

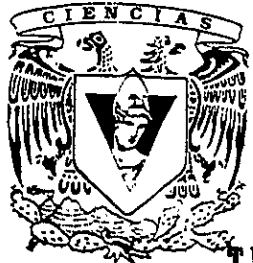


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELO FISICO PARA RECONSTRUIR LA IMAGEN DE LA SECCION TRANSVERSAL DE UN OBJETO CON RADIACION GAMMA

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C A
P R E S E N T A :
ELENA ROBERTO RAMIREZ



DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. FRANCISCO PABLO RAMIREZ GARCIA.

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION DE CIENCIAS

TESIS CON D. F. FALLA DE ORIGEN

265487

1998.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Modelo físico para reconstruir la imagen de la sección transversal de un objeto con radiación gamma"

realizado por Elena Robledo Ramirez

con número de cuenta 7635460-9, pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario M. EN C. FRANCISCO PABLO RAMIREZ GARCIA *Fco. Pablo Ramirez G.*

Propietario DR. JORGE RICKARDS CAMPBELL *George Rickards*

Propietario DR. JOSE JULIO EMILIO HERRERA VELAZQUEZ *José*

Suplente DRA, SILVIA EIDELS DUBOVOI *S. Eidels*

Suplente M. EN C. BEATRIZ ELIZABETH FUENTES MADARIAGA *Beatriz E. Fuentes M.*

Consejo Departamental de Física

[Signature]
DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

DEDICATORIAS

A mi madre, aunque la vida no nos permitió conocernos mi recuerdo siempre estará a tu lado.

A cada uno de mis hermanos: Guillermo, Rosario, Bertha, Roberto, Guadalupe y Alejandro por su apoyo en todos los aspectos durante las primeras etapas de mi vida.

A cada uno de los futuros profesionistas de la familia: a mis sobrinos.

A las familias Padilla Zaragoza y Ramírez Zaragoza y muy especialmente para Toña y Doña Peri.

A todos mis amigos por los grandes momentos que la vida nos ha brindado.

A Maty y Luis Carlos (Wicho) esperando que algún día no muy lejano también se encuentren escribiendo las dedicatorias de sus tesis (no se priven de ese momento).

A las dos personas más importantes de mi vida:

A mi esposo Pedro Zaragoza Rivera, por tu gran apoyo en mi vida y en especial en este trabajo.

y a mi hijo Andrei Zaragoza Robledo, que ha sido mi más grande inspiración. Gracias por ser como eres y nunca dejes de luchar en la vida.

A ambos los amo infinitamente.

Agradezco a la **Universidad Nacional Autónoma de México**
por ser una parte importante de mi formación académica.

Agradezco al **Instituto Mexicano del Petróleo**, por todas las
facilidades dadas para la elaboración de esta tesis.

AGRADEZCO

Al M. en C. FRANCISCO PABLO RAMIREZ GARCIA:

Por haberme dirigido con mucha paciencia mi tesis y haberme permitido tener acceso a una gran Institución como es el IMP.

Al Dr. Jorge Rickards Campbell

Por asesorar muy acertadamente esta tesis en el Instituto de Física en la UNAM.

A MIS SINODALES,

Por haber dedicado un tiempo de su vida a este trabajo:

M. en C. FRANCISCO PABLO RAMIREZ GARCIA

DR. JORGE RICKARDS CAMPBELL

DR. JOSE JULIO EMILIO HERRERA VELAZQUEZ

DRA. SILVIA EIDELS DUBOVI

M. en C. BEATRIZ ELIZABETH FUENTES MADARIAGA

Por sus valiosos comentarios y por haber aceptado ser parte del jurado.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	i
CAPÍTULO I. ANTECEDENTES DE LA TOMOGRAFÍA	
1.1 Cambios que ha tenido la tomografía.....	2
1.2 Generaciones de los tomógrafos.....	3
CAPÍTULO II. RAYOS GAMMA Y SUS MECANISMOS DE INTERACCIÓN CON LA MATERIA	
2.1. Rayos X y rayos gamma.....	9
2.2. Interacción de la radiación electromagnética con la materia.....	10
2.3 Coeficientes de atenuación.....	13
2.4. Relación entre coeficiente de absorción lineal y sección eficaz.....	15
CAPÍTULO III. ESTUDIO DE LA ABSORCIÓN DE LA RADIACIÓN GAMMA, ORIENTÁNDOSE A LA TOMOGRAFÍA Y SU DETECCIÓN	
3.1. Estudio de la absorción de la radiación gamma, como fundamento para generar la tomografía.....	17
3.2 Detección de la radiación gamma.....	19
CAPÍTULO IV. MODELO MATEMÁTICO PARA OBTENER TOMOGRAFÍAS DE DOS DIMENSIONES A PARTIR DE UN MODELO DE ABSORCIÓN DE LA RADIACIÓN	
4.1 Bases del modelo matemático.....	29
4.2 Modelo matemático (mínimos cuadrados).....	32
CAPÍTULO V. DISEÑO DE COLIMADORES Y DE UN SISTEMA TOMOGRÁFICO PARA OBTENER LA TOMOGRAFÍA DE UN OBJETO DE 5 CM DE DIÁMETRO, EMPLEANDO UN SOLO DETECTOR	
5.1 Cálculo del blindaje adecuado para obtener una resolución de 1 mm y 2 mm con una fuente de Cs-137.....	37
5.2 Características del espectro obtenido en un multicanal.....	43
CAPÍTULO VI. IMAGEN OBTENIDA POR MEDIO DE TOMOGRAFÍA A UN OBJETO DE 5 cm.	
6.1 Desarrollo experimental.....	46
6.2 Datos.....	51
6.3 Resultados y Análisis.....	59
CONCLUSIONES.....	63
BIBLIOGRAFÍA.....	64

INTRODUCCIÓN

Las aplicaciones que tiene la interacción de la radiación con la materia dentro de todas las ciencias son diversas. Dentro de la medicina estas aplicaciones deben cumplir con los límites de dosis efectiva que puede recibir el cuerpo humano sin ser dañado. Por otra parte, en la industria u otras aplicaciones las limitaciones no son debido sólo a la dosis efectiva sino a otros factores ajenos a la radiación, como puede ser el tamaño del cuerpo (equipo, aparatos, etc.) que se desea investigar.

Se ha encontrado que una forma de optimizar los procesos químicos, a nivel industrial, está dirigido hacia las técnicas de pruebas no destructivas como es la tomografía. Sin embargo, resulta costosa y difícil su aplicación en campo.

La tomografía es una técnica para generar mapeos de densidades de secciones transversales de un objeto en estudio, el cual puede ser gaseoso, líquido o sólido. Ésta es obtenida al medir la atenuación que sufre un haz de fotones en un gran número de direcciones angulares que cubren el objeto y que posteriormente permiten reconstruir la imagen matemáticamente.

Las bases científicas para poder manejar esta técnica son muchas, por esto se dice que la tomografía es una técnica multidisciplinaria[A1], que requiere tener conocimientos vastos en los campos siguientes:

- Física y matemáticas aplicadas
- Detección y medición de la radiación
- Manejo, transporte y blindaje de radiación
- Diseños mecánicos complejos
- Adquisición y control de datos
- Electrónica digital

Dentro de las aplicaciones en la industria están las siguientes:

Estudio	Técnica
El estudio de multifases en flujos	tomografía de transmisión fotónica
La medición de productos de fisión	tomografía de emisión
La detección de fisuras en contenedores de combustible	tomografía de transmisión de neutrones rápidos

El por qué se escogió este trabajo queda plenamente justificado al ver las múltiples aplicaciones que tiene esta técnica en diversos campos de la ciencia.

Hay que recordar que la tomografía no hubiese sido posible desarrollarla sin tener un conocimiento claro de lo que sucede al interactuar la radiación con la materia. Su entendimiento tardó años y muchos fueron los hombres que trabajaron en este problema. Remontándonos un poco en la historia llegamos al siglo V a.C., cuando el griego Demócrito sugirió que si se dividía un trozo de cualquier sustancia en pedazos y éstos a su vez en pedazos más pequeños, se llegaría finalmente a una porción indivisible a la cual le llamó átomo.

El átomo es considerado el tabique básico de la materia pero de ninguna manera es su componente elemental. Actualmente se cree que la base fundamental de la materia son los "quarks", con los cuales es posible construir todas las partículas elementales que conforman la

materia. Los primeros modelos atómicos que se propusieron para poder explicar la constitución de la materia fueron: J. J. Thomson (1907), Ernest Rutherford (1908) y el de Niels Henrik David Bohr (1913).

El modelo propuesto por J.J. Thomson era considerar al átomo como una esfera de electricidad positiva en la que los electrones, cargados negativamente, estaban integrados en cantidad suficiente como para neutralizar la carga positiva

En el modelo del átomo nuclear de Rutherford, se propone una pequeña carga central que contiene más del 99.9% de la masa del átomo rodeada por una esfera con carga eléctrica igual pero de signo opuesto

El modelo del átomo de Bohr (figura 1) consiste en un núcleo diminuto y compacto localizado en el centro y rodeado por una serie de electrones en la periferia, como un sistema solar en miniatura.

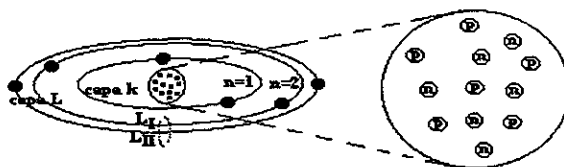


Figura 1. Representación del átomo de Carbono, modelo de Bohr

El núcleo del átomo está constituido de varias partículas, entre ellas el protón (p), con carga eléctrica positiva y el neutrón (n), con masa similar a la del protón y eléctricamente neutro. El número de protones en el núcleo del átomo es lo que distingue a cada elemento químico; se le llama número atómico y se le representa por la letra Z. Los protones y los electrones se atraen debido a sus cargas eléctricas opuestas. Para que se tenga un sistema eléctricamente neutro, en el átomo deben existir el mismo número de protones en el núcleo que electrones en las órbitas. A los protones y neutrones se les denomina genéricamente nucleones(A); el número de nucleones, A, en un núcleo es igual a la suma del número de protones (Z) y el número de neutrones (N), es decir: $A = Z + N$.

Las propiedades químicas de los elementos, están determinadas por la estructura electrónica del átomo, la cual tiene capas o estados permisibles para los electrones. Los niveles de estas capas están determinados por el número cuántico n y sólo pueden ser números enteros ($n = 1, 2, 3, \dots$). La capa más interna ($n = 1$), que es la más próxima al núcleo, es llamada la capa K, la siguiente es la L ($n = 2$), seguida por la capa M ($n = 3$), y así sucesivamente. Cada capa a su vez puede estar compuesta de subcapas (fig. 1), determinándose el número de subcapas por la fórmula $(2n - 1)$. Por ejemplo, la capa L está compuesta a lo más por 3 subcapas, siendo denominadas como L_I , L_{II} , L_{III} . La capacidad electrónica de cada capa está determinada por los

valores $2n^2$ con $n = 1,2,3,\dots$, así la capa K admite a lo más 2 electrones, la L admite a lo más 8 electrones y así sucesivamente.

Los electrones más próximos al núcleo (capa K) son los que tienen una mayor energía de amarre; por ejemplo para arrancar un electrón de la capa más externa de un átomo de plomo se requiere 7.38 eV, mientras que para remover un electrón de la capa más interna de este mismo átomo ($Z = 82$) es necesaria una energía de 88,000 eV (88 keV)¹.

El número de neutrones en el núcleo puede variar para átomos con el mismo número atómico (Z), o elemento químico. Esto significa que un elemento puede tener varios tipos de núcleos. Estas diferentes formas son llamadas isótopos de un elemento. Es importante notar que todos los isótopos de un mismo elemento son químicamente idénticos, ya que las propiedades químicas están determinadas por su número atómico. Por ejemplo, el átomo de hidrógeno tiene tres isótopos: aquéllos que no tienen neutrones en el núcleo (1_1H), los que tienen un neutrón denominados deuterio (2_1H) y aquellos con dos neutrones llamados tritio (3_1H).

En un átomo sus electrones pueden pasar de un nivel a otro. Si el nivel original es más bajo que el final, se requiere energía para lograr la transición. El paso de un nivel bajo a uno más alto se llama excitación electrónica. Inversamente, el paso de un nivel alto a uno más bajo se llama desexcitación, en este proceso el átomo emite energía en forma de un fotón, o un electrón.

La física atómica moderna tiene sus inicios con el descubrimiento de los rayos X (W. K. Röntgen, 1895), de la radiactividad (A. Becquerel, 1896) y del electrón (J.J. Thomson, 1897).

Wilhelm Konrad Röntgen observó que al incidir los rayos catódicos sobre el vidrio del aparato que los generaba, se producían radiaciones muy penetrantes capaces de velar placas fotográficas protegidas al paso de la luz y producir fluorescencia en algunos materiales, aún cuando se interponían obstáculos opacos delgados (como hojas de papel); a este tipo de radiación le dio el nombre rayos X.

En 1896, el profesor Henri Becquerel, para demostrar el efecto de fluorescencia del uranio, dejó un puñado de sulfato de uranio sin activar sobre una placa fotográfica que estaba protegida con una hoja doble de papel negro. Cuando se reveló la placa, sin haber expuesto el sulfato de uranio jamás a la luz solar, se vio en ella claramente dibujada la silueta de las sales de uranio. Becquerel dedujo que no había sido la fluorescencia generada por la luz, sino otro tipo de radiación que seguramente provenía de las sales, lo que había marcado la placa. Haciendo experimentos posteriores descubrió que ocurría el mismo fenómeno con cualquier compuesto de uranio y, además, que esta radiación era capaz de atravesar el papel, el cartón, el vidrio y hasta láminas metálicas delgadas. A este fenómeno, descubierto y estudiado por Becquerel, según el cual se emite radiación espontáneamente, se le llama radiactividad y a los núcleos atómicos que lo presentan se les llama radiactivos o inestables.

¹ La cantidad de energía requerida para remover completamente un electrón de una órbita dada es llamada energía de atadura o amarre para esa capa. Esto se simboliza como K_B para la capa K, L_B para la L (L_{IB} , L_{IIB} , L_{IIIB} para las subcapas de L) y así sucesivamente. La diferencia de energía para mover un electrón de una capa interna a una capa superior (excitación) es exactamente igual a la diferencia entre las energías de amarre de las dos capas. Por ejemplo, para la energía que se requiere para mover un electrón de la capa K a la capa L en un átomo es $K_B - L_B$. La energía de amarre se incrementa con el número atómico Z del núcleo, es decir, la energía de amarre es mayor para elementos más pesados como en el ejemplo del plomo con $Z = 82$.

En 1886 Joseph John Thomson² estudiando la naturaleza de los rayos catódicos, encontró que la relación carga/masa de éstos era mil veces mayor que la esperada para iones³ del hidrógeno ($q/m = 1.044 \times 10^{-8} \text{ C kg}^{-1}$) concluyendo que si los rayos catódicos tenían algún origen atómico, se trataba de partículas mil veces más ligeras que el átomo de hidrógeno. Posteriormente estas partículas se denominaron electrones. Con el descubrimiento del electrón se reveló que ya no se satisfacía la indivisibilidad propuesta por Demócrito, es decir, que los elementos químicos, denominados átomos, eran divisibles.

María Sklodowska Curie y Pierre Curie se interesaron en la radiación de las sales de uranio. Continuaron la investigación iniciada por Becquerel, y utilizando el descubrimiento de Pierre Curie (la piezoelectricidad), fue posible construir un instrumento mediante el cual se podían medir pequeñas cantidades de electricidad. En 1898 descubrieron que el elemento pesado torio era también radiactivo. Continuando con estas investigaciones encontraron que algunos minerales mostraban ser mucho más activos de lo esperado, lo cual los condujo a descubrir el radio.

El término radiación significa flujo o corriente de energía proveniente del núcleo del átomo. Se distinguen dos tipos principales de radiación: la emisión de partículas subatómicas en movimiento - núcleos, electrones, neutrones, etc.- y la emisión de paquetes energéticos o fotones (X y gammas).

El físico Ernest Rutherford, logró clasificar las radiaciones en tres grupos : radiación alfa, radiación beta y radiación gamma. Cada tipo de radiación interacciona con la materia de modo distinto, dependiendo de su energía y del material en que incide (absorbedor). En general las radiaciones producen los siguientes fenómenos:

a) Como la materia sólo consiste de núcleos y electrones, las radiaciones chocan con ellos al azar. Como hay Z veces más electrones que núcleos, es mucho más probable que las radiaciones se encuentren con electrones que con núcleos y por lo tanto la ionización predomina.

b) Transmiten energía al material. Esta energía casi siempre es inicialmente de la forma de ionización, pero los efectos secundarios terminan por calentar el material. Por ejemplo, una partícula alfa con una energía del orden de MeV, produce un calentamiento minúsculo (alrededor de 10 calorías), por lo que para poder sentirla se necesitan muchas radiaciones.

c) Ionizan y excitan a los átomos que se encuentran en su camino. Después de esto hay dos efectos secundarios. El átomo que queda ionizado se desexcita emitiendo rayos X, rayos ultravioleta, luz visible o electrones, cuyas radiaciones a su vez pueden ionizar. Por otro lado, los electrones secundarios emitidos, (llamados rayos delta) también tienen suficiente energía para ionizar .

² Thomson definió al electrón como el componente universal de la materia y fue uno de los primeros científicos que propuso una teoría para describir la estructura interna del átomo.

³ Se llaman iones a los átomos, moléculas y varias partículas subatómicas que tienen carga eléctrica positiva o negativa. Los electrones libres no unidos a un átomo son iones negativos. En la naturaleza se observa que dichos iones son muy "activos" o reactivos ya que tienen una tendencia a unirse con otros átomos neutros o ionizados para compartir sus electrones de más o de menos y así estabilizarse, entonces cualquier acción que perturbe el balance eléctrico de un átomo produce ionización al formarse pares iónicos.

d) En algunos casos se llegan a desplazar átomos de su lugar. Estos átomos, al moverse, también producen efectos secundarios. Pero lo más importante es que al alejarse, dejan un lugar vacío (o vacancia) en la red cristalina, y se alojan en algún otro lugar, generalmente una posición intercalada en la red, llamada intersticial.

e) Los átomos ionizados o desplazados pueden dar lugar a reacciones químicas.

La investigación a fondo de los rayos denominados α , estuvo a cargo de Rutherford y colaboradores durante el período de 1898-1914. Las experiencias de deflexión con un campo magnético de los rayos alfa del elemento químico radio, así como sus derivados, demostraron que, todos los rayos alfa procedentes de un mismo emisor tienen la misma velocidad inicial. Su carga eléctrica es dos veces la del electrón, pero de signo positivo. Su masa es cuatro veces la masa del átomo de hidrógeno, y por lo tanto se les identifica como los núcleos del átomo de helio totalmente ionizado, es decir sin sus dos electrones orbitales, por lo cual resultan extremadamente pesadas y grandes en relación a los otros tipos de radiación nuclear.

A la gráfica de ionización específica vs distancia recorrida por las partículas alfa, se le conoce como curva de Bragg (figura 2). En ella se muestra que se produce un máximo de ionización específica hacia el término de la trayectoria.

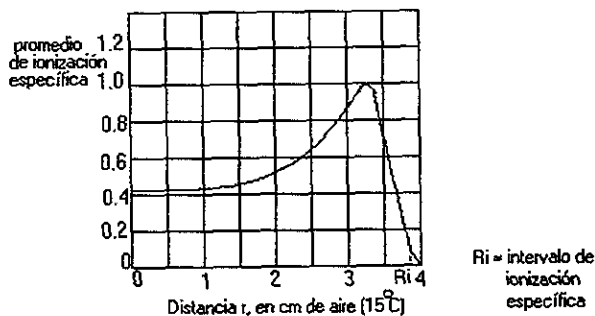


Figura 2. Curva de ionización de Bragg para rayos α de polonio en aire a 15°C y 760 mmHg

Rutherford y Soddy (1903) propusieron la denominada teoría de la transformación, de acuerdo con la cual los átomos de una sustancia radiactiva se "transforman" espontáneamente, con emisión de una partícula α o β , dando origen a un nuevo átomo, químicamente diferente del original. Este átomo puede a su vez transformarse de forma similar al anterior, surgiendo así una serie radiactiva de átomos. Todos estos isótopos ocupan el mismo lugar en la tabla periódica de los elementos, aunque se diferencian físicamente. Estas diferencias se enumeran en las leyes de desplazamiento de Soddy, Ruseil y Fajans (1913).

Para partículas beta, β , se observó que las deflexiones que sufrían estos rayos sometidos a campos eléctricos y magnéticos correspondían en dirección y magnitud con los observados para los electrones en un tubo de descarga gaseosa. En consecuencia, es posible afirmar que las partículas β estaban cargadas negativamente, sin embargo el valor de su carga específica e_b/m_b parecía disminuir con el aumento de su velocidad. Así, para velocidades mucho menores a la de

la luz, $e_{\beta}/m_{\beta} = 1,76 \times 10^{11} \text{ C kg.}^{-1}$, que corresponde casi exactamente con el encontrado para los electrones. En estos rayos se observó que no se mantenía la ley de conservación de la energía, que tienen un alcance mayor que los rayos alfa y que son capaces de atravesar algunos milímetros de metales. Actualmente se sabe que son electrones que se desplazan a velocidades cercanas a la de la luz. En 1932 fue descubierto otro tipo de radiación beta por C.D. Anderson. Esta radiación consiste de partículas de la misma naturaleza que el electrón, con carga positiva, y es conocida como positrón.

Las partículas β son más difíciles de analizar, porque su trayectoria es irregular, y su masa es mucho menor, por lo cual sufren múltiples deflecciones; su alta velocidad implica un tratamiento relativista en los procesos de colisión.

Los iones producidos por la partícula β , ionización primaria, producen futuras ionizaciones o ionizaciones secundarias. La ionización total es la suma de la ionización primaria y la secundaria. La transformación beta ocurre cuando se emite un electrón del núcleo, el cual puede tener carga positiva o negativa. Como la masa del electrón es 1840 veces más pequeña que la de nucleones, la emisión β no implica cambio en A. Sin embargo, Z sí cambia. Si un núcleo emite una beta negativa (β^{-}), esta pérdida de una carga negativa implica ganar una positiva y su Z aumenta. Si emite una beta positiva (β^{+}) disminuye su Z. El decaimiento beta siempre va acompañado de la emisión de una partícula denominada neutrino⁴ (ν), que no tiene carga ni masa, pero que sí comparte la energía sobrante con la beta.

En 1900 Villard identificó un tercer tipo de radiación. Estos rayos no son deflectados por los campos magnéticos ni eléctricos e interaccionan con la materia de forma análoga como lo hacen los rayos X. Por esta razón los rayos gamma fueron identificados como radiación electromagnética. Son tres las principales formas de interacción con la materia: efecto fotoeléctrico, dispersión Compton y producción de pares.

Estos rayos son más penetrantes que las partículas alfa o beta. Mientras que las partículas alfa y beta se detienen al interponerse en su camino unos centímetros de metal, parte de la intensidad inicial de los rayos gamma logran atravesar placas metálicas gruesas.

Se ha demostrado que la radiación gamma son cuantos electromagnéticos de gran energía, la cual se representa como $E = h\nu$, donde ν es la frecuencia y h es la constante de Planck. Así

⁴ Wolfgang Pauli, en 1931, para explicar la aparente violación a la ley de conservación de la energía de la partícula beta postuló que una partícula, a la que Enrico Fermi le dio el nombre de neutrino, (palabra italiana que significa pequeña partícula neutra), acompaña a la partícula beta en la transformación radiactiva. Supuso que la nueva partícula era eléctricamente neutra y que poseía una masa extremadamente pequeña comparada con la del electrón, siendo ésta la causa por la cual el neutrino se detectó experimentalmente hasta 1956. Debido a que no posee carga eléctrica y su masa es extremadamente pequeña, el neutrino escapa de todos los equipos experimentales, incluso de la protección de hormigón de un reactor nuclear. Cualquier energía emitida en las reacciones nucleares en forma de energía cinética de neutrinos es radiada al universo exterior. Existe una probabilidad extremadamente baja, aunque finita, de capturar un neutrino mediante un protón: $\text{Neutrino} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^1_0\text{n} + \beta^{+}$. El protón se transforma en un neutrón y un positrón. Esta transformación fue detectada por primera vez por C.L. Cowan y F. Reines, en el Laboratorio de los Alamos en los años 1953-56.

mismo esta energía está relacionada con la longitud de onda (λ) de la radiación; dado que $c = \lambda\nu$ donde c es la velocidad de la luz en el vacío, se tiene que $E = \frac{hc}{\lambda}$.

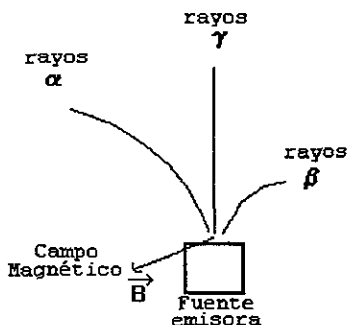


Figura 3. Efecto de un campo magnético perpendicular a las direcciones de las radiaciones

La figura 3 muestra el comportamiento de las radiaciones α , β y γ en un campo magnético. En ella se observa que los rayos α y β se ven afectados por el campo magnético existente, mientras los rayos γ pasan en línea recta como si no existiese este campo.

Al hacer incidir radiación gamma sobre un cuerpo se atenúa de acuerdo a la relación: $I = I_0 e^{-\mu x}$; donde μ es conocido como coeficiente de atenuación lineal total y el signo menos indica que la intensidad de la radiación disminuye exponencialmente conforme aumenta el espesor (x) del material absorbente. En este coeficiente intervienen los tres principales procesos de interacción (y algunos otros que no mencionaremos por tener una menor probabilidad de ocurrencia dentro del intervalo energético con el cual trabajaremos: $0.014 \text{ MeV} < E < 1.8 \text{ MeV}$).

Para comprender los fenómenos que ocurren al interactuar un fotón con electrones o núcleos y para conocer las causas por las cuales se pierde energía al atravesar un material absorbente, es necesario basarse en los modelos propuestos por Dirac (1930), Fermi (1934), Compton (1923), Klein-Nishina (1929), etc. los cuales a su vez se basan en los modelos atómicos de Thomson, Rutherford y Bohr.

En física nuclear estas interacciones resultan bastante complejas e incluso en algunas ocasiones, aún hoy en día, no se ha logrado dar una explicación consistente o sencilla. Sin embargo, a mediados de este siglo se originan los trabajos teóricos (Pratt-1960, C.M. Davisson-1952, R.D. Evans-1963, U. Fano-1962, M.J. Berger- 1962, etc.) referentes a estas interacciones en los cuales se hacen una serie de aproximaciones (comportamiento de las interacciones de:

alfas, electrones y gammas con la materia) obteniendo resultados [A1], [E1], [D1] que se acercan bastante a los obtenidos experimentalmente⁵.

Conforme avanzaban los estudios de la interacción de la radiación con la materia se observó que la radiación podía traer beneficios al hombre. Uno de estos fue aplicar la radiación para poder observar la estructura interna de objetos sin destruirlos, como es el caso de la tomografía y los rayos X.

Las bases matemáticas para obtener tomografías en un plano datan de 1917. Sin embargo, es hasta 1956 en que R. N. Bracewell propone un método para reconstruir un mapeo bidimensional de diferentes proyecciones procedentes del sol.

El auge de la tomografía surge en los 70's, década en la que se comercializan los primeros tomógrafos. Sin embargo, 20 años después, la tomografía sigue siendo una técnica muy utilizada en diversos estudios.

Este trabajo está dividido en seis capítulos, en los cuales se considera cada uno de los temas básicos, para poder entender y manejar la técnica de la tomografía.

En el capítulo I se mencionan los antecedentes y desarrollos que existieron en los últimos 20 años de la tomografía. Este capítulo nos ayuda a comprender las características generales de las diferentes generaciones de los tomógrafos utilizados sobre todo en la medicina, área en la cual se dio el mayor desarrollo de la tomografía.

El capítulo II lleva por objetivo mencionar las tres principales formas de interacción de la radiación gamma con la materia: efecto fotoeléctrico, dispersión Compton y producción de pares. Los otros tipos de interacción de menor importancia como dispersión Rayleigh, Thomson, etc. al tener una menor probabilidad de ocurrencia en el intervalo energético que se manejó, no se mencionarán en este trabajo, aunque al ir desarrollando los temas se harán referencias bibliográficas donde se podrá dar mayor profundidad de los temas.

El capítulo III explica la forma en que la energía del fotón es depositada en el material absorbedor, determinando de esta forma los coeficientes de atenuación del material. Por otro lado se mencionan las características principales de los detectores de centelleo y en especial el de yoduro de sodio con trazas de talio.

En el capítulo IV se propone un modelo matemático mediante el cual se puede reconstruir un corte transversal en dos dimensiones de un cuerpo a investigar. En este capítulo se propone un modelo lineal matemático en el que los parámetros se estiman por medio del método de mínimos cuadrados.

El capítulo V se dedica a una de las partes fundamentales de la tomografía que es precisamente la colimación del detector para lograr obtener un haz de fotones lo suficientemente fino para obtener una resolución de 1 y 2 mm. Con esta resolución y con movimientos de traslación cortos en el tomógrafo se logra obtener cambios finos en las densidades del corte transversal. Se presentan los cálculos para obtener un flujo de fotones con las características deseadas.

⁵ R.H. Pratt, S. Hultberg, G. White-Grodstein, etc. realizaron aproximaciones del efecto fotoeléctrico para la capa K y L para diferentes energías.
O. Klein- & Y. Nishina, P. Debye, R. D Evans, aproximaciones de la dispersión Compton para energías que se encuentran en el intervalo de $0.010 < E < 1000$ MeV, etc.

Finalmente en el capítulo VI se presentan los resultados experimentales al obtener el tomograma de un cuerpo de 5 cm hecho expofeso para este caso.

Es importante mencionar que debido al gran auge de la tomografía en los últimos años, actualmente existen al menos 15 métodos matemáticos para reconstruir la función de densidad con la que se obtiene la tomografía [S2].

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES DE LA TOMOGRAFÍA

En los últimos años del siglo pasado, se inicia una serie de descubrimientos importantes que cambiaron completamente la idea que se tenía sobre la estructura de la materia gracias al descubrimiento de los elementos radiactivos. Los efectos que la radiación produce al interactuar con distintas sustancias abre nuevas perspectivas en la ciencia de los materiales, por tener la característica de afectar “regiones” microscópicas, como los átomos, electrones y núcleos. De hecho, se ha convertido en la principal forma para investigar la estructura interna de la materia. Su poder de penetración en la materia y los mecanismos de interacción dan lugar al desarrollo de pruebas no destructivas, en campos como la medicina, de las industrias del cemento, de los alimentos, de la electrónica, del petróleo, etc.

Estas pruebas reciben el nombre de no destructivas [SI] debido a que de una forma indirecta se logran medir ciertas propiedades de los materiales sin necesidad de destruirlos. Este tipo de pruebas se utilizan en la localización y medición de discontinuidades, rupturas, porosidades, etc. Una discontinuidad en un material es una imperfección o interrupción en la continuidad del material. Estas discontinuidades pueden ser de unos cuantos átomos o hasta varios metros de largo. Las pruebas no destructivas usualmente determinan de una forma indirecta la propiedad física (densidad, porosidad, etc.) de interés, permitiendo conocer daños (o alteraciones) dentro de los objetos inanimados o animados que presentan diferentes densidades.

La tomografía axial computarizada (TAC) se considera una prueba no destructiva. La palabra tomografía se deriva de las palabras griegas tomo = corte y grafos = dibujo, es decir, es un dibujo o corte transversal del objeto en estudio. Es un procedimiento que permite obtener la radiografía de un plano transversal del objeto (algunas veces recibe el nombre de tomografía axial debido al corte en un plano y a la simetría axial con que se toman las mediciones).

La tomografía axial computarizada se basa en la atenuación que tiene la radiación al atravesar un objeto animado o inanimado, y el poder relacionar esta atenuación con las diferentes densidades del objeto a estudio, lo cual proporciona información suficiente para poder conocer el mapeo de densidades del objeto. El procedimiento principal es poder generar una serie de trayectorias a través del objeto de tal forma que se cubra la mayor parte de los puntos internos de éste. Esto se logra colocando un objeto frente a una fuente emisora de rayos (X, gamma, etc.), alineados con un detector sensible al tipo de radiación utilizada. El cambio en la intensidad de la radiación de transmisión es la que proporciona la información de la estructura interna del objeto. Para determinar los cambios de densidad en el objeto es necesario obtener información suficiente para construir un sistema de ecuaciones que permitan obtener estos cambios.

1.1 Cambios que ha tenido la tomografía

La primera aplicación del elemento radio después de su descubrimiento se hizo en el área de la medicina, utilizándose para detectar fracturas o tumores en el cuerpo humano. El modelo que se tiene es colocar un sistema alineado donde se encuentran la fuente emisora de radiación (de radio, rayos X, etc.), a una distancia del objeto a estudiar, seguido de una placa fotográfica sensible a la luz que al ser radiada por la fuente, plasma cierta información en la placa fotográfica (fig.1.1 a). Este método presenta la desventaja que al viajar la radiación por diferentes planos sobre diferentes densidades, se presenta la superposición de la información [A3] de tres dimensiones en un documento de dos dimensiones lo cual hace difícil su diagnóstico (fig. 1.1 b).

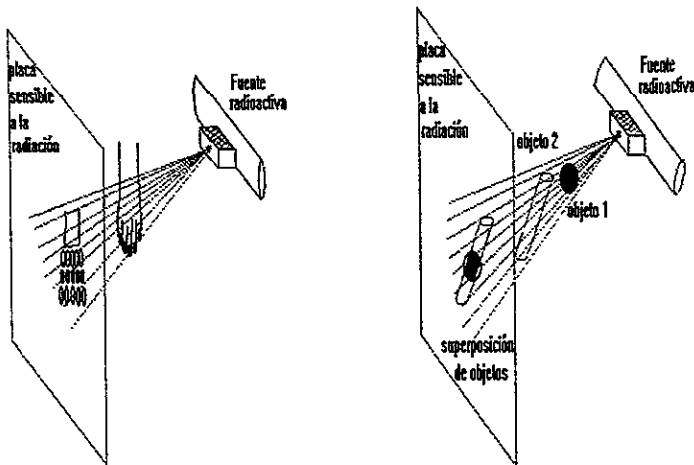


Figura 1.1.a) Radiografía de una mano b) Superposición de dos objetos

Durante mucho tiempo se intentó diseñar un método de trabajo con radiaciones que permitiera visualizar en una placa fotográfica la imagen sobre las diferencias existentes en las densidades del tejido biológico. La idea central se basaba en la siguiente hipótesis: la radiación al interactuar con las diferentes densidades de los tejidos humanos sería absorbida de diferente manera. Apoyándose en esto se trató de reconstruir la estructura interna de un objeto por medio de proyecciones.

Debido a la importancia de estos estudios los científicos continuaron perfeccionando estas pruebas. Una técnica bastante conocida y considerada como no destructiva, es la tomografía plana focal. El dispositivo utilizado consiste en un cartucho de película sensible a rayos X, y una fuente emisora de rayos X colocada frente a la película como se muestra en la figura 1.2. Con este diseño la película y la fuente eran movidos en forma paralela y con sincronía en direcciones opuestas, procurando que el plano seleccionado fuese normal con respecto a la dirección del haz de la fuente. Con este dispositivo se lograba tener sólo un plano del objeto enfocado sobre la película.

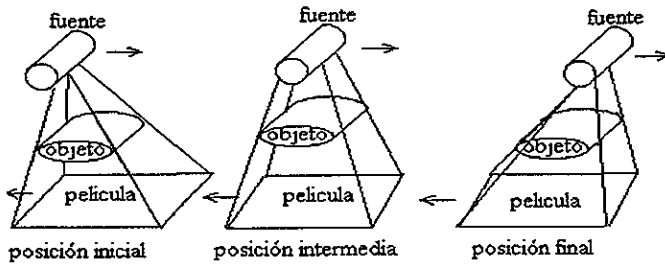


Figura 1.2. Concepto de tomografía filmica

1.2 Generaciones de los tomógrafos[M2], [C1].

A pesar de que la tomografía axial emerge en los 70's, su base matemática surge mucho antes que ésta. Los inicios teóricos de la tomografía fueron sugeridos por el matemático J. Radón, en 1917. Publicó un artículo en el que se sentaron las bases del procedimiento matemático que usado en 1956 por R.N. Bracewell, pudo reconstruir un mapa bidimensional de las diferentes proyecciones procedentes del sol.

En 1957, Takahashi utilizó el siguiente diseño con sus pacientes: colocaba a la persona en una silla que rotaba en sincronía con una pieza circular de película; por primera vez el corte fue paralelo al haz de rayos X. Esto significa que el rayo sólo atravesó la parte de interés, de ahí el nombre de axial (en este caso se trataba del cráneo). El material traslapado que ocurría con las radiografías pudo ser eliminado. La técnica de Takahashi sentó las bases del concepto de la actual técnica.

En 1961 W. Odendorf utilizó un método que nombró como "spin migration" logrando reconstruir los perfiles de absorción de radiación de un bloque de plástico con pequeñas piezas de hierro y aluminio insertadas en el bloque. El experimento consistió en irradiar por medio de una fuente colimada de rayos gamma un bloque de plástico de 10 x 10 cm que se encontraba sobre un plato de tocadiscos girando a la velocidad de 16 r.p.m., siendo a su vez desplazado su centro de rotación en forma lineal. La radiación transmitida era recolectada por un detector de centelleo de NaI(Tl) la cual era registrada gráficamente.

En los años 60's los desarrollos tecnológicos eran los adecuados para que surgiese una inquietud mundial en la investigación tecnológica y teórica referente a los tomógrafos. Las computadoras empiezan a tener un mayor peso en los resultados de muchas investigaciones, ya que su capacidad de memoria es aumentada y la rapidez de procesamiento de datos es aceptable. Por otro lado, las investigaciones de los diferentes modos de interactuar de la radiación con la materia siguen desarrollándose, así como la legislación de los daños que ésta puede producir en todo ser viviente; actualmente se encuentra perfectamente legislado. Todos estos avances en la ciencia logran conjuntarse y se propone el tomógrafo que se conoce como primera generación.

1.2.1. Primera generación (traslación-rotación con uno o dos detectores).

En 1962 el físico A. Cormack planteó la idea de hacer mediciones de transmisiones de rayos X a lo largo de líneas paralelas tomando un gran número de direcciones (fig.1.3). Posteriormente se realizaba un análisis de Fourier a los datos para lograr obtener la imagen

final. Este fue el primer trabajo que tuvo como antecedente el trabajo de Radón, como base para la aplicación en medicina (especialmente en radiología).

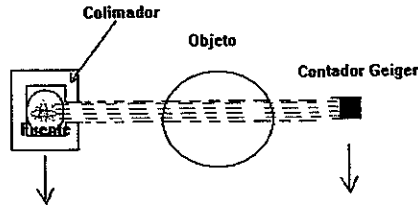


Figura 1.3. Diseño de A. Cormack

En 1967 Hounsfield inicia sus trabajos en el laboratorio central de investigaciones de la empresa británica EMI, siendo hasta 1972 cuando se dan a conocer estos trabajos en el mundo científico, año en el cual se sacan sus primeras publicaciones sobre tomografía axial computarizada (TAC). Hounsfield y la empresa EMI fueron los primeros en comercializar el equipo para tomografías llamado por ellos Mark-I Scanner dando inicio las diferentes generaciones de tomógrafos.

En la primera generación (fig.1.4) se considera un haz colimado incidiendo sobre un objeto, el cual se encuentra montado sobre un disco giratorio; un detector diametralmente opuesto también colimado, detectará la radiación de transmisión. Este sistema se puede desplazar linealmente, lo cual permite cubrir al objeto en todo su ancho[S3]. Una vez recorrido todo el objeto se hace girar el disco un cierto ángulo. En cada giro se repite el movimiento lineal fuente-detector hasta cubrir todo el objeto. Con este sistema solo es necesario hacer giros hasta 180 grados ya que se repiten las proyecciones.

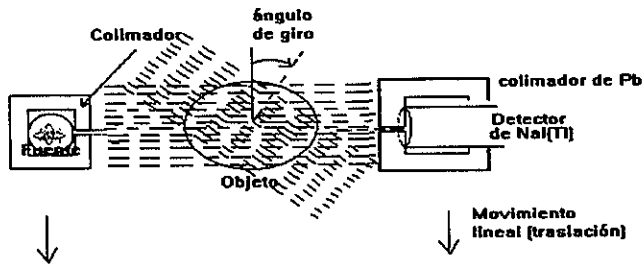


Figura 1.4. Primera generación propuesta por Hounsfield y EMI

Un tomógrafo representante de la primera generación es el equipo comercial Mark I. Consistía en un dispositivo de traslación-rotación, es decir para cada rotación del cuerpo se hacía un barrido completo del objeto (traslación) (fig. 1.5). Inicialmente el Mark I se diseñó

para ser usado solo en la zona de la cabeza del enfermo. Esta primera generación tenía el inconveniente del tiempo de exposición, ya que tan solo en explorar un solo plano de la cabeza se tardaba un tiempo de 5 minutos, lo cual hacía prácticamente imposible de ser utilizado en todo el cuerpo.

Los datos obtenidos eran generados y procesados en una computadora, y el tubo de rayos X y los detectores eran rotados 1 grado para repetir el proceso de traslación.

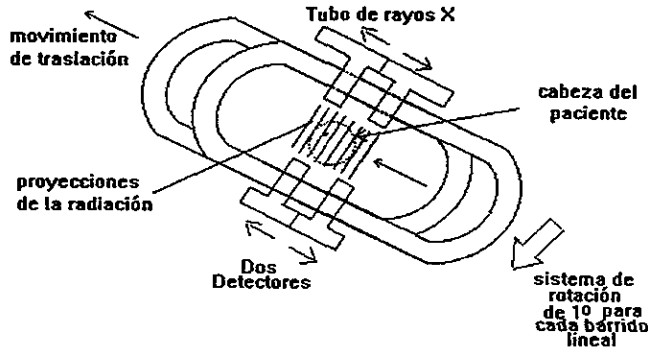


Figura 1.5. Parte principal del tomógrafo de la primera generación

Una vez que se ha terminado de obtener los datos, el siguiente paso es la reconstrucción de la imagen, la cual se puede obtener mediante varios modelos matemáticos (retroproyección, mínimos cuadrados, máxima verosimilitud, etc.). Una vez que se obtienen los valores asociados a las diferentes densidades internas al objeto, se asocia a cada densidad un valor, un color o diferentes tonos de grises con lo cual se puede visualizar la imagen en un plano. Para lograr la tercera dimensión es necesario acoplar varios planos paralelos.

1.2.2 Segunda generación (traslación-rotación con múltiples detectores)

Al pensar en utilizar más eficientemente la radiación emitida surge lo que se conoce como segunda generación. En esta generación se reduce la colimación para aprovechar un haz de rayos con mayor ángulo, lo cual permite colocar varios detectores a la vez en el lado opuesto del objeto a estudiar. La segunda generación se conoce como tomógrafo de traslación/rotación con múltiples detectores. La cantidad de detectores es variable, llegando a fabricarse tomógrafos hasta con 60 detectores. El movimiento es igual que el de la primera generación, una vez que el movimiento lineal se ha completado se produce un giro hasta llegar a los 180 grados (fig.1.6). Hay que notar que el giro dependerá de la resolución que se desee obtener ya que para giros de 1 grado la resolución será mucho mejor que para giros de 5 grados. Sin embargo la cantidad de datos recabados (número de ecuaciones)

aumenta considerablemente lo cual acarrea mayor complejidad del tratamiento de los datos y el tiempo de uso de la computadora se agranda bastante.

Después de conocer el impacto comercial del Mark 1, otras empresas introducen equipos de segunda generación (como por ejemplo la Ohio Nuclear). La ventaja que presentaba esta generación sobre la anterior es que necesitaba menor número de rotaciones debido al aumento de detectores y esto se veía reflejado en el acortamiento del tiempo de exposición. Esta reducción de tiempo se ve intrínsecamente reflejada en el aumento de detectores, los cuales tienen un límite dado por la dimensión física. Por otra parte, no es posible efectuar el movimiento en forma más rápida, porque el dispositivo real tenía una gran limitación debida a la inercia en los movimientos en todo el sistema. Esto se debe a que el arreglo fuente-detector hace el recorrido lineal y una vez que ha cubierto el objeto debe detenerse completamente para que gire el cuerpo y enseguida reiniciar la secuencia de movimientos lineales.

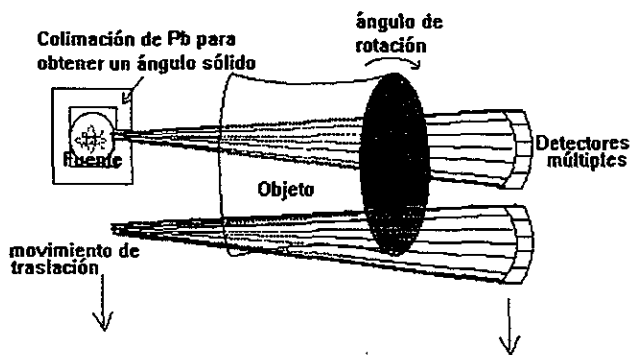


Figura 1.6. Segunda generación de tomógrafos, traslación-rotación

1.2.3. Tercera generación (rotación-rotación múltiples detectores)

Los problemas técnicos que impedían aumentar la rapidez del sistema para obtener imágenes en tiempos más cortos, se resuelven notoriamente con el sistema rotación/rotación, en el cual se abandona el movimiento de traslación para efectuarse solamente un movimiento de rotación de la fuente junto al conjunto de detectores. Este movimiento es posible porque la fuente emisora (gamma, X, etc.) emite un haz semicolimado representado en forma de abanico que proyecta radiación en un ángulo del orden de los 40 ó 50 grados. Dicho abanico es detectado por un conjunto de detectores que se encuentran opuestos y frontales a la fuente. Esto permite, en un giro completo, abarcar casi todos los puntos del objeto desde diferentes proyecciones, acortando aún más el tiempo de exposición. Esto permitió estudiar partes del cuerpo que presentan movimientos lentos (pulmones, cerebro, etc.).

Artronix incorpora el primer sistema de rotación-rotación (fig. 1.7) con un número mayor de detectores, resultando muy costoso este sistema para la empresa.

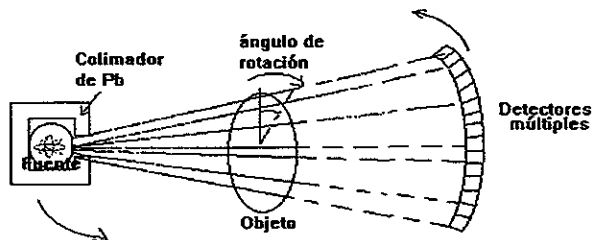


Figura 1.7. Tercera generación de tomógrafos, rotación-rotación

1.2.4. Cuarta generación

En esta generación de tomógrafos la fuente es la única que gira, sobre un anillo interior a otro exterior, en el que están montados los detectores (fig.1.8).

La ventaja más significativa respecto a los tomógrafos de la tercera generación, es evitar el desajuste o deriva de los detectores, lo cual provoca una respuesta diferente a los demás detectores. Esto se manifiesta como un efecto circular en la imagen, resultado del hecho de tener un rayo desajustado, lo que crea un círculo tangente como consecuencia del movimiento geométrico fuente-detectores. Esta nueva generación es incorporada en 1976 al mercado por AS&E.

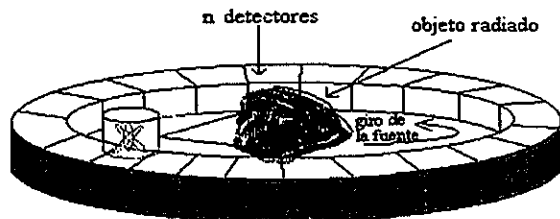


Figura 1.8. Tomógrafo de cuarta generación, con detectores fijos

1.2.5. Quinta generación (Nutante)

Como parte de las innovaciones se propuso el sistema llamado Nutante en el que la fuente está montada en un anillo exterior a los n detectores cuyo diámetro es mayor que el diámetro del anillo formado por los n detectores. En este sistema se propone acortar el tiempo de exposición, y disminuir la dosis de exposición del paciente. Esta generación (fig.1.9), no llegó a fabricarse, sin embargo algunos científicos llamaron a este diseño la quinta generación.

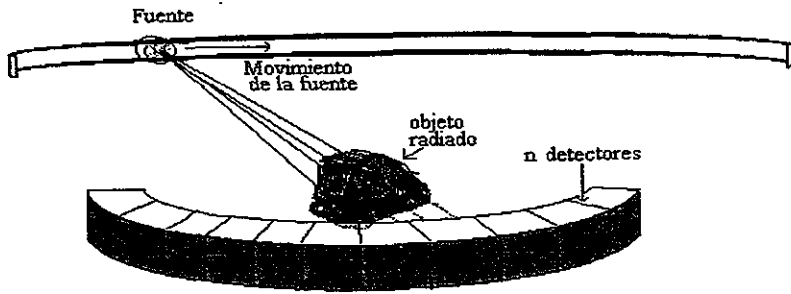


Figura 1.9. Tomógrafo de quinta generación (Nutante)

Los equipos modernos presentan una serie de innovaciones, pero el principio del tomograma sigue siendo el mismo. Actualmente presentan características de gran rapidez y confiabilidad dada por los sistemas de computación, lo que permite tiempos más cortos de reconstrucción de las imágenes. Se obtiene un notable avance en lo relativo a la calidad de la imagen por la mejoría de los detectores, al poder colocar mayor número de éstos en el mismo espacio y por la gran mejoría en los algoritmos de cálculo.

CAPÍTULO II

RADIACIÓN GAMMA Y SUS MECANISMOS DE INTERACCIÓN CON LA MATERIA

En la naturaleza se observa que no todas las combinaciones de protones y neutrones producen núcleos estables¹. Un isótopo inestable se transforma al emitir partículas y/o fotones. Con las emisiones se libera energía y se llega a un nuevo isótopo, este proceso se repite hasta que el núcleo alcanza un estado estable. Este proceso de transformación se denomina radiactividad.

Se ha observado que en los núclidos ligeros estables concuerda el número de neutrones con el de protones. Los núclidos inestables están agrupados alrededor de una línea imaginaria llamada línea de estabilidad (fig. 2.1). Para elementos ligeros ($Z \leq 20$), la línea corresponde a $N \cong Z$, es decir que el elemento a tratar tiene aproximadamente igual número de protones que de neutrones. Para elementos pesados su correspondencia es $N \cong 1.52 Z$, es decir aproximadamente el 50 % más neutrones que protones.

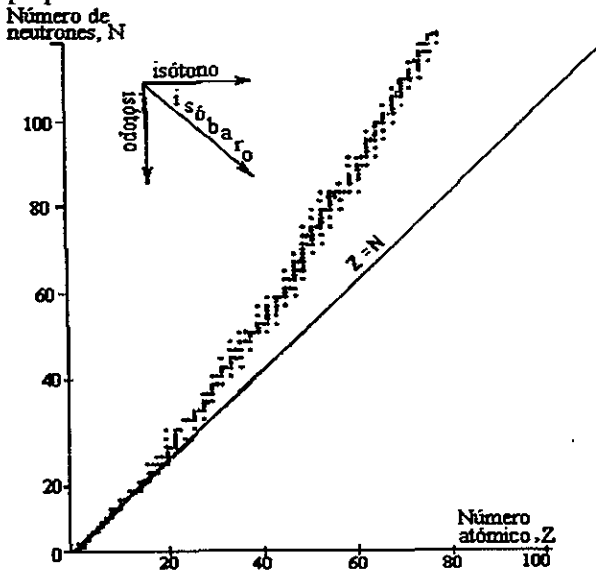


Figura 2.1. Gráfica para núclidos del número de neutrones (N) vs número de protones (Z).

2.1. Rayos X y rayos gamma

Los fotones de energías del orden de keV o mayores son clasificados como X o gamma, de acuerdo a su origen y no a su energía. Los rayos X se originan por dos mecanismos:

¹ Los núcleos o isótopos estables son aquellos que no se transforman en otro elemento.

- Las radiaciones electromagnéticas monoenergéticas obtenidas cuando en un átomo se llena algún nivel electrónico libre interno de las capas K, L, M, etc., por lo que son parte del espectro característico.
- Las radiaciones electromagnéticas continuas, o bremsstrahlung, asociadas con la deflexión (desaceleración) de partículas cargadas debida al campo coulombiano del núcleo.

La radiación gamma es radiación electromagnética que acompaña a las transiciones nucleares en busca de un estado estable de menor energía, por lo que forma el espectro característico del núcleo.

El intervalo energético para los rayos X va desde unos cuantos eV hasta MeV, mientras que para los rayos gamma va desde keV hasta MeV o mucho mayores.

Los rayos X son muy usados en la medicina por su bajo nivel energético, mientras que los rayos gamma son más usados dentro de la industria debido a su alto poder de penetración y por el tamaño de las fuentes.

2.2. Interacción de la radiación electromagnética con la materia.

La interacción de la radiación electromagnética con la materia depende de la cantidad de energía de éstos. En estas interacciones los fotones son absorbidos o dispersados en un solo evento. Hay un número de procesos que pueden causar que la radiación electromagnética sea absorbida o dispersada. Un resumen de los posibles procesos por los que los fotones pueden interactuar con la materia es el siguiente:

Proceso	Blanco de interacción	Intervalo energético de mayor importancia	Probabilidad de ocurrencia como función de Z	Procesos relacionados	Notación
Efecto fotoeléctrico	electrones atados al átomo	Predomina entre 1-500 keV; decrece conforme Energía aumenta	Z^5	Dispersión Rayleigh para electrones con energía de amarre	τ
Dispersión electronica coherente (Rayleigh)	con electrones de banda	< 1 MeV y para ángulos pequeños	Z^2 ángulos pequeños Z^3 ángulos grande	Efecto fotoeléctrico	σ ó σ^R
Dispersión Thomson	(Se consideran) electrones libres	Independiente de la Energía	Z		σ
incoherente X	con electrones de banda	< 1 MeV para ángulos pequeños	Z		σ
Dispersión Compton	(Se consideran) electrones libres	Predomina en la región de 1 MeV y decrece cuando la Energía aumenta	Z		σ_c
Absorción fotonuclear	núcleos como un todo	10-30 MeV		Resonancia nuclear y dispersión nuclear Thomson	

Tabla 2.1. Algunos procesos conocidos de interacción entre la radiación electromagnética y la materia

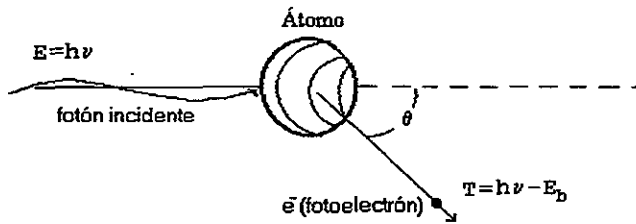
Algunos de estos procesos tienen una baja probabilidad de ocurrencia para energías menores a los 2 MeV, por ello solo tres serán descritos con detalle, como los principales procesos de interacción de la radiación gamma con la materia, siendo los siguientes:

- a) Efecto fotoeléctrico,
- b) Efecto Compton y
- c) Producción de pares, para energías de fotones superiores a 1.022 MeV.

Cada uno de estos procesos viene acompañado por efectos secundarios tales como la emisión de electrones Auger y radiación fluorescente.

2.2.1. Efecto fotoeléctrico

El efecto fotoeléctrico se origina cuando un fotón interactúa con los electrones orbitales del átomo, el fotón es totalmente absorbido y un electrón es liberado de una de las capas del átomo. La interacción se lleva a cabo con el átomo, como un todo en electrones libres.



donde E_b es la energía de amarre del electrón

Figura 2.2. Representación esquemática del efecto fotoeléctrico.

La energía cinética (T) con la que sale el electrón del átomo (llamado fotoelectrón) es:

$$T = h\nu - E_b \quad (2.1)$$

donde E_b es la energía de amarre del electrón al átomo y depende de la capa en que se encontraba. En este proceso se crea una ionización del átomo del que se liberó el electrón, dejando un hueco en una de sus capas, el cual se llena casi inmediatamente a través de la transición de un electrón de una capa externa o de la captura de un electrón libre. La energía restante en este proceso, se manifiesta como rayos X y/o electrones Auger. El efecto fotoeléctrico es más probable cuando se trata de rayos gamma de baja energía y se utilizan materiales que posean un número atómico elevado. Esquemáticamente el efecto fotoeléctrico se presenta en la figura 2.2.

Para energías de radiación gamma del orden de cientos de keV, el electrón portará la mayoría de la energía del fotón original.

El efecto fotoeléctrico no tiene un tratamiento teórico fácil, sin embargo se ha encontrado que especialmente para fotones de baja energía, el fotoelectrón tiende a ser lanzado en la dirección del vector del campo eléctrico de la radiación incidente, mientras que para fotones de alta energía la distribución angular es más probable en la dirección original del fotón [E1].

2.2.2. Efecto Compton

Si un fotón colisiona elásticamente con un electrón libre se produce un intercambio de energía y momento. El electrón aumenta su energía cinética y el fotón pierde energía, por ello su longitud de onda aumenta y su trayectoria original se desvía un ángulo θ , para conservar el momentum y la energía.

Se presenta en la figura 2.3 una representación esquemática del efecto Compton. Al colocar un material absorbedor lo suficientemente grueso en el cual el fotón tenga que atravesar varias capas de átomos, es posible que mediante una sucesión de colisiones un rayo gamma llegue a perder prácticamente toda su energía produciendo en el material absorbedor un número de "electrones primarios". En otras palabras, un rayo gamma que penetra en un absorbedor de dimensiones limitadas puede emerger después de producirse uno o más procesos Compton, con una longitud de onda mayor. Esta longitud de onda del rayo que emerge dependerá de la probabilidad de choque del rayo gamma, lo cual produce a la salida del material absorbedor un intervalo continuo de energías.

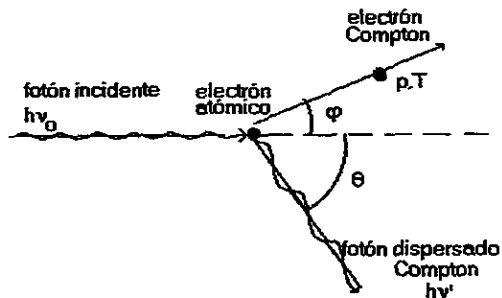


Figura 2.3. Representación de la Dispersión Compton.

La dispersión de fotones de muy baja energía ($h\nu \ll m_0c^2$) por electrones es la descrita por la teoría clásica, o sea no relativista, de J.J. Thomson. Esta teoría no explica lo que ocurre cuando $h\nu$ se acerca a la energía en reposo del electrón, $m_0c^2 = 0.511$ MeV. Cuando el fotón incidente tiene una energía cercana o mayor a la del electrón en reposo, es necesario emplear la teoría relativista, para explicar su dispersión; donde la energía y el momento se conservan entre el fotón dispersado y el electrón golpeado. La dirección del fotón dispersado y la dirección del fotón incidente, nunca son paralelas, excepto para el caso trivial en que el ángulo de dispersión es cero. Cuando la energía $h\nu$ del fotón incidente es mucho mayor que la energía de amarre del electrón, se puede considerar al electrón con energía de amarre cero, o sea libre. En los casos donde la energía del fotón es comparable con la energía de amarre del electrón, la sección eficaz fotoeléctrica es mucho mayor que la sección eficaz Compton, por lo cual la dispersión Compton tiene una menor probabilidad de ocurrencia.

De las ecuaciones de conservación de energía y de momento se tiene que la energía del rayo gamma dispersado un ángulo θ es de la forma :



Figure 1: A graph showing a curve that starts at the origin and increases with a decreasing slope.

The graph shows a curve that starts at the origin (0,0) and increases as it moves to the right. The slope of the curve decreases as it moves to the right, indicating a concave down function. The curve passes through the origin and continues to rise, but at a slower rate.

The curve is concave down, meaning that the slope of the tangent line to the curve at any point decreases as the point moves to the right. This is characteristic of a function that is increasing but whose rate of increase is decreasing. The curve starts at the origin and continues to rise, but the slope of the curve decreases as it moves to the right.

The curve is concave down, meaning that the slope of the tangent line to the curve at any point decreases as the point moves to the right. This is characteristic of a function that is increasing but whose rate of increase is decreasing. The curve starts at the origin and continues to rise, but the slope of the curve decreases as it moves to the right.

The curve is concave down, meaning that the slope of the tangent line to the curve at any point decreases as the point moves to the right. This is characteristic of a function that is increasing but whose rate of increase is decreasing. The curve starts at the origin and continues to rise, but the slope of the curve decreases as it moves to the right.

The curve is concave down, meaning that the slope of the tangent line to the curve at any point decreases as the point moves to the right. This is characteristic of a function that is increasing but whose rate of increase is decreasing. The curve starts at the origin and continues to rise, but the slope of the curve decreases as it moves to the right.

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \left(\frac{h\nu}{mc^2}\right)(1 - \cos\theta)} \quad (2.2)$$

donde $h\nu'$ es la energía del fotón saliente

$h\nu$ es la energía de fotón incidente

m_0c^2 es la masa en reposo del electrón igual a 0.511 MeV

θ es el ángulo del fotón dispersado con respecto a la dirección original

c velocidad de la luz

y la energía del electrón saliente es:

$$E_{e^-} = h\nu - h\nu' = h\nu \left[\frac{\left(\frac{h\nu}{mc^2}\right)(1 - \cos\theta)}{1 + \left(\frac{h\nu}{mc^2}\right)(1 - \cos\theta)} \right] \quad (2.3)$$

Un caso extremo ocurre cuando el fotón entrega un máximo de energía al electrón siendo dispersado el fotón 180° ; este efecto es conocido como borde Compton determinado por la siguiente ecuación:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{2E}{mc^2}} \quad (2.4)$$

Efecto que se observa en el espectro gamma (ver cap.IV).

2.2.3. Producción de pares

La producción de un par de electrones, uno positivo y otro negativo ocurre cuando un fotón con energía igual o superior a 1.02 MeV, se encuentra en las cercanías del núcleo. En esta interacción el fotón es completamente absorbido y en su lugar aparece el par positrón-negatrón, cuya energía total es justamente igual a la energía del fotón. Se presenta esquemáticamente en la figura 2.4.

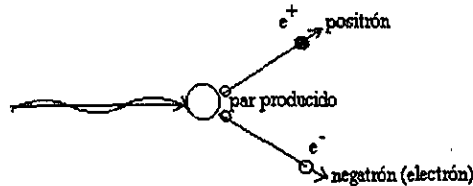


Figura 2.4. Representación esquemática de la producción de pares

2.3. Coeficientes de atenuación

Cuando un fotón atraviesa a lo largo un material absorbedor, la probabilidad de que experimente una interacción depende de su energía y de la composición y grosor del absorbedor. Considérese la energía de transmisión del fotón en la figura 2.5. Un haz de fotones, de intensidad I (fotones/cm²·s), incide directamente sobre un absorbedor de grosor Δx y un detector, sensible a

La radiación electromagnética, lleva un conteo de la intensidad del haz transmitido. Se diseña un sistema de registro de los fotones que pasan a través del absorbedor sin interacción.

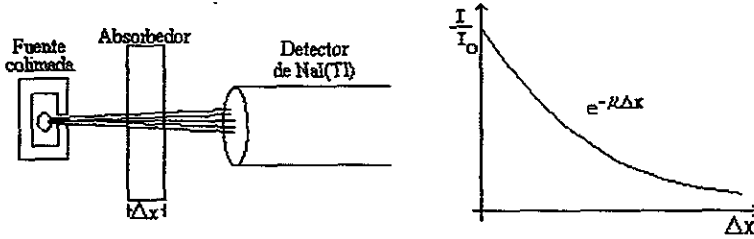


Figura 2.5. Medición de la intensidad de transmisión de un haz de fotones

Para un absorbedor delgado se observa experimentalmente que la intensidad del haz monoenergético se ve reducida por una pequeña cantidad, con las siguiente propiedad: la fracción en que decrece la intensidad del haz ($\Delta I/I$) está relacionada con el grosor del absorbedor Δx de la siguiente manera:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta I}{\Delta x} \right) = -\mu I \quad (2.5)$$

el signo menos indica que la intensidad decrece conforme el grosor del absorbedor es mayor. La cantidad μ es llamada el coeficiente de atenuación lineal para un absorbedor dado. Sus dimensiones son longitud a la menos uno, usualmente cm^{-1} . Esta cantidad refleja el poder de absorción del material para una energía específica. También se ha encontrado que μ se incrementa linealmente con la densidad ρ del material (ver tabla 4 del cap.III). Los efectos de esta densidad son eliminados al dividir μ entre la densidad ρ , obteniéndose el coeficiente de atenuación másico:

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.6)$$

Las unidades de μ son cm^{-1} y las de ρ son g/cm^3 , de donde se obtienen las unidades de μ_m de cm^2/g y depende del número atómico del absorbedor Z y de la energía E del fotón. Algunas veces es representado con la siguiente notación: $\mu_m(Z, E)$.

La ley de atenuación para rayos gamma en términos del coeficiente de atenuación másico es:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-(\mu/\rho)x} \quad (2.7)$$

el producto ρx es conocido como grosor másico del absorbedor.

Ha sido posible medir μ_m y μ en diferentes materiales con un haz de fotones monoenergéticos. Muchas tablas, sin embargo, se han basado en cálculos teóricos. Usualmente, los valores de μ_m son preferidos a los de μ debido a que los primeros no dependen del estado físico (densidad) del absorbedor. Una vez que se tiene μ_m (en tablas), μ puede ser obtenido utilizando la relación (2.6).

Si en lugar de un elemento se tuviese una mezcla de elementos, el coeficiente de atenuación se puede obtener de los valores de sus componentes de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\mu_m(\text{mezcla}) = \mu_{m1}f_1 + \mu_{m2}f_2 + \dots \quad (2.8)$$

donde $\mu_{m1}, \mu_{m2}, \dots$ etc son los coeficientes de atenuación másico para los elementos 1,2,3,... y f_1, f_2, \dots son las fracciones en peso de estos elementos en la mezcla.

Este coeficiente de atenuación másico μ_m depende a su vez de todos los tipos de interacción posibles dentro del rango energético del fotón (tabla 1). Sin embargo se puede decir que μ_m depende de los tres principales procesos (fotoeléctrico, Compton, pares): $\mu_m = \tau + \sigma + \kappa$ donde τ es la contribución de μ_m debida al efecto fotoeléctrico, σ debida a dispersión Compton y κ a la producción de pares. Hay que observar que μ_m involucra los procesos de absorción y de dispersión. La magnitud relativa de τ , σ , y κ varía con el número atómico Z y con la energía E del fotón como se muestra a en la figura 2.6.

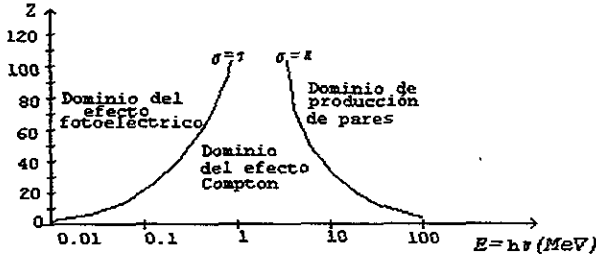


Figura 2.6. Importancia relativa de los tres tipos de interacción de mayor relevancia. Las líneas marcan donde los efectos son justamente iguales.

2.4. Relación entre coeficiente de absorción lineal y sección eficaz

Cuando se habla de colisión entre dos partículas, es necesario mencionar el área efectiva de choque entre ellas. Esta información proporciona la "probabilidad de que dos partículas lleguen a colisionar.

El acercamiento² que ambas partículas tengan entre sí, depende de los siguientes factores: a) cargas opuestas, b) cargas atractivas, c) radios relativos (electrón-electrón, partícula alfa-electrón, electrón-núcleo, etc.) en caso de tratarse de partículas con masa, o bien en el caso de radiación electromagnética, longitud de onda-partícula.

La sección eficaz total depende a su vez de las secciones eficaces de cada tipo de interacción: fotoeléctrico τ_{ef} , Compton σ_C , pares κ ; sus unidades son $\text{cm}^2/\text{átomo}$.

$$\sigma_{tot} = \tau_{ef} + \sigma_C + \kappa \quad (2.9)$$

Por otro lado, la sección eficaz total σ_{tot} ($\approx \tau_{ef} + \sigma_C + \kappa$) por átomo es proporcional al coeficiente de atenuación másico μ/ρ [H4]. La ecuación que relaciona estos dos términos es:

² La distancia mínima de acercamiento entre ambas partículas es conocido como parámetro de impacto.

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \right] &= \sigma_{\text{tot}} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{atom}} \right] \cdot \frac{N_A \left[\frac{\text{atoms}}{\text{g-atom}} \right]}{M \frac{\text{g}}{\text{g-atom}}} \\ &= \sigma_{\text{tot}} \left[\frac{\text{barn}}{\text{atom}} \right] \cdot \frac{N_A \left[\frac{\text{atoms}}{\text{g-atom}} \right]}{M \frac{\text{g}}{\text{g-atom}}} \cdot 10^{-24} \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde N_A es el número de Avogadro (6.02252×10^{23} atom/g-atom), M es el peso atómico del material absorbedor. Las unidades de las secciones eficaces corresponden a la de una superficie, estas se pueden expresar en m^2 , sin embargo por conveniencia se introduce la unidad de los barns³, donde $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2$.

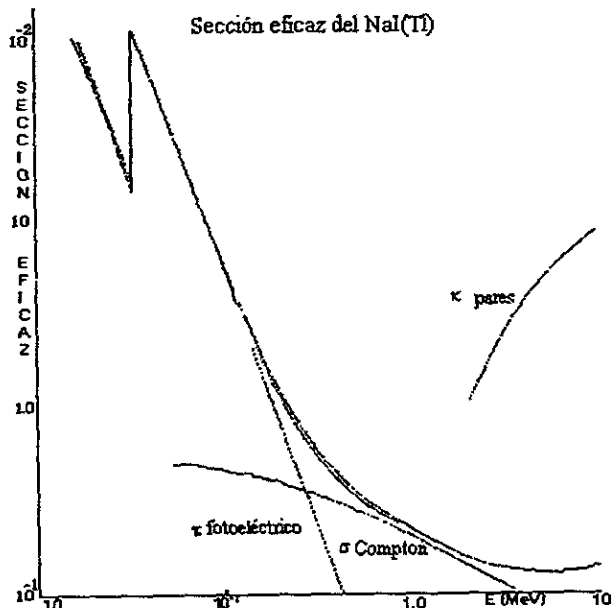


Fig. 2.7. Sección eficaz para cada interacción en NaI(Tl) como una función del rayo gamma [K2].

³ El barn es del orden de magnitud de la sección geométrica de un núcleo. El origen de la unidad barn se dice está ligada al americanismo coloquial "tan grande como un barn" que fue aplicado primeramente a las secciones eficaces de las interacciones para neutrones lentos con cierto núcleo atómico durante el proyecto Manhattan durante la Segunda Guerra Mundial. La Comisión Internacional de Standards, Unidades y Constantes de radioactividad recomendadas en 1950 aceptó el término "barn" como 10^{-24} cm^2 .

CAPÍTULO III

ESTUDIO DE LA ABSORCIÓN DE LA RADIACIÓN GAMMA, ORIENTÁNDOSE A LA TOMOGRAFÍA Y SU DETECCIÓN

La atenuación de la intensidad inicial I_0 , que experimenta un haz de fotones al atravesar un espesor x de material está determinada por la ley de atenuación: $I = I_0 e^{-\mu x}$, donde μ es el coeficiente de atenuación lineal que depende del material que atraviesa y de la energía de los fotones.

En tomografía, el problema principal es detectar fotones de transmisión para estimar los coeficientes de atenuación lineal en la mayor cantidad de puntos de un plano, por esto es fundamental seleccionar la energía y el material de forma conjunta.

3.1. Estudio de la absorción de la radiación gamma, como fundamento para generar la tomografía

Al atravesar la radiación electromagnética un cuerpo, existen principalmente tres procesos de atenuación de la radiación: efecto fotoeléctrico, Compton o producción de pares, que de aquí en adelante denominaremos como eventos. Al interactuar el fotón con la materia, en cualquiera de los tres casos, siempre emerge al menos un electrón y el fotón inicial puede ser absorbido (fotoeléctrico, pares) o dispersado (Compton). El electrón que emerge se atenúa produciendo en su camino ionizaciones o excitaciones principalmente (existiendo otros tipos de atenuación que no se mencionarán) y en caso de ocurrir que el fotón sea dispersado, si éste tiene aún suficiente energía producirá de nuevo cualquiera de los eventos antes mencionados.

La transferencia de energía de los fotones a los electrones, tiene lugar en un camino complejo de eventos, donde cada evento puede volver a ocurrir, y repetirse muchas veces antes de que el fotón (o el electrón) llegue a ser completamente absorbido.

Para esquematizar estos eventos se presenta en la figura 3.1 un diagrama de flujo [B3], donde se mencionan la mayor parte de los eventos posibles de conversión de energía de una forma a otra. Siguiendo cualquier trayectoria, se obtienen las diferentes formas de depósito de energía en el medio, de las cuales sólo se han mencionado algunas en este trabajo.

Si un material está compuesto de diversas densidades, la pérdida de energía en cada choque dependerá de la densidad en esa región de interacción. Se ha observado que a mayor densidad mayor atenuación presenta la radiación electromagnética (ver tabla 3.1 y 3.2). Esta gran dependencia se presenta en la figura 2.6 del capítulo anterior, donde se observa la relación entre la energía y el número atómico para diferentes elementos.

Al hacer un estudio de tomografía, para minimizar problemas y lograr obtener la información adecuada, es necesario conocer dos cosas:

- El (los) tipo(s) de material(es) en estudio
- energía adecuada para realizar dicho estudio.

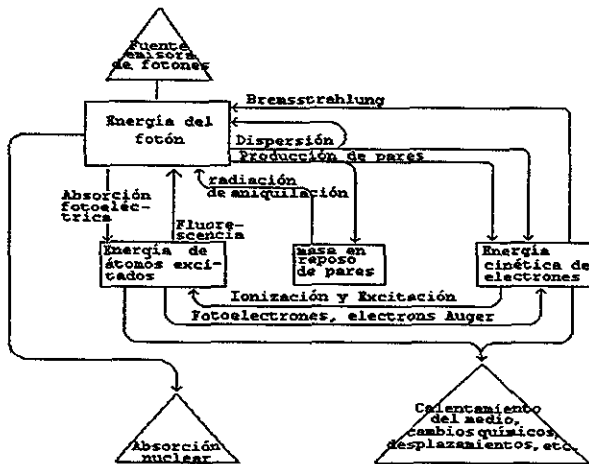


Figura 3.1. Diagrama de flujo de los diferentes mecanismos por los cuales el fotón pierde energía

Diversas tablas teóricas presentan coeficientes de atenuación lineal para diferentes materiales y diferentes energías, como la presentada por J.H. Hubbell [H3].

Tabla 3.1. Coeficiente de atenuación lineal μ [cm^{-1}] para radiación electromagnética de diferentes energías y para diferentes materiales[H3].
*Datos consultados en [H2]

Material	densidad ρ [gr/cm]	coeficiente de atenuación lineal μ [cm^{-1}]		
		0.6 MeV	1 MeV	1.5 MeV
aire (20°C, 76mmHg)	0.001205	0.00009707	0.0000766	0.00006237
gasolina	0.739	----	0.0537*	----
aluminio	2.7	0.2106	0.1659	0.1351
acero 1% carbón	7.83	----	0.460*	----
hierro	7.86	0.6054	0.4711	0.3838
plomo	11.34	1.4152	0.8054	0.5921

En esta tabla se observa que el coeficiente de atenuación lineal de la radiación electromagnética disminuye para un mismo elemento conforme aumenta la energía, lo cual implica que a mayores energías, la materia es atravesada más fácilmente. Por esto es importante tener en mente los principales eventos por los cuales se atenúa la radiación, y las regiones energéticas en las cuales predomina cada uno de ellos.

Algunas veces es preferible manejar el coeficiente de atenuación másico μ/ρ , ya que éste es proporcional a la interacción fotónica total por átomo σ_{tot}^1 , es decir, a la suma de todas las secciones eficaces de los procesos elementales de absorción y dispersión como se establece en la ecuación (2.9). Apoyándose en esta ecuación White-Grodstein [H2] y Davisson [H1] presentan una serie de coeficientes de atenuación másico en la tabla 3.2 para diferentes materiales. En estos resultados no se está considerando la contribución debida a dispersión Rayleigh para bajas energías, ya que aunque en este trabajo no se menciona este tipo de dispersión, es necesario indicar que la dispersión Rayleigh predomina para energías menores de 0.10 MeV [D2] y elementos de número atómico (Z) alto.

Tabla 3.2. Valores del coeficiente de atenuación másico[H1], μ/ρ [cm²/g]

Energía fotón MeV	¹³ Al	²⁶ Fe	²⁹ Cu	⁸² Pb	aire	Nál.	másculo
0.10	0.157	0.334	0.414	5.34	0.149	1.58	0.164
0.15	0.132	0.179	0.201	1.91	0.133	0.566	0.147
0.2	0.119	0.136	0.144	0.936	0.122	0.302	0.134
0.3	0.103	0.105	0.106	0.373	0.106	0.153	0.117
0.4	0.0919	0.0913	0.0909	0.215	0.0951	0.11	0.105
0.5	0.0839	0.0824	0.0816	0.151	0.0869	0.0904	0.0958
0.6	0.0776	0.0758	0.0748	0.117	0.0804	0.079	0.0886
0.8	0.0682	0.0663	0.0652	0.0841	0.0706	0.0657	0.0779
1.0	0.0613	0.0595	0.0585	0.068	0.0635	0.0576	0.07
1.5	0.0500	0.0486	0.0478	0.0509	0.0517	0.0464	0.057

Estas tablas proporcionan una forma de acotar el problema, es decir, al tratar de obtener el tomograma de un cuerpo que posiblemente tiene plomo, hay cierto intervalo energético que se puede usar para determinar los coeficientes de atenuación. En las tablas 3.1 y 3.2 se han subrayado las energías de la fuente de Cs-137 y los materiales utilizados en este trabajo.

3.2 Detección de la radiación gamma.

El proceso físico que permite detectar partículas es diferente para partículas neutras que para partículas cargadas. Los fotones pueden interactuar por tres procesos principales: fotoeléctrico, Compton y pares, produciendo electrones secundarios. Si una partícula cargada atraviesa una capa de material, tres procesos pueden ocurrir: los átomos pueden ser ionizados, la partícula puede emitir radiación Cherenkov o la partícula puede causar la emisión de radiación de transmisión. Los detectores de radiación aprovechan alguno de estos efectos para intensificarla y así hacerla más notable. Se pueden clasificar esencialmente en dos grupos: 1) los de registro permanente que se caracterizan porque acumulan durante un tiempo la información sobre la radiación, y luego mediante algún método se pone de manifiesto, y 2) los de señal instantánea. Para el segundo caso se tienen los detectores de centelleo que son los más comunes para detectar radiación gamma.

¹ $\sigma_{tot} = \tau + \sigma + \kappa$

El término detección, generalmente incluye la determinación de la presencia de la radiación, mientras que la medición incluye a la detección y alguna medida de la magnitud de la radiación presente.

Los detectores de centelleo constan de dos partes físicas fundamentales: la sustancia luminiscente y el fotocátodo, los cuales son ensamblados dentro de una envoltura opaca a la luz (cámara oscura), a través de la cual puede penetrar la radiación a detectar.

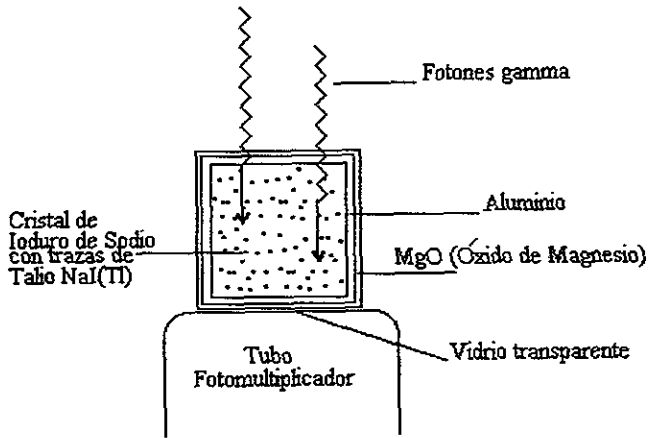


Figura 3.2. Recubrimiento de un cristal de Ioduro de Sodio

La detección de la radiación gamma por cualquier tipo de detector de centelleo es básicamente un proceso que se puede resumir en tres pasos: un fotón al interactuar con un cristal de centelleo, libera un electrón (fotoeléctrico, Compton o pares). Este electrón es atrapado dentro del mismo cristal por una impureza (talio), que produce fotones luminosos como se muestra en la figura 3.3; finalmente los fotones luminosos transfieren su energía a los electrones (fotocátodo) dentro del tubo fotomultiplicador y éstos son colectados y multiplicados en forma de pulsos eléctricos.

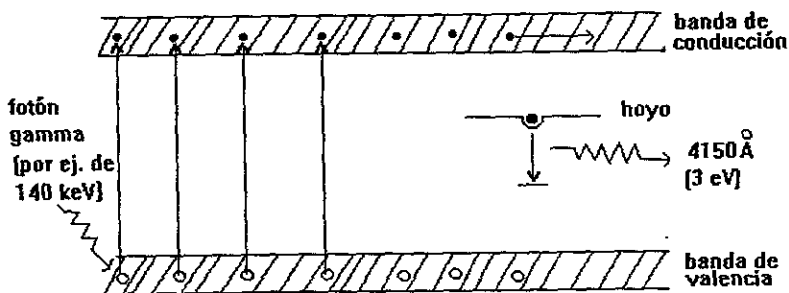


Figura 3.3. Diagrama de los eventos que ocurren en el cristal de Ioduro de Sodio.

Los cristales de centelleo, tienen la característica de absorber energía y regresar ésta como radiación monocromática visible o cercano al visible. El centellador más usado para detección de radiación gamma, es el Ioduro de Sodio con trazas de Talio (NaI(Tl)), existiendo una gran variedad de detectores.

El cristal de NaI(Tl) es transparente y se coloca en un contenedor sellado a prueba de luz y a prueba de la humedad, dado que este cristal es higroscópico².

La figura 3.2 muestra un cristal de NaI(Tl) , montado en una caja de aluminio con una capa reflectora de óxido de magnesio (MgO). Un vidrio de cuarzo permite que los fotones luminosos escapen del cristal y entren al tubo fotomultiplicador.

Existen otras sustancias fluorescentes inorgánicas utilizadas en detectores de centelleo como el sulfuro de zinc activado con plata cuya nomenclatura es, ZnS(Ag) , sin embargo el uso de ésta es para la detección de partículas alfa. El Ioduro de sodio activado con talio es el centellador inorgánico más usado [H2] por su alta eficiencia de conversión luminosa como se muestra en la tabla 3.3.

Tabla 3.3 Materiales centelladores y sus características.

Material	Densidad	Máx. longitud de la emisión	Altura relativa del pulso	Tiempo de decaimiento
	g/cm^3	$\overset{\circ}{\text{A}}$ (Angstroms)		ns
NaI(Tl)	3.67	4150	210	250
CsI(Tl)	4.51	4300	55	630
KI(Tl)	3.13	4100	50	1000
Antraceno	1.25	4400	100	32

² Los cristales higroscópicos son aquellos que sus condiciones varían con el cambio de la humedad llegando a perder su transparencia.

Trans-Estil-benceno	1.16	4100	60	6.4
Plástico		3550-4500	28-48	3 - 5
Líquido		3550-4500	27-49	2 - 8
p-Terfenil	1.23	4000	40	5

Existen monocristales de NaI(Tl) de tamaños muy variados, desde unos cuantos centímetros cúbicos hasta varios litros, con los que se consiguen eficiencias de detección gamma mucho mayores de las obtenidas con detectores de ionización gaseosa.

Cuando un fotón de radiación X o gamma es enteramente absorbido en el cristal de centelleo, el impulso eléctrico en el fotomultiplicador resulta ser de amplitud proporcional a la energía del fotón absorbido. Ello hace posible el uso de estos detectores para obtener el espectro de un haz de radiación gamma y deducir la naturaleza del radioisótopo emisor.

En los detectores gaseosos, los iones y electrones liberados en el proceso de detección se mueven hacia los electrodos, chocando con los átomos o moléculas del gas. Este movimiento no puede ser rápido debido a que los iones tienen una masa mucho mayor que los electrones. En los detectores de centelleo, por el contrario, la única carga liberada se debe a los electrones que se mueven dentro del tubo fotomultiplicador, en el vacío y a gran velocidad.

La producción de fotones luminosos en un cristal centellador es un proceso, como el que se muestra en la figura 3.3. Un fotón transfiere su energía a un fotoelectrón o electrón Compton, que excita a un gran número de electrones produciendo ionizaciones o excitaciones. Por lo que estos electrones ionizados y excitados pueden moverse a niveles energéticos superiores, conocidos como banda de conducción y banda de excitación, hasta que ellos caen dentro de una impureza, que actúa como una trampa energética. Estas trampas son producidas al añadir ciertas impurezas llamados activadores dentro del cristal. Para el Ioduro de sodio, pequeñas cantidades de talio hacen el papel de las trampas. La trampa inmediatamente da esta energía en la forma de un fotón luminoso. En el NaI(Tl), los fotones emitidos (centelleos) tienen longitud de onda de 4150 angstroms, lo que corresponde a una energía de 3 eV por fotón. Todo el proceso ocurre en un lapso de tiempo de aproximadamente 0.23×10^{-6} s (ver tabla 3.3), al cual se le denomina tiempo de decaimiento.

El siguiente paso en el proceso de detección es la conversión de la energía de la luz en pulsos eléctricos. Esto se realiza en un tubo fotomultiplicador (fig. 3.4).

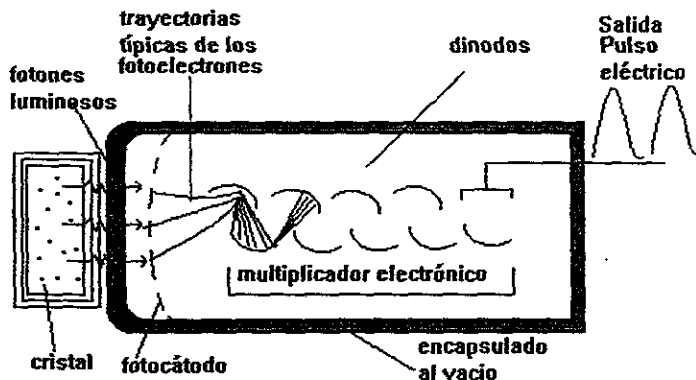


Figura 3.4. Estructura básica del tubo fotomultiplicador

La superficie interior, cercana al cristal, está revestida de una sustancia, (para algunos detectores es el antimonio de cesio) la cual permite que se emitan fácilmente electrones cuando es golpeada por fotones luminosos. Estos electrones son acelerados por un potencial de varios volts existentes entre la superficie emisora y la superficie colectora, llamado primer dinodo. Cada electrón que cumple esto es capaz de liberar 5 ó más electrones que son acelerados y enfocados hacia el segundo dinodo, este proceso se sigue hasta alcanzar los 10 dinodos. La ganancia total del fotomultiplicador depende del voltaje aplicado al tubo, típicamente éste puede ser de unos cuantos cientos de volts. La cantidad tan grande de electrones a la salida proporciona un pulso eléctrico, el cual puede ser medido directamente por un escalador electrónico.

Algunos electrones pueden ser emitidos espontáneamente del fotocátodo y las superficies de los dinodos emitirán un pulso eléctrico que debemos considerar como ruido. Este ruido puede considerarse mucho más pequeño que los pulsos causados por los fotoelectrones, por lo que no llega a afectar en gran medida la medición, pero debe ser considerado dentro de las mediciones.

3.2.2 Características de los detectores de NaI(Tl)

Las características de los detectores de centelleo de NaI(Tl) se pueden enumerar en:

- Absorción
- Temperatura de respuesta
- Calidad del cristal
- Tiempo de respuesta
- Ventana de transmisión
- Óptica reflectora
- Tubo de luz
- Fototubo

a. Absorción. Con la absorción se realizan al menos dos eventos: proceso fotoeléctrico y Compton. En general, la absorción total es uno de estos dos procesos. El rayo gamma incidente sufre varias dispersiones Compton antes de llegar a ser absorbido por el efecto fotoeléctrico.

La figura 3.5 presenta una familia de curvas donde se muestra el porcentaje de absorción como una función de la energía del rayo gamma incidente para varios grosores de cristales de NaI(Tl). Estas curvas son de gran uso en el diseño de un experimento o en la selección del detector adecuado para realizar una función específica.

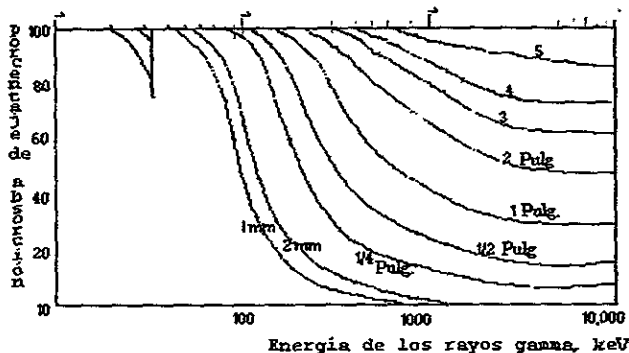


Figura 3.5. Eficiencia de la absorción del NaI(Tl) en función de la energía del rayo gamma. Datos derivados de NBS circular 583. Cada curva representa el porcentaje de absorción (atenuación I) de un haz paralelo de rayo gamma normalmente incidente sobre el grosor del cristal de NaI(Tl).

b) Temperatura de respuesta. Un cristal de NaI(Tl) también muestra un cambio en la luz de salida por unidad de energía absorbida como un cambio en la temperatura del cristal (figura 3.6). En el intervalo de 20 a 145 grados centígrados la luz de salida puede decrecer aproximadamente en un 0.20 por ciento por grado centígrado.

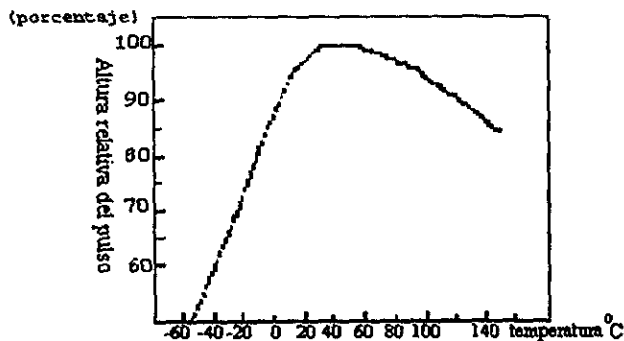


Figura 3.6. Eficiencia del centellador NaI(Tl) como una función de la temperatura

c) Calidad del cristal. La respuesta del detector de centelleo de NaI(Tl) es muy dependiente de la concentración del activador Talio, de la uniformidad de la pérdida de la energía, de la temperatura y de las concentraciones de otros elementos que modifican la pureza del cristal (defectos). Los cristales de NaI(Tl) tienen propiedades electrónicas, por lo tanto su banda de valencia y sus energías de excitación son alteradas por estas variables. Para tener una buena resolución es esencial controlar estas variables a niveles macroscópicos, manteniendo la mínima variación.

d) Tiempo de respuesta. La subida y decaimiento del pulso del centelleo del NaI(Tl) deben ser considerados durante todo experimento.

Tabla 3.4. Tiempos de respuesta para algunos modelos de detectores

Cristal diámetro por espesor	detector	Tiempo de subida n seg
2" 2"	SRCL50B01	12
3" x 3"	SRC75B01	18
2" x 2"	RCA8575	6
10 " x 10"	RCA8575	20

El pulso de subida tiene un máximo de aproximadamente 20 nanosegundos, sin embargo este tiempo depende de las dimensiones del cristal.

d. Ventana de transmisión. El envase del cristal es seleccionado considerando la energía de la radiación que va a ser detectada y el ambiente en el que el detector va a operar. Contiene una cubierta de aluminio (material que se utilizará en este trabajo), aunque se les encuentra también con una cubierta de acero inoxidable.

e. Reflector óptico. El montaje del cristal de NaI(Tl) en un contenedor sellado herméticamente es muy importante para el rendimiento. El material reflector es normalmente óxido de magnesio u óxido de aluminio. La figura 3.7 muestra la reflectividad de 3 materiales como una función de la longitud de onda. El óxido de magnesio es el material reflejante más usado por su muy buena reflectividad para longitudes de onda de 4150 \AA .

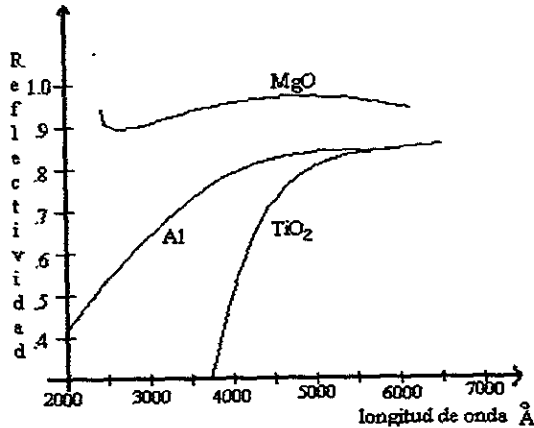


Figura 3.7. Reflectividad de varias superficies

f. Tubos de luz. Los cristales de NaI(Tl) son acoplados directamente a la placa de la cara del fototubo, o a través de una ventana intermedia a la placa de cara del fototubo. El material de las ventanas intermedias es típicamente cuarzo o vidrio. La ventana óptica intermedia puede ser usada sólo para la recolección uniforme de luz. Esa ventana óptica tiene un espesor típico de 3/8 pulgadas de espesor.

g. Fototubo. El cristal de centelleo de NaI(Tl) debe ser acoplado a un fototubo multiplicador que tenga una eficiencia fotónica alta en la banda de longitud de onda para la emisión de luz del NaI(Tl). La longitud de onda de máxima emisión del NaI(Tl) es 4150 Å. El espectro de emisión total es de 3200 a 5100 Å. La figura 3.8.a muestra un espectro de emisión característico para un cristal de NaI(Tl). La figura 3.8.b es una representación de la sensibilidad relativa del fotocátodo.

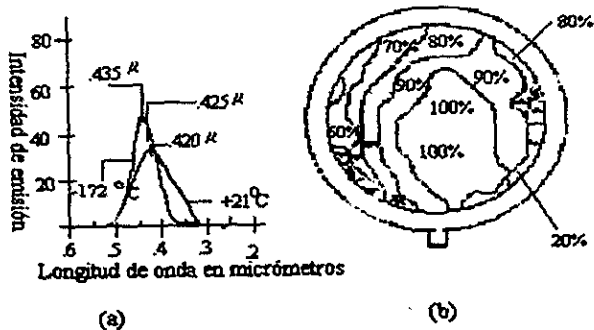


Figura 3.8. a. Espectro de emisión para NaI(Tl).
b. Sensibilidad relativa en un fotocátodo para un fototubo de 2".

CAPÍTULO IV

MODELO MATEMÁTICO PARA OBTENER TOMOGRAFÍAS DE DOS DIMENSIONES, A PARTIR DE UN MODELO DE ABSORCIÓN DE LA RADIACIÓN

La tomografía axial está basada en el análisis de la función de distribución de densidades en un plano, la cual se obtiene de la atenuación de la radiación en un conjunto de trayectorias fuente-detector a través del objeto en estudio, tratando de cubrir la mayor parte de puntos internos de éste, lo que lleva a obtener información relativa a cambios pequeños de la densidad dentro del interior del objeto, sin ser destruido.

Basándose en un tomógrafo de tercera generación, la idea principal, es hacer varias mediciones de intensidades durante un cierto tiempo de exposición a lo largo de líneas rectas manteniendo fija la fuente emisora en diferentes posiciones que denominaremos con letras mayúsculas (A, B, C, etc), como se muestra en la figura 4.1. Al hacer movimientos rotacionales del disco 1 se logran generar una serie de trayectorias a través del material, equivalentes a las obtenidas si se moviese el detector a diferentes posiciones. Al hacer barridos en un número m de direcciones diferentes, se puede visualizar como un abanico de proyecciones con respecto de la fuente (A). Para obtener una segunda posición de la fuente, denominada B, un segundo disco (2) es girado (figura 4.2) a una segunda posición y se procede a repetir el número de trayectorias del paso anterior. Así se continúa hasta tener l posiciones diferentes de la fuente que cubran 180 grados.

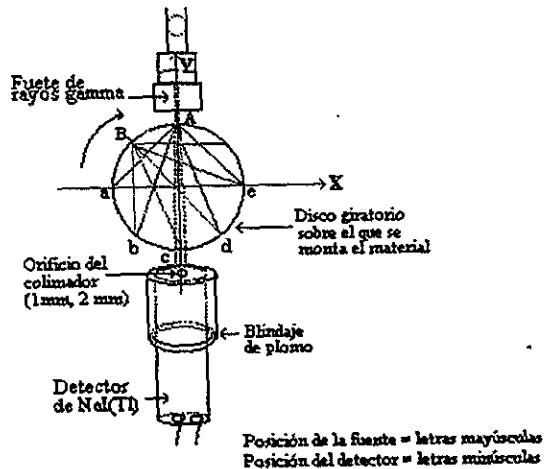


Figura 4.1 Tomógrafo de tercera generación, presentando un abanico de proyecciones para una posición de la fuente y diferentes posiciones del detector.

Con este sistema se obtienen trayectorias cuyas intersecciones se encuentran dentro del plano investigado. A partir de los datos obtenidos se obtiene un sistema de ecuaciones linealmente independientes de $l \times m$.

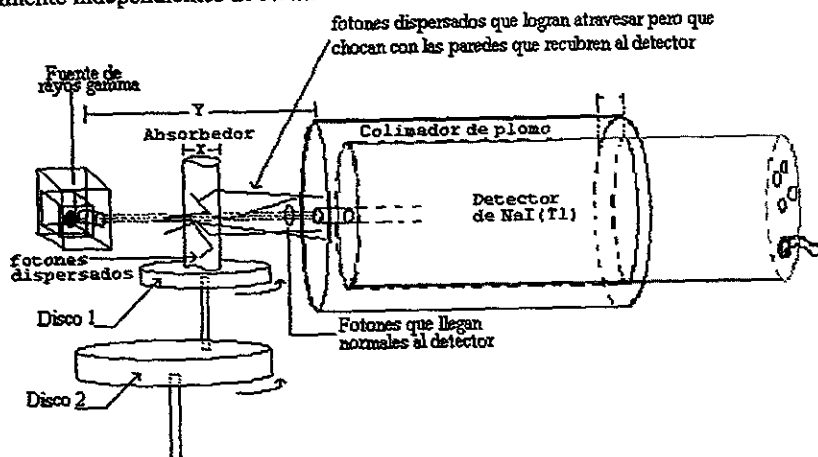


Figura 4.2. Sistema fuente-detector colimados

Sea W_i el número total de fotones que dejan la fuente y salen en la dirección del detector. En ausencia de atenuación todos los fotones, W_i pueden ser detectados. Sean M_i los fotones detectados realmente, entonces M_i constituyen los datos observados.

La resolución espacial depende de la finura del haz de fotones detectados y del barrido del objeto. Mientras que su precisión depende del colimador y del detector empleado, aspecto que se trata en el siguiente capítulo. Por otro lado, la resolución también está limitada por el barrido del objeto o malla en que se divide el objeto para ser estudiado. Es necesario por ello decidir qué tipo de información se está buscando, y en base a esto, calcular cuál es la mejor división del objeto (malla) que se desea emplear. Al considerar estos dos parámetros (ancho del haz y malla) se tiene por un lado, que la información que se obtiene para reconstruir la forma interna del objeto es más precisa cuando se tiene una malla fina, lo que aumenta los datos e implica mayor cantidad de cálculos, tiempo y costo.

Una vez determinada la resolución, el siguiente paso es obtener los coeficientes de atenuación del objeto, función denominada $\mu(x,y)$, la cual es desconocida. Se propone hacer una aproximación por Taylor de orden p .

Finalmente el tratamiento matemático propuesto para estimar los coeficientes de la función obtenida es por medio de mínimos cuadrados (MC), apoyándose en el siguiente modelo lineal: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + K + \beta_n X_n$.

4.1 Bases del modelo matemático

La intensidad inicial considerada como I_0 , es el flujo de fotones que surgen de la fuente y llegan al detector sin atenuador¹. Al colocar el objeto a analizar, el número de fotones detectados disminuye, debido a las interacciones que estos sufren principalmente con los electrones. Los fotones que logran cruzar y llegar al detector siguiendo una trayectoria lineal (figura 4.2) tienen una intensidad I .

La información recabada en cada trayectoria es el resultado de la interacción de la radiación a través de capas muy delgadas que componen el medio, lo cual se puede representar como la suma de todos los coeficientes de atenuación de los diferentes medios que atraviesa la radiación en una cierta trayectoria designada L_k . La ecuación de absorción para la intensidad del rayo gamma que ha pasado el medio investigado es la siguiente:

$$\ln \frac{I_0}{I} = \sum_{i=1}^n \mu_i \Delta x_i$$

Si la distancia entre un valor y otro se hace cada vez más pequeña, esto es $\Delta x \rightarrow 0$, se llega al caso continuo, donde la suma puede ser representada como una integral de línea sobre la línea recta L_k , que representa la línea que sigue la radiación entre la fuente y el detector, obteniéndose:

$$M(L_k) = \int_{L_k} \mu(L_k) dl \quad (4.1)$$

donde $M(L_k) = \ln I_0/I$ y $\mu(L)$ el coeficiente de absorción lineal, el cual es función de la densidad del medio atravesado y de la energía del fotón inicial.

A.M. Cormak [C2] probó que si una de estas funciones (μ , M) es continua y acotada, entonces hay una correspondencia uno a uno entre ellas, por lo que con la información de cualquiera de las dos variables es posible encontrar la solución para la otra variable.

La función $\mu(L)$ es una función de dos dimensiones por ejemplo de (x,y) , en coordenadas cartesianas, lo cual es suficiente para resolver el problema en dos dimensiones. La tercera dimensión se puede obtener al ir añadiendo planos paralelos. La solución de esta función determina la forma de variación de los parámetros de dicha función dentro del medio.

Un dato experimental cualquiera contiene información acerca de la intensidad promedio a lo largo de la línea L , entonces $M(L)$ es una función de dos dimensiones, por lo tanto el coeficiente de atenuación es también una función de dos variables.

Para esta función (desconocida, ya que no conocemos su forma analítica en el plano en estudio), se propone hacer una aproximación a un polinomio² de dos variables de grado n donde los coeficientes de dicho polinomio son los parámetros que se tienen que estimar. Para ello se propone la aproximación de la función por series de Taylor [A2] y [C3]. Esta serie aproxima la función analizada en base a sus "p" derivadas. Un requisito para hacer esta aproximación es que existan las $p+1$ derivadas de la función.

Aplicando el teorema de Taylor a segundo orden [C3] para funciones de dos variables se tiene:

¹ Se considera así, ya que aunque existe aire entre la fuente y el detector, el coeficiente de atenuación lineal del aire presentado en la tabla 3.1 es casi despreciable con respecto a los otros materiales que se utilizan en la industria.

² Generalmente se escoge este tipo de aproximación debido a que los valores de una función polinomial son fáciles de calcular.

$$\mu(x+h, y+k) = \mu(x, y) + h\mu_x(x, y) + k\mu_y(x, y) + \frac{1}{2!}(h^2\mu_{xx} + 2hk\mu_{xy} + k^2\mu_{yy}) + R_2 \quad (4.2)$$

donde R_2 es conocido como el residuo y el cual se obtiene de:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} \mu(x+z, y+z) \quad \text{con } 0 < z < 1$$

μ_x representa la primera derivada parcial de μ con respecto de "x", y cuando se repite "x" indica las veces que se deriva la función μ , μ_y representa la primera derivada parcial de μ con respecto de "y", y así sucesivamente.

Estas derivadas representan los cambios existentes a lo largo de la función que finalmente es lo que se está buscando.

Desarrollando alrededor del punto (0,0), (serie de MacLaurin), y haciendo h igual a "x" y k igual a "y", la ecuación (4.2) cambia a:

$$\mu(x, y) = \mu(0,0) + x\mu_x(0,0) + y\mu_y(0,0) + \frac{1}{2!}[x^2\mu_{xx}(0,0) + 2xy\mu_{xy}(0,0) + y^2\mu_{yy}(0,0)] \quad (4.3)$$

Definiendo: $\mu_{x^n y^k} = a_{nk}$, es decir, cuando $n=2$ y $k=0$, $\mu_{x^2 y^0} = a_{20}$

y sustituyendo en (4.3), se tiene:

$$\mu(x, y) = a_{00} + a_{10} \cdot x + a_{01} \cdot y + \frac{1}{2} a_{20} x^2 + a_{11} xy + \frac{1}{2} a_{02} y^2 \quad (4.4)$$

El comportamiento de esta función a lo largo de cada trayectoria depende de la posición (x, y). Al escoger una recta³ L_k (cuya ecuación se representa como, $y_k = m_k x + b_k$ donde m_k es la pendiente b_k es la ordenada al origen con respecto a un sistema de referencia⁴ como se muestra en la figura 4.3), y ser sustituida en la ecuación (4.4), $\mu(x, y)$ se convierte en una función de una variable, a la cual denominaremos $\dot{\mu}$.

$$\mu(x, y) \Big|_{y_k = m_k x + b_k} = \dot{\mu}(x) = a_{00} + a_{10} \cdot x + a_{01} \cdot (m_k x + b_k) + \frac{1}{2} a_{20} x^2 + a_{11} x(m_k x + b_k) + \frac{1}{2} a_{02} (m_k x + b_k)^2 \quad (4.5)$$

³ Para distinguir cada recta, la notación utilizada es la siguiente: $y_k = m_k x + b_k$ donde el índice k determina la posición relativas fuente-detector.

⁴ Aprovechando la simetría del cuerpo el sistema de referencia propuesto ubica su origen en el centro del cuerpo como lo muestra la figura 4.3.

Abanico formado para la primera y segunda posición de la fuente y las diferentes posiciones del detector

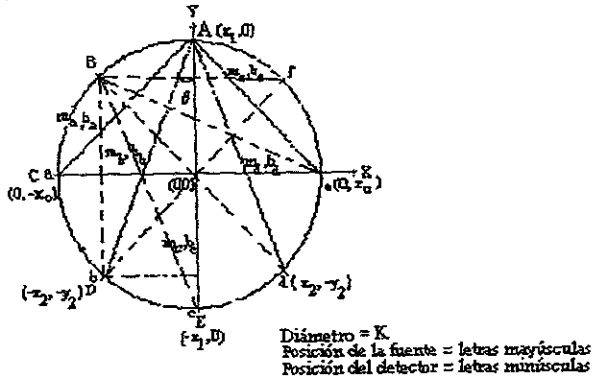


Figura 4.3. Diferentes posiciones del sistema fuente-detector

Sustituyendo (4.5) en (4.1) se tiene:

$$\ln \frac{I_0}{I} = \int_{x_0}^{x_1} \left[a_{00} + a_{10} \cdot x + a_{01} \cdot (m_k x + b_k) + \frac{1}{2} a_{20} x^2 + a_{11} x(m_k x + b_k) + \frac{1}{2} a_{02} (m_k x + b_k)^2 \right] dx$$

Desarrollando los términos cuadrados y asociando los términos comunes en grado de las x's se tiene:

$$M_k = \ln \frac{I_0}{I_k} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{1}{2} a_{02} m_k^2 + a_{11} m_k + \frac{1}{2} a_{20} \right) \cdot x^2 + (a_{01} m_k + a_{11} b_k + a_{02} m_k b_k + a_{10}) \cdot x + \left(\frac{1}{2} a_{02} b_k^2 + a_{01} b_k + a_{00} \right) \right] dx \quad (4.6)$$

$$= \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} a_{02} m_k^2 + a_{11} m_k + \frac{1}{2} a_{20} \right) \cdot x^3 \right]_{x_0}^{x_1} + \frac{1}{2} (a_{01} m_k + a_{11} b_k + a_{02} m_k b_k + a_{10}) \cdot x^2 \Big|_{x_0}^{x_1} + \left(\frac{1}{2} a_{02} b_k^2 + a_{01} b_k + a_{00} \right) \cdot x \Big|_{x_0}^{x_1}$$

Al sustituir los límites superior e inferior, que representan la longitud que existe entre fuente-detector para cada posición (fig. 4.3), y reagrupando nuevamente con respecto a los coeficientes se obtienen k ecuaciones linealmente independientes cuyas incógnitas son los coeficientes a_{nk} .

Las ecuaciones que se obtienen son de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 M_k = & a_{00}(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}a_{10}(x_1^2 - x_0^2) + a_{01}\left[\frac{1}{2}m_k(x_1^2 - x_0^2) + b_k^2(x_1 - x_0)\right] + \\
 & a_{02}\left[\frac{1}{2}b_k^2(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}m_k b_k(x_1^2 - x_0^2) + \frac{1}{6}m_k^2(x_1^3 - x_0^3)\right] + \frac{1}{6}a_{20}(x_1^3 - x_0^3) + \\
 & a_{11}\left[\frac{1}{2}b_k(x_1^2 - x_0^2) + \frac{1}{3}m_k(x_1^3 - x_0^3)\right]
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si se llama a:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= (x_1 - x_0) \\
 \lambda_2 &= (x_1^2 - x_0^2) \\
 \lambda_3 &= (x_1^3 - x_0^3),
 \end{aligned}$$

la ecuación (4.7) toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 M_k = & a_{00}\lambda_1 + \frac{1}{2}a_{10}\lambda_2 + a_{01}\left[\frac{1}{2}m_k\lambda_2 + b_k\lambda_1\right] + \frac{1}{6}a_{20}\lambda_3 + a_{11}\left[\frac{1}{2}b_k\lambda_2 + \frac{1}{3}m_k\lambda_3\right] + \\
 & a_{02}\left[\frac{1}{2}b_k^2\lambda_1 + \frac{1}{2}m_k b_k\lambda_2 + \frac{1}{6}m_k^2\lambda_3\right]
 \end{aligned}$$

Redefiniendo los coeficientes de las a_{ij} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= Z_1 \\
 1/2\lambda_2 &= Z_2 \\
 \left[\frac{1}{2}m_k\lambda_2 + b_k\lambda_1\right] &= Z_3 \\
 1/6\lambda_3 &= Z_4 \\
 \left[\frac{1}{2}b_k\lambda_2 + \frac{1}{3}m_k\lambda_3\right] &= Z_5 \\
 \left[\frac{1}{2}b_k^2\lambda_1 + \frac{1}{2}m_k b_k\lambda_2 + \frac{1}{6}m_k^2\lambda_3\right] &= Z_6
 \end{aligned}$$

donde cada Z_i tiene valores bien determinados que dependen de la posición de la recta escogida, el polinomio general se transforma en:

$$M_k = Z_1 a_{00} + Z_2 a_{01} + Z_3 a_{10} + Z_4 a_{02} + Z_5 a_{20} + Z_6 a_{11} \quad (4.8)$$

Los a_{ij} son los coeficientes a estimar ya que las Z_i se conocen a partir de las posiciones $x_1 - x_0$, de las ordenadas al origen y de las pendientes de cada recta determinada entre la fuente y el detector.

4.2 Modelo matemático (mínimos cuadrados)

Cuando se tiene una función Y lineal en "n" variables independientes, se representa como:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Z_{1i} + \beta_2 Z_{2i} + \dots + \varepsilon$$

para valores desconocidos de los parámetros β_i y valores conocidos de las Z_i y Y_i , donde las Z_i pueden representar cualquier función de las variables X_1, X_2, X_3, \dots

Cuando se dice que un modelo es lineal o no lineal se refiere a la linealidad o no linealidad en los parámetros β 's, por lo que un modelo lineal es de la siguiente forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \varepsilon \quad (4.9)$$

Este modelo tiene una variable aleatoria ε , que representa el error asociado a cada medición (desviación estandar), y se define de la siguiente manera: $\varepsilon = Y_i - \hat{Y}_i$, donde Y_i es el valor observado y \hat{Y}_i es el valor estimado para la misma medición.

La ecuación (4.8) se ajusta a este modelo, en el cual se deben obtener estimaciones de los coeficientes, lo cual se puede realizar por el método de mínimos cuadrados, también conocido como "regresión múltiple".

Mínimos cuadrados está basado en el tratamiento matemático que minimiza la suma del cuadrado de los errores asociados a cada medición.

Si los valores estimados de β_i son b_i , estos valores deben ser aquellos que producen el mínimo valor de S.

$$\text{donde } S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \dots - \beta_n x_{in})^2 \quad (4.10)$$

Al obtenerse las derivadas parciales de S con respecto de cada parámetro se obtienen n ecuaciones conocidas como normales. Estas ecuaciones normales tienen una representación en forma matricial de la siguiente forma[D2]:

$$X'Xb = X'Y \quad (4.11)$$

$$\text{donde } X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & \dots & x_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n3} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

y X' es la transpuesta de X

El sistema determinado por la ecuación (4.10) puede resolverse, si $X'X$ es no singular o no está mal condicionada.

El producto $X'X$, es el siguiente:

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ x_{13} & x_{23} & \dots & x_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1k} & x_{2k} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{ik1} \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n (x_{i1})^2 & \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot x_{ik} \\ \sum_{i=1}^n x_{i2} & \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot x_{i2} & \sum_{i=1}^n (x_{i2})^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_{i2} \cdot x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik} & \sum_{i=1}^n x_{i1} \cdot x_{ik} & \sum_{i=1}^n x_{i2} \cdot x_{ik} & \dots & \sum_{i=1}^n (x_{ik})^2 \end{bmatrix}$$

Para obtener la regresión lo que se busca es invertir la matriz $X'X$, lo cual no se logra cuando alguna de las ecuaciones normales son combinaciones lineales de otras. Por lo tanto la solución a la ecuación (4.11) está basada en la existencia de la inversa de $X'X$. Si existe $(X'X)^{-1}$ entonces los valores estimados b_i son:

$$\mathbf{b} = (X'X)^{-1} X'Y \quad (4.12)$$

Existen diversos algoritmos para encontrar la inversa de una matriz de $l \times m$. Se hará uso de las herramientas matemáticas ya existentes, para ahorrar tiempo.

En computación existen diversos paquetes de software para obtener los coeficientes de una matriz de $n \times m$.

Una vez que se determinan los valores a_{ij} , se sustituyen en la ecuación (4.4).

Cuando se tiene la ecuación estimada es importante considerar la precisión de la regresión la cual representa qué tan bien ajustada quedó a los valores experimentales.

Los errores, en general son tres tipos [S3]:

a) Errores por distracción: producen resultados inadecuados debidos por ejemplo, al uso incorrecto de instrumentos. Este tipo de error sólo puede preverse teniendo cuidado en el experimento.

b) Errores sistemáticos: producen resultados que difieren consistentemente del correcto por una cantidad fija. El mismo resultado puede obtenerse aún repitiendo varias veces el experimento, este tipo de error no es fácil de detectar. Una forma de detectarlos es haciendo mediciones de calibración previas al experimento, es decir, teniendo un parámetro de referencia.

c) errores aleatorios: estos son variaciones en los resultados entre una medición y otra. El error aleatorio afecta a la reproducibilidad⁵ de las mediciones. Es posible minimizar el error aleatorio usando técnicas de medición cuidadosas con instrumentación sofisticada, sin embargo no es posible eliminarlo completamente. El error aleatorio presente es algunas veces llamado la incertidumbre en las mediciones, y este es el campo de estudio de la estadística matemática.

El resultado del conteo de emisiones de una fuente radioactiva en un cierto tiempo, varias veces bajo las mismas condiciones, puede diferir en cada ocasión. Supongamos que las mediciones fueron las siguientes: (N1, N2, N3,...) donde cada una de ellas puede ser

⁵ Se dice que las medidas son reproducibles cuando están cercanas al mismo resultado que se obtiene en mediciones que se han repetido o reproducido. Se dice que esto es la precisión.

diferente de las otras. Una pregunta que se puede hacer inmediatamente es: ¿Cuál es el valor correcto? Una solución posible de obtener este valor es hacer un gran número de medidas y estimar el valor promedio definido como: $\bar{N} = (N_1 + N_2 + N_3 + \dots)/n$, donde n es el número de mediciones hechas. Ahora cabe hacerse la pregunta: ¿Qué tan real es este valor estimado?, o ¿cuál es la incertidumbre de este resultado? La respuesta es que depende de la frecuencia de la distribución.

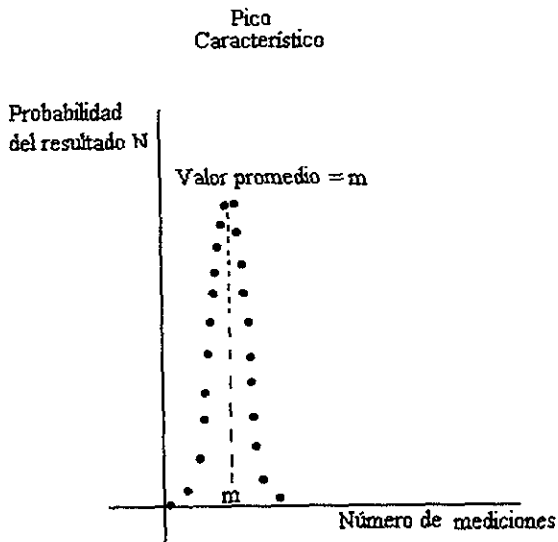


Figura 4.4. Distribución de Poisson para un valor promedio

La figura 4.4, muestra una curva donde se graficó número de mediciones vs probabilidad de cada resultado. La curva presenta un pico para el valor promedio m. Para un valor grande de mediciones se llega a: $\bar{N} \approx m$.

La curva presentada en esta figura, se describe matemáticamente por la distribución de Poisson que se define como, $P_m = e^{-m} m^N / N!$, que corresponde a la probabilidad de obtener un valor N, cuando el valor verdadero es m, e = 2.718 y N! es el factorial de N.

CAPÍTULO V

DISEÑO DE COLIMADORES Y DE UN SISTEMA TOMOGRÁFICO PARA OBTENER LA TOMOGRAFÍA DE UN OBJETO DE 5 CM DE DIÁMETRO, EMPLEANDO UN SOLO DETECTOR.

En trabajos de tomografía, una parte fundamental es la resolución de la imagen obtenida. Esta resolución depende de dos factores: el barrido (malla) y el blindaje. El primero está determinado por el número de trayectorias que se realiza sobre el objeto y el segundo debe considerarse como parte de la geometría del diseño, basándose en lo siguiente (figura 5.1):

- a. La distancia fuente-detector
- b. El orificio del colimador
- c. El espesor de plomo del colimador
- d. El tamaño del detector
- e. Energía de la fuente utilizada.

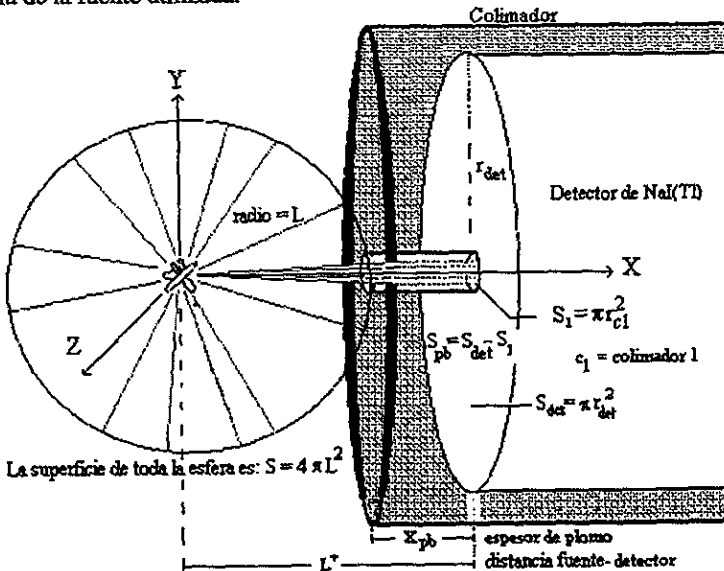


figura 5.1. Flujo radial detectado a una distancia L^*

Todos estos factores deben considerarse en la planeación del experimento. Para obtener información confiable de un objeto cuyo diámetro sea del orden de 0.05m, se propone tener un haz colimado de 1mm ó 2mm, con una fuente emisora de rayos gamma de: Cs-137 (660 keV) y un detector de NaI(Tl).

5.1 Cálculo del blindaje adecuado para obtener una resolución de 1 mm y 2 mm, con una fuente de Cs-137.

Cuando en un experimento se propone colimar la fuente y/o el detector, lo que se busca es registrar sólo aquellos fotones que siguen ciertas direcciones que dependen del ángulo sólido generado entre la fuente y el orificio del colimador, y de esta forma eliminar cuentas adicionales que puedan alterar los resultados como consecuencia de la radiación secundaria o de fondo debida al medio ambiente. Esto resulta difícil, ya que la radiación antes de ser detectada puede interactuar múltiples veces con el material (produciendo radiación secundaria) y algunos de estos rayos salir con una gran desviación. Esta radiación secundaria puede atenuarse colocando un blindaje alrededor del detector (fig. 5.1).

Para decidir cuál es el blindaje adecuado en el experimento, se propone hacer los cálculos siguientes:

a) Considerando que existe una distancia mínima inicial entre la fuente y el detector (0.05 m), calcular el flujo que pasa por un orificio de 1 mm del colimador, suponiendo que el espesor del blindaje se incrementa cada vez 0.01 m hasta llegar a 0.1 m; esto equivale a considerar que la distancia fuente-detector se incrementa conforme aumenta el blindaje.

Los cálculos se hacen para un tiempo de exposición de 1 s.

b) Los mismos cálculos del inciso a) se hacen ahora para un colimador con un orificio de 2 mm, bajo las mismas condiciones (tiempo de exposición, mismo detector y misma fuente). Los resultados se presentan en la tabla 5.2.

c) Se procede a calcular el flujo que penetra la superficie S_{det} determinada por el radio del detector cubierta por plomo (colimador). De nuevo existe un alejamiento entre la fuente y el detector debido al incremento del plomo en el colimador. Este cálculo de nuevo se hace para los dos orificios y los resultados se presentan en las tablas 5.3 y 5.4 respectivamente. Se procede a comparar los resultados de los incisos a) y b) con c), esto es, se comparan las cuentas que se obtienen a partir del orificio de colimación contra cuentas que se detectan a partir del blindaje.

d) Por último se considera un segundo detector de radio $r_{D2} = 0.005$ m. Se hacen los cálculos de los dos puntos anteriores, con el fin de comparar los resultados y conocer cómo afecta los resultados el tamaño del detector.

Los coeficientes de atenuación del aire y plomo para diferentes energías de acuerdo a la tabla 3.1 (pág. 18) son los siguientes:

Tabla 5.1 Coeficientes de atenuación lineal para aire y plomo

Material	coeficiente de atenuación lineal μ [cm^{-1}]		
	0.6 MeV	1 MeV	1.5 MeV
aire (20°C, 76mmHg)	0.00009707	0.0000766	0.00006237
plomo	1.4152	0.8054	0.5921

Datos	
Distancia inicial fuente-detector: L	L = 0.05 m
radio del detector 1: r_{D1}	$r_{D1} = 0.025$ m
radio del detector 2: r_{D2}	$r_{D2} = 0.005$
radio del orificio del colimador 1: r_{C1}	$r_{C1} = 0.0005$ m (1 mm)

radio del orificio del colimador 2: r_{c2}	$r_{c2} = 0.001 \text{ m}$ (2 mm)
Superficie del colimador: S_1, S_2	$S_{1,2} = \pi r_{c1,2}^2$
Distancia de alejamiento entre la fuente y el detector (consecuencia del aumento del grosor, X_{pb} , del plomo en el colimador): L^+	$L^+ = L + X_{pb}$ donde $X_{pb} = (0, 0.01, 0.02, \dots, 0.1 \text{ m})$
tiempo de exposición : t	t = 1 seg
Fuente emisora de rayos gamma: Cs-137	Cs-137 (.6 MeV)
Coefficiente de atenuación lineal del plomo para una energía de 660 keV ¹	$\mu = 1.21 \text{ cm}^{-1}$

El flujo ϕ de partículas por unidad de área está definido como [K1]:

$$\phi = \frac{n}{S \cdot t} \quad (5.1)$$

donde n es el número de partículas que penetran en un área S en un intervalo de tiempo t. La unidad es part/(m²·s).

Para calcular el inciso a), se tiene que el flujo de fotones que llega a la superficie determinada por el orificio del colimador es una parte proporcional del total de flujo que llega a la superficie determinada por una esfera de radio L, por segundo, en cuyo centro se encuentra una fuente de Cs-137. La actividad media de la fuente en transformaciones por segundo es de 3.7×10^4 tps (1 μ Ci). Esta superficie está representada como S_1 en la figura 5.1, y es:

$$\phi_{S_1} = \frac{3.7 \times 10^4}{4\pi(L^+)^2} \cdot \pi r_{c1}^2 \quad (5.2)$$

Los valores para diferentes distancias entre la fuente y el detector se presentan en la segunda columna de la tabla 5.2. Se desprecia la atenuación debida al aire, ya que al comparar los coeficientes de atenuación que se tiene para aire y plomo (tabla 5.1.), para una energía de 0.6 MeV, se encuentra que el coeficiente de atenuación lineal del plomo es 14579.16 veces mayor que del aire.

Tabla 5.2. Flujo [par/m²] por segundo que pasa por una superficie de radio de 1mm, y flujo que llega a la superficie $\pi(r_{det}^2 - r_{c1}^2)$, generada por un radio_{det} de 0.025 m (detector) para diferentes grosores de plomo (Pb) (y por ende de alejamiento).

grosor de plomo (cm)	Flujo que pasa por un orificio de 1mm de radio con un detector de 5cm	Flujo que llega a la superficie del detector de 5 cm sin considerar a la superficie del orificio	Relación entre los flujos del plomo y del orificio ϕ_{pl}/ϕ_{or}	Relación entre los flujos del plomo y del orificio ϕ_{pl}/ϕ_{or}
0	0,925	2311,58	2499	0,0004

¹ Debido a que no existen tablas de coeficientes de atenuación reportadas para todas las energías, como es el caso para una energía de 660 keV para Cs-137, se tomaron los datos reportados por Berger and Hubbell en 1987 para coeficientes de atenuación máscico (cm²/g). A partir de estos datos se realizó una aproximación, considerando el valor del coeficiente de atenuación máscico para una energía de 600 keV ($\mu = 0.117 \text{ cm}^2/\text{g}$) y el valor correspondiente para 800 keV ($\mu = 0.0841 \text{ cm}^2/\text{g}$). Por una interpolación lineal se obtuvo el valor de 0.10713 que corresponde a la energía de 660 keV. A partir de este valor se obtiene el coeficiente de atenuación lineal al multiplicar por la densidad del plomo que es 11.34 gr/cm³ obteniéndose el valor de 1.2148542 cm⁻¹.

1	0,642	476,37	741,6	0,0013
2	0,472	103,86	220,07	0,0045
3	0,361	23,60	65,31	0,015
4	0,285	5,53	19,4	0,05
5	0,231	1,33	5,75	0,17
6	0,191	0,33	1,70	0,59
7	0,160	0,081	0,51	1,97
8	0,14	0,021	0,15	6,65
9	0,118	0,005	0,04	22,42
10	0,103	0,001	0,01	75,56

Para el inciso b), se considera un segundo colimador con un orificio de 2 mm de diámetro. La superficie generada por r_{c2} , es denotada como S_2 . Basándose en la ecuación (5.1), el flujo que pasa por esta superficie es:

$$\phi_{S_2} = \frac{37,000}{4\pi(L^*)^2} \cdot \pi(r_{c2})^2 = \frac{37,000}{4} \left(\frac{r_{c2}}{L^*}\right)^2 \quad (5.3)$$

Los resultados se presentan en la segunda columna de la tabla 5.3. para diferentes distancias.

Tabla 5.3. Flujo por segundo[par/m²] que pasa por una superficie de radio de 2mm, y flujo que llega a la superficie $\pi(r_{det}^2 - r_{c2}^2)$ de un detector de 5 cm, generada por un radio_{det} de 0.025 m (detector) para diferentes grosores de plomo (Pb) (y por ende de alejamiento).

grosor de plomo (cm)	Flujo que pasa por un orificio de 2mm de radio con un detector de 5cm	Flujo que llega a la superficie del detector de 5 cm sin considerar a la superficie del orificio	Relación entre los flujos del plomo y del orificio f_xPb/f_{xaire}	Relación entre los flujos del orificio y del plomo f_{xaire}/f_xPb
0	3,7	2308,8	624	0,0016
1	2,57	475,8	185,17	0,0054
2	1,89	103,73	54,95	0,0182
3	1,45	23,57	16,31	0,061
4	1,14	5,53	4,84	0,207
5	0,93	1,33	1,44	0,696
6	0,76	0,33	0,43	2,347
7	0,64	0,081	0,13	7,91
8	0,55	0,020	0,038	26,65
9	0,47	0,0053	0,0111	89,796
10	0,41	0,0014	0,0033	302,6

El cálculo para el inciso c), es considerando la radiación que atraviesa las diferentes capas de plomo, sin considerar la superficie generada por el orificio (1mm y 2 mm) del colimador. Inicialmente se parte de una capa de un espesor de 0, y se va incrementando en 0.01 m hasta llegar a 0.1 m. En este punto se considera el coeficiente de atenuación lineal para una fuente de Cs-137 y material plomo.

La superficie a considerar se muestra en la figura 5.2., observándose que la superficie analizada (debida al plomo), es una diferencia de superficies: $S_{pb1} = S_{det} - S_1 = (\pi r_{D1}^2 - \pi r_{C1}^2)$.

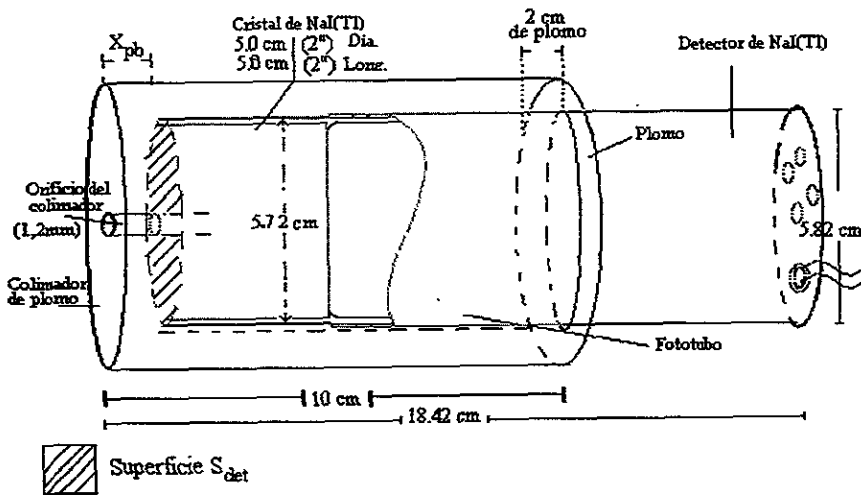


Figura 5.2. Detector de NaI(Tl) colimado con un cilindro de plomo con un orificio de 1mm (2mm).

Al ir agregando capas de plomo de 0.01 m, la atenuación de la radiación se comporta conforme a la ecuación (2.7): $I_n = \frac{I}{I_0} = \exp(-\mu x_{pb})$

donde I_0 es la intensidad inicial.

Por lo tanto, la parte proporcional de flujo total (esfera) que llega a la superficie del colimador de plomo con un orificio de 1mm es el siguiente:

$$\phi_{pb1.2} = \frac{37,000}{4\pi(L^*)^2} \cdot I_n \cdot \pi(r_{D1}^2 - r_{C1}^2) \quad (5.3)$$

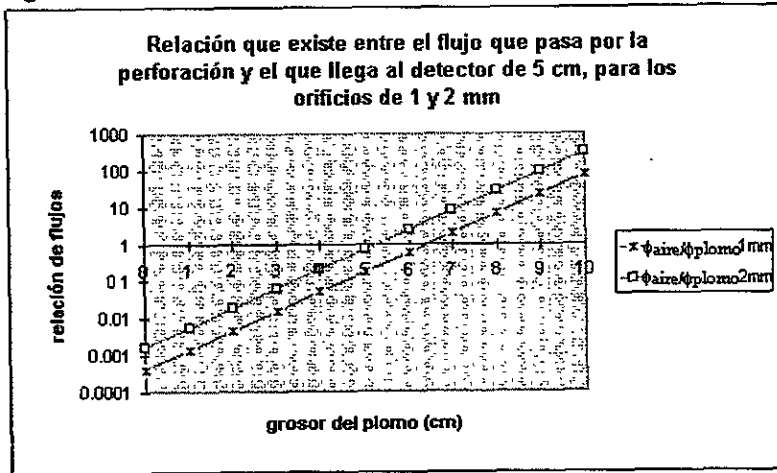
Los resultados para el colimador de 1 mm son presentados en la tabla 5.2. en la tercer columna, y para el colimador de 2 mm son presentados en la tabla 5.3. en la tercer columna, esto para diferentes distancia de espesor del plomo.

La gráfica 5.1 representa los datos de las tablas 5.2 y 5.3. En ésta se presenta el comportamiento del flujo de fotones que llega al detector por segundo y que interactúa solo con aire (ϕ_{air}), entre el flujo de fotones que llega al detector por segundo y que interactúa con diferentes capas de plomo, (ϕ_{pb}). La razón entre estos dos valores es: ϕ_{air}/ϕ_{pb} . Lo que se espera es que los fotones que lleguen a través del orificio sean una cantidad representativamente mayor que la cantidad detectada a través de la capa de plomo. Es de interés conocer este dato antes de proceder a la experimentación, ya que de una adecuada colimación dependerá que la información recabada sea la correcta.

Según los datos calculados en la tablas 5.2 y 5.3. los valores recomendados para tener una mayor cantidad de fotones detectados a través del orificio que los detectados a través del plomo por segundo, son para un espesor mayor a 8 cm de plomo. Para estos valores existe una relación 1 a 6.7, es decir por cada fotón que llegue a través del plomo, llegan 6.7

al detector por el orificio de 1 mm. Si ahora consideramos un tiempo de exposición en cada proyección de 180 segundos, se obtienen 1206 cuentas sin objeto.

Para el colimador de 2 mm, se tiene para el mismo grosor, que por cada fotón que llegue al plomo se tendrá 26.6 fotones en el detector por segundo, obteniéndose 47880 partículas en 180 segundos.



Gráfica 5.1. Relación de flujos existente entre orificio con un detector de 5 cm y grosor de plomo. El eje Y se presenta en escala logarítmica.

Se presentan los resultados obtenidos para colimadores de 1 y 2 mm en las tablas 5.4 y 5.5.

Tabla 5.4. Flujo por segundo [par/m^2] que pasa por una superficie de radio de 1mm, y el que llega a la superficie $\pi(r_{det}^2 - r_{cl}^2)$, generada por un r_{det} de 0.005 m (detector de 1 cm) para diferentes grosores de plomo (y por ende de alejamiento).

grosor de plomo (cm)	Flujo que pasa por un orificio de 1mm de radio con un detector de 1cm	Flujo que llega a la superficie del detector de 1 cm sin considerar a la superficie del orificio	Relación entre los flujos del plomo y del orificio ϕ_p/ϕ_{aire}	Relación entre los flujos del orificio y del plomo ϕ_{and}/ϕ_p
0	0,93	91,57	99	0,010
1	0,64	18,87	29,38	0,0341
2	0,47	4,11	8,72	0,115
3	0,36	0,94	2,59	0,387
4	0,29	0,22	0,77	1,303
5	0,23	0,053	0,23	4,39
6	0,19	0,013	0,068	14,79
7	0,16	0,003	0,0201	49,84
8	0,14	0,0008	0,004	167,96
9	0,12	0,0002	0,002	565,98
10	0,10	5,3888E-05	0,0005	1907,26

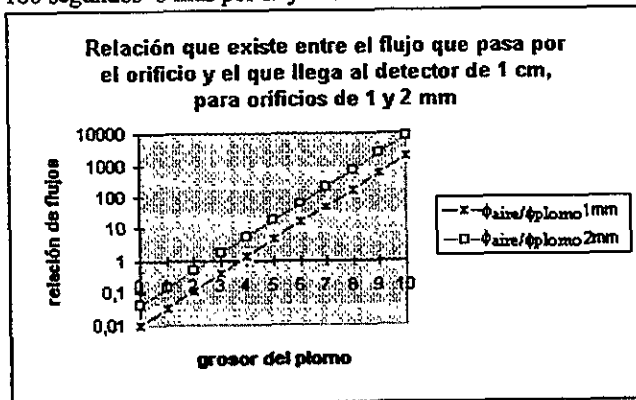
Tabla 5.5. Flujo por segundo [part/m²] que pasa por una superficie de radio de 2mm, y el flujo que llega a la superficie $\pi(r_{det}^2 - r_c^2)$, generada por un radio_{det} de 0.005 m (detector de 1 cm) para diferentes grosores de plomo y por ende de alejamiento.

grosor de plomo (cm)	Flujo que pasa por un orificio de 2mm de radio con un detector de 1cm	Flujo que llega a la superficie del detector de 1 cm sin considerar a la superficie del orificio	Relación entre los flujos del plomo y del orificio f_{Pb}/f_{aire}	Relación entre los flujos del orificio y del plomo f_{aire}/f_{Pb}
0	3,7	88,8	24	0,042
1	2,57	18,3	7,122	0,140
2	1,89	3,98	2,114	0,473
3	1,45	0,91	0,627	1,594
4	1,14	0,21	0,186	5,373
5	0,925	0,051	0,055	18,13
6	0,764	0,012	0,016	63,6
7	0,642	0,003	0,005	205,6
8	0,547	0,00079	0,001	692,83
9	0,472	0,0002	0,0004	2334,7
10	0,411	5,2255E-05	0,0001	7867,4

En la gráfica 5.2 se presentan los datos calculados de las tablas 5.4 y 5.5. De nuevo se presenta el comportamiento del flujo de fotones que llega al detector y que interactúa solo con aire (ϕ_{air}), entre el flujo de fotones que llega al detector y que interactúa con diferentes capas de plomo, (ϕ_{Pb}).

Se observa que el número de fotones detectados a través del orificio de 1 mm, con el detector de 5 cm, para 8 cm de plomo, ahora se obtienen con el detector de 1 cm, con un poco más de 5 cm de espesor de plomo. Este resultado muestra el factor de dependencia entre los resultados y el diseño, en este caso el tamaño del detector, lo cual indica que con condiciones diferentes, los resultados esperados no son los mismos.

Estos resultados sugieren trabajar preferentemente con un detector de 1cm y un orificio de 2 mm y un blindaje de 5 cm, mientras que si se trabaja con el detector de 5 cm, para obtener los resultados confiables se sugiere colocar un blindaje de 8 cm, con un tiempo de exposición de 180 segundos o más por trayectoria.



Gráfica 5.2. Relación de flujos existente entre orificio y detector de 1cm. El eje Y se presenta en escala logarítmica.

5.2. Características del espectro obtenido en un multicanal

Dependiendo de la fuente utilizada se observará un espectro característico en el multicanal.

Cuando los rayos gamma son absorbidos por la materia, su energía es transferida al absorbedor, teniendo lugar los efectos fotoeléctrico, Compton, producción de pares, Rayleigh, Thomson, etc. Si los rayos gamma son absorbidos por el detector, esta energía es transformada en pulsos de corriente, cuya altura es proporcional a la energía del rayo absorbido. Los pulsos son clasificados según su altura por el multicanal conectado al detector. En esta forma, registrando sucesivamente pulsos producidos por rayos gamma, se podrá trazar un diagrama de energía (número de canal) de las radiaciones contra número de cuentas, la cual mostrará picos en los lugares correspondientes a las energías características de los rayos gamma absorbidos por el detector. Estos picos son producidos por los rayos cuya energía total es absorbida, pero algunos otros ceden sólo una fracción de la misma y escapan del sistema. Estas fracciones de energía absorbida son variables y producen pulsos más pequeños. Generalmente aparecerá una región ancha y baja antes del pico correspondiente a la energía total del rayo gamma, conocida como región Compton. Es importante señalar que esta región es más ancha conforme la energía característica de la fuente es mayor. Aparece para valores mayores a 100 keV, ya que antes de estas energías el borde Compton y el borde de retrodispersión están casi juntos.

Cuando se trabaja con el multicanal es importante tenerlo bien caracterizado (calibrado) ya que de otra manera no se tendrá la certeza de que los valores energéticos reportados de los picos característicos correspondan a los valores del espectro observado al momento de hacer las lecturas en el multicanal.

La figura 5.3 muestra un espectro característico de una fuente de Cs-137 que se obtuvo con un detector de centelleo de NaI(Tl).

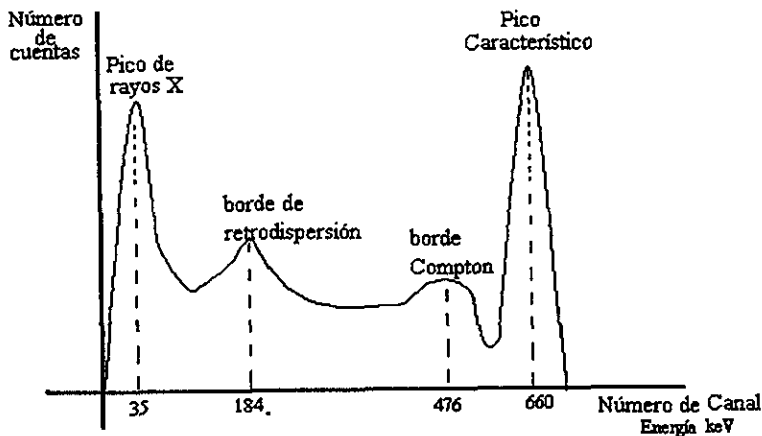


Figura 5.3. Espectro característico de una fuente de Cs-137 obtenido con un detector de NaI(Tl)

El tamaño del pulso producido es proporcional a la energía depositada en el detector. Como es muy pequeño es necesaria su amplificación; Esta se divide en dos pasos, la preamplificación y la amplificación.

El preamplificador está conectado al detector e integra el impulso de la carga del detector produciendo un pulso de voltaje, que tiene un tiempo de subida corto seguido por un tiempo de decaimiento largo.

El amplificador, además de amplificar, da forma a los pulsos preamplificados usualmente por integración y diferenciación. La salida del amplificador puede ser conectada a un multicanal y el contador cuenta el número de pulsos en un intervalo de voltaje seleccionado (que corresponde a un cierto intervalo de energía).

Si se desea observar todo el espectro (figura 5.3) es necesario dejar pasar un tiempo considerable.

CAPÍTULO VI

IMAGEN OBTENIDA POR MEDIO DE TOMOGRAFÍA A UN OBJETO MENOR A 5 cm

El propósito de este capítulo es la verificación del algoritmo presentado en el capítulo IV, obteniendo la imagen del plano perpendicular al eje de rotación de un objeto construido exprofeso, denominado domi (fig. 6.1). Esto se logra al medir la atenuación que experimenta todo cuerpo al ser radiado. Estas mediciones, denominadas datos experimentales, se igualan a una función desconocida llamada $\mu(x,y)$, la cual representa el comportamiento de las densidades internas del domi. Una vez determinada dicha función se logra conocer la estructura interna de éste.

Finalmente es necesario mencionar que las imágenes encontradas con este modelo, sólo muestran los cambios en dos dimensiones, la tercera dimensión puede obtenerse al generar mapeos paralelos e irlos acoplando mediante un algoritmo.

6.1 Desarrollo experimental

6.1.1 Tomógrafo empleado

El diseño del tomógrafo (tercera generación) está basado en la trayectoria que describe la radiación que emana radialmente de la fuente y llega al detector. El propósito del diseño obtener un conjunto de valores de las intensidades de la radiación para un cierto tiempo de exposición a lo largo de varias líneas rectas utilizando un sólo detector. Para este diseño, tanto la fuente radiactiva como el detector se encuentran en puntos fijos y diametralmente opuestos con respecto al sistema de referencia (x,y) el cual se ubica en el centro del domi (figura 6.1).

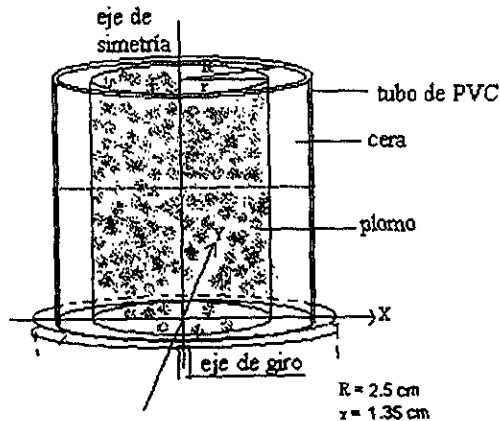


Figura 6.1. Diseño del objeto muestra utilizado

En los tomógrafos de tercera generación, existen dos tipos de movimientos, el que realiza el detector colocándose en diferentes posiciones con respecto a un punto fijo y el que realiza la fuente, colocándose en diferentes posiciones sobre un arco de circunferencia.

El tomógrafo utilizado en este trabajo, está basado en dos discos giratorios acoplados. El disco 1 (radio más pequeño) es colocado sobre un eje de rotación, el cual cae exactamente en el centro del disco 2 y a su vez el eje de rotación cae perpendicularmente sobre la mitad del radio del disco 2, como se muestra en la figura 6.2.

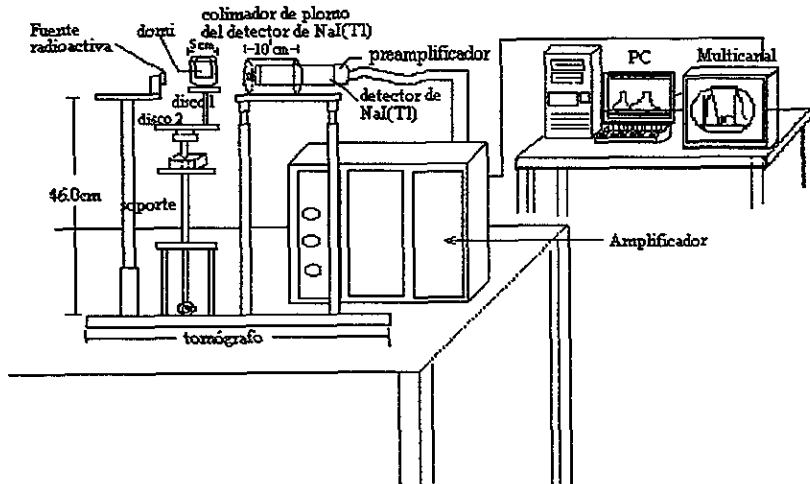


Fig. 6.2. Vista frontal del tomógrafo utilizado en laboratorio

Los giros dependen de un sistema de engranes que se encuentran por debajo de cada disco. Con este diseño se logran giros del orden de 1 grado en cada giro. Moviéndolo el disco 1 y dejando fijo el disco 2 se obtienen n posiciones diferentes del detector. En algunos diseños de tomógrafos de tercera generación, este movimiento se logra al rotar el o los detectores alrededor del domo. Cada movimiento se puede representar como una recta entre la fuente y el detector, reuniendo todas las rectas se vería como en la figura 6.3.

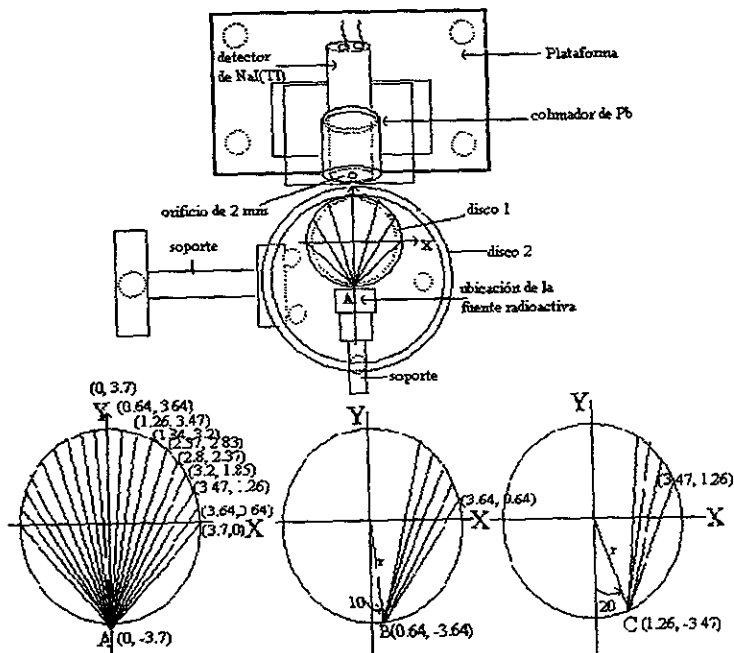


Figura 6.3. Representación de las trayectorias para las tres primeras posiciones de la fuente.

Para obtener una posición diferente de la fuente, es necesario girar el disco 2. En cada nueva posición se obtienen todas las posiciones del detector. Esto se repite hasta obtener l posiciones diferentes de la fuente hasta cubrir 180 grados, ya que para un número mayor de grados las trayectorias se repiten.

Con este diseño se obtienen $l \times m$ trayectorias, cuyas intersecciones se encuentran dentro del plano investigado. Cada trayectoria representa la intensidad promedio que emerge de la fuente radioactiva e interacciona con el medio que cruza y llega al detector.

El dispositivo descrito logra movimientos semejantes a un tomógrafo de tercera generación, llamado de rotación-rotación, el cual se diferencia de los de primera y segunda generación (capítulo I) principalmente en el diseño, ya que éstos se caracterizan por realizar movimientos lineales, obteniéndose trayectorias paralelas entre la fuente y el detector y posteriormente haciendo giros rotacionales al domi para volver a obtener las trayectorias paralelas.

Este sistema llamado de traslación-rotación con un detector y varios detectores respectivamente, presenta la siguiente desventaja: al obtener un número x de trayectorias paralelas entre la fuente y el detector y éstas no llegar a intersectarse, se desperdician estos datos, ya que para éstos se obtiene un sistema de ecuaciones inconsistente (no tiene solución) [P1], por lo que número de datos utilizables de ve disminuido.

El diseño presentado en este trabajo igualmente presenta pros y contras. Una desventaja notoria es el hecho de utilizar un sólo detector, lo cual se refleja en el tiempo de duración del experimento alargándose un poco más.

Por otro lado, la radiación de retrodispersión que se detecta con el sistema de varios detectores es nula, debido al blindaje y al no tener detectores colindantes. Este es uno de los problemas principales que se ha intentado atacar por mucho tiempo sobre todo en el área de la medicina, ya que al utilizar varios detectores existe la probabilidad de captar radiación de retrodispersión en uno o varios detectores, lo que aumenta las cuentas, llevando a consideraciones erróneas como por ejemplo pensar que en ciertas zonas del domi la densidad es mayor o menor a lo esperado.

Para este trabajo propusimos girar los discos 1 y 2 diez grados desde el cero hasta 180 grados, lo que significa obtener 19 posiciones diferentes del detector para cada posición fija de la fuente y 19 posiciones diferentes de la fuente. Estos puntos se representan en los datos con una letra mayúscula (posición de la fuente) y un número (ángulo de giro). Por ejemplo, la primera posición de la fuente y la primera posición del detector se representa como A0, la segunda posición del detector como A10, y así sucesivamente hasta llegar a A180, para la segunda posición de la fuente se tiene, B0, B10, ..., B180, y así hasta obtener la última posición de la fuente con sus respectivas posiciones de los detectores: S0, S10, ..., S180. De esta manera se generan 361 ($=19 \times 19$) valores de intensidades diferentes plenamente etiquetados.

El tiempo de exposición utilizado para cada posición del detector fue de 600 s, considerando las condiciones presentadas en el capítulo V, donde la fuente radiactiva es Cs-137, el blindaje de la cara frontal de 5.5 cm y la distancia fuente-detector de 7.2 cm.

6.1.2 Objeto estudiado

Para probar el método desarrollado, se utilizó un objeto con distribución de densidad determinada y conocida.

El tomógrafo propuesto operará en el laboratorio, por lo que tanto el objeto estudiado debe acoplarse a las dimensiones de éste. Los cálculos presentados en el capítulo V son para un objeto del orden de 5 cm de diámetro. Este objeto se diseñó con los siguientes requisitos:

- a) De acuerdo al isótopo propuesto (Cs-137) ya los cálculos que se realizaron para determinar el grosor del blindaje en el capítulo V, las densidades del domi deberían estar dentro del intervalo [$1 \text{ gr/cm}^3 - 70 \text{ gr/cm}^3$].
- b) para poder corroborar con una mayor certeza el algoritmo era necesario tener un objeto simétrico con respecto a un eje, el cual podría ser una esfera o un cilindro.

Considerando estos puntos se propuso trabajar con un domi de plomo, de forma cilíndrica de 2.7 cm de diámetro x 6 cm de largo, el cual se introdujo en un tubo de PVC de 5.0 cm de diámetro y finalmente se rellenó con cera, quedando cubierto el cilindro de plomo como se muestra en la figura 6.1.

El PVC, y la parafina tienen una densidad mucho menor a la del plomo por lo que la atenuación de la radiación será menor para estos dos elementos.

Las densidades que componen al domi son las siguientes:

elemento	densidad [gr/cm3]
plomo	11.34
cera	0.89
PVC	1.75

6.1.3 Electrónica

La figura 6.4 muestra un diagrama por bloques de los aparatos utilizados, los cuales son los siguientes:

- Un Multicanal Canberra Serie 33/Plus.
- Un detector de centelleo de NaI(Tl) modificado, de un Bicron de 5 x 5, en un detector de 1 x 5 cm.
- Un amplificador con fuente de alto voltaje (Ortec).
- Un preamplificador
- Una computadora personal

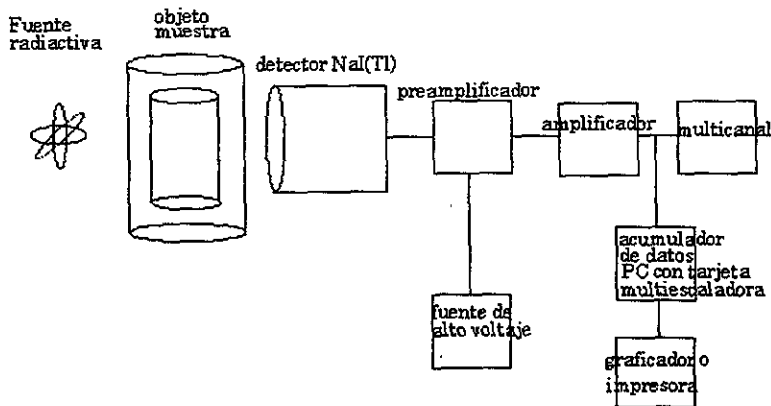


Figura 6.4. Diagrama por bloques de los aparatos utilizados

6.1.4 Colimador del detector

Casi siempre que se trabaja con radiación, intrínsecamente se habla de colimación. En tomografía, la colimación es una de las partes que determinan la resolución de la imagen que se desea obtener.

Como se analizó en el capítulo V, diferentes grosores de plomo en la cara frontal equivalen a tener una relación mayor o menor entre los flujos del aire y del plomo. En nuestro caso proponemos un grosor de plomo en la cara frontal del colimador de 5.5 cm para tener una mayor cantidad de fotones que logren cruzar el orificio de 2 mm en relación a aquellos que chocan con la superficie restante de plomo. Es importante mencionar que si se tuviese lo contrario predominaría radiación secundaria, lo cual no es de interés en este trabajo.

De acuerdo a los datos de la tabla 5.5 del capítulo V, la relación del flujo que pasa por el orificio de 2 mm entre el flujo que llega al plomo con un grosor de plomo en la cara

frontal de 5 cm es de 18 (adimensional) y para 6 cm es 63. Para un grosor de 5.5, es necesario interpolar en esta misma gráfica, obteniéndose una relación de flujos de 58, lo que equivale a decir que por cada fotón que no es detenido por el plomo, logran cruzar 58 por el orificio.

6.1.5 Detector

El detector utilizado fue uno de centelleo de ioduro de sodio activado con talio, el cual presenta todas las características expuestas en el capítulo III.

6.1.6 Fuente radiactiva

La fuente radiactiva utilizada en este experimento fue el isótopo Cs-137 con un fotopico cuya energía característica es de 660 keV y con actividad de 100 μCi . Esta fuente es de las más utilizadas en pruebas no destructivas dentro del área de la industria donde generalmente los objetos analizados tienen una mayor densidad que los estudiados en el área de la medicina.

Estas fuentes emiten partículas a altas energías y por lo tanto tienen un alto poder de penetración con respecto a la radiación alfa o beta. Este isótopo es reportado en la bibliografía para ser utilizado en el análisis de objetos con densidades tan bajas como 1 gr/cm^3 y tan altas como 70 gr/cm^3 [H5].

6.2. Datos

El algoritmo desarrollado en el capítulo IV, y específicamente la ecuación (4.7), requiere del conocimiento de los siguientes valores:

- los puntos de intersección que existen entre la trayectoria que sigue la radiación y la circunferencia determinada por el cilindro de PVC. Estos valores están representados como $x_i - x_j$ en la misma ecuación,
- la pendiente (m_k) y la ordenada al origen (b_k) de las trayectorias que se siguen entre la fuente y el detector en cada posición.

La pendiente y ordenada al origen se pueden conocer inmediatamente al tener bien ubicado el sistema de referencia y conocer las dimensiones del domi mediante la fórmula para la pendiente, $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ y la ordenada al origen mediante la fórmula, $y = m(x - x_1) + y_1$. Las intersecciones se pueden calcular una vez conocidas las ecuaciones de la recta y las dimensiones del domi.

En la tabla 6.1 se muestran en cada columna los datos de la posición fuente detector, posiciones de las x 's para realizar la integral presentada en la ecuación (4.6), la diferencia entre $x_1 - x_0$, la diferencia entre $(x_1)^2 - (x_0)^2$, la diferencia entre $(x_1)^3 - (x_0)^3$, la pendiente de cada trayectoria, ordenada al origen, los valores de las intensidades promedio para cada posición y de la novena a la decimocuarta columna los valores calculados de Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6 según la ecuación (4.7).

Un dato importante es la intensidad inicial, es decir, aquella intensidad que llega al detector bajo las mismas condiciones de trabajo, solo que sin domi. Esta intensidad se debe medir experimentalmente. En nuestro caso, se midió siempre al iniciar el experimento y posteriormente al terminar, para corroborar posibles cambios en el voltaje, aun cuando esta variable se tenía controlada.

El procedimiento que se siguió fue considerar la suma de las cuentas en un intervalo de canales, tanto a la derecha como a la izquierda del máximo observado.

Los valores de las intensidades iniciales que se obtuvieron en este trabajo fueron los siguientes: 1125, 1018, 1033, 1020, 1029, 1040, 1009, 1010, 1082, 1100, 1037, 1115, 1020, 1029, 1019, 1103 cuentas por canal.

Tabla 6.1. Datos

pos f-d	x_1	x_0	x_1-x_0	$(x_1)^2-(x_0)^2$	$(x_1)^3-(x_0)^3$	pendiente	ord_ori	Intensidad	$\ln(I_0/I)$	Z_{i1}	Z_{i2}	Z_{i3}	Z_{i4}	Z_{i5}	Z_{i6}
A0	3.7	0	3.7	13.69	50.65	1.00	-3.7	784	0.26	3.7	6.845	-6.85	8.44	-8.44	8.44
A10	3.64	0	3.64	13.25	48.23	1.19	-3.7	793	0.25	3.64	6.6248	-5.57	8.04	-5.35	7.12
A20	3.48	0	3.48	12.11	42.14	1.43	-3.7	769	0.28	3.48	6.0552	-4.23	7.02	-2.34	6.15
A30	3.2	0	3.2	10.24	32.77	1.73	-3.7	730	0.33	3.2	5.12	-2.97	5.46	-0.03	5.48
A40	2.83	0	2.83	8.01	22.67	2.14	-3.7	705	0.37	2.83	4.0045	-1.88	3.78	1.39	4.97
A50	2.38	0	2.38	5.66	13.48	2.75	-3.7	313	1.18	2.38	2.8322	-1.02	2.25	1.87	4.46
A60	1.85	0	1.85	3.42	6.33	3.73	-3.7	233	1.48	1.85	1.7113	-0.46	1.06	1.55	3.73
A70	1.27	0	1.27	1.61	2.05	5.67	-3.7	199	1.63	1.27	0.8065	-0.13	0.34	0.89	2.75
A80	0.64	0	0.64	0.41	0.26	11.43	-3.7	193	1.66	0.64	0.2048	-0.03	0.04	0.24	1.43
A90	3.8	-3.7	7.5	0.75	105.53	0.01	0.07	209	1.59	7.5	0.375	0.51	17.59	0.33	0.02
A100	-0.64	0	-0.64	0.41	-0.26	-11.43	-3.7	170	1.79	-0.64	0.2048	0.03	-0.04	0.24	-1.43
A110	-1.27	0	-1.27	1.61	-2.05	-5.67	-3.7	187	1.70	-1.27	0.8065	0.13	-0.34	0.89	-2.75
A120	-1.85	0	-1.85	3.42	-6.33	-3.73	-3.7	226	1.51	-1.85	1.7113	0.46	-1.06	1.55	-3.73
A130	-2.38	0	-2.38	5.66	-13.48	-2.75	-3.7	242	1.44	-2.38	2.8322	1.02	-2.25	1.87	-4.46
A140	-2.83	0	-2.83	8.01	-22.67	-2.14	-3.7	369	1.02	-2.83	4.0045	1.88	-3.78	1.39	-4.97
A150	-3.2	0	-3.2	10.24	-32.77	-1.73	-3.7	658	0.44	-3.2	5.12	2.97	-5.46	-0.03	-5.48
A160	-3.48	0	-3.48	12.11	-42.14	-1.43	-3.7	752	0.30	-3.48	6.0552	4.23	-7.02	-2.34	-6.15
A170	-3.64	0	-3.64	13.25	-48.23	-1.19	-3.7	726	0.34	-3.64	6.6248	5.57	-8.04	-5.35	-7.12
A180	-3.7	0	-3.7	13.69	-50.65	-1.00	-3.7	745	0.31	-3.7	6.845	6.85	-8.44	-8.44	-8.44
B0	3.64	0.6	3	12.84	47.97	1.43	-4.55	775	0.27	3	6.42	-4.49	7.99	-6.40	5.66
B10	3.48	0.6	2.84	11.70	41.88	1.73	-4.75	682	0.40	2.84	5.8504	-3.35	6.98	-3.60	4.84
B20	3.2	0.6	2.56	9.83	32.51	2.14	-5.01	720	0.35	2.56	4.9152	-2.29	5.42	-1.40	4.24
B30	2.83	0.6	2.19	7.60	22.40	2.75	-5.40	676	0.41	2.19	3.7997	-1.38	3.73	0.01	3.74
B40	2.38	0.6	1.74	5.25	13.22	3.73	-6.03	661	0.43	1.74	2.6274	-0.68	2.20	0.61	3.19
B50	1.85	0.6	1.21	3.01	6.07	5.67	-7.27	252	1.40	1.21	1.5065	-0.25	1.01	0.52	2.40
B60	1.27	0.6	0.63	1.20	1.79	11.43	-10.96	225	1.51	0.63	0.6017	-0.02	0.30	0.21	1.36
B70	0.64	0.6	0	0.00	0.00	0.01	0.61	206	1.60	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00
B80	0	0.6	-0.64	-0.41	-0.26	-11.43	3.68	212	1.57	-0.64	-0.2048	-0.01	-0.04	0.25	-1.43
B90	-0.64	0.6	-1.28	0.00	-0.52	-5.67	-0.01	207	1.59	-1.28	0	0.01	-0.09	0.99	-2.81
B100	-1.27	0.6	-1.91	1.20	-2.31	-3.73	-1.25	207	1.59	-1.91	0.6017	0.14	-0.39	2.12	-4.05
B110	-1.85	0.6	-2.49	3.01	-6.59	-2.75	-1.88	219	1.54	-2.49	1.5065	0.55	-1.10	3.20	-4.92
B120	-2.38	0.6	-3.02	5.25	-13.74	-2.14	-2.27	218	1.54	-3.02	2.6274	1.21	-2.29	3.87	-5.52
B130	-2.83	0.6	-3.47	7.60	-22.93	-1.73	-2.53	229	1.49	-3.47	3.7997	2.20	-3.82	3.62	-5.92
B140	-3.2	0.6	-3.84	9.83	-33.03	-1.43	-2.73	379	0.99	-3.84	4.9152	3.45	-5.51	2.33	-6.36
B150	-3.48	0.6	-4.12	11.70	-42.41	-1.19	-2.88	581	0.56	-4.12	5.8504	4.88	-7.07	0.01	-7.03
B160	-3.64	0.6	-4.28	12.84	-48.49	-1.00	-3.00	695	0.38	-4.28	6.42	6.42	-8.08	-3.10	-8.08
B170	-3.7	0.6	-4.34	13.28	-50.92	-0.84	-3.10	765	0.29	-4.34	6.6402	7.90	-8.49	-6.36	-9.58
B180	-3.64	0.6	-4.28	12.84	-48.49	-0.70	-3.19	772	0.28	-4.28	6.42	9.17	-8.08	-9.17	-11.42
C0	3.48	1.3	2.21	10.50	40.10	2.14	-6.20	758	0.30	2.21	5.2488	-2.45	6.68	-3.90	3.43
C10	3.2	1.3	1.93	8.63	30.72	2.75	-6.97	715	0.36	1.93	4.3136	-1.60	5.12	-1.93	2.92
C20	2.83	1.3	1.56	6.40	20.62	3.73	-6.22	700	0.38	1.56	3.198	-0.89	3.44	-0.64	2.48

C30	2.38	1.3	1.11	4.05	11.43	5.67	-10.68	666	0.43	1.11	2.0258	-0.37	1.91	-0.03	1.89
C40	1.85	1.3	0.58	1.81	4.28	11.43	-18.00	681	0.40	0.58	0.9048	-0.10	0.71	0.04	1.07
C50	1.27	1.3	0	0.00	0.00	0.01	1.25	382	0.98	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00
C60	0.64	1.3	-0.63	-1.20	-1.79	-11.43	11.04	257	1.38	-0.63	-0.6017	-0.08	-0.30	0.17	-1.37
C70	0	1.3	-1.27	-1.61	-2.05	-5.67	3.72	209	1.59	-1.27	-0.8065	-0.15	-0.34	0.87	-2.75
C80	-0.64	1.3	-1.91	-1.20	-2.31	-3.73	1.26	179	1.74	-1.91	-0.6017	-0.16	-0.39	2.12	-4.05
C90	-1.27	1.3	-2.54	0.00	-4.10	-2.75	0.01	205	1.60	-2.54	0	-0.02	-0.68	3.75	-5.15
C100	-1.85	1.3	-3.12	1.81	-8.38	-2.14	-0.76	196	1.65	-3.12	0.9048	0.42	-1.40	5.31	-5.85
C110	-2.38	1.3	-3.65	4.05	-15.53	-1.73	-1.28	221	1.53	-3.65	2.0258	1.16	-2.59	6.37	-6.26
C120	-2.83	1.3	-4.1	6.40	-24.71	-1.43	-1.67	223	1.52	-4.1	3.198	2.26	-4.12	6.44	-6.48
C130	-3.2	1.3	-4.47	8.63	-34.82	-1.19	-1.97	245	1.43	-4.47	4.3136	3.65	-5.80	5.35	-6.78
C140	-3.48	1.3	-4.75	10.50	-44.19	-1.00	-2.21	379	0.99	-4.75	5.2488	5.25	-7.37	3.13	-7.37
C150	-3.64	1.3	-4.91	11.64	-50.28	-0.84	-2.41	656	0.44	-4.91	5.8184	6.97	-8.38	0.01	-8.42
C160	-3.7	1.3	-4.97	12.08	-52.70	-0.70	-2.59	674	0.41	-4.97	6.0386	8.65	-8.78	-3.34	-10.03
C170	-3.64	1.3	-4.91	11.64	-50.28	-0.58	-2.75	664	0.43	-4.91	5.8184	10.13	-8.38	-6.31	-12.09
C180	-3.48	1.3	-4.75	10.50	-44.19	-0.47	-2.89	740	0.32	-4.75	5.2488	11.27	-7.37	-8.29	-14.34
D0	3.2	1.9	1.35	6.82	26.44	3.73	-10.10	704	0.37	1.35	3.4088	-0.92	4.41	-1.56	1.74
D10	2.83	1.9	0.98	4.59	16.33	5.67	-13.69	697	0.38	0.98	2.2932	-0.41	2.72	-0.52	1.35
D20	2.38	1.9	0.53	2.24	7.15	11.43	-24.35	687	0.40	0.53	1.121	-0.09	1.19	-0.05	0.82
D30	1.85	1.9	0	0.00	0.00	0.01	1.85	704	0.37	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00
D40	1.27	1.9	-0.58	-1.81	-4.28	-11.43	17.95	646	0.46	-0.58	-0.9048	-0.07	-0.71	0.08	-1.07
D50	0.64	1.9	-1.21	-3.01	-6.07	-5.67	7.29	373	1.01	-1.21	-1.5065	-0.28	-1.01	0.49	-2.41
D60	0	1.9	-1.85	-3.42	-6.33	-3.73	3.70	188	1.69	-1.85	-1.7113	-0.47	-1.06	1.54	-3.73
D70	-0.64	1.9	-2.49	-3.01	-6.59	-2.75	1.88	180	1.73	-2.49	-1.5065	-0.55	-1.10	3.20	-4.92
D80	-1.27	1.9	-3.12	-1.81	-8.38	-2.14	0.77	188	1.69	-3.12	-0.9048	-0.45	-1.40	5.30	-5.85
D90	-1.85	1.9	-3.7	0.00	-12.66	-1.73	0.00	208	1.59	-3.7	0	-0.02	-2.11	7.31	-6.33
D100	-2.38	1.9	-4.23	2.24	-19.81	-1.43	-0.56	258	1.37	-4.23	1.121	0.76	-3.30	8.81	-6.50
D110	-2.83	1.9	-4.68	4.59	-29.00	-1.19	-1.00	239	1.45	-4.68	2.2932	1.92	-4.83	9.24	-6.46
D120	-3.2	1.9	-5.05	6.82	-39.10	-1.00	-1.35	289	1.26	-5.05	3.4088	3.41	-6.52	8.43	-6.52
D130	-3.48	1.9	-5.33	8.69	-48.48	-0.84	-1.65	308	1.20	-5.33	4.344	5.14	-8.08	6.40	-6.92
D140	-3.64	1.9	-5.49	9.83	-54.56	-0.70	-1.90	566	0.59	-5.49	4.9136	7.02	-9.09	3.38	-7.86
D150	-3.7	1.9	-5.55	10.27	-56.98	-0.58	-2.13	643	0.46	-5.55	5.1338	8.67	-9.50	0.02	-9.46
D160	-3.64	1.9	-5.49	9.83	-54.56	-0.47	-2.34	680	0.41	-5.49	4.9136	10.54	-9.09	-3.00	-11.62
D170	-3.48	1.9	-5.33	8.69	-48.48	-0.36	-2.53	704	0.37	-5.33	4.344	11.89	-8.08	-5.09	-14.09
D180	-3.2	1.9	-5.05	6.82	-39.10	-0.27	-2.70	735	0.33	-5.05	3.4088	12.74	-6.52	-5.73	-16.46
E0	2.83	2.4	0.45	2.34	9.18	11.43	-30.03	848	0.18	0.45	1.1723	-0.12	1.53	-0.22	0.51
E10	2.38	2.4	0	0.00	0.00	0.01	2.37	851	0.18	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00
E20	1.85	2.4	-0.53	-2.24	-7.15	-11.43	24.37	763	0.29	-0.53	-1.121	-0.11	-1.19	-0.08	-0.82
E30	1.27	2.4	-1.11	-4.05	-11.43	-5.67	10.67	784	0.26	-1.11	-2.0258	-0.35	-1.91	0.00	-1.89
E40	0.64	2.4	-1.74	-5.25	-13.22	-3.73	6.05	730	0.33	-1.74	-2.6274	-0.73	-2.20	0.54	-3.21
E50	0	2.4	-2.38	-5.66	-13.48	-2.75	3.71	353	1.06	-2.38	-2.8322	-1.05	-2.25	1.84	-4.47
E60	-0.64	2.4	-3.02	-5.25	-13.74	-2.14	2.27	219	1.54	-3.02	-2.6274	-1.23	-2.29	3.85	-5.53
E70	-1.27	2.4	-3.65	-4.05	-15.53	-1.73	1.29	188	1.69	-3.65	-2.0258	-1.21	-2.59	6.35	-6.28
E80	-1.85	2.4	-4.23	-2.24	-19.81	-1.43	0.57	177	1.75	-4.23	-1.121	-0.81	-3.30	8.79	-6.51
E90	-2.38	2.4	-4.76	0.00	-26.96	-1.19	0.01	174	1.77	-4.76	0	-0.03	-4.49	10.71	-6.38
E100	-2.83	2.4	-5.21	2.34	-36.15	-1.00	-0.45	191	1.68	-5.21	1.1723	1.17	-6.02	11.52	-6.02
E110	-3.2	2.4	-5.58	4.58	-46.25	-0.84	-0.83	190	1.68	-5.58	2.2878	2.73	-7.71	11.03	-5.76
E120	-3.48	2.4	-5.86	6.45	-55.63	-0.70	-1.16	192	1.67	-5.86	3.223	4.56	-9.27	9.23	-5.89
E130	-3.64	2.4	-6.02	7.59	-61.71	-0.58	-1.46	281	1.29	-6.02	3.7926	6.57	-10.28	6.35	-6.62

E140	-3.7	2.4	-6.08	8.03	-64.13	-0.47	-1.72	334	1.12	-6.08	4.0128	8.59	-10.69	3.07	-8.10
E150	-3.64	2.4	-6.02	7.59	-61.71	-0.36	-1.96	645	0.46	-6.02	3.7926	10.44	-10.28	0.04	-10.26
E160	-3.48	2.4	-5.86	6.45	-55.63	-0.27	-2.19	643	0.46	-5.86	3.223	11.98	-9.27	-2.10	-12.85
E170	-3.2	2.4	-5.58	4.58	-46.25	-0.18	-2.41	672	0.42	-5.58	2.2878	13.05	-7.71	-2.80	-15.48
E180	-2.83	2.4	-5.21	2.34	-36.15	-0.09	-2.62	750	0.31	-5.21	1.1723	13.56	-6.02	-2.02	-17.68
F0	2.38	2.8	-0.45	-2.34	-9.18	-11.43	29.97	746	0.31	-0.45	-1.1723	-0.09	-1.53	-0.14	-0.50
F10	1.85	2.8	-0.98	-4.59	-16.33	-6.67	13.67	717	0.35	-0.98	-2.2932	-0.39	-2.72	-0.47	-1.34
F20	1.27	2.8	-1.56	-6.40	-20.62	-3.73	8.18	701	0.38	-1.56	-3.198	-0.83	-3.44	-0.52	-2.42
F30	0.64	2.8	-2.19	-7.60	-22.40	-2.75	5.40	695	0.38	-2.19	-3.7997	-1.38	-3.73	0.02	-3.74
F40	0	2.8	-2.83	-8.01	-22.67	-2.14	3.69	598	0.53	-2.83	-4.0045	-1.85	-3.78	1.43	-4.95
F50	-0.64	2.8	-3.47	-7.60	-22.93	-1.73	2.52	275	1.31	-3.47	-3.7997	-2.17	-3.82	3.66	-5.90
F60	-1.27	2.8	-4.1	-6.40	-24.71	-1.43	1.66	206	1.60	-4.1	-3.198	-2.25	-4.12	6.45	-6.47
F70	-1.85	2.8	-4.68	-4.59	-29.00	-1.19	0.99	230	1.49	-4.68	-2.2932	-1.91	-4.83	9.24	-6.46
F80	-2.38	2.8	-5.21	-2.34	-36.15	-1.00	0.45	195	1.65	-5.21	-1.1723	-1.17	-6.02	11.52	-6.02
F90	-2.83	2.8	-5.66	0.00	-45.33	-0.84	-0.01	210	1.58	-5.66	0	0.03	-7.56	12.68	-5.32
F100	-3.2	2.8	-6.03	2.23	-55.43	-0.70	-0.40	212	1.57	-6.03	1.1156	1.62	-9.24	12.49	-4.70
F110	-3.48	2.8	-6.31	4.10	-64.81	-0.58	-0.75	175	1.76	-6.31	2.0508	3.52	-10.80	10.94	-4.47
F120	-3.64	2.8	-6.47	5.24	-70.89	-0.47	-1.06	221	1.53	-6.47	2.6204	5.64	-11.82	8.24	-4.91
F130	-3.7	2.8	-6.53	5.68	-73.32	-0.36	-1.35	275	1.31	-6.53	2.8406	7.78	-12.22	5.06	-6.17
F140	-3.64	2.8	-6.47	5.24	-70.89	-0.27	-1.62	550	0.62	-6.47	2.6204	9.79	-11.82	2.08	-8.22
F150	-3.48	2.8	-6.31	4.10	-64.81	-0.18	-1.88	693	0.39	-6.31	2.0508	11.51	-10.80	-0.05	-10.82
F160	-3.2	2.8	-6.03	2.23	-55.43	-0.09	-2.13	737	0.32	-6.03	1.1156	12.76	-9.24	-0.76	-13.57
F170	-2.83	2.8	-5.66	0.00	-45.33	0.00	-2.38	759	0.30	-5.66	0	13.47	-7.56	0.00	-16.03
F180	-2.38	2.8	-5.21	-2.34	-36.15	0.09	-2.63	713	0.36	-5.21	-1.1723	13.59	-6.02	2.03	-17.76
G0	1.85	3.2	-1.35	-6.82	-26.44	-3.73	10.09	781	0.27	-1.35	-3.4088	-0.90	-4.41	-1.52	-1.73
G10	1.27	3.2	-1.93	-8.63	-30.72	-2.75	6.94	697	0.38	-1.93	-4.3136	-1.55	-5.12	-1.81	-2.88
G20	0.64	3.2	-2.56	-9.83	-32.51	-2.14	5.01	690	0.39	-2.56	-4.9152	-2.29	-5.42	-1.40	-4.24
G30	0	3.2	-3.2	-10.24	-32.77	-1.73	3.69	695	0.38	-3.2	-5.12	-2.95	-5.46	0.01	-5.45
G40	-0.64	3.2	-3.84	-9.83	-33.03	-1.43	2.72	477	0.76	-3.84	-4.9152	-3.43	-5.51	2.35	-6.34
G50	-1.27	3.2	-4.47	-8.63	-34.82	-1.19	1.96	251	1.40	-4.47	-4.3136	-3.64	-5.80	5.36	-6.76
G60	-1.85	3.2	-5.05	-6.82	-39.10	-1.00	1.35	224	1.52	-5.05	-3.4088	-3.41	-6.52	8.43	-6.52
G70	-2.38	3.2	-5.58	-4.58	-46.25	-0.84	0.84	208	1.59	-5.58	-2.2878	-2.74	-7.71	11.03	-5.77
G80	-2.83	3.2	-6.03	-2.23	-55.43	-0.70	0.39	201	1.62	-6.03	-1.1156	-1.57	-9.24	12.50	-4.68
G90	-3.2	3.2	-6.4	0.00	-65.54	-0.58	0.00	214	1.56	-6.4	0	0.02	-10.92	12.61	-3.64
G100	-3.48	3.2	-6.68	1.87	-74.91	-0.47	-0.36	183	1.72	-6.68	0.9352	1.95	-12.49	11.31	-2.99
G110	-3.64	3.2	-6.84	3.01	-81.00	-0.36	-0.69	215	1.56	-6.84	1.5048	4.14	-13.50	8.80	-3.02
G120	-3.7	3.2	-6.9	3.45	-83.42	-0.27	-0.99	218	1.54	-6.9	1.725	6.39	-13.90	5.74	-3.94
G130	-3.64	3.2	-6.84	3.01	-81.00	-0.18	-1.29	257	1.38	-6.84	1.5048	8.53	-13.50	2.83	-5.73
G140	-3.48	3.2	-6.68	1.87	-74.91	-0.09	-1.57	442	0.84	-6.68	0.9352	10.41	-12.49	0.72	-8.20
G150	-3.2	3.2	-6.4	0.00	-65.54	0.00	-1.85	644	0.46	-6.4	0	11.84	-10.92	0.00	-10.95
G160	-2.83	3.2	-6.03	-2.23	-55.43	0.09	-2.13	690	0.39	-6.03	-1.1156	12.75	-9.24	0.76	-13.54
G170	-2.38	3.2	-5.58	-4.58	-46.25	0.18	-2.41	687	0.40	-5.58	-2.2878	13.07	-7.71	2.80	-15.53
G180	-1.85	3.2	-5.05	-6.82	-39.10	0.27	-2.71	736	0.33	-5.05	-3.4088	12.76	-6.52	5.74	-16.50
H0	1.27	3.5	-2.21	-10.50	-40.10	-2.14	6.19	686	0.40	-2.21	-5.2488	-2.43	-6.68	-3.84	-3.40
H10	0.64	3.5	-2.84	-11.70	-41.88	-1.73	4.78	675	0.41	-2.84	-5.8504	-3.38	-6.98	-3.65	-4.87
H20	0	3.5	-3.48	-12.11	-42.14	-1.43	3.70	675	0.41	-3.48	-6.0552	-4.23	-7.02	-2.34	-6.15
H30	-0.64	3.5	-4.12	-11.70	-42.41	-1.19	2.88	665	0.43	-4.12	-5.8504	-4.88	-7.07	0.01	-7.03
H40	-1.27	3.5	-4.75	-10.50	-44.19	-1.00	2.21	487	0.74	-4.75	-5.2488	-5.25	-7.37	3.13	-7.37
H50	-1.85	3.5	-5.33	-8.69	-48.48	-0.84	1.65	263	1.36	-5.33	-4.344	-5.15	-8.08	6.39	-6.93

H60	-2.38	3.5	-5.86	-6.45	-55.63	-0.70	1.17	214	1.56	-5.86	-3.223	-4.58	-9.27	9.22	-5.90
H70	-2.83	3.5	-6.31	-4.10	-64.81	-0.58	0.74	174	1.77	-6.31	-2.0508	-3.48	-10.80	10.96	-4.45
H80	-3.2	3.5	-6.68	-1.87	-74.91	-0.47	0.35	202	1.62	-6.68	-0.9352	-1.92	-12.49	11.31	-2.98
H90	-3.48	3.5	-6.96	0.00	-84.29	-0.36	0.00	188	1.69	-6.96	0	0.02	-14.05	10.23	-1.86
H100	-3.64	3.5	-7.12	1.14	-90.37	-0.27	-0.34	179	1.74	-7.12	0.5696	2.25	-15.06	7.88	-1.44
H110	-3.7	3.5	-7.18	1.58	-92.80	-0.18	-0.66	209	1.59	-7.18	0.7898	4.57	-15.47	4.94	-1.94
H120	-3.64	3.5	-7.12	1.14	-90.37	-0.09	-0.97	222	1.52	-7.12	0.5696	6.82	-15.06	2.09	-3.39
H130	-3.48	3.5	-6.96	0.00	-84.29	0.00	-1.27	312	1.18	-6.96	0	8.84	-14.05	0.00	-5.61
H140	-3.2	3.5	-6.68	-1.87	-74.91	0.09	-1.57	630	0.48	-6.68	-0.9352	10.44	-12.49	-0.71	-8.25
H150	-2.83	3.5	-6.31	-4.10	-64.81	0.18	-1.88	692	0.39	-6.31	-2.0508	11.52	-10.80	0.05	-10.85
H160	-2.38	3.5	-5.86	-6.45	-55.63	0.27	-2.20	705	0.37	-5.86	-3.223	12.04	-9.27	2.13	-12.98
H170	-1.85	3.5	-5.33	-8.69	-48.48	0.36	-2.54	710	0.36	-5.33	-4.344	11.94	-8.08	5.14	-14.21
H180	-1.27	3.5	-4.75	-10.50	-44.19	0.47	-2.89	742	0.32	-4.75	-5.2488	11.29	-7.37	8.31	-14.40
I0	0.64	3.6	-3	-12.84	-47.97	-1.43	4.56	769	0.28	-3	-6.42	-4.51	-7.99	-6.43	-5.68
I10	0	3.6	-3.64	-13.25	-48.23	-1.19	3.70	737	0.32	-3.64	-6.6248	-5.57	-8.04	-5.34	-7.11
I20	-0.64	3.6	-4.28	-12.84	-48.49	-1.00	3.00	631	0.48	-4.28	-6.42	-6.42	-8.08	-3.10	-8.08
I30	-1.27	3.6	-4.91	-11.64	-50.28	-0.84	2.41	695	0.38	-4.91	-5.8184	-6.97	-8.38	0.02	-8.42
I40	-1.85	3.6	-5.49	-9.83	-54.56	-0.70	1.91	466	0.78	-5.49	-4.9136	-7.04	-9.09	3.36	-7.89
I50	-2.38	3.6	-6.02	-7.59	-61.71	-0.58	1.46	290	1.26	-6.02	-3.7926	-6.61	-10.28	6.33	-6.66
I60	-2.83	3.6	-6.47	-5.24	-70.89	-0.47	1.06	207	1.59	-6.47	-2.6204	-5.62	-11.82	8.25	-4.89
I70	-3.2	3.6	-6.84	-3.01	-81.00	-0.36	0.68	168	1.80	-6.84	-1.5048	-4.14	-13.50	8.80	-3.02
I80	-3.48	3.6	-7.12	-1.14	-90.37	-0.27	0.34	187	1.70	-7.12	-0.5696	-2.23	-15.06	7.88	-1.43
I90	-3.64	3.6	-7.28	0.00	-96.46	-0.18	0.00	184	1.71	-7.28	0	-0.01	-16.08	5.67	-0.50
I100	-3.7	3.6	-7.34	0.44	-98.88	-0.09	-0.32	204	1.61	-7.34	0.2202	2.34	-16.48	2.81	-0.50
I110	-3.64	3.6	-7.28	0.00	-96.46	0.00	-0.64	195	1.65	-7.28	0	4.66	-16.08	0.00	-1.49
I120	-3.48	3.6	-7.12	-1.14	-90.37	0.09	-0.96	176	1.76	-7.12	-0.5696	6.77	-15.06	-2.09	-3.34
I130	-3.2	3.6	-6.84	-3.01	-81.00	0.18	-1.28	251	1.40	-6.84	-1.5048	8.50	-13.50	-2.83	-5.70
I140	-2.83	3.6	-6.47	-5.24	-70.89	0.27	-1.62	453	0.81	-6.47	-2.6204	9.75	-11.82	-2.10	-8.16
I150	-2.38	3.6	-6.02	-7.59	-61.71	0.36	-1.96	680	0.41	-6.02	-3.7926	10.45	-10.28	-0.03	-10.27
I160	-1.85	3.6	-5.49	-9.83	-54.56	0.47	-2.34	742	0.32	-5.49	-4.9136	10.54	-9.09	3.00	-11.62
I170	-1.27	3.6	-4.91	-11.64	-50.28	0.58	-2.74	691	0.39	-4.91	-5.8184	10.10	-8.38	6.28	-12.04
I180	-0.64	3.6	-4.28	-12.84	-48.49	0.70	-3.19	689	0.39	-4.28	-6.42	9.15	-8.08	9.15	-11.39
J0	0	3.7	-3.7	-13.69	-50.65	-1.00	3.70	759	0.30	-3.7	-6.845	-6.85	-8.44	-8.44	-8.44
J10	-0.64	3.7	-4.34	-13.28	-50.92	-0.84	3.10	686	0.40	-4.34	-6.6402	-7.90	-8.49	-6.37	-9.59
J20	-1.27	3.7	-4.97	-12.08	-52.70	-0.70	2.59	642	0.46	-4.97	-6.0386	-8.65	-8.78	-3.34	-10.03
J30	-1.85	3.7	-5.55	-10.27	-56.98	-0.58	2.14	647	0.46	-5.55	-5.1338	-8.89	-9.50	0.00	-9.50
J40	-2.38	3.7	-6.08	-8.03	-64.13	-0.47	1.73	455	0.81	-6.08	-4.0128	-8.62	-10.69	3.05	-8.15
J50	-2.83	3.7	-6.53	-5.68	-73.32	-0.36	1.35	286	1.27	-6.53	-2.8406	-7.76	-12.22	5.07	-6.15
J60	-3.2	3.7	-6.9	-3.45	-83.42	-0.27	0.99	183	1.72	-6.9	-1.725	-6.38	-13.90	5.74	-3.93
J70	-3.48	3.7	-7.18	-1.58	-92.80	-0.18	0.65	160	1.85	-7.18	-0.7898	-4.55	-15.47	4.94	-1.92
J80	-3.64	3.7	-7.34	-0.44	-98.88	-0.09	0.32	206	1.60	-7.34	-0.2202	-2.36	-16.48	2.81	-0.50
J90	-3.7	3.7	-7.4	0.00	-101.31	0.00	0.00	214	1.56	-7.4	0	0.00	-16.88	0.00	0.00
J100	-3.64	3.7	-7.34	-0.44	-98.88	0.09	-0.32	180	1.73	-7.34	-0.2202	2.36	-16.48	-2.81	-0.50
J110	-3.48	3.7	-7.18	-1.58	-92.80	0.18	-0.65	321	1.16	-7.18	-0.7898	4.55	-15.47	-4.94	-1.92
J120	-3.2	3.7	-6.9	-3.45	-83.42	0.27	-0.99	260	1.37	-6.9	-1.725	6.38	-13.90	-5.74	-3.93
J130	-2.83	3.7	-6.53	-5.68	-73.32	0.36	-1.35	386	0.97	-6.53	-2.8406	7.76	-12.22	-5.07	-6.15
J140	-2.38	3.7	-6.08	-8.03	-64.13	0.47	-1.73	445	0.83	-6.08	-4.0128	8.62	-10.69	-3.05	-8.15
J150	-1.85	3.7	-5.55	-10.27	-56.98	0.58	-2.14	662	0.43	-5.55	-5.1338	8.89	-9.50	0.00	-9.50
J160	-1.27	3.7	-4.97	-12.08	-52.70	0.70	-2.59	689	0.39	-4.97	-6.0386	8.65	-8.78	3.34	-10.03

J170	-0.64	3.7	-4.34	-13.28	-50.92	0.84	-3.10	709	0.36	-4.34	-6.6402	7.90	-8.49	6.37	-9.59
J180	0	3.7	-3.7	-13.69	-50.65	1.00	-3.70	741	0.32	-3.7	-6.845	6.85	-8.44	8.44	-8.44
K0	-0.64	3.6	-4.28	-12.84	-48.49	-0.70	3.19	769	0.28	-4.28	-6.42	-9.15	-8.08	-9.15	-11.39
K10	-1.27	3.6	-4.91	-11.64	-50.28	-0.58	2.74	737	0.32	-4.91	-5.8184	-10.10	-8.38	-6.28	-12.04
K20	-1.85	3.6	-5.49	-9.83	-54.56	-0.47	2.34	631	0.48	-5.49	-4.9136	-10.54	-9.09	-3.00	-11.62
K30	-2.38	3.6	-6.02	-7.59	-61.71	-0.36	1.96	695	0.38	-6.02	-3.7926	-10.45	-10.28	0.03	-10.27
K40	-2.83	3.6	-6.47	-5.24	-70.89	-0.27	1.62	466	0.78	-6.47	-2.6204	-9.75	-11.82	2.10	-8.16
K50	-3.2	3.6	-6.84	-3.01	-81.00	-0.18	1.28	290	1.26	-6.84	-1.5048	-8.50	-13.50	2.83	-5.70
K60	-3.48	3.6	-7.12	-1.14	-90.37	-0.09	0.96	207	1.59	-7.12	-0.5696	-6.77	-15.06	2.09	-3.34
K70	-3.64	3.6	-7.28	0.00	-96.46	0.00	0.64	168	1.80	-7.28	0	-4.66	-16.08	0.00	-1.49
K80	-3.7	3.6	-7.34	0.44	-98.88	0.09	0.32	187	1.70	-7.34	0.2202	-2.34	-16.48	-2.81	-0.50
K90	-3.64	3.6	-7.28	0.00	-96.46	0.18	0.00	184	1.71	-7.28	0	0.01	-16.08	-5.67	-0.50
K100	-3.48	3.6	-7.12	-1.14	-90.37	0.27	-0.34	204	1.61	-7.12	-0.5696	2.23	-15.06	-7.88	-1.43
K110	-3.2	3.6	-6.84	-3.01	-81.00	0.36	-0.68	195	1.65	-6.84	-1.5048	4.14	-13.50	-8.80	-3.02
K120	-2.83	3.6	-6.47	-5.24	-70.89	0.47	-1.06	176	1.76	-6.47	-2.6204	5.62	-11.82	-8.25	-4.89
K130	-2.38	3.6	-6.02	-7.59	-61.71	0.58	-1.46	251	1.40	-6.02	-3.7926	6.61	-10.28	-6.33	-6.66
K140	-1.85	3.6	-5.49	-9.83	-54.56	0.70	-1.91	453	0.81	-5.49	-4.9136	7.04	-9.09	-3.36	-7.89
K150	-1.27	3.6	-4.91	-11.64	-50.28	0.84	-2.41	680	0.41	-4.91	-5.8184	6.97	-8.38	-0.02	-8.42
K160	-0.64	3.6	-4.28	-12.84	-48.49	1.00	-3.00	742	0.32	-4.28	-6.42	6.42	-8.08	3.10	-8.08
K170	0	3.6	-3.64	-13.25	-48.23	1.19	-3.70	691	0.39	-3.64	-6.6248	5.57	-8.04	5.34	-7.11
K180	0.64	3.6	-3	-12.84	-47.97	1.43	-4.56	689	0.39	-3	-6.42	4.51	-7.99	6.43	-5.68
L0	-1.27	3.5	-4.75	-10.50	-44.19	-0.47	2.89	686	0.40	-4.75	-5.2488	-11.29	-7.37	-8.31	-14.40
L10	-1.85	3.5	-5.33	-8.69	-48.48	-0.36	2.54	675	0.41	-5.33	-4.344	-11.94	-8.08	-5.14	-14.21
L20	-2.38	3.5	-5.86	-6.45	-55.63	-0.27	2.20	675	0.41	-5.86	-3.223	-12.04	-9.27	-2.13	-12.98
L30	-2.83	3.5	-6.31	-4.10	-64.81	-0.18	1.88	665	0.43	-6.31	-2.0508	-11.52	-10.80	-0.05	-10.85
L40	-3.2	3.5	-6.68	-1.87	-74.91	-0.09	1.57	487	0.74	-6.68	-0.9352	-10.44	-12.49	0.71	-8.25
L50	-3.48	3.5	-6.96	0.00	-84.29	0.00	1.27	263	1.36	-6.96	0	-8.84	-14.05	0.00	-5.61
L60	-3.64	3.5	-7.12	1.14	-90.37	0.09	0.97	214	1.56	-7.12	0.5696	-6.82	-15.06	-2.09	-3.39
L70	-3.7	3.5	-7.18	1.58	-92.80	0.18	0.66	174	1.77	-7.18	0.7898	-4.57	-15.47	-4.94	-1.94
L80	-3.64	3.5	-7.12	1.14	-90.37	0.27	0.34	202	1.62	-7.12	0.5696	-2.25	-15.06	-7.88	-1.44
L90	-3.48	3.5	-6.96	0.00	-84.29	0.36	0.00	188	1.69	-6.96	0	-0.02	-14.05	-10.23	-1.86
L100	-3.2	3.5	-6.68	-1.87	-74.91	0.47	-0.35	179	1.74	-6.68	-0.9352	1.92	-12.49	-11.31	-2.98
L110	-2.83	3.5	-6.31	-4.10	-64.81	0.58	-0.74	209	1.59	-6.31	-2.0508	3.48	-10.80	-10.96	-4.45
L120	-2.38	3.5	-5.86	-6.45	-55.63	0.70	-1.17	222	1.52	-5.86	-3.223	4.58	-9.27	-9.22	-5.90
L130	-1.85	3.5	-5.33	-8.69	-48.48	0.84	-1.65	312	1.18	-5.33	-4.344	5.15	-8.08	-6.39	-6.93
L140	-1.27	3.5	-4.75	-10.50	-44.19	1.00	-2.21	630	0.48	-4.75	-5.2488	5.25	-7.37	-3.13	-7.37
L150	-0.64	3.5	-4.12	-11.70	-42.41	1.19	-2.88	692	0.39	-4.12	-5.8504	4.88	-7.07	-0.01	-7.03
L160	0	3.5	-3.48	-12.11	-42.14	1.43	-3.70	705	0.37	-3.48	-6.0552	4.23	-7.02	2.34	-6.15
L170	0.64	3.5	-2.84	-11.70	-41.88	1.73	-4.76	710	0.36	-2.84	-5.8504	3.38	-6.98	3.65	-4.87
L180	1.27	3.5	-2.21	-10.50	-40.10	2.14	-6.19	742	0.32	-2.21	-5.2488	2.43	-6.68	3.84	-3.40
M0	-1.85	3.2	-5.05	-6.82	-39.10	-0.27	2.71	781	0.27	-5.05	-3.4088	-12.76	-6.52	-5.74	-16.50
M10	-2.38	3.2	-5.58	-4.58	-46.25	-0.18	2.41	697	0.38	-5.58	-2.2878	-13.07	-7.71	-2.80	-15.53
M20	-2.83	3.2	-6.03	-2.23	-55.43	-0.09	2.13	690	0.39	-6.03	-1.1156	-12.75	-9.24	-0.76	-13.54
M30	-3.2	3.2	-6.4	0.00	-65.54	0.00	1.85	695	0.38	-6.4	0	-11.84	-10.92	0.00	-10.95
M40	-3.48	3.2	-6.68	1.87	-74.91	0.09	1.57	477	0.76	-6.68	0.9352	-10.41	-12.49	-0.72	-8.20
M50	-3.64	3.2	-6.84	3.01	-81.00	0.18	1.29	251	1.40	-6.84	1.5048	-8.53	-13.50	-2.83	-5.73
M60	-3.7	3.2	-6.9	3.45	-83.42	0.27	0.99	224	1.52	-6.9	1.725	-6.39	-13.90	-5.74	-3.94
M70	-3.64	3.2	-6.84	3.01	-81.00	0.36	0.89	208	1.59	-6.84	1.5048	-4.14	-13.50	-8.80	-3.02
M80	-3.48	3.2	-6.68	1.87	-74.91	0.47	0.36	201	1.62	-6.68	0.9352	-1.95	-12.49	-11.31	-2.99

M90	-3.2	3.2	-6.4	0.00	-65.54	0.58	0.00	214	1.56	-6.4	0	-0.02	-10.92	-12.61	-3.64
M100	-2.83	3.2	-6.03	-2.23	-55.43	0.70	-0.39	183	1.72	-6.03	-1.1156	1.57	-9.24	-12.50	-4.68
M110	-2.38	3.2	-5.58	-4.58	-46.25	0.84	-0.84	215	1.56	-5.58	-2.2878	2.74	-7.71	-11.03	-5.77
M120	-1.85	3.2	-5.05	-6.82	-39.10	1.00	-1.35	218	1.54	-5.05	-3.4088	3.41	-6.52	-8.43	-6.52
M130	-1.27	3.2	-4.47	-8.63	-34.82	1.19	-1.96	257	1.38	-4.47	-4.3136	3.64	-5.80	-5.36	-6.76
M140	-0.64	3.2	-3.84	-9.83	-33.03	1.43	-2.72	442	0.84	-3.84	-4.9152	3.43	-5.51	-2.35	-6.34
M150	0	3.2	-3.2	-10.24	-32.77	1.73	-3.69	644	0.46	-3.2	-5.12	2.95	-5.46	-0.01	-5.45
M160	0.64	3.2	-2.56	-9.83	-32.51	2.14	-5.01	690	0.39	-2.56	-4.9152	2.29	-5.42	1.40	-4.24
M170	1.27	3.2	-1.93	-8.63	-30.72	2.75	-6.94	687	0.40	-1.93	-4.3136	1.55	-5.12	1.81	-2.88
M180	1.85	3.2	-1.35	-6.82	-26.44	3.73	-10.09	736	0.33	-1.35	-3.4088	0.90	-4.41	1.52	-1.73
N0	-2.38	2.8	-5.21	-2.34	-36.15	-0.09	2.63	746	0.31	-5.21	-1.1723	-13.59	-6.02	-2.03	-17.76
N10	-2.83	2.8	-5.66	0.00	-45.33	0.00	2.38	717	0.35	-5.66	0	-13.47	-7.56	0.00	-16.03
N20	-3.2	2.8	-6.03	2.23	-55.43	0.09	2.13	701	0.38	-6.03	1.1156	-12.76	-9.24	0.76	-13.57
N30	-3.48	2.8	-6.31	4.10	-64.81	0.18	1.88	695	0.38	-6.31	2.0508	-11.51	-10.80	0.05	-10.82
N40	-3.64	2.8	-6.47	5.24	-70.89	0.27	1.62	598	0.53	-6.47	2.6204	-9.79	-11.82	-2.08	-8.22
N50	-3.7	2.8	-6.53	5.68	-73.32	0.36	1.35	275	1.31	-6.53	2.8405	-7.78	-12.22	-5.06	-6.17
N60	-3.64	2.8	-6.47	5.24	-70.89	0.47	1.06	206	1.60	-6.47	2.6204	-5.64	-11.82	-8.24	-4.91
N70	-3.48	2.8	-6.31	4.10	-64.81	0.58	0.75	230	1.49	-6.31	2.0508	-3.52	-10.80	-10.94	-4.47
N80	-3.2	2.8	-6.03	2.23	-55.43	0.70	0.40	195	1.65	-6.03	1.1156	-1.62	-9.24	-12.49	-4.70
N90	-2.83	2.8	-5.66	0.00	-45.33	0.84	0.01	210	1.58	-5.66	0	-0.03	-7.56	-12.68	-5.32
N100	-2.38	2.8	-5.21	-2.34	-36.15	1.00	-0.45	212	1.57	-5.21	-1.1723	1.17	-6.02	-11.52	-6.02
N110	-1.85	2.8	-4.68	-4.59	-29.00	1.19	-0.99	175	1.76	-4.68	-2.2932	1.91	-4.83	-9.24	-6.46
N120	-1.27	2.8	-4.1	-6.40	-24.71	1.43	-1.66	221	1.53	-4.1	-3.198	2.25	-4.12	-6.45	-6.47
N130	-0.64	2.8	-3.47	-7.60	-22.93	1.73	-2.52	275	1.31	-3.47	-3.7997	2.17	-3.82	-3.66	-5.90
N140	0	2.8	-2.83	-8.01	-22.67	2.14	-3.69	550	0.62	-2.83	-4.0045	1.85	-3.78	-1.43	-4.95
N150	0.64	2.8	-2.19	-7.60	-22.40	2.75	-5.40	693	0.39	-2.19	-3.7997	1.38	-3.73	-0.02	-3.74
N160	1.27	2.8	-1.56	-6.40	-20.62	3.73	-8.18	737	0.32	-1.56	-3.198	0.83	-3.44	0.52	-2.42
N170	1.85	2.8	-0.98	-4.59	-16.33	5.67	-13.67	759	0.30	-0.98	-2.2932	0.39	-2.72	0.47	-1.34
N180	2.38	2.8	-0.45	-2.34	-9.18	11.43	-29.97	713	0.36	-0.45	-1.1723	0.09	-1.53	0.14	-0.50
O0	-2.83	2.4	-5.21	2.34	-36.15	0.09	2.62	848	0.18	-5.21	1.1723	-13.56	-6.02	2.02	-17.68
O10	-3.2	2.4	-5.58	4.58	-46.25	0.18	2.41	851	0.18	-5.58	2.2878	-13.05	-7.71	2.80	-15.48
O20	-3.48	2.4	-5.86	6.45	-55.63	0.27	2.19	763	0.29	-5.86	3.223	-11.98	-9.27	2.10	-12.85
O30	-3.64	2.4	-6.02	7.59	-61.71	0.36	1.96	784	0.26	-6.02	3.7926	-10.44	-10.28	-0.04	-10.26
O40	-3.7	2.4	-6.08	8.03	-64.13	0.47	1.72	730	0.33	-6.08	4.0128	-8.59	-10.69	-3.07	-8.10
O50	-3.64	2.4	-6.02	7.59	-61.71	0.58	1.46	353	1.06	-6.02	3.7926	-6.57	-10.28	-6.35	-6.62
O60	-3.48	2.4	-5.86	6.45	-55.63	0.70	1.16	219	1.54	-5.86	3.223	-4.56	-9.27	-9.23	-5.89
O70	-3.2	2.4	-5.58	4.58	-46.25	0.84	0.83	188	1.69	-5.58	2.2878	-2.73	-7.71	-11.03	-5.76
O80	-2.83	2.4	-5.21	2.34	-36.15	1.00	0.45	177	1.75	-5.21	1.1723	-1.17	-6.02	-11.52	-6.02
O90	-2.38	2.4	-4.76	0.00	-26.96	1.19	-0.01	174	1.77	-4.76	0	0.03	-4.49	-10.71	-6.38
O100	-1.85	2.4	-4.23	-2.24	-19.81	1.43	-0.57	191	1.68	-4.23	-1.121	0.81	-3.30	-8.79	-6.51
O110	-1.27	2.4	-3.65	-4.05	-15.53	1.73	-1.29	190	1.68	-3.65	-2.0258	1.21	-2.59	-6.35	-6.28
O120	-0.64	2.4	-3.02	-5.25	-13.74	2.14	-2.27	192	1.67	-3.02	-2.6274	1.23	-2.29	-3.85	-5.53
O130	0	2.4	-2.38	-5.66	-13.48	2.75	-3.71	281	1.29	-2.38	-2.8322	1.05	-2.25	-1.84	-4.47
O140	0.64	2.4	-1.74	-5.25	-13.22	3.73	-6.05	334	1.12	-1.74	-2.6274	0.73	-2.20	-0.54	-3.21
O150	1.27	2.4	-1.11	-4.05	-11.43	5.67	-10.67	645	0.46	-1.11	-2.0258	0.35	-1.91	0.00	-1.89
O160	1.85	2.4	-0.53	-2.24	-7.15	11.43	-24.37	643	0.46	-0.53	-1.121	0.11	-1.19	0.08	-0.82
O170	2.38	2.4	0	0.00	0.00	-0.01	-2.37	672	0.42	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00
O180	2.83	2.4	0.45	2.34	9.18	-11.43	30.03	750	0.31	0.45	1.1723	0.12	1.53	0.22	0.51
P0	-3.2	1.9	-5.05	6.82	-39.10	0.27	2.70	704	0.37	-5.05	3.4088	-12.74	-8.52	5.73	-16.48

P10	-3.48	1.9	-5.33	8.69	-48.48	0.36	2.53	697	0.38	-5.33	4.344	-11.89	-8.08	5.09	-14.09
P20	-3.64	1.9	-5.49	9.83	-54.56	0.47	2.34	687	0.40	-5.49	4.9136	-10.54	-9.09	3.00	-11.62
P30	-3.7	1.9	-5.55	10.27	-56.98	0.58	2.13	704	0.37	-5.55	5.1338	-8.87	-9.50	-0.02	-9.46
P40	-3.64	1.9	-5.49	9.83	-54.56	0.70	1.90	646	0.46	-5.49	4.9136	-7.02	-9.09	-3.38	-7.86
P50	-3.48	1.9	-5.33	8.69	-48.48	0.84	1.65	373	1.01	-5.33	4.344	-5.14	-8.08	-6.40	-6.92
P60	-3.2	1.9	-5.05	6.82	-39.10	1.00	1.35	188	1.69	-5.05	3.4088	-3.41	-6.52	-8.43	-6.52
P70	-2.83	1.9	-4.68	4.59	-29.00	1.19	1.00	180	1.73	-4.68	2.2932	-1.92	-4.83	-9.24	-6.46
P80	-2.38	1.9	-4.23	2.24	-19.81	1.43	0.56	188	1.69	-4.23	1.121	-0.76	-3.30	-8.81	-6.50
P90	-1.85	1.9	-3.7	0.00	-12.66	1.73	0.00	208	1.59	-3.7	0	0.02	-2.11	-7.31	-6.33
P100	-1.27	1.9	-3.12	-1.81	-8.38	2.14	-0.77	258	1.37	-3.12	-0.9048	0.45	-1.40	-5.30	-5.85
P110	-0.64	1.9	-2.49	-3.01	-6.59	2.75	-1.88	239	1.45	-2.49	-1.5065	0.55	-1.10	-3.20	-4.92
P120	0	1.9	-1.85	-3.42	-6.33	3.73	-3.70	289	1.26	-1.85	-1.7113	0.47	-1.06	-1.54	-3.73
P130	0.64	1.9	-1.21	-3.01	-6.07	5.67	-7.29	308	1.20	-1.21	-1.5065	0.28	-1.01	-0.49	-2.41
P140	1.27	1.9	-0.58	-1.81	-4.28	11.43	-17.95	566	0.59	-0.58	-0.9048	0.07	-0.71	-0.08	-1.07
P150	1.85	1.9	0	0.00	0.00	-0.01	-1.87	643	0.46	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00
P160	2.38	1.9	0.53	2.24	7.15	-11.43	24.35	680	0.41	0.53	1.121	0.09	1.19	0.05	0.82
P170	2.83	1.9	0.98	4.59	16.33	-5.67	13.69	704	0.37	0.98	2.2932	0.41	2.72	0.52	1.35
P180	3.2	1.9	1.35	6.82	26.44	-3.73	10.10	735	0.33	1.35	3.4088	0.92	4.41	1.56	1.74
Q0	-3.48	1.3	-4.75	10.50	-44.19	0.47	2.89	758	0.30	-4.75	5.2488	-11.27	-7.37	8.29	-14.34
Q10	-3.64	1.3	-4.91	11.64	-50.28	0.58	2.75	715	0.36	-4.91	5.8184	-10.13	-8.38	6.31	-12.09
Q20	-3.7	1.3	-4.97	12.08	-52.70	0.70	2.59	700	0.38	-4.97	6.0386	-8.65	-8.78	3.34	-10.03
Q30	-3.64	1.3	-4.91	11.64	-50.28	0.84	2.41	666	0.43	-4.91	5.8184	-6.97	-8.38	-0.01	-8.42
Q40	-3.48	1.3	-4.75	10.50	-44.19	1.00	2.21	681	0.40	-4.75	5.2488	-5.25	-7.37	-3.13	-7.37
Q50	-3.2	1.3	-4.47	8.63	-34.82	1.19	1.97	382	0.98	-4.47	4.3136	-3.65	-5.80	-5.35	-6.78
Q60	-2.83	1.3	-4.1	6.40	-24.71	1.43	1.67	257	1.38	-4.1	3.198	-2.26	-4.12	-6.44	-6.48
Q70	-2.38	1.3	-3.65	4.05	-15.53	1.73	1.28	209	1.59	-3.65	2.0258	-1.16	-2.59	-6.37	-6.26
Q80	-1.85	1.3	-3.12	1.81	-8.38	2.14	0.76	179	1.74	-3.12	0.9048	-0.42	-1.40	-5.31	-5.85
Q90	-1.27	1.3	-2.54	0.00	-4.10	2.75	-0.01	205	1.60	-2.54	0	0.02	-0.68	-3.75	-5.15
Q100	-0.64	1.3	-1.91	-1.20	-2.31	3.73	-1.26	196	1.65	-1.91	-0.6017	0.16	-0.39	-2.12	-4.05
Q110	0	1.3	-1.27	-1.61	-2.05	5.67	-3.72	221	1.53	-1.27	-0.8065	0.15	-0.34	-0.87	-2.75
Q120	0.64	1.3	-0.63	-1.20	-1.79	11.43	-11.04	223	1.52	-0.63	-0.6017	0.08	-0.30	-0.17	-1.37
Q130	1.27	1.3	0	0.00	0.00	-0.01	-1.27	245	1.43	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00
Q140	1.85	1.3	0.58	1.81	4.28	-11.43	18.00	379	0.99	0.58	0.9048	0.10	0.71	-0.04	1.07
Q150	2.38	1.3	1.11	4.05	11.43	-5.67	10.68	656	0.44	1.11	2.0258	0.37	1.91	0.03	1.89
Q160	2.83	1.3	1.56	6.40	20.62	-3.73	8.22	674	0.41	1.56	3.198	0.89	3.44	0.64	2.46
Q170	3.2	1.3	1.93	8.63	30.72	-2.75	6.97	664	0.43	1.93	4.3136	1.60	5.12	1.93	2.92
Q180	3.48	1.3	2.21	10.50	40.10	-2.14	6.20	740	0.32	2.21	5.2488	2.45	6.68	3.90	3.43
R0	-3.64	0.6	-4.28	12.84	-48.49	0.70	3.19	775	0.27	-4.28	6.42	-9.17	-8.08	9.17	-11.42
R10	-3.7	0.6	-4.34	13.28	-50.92	0.84	3.10	682	0.40	-4.34	6.6402	-7.90	-8.49	6.36	-9.58
R20	-3.64	0.6	-4.28	12.84	-48.49	1.00	3.00	720	0.35	-4.28	6.42	-6.42	-8.08	3.10	-8.08
R30	-3.48	0.6	-4.12	11.70	-42.41	1.19	2.88	676	0.41	-4.12	5.8504	-4.88	-7.07	-0.10	-7.03
R40	-3.2	0.6	-3.84	9.83	-33.03	1.43	2.73	661	0.43	-3.84	4.9152	-3.45	-5.51	-2.33	-6.36
R50	-2.83	0.6	-3.47	7.60	-22.93	1.73	2.53	252	1.40	-3.47	3.7997	-2.20	-3.82	-3.62	-5.92
R60	-2.38	0.6	-3.02	5.25	-13.74	2.14	2.27	225	1.51	-3.02	2.6274	-1.21	-2.29	-3.87	-5.52
R70	-1.85	0.6	-2.49	3.01	-6.59	2.75	1.88	206	1.60	-2.49	1.5065	-0.55	-1.10	-3.20	-4.92
R80	-1.27	0.6	-1.91	1.20	-2.31	3.73	1.25	212	1.57	-1.91	0.6017	-0.14	-0.39	-2.12	-4.05
R90	-0.64	0.6	-1.28	0.00	-0.52	5.67	0.01	207	1.59	-1.28	0	-0.01	-0.09	-0.99	-2.81
R100	0	0.6	-0.64	-0.41	-0.28	11.43	-3.88	207	1.59	-0.64	-0.2048	0.01	-0.04	-0.25	-1.43
R110	0.64	0.6	0	0.00	0.00	-0.01	-0.61	219	1.54	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00

R120	1.27	0.6	0.63	1.20	1.79	-11.43	10.96	218	1.54	0.63	0.6017	0.02	0.30	-0.21	1.36
R130	1.85	0.6	1.21	3.01	6.07	-5.67	7.27	229	1.49	1.21	1.5065	0.25	1.01	-0.52	2.40
R140	2.38	0.6	1.74	5.25	13.22	-3.73	6.03	379	0.99	1.74	2.6274	0.68	2.20	-0.61	3.19
R150	2.83	0.6	2.19	7.60	22.40	-2.75	5.40	581	0.56	2.19	3.7997	1.38	3.73	-0.01	3.74
R160	3.2	0.6	2.56	9.83	32.51	-2.14	5.01	695	0.38	2.56	4.9152	2.29	5.42	1.40	4.24
R170	3.48	0.6	2.84	11.70	41.88	-1.73	4.75	765	0.29	2.84	5.8504	3.35	6.98	3.60	4.84
R180	3.64	0.6	3	12.84	47.97	-1.43	4.55	772	0.28	3	6.42	4.49	7.99	6.40	5.66
S0	-3.7	0	-3.7	13.69	-50.65	1.00	3.7	784	0.26	-3.7	6.845	-6.85	-8.44	8.44	-8.44
S10	-3.64	0	-3.64	13.25	-48.23	1.19	3.7	793	0.25	-3.64	6.6248	-5.57	-8.04	5.35	-7.12
S20	-3.48	0	-3.48	12.11	-42.14	1.43	3.7	769	0.28	-3.48	6.0552	-4.23	-7.02	2.34	-6.15
S30	-3.2	0	-3.2	10.24	-32.77	1.73	3.7	730	0.33	-3.2	5.12	-2.97	-5.46	0.03	-5.48
S40	-2.83	0	-2.83	8.01	-22.67	2.14	3.7	705	0.37	-2.83	4.0045	-1.88	-3.78	-1.39	-4.97
S50	-2.38	0	-2.38	5.66	-13.48	2.75	3.7	313	1.18	-2.38	2.8322	-1.02	-2.25	-1.87	-4.46
S60	-1.85	0	-1.85	3.42	-6.33	3.73	3.7	233	1.48	-1.85	1.7113	-0.46	-1.06	-1.55	-3.73
S70	-1.27	0	-1.27	1.61	-2.05	5.67	3.7	199	1.63	-1.27	0.8065	-0.13	-0.34	-0.89	-2.75
S80	-0.64	0	-0.64	0.41	-0.26	11.43	3.7	193	1.66	-0.64	0.2048	-0.03	-0.04	-0.24	-1.43
S90	0	0	0	0.00	0.00	-0.01	0.03	209	1.59	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00
S100	0.64	0	0.64	0.41	0.26	-11.43	3.7	170	1.79	0.64	0.2048	0.03	0.04	-0.24	1.43
S110	1.27	0	1.27	1.61	2.05	-5.67	3.7	187	1.70	1.27	0.8065	0.13	0.34	-0.89	2.75
S120	1.85	0	1.85	3.42	6.33	-3.73	3.7	226	1.51	1.85	1.7113	0.46	1.06	-1.55	3.73
S130	2.38	0	2.38	5.66	13.48	-2.75	3.7	242	1.44	2.38	2.8322	1.02	2.25	-1.87	4.46
S140	2.83	0	2.83	8.01	22.67	-2.14	3.7	369	1.02	2.83	4.0045	1.88	3.78	-1.39	4.97
S150	3.2	0	3.2	10.24	32.77	-1.73	3.7	658	0.44	3.2	5.12	2.97	5.46	0.03	5.48
S160	3.48	0	3.48	12.11	42.14	-1.43	3.7	752	0.30	3.48	6.0552	4.23	7.02	2.34	6.15
S170	3.64	0	3.64	13.25	48.23	-1.19	3.7	726	0.34	3.64	6.6248	5.57	8.04	5.35	7.12
S180	3.7	0	3.7	13.69	50.65	-1.00	3.7	745	0.31	3.7	6.845	6.85	8.44	8.44	8.44

6.3 Resultados y análisis

El método propuesto para estimar los coeficientes a_{00} , a_{10} , a_{01} , a_{02} , a_{20} y a_{11} , es el de regresión múltiple. Actualmente con la ayuda de la computadora la estimación de estos parámetros es un método relativamente sencillo.

Para estimar los valores a_{ij} se utilizó un paquete de software de estadística (SPSS). Este paquete realiza la regresión lineal y proporciona los valores estimados a_{ij} , los cuales se presentan en la tabla 6.3. Con este procedimiento se obtienen a la vez coeficientes que determinan un intervalo del 95% de confianza para los estimados, lo cual genera otras dos ecuaciones ((6.2) y (6.3)), que se llamaron $\mu(x,y)_{inf}$ y $\mu(x,y)_{sup}$. Estos valores se presentan en la misma tabla en la tercer y cuarta columna.

Tabla 6.3. Coeficientes estimados

Variable	Valor estimado principal	95% Confiance Intrvl B (inferior)	95% Confiance Intrvl B (superior)
a00	.751254	0.670652	0.831855
a10	-0.006817	-0.024315	0.010681
a01	-0.001625	-0.011825	0.008694
a20	-0.236636	-0.274280	-0.198992
a11	-0.001155	-0.012722	0.010411

a02	-0.124543	-0.143328	0.831855
-----	-----------	-----------	----------

Las ecuaciones que se obtienen al sustituir los valores estimados de la tabla 6.3 en la ecuación (4.4) son las siguientes:

$$\mu(x, y)_{inf} = 0.67 - 0.024 \cdot x - 0.011 \cdot y + \frac{1}{2}(-.274)x^2 - 0.0127xy + \frac{1}{2}(-.143)y^2 \quad (6.1)$$

$$\mu(x, y)_{nor} = .751 - .0068x + 0.0016 \cdot y + \frac{1}{2}(-.0236)x^2 - 0.0011xy + \frac{1}{2}(0.124)y^2 \quad (6.2)$$

$$\mu(x, y)_{sup} = .831 + 0.10 \cdot x + 0.008 \cdot y + \frac{1}{2}(-.0198)x^2 + 0.010xy + \frac{1}{2}(0.831)y^2 \quad (6.3)$$

Para obtener el comportamiento de estas funciones se proponen sólo algunos valores de (x,y) que cumplan con estar dentro del domi; estos valores se presentan en la tabla 6.4 y su respectiva gráfica se presenta en la figura 6.5 para estas coordenadas. Para obtener la figura total es necesario sustituir un conjunto grande de valores de (x,y) para conocer el comportamiento de la atenuación en diferentes posiciones del domi. En este trabajo se presenta sólo una serie de valores ya que el resultado para otras familias de rectas es semejante al presentado en este desarrollo.

Tabla 6.4.

x	y	Coef. Aten. Lineal estimado	Coef. Aten. Lineal estimado 95 % confianza (inferior)	Coef. Aten. Lineal estimado 95 % confianza (superior)
-3.7	-3.7	0.00559281	-0.52832094	0.5171138
-3.6	-3.6	0.12623648	-0.37022096	0.62267348
-3.5	-3.5	0.25443088	-0.2165515	0.72539388
-3.4	-3.4	0.37899038	-0.06731256	0.82527498
-3.3	-3.3	0.499915	0.07749586	0.9223168
-3.2	-3.2	0.61720472	0.21787376	1.01651932
-3.1	-3.1	0.73085956	0.35382114	1.10788256
-3	-3	0.8408795	0.485338	1.1964065
-2.9	-2.9	0.94726456	0.61242434	1.28209116
-2.8	-2.8	1.05001472	0.73508016	1.36493652
-2.7	-2.7	1.14913	0.85330546	1.4449426
-2.6	-2.6	1.24461038	0.96710024	1.52210938
-2.5	-2.5	1.33645588	1.0764645	1.59643688
-2.4	-2.4	1.42466648	1.18139824	1.66792508
-2.3	-2.3	1.5092422	1.28190146	1.736574
-2.2	-2.2	1.59018302	1.37797416	1.80238362
-2.1	-2.1	1.66748896	1.46961634	1.86535396
-2	-2	1.74116	1.556828	1.925485
-1.9	-1.9	1.81119616	1.63960914	1.98277676
-1.8	-1.8	1.87759742	1.71795976	2.03722922
-1.7	-1.7	1.9403638	1.79187986	2.0888424
-1.6	-1.6	1.99949528	1.86136944	2.13761628
-1.5	-1.5	2.05499188	1.9264285	2.18355088
-1.4	-1.4	2.10685358	1.98705704	2.22664618
-1.3	-1.3	2.1550804	2.04325506	2.2669022
-1.2	-1.2	2.19967232	2.09502256	2.30431892

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

-1.1	-1.1	2.24062936	2.14235954	2.33889636
-1	-1	2.2779515	2.185266	2.3706345
-0.9	-0.9	2.31163876	2.22374194	2.39953336
-0.8	-0.8	2.34169112	2.25778736	2.42559292
-0.7	-0.7	2.3681086	2.28740226	2.4488132
-0.6	-0.6	2.39089118	2.31258664	2.46919418
-0.5	-0.5	2.41003888	2.3333405	2.48673588
-0.4	-0.4	2.42555168	2.34966384	2.50143828
-0.3	-0.3	2.4374296	2.36155666	2.5133014
-0.2	-0.2	2.44567262	2.36901896	2.52232522
-0.1	-0.1	2.45028076	2.37205074	2.52850976
0	0	2.451254	2.370652	2.531855
0.1	0.1	2.44859236	2.36482274	2.53236096
0.2	0.2	2.44229582	2.35456296	2.53002762
0.3	0.3	2.4323644	2.33987266	2.524855
0.4	0.4	2.41879808	2.32075184	2.51684308
0.5	0.5	2.40159688	2.2972005	2.50599188
0.6	0.6	2.38076078	2.26921864	2.49230138
0.7	0.7	2.3562898	2.23680626	2.4757716
0.8	0.8	2.32818392	2.19996336	2.45640252
0.9	0.9	2.29644316	2.15868994	2.43419416
1	1	2.2610675	2.112986	2.4091465
1.1	1.1	2.22205696	2.06285154	2.38125956
1.2	1.2	2.17941152	2.00828656	2.35053332
1.3	1.3	2.1331312	1.94929106	2.3169678
1.4	1.4	2.08321598	1.88586504	2.28056298
1.5	1.5	2.02966588	1.8180085	2.24131888
1.6	1.6	1.97248088	1.74572144	2.19923548
1.7	1.7	1.911661	1.66900386	2.1543128
1.8	1.8	1.84720622	1.58785576	2.10655082
1.9	1.9	1.77911656	1.50227714	2.05594956
2	2	1.707392	1.412268	2.002509
2.1	2.1	1.63203256	1.31782834	1.94622916
2.2	2.2	1.55303822	1.21895816	1.88711002
2.3	2.3	1.470409	1.11565746	1.8251516
2.4	2.4	1.38414488	1.00792624	1.76035388
2.5	2.5	1.29424587	0.8957645	1.69271688
2.6	2.6	1.20071198	0.77917224	1.62224058
2.7	2.7	1.10354319	0.65814946	1.548925
2.8	2.8	1.00273952	0.53269616	1.47277012
2.9	2.9	0.89830095	0.40281234	1.39377596
3	3	0.7902275	0.268498	1.3119425
3.1	3.1	0.67851915	0.12975314	1.22726976
3.2	3.2	0.56317592	-0.01342224	1.13975772
3.3	3.3	0.44419779	-0.16102814	1.04940639
3.4	3.4	0.32158478	-0.31306456	0.95621578
3.5	3.5	0.19533687	-0.4695315	0.86018587
3.6	3.6	0.06545408	-0.63042896	0.76131668
3.7	3.7	-0.06806361	-0.79575694	0.65960819

En la gráfica 6.5 se observa que la atenuación va aumentando conforme se llega al centro del domi y empieza a disminuir conforme se aleja de centro. Esto muestra que existe un área simétrica donde la atenuación es mayor, lo cual era de esperarse según el diseño del domi, donde recordemos que el centro es de plomo y alrededor se encuentra cubierto de cera. Además se observa que $\mu(x,y)_{inf} < \mu(x,y) < \mu(x,y)_{sup}$, describen el comportamiento de las atenuaciones estimadas con un 95% de confianza.

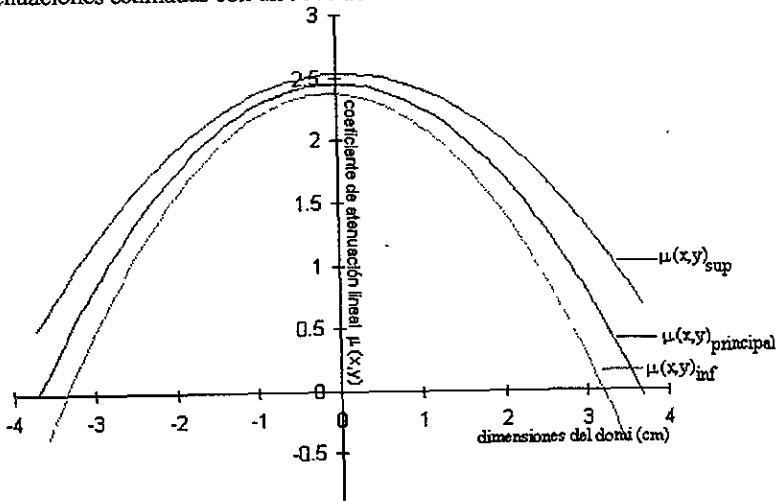
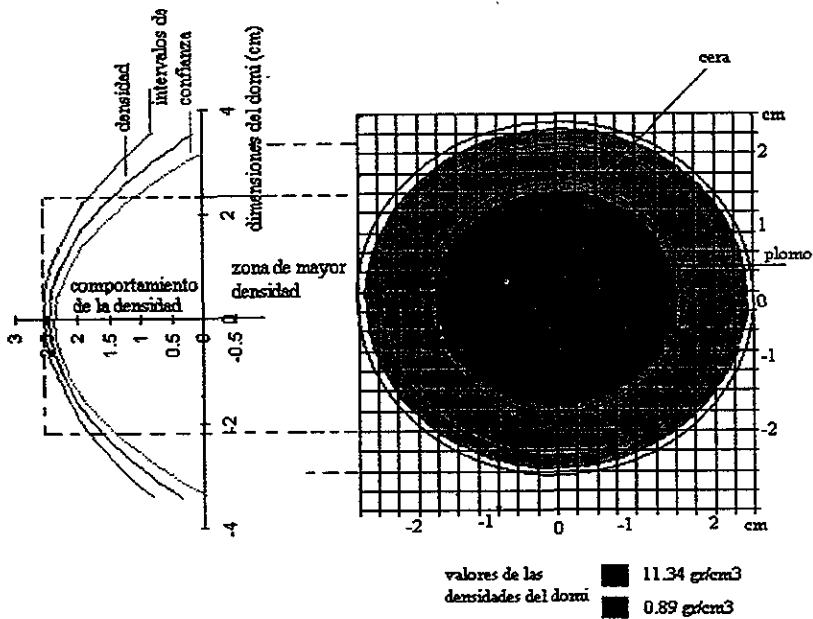


Figura 6.5 Atenuación lineal $\mu(x,y)$ vs la coordenada x , para un diámetro del domi

Los resultados obtenidos de la estimación de $\mu(x,y)$ así como las coordenadas de la región del domi, indican el comportamiento que existe de la distribución de la densidad a lo largo del domi. Estos valores son sólo relativos debido a que el coeficiente de atenuación lineal incluye otros valores (coeficiente de atenuación másico, densidad del domi y el espesor de éste por mencionar algunos, como se muestra en la ecuación (2.7), de donde se obtiene que los valores relativos de la densidad son proporcionales a los valores de $\mu(x,y)$).

Si se conjuntan un número grande de trayectorias como la mostrada en la figura 6.5 se obtendría algo parecido a la figura 6.6.(b). Esta figura representa la aproximación de la imagen buscada para un corte de una tomografía en un plano del domi. En ésta se observan dos circunferencias principales concéntricas, la más interna corresponde a un corte del cilindro de plomo y la más externa a la parafina. Ambas presentan circunferencias cercanas a ellas, las cuales corresponden a los intervalos de confianza determinados anteriormente.



(a) (b)
 Figura 6.6. Distribución de densidades del domo

En esta gráfica se observa que efectivamente en la zona de mayor atenuación corresponde a la zona de mayor densidad. Para trabajos posteriores se propone hacer un cálculo más fino para determinar no sólo una aproximación de la distribución de las densidades, sino obtener la densidad real del cuerpo.

CONCLUSIONES

En base a los resultados que se obtuvieron se puede concluir lo siguiente:

- La solución al problema de la distribución de densidades, por medio del cálculo de atenuaciones, usando el método de aproximación polinomial a grado dos proporciona un método confiable para obtener cortes transversales de cuerpos inanimados.

- Mientras más datos se tengan de las atenuaciones, la imagen que se obtiene se acerca más a la realidad.

- El método de mínimos cuadrados para obtener los valores estimados de las a_{ij} , es un método confiable.

- Se puede asegurar que un sistema fuente detector con la geometría descrita anteriormente, se asemeja a tomógrafos más complicados y con resultados equivalentes. Así mismo es importante mencionar que se observó que la geometría del sistema es de suma importancia, debido a que variaciones en el espesor del colimador da resultados diferentes.

- El método presentado en este trabajo, asegura ser un método confiable y relativamente sencillo de manejar en comparación a otros métodos que requieren matemáticas más avanzadas o diseños más complejos.

BIBLIOGRAFIA

- [A1] ALLAN, C.J. et al. An overview of the AECL program: Applied optics, vol. 24, No. 23, 1985.
- [A2] APÓSTOL, M. Tom, Calculus, vol. I, ed. Wiley International, 1967.
- [A3] AVENDAÑO CERVANTES, Guillermo. Fundamentos técnicos de radiología y tomografía axial computarizada, editorial Diana, 1993. pags. 195-344.
- [B1] BEISER, Arthur: Conceptos de Física Moderna, Mc Graw Hill, 2a. ed. 1970.
- [B2] BELLIAN, Joseph G. and DAYTON, Roderick R.: NaI(Tl) Scintillation detectors, bicron, 1975.
- [B3] R. T. (formely McGinnies) BERGER: Rad. Res. 15, 1-29 (1961)
- [C1] CAMERON, Jhon R. & SKORONICK, James G. Medical Physics, editorial A Wiley-Interscience Publication, 1978.
- [C2] A.M.CORMACK: J. Appl Phys. 34, 2722 (1963)
- [C3] COURANT, Richard & FRITZ, John. Introducción al cálculo y al análisis matemático, ed. Limusa, 1984. Vol. II pags.97-99.
- [D1] C.M. DAVISSON, Interaction of γ -radiation with matter. Rev. Mod. Phys. 24 (1952).
- [D2] C.M. DAVISSON in K. SIEGBAHN (De): Alpha-beta-and gamma-Ray Spectroscopy, Vol. 1 Ch.2 and App. 1 Amsterdam: North-Holland Publ. 1965.
- [D3] DRAPPER N.R. & SMITH H.: Applied regression analysis, second edition, ed. Wiley, 1966.
- [E1] EVANS, Robley D.: The atomic nucleus, ed. Mc Graw-Hill Book Company, 1955.
- [F1] R.P FEYNMAN: Quantum electro-dynamics, W.A. Benjamin, Inc., Publishers, New York, 1962.
- [G1] GOODWIN, Paul, and RAO, Dandamudi V.- An introduction to the physics of nuclear medicine: De. Charles C. Thomas, 1977.
- [H1] THE HEALTH PHYSICS AND RADIOLOGICAL HEALTH HANDBOOK, Interaction of Radiation with matter, cap. 5, 1989.
- [H2] J.F. HOGERTON and R.C. Grass (Eds.): The Reactor Handbook, 1st De., Vol. 1, AECD-3645 (1958).
- [H3] HUBBEL, J. H.: Photon mass attenuation and energy absorption coefficients from 1 keV to 20 MeV, Int. J. Appl. Radiat, Isot. vol 33, pp 1269 to 1290, Great Britain, 1982.
- [H4] HUBBELL, J.H. & BERGER, M.J.: Photon attenuation. Phys. Rev. 108, 1957.
- [H5] HOPKINS, Forrest F. Et.al., Industrial Tomography Application. IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS -28, No. 2, april 1981.
- [K1] KONRAD KLEINCKNECHT, detectors for particle raditation, editorial Cambridge University Press, 1986. pag. 2.
- [K2] KNOLL, Glenn F., Radiation detection and measurement, ed. Wie-Wiley, New York, 1972.
- [L1] LAPP, Ralph E.- Nuclear radiation physics, 1975
- [M1] P.B. MOON: Proc. Phys. (London) A63, 1189-1196 (1960)
- [M2] MOORE, John F. Evolution of computed tomography. Rev. Material Evaluation, 48, may 1990.

- [P1] PRZEWLOCKI, Kazimierz, A radiometric method of determination of the spatial distribution of density in closed media, Mukleonika, Tom XIII, Nr 1/1968.
- [S1] SATTLER, Frank J. Improving quality through nondestructive testing. Chemical engineering, april 1989.
- [S2] SHANLEY, Agnes. Process tomography seeing is believing: Chemical engineering, october 1995.
- [S3] SORENSON, James A. & PHELPS, Michael E. Physics in Nuclear Medicine, editorial Grune & Stratton, 1980. pag. 319-325.
- [W1] G. WHITE-GRODSTEIN: NBS Circular 583 (1960)