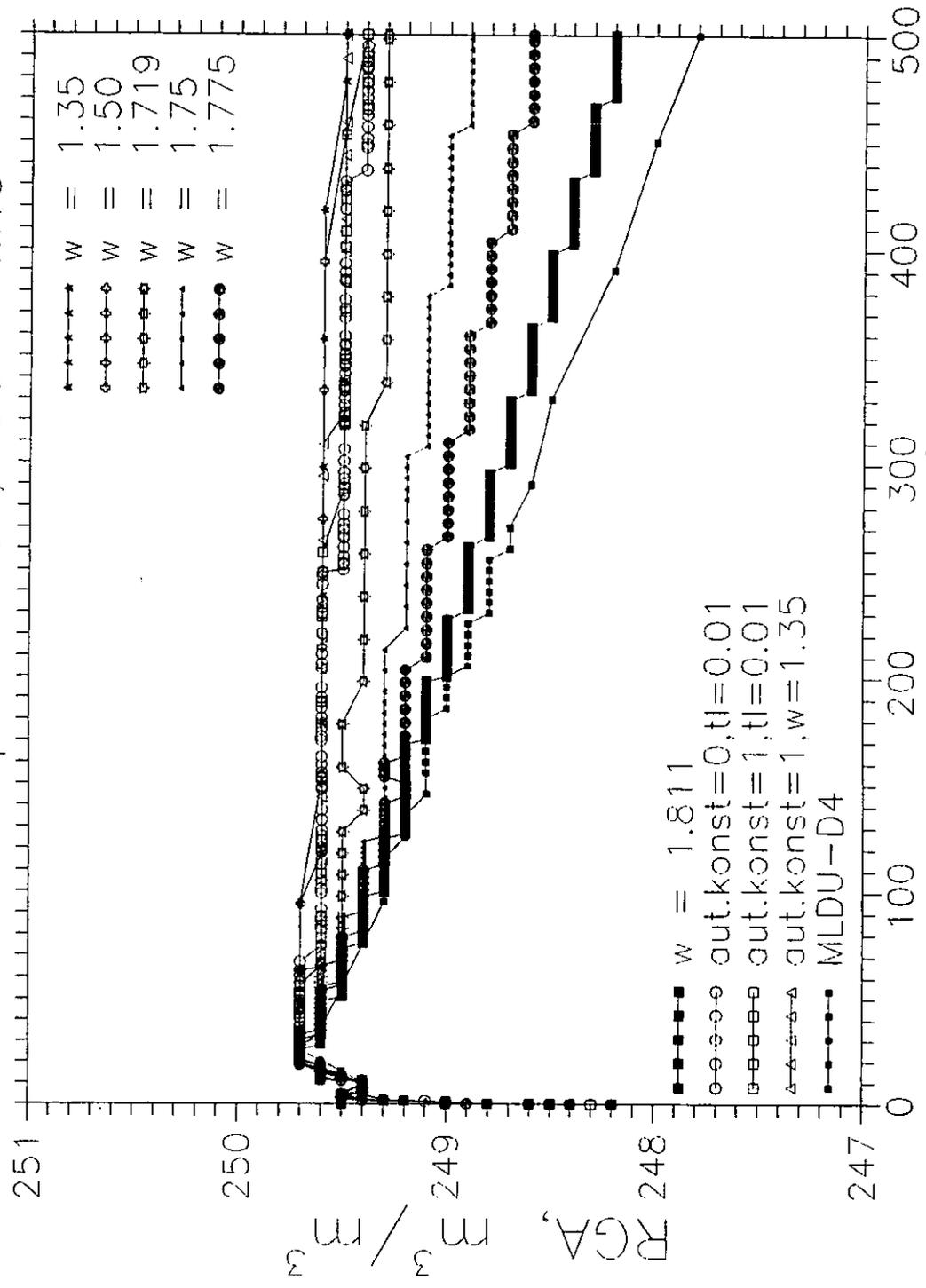


Fig. 4.50 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

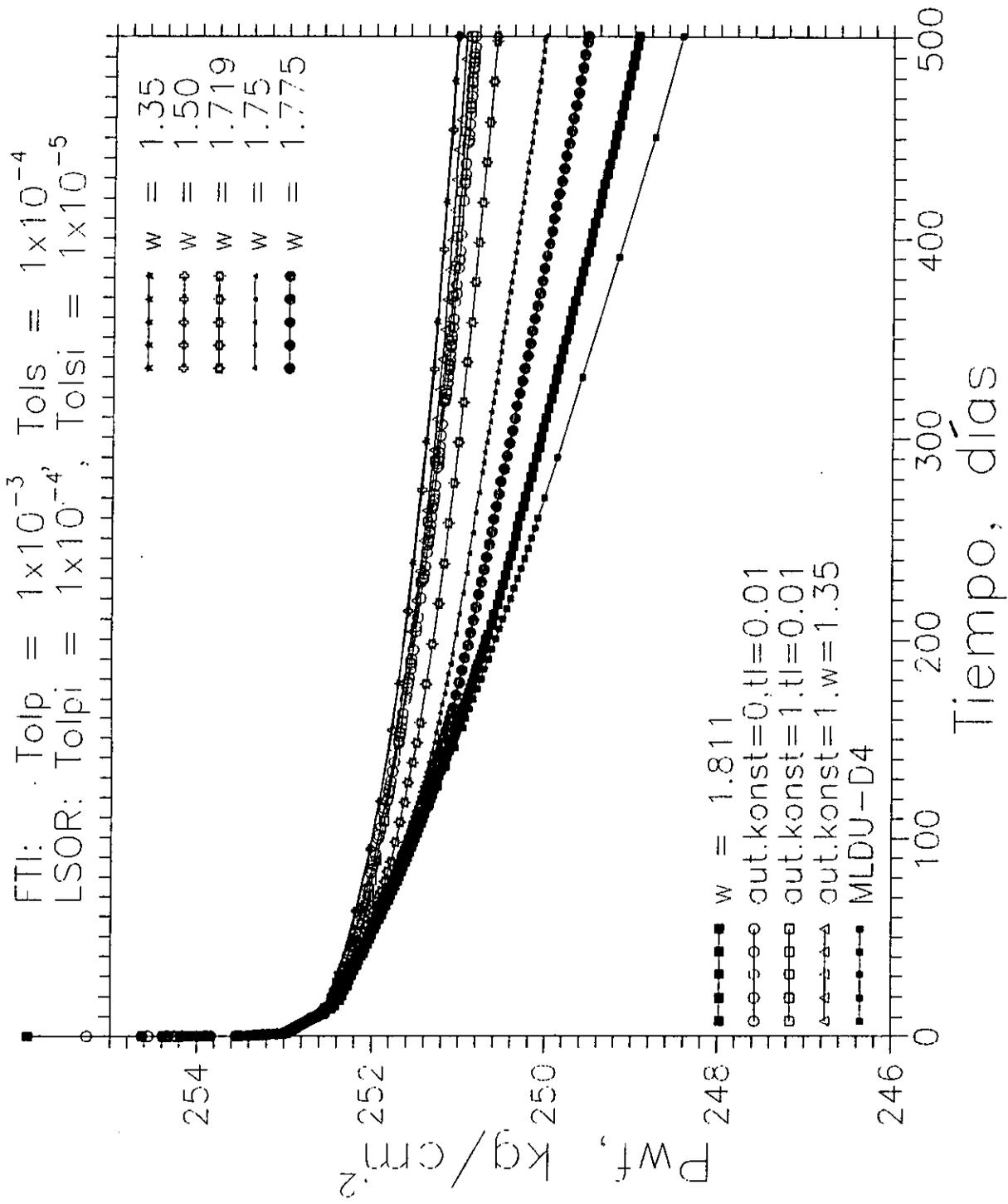


Fig. 4.51 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-3}$ , Tols =  $1 \times 10^{-4}$   
 LSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-4}$ ; Tolsi =  $1 \times 10^{-5}$

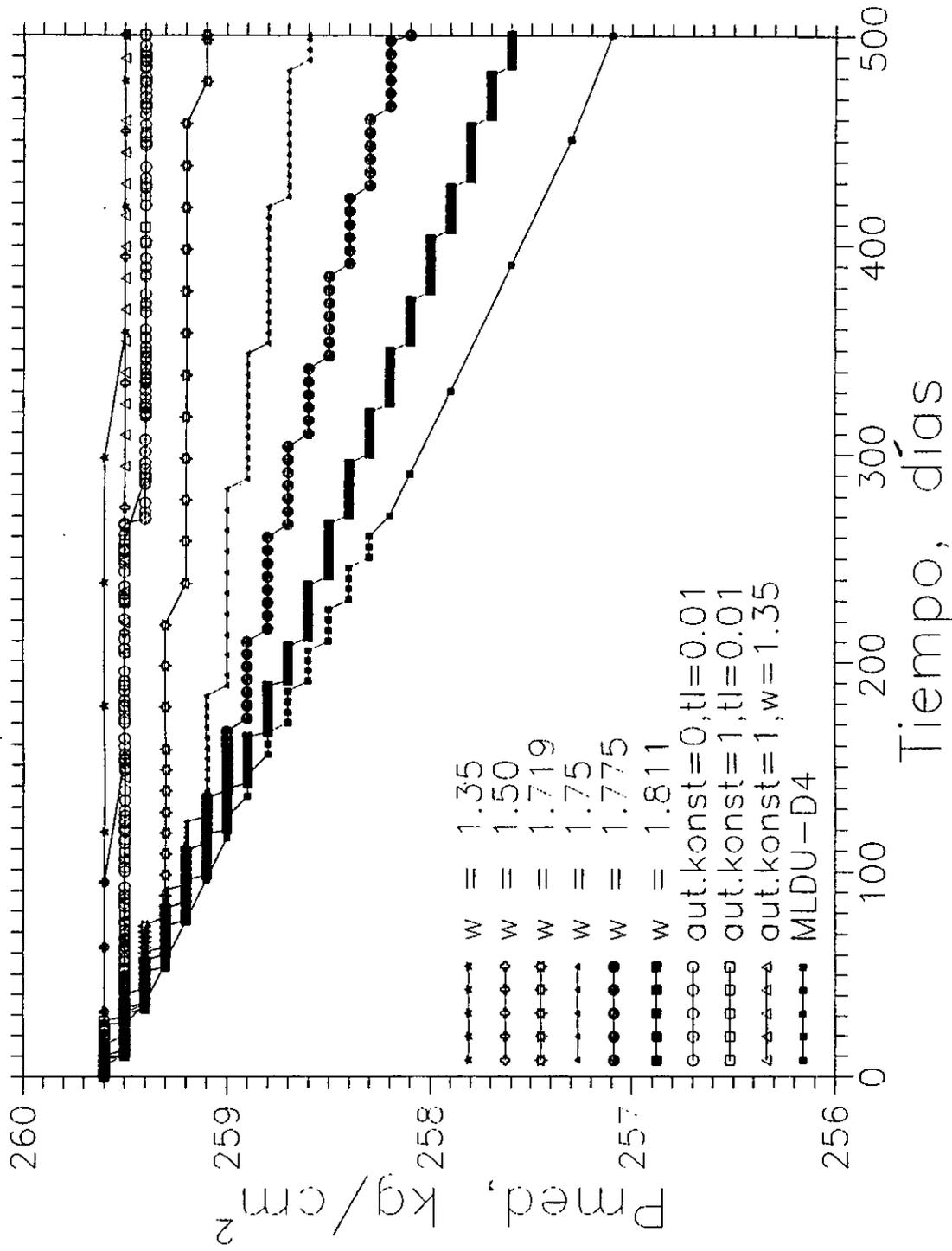


Fig. 4.52 Presión promedio vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-3}$ , Tols =  $1 \times 10^{-4}$   
 LSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-4}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-5}$

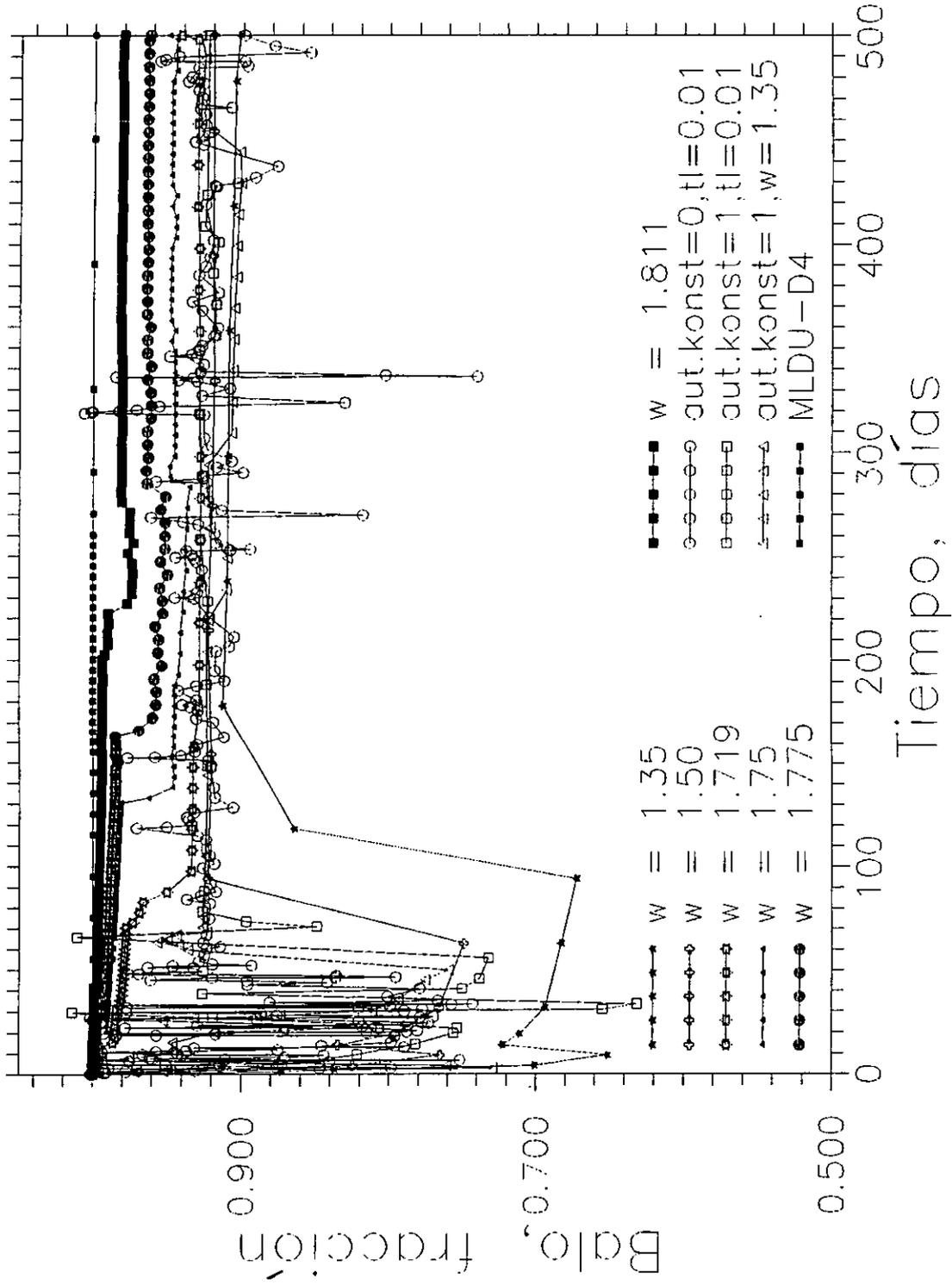


Fig. 4.53 Balance de materia del aceite vs Tiempo

presión promedio del área de drene y del balance de materia del aceite contra el tiempo de simulación, respectivamente.

De acuerdo con estas gráficas, al comparar las soluciones obtenidas con la corrida 5, dada por los símbolos de las estrellas llenas, y la corrida 10, dada por los símbolos de los cuadros grandes llenos, la que mejor se ajusta al comportamiento correcto, dada por los símbolos de los cuadros pequeños llenos, es esta última. Se tiene, al final del tiempo de simulación, una diferencia máxima en la relación Gas-Aceite de  $0.4 \text{ m}^3/\text{m}^3$ , en la presión de fondo fluyendo de  $0.55 \text{ kg}/\text{cm}^2$ , en la presión promedio de  $0.5 \text{ kg}/\text{cm}^2$  y los problemas de balance de materia, disminuyeron con respecto al caso anterior (sub-sección b.2), como puede verse en la Fig. 4.53. El error de balance máximo que se comete en este caso, es del orden del 3%.

En estas figuras, también se comparan las soluciones obtenidas en las corridas 6 (cruces huecas), 7 (estrellas huecas), 8 (triángulos pequeños llenos), 9 (círculos grandes llenos), 11 (círculos grandes huecos), 13 (cuadrados grandes huecos) y 15 (triángulos grandes huecos) junto con el comportamiento correcto (cuadrados pequeños llenos). Como puede observarse las corridas en donde se empleó el algoritmo para el cálculo óptimo del parámetro de sobrerelajación son las que más se desvian de la tendencia correcta, teniendo problemas en el balance de materia. Mientras que, en las corridas donde se empleó un valor constante de este parámetro, tienden a seguir mejor el comportamiento correcto y el balance de materia se mejora. Cabe mencionar, que el haber reducido las tolerancias de presión y de saturación al método LSOR, se logró reducir el tiempo de proceso para la corrida más lenta con respecto a su similar del caso anterior (sub-sección b.2), ver Tablas 4.24 y

4.25.

Al igual que en la sub-sección a.3, es conveniente remarcar que el parámetro de aceleramiento a la convergencia del método LSOR ( $\omega$ ), debe de ajustarse su valor conforme cambien las condiciones locales de presión y saturación. En otras palabras, para el problema de flujo multifásico hacia un pozo, mantener un solo valor de  $\omega$  durante toda la corrida funciona hasta cierto tiempo de simulación; sin embargo, cuando las condiciones de presión y saturación se modifiquen, este valor debe de cambiar para que sea óptimo y de esta manera la solución del sistema lineal de ecuaciones se realice en el menor número de iteraciones del LSOR y por consiguiente en un menor número de iteraciones newtonianas. Nuevamente, se observa que el algoritmo propuesto en la referencia 15 no funciona adecuadamente; es necesario modificarlo, o desarrollar otro algoritmo más eficiente.

- b.4) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-5}$ , tanto del método de Newton-Raphson como del método LSOR.

Se sigue manteniendo la idea de considerar la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas para el método LSOR igual a cero en cada iteración newtoniana,  $\delta X_{i,j,k}^{(v)} = 0$ , se disminuyen ahora las tolerancias para la convergencia en presión y en saturación, tanto en el método de Newton-Raphson como en el método LSOR a  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y a  $1 \times 10^{-5}$ , respectivamente. Esto tiene como objetivo mejorar el balance de materia, sin aumentar fuertemente el tiempo de proceso de las corridas.

Se realizaron 17 corridas; en las primeras 10 corridas se mantuvo un único valor constante de omega, en el rango de 1 a 1.823,

durante todo el tiempo de simulación. En las corridas 11 y 12 se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo y se calculó el valor de omega solo en la primera iteración newtoniana, manteniéndose este valor calculado hasta la convergencia del método LSOR. En este algoritmo se emplearon dos tolerancias: 0.01 y 0.001, y se comenzó con un valor de  $\omega=1$  para este algoritmo.

Posteriormente, en las corridas 13 y 14 se empleó nuevamente este algoritmo con las mismas tolerancias y el valor inicial de  $\omega=1$ , como en las corridas anteriores, pero ahora se permitió el cálculo del valor de  $\omega$  óptimo en cada iteración newtoniana. En las corridas 15, 16 y 17 se tomó una tolerancia de 0.01 para el cálculo del valor de  $\omega$  óptimo y se inició con un valor de  $\omega=1.25$ , de  $\omega=1.35$  y de  $\omega=1.40$ , respectivamente.

La Tabla 4.26 muestra el desempeño computacional de estas 17 corridas del método LSOR con respecto al parámetro de aceleramiento a la convergencia,  $\omega$ , y para las tolerancias en presión y saturación estipuladas tanto del método de Newton-Raphson como del LSOR.

Como puede observarse en esta tabla, desde el punto de vista computacional, la corrida 3 ( $\omega=1.15$ ) es la más eficiente, dado que realiza un tiempo de CPU de 11:19 minutos con 125 etapas de tiempo, 642 iteraciones newtonianas y 6157 iteraciones del método LSOR y la que mayores recursos de cómputo consume es la corrida 10 ( $\omega=1.823$ ) con un tiempo de CPU de 393:46 minutos, 474 etapas de tiempo, 2889 iteraciones newtonianas y 346433 iteraciones del método LSOR.

En las Figs. 4.54 a 4.57 se presentan las soluciones obtenidas con estas corridas, mostrando los comportamientos de la

relación Gas-Aceite, de la presión de fondo fluyendo, de la presión promedio del área de drene y del balance de materia del aceite contra el tiempo de simulación, respectivamente.

TABLA 4.26 METODO LSOR,  $TOLP = TOLPI = 1 \times 10^{-4}$  Y  $TOLS = TOLSI = 1 \times 10^{-5}$

	$\omega$	numero etapas	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu (minutos)
1	1.00	417	2095	12124	28:27
2	1.10	277	1390	9765	20:06
3	1.15	125	642	6157	11:19
4	1.25	237	1189	9330	18:43
5	1.35	239	1201	10855	20:29
6	1.50	181	965	17066	25:32
7	1.75	1024	5639	158631	211:45
8	1.766	791	4929	179609	228:46
9	1.779	646	4329	189982	235:25
10	1.823	474	2889	346433	393:46
11	algoritmo de $\omega$ tl=.01	611	3551	92547	126:32
12	algoritmo de $\omega$ tl=.001	388	2143	29126	47:13
13	algoritmo de $\omega$ tl=.01	275	1508	22378	34:59
14	algoritmo de $\omega$ tl=.001	152	792	13009	19:41
15	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.25$ tl=0.01	242	1459	26009	38:30
16	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.35$ tl=0.01	247	1456	26478	39:03
17	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.40$ tl=0.01	255	1512	28679	41:52

FTI:  $T_{olp} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $T_{cls} = 1 \times 10^{-5}$   
 LSOR:  $T_{olp} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $T_{cls} = 1 \times 10^{-5}$

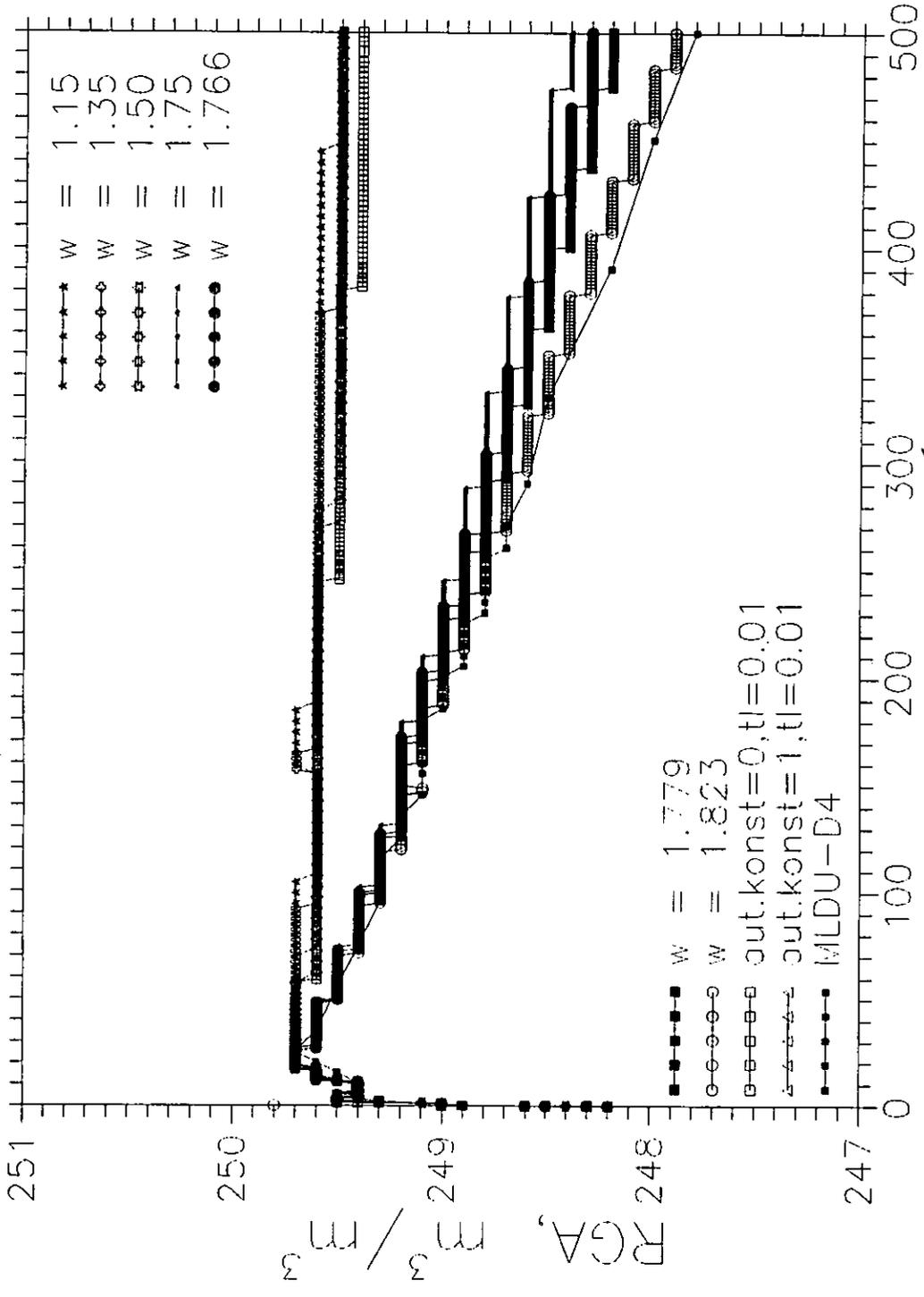


Fig. 4.54 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

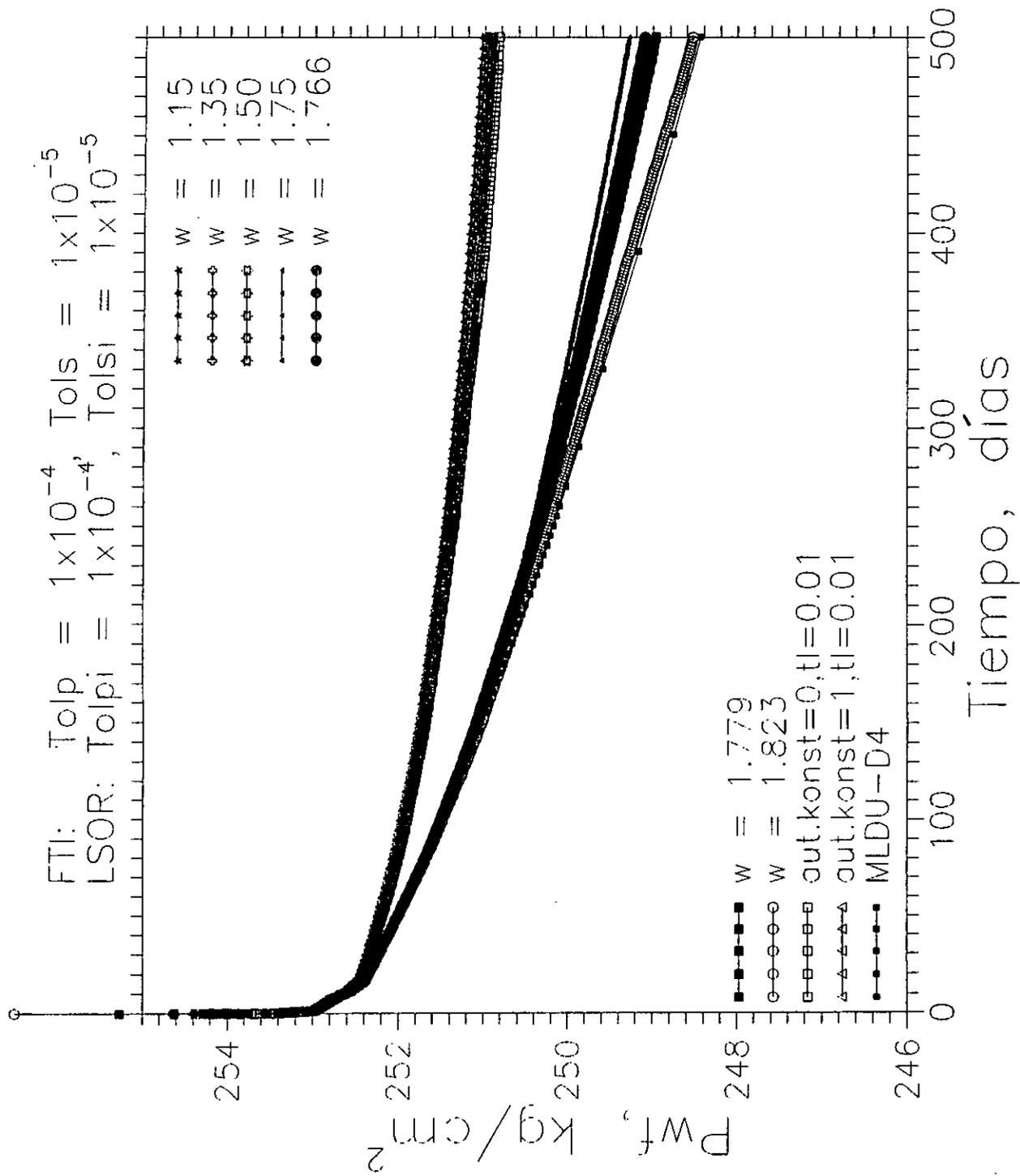


Fig. 4.55 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-4}$ , Tols =  $1 \times 10^{-5}$   
 LSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-4}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-5}$

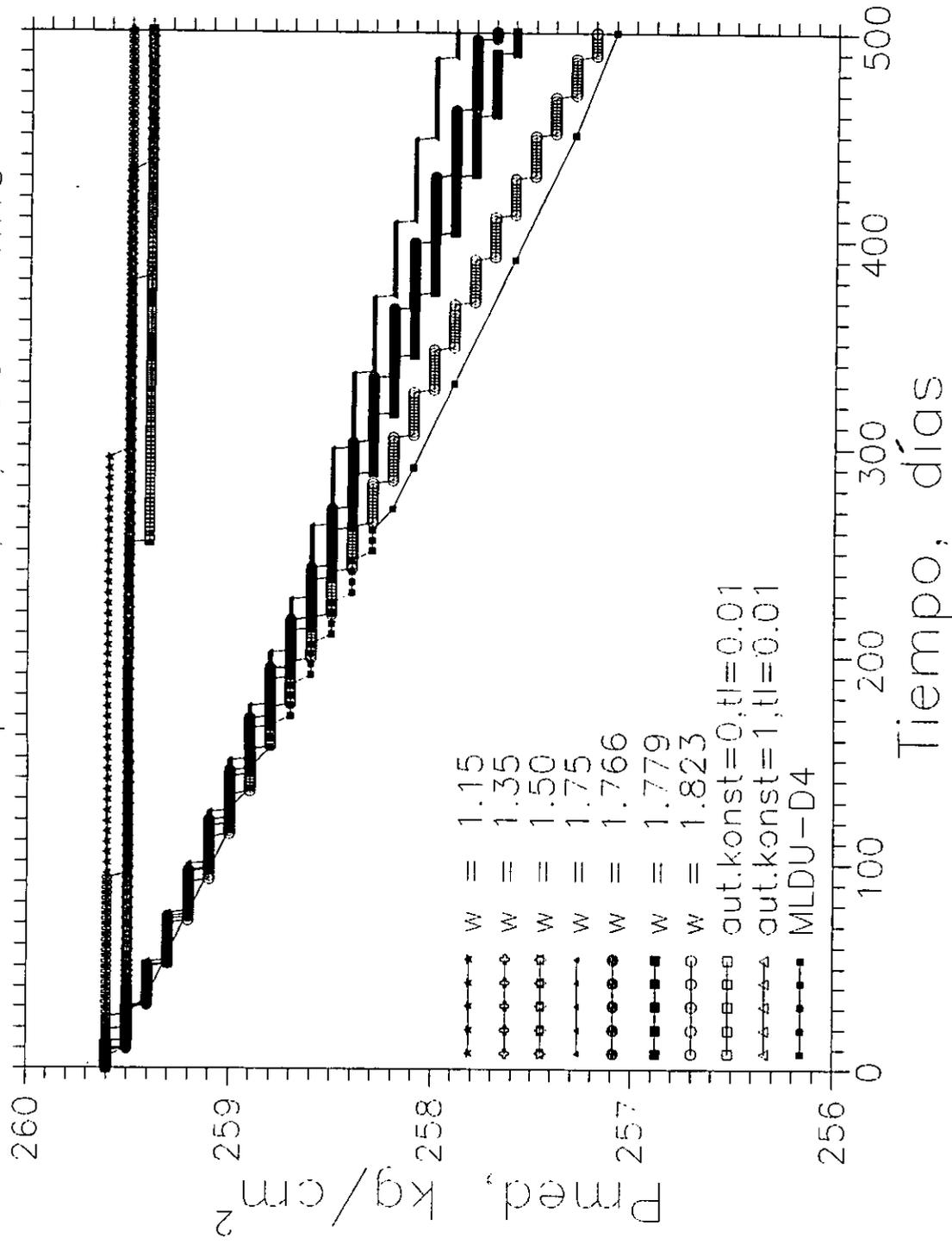
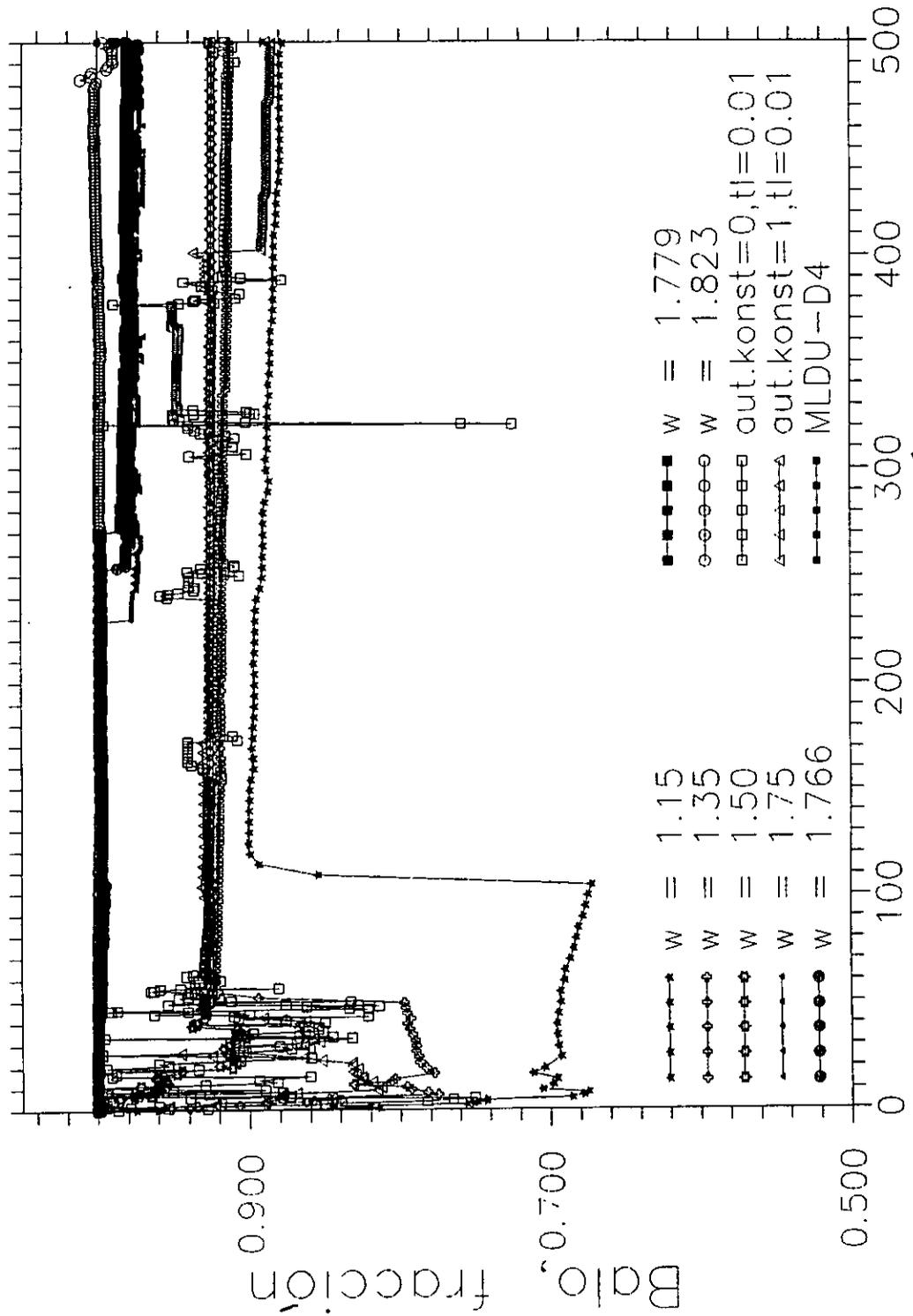


Fig. 4.56 Presión promedio vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-4}$ , Tols =  $1 \times 10^{-5}$   
 LSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-4}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-5}$



Tiempo, días

Fig. 4.57 Balance de materia del aceite vs Tiempo

De acuerdo con estas gráficas, la corrida 3, que es la más rápida, dada por los símbolos de las estrellas llenas, y la corrida 10, que es la más lenta, dada por los símbolos de los círculos grandes huecos, la que mejor comportamiento tiene es esta última, debido a que sigue mejor la tendencia correcta, dada por los símbolos de los cuadros pequeños llenos, teniendo una diferencia máxima, al final del tiempo de simulación, en la relación Gas-Aceite de  $0.1 \text{ m}^3/\text{m}^3$ , en la presión de fondo fluyendo de  $0.1 \text{ kg}/\text{cm}^2$ , en la presión promedio de  $0.1 \text{ kg}/\text{cm}^2$  y el balance de materia del aceite, se mantiene prácticamente en uno, como puede verse en la Fig. 4.57.

En estas figuras, también se presentan las soluciones obtenidas con las corridas 5 (cruces huecas), 6 (estrellas huecas), 7 (triángulos pequeños llenos), 8 (círculos grandes llenos), 9 (cuadrados grandes llenos), 11 (cuadrados grandes huecos) y 13 (triángulos grandes huecos) junto con el comportamiento correcto (cuadrados pequeños llenos). Como puede observarse las corridas en donde se empleó el algoritmo para el cálculo óptimo del parámetro de sobrerelajación son las que más se desvían de la tendencia correcta, sobretodo en el balance de materia. Mientras que, en las corridas donde se empleó un valor constante de este parámetro, tienden a seguir mejor el comportamiento correcto y el balance de materia se mejora.

En este caso, el haber reducido las tolerancias para la convergencia en presión y en saturación para el método de Newton-Raphson iguales a las del método LSOR, mejora el comportamiento de este último pero el tiempo de proceso para la corrida más lenta ( $\omega=1.823$ ) aumentó considerablemente con respecto a su similar del caso anterior (sub-sección b.3), ver Tablas 4.25 y

4.26. También el haber ensayado diferentes valores iniciales de  $\omega$  con el algoritmo presentado en la Sección 4.2.4 no logra mejorar la respuesta del método LSOR.

A continuación se presenta este mismo análisis de sensibilidad para el método iterativo BSOR junto con el método directo MLDU y un ordenamiento D4.

- b.5) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , tanto en el método de Newton-Raphson como en el método BSOR, con una estimación inicial en la primera iteración newtoniana igual a cero.

Al igual que para el método LSOR (sub-sección b.1), la suposición básica que se establece para este caso, es tomar la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas para el método BSOR igual a cero solo en la primera iteración newtoniana,  $\delta X_{i,j,k}^{(V=1)} = 0$ .

Con respecto al parámetro de sobrerelajación,  $\omega$ , se realizaron 17 corridas; en las primeras 9 corridas,  $\omega$  se mantuvo un único valor constante a lo largo de todo el tiempo de simulación, en el rango de 1 a 1.825. y en las 8 restantes, se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo, descrito en la Sección 4.2.4. En las corridas 10 y 11, se calculó el valor de  $\omega$  solamente al inicio de cada iteración newtoniana, y se mantuvo el valor calculado hasta que el método LSOR alcanzara la convergencia; se emplearon dos tolerancias, 0.01 y 0.001 y se inició siempre con un valor de  $\omega=1$ . En las corridas 12 y 13, se empleó nuevamente este algoritmo y en cada iteración newtoniana se permitió el cálculo del valor de  $\omega$  óptimo, siendo su valor inicial y tolerancias iguales a los dos casos

anteriores. En las corridas 14, 15, 16 y 17 se empleó una tolerancia de 0.01 para el cálculo del valor del parámetro de sobrerelajación y los valores de iniciales de  $\omega$  fueron 1.25, 1.35, 1.45 y de 1.50, respectivamente.

La Tabla 4.27 muestra el desempeño computacional de las 17 corridas empleando el método iterativo BSOR con respecto al parámetro de sobrerelajación,  $\omega$ , y para las tolerancias de presión y saturación del método de Newton y del BSOR antes estipuladas.

Como puede observarse en esta tabla, la mayoría de las corridas, a excepción de las corridas 6 a 9, no alcanzaron el tiempo total de simulación estipulado, como lo muestra la columna 4 de esta tabla, debido a que sobrepasaron la capacidad máxima de almacenamiento de la estación de trabajo, fijado en un límite de 9000 elementos o etapas de tiempo. Este límite se estableció por seguridad para no saturar al 100% el disco duro. De tal manera que para estas corridas no se pudo reportar el número de iteraciones newtonianas ni del BSOR.

En las Figs. 4.58 a 4.61 se presentan las soluciones de las corridas que terminaron y alcanzaron el mayor tiempo de simulación, mostrando los comportamientos de la relación Gas-Aceite, de la presión de fondo fluyendo, de la presión promedio del área de drene y del balance de materia del aceite contra el tiempo de simulación, respectivamente: corrida 3, dada por los símbolos de estrellas llenas y con un tiempo de simulación de 224.7 días, corrida 5, dada por los símbolos de cureces huecas y con un tiempo de simulación de 240.6 días, corrida 6, dada por los símbolos de estrellas huecas, la corrida 7, dada por los símbolos de triángulos pequeños llenos, la corrida 8, dada por por los símbolos de círculos grandes llenos, y la

TABLA 4.27 METODO BSOR,  $TOLP = TOLPI = 1 \times 10^{-3}$  Y  $TOLS = TOLSI = 1 \times 10^{-4}$

	$\omega$	numero etapas	tiempo simula.	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu (horas)
1	1.00	200	90.4			2:50
2	1.10	258	146.0			2:20
3	1.15	264	224.7			2:38
4	1.25	186	150.6			1:57
5	1.35	260	240.6			2:03
6	1.50	494	500.0	7394	53588	2:18
7	1.75	206	500.0	1367	106135	2:20
8	1.775	288	500.0	1638	149977	3:01
9	1.825	411	500.0	2504	356096	6:40
10	aut. konst=0 tl=.01	176	107.3			2:06
11	aut. konst=0 tl=.001	163	117.9			2:07
12	aut. konst=1 tl=.01	215	145.6			2:15
13	aut. konst=1 tl=.001	305	126.9			2:10
14	aut. konst=1 $\omega=1.35$ tl=.01	310	130.6			2:13
15	aut. konst=1 $\omega=1.50$ tl=0.01	282	127.3			2:10
16	aut. konst=1 $\omega=1.45$ tl=0.01	256	120.7			2:00
17	aut. konst=1 $\omega=1.50$ tl=0.01	213	95.3			1:50

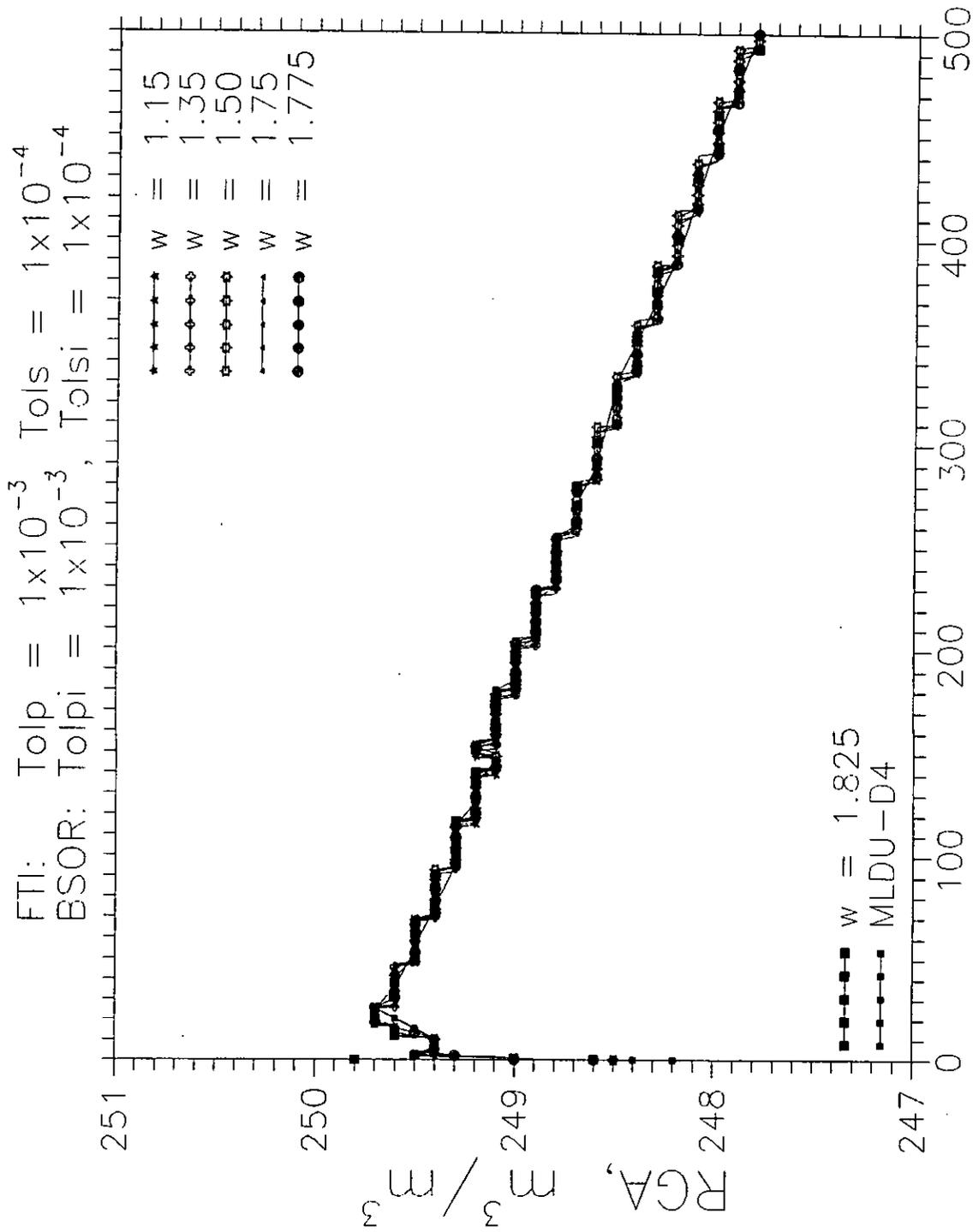


Fig. 4.58 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

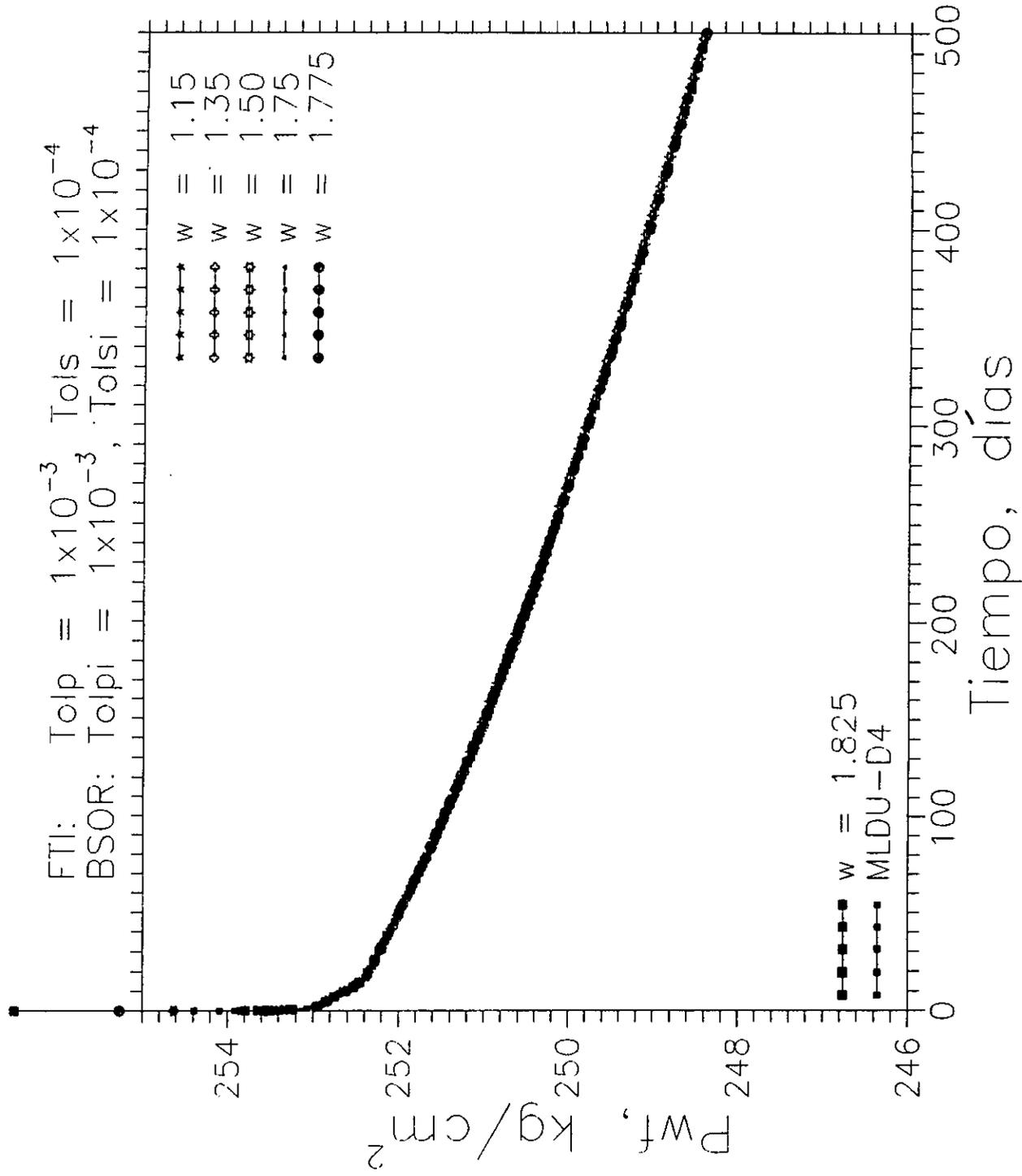


Fig. 4.59 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-3}$ , Tols =  $1 \times 10^{-4}$   
 BSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-3}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-4}$

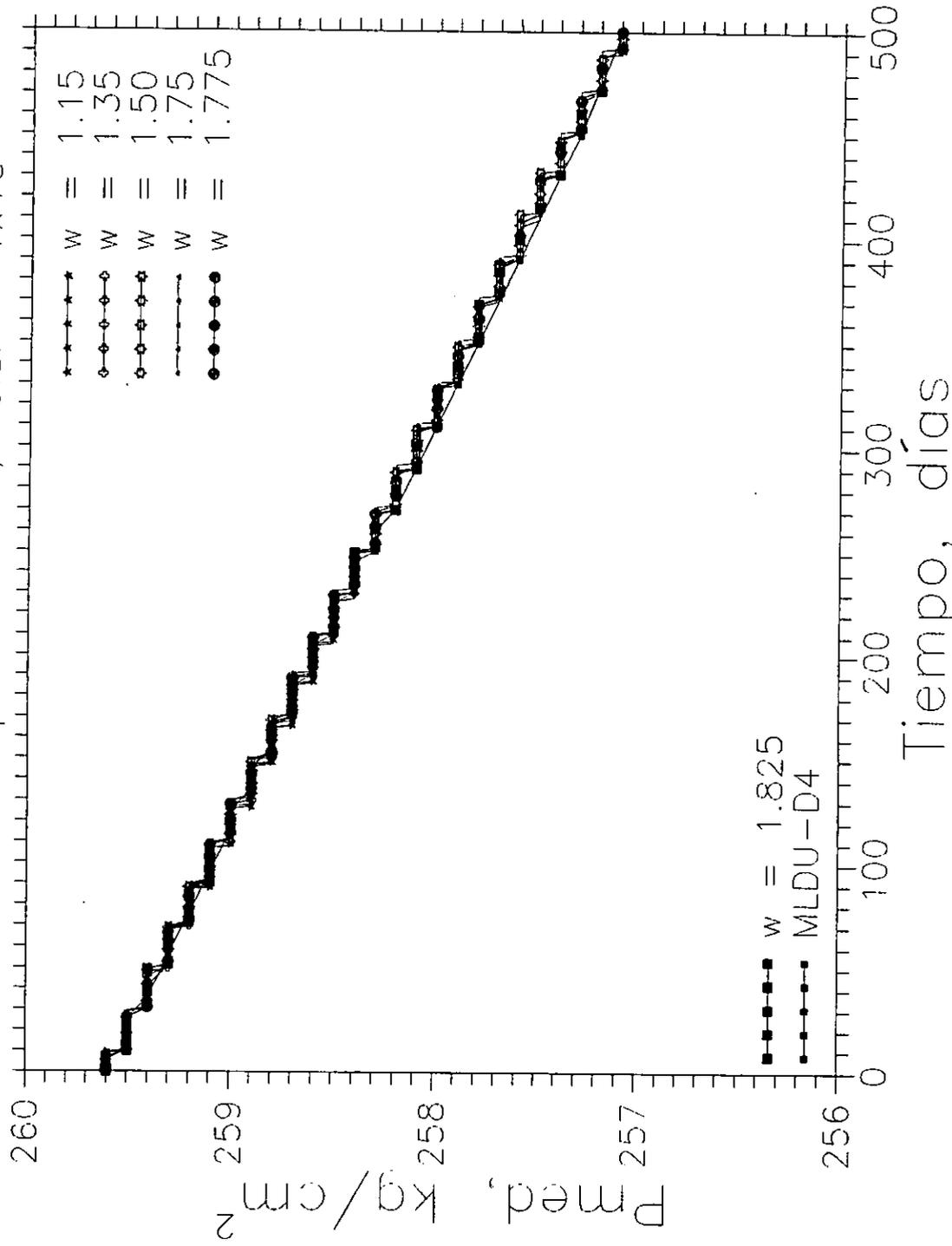


Fig. 4.60 Presión promedio vs Tiempo

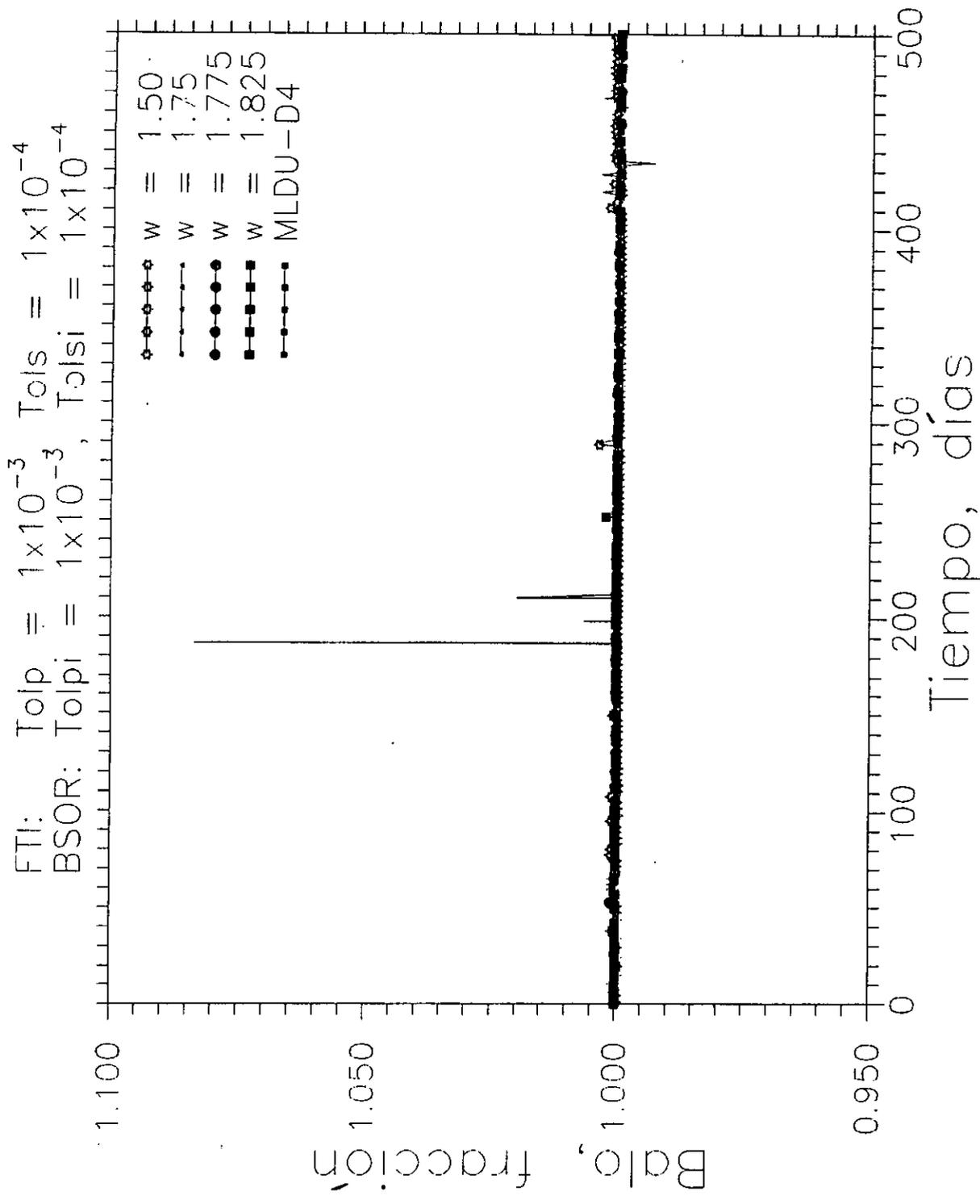


Fig. 4.61 Balance de materia del aceite vs Tiempo

corrida 9, dada por los símbolos de cuadrados grandes llenos. Estas 4 últimas corridas con un tiempo de simulación de 500.0 días, junto con el comportamiento correcto, dada por los símbolos de cuadros pequeños llenos. Las soluciones de estas últimas 6 corridas del método BSOR siguen perfectamente la tendencia del comportamiento correcto, sin problemas de balance de materia, como puede verse en la Fig. 4.61.

La corrida más eficiente es la número 6,  $\omega=1.50$ , con un tiempo de CPU de 2:18 horas, 494 etapas de tiempo, 7394 iteraciones newtonianas y 53588 iteraciones del BSOR, mientras que la más tardada es la número 9,  $\omega=1.825$ , con un tiempo de CPU de 6.40 horas, 411 etapas de tiempo, 2504 iteraciones newtonianas y 356096 iteraciones del BSOR.

- b.6) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , tanto del método de Newton-Raphson como del método BSOR, con una estimación inicial igual a cero en cada iteración newtoniana.

La suposición básica que se establece en esta sub-sección es tomar la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas para el método BSOR igual a cero en cada iteración newtoniana,  $\delta X_{i,j,k}^{(v)} = 0$ . Se mantienen las mismas tolerancias en presión y en saturación para alcanzar la convergencia, tanto en el método de Newton como en el método BSOR, como se tomaron en la sub-sección anterior (b.5). El objetivo es reducir los tiempos de CPU requeridos y alcanzar el tiempo total de simulación estipulado.

Se realizaron 14 corridas; en las primeras 7 corridas se mantuvo un único valor constante de omega, en el rango de 1 a 1.75, a lo largo de todo el tiempo de simulación. En las últimas 7 corridas

se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo. En las corridas 8 y 9, se calculó el valor de  $\omega$  solo al inicio de cada iteración newtoniana; se mantuvo este valor hasta alcanzar la convergencia del método BSOR. En este algoritmo se utilizaron dos tolerancias, 0.01 y 0.001, y se inició siempre con un valor de  $\omega=1$ . En las corridas 10 y 11 se emplearon estas mismas tolerancias y el valor inicial de  $\omega=1$  para este algoritmo, permitiendo el cálculo del valor de  $\omega$  óptimo en cada iteración newtoniana. Por otra parte, en las corridas 12, 13 y 14 se empleó una tolerancia de 0.01 para el cálculo del valor óptimo del parámetro de sobrerelajación y se inició con un valor de omega de 1.25, de 1.50 y de 1.75, respectivamente.

La Tabla 4.28 muestra el desempeño computacional de estas 14 corridas del método BSOR bajo las condiciones antes descritas.

Todas las corridas alcanzaron el tiempo total de simulación estipulado. El permitir que la estimación inicial de los cambios iterativos del BSOR se iguale a cero, en cada iteración newtoniana, reduce el tiempo de cómputo requerido, como lo muestran las Tablas 4.27 y 4.28.

En las Figs. 4.62 a 4.65 se presentan las soluciones obtenidas de estas corridas, mostrando los comportamientos de la relación Gas-Aceite, de la presión de fondo fluyendo, de la presión promedio del área de drene y del balance de materia del aceite contra el tiempo de simulación, respectivamente.

Desde el punto de vista computacional, la corrida 2,  $\omega=1.10$ , es la más eficiente con un tiempo de CPU de 28:12 minutos, 284 etapas de tiempo, 1709 iteraciones newtonianas y 10811 iteraciones del BSOR. Sin embargo, de acuerdo con las Figs. 4.62 a 4.65, esta corrida, dada por los símbolos de las estrellas llenas,

TABLA 4.28 METODO BSOR, TOLP. = TOLPI =  $1 \times 10^{-3}$  Y TOLS = TOLSI =  $1 \times 10^{-4}$

	$\omega$	numero etapas	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu (minutos)
1	1.00	352	2006	20422	41:19
2	1.10	284	1709	10811	28:12
3	1.15	294	1525	13325	29:06
4	1.25	425	2303	27903	52:06
5	1.35	615	3299	86919	124:09
6	1.50	469	2628	109985	142:18
7	1.75	918	4663	500822	575:42
8	algoritmo de $\omega$ tl=.01	306	1730	12399	30:51
9	algoritmo de $\omega$ tl=.001	345	1960	18898	39:21
10	algoritmo de $\omega$ tl=.01	366	2069	35851	58:12
11	algoritmo de $\omega$ tl=.001	361	2045	20302	41:36
12	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.25$ tl=0.01	399	2216	42079	66:33
13	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.50$ tl=0.01	385	2118	26090	48:25
14	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.75$ tl=0.01	310	1778	19202	37:50

difiere del comportamiento correcto, dado por los símbolos de los cuadros pequeños llenos, teniendo al final del tiempo de simulación una diferencia en la relación Gas-Aceite de  $0.3 \text{ m}^3/\text{m}^3$ , en la presión de fondo fluyendo de  $0.5 \text{ kg}/\text{cm}^2$ , en la presión promedio de  $0.4 \text{ kg}/\text{cm}^2$  y un error máximo de 0.6% en el balance de materia.

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-3}$ , Tols =  $1 \times 10^{-4}$   
 BSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-3}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-4}$

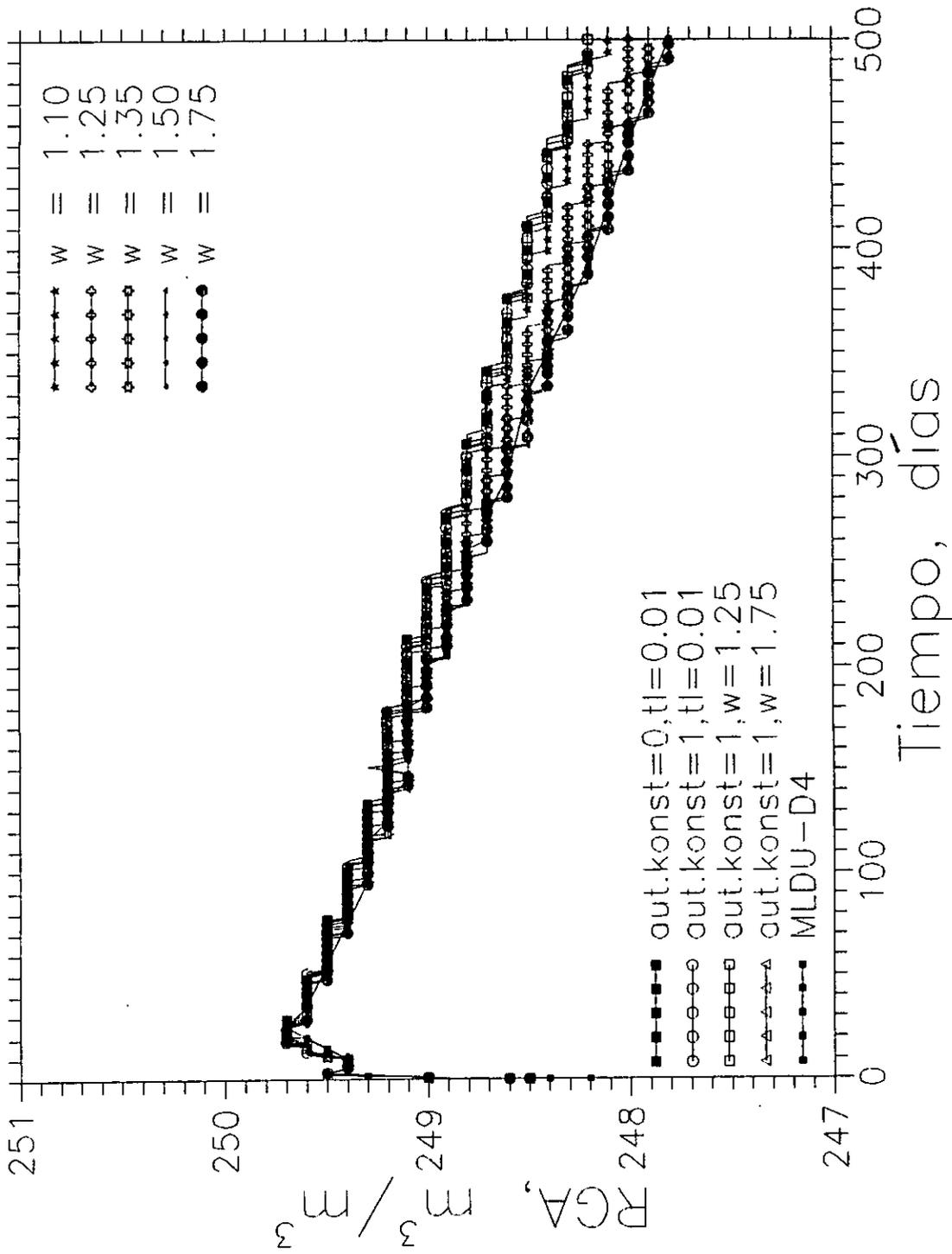


Fig. 4.62 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

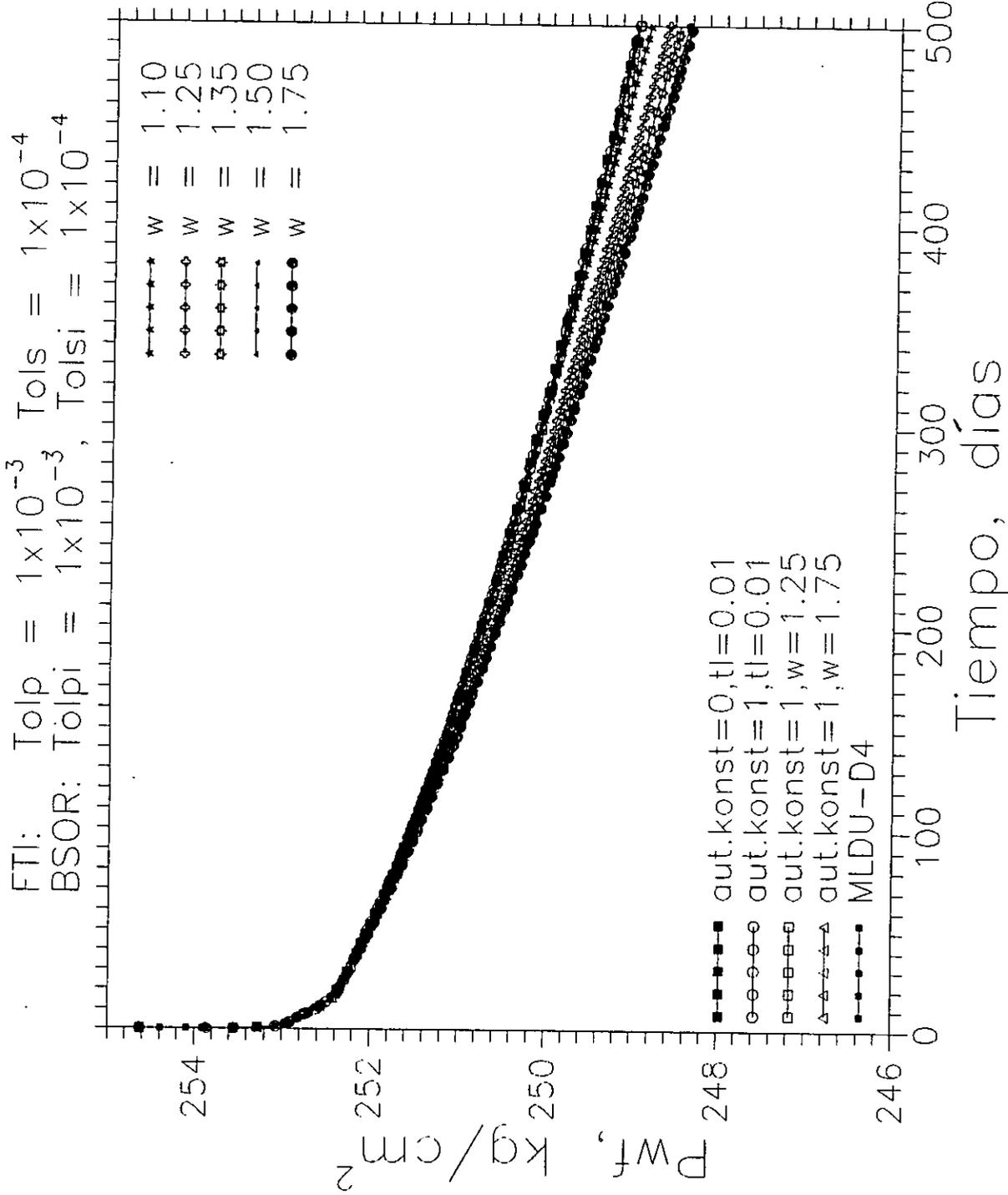


Fig. 4.63 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-3}$ , Tols =  $1 \times 10^{-4}$   
 BSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-3}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-4}$

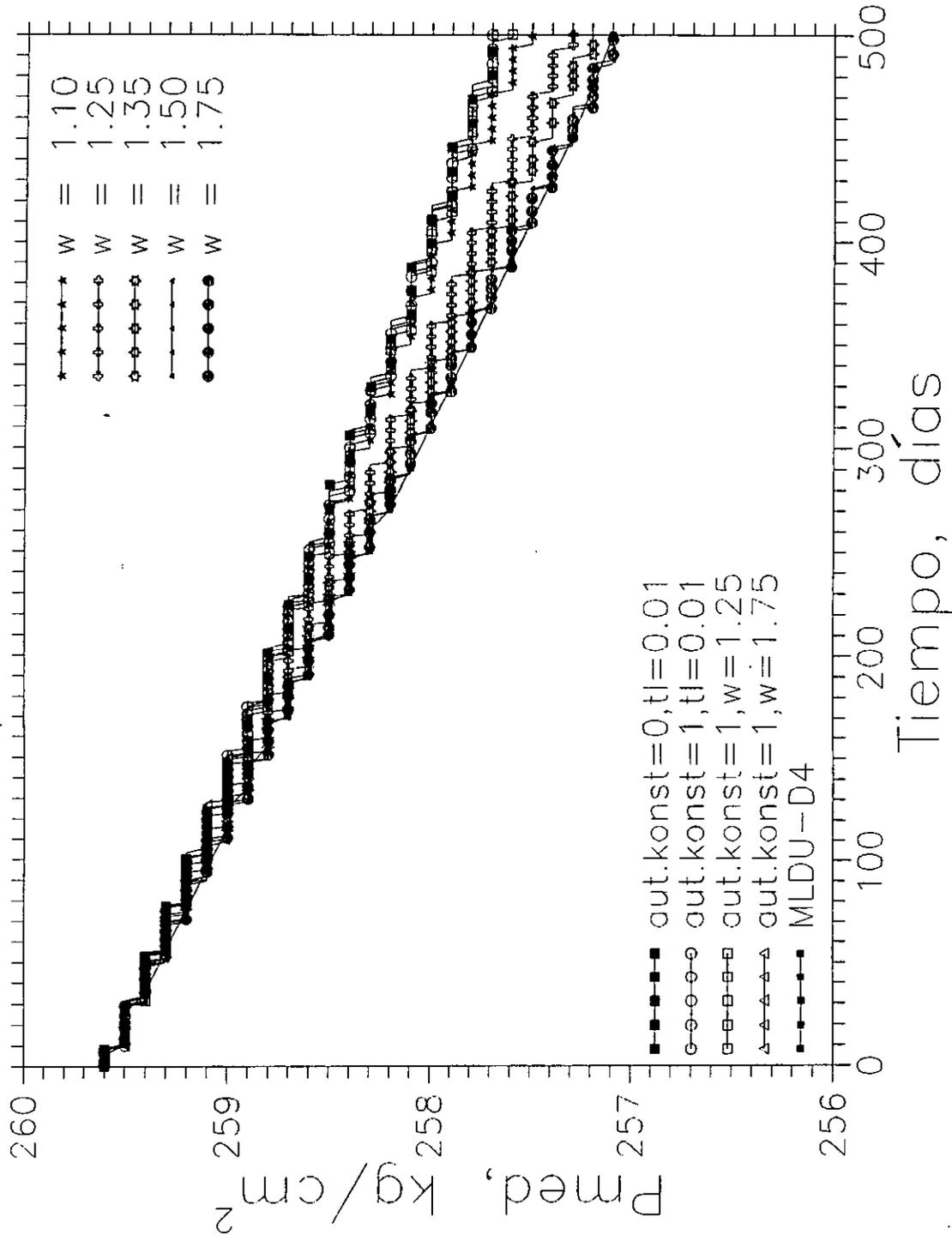


Fig. 4.64 Presión promedio vs Tiempo

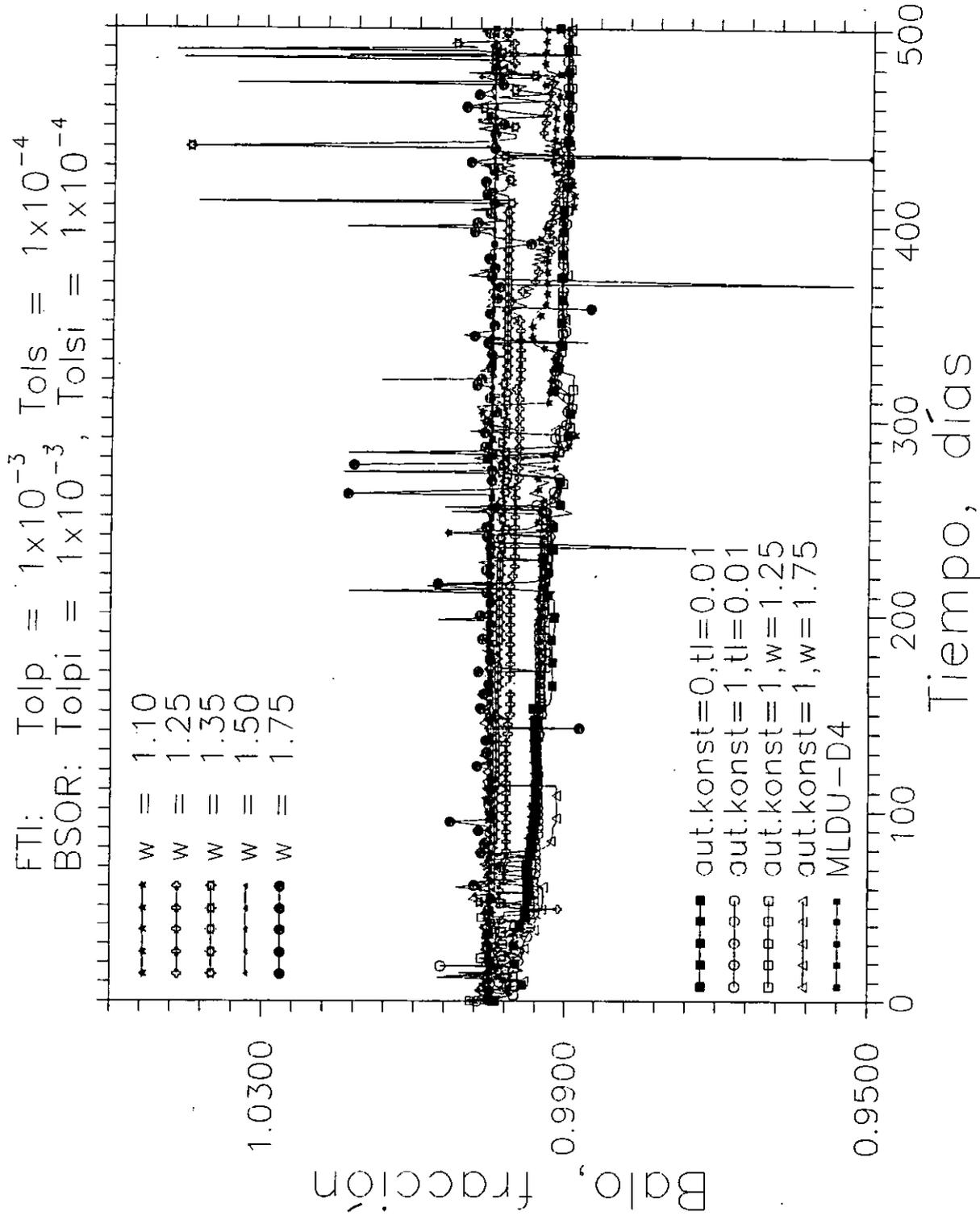


Fig. 4.65 Balance de materia del aceite vs Tiempo

En estas figuras, también se comparan las soluciones obtenidas en las corridas: 4 (cruces huecas), 5 (estrellas huecas), 6 (triángulos pequeños llenos), 7 (círculos grandes llenos), 8 (cuadrados grandes llenos), 10 (círculos grandes huecos), 12 (cuadrados grandes huecos) y 14 (triángulos grandes huecos) junto con el comportamiento correcto. Como puede observarse únicamente las corridas 6 y 7 logran seguir el comportamiento correcto y tienen un mejor balance de materia, como puede verse en la Fig. 4.65. El tiempo de ejecución de la corrida 6, es 4 veces menos que la corrida 7, ver Tabla 4.28.

Al igual que para el caso 1, para mejorar el balance de materia y el comportamiento de presión y saturación, se disminuyeron las tolerancias de presión y de saturación en el método BSOR y en el método de Newton.

- b.7) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , en el método de Newton-Raphson y una tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-5}$  para el método BSOR.

La suposición básica que se establece en esta sub-sección es seguir tomando la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas para el método BSOR igual a cero en cada iteración newtoniana,  $\delta X_{1,j,k}^{(v)} = 0$ , manteniendo las mismas tolerancias en presión y en saturación en el método de Newton-Raphson y disminuyéndolas para el método BSOR a  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> en presión y a  $1 \times 10^{-5}$  en saturación. Esto tiene como objetivo mejorar el balance de materia y por consecuencia el comportamiento de presión y de saturación en un tiempo de proceso competitivo con el realizado por

un método directo.

Se realizaron 15 corridas variando el parámetro de sobrerelajación ( $\omega$ ) para localizar el valor óptimo. Para las primeras 9 corridas se mantuvo un único valor constante a lo largo de todo el tiempo de simulación, en el rango de 1 a 1.815. Después se empleó el algoritmo para el cálculo óptimo de  $\omega$ , descrito en la Sección 4.2.4, para las últimas 6. En las corridas 10 y 11, se emplearon dos tolerancias, 0.01 y 0.001 y se inició con un valor de  $\omega=1$  para este algoritmo, y se permitió el cálculo del valor de  $\omega$  solo en la primera iteración newtoniana. En las corridas 12 y 13 se emplearon estas mismas dos tolerancias y el valor inicial de  $\omega=1$  para este algoritmo, pero ahora se permitió el cálculo del valor de  $\omega$  óptimo en cada iteración newtoniana.

En las corridas 14 y 15 se empleó una tolerancia de 0.01 para el cálculo del valor óptimo del parámetro de sobrerelajación y se inició con un valor de omega de 1.25 y de 1.50, respectivamente.

La Tabla 4.29 muestra el desempeño computacional de estas 15 corridas del método BSOR bajo las condiciones antes descritas y para las nuevas tolerancias estipuladas.

Como puede observarse en esta tabla, desde el punto de vista computacional, la corrida 14 (algoritmo de  $\omega$ ,  $\omega=1.25$ ) es la más eficiente, dado que realiza un tiempo de CPU de 38:09 minutos con 268 etapas de tiempo, 1523 iteraciones newtonianas y 20349 iteraciones del método BSOR y la que mayores recursos de cómputo consume es la corrida 9 ( $\omega=1.815$ ) con un tiempo de CPU de 357:09 minutos, 532 etapas de tiempo, 4215 iteraciones newtonianas y 264280 iteraciones del método BSOR.

TABLA 4.29 METODO BSOR, TOLP =  $1 \times 10^{-3}$  Y TOLS =  $1 \times 10^{-4}$   
 TOLPI =  $1 \times 10^{-4}$  Y TOLSI =  $1 \times 10^{-5}$

	$\omega$	numero etapas	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu (minutos)
1	1.00	415	2141	21638	46:08
2	1.10	414	2093	21661	45:27
3	1.15	599	3201	26882	62:49
4	1.25	360	1982	26057	49:03
5	1.35	229	1491	22611	40:07
6	1.50	306	1701	55299	77:39
7	1.75	293	1753	148596	179:31
8	1.775	372	2153	181704	212:53
9	1.815	532	4215	264280	357:09
10	algoritmo de $\omega$ tl=.01	415	2152	20384	44:59
11	algoritmo de $\omega$ tl=.001	415	2189	21274	46:20
12	algoritmo de $\omega$ tl=.01	302	1631	21205	40:37
13	algoritmo de $\omega$ tl=.001	263	1567	20002	38:12
14	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.25$	268	1523	20349	38:09
15	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.50$	296	1613	29420	80:35

En las Figs. 4.66 a 4.69 se presentan los comportamientos de la relación Gas-Aceite, de la presión de fondo fluyendo, de la presión promedio del área de drene y del balance de materia del aceite contra el tiempo de simulación, respectivamente. De acuerdo con estas gráficas, todas las corridas dan el mismo comportamiento y siguen la tendencia correcta, dada por los símbolos de los cuadros pequeños y el balance de materia se mantiene en uno.

FTI:  $Tolp = 1 \times 10^{-3}$ ,  $Tols = 1 \times 10^{-4}$   
 BSOR:  $Tolpi = 1 \times 10^{-4}$ ,  $Tolsi = 1 \times 10^{-5}$

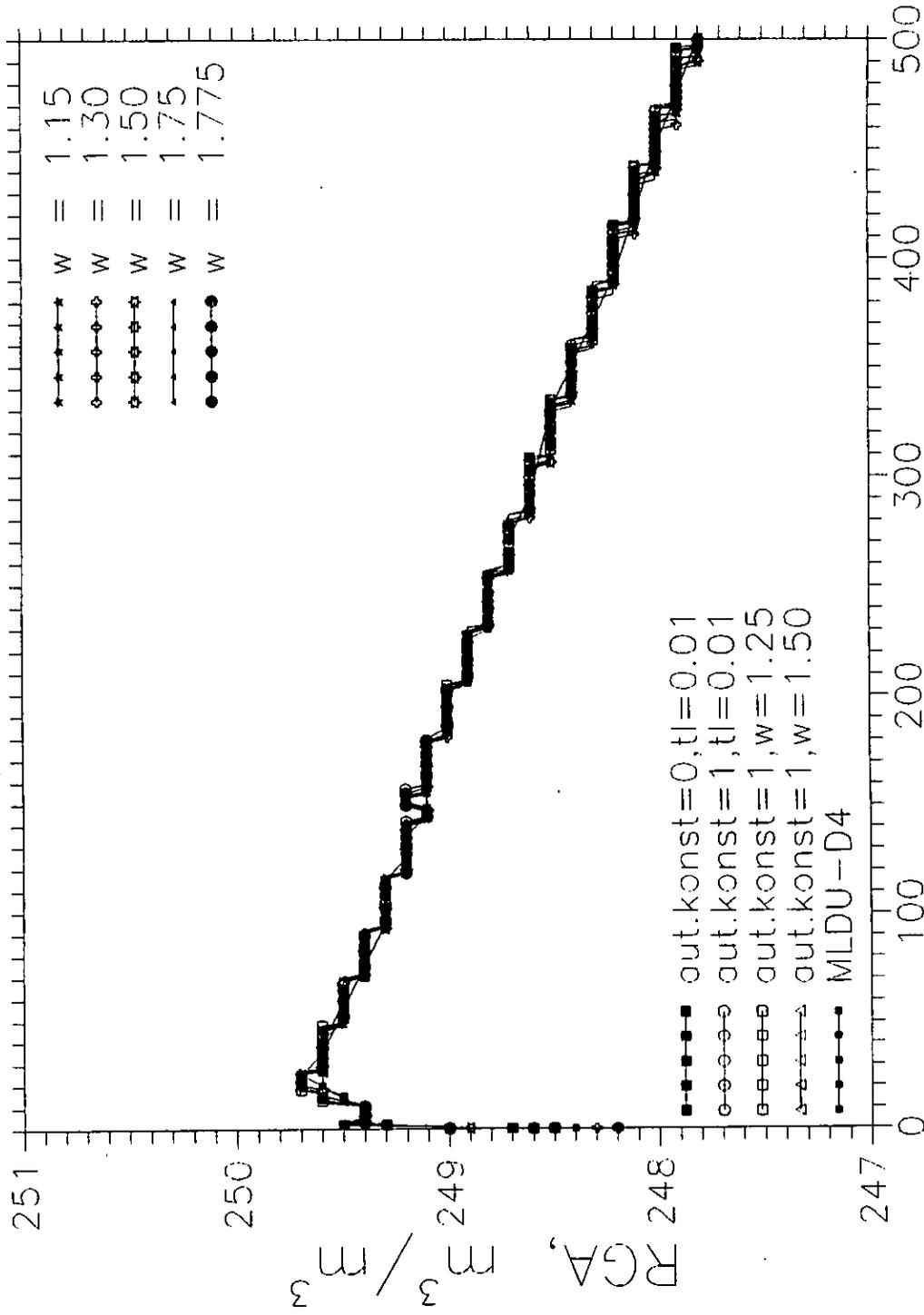


Fig. 4.66 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

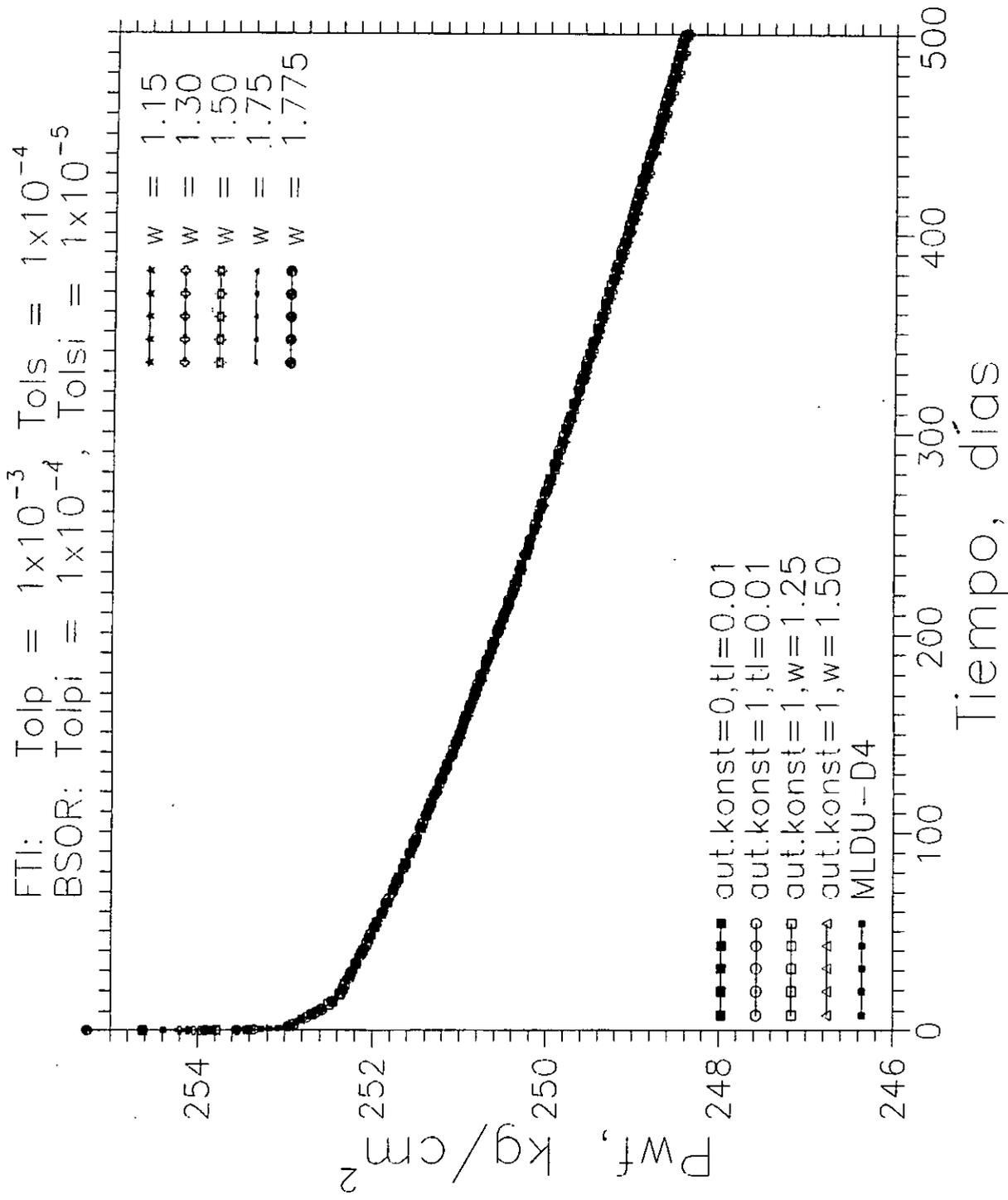


Fig. 4.67 .Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

FTI:  $Tolp = 1 \times 10^{-3}$ ,  $Tols = 1 \times 10^{-4}$   
 BSOR:  $Tolpi = 1 \times 10^{-4}$ ,  $Tolsi = 1 \times 10^{-5}$

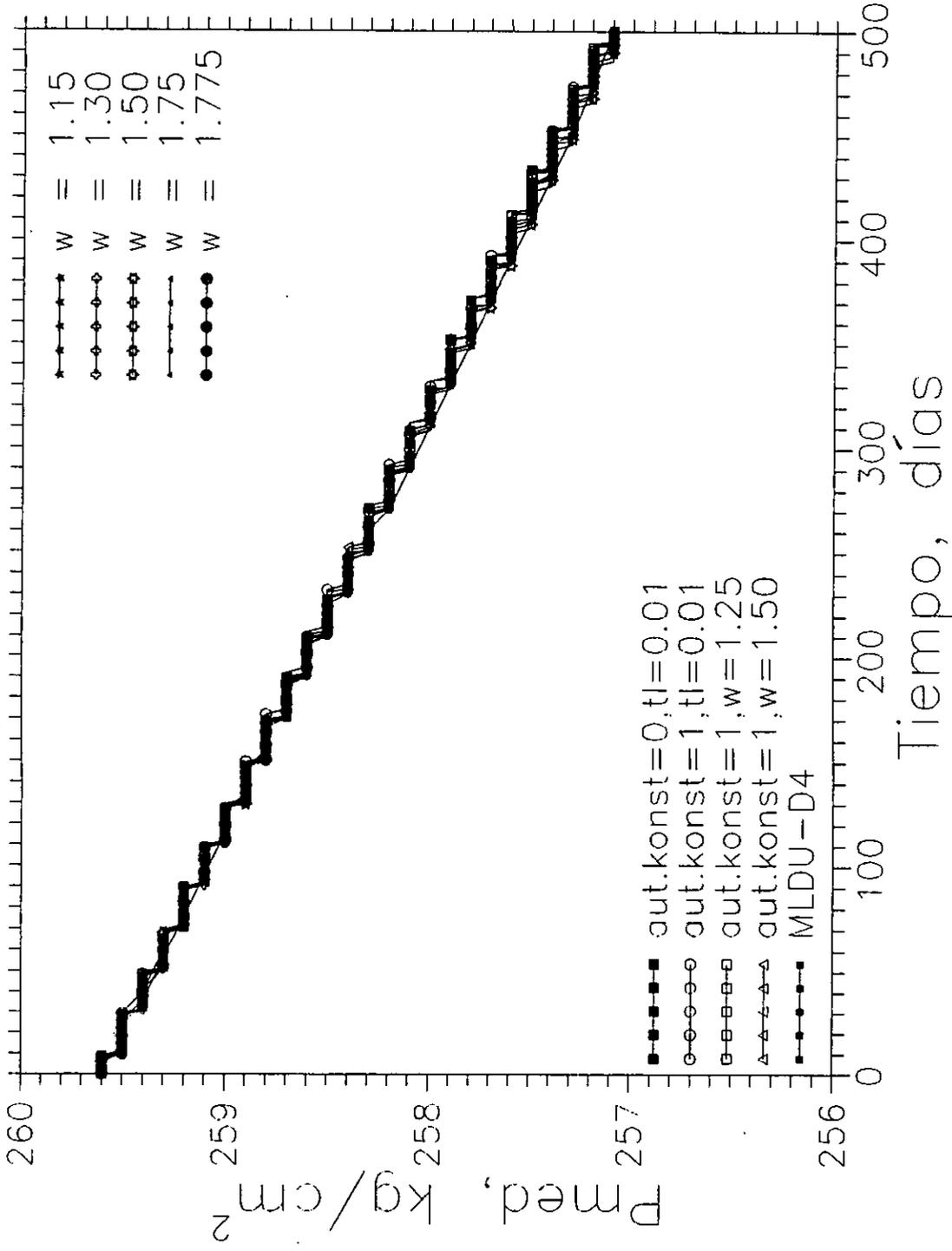
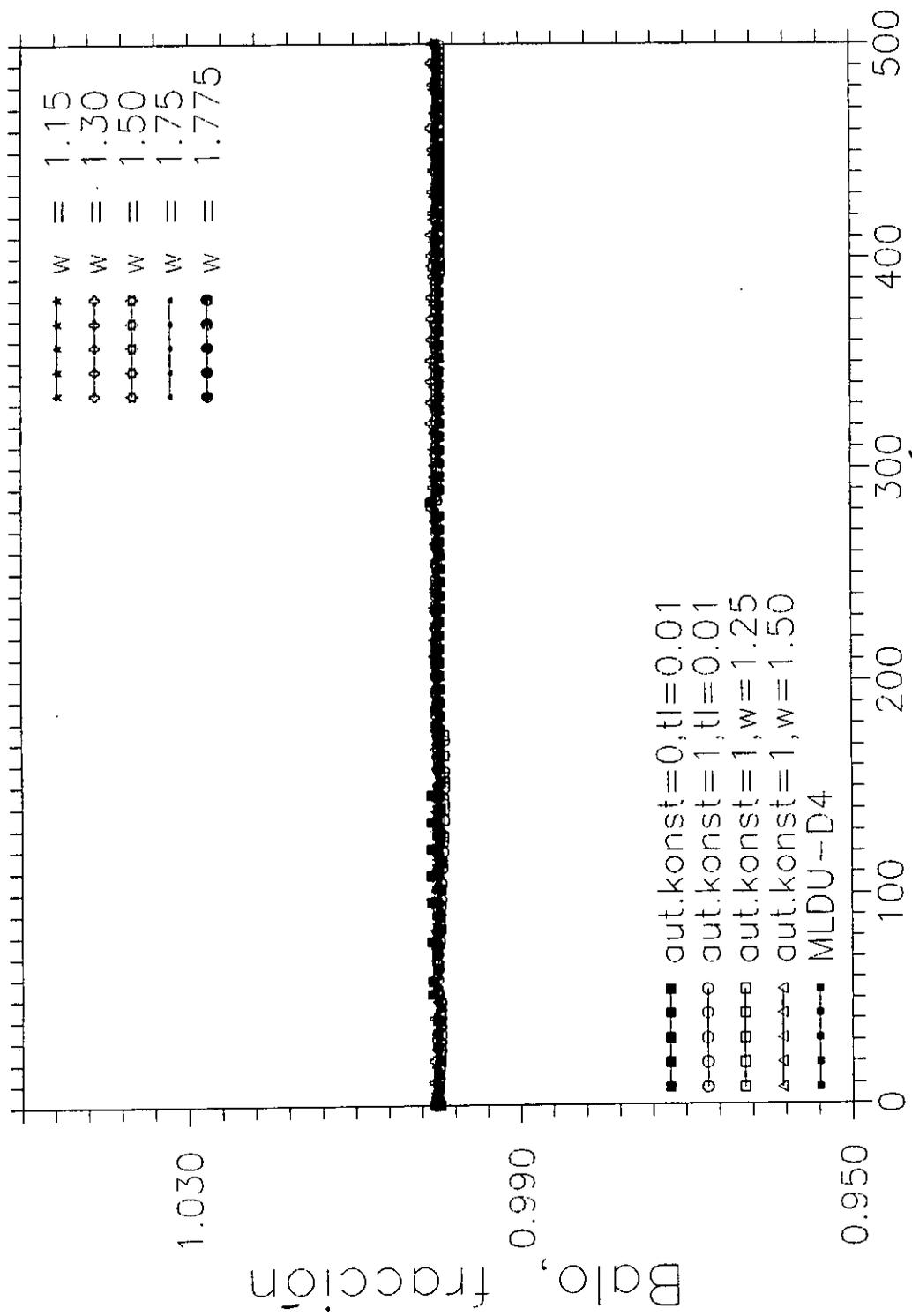


Fig. 4.68 Presión promedio vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-3}$ , Tols =  $1 \times 10^{-4}$   
 BSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-4}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-5}$



Tiempo, días

Fig. 4.69 Balance de materia del aceite vs Tiempo

En estas figuras se presentan los comportamientos de las corridas 3 (estrellas pequeñas llenas), 5 (cureces huecas), 6 (estrellas grandes huecas), 7 (triángulos pequeños llenos), 8 (círculos grandes llenos), 10 (cuadrados grandes llenos), 12 (círculos grandes huecos), 14 (cuadrados grandes huecos) y 15 (triángulos grandes huecos) junto con el comportamiento correcto (cuadrados pequeños llenos).

Esta prueba verifica que debido a que el método BSOR resuelve un mayor número de incógnitas simultáneamente es mucho más eficiente que el método LSOR para un mismo problema.

- b.8) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-5}$ , tanto en el método de Newton-Raphson como en el método BSOR.

Se sigue manteniendo la suposición de tomar la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas para el método BSOR igual a cero en cada iteración newtoniana,  $\delta X_{i,j,k}^{(v)} = 0$ , se disminuyen las tolerancias para la convergencia en presión y en saturación para el método de Newton y para el método de BSOR a  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y a  $1 \times 10^{-5}$ , respectivamente.

Se realizaron 15 corridas variando el parámetro de sobrerelajación ( $\omega$ ) para localizar el valor óptimo. Para las primeras 9 corridas se mantuvo un único valor constante a lo largo de todo el tiempo de simulación, en el rango de 1 a 1.815. Para las últimas 6 corridas se empleó el algoritmo para el cálculo óptimo de  $\omega$ , descrito en la Sección 4.2.4. En las corridas 10 y 11, se emplearon dos tolerancias de 0.01 y 0.001 y se inició con un valor de  $\omega=1$  para este algoritmo, y se permitió el cálculo del valor de  $\omega$  solo en la primera

iteración newtoniana . Posteriormente, en las corridas 12 y 13 se emplearon estas mismas dos tolerancias y el valor inicial de  $\omega=1$ , permitiendo el cálculo del valor de  $\omega$  óptimo en cada iteración newtoniana. En las corridas 14 y 15 se tomó el valor de la tolerancia de 0.01 para el cálculo del valor óptimo del parámetro de sobrerelajación y se inició con un valor de omega de 1.25 y de 1.50, respectivamente.

La Tabla 4.30 muestra el desempeño computacional de estas 15 corridas del método BSOR bajo las condiciones antes descritas y para las nuevas tolerancias estipuladas.

Como puede observarse en esta tabla, desde el punto de vista computacional, la corrida 13 (algoritmo de  $\omega$ ,  $\omega=1.0$ ) es la más eficiente, dado que realiza un tiempo de CPU de 198:37 minutos con 395 etapas de tiempo, 2087 iteraciones newtonianas y 167047 iteraciones del método BSOR y la que mayores recursos de cómputo consume es la corrida 9 ( $\omega=1.815$ ) con un tiempo de CPU de 467:52 minutos, 613 etapas de tiempo, 3857 iteraciones newtonianas y 430781 iteraciones del método BSOR.

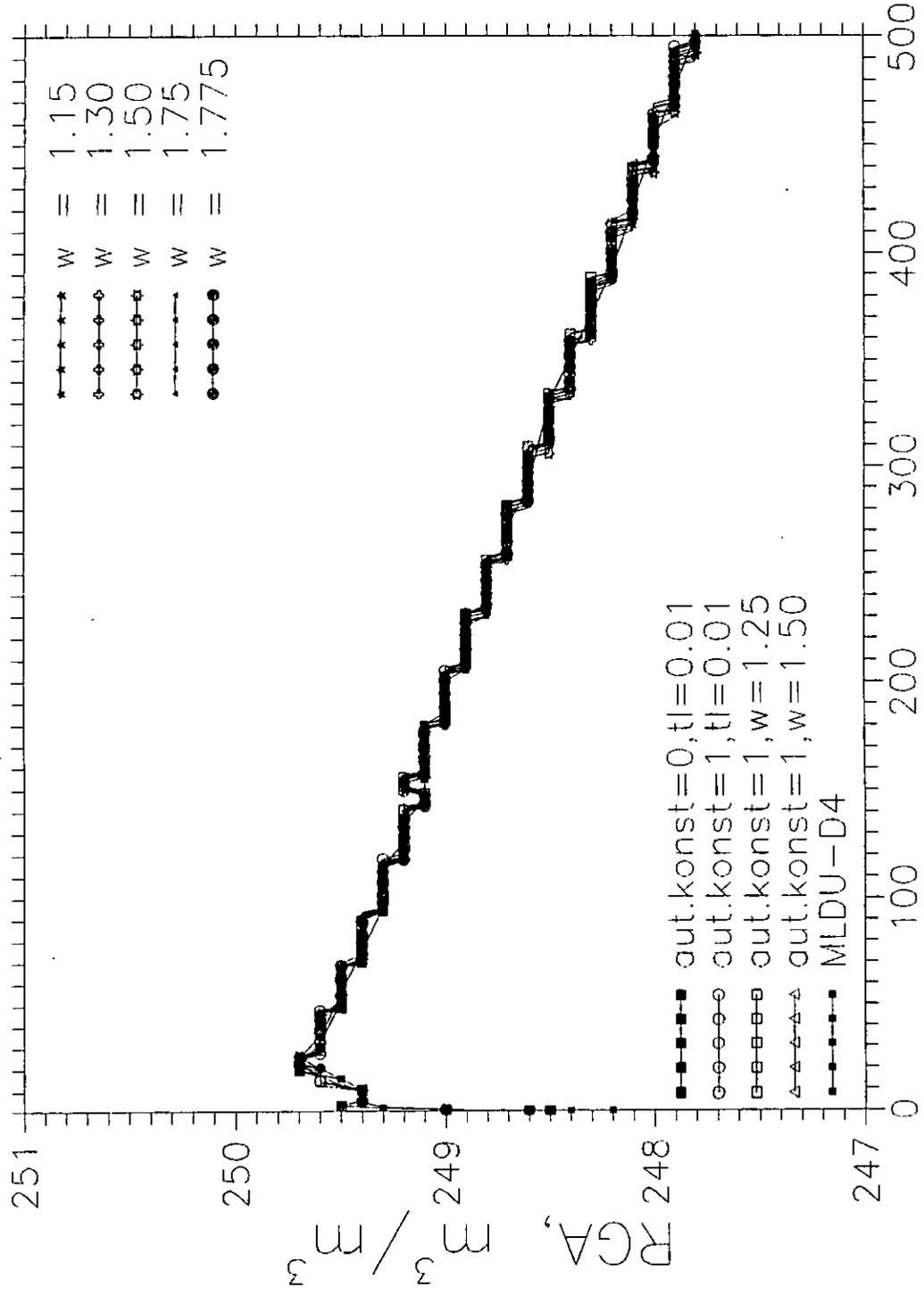
En las Figs. 4.70 a 4.73 se presentan las soluciones obtenidas con estas corridas, mostrando los comportamientos de la relación Gas-Aceite, de la presión de fondo fluyendo, de la presión promedio del área de drene y del balance de materia del aceite contra el tiempo de simulación, respectivamente. De acuerdo con estas gráficas, todas las corridas dan el mismo comportamiento y siguen la tendencia correcta, dada por los símbolos de los cuadros pequeños y el balance de materia se mantiene en uno. Sin embargo, el tiempo de CPU se incrementó 5 veces más, para las corridas mas rápidas de ambas sub-secciones (b.7 y b.8), ver Tablas 4.29 y 4.30.

TABLA 4.30 METODO BSOR, TOLP = TOLPI =  $1 \times 10^{-4}$  Y TOLS = TOLSI =  $1 \times 10^{-5}$

	$\omega$	numero etapas	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu (minutos)
1	1.00	489	3223	185617	232:03
2	1.10	436	2687	175269	229:21
3	1.15	428	2344	178215	217:45
4	1.25	422	2194	185864	224:25
5	1.35	415	2312	190323	230:53
6	1.50	551	2734	260401	310:31
7	1.75	572	2790	351597	345:47
8	1.775	576	2918	393660	432:17
9	1.815	613	3857	430781	467:52
10	algoritmo de $\omega$ tl=.01	406	2139	162264	209:26
11	algoritmo de $\omega$ tl=.001	446	2387	192637	228:18
12	algoritmo de $\omega$ tl=.01	406	2183	172345	204:49
13	algoritmo de $\omega$ tl=.001	395	2087	167047	198:37
14	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.25$	423	2263	182646	216:42
15	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.50$	415	2164	175729	214:55

En estas figuras se presentan los comportamientos de las corridas 3 (estrellas pequeñas llenas), 5 (cruces huecas), 6 (estrellas grandes huecas), 7 (triángulos pequeños llenos), 8 (círculos grandes llenos), 10 (cuadrados grandes llenos), 12 (círculos grandes huecos), 14 (cuadrados grandes huecos) y 15 (triángulos grandes huecos) junto con el comportamiento correcto (cuadrados pequeños llenos).

FTI:  $T_{olp} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $T_{ols} = 1 \times 10^{-5}$   
 BSOR:  $T_{olpi} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $T_{olsi} = 1 \times 10^{-5}$



Tiempo, días

Fig. 4.70 Relación Gas/Aceite vs Tiempo

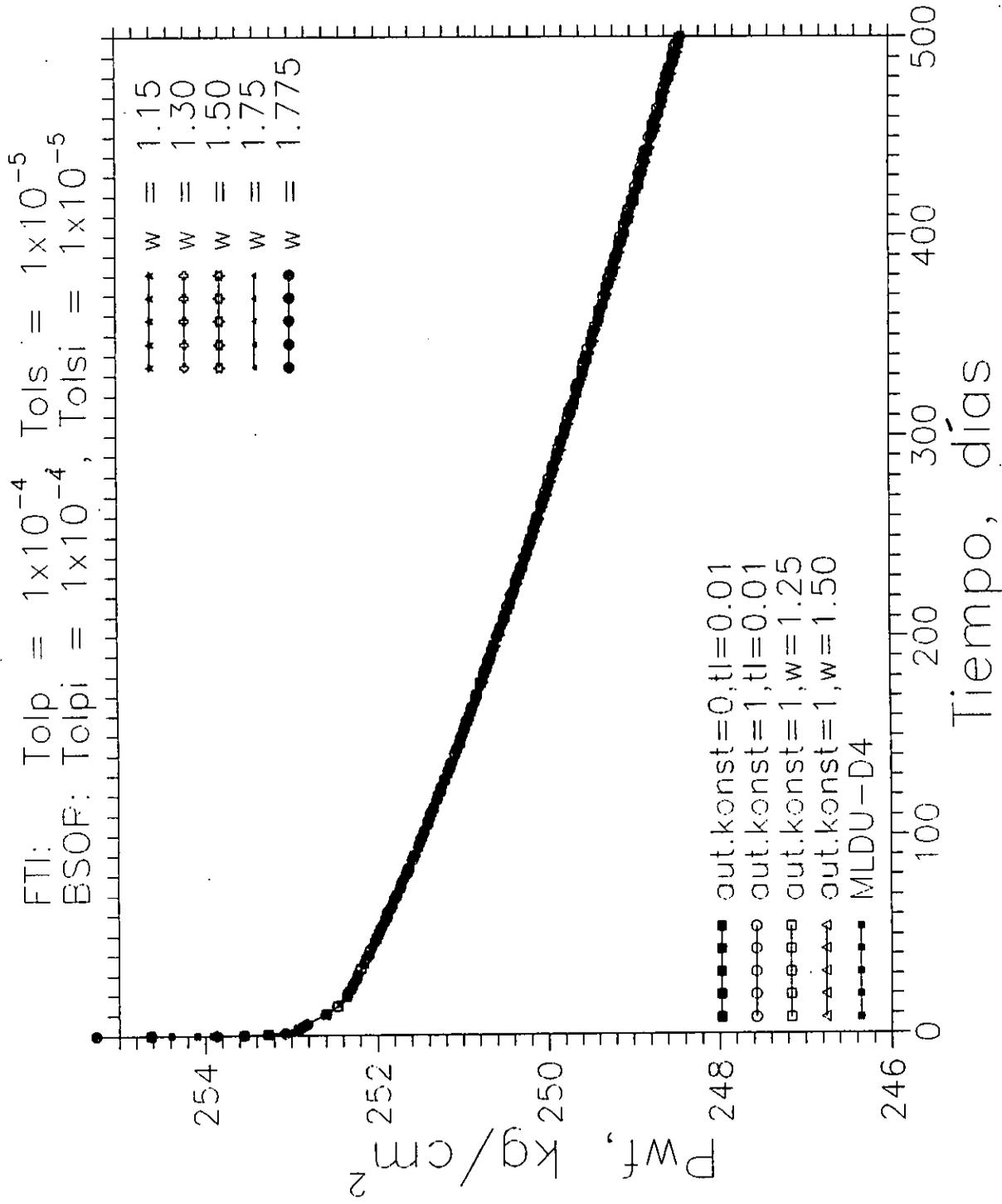


Fig. 4.71 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

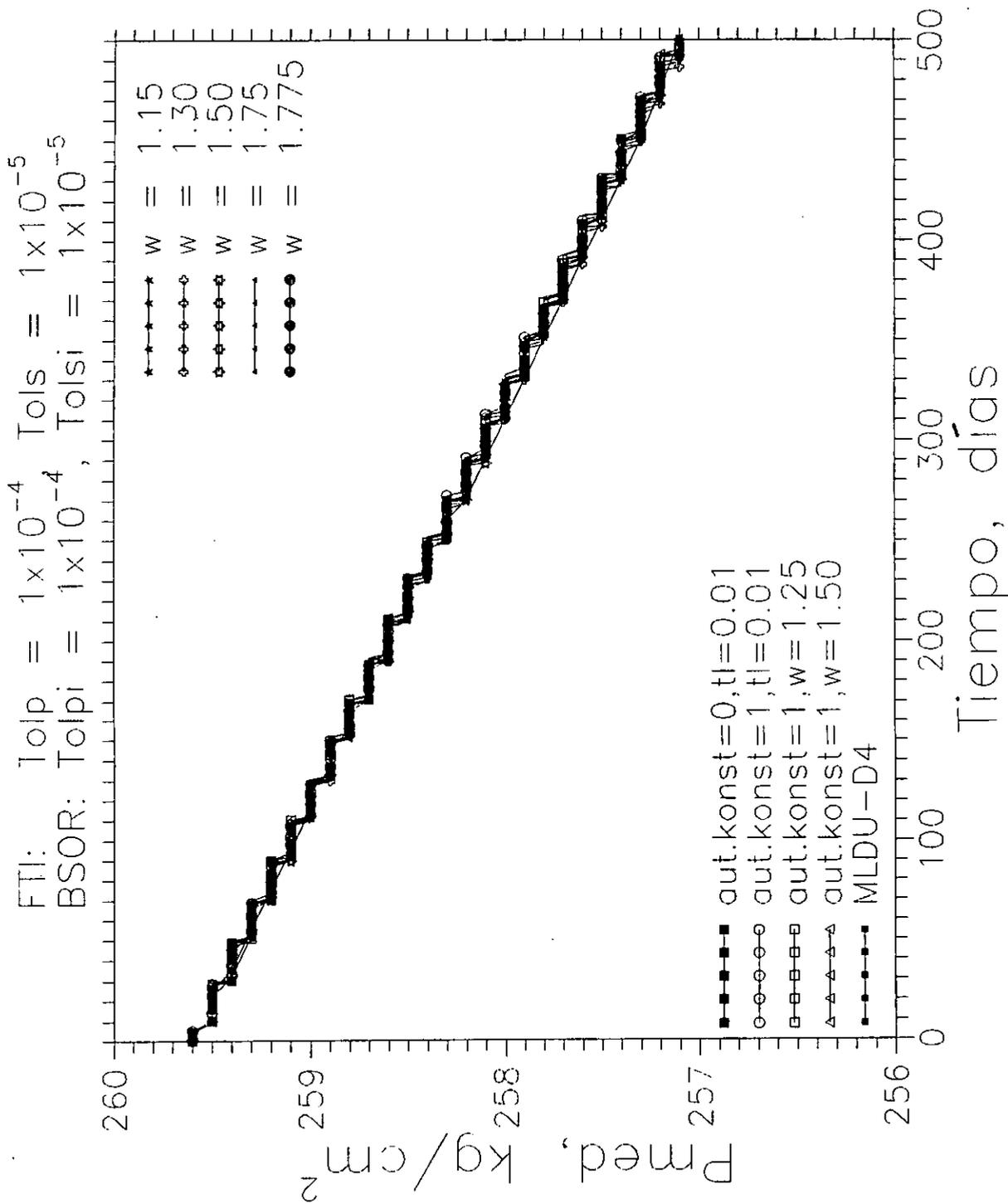


Fig. 4.72 Presión promedio vs Tiempo

FTI: Tolp =  $1 \times 10^{-4}$ , Tols =  $1 \times 10^{-5}$   
 BSOR: Tolpi =  $1 \times 10^{-4}$ , Tolsi =  $1 \times 10^{-5}$

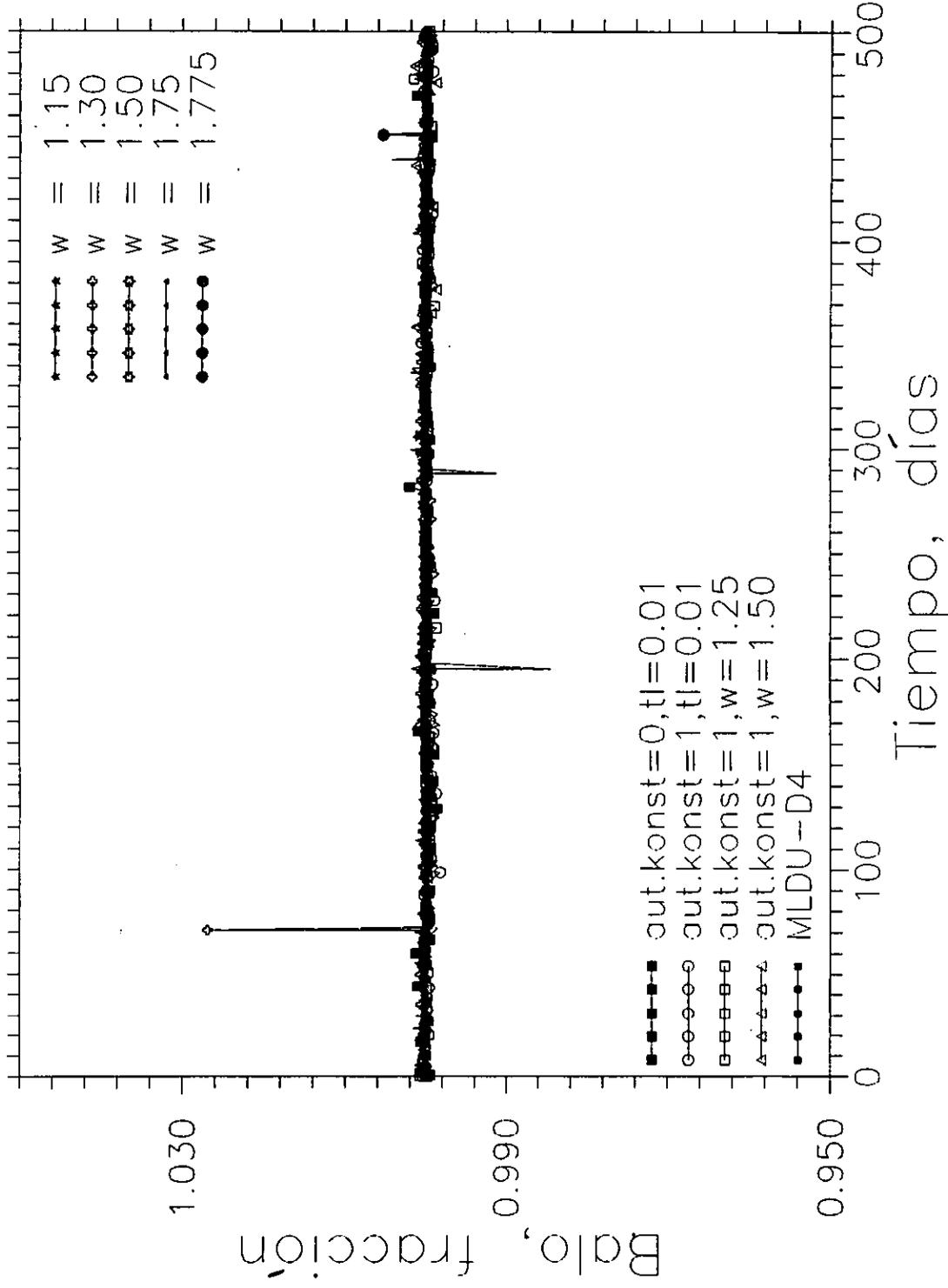


Fig. 4.73 Balance de materia del aceite vs Tiempo

Nuevamente, esta prueba verifica que el método BSOR, al resolver un mayor número de incógnitas simultáneamente, es más estable que el método LSOR para un mismo problema.

Una vez que se ha realizado este análisis de sensibilidad, se está en condiciones de efectuar la comparación del desempeño de los métodos directos NSPIV y MLDU, y de los métodos iterativos LSOR y BSOR para este problema homogéneo-isotrópico tridimensional (r- $\theta$ -z).

Los resultados obtenidos con estos métodos se presentan en la Tabla 4.31. Se puede observar que el método directo MLDU es el más eficiente, realizando un tiempo de ejecución de 27:55 minutos. El segundo más eficiente es el método iterativo BSOR con un tiempo de ejecución de 38:09, en el cual se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo con una tolerancia de 0.01, iniciando con un valor de  $\omega=1.25$  y tomando una tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$  para el método de Newton y de  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> en presión y de  $1 \times 10^{-5}$  en saturación para el método BSOR, y el tercer método más eficiente es el método directo NSPIV con un tiempo de ejecución de 50:59 minutos.

En esta tabla se presentan los dos mejores comportamientos de los métodos iterativos LSOR y BSOR obtenidos del análisis de sensibilidad del parámetro de sobrerelajación óptimo de las sub-secciones b.3, b.4, b.7 y b.8, respectivamente.

En el primer caso del método LSOR, subs. b.3, se empleó un valor constante de omega, a lo largo de todo el tiempo de simulación, de  $\omega=1.811$  con una tolerancia de presión de  $1 \times 10^{-3}$  y de saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , mientras que el segundo caso del LSOR, subs. b.4, se empleó también un valor constante de  $\omega$  de 1.823 pero con una tolerancia de presión de  $1 \times 10^{-4}$  y de saturación de  $1 \times 10^{-5}$ .

TABLA 4.31 RESULTADOS GENERALES: CASO HOMOG. E ISOTROP. TRIDI.

METODO DE SOLUCION	TIEMPO DE EJECUCION	No. ITER. NEWTONIANAS	No. ITER. MET. SOL.	ETAPAS TIEMPO	TIEMPO DE SIMULACION
	(MIN)				(DIAS)
NSPIV	50:59	291	—	51	500
MLDU	27:55	291	—	51	500
LSOR $\omega=1.811$ subs. b.3	220:05	1173	195406	207	500
LSOR $\omega=1.823$ subs. b.4	393:46	2889	346433	474	500
BSOR konst=1 $\omega=1.25$ subs. b.7	38:09	1523	20349	268	500
BSOR konst=1 $\omega=1.00$ subs. b.8	198:37	2087	167047	395	500

En el primer caso del método BSOR, subs. b.7, se emplearon las mismas tolerancias de presión y de saturación del primer caso del LSOR, pero empleando ahora el algoritmo para el cálculo óptimo del parámetro de sobrerelajación con un valor inicial de omega de 1.25 y en el segundo caso del método BSOR, subs. b.8, se emplearon las mismas tolerancias del segundo caso del LSOR y el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo, iniciando con un omega de 1.0.

Como puede verse en esta tabla, el método iterativo BSOR es más eficiente y estable que el método LSOR al resolver el mismo problema, esto se debe a que el método BSOR resuelve un mayor número de incógnitas simultáneamente, por lo que entre mayor grado de implicitud tenga un algoritmo, éste será más estable<sup>15</sup>.

En las Figs. 4.74 a 4.79 se presentan los comportamientos de la presión de fondo fluyendo, de la relación Gas-Aceite, del flujo fraccional de agua, de la presión promedio ponderada con respecto al volumen poroso, del número de iteraciones newtonianas y

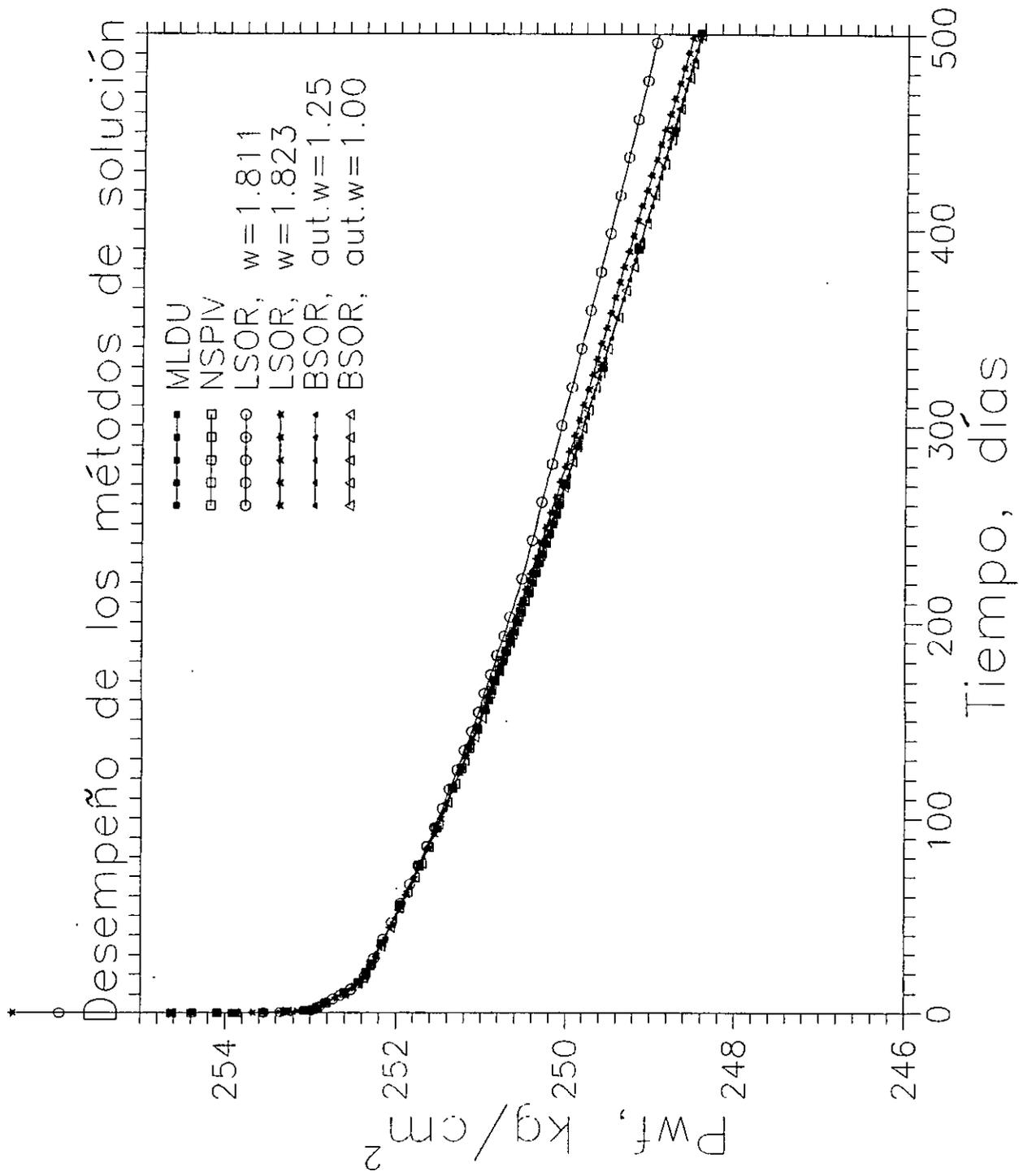


Fig. 4.74 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

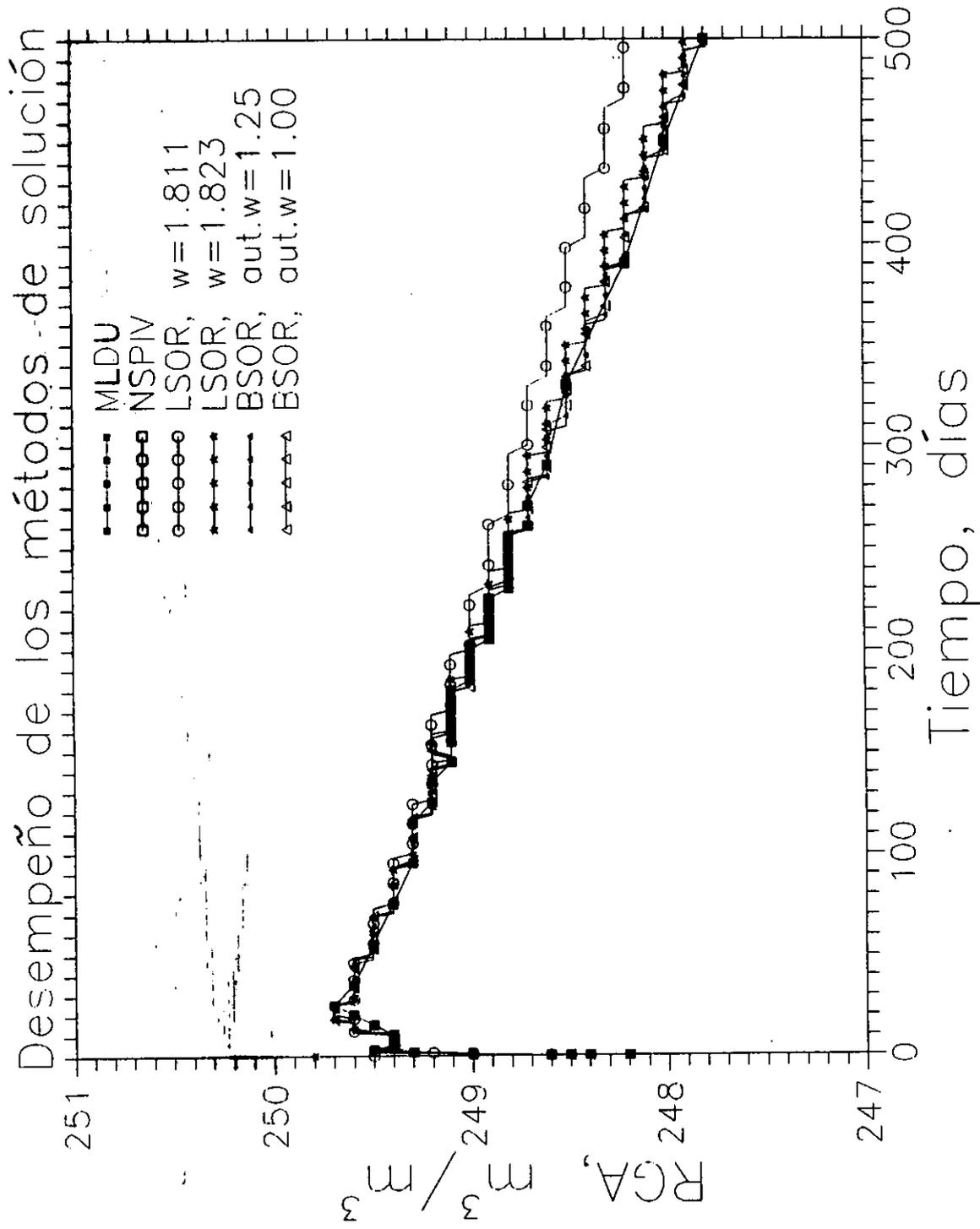


Fig. 4.75 Relación Gas-Aceite vs Tiempo

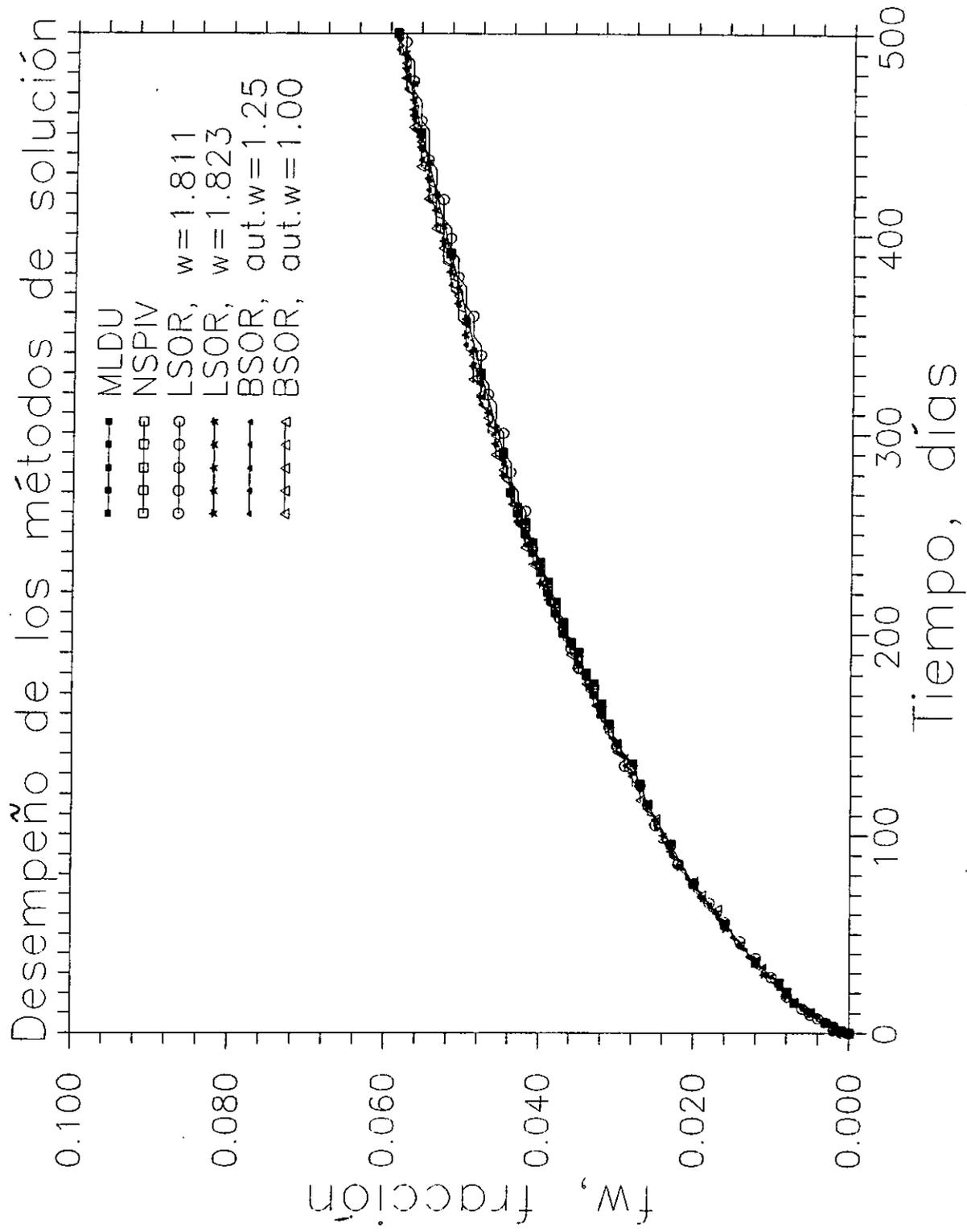


Fig. 4.76 Flujo fraccional de agua vs Tiempo

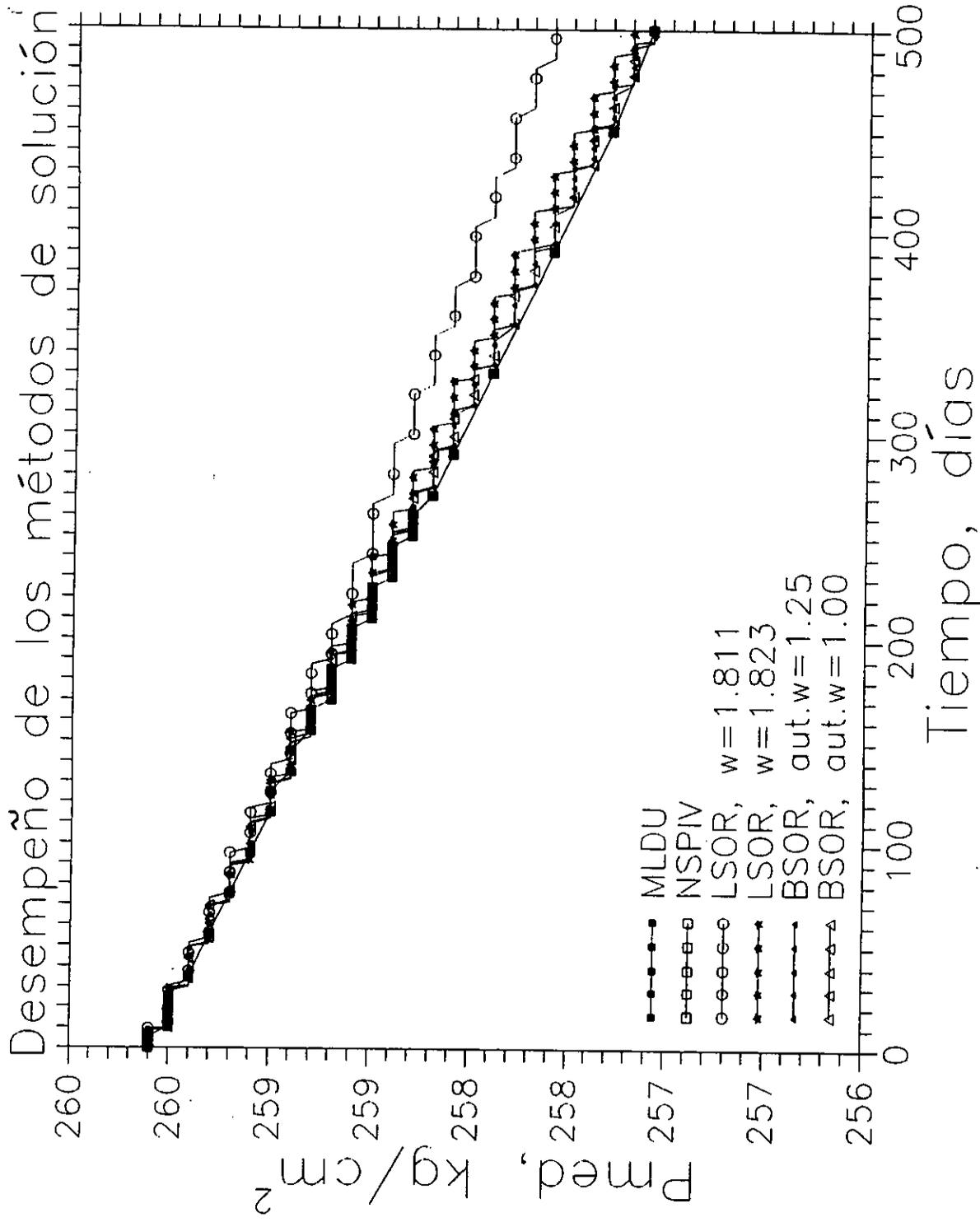


Fig. 4.77 Presión promedio vs Tiempo

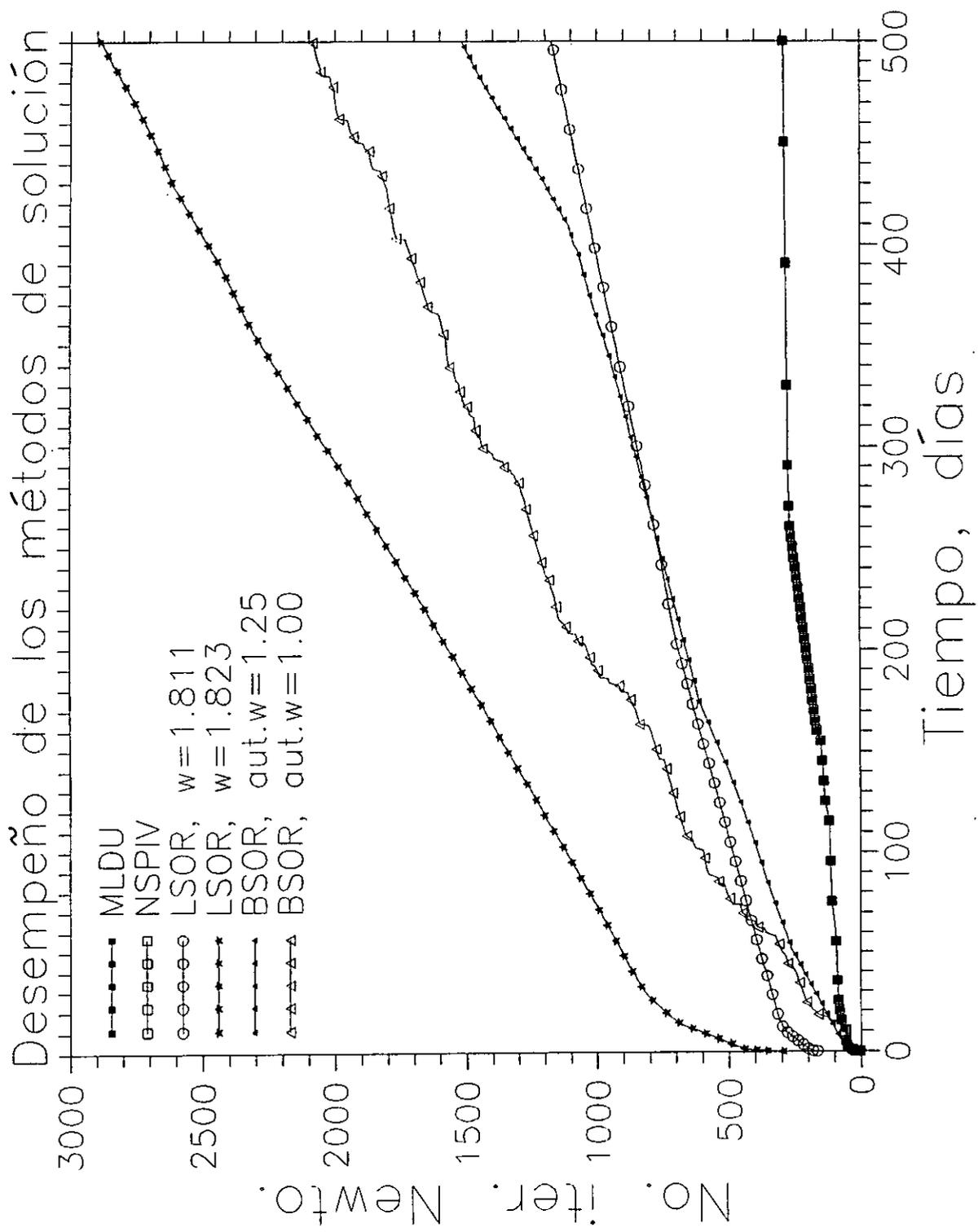


Fig. 4.78 Número de iteraciones newtonianas vs Tiempo

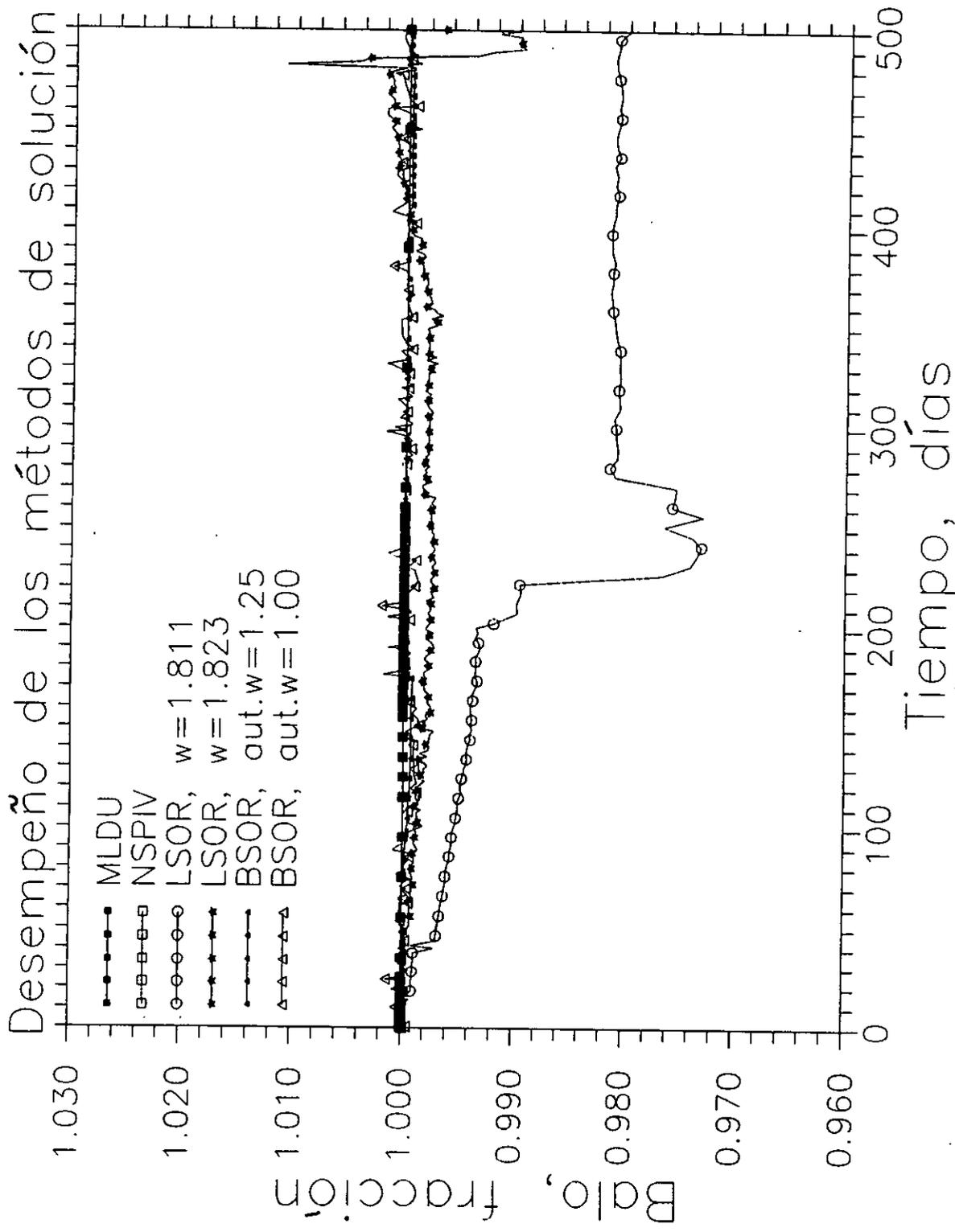


Fig. 4.79 Balance de materia del aceite vs Tiempo

del balance de materia del aceite contra el tiempo de simulación, respectivamente, obtenidos al resolver este segundo caso con los cuatro métodos de solución.

Como se observa en estas gráficas, las soluciones obtenidas con los métodos directos MLDU y NSPIV, dadas por los cuadrados pequeños llenos y cuadrados grandes huecos, respectivamente, son los mismos que los obtenidos para el caso bidimensional, debido a que solo se refinó en 4 nodos la dirección angular.

Con respecto a la primera solución generada con el método LSOR con  $\omega=1.811$ , dada por los círculos grandes huecos, el comportamiento de la presión de fondo fluyendo, tiene una diferencia máxima de  $0.55 \text{ kg/cm}^2$ , en la relación Gas-Aceite es de  $0.4 \text{ m}^3/\text{m}^3$ , no existe diferencia para el flujo fraccional del agua y en la presión promedio es de  $0.55 \text{ kg/cm}^2$ , al final del tiempo de simulación. Mientras que para las otras corridas de los métodos iterativos, dadas por los símbolos de estrellas pequeñas llenas (LSOR,  $\omega=1.823$ ), de triángulos pequeños llenos (BSOR, aut. $\omega=1.25$ ), y de triángulos grandes huecos (BSOR, aut. $\omega=1.0$ ), prácticamente se tiene el mismo comportamiento que los métodos directos MLDU y NSPIV.

El número de iteraciones newtonianas de los métodos directos, MLDU y NSPIV, es el mismo, ver Fig. 4.78. Mientras que para los métodos iterativos del LSOR es 4.03 y 9.93 veces más grande que el de los métodos directos, respectivamente, y para los métodos iterativos BSOR es 5.23 y 7.17 más grandes que el de los métodos directos, respectivamente.

El balance de materia del aceite se mantiene en uno para todos los métodos, ver Fig. 4.79, excepto para el primer caso del método iterativo LSOR en donde se tiene un error máximo del 3%.

De lo anterior se puede establecer que para este caso trifásico-tridimensional, el método directo MLDU sigue siendo más eficiente que los métodos iterativos LSOR y BSOR. Esto se debe a que el número de incógnitas que se manejan para este problema no es muy grande,  $NES = 3*9*4*15 = 1620$ , y a que se tuvo que ser más estricto con las tolerancias para la convergencia de presión y de saturación para los métodos iterativos LSOR y BSOR, para que el balance de materia se cumpla. Cabe mencionar que los requerimientos de memoria entre los métodos directos e iterativos son muy diferentes, siendo más pequeños para los métodos iterativos LSOR y BSOR. Esto se debe a que los métodos directos, requieren de arreglos de trabajo para almacenar la descomposición LDU, de tal manera que entre más grande sea el número de incógnitas a resolver, mayor será la memoria requerida y el tiempo de ejecución que realicen estos métodos. Por lo que llegará un momento en que se tornen imprácticos y es en esa situación el método iterativo, sobretodo el BSOR, se vuelve atractivo.

Nuevamente, el algoritmo para el cálculo óptimo del parámetro de sobrerelajación con un valor inicial de omega ( $\omega$ ) diferente de uno, muestra un mejor comportamiento que para los otros casos, sobretodo para el método BSOR. Sin embargo, se requiere de un mejor estudio o incluso desarrollar otros algoritmos que puedan ser más eficientes y de esta manera reducir los tiempos de cómputo realizados por estos métodos iterativos (LSOR y BSOR) y principalmente evitar realizar un análisis por ensaye y error de este parámetro, que puede en algunos casos llegar a ser frustrante.

**c) CASO 3: Problema heterogéneo-anisotrópico bidimensional (r-z).**

Los datos para este caso están presentados en las Tablas 4.1 a 4.8. Se considera el flujo trifásico- tridimensional: gas-aceite-agua, discretizando el área de drene del pozo en 9 celdas en la dirección radial y 15 celdas, capas, en la dirección vertical. También, se considera que el intervalo productor se encuentra disparado en las capas 7 y 8, produciendo a gasto variable como se describió al principio de este capítulo. Las condiciones iniciales de presión y saturación, así como los volúmenes originales de cada fase en el área de drene del pozo están dados en la Tabla 4.9. Estas condiciones satisfacen el equilibrio gravitacional y capilar que debe existir en el dominio de interés al tiempo cero de la simulación.

Nuevamente se tiene que realizar un análisis de sensibilidad previo del parámetro de sobrerelajación,  $\omega$ , para el método iterativo LSOR, y de las tolerancias de presión y de saturación empleadas como criterio de solución, antes de comparar su desempeño con los métodos directos. Esto obedece al requerimiento impuesto de satisfacer el balance de materia en cada una de las pruebas, y de asegurar que el comportamiento de presión y de saturación sea el correcto a lo largo del área de drene del pozo.

En esta sección, de acuerdo con la experiencia ganada en los casos 1 y 2, problema homogéneo-isotrópico, solamente se efectuará este análisis que mejor satisface estos requerimientos, es decir, para el siguiente caso:

c.1) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , para el método de Newton-Raphson y una tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-5}$  para el método LSOR.

Se toma la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas para el método LSOR igual a cero en cada iteración newtoniana,  $\delta X_{l,j,k}^{(v)} = 0$ , con las tolerancias en presión de  $1 \times 10^{-3}$  y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$  para el método de Newton, y disminuyéndolas para el método LSOR a  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> en presión y a  $1 \times 10^{-5}$  en saturación. Con ésto se pretende satisfacer el balance de materia y por ende el comportamiento de presión y saturación en la región drenada por el pozo, tratando de que el tiempo de proceso realizado con este método iterativo sea competitivo con respecto al realizado por un método directo.

Se realizaron 18 corridas: en las primeras 12 corridas se mantuvo un único valor constante de omega, durante todo el tiempo de simulación, en el rango de 1 a 1.85. Para las últimas 6 corridas, se empleó el algoritmo para el cálculo óptimo de  $\omega$ , descrito en la sección 4.2.4. En las corridas 13 y 14, se emplearon dos tolerancias, 0.01 y 0.001 y se inició con un valor de  $\omega=1$  para este algoritmo, permitiendo el cálculo de  $\omega$  solo en la primera iteración newtoniana, y manteniéndolo este valor calculado hasta alcanzar la convergencia del método iterativo LSOR.

Posteriormente, en las corridas 15 y 16 se emplearon estas mismas tolerancias y el valor inicial de  $\omega=1$  para este algoritmo, permitiendo ahora el cálculo del valor de  $\omega$  óptimo en cada iteración newtoniana. En las corridas 17 y 18 se empleó una tolerancia de 0.01 para el cálculo del valor óptimo del parámetro de sobrerelajación e

iniciando con un valor de  $\omega$  de 1.35 y de 1.50, respectivamente.

La Tabla 4.32 muestra el desempeño computacional de las soluciones obtenidas en estas 18 corridas del método LSOR bajo las condiciones antes descritas y para las tolerancias estipuladas.

Como puede observarse en esta tabla, desde el punto de vista computacional, la corrida 7,  $\omega=1.60$ , es la más eficiente, dado que realiza un tiempo de CPU de 10:57 minutos con 115 etapas de tiempo, 605 iteraciones newtonianas y 46123 iteraciones del método LSOR. La que mayores recursos de cómputo consume es la corrida 12,  $\omega=1.85$ , con un tiempo de CPU de 76:41 minutos, 846 etapas de tiempo, 3450 iteraciones newtonianas y 334557 iteraciones del método LSOR.

De las corridas que emplearon el algoritmo para el cálculo óptimo de  $\omega$ , solo una logró terminar la prueba y las demás corridas no lograron alcanzar el tiempo total de simulación estipulado, debido a que rebazaron el límite máximo de 1000 etapas de tiempo, que se definió para no saturar el disco duro de la estación de trabajo. Aún cuando se incrementara este límite, estas corridas dejan de tener interés práctico por consumir un mayor tiempo de CPU, como puede verse en la Tabla 4.32.

En las Figs. 4.80 a 4.83 se comparan las soluciones obtenidas con las corridas que lograron terminar la prueba, con la solución correcta. Se presentan los comportamientos de la relación Gas-Aceite, de la presión de fondo fluyendo, de la presión promedio del área de drene y del balance de materia del aceite contra el tiempo de simulación, respectivamente.

De acuerdo con estas gráficas, la corrida 7, que es la más rápida, dada por las estrellas huecas, y la corrida 12, que es la más lenta, dada por los cuadros grandes huecos, ambas, y en general todas,

TABLA 4.32 METODO LSOR,  $TOLP = 1 \times 10^{-3}$  Y  $TOLS = 1 \times 10^{-4}$   
 $TOLPI = 1 \times 10^4$  Y  $TOLSI = 1 \times 10^5$

	$\omega$	numero etapas	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu (minutos)
1	1.00	198	869	86013	19:46
2	1.10	198	873	83005	19:04
3	1.15	198	879	82937	19:03
4	1.25	198	890	79381	18:21
5	1.30	197	883	78236	18:04
6	1.50	129	650	53097	12:19
7	1.60	115	605	46123	10:47
8	1.625	117	606	47309	11:01
9	1.65	122	632	49653	11:32
10	1.70	186	878	73744	17:06
11	1.75	699	2893	222650	51:50
12	1.85	846	3450	334557	76:41
13	algoritmo de $\omega$ tl=.01	628 (356 d.)	————	————	90:56
14	algoritmo de $\omega$ tl=.001	676	2818	226846	53:24
15	algoritmo de $\omega$ tl=.01	723 (454 d.)	————	————	74:45
16	algoritmo de $\omega$ tl=.001	15 (10 d.)	————	————	2:38
17	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.25$ tl=0.01	664 (454 d.)	————	————	74:44
18	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.35$ tl=0.01	587 (454 d.)	————	————	74:44

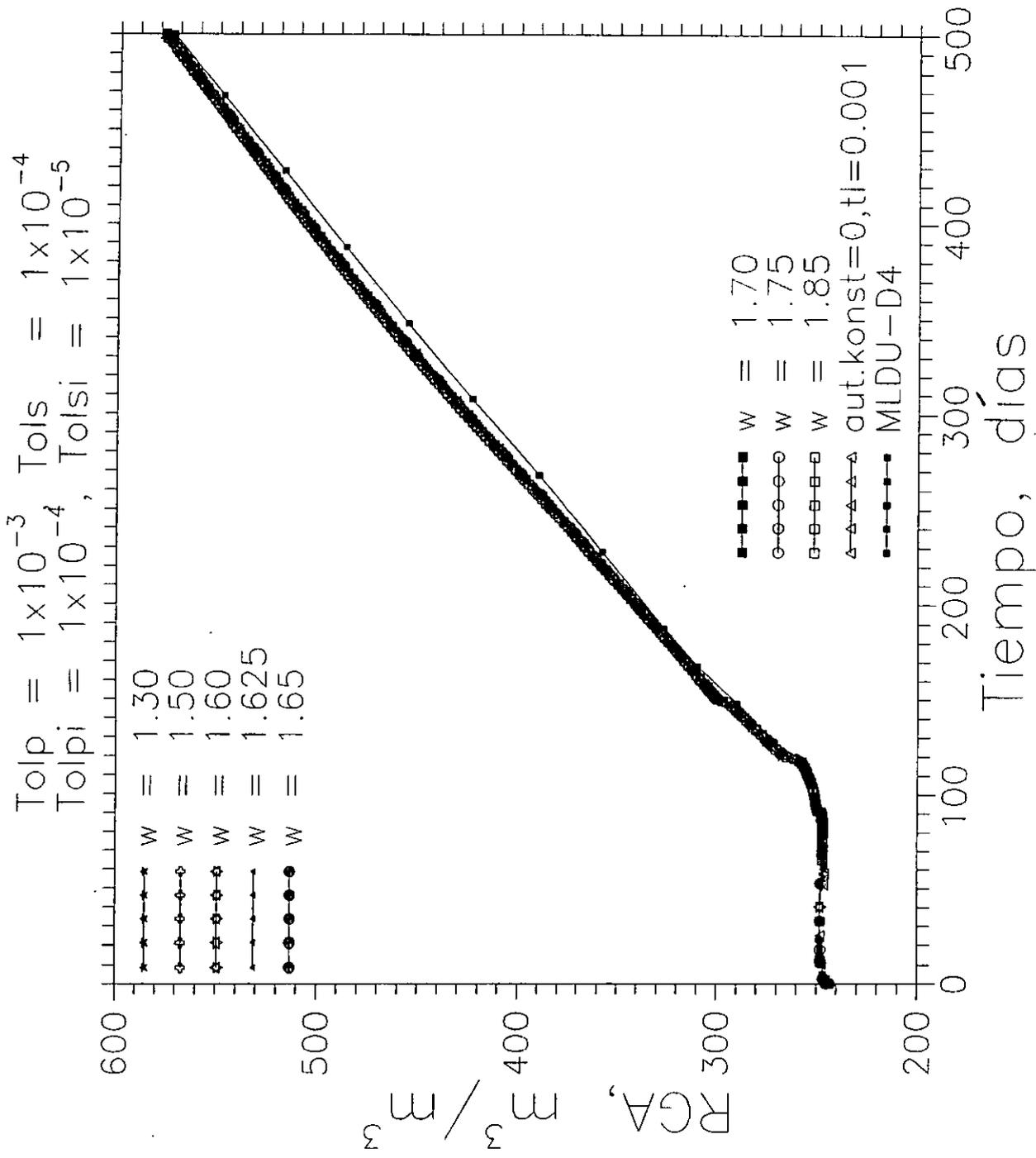


Fig. 4.80 Relación Gas-Aceite vs Tiempo

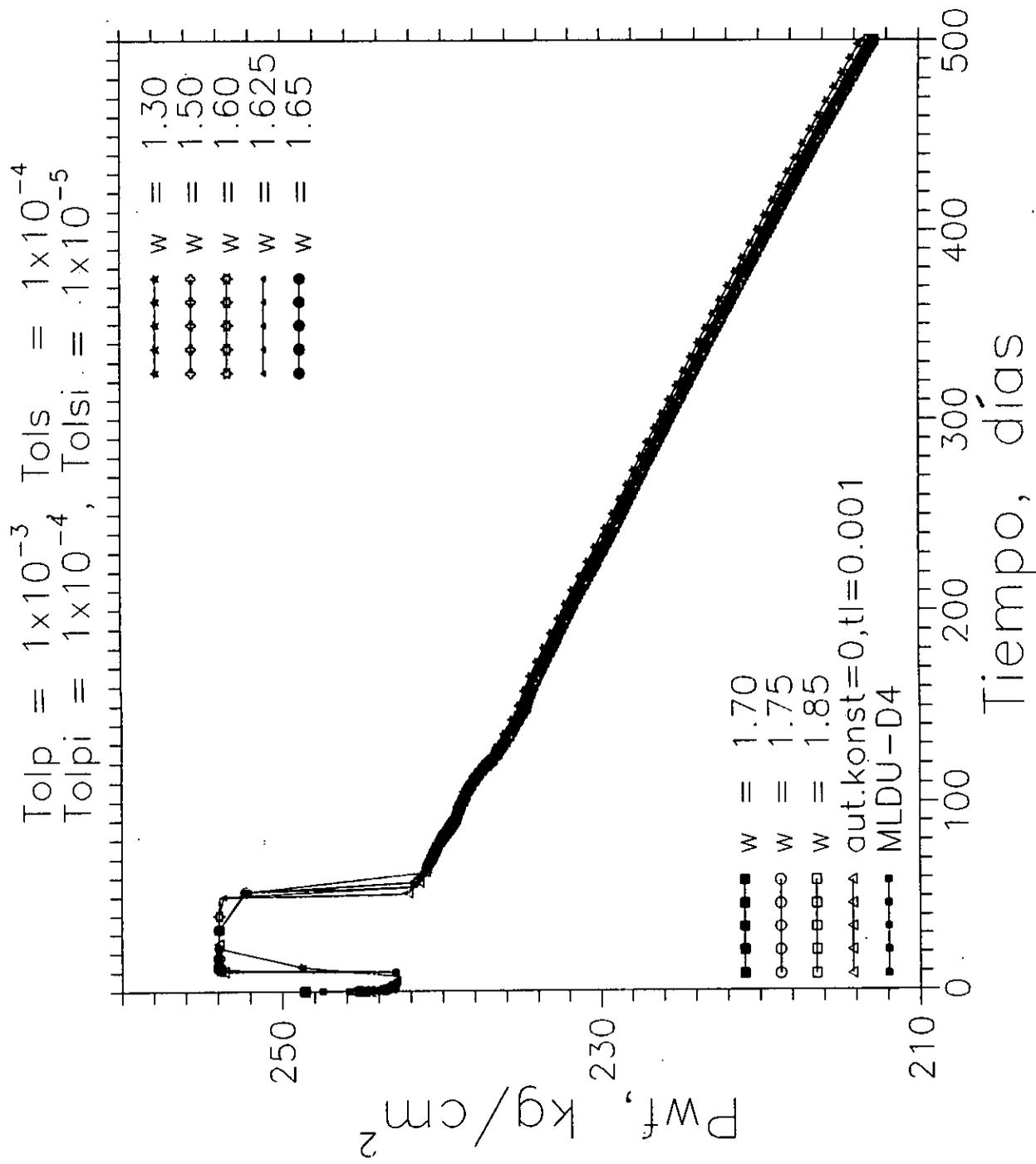


Fig. 4.81 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

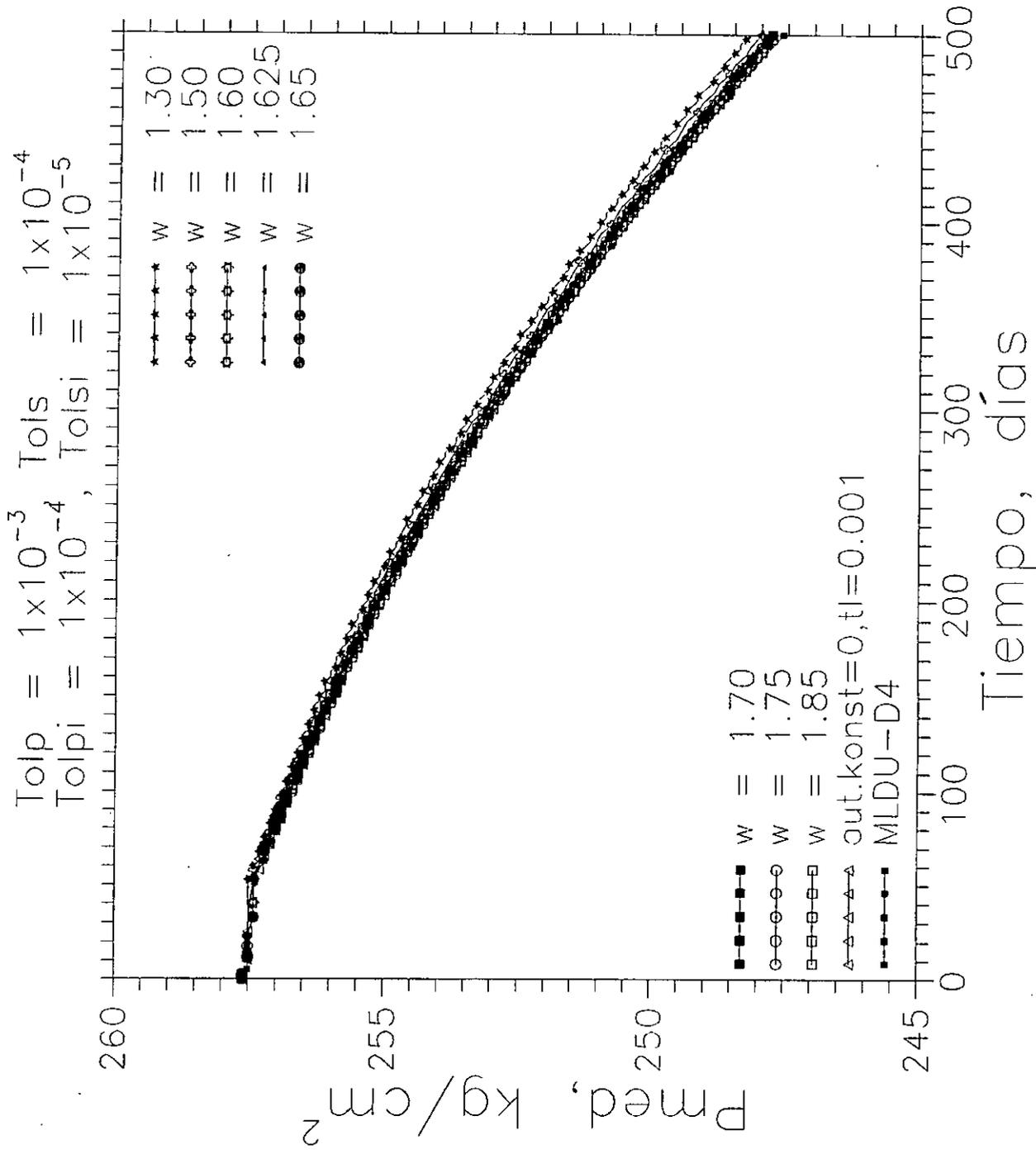


Fig. 4.82 Presión promedio vs Tiempo

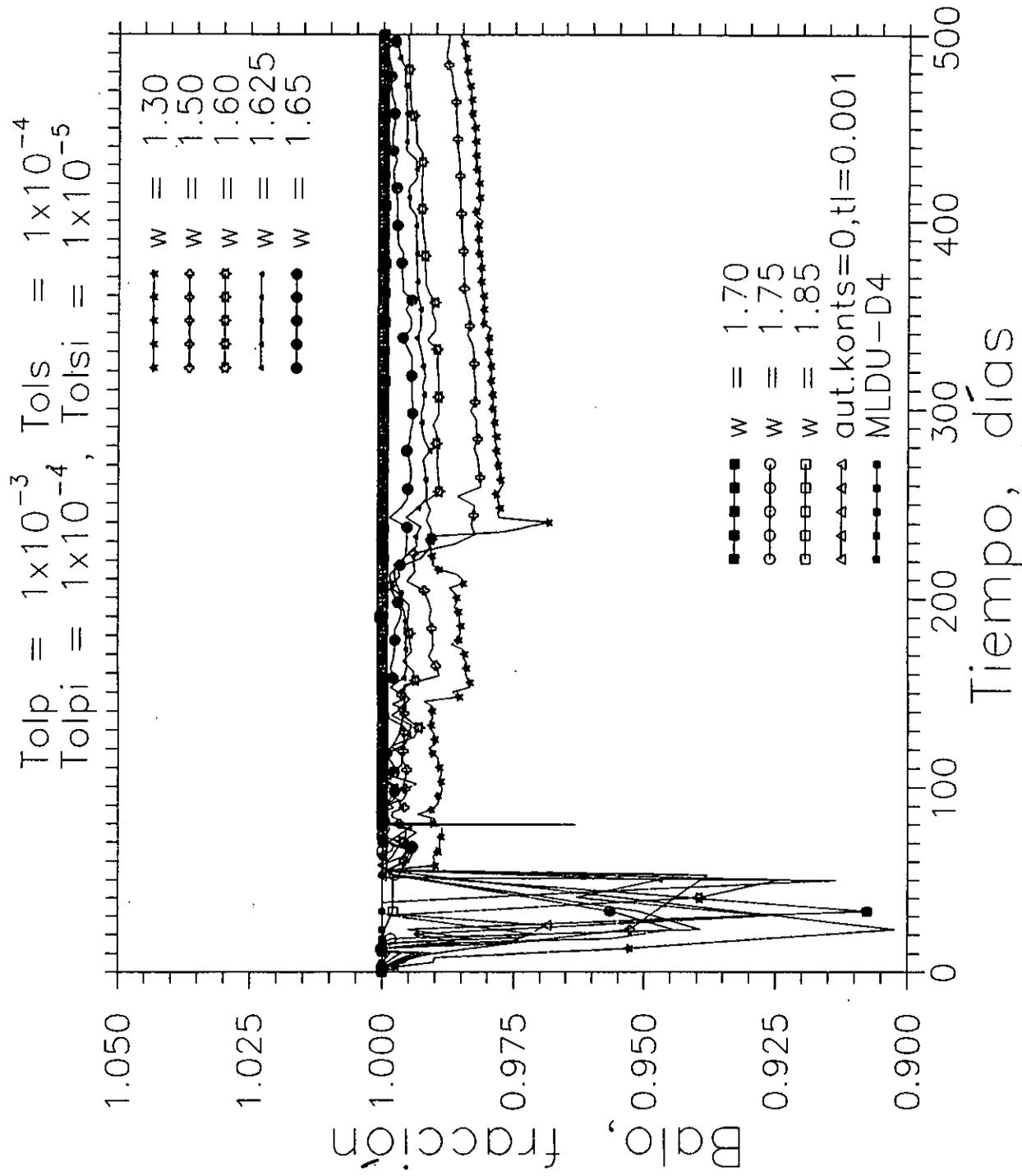


Fig. 4.83 Balance de materia del aceite vs Tiempo

tienen el mismo comportamiento, y prácticamente logran seguir la tendencia correcta, dada por la corrida de los cuadros pequeños llenos. Con respecto al balance de materia, la corrida 7 tiene al inicio de la simulación un error máximo del 7.75%, pero en términos generales es del orden del 1%, mientras que para la corrida 12, éste se mantiene en uno, como puede verse en la Fig. 4.83.

En estas figuras, también se presentan los comportamientos de las corridas 5 (estrellas llenas), 6 (cruces huecas), 8 (triángulos pequeños llenos), 9 (círculos grandes llenos), 10 (cuadrados grandes llenos), 11 (círculos grandes huecos), 12 (cuadrados grandes huecos) y 14 (triángulos grandes huecos), junto con el comportamiento correcto (cuadrados pequeños llenos).

Para este caso, el haber utilizado el algoritmo para el cálculo óptimo del parámetro de sobrerelajación no funcionó como en las otras pruebas, dado que las corridas que emplean este algoritmo realizan un mayor número de etapas de tiempo y consumen un mayor tiempo de proceso. La estabilidad de estas corridas es muy pobre y el simulador se ve obligado a reducir constantemente los intervalos de tiempo para avanzar de una etapa a otra.

Para el problema de flujo multifásico hacia un pozo, en un yacimiento heterogéneo y anisotrópico, el mantener un solo valor del parámetro de sobrerelajación para toda la corrida puede funcionar hasta cierto tiempo de simulación; sin embargo, cuando las condiciones de presión y saturación cambian fuertemente, este valor debe de cambiar para que sea óptimo y de esta manera la solución del sistema lineal de ecuaciones se realice en el menor número de iteraciones del LSOR y por consiguiente en un menor número de iteraciones newtonianas.

Se observa que el algoritmo propuesto en la referencia 15 no funciona adecuadamente para este problema heterogéneo y anisotrópico, es necesario modificarlo o desarrollar otro algoritmo más eficiente.

Una vez que se ha realizado este análisis de sensibilidad, se está en condiciones de efectuar la comparación del desempeño de los métodos directos (NSPIV y MLDU) y del método iterativo LSOR para este problema heterogéneo-anisotrópico bidimensional (r-z).

Los resultados del sistema de cómputo obtenidos al resolver este problema con los diferentes métodos se presentan en la Tabla 4.33. Se puede observar que el método directo de MLDU es el más eficiente, realizando un tiempo de ejecución de 46 segundos. El segundo más eficiente es el método directo de NSPIV con un tiempo de ejecución de 1:16 minutos (1.66 veces más grande que el anterior). En estos métodos directos, para el método de Newton-Raphson, se emplearon las tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$  para alcanzar la convergencia.

En esta misma tabla se presentan los dos mejores comportamientos del método iterativo LSOR, obtenidos del análisis de sensibilidad al parámetro de sobrerelajación, empleando una tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-5}$ , y para el método de Newton se emplean las mismas tolerancias que en los métodos directos. El primero de los casos corresponde a un valor constante de omega,  $\omega$ , de 1.60 a lo largo de todo el tiempo de simulación y en el cual se realiza un tiempo de ejecución de 10:47 minutos (14 veces más grande que el realizado por el método directo MLDU). En el segundo de los casos, se empleó un valor de omega de 1.85 con un un tiempo de CPU de 76:51 minutos (100 veces más grande

que el realizado por el método directo MLDU).

TABLA 4.33 RESULTADOS GENERALES: CASO HETER. Y ANISOTROP. BIDI.

METODO DE SOLUCION	TIEMPO DE EJECUCION	No. ITER. NEWTONIANAS	No. ITER. MET. SOL.	ETAPAS TIEMPO	TIEMPO DE SIMULACION
	(MIN.)				(DIAS)
NSPIV	1:16	333	————	43	500
MLDU	0:43	333	————	43	500
LSOR $w = 1.600_{-3}$ $T_p = 1 \times 10_{-3}$	10:47	605	46123	115	500
LSOR $w = 1.850_{-3}$ $T_p = 1 \times 10_{-3}$	76:41	3450	334557	846	500

En las Figs. 4.84 a 4.89 se presentan los comportamientos de la presión de fondo fluyendo, de la relación gas-aceite, del flujo fraccional de agua, de la presión promedio ponderada con respecto al volumen poroso, del número de iteraciones newtonianas y del balance de materia del aceite contra el tiempo de simulación, respectivamente, obtenidos al resolver este caso con los 3 métodos de solución.

Como puede observarse en estas figuras, los comportamientos de la presión de fondo fluyendo, de la relación Gas-Aceite, del flujo fraccional y de la presión promedio son muy similares para todos los métodos de solución, mostrados en la Tabla 4.33. Siendo la única diferencia el tiempo de ejecución que realiza cada uno de ellos. Cabe señalar que el método iterativo LSOR, para este caso heterogéneo está realizando un mayor tiempo de CPU que para el caso homogéneo, ver Tablas 4.22 y 4.33, debido al alto grado de heterogeneidad y anisotropía presentes en la formación y a las variaciones en el gastos de producción, como se propone en el proyecto comparativo de

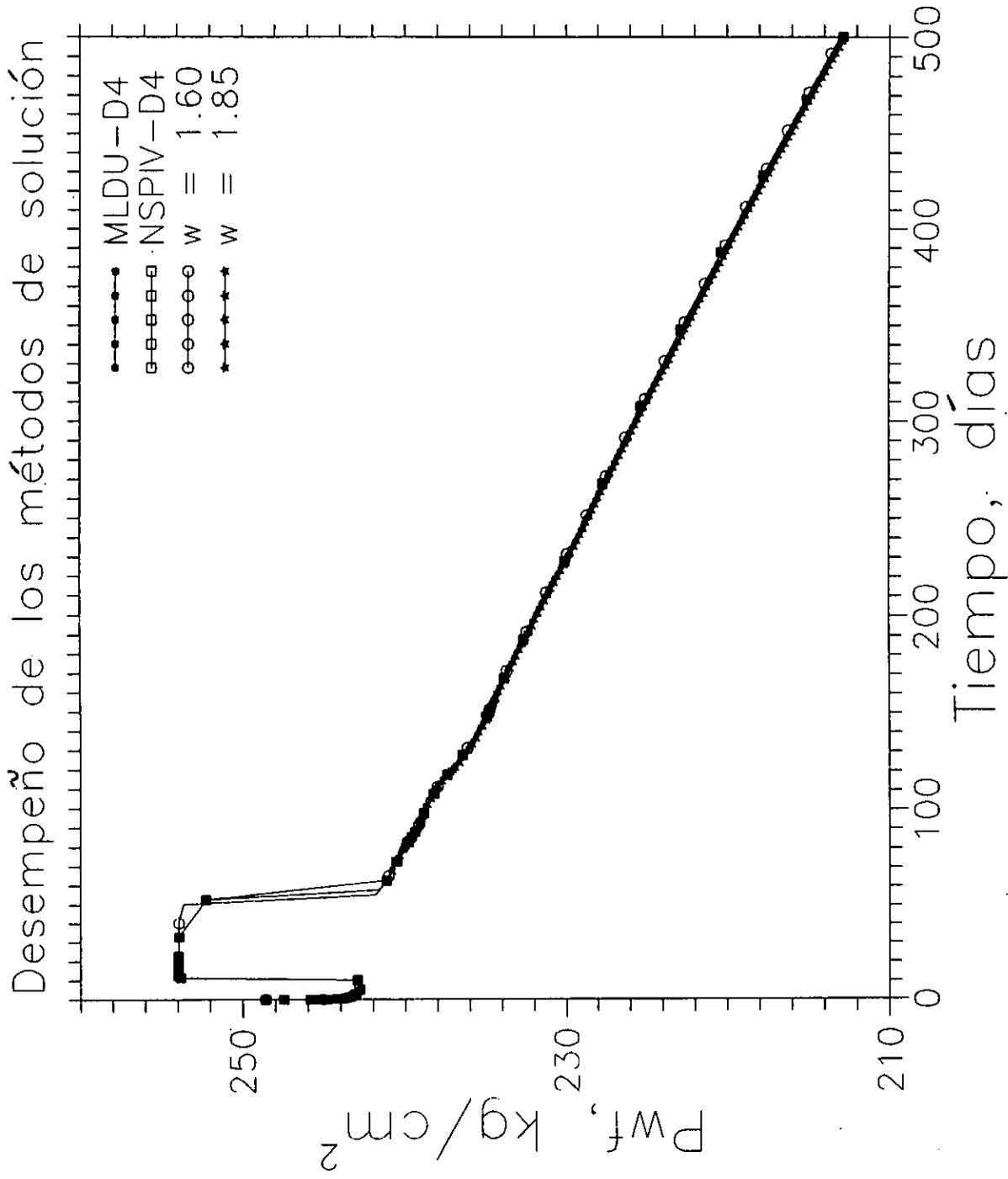


Fig. 4.84 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

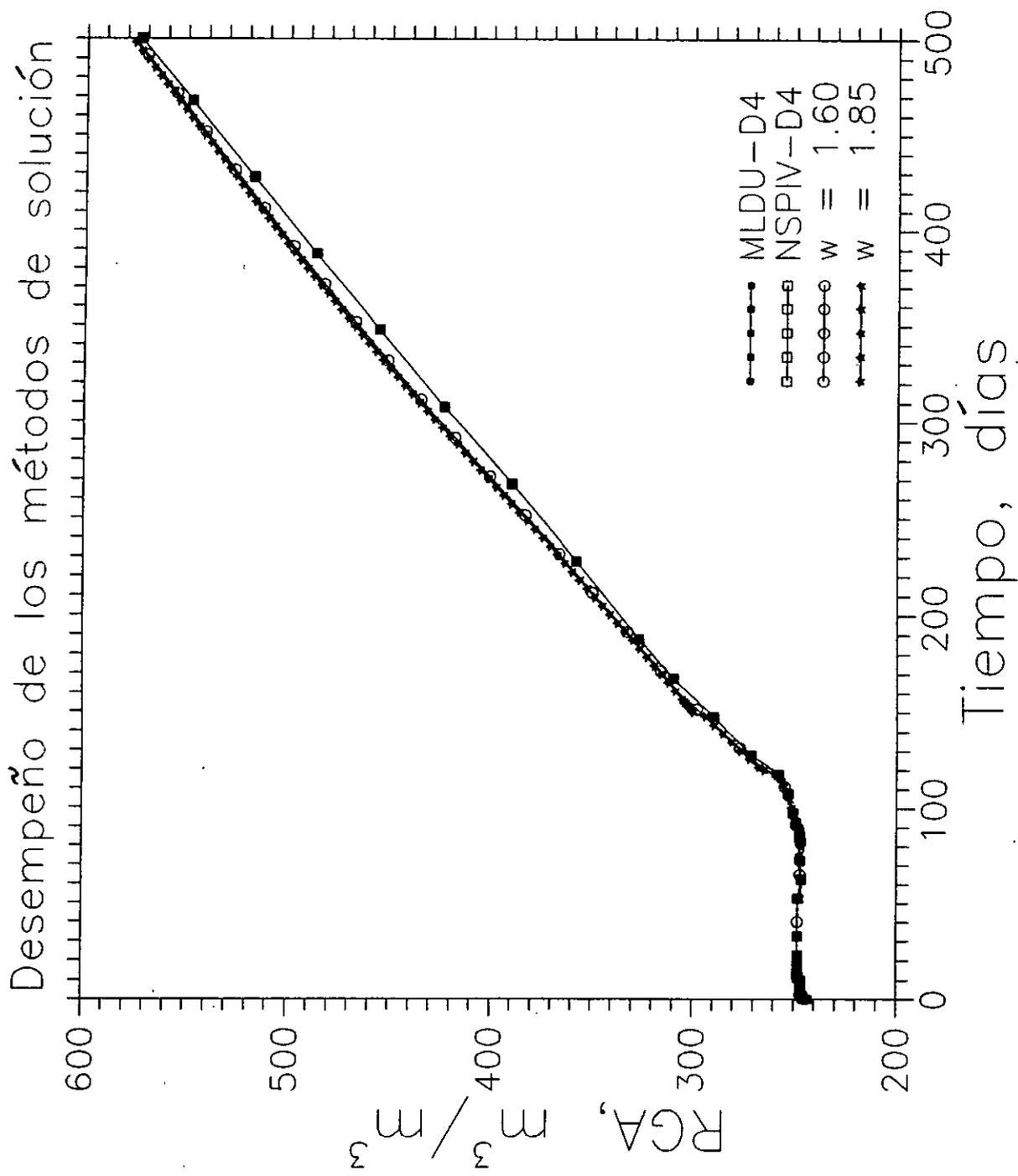


Fig. 4.85 Relación Gas-Aceite vs Tiempo

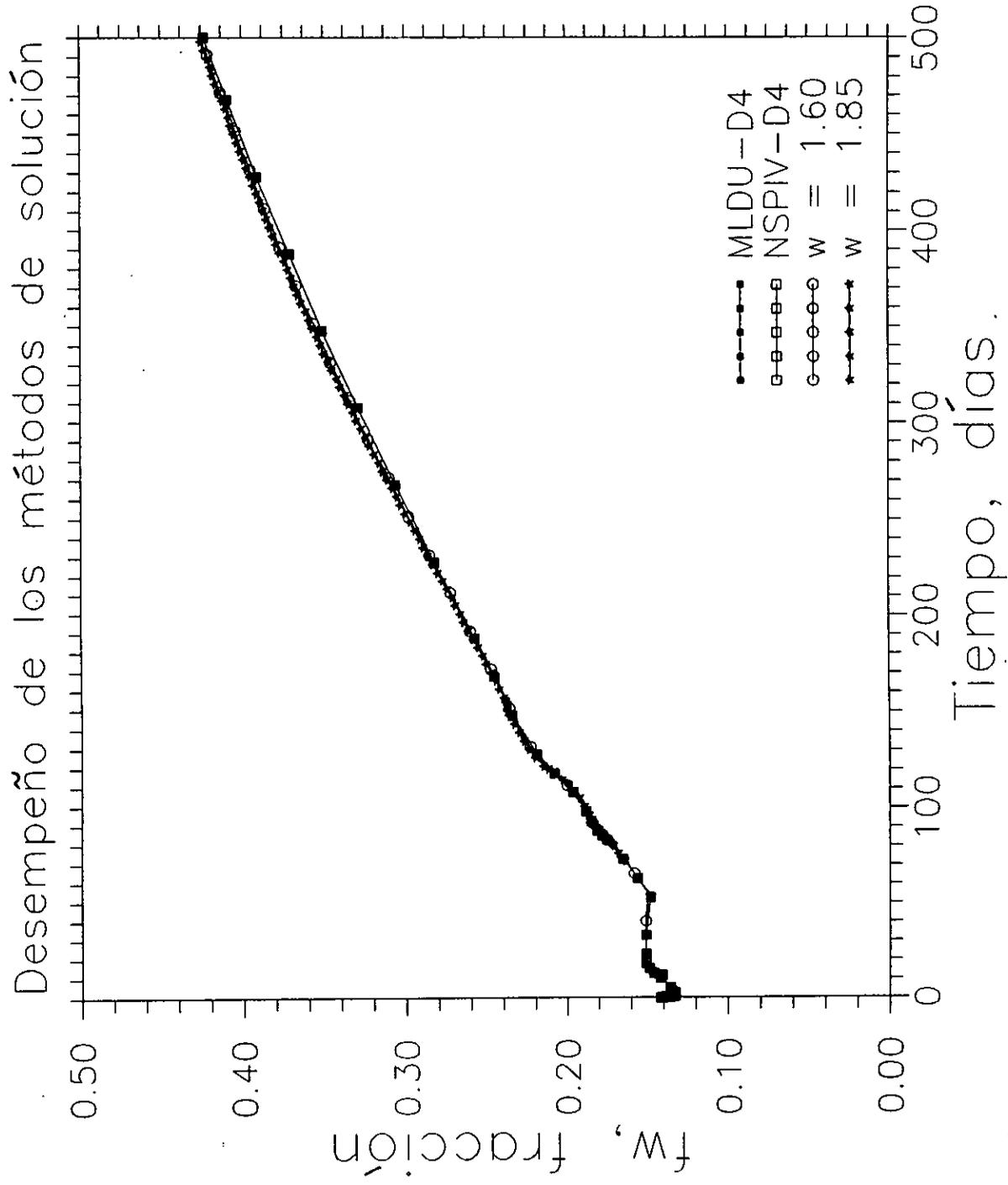


Fig. 4.86 Flujo fraccional de agua vs Tiempo

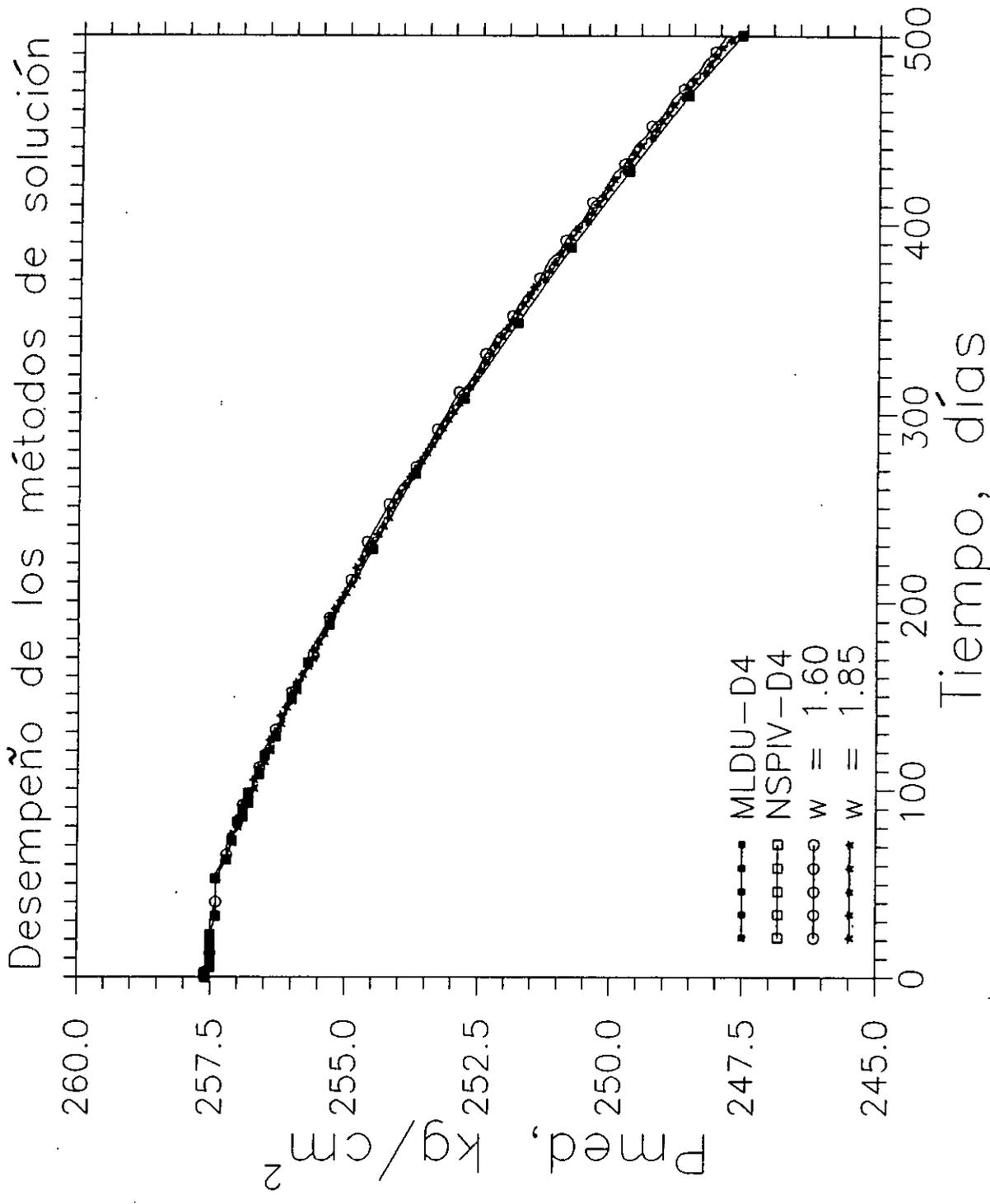


Fig. 4.87 Presión promedio vs Tiempo

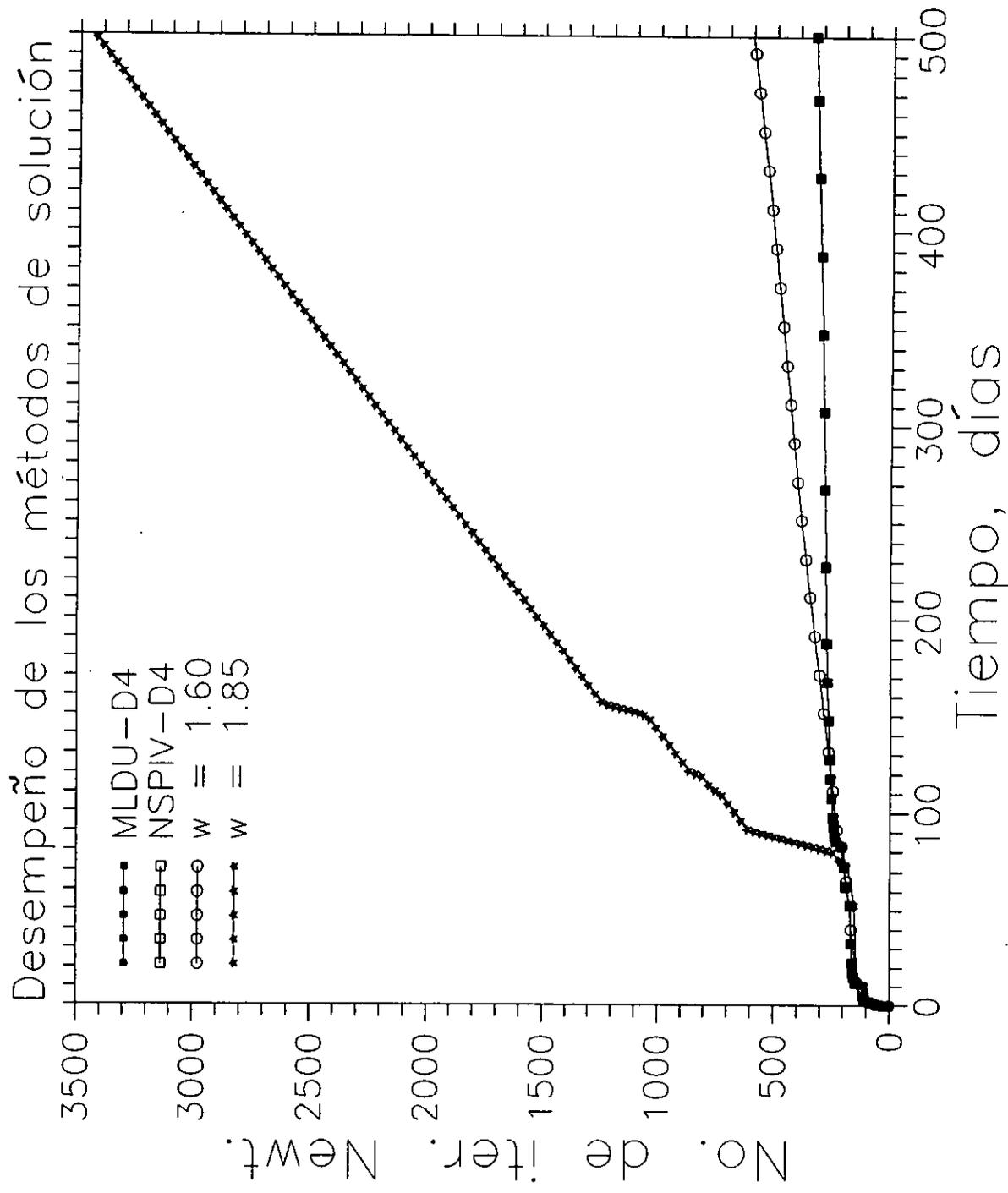


Fig. 4.88 Número de iteraciones newtonianas vs Tiempo

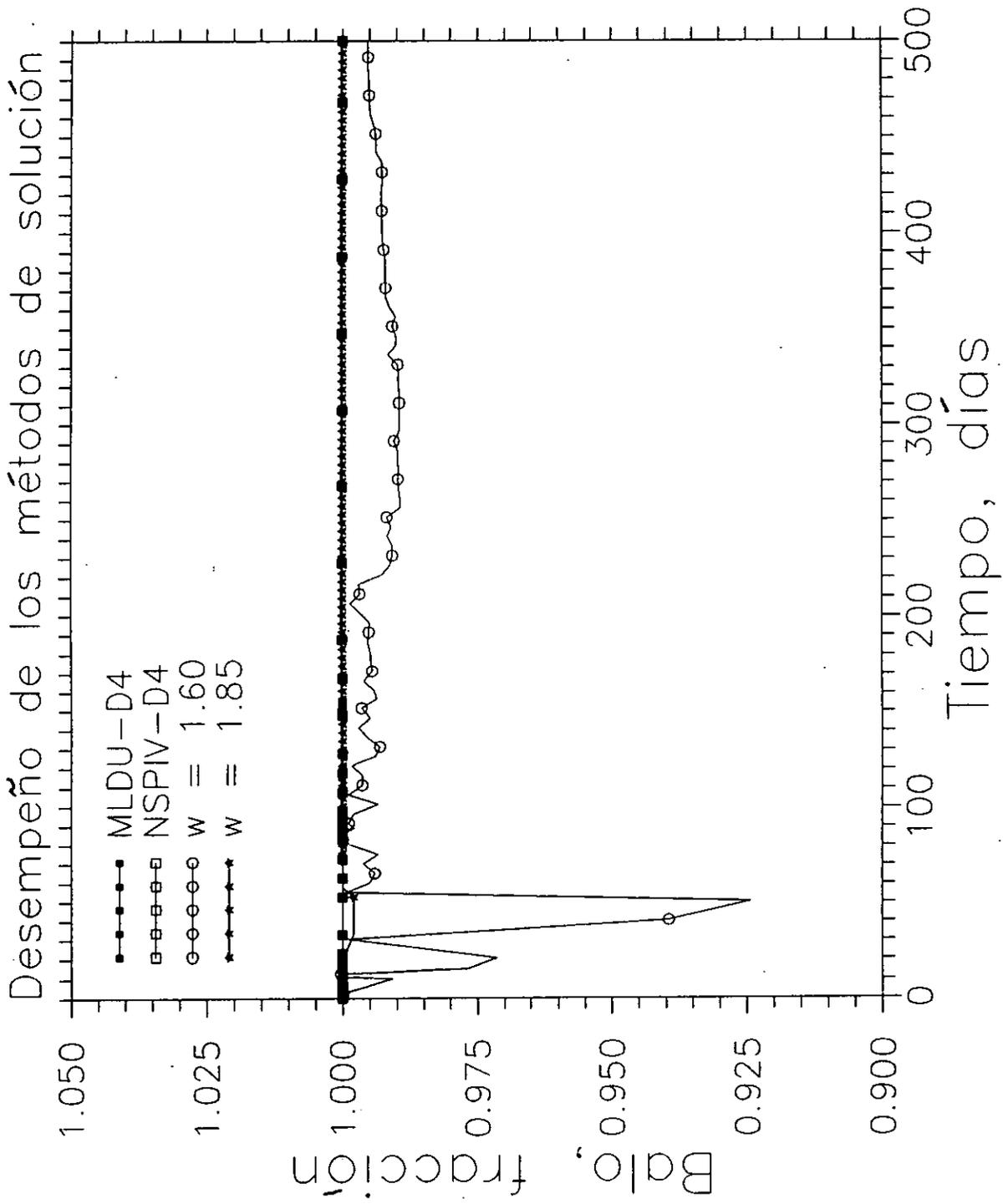


Fig. 4.89 Balance de materia del aceite vs Tiempo

la SPE.

Con respecto al número de iteraciones newtonianas y al balance de materia del método directo MLDU, el método LSOR con  $\omega=1.85$  realiza 10.4 veces más iteraciones y el balance se mantiene en uno y con  $\omega=1.60$  realiza 1.82 veces más iteraciones y se tiene un error máximo en el balance del 7.5%, pero en términos generales se mantiene en 1%. Lo anterior dá idea de la estabilidad de los diferentes métodos de solución al aplicarlos a un mismo problema. Por lo que se puede establecer que para problemas bidimensionales con un alto grado de heterogeneidad y anisotropía, los métodos directos siguen siendo más eficientes que los métodos iterativos de sobrerelajación. En este caso el método de MLDU es el más eficiente. Esto se debe, al igual que en el CASO 1, a que el número de incógnitas manejado es relativamente pequeño,  $NES = 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 15 = 405$ , y los requerimientos de memoria y de tiempo de proceso del sistema de cómputo no son muy grandes para un método directo, ver Tabla 4.33.

**d) CASO 4: Problema heterogéneo-anisotrópico tridimensional (r- $\theta$ -z).**

Los datos para este problema son los mismos que los empleados para el CASO 3; ahora, sin embargo, se considera el flujo trifásico-tridimensional: gas-aceite-água. El área de drene del pozo se discretiza en 9 celdas en la dirección radial, 4 celdas en la dirección tangencial y 15 celdas, capas, en la dirección vertical. Al igual que para el CASO 2, Se considera que las permeabilidades en el sentido radial y tangencial son iguales y el intervalo productor se encuentra disparado en todos los arcos y en las capas 7 y 8, produciendo a gasto variable, como se describió al inicio de este

capítulo. Las condiciones iniciales son las mismas que las obtenidas para el caso anterior, ver Tabla 4.9.

Nuevamente se tiene que realizar un análisis de sensibilidad previo del parámetro de sobrerelajación, para los métodos iterativos LSOR y BSOR y de las tolerancias de presión y de saturación empleadas como criterio de solución, antes de comparar su desempeño con los métodos directos MLDU y NSPIV. Esto obedece al requerimiento impuesto de satisfacer el balance de materia en cada una de las pruebas y de asegurar que el comportamiento de presión y de saturación, a lo largo del área de drene del pozo, sea el correcto.

Al igual que para el CASO 3, solo se presentará un análisis de sensibilidad del parámetro de sobrerelajación para cada uno de los métodos iterativos en estudio.

- d.1) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , para el método de Newton-Raphson y una tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-5}$  para el método LSOR.

En esta sub-sección, se toma la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas para el método LSOR igual a cero en cada iteración newtoniana,  $\delta X_{i,j,k}^{(v)} = 0$ , con unas tolerancias en presión de  $1 \times 10^{-3}$  y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$  para el método de Newton, y disminuyéndolas para el método LSOR a  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> en presión y a  $1 \times 10^{-5}$  en saturación. Con esto se pretende el satisfacer el balance de materia y por consecuencia el comportamiento de presión y de saturación en la región drenada por el pozo, con tiempos de CPU competitivos con respecto a los realizados por los métodos directos.

Se realizaron 18 corridas; en las primeras 12 corridas se mantuvo un único valor constante a lo largo de todo el tiempo de simulación, en el rango de 1 a 1.75. En las últimas 6 corridas se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo, descrito en la Sección 4.2.4. En las corridas 13 y 14, se calculó el valor de  $\omega$  solo al inicio de cada iteración newtoniana, manteniendo ese valor calculado hasta alcanzar la convergencia del método de LSOR. En este algoritmo se emplearon dos tolerancias de 0.01 y 0.001 y se inició con un valor de  $\omega=1$ .

En las corridas 15 y 16 se permitió el cálculo del valor de  $\omega$  óptimo en cada iteración newtoniana, empleando las mismas dos tolerancias de las corridas anteriores y el valor inicial de  $\omega=1$  para este algoritmo. En las corridas 17 y 18 se empleó una tolerancia de 0.01 para el cálculo del valor óptimo del parámetro de sobrerelajación y se inició con un valor de omega de 1.35 y de 1.50, respectivamente.

La Tabla 4.34 muestra el desempeño computacional de estas 18 corridas del método LSOR bajo las condiciones antes descritas y para las tolerancias estipuladas.

Como puede observarse en esta tabla, desde el punto de vista computacional, la corrida 6,  $\omega=1.50$ , es la más eficiente, dado que realiza un tiempo de CPU de 58:37 minutos con 114 etapas de tiempo, 608 iteraciones newtonianas y 52525 iteraciones del método LSOR y la que mayores recursos de cómputo consume es la corrida 12,  $\omega=1.75$ , con un tiempo de CPU de 220:55 minutos, 280 etapas de tiempo, 1305 iteraciones newtonianas y 203808 iteraciones del método LSOR.

Las corridas que emplearon el algoritmo para el cálculo óptimo de omega, ninguna logró alcanzar el tiempo total de

simulación, estipulado en 500 días, debido a que alcanzaron el límite máximo de 1000 etapas de tiempo permitido, que se definió para no saturar el disco duro de la estación de trabajo. Aún cuando se incrementara este límite estas corridas dejan de tener interés práctico por consumir un mayor tiempo de CPU.

En las Figs. 4.90 a 4.93 se comparan las soluciones obtenidas con las corridas que lograron terminar la prueba, con la solución correcta. Se presentan los comportamientos de la relación Gas-Aceite, de la presión de fondo fluyendo, de la presión promedio del área de drene y del balance de materia del aceite contra el tiempo de simulación, respectivamente.

De acuerdo con estas gráficas, la corrida 6, que es la más rápida, dada por las estrellas llenas, y la corrida 12, que es la más lenta, dada por los cuadros grandes huecos, ambas, y en general todas, tienen el mismo comportamiento, y prácticamente logran seguir el comportamiento correcto, dado por los cuadros pequeños llenos. Con respecto al balance de materia, la corrida 6 tiene al inicio de la simulación un error máximo del 7.5%, pero en términos generales es del orden del 0.5%, mientras que para la corrida 12, éste se mantiene en uno, como puede verse en la Fig. 4.93.

En estas figuras, también se presentan los comportamientos de las corridas 4 (estrellas llenas), 5 (cruces huecas), 7 (triángulos pequeños llenos), 8 (círculos grandes llenos), 9 (cuadrados grandes llenos), 10 (círculos grandes huecos), y 11 (cuadrados grandes huecos), junto con el comportamiento correcto (cuadrados pequeños llenos).

TABLA 4.34 METODO LSOR,  $TOLP = 1 \times 10^{-3}$  Y  $TOLS = 1 \times 10^{-4}$   
 $TOLPI = 1 \times 10^{-4}$  Y  $TOLSI = 1 \times 10^{-5}$

	$\omega$	numero etapas	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu (minutos)
1	1.00	220	1196	108645	121:17
2	1.10	202	1042	99786	110:40
3	1.15	201	1029	96959	107:38
4	1.25	201	1032	93306	103:50
5	1.30	201	1034	91471	101:56
6	1.50	114	608	52525	58:37
7	1.55	112	595	57205	63:25
8	1.60	113	606	62729	69:14
9	1.65	119	634	72080	79:11
10	1.675	112	613	76351	83:31
11	1.70	143	725	97351	106:08
12	1.75	280	1305	203808	220:55
13	algoritmo de $\omega$ tl=.01	164 (.05 día)	601	45389	54:55
14	algoritmo de $\omega$ tl=.001	197 (83.59 d)	943	80561	94:43
15	algoritmo de $\omega$ tl=.01	383 (63.85 d)	1450	150450	171:48
16	algoritmo de $\omega$ tl=.001	1000 (491 d.)	—	—	615:38
17	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.35$ tl=0.01	414 (57.11 d)	1595	176573	200:00
18	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.50$ tl=0.01	358 (58.78 d)	1479	162423	183:33

Para este caso, el haber utilizado el algoritmo para el cálculo óptimo del parámetro de sobrerelajación no funcionó como en las otras pruebas, dado que las corridas que lo emplearon realizaron

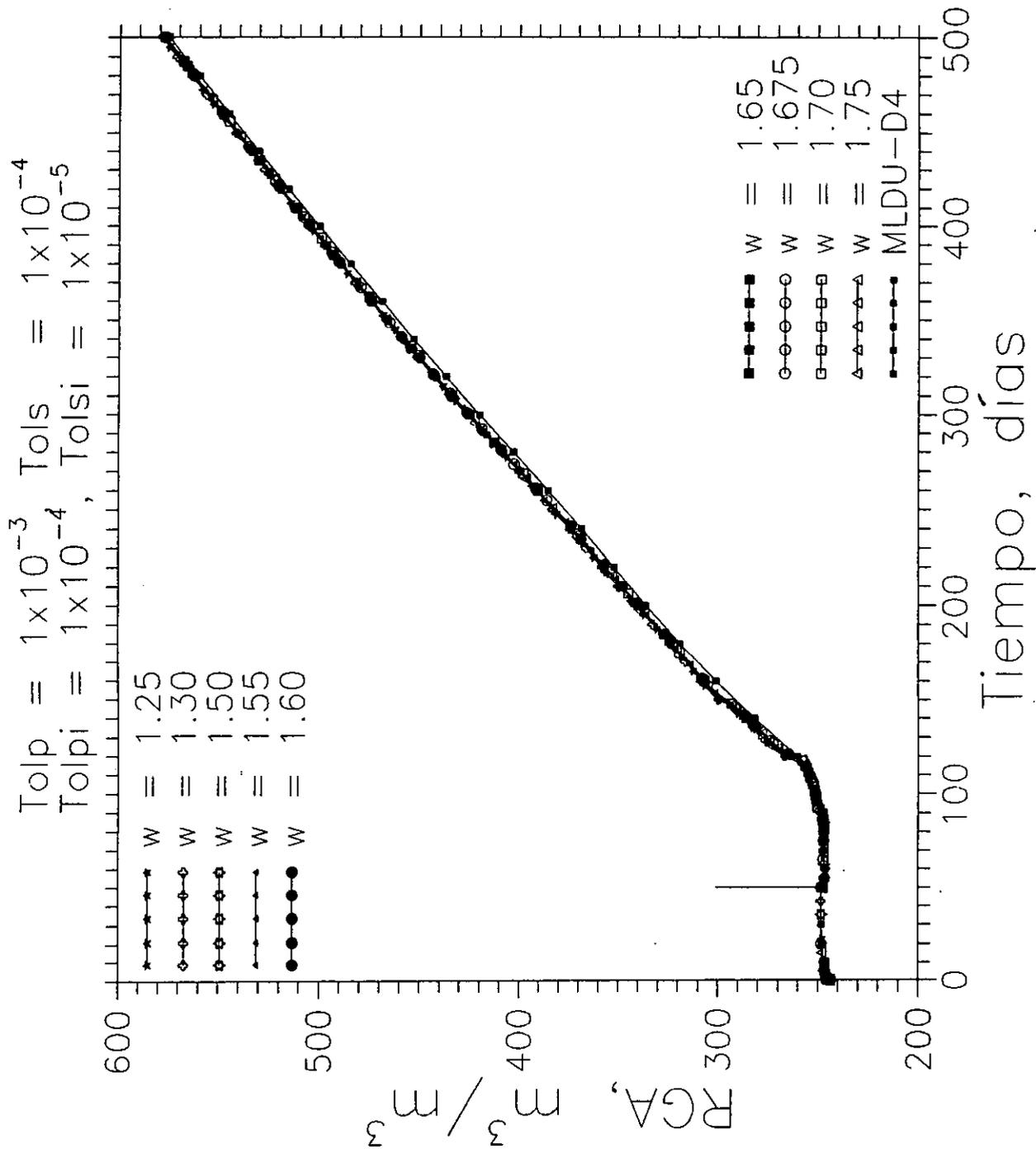


Fig. 4.90 Relación Gas-Aceite vs Tiempo

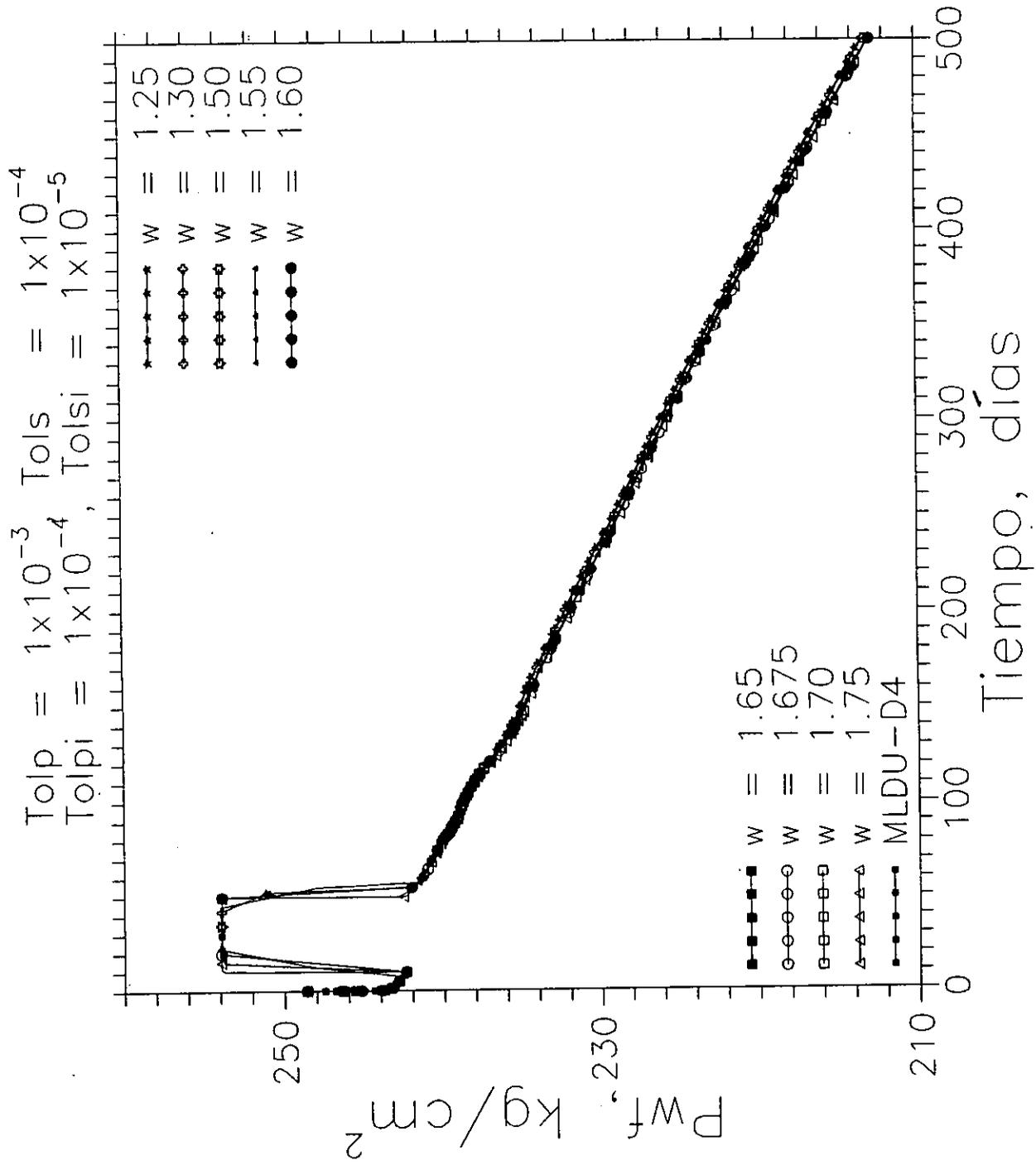


Fig. 4.91 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

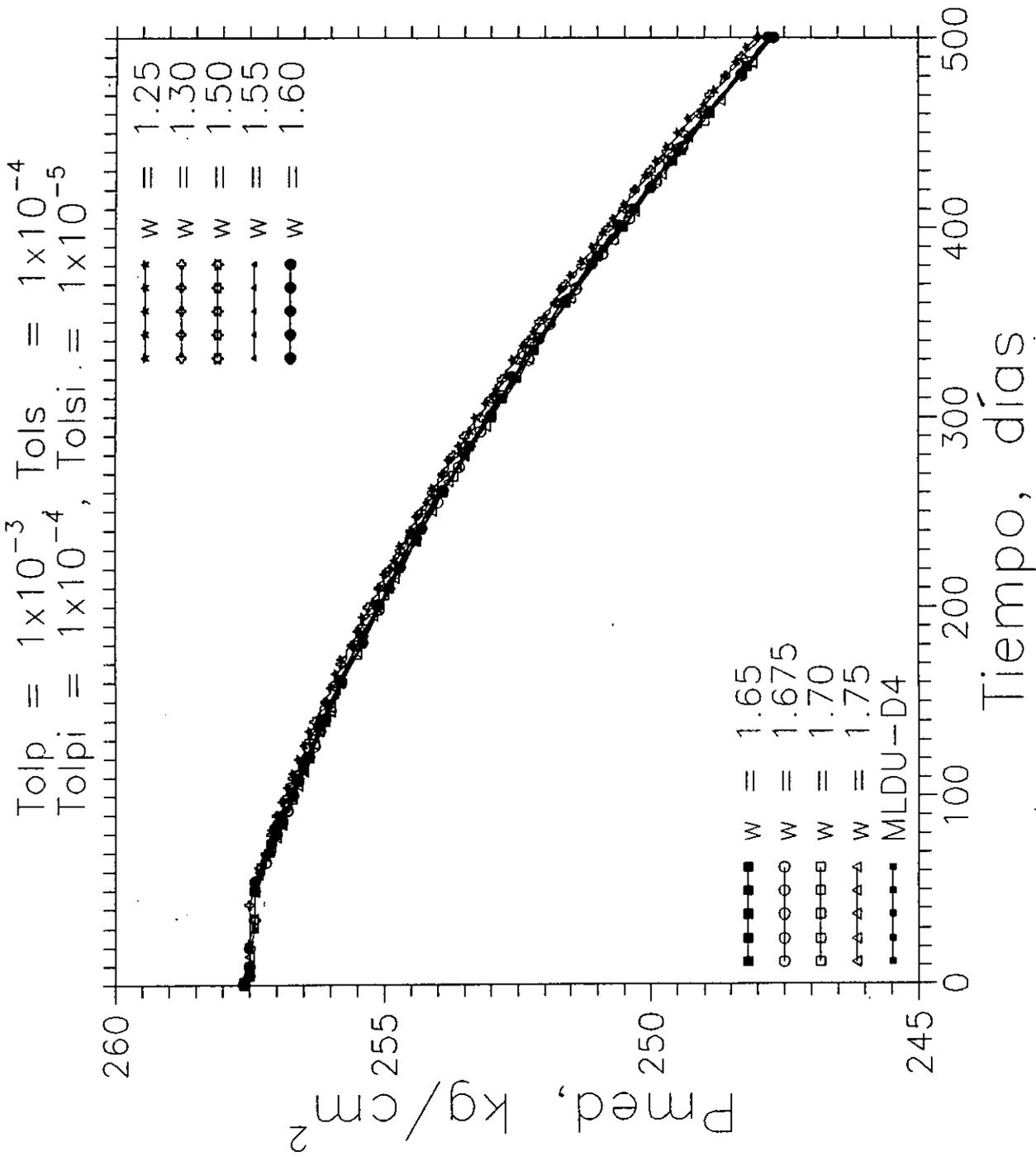


Fig. 4.92 Presión promedio vs Tiempo

$Toip = 1 \times 10^{-3}$ ,  $Tois = 1 \times 10^{-4}$   
 $Toip = 1 \times 10^{-4}$ ,  $Tois = 1 \times 10^{-5}$

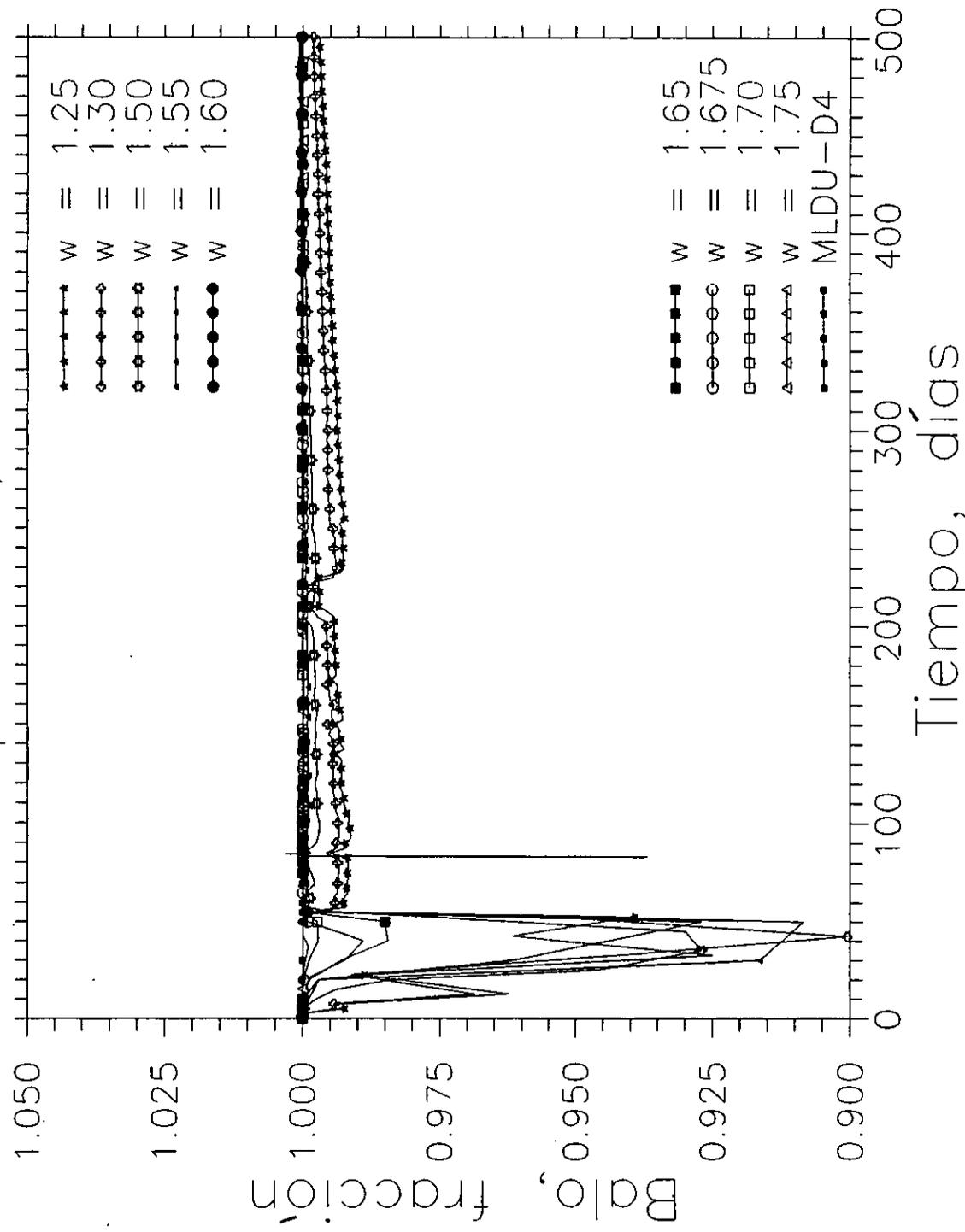


Fig. 4.93 Balance de materia del aceite vs Tiempo

un mayor número de etapas de tiempo y consumen un mayor tiempo de proceso, ver Tabla 4.34. La estabilidad de estas corridas es muy pobre y el simulador se ve obligado a reducir constantemente los intervalos de tiempo para avanzar de una etapa a otra.

Nuevamente, se observa que el algoritmo propuesto en la referencia 15 no funciona adecuadamente para este problema heterogéneo y anisotrópico, es necesario modificarlo o desarrollar otro algoritmo más eficiente.

- d.2) Tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-3}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-4}$ , para el método de Newton-Raphson y una tolerancia en presión de  $1 \times 10^{-4}$  kg/cm<sup>2</sup> y en saturación de  $1 \times 10^{-5}$  para el método BSOR.

En esta sub-sección, se toma la estimación inicial del cambio iterativo de las incógnitas para el método BSOR igual a cero en cada iteración newtoniana,  $\delta X_{i,j,k}^{(V)} = 0$ , con las mismas tolerancias en presión y en saturación para el método de Newton y disminuyéndolas para el método BSOR como en el caso anterior, d.1.

Se realizaron 18 corridas; en las primeras 12 corridas se mantuvo un único valor constante a lo largo de todo el tiempo de simulación, en el rango de 1 a 1.75. En las últimas 6 corridas se empleó el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo, descrito en la sección 4.2.4. En las corridas 13 y 14, se calculó el valor de  $\omega$  solo al inicio de cada iteración newtoniana, manteniendo ese valor calculado hasta alcanzar la convergencia del método de BSOR. En este algoritmo se emplearon dos tolerancias de 0.01 y 0.001 y se inició con un valor de  $\omega=1$ .

En las corridas 15 y 16 se permitió el cálculo del valor de

$\omega$  óptimo en cada iteración newtoniana, empleando las mismas dos tolerancias de las corridas anteriores y el valor inicial de  $\omega=1$  para este algoritmo. En las corridas 17 y 18 se empleó una tolerancia de 0.01 para el cálculo del valor óptimo del parámetro de sobrerelajación y se inició con un valor de omega de 1.35 y de 1.50, respectivamente.

La Tabla 4.35 muestra el desempeño computacional de estas 18 corridas del método BSOR bajo las condiciones antes descritas y para las tolerancias estipuladas.

Como puede observarse en esta tabla, desde el punto de vista computacional, la corrida 13, empleando el algoritmo de  $\omega$  e iniciando con  $\omega=1.0$ , es la más eficiente, dado que realiza un tiempo de CPU de 77:01 minutos con 161 etapas de tiempo, 924 iteraciones newtonianas y 66129 iteraciones del método BSOR y la que mayores recursos de cómputo consume es la corrida 4,  $\omega=1.25$ , con un tiempo de CPU de 210:43 minutos, 440 etapas de tiempo, 2289 iteraciones newtonianas y 184352 iteraciones del método BSOR.

En las Figs. 4.94 a 4.97 se presentan los comportamientos de la relación Gas-Aceite, de la presión de fondo fluyendo, de la presión promedio del área de drene y del balance de materia del aceite contra el tiempo de simulación, respectivamente.

De acuerdo con estas gráficas, todas las corridas concuerdan perfectamente con el comportamiento correcto, satisfaciendo el balance de materia, ver Fig. 4.97.

En estas figuras, también se presentan los comportamientos de las corridas 7 (estrellas llenas), 8 (cruces huecas), 9 (triángulos pequeños llenos), 10 (círculos grandes llenos), 14 (cuadrados grandes llenos), 15 (círculos grandes huecos), y 16

(cuadrados grandes huecos), junto con el comportamiento correcto (cuadrados pequeños llenos).

TABLA 4.35 METODO BSOR,  $TOLP = 1 \times 10^{-3}$  Y  $TOLS = 1 \times 10^{-4}$   
 $TOLPI = 1 \times 10^{-4}$  Y  $TOLSI = 1 \times 10^{-5}$

	$\omega$	numero etapas	numero de iter. newto	numero de iter. LSOR	tiempo de cpu (minutos)
1	1.00	184	1022	77093	88:42
2	1.10	232	1298	93450	107:55
3	1.15	230	1295	105500	120:02
4	1.25	440	2289	184352	210:43
5	1.35	284	1553	119079	136:35
6	1.50	330	1706	132189	151:28
7	1.55	182	1022	79215	90:58
8	1.60	176	1004	83266	94:44
9	1.65	186	1071	89589	101:37
10	1.675	167	961	92191	103:28
11	1.70	172	973	115885	128:24
12	1.75	180	1085	149239	163:56
13	algoritmo de $\omega$ tl=.01	161	924	66129	77:01
14	algoritmo de $\omega$ tl=.001	231	1282	75572	89:52
15	algoritmo de $\omega$ tl=.01	212	1216	87785	101:48
16	algoritmo de $\omega$ tl=.001	220	1209	79481	92:59
17	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.35$ tl=0.01	205	1167	76814	89:52
18	algoritmo de $\omega$ $\omega=1.50$ tl=0.01	200	1128	71703	84:18

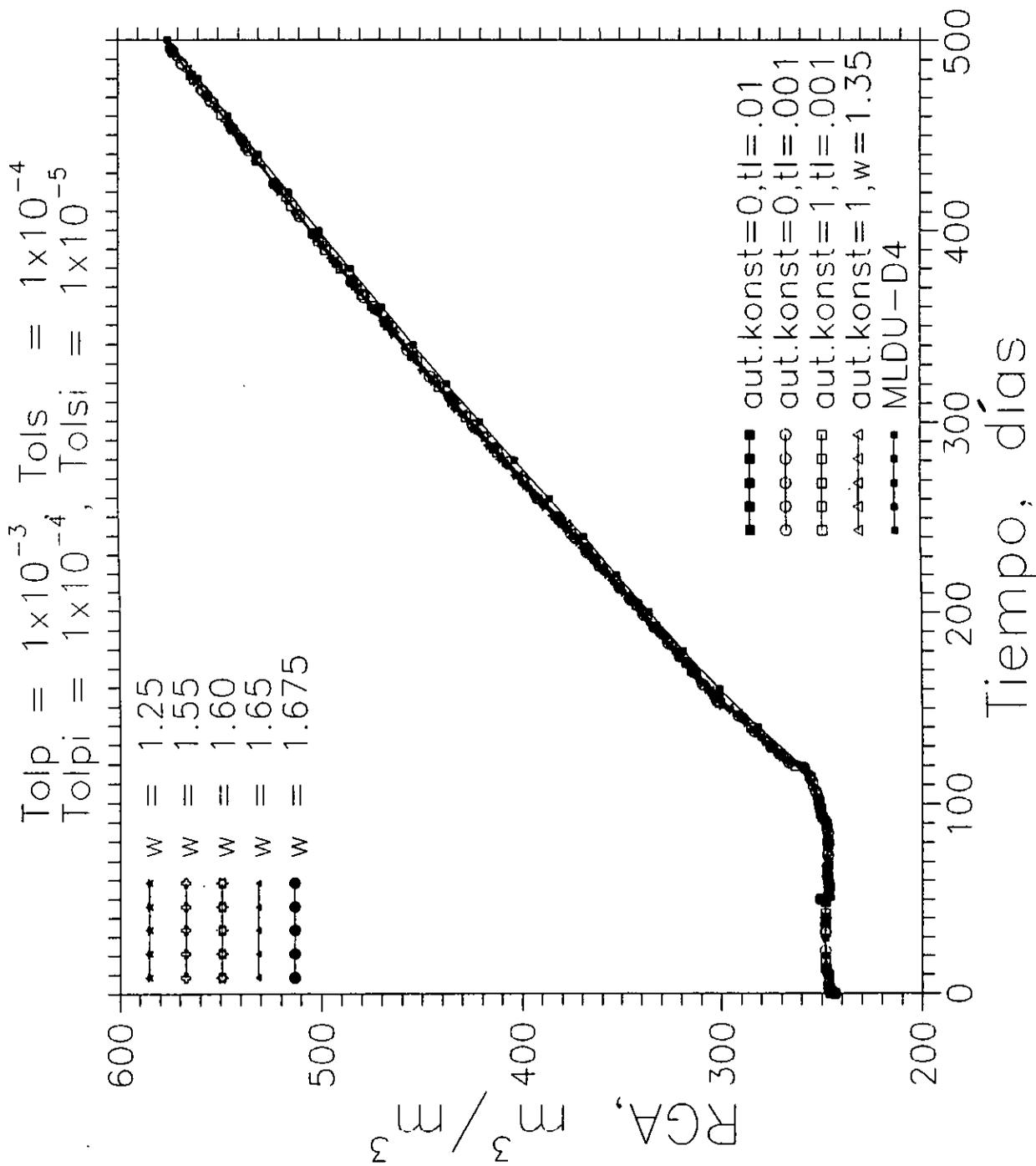
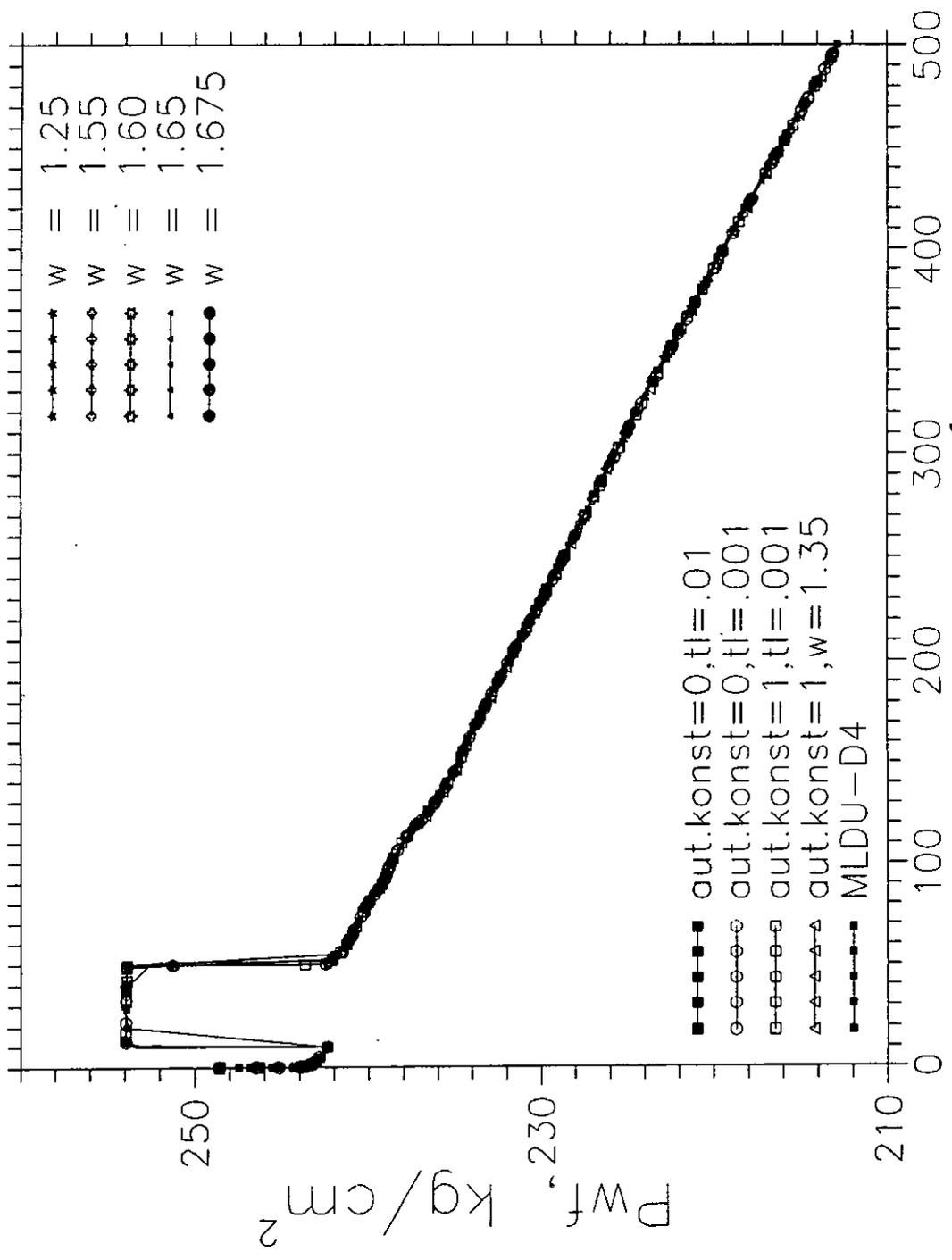


Fig. 4.94 Relación Gas-Aceite vs Tiempo

$T_{olp} = 1 \times 10^{-3}$ ,  $T_{ols} = 1 \times 10^{-4}$   
 $T_{olpi} = 1 \times 10^{-4}$ ,  $T_{olsi} = 1 \times 10^{-5}$



Tiempo, días

Fig. 4.95 Presión de fondo fluyendo vs tiempo

$Tolp = 1 \times 10^{-3}$ ,  $Tols = 1 \times 10^{-4}$   
 $Tolpi = 1 \times 10^{-4}$ ,  $Tolsi = 1 \times 10^{-5}$

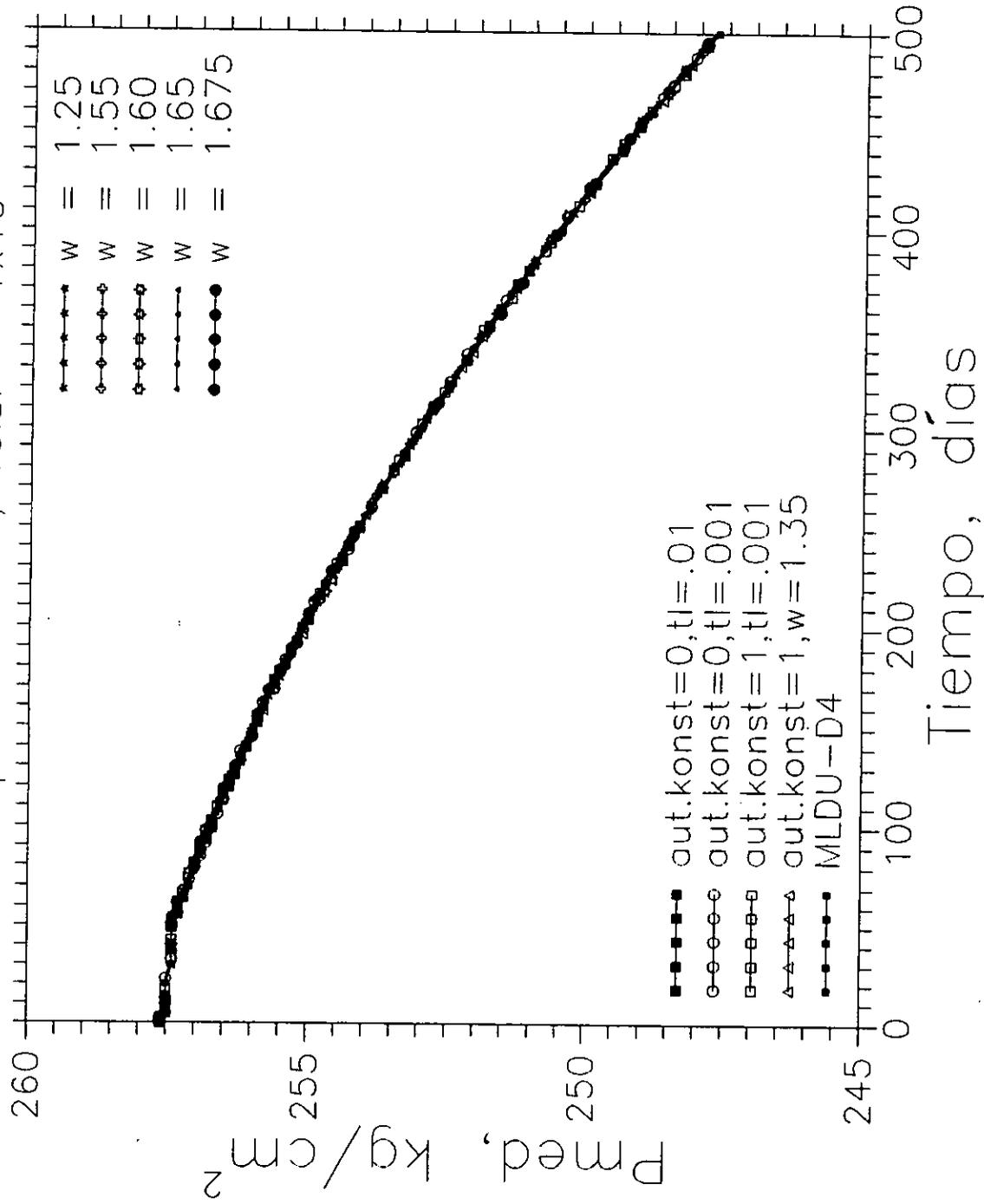


Fig. 4.96 Presión promedio vs tiempo

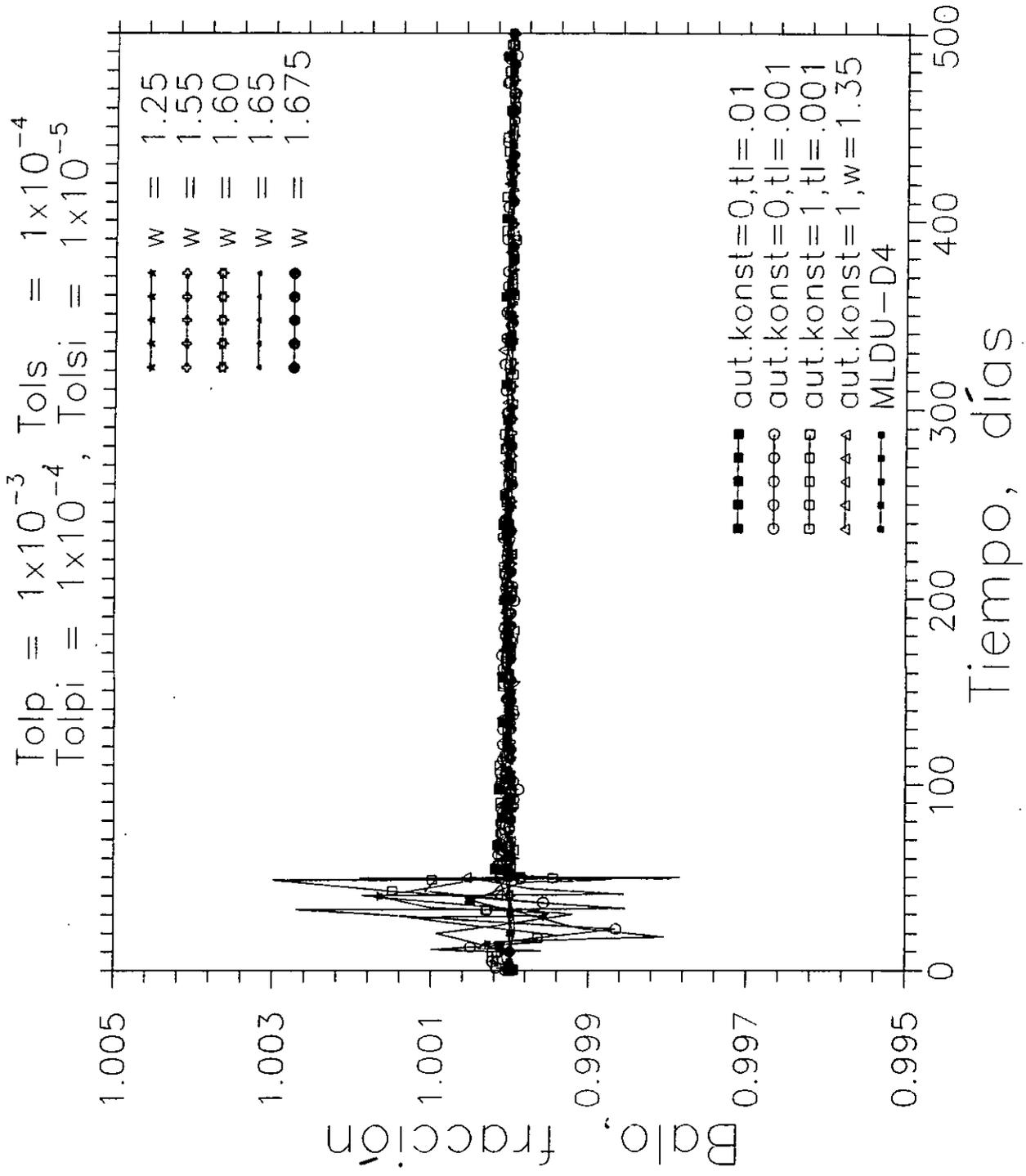


Fig. 4.97 Balance de materia del aceite vs Tiempo

Nuevamente, se verifica que debido a que el método BSOR resuelve un mayor número de incógnitas simultáneamente, tiene una mejor estabilidad que el método LSOR para un mismo problema.

Una vez que se ha realizado este análisis de sensibilidad, se está en condiciones de efectuar la comparación del desempeño de los métodos directos NSPIV y MLDU, y de los métodos iterativos LSOR y BOSR para este problema heterogéneo-anisotrópico tridimensional (r- $\theta$ -z).

Los resultados obtenidos con estos métodos se presentan en la Tabla 4.36. Se puede observar que el método directo MLDU sigue siendo el más eficiente, realizando un tiempo de ejecución de 20:13 minutos. El segundo y tercero más eficientes son los métodos iterativos LSOR con un valor de  $\omega$  fijo de 1.50 y 1.55, realizando un tiempo de proceso de 58:37 minutos y de 63:25 minutos, respectivamente. El cuarto más eficiente es el método directo NSPIV con un tiempo de ejecución de 66:04 minutos. Por último están los

TABLA 4.36 RESULTADOS GENERALES: CASO HETER. Y ANISOTROP. TRIDI.

METODO DE SOLUCION	TIEMPO DE EJECUCION	No. ITER. NEWTONIANAS	No. ITER. MET. SOL.	ETAPAS TIEMPO	TIEMPO DE SIMULACION
	(MIN.)				(DIAS)
NSPIV	66:04	326	————	47	500
MLDU	20:13	323	————	47	500
LSOR $\omega=1.50$ $T_p=1 \times 10^{-3}$	58:37	608	52525	114	500
LSOR $\omega=1.55$ $T_p=1 \times 10^{-3}$	63:25	595	57205	112	500
BSOR algoritmo de $\omega, \omega=1.0$	77:01	924	66129	161	500
BSOR algoritmo de $\omega, \omega=1.5$	84:18	1128	71703	200	500

métodos iterativos BSOR, empleando el algoritmo para el cálculo de  $\omega$  óptimo y en los cuales se realizó un tiempo de proceso de 77:01 minutos y de 84:18 minutos, respectivamente. En esta tabla se presentan los dos mejores comportamientos de los métodos iterativos LSOR y BSOR, obtenidos del análisis de sensibilidad del parámetro de sobrerelajación óptimo y de las tolerancias para la convergencia en presión y saturación de las sub-secciones d.1 y d.2, respectivamente.

En las Figs. 4.98 a 4.103 se presentan los comportamientos de la presión de fondo fluyendo, de la relación gas-aceite, del flujo fraccional del agua, de la presión promedio ponderada con respecto al volumen poroso, del número de iteraciones newtonianas y del balance de materia del aceite, contra el tiempo de simulación, obtenidos al resolver este caso con los cuatro métodos de solución. Se observa en estas figuras, que las soluciones obtenidas con los métodos; directos MLDU (cuadros pequeños llenos) y NSPIV (cuadros grandes huecos) e iterativos LSOR (círculos grandes huecos) y BSOR (triángulos pequeños llenos) son similares a las obtenidas para el caso anterior bidimensional, debido a que se están manejando los mismos datos de entrada y únicamente se incrementó el número de celdas en la dirección angular.

Teóricamente, el método BSOR tiene una mayor estabilidad que el método LSOR, dado que resuelve un mayor número de incógnitas simultáneamente. Lo anterior no se refleja en el tiempo de proceso ya que, para este problema, el método LSOR es más rápido que el método BSOR; sin embargo, esta estabilidad si se refleja en el balance de materia de ambos métodos, manteniéndose en uno para el BSOR y para el LSOR, se tiene un error máximo del 7.5% al inicio de la simulación y después prácticamente se mantiene en uno, ver Fig. 4.103.

Desempeño de los métodos de solución

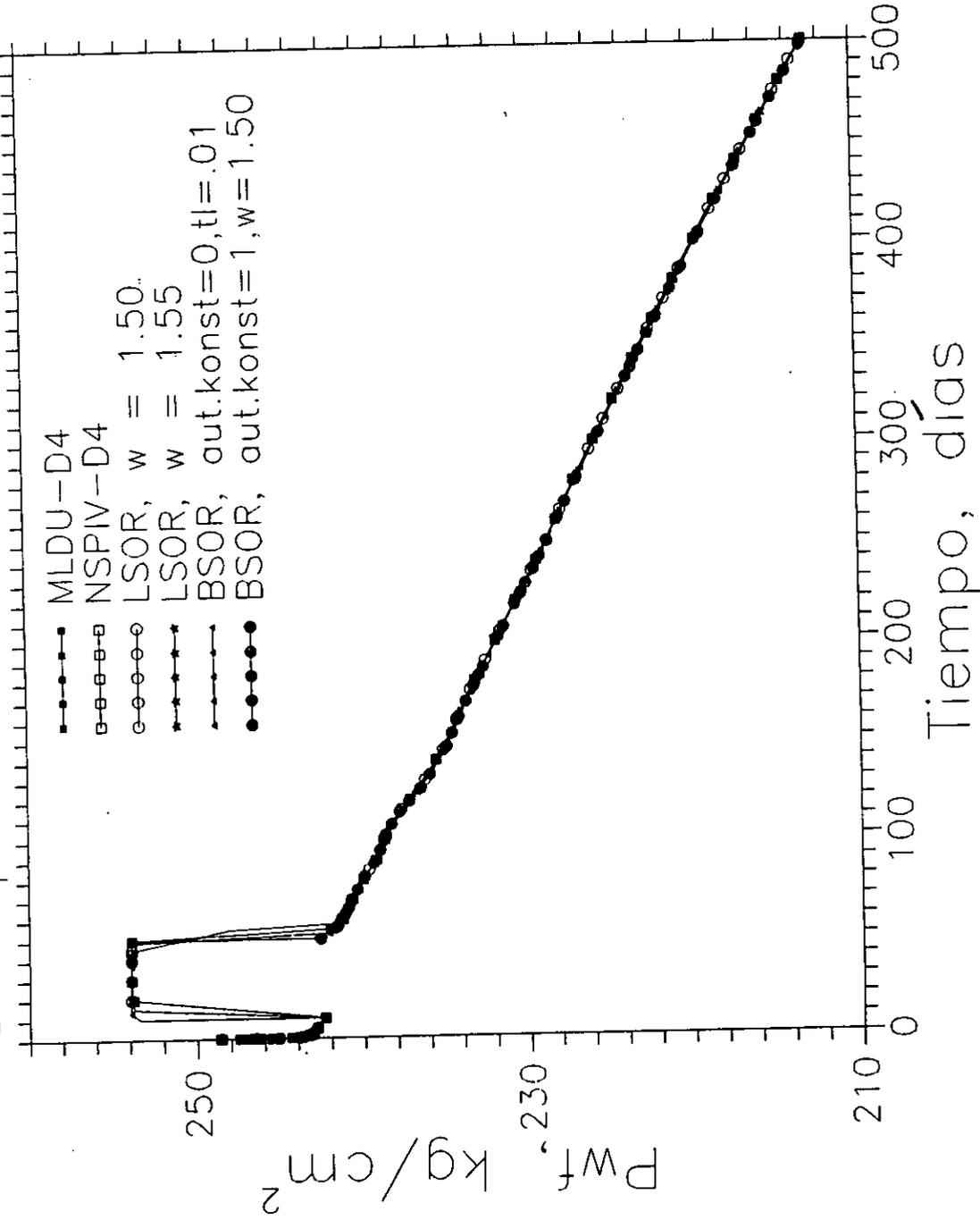


Fig. 4.98 Presión de fondo fluyendo vs Tiempo

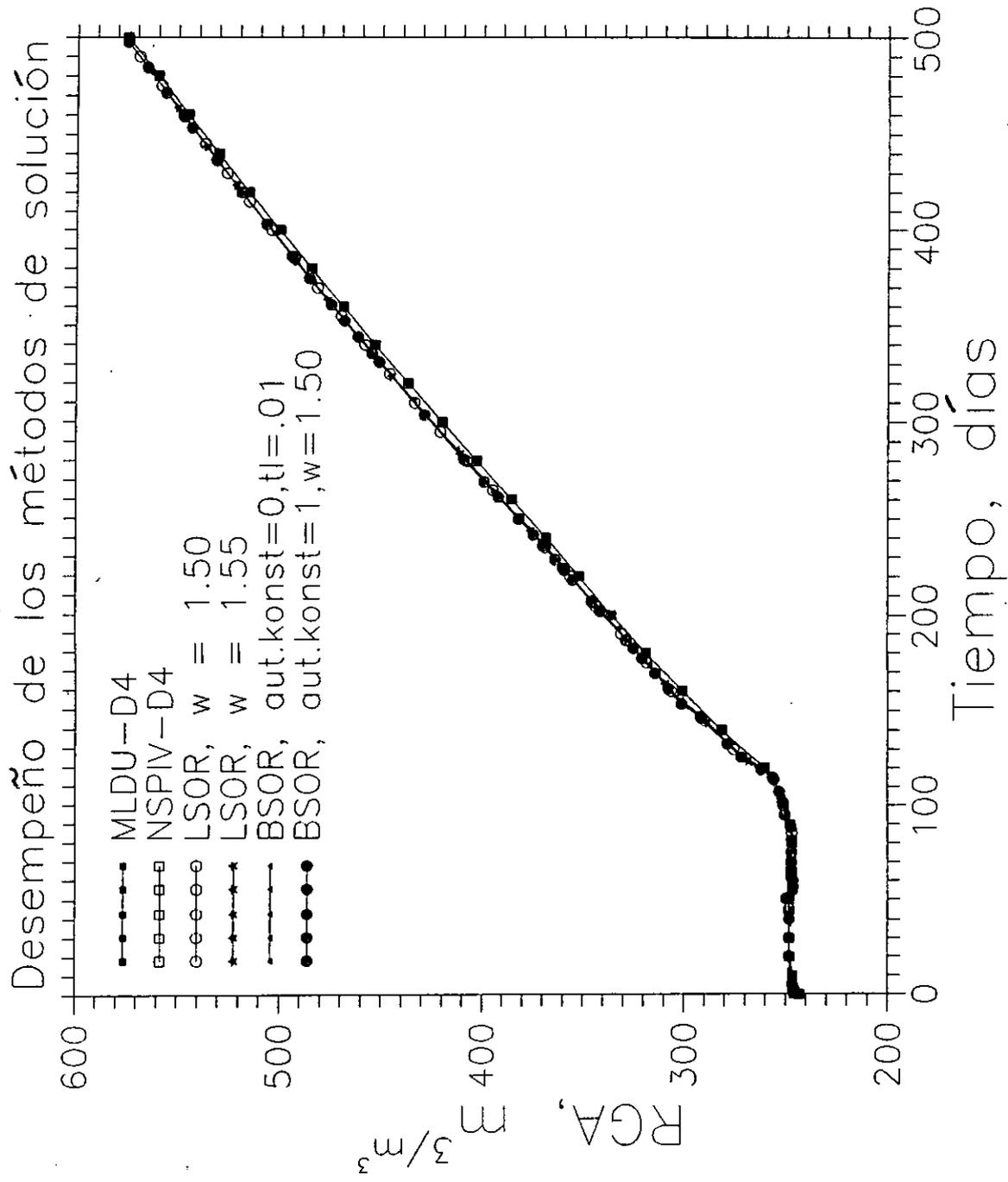


Fig. 4.99 Relación Gas-Aceite vs Tiempo

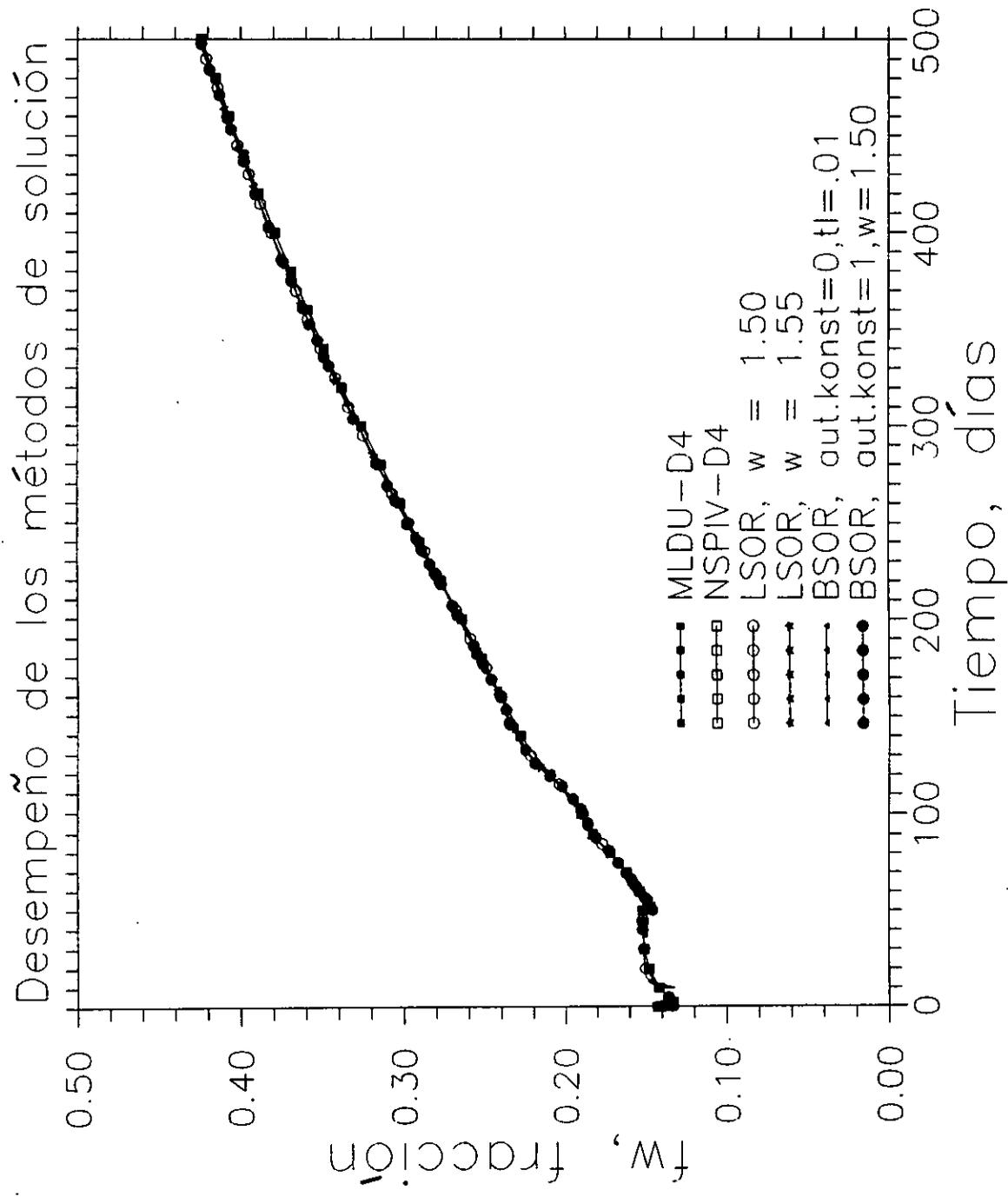


Fig. 4.100 Flujo fraccional de agua vs Tiempo

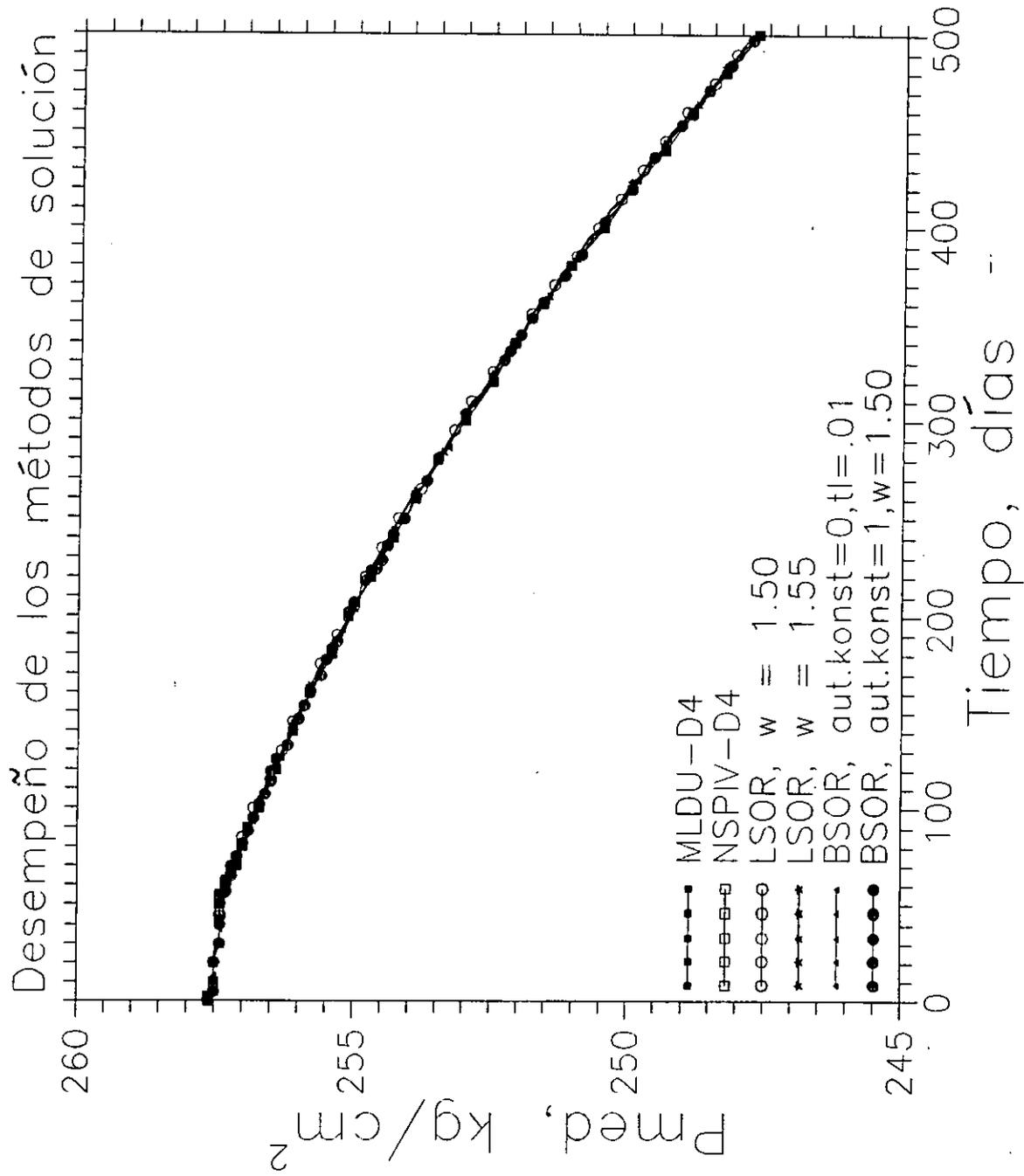
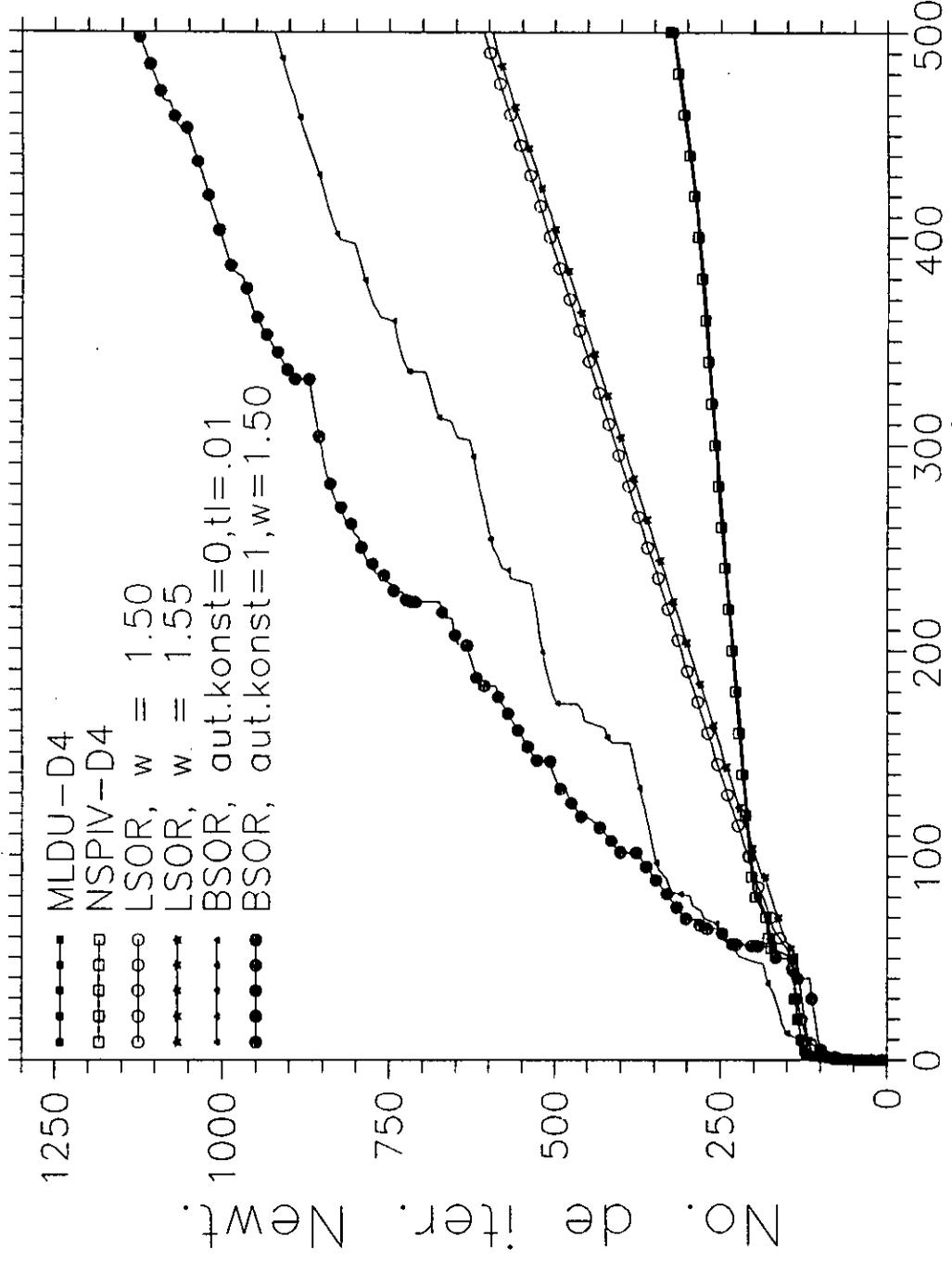


Fig. 4.101 Presión promedio vs Tiempo

Desempeño de los métodos de solución



Tiempo, días

Fig. 4.102 Número de iteraciones newtonianas vs Tiempo

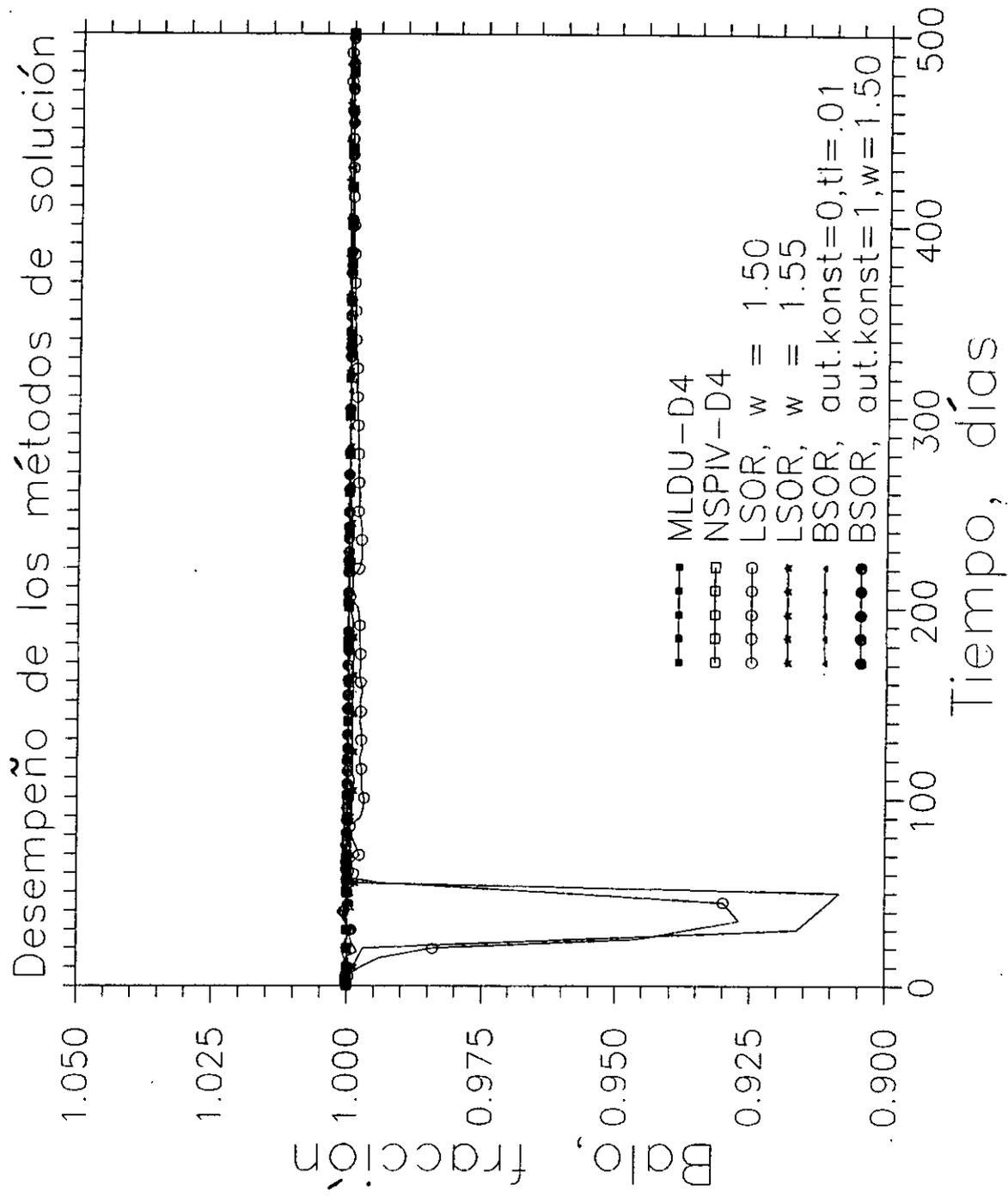


Fig. 4.103 Balance de materia del aceite vs Tiempo

El número de iteraciones newtonianas para los métodos directos MLDU y NSIPV es prácticamente el mismo. Mientras que para el método iterativo LSOR es el doble del realizado por los métodos directos, y para el método BSOR es el triple o un poco mayor.

De lo anterior, se puede establecer que para este caso trifásico-tridimensional, el método directo MLDU sigue siendo el más eficiente. Esto se debe a que el número de incógnitas que se resuelven para este problema no es muy grande,  $NES = 3 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 15 = 1620$ , y a que se disminuyeron las tolerancias para la convergencia de presión y de saturación en los métodos iterativos LSOR y BSOR, para cumplir con el balance de materia. Es necesario recalcar que los requerimientos de memoria de cómputo para los métodos directos son mayores que para los métodos iterativos. Esto se debe a que los métodos directos requieren de arreglos de trabajo para almacenar la factorización LDU de la matriz de coeficientes A, de tal manera que entre mayor número de incógnitas se resuelvan simultáneamente mayor es el orden de la matriz A y mayores son los requerimientos de memoria y los tiempos de ejecución de estos métodos. De tal suerte que llegará un momento en que se tornen imprácticos los métodos directos y en tal situación se deberá recurrir a los métodos iterativos.

5. APLICACION A UN POZO NATURALMENTE FRACTURADO.

En este capítulo se presenta una aplicación teórica del simulador numérico del flujo hacia un pozo en un yacimiento naturalmente fracturado, donde se compara su respuesta contra la solución analítica propuesta por Warren y Root<sup>8</sup>, para el flujo radial de una sola fase en un yacimiento infinito, y otra aplicación práctica donde se compara la respuesta del simulador contra un caso de campo correspondiente al pozo Ku 26 de la Zona Marina de Campeche<sup>32</sup>.

### 5.1 APLICACION TEORICA.

La solución analítica propuesta por Warren y Root<sup>8</sup>, para el caso del flujo radial de líquido en un yacimiento infinito naturalmente fracturado es:

$$p_{wf}(t) = p_1 - 0.02191 \frac{q\mu B}{k_f h} \left\{ \log t_D + 0.3514 + 0.4343 \left[ E_1 \left[ \frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right] - E_1 \left[ \frac{-\lambda t_D}{(1-\omega)} \right] \right] \right\} \quad \dots (5.1)$$

donde:

$$t_D = \frac{8.36399 k_f t}{[(1-\phi_f)\phi_m c_m + \phi_f c_f] \mu r_w^2} \quad \dots (5.2)$$

$$\lambda = \frac{12}{L^2} \frac{k_m r_w^2}{k_f} \quad \dots (5.3)$$

y

$$\omega = \frac{\phi_f c_f}{(1-\phi_f)\phi_m c_m + \phi_f c_f} \quad \dots (5.4)$$

Las unidades de las Ecs. 5.1 a 5.4 están dadas en el sistema métrico.

La Tabla 5.1 muestra los datos correspondientes al fluido y al yacimiento para la comparación entre la solución analítica y numérica:

TABLA 5.1 DATOS DEL FLUIDO Y DEL YACIMIENTO

Parámetro	unidad	valor
Presión inicial, $p_i$	kg/cm <sup>2</sup>	250.0
Espesor de la formación, $h$	m	100.0
Radio del pozo, $r_w$	m	0.1036
Longitud de los bloques de matriz, $L_z$	m	5.0
Porosidad de la fractura, $\phi_f$	fracción	0.02
Permeabilidad de la fractura, $k_f$	Darcy	1.0
Compresibilidad de la fractura, $c_f$	(kg/cm <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>	1.0426x10 <sup>-3</sup>
Porosidad de los bloques de matriz, $\phi_m$	fracción	0.142
Permeabilidad de los bloques de matriz, $k_m$	Darcy	0.001
Compresibilidad de los bloques de matriz	(kg/cm <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>	1.0426x10 <sup>-3</sup>
Factor de volumen del aceite, $B$	m <sup>3</sup> cy/m <sup>3</sup> cs	1.2366
Viscosidad del aceite, $\mu$	cp	0.8

En la solución numérica se emplearon 100 celdas en la dirección radial y una tantó en la dirección angular como vertical. El intervalo de tiempo máximo permitido para avanzar de una etapa de tiempo a otra se restringió a 0.01 día para evitar errores de truncamiento.

Tanto en la solución analítica como en la numérica se emplearon dos diferentes gastos de producción: 2500 m<sup>3</sup>/día y 5000 m<sup>3</sup>/día, y un tiempo total de simulación de 10 días (regimen

# Comparacion Teorica

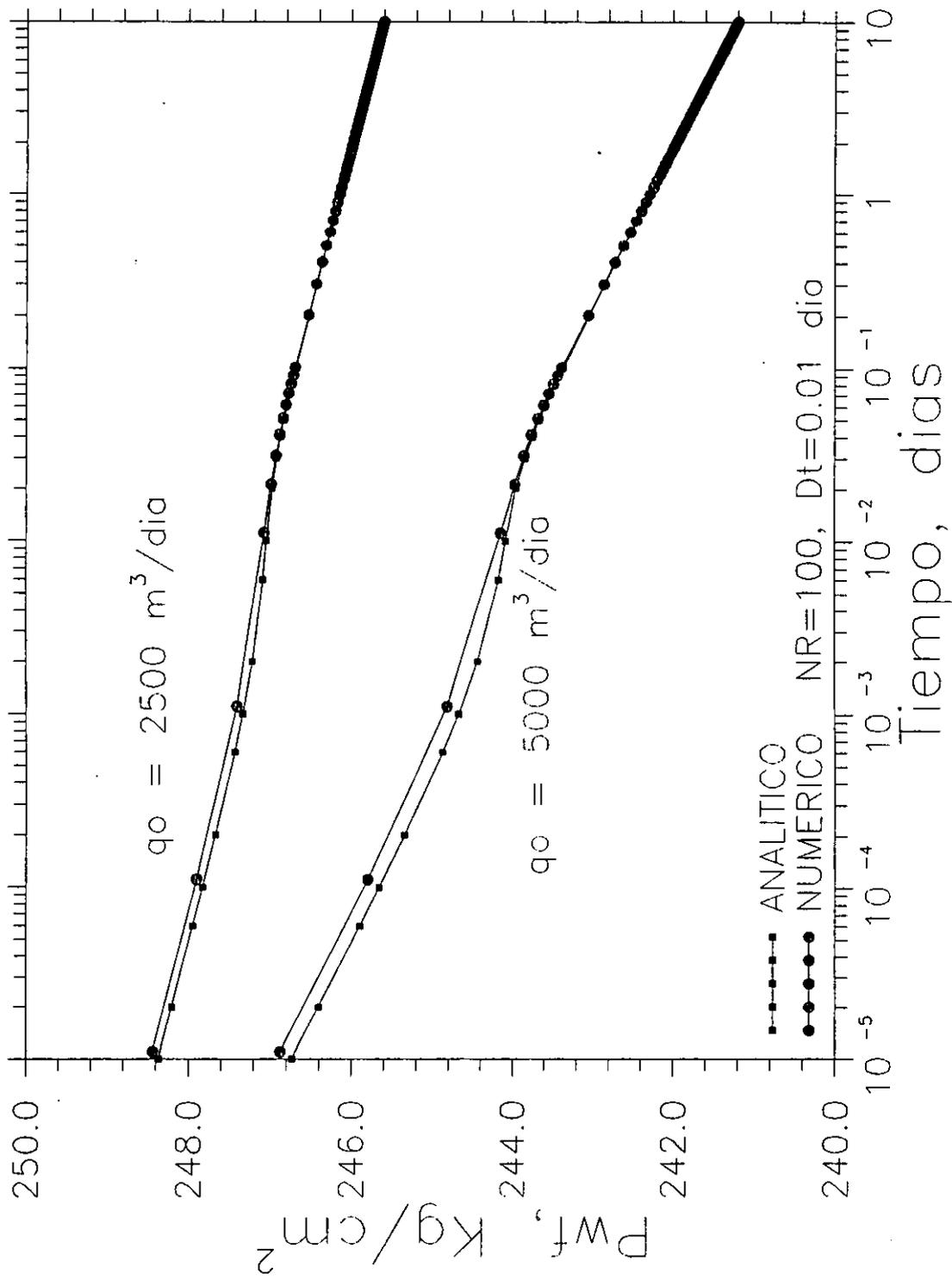


Fig. 5.1 Presion de fondo fluyendo vs Tiempo

transitorio únicamente). La Fig. 5.1 muestra el comportamiento de la presión de fondo fluyendo contra el tiempo, para los dos gastos considerados. Como puede observarse, la solución numérica, dada por los círculos grandes llenos, se ajusta perfectamente a la solución analítica, a tiempos grandes, dada por los cuadros pequeños llenos, y en donde se observa la doble pendiente, típica del comportamiento de un pozo en un yacimiento naturalmente fracturado<sup>8</sup>.

## 5.2 APLICACION PRACTICA.

En esta sección se presenta la aplicación del simulador numérico del flujo multifásico tridimensional hacia un pozo, en un yacimiento naturalmente fracturado, correspondiente al pozo Ku-26 de la Zona Marina de Campeche<sup>32</sup>.

El pozo Ku-26 se terminó como productor el 2 de julio de 1985. Tiene una profundidad total de 3,342 mvmr. El intervalo productor de este pozo es de 3,078-3,101 mvmr y la presión inicial al nivel medio de los disparos fue de 260 kg/cm<sup>2</sup>. La temperatura del yacimiento al mismo nivel de referencia fue de 117°C<sup>32</sup>.

El pozo Ku-26 produce de la brecha del Paleoceno; los fluidos que produce son característicos de un aceite negro cuya densidad es de 0.7531 gr/cm<sup>3</sup> a condiciones de yacimiento (21° API)<sup>32</sup>.

En esta aplicación se considera el flujo bidimensional de aceite-gas-agua. El área de drenaje del pozo se discretiza en 8 celdas en la dirección radial, 1 celda en la dirección angular y 11 celdas, capas, en la dirección vertical. El intervalo productor se encuentra

disparado a lo largo de todo el arco en la dirección angular y produciendo por la tercera capa a gasto variable durante los 225 días que dura la simulación.

Los datos para esta comparación se presentan en las Tablas 5.2 a 5.13, definidas de la siguiente forma:

La Tabla 5.2 muestra los datos generales del pozo.

La Tabla 5.3 presenta la malla de cálculo del simulador.

La Tabla 5.4 a 5.6 contiene los datos PVT del aceite, del gas y de agua, respectivamente.

Las Tablas 5.7 y 5.8 presentan los datos petrofísicos de las fracturas y de los bloques de matriz, respectivamente.

Las Tablas 5.9 a 5.10 muestran las permeabilidades relativas para las sistemas bifásicos: GAS-ACEITE y ACEITE-AGUA para los bloques de matriz, respectivamente. Mientras que para las fracturas se emplean líneas rectas para definir estas permeabilidades relativas.

La Tabla 5.11 presenta la variación del gasto de aceite (historia de producción del pozo), con respecto al tiempo de simulación.

Y en las Tablas 5.12 y 5.13 se presenta la distribución inicial de presiones y saturaciones, así como el volumen original de los fluidos, para las fracturas y los bloques de matriz, respectivamente.

TABLA 5.2 DATOS GENERALES DEL POZO

** POZO KU 26 **	
Espesor de la formación .....	(M) 266.00
Radio de drene .....	(M) 1550.00
Radio del pozo .....	(M) 0.0570
Presión inicial .....	(kg/cm <sup>2</sup> ) 200.00
Nivel de referencia de la presión inicial ....	(MBNM) 3014.00
Prof. media de los disparos .....	(MBNM) 3044.00
Longitud del intervalo disparado .....	(M) 10.00
Prof. de la cima de la formación .....	(MBNM) 2994.00
Prof. del contacto gas-aceite .....	(MBNM) 2994.00
Prof. del contacto agua-aceite .....	(MBNM) 3260.00
Compresibilidad de las fracturas.....	(1/kg/cm <sup>2</sup> ) 0.000079
Compresibilidad de los bloques de matriz..	(1/kg/cm <sup>2</sup> ) 0.000079

TABLA 5.3 MALLA DE CALCULO DEL SIMULADOR.

No. de celdas en la dirección radial .....	8							
No. de celdas en la dirección angular.....	1							
No. de celdas en la dirección vertical .....	11							
Posición del intervalo disparado:								
Arco(s) (Dirección angular) .....	1							
Capa(s) (Dirección vertical) .....	3							
DIRECCION RADIAL			DIRECCION ANGULAR			DIRECCION VERTICAL		
Celda	Longitud	Radio Nodo	Arco	Long.	Long. Nodo	Capa	Espesor	Prof. Nodo
	(M)	(M)		(Grad.)	(Grad.)		(M)	(M)
1	0.15	0.10	1	180.00	360.00	1	20.00	10.00
2	0.53	0.36				2	25.00	32.50
3	1.89	1.30				3	10.00	50.00
4	6.78	4.64				4	25.00	67.50
5	24.28	16.64				5	18.00	89.00
6	87.02	59.63				6	18.00	107.00
7	311.84	213.69				7	25.00	128.50
8	1117.46	765.75				8	25.00	153.50
						9	30.00	181.00
						10	30.00	211.00
						11	40.00	246.00

TABLA 5.4 DATOS PVT DEL ACEITE

PRESION	FACTOR DE VOLUMEN	RELA. SOLUB. GAS/ACEITE	VISCOSIDAD	DENSIDAD
KG/CM2	M3 CY/M3 CS	M3 CS/m3 CS	CP	GR/CM3
0.000	1.0370	0.00	6.1300	0.8609
50.000	1.2050	41.01	3.0500	0.8048
100.000	1.2750	65.19	2.2100	0.7842
150.000	1.3340	88.13	1.7000	0.7664
188.000	1.3810	110.16	1.4800	0.7531
200.000	1.3760	110.16	1.4900	0.7556
250.000	1.3620	110.16	1.5800	0.7613
300.000	1.3540	110.16	1.6600	0.7680
350.000	1.3470	110.16	1.7300	0.7720

TABLA 5.5 DATOS PVT DEL GAS

PRESION	FACTOR DE VOLUMEN	RELA. SOLUB. ACEITE/GAS	VISCOSIDAD	DENSIDAD
KG/CM2	M3 CY/M3 CS	M3 CS/m3 CS	CP	GR/CM3
50.000	0.024000	0.0000	0.0140	0.0420
100.000	0.011000	0.0000	0.0160	0.0770
150.000	0.007600	0.0000	0.0180	0.1160
175.000	0.007000	0.0000	0.0200	0.1410
188.000	0.006700	0.0000	0.0210	0.1540

TABLA 5.6 DATOS PVT DEL AGUA

PRESION	FACTOR DE VOLUMEN	VISCOSIDAD	DENSIDAD
KG/CM2	M3 CY/M3 CS	CP	GR/CM3
0.000	1.06000	0.9600	0.9800
70.320	1.05800	0.9600	0.9995
140.650	1.05700	0.9600	1.0017
210.970	1.05650	0.9600	1.0032
281.290	1.05400	0.9600	1.0083
351.620	1.05200	0.9600	1.0384
421.940	1.05150	0.9600	1.0480

TABLA 5.7 DATOS PETROFISICOS DE LAS FRACTURAS.

CAPA	POROSIDAD (FRACCION)	PERM. HORIZONTAL (DARCIES)	PERM. ANGULAR (DARCIES)	PERM. VERTICAL (DARCIES)
1	0.0250	2.5000	2.5000	5.000
2	0.0250	2.5000	2.5000	5.000
3	0.0250	2.5000	2.5000	5.000
4	0.0250	2.5000	2.5000	5.000
5	0.0250	2.5000	2.5000	5.000
6	0.0250	2.5000	2.5000	5.000
7	0.0250	2.5000	2.5000	5.000
8	0.0250	2.5000	2.5000	5.000
9	0.0250	2.5000	2.5000	5.000
10	0.0250	2.5000	2.5000	5.000
11	0.0250	2.5000	2.5000	5.000

TABLA 5.8 DATOS PETROFISICOS DE LOS BLOQUES DE MATRIZ.

CAPA	POROSIDAD (FRACCION)	PERM. DE MATRIZ (DARCIES)	LONG. DE LOS BLOQUES DE MATRIZ		
			Lx	Ly	Lz
1	0.1100	0.1500	5.00	5.00	5.00
2	0.1100	0.1500	5.00	5.00	5.00
3	0.1100	0.1500	5.00	5.00	5.00
4	0.1100	0.1500	5.00	5.00	5.00
5	0.1100	0.1500	5.00	5.00	5.00
6	0.1100	0.1500	5.00	5.00	5.00
7	0.1100	0.1500	5.00	5.00	5.00
8	0.1100	0.1500	5.00	5.00	5.00
9	0.1100	0.1500	5.00	5.00	5.00
10	0.1100	0.1500	5.00	5.00	5.00
11	0.1100	0.1500	5.00	5.00	5.00

TABLA 5.9 DATOS DE PERMEABILIDADES RELATIVAS: GAS-ACEITE  
PARA LOS BLOQUES DE MATRIZ.

SATURACION SG	PERM. REL. ACEITE KROG	PERM. REL. GAS KRG	PRESION CAPILAR PCGO
(FRACCION)	(FRACCION)	(FRACCION)	(KG/CM2)
0.0000	1.0000	0.0000	0.0144
0.1000	0.6000	0.0000	0.0144
0.2000	0.3300	0.0220	0.0144
0.3000	0.1000	0.1000	0.0200
0.4000	0.0200	0.2400	0.0200
0.6000	0.0000	0.3400	0.0200
0.6500	0.0000	0.4200	0.2000
0.7000	0.0000	0.5000	0.4000
0.8000	0.0000	0.8100	1.0000
0.9000	0.0000	1.0000	2.3000
1.0000	0.0000	1.0000	3.2000

TABLA 5.10 DATOS DE PERMEABILIDADES RELATIVAS: AGUA-ACEITE  
PARA LOS BLOQUES DE MATRIZ.

SATURACION SW	PERM. RELAT. ACEITE KROW	PERM. RELAT. AGUA KRW	PRES. CAPILAR DRENE PCWOD	PRES. CAPILAR IMBIBICION PCWOI
(FRACCION)	(FRACCION)	(FRACCION)	(KG/CM2)	(KG/CM2)
0.0000	1.0000	0.0000	6.0000	6.0000
0.1000	1.0000	0.0000	6.0000	6.0000
0.2000	0.4000	0.0700	4.5000	4.5000
0.3000	0.1250	0.1500	1.1000	1.1000
0.4000	0.0649	0.2400	0.6000	0.6000
0.5000	0.0048	0.3300	0.2000	0.2000
0.6000	0.0000	0.6500	0.0500	0.0500
0.8000	0.0000	0.8300	0.0400	0.0400
0.9000	0.0000	1.0000	0.0300	0.0300
1.0000	0.0000	1.0000	0.0200	0.0200

TABLA 5.11 HISTORIA DE PRODUCCION

GASTO DE ACEITE	DURACION
(m <sup>3</sup> /dia)	(días)
2112.18	12.0
2864.70	31.0
3769.10	30.0
4155.17	31.0
4641.17	30.0
5200.00	31.0
4514.15	31.0
3301.63	29.0

TABLA 5.12 DISTRIBUCION INICIAL DE PRES. Y DE SAT.  
EN EL SISTEMA DE FRACTURAS.

CAPA	SATURA. GAS (FRACCION)	SATURACION DE AGUA (FRACCION)	PRESION (KG/CM2)
1	0.0000	0.0100	199.24
2	0.0000	0.0100	200.94
3	0.0000	0.0100	202.27
4	0.0000	0.0100	203.59
5	0.0000	0.0100	205.22
6	0.0000	0.0100	206.58
7	0.0000	0.0100	208.20
8	0.0000	0.0100	210.09
9	0.0000	0.0100	212.18
10	0.0000	0.0100	214.45
11	0.0000	0.0100	217.10
VOLUMEN INICIAL DE FLUIDOS:			
Vol. inicial de aceite (m <sup>3</sup> cs) .....			36175261.
Vol. inicial de gas (m <sup>3</sup> cs) .....			3985066724.
Vol. inicial de agua (m <sup>3</sup> cs) .....			475052.

TABLA 5.13 DISTRIBUCION INICIAL DE PRES. Y DE SAT.  
EN EL SISTEMA DE BLOQUES DE MATRIZ.

CAPA	SATURA. GAS (FRACCION)	SATURACION DE AGUA (FRACCION)	PRESION (KG/CM2)
1	0.0000	0.1000	199.24
2	0.0000	0.1000	200.94
3	0.0000	0.1000	202.27
4	0.0000	0.1000	203.59
5	0.0000	0.1000	205.22
6	0.0000	0.1000	206.58
7	0.0000	0.1000	208.20
8	0.0000	0.1000	210.09
9	0.0000	0.1000	212.18
10	0.0000	0.1000	214.45
11	0.0000	0.1000	217.10
VOLUMEN INICIAL DE FLUIDOS:			
Vol. inicial de aceite (m3 cs) .....			141083517.
Vol. inicial de gas (m3 cs) .....			15541760223.
Vol. inicial de agua (m3 cs) .....			20379725.

En este caso se aplicó el método directo MLDU y el ordenamiento D4, presentado en la Sección 4.1.4. Los resultados obtenidos se presentan en las Figs. 5.2 a 5.11. En estas figuras se muestra el comportamiento de la presión de fondo fluyendo, de la presión promedio del área de drene del pozo ponderada con respecto al volumen poroso, de la relación gas-aceite, del número de iteraciones newtonianas, del gasto de aceite producido por las fracturas y de intercambio matriz-fractura, del gasto de gas producido por las fracturas y de intercambio matriz-fractura, de la producción acumulada de aceite, de la producción acumulada de gas, del balance de aceite de las fracturas y de los bloques de matriz y del balance de gas de las fracturas y de los bloques de matriz contra el tiempo de simulación, respectivamente.

Como puede observarse en las gráficas de gastos de intercambio matriz-fractura, tanto de aceite como de gas, Figs. 5.6 y 5.7, casi la mayor parte del volumen producido por el intervalo disparado proviene de los bloques de matriz.

Desafortunadamente, hasta el momento en que se consiguió la información del pozo<sup>32</sup>, no se contó con datos observados de presión media ni de fondo fluyendo que permita una comparación entre la información que genera el simulador y los datos de campo reportados.

POZO KU-26

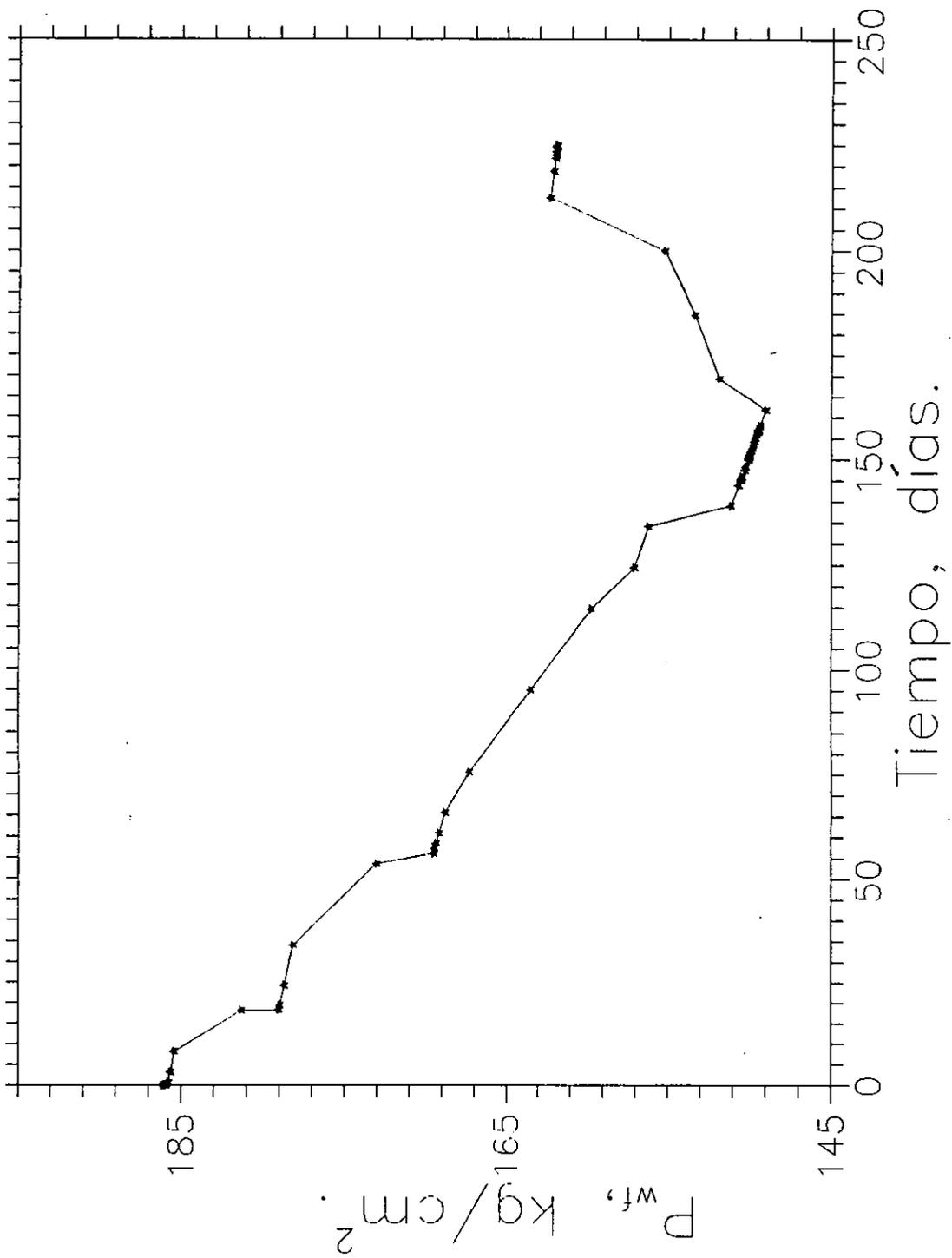


Fig. 5.2 Presión de Fondo Fluyendo vs Tiempo.

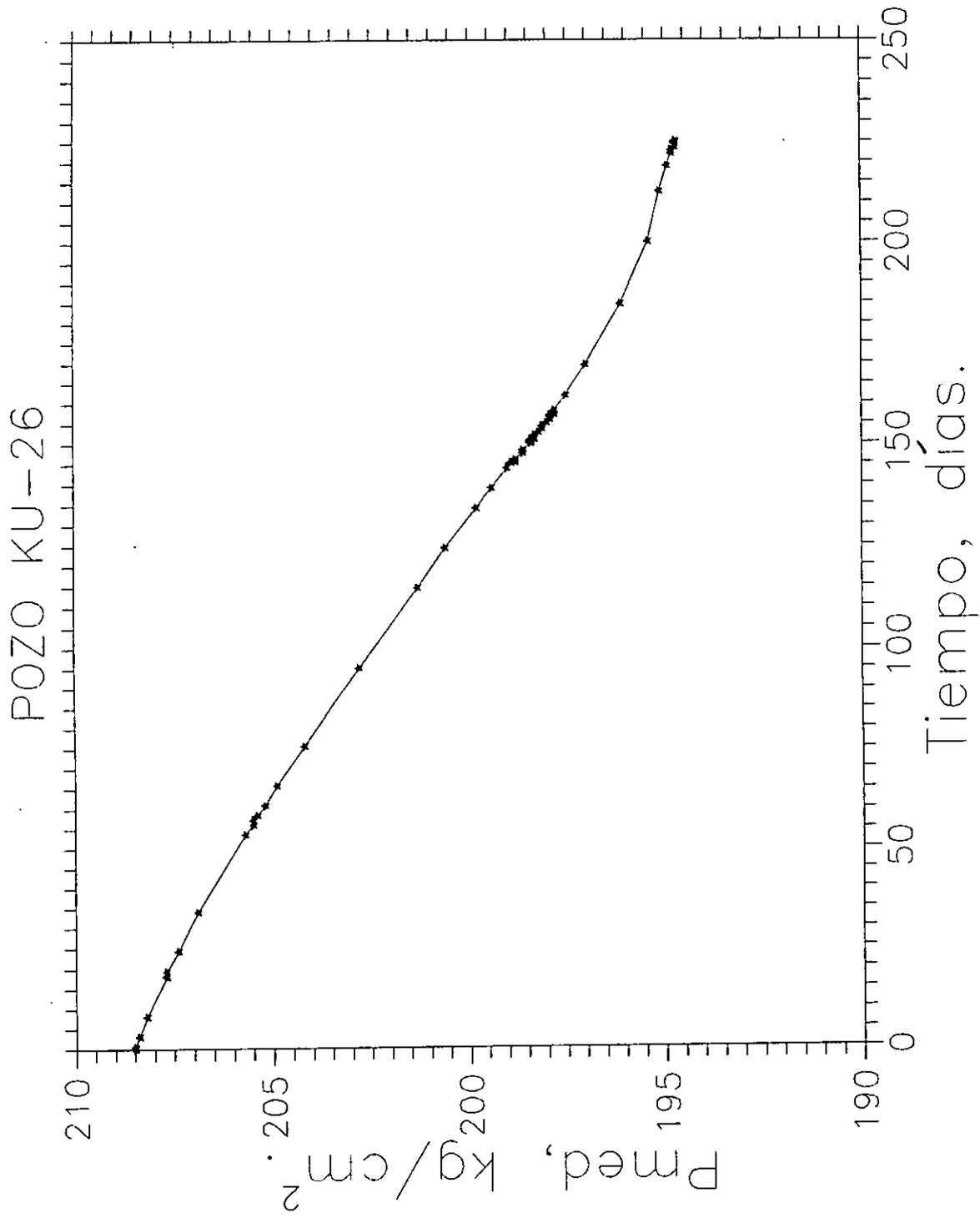


Fig. 5.3 Presión Media vs Tiempo.

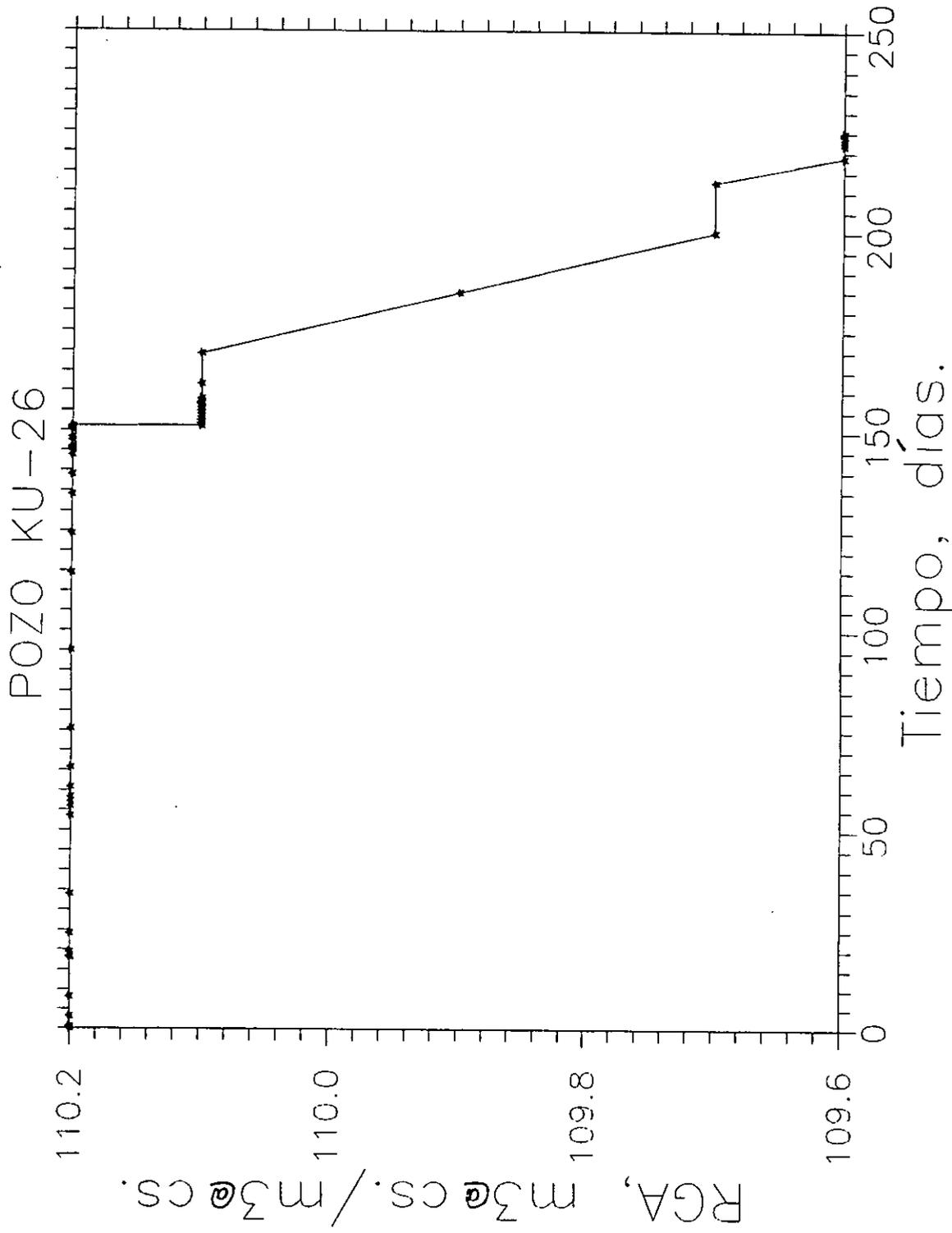


Fig. 5.4 Relación Gas/Aceite vs Tiempo.

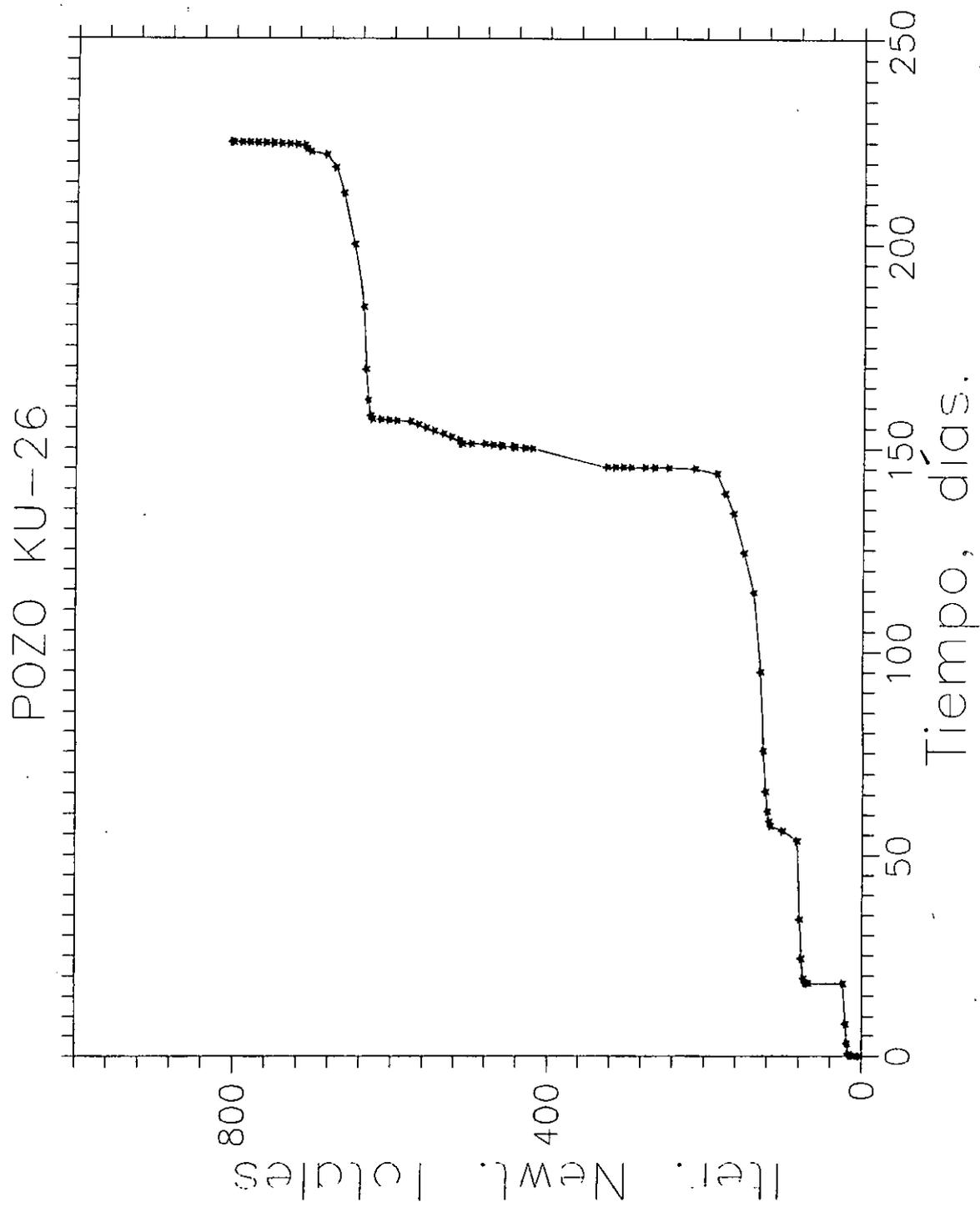


Fig. 5.5 No. de Iter. Newt. vs Tiempo.

# POZO KU-26

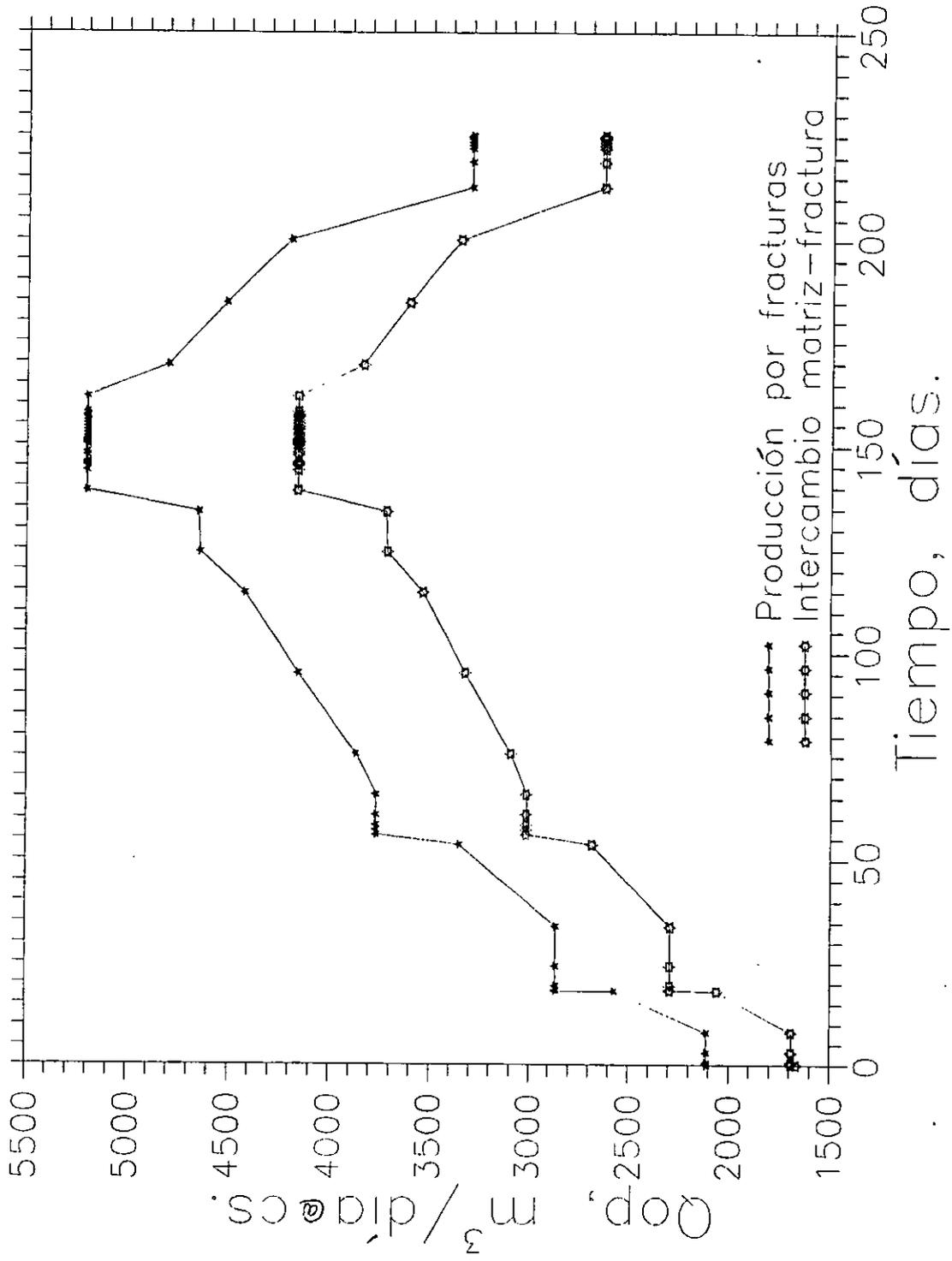


Fig. 5.6. Gasto de Aceite vs Tiempo.

POZO KU-26

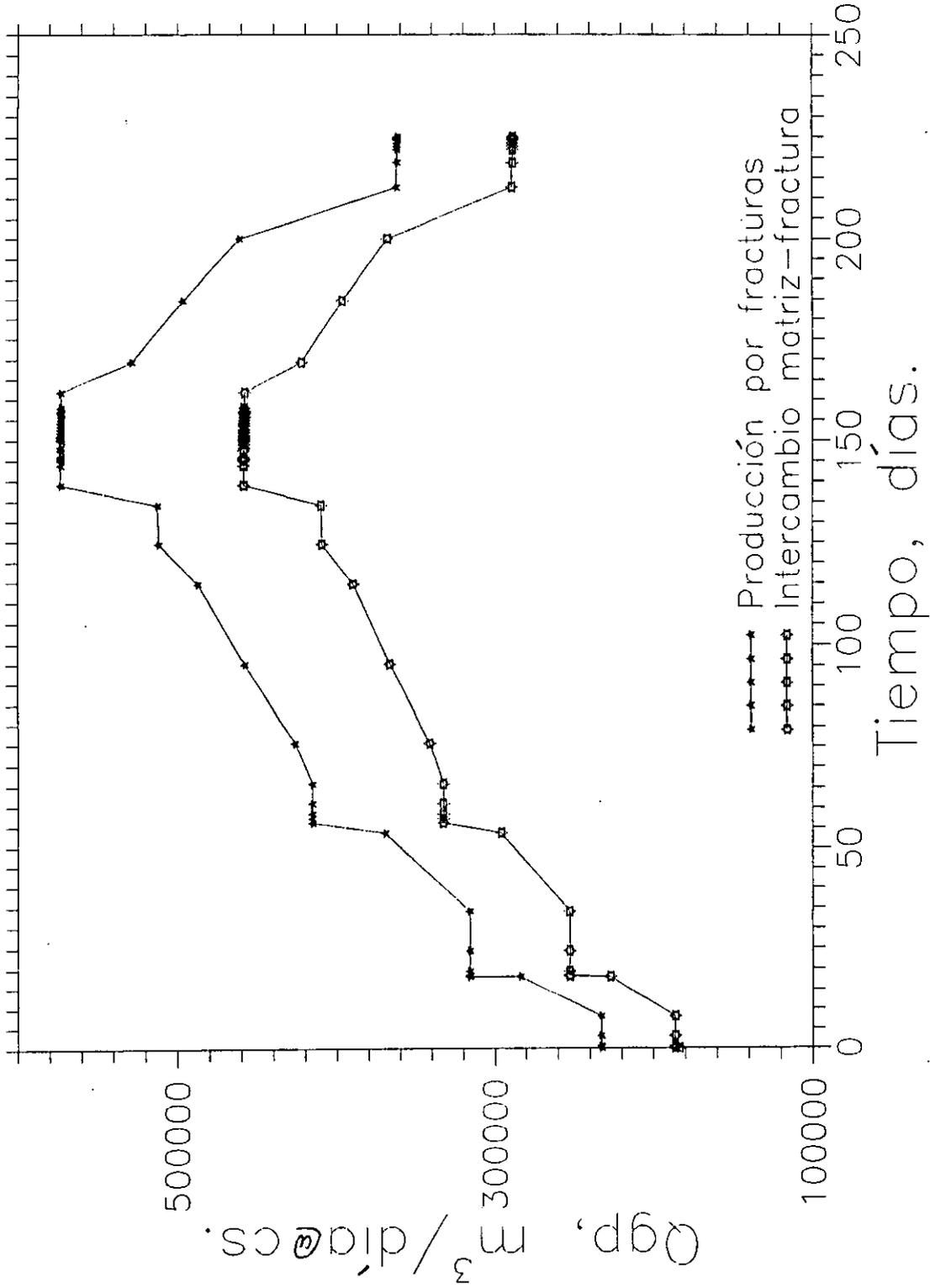


Fig. 5.7 Gasto de Gas vs Tiempo.

# POZO KU-26

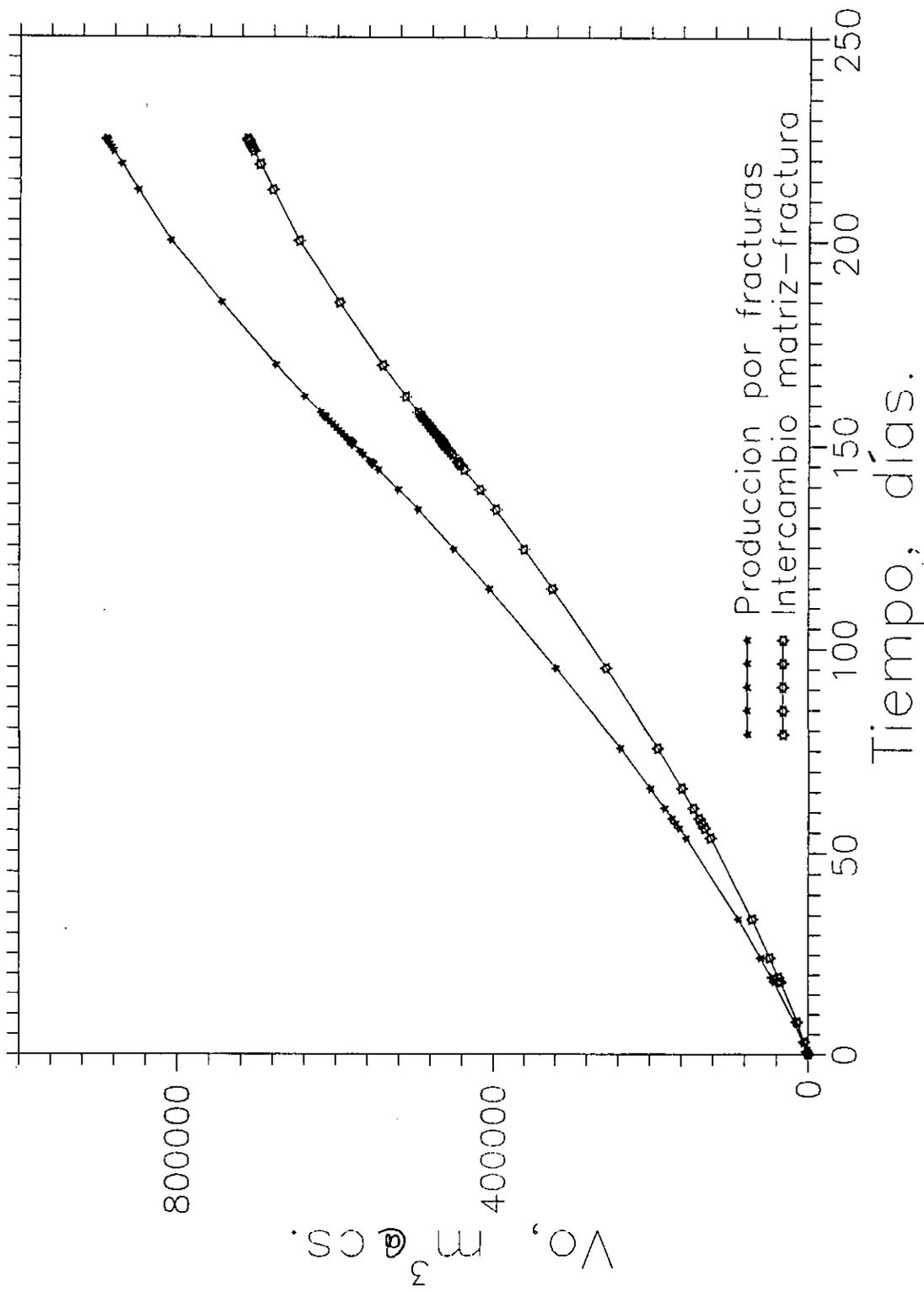


Fig. 5.8 Volumen de Aceite Prod. vs Tiempo.

POZO KU--26

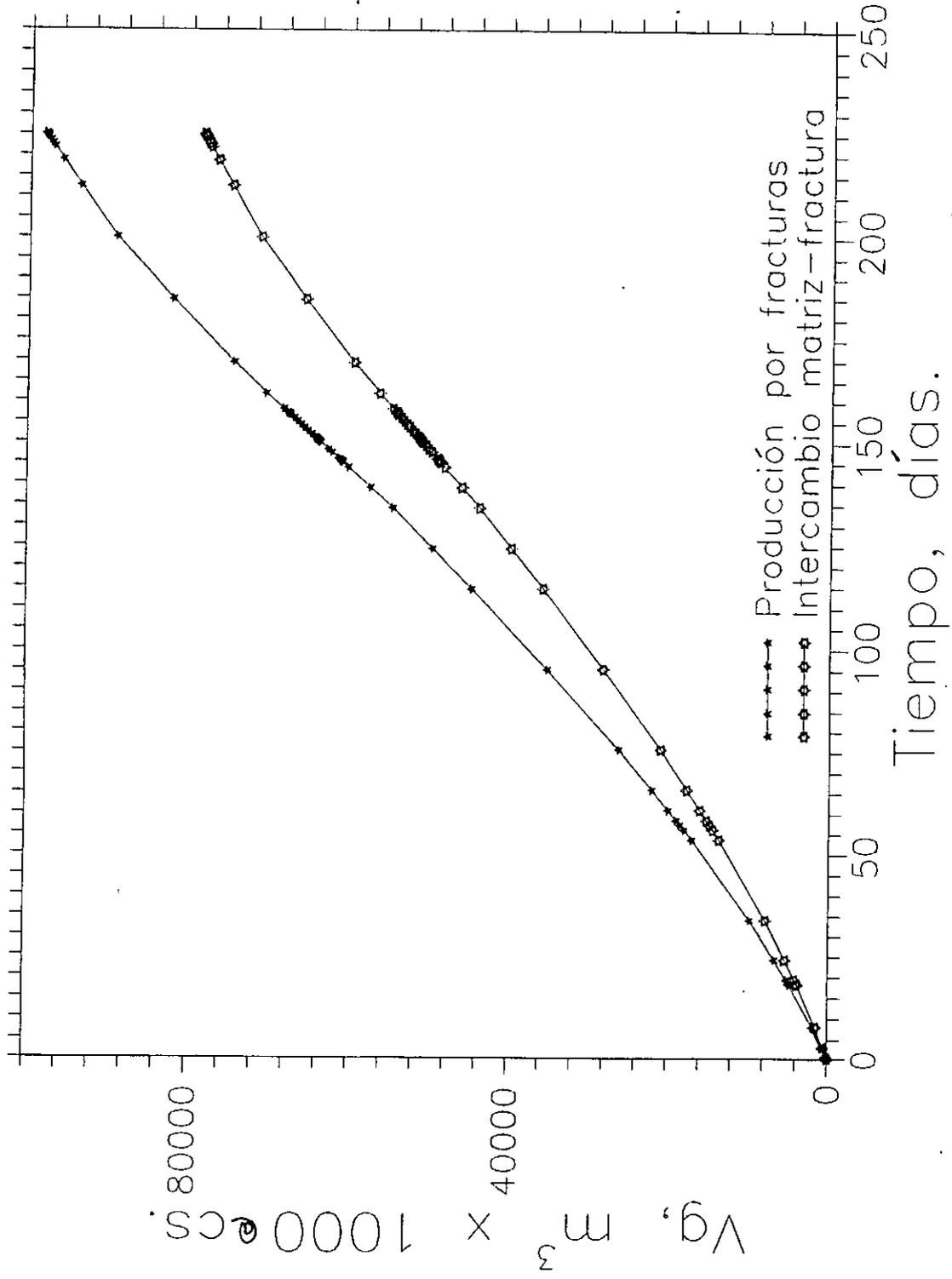


Fig. 5.9 Vol. de Gas Producido vs Tiempo.

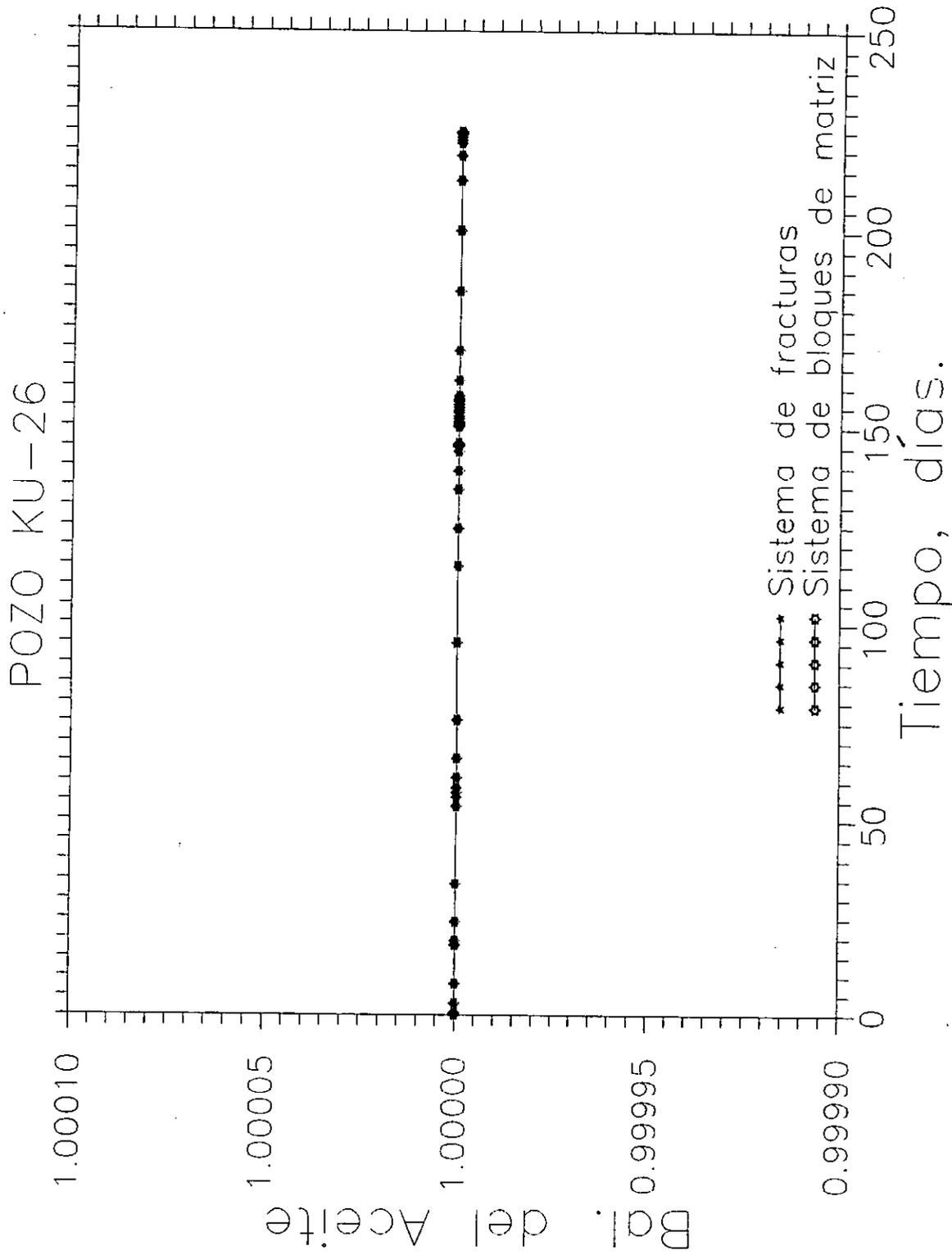


Fig. 5.10 Balance de Materia del Aceite vs Tiempo.

POZO KU-26

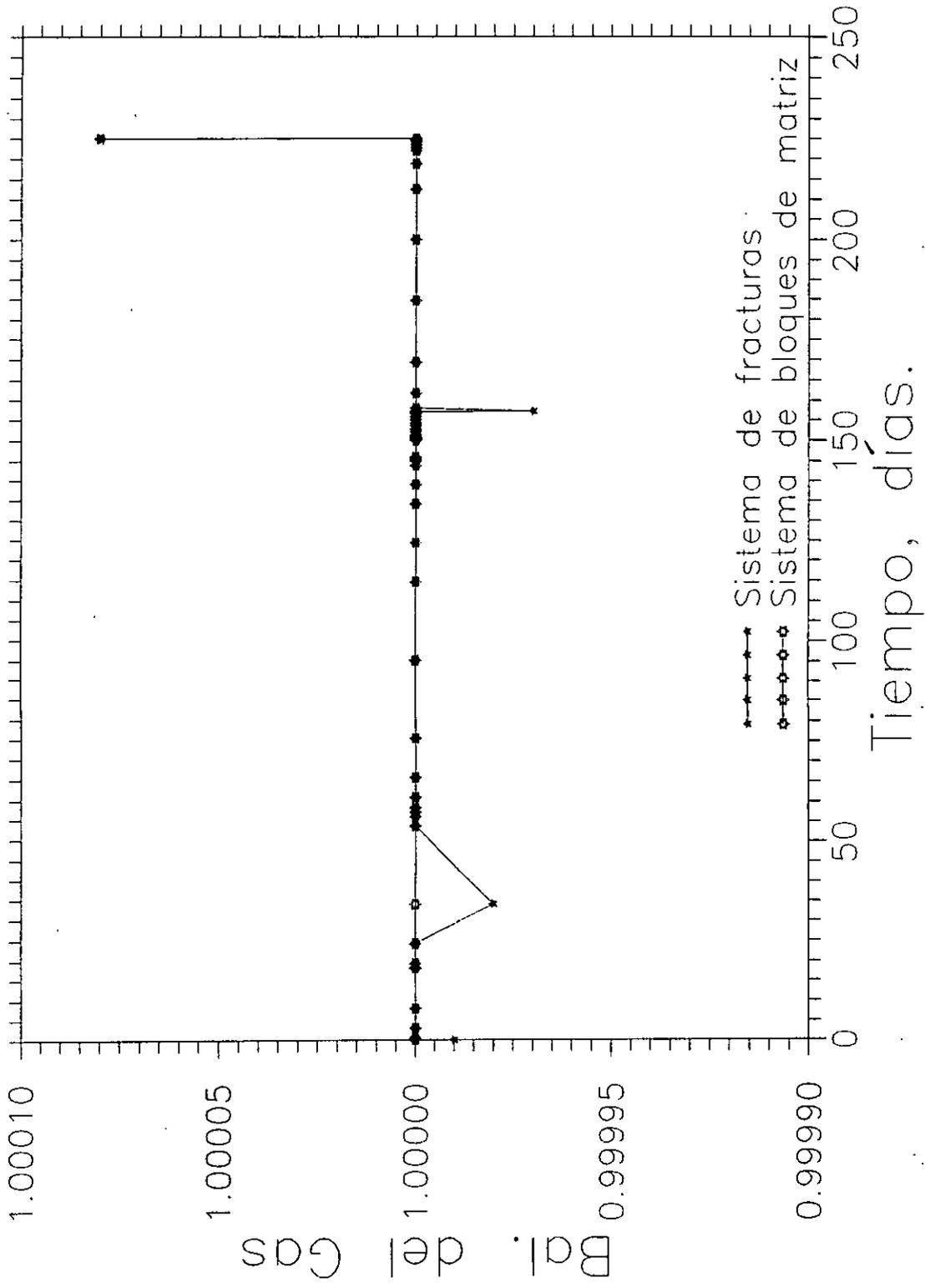


Fig. 5.11 Balance de Materia de Gas vs Tiempo.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

- Se desarrolló un simulador numérico del flujo trifásico-tridimensional hacia un pozo petrolero, en un yacimiento naturalmente fracturado. El simulador está basado en una formulación TOTALMENTE IMPLICITA, lo que lo hace altamente estable e ideal para simular adecuadamente el flujo hacia un pozo.
- El simulador puede ser aplicado tanto a yacimientos con fluidos tipo beta como de gas y condensado. La mezcla multicomponente, en este último caso se maneja a través de dos pseudocomponentes hidrocarburos, extendiendo las ecuaciones tipo beta convencionales.
- Para generar los datos PVT, relaciones tipo  $\beta$ , para el caso de gas y condensado, es necesario emplear un simulador PVT que permita caracterizar adecuadamente la mezcla multicomponente en dos pseudocomponentes hidrocarburos. Se recomienda emplear el procedimiento propuesto por Coats<sup>12</sup> para esto.
- El método de Fetkovich<sup>10</sup> para el cálculo analítico de la entrada de agua de fondo al área de drene del pozo, es un método sencillo y práctico que permite considerar el empuje de agua al yacimiento sin recurrir al método de superposición. Los resultados son muy similares con un acuífero numérico; sin embargo, los requerimientos de memoria y tiempo de cómputo se reducen considerablemente.

- El acoplamiento de las ecuaciones de los bloques de matriz en las ecuaciones de las fracturas, permite reducir sustancialmente los requerimientos de memoria y de tiempo de cómputo empleados en la simulación del flujo multifásico en yacimientos naturalmente fracturados. Se observa que estos requerimientos son ligeramente mayores que para el caso de yacimientos no-fracturados.
  
- Al emplear un método directo de solución, se recomienda usar el ordenamiento D4, ya que permite resolver de una manera más eficiente los sistemas de ecuaciones generados en la simulación numérica de yacimientos.
  
- Dentro de los métodos directos de solución presentados en este trabajo: NSPIV y MLDU, se encontró en los 4 CASOS estudiados que el método directo MLDU es el más eficiente.
  
- Dentro de los métodos iterativos presentados en este trabajo, LSOR y BSOR-MLDU, se encontró en los casos estudiados que el método de BSOR-MLDU resultó más eficiente, tanto en problemas homogéneos e isotrópicos como en heterogéneos y anisotrópicos. Comparado con LSOR, el método BSOR-MLDU resuelve un mayor número de incógnitas simultáneamente, lo que aumenta su grado de implícitud, y lo hace más robusto. La estabilidad de este método se ve afectada por el grado de heterogeneidad y anisotropía presentes en el área de drenaje del pozo, por lo que en estos casos se recomienda emplear un método directo y en especial el método directo de MLDU-D4.

- El valor óptimo del parámetro de sobrerelajación calculado con el algoritmo presentado en este trabajo, depende estrictamente de la estimación inicial y de la tolerancia estipulada para calcular un nuevo valor de este parámetro. Por lo que, se debe tener cuidado al especificar el valor inicial de  $\omega$ , ya que el parámetro calculado con este algoritmo, puede ser o no el valor óptimo y como consecuencia, puede o no lograr la convergencia del método iterativo o que éste realice un tiempo de cómputo impráctico, lo cual hace que no pueda competir con un método directo. Lo anterior obliga a un mejor estudio de este algoritmo o incluso investigar si existe actualmente otro más eficiente que reduzca los tiempos de cómputo realizados por los métodos LSOR y BSOR-MLDU.
  
- Se recomienda dar un valor de cero a la estimación inicial del cambio iterativo para el método LSOR o BSOR, en cada iteración newtoniana ya que se reduce hasta en un 50% el tiempo de cómputo requerido.
  
- De acuerdo con los resultados obtenidos al emplear los diferentes métodos de solución, se puede establecer que para resolver eficientemente un problema unidimensional o bidimensional, se debe emplear un método directo de solución y en particular, el método de MLDU junto con el ordenamiento D4. Para problemas tridimensionales, dependiendo del número de incógnitas del problema se puede seguir usando este método directo, pero al aumentar dicho

número se debe emplear un método iterativo, y en particular el método BSOR-MLDU, calculando el parámetro de sobrerelajación óptimo en forma automática. Si no se logra la convergencia y/o estabilidad deseada, calcular este valor óptimo por ensaye y error. Si aún así, no se puede resolver el problema, entonces emplear el método directo de MLDU, el cual invariablemente lo resolverá aún cuando el tiempo de cómputo pueda ser grande.

- El simulador numérico presentado en este trabajo constituye el mejor apoyo técnico para el diseño de la terminación de pozos y de los ritmos de explotación que eviten el problema de conificación de fluidos. En pozos conificados, permite ensayar diferentes medidas correctivas: cambio del intervalo disparado, reducción de los gastos de producción, restricción a una presión de fondo mínima, etc.

NOMENCLATURA.

- Ab - Area asociada a la(s) celda(s) del pozo conectada(s) con el acuífero,  $m^2$ .
- bf -  $1/B_f$ , Factor de encogimiento de la fase f,  $m^3 @c.s./m^3 @c.y.$
- Bf - Factor de volumen de la fase f,  $m^3 @c.y. /m^3 @c.s.$
- C<sub>if</sub> - Fracción másica del componente i en la fase f.
- C<sub>r</sub> - Compresibilidad de la roca,  $cm^2/kg$ .
- COR - Factor geométrico en la dirección radial, Ec. B.14.
- COT - Factor geométrico en la dirección angular, Ec. B.15.
- COZ - Factor geométrico en la dirección vertical, Ec. B.16.
- c.s. - Condiciones de superficie.
- c.y. - Condiciones de yacimiento.
- D - Profundidad con respecto a un plano de referencia, m.
- e - Logaritmo natural de base 2.71828.
- e<sub>w</sub> - Gasto instantáneo de la entrada de agua al área de drene del pozo,  $m^3 @c.y. / día$ .
- F - Función de residuos definida en el método de Newton-Raphson.
- $\bar{F}$  - Vector de residuos.
- g - Aceleración de la gravedad,  $(9.81 m/seg^2)$ .
- g<sub>c</sub> - Constante de conversión de unidades.
- J - Matriz Jacobiana.
- h<sub>tot</sub> - Espesor total de la formación, m.
- h<sub>hy</sub> - Espesor de la formación impregnada de hidrocarburos, m.
- h<sub>ac</sub> - Espesor de la formación asociada al acuífero, m.
- k<sub>h</sub> - Permeabilidad horizontal en las FRACTURAS, Darcy.
- k<sub>hm</sub> - Permeabilidad horizontal en los BLOQUES DE MATRIZ, Darcy.
- k<sub>θ</sub> - Permeabilidad angular en las FRACTURAS, Darcy.

- $k_v$  - Permeabilidad vertical en las FRACTURAS, Darcy.
- $k_r$  - Permeabilidad relativa, fracción.
- $k_b$  - Permeabilidad de la celda del área de drene del pozo que está conectada con el acuífero, Darcy.
- $j_{ac}$  - Índice de productividad del acuífero,  $m^3$  @c.y./dia /  $kg/cm^2$ .
- $L$  - Longitud de los bloques de matriz, m.
- $N$  - Exponente de las curvas de decremento de presión, para definir el tipo de flujo ( $N=1$  para flujo que obedece la Ley de Darcy).
- $nc$  - Número de componentes que constituyen a la mezcla de hidrocarburos que saturan el medio poroso.
- $NT$  - Número de niveles de tiempo.
- $nac$  - Número de celdas conectadas al acuífero de fondo.
- $NR$  - Número de nodos en la dirección radial, en que se discretiza el área de drene del pozo.
- $NT$  - Número de nodos en la dirección angular (nodos).
- $NZ$  - Número de nodos en la dirección vertical (capas).
- $P$  - Presión,  $kg/cm^2$ .
- $P_c$  - Presión capilar,  $kg/cm^2$ .
- $P_{r_i}$  - Presión inicial de la fase  $r$ ,  $kg/cm^2$ .
- $\bar{P}_{ac}$  - Presión promedio del acuífero,  $kg/cm^2$ .
- $\bar{P}_y$  - Presión promedio del área de drene del pozo, ponderada con respecto al volumen poroso que está conectado al acuífero,  $kg/cm^2$ .
- $P_b$  - Presión de cada celda del área de drene del pozo que está conectada al acuífero,  $kg/cm^2$ .
- $P_i$  - Presión inicial del acuífero,  $kg/cm^2$ .
- $P_{wf}$  - Presión de fondo fluyendo (condición de frontera),  $kg/cm^2$ .

- $q_{ac}$  - Gasto del acuífero,  $m^3$  @c.y./día.
- $q_{wb}$  - Ritmo de entrada de agua en la celda del área de drene del pozo que está conectada al acuífero,  $m^3$  @c.y./día.
- $q_{we}$  - Ritmo de entrada de agua global al área de drene del pozo,  $m^3$  @c.y./día.
- $q_p$  - Gasto de aceite o gas, producido por el intervalo disparado (condición de frontera),  $m^3$  @c.s./día.
- $q^*$  - Gasto másico de producción o inyección @c.y. / unidad de volumen de roca,  $m^3$ /día.
- $r$  - Dirección radial de las coordenadas cilíndricas.
- $r_e$  - Radio de drene del pozo, m.
- $r_s$  - Relación de solubilidad del líquido en el gas (contenido líquido de un gas),  $m^3$  de líquido @c.s./ $m^3$  de gas seco @c.s.
- $R_s$  - Relación de solubilidad del gas en el aceite,  $m^3$  de aceite @c.s./ $m^3$  de gas @c.s.
- $r_w$  - Radio del pozo, m.
- $S$  - Saturación, fracción.
- $S_{r_i}$  - Saturación inicial de la fase  $r$ , fracción.
- $t$  - Tiempo, días.
- $T$  - Transmisibilidad de flujo en las fronteras de los nodos.
- TOL-PRE - Tolerancia en presión, usualmente del orden de 0.01 a  $0.001 \text{ kg/cm}^2$ .
- TOL-SAT - Tolerancia en saturación, usualmente del orden de 0.001 a 0.0001.
- $v_f$  - velocidad de flujo, de la fase  $r$ , m/día.
- $V_r$  - Volumen de roca,  $m^3$ .

$V_p$  - Volumen poroso de la roca,  $m^3$ .  
 $V_{pb}$  - Volumen poroso de cada celda conectada al acuífero,  $m^3$ .  
 $W_e$  - Volumen de entrada de agua al área de drene del pozo acumulada.  
 $W_{ei}$  - Volumen inicial de agua en el acuífero @  $P_1$ ,  $m^3$ .  
 $z$  - Dirección vertical de las coordenadas cilíndricas.  
 $z_a - z_b$  - Intervalo disparado del pozo, m.  
 $\bar{A}$  - Matriz de coeficientes.  
 $\bar{x}$  - Vector de incógnitas o de solución.  
 $\bar{b}$  - Vector de términos conocidos.  
 $\bar{L}$  - Matriz triangular inferior.  
 $\bar{U}$  - Matriz triangular superior.  
 $\bar{Q}$  - Matriz de permutación del paquete NSPIV.  
 $NES$  - Número de ecuaciones o de incógnitas.  
 $NB$  - Ancho de banda.  
 $NCT$  - Número de bloques o celdas totales.  
 $NF$  - Número de fases presentes; hasta 3: gas-aceite-agua.  
 $N$  - Número de planos diagonales totales, para el ordenamiento D4.  
 $NED$  - Número de elementos diferentes de cero en la matriz  $\bar{A}$ .  
 $Nr$  - Número de renglones de la matriz  $\bar{A}$ .  
 $\bar{R}$  - Vector donde se almacena el ordenamiento de los renglones de la matriz  $\bar{A}$ .  
 $\bar{C}$  - Vector donde se almacena el ordenamiento de las columnas de la matriz  $\bar{A}$ .  
 $\bar{IC}$  - Vector inverso del ordenamiento de las columnas de la matriz  $\bar{A}$ .  
 $\bar{M}$  - Vector donde se almacenan los elementos diferentes de cero de la matriz  $\bar{A}$ .

- $\overline{JM}$  - Vector donde se almacenan las columnas de los elementos diferentes de cero de la matriz  $\overline{A}$ .
- $\overline{IM}$  - Vector donde se almacena la dirección del primer elemento diferente de cero de la matriz  $\overline{A}$ .
- MAX - Longitud máxima del área de trabajo de la memoria de cómputo, de ciertos arreglos temporales requeridos por el paquete NSPIV.
- $\overline{L}$  - Matriz triangular inferior, con unos en la diagonal principal.
- $\overline{D}$  - Matriz diagonal de los pivotes.
- NSP - Longitud máxima del área de trabajo de la memoria de cómputo, de ciertos arreglos temporales requeridos por el paquete YALE.
- TOLWB - Tolerancia para el cálculo del parámetro de sobrerelajación, usualmente del orden de 0.01.
- $\overline{T}$  - Matriz de coeficientes de la forma tridiagonal, obtenida en el método LSOR.
- $\overline{\delta X}_T$  - Vector solución o de incógnitas en el método LSOR.
- $\overline{r}_T$  - Vector de términos conocidos en el método LSOR.
- $\overline{W}_T$  - Matriz triangular inferior, obtenida en la descomposición de la matriz  $\overline{T}$ .
- $\overline{Q}_T$  - Matriz triangular superior, obtenida en la descomposición de la matriz  $\overline{T}$ .
- $\overline{P}$  - Matriz de coeficientes de la forma pentadiagonal, obtenida en el método BSOR.
- $\overline{\delta X}_P$  - Vector solución o de incógnitas en el método BSOR.
- $\overline{r}_P$  - Vector de términos conocidos en el método BSOR.

## Letras griegas:

- $\theta$  - Dirección angular de las coordenadas cilíndricas.
- $\theta_b$  - Ritmo de convergencia del método LSOR.
- $\mu$  - Viscosidad, cgs.
- $\rho$  - Densidad, gr/cm<sup>3</sup>.
- $\rho(\lambda)$  - Radio espectral de la matriz A.
- $\gamma$  - Peso específico, kg/cm<sup>2</sup>.
- $\phi$  - Porosidad, fracción.
- $\sigma$  - Factor de forma para los bloques de matriz, m.
- $\Phi$  - Potencial de flujo ( $P \pm \gamma$ ), kg/cm<sup>2</sup>.
- $\pi$  - Constante PI = 3.1416.
- $\Delta$  - Operador en diferencias centrales en espacio.
- $\Delta_t$  - Operador en diferencias regresivas en tiempo.
- $\Delta r_i$  - Longitud radial de cada una de las celdas de la malla de cálculo, m.
- $\Delta \theta_j$  - Longitud angular de la celda i,j,k, m.
- $\Delta z_k$  - Longitud vertical de la celda i,j,k, m.
- $\Delta t$  - Incremento de tiempo, días.
- $\Delta We$  - Volumen de entrada de agua acumulada, en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , m<sup>3</sup>.
- $\delta$  - Cambio iterativo del Newton-Raphson:  $\delta x^{(\nu+1)} = x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}$ .
- $\bar{\delta X}$  - Vector de incógnitas.
- $\alpha$  - Factor geométrico de espaciamiento de los nodos en la dirección radial.
- $\varphi$  - Orden del error de truncamiento, en la aproximación de una

derivada mediante el método de diferencias finitas.

$\omega$  - Parámetro de sobrerelajación o factor de peso entre la iteración al nivel de iteración previo y la solución intermedia del método SOR.

**Superíndices:**

$\nu$  - Nivel de iteración previo, en el método de Newton-Raphson.

$\nu+1$  - Nivel de iteración desconocido, en el método de Newton-Raphson.

$n$  - Nivel de tiempo conocido (actual).

$n+1$  - Nivel de tiempo desconocido.

$\eta$  - Nivel de iteración previo, en el método iterativo de solución SOR.

$\eta+1$  - Nivel de iteración desconocido, en el método iterativo de solución SOR.

**Subíndices:**

$f$  - fases: o,g,w

$o$  - fase aceite.

$g$  - fase gas.

$w$  - fase agua.

$r$  - Fracturas.

$m$  - Bloques de matriz.

$r,h$  - radial (horizontal)

$\theta$  - angular (horizontal)

$z,v$  - vertical.

$i,j,k$  - Indices de los bloques de la malla.

$1/2$  - Frontera del bloque de la malla.

REFERENCIAS.

1. RODRIGUEZ de la G., F.: "UN SIMULADOR NUMERICO DEL FENOMENO DE CONIFICACION", Instituto Mexicano del Petróleo, Subdirección de Tecnología de Explotación, División de Yacimientos, Publicación interna, Dic. de 1986.
2. NOLEN, J.S. y BERRY, D.W. : "TEST OF STABILITY AND TIME STEP SENSITIVITY OF SEMI-IMPLICIT RESERVOIR SIMULATION TECHNIQUES", Society of Petroleum Engineers Journal, (Junio 1972), 253-266.
3. Mac DONALD, R.C. y COATS, K.H.: "METHODS FOR NUMERICAL SIMULATION OF WATER AND GAS CONING", Society of Petroleum Engineers Journal, (Dec.) 1970, 425-436.
4. RODRIGUEZ de la G., F.: "UN SIMULADOR NUMERICO DEL FLUJO MULTIFASICO HACIA POZOS NATURALMENTE FRACTURADOS", Revista de la AIPM, Ingeniería Petrolera, Vol. XXVII, No. 6, (Junio 1987), 17-25.
5. KAZEMI, H. ; MERRILL, L.S.jr.; PORTERFIELD, K.L. y ZEMAN, P.R.: "NUMERICAL SIMULATION OF WATER-OIL FLOW IN NATURALLY FRACTURED RESERVOIRS", Society of Petroleum Engineers Journal, (Dec. 1976), 317-326.
6. THOMAS, L.K.; DIXON, T.N. y PIERSON, R.G.: "FRACTURED RESERVOIR SIMULATION", Society of Petroleum Engineers Journal, (Feb. 1983), 42-54.
7. GILMAN, J.R. y KAZEMI, H.: "IMPROVEMENTS IN SIMULATION OF NATURALLY FRACTURED RESERVOIRS", Society of Petroleum Engineers Journal, (Agu. 1983), 695-707.

8. WARREN, J.E. y ROOT, P.J.: "THE BEHAVIOR OF NATURALLY FRACTURED RESERVOIRS", Society of Petroleum Engineers Journal, (Sep. 1963), 245-255.
9. SPIVAK, A. y DIXON, T.N.: "SIMULATION OF GAS-CONDENSATE", SPE 4271. presentado en el "the 3rd Numerical Simulation of Reservoir Performance Symposium of the Society of Petroleum Engineers of AIME. Houston, Tex.", (Enero 1973).
10. FETKOVICH, M.J.: "A SIMPLIFIED APPROACH TO WATER INFLUX CALCULATIONS FINITE AQUIFER SYSTEMS", Journal of Petroleum Technology, (Julio 1971), 814-828.
11. GALINDO N., A.P.: "SIMULADOR NUMERICO PARA EL FLUJO DE UN FLUIDO HACIA UN POZO Y EN SU TUBERIA DE PRODUCCION", Tesis de Licenciatura, Instituto Politécnico Nacional, Mayo de 1985.
12. COATS, K.H.: "SIMULATION OF GAS CONDENSATE RESERVOIR PERFORMANCE", Journal of Petroleum Technology, (Octubre 1985), 1870-1886.
13. MUSKAT, M.: "CALCULATION OF INITIAL FLUID DISTRIBUTIONS IN OIL RESERVOIR", Trans. SPE of AIME, 179 (1949), 119-127.
14. AGUILERA, R.: "RELATIVE PERMEABILITY CONCEPTS FOR PREDICTING THE PERFORMANCE OF NATURALLY FRACTURED RESERVOIRS", Journal of Canadian Petroleum Technology, (Sept. - Oct. 1982), 41-48.

15. AZIZ, K. y SETTARI, A.: "PETROLEUM RESERVOIR SIMULATION", Applied Science Publishers LTD, 1979. London, England.
16. ARREOLA T., M.A. y RODRIGUEZ de la G., F.: "EFECTO DE LA GEOMETRIA DE LA MALLA SOBRE LA ESTABILIDAD DE UN SIMULADOR NUMERICO", Instituto Mexicano del Petr6leo, Subdirecci6n de Tecnolog6a de Explotaci6n, Divisi6n de Yacimientos, Diciembre de 1986.
17. GALINDO N., A.P. y RODRIGUEZ de la G., F.: "CONIMP-FRAC (Versi6n 1.2): SIMULADOR NUMERICO DE LA CONIFICACION DE FLUIDOS HACIA UN POZO PETROLERO. Manual para el usuario", Instituto Mexicano del Petr6leo, Subdirecci6n de Tecnolog6a de Explotaci6n, Divisi6n de Yacimientos, Diciembre de 1988.
18. STONE, H.L.: "ESTIMATION OF THREE-PHASE RELATIVE PERMEABILITY", Trans. SPE of AIME, Vol. 249, 214-218.
19. AZIZ, S. Odeh: "AN OVERVIEW OF MATHEMATICAL MODELING OF THE BEHAVIOR OF HYDROCARBON RESERVOIRS", SIAM Review, Vol. 24, No. 3, (Julio 1982) (Society for Industrial and Applied Mathematics), 263-272.
20. LHORENZ, J.; BRAY, B.G. y CLARK, CH.R.: "CALCULATING VISCOSITIES OF RESERVOIR FLUIDS FROM THEIR COMPOSITIONS", Journal of Petroleum Technology, (Oct. 1964), 1171-1176.
21. PRICE, H.S. y COATS, K.H.: "DIRECT METHODS IN RESERVOIR SIMULATION", Society of Petroleum Engineers Journal, (Junio 1974), 295-328.

APENDICE A: ECUACION DE CONTINUIDAD PARA UN SISTEMA  
COORDENADO CILINDRICO.

En este Apéndice se presenta el desarrollo de la ecuación de continuidad o de conservación, para las fracturas, en coordenadas cilíndricas (r-θ-z), considerando un enfoque composicional. La Fig. A.1 muestra el volumen de control representativo de todo el medio poroso, dominio de interés. Se considera que las fracturas forman un medio continuo y los bloques de matriz un medio discontinuo, de tal forma que las fracturas son las fronteras de los bloques de matriz<sup>5</sup>, y los bloques de matriz actúan como términos fuentes o sumideros en las fracturas.

De acuerdo con el enfoque composicional, se consideran tres fases saturando el medio poroso, aceite, gas y agua, y Nc componentes constituyendo tales fases; cada componente puede existir en cualquiera o en todas las fases, esto es:

<u>FASE</u>	<u>COMPONENTE</u>
ACEITE	COMP. 1
	COMP. 2
GAS	COMP. 3
	⋮
AGUA	COMP. Nc

Las fracciones másicas de los componentes se definen como:

$$C_{ig} = \frac{\text{fracción másica del componente } i \text{ en la fase gas.}}{\text{masa del componente } i} = \frac{\text{masa del componente } i}{\text{masa de la fase gas}}$$

$$C_{io} = \frac{\text{fracción másica del componente } i \text{ en la fase aceite.}}{\text{masa del componente } i} = \frac{\text{masa del componente } i}{\text{masa de la fase aceite}}$$

$$C_{iw} = \frac{\text{fracción másica del componente } i \text{ en la fase agua.}}{\text{masa del componente } i} = \frac{\text{masa del componente } i}{\text{masa de la fase agua}}$$

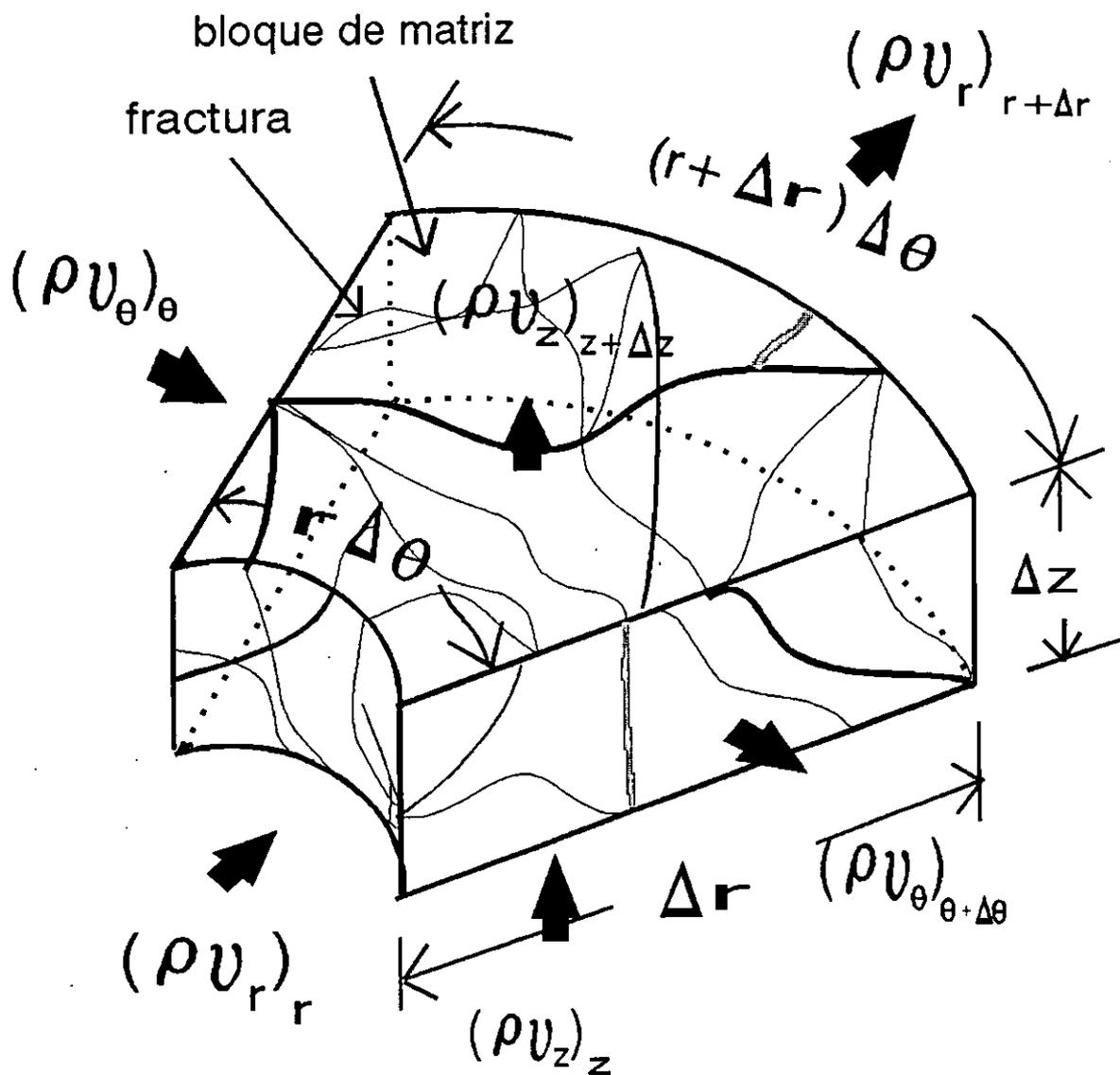


Fig. A.1 Volumen de control para un medio fracturado  
 Sistema coordenado cilíndrico (r-  $\theta$ -z)

por lo que, considerando un sistema isotérmico, la ecuación de conservación para cada componente, está dada como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa del comp. } i \\ \text{que entra al sis-} \\ \text{tema en un } \Delta t. \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{masa del comp. } i \\ \text{que sale del sis-} \\ \text{tema en un } \Delta t. \end{array} \right\} \pm \left\{ \begin{array}{l} \text{masa del comp. } i \text{ adi-} \\ \text{cional debido a fuen-} \\ \text{tes o sumideros en } \Delta t \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Acumulación de masa del} \\ \text{comp. } i \text{ dentro del sis-} \\ \text{tema en un } \Delta t. \end{array} \right\} \quad \dots (A.1)$$

$i=1,2,\dots,N_c$

Cada uno de los términos de la Ec. A.1, está dado como sigue:

primer término,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa del comp. } i \\ \text{que entra al sis-} \\ \text{tema en un } \Delta t. \end{array} \right\} = r\Delta\theta\Delta z\Delta t \left\{ \left( C_{10}\rho_0V_{0r} + C_{1g}\rho_gV_{gr} + C_{1w}\rho_wV_{wr} \right) \right\}_r +$$

$$\Delta r\Delta z\Delta t \left\{ \left( C_{10}\rho_0V_{0\theta} + C_{1g}\rho_gV_{g\theta} + C_{1w}\rho_wV_{w\theta} \right) \right\}_\theta +$$

$$\Delta r \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta\theta\Delta t \left\{ \left( C_{10}\rho_0V_{0z} + C_{1g}\rho_gV_{gz} + C_{1w}\rho_wV_{wz} \right) \right\}_z \quad \dots (A.2)$$

segundo término,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa del comp. } i \\ \text{que sale del sis-} \\ \text{tema en un } \Delta t. \end{array} \right\} = (r+\Delta r)\Delta\theta\Delta z\Delta t \left\{ \left( C_{10}\rho_0V_{0r} + C_{1g}\rho_gV_{gr} + C_{1w}\rho_wV_{wr} \right) \right\}_{r+\Delta r} +$$

$$\Delta r\Delta z\Delta t \left\{ \left( C_{10}\rho_0V_{0\theta} + C_{1g}\rho_gV_{g\theta} + C_{1w}\rho_wV_{w\theta} \right) \right\}_{\theta+\Delta\theta} +$$

$$\Delta r \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta\theta\Delta t \left\{ \left( C_{10}\rho_0V_{0z} + C_{1g}\rho_gV_{gz} + C_{1w}\rho_wV_{wz} \right) \right\}_{z+\Delta z} \quad \dots (A.3)$$

tercer término.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa del comp. i adi-} \\ \text{cional debido a fuen-} \\ \text{tes o sumideros en } \Delta t \end{array} \right\} = \Delta r \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \Delta z \Delta t \left\{ C_{10} q_o^{xx} + C_{1g} q_g^{xx} + C_{1w} q_w^{xx} \right\} \dots (A.4)$$

y cuarto término.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Acumulación de masa} \\ \text{del comp. i dentro} \\ \text{del sistema en un } \Delta t \end{array} \right\} = \Delta r \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \Delta z \left\{ \left( \bar{\phi} C_{10} \bar{\rho}_o \bar{S}_o + \bar{\phi} C_{1g} \bar{\rho}_g \bar{S}_g + \bar{\phi} C_{1w} \bar{\rho}_w \bar{S}_w \right)_{t+\Delta t} - \left( \bar{\phi} C_{10} \bar{\rho}_o \bar{S}_o + \bar{\phi} C_{1g} \bar{\rho}_g \bar{S}_g + \bar{\phi} C_{1w} \bar{\rho}_w \bar{S}_w \right)_t \right\} \dots (A.5)$$

donde:  $q_r^{xx} = (qp)_r$  ; gasto másico.

Substituyendo cada uno de estos términos, Ecs. A.2 a A.5, en la Ec.

A.1, agrupando y reorganizando términos semejantes, se tiene:

$$\begin{aligned} & \Delta \theta \Delta z \Delta t \left\{ \left( r + \Delta r \right) \left( C_{10} \rho_o v_o_r + C_{1g} \rho_g v_g_r + C_{1w} \rho_w v_w_r \right)_{r+\Delta r} - r \left( C_{10} \rho_o v_o_r + C_{1g} \rho_g v_g_r + C_{1w} \rho_w v_w_r \right)_r \right\} \\ & - \Delta r \Delta z \Delta t \left\{ \left( C_{10} \rho_o v_o_\theta + C_{1g} \rho_g v_g_\theta + C_{1w} \rho_w v_w_\theta \right)_{\theta+\Delta \theta} - \left( C_{10} \rho_o v_o_\theta + C_{1g} \rho_g v_g_\theta + C_{1w} \rho_w v_w_\theta \right)_\theta \right\} \\ & - \Delta r \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \Delta t \left\{ \left( C_{10} \rho_o v_o_z + C_{1g} \rho_g v_g_z + C_{1w} \rho_w v_w_z \right)_{z+\Delta z} - \left( C_{10} \rho_o v_o_z + C_{1g} \rho_g v_g_z + C_{1w} \rho_w v_w_z \right)_z \right\} \\ & + \Delta r \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \Delta z \Delta t \left\{ C_{10} q_o^{xx} + C_{1g} q_g^{xx} + C_{1w} q_w^{xx} \right\} = \Delta r \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \Delta z \left\{ \bar{\phi} C_{10} \bar{\rho}_o \bar{S}_o + \bar{\phi} C_{1g} \bar{\rho}_g \bar{S}_g + \bar{\phi} C_{1w} \bar{\rho}_w \bar{S}_w \right\} \end{aligned}$$

$$\left. \left. \bar{\phi} \bar{C}_{1w} \bar{\rho}_w \bar{S}_w \right)_{t+\Delta t} - \left( \bar{\phi} \bar{C}_{1o} \bar{\rho}_o \bar{S}_o + \bar{\phi} \bar{C}_{1g} \bar{\rho}_g \bar{S}_g + \bar{\phi} \bar{C}_{1w} \bar{\rho}_w \bar{S}_w \right)_t \right\} \quad \dots (A.6)$$

en donde los signos del término de la masa del comp. i adicional, se toma como sigue:

El signo (+) indica que se está adicionando masa al sistema, y el signo (-) indica que se está extrayendo masa del sistema.

Independientemente de la convención de signos, se toma el signo positivo de este término en la Ec. A.6.

Dividiendo a la Ec. A.6 entre  $\Delta r \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \Delta z \Delta t$  y tomando límites cuando  $\Delta r$ ,  $\Delta \theta$ ,  $\Delta z$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ , se tiene:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{r + \frac{\Delta r}{2}} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta r} \left\{ \left( r + \Delta r \right) \left( C_{1o} \rho_o v_{o_r} + C_{1g} \rho_g v_{g_r} + C_{1w} \rho_w v_{w_r} \right)_{r+\Delta r} - \right. \\ & \left. r \left( C_{1o} \rho_o v_{o_r} + C_{1g} \rho_g v_{g_r} + C_{1w} \rho_w v_{w_r} \right)_r \right\} - \frac{1}{r + \frac{\Delta r}{2}} \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \theta} \left\{ \left( C_{1o} \rho_o v_{o_\theta} + \right. \right. \\ & \left. \left. C_{1g} \rho_g v_{g_\theta} + C_{1w} \rho_w v_{w_\theta} \right)_{\theta+\Delta \theta} - \left( C_{1o} \rho_o v_{o_\theta} + C_{1g} \rho_g v_{g_\theta} + C_{1w} \rho_w v_{w_\theta} \right)_\theta \right\} - \\ & \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left\{ \left( C_{1o} \rho_o v_{o_z} + C_{1g} \rho_g v_{g_z} + C_{1w} \rho_w v_{w_z} \right)_{z+\Delta z} - \left( C_{1o} \rho_o v_{o_z} + C_{1g} \rho_g v_{g_z} \right. \right. \\ & \left. \left. C_{1w} \rho_w v_{w_z} \right)_z \right\} + C_{1o} q_o^* + C_{1g} q_g^* + C_{1w} q_w^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left( \bar{\phi} \bar{C}_{1o} \bar{\rho}_o \bar{S}_o + \bar{\phi} \bar{C}_{1g} \bar{\rho}_g \bar{S}_g \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \left. \left. \bar{\phi} \bar{C}_{1w} \bar{\rho}_w \bar{S}_w \right)_{t+\Delta t} - \left( \bar{\phi} \bar{C}_{1o} \bar{\rho}_o \bar{S}_o + \bar{\phi} \bar{C}_{1g} \bar{\rho}_g \bar{S}_g + \bar{\phi} \bar{C}_{1w} \bar{\rho}_w \bar{S}_w \right)_t \right\} \dots (A.7)$$

para  $i=1, 2, \dots, N_c$

donde:  $q^*$  = gasto másico por unidad de volumen de roca.

Entonces, de acuerdo con la definición de una derivada parcial, se llega a la siguiente ecuación de continuidad para el flujo multifásico con intercambio de masa entre fases, considerando un sistema coordenado cilíndrico:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( C_{1o} \rho_o v_{o_r} + C_{1g} \rho_g v_{g_r} + C_{1w} \rho_w v_{w_r} \right) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ C_{1o} \rho_o v_{o_\theta} + C_{1g} \rho_g v_{g_\theta} + \right. \\ \left. C_{1w} \rho_w v_{w_\theta} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ C_{1o} \rho_o v_{o_z} + C_{1g} \rho_g v_{g_z} + C_{1w} \rho_w v_{w_z} \right] + C_{1o} q_o^* + C_{1g} q_g^* + \\ C_{1w} q_w^* = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \phi \left( C_{1o} \rho_o S_o + C_{1g} \rho_g S_g + C_{1w} \rho_w S_w \right) \right] \dots (A.8) \end{aligned}$$

para  $i=1, 2, \dots, N_c$

donde  $q^*$  se interpreta como los bloques de matriz interactuando con las fracturas en forma de términos fuentes o sumideros.

APENDICE B. APROXIMACION DE LAS ECUACIONES DE FLUJO MEDIANTE  
EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

En este Apéndice se presenta la discretización de las ecuaciones del flujo multifásico, gas-aceite-agua, hacia un pozo, en un yacimiento naturalmente fracturado, Ecs. 2.41 a 2.46, empleando el método de diferencias finitas<sup>11,15</sup>.

Antes de discretizar las ecuaciones diferenciales, se presenta la definición de las diferencias centrales, progresivas y regresivas, en espacio y de las diferencias regresivas, en tiempo.

Las diferencias centrales en espacio se definen como:

Considerando una sola dirección, se tiene:

-para una derivada de primer orden,

$$\left[ \frac{du}{d\varepsilon} \right]_i^{n+1} \cong \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta\varepsilon_i} ; \quad \varphi(\Delta\varepsilon^2) \quad \dots (B.1)$$

-para una derivada de segundo orden,

$$\left[ \frac{d^2u}{d\varepsilon^2} \right]_i^{n+1} \cong \frac{1}{\Delta\varepsilon_i} \left\{ \left( \frac{1}{\Delta\varepsilon} \right)_{i+1/2} (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - \left( \frac{1}{\Delta\varepsilon} \right)_{i-1/2} (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) \right\} \\ \varphi(\Delta\varepsilon^2) \quad \dots (B.2)$$

Las diferencias progresivas en espacio se definen como:

-para una sola dirección,

$$\left[ \frac{du}{d\varepsilon} \right]_i^{n+1} \cong \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta\varepsilon_i} ; \quad \varphi(\Delta\varepsilon) \quad \dots (B.3)$$

Las diferencias regresivas en espacio se definen como:

-para una sola dirección,

$$\left[ \frac{du}{d\varepsilon} \right]_i^{n+1} \cong \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta\varepsilon_i} ; \quad \varphi(\Delta\varepsilon) \quad \dots (B.4)$$

Las diferencias regresivas en tiempo, se definen como:

-para una sola dirección,

$$\left[ \frac{du}{d\tau} \right]_i^{n+1} \cong \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta\tau} ; \quad \varphi(\Delta\tau) \quad \dots (B.5)$$

Discretizando las ecuaciones de flujo diferenciales, se tiene:

Empleando diferencias centrales, Ec. B.2, para los términos de flujo de la ecuación del **ACEITE**, Ec. 2.45, se obtiene:

Trabajando primero con los términos en las **FRACTURAS**:

-En la dirección radial (r); multiplicando y dividiendo por 2 a este término, para reorganizarlo de la siguiente manera:

$$\frac{2}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = 2 \frac{\partial}{\partial r^2} \quad \dots (B.6)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r k_h \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial P_o}{\partial r} \right\} \right]_{i,j,k}^{n+1} &= \left[ 2 \frac{\partial}{\partial r^2} \left\{ r k_h \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial P_o}{\partial r} \right\} \right]_{i,j,k}^{n+1} \\ &\cong \frac{2}{(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)} \left\{ \left( \frac{r}{\Delta r} k_h \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right)_{i+1/2,j,k}^{n+1} \left( P_o_{i+1,j,k}^{n+1} - P_o_{i,j,k}^{n+1} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{r}{\Delta r} k_h \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right)_{i-1/2,j,k}^{n+1} \left( P_o_{i,j,k}^{n+1} - P_o_{i-1,j,k}^{n+1} \right) \right\} \quad \dots (B.7) \end{aligned}$$

En la dirección angular,

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ k_\theta \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial P_o}{\partial \theta} \right\} \right]_{i,j,k}^{n+1} \cong \frac{1}{r_i^2 \Delta\theta_j} \left\{ \left( \frac{k_\theta}{\Delta\theta} \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right)_{i,j+1/2,k}^{n+1} \left( P_o_{i,j+1,k}^{n+1} \right) \right.$$

$$- P_o^{n+1}_{i,j,k} - \left( \frac{k_\theta b_{okro}}{\Delta\theta \mu_o} \right)^{n+1}_{i,j-1/2,k} \left( P_o^{n+1}_{i,j,k} - P_o^{n+1}_{i,j-1,k} \right) \quad \dots (B.8)$$

En la dirección vertical,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ k_v \frac{b_{okro}}{\mu_o} \left( \frac{\partial P_o}{\partial z} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial z} \right) \right\} \right]^{n+1}_{i,j,k} \cong \frac{1}{\Delta z_k} \left\{ \left( \frac{k_v b_{okro}}{\Delta z \mu_o} \right)^{n+1}_{i,j,k+1/2} \right. \\ \left. \left[ P_o^{n+1}_{i,j,k+1} - P_o^{n+1}_{i,j,k} - \left( \gamma_o \Delta D \right)^{n+1}_{i,j,k+1/2} \right] - \left( \frac{k_v b_{okro}}{\Delta z \mu_o} \right)^{n+1}_{i,j,k+1/2} \right. \\ \left. \left[ P_o^{n+1}_{i,j,k} - P_o^{n+1}_{i,j,k-1} - \left( \gamma_o \Delta D \right)^{n+1}_{i,j,k-1/2} \right] \right\} \quad \dots (B.9)$$

Empleando diferencias regresivas en tiempo, Ec. B.5, para los términos de acumulación de esta ecuación, se tiene:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi b_o S_o \right) \right]^{n+1}_{i,j,k} \cong \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left( \phi b_o S_o \right)^{n+1}_{i,j,k} - \left( \phi b_o S_o \right)^n_{i,j,k} \right\} \quad \dots (B.10)$$

El término proveniente de los bloques de matriz de la Ec. 2.45, se aproxima directamente como:

$$\left[ \sigma k_{lm} \frac{b_{omkrom}}{\mu_{om}} \left( P_{om} - P_o \right) \right]^{n+1}_{i,j,k} \cong \left( \sigma k_{lm} \frac{b_{omkrom}}{\mu_{om}} \right)^{n+1}_{i,j,k} \left( P_{om}^{n+1}_{i,j,k} - P_o^{n+1}_{i,j,k} \right) \quad \dots (B.11)$$

Se tiene una contribución similar, en cada uno de estos términos, Ecs. B.7 a B.10, del aceite disuelto en el gas cuando se desea manejar fluidos de gas y condensado.

Substituyendo las Ecs. B.7 a B.11 en la Ec. 2.26 y

multiplicándola por el volumen de roca, definido como:

$$V_{r_{i,j,k}} = \left( r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2 \right) \frac{\Delta \theta_j}{2} \Delta z_k \quad \dots (B.12)$$

se tiene:

En las **FRACTURAS**.

**ACEITE,**

$$\begin{aligned} & T_{or_{i+1/2,j,k}}^{n+1} \left( P_o^{n+1}{}_{i+1,j,k} - P_o^{n+1}{}_{i,j,k} \right) - T_{or_{i-1/2,j,k}}^{n+1} \left( P_o^{n+1}{}_{i,j,k} - P_o^{n+1}{}_{i-1,j,k} \right) + \\ & T_{o\theta_{i,j+1/2,k}}^{n+1} \left( P_o^{n+1}{}_{i,j+1,k} - P_o^{n+1}{}_{i,j,k} \right) - T_{o\theta_{i,j-1/2,k}}^{n+1} \left( P_o^{n+1}{}_{i,j,k} - P_o^{n+1}{}_{i,j-1,k} \right) + \\ & T_{oz_{i,j,k+1/2}}^{n+1} \left[ P_o^{n+1}{}_{i,j,k+1} - P_o^{n+1}{}_{i,j,k} - \left( \gamma_o \Delta D \right)_{i,j,k+1/2}^{n+1} \right] - \\ & T_{oz_{i,j,k-1/2}}^{n+1} \left[ P_o^{n+1}{}_{i,j,k} - P_o^{n+1}{}_{i,j,k-1} - \left( \gamma_o \Delta D \right)_{i,j,k-1/2}^{n+1} \right] + \\ & \left( T_{gr} r_S \right)_{i+1/2,j,k}^{n+1} \left( P_g^{n+1}{}_{i+1,j,k} - P_g^{n+1}{}_{i,j,k} \right) - \\ & \left( T_{gr} r_S \right)_{i-1/2,j,k}^{n+1} \left( P_g^{n+1}{}_{i,j,k} - P_g^{n+1}{}_{i-1,j,k} \right) + \\ & \left( T_{g\theta} r_S \right)_{i,j+1/2,k}^{n+1} \left( P_g^{n+1}{}_{i,j+1,k} - P_g^{n+1}{}_{i,j,k} \right) - \\ & \left( T_{g\theta} r_S \right)_{i,j-1/2,k}^{n+1} \left( P_g^{n+1}{}_{i,j,k} - P_g^{n+1}{}_{i,j-1,k} \right) + \\ & \left( T_{gz} r_S \right)_{i,j,k+1/2}^{n+1} \left[ P_g^{n+1}{}_{i,j,k+1} - P_g^{n+1}{}_{i,j,k} - \left( \gamma_g \Delta D \right)_{i,j,k+1/2}^{n+1} \right] - \\ & \left( T_{gz} r_S \right)_{i,j,k-1/2}^{n+1} \left[ P_g^{n+1}{}_{i,j,k} - P_g^{n+1}{}_{i,j,k-1} - \left( \gamma_g \Delta D \right)_{i,j,k-1/2}^{n+1} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_{om}^{n+1} \left( P_{om}^{n+1} - P_o^{n+1} \right) + \left( T_{gm} r_{sm} \right)_{i,j,k}^{n+1} \left( P_{gm}^{n+1} - P_g^{n+1} \right) \\
& = \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \left\{ \left( \phi b_o S_o \right)^{n+1} - \left( \phi b_o S_o \right)^n + \left( \phi b_g r_s S_g \right)^{n+1} - \left( \phi b_g r_s S_g \right)^n \right\}_{i,j,k} \\
& \dots (B.13)
\end{aligned}$$

donde las transmisibilidades del **ACEITE** y del **GAS** se definen como:

**ACEITE.**

En la dirección radial,

$$\begin{aligned}
T_{or}^{n+1}{}_{i \pm 1/2, j, k} & = \left\{ \left( \frac{r}{\Delta r} \right)_{i \pm 1/2} \Delta \theta_j \Delta z_k k_{h_{i \pm 1/2, j, k}} \right\} \left( \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right)_{i \pm 1/2, j, k}^{n+1} \\
& = COR_{i \pm 1/2, j, k} \left( \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right)_{i \pm 1/2, j, k}^{n+1} \dots (B.14)
\end{aligned}$$

En la dirección angular,

$$\begin{aligned}
T_{o\theta}^{n+1}{}_{i, j \pm 1/2, k} & = \left\{ \frac{(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)}{2r_i^2} \Delta z_k \left( \frac{k_\theta}{\Delta \theta} \right)_{i, j \pm 1/2, k} \right\} \left( \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right)_{i, j \pm 1/2, k}^{n+1} \\
& = COT_{i, j \pm 1/2, k} \left( \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right)_{i, j \pm 1/2, k}^{n+1} \dots (B.15)
\end{aligned}$$

En la dirección vetical,

$$\begin{aligned}
T_{oz}^{n+1}{}_{i, j, k \pm 1/2} & = \left\{ \frac{(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)}{2} \Delta \theta_j \left( \frac{k_v}{\Delta z} \right)_{i, j, k \pm 1/2} \right\} \left( \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right)_{i, j, k \pm 1/2}^{n+1} \\
& = COZ_{i, j, k \pm 1/2} \left( \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right)_{i, j, k \pm 1/2}^{n+1} \dots (B.16)
\end{aligned}$$

**GAS,**

En la dirección radial,

$$T_{gr}^{n+1}{}_{i \pm 1/2, j, k} = \text{COR}_{i \pm 1/2, j, k} \left( \frac{b_g k r_g}{\mu_g} \right)_{i \pm 1/2, j, k}^{n+1} \quad \dots (B.17)$$

En la dirección angular,

$$T_{g\theta}^{n+1}{}_{i, j \pm 1/2, k} = \text{COT}_{i, j \pm 1/2, k} \left( \frac{b_g k r_g}{\mu_g} \right)_{i, j \pm 1/2, k}^{n+1} \quad \dots (B.18)$$

En la dirección vetical,

$$T_{gz}^{n+1}{}_{i, j, k \pm 1/2} = \text{COZ}_{i, j, k \pm 1/2} \left( \frac{b_g k r_g}{\mu_g} \right)_{i, j, k \pm 1/2}^{n+1} \quad \dots (B.19)$$

y para los términos provenientes de los bloques de matriz, las transmisibilidades se definen como:

**ACEITE,**

$$T_{om}{}_{i, j, k} = V_{r}{}_{i, j, k} \sigma k_{hm}{}_{i, j, k} \left( \frac{b_{om} k r_{om}}{\mu_{om}} \right)_{i, j, k}^{n+1} \quad \dots (B.20)$$

**y GAS,**

$$T_{gm}{}_{i, j, k} = V_{r}{}_{i, j, k} \sigma k_{hm}{}_{i, j, k} \left( \frac{b_{gm} k r_{gm}}{\mu_{gm}} \right)_{i, j, k}^{n+1} \quad \dots (B.21)$$

Para simplificar la escritura de la Ec. B.13, ésta se puede escribir mediante operadores en diferencias, quedando como:

$$\Delta \left[ T_o \left( \Delta P_o - \gamma_o \Delta D \right) \right]_{i, j, k}^{n+1} + \Delta \left[ T_g r_s \left( \Delta P_g - \gamma_g \Delta D \right) \right]_{i, j, k}^{n+1} +$$

$$T_{om}{}_{i, j, k}^{n+1} \left( P_{om}{}_{i, j, k}^{n+1} - P_o{}_{i, j, k}^{n+1} \right) + \left( T_{gm} r_{sm} \right)_{i, j, k}^{n+1} \left( P_{gm}{}_{i, j, k}^{n+1} - P_g{}_{i, j, k}^{n+1} \right)$$

$$= \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \left( \phi b_o S_o \right) + \left( \phi b_{gr} S_g \right) \right\}_{i,j,k} \quad \dots (B.22)$$

donde estos operadores en diferencias se definen de la siguiente forma<sup>1</sup>:

$$\Delta \left[ U \right]_{i,j,k}^{n+1} = \Delta_R \left[ U \right]_{i,j,k}^{n+1} + \Delta_T \left[ U \right]_{i,j,k}^{n+1} + \Delta_Z \left[ U \right]_{i,j,k}^{n+1} \quad \dots (B.23)$$

en donde:

$$\Delta_R \left[ U \right]_{i,j,k}^{n+1} = U_{i+1/2,j,k}^{n+1} - U_{i-1/2,j,k}^{n+1} \quad \dots (B.24)$$

$$\Delta_T \left[ U \right]_{i,j,k}^{n+1} = U_{i,j+1/2,k}^{n+1} - U_{i,j-1/2,k}^{n+1} \quad \dots (B.25)$$

$$\Delta_Z \left[ U \right]_{i,j,k}^{n+1} = U_{i,j,k+1/2}^{n+1} - U_{i,j,k-1/2}^{n+1} \quad \dots (B.26)$$

y

$$\Delta_t \left[ U \right]_{i,j,k} = U_{i,j,k}^{n+1} - U_{i,j,k}^n \quad \dots (B.27)$$

En forma similar a la Ec. B.22, las ecuaciones en diferencias para el **GAS** y el **AGUA**, Ecs. 2.46 y 2.47, están dadas como:

**GAS,**

$$\begin{aligned} & \Delta \left[ T_g \left( \Delta P_g - \gamma_g \Delta D \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + \Delta \left[ T_o R_S \left( \Delta P_o - \gamma_o \Delta D \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + \\ & T_{gm}^{n+1} \left( P_{gm}^{n+1} - P_g^{n+1} \right) + \left( T_{om} R_{Sm} \right)_{i,j,k}^{n+1} \left( P_{om}^{n+1} - P_o^{n+1} \right) \\ & = \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \left( \phi b_g S_g \right) + \left( \phi b_o R S S_o \right) \right\}_{i,j,k} \quad \dots (B.28) \end{aligned}$$

y AGUA,

$$\Delta \left[ T_w \left( \Delta P_w - \gamma_w \Delta D \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + T_{wm}^{n+1}{}_{i,j,k} \left( P_{wm}^{n+1}{}_{i,j,k} - P_w^{n+1}{}_{i,j,k} \right) = \frac{V_r{}_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left( \phi b_w S_w \right)_{i,j,k} \quad \dots (B.29)$$

donde las transmisibilidades del AGUA se definen como:

En la dirección radial,

$$T_{wr}^{n+1}{}_{i \pm 1/2, j, k} = \text{COR}_{i \pm 1/2, j, k} \left( \frac{b_w k_{rw}}{\mu_w} \right)_{i \pm 1/2, j, k}^{n+1} \quad \dots (B.30)$$

En la dirección angular,

$$T_{w\theta}^{n+1}{}_{i, j \pm 1/2, k} = \text{COT}_{i, j \pm 1/2, k} \left( \frac{b_w k_{rw}}{\mu_w} \right)_{i, j \pm 1/2, k}^{n+1} \quad \dots (B.31)$$

En la dirección vetical,

$$T_{wz}^{n+1}{}_{i, j, k \pm 1/2} = \text{COZ}_{i, j, k \pm 1/2} \left( \frac{b_w k_{rw}}{\mu_w} \right)_{i, j, k \pm 1/2}^{n+1} \quad \dots (B.32)$$

y para el término proveniente de los bloques de matriz, la transmisibilidad se definen como:

$$T_{wm}^{n+1}{}_{i,j,k} = V_r{}_{i,j,k} \sigma k_{hm}{}_{i,j,k} \left( \frac{b_{wm} k_{rwm}}{\mu_{wm}} \right)_{i,j,k}^{n+1} \quad \dots (B.33)$$

Para las ecuaciones de los **BLOQUES DE MATRIZ**, Ec. 2.48, 2.49 y 2.50, los términos de acumulación se aproximan empleando la Ec. B.5, por lo que estas ecuaciones escritas con el operador de diferencias regresivas en tiempo, Ec. B.27, están dadas como sigue:

**ACEITE.**

$$\begin{aligned}
 T_{om}^{n+1}{}_{i,j,k} & \left( P_{om}^{n+1}{}_{i,j,k} - P_o^{n+1}{}_{i,j,k} \right) + \left( T_{gm} r_{sm} \right)_{i,j,k}^{n+1} \left( P_{gm}^{n+1}{}_{i,j,k} - P_g^{n+1}{}_{i,j,k} \right) \\
 & = \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \left( \phi_m b_{om} S_{om} \right) + \left( \phi_m b_{gm} r_{sm} S_{gm} \right) \right\}_{i,j,k} \dots (B.34)
 \end{aligned}$$

**GAS.**

$$\begin{aligned}
 T_{gm}^{n+1}{}_{i,j,k} & \left( P_{gm}^{n+1}{}_{i,j,k} - P_g^{n+1}{}_{i,j,k} \right) + \left( T_{om} R_{sm} \right)_{i,j,k}^{n+1} \left( P_{om}^{n+1}{}_{i,j,k} - P_o^{n+1}{}_{i,j,k} \right) \\
 & = \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \left( \phi_m b_{gm} S_{gm} \right) + \left( \phi_m b_{om} R_{sm} S_{om} \right) \right\}_{i,j,k} \dots (B.35)
 \end{aligned}$$

**y AGUA.**

$$T_{wm}^{n+1}{}_{i,j,k} \left( P_{wm}^{n+1}{}_{i,j,k} - P_w^{n+1}{}_{i,j,k} \right) = \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t \left( \phi_m b_{wm} S_{wm} \right)_{i,j,k} \dots (B.36)$$

A las transmisibilidades, de las **FRACTURAS** y de los **BLOQUES DE MATRIZ**, Ecs. B.14 a B.21 y de B.30 a B.33, se le agrega la constante 8.36399, para emplear el siguiente conjunto de unidades (MKS), en vez del sistema DARCY<sup>11</sup>:

Por ejemplo, la Ec. B.14 queda ahora como:

$$T_o^{n+1}{}_{i \pm 1/2, j, k} = 8.36399 \text{ COR}_{i \pm 1/2, j, k} \left( \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right)_{i \pm 1/2, j, k}^{n+1} \dots (B.37)$$

en donde:

$P$ [kg/cm <sup>2</sup> ]	$\mu$ [centipoise]
$C_r$ [1/kg/cm <sup>2</sup> ]	$t$ [días]
$\phi$ [fracción]	$q$ [m <sup>3</sup> /día]
$k$ [Darcy]	$r$ [ m ]
$\gamma$ [kg/cm <sup>2</sup> ]	$\Delta r$ [ m ]
$S$ [fracción]	$\Delta z$ [ m ]
$\rho$ [gr/cm <sup>3</sup> ]	$\Delta\theta$ [radianes]

y en forma similar a la Ec. B.37, se le agrega esta constante a las ecuaciones de las transmisibilidades de las otras dos direcciones y a las otras dos fases restantes.

APENDICE C: ACOPLAMIENTO DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA EN  
LAS ECUACIONES DE FLUJO EN DIFERENCIAS.

En este Apéndice se presenta el acoplamiento de las condiciones de frontera, Ecs. 2.57 a 2.66, únicamente en las ecuaciones de flujo en las fracturas en diferencias, Ecs. 3.6 a 3.8, debido a la suposición de que solo las fracturas conducen a los fluidos hacia el intervalo productor, ya que éstas son las fronteras de los bloques de matriz<sup>1,6</sup>:

Trabajando con la ecuación del flujo del **ACEITE** en las **FRACTURAS** en diferencias, Ec. 3.6, se tiene:

Expandiendo a la Ec. 3.6 solo en la dirección radial y aplicandola a las celdas 1,j,k, vecinas al pozo, se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \text{Tor}_{1.5,j,k} \left[ P_{o,2,j,k} - P_{o,1,j,k} \right] - \text{Tor}_{.5,j,k} \left[ P_{o,1,j,k} - P_{o,0,j,k} \right] + \\
 & \Delta_{\theta} \left[ T_{o\theta} \Delta_{\theta} P_o \right]_{1,j,k} + \Delta_Z \left\{ T_{oZ} \left[ \Delta_Z P_o - \gamma_o \Delta_Z D \right] \right\}_{1,j,k} + \left( T_{gr} r_S \right)_{1.5,j,k} \\
 & \left[ P_{o,2,j,k} - P_{o,1,j,k} + P_{cgo,2,j,k} - P_{cgo,1,j,k} \right] - \left( T_{gr} r_S \right)_{.5,j,k} \left[ P_{o,1,j,k} \right. \\
 & \left. - P_{o,0,j,k} + P_{cgo,1,j,k} - P_{cgo,0,j,k} \right] + \Delta_{\theta} \left\{ \left( T_{g\theta} r_S \right) \Delta_{\theta} \left[ P_o + P_{cgo} \right] \right\}_{1,j,k} \\
 & + \Delta_Z \left\{ \left( T_{gZ} r_S \right) \left[ \Delta_Z \left( P_o + P_{cgo} \right) - \gamma_g \Delta_Z D \right] \right\}_{1,j,k} + \left\{ T_{om} \left[ P_{om} - P_o \right] \right\}_{1,j,k} + \\
 & \left\{ \left( T_{gm} r_{S10} \right) \left[ P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo} \right] \right\}_{1,j,k} = \frac{Vr_{1,j,k}}{\Delta t} \left\{ \left[ \phi b_o (1 - S_g - S_w) \right] \right. \\
 & \left. \left[ \phi b_{gr} r_S S_g \right] \right\}_{1,j,k} \dots (C.1)
 \end{aligned}$$

donde:  $P_{o, j, k} = P_{wf}$  presión de fondo fluyendo en el intervalo disparado.

Si la Ec. C.1 se aplica fuera del intervalo disparado, los siguientes términos:

$$Tor_{.5, j, k}^* [P_{o, 1, j, k} - P_{wf}] \quad \dots (C.2)$$

$$y \quad (T_{gr} r_s)_{.5, j, k} [P_{o, 1, j, k} - P_{wf} + P_{cgo, 1, j, k}] \quad \dots (C.3)$$

son iguales a cero, de acuerdo con la condición de frontera interna cerrada al flujo, Ec. 2.60.

Si la Ec. C.1 se aplica dentro del intervalo disparado ( $z_a - z_b$ ), entonces las Ecs. C.2 y C.3, son los términos correspondientes al gasto de producción, a condiciones de superficie, fluyendo a través de las celdas 1, j, k, ésto es:

El término  $Tor_{.5, j, k}^*$  se define como:

$$Tor_{.5, j, k}^* = \left\{ \frac{\Delta\theta_j \Delta z_k}{\ln\left(\frac{r_1}{r_w}\right)} k_{h, .5, j, k} \right\} \left( \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right)_{.5, j, k} \quad \dots (C.4)$$

y el término  $(T_{gr} r_s)_{.5, j, k}$  se define como:

$$\left( T_{gr} r_s \right)_{.5, j, k} = \left\{ \frac{\Delta\theta_j \Delta z_k}{\ln\left(\frac{r_1}{r_w}\right)} k_{h, .5, j, k} \right\} \left( \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} r_s \right)_{.5, j, k} \quad \dots (C.5)$$

Por otra parte, la condición de frontera a gasto constante, Ec. 2.57, en la que se considera un solo arco en la dirección angular, se puede discretizar en M celdas productoras, situadas a lo largo del intervalo disparado como:

$$q_{o, j} = \sum_{m=1}^M \left\{ \Delta\theta_j \Delta z_m k_{h, .5, j, k} \left[ \left( \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right) \left( r \frac{\partial P_o}{\partial r} \right) + \left( \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} r_s \right) \left( r \frac{\partial P_g}{\partial r} \right) \right]_{.5, j, k} \right\} \quad \dots (C.6)$$

donde, la derivada parcial de la presión con respecto a la dirección radial, de la Ec. C.6, se puede aproximar como:

$$\left( r \frac{\partial P_r}{\partial r} \right)_{.5, j, m} = \left( \frac{\partial P_r}{\partial \ln r} \right)_{.5, j, m} \cong \frac{P_{r_{1, j, m}} - P_{wf}}{\ln \left( \frac{r_1}{r_w} \right)} \quad \text{para } r = \quad \quad \quad \dots (C.7)$$

por lo que, substituyendo la Ec. C.7 en la Ec. C.6 y comparándola con las Ecs. C.4 y C.5, se establece:

$$q_{o_j} = \sum_{m=1}^M \left\{ T_{or}^*_{.5, j, m} (P_{o_{1, j, m}} - P_{wf}) + \left( T_{gr}^* r_S \right)_{.5, j, m} (P_{o_{1, j, m}} - P_{wf} + P_{cgo_{1, j, k}}) \right\} = \sum_{m=1}^M q_{o_{j, m}} \quad \dots (C.8)$$

De la Ec. C.8 se define el gasto de producción de la celda  $j, m$  como:

$$q_{o_{j, m}} = \left\{ T_{or}^*_{.5, j, m} (P_{o_{1, j, m}} - P_{wf}) + \left( T_{gr}^* r_S \right)_{.5, j, m} (P_{o_{1, j, m}} - P_{wf} + P_{cgo_{1, j, k}}) \right\} \quad \dots (C.9)$$

Por lo que, substituyendo la Ec. C.9 en la Ec. C.1, ésta se simplifica como:

$$T_{or}_{1.5, j, m} [P_{o_{2, j, m}} - P_{o_{1, j, m}}] - q_{o_{j, m}} + \Delta_{\theta} [T_{o\theta} \Delta_{\theta} P_o]_{1, j, m} + \Delta_Z \left\{ T_{oZ} [ \Delta_Z P_o - \gamma_o \Delta_Z D ] \right\}_{1, j, m} + \left( T_{gr} r_S \right)_{1.5, j, m} [P_{o_{2, j, m}} - P_{o_{1, j, m}} +$$

$$\begin{aligned}
& P_{cgo_{2,j,m}} - P_{cgo_{1,j,m}} + \Delta_{\theta} \left\{ \left( T_{g\theta} r_S \right) \Delta_{\theta} \left[ P_o + P_{cgo} \right] \right\}_{1,j,m} + \Delta_Z \left\{ \left( T_{gz} \right. \right. \\
& \left. \left. r_S \right) \left[ \Delta_Z \left( P_o + P_{cgo} \right) - \gamma_g \Delta_Z D \right] \right\}_{1,j,m} + \left\{ T_{om} \left[ P_{om} - P_o \right] \right\}_{1,j,m} + \left\{ \left( T_{gm} \right. \right. \\
& \left. \left. r_{SM} \right) \left[ P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo} \right] \right\}_{1,j,m} = \frac{Vr_{1,j,k}}{\Delta t} \left\{ \left[ \phi b_o (1 - S_g - S_w) \right] + \right. \\
& \left. \left[ \phi b_g r_S S_g \right] \right\}_{1,j,m} \dots (C.10)
\end{aligned}$$

El gasto de producción,  $q_{o,j,m}$  de las celdas ubicadas a lo largo del intervalo disparado,  $m=1,2,\dots,M$ , se asigna prorrateando este gasto  $q_o$ , de acuerdo con el método de movilidades<sup>1,2</sup>, esto es:

$$q_{o,j,m} = \frac{T_{or} \cdot_{5,j,m} + \left( T_{gr} r_S \right) \cdot_{5,j,m}}{\sum_{m=1}^M \left\{ T_{or} + \left( T_{gr} r_S \right) \right\} \cdot_{5,j,m}} q_o \dots (C.11)$$

Los gastos de **GAS** y **AGUA** en las ecuaciones en diferencias correspondientes, Ecs. 3.7 y 3.8, en términos del gasto de producción  $q_{o,j,m}$ , están dados como:

Para el **GAS**,

$$q_{g,j,m} = \left\{ RS_{j,m} + \frac{T_{gr} \cdot_{5,j,m}}{\sum_{m=1}^M \left\{ T_{or} + \left( T_{gr} r_S \right) \right\} \cdot_{5,j,m}} \right\} q_{o,j,m} \dots (C.12)$$

Y para el **AGUA**,

$$Q_{W_{j,m}} = \frac{T_{wr} \cdot 5, j, m}{\sum_{m=1}^M \left\{ T_{or} + \left( T_{gr} r_S \right) \right\} \cdot 5, j, m} Q_{o_{j,m}} \quad \dots (C.13)$$

Por otra parte, la ecuación en diferencias del **ACEITE**, para el caso de un pozo produciendo a una presión de fondo dada, condición de frontera dada por la Ec. 2.59, es directamente la Ec. C.1

Al aplicar las condiciones de frontera restante, Ecs. 2.61 a 2.66, a la Ec. C.1, ésta se comporta de la siguiente forma:

Para  $i=NR$ , condición de frontera cerrada al flujo, Ec. 2.61, la Ec. C.1 se define como:

$$\begin{aligned} & T_{or_{NR-1/2, j, m}} \left[ P_{o_{NR, j, m}} - P_{o_{NR-1, j, m}} \right] + \Delta_{\theta} \left[ T_{o\theta} \Delta_{\theta} P_o \right]_{NR, j, m} + \Delta_Z \left\{ T_{oZ} \left[ \Delta_Z P_o - \gamma_o \right. \right. \\ & \left. \left. \Delta_Z D \right] \right\}_{NR, j, m} + \left( T_{gr} r_S \right)_{NR-1/2, j, m} \left[ P_{o_{NR, j, m}} - P_{o_{NR-1, j, m}} + P_{cgo_{NR, j, m}} - P_{cgo_{NR-1, j, m}} \right] \\ & + \Delta_{\theta} \left\{ \left( T_{g\theta} r_S \right) \Delta_{\theta} \left[ P_o + P_{cgo} \right] \right\}_{NR, j, m} + \Delta_Z \left\{ \left( T_{gZ} r_S \right) \left[ \Delta_Z \left( P_o + P_{cgo} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \gamma_g \Delta_Z D \right] \right\}_{NR, j, m} + \left\{ T_{om} \left[ P_{om} - P_o \right] \right\}_{NR, j, m} + \left\{ \left( T_{gm} r_{Sm} \right) \left[ P_{om} - P_o + P_{cgom} - \right. \right. \\ & \left. \left. P_{cgo} \right] \right\}_{NR, j, m} = \frac{Vr_{NR, j, k}}{\Delta t} \left\{ \left[ \phi b_o (1 - S_g - S_w) \right] + \left[ \phi b_g r_S S_g \right] \right\}_{NR, j, m} \quad \dots (C.14) \end{aligned}$$

Para  $j=1$ , expandiendo solo en la dirección angular, se tienen dos casos:

a) Cuando existe continuidad en esta dirección, condición de

frontera dada por la Ec. 2.62, la Ec. C.1 se define como:

$$\begin{aligned}
 & \Delta_R \left[ T_{or} \quad \Delta r P_o \right]_{i,1,k} + T_o \theta_{i,1.5,k} \left[ P_{o,1,2,k} - P_{o,1,1,k} \right] - T_o \theta_{i,1.5,k} \left[ P_{o,1,1,k} \right. \\
 & \left. - P_{o,1,NT,k} \right] + \Delta_Z \left\{ T_o Z \left[ \Delta_Z P_o - \gamma_o \Delta_Z D \right] \right\}_{i,1,k} + \Delta_R \left[ \left( T_{gr} r_S \right) \Delta_R \left( P_o + \right. \right. \\
 & \left. \left. P_{cgo} \right) \right]_{i,1,k} + \left( T_{g\theta} r_S \right)_{i,1.5,k} \left[ P_{o,1,2,k} - P_{o,1,1,k} + P_{cgo,1,2,k} - P_{cgo,1,1,k} \right] \\
 & - \left( T_{g\theta} r_S \right)_{i,1.5,k} \left[ P_{o,1,1,k} - P_{o,1,NT,k} + P_{cgo,1,1,k} - P_{cgo,1,NT,k} \right] + \Delta_Z \left\{ \left( T_{gZ} \right. \right. \\
 & \left. \left. r_S \right) \left[ \Delta_Z \left( P_o + P_{cgo} \right) - \gamma_g \Delta_Z D \right] \right\}_{i,1,k} + \left\{ T_{om} \left[ P_{om} - P_o \right] \right\}_{i,1,k} + \left\{ \left( T_{gm} \right. \right. \\
 & \left. \left. r_{sm} \right) \left[ P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo} \right] \right\}_{i,1,k} = \frac{Vr_{i,1,k}}{\Delta t} \left\{ \left[ \phi b_o (1 - S_g - S_w) \right] + \right. \\
 & \left. \left[ \phi b_g r_S S_g \right] \right\}_{i,1,k} \quad \dots (C.15)
 \end{aligned}$$

b) Cuando no existe continuidad en esta dirección, condición de frontera dada por la Ec. 2.63, la Ec. C.1 se define como:

$$\begin{aligned}
 & \Delta_R \left[ T_{or} \quad \Delta r P_o \right]_{i,1,k} + T_o \theta_{i,1.5,k} \left[ P_{o,1,2,k} - P_{o,1,1,k} \right] + \Delta_Z \left\{ T_o Z \left[ \Delta_Z P_o - \right. \right. \\
 & \left. \left. \gamma_o \Delta_Z D \right] \right\}_{i,1,k} + \Delta_R \left[ \left( T_{gr} r_S \right) \Delta_R \left( P_o + P_{cgo} \right) \right]_{i,1,k} + \left( T_{g\theta} r_S \right)_{i,1.5,k} \left[ P_{o,1,2,k} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - P_{o_{1,1,k}} + P_{cgo_{1,2,k}} - P_{cgo_{1,1,k}} \Big\} + \Delta_Z \left\{ \left( T_{gz} \ r_S \right) \left[ \Delta_Z \left( P_o + P_{cgo} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. \gamma_g \Delta_Z D \right] \right\}_{1,1,k} + \left\{ T_{om} \left[ P_{om} - P_o \right] \right\}_{1,1,k} + \left\{ \left( T_{gm} \ r_{SM} \right) \left[ P_{om} - P_o + P_{cgom} - \right. \right. \\
& \left. \left. P_{cgo} \right] \right\}_{1,1,k} = \frac{Vr_{1,1,k}}{\Delta t} \left\{ \left[ \phi b_o (1 - S_g - S_w) \right] + \left[ \phi b_g r_S S_g \right] \right\}_{1,1,k} \quad \dots (C.16)
\end{aligned}$$

Para  $j=NT$ , se tienen dos casos:

a) Cuando existe continuidad en esta dirección, condición de frontera dada por la Ec. 2.62, la Ec. C.1 se define como:

$$\begin{aligned}
& \Delta_r \left[ T_{or} \ \Delta_r P_o \right]_{1,NT,k} + T_{o\theta_{1,5,k}} \left[ P_{o_{1,1,k}} - P_{o_{1,NT,k}} \right] - T_{o\theta_{1,NT-1/2,k}} \\
& \left[ P_{o_{1,NT,k}} - P_{o_{1,NT-1,k}} \right] + \Delta_Z \left\{ T_{oz} \left[ \Delta_Z P_o - \gamma_o \Delta_Z D \right] \right\}_{1,NT,k} + \Delta_r \left\{ \left( T_{gr} \ r_S \right) \right. \\
& \left. \Delta_r \left( P_o + P_{cgo} \right) \right\}_{1,NT,k} + \left( T_{g\theta} \ r_S \right)_{1,5,k} \left[ P_{o_{1,1,k}} - P_{o_{1,NT,k}} + P_{cgo_{1,1,k}} - \right. \\
& \left. P_{cgo_{1,NT,k}} \right] - \left( T_{g\theta} \ r_S \right)_{1,NT-1/2,k} \left[ P_{o_{1,NT,k}} - P_{o_{1,NT-1,k}} + P_{cgo_{1,NT,k}} - \right. \\
& \left. P_{cgo_{1,NT-1,k}} \right] \Big\} + \Delta_Z \left\{ \left( T_{gz} \ r_S \right) \left[ \Delta_Z \left( P_o + P_{cgo} \right) - \gamma_g \Delta_Z D \right] \right\}_{1,NT,k} + \\
& \left\{ T_{om} \left[ P_{om} - P_o \right] \right\}_{1,NT,k} + \left\{ \left( T_{gm} \ r_{SM} \right) \left[ P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo} \right] \right\}_{1,NT,k} = \\
& \frac{Vr_{1,NT,k}}{\Delta t} \left\{ \left[ \phi b_o (1 - S_g - S_w) \right] + \left[ \phi b_g r_S S_g \right] \right\}_{1,NT,k} \quad \dots (C.17)
\end{aligned}$$

b) Cuando no existe continuidad en esta dirección, condición de frontera dada por la Ec. 2.64, la Ec. C.1 se define como:

$$\begin{aligned}
 & \Delta_r \left[ \text{Tor} \Delta_r P_o \right]_{i, NT, k} - T_o \theta_{i, NT-1/2, k} \left[ P_o_{i, NT, k} - P_o_{i, NT-1, k} \right] + \Delta_z \left\{ T_o z \left[ \Delta_z P_o - \right. \right. \\
 & \left. \left. \gamma_o \Delta_z D \right] \right\}_{i, NT, k} + \Delta_r \left[ \left( T_{gr} r_s \right) \Delta_r \left( P_o + P_{cgo} \right) \right]_{i, NT, k} + \left( T_{g\theta} r_s \right)_{i, NT-1/2, k} \\
 & \left[ P_o_{i, NT, k} - P_o_{i, NT-1, k} + P_{cgo_{i, NT, k}} - P_{cgo_{i, NT-1, k}} \right] \left. \right\} + \Delta_z \left\{ \left( T_{gz} r_s \right) \right. \\
 & \left. \left[ \Delta_z \left( P_o + P_{cgo} \right) - \gamma_g \Delta_z D \right] \right\}_{i, NT, k} + \left\{ T_{om} \left[ P_{om} - P_o \right] \right\}_{i, NT, k} + \left\{ \left( T_{gm} r_{sm} \right) \right. \\
 & \left. \left[ P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo} \right] \right\}_{i, NT, k} = \frac{V_r_{i, NT, k}}{\Delta t} \left\{ \left[ \phi b_o (1 - S_g - S_w) \right] + \right. \\
 & \left. \left[ \phi b_g r_s S_g \right] \right\}_{i, NT, k} \dots (C.18)
 \end{aligned}$$

Para  $k=1$ , expandiendo solo en la dirección vertical y considerando la condición de frontera cerrada al flujo, Ec. 2.65, la Ec. C.1 se define como:

$$\begin{aligned}
 & \Delta_r \left[ \text{Tor} \Delta_r P_o \right]_{i, j, 1} + \Delta_\theta \left[ T_o \theta \Delta_\theta P_o \right]_{i, j, 1} + T_o z_{i, j, 1.5} \left[ P_o_{i, j, 2} - P_o_{i, j, 1} \right. \\
 & \left. - \left( \gamma_o \Delta D \right)_{i, j, 1.5} \right] + \Delta_r \left[ \left( T_{gr} r_s \right) \Delta_r \left( P_o + P_{cgo} \right) \right]_{i, j, 1} + \Delta_\theta \left[ \left( T_{g\theta} r_s \right) \Delta_\theta \left( P_o \right. \right. \\
 & \left. \left. + P_{cgo} \right) \right]_{i, j, 1} + \left( T_{gz} r_s \right)_{i, j, 1.5} \left[ P_o_{i, j, 2} - P_o_{i, j, 1} + P_{cgo_{i, j, 2}} - P_{cgo_{i, j, 1}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \gamma_g \Delta D \right)_{i,j,1.5} \left. \right\} + \left\{ T_{om} \left[ P_{om} - P_o \right] \right\}_{i,j,1} + \left\{ \left( T_{gm} r_{SM} \right) \left[ P_{om} - P_o + P_{cgom} \right. \right. \\
& \left. \left. - P_{cgo} \right] \right\}_{i,j,1} = \frac{V_r_{i,j,1}}{\Delta t} \left\{ \left[ \phi b_o (1 - S_g - S_w) \right] + \left[ \phi b_g r_s S_g \right] \right\}_{i,j,1} \quad \dots (C.19)
\end{aligned}$$

y para  $k=NZ$ , considerando la condición de frontera cerrada al flujo, Ec. 2.66, la Ec. C.1 se define como:

$$\begin{aligned}
& \Delta_r \left[ T_{or} \Delta_r P_o \right]_{i,j,NZ} + \Delta_\theta \left[ T_{o\theta} \Delta_\theta P_o \right]_{i,j,NZ} - T_{oz}_{i,j,NZ-1} \left[ P_{o_{i,j,NZ}} - \right. \\
& P_{o_{i,j,NZ-1}} - \left. \left( \gamma_o \Delta D \right)_{i,j,NZ-1/2} \right] + \Delta_r \left[ \left( T_{gr} r_s \right) \Delta_r \left( P_o + P_{cgo} \right) \right]_{i,j,NZ} + \\
& \Delta_\theta \left[ \left( T_{g\theta} r_s \right) \Delta_\theta \left( P_o + P_{cgo} \right) \right]_{i,j,NZ} - \left( T_{gz} r_s \right)_{i,j,NZ-1} \left[ P_{o_{i,j,NZ}} - P_{o_{i,j,NZ-1}} \right. \\
& P_{cgo_{i,j,NZ}} - P_{cgo_{i,j,NZ-1}} - \left. \left( \gamma_g \Delta D \right)_{i,j,NZ-1/2} \right] + \left\{ T_{om} \left[ P_{om} - P_o \right] \right\}_{i,j,NZ} \\
& \left\{ \left( T_{gm} r_{SM} \right) \left[ P_{om} - P_o + P_{cgom} - P_{cgo} \right] \right\}_{i,j,NZ} = \frac{V_r_{i,j,NZ}}{\Delta t} \left\{ \left[ \phi b_o (1 - S_g - S_w) \right] \right. \\
& \left. + \left[ \phi b_g r_s S_g \right] \right\}_{i,j,NZ} \quad \dots (C.20)
\end{aligned}$$

La aplicación de las condiciones de frontera a las ecuaciones del **GAS** y del **AGUA**, se realiza en forma similar a la ecuación del **ACEITE**.

Una vez resuelta la nueva distribución de presiones y saturaciones, se calculan los gastos de **ACEITE**, **GAS** y **AGUA**. El gasto de **ACEITE** a través de la celda  $m$  se calcula a partir de la Ec. C.9;

la suma de éstos es entonces el gasto de producción de **ACEITE** del pozo, Ec. C.8. Los gastos de producción de **GAS** y de **AGUA**, para la capa  $m$  son:

Para el **GAS**,

$$Q_{g,j,m} = T_{gr}^*_{.5,j,m} \left( P_{o_{1,j,m}} - P_{wf} + P_{cgo_{1,j,m}} \right) + \left( T_{orRS}^* \right)_{.5,j,m} \left( P_{o_{1,j,m}} - P_{wf} \right) \quad \dots (C.21)$$

Y para el **AGUA**,

$$Q_{w,j,m} = T_{wr}^*_{.5,j,m} \left( P_{o_{1,j,m}} - P_{wf} - P_{cwo_{1,j,m}} \right) \quad \dots (C.22)$$

por lo que, la suma de estos gastos, de acuerdo al número de capas,  $m$ , en que se discretiza el intervalo disparado, son los gastos de producción de **GAS** y **AGUA** en el pozo.

APENDICE D: ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE LOS BLOQUES DE  
MATRIZ EN LAS ECUACIONES DE LAS FRACTURAS.

En este Apéndice se describe el acoplamiento de las ecuaciones de los bloques de matriz en las ecuaciones de las fracturas, reduciendo el número de incógnitas de seis a tres y de esta forma no incrementar substancialmente el trabajo y la memoria de cómputo requerida por un simulador numérico para yacimientos naturalmente fracturados. Esta idea es presentada inicialmente por **THOMAS y Cols.**<sup>6</sup>, después fue extendida y detallada por **RODRIGUEZ**<sup>4</sup> para una formulación totalmente implícita.

Empleando solamente la parte inferior del sistema lineal de ecuaciones, dado por la Ec. 3.42, se puede establecer el siguiente subsistema matricial<sup>4</sup>:

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial F_o}{\partial P_o} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_g} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_w} \right)_{i,j,k} \\ \left( \frac{\partial F_g}{\partial P_o} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_g} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_w} \right)_{i,j,k} \\ \left( \frac{\partial F_w}{\partial P_o} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_g} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_w} \right)_{i,j,k} \end{bmatrix}^{(\nu)} \begin{bmatrix} \delta P_o_{i,j,k} \\ \delta S_g_{i,j,k} \\ \delta S_w_{i,j,k} \end{bmatrix}^{(\nu+1)} + \\ \\ \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial P_{om}} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{gm}} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{wm}} \right)_{i,j,k} \\ \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_{om}} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{gm}} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{wm}} \right)_{i,j,k} \\ \left( \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_{om}} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{gm}} \right)_{i,j,k} & \left( \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{wm}} \right)_{i,j,k} \end{bmatrix}^{(\nu)} \begin{bmatrix} \delta P_{om}_{i,j,k} \\ \delta S_{gm}_{i,j,k} \\ \delta S_{wm}_{i,j,k} \end{bmatrix}^{(\nu+1)} = - \begin{bmatrix} F_{om}_{i,j,k} \\ F_{gm}_{i,j,k} \\ F_{wm}_{i,j,k} \end{bmatrix}^{(\nu)} \dots (D.1)$$

Para despejar a las incógnitas de los bloques de matriz,  $\delta P_{om}$ ,  $\delta S_{gm}$  y  $\delta S_{wm}$ , de la Ec. D.1, se multiplica a esta ecuación por la inversa de la submatriz de coeficientes de los bloques de matriz, definidas como:

**SUBMATRIZ DE COEFICIENTES DE LOS BLOQUES DE MATRIZ,**

$$- \begin{matrix} (\nu) \\ J_m \\ 1, j, k \end{matrix} = \begin{matrix} \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial P_{om}} \right) & \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{gm}} \right) & \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{wm}} \right) \\ \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_{om}} \right) & \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{gm}} \right) & \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{wm}} \right) \\ \left( \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_{om}} \right) & \left( \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{gm}} \right) & \left( \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{wm}} \right) \end{matrix} \quad \dots (D.2)$$

**E INVERSA DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES DE LOS BLOQUES DE MATRIZ,**

$$- \begin{matrix} -1 \\ J_m \\ 1, j, k \end{matrix} = \frac{1}{|J_m|} \begin{matrix} \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{gm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{wm}} - \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{wm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{gm}} \right) \\ \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_{om}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{wm}} - \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{wm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_{om}} \right) \\ \left( \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_{om}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{gm}} - \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{gm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_{om}} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{wm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{gm}} - \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{gm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{wm}} \right) \\ \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{wm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_{om}} - \frac{\partial F_{om}}{\partial P_{om}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{wm}} \right) \\ \left( \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{gm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_{om}} - \frac{\partial F_{om}}{\partial P_{om}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{gm}} \right) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{om_{1,j,k}}}{\partial S_{wm_{1,j,k}}} \frac{\partial F_{gm_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} - \frac{\partial F_{om_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} \frac{\partial F_{gm_{1,j,k}}}{\partial S_{wm_{1,j,k}}} \\ \frac{\partial F_{om_{1,j,k}}}{\partial S_{wm_{1,j,k}}} \frac{\partial F_{gm_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} - \frac{\partial F_{om_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} \frac{\partial F_{gm_{1,j,k}}}{\partial S_{wm_{1,j,k}}} \\ \frac{\partial F_{om_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} \frac{\partial F_{gm_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} - \frac{\partial F_{om_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} \frac{\partial F_{gm_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} \end{array} \right] \dots (D.3)
\end{aligned}$$

donde el determinante  $|J_m|$  está dado como:

$$\begin{aligned}
|J_m| &= \frac{\partial F_{om_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} \left\{ \frac{\partial F_{gm_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} \frac{\partial F_{wm_{1,j,k}}}{\partial S_{wm_{1,j,k}}} - \frac{\partial F_{gm_{1,j,k}}}{\partial S_{wm_{1,j,k}}} \frac{\partial F_{wm_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} \right\} - \\
& \frac{\partial F_{om_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} \left\{ \frac{\partial F_{gm_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} \frac{\partial F_{wm_{1,j,k}}}{\partial S_{wm_{1,j,k}}} - \frac{\partial F_{gm_{1,j,k}}}{\partial S_{wm_{1,j,k}}} \frac{\partial F_{wm_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} \right\} + \\
& \frac{\partial F_{om_{1,j,k}}}{\partial S_{wm_{1,j,k}}} \left\{ \frac{\partial F_{gm_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} \frac{\partial F_{wm_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} - \frac{\partial F_{gm_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} \frac{\partial F_{wm_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} \right\} \dots (D.4)
\end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior, multiplicando a la Ec. D.1 por la Ec. D.3, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{J_m} \frac{-1}{J} \begin{bmatrix} \delta P_{o_{1,j,k}} \\ \delta S_{g_{1,j,k}} \\ \delta S_{w_{1,j,k}} \end{bmatrix}^{(V+1)} + \frac{-1}{J_m} \frac{-1}{J_m} \begin{bmatrix} \delta P_{om_{1,j,k}} \\ \delta S_{gm_{1,j,k}} \\ \delta S_{wm_{1,j,k}} \end{bmatrix}^{(V+1)} = - \frac{-1}{J_m} \begin{bmatrix} F_{om_{1,j,k}} \\ F_{gm_{1,j,k}} \\ F_{wm_{1,j,k}} \end{bmatrix}^{(V)} \dots (D.5)
\end{aligned}$$

Dado que el producto  $\frac{-1}{J_m} \frac{-1}{J_m}$  es igual a la matriz identidad, se puede despejar de la Ec. D.5 a las incógnitas de los bloques de matriz, quedando como:

$$\begin{bmatrix} \delta P_{om} \\ \delta S_{gm} \\ \delta S_{wm} \end{bmatrix}_{i,j,k}^{(\nu+1)} = - \frac{-1}{J_m} \frac{-}{J} \begin{bmatrix} \delta P_o \\ \delta S_g \\ \delta S_w \end{bmatrix}_{i,j,k}^{(\nu+1)} - \frac{-1}{J_m} \begin{bmatrix} F_{om} \\ F_{gm} \\ F_{wm} \end{bmatrix}_{i,j,k}^{(\nu)} \dots (D.6)$$

Efectuando el producto  $\left( \frac{-1}{J_m} \frac{-}{J} \right)$  y absorbiendo el signo en el determinante, se tiene que:

$$\frac{-1}{J_m} \frac{-}{J} = \begin{bmatrix} \alpha_{oo} & \alpha_{og} & \alpha_{ow} \\ \alpha_{go} & \alpha_{gg} & \alpha_{gw} \\ \alpha_{wo} & \alpha_{wg} & \alpha_{ww} \end{bmatrix}_{i,j,k} \dots (D.7)$$

donde los elementos  $\alpha$ 's, de la Ec. D.7, se definen como:

Para el primer renglón,

$$\begin{aligned} \alpha_{oo} &= \left[ \frac{\partial F_{om}}{\partial P_o} \left\{ \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{gm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{wm}} - \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{wm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{gm}} \right\} \right. \\ &+ \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_o} \left\{ \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{wm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{gm}} - \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{gm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{wm}} \right\} \\ &\left. \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_o} \left\{ \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{wm}} \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{gm}} - \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{gm}} \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{wm}} \right\} \right] \bigg/ -|J_m| \end{aligned} \dots (D.8)$$

o bien, en forma compacta:

$$\alpha_{oo} = \left[ \frac{\partial F_{om}}{\partial P_o} \sigma_{gw}^S + \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_o} \sigma_{ow}^S \right]_{i,j,k}$$

$$\left. \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_o} \frac{\partial F_{om}}{\partial S_g} \sigma_{og}^S \right] / -|J_m| \quad \dots (D.9)$$

$$\alpha_{og} = \left[ \frac{\partial F_{om}}{\partial S_g} \sigma_{gw}^S + \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_g} \sigma_{ow}^S - \right.$$

$$\left. \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_g} \sigma_{og}^S \right] / -|J_m| \quad \dots (D.10)$$

$$\alpha_{ow} = \left[ \frac{\partial F_{om}}{\partial S_w} \sigma_{gw}^S + \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_w} \sigma_{ow}^S - \right.$$

$$\left. \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_w} \sigma_{og}^S \right] / -|J_m| \quad \dots (D.11)$$

Para el segundo renglón,

$$\alpha_{go} = \left[ - \frac{\partial F_{om}}{\partial P_o} \left\{ \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_{om}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{wm}} - \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{wm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_{om}} \right\} - \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_o} \left\{ \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{wm}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_{om}} - \frac{\partial F_{om}}{\partial P_{om}} \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{wm}} \right\} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial F_{wm}}{\partial P_o} \left\{ \frac{\partial F_{om}}{\partial S_{wm}} \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_{om}} - \frac{\partial F_{om}}{\partial P_{om}} \frac{\partial F_{gm}}{\partial S_{wm}} \right\} \right] / -|J_m|$$

... (D.12)

o bien, en forma compacta:

$$\alpha_{go} = \left[ - \frac{\partial F_{om}}{\partial P_o} \sigma_{gw}^P - \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_o} \sigma_{ow}^P + \right.$$

$$\left. \frac{\partial F_{wm,1,j,k}}{\partial P_{o,1,j,k}} \sigma_{og,1,j,k}^P \right] / -|J_m| \quad \dots (D.13)$$

$$\alpha_{gg,1,j,k} = \left[ - \frac{\partial F_{om,1,j,k}}{\partial S_{g,1,j,k}} \sigma_{gw,1,j,k}^P - \frac{\partial F_{gm,1,j,k}}{\partial S_{g,1,j,k}} \sigma_{ow,1,j,k}^P + \right.$$

$$\left. \frac{\partial F_{wm,1,j,k}}{\partial S_{g,1,j,k}} \sigma_{og,1,j,k}^P \right] / -|J_m| \quad \dots (D.14)$$

$$\alpha_{gw,1,j,k} = \left[ - \frac{\partial F_{om,1,j,k}}{\partial S_{w,1,j,k}} \sigma_{gw,1,j,k}^P - \frac{\partial F_{gm,1,j,k}}{\partial S_{w,1,j,k}} \sigma_{ow,1,j,k}^P + \right.$$

$$\left. \frac{\partial F_{wm,1,j,k}}{\partial S_{w,1,j,k}} \sigma_{og,1,j,k}^P \right] / -|J_m| \quad \dots (D.15)$$

Y para el tercer renglón,

$$\alpha_{wo,1,j,k} = \left[ \frac{\partial F_{om,1,j,k}}{\partial P_{o,1,j,k}} \left\{ \frac{\partial F_{gm,1,j,k}}{\partial P_{om,1,j,k}} \frac{\partial F_{wm,1,j,k}}{\partial S_{gm,1,j,k}} - \frac{\partial F_{gm,1,j,k}}{\partial S_{gm,1,j,k}} \frac{\partial F_{wm,1,j,k}}{\partial P_{om,1,j,k}} \right\} \right.$$

$$+ \frac{\partial F_{gm,1,j,k}}{\partial P_{o,1,j,k}} \left\{ \frac{\partial F_{om,1,j,k}}{\partial S_{gm,1,j,k}} \frac{\partial F_{wm,1,j,k}}{\partial P_{om,1,j,k}} - \frac{\partial F_{om,1,j,k}}{\partial P_{om,1,j,k}} \frac{\partial F_{wm,1,j,k}}{\partial S_{gm,1,j,k}} \right\} -$$

$$\left. \frac{\partial F_{wm,1,j,k}}{\partial P_{o,1,j,k}} \left\{ \frac{\partial F_{om,1,j,k}}{\partial S_{gm,1,j,k}} \frac{\partial F_{gm,1,j,k}}{\partial P_{om,1,j,k}} - \frac{\partial F_{om,1,j,k}}{\partial P_{om,1,j,k}} \frac{\partial F_{gm,1,j,k}}{\partial S_{gm,1,j,k}} \right\} \right] / -|J_m|$$

... (D.16)

o bien, en forma compacta:

$$\alpha_{wo,1,j,k} = \left[ \frac{\partial F_{om,1,j,k}}{\partial P_{o,1,j,k}} \sigma_{gw,1,j,k}^{P,S} + \frac{\partial F_{gm,1,j,k}}{\partial P_{o,1,j,k}} \sigma_{ow,1,j,k}^{P,S} - \right.$$

$$\left[ \frac{\partial F_{wm_{i,j,k}}}{\partial P_o} \sigma_{og_{i,j,k}}^{P,S} \right] / -|J_m| \quad \dots (D.17)$$

$$\alpha_{wg_{i,j,k}} = \left[ \frac{\partial F_{om_{i,j,k}}}{\partial S_g} \sigma_{gw_{i,j,k}}^{P,S} + \frac{\partial F_{gm_{i,j,k}}}{\partial S_g} \sigma_{ow_{i,j,k}}^{P,S} \right]$$

$$\left[ \frac{\partial F_{wm_{i,j,k}}}{\partial S_g} \sigma_{og_{i,j,k}}^{P,S} \right] / -|J_m| \quad \dots (D.18)$$

$$\alpha_{ww_{i,j,k}} = \left[ \frac{\partial F_{om_{i,j,k}}}{\partial S_w} \sigma_{gw_{i,j,k}}^{P,S} + \frac{\partial F_{gm_{i,j,k}}}{\partial S_w} \sigma_{ow_{i,j,k}}^{P,S} \right]$$

$$\left[ \frac{\partial F_{wm_{i,j,k}}}{\partial S_w} \sigma_{og_{i,j,k}}^{P,S} \right] / -|J_m| \quad \dots (D.19)$$

y también, efectuando el producto del vector de residuos con  $J_m^{-1}$  y absorbiendo el signo en el determinante, se tiene que:

$$J_m^{-1} \begin{bmatrix} F_{om_{i,j,k}} \\ F_{gm_{i,j,k}} \\ F_{wm_{i,j,k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_o_{i,j,k} \\ \beta_g_{i,j,k} \\ \beta_w_{i,j,k} \end{bmatrix} \quad \dots (D.20)$$

donde los elementos  $\beta$ 's, de la Ec. D.20, se definen como:

$$\beta_o_{i,j,k} = \left[ F_{om_{i,j,k}} \sigma_{gw_{i,j,k}}^S + F_{gm_{i,j,k}} \sigma_{ow_{i,j,k}}^S + F_{wm_{i,j,k}} \sigma_{og_{i,j,k}}^S \right] / -|J_m| \quad \dots (D.21)$$

$$\beta_g_{i,j,k} = \left[ - F_{om_{i,j,k}} \sigma_{gw_{i,j,k}}^P - F_{gm_{i,j,k}} \sigma_{ow_{i,j,k}}^P + \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc} F_{wm} & \sigma_{og}^P \\ 1, j, k & 1, j, k \end{array} \right] / -|J_m| \quad \dots (D.22)$$

$$\beta_w & 1, j, k = \left[ \begin{array}{cc} F_{om} & \sigma_{gw}^{P,S} \\ 1, j, k & 1, j, k \end{array} + \frac{\partial F_{gm}}{\partial P_o} \sigma_{ow}^{P,S} \right. & 1, j, k$$

$$\left. \left[ \begin{array}{cc} F_{wm} & \sigma_{og}^{P,S} \\ 1, j, k & 1, j, k \end{array} \right] / -|J_m| \quad \dots (D.23)$$

Substituyendo las Ecs. D.7 y D.20 en la Ec. D.6, se establece el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \delta P_{om} \\ \delta S_{gm} \\ \delta S_{wm} \end{bmatrix}_{1, j, k}^{(\nu+1)} = \begin{bmatrix} \alpha_{oo} & \alpha_{og} & \alpha_{ow} \\ \alpha_{go} & \alpha_{gg} & \alpha_{gw} \\ \alpha_{wo} & \alpha_{wg} & \alpha_{ww} \end{bmatrix}_{1, j, k}^{(\nu)} \begin{bmatrix} \delta P_o \\ \delta S_g \\ \delta S_w \end{bmatrix}_{1, j, k}^{(\nu+1)} + \begin{bmatrix} \beta_o \\ \beta_g \\ \beta_w \end{bmatrix}_{1, j, k}^{(\nu)} \quad \dots (D.24)$$

Despejando de la Ec. D.24 a las incógnitas de los bloques de matriz,  $\delta P_{om}$ ,  $\delta S_{gm}$  y  $\delta S_{wm}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \delta P_{om} & 1, j, k^{(\nu+1)} = \left\{ \alpha_{oo}^{(\nu)} \delta P_o^{(\nu+1)} + \alpha_{og}^{(\nu)} \delta S_g^{(\nu+1)} + \alpha_{ow}^{(\nu)} \delta S_w^{(\nu+1)} + \beta_o^{(\nu)} \right\}_{1, j, k} \\ \delta S_{gm} & 1, j, k^{(\nu+1)} = \left\{ \alpha_{go}^{(\nu)} \delta P_o^{(\nu+1)} + \alpha_{gg}^{(\nu)} \delta S_g^{(\nu+1)} + \alpha_{gw}^{(\nu)} \delta S_w^{(\nu+1)} + \beta_g^{(\nu)} \right\}_{1, j, k} \\ \delta S_{wm} & 1, j, k^{(\nu+1)} = \left\{ \alpha_{wo}^{(\nu)} \delta P_o^{(\nu+1)} + \alpha_{wg}^{(\nu)} \delta S_g^{(\nu+1)} + \alpha_{ww}^{(\nu)} \delta S_w^{(\nu+1)} + \beta_w^{(\nu)} \right\}_{1, j, k} \end{aligned} \quad \dots (D.25)$$

El paso siguiente, es acoplar estas nuevas definiciones de las incógnitas de los bloques de matriz, Ec. D.25, en las ecuaciones de las fracturas, Ecs. 3.31, 3.32 y 3.33:

tomando primeramente la ecuación del **ACEITE**, se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l m n} \left\{ \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial P_{o, l m n}} \right)^{(\nu)} \delta P_{o, l m n}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial S_{g, l m n}} \right)^{(\nu)} \delta S_{g, l m n}^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial S_{w, l m n}} \right)^{(\nu)} \delta S_{w, l m n}^{(\nu+1)} \right\} \\
 & + \left\{ \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial P_{o, j, k}} \right)^{(\nu)} + \alpha_{oo, j, k}^{(\nu)} \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial P_{om, j, k}} \right)^{(\nu)} + \alpha_{go, j, k}^{(\nu)} \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial S_{gm, j, k}} \right)^{(\nu)} + \alpha_{wo, j, k}^{(\nu)} \right. \\
 & \quad \left. \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial S_{wm, j, k}} \right)^{(\nu)} \right\} \delta P_{o, j, k}^{(\nu+1)} + \left\{ \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial S_{g, j, k}} \right)^{(\nu)} + \alpha_{og, j, k}^{(\nu)} \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial P_{om, j, k}} \right)^{(\nu)} + \right. \\
 & \quad \left. \alpha_{gg, j, k}^{(\nu)} \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial S_{gm, j, k}} \right)^{(\nu)} + \alpha_{wg, j, k}^{(\nu)} \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial S_{wm, j, k}} \right)^{(\nu)} \right\} \delta S_{g, j, k}^{(\nu+1)} + \\
 & \quad \left\{ \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial S_{w, j, k}} \right)^{(\nu)} + \alpha_{ow, j, k}^{(\nu)} \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial P_{om, j, k}} \right)^{(\nu)} + \alpha_{gw, j, k}^{(\nu)} \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial S_{gm, j, k}} \right)^{(\nu)} + \right. \\
 & \quad \left. \alpha_{ww, j, k}^{(\nu)} \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial S_{wm, j, k}} \right)^{(\nu)} \right\} \delta S_{w, j, k}^{(\nu+1)} = - \left\{ F_{o, j, k}^{(\nu)} + \beta_{o, j, k}^{(\nu)} \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial P_{om, j, k}} \right)^{(\nu)} \right. \\
 & \quad \left. + \beta_{g, j, k}^{(\nu)} \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial S_{gm, j, k}} \right)^{(\nu)} + \beta_{w, j, k}^{(\nu)} \left( \frac{\partial F_{o, j, k}}{\partial S_{wm, j, k}} \right)^{(\nu)} \right\} \dots (D.26)
 \end{aligned}$$

donde:

$$l m n = 1, j, k-1, 1, j-1, k, 1-1, j, k, 1+1, j, k, 1, j+1, k, 1, j, k+1$$

O bien, en forma compacta, la Ec. D.26 queda como:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l m n} \left\{ \left( \frac{\partial F_o}{\partial P_o} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} \delta P_o^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_g} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} \delta S_g^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_w} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} \delta S_w^{(\nu+1)} \right\} \\
& + \left\{ \left( \frac{\partial F_o}{\partial P_o} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} + \theta_{oo}^{(\nu)} \right\} \delta P_o^{(\nu+1)} + \left\{ \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_g} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} + \theta_{og}^{(\nu)} \right\} \delta S_g^{(\nu+1)} \\
& + \left\{ \left( \frac{\partial F_o}{\partial S_w} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} + \theta_{ow}^{(\nu)} \right\} \delta S_w^{(\nu+1)} = - \left\{ F_o^{(\nu)} + \epsilon_o^{(\nu)} \right\} \dots (D.27)
\end{aligned}$$

La ecuación del **GAS**, en forma similar a la Ec. D.27, está dada como:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l m n} \left\{ \left( \frac{\partial F_g}{\partial P_o} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} \delta P_o^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_g} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} \delta S_g^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_w} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} \delta S_w^{(\nu+1)} \right\} \\
& + \left\{ \left( \frac{\partial F_g}{\partial P_o} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} + \theta_{go}^{(\nu)} \right\} \delta P_o^{(\nu+1)} + \left\{ \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_g} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} + \theta_{gg}^{(\nu)} \right\} \delta S_g^{(\nu+1)} \\
& + \left\{ \left( \frac{\partial F_g}{\partial S_w} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} + \theta_{gw}^{(\nu)} \right\} \delta S_w^{(\nu+1)} = - \left\{ F_g^{(\nu)} + \epsilon_g^{(\nu)} \right\} \dots (D.28)
\end{aligned}$$

y para la ecuación del **AGUA**, se tiene:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l m n} \left\{ \left( \frac{\partial F_w}{\partial P_o} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} \delta P_o^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_g} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} \delta S_g^{(\nu+1)} + \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_w} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} \delta S_w^{(\nu+1)} \right\} \\
& + \left\{ \left( \frac{\partial F_w}{\partial P_o} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} + \theta_{wo}^{(\nu)} \right\} \delta P_o^{(\nu+1)} + \left\{ \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_g} \right)_{l, j, k}^{(\nu)} + \theta_{wg}^{(\nu)} \right\} \delta S_g^{(\nu+1)}
\end{aligned}$$

$$+ \left\{ \left( \frac{\partial F_w}{\partial S_w} \right)_{i,j,k}^{(\nu)} + \theta_{ww}^{(\nu)} \right\} \delta S_w^{(\nu+1)} = - \left\{ F_w^{(\nu)} + \epsilon_w^{(\nu)} \right\} \dots (D.29)$$

$$\begin{aligned} \text{para } i &= 1, 2, 3, \dots, NR \\ j &= 1, 2, 3, \dots, NT \\ k &= 1, 2, 3, \dots, NZ \\ (\nu) &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Al aplicar las Ecs. D.27, D.28 y D.29 a cada uno de los nodos del área discretizada, se genera un sistema de ecuaciones para cada uno de los niveles de tiempo manejados. Este sistema de ecuaciones en forma matricial tiene una matriz jacobiana nonadiagonal si se cumple con la condición de continuidad en la dirección angular o heptadiagonal si no se cumple, cuyos elementos son submatrices de 3x3; un vector de incógnitas y un vector de residuos, cuyos elementos constan de 3 subelementos, congruente con las tres incógnitas que se resuelven simultáneamente,  $\delta P_o$ ,  $\delta S_g$  y  $\delta S_w$ .

APENDICE E.     DEFINICION DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ  
JACOBIANA.

En este Apéndice se presentan las expresiones de las derivadas de las funciones de residuos de las **FRACTURAS**  $F_{o_{1,j,k}}$ ,  $F_{g_{1,j,k}}$  y  $F_{w_{1,j,k}}$ , Ecs. 3.18, 3.19 y 3.20, con respecto a las incógnitas de presión y de saturación de las fracturas, en los nodos  $i,j,k-1$ ,  $i,j-1,k$ ,  $i-1,j,k$ ,  $i,j,k$ ,  $i+1,j,k$ ,  $i,j+1,k$ ,  $i,j,k+1$ , así como con respecto a estas mismas incógnitas de los bloques de matriz, en el nodo  $i,j,k$ . También, se presentan en particular las definiciones de las derivadas de los términos de producción, provenientes del acoplamiento de las condiciones de frontera,  $q_{o_{j,m}}$ ,  $q_{g_{j,m}}$  y  $q_{w_{j,m}}$ , Ecs. C.11, C.21 y C.22 con respecto a las incógnitas de las fracturas, evaluadas en las celdas vecinas al pozo, dentro del intervalo disparado,  $i,j,m$ . Y por último, también se presentan las expresiones de las derivadas de las funciones de residuos de los **BLOQUES DE MATRIZ**,  $F_{om_{i,j,k}}$ ,  $F_{gm_{i,j,k}}$  y  $F_{wm_{i,j,k}}$ , Ecs. 3.21, 3.22 y 3.23, con respecto a las incógnitas de presión y saturación de las fracturas y de los bloques de matriz, en el nodo  $i,j,k$ .

A continuación, se presentan en forma general estas expresiones y en la Tabla E.1, dada al final de este Apéndice, las equivalencias de los subíndices que permiten manejar ya sea la fase **ACEITE, GAS o AGUA** con estas ecuaciones generales:

La derivada de  $F_{r_{i,j,k}}$  con respecto a  $P_{o_{i,j,k-1}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{r_{i,j,k}}}{\partial P_{o_{i,j,k-1}}} = Tr3Z_{i,j,k-1/2} + \left( Tr2Z \xi_S \right)_{i,j,k-1/2} - \left[ P_{f1_{i,j,k}} - P_{f1_{i,j,k-1}} - P_{c2_{i,j,k}} + P_{c2_{i,j,k-1}} - \left( \gamma r3\Delta D \right)_{i,j,k-1/2} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta\Phi_{r3}{}_{1,j,k} \geq 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}_{3Z}}{\partial P_o}{}_{1,j,k-1} \quad \text{si } \Delta\Phi_{r3}{}_{1,j,k} < 0 \end{array} \right\} - \left[ P_{f1}{}_{1,j,k} - P_{f1}{}_{1,j,k-1} + P_{c1}{}_{1,j,k} - P_{c1}{}_{1,j,k-1} - \left( \gamma_{r2} \Delta D \right)_{1,j,k-1/2} \right] \left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta\Phi_{r2}{}_{1,j,k} \geq 0 \\ \frac{\partial \left( \text{Tr}_{2Z} \xi_S \right)}{\partial P_o}{}_{1,j,k-1} \quad \text{si } \Delta\Phi_{r2}{}_{1,j,k} < 0 \end{array} \right\} \dots (E.1)$$

Las derivadas de las transmisibilidades existen o no, de acuerdo con el criterio de evaluar estas transmisibilidades corriente arriba, Ec. 3.15.

El potencial de flujo para las fases r3 y r2, de la Ec. E.1, se define como:

Para la fase r3,

$$\Delta\Phi_{r3}{}_{1,j,k} = P_{f1}{}_{1,j,k} - P_{f1}{}_{1,j,k-1} - P_{c2}{}_{1,j,k} + P_{c2}{}_{1,j,k-1} - \left( \gamma_{r3} \Delta D \right)_{1,j,k-1/2} \dots (E.2)$$

para la fase r2,

$$\Delta\Phi_{r2}{}_{1,j,k} = P_{f1}{}_{1,j,k} - P_{f1}{}_{1,j,k-1} + P_{c1}{}_{1,j,k} - P_{c1}{}_{1,j,k-1} - \left( \gamma_{r2} \Delta D \right)_{1,j,k-1/2} \dots (E.3)$$

y las derivadas de las transmisibilidades de estas fases como:

Para la fase r3,

$$\frac{\partial \text{Tr}_{3Z}}{\partial P_o}{}_{1,j,k-1} = \text{Tr}_{3Z}{}_{1,j,k-1} \left\{ \frac{1}{b_{r3}} \frac{\partial b_{r3}}{\partial P_o} - \frac{1}{\mu_{r3}} \frac{\partial \mu_{r3}}{\partial P_o} \right\}_{1,j,k-1} \dots (E.4)$$

para la fase r2,

$$\frac{\partial \left( T_{r2Z} \xi_S \right)_{i,j,k-1}}{\partial P_{o_{i,j,k-1}}} = \left( T_{r2Z} \xi_S \right)_{i,j,k-1} \left\{ \frac{1}{b_{r2}} \frac{\partial b_{r2}}{\partial P_o} + \frac{1}{\xi_S} \frac{\partial \xi_S}{\partial P_o} - \frac{1}{\mu_{r2}} \frac{\partial \mu_{r2}}{\partial P_o} \right\} \quad \dots (E.5)$$

Para ejemplificar el uso de la Tabla E.1, en particular si  $r=0$ , la Ec. E.1 se simplifica como:

$$\frac{\partial F_{o_{i,j,k}}}{\partial P_{o_{i,j,k-1}}} = T_{oZ_{i,j,k-1/2}} + \left( T_{gZ} r_S \right)_{i,j,k-1/2} \left[ P_{o_{i,j,k}} - P_{o_{i,j,k-1}} - \left( \gamma_o \Delta D \right)_{i,j,k-1/2} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta \Phi_{o_{i,j,k}} \geq 0 \\ \frac{\partial T_{oZ_{i,j,k-1}}}{\partial P_{o_{i,j,k-1}}} \quad \text{si } \Delta \Phi_{o_{i,j,k}} < 0 \end{array} \right. \left[ P_{o_{i,j,k}} - P_{o_{i,j,k-1}} + P_{cgo_{i,j,k}} - P_{cgo_{i,j,k-1}} - \left( \gamma_g \Delta D \right)_{i,j,k-1/2} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si} \\ \frac{\partial \left( T_{gZ} r_S \right)_{i,j,k-1}}{\partial P_{o_{i,j,k-1}}} \quad \text{si} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \Delta \Phi_{g_{i,j,k}} \geq 0 \\ \Delta \Phi_{g_{i,j,k}} < 0 \end{array} \right. \quad \dots (E.6)$$

La derivada de  $F_{r_{i,j,k}}$  con respecto a  $S_{g_{i,j,k-1}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{r_{i,j,k}}}{\partial S_{g_{i,j,k-1}}} = - T_{r3Z_{i,j,k-1/2}} \frac{\partial P_{c2_{i,j,k-1}}}{\partial S_{g_{i,j,k-1}}} - \left[ P_{f1_{i,j,k}} - P_{f1_{i,j,k-1}} - P_{c2_{i,j,k}} + P_{c2_{i,j,k-1}} - \left( \gamma_{r3} \Delta D \right)_{i,j,k-1/2} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta \Phi_{r3_{i,j,k}} \geq 0 \\ \frac{\partial T_{r3Z_{i,j,k-1}}}{\partial S_{g_{i,j,k-1}}} \quad \text{si } \Delta \Phi_{r3_{i,j,k}} < 0 \end{array} \right. +$$

$$\left( \text{Tr}zZ\xi_S \right)_{1,j,k-1/2} = \frac{\partial P_{c1,1,j,k-1}}{\partial S_{g,1,j,k-1}} - \left[ P_{f1,1,j,k} - P_{f1,1,j,k-1} + P_{c1,1,j,k} - \right. \\ \left. P_{c1,1,j,k-1} - (\gamma_{r2}\Delta D)_{1,j,k-1/2} \right] \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \Delta\Phi_{r2,1,j,k} \geq 0 \\ \xi_{S,1,j,k-1/2} \frac{\partial \text{Tr}zZ_{1,j,k-1}}{\partial S_{g,1,j,k-1}} & \text{si } \Delta\Phi_{r2,1,j,k} < 0 \end{array} \right. \quad \dots (E.7)$$

donde las derivadas de las transmisibilidades se definen como:

Para la fase r3,

$$\frac{\partial \text{Tr}zZ_{1,j,k-1}}{\partial S_{g,1,j,k-1}} = \left[ \text{Tr}zZ \left\{ \frac{1}{k_{rr3}} \frac{\partial k_{rr3}}{\partial S_g} - \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_g} \left( \frac{1}{b_{r3}\partial P_g} - \frac{1}{\mu_{r3}} \frac{\partial \mu_{r3}}{\partial P_g} \right) \alpha_b \right\} \right]_{1,j,k-1} \quad \dots (E.8)$$

para la fase r2,

$$\frac{\partial \text{Tr}zZ_{1,j,k-1}}{\partial S_{g,1,j,k-1}} = \left[ \text{Tr}zZ \left\{ \frac{1}{k_{rr2}} \frac{\partial k_{rr2}}{\partial S_g} - \frac{\partial P_{c1}}{\partial S_g} \left( \frac{1}{b_{r2}\partial P_g} - \frac{1}{\mu_{r2}} \frac{\partial \mu_{r2}}{\partial P_g} \right) \alpha_a \right\} \right]_{1,j,k-1} \quad \dots (E.9)$$

La derivada de  $F_{f,1,j,k}$  con respecto a  $S_{w,1,j,k-1}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{f,1,j,k}}{\partial S_{w,1,j,k-1}} = - \text{Tr}zZ_{1,j,k-1/2} \frac{\partial P_{c3,1,j,k-1}}{\partial S_{w,1,j,k-1}} - \left[ P_{f1,1,j,k} - P_{f1,1,j,k-1} - \right. \\ \left. + P_{c3,1,j,k} - P_{c3,1,j,k-1} - (\gamma_{r4}\Delta D)_{1,j,k-1/2} \right] \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \\ \xi_{S,1,j,k-1/2} \frac{\partial \text{Tr}zZ_{1,j,k-1}}{\partial S_{w,1,j,k-1}} & \text{si} \end{array} \right. \\ \begin{array}{l} \Delta\Phi_{f4,1,j,k} \geq 0 \\ \Delta\Phi_{f4,1,j,k} < 0 \end{array} \quad \dots (E.10)$$

donde el potencial de flujo para esta fase, se define como:

$$\Delta\Phi_{r4} = P_{f1}{}_{i,j,k} - P_{f1}{}_{i,j,k-1} + P_{c3}{}_{i,j,k} - P_{c3}{}_{i,j,k-1} - \left( \gamma_{r4} \Delta D \right)_{i,j,k-1/2} \dots (E.11)$$

y la derivada de la transmisibilidad de la fase  $r4$  como:

$$\frac{\partial Tr_{r4Z}}{\partial S_w}{}_{i,j,k-1} = \left[ Tr_{r4Z} \left\{ \frac{1}{k_{r4}} \frac{\partial k_{r4}}{\partial S_w} - \frac{\partial P_{c3}}{\partial S_w} \left( \frac{1}{b_{r4}} \frac{\partial b_{r4}}{\partial P_w} - \frac{1}{\mu_{r4}} \frac{\partial \mu_{r4}}{\partial P_w} \right) \right\} \right]_{i,j,k-1} \dots (E.12)$$

La derivada de  $F_{r4}$  con respecto a  $P_o$  se define como:

$$\frac{\partial F_{r4}}{\partial P_o}{}_{i,j-1,k} = Tr_{r3}\theta_{i,j-1/2,k} + \left( Tr_{r2}\theta \xi_S \right)_{i,j-1/2,k} - \left( P_{f1}{}_{i,j,k} - P_{f1}{}_{i,j-1,k} - P_{c2}{}_{i,j,k} + P_{c2}{}_{i,j,k-1} \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f3}{}_{i,j,k} \geq 0 \\ \frac{\partial Tr_{r3}\theta}{\partial P_o}{}_{i,j-1,k} \quad \text{si } \Delta P_{f3}{}_{i,j,k} < 0 \end{array} \right. - \left[ P_{f1}{}_{i,j,k} - P_{f1}{}_{i,j-1,k} + P_{c1}{}_{i,j,k} - P_{c1}{}_{i,j-1,k} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f2}{}_{i,j,k} \geq 0 \\ \frac{\partial \left( Tr_{r2}\theta \xi_S \right)}{\partial P_o}{}_{i,j-1,k} \quad \text{si } \Delta P_{f2}{}_{i,j,k} < 0 \end{array} \right. \dots (E.13)$$

Las derivadas de las transmisibilidades existen o no, de acuerdo con el criterio de evaluar estas transmisibilidades corriente arriba, Ec. 3.14.

donde, la diferencia de presión se define como:

Para la fase  $r3$ ,

$$\Delta P_{f3}{}_{i,j,k} = P_{f1}{}_{i,j,k} - P_{f1}{}_{i,j-1,k} - P_{c2}{}_{i,j,k} + P_{c2}{}_{i,j-1,k} \dots (E.14)$$

para la fase r2,

$$\Delta Pr2_{i,j,k} = Pr1_{i,j,k} - Pr1_{i,j-1,k} + Pc1_{i,j,k} - Pc1_{i,j-1,k} \quad \dots (E.15)$$

Las derivadas de las transmisibilidades de las fases r3 y r2 se calculan en forma similar a las Ecs. E.4 y E.5, pero evaluadas en el punto i,j-1,k, respectivamente.

La derivada de  $Fr_{i,j,k}$  con respecto a  $Sg_{i,j-1,k}$  se define como:

$$\frac{\partial Fr_{i,j,k}}{\partial Sg_{i,j-1,k}} = - Tr3\theta_{i,j-1/2,k} \frac{\partial Pc2_{i,j-1,k}}{\partial Sg_{i,j-1,k}} - \left( Pr1_{i,j,k} - Pr1_{i,j-1,k} - Pc2_{i,j,k} + Pc2_{i,j-1,k} \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta Pr3_{i,j,k} \geq 0 \\ \frac{\partial Tr3\theta_{i,j-1,k}}{\partial Sg_{i,j-1,k}} \quad \text{si } \Delta Pr3_{i,j,k} < 0 \end{array} \right. + \left( Tr2\theta_{i,j-1/2,k} \frac{\partial Pc1_{i,j-1,k}}{\partial Sg_{i,j-1,k}} - \left( Pr1_{i,j,k} - Pr1_{i,j-1,k} + Pc1_{i,j,k} - Pc1_{i,j-1,k} \right) \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta Pr2_{i,j,k} \geq 0 \\ \xi_S \frac{\partial Tr2\theta_{i,j-1,k}}{\partial Sg_{i,j-1,k}} \quad \text{si } \Delta Pr2_{i,j,k} < 0 \end{array} \right. \quad \dots (E.16)$$

donde las transmisibilidades de las fases r3 y r2 se calculan en forma similar a las Ecs. E.8 y E.9, pero evaluadas en el punto i,j-1,k, respectivamente.

La derivada de  $Fr_{i,j,k}$  con respecto a  $Sw_{i,j-1,k}$  se define como:

$$\frac{\partial Fr_{i,j,k}}{\partial Sw_{i,j-1,k}} = - Tr4\theta_{i,j-1/2,k} \frac{\partial Pc3_{i,j-1,k}}{\partial Sw_{i,j-1,k}} - \left( Pr1_{i,j,k} - Pr1_{i,j-1,k} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} -P_{c3}{}_{i,j,k} + P_{c3}{}_{i,j-1,k} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f4}{}_{i,j,k} \geq 0 \\ \zeta_S{}_{i,j-1/2,k} \frac{\partial \text{Tr}4\theta}{\partial S_w}{}_{i,j-1,k} \quad \text{si } \Delta P_{f4}{}_{i,j,k} < 0 \end{array} \right\} \dots (E.17)$$

donde la transmisibilidad de la fase r4 se calcula en forma similar a la Ec. E.12, pero evaluada en el punto i,j-1,k.

La derivada de  $F_r{}_{i,j,k}$  con respecto a  $P_o{}_{i-1,j,k}$  se define como:

$$\frac{\partial F_r{}_{i,j,k}}{\partial P_o{}_{i-1,j,k}} = \text{Tr}3r{}_{i-1/2,j,k} + \left( \text{Tr}2r \xi_S \right)_{i-1/2,j,k} - \left( P_{f1}{}_{i,j,k} - P_{f1}{}_{i-1,j,k} - \right.$$

$$\left. P_{c2}{}_{i,j,k} + P_{c2}{}_{i,j-1,k} \right) \left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f3}{}_{i,j,k} \geq 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}3r}{\partial P_o}{}_{i-1,j,k} \quad \text{si } \Delta P_{f3}{}_{i,j,k} < 0 \end{array} \right\} - \left[ P_{f1}{}_{i,j,k} - \right.$$

$$\left. P_{f1}{}_{i-1,j,k} + P_{c1}{}_{i,j,k} - P_{c1}{}_{i-1,j,k} \right] \left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f2}{}_{i,j,k} \geq 0 \\ \frac{\partial \left( \text{Tr}2r \xi_S \right)}{\partial P_o}{}_{i-1,j,k} \quad \text{si } \Delta P_{f2}{}_{i,j,k} < 0 \end{array} \right\} \dots (E.18)$$

Las derivadas de las transmisibilidades existen o no, de acuerdo con el criterio de evaluar estas transmisibilidades corriente arriba, Ec. 3.12.

donde, la diferencia de presión se define como:

Para la fase r3,

$$\Delta P_{f3}{}_{i,j,k} = P_{f1}{}_{i,j,k} - P_{f1}{}_{i-1,j,k} - P_{c2}{}_{i,j,k} + P_{c2}{}_{i-1,j,k} \dots (E.19)$$

para la fase r2,

$$\Delta P_{f2}{}_{i,j,k} = P_{f1}{}_{i,j,k} - P_{f1}{}_{i-1,j,k} + P_{c1}{}_{i,j,k} - P_{c1}{}_{i-1,j,k} \dots (E.20)$$

Las derivadas de las transmisibilidades de las fases r3 y r2 se calculan en forma similar a las Ecs. E.4 y E.5, pero evaluadas en el punto i-1,j,k, respectivamente.

La derivada de  $Fr_{i,j,k}$  con respecto a  $Sg_{i-1,j,k}$  se define como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Fr_{i,j,k}}{\partial Sg_{i-1,j,k}} = & - Tr_{3r_{i-1/2,j,k}} \frac{\partial Pc2_{i-1,j,k}}{\partial Sg_{i-1,j,k}} - \left( Pf1_{i,j,k} - Pf1_{i-1,j,k} - \right. \\ & \left. Pc2_{i,j,k} + Pc2_{i-1,j,k} \right) \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \Delta Pr3_{i,j,k} \geq 0 \\ \frac{\partial Tr_{3r_{i-1,j,k}}}{\partial Sg_{i-1,j,k}} & \text{si } \Delta Pr3_{i,j,k} < 0 \end{array} \right. \\ & + \left( Tr_{2r} \xi_S \right)_{i-1/2,j,k} \frac{\partial Pc1_{i-1,j,k}}{\partial Sg_{i-1,j,k}} - \left( Pf1_{i,j,k} - Pf1_{i,j-1,k} \right. \\ & \left. + Pc1_{i,j,k} - Pc1_{i-1,j,k} \right) \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \Delta Pr2_{i,j,k} \geq 0 \\ \xi_S \frac{\partial Tr_{2r_{i-1,j,k}}}{\partial Sg_{i-1,j,k}} & \text{si } \Delta Pr2_{i,j,k} < 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad \dots (E.21)$$

donde las transmisibilidades de las fases r3 y r2 se calculan en forma similar a las Ecs. E.8 y E.9, pero evaluadas en el punto i-1,j,k, respectivamente.

La derivada de  $Fr_{i,j,k}$  con respecto a  $Sw_{i-1,j,k}$  se define como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Fr_{i,j,k}}{\partial Sw_{i-1,j,k}} = & - Tr_{4r_{i-1/2,j,k}} \frac{\partial Pc3_{i-1,j,k}}{\partial Sw_{i-1,j,k}} - \left( Pf1_{i,j,k} - Pf1_{i-1,j,k} \right. \\ & \left. - Pc3_{i,j,k} + Pc3_{i-1,j,k} \right) \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \Delta Pr4_{i,j,k} \geq 0 \\ \xi_S \frac{\partial Tr_{4r_{i-1,j,k}}}{\partial Sw_{i-1,j,k}} & \text{si } \Delta Pr4_{i,j,k} < 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad \dots (E.22)$$

donde la transmisibilidad de la fase r4 se calcula en forma similar a la Ec. E.12, pero evaluada en el punto 1-1,j,k.

La derivada de  $F_{r_{1,j,k}}$  con respecto a  $P_{o_{1,j,k}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{r_{1,j,k}}}{\partial P_{o_{1,j,k}}} = - \left[ \text{Tr}3Z_{1,j,k-1/2} + \text{Tr}3\theta_{1,j-1/2,k} + \text{Tr}3r_{1-1/2,j,k} + \text{Tr}3r_{1+1/2,j,k} \right. \\ \left. + \text{Tr}3\theta_{1,j+1/2,k} + \text{Tr}3Z_{1,j,k+1/2} + \text{Tr}3m_{1,j,k} \right] - \left[ \left( \text{Tr}2Z \xi_S \right)_{1,j,k-1/2} + \right. \\ \left. \left( \text{Tr}2\theta \xi_S \right)_{1,j-1/2,k} + \left( \text{Tr}2r \xi_S \right)_{1-1/2,j,k} + \left( \text{Tr}2r \xi_S \right)_{1+1/2,j,k} + \right. \\ \left. \left( \text{Tr}2\theta \xi_S \right)_{1,j+1/2,k} + \left( \text{Tr}2Z \xi_S \right)_{1,j,k+1/2} + \left( \text{Tr}2m \xi_{SM} \right)_{1,j,k} \right] + \left( P_{f1_{1+1,j,k}} \right. \\ \left. - P_{f1_{1,j,k}} - P_{c2_{1+1,j,k}} + P_{c2_{1,j,k}} \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f3_{1+1,j,k}} \geq 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}3r_{1,j,k}}{\partial P_{o_{1,j,k}}} \quad \text{si } \Delta P_{f3_{1+1,j,k}} < 0 \end{array} \right. \\ \left( P_{f1_{1,j,k}} - P_{f1_{1-1,j,k}} - P_{c2_{1,j,k}} + P_{c2_{1-1,j,k}} \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f3_{1,j,k}} \geq 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}3r_{1,j,k}}{\partial P_{o_{1,j,k}}} \quad \text{si } \Delta P_{f3_{1,j,k}} < 0 \end{array} \right. \\ < 0 \quad \left( P_{f1_{1,j+1,k}} - P_{f1_{1,j,k}} - P_{c2_{1,j+1,k}} + P_{c2_{1,j,k}} \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f3_{1,j+1,k}} \geq 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}3\theta_{1,j,k}}{\partial P_{o_{1,j,k}}} \quad \text{si } \Delta P_{f3_{1,j+1,k}} < 0 \end{array} \right. \\ \Delta P_{f3_{1,j+1,k}} \geq 0 \quad \left( P_{f1_{1,j,k}} - P_{f1_{1,j-1,k}} - P_{c2_{1,j,k}} + P_{c2_{1,j-1,k}} \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f3_{1,j,k}} \geq 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}3\theta_{1,j,k}}{\partial P_{o_{1,j,k}}} \quad \text{si } \Delta P_{f3_{1,j,k}} < 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{si } \Delta Pr3_{1,j,k} &< 0 \\ \text{si } \Delta Pr3_{1,j,k} &\geq 0 \end{aligned} + \left[ Pr1_{1,j,k+1} - Pr1_{1,j,k} - Pc2_{1,j,k+1} + Pc2_{1,j,k} - \right.$$

$$\left. (\gamma r3 \Delta D)_{1,j,k+1/2} \right\} \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta \Phi r3_{1,j,k+1} \geq 0 \\ \frac{\partial Tr3Z_{1,j,k}}{\partial P_o_{1,j,k}} & \text{si } \Delta \Phi r3_{1,j,k+1} < 0 \end{cases} - \left[ Pr1_{1,j,k} - \right.$$

$$\left. Pr1_{1,j,k-1} - Pc2_{1,j,k} + Pc2_{1,j,k-1} - (\gamma r3 \Delta D)_{1,j,k-1/2} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial Tr3Z_{1,j,k}}{\partial P_o_{1,j,k}} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{si } \Delta \Phi r3_{1,j,k} &< 0 \\ \text{si } \Delta \Phi r3_{1,j,k} &\geq 0 \end{aligned} + \left[ Pr1_{1+1,j,k} - Pr1_{1,j,k} + Pc1_{1+1,j,k} - \right.$$

$$\left. - Pc1_{1,j,k} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial (Tr2r \xi_S)_{1,j,k}}{\partial P_o_{1,j,k}} \end{array} \right. \text{si } \Delta Pr2_{1+1,j,k} \geq 0 \quad \text{si } \Delta Pr2_{1+1,j,k} < 0 \quad - \left[ Pr1_{1,j,k} - \right.$$

$$\left. - Pr1_{1-1,j,k} + Pc1_{1,j,k} - Pc1_{1-1,j,k} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial (Tr2r \xi_S)_{1,j,k}}{\partial P_o_{1,j,k}} \end{array} \right. \text{si } \quad \text{si } \quad \text{si}$$

$$\begin{aligned} \Delta Pr2_{1,j,k} &< 0 \\ \Delta Pr2_{1,j,k} &\geq 0 \end{aligned} + \left[ Pr1_{1,j+1,k} - Pr1_{1,j,k} + Pc1_{1,j+1,k} - Pc1_{1,j,k} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial (Tr2\theta \xi_S)_{1,j,k}}{\partial P_o_{1,j,k}} \end{array} \right. \text{si } \Delta Pr2_{1,j+1,k} \geq 0 \quad \text{si } \Delta Pr2_{1,j+1,k} < 0 \quad - \left[ Pr1_{1,j,k} - Pr1_{1,j-1,k} + \right.$$

$$Pc1_{1,j,k} - Pc1_{1,j-1,k} \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta Pf2_{1,j,k} \geq 0 \\ \frac{\partial (Tf2\theta \xi_S)_{1,j,k}}{\partial P_o_{1,j,k}} \quad \text{si } \Delta Pf2_{1,j,k} < 0 \end{array} \right\} + \left[ Pf1_{1,j,k+1} \right.$$

$$\left. -Pf1_{1,j,k} + Pc1_{1,j,k+1} - Pc1_{1,j,k} - (\gamma f2 \Delta D)_{1,j,k+1/2} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si} \\ \frac{\partial (Tf2Z \xi_S)_{1,j,k}}{\partial P_o_{1,j,k}} \quad \text{si} \end{array} \right.$$

$$\Delta \Phi f2_{1,j,k+1} < 0 \quad - \left[ Pf1_{1,j,k} - Pf1_{1,j,k-1} + Pc1_{1,j,k} - Pc1_{1,j,k-1} \right.$$

$$\Delta \Phi f2_{1,j,k+1} \geq 0 \quad \left. \right]$$

$$\left( \gamma f2 \Delta D \right)_{1,j,k-1/2} \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta \Phi f2_{1,j,k} \geq 0 \\ \frac{\partial (Tf2Z \xi_S)_{1,j,k}}{\partial P_o_{1,j,k}} \quad \text{si } \Delta \Phi f2_{1,j,k} < 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{Vp_{1,j,k}^n}{\Delta t} \left[ Sfr3 \left\{ \left[ 1 + Cr \left( P_o^{n+1} - P_o^n \right) \right] \frac{\partial br3}{\partial P_o} + br3 Cr \right\} - \right.$$

$$\left. Sfr2 \left\{ \left[ 1 + Cr \left( P_o^{n+1} - P_o^n \right) \right] \frac{\partial (br2 \xi_S)}{\partial P_o} + br2 \xi_S Cr \right\} \right]_{1,j,k}$$

... (E.23)

donde las derivadas de las transmisibilidades de las fases r3 y r2, se definen en forma similar a las Ecs. E.4 y E.5, pero evaluadas en el nodo 1,j,k.

La derivada de  $Ff_{1,j,k}$  con respecto a  $Sg_{1,j,k}$  se define como:

$$\frac{\partial Ff_{1,j,k}}{\partial Sg_{1,j,k}} = \left[ Tf3Z_{1,j,k-1/2} + Tf3\theta_{1,j-1/2,k} + Tf3r_{1-1/2,j,k} + Tf3r_{1+1/2,j,k} \right]$$

$$+Trf3\theta_{1,j+1/2,k} + Trf3Z_{1,j,k+1/2} + Trf3m_{1,j,k} \left] \frac{\partial Pc2_{1,j,k}}{\partial Sg_{1,j,k}} - \left[ (Trz2\check{\xi}_S)_{1,j,k-1/2} \right.$$

$$+ (Tr2\theta \xi_S)_{1,j-1/2,k} + (Tr2r \xi_S)_{1-1/2,j,k} + (Tr2r \xi_S)_{1+1/2,j,k} +$$

$$\left. (Tr2\theta \xi_S)_{1,j+1/2,k} + (Tr2z \xi_S)_{1,j,k+1/2} + (Tr2m \xi_{Sm})_{1,j,k} \right] \frac{\partial Pc1_{1,j,k}}{\partial Sg_{1,j,k}} +$$

$$\left. (Pf1_{1+1,j,k} - Pf1_{1,j,k} - Pc2_{1+1,j,k} + Pc2_{1,j,k}) \right\} \begin{array}{l} 0 \quad \text{si} \\ \frac{\partial Trf3r_{1,j,k}}{\partial Sg_{1,j,k}} \quad \text{si} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta Pf3_{1+1,j,k} \geq 0 \\ \Delta Pf3_{1+1,j,k} < 0 \end{array} - (Pf1_{1,j,k} - Pf1_{1-1,j,k} - Pc2_{1,j,k} +$$

$$Pc2_{1-1,j,k}) \left. \right\} \begin{array}{l} 0 \quad \text{si} \quad \Delta Pf3_{1,j,k} < 0 \\ \frac{\partial Trf3r_{1,j,k}}{\partial Sg_{1,j,k}} \quad \text{si} \quad \Delta Pf3_{1,j,k} \geq 0 \end{array} + (Pf1_{1,j+1,k} - Pf1_{1,j,k} -$$

$$Pc2_{1,j+1,k} + Pc2_{1,j,k}) \left. \right\} \begin{array}{l} 0 \quad \text{si} \quad \Delta Pf3_{1,j+1,k} \geq 0 \\ \frac{\partial Trf3\theta_{1,j,k}}{\partial Sg_{1,j,k}} \quad \text{si} \quad \Delta Pf3_{1,j+1,k} < 0 \end{array} - (Pf1_{1,j,k} -$$

$$Pf1_{1,j-1,k} - Pc2_{1,j,k} + Pc2_{1,j-1,k}) \left. \right\} \begin{array}{l} 0 \quad \text{si} \quad \Delta Pf3_{1,j,k} < 0 \\ \frac{\partial Trf3\theta_{1,j,k}}{\partial Sg_{1,j,k}} \quad \text{si} \quad \Delta Pf3_{1,j,k} \geq 0 \end{array} +$$

$$\left[ P_{f1,1,j,k+1} - P_{f1,1,j,k} - P_{c2,1,j,k+1} + P_{c2,1,j,k} - \left( \gamma_{f3\Delta D} \right)_{1,j,k+1/2} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta\Phi_{f3,1,j,k+1} \geq 0 \\ \frac{\partial Tr_{3Z}}{\partial S_{g,1,j,k}} \quad \text{si } \Delta\Phi_{f3,1,j,k+1} < 0 \end{array} \right\} - \left[ P_{f1,1,j,k} - P_{f1,1,j,k-1} - P_{c2,1,j,k} \right]$$

$$+ P_{c2,1,j,k-1} - \left( \gamma_{f3\Delta D} \right)_{1,j,k-1/2} \left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta\Phi_{f3,1,j,k} < 0 \\ \frac{\partial Tr_{3Z}}{\partial S_{g,1,j,k}} \quad \text{si } \Delta\Phi_{f3,1,j,k} \geq 0 \end{array} \right\} +$$

$$\left( P_{f1m,1,j,k} - P_{f1,1,j,k} - P_{c2m,1,j,k} + P_{c2,1,j,k} \right) \left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{si} \\ \frac{\partial Tr_{3m}}{\partial S_{g,1,j,k}} \quad \text{si} \end{array} \right\}$$

$$\Delta P_{f3m,1,j,k} \geq 0$$

$$+ \left[ P_{f1,1+1,j,k} - P_{f1,1,j,k} + P_{c1,1+1,j,k} - P_{c1,1,j,k} \right]$$

$$\Delta P_{f3m,1,j,k} < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f2,1+1,j,k} \geq 0 \\ \xi_{S_{1+1/2,j,k}} \frac{\partial Tr_{2r}}{\partial S_{g,1,j,k}} \quad \text{si } \Delta P_{f2,1+1,j,k} < 0 \end{array} \right\} - \left[ P_{f1,1,j,k} \right]$$

$$- P_{f1,1-1,j,k} + P_{c1,1,j,k} - P_{c1,1-1,j,k} \left. \begin{array}{l} 0 \\ \xi_{S_{1-1/2,j,k}} \frac{\partial Tr_{2r}}{\partial S_{g,1,j,k}} \end{array} \right\}$$

$$\text{si } \Delta P_{f2,1,j,k} < 0$$

$$+ \left[ P_{f1,1,j+1,k} - P_{f1,1,j,k} + P_{c1,1,j+1,k} - P_{c1,1,j,k} \right]$$

$$\text{si } \Delta P_{f2,1,j,k} \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f2, j+1, k} < 0 \\ \xi_{S_{1, j+1/2, k}} \frac{\partial T_{f2\theta}}{\partial S_{g_{1, j, k}}} \quad \text{si } \Delta P_{f2, j+1, k} \geq 0 \end{array} \right\} - \left[ P_{f1, j, k} - P_{f1, j-1, k} + \right.$$

$$\left. P_{c1, j, k} - P_{c1, j-1, k} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f2, j, k} \geq 0 \\ \xi_{S_{1, j-1/2, k}} \frac{\partial T_{f2\theta}}{\partial S_{g_{1, j, k}}} \quad \text{si } \Delta P_{f2, j, k} < 0 \end{array} \right\} +$$

$$\left[ P_{f1, j, k+1} - P_{f1, j, k} + P_{c1, j, k+1} - P_{c1, j, k} - (\gamma_{f2} \Delta D)_{1, j, k+1/2} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta \Phi_{f2, j, k+1} < 0 \\ \xi_{S_{1, j, k+1/2}} \frac{\partial T_{f2z}}{\partial S_{g_{1, j, k}}} \quad \text{si } \Delta \Phi_{f2, j, k+1} \geq 0 \end{array} \right\} - \left[ P_{f1, j, k} - P_{f1, j, k-1} + \right.$$

$$\left. P_{c1, j, k} - P_{c1, j, k-1} - (\gamma_{f2} \Delta D)_{1, j, k-1/2} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si} \\ \xi_{S_{1, j, k-1/2}} \frac{\partial T_{f2z}}{\partial S_{g_{1, j, k}}} \quad \text{si} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_{f2, j, k} &\geq 0 \\ \Delta \Phi_{f2, j, k} &< 0 \end{aligned} + \left( P_{f1m, j, k} - P_{f1, j, k} + P_{c1m, j, k} - P_{c1, j, k} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f2m, j, k} \geq 0 \\ \xi_{S_{m, j, k}} \frac{\partial T_{f2m}}{\partial S_{g_{1, j, k}}} \quad \text{si } \Delta P_{f2m, j, k} < 0 \end{array} \right\} + \text{sig} \frac{V_{p, j, k}}{\Delta t}$$

$$\left\{ \left[ 1 + Cr \left( P_o^{n+1} - P_o^n \right) \right] \left( b_{f3} \alpha_a - S_{f3} \frac{\partial b_{f3}}{\partial P_g} \frac{\partial P_{c2}}{\partial S_g} \alpha_b - b_{f2} \xi_S \right) \right.$$

$$\left. - S_{r2} \frac{\partial (b_{r3} \xi_s)}{\partial P_g} \frac{\partial P_{c1}}{\partial S_g} \alpha_a \right\}_{i,j,k} \quad \dots (E.24)$$

donde las derivadas de las transmisibilidades de las fases  $r_3$  y  $r_2$  se definen en forma similar a las Ecs. E.8 y E.9, pero evaluadas en el nodo  $i,j,k$ , y en los bloques de matriz como:

Para la fase  $r_3$ ,

$$\frac{\partial Tr_{3m}}{\partial S_g}_{i,j,k} = Tr_{3m}_{i,j,k} \left\{ \frac{1}{k_{r3}} \frac{\partial k_{r3}}{\partial S_g} \right\}_{i,j,k} \quad \dots (E.25)$$

para la fase  $r_2$ ,

$$\frac{\partial Tr_{2m}}{\partial S_g}_{i,j,k} = Tr_{2m}_{i,j,k} \left\{ \frac{1}{k_{r2}} \frac{\partial k_{r2}}{\partial S_g} \right\}_{i,j,k} \quad \dots (E.26)$$

La derivada de  $F_{r_{i,j,k}}$  con respecto a  $S_{w_{i,j,k}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{r_{i,j,k}}}{\partial S_{w_{i,j,k}}} = \left[ Tr_{4Z}_{i,j,k-1/2} + Tr_{4\theta}_{i,j-1/2,k} + Tr_{4r}_{i-1/2,j,k} + Tr_{4r}_{i+1/2,j,k} + \right.$$

$$\left. Tr_{4\theta}_{i,j+1/2,k} + Tr_{4Z}_{i,j,k+1/2} + Tr_{4m}_{i,j,k} \right] \frac{\partial P_{c3}}{\partial S_{w_{i,j,k}}}_{i,j,k} + \left( Pr_{1_{i+1,j,k}} - \right.$$

$$\left. Pr_{1_{i,j,k}} - P_{c3_{i+1,j,k}} + P_{c3_{i,j,k}} \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{r4_{i+1,j,k}} \\ \zeta_{S_{i+1/2,j,k}} \frac{\partial Tr_{4r}}{\partial S_{w_{i,j,k}}}_{i,j,k} \quad \text{si } \Delta P_{r4_{i+1,j,k}} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \geq 0 \\ < 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ - \left( Pr_{1_{i,j,k}} - Pr_{1_{i-1,j,k}} - P_{c3_{i,j,k}} + P_{c3_{i-1,j,k}} \right) \end{array} \right\} \zeta_{S_{i-1/2,j,k}}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}4r_{1,j,k}}{\partial S_{w_{1,j,k}}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{si } \Delta \text{Pr}4_{1,j,k} < 0 \\ \text{si } \Delta \text{Pr}4_{1,j,k} \geq 0 \end{array} + \left( \text{Pr}1_{1,j+1,k} - \text{Pr}1_{1,j,k} - \text{Pc}3_{1,j+1,k} + \right.$$

$$\left. \text{Pc}3_{1,j,k} \right\} \zeta_{S_{1,j+1/2,k}} \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}4\theta_{1,j,k}}{\partial S_{w_{1,j,k}}} \end{array} \begin{array}{l} \text{si } \Delta \text{Pr}4_{1,j+1,k} \geq 0 \\ \text{si } \Delta \text{Pr}4_{1,j+1,k} < 0 \end{array} - \left( \text{Pr}1_{1,j,k} - \right.$$

$$\left. \text{Pr}1_{1,j-1,k} - \text{Pc}3_{1,j,k} + \text{Pc}3_{1,j-1,k} \right\} \zeta_{S_{1,j-1/2,k}} \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}4\theta_{1,j,k}}{\partial S_{w_{1,j,k}}} \end{array} \begin{array}{l} \text{si} \\ \text{si} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta \text{Pr}4_{1,j,k} < 0 \\ \Delta \text{Pr}4_{1,j,k} \geq 0 \end{array} + \left[ \text{Pr}1_{1,j,k+1} - \text{Pr}1_{1,j,k} - \text{Pc}3_{1,j,k+1} + \text{Pc}3_{1,j,k} - \right.$$

$$\left. \left( \gamma r4\Delta D \right)_{1,j,k+1/2} \right\} \zeta_{S_{1,j,k+1/2}} \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}4z_{1,j,k}}{\partial S_{w_{1,j,k}}} \end{array} \begin{array}{l} \text{si } \Delta \Phi r4_{1,j,k+1} \geq 0 \\ \text{si } \Delta \Phi r4_{1,j,k+1} < 0 \end{array}$$

$$\left[ \text{Pr}1_{1,j,k} - \text{Pr}1_{1,j,k-1} - \text{Pc}3_{1,j,k} + \text{Pc}3_{1,j,k-1} - \left( \gamma r4\Delta D \right)_{1,j,k-1/2} \right]$$

$$\left. \zeta_{S_{1,j,k-1/2}} \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}4z_{1,j,k}}{\partial S_{w_{1,j,k}}} \end{array} \begin{array}{l} \text{si } \Delta \Phi r4_{1,j,k} < 0 \\ \text{si } \Delta \Phi r4_{1,j,k} \geq 0 \end{array} + \left( \text{Pr}1_{1,j,k} - \text{Pr}1_{1,j,k} \right.$$

$$\left. - \text{Pc}3_{1,j,k} + \text{Pc}3_{1,j,k} \right\} \zeta_{S_{1,j,k}} \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}4m_{1,j,k}}{\partial S_{w_{1,j,k}}} \end{array} \begin{array}{l} \text{si } \Delta \text{Pr}4_{1,j,k} \geq 0 \\ \text{si } \Delta \text{Pr}4_{1,j,k} < 0 \end{array} + \text{SIG}$$

$$\frac{V_p}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + Cr \left( P_o^{n+1} - P_o^n \right) \right] \left( br_4 \zeta_S - Sr_3 \frac{\partial br_4}{\partial P_w} \frac{\partial Pc_3}{\partial S_w} \right) \right\}_{1,j,k} \dots (E.27)$$

donde las derivadas de las transmisibilidades de las fases r4 y r2, se definen en formá similar a la Ec. E.12, pero evaluadas en el nodo 1,j,k, y en los bloques de matriz como:

$$\frac{\partial Tr_{4m}}{\partial S_w}_{1,j,k} = Tr_{4m}_{1,j,k} \left\{ \frac{1}{kr_{f4}} \frac{\partial kr_{f4}}{\partial S_w} \right\}_{1,j,k} \dots (E.28)$$

La derivada de  $F_{r_{1,j,k}}$  con respecto a  $P_{o_{1+1,j,k}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_r}{\partial P_o}_{1,j,k} = Tr_{3r_{1+1/2,j,k}} + \left( Tr_{2r} \xi_S \right)_{1+1/2,j,k} + \left( Pr_{1_{1+1,j,k}} - Pr_{1_{1,j,k}} - \right. \\ \left. Pc_{2_{1+1,j,k}} + Pc_{2_{1,j,k}} \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta Pr_{3_{1+1,j,k}} < 0 \\ \frac{\partial Tr_{3r}}{\partial P_o}_{1+1,j,k} \quad \text{si } \Delta Pr_{3_{1+1,j,k}} \geq 0 \end{array} \right\} + \left[ Pr_{1_{1+1,j,k}} - \right. \\ \left. Pr_{1_{1,j,k}} + Pc_{1_{1+1,j,k}} - Pc_{1_{1,j,k}} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta Pr_{2_{1+1,j,k}} < 0 \\ \frac{\partial \left( Tr_{2r} \xi_S \right)}{\partial P_o}_{1+1,j,k} \quad \text{si } \Delta Pr_{2_{1+1,j,k}} \geq 0 \end{array} \right\} \dots (E.29)$$

donde las diferencias de presión se definen en forma similar a las Ecs. E.19 y E.20, y las transmisibilidades en forma similar a las Ecs. E.4 y E.5, pero evaluadas en el punto 1+1,j,k, respectivamente.

La derivada de  $F_{r_{1,j,k}}$  con respecto a  $S_{g_{1+1,j,k}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_r}{\partial S_g}_{1,j,k} = - Tr_{3r_{1+1/2,j,k}} \frac{\partial Pc_{2_{1+1,j,k}}}{\partial S_{g_{1+1,j,k}}} + \left( Pr_{1_{1+1,j,k}} - Pr_{1_{1,j,k}} - \right.$$

$$Pc2_{i+1, j, k} + Pc2_{i, j, k} \left. \vphantom{Pc2_{i+1, j, k} + Pc2_{i, j, k}} \right\} \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta Pf3_{i+1, j, k} < 0 \\ \frac{\partial Tf3r_{i+1, j, k}}{\partial Sg_{i+1, j, k}} & \text{si } \Delta Pf3_{i+1, j, k} \geq 0 \end{cases} + (Tf2r$$

$$\xi_S)_{i+1/2, j, k} \frac{\partial Pc1_{i+1, j, k}}{\partial Sg_{i+1, j, k}} + (Pf1_{i+1, j, k} - Pf1_{i, j, k} + Pc1_{i+1, j, k} -$$

$$Pc1_{i, j, k} \left. \vphantom{Pc1_{i, j, k}} \right\} \xi_S \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta Pf2_{i+1, j, k} < 0 \\ \frac{\partial Tf2r_{i+1, j, k}}{\partial Sg_{i+1, j, k}} & \text{si } \Delta Pf2_{i+1, j, k} \geq 0 \end{cases}$$

... (E.30)

donde las transmisibilidades de las fases r3 y r2, se definen en forma similar a las Ecs. E.8 y E.9, pero evaluadas en el nodo i+1, j, k, respectivamente.

La derivada de  $Ff_{i, j, k}$  con respecto a  $S_{w_{i+1, j, k}}$  se define como:

$$\frac{\partial Ff_{i, j, k}}{\partial S_{w_{i+1, j, k}}} = - Tf4r_{i+1/2, j, k} \frac{\partial Pc3_{i+1, j, k}}{\partial S_{w_{i+1, j, k}}} + (Pf1_{i+1, j, k} - Pf1_{i, j, k} -$$

$$Pc3_{i+1, j, k} + Pc3_{i, j, k} \left. \vphantom{Pc3_{i+1, j, k} + Pc3_{i, j, k}} \right\} \zeta_S \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta Pf4_{i+1, j, k} \geq 0 \\ \frac{\partial Tf4r_{i+1, j, k}}{\partial S_{w_{i+1, j, k}}} & \text{si } \Delta Pf4_{i+1, j, k} < 0 \end{cases}$$

... (E.31)

donde la derivada de la transmisibilidad de la fase r4, se define en forma similar a la Ec. E.12, pero evaluada en el nodo i+1, j, k.

La derivada de  $Ff_{i, j, k}$  con respecto a  $Po_{i, j+1, k}$  se define como?

$$\frac{\partial Ff_{i, j, k}}{\partial Po_{i, j+1, k}} = Tf3\theta_{i, j+1/2, k} + (Tf2\theta \xi_S)_{i, j+1/2, k} + (Pf1_{i, j+1, k} - Pf1_{i, j, k} -$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} & P_{c2_{1,j+1,k}} + P_{c2_{1,j,k}} \end{aligned} \right\} \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta P_{r3_{1,j+1,k}} < 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}3\theta_{1,j+1,k}}{\partial P_{o_{1,j+1,k}}} & \text{si } \Delta P_{r3_{1,j+1,k}} \geq 0 \end{cases} + \left[ P_{f1_{1,j+1,k}} - \right. \\
& \left. P_{f1_{1,j,k}} + P_{c1_{1,j+1,k}} - P_{c1_{1,j,k}} \right] \left. \right\} \begin{cases} 0 \\ \frac{\partial \left( \text{Tr}2\theta \xi_S \right)_{1,j+1,k}}{\partial P_{o_{1,j+1,k}}} \end{cases} \\
& \begin{cases} \text{si } \Delta P_{r2_{1,j+1,k}} < 0 \\ \text{si } \Delta P_{r2_{1,j+1,k}} \geq 0 \end{cases} \dots (\text{E.32})
\end{aligned}$$

donde las diferencias de presión se definen en forma similar a las Ecs. E.14 y E.15, y las transmisibilidades en forma similar a las Ecs. E.4 y E.5, pero evaluadas en el punto  $1,j+1,k$ , respectivamente.

La derivada de  $F_{r_{1,j,k}}$  con respecto a  $S_{g_{1,j+1,k}}$  se define como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{r_{1,j,k}}}{\partial S_{g_{1,j+1,k}}} &= - \text{Tr}3\theta_{1,j+1/2,k} \frac{\partial P_{c2_{1,j+1,k}}}{\partial S_{g_{1,j+1,k}}} + \left( P_{f1_{1,j+1,k}} - P_{f1_{1,j,k}} - \right. \\
& \left. P_{c2_{1,j+1,k}} + P_{c2_{1,j,k}} \right) \left. \right\} \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta P_{r3_{1,j+1,k}} < 0 \\ \frac{\partial \text{Tr}3\theta_{1,j+1,k}}{\partial S_{g_{1,j+1,k}}} & \text{si } \Delta P_{r3_{1,j+1,k}} \geq 0 \end{cases} + \left( \text{Tr}2\theta \right. \\
& \left. \xi_S \right)_{1,j+1/2,k} \frac{\partial P_{c1_{1,j+1,k}}}{\partial S_{g_{1,j+1,k}}} + \left( P_{f1_{1,j+1,k}} - P_{f1_{1,j,k}} + P_{c1_{1,j+1,k}} - \right. \\
& \left. P_{c1_{1,j,k}} \right) \left. \right\} \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta P_{r2_{1,j+1,k}} < 0 \\ \xi_S_{1,j+1,k} \frac{\partial \text{Tr}2\theta_{1,j+1,k}}{\partial S_{g_{1,j+1,k}}} & \text{si } \Delta P_{r2_{1,j+1,k}} \geq 0 \end{cases} \dots (\text{E.33})
\end{aligned}$$

donde las transmisibilidades de las fases r3 y r2, se definen en forma similar a las Ecs. E.8 y E.9, pero evaluadas en el nodo i, j+1, k.

La derivada de  $F_{r_{1,j,k}}$  con respecto a  $S_{w_{1,j+1,k}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{r_{1,j,k}}}{\partial S_{w_{1,j+1,k}}} = - T_{r4r_{1+1/2,j,k}} \frac{\partial P_{c3_{1+1,j,k}}}{\partial S_{w_{1+1,j,k}}} + \left( P_{f1_{1,j+1,k}} - P_{f1_{1,j,k}} - P_{c3_{1,j+1,k}} + P_{c3_{1,j,k}} \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{r4_{1,j+1,k}} \geq 0 \\ \zeta_{S_{1,j+1/2,k}} \frac{\partial T_{r4r_{1,j+1,k}}}{\partial S_{w_{1,j+1,k}}} \quad \text{si } \Delta P_{r4_{1,j+1,k}} < 0 \end{array} \right. \quad \dots (E.34)$$

donde la derivada de la transmisibilidad de la fase r4, se define en forma similar a la Ec. E.12, pero evaluada en el nodo i, j+1, k.

La derivada de  $F_{r_{1,j,k}}$  con respecto a  $P_{o_{1,j,k+1}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{r_{1,j,k}}}{\partial P_{o_{1,j,k+1}}} = T_{r3Z_{1,j,k+1/2}} + \left( T_{r2Z} \xi_S \right)_{1,j,k+1/2} + \left[ P_{f1_{1,j,k+1}} - P_{f1_{1,j,k}} - P_{c2_{1,j,k+1}} + P_{c2_{1,j,k}} - \left( \gamma_{r3\Delta D} \right)_{1,j,k+1/2} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial T_{r3Z_{1,j,k+1}}}{\partial P_{o_{1,j,k+1}}} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \Delta \Phi_{r3_{1,j,k+1}} < 0 \\ \text{si } \Delta \Phi_{r3_{1,j,k+1}} \geq 0 \end{array} \right. - \left[ P_{f1_{1,j,k+1}} - P_{f1_{1,j,k}} + P_{c1_{1,j,k+1}} - P_{c1_{1,j,k}} - \left( \gamma_{r2\Delta D} \right)_{1,j,k+1/2} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial \left( T_{r2Z} \xi_S \right)_{1,j,k+1}}{\partial P_{o_{1,j,k+1}}} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \Delta \Phi_{r2_{1,j,k+1}} < 0 \\ \text{si } \Delta \Phi_{r2_{1,j,k+1}} \geq 0 \end{array} \right. \quad \dots (E.35)$$

donde los potenciales de flujo se definen en forma similar a las Ecs. E.2 y E.3, y las transmisibilidades en forma similar a las Ecs. E.4 y E.5, pero evaluadas en el punto  $1, j, k+1$ , respectivamente.

La derivada de  $Ff_{1, j, k}$  con respecto a  $Sg_{1, j, k+1}$  se define como:

$$\frac{\partial Ff_{1, j, k}}{\partial Sg_{1, j, k+1}} = - Trf3Z_{1, j, k+1/2} \frac{\partial Pc3_{1, j, k+1}}{\partial Sg_{1, j, k+1}} + \left( Trf2Z \xi_S \right)_{1, j, k+1/2}$$

$$\frac{\partial Pc1_{1, j, k+1}}{\partial Sg_{1, j, k+1}} + \left[ Pf1_{1, j, k+1} - Pf1_{1, j, k} - Pc2_{1, j, k+1} + Pc2_{1, j, k} - \right.$$

$$\left. \left( \gamma r3 \Delta D \right)_{1, j, k+1/2} \right] \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \Delta \Phi r3_{1, j, k+1} < 0 \\ \frac{\partial Trf3Z_{1, j, k+1}}{\partial Sg_{1, j, k+1}} & \text{si } \Delta \Phi r3_{1, j, k+1} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$+ \left[ Pf1_{1, j, k+1} - Pf1_{1, j, k} + Pc1_{1, j, k+1} - Pc1_{1, j, k} - \left( \gamma r2 \Delta D \right)_{1, j, k+1/2} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \Delta \Phi r2_{1, j, k} < 0 \\ \xi_S \frac{\partial Trf2Z_{1, j, k+1}}{\partial Sg_{1, j, k+1}} & \text{si } \Delta \Phi r2_{1, j, k} \geq 0 \end{array} \right. \dots (E.36)$$

donde las transmisibilidades de las fases  $r3$  y  $r2$ , se definen en forma similar a las Ecs. E.8 y E.9, pero evaluadas en el nodo  $1, j, k+1$ , respectivamente.

La derivada de  $Ff_{1, j, k}$  con respecto a  $Sw_{1, j, k+1}$  se define como:

$$\frac{\partial Ff_{1, j, k}}{\partial Sw_{1, j, k+1}} = - Trf4Z_{1, j, k+1/2} \frac{\partial Pc3_{1, j, k+1}}{\partial Sw_{1, j, k+1}} + \left[ Pf1_{1, j, k+1} - Pf1_{1, j, k} - \right.$$

$$\left. \begin{aligned}
& P_{c3_{1,j,k+1}} + P_{c3_{1,j,k}} - \left[ (\gamma_{r4} \Delta D)_{1,j,k+1/2} \right] \left. \vphantom{\begin{aligned} P_{c3_{1,j,k+1}} + P_{c3_{1,j,k}} - \left[ (\gamma_{r4} \Delta D)_{1,j,k+1/2} \right]} \right\} \zeta_{S_{1,j,k+1/2}} \frac{\partial Tr_{4Z_{1,j,k+1}}}{\partial SW_{1,j,k+1}} \\
& \text{si } \Delta \Phi_{r4_{1,j,k+1}} \geq 0 \\
& \text{si } \Delta \Phi_{r4_{1,j,k+1}} < 0
\end{aligned} \right\} \dots (E.37)$$

donde la derivada de la transmisibilidad de la fase r4, se define en forma similar a la Ec. E.12, pero evaluada en el nodo 1,j,k+1.

La derivada de  $F_{r_{1,j,k}}$  con respecto a  $P_{om_{1,j,k}}$  se define como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{r_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} &= Tr_{3m_{1,j,k}} + \left( Tr_{2m} \xi_S \right)_{1,j,k} + \left( Pf_{1m_{1,j,k}} - Pf_{1_{1,j,k}} - \right. \\
& \left. P_{c2m_{1,j,k}} + P_{c2_{1,j,k}} \right) \frac{\partial Tr_{3m_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} + \left[ Pf_{1m_{1,j,k}} - Pf_{1_{1,j,k}} + P_{c1m_{1,j,k}} \right. \\
& \left. - P_{c1_{1,j,k}} \right] \frac{\partial \left( Tr_{2m} \xi_S \right)_{1,j,k}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} \dots (E.38)
\end{aligned}$$

donde las derivadas de las transmisibilidades de las fases r3 y r2 en los bloques de matriz, se definen en forma similar a las Ecs. E.4 y E.5, pero evaluadas en el nodo 1,j,k.

La derivada de  $F_{r_{1,j,k}}$  con respecto a  $S_{gm_{1,j,k}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{r_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} = Tr_{3m_{1,j,k}} \frac{\partial P_{c2m_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} + \left( Pf_{1m_{1,j,k}} - Pf_{1_{1,j,k}} - P_{c2m_{1,j,k}} \right)$$

$$+ P_{c2_{i,j,k}} \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{r3m_{i,j,k}} < 0 \\ \frac{\partial Tr_{3m_{i,j,k}}}{\partial S_{gm_{i,j,k}}} \quad \text{si } \Delta P_{r3m_{i,j,k}} \geq 0 \end{array} \right. + \left( Tr_{2m} \xi_S \right)_{i,j,k}$$

$$\frac{\partial P_{c1m_{i,j,k}}}{\partial S_{gm_{i,j,k}}} + \left( P_{f1m_{i,j,k}} - P_{f1_{i,j,k}} + P_{c1m_{i,j,k}} - P_{c1_{i,j,k}} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{r2m_{i,j,k}} < 0 \\ \xi_S \frac{\partial Tr_{2m_{i,j,k}}}{\partial S_{gm_{i,j,k}}} \quad \text{si } \Delta P_{r2m_{i,j,k}} \geq 0 \end{array} \right. \quad \dots (E.39)$$

donde la diferencia de presión para los bloques de matriz, se define como:

Para la fase r3,

$$\Delta P_{r3m_{i,j,k}} = P_{f1m_{i,j,k}} - P_{f1_{i,j,k}} - P_{c2m_{i,j,k}} - P_{c2_{i,j,k}} \quad \dots (E.40)$$

para la fase r2 en los bloques de matriz,

$$\Delta P_{r2m_{i,j,k}} = P_{f1m_{i,j,k}} - P_{f1_{i,j,k}} + P_{c1m_{i,j,k}} - P_{c1_{i,j,k}} \quad \dots (E.41)$$

y las derivadas de las transmisibilidades de las fases r3 y r2 en los bloques de matriz, se definen en forma similar a las Ecs. E.8 y E.9, pero evaluadas en el nodo i,j,k.

La derivada de  $F_{r_{i,j,k}}$  con respecto a  $S_{wm_{i,j,k}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{r_{i,j,k}}}{\partial S_{wm_{i,j,k}}} = - Tr_{4m_{i,j,k}} \frac{\partial P_{c3m_{i,j,k}}}{\partial S_{wm_{i,j,k}}} + \left( P_{f1m_{i,j,k}} - P_{f1_{i,j,k}} - P_{c3m_{i,j,k}} + \right)$$

$$P_{c3} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \zeta_{S,1,j,k} \left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{f4m,1,j,k} \geq 0 \\ \frac{\partial T_{f4m,1,j,k}}{\partial S_{wm,1,j,k}} \quad \text{si } \Delta P_{f4m,1,j,k} < 0 \end{array} \right\} \dots (E.42)$$

donde la derivada de la transmisibilidad de la fase r4 en los bloques de matriz, se define en forma similar a la Ec. E.12, pero evaluada en el nodo 1,j,k.

Ahora bien, como se mencionó previamente, las expresiones de las derivadas de los términos de producción, provenientes del acoplamiento de las condiciones de frontera, están dadas en forma general como:

La derivada de  $q_{r,j,m}$  con respecto a  $P_{o,1,j,m}$  se define como:

$$\frac{\partial q_{r,j,m}}{\partial P_{o,1,j,m}} = \left\{ \left[ \sum_{m=1}^M \left( T_{or} + T_{gr} r_s \right)_{.5,j,m} \right] \left\{ \frac{\partial T_{f3r}}{\partial P_o} + \frac{\partial (T_{f2r} \xi_s)}{\partial P_o} \right\}_{1,j,m} \right\} -$$

$$\left\{ T_{f3r} + T_{f2r} \xi_s \right\}_{.5,j,m} \left\{ \frac{\partial T_{f3r}}{\partial P_o} + \frac{\partial (T_{f2r} \xi_s)}{\partial P_o} \right\}_{1,j,m} \left\{ Q_{o,T} \right\} / \left[ \sum_{m=1}^M \left( T_{or} + T_{gr} r_s \right)_{.5,j,m} \right]^2 \dots (E.43)$$

donde las derivadas de la transmisibilidades de las fases r3 y r2, se definen en forma similar a las Ecs. E.4 y E.5, pero evaluadas en el nodo 1,j,m, respectivamente.

La derivada de  $q_{r_{j,m}}$  con respecto a  $S_{g_{1,j,m}}$  se define como:

$$\frac{\partial q_{r_{j,m}}}{\partial S_{g_{1,j,m}}} = \left\{ \left[ \sum_{m=1}^M \left( T_{or}^* + T_{gr}^* r_S \right)_{.5,j,m} \right] \left\{ \frac{\partial T_{f3r}}{\partial S_g} + \frac{\partial (T_{f2r} \xi_S)}{\partial S_g} \right\} \right\}_{1,j,m} -$$

$$\left\{ T_{f3r} + T_{f2r} \xi_S \right\}_{.5,j,k} \left\{ \frac{\partial T_{f3r}}{\partial S_g} + \frac{\partial (T_{f2r} \xi_S)}{\partial S_g} \right\}_{1,j,m} \left. \right\} Q_{o_T} / \left[ \sum_{m=1}^M \left( T_{or}^* + T_{gr}^* r_S \right)_{.5,j,m} \right]^2 \dots (E.44)$$

donde las derivadas de la transmisibilidades de las fases r3 y r2, se definen en forma similar a las Ecs. E.8 y E.9, pero evaluadas en el nodo 1,j,m, respectivamente.

La derivada de  $q_{r_{j,m}}$  con respecto a  $S_{w_{1,j,m}}$  se define como:

$$\frac{\partial q_{r_{j,m}}}{\partial S_{w_{1,j,m}}} = \left\{ \left[ \sum_{m=1}^M \left( T_{or}^* + T_{gr}^* r_S \right)_{.5,j,m} \right] \left\{ \frac{\partial T_{f4r}}{\partial S_w} + \frac{\partial (T_{f2r} \xi_S)}{\partial S_w} \right\} \right\}_{1,j,m} -$$

$$\left\{ T_{f4r} + T_{f2r} \xi_S \right\}_{.5,j,k} \left\{ \frac{\partial T_{f4r}}{\partial S_w} + \frac{\partial (T_{f2r} \xi_S)}{\partial S_w} \right\}_{1,j,m} \left. \right\} Q_{o_T} / \left[ \sum_{m=1}^M \left( T_{or}^* + T_{gr}^* r_S \right)_{.5,j,m} \right]^2 \dots (E.45)$$

donde la derivada de la transmisibilidad de la fase r4, se define en forma similar a la Ec. E.12, pero evaluada en el nodo 1,j,m.

Por último, las derivadas de las funciones de residuos de los **BLOQUES DE MATRIZ**, están dadas en forma general como:

La derivada de  $F_{fm_{1,j,k}}$  con respecto a  $P_{o_{1,j,k}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{fm_{1,j,k}}}{\partial P_{o_{1,j,k}}} = Tr_{3m_{1,j,k}} + \left( Tr_{2m} \xi_S \right)_{1,j,k} \quad \dots (E.46)$$

La derivada de  $F_{fm_{1,j,k}}$  con respecto a  $S_{g_{1,j,k}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{fm_{1,j,k}}}{\partial S_{g_{1,j,k}}} = - \left( Tr_{2m} \xi_S \right)_{1,j,k} \frac{\partial P_{c1_{1,j,k}}}{\partial S_{g_{1,j,k}}} - Tr_{3m_{1,j,k}} \frac{\partial P_{c2_{1,j,k}}}{\partial S_{g_{1,j,k}}} -$$

$$\left[ P_{f1m_{1,j,k}} - P_{f1_{1,j,k}} - P_{c2m_{1,j,k}} + P_{c2_{1,j,k}} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta P_{r3m_{1,j,k}} \geq 0 \\ \frac{\partial Tr_{3m_{1,j,k}}}{\partial S_{g_{1,j,k}}} \quad \text{si } \Delta P_{r3m_{1,j,k}} < 0 \end{array} \right.$$

$$- \left[ P_{f1m_{1,j,k}} - P_{f1_{1,j,k}} + P_{c1m_{1,j,k}} - P_{c1_{1,j,k}} \right] \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \xi_{S_{1,j,k}} \frac{\partial Tr_{2m_{1,j,k}}}{\partial S_{g_{1,j,k}}} \end{array} \right.$$

si  $\Delta P_{r2m_{1,j,k}} \geq 0$

si  $\Delta P_{r2m_{1,j,k}} < 0$

... (E.47)

Las derivadas de las transmisibilidades de las fases r3 y r2 existen o no, de acuerdo con el criterio de evaluar estas transmisibilidades corriente arriba, Ec. 3.17

La caída de presión para las fases r3 y r2, de la Ec. E.47, se define como:

Para la fase r3,

$$\Delta Pr_{3m, i, j, k} = Pr_{1m, i, j, k} - Pf_{1, i, j, k} - Pc_{2m, i, j, k} + Pc_{2, i, j, k} \quad \dots (E.48)$$

para la fase r2,

$$\Delta Pr_{2m, i, j, k} = Pr_{1m, i, j, k} - Pf_{1, i, j, k} + Pc_{1m, i, j, k} - Pc_{1, i, j, k} \quad \dots (E.49)$$

donde las derivadas de las transmisibilidades se definen como:

Para la fase r3,

$$\frac{\partial Tr_{3m, i, j, k}}{\partial Sg_{i, j, k}} = \left[ Tr_{3m} \left\{ \frac{1}{k_{rf3}} \frac{\partial k_{rf3}}{\partial Sg} \right\} \right]_{i, j, k} \quad \dots (E.50)$$

para la fase r2,

$$\frac{\partial Tr_{2m, i, j, k}}{\partial Sg_{i, j, k}} = \left[ Tr_{2m} \left\{ \frac{1}{k_{rf2}} \frac{\partial k_{rf2}}{\partial Sg} \right\} \right]_{i, j, k} \quad \dots (E.51)$$

La derivada de  $F_{fm, i, j, k}$  con respecto a  $S_{w, i, j, k}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{fm, i, j, k}}{\partial S_{w, i, j, k}} = - Tr_{4m, i, j, k} \frac{\partial Pc_{3, i, j, k}}{\partial S_{w, i, j, k}} - \left[ Pr_{1m, i, j, k} - Pf_{1, i, j, k} + Pc_{3m, i, j, k} - Pc_{3, i, j, k} \right] \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \Delta Pr_{4m, i, j, k} \geq 0 \\ \zeta_{s, i, j, k} \frac{\partial Tr_{4m, i, j, k}}{\partial S_{w, i, j, k-1}} & \text{si } \Delta Pr_{4m, i, j, k} < 0 \end{array} \right. \quad \dots (E.52)$$

donde la caída de presión para esta fase, se define como:

$$\Delta Pr_{4m, i, j, k} = Pr_{1m, i, j, k} - Pf_{1, i, j, k} + Pc_{3m, i, j, k} - Pc_{3, i, j, k} \quad \dots (E.53)$$

y la derivada de la transmisibilidad de la fase r4 como:

$$\frac{\partial Tr_{4m_{1,j,k}}}{\partial Sw_{1,j,k}} = \left[ Tr_{4m} \left\{ \frac{1}{K_{rr4}} \frac{\partial K_{rr4}}{\partial Sw} \right\} \right]_{1,j,k} \dots (E.54)$$

La derivada de  $F_{fm_{1,j,k}}$  con respecto a  $P_{om_{1,j,k}}$  se define como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{fm_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} = & -Tr_{3m_{1,j,k}} - \left( Tr_{2m} \xi_S \right)_{1,j,k} - \left( Pr_{1m_{1,j,k}} - Pr_{1_{1,j,k}} - \right. \\ & \left. Pc_{2m_{1,j,k}} + Pc_{2_{1,j,k}} \right) \frac{\partial Tr_{3m_{1,j,k}}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} - \left[ Pr_{1m_{1,j,k}} - Pr_{1_{1,j,k}} + Pc_{1m_{1,j,k}} \right. \\ & \left. - Pc_{1_{1,j,k}} \right] \frac{\partial \left( Tr_{2m} \xi_S \right)_{1,j,k}}{\partial P_{om_{1,j,k}}} - \frac{V_{pm_{1,j,k}}}{\Delta t} \left[ Sr_{3m} \left\{ \left[ 1 + Cr_m \left( P_{om}^{n+1} - P_{om}^n \right) \right] \frac{\partial br_{3m}}{\partial P_{om}} \right. \right. \\ & \left. \left. + br_{3m} Cr_m \right\} - Sr_{2m} \left\{ \left[ 1 + Cr_m \left( P_{om}^{n+1} - P_{om}^n \right) \right] \frac{\partial \left( br_{2m} \xi_S \right)}{\partial P_{om}} + br_{2m} \xi_S Cr_m \right\} \right]_{1,j,k} \\ & \dots (E.55) \end{aligned}$$

donde las derivadas de las transmisibilidades de las fases r3 y r2 en los bloques de matriz, se definen en forma similar a las Ecs. E.4 y E.5, pero evaluadas en el nodo i,j,k.

La derivada de  $F_{fm_{1,j,k}}$  con respecto a  $S_{gm_{1,j,k}}$  se define como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{fm_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} = & Tr_{3m_{1,j,k}} \frac{\partial Pc_{2m_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} - \left( Pr_{1m_{1,j,k}} - Pr_{1_{1,j,k}} - Pc_{2m_{1,j,k}} + \right. \\ & \left. Pc_{2_{1,j,k}} \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } \Delta Pr_{3m_{1,j,k}} < 0 \\ \frac{\partial Tr_{3m_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} \quad \text{si } \Delta Pr_{3m_{1,j,k}} \geq 0 \end{array} \right\} - \left( Tr_{2m} \xi_S \right)_{1,j,k} \frac{\partial Pc_{1m_{1,j,k}}}{\partial S_{gm_{1,j,k}}} \end{aligned}$$

$$\left( P_{f1m_{i,j,k}} - P_{f1_{i,j,k}} + P_{c1m_{i,j,k}} - P_{c1_{i,j,k}} \right) \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \\ \xi_{S_{i,j,k}} \frac{\partial T_{f2m_{i,j,k}}}{\partial S_{gm_{i,j,k}}} & \text{si} \end{array} \right.$$

$$\Delta P_{f2m_{i,j,k}} < 0$$

$$\Delta P_{f2m_{i,j,k}} \geq 0$$

$$\frac{\partial b_{f3m}}{\partial P_{gm}} \frac{\partial P_{c2m}}{\partial S_{gm}} \alpha_b - b_{r2m} \xi_S - S_{r2m} \left. \frac{\partial (b_{f3m} \xi_S)}{\partial P_{gm}} \frac{\partial P_{c1m}}{\partial S_{gm}} \alpha_a \right\}_{i,j,k} \dots (E.56)$$

Las derivadas de las transmisibilidades de las fases r3 y r2 en los bloques de matriz, se definen en forma similar a las Ecs. E.8 y E.9, pero evaluadas en el nodo i,j,k.

La derivada de  $F_{fm_{i,j,k}}$  con respecto a  $S_{wm_{i,j,k}}$  se define como:

$$\frac{\partial F_{fm_{i,j,k}}}{\partial S_{wm_{i,j,k}}} = - T_{f4m_{i,j,k}} \frac{\partial P_{c3m_{i,j,k}}}{\partial S_{wm_{i,j,k}}} + \left( P_{f1m_{i,j,k}} - P_{f1_{i,j,k}} - P_{c3m_{i,j,k}} + P_{c3_{i,j,k}} \right) \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \Delta P_{f4m_{i,j,k}} \geq 0 \\ \xi_{S_{i,j,k}} \frac{\partial T_{f4m_{i,j,k}}}{\partial S_{wm}} & \text{si } \Delta P_{f4m_{i,j,k}} < 0 \end{array} \right. + S_{i,j,k} \frac{V_{pm_{i,j,k}}}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + Cr_m \left( P_{om}^{n+1} - P_{om}^n \right) \right] \left( b_{f4m} \zeta_S - S_{f3m} \frac{\partial b_{f4m}}{\partial P_{wm}} \frac{\partial P_{c3m}}{\partial S_{wm}} \right) \right\}_{i,j,k} \dots (E.57)$$

donde la derivada de la transmisibilidad de la fase r4 en los bloques de matriz, se define en forma similar a la Ec. E.12, pero evaluada en el nodo i,j,k.

Por otra parte, cabe aclarar que las derivadas de la función de las fracturas y de los bloques de matriz del AGUA, con

respecto a la incógnita de saturación del **GAS**, tanto de las fracturas como de los bloques de matriz, es igual a cero, es decir:

$$\frac{\partial F_w}{\partial S_{g_{1mn}}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_w}{\partial S_{g_{1,j,k}}} = \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{g_{1,j,k}}} = \frac{\partial F_{wm}}{\partial S_{g_{1,j,k}}} = 0 \quad \dots \text{(E.58)}$$

donde:

$$1mn = 1,j,k-1, \quad 1,j-1,k, \quad 1-1,j,k, \quad 1,j,k, \quad 1+1,j,k, \quad 1,j+1,k, \quad 1,j,k+1$$

La Tabla E.1 muestra las equivalencias de los subíndices y coeficientes que permiten manejar ya sea la fase **ACEITE**, **GAS** o **AGUA**, con estas expresiones generales de las derivadas de las funciones de residuos, tanto de las **FRACTURAS** como de los **BLOQUES DE MATRIZ**.

TABLA E.1

FASE	SUBINDICES (FASES)				SUBINDICES DE PRE. CAP.			REL. DE SOL.	
	f1	f2	f3	f4	c1	c2	c3	ξS	ζS
o	o	g*	o	o	cgo <sup>+</sup>	0 cero	0 cero	> R <sub>s</sub> <sup>*</sup> 0 cero	1
g	o	o <sup>**</sup>	g	o	0 cero	-cgo <sup>+,&amp;</sup>	0 cero	> R <sub>s</sub> <sup>**</sup> 0 cero	> R <sub>s</sub> <sup>**</sup> 0 cero
w	o	0 cero	w	w	0 cero	cwo <sup>++</sup>	cwo <sup>++</sup>	0 cero	1

SATURACION		SIGNO	FAC. ADIC.	
Sr2	Sf3	SIG	αa	αb
Sg	So = 1 - Sg - Sw	+ 1	1	0 cero
So = 1 - Sg - Sw	Sg	- 1	1	1
0, cero	Sw	- 1	0	0 cero

- \* Manejo de fluidos de gas y condensado.
- \*\* Manejo de fluidos de aceite negro.
- + Presión Capilar: sistema gas-aceite.
- ++ Presión Capilar: sistema aceite-agua.
- & El signo menos (-) indica que se debe cambiar el signo de esta presión capilar, por el signo contrario; por ejemplo: si el signo es +, se cambia por - y si es - se cambia por +.

APENDICE F. DESCRIPCION GENERAL DEL SIMULADOR.

En este Apéndice se presenta, en forma general, la descripción del simulador numérico del flujo de fluidos hacia un pozo en un yacimiento naturalmente fracturado, el cual está constituido por un programa principal y cuarenta y un subprogramas en donde se efectúan las diferentes etapas de cálculo requeridas por el simulador<sup>17</sup>.

A continuación, se describe el algoritmo de cálculo de este simulador:

Se inicia con la asignación de la memoria de cómputo requerida por el simulador, así como de ciertos parámetros numéricos necesarios para establecer los criterios de convergencia del método iterativo de Newton-Raphson y de los métodos iterativos de solución del sistema lineal de ecuaciones generado en cada iteración newtoniana. También, para el control automático del parámetro de sobrerelajación requeridos por los métodos iterativos de solución, así como para el control automático del intervalo de tiempo ( $\Delta t$ ) en cada etapa de tiempo de la simulación.

Se continúa con la lectura de la información suministrada y en base a ésta, las corridas del simulador se clasifican en tres diferentes tipos: 1) **Corridas normales**, 2) **Corridas de continuación o de predicción** y 3) **Corridas de revisión de la capacidad actual del simulador**.

En las **coñidas normales** se simula el comportamiento del pozo desde el inicio de su explotación hasta el tiempo final especificado. Los datos requeridos en este tipo de corridas se clasifican en siete grupos definidos de la siguiente manera:

- a) Datos de Control de la Corrida,
- b) Datos Generales del Pozo,
- c) Datos Numéricos Imprescindibles y Opcionales,
- d) Datos de Producción,
- f) Datos PVT, y
- g) Datos de los Bloques de Matriz (Solo para Yacimientos Naturalmente Fracturados).

Una vez que se han leído estos datos, se calcula la malla radial logarítmica, para ésto el simulador cuenta con dos algoritmos: Un algoritmo convencional y otro general. Aunque, estos dos algoritmos son independientes, el primero es un caso particular del segundo. El algoritmo general permite emplear intervalos de tiempo más grandes que el convencional, sobretodo al inicio de la simulación y en cualquier cambio brusco de la producción del pozo, sin que se vea afectada la estabilidad del simulador. De esta forma, el tiempo de procesamiento se reduce notablemente. Después, se calculan los factores geométricos de las transmisibilidades y la distribución inicial de presiones y de saturaciones de los fluidos en la región de drene del pozo, la cual se calcula con base en el equilibrio gravitacional y capilar en que se encuentran los fluidos al inicio de la explotación. Se asigna esta distribución como estimación inicial del proceso iterativo del método de Newton-Raphson. Se evalúa el volumen original de los fluidos, si se tiene la opción de un acuífero analítico, se calcula el volumen original de éste y se procede a grabar esta información en un archivo permanente en disco, la cual servirá de base para una

corrida de continuación o de predicción. Toda esta información, si se desea se puede mandar a imprimir a papel.

Posteriormente, se ordenan en forma creciente los tiempos en que se efectúan las pruebas de presión y las reparaciones mayores al pozo, entendiéndose por esto último, al cambio o ampliación del intervalo disparado. Estas dos características, el simulador las puede realizar en cualquier tiempo de la vida productiva del pozo, y se está en condiciones de comenzar con la simulación del flujo de fluidos hacia un pozo. Por lo que, se selecciona el tamaño de la etapa de tiempo a ser manejada por el simulador y la condición de frontera interna del pozo, ya sea un ritmo de producción o una presión de fondo mínima. El simulador, por lo general, comienza con un programa de ritmos de producción del pozo. Este programa se lleva a cabo siempre y cuando la presión de fondo calculada sea mayor o igual a la presión de fondo mínima especificada. En caso contrario, el pozo produce a dicha presión mínima y se calculan los ritmos correspondientes de producción de los fluidos.

Se entra al proceso iterativo del esquema newtoniano y se fija el control automático del tamaño del intervalo de tiempo. Este control establece que en caso de que el método de Newton-Raphson alcance la solución dentro de un cierto rango de iteraciones predeterminado, el tamaño de este intervalo de tiempo no es alterado. Por el contrario, si la solución converge rápidamente antes de alcanzar un número mínimo de iteraciones establecido, el siguiente intervalo de tiempo se incrementa por un factor establecido o si la solución converge lentamente, necesitando más iteraciones que un

número máximo permitido, el intervalo de tiempo se reduce por un factor establecido y se recalcula esa etapa de tiempo con el nuevo intervalo de tiempo. Si se continua reduciendo el tamaño de la etapa de tiempo a un valor mínimo predeterminado, el simulador se detiene automáticamente. Si esto ocurre, lo anterior puede deberse a una inconsistencia de datos, por una mala selección del parámetro de sobrerelajación en los métodos iterativos o por un problema numérico dentro del simulador. Establecido lo anterior, se procede a calcular el vector de residuos definido por las funciones  $F_{i,j,k}$  y la matriz jacobiana  $\bar{J}$  definida por las derivadas de estas funciones con respecto a cada una de las incógnitas, al nivel de iteración previo ( $\nu$ ), aplicándoles las condiciones de frontera estipuladas, de acuerdo con este esquema newtoniano. Se acoplan las ecuaciones de los bloques de matriz al vector de residuos y a la matriz jacobiana de las fracturas, y si se especifica la opción correspondiente, también se acopla el acuífero analítico. El sistema lineal de ecuaciones resultante se resuelve mediante cualquier método de solución presentados en este trabajo: NSPIV, MLDU, LSOR y BSORY. Para los métodos iterativos de solución, se necesita de un parámetro de sobrerelajación que permita acelerar el ritmo de convergencia a la solución, para realizar el menor número de iteraciones posible. El valor óptimo de este parámetro se puede obtener por ensaye y error o a través de un algoritmo con el que cuenta el simulador.

Cada uno de los métodos de solución está adaptado para el manejo de sistemas de ecuaciones con una matriz de coeficientes de la forma heptadiagonal y si existe continuidad en la dirección angular,

esta matriz cuenta con dos bandas más. Cada elemento de esta matriz de coeficiente, está compuesto por una submatriz de 3x3, congruente con las tres fases que se resuelven simultáneamente.

Resueltos los cambios iterativos de las incógnitas de las fracturas, se calculan los correspondientes a los bloques de matriz. El proceso iterativo del Newton-Raphson termina cuando estos cambios convergen dentro de una tolerancia predeterminada. Si no se logra la convergencia, se recalcula el vector de residuos y la matriz jacobiana empleando ahora la nueva estimación de las incógnitas de presión y de saturación, obtenidas en la iteración anterior. Se resuelve nuevamente el sistema de ecuaciones y se checa la convergencia a la solución. Resuelta la distribución de presiones y de saturaciones de los fluidos, en las fracturas y en los bloques de matriz, se calculan los balances de materia, los ritmos de transferencia matriz-fractura, los ritmos de producción, la relación gas/aceite, el flujo fraccional y la presión promedio del área de drenaje del pozo. Se imprimen resultados y si no se ha alcanzado el tiempo total de simulación, se actualizan las distribuciones de presión y de saturación para calcular una nueva etapa de tiempo de la misma forma antes descrita. Una vez que se alcanza este tiempo de simulación, se graba esta última etapa de tiempo en el archivo permanente en disco para ser utilizada por una corrida de continuación o de predicción.

El simulador también puede obtener, si así se desea, una gráfica del comportamiento global del pozo, así como graficas de los perfiles de saturación de agua y/o gas, a diferentes tiempos.

De esta manera, es posible simular el comportamiento del flujo de fluidos hacia un pozo, bajo diferentes esquemas de producción y definir la posición y longitud adecuadas del intervalo a explotar, así como la máxima recuperación económica posible.

Por otra parte, **una corrida de continuación** permite extender la simulación hasta un nuevo tiempo de explotación del pozo especificado. Mientras que **una corrida de predicción** permite conocer el comportamiento futuro del pozo, sujeto a un programa de producción y a un tamaño y posición del intervalo disparado. Como se mencionó previamente, en ambos casos, los datos de partida para estos tipos de corridas son los datos generados ya sea en una corrida normal o en una corrida de continuación previa, pero con la diferencia de que el primer tipo de corrida si actualiza la información del archivo permanente en disco y el segundo tipo no. Los datos requeridos en ambas corridas se clasifican en dos grupos:

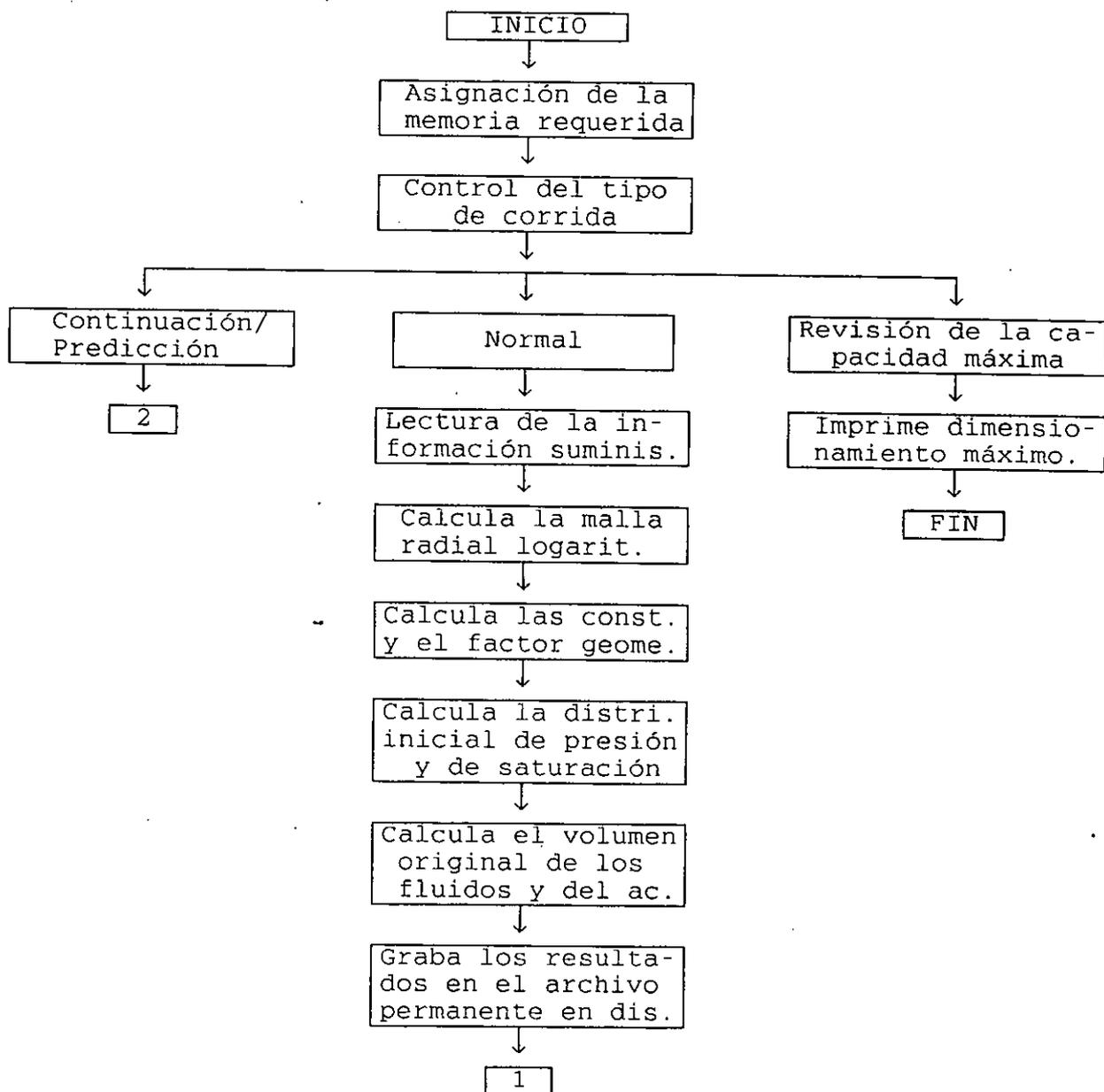
- a) Datos de control de la corrida, y
- b) Datos de producción.

La secuencia de cálculo para estos tipos de corridas es similar al presentado para una corrida normal, solo que éstas comienzan a partir del ordenamiento de los tiempos en que se efectúan las pruebas de presión y las reparaciones.

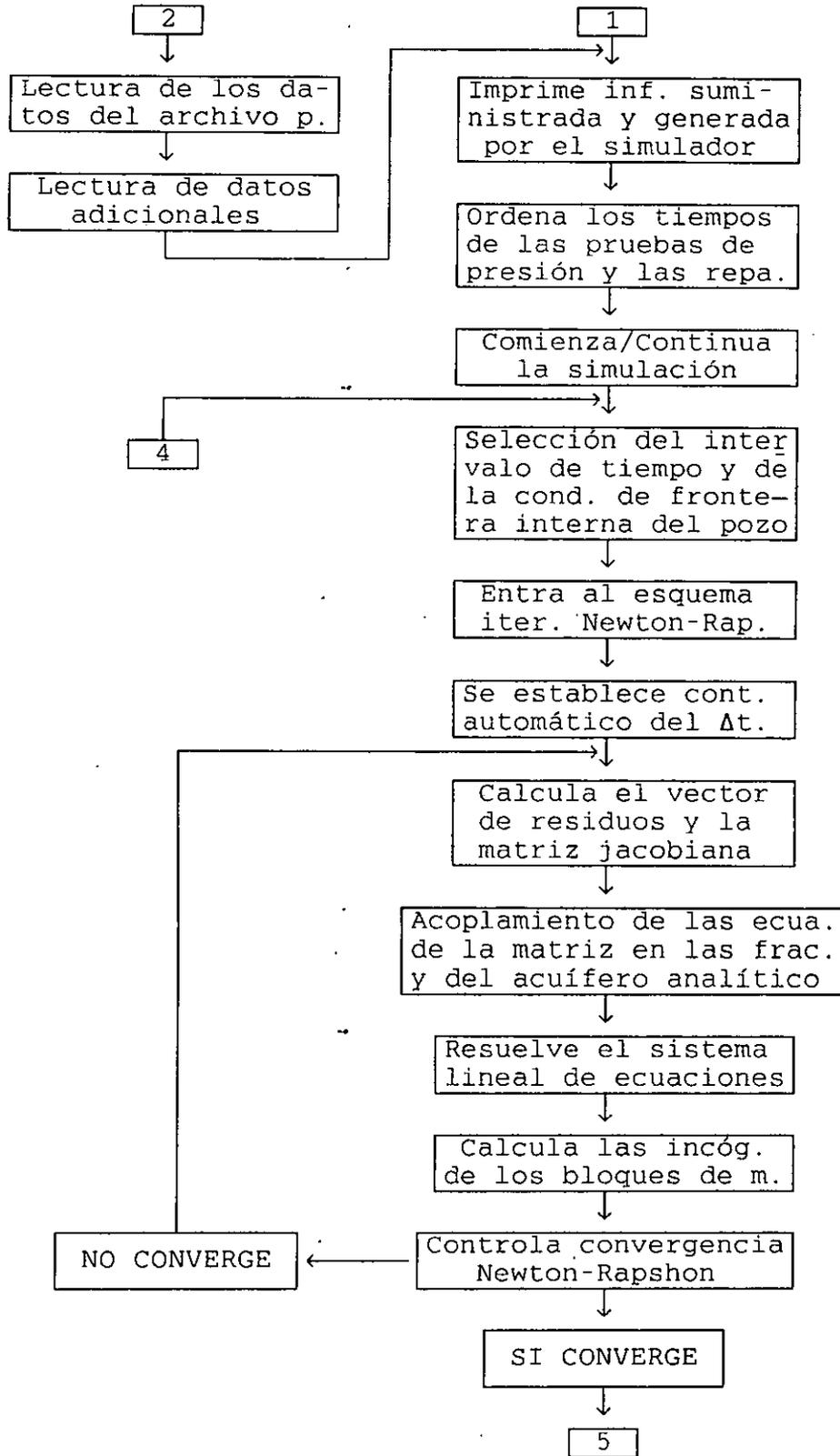
**Las corridas de revisión de la capacidad actual del simulador**, sirven para revisar la capacidad máxima de manejo de datos del simulador, sobretodo cuando se ha dejado de utilizar por algún tiempo o por cuestiones de capacidad del equipo de cómputo, es necesario conocer el dimensionamiento máximo del simulador y poderlo

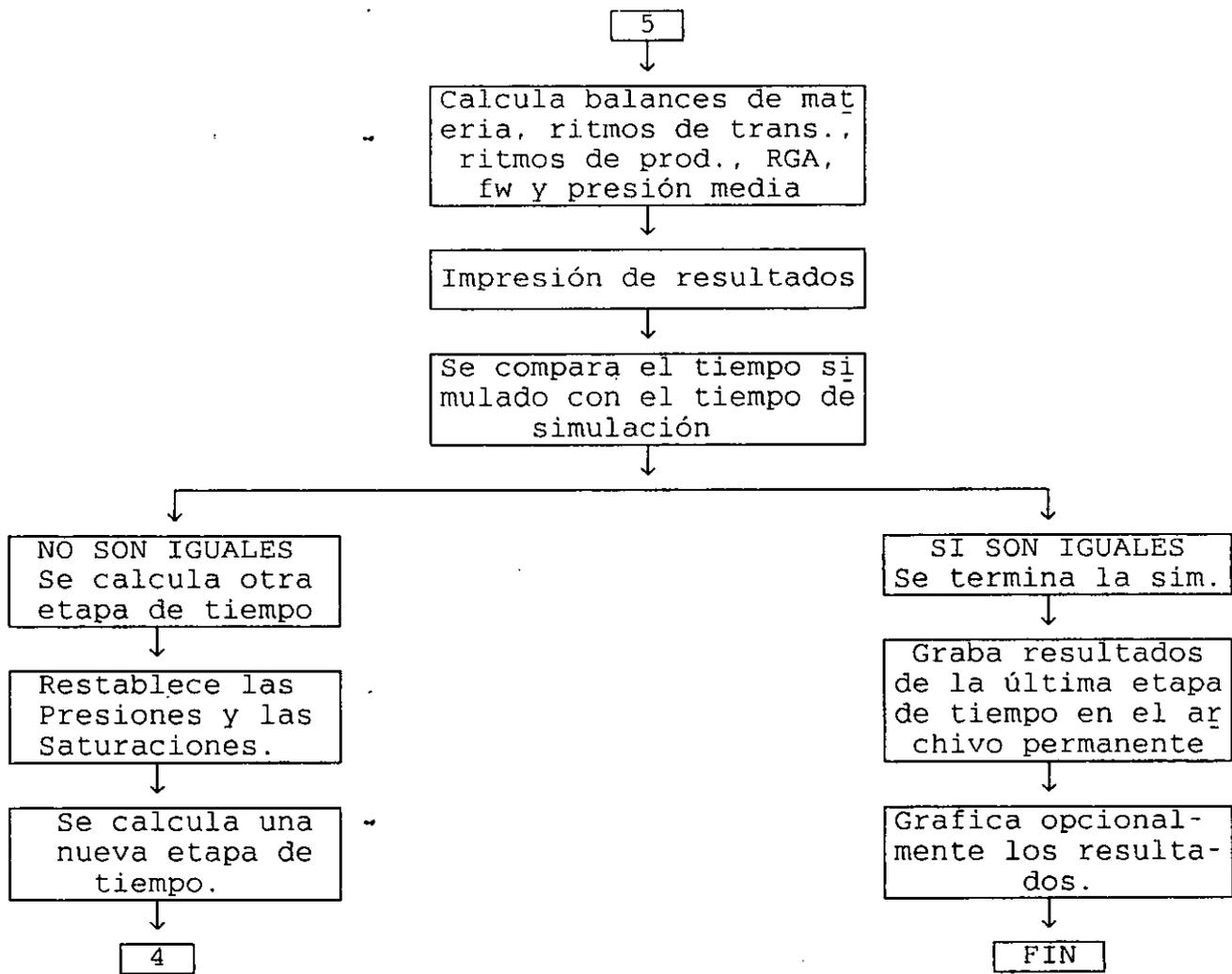
modificar a conveniencia. La información requerida en este caso son los datos de control de la corrida, especificando esta opción.

Finalmente, se presenta un diagrama de flujo simplificado de esta secuencia de cálculo:



nos





APENDICE G: ALGORITMO DE THOMAS.

El algoritmo de THOMAS es un caso particular del método de eliminación Gaussiana, para resolver un sistema de ecuaciones con una matriz de coeficientes de la forma tridiagonal. Este algoritmo se define de la siguiente forma<sup>11,15</sup>:

La Ec. 4.21 puede expresarse en forma matricial como:

$$\overline{T} \overline{\delta X}_T = \overline{r}_T \quad \dots (G.1)$$

donde  $\overline{T}$  es la matriz de coeficientes tridiagonal,

$\overline{\delta X}_T$  es el vector solución o de incógnitas, y

$\overline{r}_T$  es el vector de términos conocidos.

La matriz  $\overline{T}$  de la Ec. G.1 se descompone en el producto de dos matrices, esto es:

$$\overline{T} = \overline{W} \overline{Q} \quad \dots (G.2)$$

donde  $\overline{W}$  es una matriz triangular inferior, y

$\overline{Q}$  es una matriz triangular superior.

Substituyendo la Ec. G.2 en la Ec. G.1, se establece el siguiente sistema:

$$\overline{W} \overline{Q} \overline{\delta X}_T = \overline{r}_T \quad \dots (G.3)$$

La Ec. G.3 puede descomponerse ahora en los siguientes dos subsistemas:

$$\overline{Q} \overline{\delta X}_T = \overline{g} \quad \dots (G.4)$$

y

$$\bar{W} \bar{g} = \bar{r}_T \quad \dots (G.5)$$

Finalmente, se resuelve primero el subsistema dado por la Ec. G.5, mediante una sustitución hacia adelante para obtener el vector  $\bar{g}$ , y después se calcula el vector  $\bar{\delta X}_T$ , de la Ec. G.4, mediante una sustitución hacia atrás.

Cabe hacer notar, que las operaciones involucradas en el proceso de solución del sistema de ecuaciones, Ec. 4.20, son operaciones matriciales debido al carácter matricial de los elementos: H, E, C, A, B, D y G, de la matriz jacobiana  $\bar{J}$ , dado que cada elemento es una submatriz de 3x3, y al carácter vectorial de los elementos de  $\bar{\delta X}$  y  $\bar{F}$ , debido a que cada elemento es un subvector de dimensión 3.

APENDICE H: RUTINAS PARA EL LLENADO DE LOS VECTORES  
MANEJADOS POR LOS METODOS DIRECTOS.

En este Apéndice se describe y se presenta el algoritmo del llenado de los vectores empleados, tanto por el método NSPIV como por el método de MLDU. También, se presenta la codificación de este algoritmo en lenguaje de programación FORTRAN 77.

Este algoritmo está constituido por 4 subrutinas definidas como:

- MATRIZ - Subrutina principal en donde se calcula el dimensionamiento máximo de los arreglos temporales y en donde se realiza el llenado de los vectores empleados por estos métodos directos de solución. Aquí también, se efectúa el llamado a las demás subrutinas y a los métodos de solución.
- ORDEN - Subrutina en donde se efectúa el llenado de los diferentes vectores que definen el tipo de ordenamiento especificado, el cual puede ser el ordenamiento estándar o D4.
- LLENA2 - Subrutina en donde se va llenando el vector A con los elementos diferentes de cero, provenientes de la diagonal principal de la matriz jacobiana, así como el vector JA con la columna correspondiente y número de elemento respectivo.
- LLENA3 - Subrutina en donde se va llenando el vector A con los elementos diferentes de cero, provenientes de las diagonales inferiores y superiores de la matriz

jacobiana, así como el vector JA con la columna correspondiente y número de elemento respectivo.

NOMENCLATURA EMPLEADA:

- NR - Número de celdas en la dirección radial.
- NT - Número de celdas en la dirección angular.
- NZ - Número de celdas en la dirección vertical.
- DEMZ - Arreglo donde se almacenan los elementos  $i, j, k-1$ , correspondientes a la diagonal inferior en la dirección vertical, de la matriz jacobiana.
- DEMT - Arreglo donde se almacenan los elementos  $i, j-1, k$ , correspondientes a la diagonal inferior en la dirección angular, de la matriz jacobiana.
- DEMR - Arreglo donde se almacenan los elementos  $i-1, j, k$ , correspondientes a la diagonal inferior en la dirección radial, de la matriz jacobiana.
- DEI - Arreglo donde se almacenan los elementos  $i, j, k$ , correspondientes a la diagonal principal de la matriz jacobiana.
- DEPR - Arreglo donde se almacenan los elementos  $i+1, j, k$ , correspondientes a la diagonal superior en la dirección radial, de la matriz jacobiana.
- DEPT - Arreglo donde se almacenan los elementos  $i, j+1, k$ , correspondientes a la diagonal superior en la dirección

angular, de la matriz jacobiana.

- DEPZ - Arreglo donde se almacenan los elementos  $i, j, k+1$ , correspondientes a la diagonal superior en la dirección vertical, de la matriz jacobiana.
- FF - Arreglo donde se almacenan los elementos  $i, j, k$ , correspondientes a las funciones de residuos.
- DX - Arreglo donde se obtiene la solución de los elementos  $i, j, k$ , correspondientes a los cambios iterativos del método de Newton-Raphson.
- DD - Vector donde se almacenan los elementos  $i, j, k$ , correspondientes a las funciones de residuos. Este vector es empleado por los métodos directos de solución.
- A - Vector donde se almacenan los elementos diferentes de cero de la matriz jacobiana.

C

```

SUBROUTINE MATRIZ (NR, NT, NZ, DEMZ, DEMT, DEMR, DEI, DEPR, DEPT, DEPZ, FF,
$           DX, DD, A, JA, IA, IPS, C, IC, QLU, RSP, ISP, ITEMP, RTEMP,
$           KORDE, IPLANE, IND, P, IP, PATH, KTANG, NPASS, KSOL)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
  DIMENSION DEMZ (9, MR, MT, MZ), DEMT (9, MR, MT, MZ), DEMR (9, MR, MT, MZ),
$           DEI (9, MR, MT, MZ, MOD), FF (3, MR, MT, MZ, MOD),
$           DEPR (9, MR, MT, MZ), DEPT (9, MR, MT, MZ), DEPZ (9, MR, MT, MZ),
$           DX (3, MR, MT, MZ, MOD)
  DIMENSION A (MPIV), DD (MLU), QLU (MLU), RSP (MSP), RTEMP (MTEM)
  INTEGER JA (MPIV), IA (MLUM), IPS (MLU), C (MLU), IC (MLU), P (MLU),
$           ISP (MSP2), IPLANE (MIP), IND (MR, MT, MZ), ESP, PATH, FLAG, KSOL,
$           IP (MLU), ITEMP (MITE)
  COMMON /DIMAX/ MR, MT, MZ, MRM, MFWO, MPO, MQO, MDT, MIP, MRZ, MHRZ, MH,
$           MI, MJ, MLU, MPIV, MITE, MTEM, MLUM, KMAX, MSP, MSP2
  COMMON /MODTIP/ MODE, MOD, MZMA, OMEGA, TOL1, FCO

```

C

```

  IF ( KTANG .EQ. 0 ) THEN
    NTT = NT
  ELSE
    JB = NT
    NTT = 1
  END IF
  NLU = 3*NR*NTT*NZ
  MM = 3*NLU + 9*2*((NR-1)*NTT*NZ + NR*(NTT-1)*NZ + NR*NTT*(NZ-1))
  IF ( NTT .GT. 2 ) MM = MM + 9*2*NR*NZ
  IF ( KSOL .EQ. 0 ) THEN
    MAX = 9*(NR**2)*(NT**2)*(NZ-1)
  ELSE
    NSP = 5*NLU + 3 + 2*MM
    NSP1 = 3*NLU + 4*MM
    IF ( NSP1 .GT. NSP ) NSP = NSP1
  END IF
  FLAG = 0
  DO 70 N=1, MM
    A(N) = 0.D0
70 CONTINUE
  KON = 0
  JAC = 0
  KJ = 2
  IF ( NTT .EQ. 1 ) KJ = 0
  IF ( NTT .EQ. 2 ) KJ = 1
  IF ( NPASS .EQ. 0 ) THEN
    CALL ORDEN (NR, NTT, NZ, IPLANE, IND, IPS, C, IC, KORDE, KTANG, NPASS)
  END IF

```

C

```

  DO 100 K=1, NZ
    KK = 2
    IF ( K .EQ. 1 .OR. K .EQ. NZ ) KK = 1
    DO 100 J=1, NTT
      JJ = J
      IF ( KTANG .EQ. 1 ) JJ = JB
      DO 100 I=1, NR
        KI = 2
        IF ( I .EQ. 1 .OR. I .EQ. NR ) KI = 1

```

```

KOL = 3*(KK + KJ + KI + 1)
KON = KON + 1
KR = 3*(KON -1) + 1
DO 10 L=1,3
  LL = 3 - L + 1
  DD(KR+L-1) = FF(LL, I, JJ, K, 1)
  IA(KR+L-1) = JAC + (L-1)*KOL + 1
10 CONTINUE
CALL LLEN2(I, JJ, K, KR, JA, JAC, KOL, DEI, A)
IF( I .EQ. 1 )GO TO 20
KC = KR - 3
20 CALL LLEN3(I, JJ, K, KC, JA, JAC, KOL, DEMR, A)
IF( I .EQ. NR )GO TO 30
KC = KR + 3
30 CALL LLEN3(I, JJ, K, KC, JA, JAC, KOL, DEPR, A)
IF( NTT .GT. 1 )THEN
  KC = KR - 3*NR
  IF( JJ .EQ. 1 )KC = KR + 3*NR*(NTT-1)
  CALL LLEN3(I, JJ, K, KC, JA, JAC, KOL, DEMA, A)
  IF( NTT .EQ. 2 .AND. JJ .EQ. 1 )JAC = JAC - 3
  KC = KR + 3*NR
  IF( JJ .EQ. NTT )KC = KR - 3*NR*(NTT-1)
  IF( NTT .EQ. 2 .AND. JJ .EQ. NTT )JAC = JAC - 3
  CALL LLEN3(I, JJ, K, KC, JA, JAC, KOL, DEPT, A)
END IF
IF( K .EQ. 1 )GO TO 40
KC = KR - 3*NR*NTT
40 CALL LLEN3(I, JJ, K, KC, JA, JAC, KOL, DEMZ, A)
IF( K .EQ. NZ )GO TO 50
KC = KR + 3*NR*NTT
50 CALL LLEN3(I, JJ, K, KC, JA, JAC, KOL, DEPZ, A)
100 JAC = JAC + 2*KOL
CONTINUE
IA(NLU + 1) = JAC + 1
IF( KSOL .EQ. 0 )THEN
CALL NSPIV(NLU, IA, JA, A, DD, MAX, IPS, C, IC, QLU, ITEMP, RTEMP, IERR)
IF( IERR .LE. 0 )WRITE(6,1000) IERR
ELSE
CALL NDRV(NLU, IPS, C, IC, IA, JA, A, DD, QLU, NSP, ISP, RSP, ESP, PATH, FLAG)
IF( FLAG .NE. 0 )WRITE(6,1000) FLAG
END IF
C
KON = 0
DO 200 K=1, NZ
  DO 200 J=1, NTT
    JJ = J
    IF( KTANG .EQ. 1 )JJ = JB
    DO 200 I=1, NR
      KON = KON + 1
      KR = 3*(KON -1) + 1
      DO 60 L=1, 3
        DX(L, I, JJ, K, 1) = QLU(KR+L-1)
60 CONTINUE
200 CONTINUE
C

```

```
KON = KON + 1
KR  = 3*(KON-1) + 1
IF( KORDE .EQ. 1 )KOR = 3*(IND(I,J,K)-1) + 1
IF( KORDE .EQ. 0 )KOR = KR
DO 80 L=1,3
    IPS(KOR+L-1) = KR + L - 1
    C(KOR+L-1)   = KR + L - 1
    IC(KR+L-1)   = KOR + L - 1
CONTINUE
```

```
80
90 CONTINUE
   NPASS = 1
C
   RETURN
   END
```

```

SUBROUTINE ORDEN (NR, NT, NZ, IPLANE, IND, IPS, C, IC, KORDE, KTANG,
$              NPASS)
C
C  ORDENAMIENTO NORMAL (KORDE = 0) Y ORDENAMIENTO D4 (KORDE = 1)
C  KTANG = 0 ; 3 DIMENSIONES, 2 DIMENSIONES CON NT = 1
C  KTANG = 1 ; 2 DIMENSIONES CON BSOR
C
INTEGER IPLANE (MIP), IND (MR, MT, MZ), IPS (MLU), C (MLU), IC (MLU)
COMMON /DIMAX/ MR, MT, MZ, MRM, MFWO, MPO, MQO, MDT, MIP, MRZ, MHRZ, MH,
$          MI, MJ, MLU, MPIV, MITE, MTEM, MLUM, MAX, MSP, MSP2
COMMON /MODTIP/ MODE, MOD, MZMA, OMEGA, TOL1, FCO
C
IF ( KORDE .EQ. 0 ) GO TO 75
IJKSUM = NR + NT + NZ
I      = 0
DO 10 J=3, IJKSUM, 2
    I      = I + 1
    IPLANE (I) = J
10 CONTINUE
DO 20 J=4, IJKSUM, 2
    I      = I + 1
    IPLANE (I) = J
20 CONTINUE
IN = 0
IF ( KTANG .EQ. 0 ) THEN
DO 50 L=1, IJKSUM-2
    IMAX = MINO (IPLANE (L) - 2, NR)
    IMIN = MAXO (IPLANE (L) - NT - NZ, 1)
    DO 40 I=IMAX, IMIN, -1
        JMAX = MINO (IPLANE (L) - I - 1, NT)
        JMIN = MAXO (IPLANE (L) - I - NZ, 1)
        DO 30 J=JMAX, JMIN, -1
            K      = IPLANE (L) - J - I
            IN     = IN + 1
            IND (I, J, K) = IN
30 CONTINUE
40 CONTINUE
50 CONTINUE
ELSE
J = NT
DO 70 L=1, IJKSUM-2
    IMAX = MINO (IPLANE (L) - 2, NR)
    IMIN = MAXO (IPLANE (L) - NT - NZ, 1)
    DO 60 I=IMAX, IMIN, -1
        K      = IPLANE (L) - J - I
        IN     = IN + 1
        IND (I, J, K) = IN
60 CONTINUE
70 CONTINUE
END IF
75 KON = 0
DO 90 K=1, NZ
    DO 90 J=1, NT
        DO 90 I=1, NR

```

```

SUBROUTINE LLENA2 (I, J, K, KC, JA, JAC, KOL, DEI, A)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
DIMENSION DEI (9, MR, MT, MZ, 2), A (MPIV)
INTEGER JA (MPIV)
COMMON /DIMAX/ MR, MT, MZ, MRM, MFWO, MPO, MQO, MDT, MIP, MRZ, MHRZ, MH,
$           MI, MJ, MLU, MPIV, MITE, MTEM, MLUM, MAX, MSP, MSP2

```

C

```

L = 0
DO 100 M=1,3
  N = JAC + (M-1)*KOL+1
  DO 100 MM=1,3
    L           = L + 1
    LL         = L + 6*(2-M)
    A(N+MM-1) = DEI(LL, I, J, K, 1)
    JA(N+MM-1) = KC + MM - 1

```

100

```

CONTINUE
JAC = JAC + 3
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE LLEN3 (I, J, K, KC, JA, JAC, KOL, AA, A)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
DIMENSION AA (9, MR, MT, MZ), A (MPIV)
INTEGER JA (MPIV)
COMMON /DIMAX/ MR, MT, MZ, MRM, MFWO, MPO, MQO, MDT, MIP, MRZ, MHRZ, MH,
$           MI, MJ, MLJ, MPIV, MITE, MTEM, MLUM, MAX, MSP, MSP2

```

C

```

L = 0
DO 100 M=1, 3
  N = JAC + (M-1)*KOL+1
  DO 100 MM=1, 3
    L           = L + 1
    LL          = L + 6*(2-M)
    A(N+MM-1)  = A(N+MM-1) + AA(LL, I, J, K)
    JA(N+MM-1) = KC + MM - 1
100 CONTINUE
JAC = JAC + 3
RETURN
END

```