

9

2 ejm



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"COSMOLOGIA DE CUERDAS ANTES DEL GRAN ESTALLIDO"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C A
P R E S E N T A
MONICA BORUNDA PACHECO



DIRECTOR DE TESIS: MARTI GONZALVEZ ALTABA.



1998
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

265612



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Cosmología de cuerdas antes del gran estallido "

realizado por Mónica Borunda Pacheco

con número de cuenta 9350500-2 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. MARTI RUIZ ALTABA

Propietario

DRA. MYRIAM MONDRAGON CEBALLOS

Propietario

DR. LUKAS NELLEN FILLA

Suplente

DR. AXEL WEBER

Suplente

DR. MANUEL TORRES LABANSAT

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

## Agradecimientos

- *Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias e Instituto de Física.*
- *Dr. Martí Ruiz Altaba, por su dirección, asesoría y ayuda en este trabajo.*
- *Dra. Myriam Mondragón, Dr. Lukas Nellen, Dr. Azel Weber y Dr. Manuel Torres, por la valiosa revisión que hicieron a este trabajo.*
- *Dr. Rodolfo Martínez y Romero, por las enseñanzas, apoyo y orientación, tanto personal como académica, que me brindó en los últimos años de mi carrera y en especial porque gracias a él surgió mi inquietud por este tema.*
- *Dr. Fernando Quevedo, por su orientación y apoyo.*
- *Dr. Martí Ruiz Altaba, Dr. Rodolfo Martínez y Romero, Dr. Alfonso Mondragón, Dr. Rosalío Rodríguez, Dr. Alipio Calles, Dr. Héctor Méndez, Dr. Ismael Espinoza, Dras. Marquina, César Arzate y Antonio García, por sus hermosas clases.*
- *Hilda Josefina Pacheco Aguilar, Luis Borunda Trevizo y Christian Borunda Pacheco, por su amor, ayuda y compañía a lo largo de mi vida.*
- *Ivette Fuentes Guridi, por su invaluable amistad, ayuda y apoyo brindados en los buenos y malos momentos.*
- *Carlos Sandoval Maza, por el cariño y apoyo que me brindó, invaluable para mí.*
- *Benjamín Gutiérrez, Adalberto Flores, Elsa Suárez, M. Antonieta Alvarez, Paul Rubinov, Antonio García, Hugo Aguilar, Victor Gopar, Ezequiel Rodríguez, Stefan Mentakis y Sherry Chou, por su preciada amistad, comprensión, ayuda y apoyo.*
- *Dr. Arturo Menchaca, Tere Caceres, Don Mario y Don Rosas, por los momentos agradables durante mi estancia en el Instituto de Física y en la Facultad de Ciencias.*
- *Esperanza Flores, por su amor y alegría.*
- *José Luis Marqueda Gema, in memoriam.*
- *Benjamín Gutiérrez García, por sus valiosos comentarios y sugerencias para dar forma a este trabajo y por compartir conmigo los gustos y sinsabores de la Física.*
- *Fermín Viniegra Hernández, por las aportaciones a este trabajo.*
- *Dr. Eduardo Chavez Mondragón, por "rescatarme de la oscuridad".*
- *Y finalmente agradezco de todo corazón a Cu, Gordo, Cleo, Chica, Super, Spike y Snowy, por todo el amor que me han brindado, así como los momentos felices e inolvidables que he vivido con ellos.*

*No te quedes a la mitad del camino,  
ve hasta el fin, hasta el fondo,  
sólo los cobardes se quedan en la superficie.*

## Contenido

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Cosmología</b>	
1.1. Fenomenología	5
1.2. Modelos de un universo homogéneo e isótropo en expansión	7
1.3. Modelo estándar cosmológico	11
1.4. La inflación	14
1.5. Modelo de la vieja inflación	16
1.6. Modelo de la nueva inflación	19
1.7. Modelo de la inflación caótica	21
<b>2. Cuerdas</b>	
2.1. Introducción	24
2.2. Cuerda bosónica	25
2.3. Cuerda bosónica cerrada	29
2.4. Cuerda bosónica abierta	31
2.5. Cuerda supersimétrica	33
2.6. Cuerda supersimétrica cerrada	34
2.7. Cuerda supersimétrica abierta	36
2.8. Cuerda heterótica	37
2.9. Dualidad	38
2.10. Dualidad T	39
2.11. Covarianza $O(d, d)$	42
2.12. Aplicaciones a la cosmología	43
<b>3. El Pre-big bang</b>	
3.1. Motivaciones teóricas	44

3.2. Propagación de la cuerda en un medio con horizontes de eventos contrayéndose	46
3.3. Ecuaciones de movimiento en la cosmología de cuerdas	48
3.4. Dualidad del factor de escala para un espacio plano	50
3.5. Soluciones para espacios planos con materia cuerdística	51
3.6. Soluciones para espacios curvos con materia cuerdística	53
3.7. Soluciones para espacios planos con radiación	55
3.8. Soluciones para espacios curvos con radiación	56
3.9. Temperatura	56
3.10. Ecuaciones de movimiento en la cosmología de cuerdas con dualidad $O(d, d)$	57
3.11. Solución de las ecuaciones con covarianza $O(d, d)$	59
3.12. Ecuación de estado dependiente del tiempo	60
3.13. Solución general para un espacio de $D$ dimensiones	62
3.14. Marco de Einstein	63
<b>4. Condiciones iniciales para resolver el problema del horizonte</b>	
4.1. Introducción	65
4.2. El problema del horizonte	65
4.3. $Z$ para un espacio plano con materia cuerdística	67
4.4. $Z$ para un espacio curvo con materia cuerdística	68
4.5. $Z$ para un espacio plano con radiación	70
4.6. $Z$ para un espacio curvo con radiación	70
4.7. Solución del problema del horizonte	74
<b>5. Conclusiones</b>	76
<b>A. Obtención de la acción para la cosmología de cuerdas</b>	78
<b>B. Cálculo de las ecuaciones cosmológicas para un espacio con radiación</b>	80
<b>Referencias</b>	82

## Introducción

En los últimos años la cosmología ha adquirido gran auge esforzándose por explicar las observaciones que tenemos de nuestro universo. Para ello han surgido varias teorías con pros y contras, entre ellas la teoría del pre-big bang, es decir, la cosmología de cuerdas antes del gran estallido. El propósito de esta tesis es exponerla brevemente. Para ello se da una visión general de la cosmología estándar, así como de la teoría de cuerdas. Posteriormente nos enfocamos en la teoría del pre-big bang y finalizamos estudiando si dicha teoría es capaz o no de resolver uno de los principales problemas cosmológicos, el del horizonte.

El primer capítulo es el concerniente a la cosmología. Inicia exponiendo los principales problemas cosmológicos, así como las evidencias observacionales que hoy en día tenemos de nuestro universo. A continuación se describe el modelo cosmológico estándar utilizando la teoría de la relatividad general. Se concluye con los tres principales modelos inflacionarios: el viejo, el nuevo y el caótico, exponiendo los avances y problemas que cada uno de ellos presenta.

El segundo capítulo trata de la teoría de cuerdas. En él se exponen los principales tipos de cuerdas: la bosónica, la supercuerda y la heterótica. Para cada una de ellas se calculan las ecuaciones de movimiento y su cuantización. Se finaliza el capítulo con la simetría de la dualidad, que será una de las motivaciones principales para desarrollar la teoría del pre-big bang en el tercer capítulo.

El tercer capítulo es la parte más importante de la tesis ya que se enfoca en la cosmología de cuerdas antes del gran estallido, iniciando con las motivaciones teóricas que estimularon desarrollo. Posteriormente se obtienen las ecuaciones de movimiento y se resuelven para universos con distintas curvaturas espaciales y ecuaciones de estado. A continuación se expone un método para interpolar las soluciones anteriores al big bang con las posteriores al big bang. Por último, las soluciones obtenidas a lo largo del capítulo en el marco teórico de las cuerdas se transforman al marco familiar de la relatividad general.

El capítulo cuatro trata del problema cosmológico del horizonte. En él se expone con más detalle dicho problema. Se analiza si las soluciones obtenidas en el tercer capítulo para la época del pre-big bang resuelven este problema.

Por último, el quinto capítulo nos muestra la conclusión de la tesis.

La mayor parte de la tesis es una introducción a la teoría del pre-big bang desarrollada

## COSMOLOGIA DE CUERDAS ANTES DEL GRAN ESTALLIDO

por G. Veneziano y colaboradores. Sin embargo, en este trabajo se realizó una aportación a dicha teoría. Se encontraron dos soluciones para espacios curvos negativos con una ecuación de estado correspondiente a materia cuerdística, tercer capítulo, y se demostró que ninguna de las soluciones es capaz de resolver el problema del horizonte, cuarto capítulo.

# 1. Cosmología

## 1.1. Fenomenología

Tanto el modelo estándar cosmológico como su extensión inflacionaria nos dicen que nuestro universo se originó hace unos diez o veinte mil millones de años con materia de densidad y temperatura altísimas, expandiéndose y enfriándose desde entonces.

A la fecha, las evidencias observacionales que tenemos de nuestro universo y que un modelo cosmológico exitoso debería incorporar son:

a) Su expansión: midiendo el espectro de las galaxias se encuentra que tienen un corrimiento al rojo, proporcional a su distancia lo que implica que se están alejando. La distancia luminosa,  $d_L$ , y el corrimiento al rojo,

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}, \quad (1.1)$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda emitida y  $\lambda_1$  es la longitud de onda detectada, están relacionados por

$$H_0 d_L = z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2, \quad (1.2)$$

donde  $H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a}$  es la constante de Hubble, que mide la expansión hoy en día,  $a_0$  es el factor cósmico de escala hoy en día y  $q_0 = -\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2}$  es el parámetro de desaceleración de la expansión. El valor de  $H_0$  no se ha determinado con gran precisión, quedando en el siguiente rango

$$H_0 = 100h \text{ km/sMpc}, \quad 0.4 < h < 1.0, \quad (1.3)$$

de donde se sigue el tamaño del universo observable,  $H_0^{-1} = 3000h^{-1} \text{ Mpc} = 10^{28}h^{-1} \text{ cm}$  [1].

b) La radiación de fondo: en el año de 1948, Gamow y Alpher predijeron por primera vez una radiación correspondiente a una temperatura de aproximadamente  $T \sim 5\text{K}$ , residuo de la teoría del big bang [2]. Años después, para longitudes de onda en un rango de milímetros a centímetros, Penzias y Wilson detectaron una radiación de fondo isotropa correspondiente a la radiación de un cuerpo negro a una temperatura de  $3.5 \pm 1.0\text{K}$  [3], interpretada por Dicke y Peebles como la radiación cósmica de cuerpo negro confirmando la teoría de Gamov [4] [5]. La medición más reciente de la radiación de fondo fué detectada

por el COBE (Cosmic Background Explorer satellite) obteniendo que corresponde a un cuerpo negro a temperatura de  $2.728 \pm 0.002\text{K}$  [6]. Esta radiación es evidencia de que el universo temprano, denso y caliente, se expandió hasta convertirse en el de hoy. Los datos observados indican que la temperatura es la misma en todo nuestro universo observable con una precisión de  $\Delta T/T < 10^{-4}$  en escalas de arcosegundos a  $90^\circ$ , indicándonos la isotropía del mismo. Sin embargo hay tres anisotropías: 1) una variación dipolar ( $\propto \cos \theta$ ) a lo largo del cielo de una parte en  $10^3$ , debida al movimiento relativo de nuestra galaxia respecto al marco en reposo que define la radiación de fondo a una velocidad de 620 km/s [7]; 2) una modulación anual en la temperatura en una dirección del cielo de una parte en  $10^4$ , debida a nuestro movimiento orbital alrededor del sol a una velocidad de 30 km/s [8] [9]; 3) anisotropías detectadas por el DMR (Differential Microwave Radiometer) en el COBE, la fluctuación media de la temperatura promediada en el cielo medida con un rayo de  $10^\circ$  de ancho,  $\langle (\Delta T/T)^2 \rangle_{10^\circ}^{1/2} = 1.1 \pm 0.2 \times 10^{-5}$ , y la magnitud de la anisotropía cuadrupolar en la temperatura,  $(\Delta T/T)_Q = 6 \pm 2 \times 10^{-6}$ , que proveen evidencia para las primeras inhomogeneidades de la densidad involucradas en la formación de estructura [10][11][12].

c) La distribución de galaxias: catálogos de galaxias con un millón de galaxias por  $200h^{-1}\text{Mpc}$  de volumen demuestran que la distribución de galaxias, la distribución de materia (o por lo menos de materia luminosa), es aproximadamente isótropa a escalas muy grandes [13][14].

d) La homogeneidad de materia: para volúmenes grandes, alrededor de la longitud de Hubble  $\sim 4000\text{Mpc}$ , se tiene que  $\delta\rho/\rho \sim 10^{-4}$ , donde  $\rho$  es la densidad de galaxias, con lo cual notamos que la materia es aproximadamente homogénea, sin embargo a pequeñas escalas,  $\sim 400\text{Mpc}$ , existe una mayor inhomogeneidad en la materia,  $\delta\rho/\rho \sim 10^{-1}$  [15] [16].

e) La edad del universo  $t_0$ : hay diferentes técnicas para medir la edad del universo, por ejemplo, directamente de la constante de Hubble, utilizando la vida media de elementos radiactivos y su abundancia o la edad de las estrellas más viejas. Si el cálculo se hace utilizando la constante de Hubble tenemos que la edad varía entre  $H_0^{-1} \in [9.8, 24.5]$  miles de millones de años, dependiendo del valor de  $H_0$  ( $h \in [0.4, 1.0]$ ) [17].

f) La producción de elementos ligeros relativa al hidrógeno en los primeros minutos del universo: deuterio, D ( $D/H \sim 10^{-5}$ ),  $^3\text{He}$  ( $^3\text{He}/H \sim 10^{-5}$ ),  $^4\text{He}$  ( $^4\text{He}/H \sim 0.25$ ) y  $^7\text{Li}$  ( $^7\text{Li}/H \sim 10^{-10}$ ). Estos datos concuerdan con la nucleosíntesis primordial [18].

g) La densidad de materia: el conocimiento del valor de la densidad de materia del universo que se tiene actualmente no es muy preciso, sin embargo se han determinado los siguientes

hechos: 1) se tiene una cota superior para la densidad de materia luminosa siendo  $\Omega < 0.01$ , donde  $\Omega \equiv \rho/\rho_c$  y  $\rho_c$  la densidad crítica del universo, esta cota se calcula utilizando la densidad de galaxias, su masa promedio y la tercera ley de Kepler, dando como resultado; 2) el movimiento de estrellas en galaxias indica la existencia de materia oscura por ejemplo, estrellas enanas, estrellas de neutrones, u hoyos negros, siendo su contribución a la densidad promedio 10 veces más que la luminosa; 3) las mediciones de cúmulos de galaxias en escalas de 10 a 30 Mpc aportan un  $0.2 \pm 0.1$  de la densidad crítica; 4) otras mediciones indican que otro tipo de materia podría contribuir con  $0.8 \pm 0.1$  de la densidad crítica. Por otro lado la nucleosíntesis predice que la densidad de materia bariónica se encuentra entre  $0.015 \leq \Omega_B \leq 0.16$  lo que implica que alguna fracción de la materia oscura tiene que ser bariónica. Como veremos mas adelante, dependiendo del valor de  $\Omega$  la curvatura del espacio es positiva, negativa o nula resultando en una evolución del universo diferente para cada caso. Sin embargo, el modelo inflacionario predice una densidad crítica,  $\Omega \sim 1$  lo que indica que hay materia oscura no bariónica, como WIMPS (Weakly-Interacting Massive Particles), contribuyendo fuertemente a la densidad promedio del universo [19] [20] [21] [22].

Mas adelante se expondrán como estos problemas son explicados mediante los diferentes modelos cosmológicos.

### 1.2. Modelos de un universo homogéneo e isótropo en expansión

El espacio homogéneo e isótropo se describe con la métrica de Friedman Robertson Walker,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2 = dt^2 - a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j, \quad (1.4)$$

en unidades tal que  $c = 1$ . Aquí  $a(t)$  es el factor cósmico de escala, con  $h_{ij} = -g_{ij}$  donde  $g_{ij}$  es la métrica,  $t$  es la coordenada temporal y  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son las coordenadas espaciales. En coordenadas esféricas, esta métrica se escribe como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}, \quad (1.5)$$

donde  $(t, r, \theta, \phi)$  son coordenadas comóviles, y  $k$  es un parámetro real que define la curvatura del espacio. El parámetro  $k$  puede ser reescalado y por lo tanto sólo nos importa su signo:

$$k = \begin{cases} 1 & \text{si la curvatura es positiva,} \\ -1 & \text{si la curvatura es negativa,} \\ 0 & \text{si la curvatura es nula.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Explícitamente, las componentes no nulas del tensor de Ricci en esta métrica son [23]

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (1.7)$$

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right] g_{ij}, \quad (1.8)$$

y el escalar de Ricci es

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right]. \quad (1.9)$$

Como nuestro universo es aproximadamente homogéneo e isótropo, lo podemos tratar como un fluido perfecto, y debido a la simetría de la métrica el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  de la materia tiene que ser diagonal,

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía y  $p$  es la presión.

Más adelante veremos que uno de los principales problemas cosmológicos es el del horizonte. Para resolverlo, se deduce a continuación la distancia al horizonte. La ecuación de la geodésica para fotones es

$$ds^2 = 0 \quad (1.11)$$

y por homogeneidad e isotropía tomamos  $d\theta = d\phi = 0$  con lo que una posible solución es

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \quad (1.12)$$

obteniendo así

$$\int \frac{dt}{a(t)} = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} \text{sen}^{-1} r & \text{si } k = 1, \\ r & \text{si } k = 0, \\ \text{senh}^{-1} r & \text{si } k = -1. \end{cases} \quad (1.13)$$

Por otro lado, la distancia propia al horizonte medida al tiempo  $t$  es:

$$d_H(t) = \int_0^r \sqrt{g_{rr}} dr = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (1.14)$$

con lo que finalmente tenemos:

$$d_H(t) = a(t) \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1.15)$$

que es el radio de la porción esférica del universo causalmente conectado al tiempo  $t$  considerando que en  $t_0$  se inició nuestro universo .

La acción clásica que describe nuestro universo está formada por la acción gravitacional (Einstein-Hilbert) y la acción de la materia

$$S = S_{E-H} + S_M = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \sum_{\text{campos}} \int d^4x \sqrt{-g} L_{\text{campos}}, \quad (1.16)$$

donde  $G$  es la constante de Newton,  $8\pi G = \frac{1}{M^2}$ ,  $M \sim 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$ ,  $R$  es el escalar de Ricci y  $g$  es la métrica del espacio-tiempo<sup>1</sup>. Variando la acción respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtiene la ecuación de campo de Einstein dada por la relatividad general [24]

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \frac{1}{M^2} T^{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

Resolviendo la ecuación de Einstein para la componente temporal (00), obtenemos la ecuación de Friedmann de primer orden no lineal en el factor de escala

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3M^2} \rho, \quad (1.18)$$

y haciendo lo mismo para la componente espacial (ii) se obtiene la ecuación de segundo orden no lineal en  $a(t)$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -\frac{p}{M^2}. \quad (1.19)$$

Restando las dos últimas ecuaciones, obtenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M^2} (\rho + 3p). \quad (1.20)$$

Como el universo se está expandiendo,  $\dot{a} > 0$ . Hoy en día,  $\rho + 3p$  es positivo. De la ecuación (1.20) se sigue que  $\ddot{a}$  tiene que ser negativo, lo que implica que  $a$  fue cero en algún momento, dando una singularidad llamada *big bang* o gran explosión. Nótese que el dominio de validez de la acción de Einstein no incluye el gran estallido. En efecto, como estamos ignorando efectos cuánticos, la descripción que utilizamos sólo es válida mientras no entremos en la época de Planck,  $a > \frac{1}{M_p} \sim 10^{-32} \text{ cm}$ .

<sup>1</sup> Se podría añadir también el término  $-\frac{\lambda}{8\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}$ , con  $\lambda$  una constante, llamada constante cosmológica. El valor de  $\lambda$  es muy pequeño o cercano a cero sin saberlo con exactitud, hecho que se conoce como el *problema de la constante cosmológica*. Sin embargo, por simplicidad, a lo largo de este tesis se trabaja como si  $\lambda = 0$ .

De la ecuación (1.18) y utilizando la ecuación (1.20), finalmente obtenemos la ecuación cosmológica

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (1.21)$$

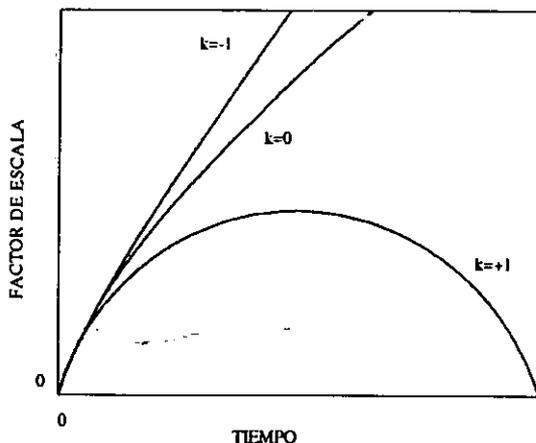


Figura 1.1. Evolución del factor de escala para un universo cerrado,  $k=+1$ , plano,  $k=0$ , y abierto,  $k=-1$ .

El parámetro de Hubble ( $H = \dot{a}/a$ ) mide la velocidad de expansión del universo siendo  $H_0$  su valor actual. Por lo tanto, reescribiendo la ecuación de Friedman (1.18) en términos del parámetro de Hubble, tenemos

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{\rho}{3H^2 M^2} - 1 = \Omega - 1, \quad (1.22)$$

donde  $\Omega$  es la razón de la densidad a la densidad crítica  $\rho_c$ :

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad \rho_c = 3H^2 M^2. \quad (1.23)$$

De (1.22) tenemos que la curvatura y la densidad del universo están relacionadas, ya que  $H^2 a^2 > 0$ , con lo que definimos universo cerrado, plano o abierto:

$$k = +1 \Rightarrow \Omega > 1 \quad \text{cerrado}, \quad (1.24)$$

$$k = 0 \Rightarrow \Omega = 1 \quad \text{plano}, \quad (1.25)$$

$$k = -1 \Rightarrow \Omega < 1 \quad \text{abierto.} \quad (1.26)$$

Para una curvatura positiva tenemos una geometría cerrada donde el factor de escala del universo inicialmente crece, llega a un límite máximo y termina disminuyendo. Probablemente un universo de este tipo sería cíclico. Para curvatura negativa, tenemos un universo con geometría abierta, expandiéndose y enfriándose infinitamente. Con curvatura nula, finalmente, resulta el caso crítico donde el universo se expande haciéndose su velocidad de expansión asintóticamente constante, figura (1.1).

Para resolver la ecuación (1.21) necesitamos una ecuación de estado, es decir una relación local entre  $\rho$  y  $p$ . Suponiendo una ecuación de estado muy sencilla

$$p = \gamma\rho, \quad (1.27)$$

con  $\gamma$  constante obtenemos

$$\rho \propto a^{-3(1+\gamma)}, \quad (1.28)$$

$$p \propto \gamma a^{-3(1+\gamma)}. \quad (1.29)$$

Para un universo dominado por radiación, materia o vacío, la densidad evoluciona como [25]:

$$\rho \propto \begin{cases} a^{-4} & \text{radiación } \gamma = \frac{1}{3}, \\ a^{-3} & \text{materia } \gamma = 0, \\ \text{cte} & \text{vacío } \gamma = -1. \end{cases} \quad (1.30)$$

Al utilizar las ecuaciones (1.18) y (1.28) se calcula el factor de escala para  $k = 0$

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+\gamma)}} \quad (1.31)$$

que para los casos particulares se reduce a

$$a \propto \begin{cases} t^{\frac{1}{2}} & \text{para la radiación,} \\ t^{\frac{2}{3}} & \text{para la materia,} \\ e^{cte \cdot t} & \text{energía de vacío,} \end{cases} \quad (1.32)$$

Para curvatura no nula  $k \neq 0$  de las ecuaciones (1.18) y (1.20) tenemos

$$\frac{a^{\frac{1+3\gamma}{2}} da}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3} - ka^{1+3\gamma}}} = dt. \quad (1.33)$$

### 1.3. Modelo estándar cosmológico

El modelo cosmológico estándar describe el universo que se inicia con una singularidad, debido al "big bang" o "gran estallido", expandiéndose dominado por radiación ( $a \propto t^{1/2}$ ) y posteriormente dominado por materia ( $a \propto t^{2/3}$ ).

## COSMOLOGIA DE CUERDAS ANTES DEL GRAN ESTALLIDO

Este modelo, que está de acuerdo con las observaciones de nuestro universo para tiempos mayores que  $10^{-30}$ s después del big bang, se basa en las siguientes hipótesis:

- a) Las leyes fundamentales de la física no cambian con el tiempo.
- b) Los efectos de la gravitación se describen por la teoría general de la relatividad.
- c) El universo temprano estuvo lleno de un gas caliente de partículas elementales en equilibrio térmico y actualmente se expande.
- d) El universo es homogéneo a grandes escalas.
- e) No hay centro ni límite del espacio.

Las predicciones comprobadas del modelo cosmológico estándar son:

- a) El universo se expande, las galaxias se alejan una de la otra con una velocidad proporcional a la distancia entre ellas (Hubble).
- b) Existe una radiación de fondo como residuo del plasma que llenaba el universo.
- c) La síntesis de núcleos atómicos ligeros a partir de protones y neutrones en los primeros minutos después del big bang concuerda con las observaciones.

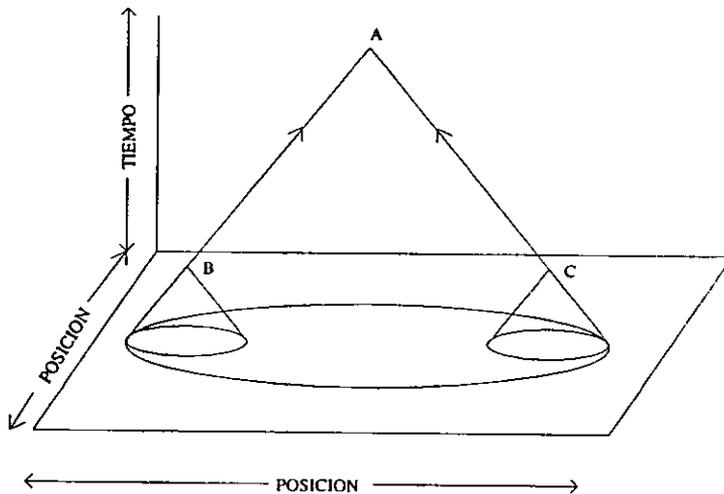


Figura 1.2. Problema del horizonte. Dos puntos en A que hoy se encuentran a la misma temperatura provienen de regiones causalmente desconexas en el pasado, B y C.

Sin embargo, existen problemas fundamentales que no pueden ser explicados con el modelo estándar:

a) El problema del horizonte: el universo es uniforme sobre distancias mayores que la distancia al horizonte en el momento de desacoplamiento de la radiación, es decir, regiones causalmente disconexas están a la misma temperatura (ver figura (1.2)); la radiación de fondo nos indica que la temperatura a la que se encuentra el universo es extraordinariamente uniforme, incluso en regiones que están más alejadas que la distancia de los horizontes, lo que nos lleva a preguntarnos: ¿Cómo se originó este equilibrio térmico?

b) La no uniformidad a pequeñas escalas: para la formación de estructura (por ejemplo galaxias ó cúmulos de galaxias) se debe asumir un espectro de inhomogeneidades primordiales como condición inicial. Cuando el universo llegó a la etapa dominada por la materia, las fluctuaciones en la densidad se amplificaron por la gravedad y crecieron como

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \begin{cases} a, & \text{si } \delta\rho/\rho \leq 1, \\ a^n (n > 3), & \text{si } \delta\rho/\rho > 1. \end{cases} \quad (1.34)$$

Las fluctuaciones más pequeñas que el horizonte se tratan clásicamente, tal y como si fueran un fluido perfecto. De las ecuaciones originales de la mecánica de fluidos se obtienen las ecuaciones correspondientes a perturbaciones de primer orden. Con ésto, se realiza el análisis evolutivo de las perturbaciones bajo su atracción gravitacional. Las fluctuaciones más grandes que la masa de Jeans (donde la masa de Jeans es la masa crítica para el colapso gravitacional) son estables y crecen como  $\delta\rho \propto a \propto t^{2/3}$ . Sin embargo, fluctuaciones menores que la masa de Jeans son inestables y desaparecen.

Las fluctuaciones mayores que el horizonte requieren un tratamiento basado en la relatividad general. Describimos a nuestro universo mediante la métrica de FRW  $g_{\mu\nu}^0$ , añadiéndole pequeñas perturbaciones  $h_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}. \quad (1.35)$$

El tensor de energía momento se describe con una densidad de energía perturbada,  $\rho = \rho_0 + \rho_1$ , una presión perturbada,  $p = p_0 + p_1$ , y velocidad de la materia perturbada,  $U^\mu = U_0^\mu + U_1^\mu$ . Se resuelve la ecuación de Friedmann perturbativa a primer orden con lo cual se soluciona el problema [26].

Este tratamiento reproduce la inhomogeneidad en la estructura observada hoy día: para estrellas  $\delta\rho/\rho \propto 10^{30}$ , para galaxias  $\delta\rho/\rho \propto 10^5$ , para cúmulos de galaxias  $\delta\rho/\rho \propto 10 - 10^3$  y para cúmulos de cúmulos  $\delta\rho/\rho \propto 1$ . Sin embargo, si se tiene un espectro de perturbaciones que de origen a las primeras perturbaciones de la densidad en la época dominada por la radiación, el horizonte de partículas impide que se produzcan inhomogeneidades que den lugar a las observadas hoy en día. Se necesita que el tamaño físico

de las perturbaciones de la densidad salgan del horizonte. En la cosmología estándar el tamaño físico empieza siendo más grande que el horizonte y mientras transcurre el tiempo el tamaño de la perturbación entra en él,

$$\begin{aligned} t_{\text{HOR}} &\simeq 3 \times 10^8 (\lambda_{\text{fis}}/Mpc)^2 s, & \lambda_{\text{fis}} &\leq 13h^{-2} Mpc, \\ &\simeq 3 \times 10^7 (\lambda_{\text{fis}}/Mpc)^3 s, & \lambda_{\text{fis}} &\leq 13h^{-2} Mpc, \end{aligned} \quad (1.36)$$

donde  $\lambda_{\text{fis}}$  es la longitud de onda física correspondiente a las perturbaciones. Lo que nos impide una explicación causal para el origen de las perturbaciones de densidad necesarias.

c) La densidad media del universo: si la densidad del universo hubiera sido distinta a la crítica,  $\Omega \neq 1$ , entonces  $k \neq 0$  y como en la ecuación de Friedmann, (1.18), la curvatura decrece sólo como  $a^{-2}$  mientras que la densidad de materia y radiación decrecen como  $a^{-3}$  y  $a^{-4}$  respectivamente, ecuación (1.30), el universo hubiera tenido que curvarse rápidamente. Es decir, si hubiese iniciado con una curvatura positiva rápidamente se colapsaría, o bien, si hubiese iniciado con una curvatura negativa se expandiría y enfriaría rápidamente, hechos que no se han observado.

Para que  $\Omega$  hoy en día sea cercana a uno, se necesita que la densidad inicial del universo sea extremadamente cercana a la crítica,  $|\Omega_{\text{inicial}} - 1| \leq 10^{60}$ , lo que resulta ser muy poco natural. Por otro lado, si  $\Omega \neq 1$ , ¿cómo es que el universo apenas empieza a curvarse (las mediciones demuestran que  $\Omega$  es muy cercana a 1)?

Estos problemas en las condiciones iniciales son conocidos como *fine tuning*.

#### 1.4. La inflación

Los problemas presentados en la sección anterior condujeron a una extensión del modelo cosmológico estándar conocida como el paradigma inflacionario. Las teorías inflacionarias postulan que hubo una expansión acelerada del universo en un pasado distante [27].

De la ecuación de Friedmann, (1.22), y la ecuación (1.23) tenemos que

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} = \frac{3M^2 k}{a^2 \rho}. \quad (1.37)$$

Por otro lado, para un universo dominado por radiación tenemos la ecuación de estado a una temperatura  $T$  dada por  $\rho = 3p = \pi^2 g_\rho T^4/30$ , donde  $g_\rho = \mathcal{O}(10^2)$  es el número total de grados de libertad relativistas en el sector de materia a ese tiempo. Con esta ecuación de estado en un espacio plano el factor de escala crece como  $a(t) \propto t^{1/2}$ . Por lo que utilizando (1.23), el parámetro de Hubble se puede escribir como

$$H \approx \sqrt{8\pi g_\rho} \left( \frac{T^2}{M} \right) = \frac{1}{2t}, \quad (1.38)$$

de donde se sigue que

$$\left(\frac{t}{s}\right) \approx \left(\frac{T}{MeV}\right)^{-2}. \quad (1.39)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.38) y (1.39) en (1.37) tenemos que

$$\left|\frac{\Omega - 1}{\Omega}\right| \approx \frac{10^{43}}{S^{2/3}} \left(\frac{t}{s}\right) \approx \frac{10^{37}}{S^{2/3}} \left(\frac{GeV}{T}\right)^2, \quad (1.40)$$

donde  $S \approx 10^{88}$  es la entropía contenida en el horizonte de hoy<sup>2</sup>.

Para obtener este valor actual de la entropía, en vez de considerarse una expansión del universo adiabática, se considera una no adiabática durante un intervalo de tiempo finito  $t \in [t_i, t_f]$  en el universo temprano. Por ejemplo, supongamos que la entropía cambia por

$$S_f = C^3 S_i, \quad (1.41)$$

donde  $C$  es un factor numérico. Si esta producción de entropía ocurre durante la transición de fase de la gran unificación (GUT) tendremos una energía  $T_{GUT} = \mathcal{O}(10^{17})GeV$  a un tiempo  $t \approx 10^{-40}s$ , y de la ecuación (1.40) vemos que  $|\Omega_i^{-1} - 1| = \mathcal{O}(1)$  si  $C \geq 10^{28}$  resolviendo así el problema.

A este proceso de producción de entropía se le llama *inflación* porque el volumen del universo crece un factor  $C^3$  entre los tiempos  $t = t_i$  y  $t = t_f$ . De la ecuación (1.37) vemos que la cantidad  $(\Omega^{-1} - 1)\rho a^2$  se conserva para una ecuación de estado dada, resultando

$$(\Omega_i^{-1} - 1)\rho_i a_i^2 = (\Omega_f^{-1} - 1)\rho_f a_f^2 \quad (1.42)$$

y, asumiendo que el modelo del big bang es válido para tiempos  $t > t_f$ , tenemos que

$$|\Omega_i^{-1} - 1|\rho_i a_i^2 \approx 10^{-56} |\Omega_0^{-1} - 1|\rho_f a_f^2. \quad (1.43)$$

Para que  $|\Omega_i^{-1} - 1| = \mathcal{O}(1)$  se necesita que  $\rho_f a_f^2 \gg \rho_i a_i^2$ . Sin embargo de la ecuación (1.18) tenemos que  $3\dot{a}^2 - \rho a^2/M^2$  se conserva con lo que la desigualdad se satisface si  $\dot{a}_f > \dot{a}_i$ . Con esto tenemos que una condición necesaria para que se de la inflación es que el factor de escala crezca *aceleradamente* es decir,

$$\ddot{a}(t) > 0, \quad (1.44)$$

<sup>2</sup> En unidades naturales,  $\hbar = c = k = 1$ , la entropía,  $S = Q/T$ , resulta adimensional.

a diferencia del crecimiento desacelerado que sufre en el modelo estándar del big bang.

Esta expansión acelerada del universo puede ser generada por distintos medios. Uno de ellos es mediante un campo escalar ad hoc, llamado *inflatón*  $\phi$ , que llenaba el universo en la época de Planck,  $t_p = \frac{\hbar}{M_p c^2} = 5.31 \times 10^{-44}$ s. Este campo puede considerarse sin masa siempre y cuando sea más ligero que la masa de Planck.

$$0 < m_\phi \ll m_p \tag{1.45}$$

En lo que resta del capítulo se describirá brevemente los tres modelos inflacionarios más importantes, mencionando no obstante que hay otras maneras para obtener inflación [28] [29].

### 1.5. Modelo de la vieja inflación

En este modelo, creado por Guth [30], el universo sufrió una transición de fase de primer orden asociada con el rompimiento espontáneo de la simetría de una teoría de gran unificación.

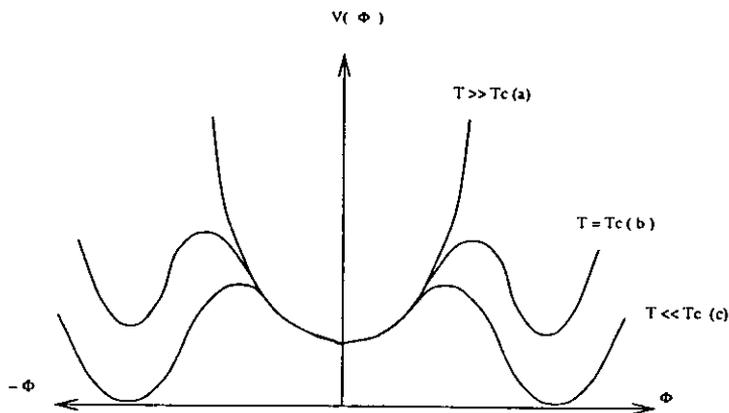


Figura 1.3. Potencial del campo escalar para el modelo de la vieja inflación.

En la época de Planck aparece un campo escalar  $\phi$ , cuyo potencial depende del mismo inflatón y de la temperatura,  $V(\phi, T)$ , como lo muestra la figura (1.3), para diferentes temperaturas [31]:

$$V(\phi, T) = \left( \frac{\lambda}{8} T^4 - \frac{1}{2} \mu T^2 \right) \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \phi^6 + V_0. \tag{1.46}$$

Este potencial muestra un mínimo en  $\phi = 0$ , cuando la temperatura es mayor a la temperatura crítica, por lo que existe una simetría. Para temperaturas menores a la crítica, el potencial tiene dos mínimos en  $\phi \neq \phi_0$ . La temperatura crítica está dada por

$$T_c = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \mu . \quad (1.47)$$

En la época de Planck la temperatura era mayor a la crítica con lo que el mínimo del potencial estaba en  $\phi = 0$ , figura (1.3 a), y el inflatón fluctuaba alrededor de su valor esperado en el falso vacío

$$\langle \phi_p \rangle = 0 \quad (1.48)$$

y por lo tanto, la energía potencial fluctuaba alrededor del valor medio de la energía de vacío

$$\langle V(0, T_p) \rangle \gg 0 \quad (1.49)$$

contribuyendo esta energía de vacío a la densidad de energía en la ecuación de Friedman (1.18) de la siguiente forma

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} [\rho + \langle V(0, T) \rangle] . \quad (1.50)$$

Una densidad de energía  $\rho$  muy grande provoca la expansión, ecuación (1.32), pero como la densidad de energía va disminuyendo conforme el factor de escala aumenta, (1.30), llega un momento en que la energía del vacío, cuya densidad  $\langle V(0, T_p) \rangle$  es constante, domina la expansión. Entonces de la solución para una densidad constante y un espacio plano, ecuación (1.32), vemos que el factor de escala crece exponencialmente dando lugar a un universo inflacionario.

Conforme la temperatura disminuye, el potencial va cambiando, desarrollando dos mínimos separados del primero por una barrera de potencial, figura (1.3 b). El tunelaje cuántico hace posible pasar del mínimo absoluto (en  $T > T_c$ ) a algunos de los dos mínimos (en  $T < T_c$ ) creándose una burbuja de la nueva fase y rompiendo la simetría. Mientras la temperatura disminuye el mínimo del potencial se estabiliza en  $\phi_0$ , y la energía potencial del "verdadero vacío" se vuelve menor que la del "falso vacío", figura (1.3 c):

$$V(\phi_0, T < T_c) < V(0, T > T_c) . \quad (1.51)$$

Cuando la transición de fase termina, el calor latente guardado como energía de vacío es liberado en forma de radiación y de energía cinética de partículas masivas con presión

## COSMOLOGIA DE CUERDAS ANTES DEL GRAN ESTALLIDO

positiva con lo que la temperatura y la entropía aumentan enormemente. Al finalizar la inflación, el universo es una gran burbuja caliente de partículas y radiación en equilibrio térmico. El término de la densidad de energía domina nuevamente en la ecuación de Friedman, (1.50), con lo que el universo evoluciona nuevamente dominado por la radiación.

Con este modelo se pudieron resolver los siguientes problemas:

a) El del horizonte: la distancia al horizonte crece exponencialmente durante la inflación volviéndose mayor que el universo observable hoy día, con lo que se explicaría la homogeneidad, figura (1.4).

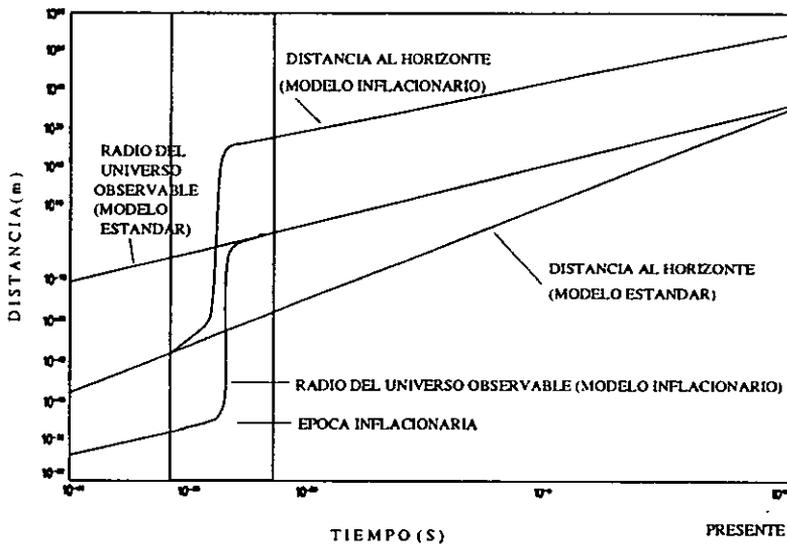


Figura 1.4. Solución del problema del horizonte mediante la inflación.

b) El de la densidad media: nuestro universo es aproximadamente plano debido a que proviene de una pequeña región que originalmente fué homogénea y al inflarse exponencialmente, se recobra el universo plano con una densidad promedio cercana a la crítica  $\Omega \approx 1$ .

Pero a su vez, este modelo también presentaba problemas: Es necesario llevar a cabo un proceso de "ajuste fino" (fine tuning) del potencial para que tenga las características adecuadas para resolver los puntos citados anteriormente y presenta un problema de "grace-

full exit": Cuando se crearon las burbujas de vacío verdadero, estaban separadas del falso vacío mediante paredes que acumularon el calor latente al término de la inflación. Para que esta energía se transfiriera a las partículas sería necesario que las burbujas chocaran. Sin embargo, inicialmente el universo se expande exponencialmente y las burbujas surgen esporádicamente (porque la probabilidad de tunelaje es pequeña) por lo que es difícil el choque entre ellas. Como las burbujas de vacío verdadero crecen lentamente a comparación del falso vacío, las fluctuaciones iniciales crecen mucho, con lo que se crearían inhomogeneidades mayores en la formación de galaxias que las observadas. Además, como el falso vacío crece exponencialmente, a diferencia de las burbujas, la inflación nunca terminaría y nuestro universo sería un mar de falso vacío con burbujas cuyo tamaño sería menor que nuestro universo observable.

### 1.6. Modelo de la nueva inflación

En el nuevo modelo inflacionario la transición de fase es de segundo orden. El potencial del escalar evoluciona como lo muestra la siguiente figura [32] [33].

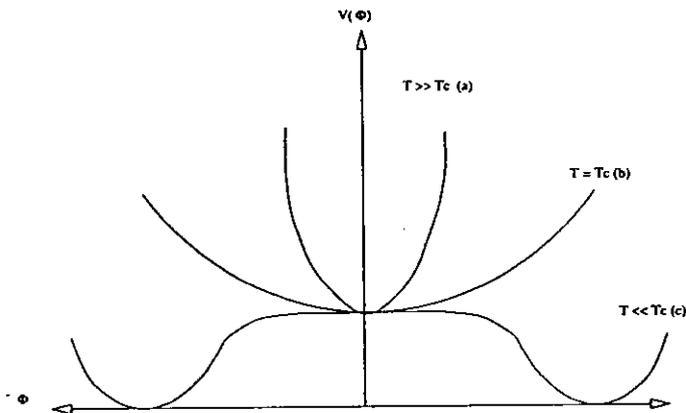


Figura 1.5. Potencial del inflatón para el modelo de la nueva inflación.

Aquí, en lugar de que el falso vacío esté separado del vacío verdadero por una barrera de energía, el potencial escalar es plano alrededor de la temperatura crítica  $T \approx T_c$ . A temperaturas mayores a la crítica, el mínimo del potencial se encuentra en  $\phi = 0$ , figura (1.5 a). Conforme la temperatura disminuye, el potencial evoluciona generando un rompimiento espontáneo de la simetría en  $\phi \neq 0$ , figura (1.5 b), y dando lugar a una transición de fase de segundo orden cuando el escalar alcanza alguno de sus mínimos, figura (1.5 c). En la

## COSMOLOGIA DE CUERDAS ANTES DEL GRAN ESTALLIDO

evolución a su mínimo, el escalar se encuentra en una región donde el potencial es plano, entonces su velocidad es lenta, y su energía potencial domina a su energía cinética. La ecuación de movimiento del inflatón,  $\phi$ , se obtiene de variar la acción

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} L \quad \text{con} \quad L = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \quad (1.52)$$

$$\delta S_\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta(\sqrt{-g} L) = 0 \quad (1.53)$$

$$\Rightarrow \left[ \partial^\mu \partial_\mu \phi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \phi (\partial^\mu \sqrt{-g}) + V'(\phi) \right] = 0 \quad (1.54)$$

donde  $V'(\phi) = dV/d\phi$ . Utilizando el determinante de la métrica de FRW,

$$g = -\frac{a^6(t) r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2} \quad (1.55)$$

sustituyendolo en (1.54), e ignorando las fluctuaciones espaciales del inflatón (que serán las responsables de las fluctuaciones de densidad para la formación de estructura galáctica), obtenemos la ecuación de movimiento del inflatón homogéneo:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad \text{con} \quad H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (1.56)$$

donde el término  $3H\dot{\phi}$  se interpreta como un término de fricción debido a la expansión del universo y  $V'(\phi)$  una fuerza debido al potencial. Si el potencial es lo suficientemente plano,  $V(\phi) \sim \text{cte}$ , se puede despreciar el término  $\ddot{\phi}$ . La contribución a la densidad de energía del inflatón es  $\rho_\phi = \dot{\phi}^2 + V(\phi)$ , y si  $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$  con  $V(\phi) \propto \text{cte}$ , la solución es una expansión exponencial dando lugar a la inflación.

Este escenario se parece al modelo de la vieja inflación: una región en el falso vacío se expande exponencialmente, durante el tiempo en el que el potencial rueda hacia su mínimo incrementando el valor de  $\phi$ . Surge la región de vacío verdadero cuando el campo llega a la pendiente pronunciada, dando una transición de fase de segundo orden y rompiendo la simetría. Ahí el campo oscila alrededor del mínimo, produciendo partículas elementales ligeras y calientes con lo que el universo se recalienta, para posteriormente dar lugar a la época dominada por la radiación. La temperatura de recalentamiento a la que llega, luego que toda la energía del inflatón ha sido transferida a la radiación, se estima del orden de  $10^6 \text{ GeV}$ .

Una característica crucial de este modelo es la producción de una gran cantidad de entropía (radiación) durante el proceso de recalentamiento. La entropía inicial contenida en una región que se infla es  $10^{14}$ , mucho más pequeña que la de nuestro universo actual. Conforme la región se expande exponencialmente, se enfría, con la entropía de la región permaneciendo fija. Después, cuando se recalienta, la temperatura sube y también la entropía aumenta alcanzando su valor actual. Con este modelo se solucionan tres problemas que nos presentaba el anterior:

- a) No hay necesidad de que las burbujas choquen para que se produzca mucha entropía ya que no hay burbujas (tenemos una transición de fase de segundo orden y no de primer orden).
- b) El problema de la no uniformidad a pequeñas escalas: en un principio el espacio era homogéneo pero las fluctuaciones cuánticas del escalar crearon el espectro de inhomogeneidades, que al crecer junto con el factor de escala, dan lugar a la acumulación de materia.

La inflación genera un estado del universo que sirve como condición inicial de la cosmología estándar, un espacio plano y homogéneo, pero con entropía y temperatura finitas aunque grandes. En el modelo cosmológico estándar mejorado por la inflación la condición inicial es que el campo  $\phi$  se encuentra cerca del origen, lejos de su mínimo. Además el potencial tiene que ser ajustado con cierto cuidado, problema conocido como de fine tuning, para que la expansión exponencial dure lo suficiente para resolver el problema del horizonte [34].

### 1.7. Modelo de la inflación caótica

En los modelos anteriores el campo escalar se encontraba en  $\phi = 0$  en la época de Planck que hay que poner como condición inicial. Como una alternativa se creó la inflación caótica [35]. En esta teoría, el universo surge de un estado gravitacional cuántico con una densidad de energía comparable a la de Planck. En la época de Planck  $\Delta t = M_p^{-1}$  la energía es, debido al principio de incertidumbre de Heisenberg,

$$\Delta E > \Delta t^{-1} = M_p \quad (1.57)$$

con lo que la densidad de energía es

$$\Delta \rho = \frac{\Delta E}{(\Delta r)^3} = \frac{\Delta E}{(\Delta t)^3} = M_p^4. \quad (1.58)$$

De un análisis dimensional se puede estimar el orden de magnitud del potencial,

$$V(\phi) \sim M_p^4, \quad (1.59)$$

con lo que la dinámica del universo descrita por la ecuación de Friedman se convierte en

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3M_p^2} V(\phi) \quad (1.60)$$

junto con la ecuación de movimiento del inflatón, (1.56). Como el potencial es grandísimo tenemos un término de fricción muy grande lo que permite despreciar nuevamente el término  $\ddot{\phi}$  en la ecuación (1.56). Conforme el factor de escala crece, el término de curvatura  $ka^{-2}$  en la ecuación de Friedman se hace despreciable obteniendo la inflación exponencial, (1.32). Utilizando las ecuaciones (1.59), (1.60) y (1.56) se obtiene una ecuación dependiente del tiempo para el inflatón

$$\dot{\phi}^2 = \frac{n^2 M_p^2}{24\pi\phi^2} V(\phi). \quad (1.61)$$

Por ejemplo para un potencial de la forma, figura (1.6),

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2, \quad (1.62)$$

se tiene una dependencia temporal

$$\phi(t) = \phi_a - \frac{m_\phi M_p}{2\sqrt{3}\pi} t = \phi_a (1 - t/\tau), \quad (1.63)$$

donde  $\tau$  es la escala de tiempo característica de la expansión.

Para tiempos tempranos,  $t \ll \tau$ , el inflatón permanece casi constante con lo que tenemos una expansión casi-exponencial,

$$a(t) = a(t_a) e^{St - \frac{1}{6} m_\phi^2 t^2}, \quad (1.64)$$

donde

$$S = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{m_\phi}{M_p} \phi_a. \quad (1.65)$$

Conforme el potencial se acerca a su mínimo,  $\phi_0 = 0$ , el  $\phi$  se va convirtiendo lentamente en vacío verdadero,  $V(\phi_0)$ , finalizando la inflación. Por lo tanto se crean burbujas donde las condiciones iniciales son diferentes, ya que el campo escalar puede comenzar en cualquier valor  $\phi_a$  y una de ellas se convertiría en lo que es nuestro universo de hoy.

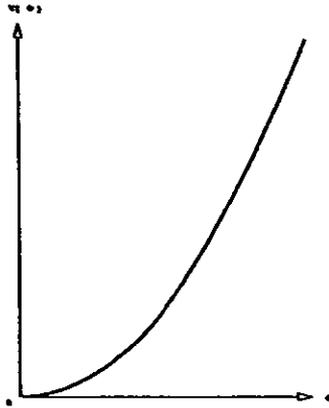


Figura 1.6. Potencial del inflatón para la inflación caótica.

Este modelo resuelve los problemas de homogeneidad, isotropía, curvatura nula del espacio y formación de estructura, sin embargo quedan preguntas abiertas, ¿cómo o de dónde sale el inflatón?, ¿qué sucede en la singularidad conocida como big bang? Para resolver estos problemas se originó la cosmología de cuerdas como veremos en el tercer capítulo.

## 2. Cuerdas

### 2.1. Introducción

La teoría de cuerdas surgió como un intento para explicar las interacciones fuertes. La idea es que las líneas de fuerza entre un quark y un antiquark podían modelarse como una cuerda [36]. Pero no tuvo éxito ya que los resultados experimentales no concordaron con las predicciones teóricas, lo que fué resuelto con la cromodinámica cuántica, QCD. Sin embargo, en la teoría aparecieron partículas sin masa con espín 0, 1/2 y 1, ya conocidas por otras teorías, pero también con espín 3/2, correspondiente al gravitino, y con espín 2, introduciendo la partícula intermediaria de la fuerza gravitacional, el gravitón. Por ello, la teoría de cuerdas se convirtió en uno de los mejores candidatos a una teoría cuántica de la gravedad, donde se pudieran unificar las cuatro interacciones fundamentales.

La teoría de cuerdas está basada en la idea de que los bloques fundamentales que forman la materia son cuerdas (objetos unidimensionales), en vez de partículas puntuales. Las cuerdas tienen modos normales de vibración que pueden ser caracterizados por varios números cuánticos, por ejemplo masa y espín y cada uno de estos modos normales se identifica con una partícula convencional. Como se mencionó en el párrafo anterior, uno de estos modos corresponde al gravitón, por lo que la escala de energía es la de Planck,  $M_p = \sqrt{\hbar c/G_N} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}$ . Así, la longitud característica de las cuerdas es la longitud de Planck, ( $l_p = \sqrt{G\hbar/c} = 10^{-33} \text{ cm}$ ), y a distancias mayores que esta longitud las cuerdas se ven como objetos puntuales.

Como veremos en las siguientes secciones, las cuerdas se dividen en dos tipos, abiertas y cerradas. Las partículas asociadas con los modos de vibración no masivos de la cuerda abierta incluyen partículas sin masa con espín 1, y las partículas asociadas con los modos de vibración no masivos de la cuerda cerrada incluyen partículas sin masa con espín 2. Las partículas con espín semientero surgen en la cuerda supersimétrica. Entonces, las interacciones entre partículas se convierten en interacciones entre cuerdas.

Conforme la teoría de cuerdas se fué desarrollando, se hicieron diferentes modelos de cuerdas. En este capítulo se expondrán los principales. El primero y más sencillo fué el bosónico. En este modelo, los modos de vibración corresponden a partículas bosónicas y la teoría es consistente para un espacio en 26 dimensiones. Posteriormente se desarrolló la supercuerda. En ella se introduce la simetría entre fermiones y bosones, supersimetría,

con lo que se logra igual número de partículas bosónicas y fermiónicas en un espacio de 10 dimensiones. Finalmente tenemos la cuerda heterótica que, como se verá en la sección 2.8, es un híbrido de la cuerda bosónica y la supercuerda.

Las cuerdas presentan simetrías que otras teorías no tienen. Entre ellas se encuentra la de dualidad T, que se discutirá al final de este capítulo, y que es una de las principales motivaciones para el desarrollo de la cosmología de cuerdas antes del gran estallido.

## 2.2. Cuerda Bosónica

Una partícula relativista ocupa un punto en el espacio a cada tiempo  $\tau$ . Está descrita por sus coordenadas  $x^\mu(\tau)$  con  $\tau$  la coordenada a lo largo de su trayectoria de evolución llamada línea de mundo y  $dx^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau = \dot{x}^\mu d\tau$ . La acción de la partícula libre en su tiempo propio es:

$$S = -m \int ds = -m \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau = -m \int d\tau \sqrt{(\dot{x}^0)^2 - (\dot{x}^i)^2}, \quad (2.1)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula,  $i = 1, \dots, D - 1$ , y la métrica del espacio tiempo es:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1) \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, D - 1. \quad (2.2)$$

Una cuerda ocupa una línea en el espacio a cada tiempo  $\tau$ . Por lo tanto su evolución está descrita por una superficie bidimensional llamada hoja de mundo. Cada punto en la hoja de mundo se describe por dos parámetros  $\sigma$  y  $\tau$ ,  $\sigma$  corresponde a la posición de cada punto en la cuerda y  $\tau$  es el tiempo propio de la cuerda. Como se mencionó anteriormente hay dos tipos de cuerdas: las abiertas, cuya hoja de mundo es como una lámina y las cerradas, cuya hoja de mundo es como un cilindro, figura (2.1).

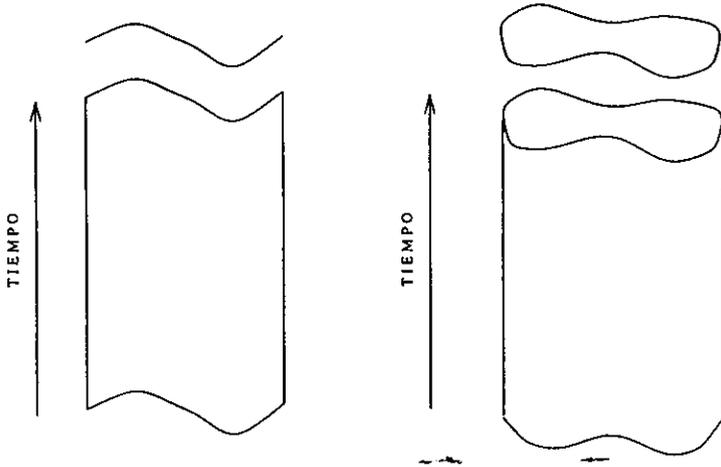


Figura 2.1. Hoja de mundo para la cuerda abierta y para la cuerda cerrada.

Los grados de libertad de una cuerda bosónica  $X^\mu(\tau, \sigma)$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, D - 1$  describen una línea en el espacio de D-1 dimensiones según  $\sigma$  varía para  $\tau$  fijo. Convencionalmente se elige  $\sigma \in [0, \pi]$ .

Una cuerda libre relativista descrita por sus coordenadas  $X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$ , tiene como acción el área de la superficie de evolución [37] [38] [39] [40], conocida como la acción de Nambu Goto (que no es más que una generalización de la acción de la partícula libre, ecuación (2.1)):

$$S = -T \int dA = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2} \quad (2.3)$$

con

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau} \quad \text{y} \quad X' = \frac{\partial X}{\partial \sigma}, \quad (2.4)$$

donde  $T$  es la tensión de la cuerda<sup>3</sup>.

Al introducir la métrica,  $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$  para la hoja de mundo se encuentra una expresión equivalente a la acción (2.3). Así, la acción para una cuerda en un espacio-tiempo D-dimensional descrito por la métrica de Minkowski,  $\eta_{\mu\nu}$ , es

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta}(\sigma) \eta_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu, \quad (2.5)$$

<sup>3</sup> De la ecuación (2.3), mediante un análisis dimensional se tiene que en unidades naturales,  $T$  tiene dimensión de  $[\text{longitud}]^{-2}$ .

donde  $d^2\sigma = d\tau d\sigma$  <sup>4</sup>. Esta acción presenta las siguientes simetrías:

1) reparametrizaciones locales, si  $\xi^\alpha$  es un desplazamiento infinitesimal en las coordenadas  $(\tau, \sigma)$ , la acción permanece invariante bajo:

$$\begin{aligned}\delta X^\mu &= \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu, \\ \delta h^{\alpha\beta} &= \xi^\gamma \partial_\gamma h^{\alpha\beta} + \partial_\gamma \xi^\alpha h^{\gamma\beta} + \partial_\gamma \xi^\beta h^{\alpha\gamma}, \\ \delta(\sqrt{h}) &= \delta_\alpha(\xi^\alpha \sqrt{h}),\end{aligned}\tag{2.6}$$

;

2) rescalamientos locales de Weyl (rescalamiento de las coordenadas de la hoja de mundo):

$$\delta h_{\alpha\beta} = \Lambda h_{\alpha\beta},\tag{2.7}$$

donde  $\Lambda$  es función de  $\sigma$  y  $\tau$ ;

3) transformaciones globales de Poincaré en el espacio tiempo D-dimensional:

$$\delta X^\mu = a_\nu^\mu X^\nu + b^\mu,\tag{2.8}$$

$$\delta h^{\alpha\beta} = 0,\tag{2.9}$$

donde  $a_\nu^\mu$  es un tensor antisimétrico constante y  $b^\mu$  es constante.

Por completez cabe mencionar que todo este tratamiento se puede generalizar a objetos d-dimensionales, en lugar de cuerdas, obteniendo así d-branas.

Ahora bien, para tener una teoría de norma fija es necesario fijar la norma en la acción válida en todo tiempo, lo que se logra imponiendo la siguiente restricción:

$$\frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}} = 0,\tag{2.10}$$

y como el tensor de energía momento en una teoría cuántica de campo bidimensional se define como

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2\pi}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}},\tag{2.11}$$

la restricción (2.10) no es más que pedir que el tensor  $T_{\alpha\beta}$  en la hoja de mundo, sea nulo:

$$T_{\alpha\beta} = 0.\tag{2.12}$$

<sup>4</sup> Se podrían agregar dos términos a la acción:  $\lambda \int d^2\sigma$ , que corresponde a la constante cosmológica y  $\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} R(h)$  correspondiente al término de curvatura intrínseco, donde  $R(h)$  es el escalar de curvatura. Sin embargo para los propósitos de este capítulo, por el momento los omitiremos.

Al hacer un cambio de coordenadas tal que

$$\sigma^{\pm} = (\tau \pm \sigma) \quad (2.13)$$

se escriben las componentes del tensor de energía momento de una forma más sencilla:

$$\begin{aligned} T_{++} &= \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu, \\ T_{--} &= \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu, \\ T_{+-} &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

satisfaciendo estas componentes las siguientes relaciones de conmutación

$$[T_{++}(\sigma), T_{++}(\sigma')] = i(T_{++}(\sigma) + T_{++}(\sigma'))\delta'(\sigma - \sigma') + \frac{i}{24}(26 - D)\delta'''(\sigma - \sigma'), \quad (2.15)$$

$$[T_{--}(\sigma), T_{--}(\sigma')] = i(T_{--}(\sigma) + T_{--}(\sigma'))\delta'(\sigma - \sigma') + \frac{i}{24}(26 - D)\delta'''(\sigma - \sigma'), \quad (2.16)$$

$$[T_{++}, T_{--}] = 0, \quad (2.17)$$

donde  $D$  es el número de las dimensiones espacio-temporales. Debido a la restricción en el tensor de energía momento, se tiene que cualquier estado físico  $|fis\rangle$  debe satisfacer  $T_{\alpha\beta}|fis\rangle = 0$  y para que así sea se necesita que  $D = 26$  en las relaciones de conmutación. Sólo en esta dimensión crítica se tienen estados físicos. El término  $(26 - D)\delta'''(\sigma - \sigma')$  es una anomalía cuántica.

Para calcular las ecuaciones de movimiento para los grados de libertad bosónicos tomemos la métrica de la hoja de mundo  $h_{\alpha\beta}$  como la métrica de Minkowski, tal que

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

la acción (2.5) se reduce a

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta X, \quad (2.19)$$

y al variarla se obtiene la ecuación de onda bidimensional,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \right) X^\mu = 0, \quad (2.20)$$

que proporciona la dinámica de los grados de libertad de la cuerda bosónica.

### 2.3. Cuerda bosónica cerrada

Para la solución de las cuerdas cerradas basta con que se satisfaga la ecuación de movimiento, (2.20), además de imponer periodicidad en  $X^\mu$ :

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + \pi). \quad (2.21)$$

Para la cuerda cerrada, la solución de la ecuación de onda consistente con las condiciones de frontera es:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + \frac{i}{2} l \sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} + \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)} \right), \quad (2.22)$$

con  $l = \frac{1}{\sqrt{\pi T}}$ ,  $x^\mu$  es la coordenada y  $p^\mu$  es el momento del centro de masas y  $\alpha_n^\mu$ ,  $\tilde{\alpha}_n^\mu$  son los coeficientes asociados a cada modo de oscilación de la cuerda.

Esta solución se puede separar en dos: una suma de términos dependientes de  $\tau - \sigma$  (parte derecha) y otra de términos dependientes de  $\tau + \sigma$  (parte izquierda):

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma), \quad (2.23)$$

con

$$X_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} l^2 p^\mu (\tau - \sigma) + \frac{i}{2} l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} \quad (2.24)$$

y

$$X_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} l^2 p^\mu (\tau + \sigma) + \frac{i}{2} l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}. \quad (2.25)$$

Ahora bien, para cuantizar canónicamente la cuerda cerrada se identifica al momento canónico conjugado:

$$P^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \quad (2.26)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la densidad lagrangiana definida por la acción:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{L}, \quad (2.27)$$

resultando entonces, que el momento canónico conjugado es:

$$P^\mu(\tau, \sigma) = T \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = T \dot{X}^\mu. \quad (2.28)$$

Posteriormente se imponen ahora las relaciones de conmutación a tiempos iguales para las variables canónicas:

$$[P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu}, \quad (2.29)$$

$$[X^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] = [P^\mu(\tau, \sigma), P^\nu(\tau, \sigma')] = 0, \quad (2.30)$$

y se deducen las siguientes relaciones de conmutación para las coordenadas y momento del centro de masas, así como para los coeficientes de los modos normales, entendidos ahora todos estos como operadores:

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = 0. \quad (2.33)$$

Si se definen los siguientes operadores

$$a_n^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_{-n}^\mu, \quad a_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_n^\mu, \quad n > 0, \quad (2.34)$$

$$\tilde{a}_n^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\alpha}_{-n}^\mu, \quad \tilde{a}_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\alpha}_n^\mu, \quad n > 0, \quad (2.35)$$

se tiene, de las relaciones de conmutación (2.31) y (2.32), que se satisfacen relaciones de conmutación como las de los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico

$$[a_m^\mu, a_n^{\mu+}] = \delta_{mn}\eta^{\mu\nu} \quad (2.36)$$

por lo que son interpretados como tales.

El estado base se construye tal que

$$a_m^\mu |0\rangle = |0\rangle, \quad m > 0. \quad (2.37)$$

Siu embargo, el estado construido al aplicar  $a_m^{\mu+}$ , debido a las relaciones de conmutación  $[a_m^0, a_m^{0+}] = -1$ ,  $a_m^{\mu+}|0\rangle$  tiene norma negativa por lo que la teoría tiene fantasmas. Una forma de deshacerse de los fantasmas es pedir que la dimensión del espacio-tiempo sea la crítica  $D = 26$  [38].

Las componentes del tensor energía momento  $T_{--}$  y  $T_{++}$  se pueden escribir en términos de modos de Fourier  $L_m$  y  $\tilde{L}_m$  respectivamente, llamados generadores de Virasoro dados en términos de los osciladores por<sup>5</sup>

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n, \quad (2.38)$$

<sup>5</sup> Por simplicidad  $l = 1$ .

$$\tilde{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n} \cdot \tilde{\alpha}_n, \quad (2.39)$$

$$L_0 = \frac{1}{8} p_L^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad (2.40)$$

$$\tilde{L}_0 = \frac{1}{8} p_R^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n. \quad (2.41)$$

Ya que la masa está relacionada con el momento del centro de masas  $M^2 = -p_\mu p^\mu$  se pueden reescribir los generadores de Virasoro  $L_0$  y  $\tilde{L}_0$  de la siguiente forma

$$L_0 = -\frac{1}{8} M^2 + N_L \quad (2.42)$$

$$\tilde{L}_0 = -\frac{1}{8} M^2 + N_R \quad (2.43)$$

Como vimos en la sección anterior, se necesita que  $T_{\alpha\beta} = 0$ , que en teoría cuántica es equivalente a

$$L_m |fis\rangle = 0, \quad (L_0 - 1)|fis\rangle = 0, \quad (2.44)$$

donde 1 es una constante de ordenamiento normal. Además  $L_0 - \tilde{L}_0$  genera corrimientos en  $\sigma$ , y como la teoría es invariante bajo translaciones a lo largo de la cuerda, se tiene que

$$(L_0 - \tilde{L}_0)|fis\rangle = 0. \quad (2.45)$$

Las últimas dos condiciones determinan el espectro de los estados físicos para la cuerda bosónica cerrada:

$$M^2 = 8N_L - 8, \quad N_L = N_R. \quad (2.46)$$

Cuando no hay osciladores  $N_L = N_R = 0$  se tiene un taquión con masa imaginaria  $M^2 = -8$ , y cuando  $N_L = N_R = 1$  se obtienen los únicos estados sin masa: un tensor simétrico *gravitón*, uno antisimétrico *Kalb-Ramond* y un escalar *dilatón*. Los demás estados corresponden a partículas con masas múltiples de la masa de Planck que no son observables a bajas energías.

#### 2.4. Cuerda bosónica abierta

Para la solución de las cuerdas abiertas se necesita que la acción, (2.19), sea invariante bajo cualquier variación general

$$X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu \quad (2.47)$$

## COSMOLOGIA DE CUERDAS ANTES DEL GRAN ESTALLIDO

por lo que variando (2.19) respecto a (2.47) se obtienen además de (2.20), términos de superficie

$$-T \int d\tau [X'_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=\pi} - X'_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=0}] = 0 \quad (2.48)$$

lo que se manifiesta en las condiciones de frontera:

a) condición de Neumann, que permite que los extremos de la cuerda se puedan mover libremente y es invariante ante translaciones:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{en } \sigma = 0 \quad \text{y } \sigma = \pi, \quad (2.49)$$

b) condición de Dirichlet, que fija los extremos de la cuerda violando la invariancia de translación:

$$X^\mu = \text{cte} \quad \text{en } \sigma = 0 \quad \text{y } \sigma = \pi. \quad (2.50)$$

A diferencia de la cuerda cerrada, debido a las condiciones de frontera, la cuerda abierta no tiene osciladores derechos e izquierdos independientes. La solución general de la ecuación de onda para una cuerda abierta consistente con las condiciones de frontera de Neumann, (2.49), es

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + il \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (2.51)$$

Imponiendo las relaciones de conmutación (2.29) y (2.30), se obtienen las relaciones de conmutación para las coordenadas y momento del centro de masa y para los coeficientes de los osciladores, que resultan ser

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \quad (2.52)$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0} \eta^{\mu\nu} \quad (2.53)$$

los mismos que para la cuerda cerrada, por lo que también se tiene la presencia de un fantasma que desaparece cuando la dimensión es  $D = 26$ .

Haciendo un análisis similar al de la cuerda bosónica cerrada se puede encontrar el espectro de masas para la cuerda abierta. Ya que no se tienen osciladores derechos e izquierdos, sólo hay un conjunto de generadores de Virasoro  $L_m$ . En el espectro de masas se obtiene un taquión con masa imaginaria  $M^2 = -2$  cuando no hay osciladores y el único estado sin masa corresponde a un bosón vectorial.

### 2.5. Cuerda supersimétrica

Para generalizar la teoría de cuerdas bosónicas, se construyó la cuerda supersimétrica en donde además de los grados de libertad bosónicos,  $X^\mu(\tau, \sigma)$  ( $\mu = 0, \dots, D - 1$ ) correspondientes a las coordenadas de la cuerda propagándose en un espacio-tiempo de  $D$  dimensiones, se agregan grados de libertad fermiónicos  $\Psi^\mu(\tau, \sigma)$ , aquí,  $D = 10$  (a diferencia de las bosónicas donde  $D = 26$ ). Estos son grados de libertad internos que se propagan a lo largo de la cuerda. Tanto  $X^\mu$  como  $\Psi^\mu$  son vectores del espacio tiempo pero respectivamente escalares y fermiones bidimensionales. Por lo tanto, la acción en norma conforme es

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma [\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i \bar{\Psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \Psi_\mu] \quad (2.54)$$

donde  $\Psi^\mu$  es un espinor de Majorana de dos componentes en la hoja de mundo:

$$\Psi^\mu = \begin{pmatrix} \Psi_-^\mu \\ \Psi_+^\mu \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

además,  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \rho^0$ , y  $\rho^\alpha$  son matrices de Dirac bidimensionales

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

que satisfacen  $\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = -2\eta^{\alpha\beta}$ . Esta acción tiene una nueva simetría, permanece invariante bajo la siguiente transformación

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\epsilon} \psi^\mu \\ \delta \Psi^\mu &= -i \rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \epsilon \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde  $\epsilon$  es un espinor constante que anticomuta. Estas transformaciones intercambian las coordenadas bosónicas con las fermiónicas dando lugar a la supersimetría en la hoja del mundo.

Las restricciones para los estados físicos son que el tensor de energía momento, al igual que en la cuerda bosónica, y que la supercorriente sean nulos

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= 0 \\ J_\alpha^A &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Así como para la cuerda bosónica surgieron los operadores de Virasoro con su álgebra, para la cuerda supersimétrica se tiene el álgebra de super-Virasoro y la dimensión crítica para que la teoría esté libre de fantasmas es  $D = 10$ .

Para obtener las ecuaciones de movimiento nuevamente se varía la acción con respecto a  $X^\mu$ ,  $\Psi^\mu$  anulando los términos de superficie, con lo que las ecuaciones de movimiento resultan ser

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0 \quad (2.59)$$

$$i\rho^\alpha \partial_\alpha \Psi^\mu = 0 \quad (2.60)$$

recuperando por una parte la ecuación bosónica, cuyo tratamiento lo vimos en la sección anterior, y ganando una ecuación fermiónica.

La ecuación de movimiento fermiónica se descompone en

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \Psi_-^\mu = 0 \quad (2.61)$$

y

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \Psi_+^\mu = 0, \quad (2.62)$$

es decir, una ecuación para los modos derechos y una para los izquierdos respectivamente.

Haciendo el cambio de variable  $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$  y  $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)$ , se pueden escribir las ecuaciones de movimiento como

$$\partial_+ \Psi_-^\mu = \partial_+(\partial_- X^\mu) = 0, \quad (2.63)$$

$$\partial_- \Psi_+^\mu = \partial_-(\partial_+ X^\mu) = 0. \quad (2.64)$$

De esta forma se observa con mayor claridad la supersimetría entre  $\Psi_-^\mu$  y  $\partial_- X^\mu$ , o bien, entre  $\Psi_+^\mu$  y  $\partial_+ X^\mu$ .

Como la ecuación de movimiento para la parte bosónica es la misma que para la cuerda bosónica, las condiciones de frontera son las correspondientes a las cuerdas cerradas, ecuación (2.21), y las condiciones de frontera para las cuerdas abiertas corresponden a las ecuaciones (2.49) ó (2.50). Por lo tanto, la expansión de la coordenada bosónica  $X^\mu$  es (2.22) para las cerradas y (2.51) para las abiertas. Por esta razón, en las siguientes dos secciones nos limitaremos a estudiar las condiciones de frontera para las coordenadas fermiónicas.

### 2.6. Cuerda supersimétrica cerrada

Las condiciones de frontera para los grados de libertad fermiónicos basta que sean periódicas o antiperiódicas de manera independiente para cada componente de  $\Psi$ :

$$\Psi_\pm^\mu(\tau, \sigma + \pi) = \pm \Psi_\pm^\mu(\tau, \sigma), \quad (2.65)$$

$$\Psi_{-}^{\mu}(\tau, \sigma + \pi) = \pm \Psi_{-}^{\mu}(\tau, \sigma). \quad (2.66)$$

Las condiciones periódicas se conocen como de Ramond (R) y las antiperiódicas como de Neveu-Schwarz (NS). Por lo que las soluciones consistentes con esto son

$$\Psi_{+}^{\mu} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{d}_{n}^{\mu} e^{-2in(\tau+\sigma)} \quad R \quad (2.67)$$

ó

$$\Psi_{+}^{\mu} = \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} \tilde{b}_{r}^{\mu} e^{-2ir(\tau+\sigma)} \quad NS \quad (2.68)$$

y

$$\Psi_{-}^{\mu} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{n}^{\mu} e^{-2in(\tau-\sigma)} \quad R \quad (2.69)$$

ó

$$\Psi_{-}^{\mu} = \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} b_{r}^{\mu} e^{-2ir(\tau-\sigma)} \quad NS. \quad (2.70)$$

Existen cuatro sectores de la cuerda cerrada dependiendo de como se combinen los modos izquierdos y derechos:

- $NS - NS$ : corresponde a estados bosónicos de la cuerda y en el espectro de masas se obtiene un taquión, un gravitón  $g_{\mu\nu}$ , un tensor antisimétrico  $B_{\mu\nu}$  y un dilatón  $\phi$ , entre otras partículas.
- $NS - R$ : corresponde a estados fermiónicos y contiene partículas con espín 3/2 que son los compañeros supersimétricos del  $g_{\mu\nu}$  y del  $B_{\mu\nu}$ .
- $R - NS$ : es análogo al anterior.
- $R - R$ : corresponde a estados bosónicos y contiene estados bi-espinoriales.

La cuantización de los grados bosónicos son los mismos que para la cuerda bosónica, pero para cuantizar los fermiónicos imponemos reglas de anticonmutación:

$$\{\Psi_{+}^{\mu}(\sigma, \tau), \Psi_{+}^{\nu}(\sigma', \tau)\} = \{\Psi_{-}^{\mu}(\sigma, \tau), \Psi_{-}^{\nu}(\sigma', \tau)\} = \pi \delta(\sigma - \sigma') \eta^{\mu\nu}, \quad (2.71)$$

$$\{\Psi_{+}^{\mu}(\sigma, \tau), \Psi_{-}^{\nu}(\sigma', \tau)\} = 0, \quad (2.72)$$

por lo que se obtiene

$$\{d_{m}^{\mu}, d_{n}^{\nu}\} = \{\tilde{d}_{m}^{\mu}, \tilde{d}_{n}^{\nu}\} = \delta_{m+n,0} \eta^{\mu\nu} \quad R, \quad (2.73)$$

$$\{b_{r}^{\mu}, b_{s}^{\nu}\} = \{\tilde{b}_{r}^{\mu}, \tilde{b}_{s}^{\nu}\} = \delta_{r+s,0} \eta^{\mu\nu} \quad NS. \quad (2.74)$$

El espectro obtenido tiene varios problemas: a) presenta un taquión; b) aunque incluye a bosones y fermiones en el espacio-tiempo, el espectro no es supersimétrico; c) los bosones en el espacio-tiempo corresponden a bosones y fermiones en la hoja de mundo. La proyección GSO, que actúa independientemente en los modos izquierdos y derechos, resuelve estos problemas al quitar estados de la teoría [41]. En el sector  $NS - NS$  el resultado de esta proyección es deshacerse de el taquión, entre otros estados, obteniendo así para las partículas sin masa el  $g_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu}$  y el  $\phi$ . Para el sector  $R - R$  hay dos opciones: a) una teoría llamada IIA que presenta dos supersimetrías de la misma quiralidad, cuyos estados principales son dos campos de gauge, el  $A_\mu$  y  $A_{\mu\nu\rho}$ ; b) una teoría llamada IIB con dos supersimetrías de quiralidad opuesta y estados  $\chi$ ,  $B_{\mu\nu}$  y  $A_{\mu\nu\rho\gamma}$ .

### 2.7. Cuerda supersimétrica abierta

Al igual que en el caso bosónico, para la cuerda abierta, al variar la acción, la parte fermiónica tiene un término de superficie que necesita anularse en cada extremo de la cuerda,

$$\Psi_+ \delta \Psi_+ - \Psi_- \delta \Psi_- = 0, \quad (2.75)$$

lo que se satisface si  $\Psi_+ = \pm \Psi_-$  y entonces  $\delta \Psi_+ = \pm \delta \Psi_-$ . El signo + ó - es cuestión de convención, por lo que se puede escoger la condición de frontera para un extremo de la cuerda de la siguiente forma:

$$\Psi_-^\mu(\tau, 0) = \Psi_+^\mu(\tau, 0), \quad (2.76)$$

para el otro extremo de la cuerda se tienen dos opciones: la condición de Ramond:

$$\Psi_-^\mu(\tau, \pi) = \Psi_+^\mu(\tau, \pi), \quad (2.77)$$

o bien, la de Neveu-Schwarz:

$$\Psi_-^\mu(\tau, \pi) = -\Psi_+^\mu(\tau, \pi). \quad (2.78)$$

La expansión de los grados de libertad fermiónicos es

$$\Psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \quad R, \quad (2.79)$$

$$\Psi_+^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)} \quad NS, \quad (2.80)$$

$$\Psi_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \quad R, \quad (2.81)$$

$$\Psi_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)} \quad NS. \quad (2.82)$$

La condición de Ramond con los modos enteros describen estados de la cuerda que son fermiones, mientras que los de Neveu-Schwarz con sus modos semienteros describen estados bosónicos.

Nuevamente imponiendo la relación de anticonmutación (2.71) obtenemos los anticonmutadores para estos osciladores

$$\{d_m^\mu, d_n^\nu\} = \delta_{m+n,0} \eta^{\mu\nu}, \quad (2.83)$$

$$\{b_r^\mu, b_s^\nu\} = \delta_{r+s,0} \eta^{\mu\nu}. \quad (2.84)$$

Al igual que para la cuerda supersimétrica cerrada, en la abierta nuevamente se utiliza la proyección GSO, a la cual no nos referiremos porque su complejidad matemática va más allá del contexto de este trabajo.

### 2.8. Cuerda heterótica

La cuerda heterótica es una cuerda cerrada combinando la bosónica, en los modos izquierdos, y la supersimétrica, en los modos derechos, con acción:

$$S = -T \int d^2\sigma [\partial_\alpha X_R^\mu \partial^\alpha X_{R\mu} + \partial_\alpha X_L^I \partial^\alpha X_{L I} + \partial_\alpha X_L^\mu \partial^\alpha X_{L\mu} + i \bar{\Psi}^\mu \rho (\partial_\tau - \partial_\sigma) \Psi_\mu] \quad (2.85)$$

donde los modos derechos son análogos a los de una supercuerda cerrada, lo cual asegura la presencia de fermiones y la ausencia de taquiones, mientras que los izquierdos se dividen en dos:  $X^\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, 9$  corresponden a las coordenadas ordinarias del espacio externo, y  $X^I$ ,  $I = 1, \dots, 16$  coordenadas de una variedad interna.

La expansión de los osciladores derechos es igual que la de la supercuerda cerrada. Para los grados de libertad bosónicos tenemos

$$X_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} p^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau-\sigma)} \quad (2.86)$$

y para los grados de libertad fermiónicos

$$\Psi_R^\mu(\tau - \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} \quad R \quad (2.87)$$

$$\Psi_R^\mu(\tau - \sigma) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} b_r^\mu e^{-2ir(\tau - \sigma)} \quad NS. \quad (2.88)$$

Los osciladores izquierdos se separan en dos, los que corresponden a los primeros 10 grados de libertad, denotados por  $X_L^\mu$  con  $\mu = 0, 1, \dots, 9$ , y los que corresponden a los últimos 16 grados de libertad,  $X_L^I$  con  $I = 1, \dots, 16$ , llamados grados de libertad internos. Entonces, su expansión es

$$X_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau + \sigma)} \quad \mu = 0, 1, \dots, 9 \quad (2.89)$$

$$X_L^I(\tau + \sigma) = x_L^I + p_L^I(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^I}{n} e^{-2in(\tau + \sigma)} \quad I = 1, \dots, 16 \quad (2.90)$$

La cuantización canónica da, como antes,

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \quad (2.91)$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m+n,0} \eta^{\mu\nu} \quad (2.92)$$

$$\{d_m^\mu, d_n^\nu\} = \delta_{m+n,0} \eta^{\mu\nu} \quad R \quad (2.93)$$

$$\{b_r^\mu, b_s^\nu\} = \delta_{r+s,0} \eta^{\mu\nu} \quad NS. \quad (2.94)$$

Para los osciladores restantes, imponemos

$$[P^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = \frac{i}{2} \delta(\sigma - \sigma') \eta^{IJ} = -\frac{i}{2} \delta(\sigma - \sigma') \delta^{IJ} \quad (2.95)$$

resultando en

$$[x_L^I, p_L^J] = -\frac{i}{2} \eta^{IJ} = \frac{i}{2} \delta^{IJ} \quad (2.96)$$

$$[\tilde{\alpha}_m^I, \tilde{\alpha}_n^J] = -m\delta_{m+n,0} \eta^{IJ} = m\delta_{m+n,0} \delta^{IJ}. \quad (2.97)$$

Por último, sólo mencionaremos que existe una teoría llamada *teoría M* que en algunos límites reproduce algunos de los diferentes tipos de cuerdas, como la heterótica o la IIA [42] [43]. La acción efectiva a bajas energías es la supergravedad en 11 dimensiones [44] [45]. En lo que resta del capítulo, se describe una simetría de la teoría de cuerdas.

## 2.9. Dualidad

A lo largo de la historia de la física, lo más importante ha sido encontrar las simetrías de una teoría. Una de estas simetrías es la dualidad. Esta dualidad, se ha encontrado en muchas teorías, entre ellas la electromagnética, donde las ecuaciones de Maxwell en el vacío son invariantes bajo el intercambio de los campos eléctricos y magnéticos. En la teoría de cuerdas también existen simetrías de dualidad, como la S y la T [45]. Para propósitos de este trabajo a continuación expondremos la dualidad T.

2.10. Dualidad  $T$ 

La dualidad  $T$  nos permite pasar a una geometría diferente de la original. El ejemplo más sencillo de esta dualidad  $T$  se manifiesta en un círculo [46], [47].

En la teoría cuántica, una cuerda moviéndose en un círculo tiene un momento cuantizado por:

$$p = \frac{k}{R} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.98)$$

El espectro de masas tiene un término proporcional a  $p^2$  que corresponde a las excitaciones de momento,

$$M^2 \sim p^2 = \frac{k^2}{R^2} + \text{otras contribuciones.} \quad (2.99)$$

Conociendo el espectro de masas, se puede reconstruir el radio del círculo. Por lo tanto, la geometría determina el espectro y viceversa. Al medir el espectro, medimos el tamaño del círculo.

Para las cuerdas, además de las excitaciones debidas a la cuantización del momento, tenemos que la cuerda se puede enrollar muchas veces alrededor del círculo. La energía debido a estas excitaciones depende de la tensión de la cuerda

$$E = nRT \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.100)$$

donde  $n$  es el número de enrollamiento por lo que  $2\pi nR$  es la longitud de la cuerda. Entonces las contribuciones al espectro de masa son

$$\begin{aligned} M_{\text{cuerda}}^2 &= \frac{k^2}{R^2} + n^2 R^2 T^2 + \text{otros} \\ &= \frac{k^2}{R^2} + \frac{n^2}{\left(\frac{1}{RT}\right)^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.101)$$

Si  $R^2 \ll T$ , la cuerda es aproximadamente puntual y entonces

$$M_{\text{cuerdas}}^2 \approx \frac{k^2}{R^2}, \quad (2.102)$$

con lo que sólo tenemos contribuciones de los términos de excitaciones de momento. Entonces del espectro a bajas energías podremos conocer el valor del radio.

Por el contrario, si  $R^2 \gg T$  el espectro de bajas energías se compone de las otras excitaciones

$$M_{\text{cuerda}}^2 \approx \frac{n^2}{\left(\frac{1}{RT}\right)^2}, \quad (2.103)$$

y es el de una teoría de campo con un círculo de radio dual

$$\tilde{R} = \frac{1}{RT}. \quad (2.104)$$

Por lo tanto tenemos una simetría en el espectro de cuerdas (2.101) sobre el círculo cuando

$$R \longleftrightarrow \frac{1}{RT} \quad (2.105)$$

intercambiando de las excitaciones de momento y enrollamiento

$$k \longleftrightarrow n. \quad (2.106)$$

A esta simetría se le conoce como *dualidad T del espacio* [48]. Es decir, los dos modelos diferentes, uno con radio  $R$  y otro con radio  $\frac{1}{R}$  corresponden a la misma solución de cuerdas.

Esta dualidad es una simetría de la teoría de cuerdas y no de la teoría de campo, ya que los modos de enrollamiento no existen en la teoría de campo.

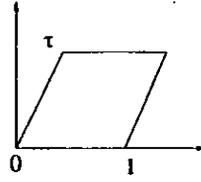
Si redefinimos nuestra coordenada  $X$  a  $X \equiv X + 2\pi R$  y denotamos a  $\tilde{X}$  la coordenada dual de  $X$  tenemos la acción original

$$S = -T \int d^2\sigma \partial_\alpha X \partial^\alpha X \quad (2.107)$$

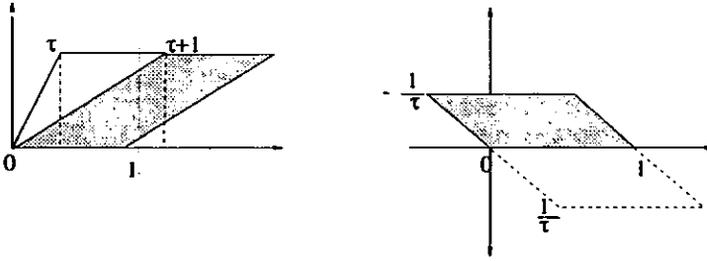
y la acción dual

$$\tilde{S} = -T \int d^2\sigma \partial_\alpha \tilde{X} \partial^\alpha \tilde{X}. \quad (2.108)$$

El ejemplo de dualidad presentado en la sección anterior se puede generalizar, a un toro bidimensional. Supongamos ahora que se tiene una cuerda moviéndose en un toro. El toro se puede crear de un rectángulo pegando los lados superiores con los lados inferiores y posteriormente juntando el lado izquierdo con el derecho, figura (2.2.a).



(a)



(b)

Figura 2.2. Toro y los toros equivalentes obtenidos mediante las transformaciones  $\tau \rightarrow \tau + 1$  y  $\tau \rightarrow -1/\tau$ .

Se pueden construir otros toros mediante una transformación conforme<sup>6</sup> en el paralelogramo, como por ejemplo  $\tau \rightarrow \tau + 1$  ó  $\tau \rightarrow -1/\tau$ , figura (2.2 b). Estas transformaciones son sólo casos particulares de la transformación general [49]

$$\tau \longleftrightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad (2.109)$$

donde

$$a, b, c, d, \in \mathbb{Z} \quad ad - cb = 1. \quad (2.110)$$

Ahora bien, utilizando las tres componentes independientes de la métrica del toro y la única componente del tensor antisimétrico de Kalb-Ramond en el toro, se pueden definir los siguientes parámetros complejos que caracterizan a cada toro:

$$\begin{aligned} T &\equiv B + i\sqrt{G} \\ U &\equiv \frac{G_{12}}{G_{22}} + i\frac{\sqrt{G}}{G_{22}} \end{aligned} \quad (2.111)$$

<sup>6</sup> Una transformación conforme en el plano complejo deja invariante el ángulo entre dos rectas.

donde  $B$  se define como  $B_{ij} = B\epsilon_{ij}$ , el parámetro  $T$  mide el tamaño del toro, por lo que corresponde al radio  $R$  del círculo, y el  $U$  es un parámetro geométrico correspondiente a la estructura del toro. El espectro de masas para una cuerda moviéndose en un toro se puede escribir en términos de los campos  $T$  y  $U$  de la siguiente forma:

$$M^2 = \frac{1}{2U_2T_2} \{ \|(n_1 - n_2U) - T(k_2 + k_1U)\|^2 + \|(n_1 - n_2U) - T^*(k_2 + k_1U)\|^2 \} \quad (2.112)$$

Análogamente al círculo, el espectro de masas queda invariante bajo las siguientes transformaciones

$$U \leftrightarrow \frac{aU + b}{cU + d}, \quad (2.113)$$

$$T \leftrightarrow \frac{aT + b}{cT + d}, \quad (2.114)$$

$$T \leftrightarrow U, \quad (2.115)$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  cumplen con (2.110). La primera simetría (2.113) corresponde a la geometría del toro,  $SL(2, \mathbb{Z})$ . La segunda (2.114), *dualidad T*, es una simetría cuerdística, análoga a la de  $R \leftrightarrow 1/R$ ,  $SL(2, \mathbb{Z})$ , donde también hay que intercambiar las excitaciones de momento  $k$  y las de enrollamiento  $n$ . Y la tercera simetría, de espejo, intercambia las anteriores. Los parámetros  $U$  y  $T$  viven en el producto de los espacios complejos  $SL(2, \mathbb{Z}) \otimes SL(2, \mathbb{Z}) = O(2, 2, \mathbb{Z})$ .

### 2.11. Covarianza $O(d, d)$

La covarianza  $O(d, d)$  generaliza la dualidad T. El toro bidimensional de la sección anterior se puede generalizar a un toro  $d$ -dimensional. El espectro de masas es más complejo que en el caso anterior pero el intercambio de los modos de enrollamiento con las excitaciones de momento junto con la covarianza  $O(d, d)$  deja invariante el espectro. Aquí los parámetros de la teoría viven en el grupo  $O(d, d, \mathbb{Z})$ , que es un grupo ortogonal de  $d + d$  dimensiones [50]. Los elementos de este grupo  $g \in O(d, d, \mathbb{Z})$  son tienen la forma general:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (2.116)$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son matrices  $d \times d$ . Las matrices  $g$  que mantienen la simetría  $O(d, d)$  son de la forma  $J$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.117)$$

es decir,

$$g^t J g = J \quad \rightarrow \quad a^t c + c^t a = 0, \quad b^t d + d^t b = 0, \quad a^t d + c^t b = 1. \quad (2.118)$$

Un elemento particular del grupo  $O(d, d)$ , llamado la matriz de fondo, nos muestra la generalización de la dualidad  $R \rightarrow 1/R$  en el círculo. Sea la matriz de fondo definida de la siguiente forma:

$$E = G + B, \quad (2.119)$$

entonces la dualidad  $R \rightarrow 1/R$  en el círculo se generaliza a:

$$E = G + B \quad \Rightarrow \quad E^{-1} = E' = G' + B'. \quad (2.120)$$

Bajo esta transformación, la métrica y el tensor antisimétrico se transforman como

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G' = (G - BG^{-1}B)^{-1}, \\ B &\rightarrow B' = (B - GB^{-1}G)^{-1}, \\ G^{-1}B &\rightarrow -BG^{-1}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Por lo tanto, bajo la transformación (2.121) e intercambiando los modos de enrollamiento con los de momento ( $k \leftrightarrow n$ ) el espectro de masas de la teoría permanece invariante.

Como veremos en la última sección de este capítulo, estas ideas pueden ser aplicadas a la cosmología.

### 2.12. Aplicaciones a la cosmología

Estas ideas pueden ser aplicadas a la cosmología donde tenemos que, debido a que las coordenadas del espacio se comportan de una forma dependiente del tiempo, al aproximarnos a la época de Planck la teoría deja de tener validez. Entonces tenemos nuestras ecuaciones de movimiento y una métrica que nos dicen que el universo se expande con la geometría bien definida, pero conforme vamos hacia atrás en el tiempo el universo se comprime hasta llegar cerca de la escala de Planck, que es cuando los modos de enrollamiento empiezan a importar y es cuando la descripción en términos de una teoría de campo deja de ser válida. Podemos suponer que el factor de escala  $a(t)$  sigue disminuyendo hasta que es mucho menor que  $l_{Pl}$ . Aquí es cuando debemos de usar la métrica vista por los modos de enrollamiento que dominan el espectro de bajas energías. Utilizando una dualidad análoga a la expuesta anteriormente, podemos pasar, como veremos en el siguiente capítulo, de nuestro universo expandiéndose con factor de escala  $a$  a el universo antes del big bang, contrayéndose con factor de escala  $1/a$ , ambos satisfaciendo las mismas ecuaciones de movimiento.

### 3. El Pre-big bang

#### 3.1. Motivaciones teóricas

Como se vió en el primer capítulo, el modelo cosmológico estándar funciona bien explicando el corrimiento al rojo de las galaxias, la radiación de fondo y la nucleosíntesis, sin embargo no presenta solución para problemas tales como la homogeneidad e isotropía del espacio y la densidad crítica; razón por la cual surgió la inflación. No obstante para que la teoría de inflación funcione se necesita de condiciones iniciales muy precisas o de potenciales puestos a mano, y aún así no se puede resolver el problema de la singularidad inicial. Para resolver este problema las teorías expuestas en los primeros dos capítulos se unen para dar lugar a la cosmología de cuerdas, que es una extensión del modelo cosmológico estándar del big bang motivada por la teoría de cuerdas.

Para evadir la singularidad inicial del big bang, tenemos 2 posibilidades analizando la evolución del tiempo hacia el pasado, como lo muestra la figura (3.1): a) la curvatura detiene su crecimiento después de alcanzar un máximo debajo de la escala de Planck; b) la curvatura crece a un valor máximo (del orden de la escala de Planck) y después empieza a decrecer nuevamente. El primer caso corresponde al modelo cosmológico estándar donde la teoría deja de tener validez cuando la curvatura crece a su valor máximo, convirtiéndose este punto en una singularidad. En el último caso, el big bang ya no es una singularidad sino el instante de máxima curvatura que marca la transición de un régimen de crecimiento de curvatura a la evolución expansiva decelerada del modelo cosmológico estándar. A la fase de crecimiento de curvatura y evolución acelerada anterior al big bang se le llama pre-big bang [51] [52] [53].

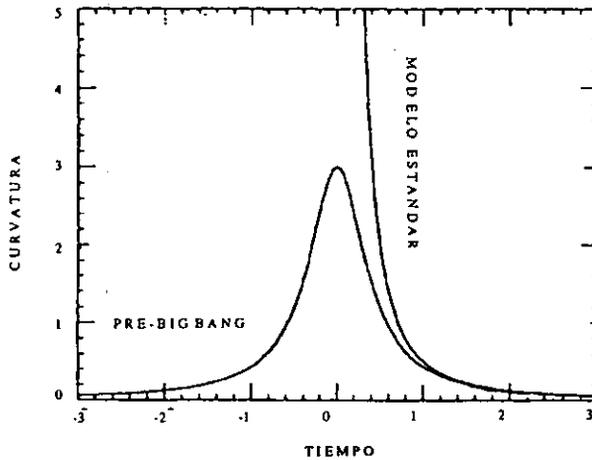


Figura 3.1. Evolución de la curvatura en el modelo cosmológico estándar y en el pre-big bang.

El crecimiento de curvatura en la fase anterior al big bang puede ser debido a una contracción del espacio de  $D - 4$  dimensiones y a una expansión de las 3 dimensiones espaciales macroscópicas.

Las motivaciones principales para desarrollar el modelo del pre-big bang son las siguientes [54] [55] [56] :

- a) Debido a que la teoría de cuerdas tiene implícito un nuevo campo llamado *dilatón*,  $\phi$ , éste juega un papel fundamental en la dinámica, de manera similar a como antes lo jugaba el inflatón, ya que para un espacio plano se produce *inflación naturalmente*, es decir sin la necesidad de poner a mano un inflatón.
- b) La teoría de cuerdas, a bajas energías, presenta una simetría adicional comparada con la relatividad general, la *dualidad del factor de escala* que para un espacio plano mapea la evolución dinámica antes y después del big bang.
- c) La introducción natural de *más de 3 dimensiones espaciales*, ya que se trabaja en una teoría de cuerdas, lo cual permite utilizar las ideas de Kaluza-Klein para una teoría unificadora de las interacciones fundamentales.
- d) *la propagación de las cuerdas en un medio con horizontes de eventos contrayéndose.*

En este capítulo se exponen la propagación de la cuerda en un medio con horizontes de eventos contrayéndose y la dualidad del factor de escala como unas de las motivaciones de la teoría. Se presentan también, las ecuaciones de movimiento obtenidas de la acción

efectiva a bajas energías y las soluciones para un espacio plano utilizando una ecuación de estado correspondiente a materia cuerdística, [51], las soluciones para un espacio plano y curvo utilizando una ecuación de estado correspondiente a radiación, [57], y nuestras soluciones obtenidas para espacios curvos, [58]. Posteriormente se presentan las ecuaciones de movimiento correspondientes a una simetría más general a la de la dualidad del factor de escala,  $O(d, d)$ , con algunas soluciones. Más adelante se expone un modelo de juguete que permite conectar las soluciones obtenidas antes y después del big bang, utilizando una ecuación de estado dependiente del tiempo que inicialmente corresponde a un universo dominado por materia cuerdística, y finalmente corresponde a un universo dominado por radiación. Por último para complementar esta sección, algunas de las soluciones anteriores que se obtuvieron en el marco de referencia de las cuerdas se reescriben en el marco de referencia de Einstein.

### 3.2. Propagación de la cuerda en un medio con horizontes de eventos contrayéndose

Como se verá en esta sección, el crecimiento de curvatura y la evolución acelerada, típicas de una época de pre-big bang, se encuentran asociadas con horizontes de evento cuyo tamaño propia disminuye en el tiempo. Este hecho tiene consecuencias importantes para objetos con tamaño propio como las cuerdas.

Dada la distancia propia de una geodésica, (1.15), consideremos la función

$$d(t) = a(t) \int_{t_1}^{t_2} dt' a^{-1}(t'). \quad (3.1)$$

En el límite  $t_2 \rightarrow t_{MAX}$ , donde  $t_{MAX}$  es la máxima extensión futura de la coordenada del tiempo cósmico,  $d(t_1)$  define la distancia propia del *horizonte de eventos* al tiempo  $t_1$ , o sea, el máximo tamaño de la región de espacio tiempo en la que se pueden establecer conexiones causales.

Cuando  $t_1 \rightarrow t_{MIN}$ , donde  $t_{MIN}$  es la máxima extensión pasada de la coordenada de tiempo cósmico,  $d(t_2)$  define el *horizonte de partículas* al tiempo  $t_2$ , es decir, la máxima porción del espacio que puede ser incluida en el cono de luz pasado de un observador dado.

El comportamiento asintótico en el tiempo del fondo se puede analizar utilizando el parámetro de Hubble como un indicador de la curvatura  $|H|$ . Para un fondo que se está expandiendo ( $\dot{a} > 0$ ), se tienen los siguientes casos:

1) En el caso de expansión acelerada ( $\ddot{a} > 0$ ): 1a) si  $\dot{H} > 0$  el escalar de curvatura aumenta y se tiene un horizonte de eventos contrayéndose linealmente; 1b) si  $\dot{H} = 0$  el escalar de

curvatura es constante y se tiene un horizonte de eventos constante; 1c) si  $\dot{H} < 0$  el escalar de curvatura disminuye y el horizonte de eventos crece linealmente.

2) En el caso de expansión desacelerada ( $\ddot{a} < 0$ ) sólo se tiene que  $\dot{H} < 0$  con lo que el escalar de curvatura disminuye y el horizonte de partículas crece linealmente.

Ahora bien, para un fondo que se está contrayendo ( $\dot{a} < 0$ ), se tienen los siguientes casos:

1) En el caso de contracción acelerada ( $\ddot{a} < 0$ ) sólo se tiene que  $\dot{H} < 0$  con lo que el escalar de curvatura aumenta y el horizonte de eventos se contrae linealmente.

2) En el caso de contracción desacelerada ( $\ddot{a} > 0$ ): 2a) si  $\dot{H} < 0$  el escalar de curvatura aumenta y se tiene un horizonte de partículas contrayéndose linealmente; 2b) si  $\dot{H} = 0$  el escalar de curvatura es constante y se tiene un horizonte de partículas constante; 2c) si  $\dot{H} > 0$  el escalar de curvatura disminuye y el horizonte de eventos crece linealmente.

Cabe notar que existe una simetría que intercambia el horizonte de partículas con el de eventos cuando se pasa de un fondo expándose a uno contrayéndose. Por otro lado, se tiene también que existe un horizonte de eventos si y sólo si

$$\varepsilon \equiv \text{signo}(\dot{a}) = \text{signo}(\ddot{a}), \quad (3.2)$$

que corresponde a una evolución acelerada. La inflación es una expansión acelerada. Si  $\varepsilon > 0$  tenemos inflación, si  $\varepsilon < 0$  tenemos contracción acelerada. Si tuviéramos una métrica más complicada con dos factores de escala  $a_i$  podríamos tener inflación de algunas dimensiones espaciales junto con la contracción simultánea de otras. Si ambas evoluciones, expansión de algunas dimensiones y la contracción de otras, son aceleradas entonces los horizontes de eventos aparecen naturalmente durante la fase de desacoplamiento dimensional.

Para una evolución acelerada, el tamaño propio de las regiones que están conectadas causalmente con el inicio tiende a evolucionar asintóticamente en el tiempo como el factor de escala  $a$ . Al comparar este comportamiento con la evolución en el tiempo del horizonte de eventos, ecuación (3.2), se concluye que las regiones que estaban inicialmente en contacto causal crecen más rápidamente que el horizonte en el caso de la expansión acelerada, y se contraen más lentamente que el horizonte en la contracción acelerada. En ambos casos las regiones cruzan el horizonte de eventos.

Nótese que la curvatura crece sólo si:

$$\text{signo}(\dot{a}) = \text{signo}(\dot{H}). \quad (3.3)$$

Una configuración típica del pre-big bang con evolución acelerada y crecimiento de curvatura está asociada con la presencia de un horizonte de eventos que se comprime linealmente en el tiempo cósmico<sup>7</sup>, y por lo tanto los objetos extensos se desconectan causalmente. En el caso de cuerdas, debido a esta desconexión causal, una descripción aproximada del movimiento de la cuerda alrededor de una trayectoria clásica de una partícula no es válida. Sin embargo, podemos obtener la solución exacta de las ecuaciones de movimiento de la cuerdas en un fondo cosmológico, expandidas alrededor de una geodésica comóvil que representa el movimiento puntual del centro de masas de la cuerda. Con esta solución el tensor de esfuerzos de la materia corresponde a una ecuación de estado efectiva que caracteriza una fuente acelerada y con curvatura creciente. Aproximándola como fluido, en un fondo con  $d$  dimensiones expandiéndose homogénea e isotrópicamente y  $n$  contrayéndose de la misma forma, la ecuación de estado es [59]:

$$\rho + dp - nq = 0, \quad (3.4)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía,  $p$  es la presión en el espacio  $d$ -dimensional que se expande y  $q$  la presión en el espacio  $n$ -dimensional que se contrae.

### 3.3. Ecuaciones de movimiento en la cosmología de cuerdas

El lagrangiano efectivo de las cuerdas a bajas energías es [51]:

$$L = -\sqrt{|g|}e^{-\phi}\left[R + (\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu B_{\nu\rho})^2 + \dots\right], \quad (3.5)$$

donde  $B$  es el tensor antisimétrico de Kalb-Ramond y el escalar  $\phi$  es el dilatón.

Por lo tanto, la acción efectiva de las cuerdas a bajas energías en  $D$  dimensiones es <sup>8</sup>:

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{|g|} e^{-\phi} \left( R + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{H_{\mu\nu\alpha} H^{\mu\nu\alpha}}{12} + \dots \right) + S_M, \quad (3.6)$$

donde  $S_M$  es la acción correspondiente a la materia,  $H_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]}$ <sup>9</sup> es el tensor de Kalb-Ramond  $B_{\mu\nu}$  y  $8\pi G = \frac{1}{M^{D-2}}$ .

<sup>7</sup> A partir de ciertas propiedades locales del universo, por ejemplo temperatura y densidad, es posible sincronizar los relojes de cada región del fluido cósmico. De esta forma, el estado físico del universo sólo depende del tiempo en todas las regiones del universo. A este tiempo se le conoce como tiempo cósmico.

<sup>8</sup> Para la derivación de esta acción consultar el apéndice A

<sup>9</sup>  $H_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\rho\mu}$

Al variar la acción (3.6) respecto al dilatón  $\phi$  obtenemos

$$R - (\partial_\mu \phi)^2 + 2\partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\alpha} H^{\mu\nu\alpha} = 0 \quad (3.7)$$

y al variar (3.6) respecto a la métrica se obtiene

$$2(R_\mu^\nu + \partial_\mu \partial^\nu \phi) - \frac{1}{2} H_{\mu\alpha\beta} H^{\nu\alpha\beta} = \frac{2}{M^{D-2}} e^\phi T_\mu^\nu. \quad (3.8)$$

Para resolver estas ecuaciones, (3.7) y (3.8), se utiliza el tensor de esfuerzos de una fuente comóvil en la aproximación de fluido ideal,

$$T_\mu^\nu = \text{diag}(\rho(t), -p(t)\delta_i^j, -q(t)\delta_a^b, ) \quad (3.9)$$

con  $p$  y  $q$  las presiones de los espacios que se dilatan y contraen respectivamente. Por simplicidad se pone  $B_{\mu\nu} = 0$ . Redefiniendo:

$$\bar{\phi} = \phi - \ln \sqrt{|g|} = \phi - d \ln a - n \ln b, \quad (3.10)$$

$$\bar{\rho} = \rho \sqrt{g} = \rho a^d b^n, \quad (3.11)$$

$$\bar{p} = p \sqrt{|g|}, \quad \bar{q} = q \sqrt{|g|}, \quad (3.12)$$

donde  $a$  ( $b$ ) es el factor de escala de las  $d$  ( $n$ ) dimensiones que se expanden (contraen), y al asumir que, por la isotropía del espacio,  $\phi = \phi(t)$ , la ecuación del dilatón (3.7) se reduce a

$$\ddot{\bar{\phi}}^2 - 2\ddot{\bar{\phi}} + dH^2 + nF^2 + 2d\frac{k}{a^2} + 2n\frac{k}{b^2} = 0, \quad (3.13)$$

donde

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad F = \frac{\dot{b}}{b}. \quad (3.14)$$

Por otro lado, tomando la componente temporal de la ecuación (3.8), obtenemos la ecuación de Friedmann

$$\dot{\bar{\phi}}^2 - dH^2 - nF^2 + \frac{6k}{a^2} + \frac{6k}{b^2} = \frac{2}{M^{D-2}} \bar{\rho} e^{\bar{\phi}} \quad (3.15)$$

y de la componente espacial obtenemos

$$2(\dot{H} - H\dot{\bar{\phi}}) - \frac{(d+1)k}{a^2} = \frac{2}{M^{D-2}} \bar{p} e^{\bar{\phi}}, \quad (3.16)$$

$$2(\dot{F} - F\dot{\phi}) - \frac{(n+1)k}{b^2} = \frac{2}{M^{D-2}} \bar{q} e^{\phi}. \quad (3.17)$$

Para un espacio homogéneo, las ecuaciones (3.13), (3.15), (3.16) y (3.17) describen la dinámica de un espacio con  $d$  dimensiones expandiéndose con factor de escala  $a(t)$  y  $n$  contrayéndose con factor de escala  $b(t)$ ,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a^2(t)\delta_{ij}, -b^2(t)\delta_{ab}) \quad (3.18)$$

donde  $\mu, \nu = 0, \dots, D = d + n$  y  $i, j = 1, \dots, d; a, b = 1, \dots, n$ . En la siguiente sección se muestra una simetría bajo la cual, las ecuaciones (3.15), (3.16) y (3.17) son invariantes para el caso de un espacio plano,  $k = 0$ .

### 3.4. Dualidad del factor de escala para un espacio plano

Para una curvatura nula, la ecuación del dilatón, (3.13), y las ecuaciones cosmológicas, (3.15), (3.16) y (3.17) presentan una simetría, llamada *dualidad del factor de escala*. En la sección anterior se consideró un espacio con  $d$  dimensiones expandiéndose con factor de escala  $a$  y  $n$  dimensiones contrayéndose con factor de escala  $b$ . Ahora, supongamos que cada dimensión cartesiana tiene un factor de escala distinto (máxima anisotropía), entonces dado un conjunto de soluciones  $\{a_i(t), b_i(t), \phi(t), i = 1, \dots, D-1\}$ , la configuración obtenida mediante la transformación

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -t \\ \phi &\rightarrow \phi - \sum \ln a_i - \sum \ln b_i \\ a_i(t) &\rightarrow \tilde{a}_i(-t) = a_i^{-1}(-t) \\ b_i(t) &\rightarrow \tilde{b}_i(-t) = b_i^{-1}(-t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

es también solución del sistema.

Con la dualidad del factor de escala a partir del horizonte de eventos ( $t > 0$ ) se puede averiguar el horizonte de partículas ( $t < 0$ ). Por otro lado, como

$$G_{\text{eff}} \propto e^{\phi} \quad (3.20)$$

con esta simetría podemos pasar de un régimen con acoplamiento gravitacional débil (cuando  $\phi \rightarrow -\infty$ ,  $G \rightarrow 0$ )<sup>10</sup> a uno con acoplamiento fuerte [60].

<sup>10</sup> Por comodidad de ahora en adelante  $G_{\text{eff}} \equiv G$

Para curvatura no nula existe también una simetría de dualidad, sin embargo no tiene simetría esférica por lo que mapea un universo con métrica FRW en uno con métrica diferente [61].

A continuación se muestran las soluciones obtenidas para las ecuaciones (3.13), (3.15), (3.16) y (3.17), para diferentes casos. La sección 3.5 presenta la solución, obtenida por Veneziano [51], para un espacio plano dominado por materia cuerdística, así como el resultado obtenido de mapear un caso particular de estas solución bajo la simetría de la dualidad del factor de escala. En la sección 3.6 mostramos nuestras soluciones para un espacio curvo dominado materia cuerdística [58]. Por último, las secciones 3.7 y 3.8 exponen las soluciones obtenidas por Weinberg y Turner [57], para un espacio plano y curvo, respectivamente, dominado por radiación.

### 3.5. Soluciones para espacios planos con materia cuerdística<sup>3</sup>

Sea  $a(t)$  el factor de escala  $d$ -dimensional con expansión acelerada,  $b(t)$  el factor de escala  $n$ -dimensional con contracción acelerada, con

$$p = \gamma_1 \rho, \quad q = \gamma_2 \rho, \quad b = a^{-\epsilon}, \quad (3.21)$$

con  $\gamma_1, \gamma_2, \epsilon$  constantes y  $\epsilon > 0$ . De la ecuación de estado (3.4), se sigue que

$$d\gamma_1 - n\gamma_2 = -1. \quad (3.22)$$

Para resolver las ecuaciones de movimiento (3.13), (3.15), (3.16) y (3.17), se tienen los siguientes casos:

a) cuando  $|q| \ll |p|$  ó  $|q| \gg |p|$  tenemos  $\epsilon < 1$  y  $\epsilon > 1$  respectivamente. La ecuación del dilatón (3.13) sólo se satisface si  $\rho = p = q = 0$  lo cual es inconsistente. En cualquier caso, si  $\rho = 0$ , entonces

$$\bar{\phi} \sim -\ln t. \quad (3.23)$$

b) si  $|q| \sim |p|$  de la ecuación (3.21) se sigue que  $b = a^{-1}$ . Entonces de las ecuaciones (3.16) y (3.17) tenemos que  $p = -q$  con lo que las constantes anteriores se reducen a:

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = -\frac{1}{d+n}. \quad (3.24)$$

Por lo tanto, los factores de escala, el dilatón y la densidad de energía están dados por:

$$a(t) = b^{-1}(t) = \left(-\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{-2}{(d+n+1)}}, \quad (3.25)$$

$$\phi = \phi_0 + 2d \ln a, \quad (3.26)$$

$$\rho = \rho_0 a^{n+1-d}, \quad (3.27)$$

donde  $t_0, \rho_0, \phi_0$  son constantes de integración. Las constantes  $\rho_0$  y  $\phi_0$  están relacionadas por:

$$\rho_0 e^{\phi_0} = 4 \frac{(d+n)(d+n-1)}{(d+n+1)^2}. \quad (3.28)$$

Esta solución describe una evolución acelerada,  $H > 0$ ,  $\ddot{a}/a > 0$ , con curvatura creciente,  $\dot{H} > 0$ , y con ecuación de estado

$$p = -q = -\frac{\rho}{d+n}. \quad (3.29)$$

El comportamiento de la densidad de energía se sigue de la ecuación (3.27),

$$\rho(t) = \rho_0 \left( -\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2(d-n-1)}{(d+n+1)}} \quad (3.30)$$

y como la constante gravitacional es  $G \propto e^\phi$ , tenemos que para una época antes del big bang la constante es dependiente del tiempo

$$G \propto a^{d+n+1} \propto (-t)^{-2}. \quad (3.31)$$

A continuación veremos un caso particular de esta solución así como el resultado de mapearla bajo la simetría de dualidad.

Sólo como un hecho interesante consideremos el límite de la cosmología estándar del caso anterior, que se obtiene poniendo 3 dimensiones expandiéndose y 0 contrayéndose  $d = 3, n = 0$ . Las ecuaciones (3.25), (3.26) y (3.27) para tiempos anteriores al big bang,

$$t < 0, \quad (3.32)$$

se reducen a las siguientes

$$a = \left( \frac{-t}{t_0} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.33)$$

$$\phi = \phi_0 - 3 \ln \left( \frac{-t}{t_0} \right), \quad (3.34)$$

$$\rho = -3p = \rho_0 \left( \frac{-t}{t_0} \right). \quad (3.35)$$

Al aplicar las transformaciones duales obtenemos para tiempos posteriores al big bang,

$$t > 0, \quad (3.36)$$

se tiene:

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.37)$$

$$\phi = \phi_0, \quad (3.38)$$

$$\rho = 3p = \rho_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}. \quad (3.39)$$

Notemos que estas soluciones duales corresponden a la descripción del universo en el modelo cosmológico estándar cuando domina la radiación, es decir, en el universo temprano antes de que se desacoplaran la materia y la radiación.

Podemos concluir que la ecuación de estado  $\rho = -3p$ , correspondiente a la ecuación de estado de materia de cuerdas para la época anterior al big bang, es dual a la ecuación de estado de radiación,  $\rho = 3p$ , para la época posterior al big bang.

### 3.6. Soluciones para espacios curvos con materia cuerdística

En el caso en que el espacio es curvo,  $k \neq 0$ , tomando 3 dimensiones expandiéndose y ninguna contrayéndose las ecuaciones (3.13), (3.15) y (3.16) se reducen a

$$\dot{\phi}^2 - 2\ddot{\phi} - 6\dot{\phi}H + 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6H^2 + 6\frac{k}{a^2} = 0, \quad (3.40)$$

$$6H^2 - 6\dot{\phi}H + \dot{\phi}^2 = \frac{2}{M^2}e^{\phi}\rho - \frac{6k}{a^2}, \quad (3.41)$$

$$3H^2 + \dot{H} - H\dot{\phi} - \frac{2k}{a^2} = \frac{1}{M^2}e^{\phi}p. \quad (3.42)$$

Si redefinimos el dilatón de la siguiente forma:

$$\bar{\phi} = \phi - 3 \ln a, \quad (3.43)$$

las ecuaciones (3.40), (3.41) y (3.42) se reescriben como:

$$\dot{\bar{\phi}}^2 - 2\ddot{\bar{\phi}} + 3H^2 + 6\frac{k}{a^2} = 0, \quad (3.44)$$

$$\dot{\bar{\phi}}^2 - 3H^2 + 6\frac{k}{a^2} = \frac{2}{M^2}\bar{\rho}e^{\bar{\phi}}, \quad (3.45)$$

$$2(\dot{H} - H\dot{\bar{\phi}}) - 4\frac{k}{a^2} = \frac{2}{M^2}\bar{\rho}e^{\bar{\phi}} \quad (3.46)$$

por lo que utilizando la ecuación de estado para la materia de las cuerdas,

$$\rho = -3p, \quad (3.47)$$

para resolverlas, estas tres ecuaciones se reducen a dos:

$$\dot{\bar{\phi}}^2 + 3(\dot{H} - H\dot{\bar{\phi}}) - \ddot{\bar{\phi}} = 0, \quad (3.48)$$

$$-\ddot{\bar{\phi}} - 3(\dot{H} - H\dot{\bar{\phi}}) + 3H^2 + 6\frac{k}{a^2} = 0. \quad (3.49)$$

Como solución proponemos el ansatz

$$\begin{aligned} a &= -At, \\ \bar{\phi} &= B + C \ln(-t), \end{aligned} \quad (3.50)$$

por lo que al sustituirlo en la ecuación (3.48) encontramos que

$$C = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}. \quad (3.51)$$

Por otro lado, de la ecuación (3.49) encontramos que si  $k = 1$  entonces la única forma de que se satisfaga la ecuación es:

$$A^2 = \begin{cases} -1/3 & \text{para } C = 3 \\ -3 & \text{para } C = -1 \end{cases}, \quad (3.52)$$

lo que físicamente no tiene sentido, por lo que el ansatz (3.50) no sirve. Esto es razonable porque con  $k = 1$  esperamos un comportamiento cíclico, para el que (3.50) es totalmente inapropiado.

Sin embargo para  $k = -1$  se obtiene

$$A = \begin{cases} 1/\sqrt{3} & \text{para } C = 3 \\ \sqrt{3} & \text{para } C = -1 \end{cases}, \quad (3.53)$$

con lo que las soluciones, para  $k = -1$ , son:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-t), \\ \bar{\phi} &= \bar{\phi}_0 + 3 \ln(-t), \\ \phi &= \phi_0 + 6 \ln(-t), \end{aligned} \quad (3.54)$$

o bien

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{3}(-t), \\ \bar{\phi} &= \bar{\phi}_0 - \ln(-t), \\ \phi &= \phi_0 + 2\ln(-t). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Las soluciones encontradas en las dos últimas secciones corresponden a un espacio con materia cuerdística, sin embargo, en las siguientes dos secciones veremos las soluciones para un espacio con radiación.

### 3.7. Soluciones para espacios planos con radiación

En los artículos originales, Veneziano y Gasperini [51], estudiaron el caso  $k = 0$ , considerando materia cuerdística  $\rho = -3p$ , motivados, como se mencionó en la sección 3.5, por la dualidad en la ecuación de estado. Posteriormente, Turner y Weinberg [57], obtuvieron soluciones de pre big bang para  $k = 0$  y  $k \neq 0$  considerando que esa época estaba dominada por radiación, cuya ecuación de estado es

$$\rho = 3p. \quad (3.56)$$

Al hacer uso de esta ecuación de estado se tiene que la ecuación del dilatón (3.13) se simplifica, obteniendo<sup>11</sup>:

$$\frac{d}{dt}(-e^{-\phi} \dot{\phi} a^3) = 0, \quad (3.57)$$

con lo que al resolver las ecuaciones (3.15) y (3.16) para un espacio plano, se tiene obtiene como solución:

$$a(t) \sim A(t_{sing} - t)^{-1/\sqrt{3}}, \quad (3.58)$$

$$\phi(t) \sim -(1 + \sqrt{3}) \ln \left\{ \frac{BA^{-3}}{1 + \sqrt{3}} (t_{sing} - t) \right\}, \quad (3.59)$$

donde

$$B = e^{-\phi} \dot{\phi} a^3 \quad (3.60)$$

y  $A$  y  $t_{sing}$  son constantes arbitrarias.

<sup>11</sup> Para la obtención detallada de las soluciones, tanto para  $k = 0$  como para  $k = \pm 1$  consultar el apéndice B.

3.8. Soluciones para espacios curvos con radiación

En el caso de curvatura espacial diferente de cero, se introduce el siguiente cambio de variable para obtener las ecuaciones de movimiento

$$\psi = \frac{\sqrt{12}}{B} a^2 e^{-\phi}, \quad (3.61)$$

con lo que se obtiene:

$$\dot{a} = \frac{1}{\psi} \left[ \sqrt{3} \pm \sqrt{1 + 2b\psi - k\psi^2} \right], \quad (3.62)$$

$$\dot{\psi} = \pm \frac{2}{a} \sqrt{1 + 2b\psi - k\psi^2}, \quad (3.63)$$

donde  $b \equiv \frac{8\pi\sqrt{3}}{3B}$ . Al utilizar la definición del tiempo conforme:

$$\dot{v} = \frac{1}{a}, \quad (3.64)$$

se obtiene el factor de escala y el dilatón en términos del mismo:

$$a(v) = 3^{1/4} \sqrt{B} Q^{-1} [C(v) - bS(v)]^{(1+\sqrt{3})/2} [-S(v)]^{(1-\sqrt{3})/2}, \quad (3.65)$$

$$\phi(v) = -\sqrt{3} \ln Q^2 \left[ \frac{-S(v)}{C(v) - bS(v)} \right], \quad (3.66)$$

con  $Q$  una constante, con  $C(v)$  y  $S(v)$  correspondiendo a  $\cosh v$  y  $\sinh v$  para  $k = -1$  respectivamente y correspondiendo a  $\cos v$  y  $\sin v$  para  $k = 1$  respectivamente.

3.9. Temperatura

A lo largo de este capítulo se han encontrado ecuaciones cosmológicas para tiempos anteriores al big bang olvidándonos hasta ahora de un parámetro importante para la descripción de la evolución del universo, la temperatura. ¿Qué sucede con la temperatura en la época anterior al big bang? Tenemos que la energía es

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \sim a^{-1}, \quad (3.67)$$

por otro lado,

$$E = kT, \quad (3.68)$$

con lo que la temperatura está relacionada con el factor de escala de la siguiente forma:

$$T \sim a^{-1}. \quad (3.69)$$

Al generalizar a  $d$  dimensiones y en términos de la ecuación de estado  $p = \gamma\rho$  se sigue [51]

$$a(T) \sim T^{-\frac{1}{d\gamma}} \quad (3.70)$$

Por otro lado la densidad de energía es

$$\rho \sim \frac{E}{V} \sim a^{-(d+1)} \quad (3.71)$$

donde  $V$  es el volumen, por lo que generalizando la expresión para la densidad de energía a una en términos del factor de escala se tiene:

$$\rho(a) \sim a^{-d(1+\gamma)}. \quad (3.72)$$

En la época dominada por la radiación, con ecuación de estado  $\gamma = \frac{1}{d}$ , se tiene:

$$\rho \propto \frac{1}{a^{d+1}} \propto T^{d+1}, \quad T \propto \frac{1}{a}, \quad t > 0, \quad (3.73)$$

y al aplicar la transformación dual, pasamos a una ecuación de estado  $\gamma = -\frac{1}{d}$ , con lo que

$$\rho \propto \frac{1}{a^{d-1}} \propto \frac{1}{T^{d-1}}, \quad T \propto a, \quad t < 0, \quad (3.74)$$

Para una métrica auto-dual (donde  $a^{-1}(t) = a(-t)$ ) la temperatura promedio del universo se invierte bajo dualidad. Durante la expansión con radiación,  $aT$  es constante y para obtener una entropía muy alta a partir de casi cualquier condición inicial debe de haber habido una época de recalentamiento no adiabático. En el régimen dual del pre-big bang, la temperatura crece con el factor de escala precisamente debido a la evolución adiabática y a que  $aT^{-1}$  es constante. Por lo tanto es posible que el universo salga del big bang suficientemente caliente y con una gran entropía.

El valor tan grande de la entropía total sería consecuencia de una conversión no adiabática del gas caliente de cuerdas en radiación caliente, ocurriendo ésto durante la transición al escenario estándar  $t \sim 0$ , el big bang.

### 3.10. Ecuaciones de movimiento en la cosmología de cuerdas con dualidad $O(d; d)$

Todo el análisis realizado en este capítulo es válido para curvaturas y acoplamientos bajos. Sin embargo conforme el universo va evolucionando hacia el big bang, la curvatura y el acoplamiento van creciendo. Entonces para obtener una mejor descripción de la evolución de nuestro universo se deberían de obtener las ecuaciones de movimiento a partir

de una acción válida para altas curvaturas o energías, considerando todas las correcciones cuerdísticas, pero desafortunadamente todavía no se cuenta con ella. En las siguientes secciones se muestra un análisis más realista que el realizado anteriormente, para obtener la dinámica del universo para una época anterior al big bang, incluyendo las contribuciones del potencial del dilatón y la simetría  $O(d,d)$  en las ecuaciones de movimiento.

La dualidad del factor de escala se puede generalizar a una simetría mayor: las ecuaciones cosmológicas obtenidas en la sección 3.3 presentan una dualidad T conocida como dualidad del factor de escala. Sin embargo, como vimos al final del segundo capítulo, existe una dualidad T más general, la covarianza  $O(d,d)$ . Las ecuaciones del dilatón y de movimiento que satisfacen esta covarianza son

$$\dot{\bar{\phi}}^2 - 2\ddot{\bar{\phi}} - \frac{1}{8}Tr(\dot{M}\eta)^2 + \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} - V = 0, \quad (3.75)$$

$$\bar{\phi}^2 + \frac{1}{8}Tr(\dot{M}\eta)^2 - V = \bar{\rho}e^{\bar{\phi}}, \quad (3.76)$$

$$(e^{-\bar{\phi}}\dot{M}\eta\dot{M}) = \bar{T}, \quad (3.77)$$

donde la matriz M

$$M = \begin{pmatrix} G^{-1} & -G^{-1}B \\ BG^{-1} & G - BG^{-1}B \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

está compuesta por la métrica ( $G = g_{ij}$ ) y por el tensor antisimétrico ( $B = B_{ij} = -B_{ji}$ ),  $\bar{T}$  es una matriz  $2d \times 2d$  representando la parte espacial del tensor de esfuerzos de la cuerda, y  $\eta$  es la métrica  $O(d,d)$ . Aquí  $\bar{T}$  y  $\bar{\rho}$  son expresados en unidades de  $\frac{2}{M^2}$  con lo que tienen dimensiones de  $L^{-2}$ .

Al utilizar la ecuación de estado  $\bar{T} = \bar{T}(\bar{\rho}, M)$ , se pueden resolver (3.75), (3.76) y (3.77) siempre que:

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} = 2V, \quad (3.79)$$

obteniéndose

$$\bar{\phi}' = -\frac{2}{D}(\xi + \xi_0), \quad (3.80)$$

$$M\eta M' = \frac{4\Gamma}{D}, \quad (3.81)$$

$$(M\eta M'\eta)^2 = -(M'\eta)^2, \quad (3.82)$$

$$(\xi + \xi_0)^2 - \frac{1}{2}Tr(\Gamma\eta)^2 = D + \frac{VD^2}{4} \left( \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \right)^2, \quad (3.83)$$

donde

$$d\xi = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} dt, \quad (3.84)$$

$$\Gamma = \int \frac{\bar{T}}{\bar{\rho}} d\xi, \quad (3.85)$$

$$D(\xi) = 4\beta + (\xi + \xi_0)^2 - \frac{1}{2} Tr(\Gamma\eta)^2, \quad (3.86)$$

con  $\bar{\rho}$  definida por la ecuación (3.11),  $\rho_0$  y  $\beta$  constantes y las primas denotando diferenciación con respecto a  $\xi$ . A continuación se resuelven las ecuaciones (3.80), (3.81), (3.82) y (3.83).

### 3.11. Solución de las ecuaciones con covarianza $O(d,d)$

Para que se satisfagan la ecuación del potencial (3.79) y la ecuación (3.86) tenemos dos posibilidades: a) si  $V = 0$  y  $\beta = 0$ , las ecuaciones para cualquier  $\Gamma(\xi)$  pueden ser integradas, dando lugar a una singularidad, b) para un potencial de la siguiente forma:

$$V(\bar{\phi}) = -V_0 e^{2\bar{\phi}} < 0, \quad (3.87)$$

con  $\beta = V_0$ , se obtienen soluciones suaves con curvatura que crece asintóticamente ( $t < 0$ ) y luego decrece asintóticamente ( $t > 0$ ) sin singularidades.

Por ejemplo si tenemos un espacio isotrópico de  $d$  dimensiones con factor de escala  $a$ , sin torsión ( $B = 0$ ) y un tensor de esfuerzos diagonal, tal que:

$$M\eta M' = 2\frac{a'}{a} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{T} = \bar{p} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.88)$$

donde  $I$  es una matriz unitaria  $d$ -dimensional, entonces

$$D = 4V_0 + (\xi + \xi_0)^2 - d \left( \int \gamma d\xi \right)^2. \quad (3.89)$$

La ecuación (3.89) es fácil de resolver con la ecuación de estado para un fluido perfecto [51]

$$\bar{p} = \gamma \bar{\rho} \quad (3.90)$$

con  $\gamma = \text{cte}$ ,  $\bar{\rho}$  y  $\bar{p}$  definidas por las ecuaciones (3.11) y (3.12) y

$$\gamma = \frac{1}{d}, \quad \int \gamma d\xi = \frac{1}{d}(\xi + \xi_1). \quad (3.91)$$

Resolviendo las ecuaciones (3.80), (3.81), (3.82) y (3.83) en el caso en que  $B_{\mu\nu} = 0$  se obtiene [51]:

$$\bar{\phi} = \phi_0 - \frac{d}{d-1} \ln \left( \alpha \frac{\xi^2}{\xi_1^2} + b \frac{\xi}{\xi_1} + c \right) - \frac{4(\xi_1 - \xi_0)}{(d-1)\Delta\xi_1} \arctan \left( \frac{2\alpha\xi + b\xi_1}{\Delta\xi_1} \right), \quad (3.92)$$

$$a = a_0 \left( \alpha \frac{\xi^2}{\xi_1^2} + b \frac{\xi}{\xi_1} + c \right)^{\frac{1}{d-1}} \exp \left\{ \frac{4(\xi_1 - \xi_0)}{(d-1)\Delta\xi_1} \arctan \left( \frac{2\alpha\xi + b\xi_1}{\Delta\xi_1} \right) \right\}, \quad (3.93)$$

$$e^\phi = a_0^d e^{\phi_0} \exp \left\{ \frac{4(\xi_1 - \xi_0)}{(d-1)\Delta\xi_1} \arctan \left( \frac{2\alpha\xi + b\xi_1}{\Delta\xi_1} \right) \right\}, \quad (3.94)$$

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = \frac{1}{4} \xi_1^2 \rho_0 e^{\phi_0} \left( \frac{a_0}{a} \right), \quad (3.95)$$

siendo  $\alpha$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_0$  y  $a_0$  parámetros constantes. Estas ecuaciones interpolan sin singularidades una fase inicial de contracción acelerada,  $a \sim (-t)^{\frac{2}{(d+1)}}$ ,  $\phi = \phi_1 = \text{cte}$ , con curvatura creciendo y una fase final de expansión decelerada,  $a \sim t^{\frac{2}{(d+1)}}$ ,  $\phi = \phi_2 = \text{cte}$ , con curvatura disminuyendo. Tanto el campo del dilatón como la curvatura son regulares para todo tiempo  $t$ .

Por otro lado, también se tiene la solución dual  $\bar{\phi}$ ,  $\bar{a}$ , con ecuación de estado:

$$\bar{p} = -\frac{\bar{\rho}}{d}, \quad \int \gamma d\bar{\xi} = -\frac{1}{d}(\bar{\xi} + \xi_1), \quad (3.96)$$

donde  $\bar{\xi}$  es dual al tiempo coordinado. En esta solución, empezamos con una fase inicial acelerada de expansión inflacionaria,  $a \sim (-t)^{\frac{-2}{(d+1)}}$  con un dilatón creciendo logaritmicamente, hacia una fase final de contracción desacelerada,  $a \sim t^{\frac{-2}{(d+1)}}$ , con dilatón y curvatura decreciendo. Nuevamente evadimos la singularidad, pero esta solución no nos interesa porque el universo observado actualmente no se está contrayendo.

### 3.12. Ecuación de estado dependiente del tiempo

La solución anterior conecta suavemente la fase de pre-big bang con la de post-big bang cambiando el signo de  $H$ , con una ecuación de estado fija. Otra forma ingenua de conectar el pre-big bang con el post-big bang es suponiendo que existe una simetría de dualidad en la ecuación de estado de la materia y que en la época cercana al big bang, la ecuación de estado varía con el tiempo. Se toma la ecuación de estado para el pre-big bang, correspondiente a materia cuerdística:

$$\rho = -dp \quad (3.97)$$

y su dual, correspondiente a la ecuación de estado de la radiación, para el post-big bang:

$$\rho = dp. \tag{3.98}$$

Además se supone que la transición está dada por:

$$\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = \gamma(\xi) = \frac{\xi}{d\sqrt{\xi^2 + \xi_1^2}}, \quad \int \gamma d\xi = \frac{1}{d} \sqrt{\xi^2 + \xi_1^2}, \tag{3.99}$$

con  $\xi_1$  un parámetro. Las soluciones correspondientes son:

$$a = a_0 \left( \frac{\xi}{\xi_1} + \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{\xi_1^2}} \right)^{\frac{2}{d-1}}, \tag{3.100}$$

$$e^\phi = a_0^d e^{\phi_0} \left( 1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \xi_1^2}} \right)^{\frac{2d}{d-1}}, \tag{3.101}$$

$$\frac{\bar{p}}{\rho_0} = \frac{d-1}{4d} \xi_1^2 \rho_0 e^{\phi_0} \left( 1 + \frac{\xi^2}{\xi_1^2} \right)^{-\frac{1}{d-1}}. \tag{3.102}$$

Esta solución describe un modelo en el que el universo siempre se expande ( $H > 0 \quad \forall t$ ). Empieza de un espacio plano ( $H \sim 0$ ) acoplado débilmente ( $e^\phi \sim 0$ ), llega al big bang, y luego nos da nuestro universo temprano, como lo muestra la siguiente figura.

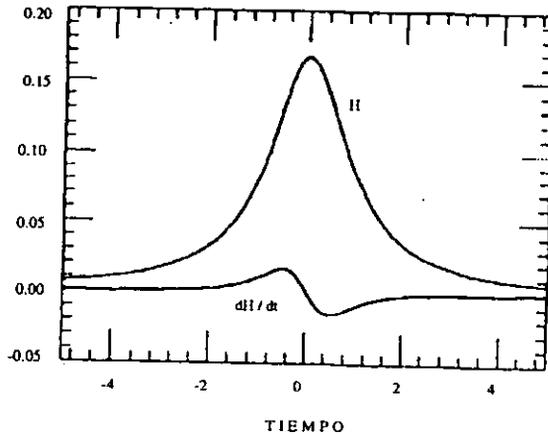


Figura 3.2. Evolución de la curvatura antes, durante y después del big bang.

COSMOLOGIA DE CUERDAS ANTES DEL GRAN ESTALLIDO

El factor de escala evoluciona a través de una fase inflacionaria [ $a \sim (-t)^{\frac{-2}{(d+1)}}$ ] dominada por materia cuerdística ( $p = -\frac{\rho}{2}$ ). Pasa por el big bang, y termina con una deceleración [ $a \sim t^{\frac{2}{(d+1)}}$ ] dominada por radiación ( $p = \frac{\rho}{2}$ ), con un acoplamiento fijo ( $e^\phi = cte$ ), figura (3.3).

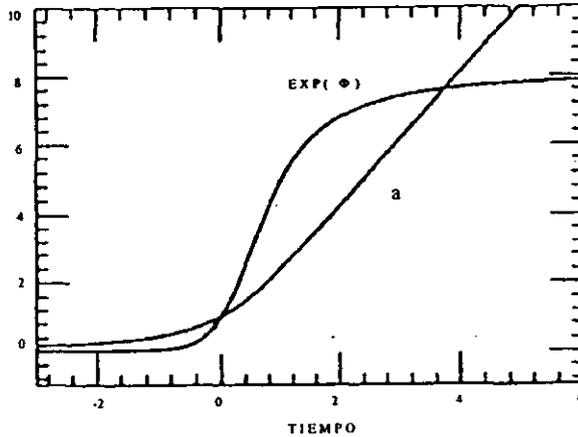


Figura 3.3. Evolución del factor de escala y de la constante de Newton antes, durante y después del big bang.

Al utilizar la ecuación de estado dual,  $\gamma(\xi) = -\frac{\xi}{d\sqrt{\xi^2 + \xi_1^2}}$ , obtenemos una solución análoga para todo  $t$  donde  $H$  siempre es negativo, es decir, el universo siempre se está contrayendo isotrópicamente.

3.13. Solución general para un espacio de  $D$  dimensiones

En la sección anterior, el desarrollo se hizo considerando únicamente  $d$  dimensiones expandiéndose. Generalizando ésto, se puede considerar un espacio con  $d$  dimensiones expandiéndose con factor de escala  $a$ , mientras que  $n$  se contraen con factor de escala  $b = a^{-1}$ , con ecuación de estado  $p = -q = -\frac{\rho}{(d+n)}$ . Si llamamos

$$\gamma = \frac{p}{\rho} \tag{3.103}$$

se tiene como solución las siguientes ecuaciones:

$$a = b^{-1} = a_0 \left( \frac{\xi}{\xi_1} + \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{\xi_1^2}} \right)^{\frac{2}{d+n-1}}, \quad (3.104)$$

$$e^\phi = a_0^{d-n} e^{\phi_0} \left( \frac{\xi}{\xi_1} + \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{\xi_1^2}} \right)^{\frac{2(d-n)}{d+n+1}} \left( 1 + \frac{\xi^2}{\xi_1^2} \right)^{-\frac{d+n}{d+n-1}}, \quad (3.105)$$

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = \frac{d+n-1}{4(d+n)} \xi_1^2 \rho_0 e^{\phi_0} \left( 1 + \frac{\xi^2}{\xi_1^2} \right)^{-\frac{1}{d+n-1}}. \quad (3.106)$$

Esta solución describe un universo en un tiempo anterior al big bang con reducción dimensional, es decir mientras unas dimensiones crecen otras disminuyen, tal que,

$$a(t) \sim (-t)^{\frac{-2}{(d+n+1)}} = \frac{1}{b}, \quad (3.107)$$

evolucionando de forma que alcanza una curvatura finita máxima. Después, el universo cambia al régimen desacelerado dual donde las dimensiones internas no están congeladas, sino que continúan contrayéndose como

$$b(t) = \frac{1}{a} \sim t^{\frac{-2}{(d+n+1)}} \quad (3.108)$$

para  $t \rightarrow +\infty$ . En este caso, el acoplamiento del dilatón no se congela, sino que durante la desaceleración continúa disminuyendo.

### 3.14. Marco de Einstein

A lo largo de todo el capítulo el cálculo de las soluciones se realizó en el marco de las cuerdas porque es el marco natural para una teoría cuerdística, las cuerdas describen superficies geodésicas respecto a esta métrica. Sin embargo, lo finalizaremos analizando el problema en el marco de referencia de Einstein, donde se desarrolla la cosmología estándar. En el marco de referencia de Einstein, la acción se define como:

$$S_E = \frac{1}{16\pi G} \int d^{d+1}x \sqrt{|\hat{g}|} \left[ -\hat{R}(\hat{g}) + \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{\phi} \partial_\nu \bar{\phi} \right] + \dots \quad (3.109)$$

Como podemos observar, la diferencia entre los marcos radica en la constante de acoplamiento. Como lo muestra la acción (3.6) en el marco de las cuerdas el acoplamiento,  $e^{-\phi}$ , se encuentra separado de las coordenadas, mientras que en el marco de Einstein el

acoplamiento está intrínseco en las coordenadas. Es decir, para pasar de un marco a otro sólo se necesita hacer una redefinición de coordenadas.

Para pasar del marco de cuerdas al de Einstein utilizamos la siguiente transformación [62]:

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\mu\nu} &= e^{-2\phi/(d-1)} g_{\mu\nu}, \\ \bar{\phi} &= \sqrt{\frac{2}{d-1}} \phi, \\ \bar{a} &= e^{-\phi/(d-1)} a, \\ d\bar{t} &= e^{-\phi/(d-1)} dt,\end{aligned}\tag{3.110}$$

En algunos casos la transformación es muy sencilla pero en otros se complica enormemente por lo que daremos los casos más sencillos e ilustrativos a continuación.

Al utilizar estas transformaciones, obtenemos que la solución (3.25), correspondiente a un espacio plano con  $d$  dimensiones expandiéndose,  $n$  contrayéndose y dominado por materia cuerdística, se convierte en

$$\bar{a} \sim (-\bar{t})^{\frac{2(d-n+1)}{4d+(d+n+1)(d+n-1)}},\tag{3.111}$$

y la solución particular correspondiente a 3 dimensiones expandiéndose y ninguna contrayéndose, ecuación (3.33), se reduce a

$$\bar{a} \sim (-\bar{t})^{2/5}.\tag{3.112}$$

También tenemos las soluciones para curvatura distinta de cero y con materia cuerdística. Como habíamos discutido anteriormente, la solución para la curvatura positiva es periódica, por lo que no es de nuestro interés, sin embargo para curvatura negativa tenemos que la solución (3.54) en el marco de Einstein es

$$\bar{a} \sim (-\bar{t})\tag{3.113}$$

mientras que la solución (3.55) en el marco de Einstein es constante.

Por otro lado, la solución para espacio plano pero con ecuación de estado de radiación, (3.58), se convierte en

$$\bar{a} \sim (-\bar{t})^{1/3}.\tag{3.114}$$

A pesar, de que la forma de las soluciones en cada marco es diferente, las soluciones son equivalentes y describen la misma física. El uso de un marco de referencia ú otro, radica en la sencillez que toman las soluciones en cada marco. Por lo tanto, la solución de los problemas físicos, como el del horizonte, es independiente del marco de referencia.

## 4. Condiciones iniciales para resolver el problema del horizonte

### 4.1. Introducción

Después de realizar un modelo para resolver algún problema físico, lo siguiente que se hace es ver si este modelo reproduce lo que observamos de nuestro problema. Como se mencionó en la sección 1.3, uno de los principales problemas cosmológicos que no resuelve la cosmología estándar es el del horizonte. Para resolverlo surge la inflación, en sus distintas variaciones. El objetivo de este capítulo es estudiar si este problema es resuelto en la teoría del pre-big bang.

Veneziano y sus colaboradores encontraron que el problema del horizonte para tiempos anteriores al big bang, es resuelto con un universo inicialmente plano (donde el tiempo inicial es  $t_i \rightarrow -\infty$ ) cuya expansión es dominada por materia cuerdística [51]. Posteriormente, Weinberg y Turner obtuvieron que es necesario fine tuning en el tiempo inicial para que el problema sea resuelto en el pre-big bang si la expansión del universo es dominada por radiación, ya sea para un espacio plano o curvo [57]. Motivados por estos dos trabajos, nosotros estudiamos la solución del problema suponiendo que el tiempo inicial es  $t_i \neq -\infty$  para un espacio plano y curvo y que su expansión está dominada por materia cuerdística. Encontramos que para un espacio plano es posible resolver el problema pero es necesario fine tuning en el tiempo inicial, sin embargo para un espacio curvo no se resuelve este problema.

A lo largo del capítulo se muestra el análisis para la solución del problema del horizonte. Se comienza presentando el problema matemáticamente y viendo que la cosmología estándar es incapaz de resolverlo. Posteriormente se analiza si las soluciones obtenidas en las secciones 3.5 a 3.8 resuelven el problema. Por último se discuten los resultados obtenidos.

### 4.2. El problema del horizonte

Para una métrica tal que

$$a \propto t^a, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

tenemos que la distancia al horizonte, (1.15), en el límite  $t_i \rightarrow 0$ , donde  $t_i$  es el tiempo en el que comienza la dinámica de las dimensiones espaciales, es

$$\lim_{t_i \rightarrow 0} d_H(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \frac{t}{(1-\alpha)} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

Por lo tanto vemos que el problema del horizonte no es resuelto para un universo dominado por radiación, cuyo factor de escala es  $a(t) \propto t^{1/2}$  ya que en este caso la distancia al horizonte es  $d_H(t) \sim 2t \propto 10^{18} \text{ cm}$  y el universo observable es  $H_0^{-1} \propto 10^{28} \text{ cm}$ . Por la misma razón tampoco se soluciona para un universo dominado por materia,  $a(t) \propto t^{2/3}$ , ya que  $d_H(t) \propto 3t \sim 10^{18} \text{ cm}^{12}$ . Sin embargo para un universo que se infla exponencialmente,  $a \propto e^{ct}$ , la distancia al horizonte es

$$d_H(t) \propto e^{ct}(1 - e^{-ct}), \quad (4.3)$$

por lo que dependiendo del valor de la constante, la distancia al horizonte puede ser igual o mayor al universo observable pudiendo así resolver el problema [63].

Sin embargo, en la teoría del pre-big bang el problema del horizonte se pretende resolver en principio, en un tiempo anterior al big bang  $t < 0$ . En este caso la métrica que nos interesa es de la forma

$$a \sim (-t)^\beta, \quad t < 0, \quad (4.4)$$

por lo que la distancia al horizonte, asumiendo que el tiempo en el que comienza la evolución del universo es  $t_i \rightarrow -\infty$ , resulta ser

$$\lim_{t_i \rightarrow -\infty} d_H(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } \beta \leq 1 \\ \frac{(-t)}{(1-\beta)} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}, \quad (4.5)$$

con lo que el problema se resuelve siempre y cuando  $\beta \leq 1$ . Sin embargo como veremos en las siguientes secciones, en la época de pre-big bang no sólo debemos tomar en cuenta la evolución del factor de escala sino también la del dilatón y tener cuidado de que la acción efectiva a bajas energías (3.6) de donde surgió todo el desarrollo del tercer capítulo sea válida durante la evolución que describe cada una de las soluciones.

Ahora bien, suponiendo que el tiempo inicial  $t_i \neq -\infty$ , podemos preguntarnos ¿cuánto tiempo antes de la etapa de máxima curvatura (el big bang) es necesario para que se resuelva el problema del horizonte?

<sup>12</sup> En unidades naturales, tenemos que tanto la distancia como el tiempo tienen las mismas unidades.

#### 4 CONDICIONES INICIALES PARA RESOLVER EL PROBLEMA DEL HORIZONTE

Supongamos que la inflación empezó en el tiempo  $t_i$  y terminó en el tiempo  $t_f$ , y que estos tiempos fueron anteriores al tiempo singular  $t_{sing}$ , en la época de pre-big bang. El tiempo  $t_{sing}$  es cercano a 0, y es el tiempo después del cual la curvatura es muy grande ( $\sim M^2$ ) o la temperatura es de orden ( $\sim M$ ). La cantidad de inflación se mide con el factor  $Z$ , que es la razón de la longitud comóvil de Hubble:  $(Ha)^{-1}$ , entre el tiempo en el que acaba la inflación  $t_f$  y el tiempo en el que inicia  $t_i$ :

$$Z = \frac{H(t_f)a(t_f)}{H(t_i)a(t_i)} \quad (4.6)$$

y para que se resuelva el problema del horizonte es necesario que

$$Z > e^{60}, \quad (4.7)$$

dado el tamaño de nuestro universo [64]. En las siguientes 4 secciones se calcula el factor  $Z$  para distintos casos. Las secciones 4.3 y 4.4 muestran nuestro análisis para un espacio plano y un espacio curvo cuya expansión es dominada por materia cuerdística.

#### 4.3. $Z$ para un espacio plano con materia cuerdística

En el caso de curvatura nula,  $k = 0$ , de la solución para el factor de escala (3.25) para  $d$  dimensiones expandiéndose y  $n$  contrayéndose con ecuación de estado  $\rho = -3p$ , el factor  $Z$  en el marco de las cuerdas es

$$Z = \left( \frac{-t_i}{-t_f} \right)^{\frac{d+n+3}{d+n+1}} = \left( e^{-\phi(t_i)} e^{\phi(t_f)} \right)^{\frac{d+n+3}{d+n+1}}, \quad (4.8)$$

mientras que para la solución particular  $d = 3$ ,  $n = 0$  el factor  $Z$  se reduce a

$$Z = \left( \frac{-t_i}{-t_f} \right)^{3/2} = \left( \frac{e^{-\phi(t_i)}}{e^{-\phi(t_f)}} \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

La constante de Newton es

$$\frac{1}{8\pi G} = l_{st}^{-2} e^{-\phi} = M^2 e^{-\phi}, \quad (4.10)$$

de la condición  $Z > e^{60}$  para que se resuelva el problema del horizonte, necesitamos que

$$\left( \frac{-t_i}{-t_f} \right) > e^{40} \quad \Rightarrow \quad e^{-\phi(t_i)} e^{\phi(t_f)} > e^{120} \quad (4.11)$$

Por otro lado, en el escenario pre-big bang, la inflación se da antes del régimen de alta curvatura por lo que la inflación termina cuando el acoplamiento se vuelve fuerte, de donde obtenemos una restricción para el dilatón

$$e^{-\phi(t_f)} \gtrsim 1. \quad (4.12)$$

Sin embargo, las ecuaciones clásicas funcionan cuando la curvatura es menor que la escala de cuerdas con lo que

$$H^{-1}(t_f) \sim (t_{sing} - t_f) \gtrsim l_{st}. \quad (4.13)$$

Al utilizar las restricciones en la cantidad de inflación, (4.9), obtenemos

$$Z = \left( \frac{-t_i}{l_{st}} \right)^{3/2} \quad (4.14)$$

lo que implica que  $t_i < -10^{17} l_{st}$  para poder resolver el problema del horizonte. Para esta solución tenemos que para cualquier tiempo  $t_i < t < t_f$  se cumple que  $e^{\phi(t)} < 1$  [65] [66].

#### 4.4. $Z$ para un espacio curvo con materia cuerdística

Para curvatura negativa los resultados son completamente distintos a los de curvatura nula. De las soluciones obtenidas para  $k = -1$ , ecuaciones (3.54) y (3.55), vemos que  $e^{\phi(t_i)}$  puede crecer mucho, sin embargo estas soluciones son válidas para  $e^{\phi(t_i)} \geq 1$ , lo que nos pone como restricción en los tiempos  $t_i > -10^{-9} l_{st}$  para la solución (3.54), y  $t_i > -10^{-27} l_{st}$  para la solución (3.55), resultando que los tiempos son extremadamente pequeños. Debido a que el intervalo de tiempo en que las soluciones son válidas y a que estas soluciones no son aceleradas, no hay suficiente tiempo para que se resuelva el problema del horizonte. La figura (4.1) muestra el comportamiento del factor de escala y el dilatón para la solución (3.54) y la figura (4.2) ambos comportamientos para la solución (3.55).

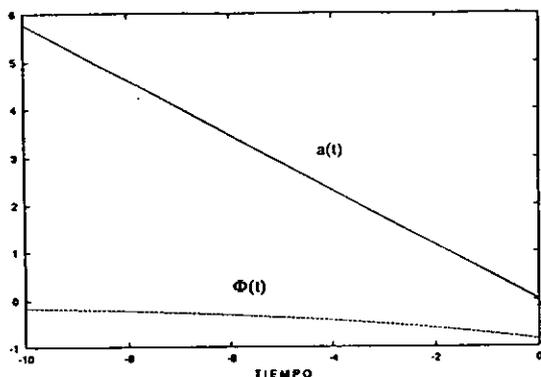


Figura 4.1. Comportamiento del factor de escala y del dilatón para un espacio con  $k = -1$ , con materia cuerdística (el factor de escala es la raya continua y el dilatón la punteada).

Sin embargo, una forma de interpretar esto es que nuestro universo observable no puede venir de un espacio curvo, es decir, se puede suponer que provenimos de un espacio plano con materia cuerdística que evoluciona inflándose hasta llegar a la época conocida como big bang, pasa a través de ella, para posteriormente llegar a la época dominada por la radiación, con lo que se expande desaceleradamente llegando finalmente a la época dominada por la materia de hoy día [58] [67].

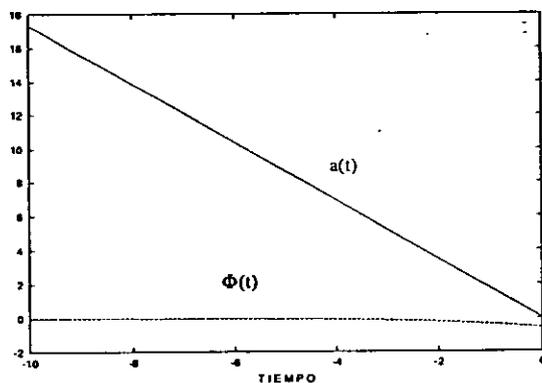


Figura 4.2. Comportamiento del factor de escala y del dilatón para un espacio con  $k = -1$ , con materia cuerdística (el factor de escala es la raya continua y el dilatón la punteada).

En el caso de curvatura positiva no podemos realizar este análisis, ya que como se vió en la sección 3.6, no encontramos soluciones no-periódicas sencillas por lo que un universo descrito por una solución periódica iniciaría de una singularidad anterior a la del big bang y terminaría en una singularidad correspondiente al big bang sin poder así resolver el problema del horizonte en el pre- big bang.

4.5.  $Z$  para un espacio plano con radiación

Ahora veamos el caso en que la evolución del universo está dominada por radiación para un espacio plano. Al calcular el factor  $Z$ , (4.6), con las soluciones para el factor de escala (3.58) y el dilatón (3.59) en el pre-big bang, con radiación,  $\rho = 3p$ , y  $k = 0$ , se obtiene:

$$Z = \left( \frac{e^{-\phi(t_i)}}{e^{-\phi(t_f)}} \right)^{1/\sqrt{3}} = \left( \frac{t_{sing} - t_i}{t_{sing} - t_f} \right)^{(1+\sqrt{3})/\sqrt{3}} > e^{60}. \quad (4.15)$$

Por lo tanto, utilizando las restricciones (4.12) y (4.13), la cantidad de inflación necesaria para resolver el problema del horizonte queda restringida a:

$$Z \lesssim \text{Min} \left\{ (e^{-\phi(t_i)})^{1/\sqrt{3}}, \left( \frac{t_{sing} - t_i}{t_{st}} \right)^{(1+\sqrt{3})/\sqrt{3}} \right\} \quad (4.16)$$

lo que restringe el tiempo en el que comenzó la inflación a  $t_i < 10^{16} t_{st}$  para poder resolver el problema del horizonte lo que impone fine tuning en el tiempo inicial.

4.6.  $Z$  para un espacio curvo con radiación

Recordemos las soluciones obtenidas en la sección 3.8 para un espacio curvo,  $k = \pm 1$ , ecuaciones (3.65) y (3.66). Se puede analizar el comportamiento de estas soluciones dependiendo de si la constante involucrada en la solución  $b$  es mayor o menor que 1.

#### 4 CONDICIONES INICIALES PARA RESOLVER EL PROBLEMA DEL HORIZONTE

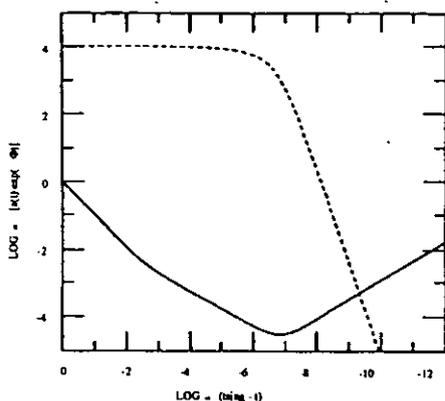


Figura 4.3. Comportamiento del factor de escala y del dilatón para un espacio con  $k = -1$ , dominado por la radiación (el factor de escala es la raya continua y el dilatón la punteada).

a) Caso en que  $b \leq 1$ . Para una curvatura negativa, y tiempos muy negativos, el factor de escala  $a(t)$  disminuye linealmente con el tiempo hasta alcanzar un mínimo para después crecer. Mientras que el dilatón permanece constante y posteriormente disminuye, como lo muestra la figura (4.3).

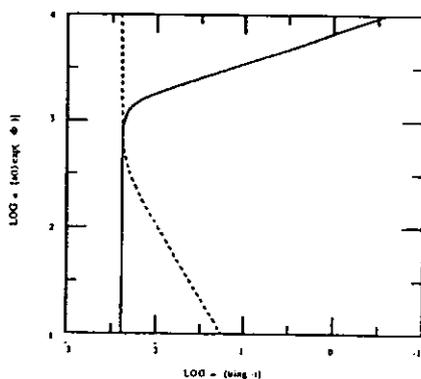


Figura 4.4. Comportamiento del factor de escala y del dilatón para un espacio con  $k = 1$ , dominado por la radiación (el factor de escala es la raya continua y el dilatón la punteada).

Sin embargo, para curvatura positiva el factor de escala se anula, al mismo tiempo que el dilatón diverge, dando lugar a una singularidad, en un tiempo anterior al de la gran singularidad, big bang, como lo muestra la figura (4.4). En otras palabras, tenemos un universo cíclico ya que el universo empieza en una singularidad y termina en otra correspondiente al big bang.

En el límite  $v \ll 1$  la solución (3.65) ya sea para  $k = -1$  ó  $k = 1$ , se aproxima a la solución de espacio plano,  $|t| \sim |\eta|^{\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)}$ . La inflación empieza cuando  $-\text{sen } \eta \sim \cos \eta$ , es decir, cuando  $\eta$  es del orden  $\eta \sim -\pi/4$  con lo que  $l_{st} e^{-\phi(t_i)} \equiv [l_{Pl}(t_i)]^2 \sim Q^2$ . Por lo tanto, de la ecuación (3.13) tenemos

$$a(t_i) \sim a_{\min} \sim \sqrt{B} l_{Pl}(t_i) \quad (4.17)$$

y de la definición de tiempo conforme (3.64), integrando respecto al tiempo se obtiene:

$$t_{\text{sing}} - t_i \sim \frac{1}{2} t_{\text{total}} \sim \sqrt{B} l_{Pl}(t_i). \quad (4.18)$$

Al utilizar el factor de escala (4.17) y sustituirlo en la cota derecha de la expresión para la cantidad de inflación (4.16) se tiene:

$$\begin{aligned} \left( \frac{t_{\text{sing}} - t_i}{l_{st}} \right)^{(1+\sqrt{3})/\sqrt{3}} &= \left( \frac{\sqrt{B} l_{Pl}}{l_{st}} \right)^{(1+\sqrt{3})/\sqrt{3}} = \left( \frac{\sqrt{B} l_{st} e^{\phi(t_i)/2}}{l_{st}} \right)^{(1+\sqrt{3})/\sqrt{3}} \\ &= \left( \frac{B}{e^{-\phi(t_i)}} \right)^{(1+\sqrt{3})/(2\sqrt{3})} \end{aligned} \quad (4.19)$$

con lo que

$$Z \lesssim \text{Min} \left\{ (e^{-\phi(t_i)})^{1/\sqrt{3}}, \left( \frac{B}{e^{-\phi(t_i)}} \right)^{(1+\sqrt{3})/(2\sqrt{3})} \right\} < B^{1/3} \sim \left( \frac{a(t_i)}{l_{Pl}(t_i)} \right)^{2/3} \quad (4.20)$$

b) Caso en que  $b \gg 1$  Para curvatura negativa la solución es muy similar a la de  $b \leq 1$  con el dilatón permaneciendo constante en un principio y el factor de escala disminuyendo como  $a \sim (C - t)^{1/2}$ . Sin embargo para curvatura positiva el factor de escala crece, disminuye y finalmente vuelve a crecer, figura (4.5).

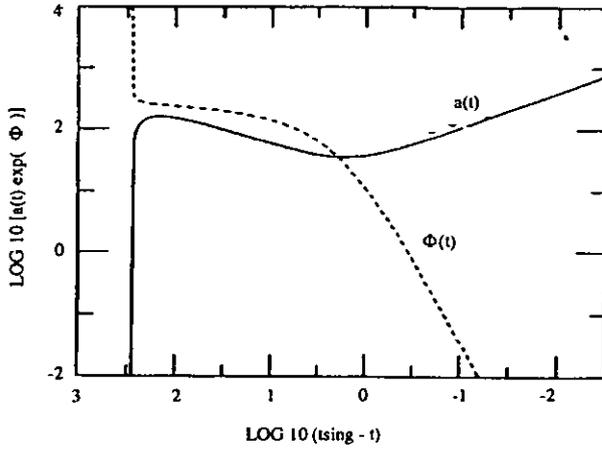


Figura 4.5. Comportamiento del factor de escala y del dilatón para un espacio con  $k = 1$ , dominado por la radiación (el factor de escala es la raya continua y el dilatón la punteada).

En ambos casos,  $b \leq 1$  o  $b \gg 1$ , la inflación empieza cuando el tiempo conforme es del orden  $-\eta \sim 1/b$  donde  $b \equiv \frac{8\pi\sqrt{3}}{3B} \rho_{rad} a^4$  con  $l_{st} e^{-\phi(t_i)} \sim Q^2/b\sqrt{3}$ , con lo que

$$a(t_i) \sim b^{-1/2} \sqrt{B} l_{Pl}(t_i) \quad (4.21)$$

y del tiempo conforme, ecuación (3.64)

$$t_{sing} - t_i \sim b^{-3/2} \sqrt{B} l_{Pl}(t_i) \quad (4.22)$$

por lo que el factor de inflación se convierte en:

$$\begin{aligned} Z &\lesssim \text{Min} \left\{ (e^{-\phi(t_i)})^{1/\sqrt{3}}, \frac{b^{-3/2} \sqrt{B} l_{Pl}}{l_{st}} \right\} = \text{Min} \left\{ (e^{-\phi(t_i)})^{1/\sqrt{3}}, \left( \frac{b^{-3/2} \sqrt{B} e^{\phi/2} l_{st}^{-1}}{l_{st}} \right) \right\} \\ &= \text{Min} \left\{ (e^{-\phi(t_i)})^{1/\sqrt{3}}, \left( \frac{B}{b^3 e^{\phi h_i}} \right)^{(1+\sqrt{3})/2\sqrt{3}} \right\} \\ &\leq B^{1/3} b^{-1} \sim a^{2/3} b^{1/3} l_{Pl}^{-2/3} b^{-1} \sim \left( \frac{a(t_i)}{b l_{Pl}(t_i)} \right)^{2/3} \\ &\sim \left( \frac{t_{sing} - t_i}{l_{Pl}(t_i)} \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Por último discutiremos sobre los resultados obtenidos a lo largo del capítulo.

4.7. Solución del problema del horizonte

Como vimos en la sección 4.3, para un espacio plano con materia cuerdística es necesaria una restricción en el tiempo inicial para resolver el problema del horizonte, sin embargo, para un espacio curvo no encontramos una solución a este problema (sección 4.4). Para un espacio con radiación, el análisis es un poco más complejo como se verá a continuación [64].

Para curvatura cero, la solución es válida no importa qué tanto nos vayamos atrás en el tiempo, por lo que no hay problema con ella.

Para  $k = 1$  el universo surge de una singularidad inicial, se infla durante  $t \sim l_{st}$  y llega a la singularidad del big bang, por lo que no tiene suficiente tiempo para resolver el problema del horizonte.

Para  $k = -1$ , el tamaño de la región correspondiente a la región observable actualmente diverge. Por lo que para no tener que postular una región homogénea infinitamente grande, suponemos que tenemos una región homogénea e isotrópica en un tiempo  $t_0$ . Esta región puede empezarse a inflar un tiempo después de  $t_0$ ,

$$\frac{a_0 |\dot{\phi}_0|}{\phi_0} < \text{Max}(1, b), \tag{4.24}$$

o inmediatamente en  $t_0$ ,

$$\frac{a_0 |\dot{\phi}_0|}{\phi_0} > \text{Max}(1, b). \tag{4.25}$$

Entonces si la inflación empieza después de  $t_0$  tenemos que:

$$\frac{a_0 |\dot{\phi}_0|}{\phi_0} < \text{Max}(1, b). \tag{4.26}$$

De la forma del factor de inflación  $Z$  dada por la ecuación (4.23) se tiene que

$$Z \lesssim \frac{B^{1/3}}{b}, \tag{4.27}$$

y de la (4.16) se sigue que

$$Z \lesssim B^{1/3}, \tag{4.28}$$

con lo que finalmente obtenemos

$$Z \lesssim \frac{(-a_0^3 \dot{\phi}_0)^{1/3}}{\text{Max}(1, b)}. \tag{4.29}$$

#### 4 CONDICIONES INICIALES PARA RESOLVER EL PROBLEMA DEL HORIZONTE

Sin embargo, si la inflación empieza inmediatamente en  $t_0$  se debe tomar en cuenta que entre  $t_i$  y  $t_0$  no hubo inflación por lo que  $Z$  (de  $t_0$  a  $t_f$ ) se reduce por el siguiente factor

$$\frac{a_0^2 \phi_0}{a^2(t_i) \phi(t_i)} \sim \frac{\text{Max}(1, b)}{|\dot{\phi}_0| / (a_0 \phi_0)}, \quad (4.30)$$

quedando

$$Z \lesssim \left( \frac{\phi_0^3}{\dot{\phi}_0^2} \right)^{1/3} \quad (4.31)$$

y recordando la restricción para el factor  $Z$  en la ecuación (4.16), se tiene por otro lado

$$Z \lesssim (\phi_0 l_{pl}^2)^{1/\sqrt{3}}. \quad (4.32)$$

Con estos resultados vemos que  $Z$  es sensible a las condiciones iniciales para un espacio curvo tanto cuando la inflación empieza en  $t_0$ , como cuando empieza después de  $t_0$ , por lo que puede ser insuficiente para resolver el problema del horizonte [68] [69].

## 5. Conclusiones

El misterio del origen y evolución de nuestro universo es un tema que desde siempre ha atraído la atención de la humanidad. Con la tecnología reciente se han obtenido datos observacionales que dan un nuevo giro a la cosmología permitiendo verificar sus teorías.

Una de las más recientes teorías es la cosmología de cuerdas, que integra tanto a la teoría de cuerdas como a la cosmología en un intento de construir un modelo que permita entender el big bang y la época anterior a éste. Uno de los objetivos fundamentales de ella, a diferencia de las otras teorías cosmológicas, es la de entender lo que sucedió en la época de Planck. En esta teoría aparece de modo natural el dilatón dependiente del tiempo, el cual se relaciona con la constante de Newton, que se supone responsable de la dinámica de nuestro universo en lugar del inflatón.

En el último capítulo se demostró que si el universo se originó en una época de *pre-big bang*, la curvatura inicial del espacio debió de ser plana para poder llegar al universo observable hoy en día. Por lo que la teoría propone que el estado inicial del universo es frío, vacío y casi plano, a diferencia del que propone la cosmología estándar, donde el estado inicial del universo es caliente, denso y con muy alta curvatura. Otra característica importante de la teoría es que antes de la época de máxima curvatura, la constante gravitacional empieza de un valor casi nulo, para posteriormente crecer en la época de Planck, y al pasar por ella se convierte en una constante, reproduciendo el valor del modelo estándar cosmológico.

Sin embargo, existen muchas preguntas abiertas en la teoría ya que es joven y está desarrollándose. Entre ellas se encuentran: a) ¿Cómo es que el dilatón pasa de ser variable (antes de la explosión) para después convertirse en constante (después de la explosión)? [70] [71] Dicho en otras palabras, ¿qué sucede en la época de máxima curvatura? En el capítulo tres, se expuso un modelo de juguete de lo que podría suceder en esa región proponiendo una ecuación de estado dependiente del tiempo. Tal vez la teoría M de las cuerdas [45] [72] nos pueda, en un futuro, aclarar esta situación [73] [74]; b) ¿Qué sucede con las fluctuaciones? ¿Se puede obtener a partir de esta teoría la formación de estructura del universo que se observa hoy en día?; c) ¿Por qué la dualidad del factor de escala para un espacio plano, que tanto motivó en un principio a la teoría, deja de ser aplicable para espacios curvos?

Entre las características atractivas de la cosmología de cuerdas se debe resaltar: a) Es una posibilidad para entender lo que sucedió en el big bang; b) No hay necesidad de inventar un inflatón, ni potenciales específicos para obtener inflación; c) Para un espacio plano, que se acerca mucho a la descripción actual de nuestro universo, se obtiene inflación de una manera natural mediante la dualidad del factor de escala; d) El estado inicial del que parte nuestro universo es más "aceptable" que los propuestos por los modelos expuestos en el primer capítulo [30] [32][35]; e) Es posible la existencia de un fondo de dilatones cósmicos fósiles, lo cual podría representar el acceso a fenomenología que permita verificar esta teoría [75]. Debido a estas características concluimos que la cosmología de cuerdas antes del gran estallido es un candidato fuerte para responder a muchas preguntas acerca del origen de nuestro universo.

## Apéndice A. Obtención de la acción para la cosmología de cuerdas.

Para calcular la acción de una cuerda bosónica cerrada propagándose en un fondo se tienen que incluir los estados no masivos de la cuerda: el gravitón  $g_{\mu\nu}$ , el tensor antisimétrico  $B_{\mu\nu}$  y el dilatón  $\phi$ .

La acción más general para la cuerda bosónica incluye los términos

$$S_1 = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}(X^\rho), \quad (\text{A.1})$$

que incorpora el gravitón, más

$$S_2 = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}(X^\rho), \quad (\text{A.2})$$

incorporando el tensor antisimétrico, más un tercer término que involucra la relatividad de Einstein, tal como

$$S_3 = S_{\text{Einstein-Hilbert}} = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} R^{(2)}, \quad (\text{A.3})$$

con  $R$  el escalar de Ricci. Sin embargo, no podemos incluir este término ya que es un invariante topológico que no contribuye a la dinámica de la métrica  $h$ , como a continuación veremos.

Ahora bien variando la última acción respecto al tensor métrico obtenemos

$$\delta S_{\text{Einstein-Hilbert}} = \int d^2\sigma \sqrt{h} \delta h^{\alpha\beta} (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} R), \quad (\text{A.4})$$

pero como el tensor de Riemann es tal que

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}. \quad (\text{A.5})$$

En dos dimensiones, un tensor antisimétrico tiene que ser proporcional a  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , de tal forma que  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}$  es proporcional a  $R^{(2)}$  de la siguiente forma

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} = (h_{\alpha\gamma} h_{\beta\delta} - h_{\beta\gamma} h_{\alpha\delta}) R^{(2)} / 2, \quad (\text{A.6})$$

con lo que contrayendo el tensor de Riemann en dos dimensiones tenemos que

$$R_{\alpha\gamma}^{(2)} - \frac{1}{2} h_{\alpha\gamma} R^{(2)} = 0, \quad (\text{A.7})$$

por lo que la variación (A.4) se anula, resultando (A.3) invariante bajo variaciones de la métrica de la hoja de mundo. Por lo tanto, se puede introducir otro campo adimensional en dos dimensiones, el dilatón  $\phi(X^\rho)$ , para generalizar (A.3)

$$S_3 = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} \phi(X^\rho) R^{(2)}, \quad (\text{A.8})$$

con lo que la acción se convierte en

$$S = S_1 + S_2 + S_3, \quad (\text{A.9})$$

tomando la métrica tal que

$$h_{\alpha\beta} = e^\phi \eta_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.10})$$

Las condiciones para que haya invariancia de Weyl en dos dimensiones dan lugar a la generalización de las ecuaciones de relatividad general:

$$\begin{aligned} 0 &= R_{\mu\nu} + \frac{1}{4} H_\mu^{\lambda\rho} H_{\nu\lambda\rho} - 2D_\mu D_\nu \phi, \\ 0 &= D_\lambda H_{\mu\nu}^\lambda - 2(D_\lambda \phi) H_{\mu\nu}^\lambda, \\ 0 &= 4(D_\mu \phi)^2 - 4D_\mu D^\mu \phi + R + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Tenemos que  $S_1$  y  $S_2$  tienen invariancia de Weyl, pero no  $S_3$  ya que las primeras son proporcionales a  $a/\alpha'$  pero la última no. Por lo que la acción 26-dimensional sin esta inconsistencia, pero consistente con (A.11) resulta ser

$$S_{26} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}x \sqrt{g} e^{-2\phi} (R - 4D_\mu \phi D^\mu \phi + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}) \quad (\text{A.12})$$

con  $\kappa$  constante.

De esta forma, la teoría de cuerdas introduce, requiriendo invariancia de escala, al dilatón. Con lo que para una teoría de cuerda bosónica los campos importantes son. el tensor antisimétrico  $B_{\mu\nu}(X^\rho)$ , el dilatón  $\phi(X^\rho)$  y el campo gravitacional  $g_{\mu\nu}(X^\rho)$ .

De la acción (A.12) se tiene que la constante de acoplamiento es  $\langle e^\phi \rangle$  y es válida siempre y cuando  $\langle e^\phi \rangle$  sea pequeña.

## Apéndice B. Cálculo de las ecuaciones cosmológicas para un espacio con radiación

Introduciendo el cambio de variable

$$\psi = l_{st}^{-2} e^{-\phi} \quad (\text{B.1})$$

y considerando únicamente 3 dimensiones expandiéndose  $d = 3$ , la ecuación de Friedmann (3.15) se escribe como

$$\left( H + \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{\psi} \right) = \frac{1}{12} \left( \frac{\dot{\psi}}{\psi} \right)^2 + \frac{8\pi}{3} \frac{\rho}{\psi} - \frac{k}{a^2}, \quad (\text{B.2})$$

y la ecuación del dilatón (3.13) toma la forma

$$\frac{d}{dt}(\dot{\psi} a^3) = 8\pi(\rho - 3p)a^3. \quad (\text{B.3})$$

Al utilizar la ecuación de estado para la radiación  $\rho = 3p$ , de la ecuación del dilatón se tiene que

$$\dot{\psi} a^3 = \text{cte} = -B. \quad (\text{B.4})$$

Por lo que la ecuación de Friedmann resulta

$$\left( \dot{a} - \frac{B}{2a^2\psi} \right)^2 = \frac{B^2}{12(a^2\psi)^2} + \frac{bB}{\sqrt{3}a^2\psi} - k, \quad (\text{B.5})$$

donde

$$b = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3B} \rho_{\text{rad}} a^4. \quad (\text{B.6})$$

Para curvatura nula, la solución es

$$\begin{aligned} a(t) &= A(t_{\text{sing}} - t)^{-1/\sqrt{3}}, \\ \psi(t) &= \frac{BA^{-3}}{1 + \sqrt{3}} (t_{\text{sing}} - t)^{1+\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Para curvatura diferente de cero, despejamos  $\dot{a}$  de la ecuación (B.5)

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{B^2}{12(a^2\psi)^2} + \frac{bB}{\sqrt{3}a^2\psi} - k} + \frac{B}{2a^2\psi} \quad (\text{B.8})$$

CALCULO DE LAS ECUACIONES COSMOLOGICAS PARA UN ESPACIO CON RADIACION

e introduciendo el cambio de variable  $\chi = \frac{\sqrt{12}}{B} a^2 \psi$  se obtiene

$$\dot{a} = \frac{1}{\chi} \left[ \sqrt{3} \pm \sqrt{1 + 2b\chi - k\chi^2} \right], \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{\chi} = \pm \frac{2}{a} \sqrt{1 + 2b\chi - k\chi^2}. \quad (\text{B.10})$$

Nuevamente se introduce el tiempo conforme definido en (3.64)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{a}, \quad (\text{B.11})$$

con lo que la ecuación (B.10) se convierte en

$$\dot{\chi} = \pm 2\dot{v} \sqrt{1 + 2b\chi - k\chi^2} \quad (\text{B.12})$$

e integrandola respecto al tiempo  $t$  se obtiene:

$$\psi(v) = Q^2 \left[ \frac{-S(v)}{C(v) - bS(v)} \right]^{\sqrt{3}}, \quad (\text{B.13})$$

que corresponde a la ecuación (3.66) de la sección 3.8, con  $Q$  una constante y donde  $C(v)$ ,  $S(v)$  corresponden a  $\cosh v$  y  $\sinh v$  respectivamente para  $k = -1$  y corresponden a  $\cos v$  y  $\sin v$  respectivamente para  $k = 1$ . Sustituyendo este resultado en la ecuación (B.9) e integrando nuevamente tenemos

$$a(v) = 3^{-1/4} \sqrt{B} Q^{-1} [C(v) - bS(v)]^{(1+\sqrt{3})/2} [-S(v)]^{(1-\sqrt{3})/2} \quad (\text{B.14})$$

obteniendo la ecuación (3.65) presentada en la sección 3.8.

## Referencias

- [1] M. Rowan-Robinson, *The Cosmological Distance Ladder* (Freeman), 1985.
- [2] R. A. Alpher, H. A. Bethe y G. Gamow, *Phys. Rev.* **73**, 803, 1948.
- [3] A. A. Penzias y R. W. Wilson, *Astrophys. J.* **142**, 419, 1965.
- [4] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll y D. T. Wilkinson, *Astrophys. J.* **142**, 414, 1965.
- [5] P. J. E. Peebles, D. N. Schramm, E. Turner y R. Kron, *Nature* **352**, 769, 1991.
- [6] J. C. Mather, et al., *Astrophys. J.* **420**, 439, 1994.
- [7] G. F. Smoot, et al., *Astrophys. J.* **396**, L1, 1992.
- [8] G. F. Smoot, *First Course in Current Topics in Astrofundamental Physics*, eds. N. Sanchez and A. Zichichi (World Scientific), 1992.
- [9] D. J. Fixsen, COBE-PREPRINT-NO-93-03, 1993. Biblioteca de Fermilab, enviado a *Astrophys. J.*
- [10] G. F. Smoot, et al., *Astrophys. J.* **396**, L1, 1992.
- [11] E. L. Wright, *Astrophys. J.* **396**, L3, 1992.
- [12] M. Turner, astro-ph/9304012, *Inflation after COBE*, Lectures on Inflacionary Cosmology.
- [13] J. Loveday, B. A. Peterson, G. Efstathiou y S. J. Maddox, *Astrophys. J.* **390**, 338, 1992.
- [14] S. J. Maddox, W. J. Sutherland, G. Efstathiou y J. Loveday, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1989.
- [15] A. Dressler, et al., *Astrophys. J.* **313**, L37, 1987.
- [16] C. A. Collins, et al., *Nature* **320**, 506, 1986.
- [17] M. Fukugita, C. J. Hogan y P. J. E. Peebles, *Nature*, 1993.
- [18] T. P. Walker, *Astrophys. J.* **376**, 51, 1991.
- [19] M. Rowan-Robinson et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **247**, 1, 1990.
- [20] M. Strauss, et al., *Astrophys. J.* **385**, 421, 1992.
- [21] A. Dekel, astro-ph/9309028 *Determining  $\Omega$  from peculiar velocities.*
- [22] A. Babul, et al., *Astrophys. J.* **427**, 1, 1994.
- [23] E. Kolb, M. Turner, *The Early Universe*, Frontiers in Physics (Addison-Wesley), 1990.
- [24] J. L. Martin, *General Relativity* (Prentice Hall), 1996.
- [25] P. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton Series in Physics), 1993.
- [26] E. W. Kolb y M. S. Turner, *The Early Universe: Reprints* (Addison-Wesley), 1988.
- [27] J. E. Lidsey, et al., *Rev. Mod. Phys.* **69**, 2, 1997.
- [28] R. H. Brandenberger, *Field Theoretical Methods in Fundamental Physics*. ed. por Choonkyu Lee, Mineumsa Co. Ltd., Seoul, 1997.
- [29] E. W. Kolb, *Physica Scripta* **T36**, 199, 1991.

- [30] A. H. Guth, *Phys. Rev.* **D23**, 347, 1981.
- [31] M. Roos, *Introduction to Cosmology* (Wiley), 2da edición.
- [32] A. D. Linde, *Phys. Lett.* **B108**, 389, 1982.
- [33] A. Albrecht y P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220, 1982.
- [34] E. Kolb, astro-ph/9403007, *Particle physics and cosmology*.
- [35] A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **129**, 177, 1983.
- [36] J. H. Schwarz, *Phys. Rept.* **8**, 269, 1973.
- [37] Bailin y Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*.
- [38] M. B. Green, J. H. Schwarz y E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge), 1987.
- [39] C. Vafa, hep-th/9702201, *Lectures on strings and dualities*.
- [40] F. Quevedo, *Superstrings and Physics?*, CERN-TH-96-346. Dec 1996. 51pp. Curso impartido en el Taller de teorías de gauge, supersimetría aplicada y gravedad cuántica, Londres, Inglaterra, 5-10 jul 1996.
- [41] F. Gliozzi, J. Scherk y D. Olive, *Nucl. Phys.* **B122**, 253, 1997.
- [42] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B443**, 85, 1995.
- [43] C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B469**, 403, 1996.
- [44] E. Cremmer, B. Julia y J. Scherk, *Phys. Lett.* **76B**, 409, 1978.
- [45] J. Polchinski, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1245, 1996.
- [46] A. Giveon and M. Rocek, hep-th/9406178, *Introduction to duality*.
- [47] F. Quevedo, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **61A**, 23, 1998.
- [48] E. Kiritsis and C. Kounnas, *String gravity and cosmology: some new ideas*, publicado en los Proceedings de la primera conferencia internacional de física de altas energías: The Four Seas Conference - Physics without Frontier, Trieste, Italia, 25 jun - 1 jul 1995.
- [49] B. Zwiebach, *A brief introduction to Duality and D-branes*.
- [50] Giveon, Porrati y Ravinovic, *Phys. Rep.* **244**, 77, 1994.
- [51] M. Gasperini y G. Veneziano, *Astropart. Phys.* **1**, 317, 1993.
- [52] M. Gasperini y G. Veneziano, *Phys. Rev.* **D50**, 2519, 1994.
- [53] A. Tseytlin y C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B372**, 443, 1992.
- [54] G. Veneziano, hep-th/9512091, *String cosmology: concepts and consequences*.
- [55] M. Gasperini, astro-ph/9407026, *The inflationary role of dilaton in string cosmology*.
- [56] G. Veneziano, hep-th/9802057, *A simple/short introduction to pre-big bang physics/cosmology*.
- [57] M. S. Turner y E. J. Weinberg, *Phys. Rev.* **D56**, 4604, 1997.
- [58] M. Borunda y M. Ruiz-Altaba, hep-th/9804082, *On the initial conditions for pre-big bang cosmology*.
- [59] M. Gasperini, N. Sanchez and G. Veneziano, *Nucl. Phys.* **B364**, 365, 1991.
- [60] G. Veneziano, *Phys. Lett.* **B265**, 287, 1991.
- [61] X. Ossa and F. Quevedo, *Nucl. Phys.* **B403**, 377, 1993.

- [62] M. Gasperini y G. Veneziano, *Mod. Phys. Lett.* **A8**, 3701, 1993.
- [63] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (Wiley) 1972.
- [64] Y. Hu, M. Turner y E. Weinberg *Phys. Rev.* **D49**, 3830, 1994.
- [65] G. Veneziano, *Phys. Lett.* **B406**, 297, 1997.
- [66] A. Buonanno, K. Meissner, C. Ungarelli y G. Veneziano, *Phys. Rev.* **D57**, 2543, 1988.
- [67] D. Clancy, J. Lidsey y R. Tavakol, gr-qc/9806065, *Initial conditions in string cosmology*.
- [68] N. Kaloper, A. Linde y R. Bousso, hep-th/9801073, *Pre-big bang requires the universe to be exponentially large from the very beginning*.
- [69] [http://www.to.infn.it/~ gasperin/](http://www.to.infn.it/~gasperin/) Página de web de Pre-big bang cosmology.
- [70] M. Gasperini, M. Maggiore y G. Veneziano, *Nucl. Phys.* **B494**, 315, 1997.
- [71] R. Brustein y R. Madden, *Phys. Lett.* **B410**, 110, 1997.
- [72] M. J. Duff y J. X. Lu, *Nucl. Phys.* **B426**, 301, 1994.
- [73] A. Lukas, B. A. Ovrut y D. Waldram, *Nucl.Phys.* **B495**, 365, 1997
- [74] N. Kaloper, I. Kogan y K. A. Olive, hep-th/9711027, *Cos(M)ological Solutions in M- and String Theory*.
- [75] M. Gasperini, astro-ph/9406056, *Phenomenological Aspects of Pre-Big Bang Scenario in String Cosmology*.