



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

01161

8

2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería

**Respuesta Torsional de Sistemas  
Estructurales Asimétricos Ante  
Movimientos Sísmicos Incoherentes**

TESIS que para obtener el grado de MAESTRO EN INGENIERIA con especialidad en  
ESTRUCTURAS presenta

RAUL RAMIREZ QUIROZ

Asesor: Dr. Ernesto Heredia Zavoni

Marzo de 1998.

55066

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

	pág.
Contenido	i
Dedicatorias	ii
Agradecimientos	iii
Resumen	iv
Notación	v
Indice de figuras	viii
Indice de tablas	xi
Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Objetivos y alcances	5
Capítulo 2. Respuesta torsional	7
2.1 Ecuaciones de movimiento	9
2.2 Solución de las ecuaciones de movimiento	11
2.3 Cortante basal y momento torsor	16
2.4 Respuesta estocástica	17
2.5 Sistemas simétricos	21
2.6 Movimiento uniforme del terreno	23
2.7 Sistemas simétricos y movimiento uniforme	24
Capítulo 3. Variación espacial local del movimiento sísmico del terreno	26
3.1 Condiciones locales del suelo	28
3.2 Densidad espectral cruzada entre aceleraciones del terreno	30
Capítulo 4. Resultados	31
4.1 Cortante basal máximo	36
4.2 Momento torsor máximo	46
4.3 Fuerza cortante en las columnas	55
4.3.1 Análisis dinámicos	55
4.3.2 Análisis estáticos equivalentes	60
Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones	77
Bibliografía	82
Apéndices	86

## DEDICATORIAS

Para que la gente sepa que tú,  
cuyo nombre es Jehová, tú solo eres  
el altísimo sobre toda la tierra.  
Salmo 83:18.

A mi papá Raúl Ramírez Rodríguez,  
A mi mamá María Cruz Quiroz Viuda de Ramírez,  
A mi esposa Rebeca Mondragon Serra,  
A mi hijo Raúl Rene Ramírez Mondragon,  
A todos mis familiares,  
A mis sinodales,  
A mis amigos,  
con respeto y cariño.

---

## **AGRADECIMIENTOS**

Se agradece la beca de estudios otorgada por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico a través del proyecto PAPIIT IN114296. Al Instituto de Ingeniería de la UNAM por facilitar sus instalaciones.

---

## Resumen

---

Se analiza el efecto de torsión en sistemas estructurales asimétricos causado por la variación espacial del movimiento sísmico del terreno. Con base en la teoría de vibraciones aleatorias se deducen expresiones para calcular la varianza del cortante basal y del momento torsionante del sistema estructural en función de las varianzas del desplazamiento y giro dinámicos. A partir de las expresiones generales deducidas, se obtienen las correspondientes para los casos en que el sistema estructural es simétrico y/o que el movimiento del terreno en los apoyos es uniforme. Se analizan los efectos torsionales a nivel de fuerzas internas en los elementos resistentes y se introduce el concepto de factor de corrección. Los factores de corrección modifican las fuerzas internas en los elementos resistentes obtenidas en análisis de respuesta dinámicos ante excitación uniforme de tal manera que se obtengan las fuerzas internas correspondientes al caso de excitaciones incoherentes y fuera de fase. Utilizando este concepto de factor de corrección, se evalúan también los resultados de análisis estáticos equivalentes acordes con las excentricidades de diseño propuestas en las NTC del Distrito Federal.

El movimiento del terreno se modela como un proceso aleatorio, con media cero, estacionario y gaussiano. Se considera la variación espacial del movimiento del terreno debida a los efectos de pérdida de coherencia y cambio de fase del tren de ondas sísmicas. Se estudia la respuesta de un sistema estructural asimétrico de losa rígida apoyada en columnas sustentado en suelos firmes y blandos. Los resultados muestran que la variación espacial del movimiento sísmico del terreno reduce el cortante basal en estructuras rígidas; el momento torsor puede ser mayor o menor que el correspondiente a excitaciones uniformes dependiendo de la excentricidad nominal. En el caso de estructuras rígidas de plantas alargadas, los análisis dinámicos bajo la hipótesis de excitación uniforme subestiman las fuerzas cortantes en las columnas. El factor de corrección aumenta significativamente por encima de uno a medida que disminuye el periodo y que se incrementa el efecto de pérdida de coherencia de la excitación. En estructuras rígidas, la contribución de la componente pseudo-estática al cortante en la columna es dominante. A nivel de planta, la variación espacial reduce el cortante basal; sin embargo, a nivel de los elementos resistentes el efecto es inverso y la fuerza cortante se incrementa.

---

## Notación

---

$e_s$	distancia nominal entre el centro de masa y el de rigidez.
$b$	dimensión en planta de la estructura en la misma dirección en que se mide $e_s$ , es decir, la dimensión perpendicular a la incidencia del tren de ondas sísmicas.
CM	centro de masa.
CR	centro de rigidez.
$e_o$	excentricidad nominal del sistema.
$K_x$	rigidez lateral del sistema estructural en la dirección $X$ .
$K_y$	rigidez lateral del sistema estructural en la dirección $Y$ .
$x_j$ y $y_i$	coordenadas de los elementos resistentes medidas con respecto al centro de masa.
$M$	masa del sistema estructural.
$I$	momento polar de inercia del sistema estructural.
$u_{xp}$ $u_{yj}$	desplazamientos del terreno en los apoyos de los elementos resistentes en las direcciones $X$ y $Y$ , respectivamente.
<b>M</b>	matriz de masa del sistema estructural.
<b>K</b>	matriz de rigidez del sistema estructural.
<b>D</b>	vector de desplazamientos.
<b>U</b>	vector de fuerzas equivalentes.
$v_s$ y $\theta_s$	componentes pseudo-estáticas del desplazamiento y giro del sistema.
$v_d$ y $\theta_d$	componentes dinámicas del desplazamiento y giro del sistema.
<b>Z</b>	vector de respuestas de osciladores modales o coordenadas generalizadas.
$Y_{ij}$	desplazamiento relativo con respecto a la base del oscilador modal.

$\omega_i$	frecuencia del oscilador modal.
$\xi_i$	amortiguamiento del oscilador modal.
$V_x$ y $V_y$	cortantes basales en las direcciones $X$ y $Y$ , respectivamente.
$M_i$	momento torsor alrededor del centro de masa.
$Cov(v_d, \theta_d)$	covarianza entre $v_d$ y $\theta_d$ .
$H_i(\omega)$	función de transferencia del $i$ -ésimo oscilador modal.
$S_{\ddot{u}_i \ddot{u}_j}(\omega)$	función de densidad espectral cruzada de las aceleraciones del terreno.
$S_{\ddot{u}_i \ddot{u}_i}(\omega)$	función de densidad espectral de las aceleraciones del terreno en el punto $\bar{x}_i$ .
$v_s$	velocidad de propagación de las ondas de corte del medio.
$\bar{v}$	vector de velocidad aparente.
$r$	relación de aspecto de la losa.
$I$	momento polar de inercia de la losa del sistema estructural.
$M$	masa de la losa del sistema estructural.
$T_v$	periodo de traslación desacoplada en dirección $Y$ .
$V_{m\acute{a}x}$	cortante basal máximo medio.
$K_v$	factor pico del cortante basal.
$\nu_0^+(V_Y)$	tasa de cruces de cero con pendiente positiva del cortante $V_Y$ .
$V_v$	cortante basal máximo esperado para movimiento del terreno incoherente y fuera de fase.
$V_U$	cortante basal máximo esperado para movimiento del terreno uniforme en los apoyos.
$M_{m\acute{a}x}$	máximo momento torsor medio.
$M_v$	momento torsor máximo esperado con movimiento del terreno incoherente y fuera de fase.
$M_U$	momento torsor máximo esperado con movimiento perfectamente correlacionado.

$V_i$	fuerza cortante en la columna en la dirección $Y$ .
$f_a$	factor de corrección.
$e_d$	excentricidad de diseño propuesta por las NTC.
$\Delta_i$	incremento o decremento en fuerza cortante.
$\alpha_o$	factor de proporcionalidad de rigideces.
$\Omega$	relación de frecuencias circulares desacopladas de rotación y traslación del sistema.
$\tau_{cb}$ y $\tau_{pb}$	tiempos de viaje de las ondas de corte, con velocidad normalizada $v_s / \eta$ , y del tren de ondas sísmicas, respectivamente.
$\lambda_r$	relación entre la rigidez torsional y la rigidez lateral en dirección $Y$ .
$\lambda_k$	relación de rigideces laterales.
$\eta$	factor de incoherencia de los movimientos del terreno.
$\gamma_{ij}(\omega)$	espectro de coherencia de las aceleraciones del terreno.
$\sigma_{V_y}^2$	varianza del cortante basal.
$\sigma_{M_t}^2$	varianza del momento torsor.
$\sigma_{v_d}^2$ y	varianzas de $v_d$ y $\theta_d$ , respectivamente.
$\sigma_{\theta_d}^2$	
$\omega_i$	frecuencias naturales del sistema estructural.
$\phi_i$	vector de formas modales.
$\Phi$	matriz de formas modales.
$\omega_w, \omega_v$	frecuencias naturales desacopladas de traslación y rotación.
$\omega_\theta$	frecuencia natural desacoplada de rotación.

## Índice de figuras

Figura	Nombre de la Figura	Página
2.1	Modelo estructural.	7
2.2	Fuerzas de corte en los elementos de rigidez lateral del sistema.	10
2.3	(a) Sistema estructural en el plano. (b) Idealización como oscilador de un grado de libertad.	25
3.1	Función de densidad espectral entre aceleraciones del terreno.	29
4.1	Modelo estructural de estudio: losa rectangular rígida apoyada sobre cuatro columnas.	31
4.2	Relación de cortantes basales máximos versus Periodo traslacional; $\tau_{cb}=0.05$ , $\tau_{pb}=0.01$ , suelo firme.	40
4.3	Relación de cortantes basales máximos versus Periodo traslacional; $\tau_{pb}=0.01$ , suelo firme, $e_o=a/6$ .	41
4.4	Relación de cortantes basales máximos versus Periodo traslacional; $\tau_{pb}=0.01$ , suelo firme, $e_o=a/3$ .	42
4.5	Relación de cortantes basales máximos versus Periodo traslacional; $\tau_{cb}=0.05$ , $\tau_{pb}=0.03$ , suelo blando.	43
4.6	Relación de cortantes basales máximos versus Periodo traslacional; $\tau_{pb}=0.03$ , suelo blando, $e_o=a/6$ .	44
4.7	Relación de cortantes basales máximos versus Periodo traslacional; $\tau_{pb}=0.03$ , suelo blando, $e_o=a/3$ .	45
4.8	Relación de momentos torsores máximos versus Periodo traslacional; $\tau_{cb}=0.05$ , $\tau_{pb}=0.01$ , suelo firme.	49
4.9	Relación de momentos torsores máximos versus Periodo traslacional; haciendo variar la pérdida de coherencia $\tau_{cb}$ , $\tau_{pb}=0.01$ , suelo firme, $e_o=a/6$ .	50

<b>Figura</b>	<b>Nombre de la Figura</b>	<b>Página</b>
4.10	Relación de momentos torsores máximos versus Periodo traslacional; haciendo variar la pérdida de coherencia $\tau_{cb}$ , $\tau_{pb}=0.01$ , suelo firme, $e_o=a/3$ .	51
4.11	Relación de momentos torsores máximos versus Periodo traslacional; $\tau_{cb}=0.05$ , $\tau_{pb}=0.03$ , suelo blando.	52
4.12	Relación de momentos torsores máximos versus Periodo traslacional; haciendo variar la pérdida de coherencia $\tau_{cb}$ , $\tau_{pb}=0.03$ , suelo blando, $e_o=a/6$ .	53
4.13	Relación de momentos torsores máximos versus Periodo traslacional; haciendo variar la pérdida de coherencia $\tau_{cb}$ , $\tau_{pb}=0.03$ , suelo blando, $e_o=a/3$ .	54
4.14	Factor de corrección versus el periodo traslacional; $\tau_{cb}=0.05$ , $\tau_{pb}=0.01$ , suelo firme.	65
4.15	Factor de corrección versus el periodo traslacional; $\tau_{pb}=0.01$ , suelo firme, $e_o=a/6$ .	66
4.16	Factor de corrección versus el periodo traslacional; $\tau_{pb}=0.01$ , suelo firme, $e_o=a/3$ .	67
4.17	Factor de corrección versus el periodo traslacional; $\tau_{cb}=0.05$ , $\tau_{pb}=0.03$ , suelo blando.	68
4.18	Factor de corrección versus el periodo traslacional; $\tau_{pb}=0.03$ , suelo blando, $e_o=a/6$ .	69
4.19	Factor de corrección versus el periodo traslacional; $\tau_{pb}=0.03$ , suelo blando, $e_o=a/3$ .	70
4.20	Factor de corrección versus Periodo traslacional; $1.5e_o+0.1a$ , suelo firme, $\tau_{cb}=0.05$ y $\tau_{pb}=0.01$ .	71
4.21	Factor de corrección versus Periodo traslacional; $1.5e_o+0.1a$ , suelo firme, $\tau_{pb}=0.01$ y $e_o=a/6$ .	72
4.22	Factor de corrección versus Periodo traslacional; $1.5e_o+0.1a$ , suelo firme, $\tau_{pb}=0.01$ y $e_o=a/3$ .	73

<b>Figura</b>	<b>Nombre de la Figura</b>	<b>Página</b>
4.23	Factor de corrección versus Periodo traslacional; $1.5e_o+0.1a$ , suelo blando, $\tau_{cb}=0.05$ , $\tau_{pb}=0.03$ .	74
4.24	Factor de corrección versus Periodo traslacional; $1.5e_o+0.1a$ , suelo blando, $\tau_{pb}=0.03$ y $e_o=a/6$ .	75
4.25	Factor de corrección versus Periodo traslacional; $1.5e_o+0.1a$ , suelo blando, $\tau_{pb}=0.03$ y $e_o=a/3$ .	76

---

## **Indice de tablas**

---

<b>Tabla</b>	<b>Nombre de la Tabla</b>	<b>Página</b>
3.1	Frecuencias y amortiguamientos característicos de suelo blando y firme.	29
4.1	Valores de $\Omega$	35
5.1	Valores de las excentricidades de diseño propuesta por las NTC-96.	64
5.2	Componente pseudo-estática de la fuerza cortante en la columna para ambos tipos de suelos; $e_o=a/6$ , $\lambda_k=1.0$ , $r=1.0$ .	64

# Capítulo 1

## Introducción

---

### 1.1 Antecedentes

La experiencia de los últimos sismos ha mostrado que un gran porcentaje de los daños observados en las estructuras se puede atribuir a los efectos de torsión. La respuesta torsional de sistemas estructurales sometidos a excitaciones sísmicas puede ser inducida por excentricidades inherentes a la geometría y rigidez del sistema, por la componente rotacional del movimiento del terreno, o por la llamada variación espacial del movimiento sísmico del terreno, es decir, las diferencias entre las excitaciones en los apoyos por efectos de pérdida de coherencia, cambio de fase o condiciones locales del suelo. La pérdida de coherencia está relacionada con la heterogeneidad del medio en que viajan las ondas sísmicas; los cambios de fase se deben a las diferencias en los tiempos de arribo de las ondas a cada apoyo; las condiciones locales del suelo modifican la amplitud y contenido de frecuencias del tren de ondas sísmicas. Los registros de movimientos del suelo obtenidos en arreglos densos de instrumentación sísmica, muestran que la variación del movimiento del terreno en distancias de órdenes de magnitud semejantes a las distancias entre apoyos de estructuras como puentes o líneas vitales es significativa (Tamura et al., 1977; Tsuchida et al., 1980; Bycroft, 1980; Bolt et al., 1982; Harichandran y Vanmarcke, 1986). Dependiendo de la distancia entre los apoyos del sistema estructural, de la velocidad de propagación de las ondas, y de la heterogeneidad del medio en el que se propagan, la variación espacial del movimiento sísmico del terreno puede tener efectos importantes en la respuesta sísmica de estas estructuras incrementando los esfuerzos y deformaciones.

Los códigos de diseño sísmico de edificios establecen que los efectos de torsión se pueden considerar mediante fuerzas laterales equivalentes aplicadas a una distancia

$e_d$  del centro de rigidez conocida como excentricidad de diseño. Las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo del D.D.F. (DDF, 1996), especifican que la fuerza lateral debe ser aplicada a la excentricidad que resulte más desfavorable de las siguientes:  $1.5e_s + 0.1b$  ó  $e_s - 0.1b$ , en las que  $e_s$  es la distancia nominal que separa a los centros de masa y rigidez, y  $b$  es la dimensión en planta de la estructura en la misma dirección en que se mide  $e_s$ , es decir, la dimensión perpendicular a la incidencia del tren de ondas sísmicas. El valor de  $0.1b$  se conoce como excentricidad accidental y se introduce para tomar en cuenta los efectos de torsión accidental en el sistema debidos entre otras causas a: (1) las discrepancias entre las masas y rigideces de la estructura real y las consideradas en su análisis y diseño, (2) la variación espacial del movimiento sísmico del terreno entre los apoyos del sistema estructural; y (3) los efectos de la componente rotacional del movimiento del terreno.

Una gran cantidad de investigaciones y estudios han estado dirigidas a evaluar la respuesta torsional de edificios y proveer a los códigos de diseño con formulaciones para tomarla en cuenta. La mayoría de los estudios han considerado el caso de edificios asimétricos sujetos a movimiento uniforme en los apoyos, donde los efectos torsionales se deben a la distancia entre el centro de masa y el centro de rigidez (ver e.g. Chandler y Hutchinson, 1987; Hejal y Chopra, 1989; Chopra y Goel, 1991). Otras investigaciones se han llevado a cabo para encontrar un factor que modifique a la excentricidad accidental que sugieren los códigos de diseño. De la Llera y Chopra (1994a) estudiaron la torsión accidental en edificios de varios pisos sometidos a excitaciones rotacionales en la base y mostraron que los valores de las excentricidades accidentales son menores que aquellos correspondientes a 5 y 10 % de  $b$  de los códigos de diseño, excepto para valores de  $b$  mayores de 50 m. Con base en estudios de la respuesta de tres edificios nominalmente simétricos, De la Llera y Chopra (1994b), propusieron dos métodos alternativos para evaluar la torsión accidental. El primero considera la historia en el tiempo del cortante y la torsión en la base del edificio; el segundo considera las fuerzas internas en los elementos estructurales durante un sismo. Sus resultados muestran que entre 25 y 45% de la torsión en el edificio se debe a la componente rotacional en la base y que la torsión accidental puede ser significativa si el período de vibración torsional es mucho más grande que el período de vibración lateral.

Estudios recientes han propuesto un procedimiento para incluir los efectos de torsión accidental en el diseño sísmico de edificios en el que las fuerzas de diseño en los miembros estructurales se calculan considerando un incremento en los desplazamientos del edificio (De la Llera y Chopra, 1995). Se ha propuesto también evaluar los efectos de torsión accidental y torsión natural en el análisis y diseño sísmico de edificios asimétricos usando las superficies de cortante y momento torsor de entrepiso en conjunto con un modelo estructural simplificado de un sólo elemento por piso (Chopra y De la Llera, 1996). Sin embargo, los estudios anteriores no han tomado en cuenta la variación espacial del movimiento sísmico del terreno como fuente de torsión accidental.

En los últimos años, se han logrado avances significativos en el estudio de la variación espacial del movimiento sísmico del terreno y los efectos que produce en la respuesta de estructuras con dimensiones predominantes en una dirección longitudinal como puentes y líneas vitales. Se han desarrollado técnicas de simulación para generar movimientos sísmicos del terreno en múltiples apoyos y metodologías de análisis de respuesta basadas en la teoría de vibraciones aleatorias (Hao, 1989; Berrah y Kausel, 1990; Der Kiureghian y Neuenhofer, 1991; Vanmarcke et al, 1993; Heredia-Zavoni y Vanmarcke, 1994). Los resultados de diferentes estudios han demostrado que la variación espacial del movimiento sísmico del terreno puede inducir fuerzas y deformaciones internas que necesitan ser consideradas en el diseño de este tipo de estructuras longitudinales (Zerva et al, 1988; Zerva, 1990; Harichandran y Wang, 1990; Heredia-Zavoni, 1993; Heredia-Zavoni y Vanmarcke, 1997).

En el caso de edificios, aun cuando las distancias entre apoyos son relativamente pequeñas comparadas con aquellas para sistemas estructurales sobre múltiples apoyos, los efectos torsionales debidos a la variación espacial del movimiento sísmico del terreno pueden ser importantes. En un trabajo pionero, Newmark (1969) analizó la respuesta torsional de edificios simétricos sujetos a una onda plana y encontró que los valores de las excentricidades especificadas por los códigos de diseño sísmico podrían ser excedidas considerablemente bajo ciertas condiciones.

Usando un modelo más completo para la variación espacial del movimiento sísmico que el utilizado por Newmark, Hao (1991) analizó la influencia del cambio de fase y pérdida de coherencia en la respuesta lateral y rotacional de un sistema estructural simétrico compuesto por una losa rectangular rígida apoyada sobre cuatro columnas. Los efectos de excitaciones múltiples en la respuesta torsional de edificios simétricos se han estudiado también con base en simulaciones de Montecarlo (Hao y Duan, 1996). Se ha encontrado que las excitaciones múltiples reducen el cortante basal respecto del correspondiente a excitaciones uniformes en los apoyos.

Algunos estudios han analizado el caso de la respuesta torsional de estructuras asimétricas. Hahn y Liu (1994) estudiaron la respuesta torsional de una placa circular soportada por columnas sobre una cimentación rígida ante ondas sísmicas de cortante verticales y propusieron modificaciones a las excentricidades de diseño de los códigos para tomar en cuenta los efectos de torsión inducidos por movimientos incoherentes del suelo. Hao y Duan (1975) analizaron un modelo de un edificio asimétrico de un piso apoyado sobre cuatro columnas y mostraron que para excentricidades grandes, las excitaciones múltiples y la asimetría del edificio reducen el cortante basal y el momento torsor.

Los efectos de torsión en sistemas estructurales simétricos inducidos por variación espacial del movimiento sísmico del terreno han sido estudiados recientemente con base en la teoría de vibraciones aleatorias (Barranco-Cicilia 1995; Heredia-Zavoni y Barranco, 1996). La respuesta torsional se evalúa mediante una excentricidad equivalente definida en función del máximo momento torsor y del máximo cortante basal esperados. Los resultados de estos estudios han mostrado la influencia de las condiciones locales del suelo y de los efectos de incoherencia en la respuesta torsional. Las excentricidades máximas se presentan en períodos fundamentales cercanos al período predominante del suelo cuando el movimiento del terreno en los apoyos pierde correlación. Las excentricidades pico pueden esperarse para estructuras rígidas sobre suelos firmes, mientras que para suelos blandos, las excentricidades máximas se desarrollan para sistemas relativamente flexibles. Las excentricidades pueden exceder los valores de 5% y 10% recomendados por los códigos de diseño, dependiendo del período fundamental y la relación de aspecto del sistema estructural, de las condiciones del suelo y del tiempo que tardan las ondas en cruzar la base del sistema.

## 1.2 Objetivos y alcances

El presente trabajo tiene por objetivo estudiar la respuesta torsional de sistemas estructurales asimétricos ante movimientos sísmicos incoherentes y fuera de fase. Se desarrolla una metodología de vibraciones aleatorias para el análisis de sistemas asimétricos similar a la de Barranco Cicilia (1995) y Heredia-Zavoni y Barranco (1996). La metodología se utilizará primero para evaluar el cortante basal y momento torsor máximo esperados debido a excitaciones incoherentes y fuera de fase, y compararlos con los correspondientes a una excitación uniforme en los apoyos. Se analizarán luego los efectos torsionales a nivel de fuerzas internas en los elementos resistentes. Para ello, se propone utilizar unos factores de corrección que modifican las fuerzas internas en los elementos resistentes obtenidas en análisis de respuesta dinámicos ante excitación uniforme de tal manera que se obtengan las fuerzas internas correspondientes al caso de excitaciones incoherentes y fuera de fase. Utilizando este concepto de factor de corrección, se evalúan también los resultados de análisis estáticos equivalentes utilizando las excentricidades de diseño propuestas en las NTC del Distrito Federal.

En el capítulo dos se deducen las ecuaciones de movimiento del modelo estructural asimétrico sometido a diferentes excitaciones del terreno en ambas direcciones en cada uno de sus apoyos. La solución de las ecuaciones de movimiento se obtiene mediante la superposición de las componentes pseudo-estáticas y dinámicas de la respuesta. Se deducen las expresiones para calcular las componentes pseudo-estáticas y las ecuaciones de movimiento de las componentes dinámicas. Con base en la teoría de vibraciones aleatorias, se obtienen expresiones para el cálculo de la varianza del desplazamiento lateral y giro dinámicos, de la covarianza entre ellos, y del cortante basal y momento torsionante máximos esperados mediante el uso de factores pico. Se analizan los casos particulares de sistemas nominalmente simétricos y/o movimiento uniforme en los apoyos.

En el capítulo tres se describe el modelo del movimiento sísmico del terreno como un campo aleatorio, heterogéneo y estacionario. Se presenta el espectro de coherencia utilizado para modelar la variación espacial del movimiento sísmico del terreno y se

describe la función de densidad espectral que modela las condiciones locales del suelo.

En el capítulo cuatro se estudia la respuesta de un sistema que consiste de una losa rígida apoyada sobre cuatro columnas. Se evalúan las relaciones entre cortante basal y momento torsor máximos para movimiento incoherente del terreno, y para movimiento uniforme. Se evalúan luego los factores de corrección para análisis dinámicos de respuesta y los correspondientes a análisis estáticos equivalentes. Se analiza la influencia del tipo de suelo, del grado de incoherencia de la excitación, de la relación de aspecto de la planta y de la relación de rigideces laterales del sistema estructural en la respuesta torsional. Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones del trabajo.

## Capítulo 2

### Respuesta torsional

En este estudio se considera un sistema estructural lineal que consiste de una losa rígida apoyada sobre elementos de rigidez lateral (columnas y/o muros) como el que se muestra en la figura 2.1. El sistema es asimétrico con respecto al eje  $Y$  y el centro de masa (CM) se localiza a una distancia  $e_0$  del centro de rigidez (CR) que denominaremos como la excentricidad nominal del sistema; tanto CM como CR están localizados sobre el eje  $X$ .

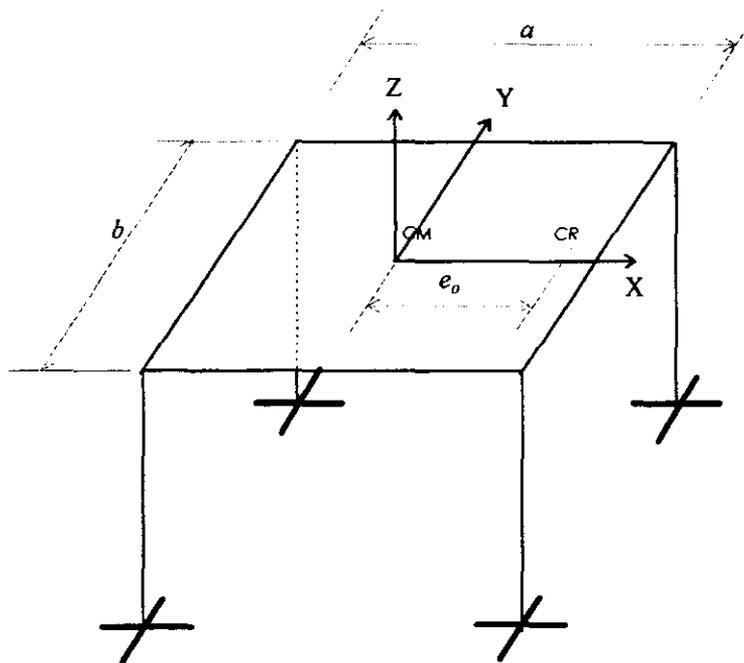


Figura 2.1. Modelo estructural.

Se supone que la masa de las columnas y/o muros es despreciable comparada con la de la losa. La rigidez del sistema estructural en las direcciones laterales la suministra totalmente las columnas y/o muros.

Los tres grados de libertad del sistema son los desplazamientos laterales  $w$  y  $v$  de la losa en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente, y su giro,  $\theta$ , alrededor del eje vertical que pasa por el centro de masa. Sean  $N_x$  y  $N_y$  el número de elementos de resistencia lateral (columnas y/o muros) en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente, y  $k_{xi}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_x$ ,  $k_{yj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_y$  sus correspondientes rigideces laterales. Las rigideces laterales del sistema estructural en las direcciones  $X$  y  $Y$ ,  $K_x$  y  $K_y$ , son iguales a:

$$K_x = \sum_{i=1}^{N_x} k_{xi} ; \quad K_y = \sum_{j=1}^{N_y} k_{yj} \quad (2.1)$$

y la rigidez torsional es :

$$K_\theta = \sum_{i=1}^{N_x} k_{xi} y_i^2 + \sum_{j=1}^{N_y} k_{yj} x_j^2 \quad (2.2)$$

donde  $x_j$  y  $y_i$  son las coordenadas de los elementos resistentes medidas con respecto al centro de masa. Las frecuencias naturales desacopladas de traslación,  $\omega_w$ ,  $\omega_v$ , y rotación,  $\omega_\theta$ , del sistema están dadas por las siguientes expresiones:

$$\omega_w = \sqrt{K_x / M} ; \quad \omega_v = \sqrt{K_y / M} ; \quad \omega_\theta = \sqrt{K_\theta / I} \quad (2.3)$$

donde  $M$  es la masa e  $I$  es el momento polar de inercia del sistema estructural.

## 2.1 Ecuaciones de movimiento

Denotemos por  $u_{xi}(t)$ ,  $i=1,2,\dots,N_x$  y  $u_{yj}(t)$ ,  $j=1,2,\dots,N_y$ , a los desplazamientos del terreno en los apoyos de los elementos resistentes en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente, en un instante de tiempo  $t$  cualquiera. Los movimientos diferenciales debidos, por un lado, a la traslación y rotación de la losa y, por otro, a los desplazamientos del terreno en los apoyos de los elementos resistentes, generan fuerzas en los extremos superior e inferior de éstos. El desplazamiento relativo entre los extremos del  $j$ -ésimo elemento resistente debido a la traslación lateral en dirección  $Y$ ,  $v$ , y giro de la losa,  $\theta$ , (considerando que éste es pequeño) es igual a:

$$\delta_{yj} = v - u_{yj} + \theta x_j \quad (2.4)$$

En la dirección  $X$ , el desplazamiento relativo entre los extremos del  $i$ -ésimo elemento resistente es igual a:

$$\delta_{xi} = w - u_{xi} + \theta y_i \quad (2.5)$$

Sean  $F_{eYj}$  y  $F_{eXi}$  las fuerzas de corte en los elementos resistentes en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente (ver figura 2.2):

$$F_{eYj} = k_{yj}(v + \theta x_j - u_{yj}) \quad (2.6)$$

$$F_{eXi} = k_{xi}(w + \theta y_i - u_{xi})$$

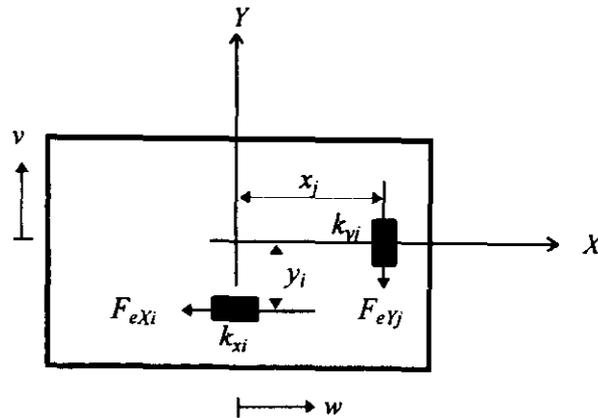


Figura 2.2 Fuerzas de corte en los elementos de rigidez lateral del sistema.

Para simplificar la notación, se omitirá el parámetro tiempo en las ecuaciones que se deducen a continuación. Planteando equilibrio de fuerzas en la dirección  $Y$ , de acuerdo con el Principio de D'Alembert, obtenemos la ecuación de movimiento:

$$M\ddot{v} + K_y v + K_y \theta e_o = \sum_{j=1}^{N_y} k_{yj} u_{yj} \quad (2.7)$$

donde cada punto sobrescrito indica una derivada con respecto al tiempo,  $t$ . De manera similar, haciendo uso del principio de D'Alembert, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento en la dirección  $X$ :

$$M\ddot{w} + K_x w = \sum_{i=1}^{N_x} k_{xi} u_{xi} \quad (2.8)$$

La tercera ecuación de movimiento del sistema se obtiene del equilibrio de momentos alrededor del centro de masa:

$$I\ddot{\theta} + K_\theta \theta + e_o K_y v = \sum_{i=1}^{N_x} k_{xi} u_{xi} y_i + \sum_{j=1}^{N_y} k_{yj} u_{yj} x_j \quad (2.9)$$

Debido a la simetría del sistema con respecto al eje  $X$ , la ecuación (2.8) para el

desplazamiento  $w$  está desacoplada de las ecuaciones (2.7) y (2.9) para  $v$  y  $\theta$ . Las ecuaciones de movimiento acopladas, (2.7) y (2.9), se pueden escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{U} \quad (2.10)$$

donde  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$  son las matrices de masa y rigidez del sistema estructural y  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{U}$  son los vectores de desplazamiento y de fuerzas equivalentes, respectivamente:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_y & K_y e_o \\ K_y e_o & K_\theta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{N_y} k_{yj} u_{yj} \\ \sum_{j=1}^{N_y} k_{yj} x_j u_{yj} + \sum_{i=1}^{N_x} k_{xi} y_i u_{xi} \end{Bmatrix}$$

## 2.2 Solución de las ecuaciones de movimiento

El desplazamiento lateral  $v$  y el giro  $\theta$  de la losa, se pueden expresar en términos de sus componentes pseudo-estáticas,  $v_s$  y  $\theta_s$ , y dinámicas,  $v_d$  y  $\theta_d$ :

$$v = v_s + v_d \quad (2.12)$$

$$\theta = \theta_s + \theta_d$$

En términos matriciales, el vector de desplazamientos  $\mathbf{D}$  expresado en sus componentes pseudo-estáticas,  $\mathbf{D}_s = \{v_s, \theta_s\}$ , y dinámicas,  $\mathbf{D}_d = \{v_d, \theta_d\}$ , es:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_s + \mathbf{D}_d \quad (2.13)$$

Las componentes  $v_s$  y  $\theta_s$ , representan el desplazamiento y giro de la losa, respectivamente, generados por movimientos estáticos en los apoyos. Haciendo nulos los términos de las derivadas con respecto al tiempo en (2.10) se obtiene que el vector de desplazamientos pseudo-estáticos es igual a:

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{U} \quad (2.14)$$

Usando las expresiones para la matriz de rigidez y el vector de fuerzas equivalentes de (2.11), se puede demostrar que las componentes de desplazamientos pseudo-estáticas en (2.14) están dadas por:

$$v_s = -\frac{\lambda_r}{\lambda_r - e_o^2} \sum_{j=1}^{N_y} a_{yj} u_{yj} + \frac{e_o}{\lambda_r - e_o^2} \left\{ \sum_{j=1}^{N_y} a_{yj} x_j u_{yj} + \lambda_k \sum_{i=1}^{N_x} a_{xi} y_i u_{xi} \right\} \quad (2.15)$$

$$\theta_s = \frac{e_o}{\lambda_r - e_o^2} \sum_{j=1}^{N_y} a_{yj} u_{yj} - \frac{l}{\lambda_r - e_o^2} \left\{ \sum_{j=1}^{N_y} a_{yj} x_j u_{yj} + \lambda_k \sum_{i=1}^{N_x} a_{xi} y_i u_{xi} \right\} \quad (2.16)$$

donde

$$a_{yj} = -\frac{k_{yj}}{K_y}; \quad a_{xi} = -\frac{k_{xi}}{K_x}; \quad \lambda_k = \frac{K_x}{K_y}; \quad \lambda_r = \frac{K_\theta}{K_y} \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.13) en (2.10) y haciendo uso de (2.14), se obtiene la ecuación de movimiento de la respuesta dinámica del sistema estructural,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}}_d + \mathbf{K}\mathbf{D}_d = -\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\ddot{\mathbf{U}} \quad (2.18)$$

donde

$$\ddot{\mathbf{U}} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N_y} k_{yj} \ddot{u}_{yj} \\ \sum_{j=1}^{N_y} k_{yj} x_j \ddot{u}_{yj} + \sum_{i=1}^{N_x} k_{xi} y_i \ddot{u}_{xi} \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

Las frecuencias modales y los correspondientes modos de vibración se encuentran de la solución del problema de vibración libre. Las frecuencias modales son las raíces de la ecuación característica que se obtiene de igualar a cero el determinante del sistema en vibración libre, a saber,  $|\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2| = 0$ . Las frecuencias naturales del sistema estructural en estudio  $\omega_i$ ,  $i=1,2$ , normalizadas con respecto a la frecuencia desacoplada en dirección Y,  $\omega_v$ , están dadas por:

$$\frac{\omega_i^2}{\omega_v^2} = \left( 1 + \frac{\omega_\theta^2}{\omega_v^2} \right) \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{\omega_\theta^2}{\omega_v^2} \right)^2 + 4 \frac{\omega_\theta^2 e_o^2}{\omega_v^2 \lambda_r} \right\}^{1/2} \quad (2.20)$$

Nótese que si  $e_o=0$ , las frecuencias modales son iguales a las frecuencias desacopladas (ver ecuación 2.3). Las formas modales  $\phi_i$  se obtienen de la solución del sistema  $[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \phi_i = \mathbf{0}$ . Resolviendo este sistema, se obtiene que las componentes del vector  $\phi_i = \{ \phi_{1i}, \phi_{2i} \}$  se relacionan de la siguiente manera:

$$\phi_{2i} = - \frac{1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_v^2}}{e_o} \phi_{1i} \quad (2.21)$$

Las formas modales dependen de la excentricidad nominal del sistema estructural,  $e_o$ , y de la relación de frecuencias modales  $\omega_i / \omega_v$  (ecuación 2.20).

La solución de la ecuación (2.18) para las componentes dinámicas, se puede escribir como:

$$\mathbf{D}_d = \begin{Bmatrix} v_d \\ \theta_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} = \Phi \mathbf{Z} \quad (2.22)$$

En la ecuación (2.22),  $\Phi$  es la matriz modal y  $\mathbf{Z}$  es el vector de respuestas de osciladores modales o coordenadas generalizadas. Sustituyendo (2.22) en (2.18) y haciendo uso de las propiedades de ortogonalidad de las matrices de masa y de rigidez con respecto a la matriz modal, obtenemos la siguiente ecuación para las coordenadas generalizadas:

$$\ddot{Z}_i + \omega_i^2 Z_i = \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} \ddot{U}_j \quad (2.23)$$

donde

$$\begin{Bmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \end{Bmatrix}^T = -\frac{\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1}}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i}, \quad i = 1, 2 \quad (2.24)$$

y  $\ddot{U}_j$  denota las componentes del vector  $\ddot{\mathbf{U}}$  en (2.19).

Por simplicidad algebraica, las ecuaciones de movimiento (2.7) a (2.9) fueron deducidas sin considerar las fuerzas asociadas con el amortiguamiento estructural. Con el objeto de tomar en cuenta los efectos de amortiguamiento, modificaremos la ecuación (2.23) incluyendo el término correspondiente a un amortiguamiento modal  $\xi_i$ :

$$\ddot{Z}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{Z}_i + \omega_i^2 Z_i = \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} \ddot{U}_j \quad (2.25)$$

Nótese que (2.25) es la ecuación que se obtiene si se hace uso de la hipótesis de amortiguamiento proporcional en un planteamiento que incluya el amortiguamiento en las ecuaciones de movimiento del sistema estructural.

Definamos el vector  $\ddot{\mathbf{u}} = \{\ddot{u}_1, \ddot{u}_2, \dots, \ddot{u}_{N_Y+1}, \ddot{u}_{N_Y+2}, \dots, \ddot{u}_{N_Y+N_X}\}$ , donde

$$\begin{aligned} \ddot{u}_j &= \ddot{u}_{Yj} & j &= 1, 2, \dots, N_Y \\ \ddot{u}_{N_Y+j} &= \ddot{u}_{Xj} & j &= 1, 2, \dots, N_X \end{aligned}$$

y sea  $Y_{ij}$  el desplazamiento relativo con respecto a la base de un oscilador modal con frecuencia y amortiguamiento  $\omega_i$  y  $\xi_i$ , respectivamente, sometido a la excitación del terreno  $-\ddot{u}_j$ ;  $Y_{ij}$  satisface la ecuación de movimiento:

$$\ddot{Y}_{ij} + 2\xi_i\omega_i\dot{Y}_{ij} + \omega_i^2 Y_{ij} = \ddot{u}_j \quad (2.26)$$

Sustituyendo (2.19) en (2.25) y haciendo uso de (2.26),  $Z_i$  se puede expresar como una combinación lineal de las respuestas del oscilador modal  $Y_{ij}$  como sigue:

$$Z_i = \sum_{j=1}^N d_{ij} Y_{ij} \quad (2.27)$$

donde  $N = N_x + N_y$ , y

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \beta_{i1}k_{yj} + \beta_{i2}k_{yj}x_j & j &= 1, 2, \dots, N_y \\ d_{i, N_y+j} &= \beta_{i2}k_{xj}y_j & j &= 1, 2, \dots, N_x \end{aligned} \quad (2.28)$$

### 2.3 Cortante basal y momento torsor

El movimiento del terreno en los apoyos en dos direcciones ortogonales genera en el sistema estructural los cortantes basales  $V_x$  y  $V_y$ , en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente, y el momento torsor,  $M_t$ , alrededor del centro de masa. El cortante basal es la suma de las fuerzas de corte que se originan en cada elemento resistente como resultado de los desplazamientos relativos entre el extremo superior, debidos a la traslación y giro de la losa, y los desplazamientos del terreno en los apoyos de dichos elementos. Sumando las fuerzas  $F_{ey}$  (ver ecuación (2.6)) que se originan en los elementos de resistencia lateral, el cortante basal en la dirección  $Y$  se puede expresar entonces de la siguiente manera:

$$V_y = \sum_{j=1}^{N_y} F_{eyj} = K_y v + K_y \theta e_o - \sum_{j=1}^{N_y} k_{yj} u_{yj} \quad (2.29)$$

Expresando  $v$  y  $\theta$  en sus componentes pseudo-estáticas y dinámicas, se puede demostrar que (ver apéndice A):

$$V_y = K_y \left\{ v_d + \theta_d e_o \right\} \quad (2.30)$$

El momento torsor se obtiene de la suma de momentos alrededor del centro de masa y procediendo de manera análoga que para el cortante basal se obtiene la siguiente expresión para el momento torsor (ver apéndice A):

$$M_t = K_\theta \left( \theta_d + \frac{v_d}{\lambda_r} e_o \right) \quad (2.31)$$

Es importante hacer notar que el cortante basal y el momento torsor en (2.30) y (2.31), respectivamente, dependen de las componentes dinámicas del desplazamiento lateral y giro de la losa, y no de las componentes pseudo-estáticas.

## 2.4 Respuesta estocástica

Supongamos que las fases intensas de los movimientos del terreno en los apoyos de los elementos resistentes se pueden modelar como segmentos de procesos aleatorios con media cero, conjuntamente estacionarios, y con una duración suficientemente larga para que la respuesta del sistema estructural alcance su fase estacionaria. Las varianzas del cortante basal,  $\sigma_{V_y}^2$ , y momento torsor,  $\sigma_{M_t}^2$ , se pueden obtener de (2.30) y (2.31) como sigue:

$$\sigma_{V_y}^2 = K_y^2 \left\{ \sigma_{v_d}^2 + e_o^2 \sigma_{\theta_d}^2 + 2e_o \text{Cov}(v_d, \theta_d) \right\} \quad (2.32)$$

$$\sigma_{M_t}^2 = K_\theta^2 \left\{ \left( \frac{e_o}{\lambda_r} \right)^2 \sigma_{v_d}^2 + \sigma_{\theta_d}^2 + 2 \frac{e_o}{\lambda_r} \text{Cov}(v_d, \theta_d) \right\} \quad (2.33)$$

donde  $\sigma_{v_d}^2$ ,  $\sigma_{\theta_d}^2$  son las varianzas de  $v_d$  y  $\theta_d$ , respectivamente, y  $\text{Cov}(v_d, \theta_d)$  es la covarianza correspondiente. Las varianzas de  $v_d$  y  $\theta_d$ , así como la covarianza  $\text{Cov}(v_d, \theta_d)$  se pueden expresar en función de las varianzas de las coordenadas generalizadas  $Z_1$  y  $Z_2$ ,  $\sigma_{Z_1}^2$ ,  $\sigma_{Z_2}^2$ , y de la covarianza entre éstas,  $\text{Cov}(Z_1, Z_2)$ , mediante la transformación en (2.22):

$$\sigma_{v_d}^2 = \phi_{11}^2 \sigma_{Z_1}^2 + \phi_{12}^2 \sigma_{Z_2}^2 + 2\phi_{11}\phi_{12} \text{Cov}(Z_1, Z_2) \quad (2.34)$$

$$\sigma_{\theta_d}^2 = \phi_{21}^2 \sigma_{Z_1}^2 + \phi_{22}^2 \sigma_{Z_2}^2 + 2\phi_{21}\phi_{22} \text{Cov}(Z_1, Z_2) \quad (2.35)$$

$$\text{Cov}(v_d, \theta_d) = \phi_{11}\phi_{21} \sigma_{Z_1}^2 + \phi_{12}\phi_{22} \sigma_{Z_2}^2 + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21}) \text{Cov}(Z_1, Z_2) \quad (2.36)$$

La expresión (2.27) se puede usar para encontrar la covarianza entre las coordenadas generalizadas  $Z_1$  y  $Z_2$ ,

$$Cov(Z_1, Z_2) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1i} d_{2j} Cov(Y_{1i}, Y_{2j}) \quad (2.37)$$

donde la covarianza cruzada entre las respuestas  $Y_{1i}$  y  $Y_{2j}$  del oscilador modal descrito por la ecuación (2.26), está dada por:

$$Cov(Y_{1i}, Y_{2j}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \left[ H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{\ddot{v}_i \ddot{v}_j}(\omega) \right] d\omega \quad (2.38)$$

En (2.38),  $H_i(\omega)$  es la función de transferencia de un sistema de un grado de libertad con frecuencia y amortiguamiento  $\omega_i$  y  $\xi_i$ :

$$H_i(\omega) = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\xi_i \omega_i \omega} \quad (2.39)$$

y el asterisco indica conjugada compleja. Sustituyendo (2.38) en (2.37) obtenemos:

$$Cov(Z_1, Z_2) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1i} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \left[ H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{\ddot{v}_i \ddot{v}_j}(\omega) \right] d\omega \quad (2.40)$$

Igualando los subíndices de  $Z$  en (2.40) se obtienen las varianzas de  $Z_1$  y  $Z_2$  :

$$Var(Z_1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1i} d_{1j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{v}_i \ddot{v}_j}(\omega) d\omega \quad (2.41)$$

$$Var(Z_2) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{2i} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{v}_i \ddot{v}_j}(\omega) d\omega$$

Sustituyendo (2.40) y (2.41) en (2.34) a (2.36) obtenemos las varianzas de  $v_d$  y  $\theta_d$ , y la covarianza correspondiente:

$$\begin{aligned} \sigma_{v_d}^2 = & \phi_{11}^2 \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1l} d_{1j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega \quad + \\ & \phi_{12}^2 \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{2l} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega \quad + \\ & 2\phi_{11}\phi_{12} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1l} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \left[ H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) \right] d\omega \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_d}^2 = & \phi_{21}^2 \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1l} d_{1j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega \quad + \\ & \phi_{22}^2 \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{2l} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega \quad + \\ & 2\phi_{21}\phi_{22} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1l} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \left[ H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) \right] d\omega \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(v_d, \theta_d) = & \phi_{11}\phi_{21} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1l} d_{1j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega \quad + \\ & \phi_{12}\phi_{22} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{2l} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega \quad + \\ & \left\{ \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} \right\} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1l} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \left[ H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) \right] d\omega \end{aligned} \quad (2.44)$$

Las expresiones para la varianza del cortante basal y del momento torsor se obtienen de sustituir (2.42) a (2.44) en (2.32) y (2.33), respectivamente:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{V_y}^2 &= K_y^2 \left( \phi_{11}^2 + \phi_{21}^2 e_o^2 + 2e_o \phi_{11} \phi_{21} \right) \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1l} d_{1j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega & + \\
 & K_y^2 \left( \phi_{12}^2 + \phi_{22}^2 e_o^2 + 2e_o \phi_{12} \phi_{22} \right) \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{2l} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega & + \\
 & 2K_y^2 \left( \phi_{11} \phi_{12} + \phi_{21} \phi_{22} e_o^2 + e_o \{ \phi_{11} \phi_{22} + \phi_{12} \phi_{21} \} \right) \cdot \\
 & \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1l} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left[ H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) \right] d\omega & (2.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{M_r}^2 &= K_\theta^2 \left( \frac{e_o^2}{\lambda_r^2} \phi_{11}^2 + \phi_{21}^2 + 2 \frac{e_o}{\lambda_r} \phi_{11} \phi_{21} \right) \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1l} d_{1j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega & + \\
 & K_\theta^2 \left( \frac{e_o^2}{\lambda_r^2} \phi_{12}^2 + \phi_{22}^2 + 2 \frac{e_o}{\lambda_r} \phi_{12} \phi_{22} \right) \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{2l} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega & + \\
 & 2K_\theta^2 \left( \frac{e_o^2}{\lambda_r^2} \phi_{11} \phi_{12} + \phi_{21} \phi_{22} + \frac{e_o}{\lambda_r} \{ \phi_{11} \phi_{22} + \phi_{12} \phi_{21} \} \right) \cdot \\
 & \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1l} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left[ H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) \right] d\omega & (2.46)
 \end{aligned}$$

### 2.5 Sistemas simétricos

Sea  $e_o=0$ , es decir, el sistema es simétrico con respecto a ambos ejes de coordenadas.

Las ecuaciones de movimiento se desacoplan y se expresan como sigue:

$$M\ddot{v} + K_y v = \sum_{j=1}^N k_{yj} u_{yj} \quad (2.47)$$

$$M\ddot{w} + K_x w = \sum_{i=1}^N k_{xi} u_{xi} \quad (2.48)$$

$$I\ddot{\theta} + K_\theta \theta = \sum_{i=1}^N k_{xi} u_{xi} y_i + \sum_{j=1}^N k_{yj} u_{yj} x_j \quad (2.49)$$

La matriz de formas modales,  $\Phi$ , es entonces una matriz identidad,  $\phi_{11} = \phi_{22} = 1$  y  $\phi_{12} = \phi_{21} = 0$ . Las expresiones en (2.42) y (2.43) se reducen a:

$$\sigma_{v_d}^2 = \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1l} d_{1j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{u}_l \ddot{u}_j}(\omega) d\omega \quad (2.50)$$

$$\sigma_{\theta_d}^2 = \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{2l} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{u}_l \ddot{u}_j}(\omega) d\omega$$

Sustituyendo  $e_o=0$  en las ecuaciones (2.32) y (2.33)

$$\sigma_{v_y}^2 = K_y^2 \sigma_{v_d}^2, \quad \sigma_{M_t}^2 = K_\theta^2 \sigma_{\theta_d}^2 \quad (2.51)$$

De las expresiones en (2.50), la varianza del cortante basal y del momento torsor se pueden escribir como:

$$\sigma_{V_y}^2 = K_y^2 \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1l} d_{1j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega \quad (2.52)$$

$$\sigma_{M_t}^2 = K_\theta^2 \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{2l} d_{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega \quad (2.53)$$

Tomando en cuenta que  $\beta_{12} = 0$  y  $\beta_{11} = -\frac{1}{K_y}$  (ver apéndice B), de (2.26) se tiene que:

$$d_{lj} = a_{yj} \quad \text{donde } a_{yj} = -\frac{k_{yj}}{K_y} \quad (2.54)$$

Sustituyendo (2.54) en (2.52), la varianza del cortante basal cuando el sistema es simétrico está dada por:

$$\sigma_{V_y}^2 = K_y^2 \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} a_{yl} a_{yl} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega \quad (2.55)$$

Análogamente, en la expresión de la varianza del momento torsor, se puede demostrar que:

$$\sigma_{M_t}^2 = K_\theta^2 \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N a_{\theta l} a_{\theta j} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_l \ddot{U}_j}(\omega) d\omega \quad (2.56)$$

donde  $a_{\theta j} = -\frac{k_{jy}}{K_\theta} x_j$  para  $j=1,2,\dots,N_y$ , y  $a_{\theta j} = -\frac{k_{jx}}{K_\theta} y_j$  para  $j=1,2,\dots,N_x$ .

Las expresiones en (2.55) y (2.56) son las deducidas para sistemas estructurales simétricos por Barranco-Cicilia (1995).

### 2.6 Movimiento uniforme del terreno

Consideremos el caso en el que el movimiento del terreno en cada dirección es uniforme en todos los apoyos del sistema estructural asimétrico. Sean  $U_x$  y  $U_y$  los desplazamientos del terreno en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente. La varianza del desplazamiento y giro dinámicos, y la covarianza correspondiente, se expresan como (ver ecuaciones (2.42) a (2.44)):

$$\begin{aligned} \sigma_{v_d}^2 = & \phi_{11}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{1j} d_{1l} \quad + \\ & \phi_{12}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{2j} d_{2l} \quad + \\ & 2\phi_{11}\phi_{12} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \left[ H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) \right] d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{1l} d_{2j} \quad (2.57a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_d}^2 = & \phi_{21}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{1j} d_{1l} \quad + \\ & \phi_{22}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{2l} d_{2j} \quad + \\ & 2\phi_{21}\phi_{22} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \left[ H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) \right] d\omega \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N d_{1j} d_{2l} \quad (2.57b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(v_d, \theta_d) = & \phi_{11}\phi_{21} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{1j} d_{1l} \quad + \\ & \phi_{21}\phi_{22} \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{2l} d_{2j} \quad + \\ & (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21}) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \left[ H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) \right] d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{1l} d_{2j} \quad (2.58) \end{aligned}$$

Con base en las ecuaciones (2.57), (2.58), (2.45) y (2.46) las varianzas del cortante basal y del momento torsor están dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{V_y}^2 = & K_y^2 \left[ (\phi_{11}^2 + \phi_{21}^2 e_o^2 + 2e_o \phi_{11} \phi_{21}) \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{1j} d_{1l} + \right. \\ & (\phi_{12}^2 + \phi_{22}^2 e_o^2 + 2e_o \phi_{12} \phi_{22}) \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{2j} d_{2l} + \\ & 2(\phi_{11} \phi_{12} + \phi_{21} \phi_{22} e_o^2 + e_o \{\phi_{11} \phi_{22} + \phi_{12} \phi_{21}\}) \cdot \\ & \left. \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \left[ H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) \right] d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{1j} d_{2l} \right] \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{M_t}^2 = & K_\theta^2 \left( \frac{e_o^2}{\lambda_r^2} \phi_{11}^2 + \phi_{21}^2 + 2 \frac{e_o}{\lambda_r} \phi_{11} \phi_{21} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{1j} d_{1l} + \\ & K_\theta^2 \left( \frac{e_o^2}{\lambda_r^2} \phi_{12}^2 + \phi_{22}^2 + 2 \frac{e_o}{\lambda_r} \phi_{12} \phi_{22} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_2(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{2j} d_{2l} + \\ & 2K_\theta^2 \left( \frac{e_o^2}{\lambda_r^2} \phi_{11} \phi_{12} + \phi_{21} \phi_{22} + \frac{e_o}{\lambda_r} \{\phi_{11} \phi_{22} + \phi_{12} \phi_{21}\} \right) \cdot \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \left[ H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) \right] d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{1j} d_{2l}$$

### 2.7 Sistemas simétricos y movimiento uniforme

Si el movimiento del terreno es uniforme y el sistema completamente simétrico, entonces  $e_o=0$ ,  $\phi_{12} = \phi_{21} = 0$ , y  $\phi_{11} = \phi_{22} = 1$ . De (2.59) la varianza del cortante basal se puede expresar como sigue:

$$\sigma_{V_y}^2 = K_y^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{1j} d_{1l} \quad (2.61)$$

y utilizando (2.54).

$$\sigma_{V_y}^2 = K_y^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \quad (2.62)$$

De manera semejante, la varianza del momento torsor en (2.60) se puede expresar como sigue:

$$\sigma_{M_t}^2 = K_\theta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_1(\omega)\|^2 S_{\ddot{U}_Y \ddot{U}_Y}(\omega) d\omega \sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{2j} d_{2l} \quad (2.63)$$

dado que  $\beta_{2l} = 0$  y  $e_x = 0$ , el término  $\sum_{l=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} d_{2j} d_{2l} = 0$ , entonces:

$$\sigma_{M_t}^2 = 0 \quad (2.64)$$

Las expresiones en (2.62) y (2.64) son las correspondientes al caso de un sistema de un grado de libertad, como el mostrado en la figura 2.3, sometido a una excitación  $\ddot{U}_y$  en su base.

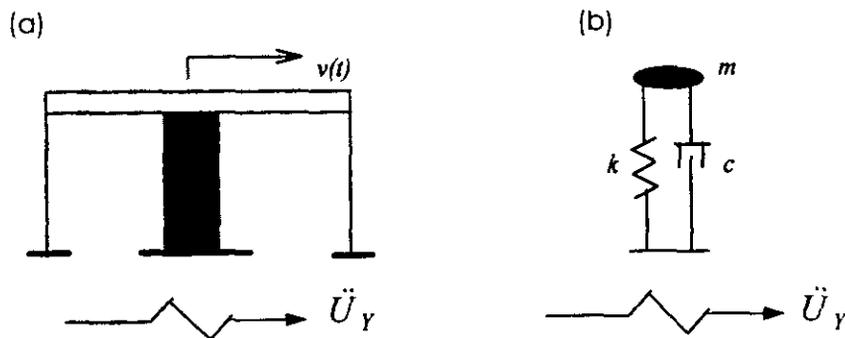


Figura 2.3. (a) Sistema estructural en el plano. (b) Idealización como oscilador de un grado de libertad.

## Capítulo 3

### Variación espacial local del movimiento sísmico del terreno

La variación espacial local del movimiento sísmico del terreno que se considera en este estudio se debe a tres efectos: (1) el de paso de las ondas, que resulta de la diferencia en el tiempo de arribo de las ondas sísmicas a dos puntos diferentes; (2) el de pérdida de coherencia, que resulta de la propagación de las ondas en medios heterogéneos complejos, así como de la combinación de diferentes señales generadas a lo largo de la falla sísmica, y (3) el de las condiciones locales del suelo, que amplifica y modifica el contenido de frecuencias de las ondas sísmicas a su paso a través de la estratigrafía del sitio. La variación espacial del movimiento sísmico se pueden modelar por medio del espectro de coherencia  $\gamma_{ij}(\omega)$  que se define en términos de la función de densidad espectral cruzada de las aceleraciones del terreno  $S_{\ddot{u}_i\ddot{u}_j}(\omega)$  en los puntos  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$

$$\gamma_{ij}(\omega) = \frac{S_{\ddot{u}_i\ddot{u}_j}(\omega)}{\sqrt{S_{\ddot{u}_i\ddot{u}_i}(\omega)S_{\ddot{u}_j\ddot{u}_j}(\omega)}} \quad (3.1)$$

donde  $S_{\ddot{u}_i\ddot{u}_i}(\omega)$  y  $S_{\ddot{u}_j\ddot{u}_j}(\omega)$  son las funciones de densidad espectral de las aceleraciones del terreno en los puntos  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$ , respectivamente. El espectro de coherencia es una función compleja de la frecuencia con parte real simétrica, parte imaginaria asimétrica y cuya norma tiene como límites  $-1.0 \leq \|\gamma_{ij}(\omega)\| \leq 1.0$

Se han propuesto diferentes modelos para el espectro de coherencia con base en estudios teóricos y análisis de registros sísmicos. El siguiente modelo se utiliza en este estudio para el espectro de coherencia (Der Kiureghian y Neuenhofer, 1991).

$$\gamma_{ij}(\omega) = \exp\left[-\left(\frac{\eta\omega\|\bar{x}_{ij}\|}{v_s}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-i\frac{\omega(\bar{v} \cdot \bar{x}_{ij})}{\|\bar{v}\|^2}\right] \quad (3.2)$$

donde  $\eta$  es un parámetro adimensional que varía entre  $0 \leq \eta \leq 0.5$  y es una medida del grado de incoherencia de los movimientos del terreno;  $\bar{x}_{ij}$  es el vector de posición relativa entre los puntos  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$  en la superficie del terreno;  $v_s$  es la velocidad de propagación de las ondas de corte del medio y  $\bar{v}$  es el vector de velocidad aparente. El primer término exponencial está basado en la función de coherencia de ondas de corte propagándose a través de un medio aleatorio (Luco y Wong, 1986) y el segundo corresponde al espectro de fase que toma en cuenta el efecto de paso de las ondas (Harichandran y Vanmarcke, 1986). En este modelo, la incoherencia aumenta con el incremento de la frecuencia o de la distancia entre  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$ , y se considera que el espectro de fase es una función lineal de la frecuencia. Existen otros modelos de espectro de coherencia que han sido desarrollados con base en análisis estadísticos de registros de arreglos densos (Harichandran y Vanmarcke, 1986, Hao, 1989). Si bien estos modelos tienen la ventaja de incorporar los efectos de variación espacial registrados durante eventos reales, dependen de una serie de parámetros de ajuste que es necesario estimar en cada sitio, y no siempre se cuenta con el número de eventos ni con el arreglo de dimensiones geométricas apropiadas para tal estimación. El efecto de cambio de forma en el modelo de Luco y Wong, depende de la velocidad de las ondas de corte, que es un parámetro con significado físico y cuyos posibles valores son conocidos para diferentes tipos de suelos. La variación lineal con la frecuencia del espectro de fase en el modelo de la ecuación 3.2, descansa en la hipótesis de que las componentes armónicas de las ondas sísmicas son ondas planas que viajan a una misma velocidad de propagación  $v$ , conocida como velocidad

aparente de propagación. Nótese adicionalmente que el modelo de espectro de coherencia adoptado no toma en cuenta el caso de ondas dispersivas en las que la velocidad de propagación depende de la frecuencia.

Se pueden definir los siguientes parámetros en el espectro de coherencia:

$$\tau_{cij} = \frac{\eta \|\bar{x}_{ij}\|}{v_s} \quad \text{y} \quad \tau_{pij} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{x}_{ij}}{\|\bar{v}\|^2} \quad (3.3)$$

Estos parámetros pueden interpretarse como los tiempos de viaje de las ondas de corte, con velocidad normalizada  $v_s / \eta$ , y del tren de ondas sísmicas (en la dirección de propagación), entre los puntos  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$ .

### 3.1 Condiciones locales del suelo

El efecto de las condiciones locales del suelo puede modelarse mediante la función de densidad espectral de la aceleración del terreno  $S_{\ddot{U}_i \ddot{U}_i}(\omega)$ . En este estudio se utilizó el modelo modificado de Kanai-Tajimi (Clough y Penzien, 1993) para la función de densidad espectral de la aceleración del terreno:

$$S_{\ddot{U}_i \ddot{U}_i}(\omega) = \frac{\omega_{fi}^4 + 4\xi_{fi}^2 \omega_{fi}^2 \omega^2}{(\omega_{fi}^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_{fi}^2 \omega_{fi}^2 \omega^2} \cdot G_{oi} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_{gi}^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_{gi}^2 \omega_{gi}^2 \omega^2} \quad (3.4)$$

La función de densidad espectral en (3.4) se deduce de un modelo en el que una excitación de ruido blanco con intensidad  $G_{oi}$  en la roca basal, es filtrada a través de un estrato de suelo que actúa como un oscilador de un grado de libertad con frecuencia natural  $\omega_{fi}$  y coeficiente de amortiguamiento  $\xi_{fi}$ ;  $\omega_{gi}$  y  $\xi_{gi}$  son los parámetros de un segundo filtro introducido para asegurar una varianza finita del desplazamiento del terreno. Para valores de  $\omega_{gi}$  mucho más pequeños que  $\omega_{fi}$ , el segundo filtro tiene influencia únicamente en frecuencias bajas puesto que se aproxima rápidamente a la unidad con el incremento de  $\omega$ . En la tabla 3.1 se muestran los valores de las frecuencias naturales y amortiguamientos característicos para sitios con suelo blando y firme (Der Kiureghian y Neuenhofer, 1991).

Tabla 3.1. Frecuencias y amortiguamientos característicos de suelo blando y firme.

Tipo de suelo	$\omega_{fi}$ (rad/s)	$\xi_{fi}$	$\omega_{gi}$ (rad/s)	$\xi_{gi}$
Blando	5.0	0.20	0.50	0.60
Firme	15.0	0.60	1.50	0.60

La figura 3.1 muestra las funciones de densidad espectral de la aceleración del terreno. Se aprecia que para suelos blandos se obtiene un proceso de banda angosta con un periodo característico de 1.29 s (0.77Hz), mientras que para terrenos firmes la densidad espectral corresponde a la de un proceso de banda ancha, conteniendo contribuciones de frecuencias más altas.

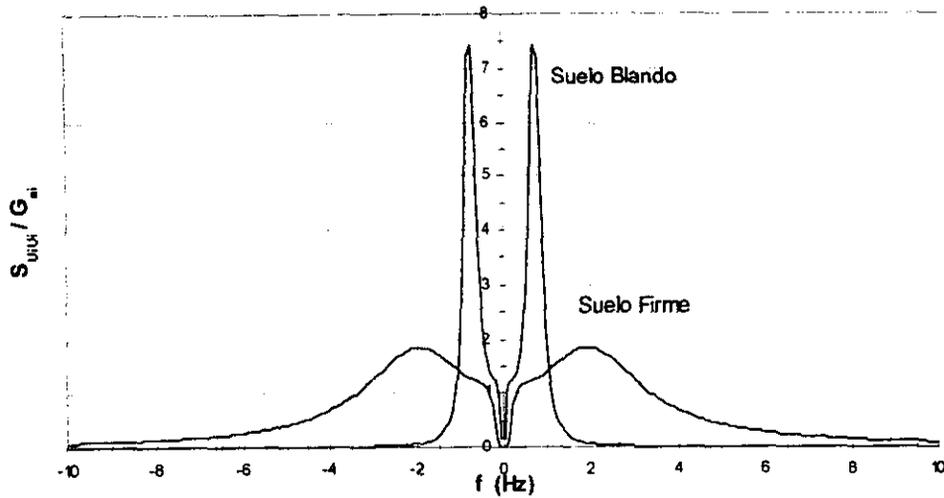


Figura 3.1. Función de densidad espectral entre aceleraciones del terreno.

Se consideró que las direcciones epicentral y transversal de incidencia del tren de ondas sísmicas coinciden aproximadamente con las llamadas direcciones principales (Penzien y Watabe, 1975), por lo que se supuso que: (1) las componentes del movimiento del terreno en ambas direcciones son estadísticamente independientes, y (2) la amplitud  $G_{oi}$  en (3.4) para la dirección transversal es igual al 70% de la correspondiente para la dirección epicentral.

### 3.2 Densidad espectral cruzada entre aceleraciones del terreno

La función de densidad espectral cruzada entre aceleraciones del terreno en los puntos  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$ ,  $S_{\ddot{u}_i\ddot{u}_j}(\omega)$ , se obtiene de la ecuación (3.1) una vez que el espectro de coherencia en (3.2) y las funciones de densidad espectral en (3.4) han sido especificadas, es decir,

$$S_{\ddot{u}_i\ddot{u}_j}(\omega) = \gamma_{ij}(\omega) \sqrt{S_{\ddot{u}_i\ddot{u}_i}(\omega) \cdot S_{\ddot{u}_j\ddot{u}_j}(\omega)} \quad (3.5)$$

## Capítulo 4

### Resultados

Se consideró como ejemplo de aplicación el sistema estructural asimétrico mostrado en la figura 4.1 que consiste de una losa rectangular rígida de dimensiones "a" y "b" apoyada sobre cuatro columnas. Las columnas tienen la misma rigidez en la dirección X. En la dirección Y, las columnas del extremo izquierdo (extremo flexible) tienen rigidez  $k$  y las del extremo derecho (extremo rígido) tienen rigidez  $\alpha_0 k$ , donde  $\alpha_0 > 1$ . La excentricidad nominal del sistema,  $e_0$ , se puede expresar en función de la constante de proporcionalidad  $\alpha_0$  y de la dimensión en planta "a" del sistema,

$$e_0 = \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0 + 1} \cdot a \quad (4.1)$$

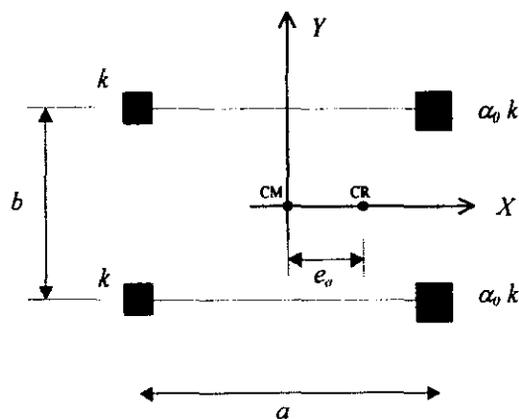


Figura 4.1. Modelo estructural de estudio: losa rectangular rígida apoyada sobre cuatro columnas.

Con base en la expresión (2.2) para la rigidez torsional  $K_\theta$ , se puede demostrar que para el sistema considerado, la relación entre la rigidez torsional y la rigidez lateral en dirección  $Y$ ,  $\lambda_r = K_\theta / K_y$ , está dada por:

$$\lambda_r = \frac{a^2}{4} \{1 + \lambda_k r^2\} \quad (4.2)$$

donde  $\lambda_k$  es la relación de rigideces laterales,  $\lambda_k = K_x / K_y$ , y  $r$  es la relación de aspecto de la losa,  $r = b/a$ . El momento polar de inercia de la losa,  $I$ , se puede expresar en función de su masa  $M$  y de la relación de aspecto  $r$ ,

$$I = \frac{1}{12} M a^2 (1 + r^2) \quad (4.3)$$

Substituyendo (4.3) en (2.3) y haciendo uso de (4.2), la relación de frecuencias circulares desacopladas de rotación y traslación del sistema,  $\Omega = \omega_\theta / \omega_v$ , es igual a

$$\Omega = \sqrt{3 \frac{1 + \lambda_k r^2}{1 + r^2}} \quad (4.4)$$

Con base en (4.4) se pueden calcular las frecuencias y formas modales del sistema en función de la frecuencia de traslación lateral  $\omega_v$  en dirección  $Y$  (ver ecuaciones 2.20 y 2.21). Usualmente se considera que una estructura es torsionalmente rígida cuando  $\Omega > 1$  y que es torsionalmente flexible cuando  $\Omega < 1$ . En el caso del sistema que aquí se considera, la ecuación (4.4) da valores de  $\Omega$  mayores que la unidad para valores razonables de  $\lambda_k$  y  $r$ , por lo que en general se puede afirmar que el sistema es torsionalmente rígido. Sería necesario que la relación de rigideces  $\lambda_k$  fuera muy

pequeña, e.g.  $\lambda_k < 0.1$ , y que la relación de aspecto fuera muy grande, digamos  $r > 2$ , para que  $\Omega$  tomara valores menores que uno.

Los parámetros  $d_{ij}$  involucrados en el cálculo de la respuesta dinámica (ver ecuaciones 2.27 y 2.28), se calculan para el caso del sistema considerado utilizando las siguientes expresiones:

$$d_{11} = -\frac{r\lambda_k}{8(\lambda_r - e_o^2)} \beta_{12}^*$$

$$d_{12} = -d_{11}$$

$$d_{13} = -d_{11}$$

$$d_{14} = d_{11}$$

$$d_{15} = -\frac{\alpha_o}{2(1 + \alpha_o)(\lambda_r - e_o^2)} \left( \beta_{11}^* + \frac{\beta_{12}^*}{2} \right)$$

$$d_{16} = d_{15}$$

$$d_{17} = -\frac{1}{2(1 + \alpha_o)(\lambda_r - e_o^2)} \left( \beta_{11}^* - \frac{\beta_{12}^*}{2} \right)$$

$$d_{18} = d_{17}$$

$$d_{21} = -\frac{r\lambda_k}{8(\lambda_r - e_o^2)} \beta_{22}^*$$

$$d_{22} = -d_{21}$$

$$d_{23} = -d_{21}$$

$$d_{24} = d_{21}$$

$$d_{25} = \frac{\alpha_o}{2(1 + \alpha_o)(\lambda_r - e_o^2)} \left( \beta_{21}^* + \frac{\beta_{22}^*}{2} \right)$$

$$d_{26} = d_{25}$$

$$d_{27} = \frac{1}{2(1 + \alpha_o)(\lambda_r - e_o^2)} \left( \beta_{21}^* - \frac{\beta_{22}^*}{2} \right)$$

$$d_{28} = d_{27}$$

(4.5)

donde

$$\beta_{11}^* = \frac{\phi_{21}e_o I/m - \phi_{11}\lambda}{\phi_{11}^2 + \phi_{21}^2 I/m}$$

$$\beta_{12}^* = \frac{-\phi_{21} I/m + \phi_{11}e_o}{\phi_{11}^2 + \phi_{21}^2 I/m}$$

$$\beta_{21}^* = \frac{\phi_{22}e_o I/m - \phi_{12}e_o}{\phi_{12}^2 + \phi_{22}^2 I/m}$$

$$\beta_{22}^* = \frac{-\phi_{22} I/m + \phi_{12}e_o}{\phi_{12}^2 + \phi_{22}^2 I/m} \quad (4.6)$$

Como se puede deducir de (4.1) a (4.6), la respuesta del sistema depende de los siguientes parámetros: (1) la relación de rigideces laterales  $\lambda_k$ ; (2) la relación de aspecto de la losa  $r$ ; (3) la frecuencia o periodo de traslación desacoplada en dirección  $Y$ ,  $\omega_y$  o  $T_y$ ; y (4) la excentricidad nominal del sistema  $e_o$ , o el factor de proporcionalidad de rigideces  $\alpha_o$ .

Para el caso en estudio, se utilizaron valores para las relaciones de rigideces  $\lambda_k$  iguales a 0.5 y 1.0, relaciones de aspecto de la losa  $r$  de 0.5 y 1.0, que corresponden a sistemas de planta rectangular y cuadrada, respectivamente, y se consideró un coeficiente de amortiguamiento de 5% para todos los modos. Los valores de las excentricidades nominales utilizados fueron iguales a  $a/6$  y  $a/3$  que corresponden a valores de  $\alpha_o$  iguales a 1.4 y 2, respectivamente; se consideraron también sistemas nominalmente simétricos. Debido a los valores usados para la relación de rigideces laterales y la relación de aspecto de la losa,  $\Omega$  adquiere valores superiores a la unidad, por lo que los sistemas estudiados son torsionalmente rígidos (ver tabla 4.1).

Tabla 4.1 Valores de  $\Omega$ 

$\lambda_k$	$r$	$\Omega$
1.0	1.0	1.732
	0.5	1.732
0.5	1.0	1.500
	0.5	1.643

Se consideró que la dirección de propagación de la excitación sísmica es paralela al eje  $Y$ . Se definieron los siguientes parámetros de pérdida de coherencia y pérdida de fase, en función de la dimensión  $b$  de la losa (Barranco-Cicilia, 1995).

$$\tau_{cb} = \frac{\eta b}{v_s} \quad \text{y} \quad \tau_{pb} = \frac{b}{\|\bar{v}\|} \quad (4.7)$$

que pueden ser interpretados como los tiempos en que las ondas de corte con velocidad  $v_s / \eta$  y el tren de ondas sísmicas con velocidad aparente  $\bar{v}$  cruzan la dimensión  $b$  del sistema estructural, respectivamente. Se analizó la respuesta del sistema para suelos blandos y firmes (ver tabla 3.1) utilizando valores de  $\tau_{cb} = 0.02, 0.05$  y  $0.10$  para ambos tipos de suelo; se consideraron valores de  $\tau_{pb} = 0.03$  para suelos blandos y  $\tau_{pb} = 0.01$  para suelos firmes. Estos valores se definieron tomando en cuenta dimensiones típicas de estructuras en planta y los siguientes valores medios:

- Velocidades de ondas de corte para suelos blandos y firmes de 50 m/s y 100 m/s, respectivamente (Zeevaert, 1991).
- Velocidad aparente de propagación del tren de ondas sísmicas de 3 000 m/s para suelos firmes y 1000 m/s para suelos blandos (Harichandran y Vanmarcke, 1986 y Reinoso A. 1997).
- Variación del factor de incoherencia  $\eta$  entre 0.1 y 0.5 (Luco y Wong, 1986).

#### 4.1 Cortante basal máximo

Como primer parámetro de estudio para evaluar los efectos de torsión del sistema a nivel de planta, se analizó la relación del cortante basal máximo medio con movimiento del terreno incoherente y fuera de fase entre el cortante basal máximo con movimiento uniforme. El cortante basal máximo medio,  $V_{m\acute{a}x}$ , está relacionado con la desviación estándar del cortante basal,  $\sigma_{V_y}$ , por medio del factor pico  $K_V$ :

$$V_{m\acute{a}x} = K_V \sigma_{V_y} \quad (4.8)$$

Suponiendo que el movimiento sísmico del terreno se puede modelar como un proceso gaussiano, y suponiendo umbrales altos de cruce de los valores absolutos máximos del cortante, el factor pico está dado por (Davenport, 1964):

$$K_V = \sqrt{2 \ln(2\nu_0^+(V_Y)T_d)} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln(2\nu_0^+(V_Y)T_d)}} \quad (4.9)$$

donde  $\nu_0^+(V_Y)$  es la tasa de cruces de cero con pendiente positiva del cortante  $V_y$  y  $T_d$  es la duración de la respuesta. La desviación estándar y la tasa de cruces del cortante basal con movimiento incoherente del terreno se obtuvieron con base en la expresión (2.45); para el caso de movimiento uniforme éstas se evaluaron con base en la expresión (2.59).

Las figuras 4.2 a 4.7 muestran la relación del cortante basal máximo esperado para movimiento del terreno incoherente y fuera de fase,  $V_V$ , entre el correspondiente a movimiento uniforme en los apoyos,  $V_U$ , versus el periodo traslacional del sistema,  $T_p$ , en la dirección de propagación de la excitación. Para valores típicos de duraciones de la fase intensa del movimiento del terreno en suelos blandos y firmes, se encontró que la relación entre factores picos para movimiento incoherente y aquellos para movimiento uniforme varía entre 0.96 y 1.04. En consecuencia la relación  $V_V/V_U$  es

aproximadamente igual a la relación entre las desviaciones estándar correspondientes. Las figuras 4.2 a 4.4 corresponden al caso de suelos firmes. La figura 4.2 muestra la variación de  $V_V/V_U$  para  $\tau_{cb}=0.05$ ,  $\tau_{pb}=0.01$  y para los valores considerados de la relación de aspecto  $r$ , la relación de rigideces laterales  $\lambda_k$  y la excentricidad nominal del sistema  $e_o$ . La relación de cortantes basales máximos es aproximadamente igual a 0.8 para periodos menores que 0.2s. A medida que el periodo aumenta, la relación de cortantes basales máximos aumenta, alcanzando valores cercanos a 1 para periodos mayores que 1s. En el caso de estructuras rígidas, la variación espacial del movimiento sísmico del terreno reduce el cortante basal máximo con respecto al obtenido para excitaciones uniformes en los apoyos. Por otro lado, en el caso de estructuras relativamente flexibles, digamos sistemas con periodos mayores que 1s, dicha variación del movimiento no tiene un efecto significativo en el cortante basal y éste podría calcularse suponiendo que los apoyos se mueven de manera uniforme. En el caso de sistemas rígidos, la reducción del cortante basal es mayor para sistemas con menor excentricidad nominal. La relación de aspecto de la losa influye en la reducción del cortante basal máximo en periodos entre 0.1 y 0.5 s; en el caso de plantas rectangulares ( $r=0.5$ ) la reducción de cortante basal es mayor que en plantas cuadradas ( $r=1.0$ ). Sin embargo, como se puede apreciar en la figura 4.2, la influencia de la excentricidad nominal y de la relación de aspecto en la respuesta torsional no es significativa; variaciones entre 4% y 7% se pueden obtener en la relación  $V_V/V_U$  por cambios en los valores de excentricidad y relación de aspecto considerados. Por otro lado, la relación de rigideces laterales tampoco tiene mayor efecto en la relación de cortantes basales máximos.

Las figuras 4.3 y 4.4 muestran la variación de  $V_V/V_U$  versus el periodo traslacional  $T_v$  del sistema para valores de  $\tau_{cb}$  iguales a 0.02, 0.05 y 0.10. A medida que aumenta la pérdida de coherencia entre las excitaciones en los apoyos con el incremento de  $\tau_{cb}$ , disminuye la relación de cortantes  $V_V/V_U$  para cada periodo  $T_v$  considerado. Se puede observar que a diferencia de los resultados para  $\tau_{cb}=0.02$ , cuando  $\tau_{cb}=0.10$ , se reduce el cortante basal  $V_V$  con respecto a  $V_U$  incluso en el caso de sistemas flexibles con periodos alrededor de 1s. La máxima reducción en cortante es del orden del 25%

cuando  $\tau_{cb}=0.10$ . La tendencia de los resultados mostrados sugiere que a medida que se incremente la pérdida de coherencia, el cortante obtenido con movimientos incoherentes y fuera de fase será menor que el correspondiente a excitaciones uniformes en los apoyos para todo el rango de periodos traslacionales considerados.

Las figuras 4.5 a 4.7 muestran los resultados obtenidos para suelos blandos. La figura 4.5 muestra la relación  $V_V/V_U$  para  $\tau_{cb}=0.05$ ,  $\tau_{pb}=0.03$  y diferentes valores de  $r$ ,  $\lambda_k$  y  $e_o$ . En el caso de estructuras rígidas, al igual que en suelos firmes, la variación espacial del movimiento sísmico del terreno reduce el cortante basal máximo esperado con respecto al obtenido para movimiento uniforme. La relación de cortantes basales máximos es aproximadamente igual a 0.86 para periodos menores que 0.1s. A medida que el periodo aumenta, la relación  $V_V/V_U$  aumenta, alcanzando valores cercanos a 1 para periodos mayores que 1.0s. En el caso de estructuras flexibles, la variación del movimiento sísmico no tiene un efecto significativo en el cortante basal. La reducción del cortante basal es mayor para sistemas con menor excentricidad nominal, aun cuando esta diferencia es muy pequeña. La relación de aspecto de la losa y la relación de rigideces laterales no tienen un efecto apreciable en la relación de cortantes basales máximos.

Las figuras 4.6 y 4.7 muestran la variación de  $V_V/V_U$  versus el periodo de traslación  $T_v$ , para valores de  $\tau_{cb}$  iguales a 0.02, 0.05 y 0.10. Se observa también que a mayor pérdida de coherencia entre las excitaciones en los apoyos se produce una mayor reducción de la relación de cortantes  $V_V/V_U$ . Dependiendo del grado de pérdida de coherencia, esta reducción de cortante no sólo se presenta en sistemas rígidos. Por ejemplo, para valores de  $\tau_{cb}=0.10$ , el cortante basal máximo con movimiento uniforme se reduce aproximadamente un 10% en sistemas con  $T_v=1$  s. La máxima reducción de cortante es del orden del 15%.

Los resultados muestran que para ambos tipos de suelo, firmes y blandos, el cortante basal máximo esperado es menor en el caso en que los movimientos del terreno son incoherentes y fuera de fase, que en el caso de excitación uniforme en los apoyos. La reducción del cortante máximo medio se produce generalmente en el caso de

sistemas estructurales rígidos, digamos sistemas con  $T_v \leq 0.2$  s. Sin embargo, si la pérdida de coherencia es significativa, e.g.  $\tau_{cb} \geq 0.10$  s, dicha reducción se presenta también en el caso de sistemas estructurales flexibles. Es importante hacer notar aquí que los cortantes basales máximos esperados,  $V_V$  y  $V_U$ , dependen solamente de las componentes dinámicas del desplazamiento y giro del sistema estructural (ver ecuación 2.30). Estos resultados pueden cambiar cuando, dependiendo de la respuesta de interés, se toman en cuenta las componentes pseudo-estáticas correspondientes, como se discutirá más adelante.

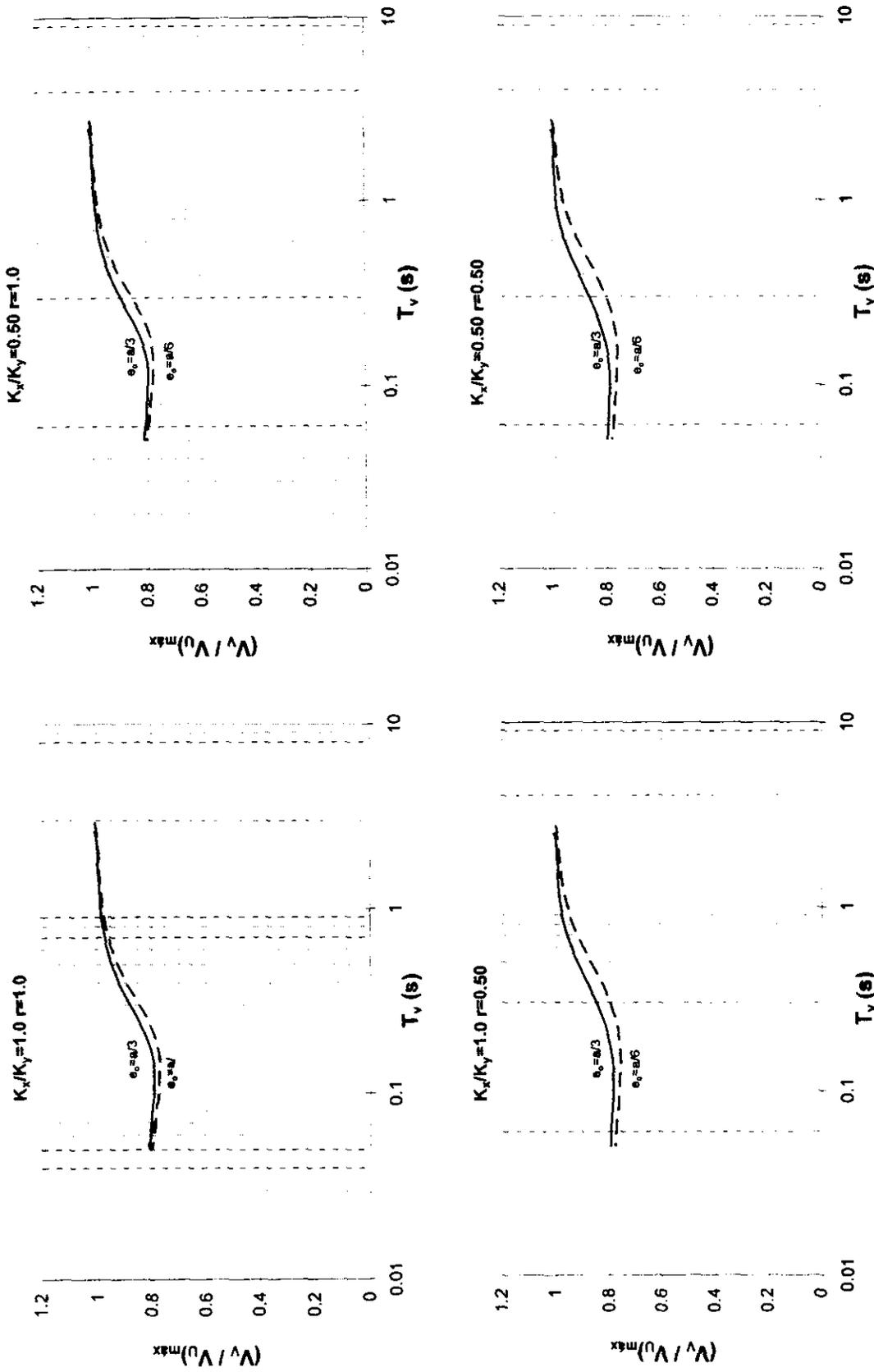


Figura 4.2 Relación de cortantes basales máximos versus Periodo traslacional;  $t_{cb}=0.05$ ,  $\tau_{pb}=0.01$ , suelo firme.

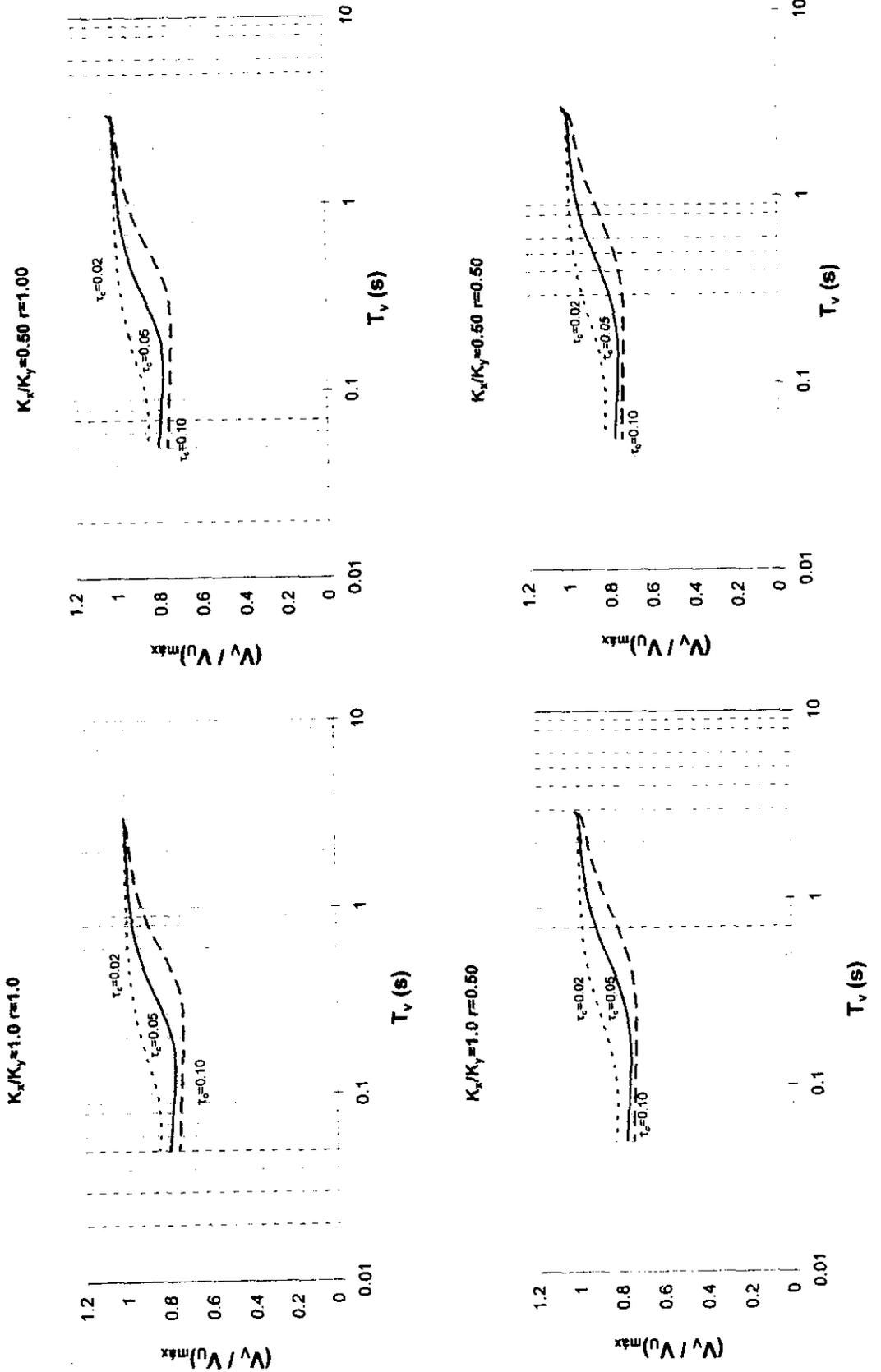


Figura 4.3 Relación de cortantes basales máximos versus Período traslacional;  $\tau_{pb} = 0.01$ , suelo firme,  $e_o = a/b$ .

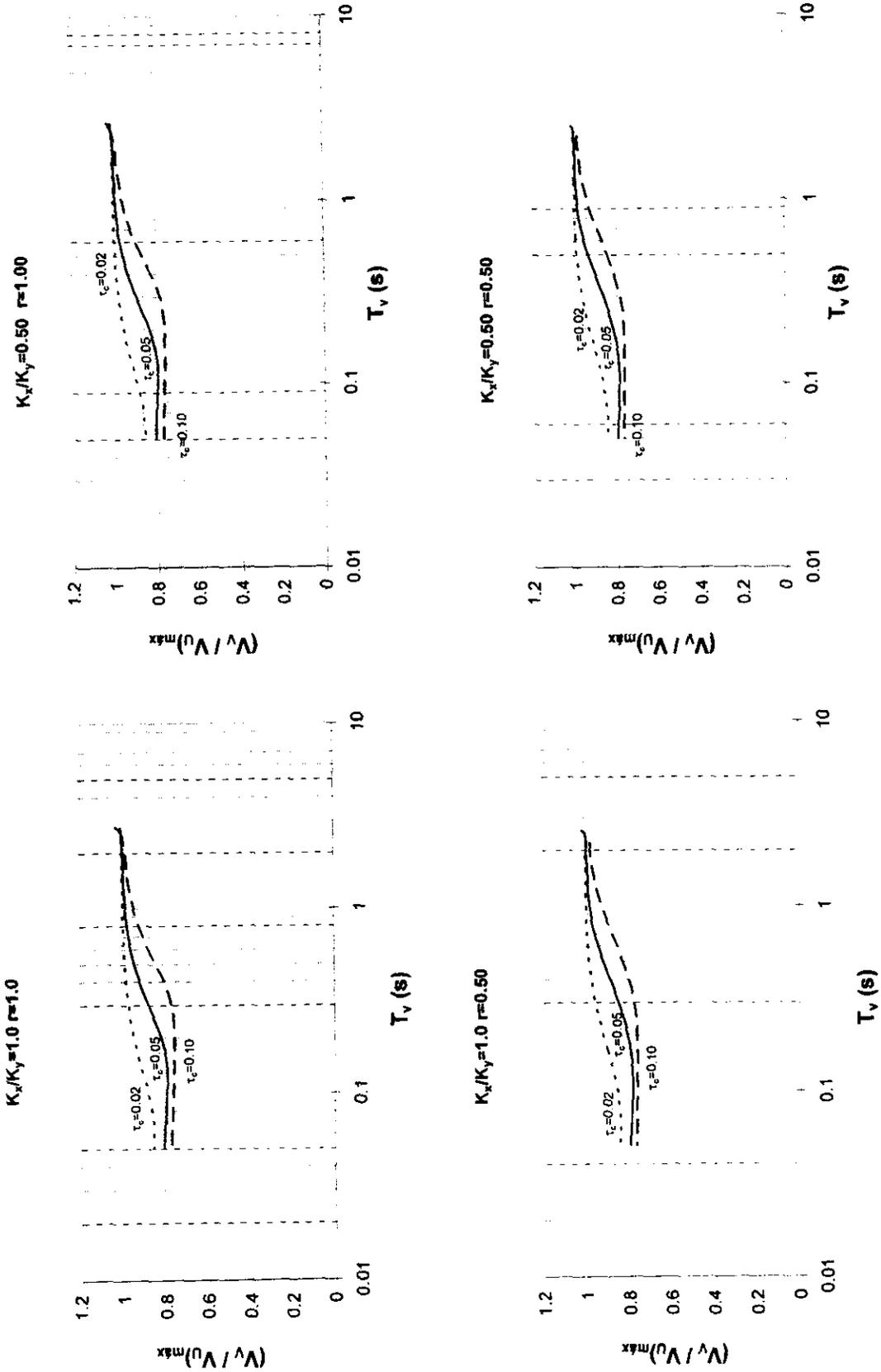


Figura 4.4 Relación de cortantes basales máximos versus Periodo traslacional;  $\tau_{pb}=0.01$ . suelo firme,  $e_o=\alpha/3$ .

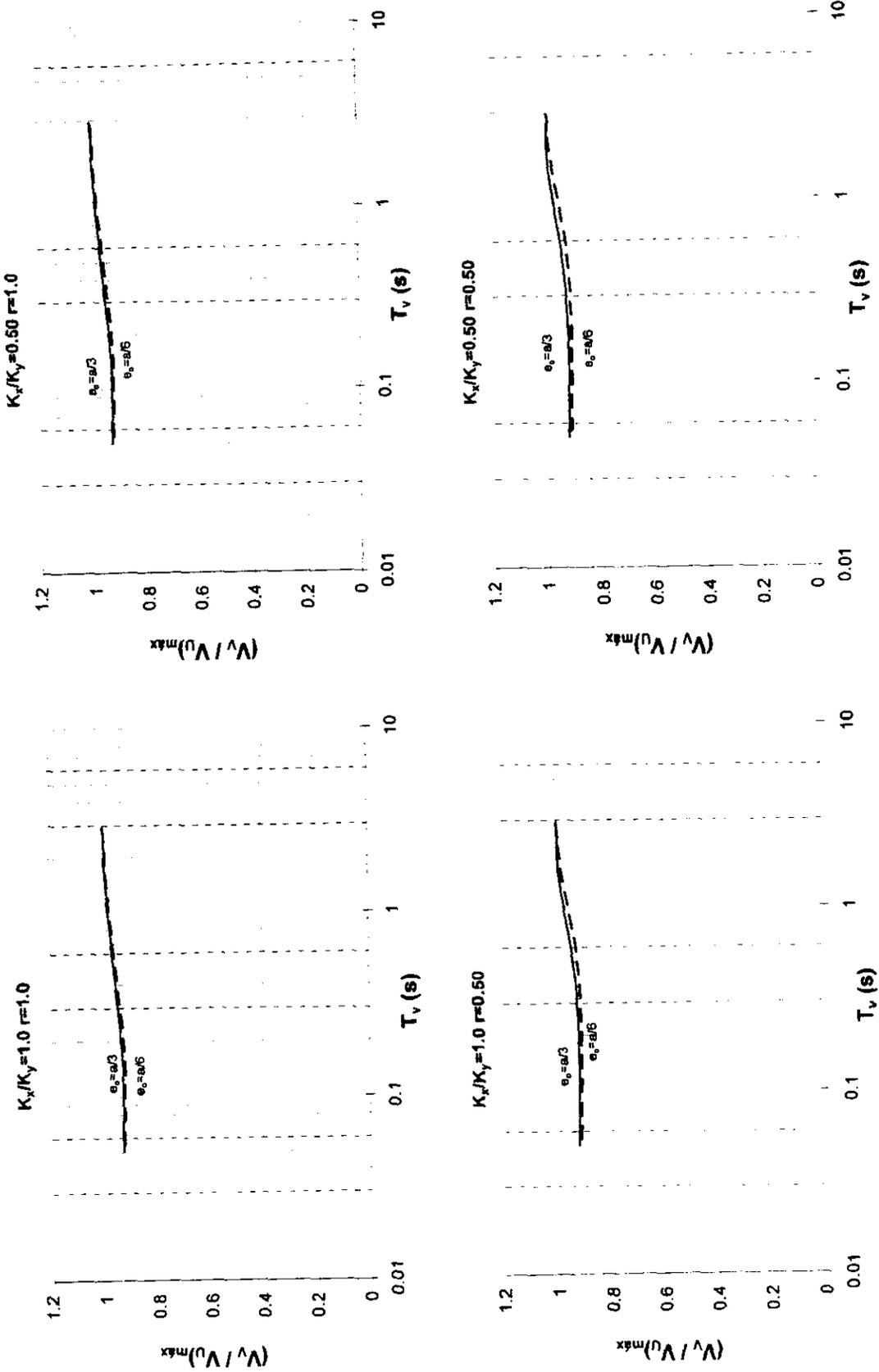


Figura 4.5 Relación de cortantes basales máximos versus Periodo traslacional;  $\tau_{cb}=0.05$ ,  $\tau_{pb}=0.03$ , suelo blando.

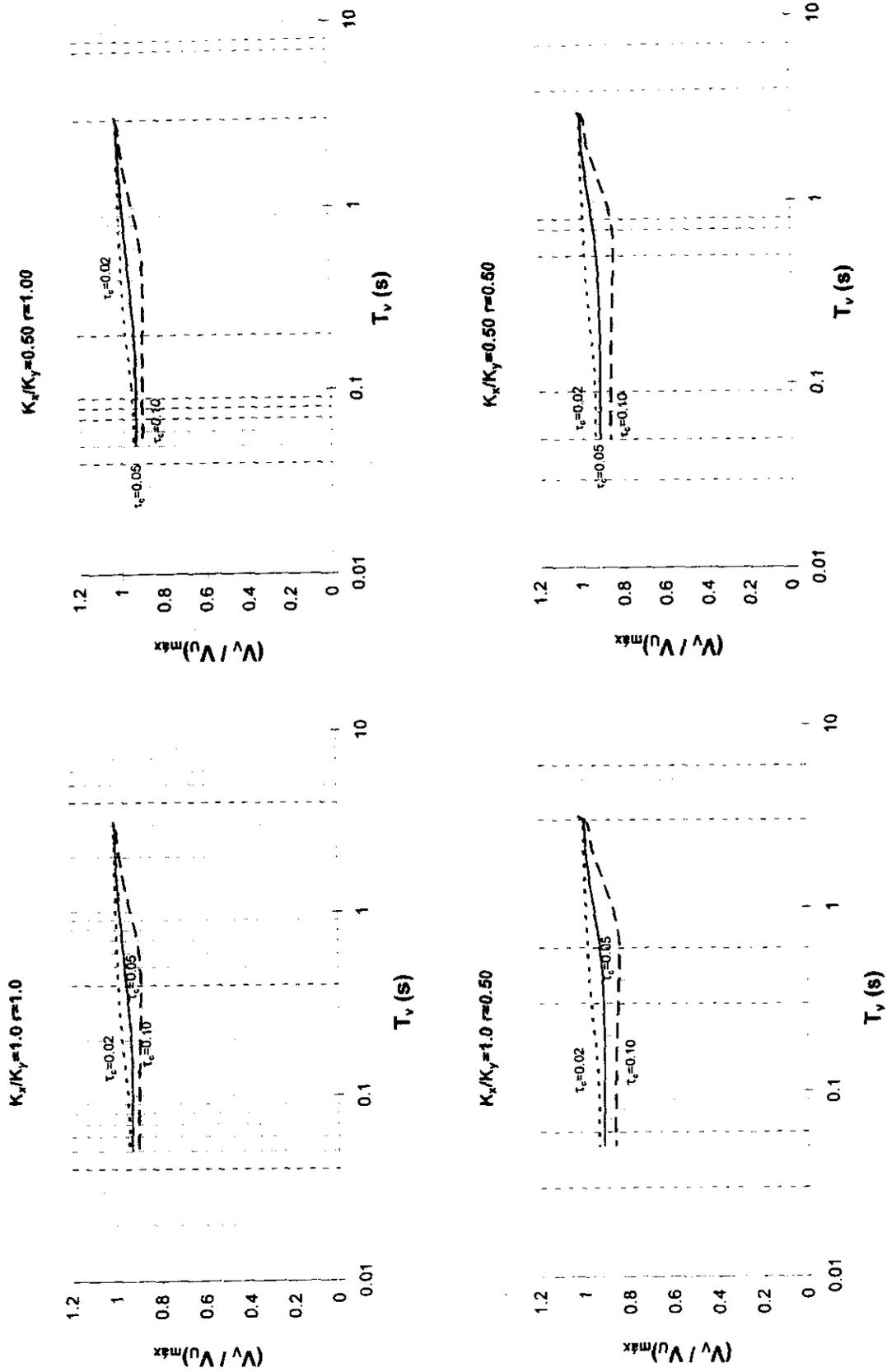


Figura 4.6 Relación de cortantes basales máximos versus Periodo traslacional;  $\tau_{pb} = 0.03$ , suelo blando,  $e_0 = a/6$ .

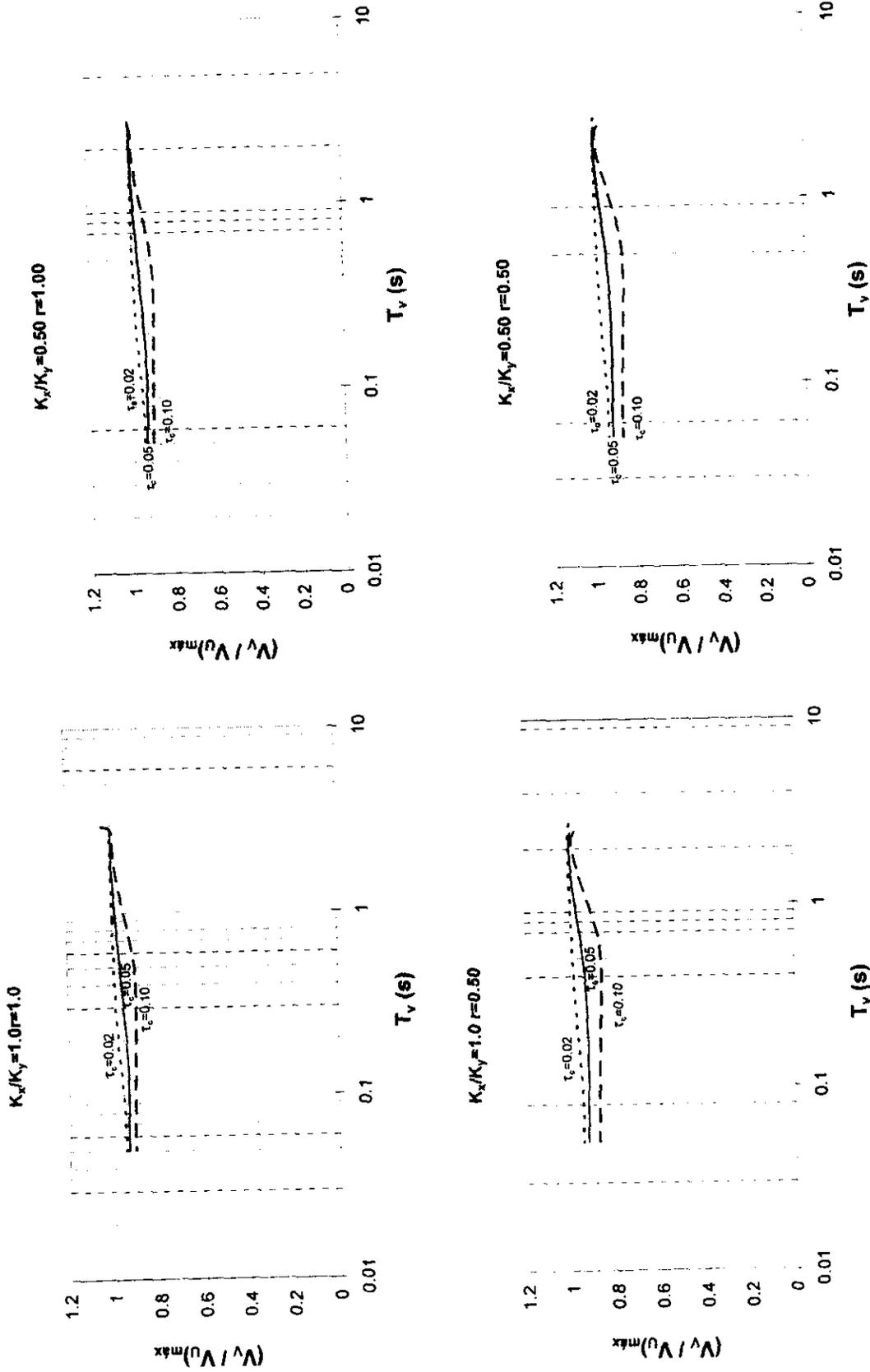


Figura 4.7 Relación de cortantes basales máximos versus Periodo traslacional;  $\tau_{pb} = 0.03$ , suelo blando,  $e_o = \alpha/3$ .

## 4.2 Momento torsor máximo

Continuando con la evaluación de los efectos de torsión a nivel de planta en el sistema de estudio, se analizó la relación entre el momento torsor máximo con movimiento del terreno incoherente y fuera de fase y el correspondiente a movimiento uniforme. El máximo momento torsor medio,  $M_{m\acute{a}x}$ , se puede expresar en términos de la desviación estándar del momento,  $\sigma_{M_i}$ , y el factor pico  $K_M$ :

$$M_{m\acute{a}x} = K_M \sigma_{M_i} \quad (4.10)$$

El factor pico se evalúa con una expresión similar a (4.9) que depende de la tasa de cruces del momento torsor. La desviación estándar y la tasa de cruces del momento torsor con movimiento incoherente del terreno se obtuvieron utilizando el resultado en (2.46), mientras que los valores correspondientes a movimiento uniforme se evaluaron con base en la expresión (2.60).

Las gráficas 4.8 a 4.13 muestran la relación  $M_v/M_u$  de los momentos torsores máximos esperados con movimiento del terreno incoherente y fuera de fase,  $M_v$ , y con movimiento perfectamente correlacionado,  $M_u$ , versus el periodo traslacional de la estructura,  $T_v$ . Las gráficas 4.8 a 4.10 corresponden al caso de suelos firmes. La figura 4.8 muestra la relación de  $M_v/M_u$  para los valores considerados de la relación de aspecto de la losa, de la relación de rigideces laterales y de la excentricidad nominal del sistema estructural. La relación de momentos torsores máximos varía entre 0.80 y 1.25. La variación espacial del movimiento sísmico del terreno produce momentos torsores máximos que pueden ser mayores o menores que los obtenidos con excitaciones uniformes en los apoyos dependiendo de la excentricidad nominal y el periodo del sistema estructural. En el caso de  $e_o=a/6$ , el momento torsor máximo debido a movimiento incoherente y fuera de fase generalmente es mayor que el correspondiente a movimiento uniforme. Para  $e_o=a/3$  y periodos cortos, la incoherencia y el cambio de fase de la excitación en los apoyos reducen el momento torsor

máximo. En ambos casos de  $e_o=a/6$  y  $e_o=a/3$ , la relación  $M_v/M_{U_i}$  tiende a la unidad a medida que  $T_v$  aumenta por encima de 1 s.

Para la mayoría de periodos considerados, las relaciones de aspecto y de rigideces laterales no tienen un efecto significativo en la relación de momentos torsores máximos. Solamente en el caso de sistemas con  $e_o=a/6$  y periodos alrededor de 1 s, se presentan reducciones de  $M_v/M_{U_i}$  del orden de 4% y 10% con la reducción de  $\lambda_k$  y el incremento de  $r$ , respectivamente.

La figura 4.9 muestra la variación de  $M_v/M_{U_i}$  versus el periodo traslacional  $T_v$  del sistema para  $e_o=a/6$  y valores de  $\tau_{cb}$  iguales a 0.02, 0.05 y 0.10. La relación  $M_v/M_{U_i}$  puede aumentar o disminuir con el incremento de la pérdida de coherencia dependiendo del periodo del sistema estructural. El máximo aumento en la relación de momentos torsores es del orden del 25%, mientras que la máxima reducción es del 20%. La figura 4.10 muestra los resultados correspondientes a  $e_o=a/3$ . La reducción del momento torsor máximo por efecto de la variación espacial del movimiento sísmico del terreno aumenta con el incremento de pérdida de coherencia, excepto para sistemas rígidos,  $T_v < 0.1$  s, o flexibles,  $T_v > 1$  s.

Las figuras 4.11 a 4.13 muestran los resultados para suelos blandos. La figura 4.11 muestra la variación de  $M_v/M_{U_i}$  versus el periodo de traslación para los valores de  $r$ ,  $\lambda_k$  y  $e_o$  considerados. Se observa que en el caso en que  $e_o=a/3$ , la incoherencia y cambio de fase de la excitación en los apoyos no tiene un efecto significativo en el momento torsor máximo. Sin embargo, para  $e_o=a/6$ , la variación espacial del movimiento sísmico incrementa el momento torsor máximo con respecto al correspondiente para movimiento uniforme. Este incremento es mayor a medida que disminuye el periodo traslacional del sistema; es decir, en la medida en la que la estructura se vuelve más rígida en traslación, el incremento de momento torsor debido a la incoherencia y cambio de fase de la excitación se hace mayor. Para periodos menores que 0.1 s, el incremento de momento torsor máximo alcanza valores entre 20% y 30%.

Las figuras 4.12 y 4.13 muestran la variación de  $M_v/M_U$  en función del periodo  $T_v$  para valores de  $\tau_{cb}=0.02, 0.05$  y  $0.10$ . El momento torsor máximo en el sistema con excentricidad nominal  $e_o=a/6$  es más sensible a los cambios de pérdida de coherencia. Se puede observar en la figura 4.12 que el incremento del momento torsor máximo es mayor a medida que aumenta la pérdida de coherencia para todo el rango de periodos considerados a excepción de periodos cercanos a 1 s. A diferencia del caso de suelo firme, el incremento del momento torsor máximo debido a la pérdida de coherencia puede ser del orden del 50% para sistemas rígidos con periodos menores a 0.1s cuando  $\tau_{cb}=0.10$  s.

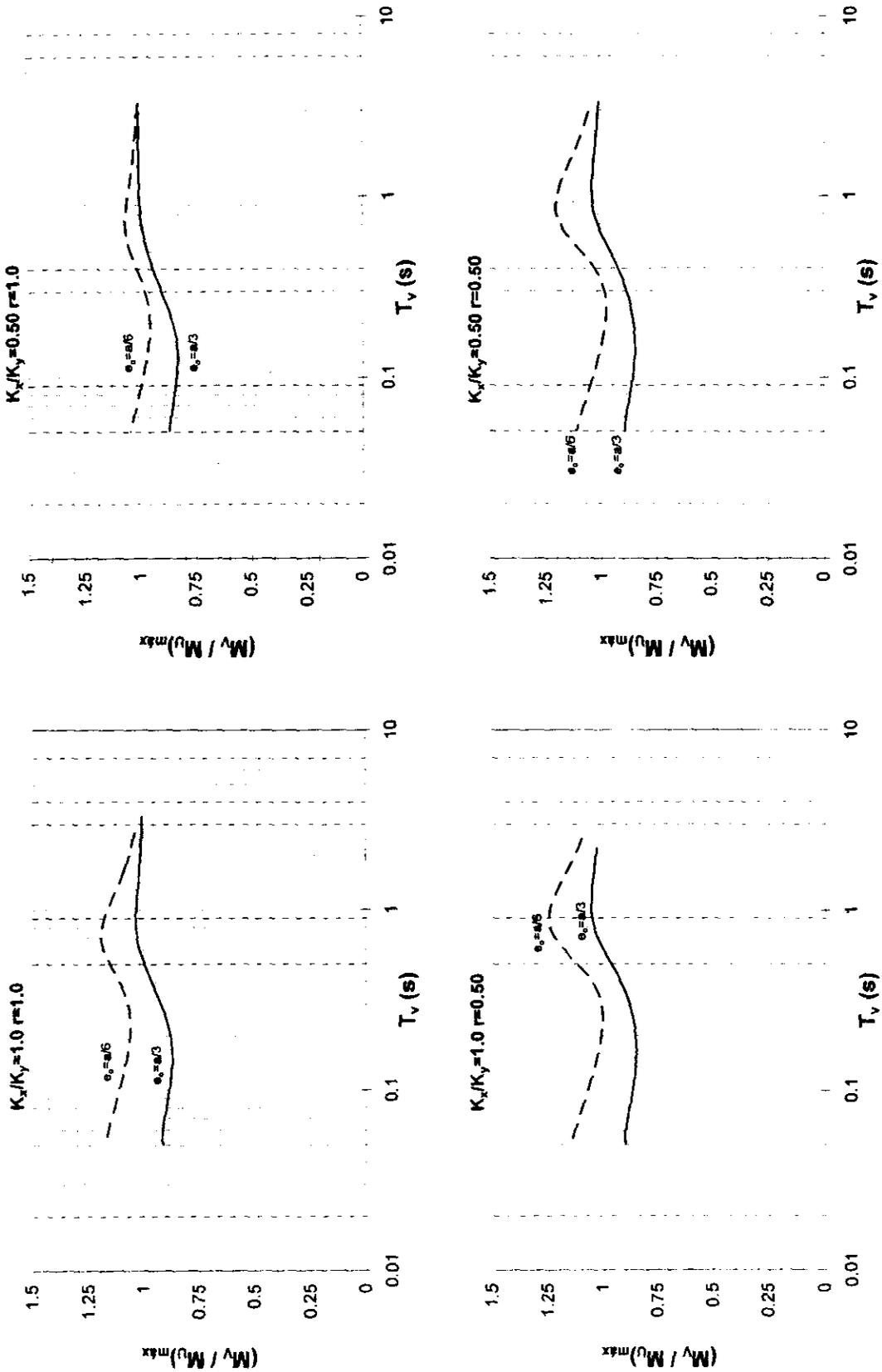


Figura 4.8 Relación de momentos torsores máximos versus Periodo traslacional;  $\tau_{cb} = 0.05$ ,  $\tau_{pb} = 0.01$ , suelo firme.

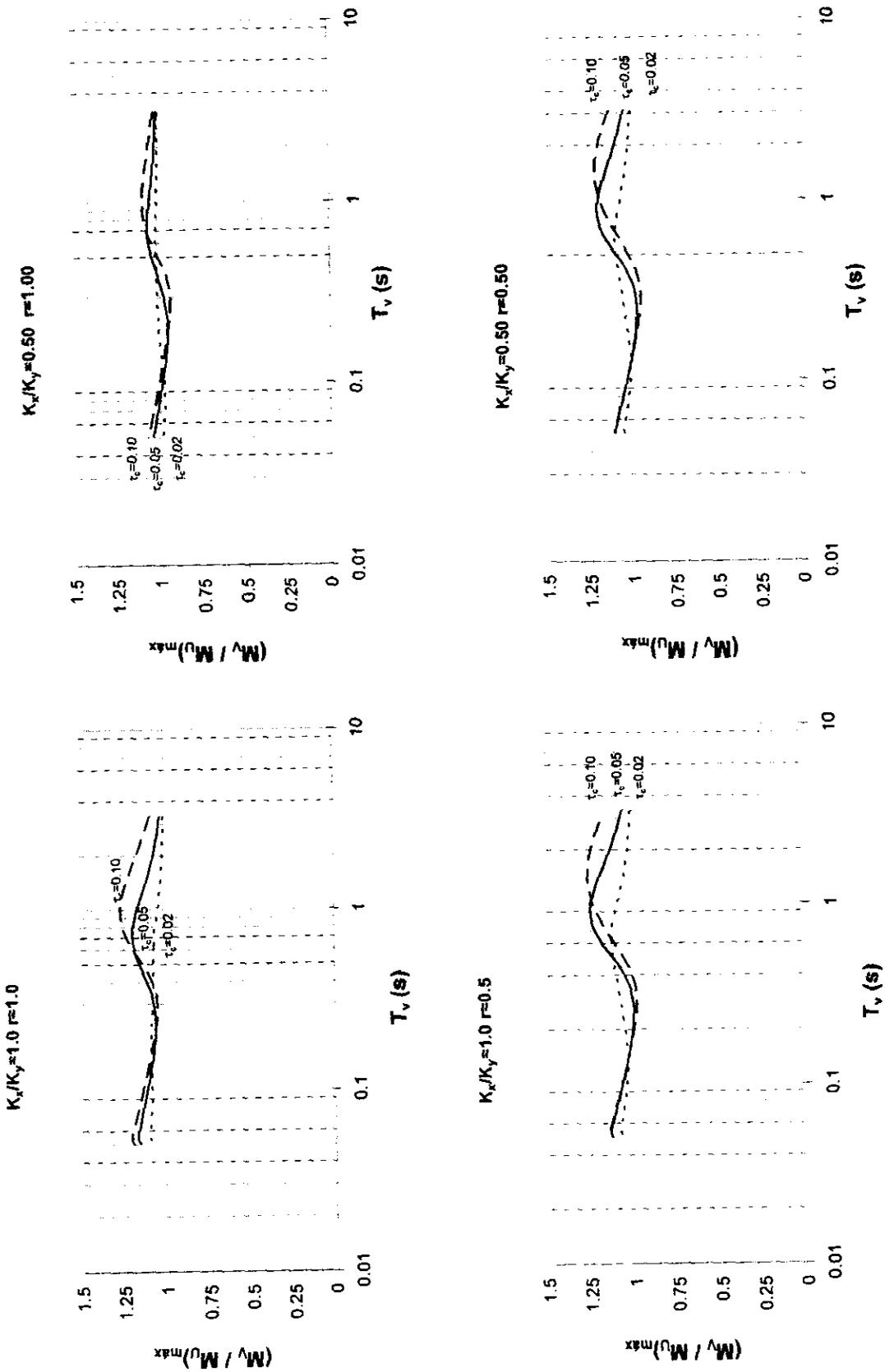


Figura 4.9 Relación de momentos torsores máximos versus Periodo traslacional; haciendo variar la pérdida de coherencia  $\tau_{cb}$ ,  $\tau_{pb}=0.01$ , suelo firme,  $e_o=a/6$ .

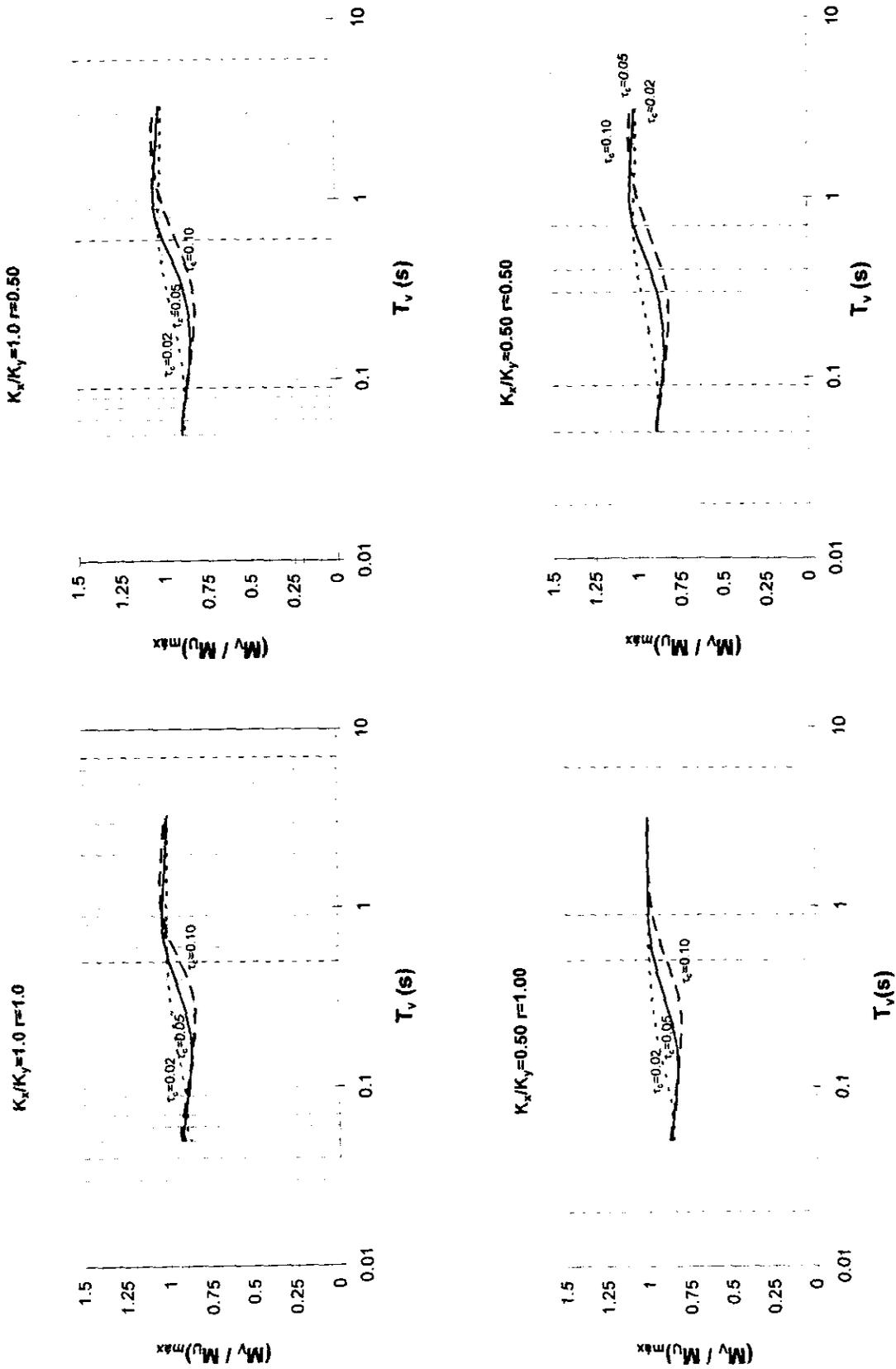


Figura 4.10 Relación de momentos torsores máximos versus Periodo traslacional; haciendo variar la pérdida de coherencia  $\tau_{cb}$ ,  $\tau_{pb} = 0.01$ , suelo firme,  $e_0 = a/3$ .

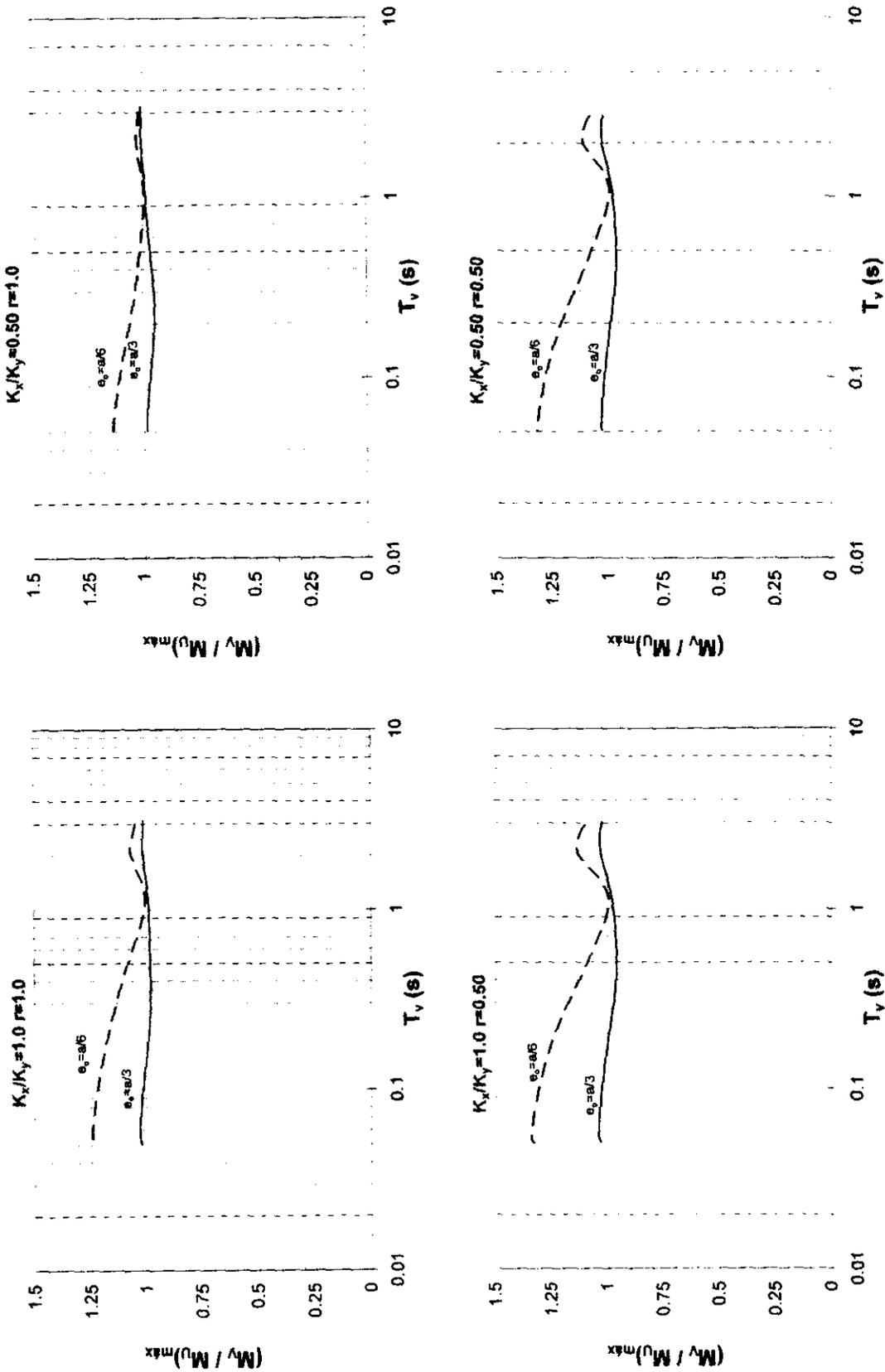


Figura 4.1.1 Relación de momentos torsores máximos versus Periodo traslacional;  $r_{cb} = 0.05$ ,  $r_{pb} = 0.03$ , suelo blando.

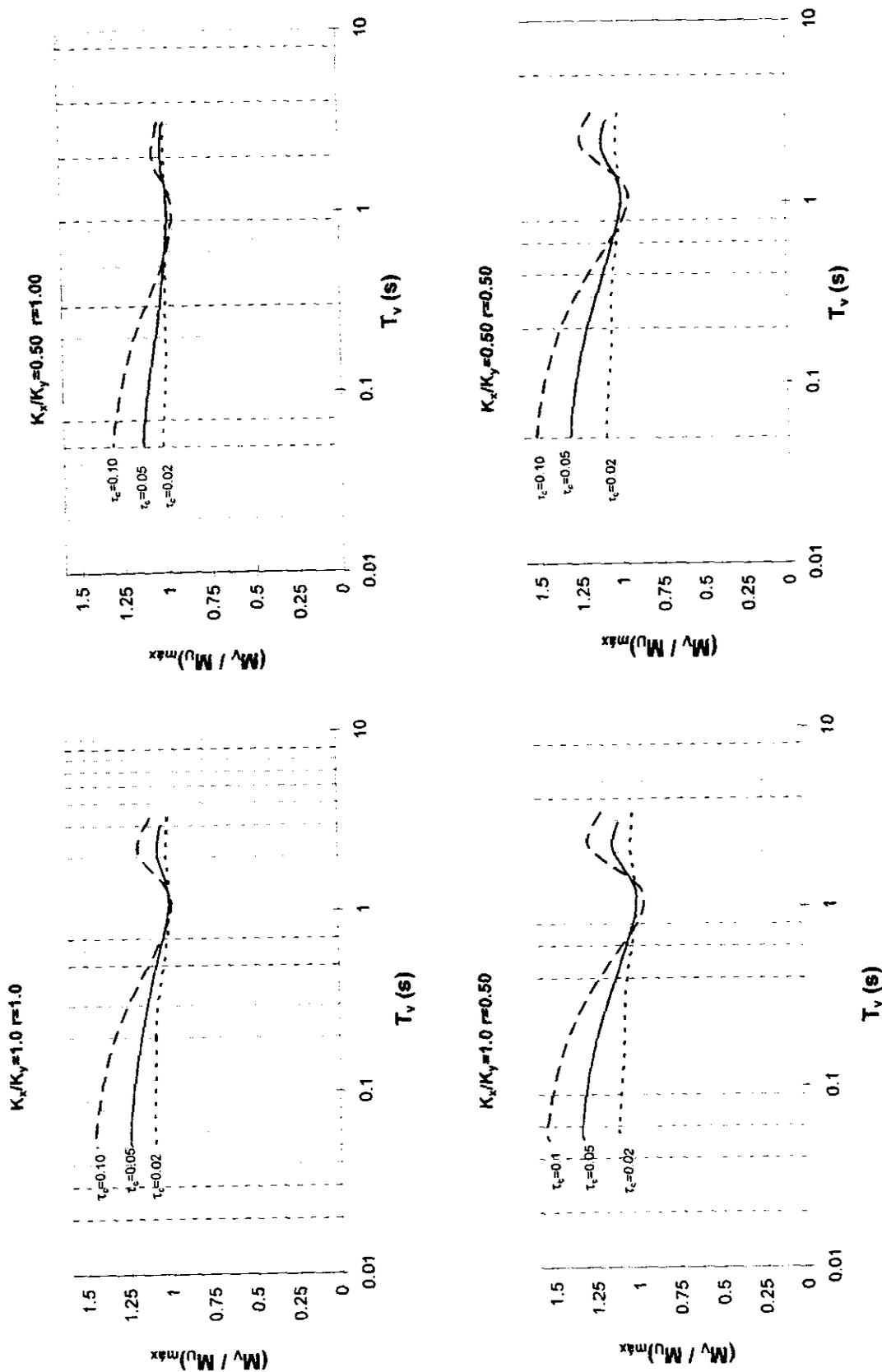


Figura 4.12 Relación de momentos torsores máximos versus Periodo traslacional; haciendo variar la pérdida de coherencia  $\tau_{cb}$ ,  $\tau_{pb} = 0.03$ , suelo blando,  $e_0 = a/6$ .

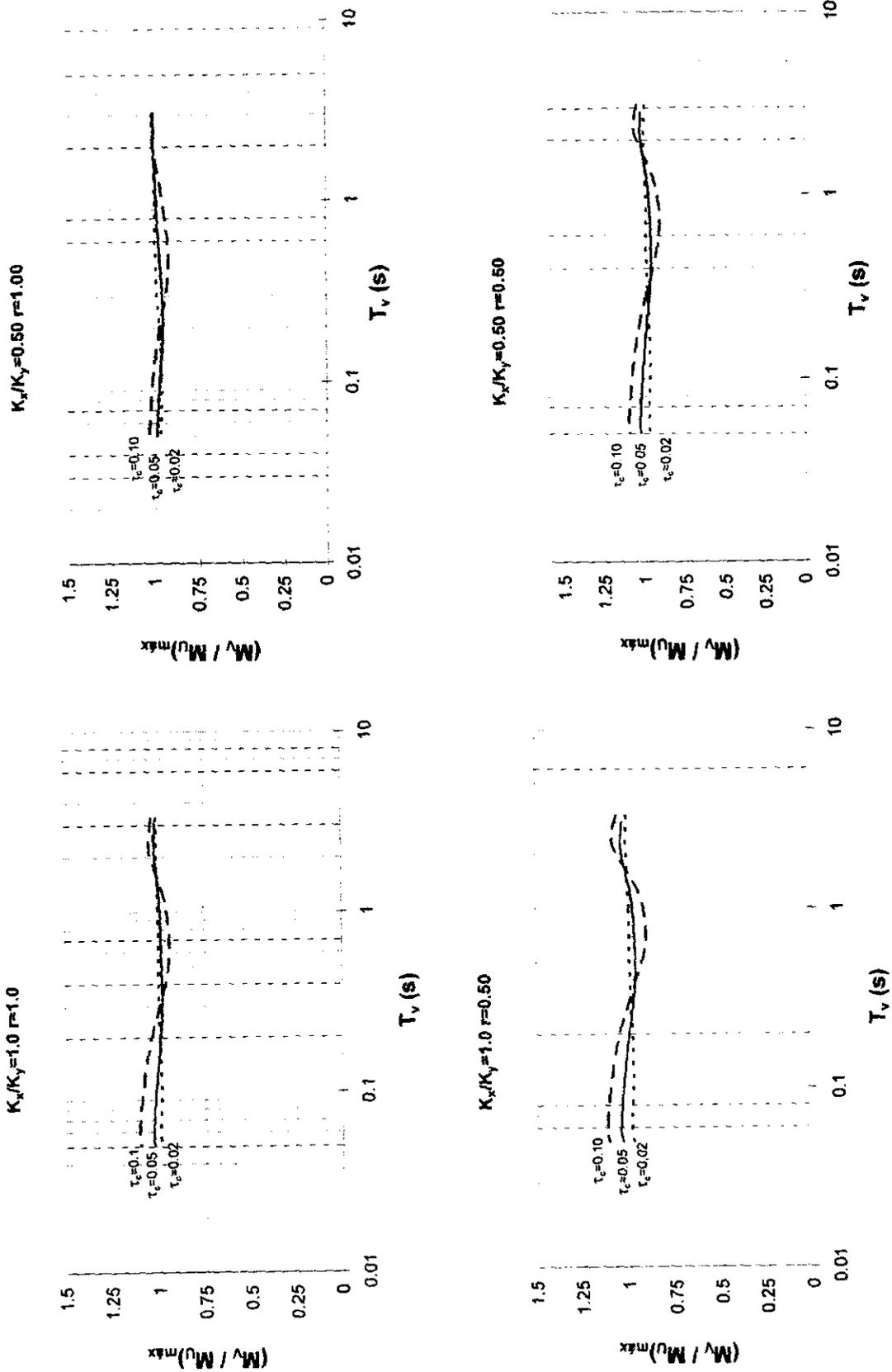


Figura 4.13 Relación de momentos torsores máximos versus Periodo traslacional; haciendo variar la pérdida de coherencia  $\tau_{cb}$ ,  $\tau_{pb} = 0.03$ , suelo blando,  $e_o = a/3$ .

### 4.3 Fuerza cortante en las columnas

En esta sección estamos interesados en evaluar los efectos de torsión accidental por variación espacial del movimiento sísmico del terreno a nivel de fuerzas cortantes en los elementos resistentes del sistema estructural. Para ello, compararemos los cortantes que se producen en las columnas debidos a excitaciones incoherentes y fuera de fase con los que se obtienen al suponer que el movimiento en los apoyos es uniforme. En primer lugar se presentan los resultados de análisis dinámicos y luego se discute el caso de análisis estáticos equivalentes.

#### 4.3.1 Análisis dinámicos

Consideremos una columna "i" cualquiera de las cuatro del sistema. La fuerza cortante en esta columna en la dirección  $Y$  se puede expresar como:

$$V_i = k_i \delta_i \quad (4.11)$$

donde  $k_i$  es la rigidez lateral en  $Y$  y  $\delta_i$  es el desplazamiento relativo entre los extremos de la columna,

$$\delta_i = v + \theta x_i - u_i \quad (4.12)$$

En (4.12),  $v$  es el desplazamiento de traslación del sistema en la dirección  $Y$ ,  $\theta$  es el giro de la losa,  $x_i$  es la coordenada en  $X$  de la columna con respecto al centro de masa, y  $u_i$  es el desplazamiento del terreno en el apoyo de la columna en la dirección  $Y$ . Expresando  $v$  y  $\theta$  en términos de sus componentes pseudo-estáticas,  $v_s$ ,  $\theta_s$ , y dinámicas,  $v_d$ ,  $\theta_d$ , y substituyendo en (4.12) obtenemos,

$$\delta_i = v_s + \theta_s x_i + v_d + \theta_d x_i - u_i \quad (4.13)$$

Dado que  $E[v_s] = E[u_i]$  y que  $E[\theta_s] = E[v_d] = E[\theta_d] = 0$ , el desplazamiento relativo  $\delta_i$  y, por lo tanto, la fuerza cortante en la columna  $V_i$  tienen media cero. La fuerza cortante máxima media está dada por:

$$\hat{V}_i = k_i K \sigma[\delta_i] \quad (4.14)$$

donde  $\sigma[\delta_i]$  es la desviación estándar del desplazamiento relativo y  $K$  es el factor pico correspondiente. Por definición, la desviación estándar de  $\delta_i$  se puede obtener de (4.13) como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma(\delta_i) = & \left[ \sigma^2(v_s) + x_i^2 \sigma^2(\theta_s) + \sigma^2(v_d) + x_i^2 \sigma^2(\theta_d) + \sigma^2(U_i) + 2\{Cov(v_s, v_d) + \right. \\ & x_i Cov(v_s, \theta_s) + x_i Cov(v_s, \theta_d) - Cov(v_s, U_i) + x_i Cov(v_d, \theta_s) + x_i Cov(v_d, \theta_d) \\ & \left. - Cov(v_d, U_i) + x_i^2 Cov(\theta_s, \theta_d) - x_i Cov(\theta_s, U_i) - x_i Cov(\theta_d, U_i)\} \right]^{1/2} \quad (4.15) \end{aligned}$$

Sea  $\hat{V}_{iu}$  la fuerza cortante máxima media en la columna cuando se supone que la excitación en los apoyos es uniforme,

$$\hat{V}_{iu} = k_i K_u \sigma[\delta_{iu}] \quad (4.16)$$

En (4.16),  $\delta_{iu}$  es el desplazamiento relativo con movimiento uniforme y  $K_u$  es el factor pico asociado. El incremento o decremento en fuerza cortante  $\Delta_i$  debido a la incoherencia y cambio de fase de la excitación es directamente proporcional al incremento o decremento en desplazamientos relativos máximos,

$$\Delta_i = k_i (K \sigma[\delta_i] - K_u \sigma[\delta_{iu}]) \quad (4.17)$$

Suponiendo que  $K/K_u \approx 1$ , el incremento en fuerza cortante se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= K k_i \sigma[\delta_{iu}] \left( \frac{\sigma[\delta_i]}{\sigma[\delta_{iu}]} - 1 \right) \\ &= \hat{V}_{iu} \delta^* \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde

$$\delta^* = \frac{\sigma[\delta_i]}{\sigma[\delta_{iu}]} - 1 \quad (4.19)$$

se puede interpretar como una medida del incremento o decremento en los desplazamientos relativos máximos de la columna debidos a la incoherencia y cambio de fase de la excitación. La fuerza cortante máxima  $\hat{V}_i$  puede entonces calcularse con base en el cortante máximo para movimiento uniforme  $\hat{V}_{iu}$  mediante un factor de corrección  $f_a = 1 + \delta^*$ ,

$$\hat{V}_i = f_a \hat{V}_{iu} \quad (4.20)$$

Se calculó el factor  $f_a$  para la columna superior del extremo derecho (extremo rígido) de la planta mostrada en la figura 4.1, con coordenadas  $(a/2, b/2)$ . Las figuras 4.14 a 4.19 muestran la variación del factor de corrección  $f_a$  para suelos firmes y blandos versus el periodo traslacional del sistema,  $T_v$ , en la dirección de propagación de la excitación. Las figuras 4.14 a 4.16 corresponden al caso de suelos firmes. La figura 4.14 muestra la variación del factor de corrección para  $\tau_{cb}=0.05$ ,  $\tau_{pb}=0.01$  y para los valores considerados de la relación de aspecto  $r$ , la relación de rigideces laterales  $\lambda_k$  y la excentricidad nominal del sistema  $e_o$ . Para periodos menores que 0.3 s, el factor de corrección aumenta a medida que disminuye el periodo y alcanza valores entre 1.1 y 1.4. Para periodos mayores que aproximadamente 0.3 s, el factor de corrección se puede considerar constante con un valor igual a uno. Aun cuando entre 0.2 y 0.6 s el factor de corrección puede reducirse a valores iguales a 0.95, para fines prácticos de análisis y diseño se podría considerar que el sistema estructural está sometido a excitaciones uniformes en los apoyos.

Los resultados muestran que los efectos de torsión accidental por incoherencia y cambio de fase de la excitación serán importantes en el caso de sistemas estructurales rígidos. Se han incluido en la figura los resultados correspondientes a sistemas simétricos. Nótese que en el caso de estos sistemas, los efectos de torsión en el cortante en la columna son mayores para sistemas con menor excentricidad accidental, siendo el caso de sistemas simétricos el más desfavorable en términos de incrementos de fuerza cortante en la columna; el factor  $f_a$  para sistemas simétricos alcanza valores

máximos entre 1.5 y 2 dependiendo de  $r$ ,  $e_o$  y  $\lambda_k$ . Estos resultados son congruentes con el hecho de que la columna que se analiza se encuentra ubicada en el extremo rígido de la planta.

La relación de aspecto de la losa influye en el factor de corrección reduciendo de 6% y 17% para  $e_o=a/3$  y  $a/6$ , respectivamente; en el caso de plantas rectangulares la reducción del factor de corrección es mayor que en plantas cuadradas. La relación de rigideces laterales también reduce al factor de corrección; los valores menores del factor de corrección corresponden a plantas rectangulares, mientras que las cuadradas tienen los mayores.

Las figuras 4.15 y 4.16 muestran la variación del factor de corrección versus el periodo de traslación del sistema para valores de  $\tau_{cb}$  iguales a 0.02, 0.05 y 0.10 para suelos firmes. A medida que se incrementa el tiempo de viaje de las ondas de corte, aumentan los valores del factor de corrección en periodos de traslación pequeños. Se observa que el efecto torsional se produce en columnas de estructuras rígidas con periodos menores que 0.3s aproximadamente. Los valores del factor de corrección aumentan con el incremento en los tiempos de viaje de las ondas de corte  $\tau_{cb}$ . Para  $\tau_{cb}=0.10$ , los valores máximos del factor de corrección varían entre 1.5 y 2.0 para  $T_v=0.1$  s, dependiendo de las relaciones de aspecto y de rigideces laterales. Estos resultados sugieren que en la medida en que las plantas de estructuras rígidas tiendan a ser alargadas, es de esperarse que se produzca un incremento significativo en la fuerza cortante en las columnas de ejes periféricos debido a la incoherencia y cambio de fase del movimiento sísmico del terreno. Los factores de corrección son sistemáticamente mayores en estructuras rígidas de sistemas con menor excentricidad accidental; así, los factores de corrección para estructuras simétricas constituyen un límite superior para los valores correspondientes a sistemas asimétricos.

La figura 4.17 muestra la variación del factor de corrección versus el periodo de traslación del sistema para suelos blandos. El factor de corrección es aproximadamente constante e igual a uno. El valor máximo de este factor es igual a 1.1 para un periodo de 0.1s, cuando  $\lambda_k=1.0$ ,  $r=1.0$  y  $e_o=a/6$ . La influencia de la relación

de rigideces laterales y la relación de aspecto no es significativa en los casos mostrados en la figura 4.17. De la misma manera que para suelos firmes, el factor  $f_a$  es significativamente mayor en el caso de sistemas simétricos; para estructuras rígidas, por ejemplo.  $T_v=0.1s$ , el factor  $f_a$  es mayor que 2.

Las figuras 4.18 y 4.19 muestran la variación del factor de corrección versus el periodo de traslación del sistema para valores de  $\tau_{cb}$  iguales a 0.02, 0.05 y 0.10 para suelos blandos. El factor de corrección muestra las mismas tendencias con el periodo y la excentricidad nominal que en el caso de suelo firme. Sin embargo, en el caso de suelo blando,  $f_a$  toma valores menores que en el caso de suelo firme. Los valores máximos de  $f_a$  varían entre 1.1 y 1.2 para  $T_v=0.1s$  y  $\tau_{cb}=0.10$ . Nótese que reducciones del orden de 10% del cortante en la columna ante excitaciones uniformes, se producen en sistemas estructurales con periodos alrededor de 1.2 s.

La tendencia de los factores de corrección a incrementarse con la disminución del periodo se puede explicar en función de las contribuciones dinámicas y pseudo-estáticas de la respuesta a la fuerza cortante. En el caso de movimiento uniforme en los apoyos,  $v_s = u_i = u_y$ , donde  $u_y$  es el desplazamiento en los apoyos de las columnas en la dirección  $Y$ , y  $\theta_s = 0$ . El desplazamiento relativo entre los extremos de la columna está dada entonces por:

$$\delta_{iu} = v_{du} + \theta_{du} x_i \quad (4.21)$$

donde  $v_{du}$  y  $\theta_{du}$  denotan el desplazamiento y giro dinámicos del sistema considerando excitación uniforme. Las expresiones en (4.13) y (4.21) muestran que mientras que ambas componentes de respuesta, pseudo-estática y dinámica, contribuyen a la fuerza cortante máxima en la columna  $\hat{V}_i$  cuando se considera la incoherencia y cambio de fase de la excitación en los apoyos, en el caso de movimiento uniforme la fuerza cortante  $\hat{V}_{iu}$  depende solamente de la componente de respuesta dinámica. La contribución de la componente dinámica a  $\hat{V}_i$  y  $\hat{V}_{iu}$ , disminuye junto con el periodo hasta hacerse nula cuando la estructura se vuelve infinitamente rígida. Sin embargo, la

contribución de la componente pseudo-estática a  $\hat{V}_i$  es constante y no depende del periodo del sistema. Los resultados muestran que cuando  $T_v \rightarrow 0$ , la componente dinámica de  $\hat{V}_{iu}$  disminuye con mayor rapidez que la de  $\hat{V}_i$  y el factor de corrección tiende a aumentar.

Los resultados de esta sección sugieren que en términos de la fuerza cortante en las columnas del sistema estructural, el efecto de la torsión por incoherencia y cambio de fase de la excitación sísmica en los apoyos, será importante en estructuras rígidas. El uso de los factores de corrección permite realizar un análisis dinámico del sistema estructural sometido a excitaciones uniformes y utilizando sus propiedades nominales. Estas fuerzas cortantes se corrigen luego mediante los factores de corrección para obtener las fuerzas cortantes en las columnas considerando la torsión accidental debida a la variación espacial del movimiento sísmico del terreno. Los resultados muestran que en el caso de estructuras rígidas, los análisis dinámicos bajo la hipótesis de excitación uniforme pueden subestimar significativamente las fuerzas cortantes en las columnas, especialmente en el caso de plantas alargadas.

#### 4.3.2 Análisis estáticos equivalentes

Los códigos de diseño sísmico establecen que los efectos de torsión en cada nivel de un edificio se pueden evaluar aplicando las fuerzas estáticas equivalentes a una distancia  $e_d$  del centro de rigidez conocida como excentricidad de diseño. Las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo (NTC) especifican que la excentricidad de diseño  $e_d$  se debe calcular como:

$$e_d = 1.5 e_o + 0.1 b \quad e_d = e_o - 0.1 b$$

donde  $e_o$  es la distancia entre el centro de masa y el centro de rigidez y  $b$  es la dimensión en planta del edificio perpendicular a la dirección de la excitación sísmica. Para cada eje resistente o elemento estructural se debe utilizar aquella excentricidad de diseño que produzca las mayores fuerzas internas. El término  $\pm 0.1 b$ , conocido

como excentricidad accidental, se considera para tomar en cuenta los efectos de torsión debidos a: (1) las incertidumbres en la ubicación del centro de masa; (2) las incertidumbres en las distribuciones de rigidez y resistencia de los elementos estructurales; (3) la componente rotacional de la excitación sísmica en la base; y (4) otras posibles fuentes de torsión no incluidas explícitamente en el análisis como la pérdida de coherencia y cambio de fase de la excitación en los diferentes apoyos del edificio.

En esta sección analizaremos el método estático utilizando las excentricidades de diseño propuestas en las NTC para tomar en cuenta los efectos de torsión por variación espacial del movimiento sísmico del terreno.

Consideremos entonces el caso de un análisis estático en el que el cortante basal producto de excitaciones uniformes en los apoyos,  $V_U$ , es aplicado al sistema estructural en la dirección  $Y$ , y consideremos la distancia o excentricidad de diseño  $e_d$  entre el centro de masa y el centro de rigidez estipulada en las NTC. La fuerza cortante en la columna " $i$ ",  $V_{ie}$ , con coordenada de ubicación  $x_i$  con respecto al centro de masa, es:

$$V_{ie} = k_i d_i \quad (4.22)$$

donde el desplazamiento relativo  $d_i$  está dado por:

$$d_i = \frac{V_U}{K_y} + \frac{V_U e}{K_\theta} x_i \quad (4.23)$$

En (4.23)  $V_U/K_y$  es el desplazamiento del centro de masa de la losa en la dirección  $Y$ , y  $V_U e/K_\theta$  es el giro de la losa. La fuerza cortante máxima media se obtiene de (4.22) como sigue,

$$\hat{V}_{ie} = K_{ie} k_i \sigma[d_i] \quad (4.24)$$

donde  $\sigma[d_i]$  es la desviación estándar de  $d_i$  y  $K_{ie}$  es el factor pico correspondiente.

Utilizando (4.24),  $\sigma[d_i]$  se obtiene de:

$$\sigma(d_i) = \left[ \frac{1}{K_y} + \frac{e_d x_i}{K_\theta} \right] \sigma(V_U) \quad (4.25)$$

Con base en (4.14) y (4.24), el factor de corrección  $f_a$  se calcula mediante la siguiente expresión,

$$f_a = \frac{K\sigma[d_i]}{K_{ie}\sigma[d_i]} \quad (4.26)$$

Las fuerzas cortantes máximas esperadas se obtuvieron utilizando  $e_d = 1.5 e_o + 0.1 a$  puesto que para el sistema estructural en estudio dicha excentricidad es mayor que  $e_o - 0.1 a$  (ver Tabla 5.1).

Las figuras 4.20 a 4.25 muestran la variación del factor de corrección con el periodo traslacional del sistema para suelos blandos y firmes. La variación de  $f_a$  con  $T_v$  para  $\tau_{cb}=0.05$  y los valores considerados de  $\lambda_k$  y  $r$  se muestran en la figura 4.20. Se observa que el factor de corrección aumenta al disminuir el periodo traslacional y rápidamente tiende a infinito cuando  $T_v \rightarrow 0$ . Esta tendencia del factor de corrección a aumentar a medida que el periodo disminuye se debe a que cuando  $T_v \rightarrow 0$ , los valores de  $\hat{V}_{ie}$  disminuyen mucho más rápido que los valores de  $\hat{V}_i$ . Nótese que, como en el caso de los análisis dinámicos, mientras que  $\hat{V}_{ie}$  depende a través del cortante basal solamente de la componente dinámica de la respuesta (ver ecuaciones 2.30 y 2.59),  $\hat{V}_i$  depende de la respuesta pseudo-estática y la dinámica (ver ecuaciones 4.13 y 4.15). La contribución de la componente dinámica de la respuesta disminuye junto con el periodo y eventualmente se hace nula cuando  $T_v$  se acerca a cero y la estructura se vuelve infinitamente rígida. Por otro lado, la contribución de la componente pseudo-

estática es una constante independiente del periodo de la estructura. En consecuencia, el denominador en la expresión (4.26) para el factor de corrección tiende a cero cuando disminuye el periodo, mientras que el numerador tiende al valor de la contribución seudo-estática de la fuerza cortante en la columna ante excitaciones incoherentes y fuera de fase. Por otro lado, cuando el periodo aumenta, la contribución de la componente dinámica de la respuesta aumenta tanto para  $\hat{V}_i$  como para  $\hat{V}_{ie}$ . Los resultados muestran que esta componente aumenta con mayor rapidez en el caso de la fuerza cortante calculada estáticamente,  $\hat{V}_{ie}$ , y el factor de corrección disminuye cuando  $T_v \rightarrow \infty$ .

Las figuras 4.21 y 4.22 muestran la variación de  $f_a$  versus  $T_v$  para valores de  $\tau_{cb}=0.02, 0.05, 0.10$  y para las excentricidades nominales  $e_o=a/6$  y  $e_o=a/3$ , respectivamente. Los resultados muestran que el factor de corrección aumenta proporcionalmente con la pérdida de coherencia de la excitación en los apoyos, sea que ésta se produzca por ondas que viajan con menores velocidades de propagación o por que se incrementan las dimensiones en planta de la estructura. Como en el caso de los análisis dinámicos, estructuras con menor asimetría tienen factores de corrección mayores; así, los factores de corrección para estructuras nominalmente simétricas constituirían un límite superior para los posibles valores de  $f_a$ .

Los resultados para el caso de suelos blandos se muestran en las figuras 4.23 a 4.25. La variación de  $f_a$  con el periodo sigue la misma tendencia que en el caso de suelos firmes. Sin embargo, para suelos "blandos" los valores de  $f_a$  son considerablemente mayores que para suelos firmes en periodos traslacionales cortos. Por ejemplo, para un sistema estructural con periodo  $T_v=0.1s$ ,  $r=0.5$ ,  $\lambda_k=1.0$ ,  $\tau_{cb}=0.02$  el factor de corrección  $f_a=14$  en suelo firme, mientras que si la misma estructura estuviera desplantada en suelo blando entonces  $f_a=157$ . En el rango de frecuencias entre 2 y 5 Hz, se encuentran las frecuencias dominantes de la función de densidad espectral de la aceleración en suelo firme, mientras que en dicho intervalo, las ordenadas espectrales para la aceleración en terreno blando son prácticamente nulas. Si la estructura tiene periodos menores que 0.5s, la fuerza cortante máxima media  $\hat{V}_{ie}$  es menor si la estructura se

encuentra en suelos blandos que la correspondiente si ésta estuviera desplantada en suelos firmes. Por otro lado, en este rango de periodos, la contribución de la componente pseudo-estática a la fuerza cortante máxima media  $\hat{V}_i$  es dominante. La Tabla 5.2 muestra la contribución pseudo-estática a la varianza de la fuerza cortante  $V_i$  para un sistema con  $e_o = a/6$ ,  $\lambda_k = 1.0$ ,  $r = 1.0$ . La componente pseudo-estática de la varianza de  $V_i$  es mayor en suelos blandos que en suelos firmes. Resultados similares han sido obtenidos en el análisis de vigas continuas sometidas a excitaciones incoherentes y fuera de fase en los apoyos. En consecuencia, el factor de corrección toma valores significativamente mayores en suelos blandos que en suelos firmes a medida que el periodo traslacional disminuye.

Tabla 5.1 Valores de las excentricidades de diseño propuesta por las NTC-96.

$e_o$	$e_d = 1.5 e_o + 0.1a$	$e_d = e_o - 0.1 a$
$a/6$	$0.35a$	$0.067a$
$a/3$	$0.60a$	$0.233a$

Tabla 5.2 Componente pseudo-estática de la fuerza cortante en la columna para ambos tipos de suelos;  $e_o = a/6$ ,  $\lambda_k = 1.0$ ,  $r = 1.0$ .

Suelos blandos

$e_o$	$\tau_c$	$\sigma^2(v_j)$	$\sigma^2(\theta_j)$	$Cov(v_j, \theta_j)$	$\sigma^2(U_j)$	$Cov(v_j, U_j)$	$Cov(\theta_j, U_j)$	$\sigma^2(V_j)$
$a/6$	0.02	1.6342	4.8311E-2	-0.2801	1.5424	1.5875	-0.2720	5.5777E-3
	0.05	1.6330	4.9263E-2	-0.2800	1.5424	1.5863	-0.2712	6.3157E-3
	0.10	1.6290	5.2485E-2	-0.2796	1.5424	1.5824	-0.2687	8.8212E-3

Suelos firmes

$a/6$	0.02	6.4436E-2	1.9496E-3	-1.1050E-2	6.0869E-2	6.2594E-2	-1.0700E-2	2.54400E-4
	0.05	6.4125E-2	2.2001E-3	-1.1015E-2	6.0869E-2	6.2289E-2	-1.0502E-2	4.53025E-4
	0.10	6.3146E-2	2.9679E-3	-1.0904E-2	6.0869E-2	6.1328E-2	-9.8914E-3	1.08837E-3

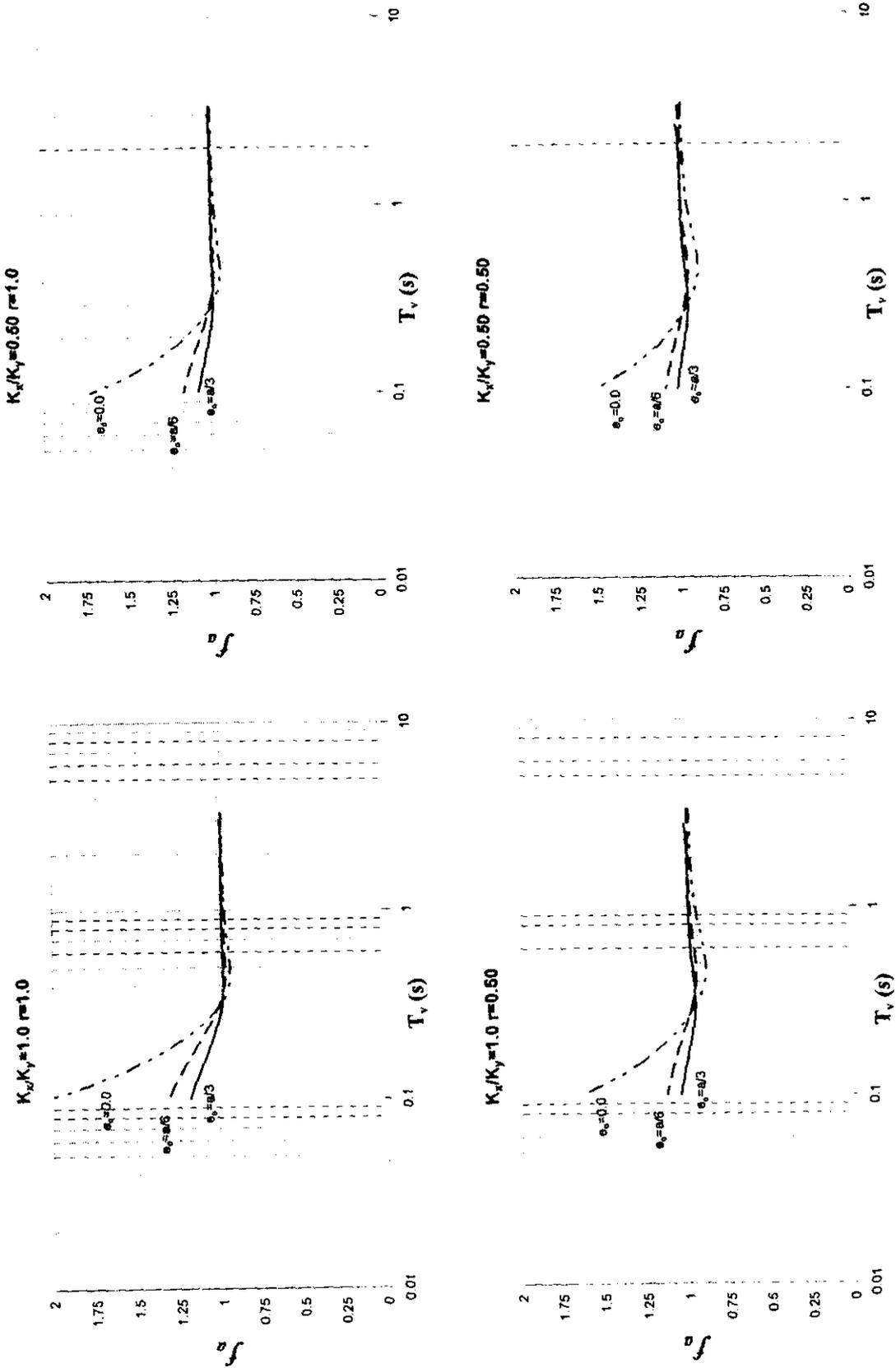


Figura 4.14 Factor de corrección versus el periodo traslacional;  $\tau_{cb} = 0.05$ ,  $\tau_{pb} = 0.01$ , suelo firme.

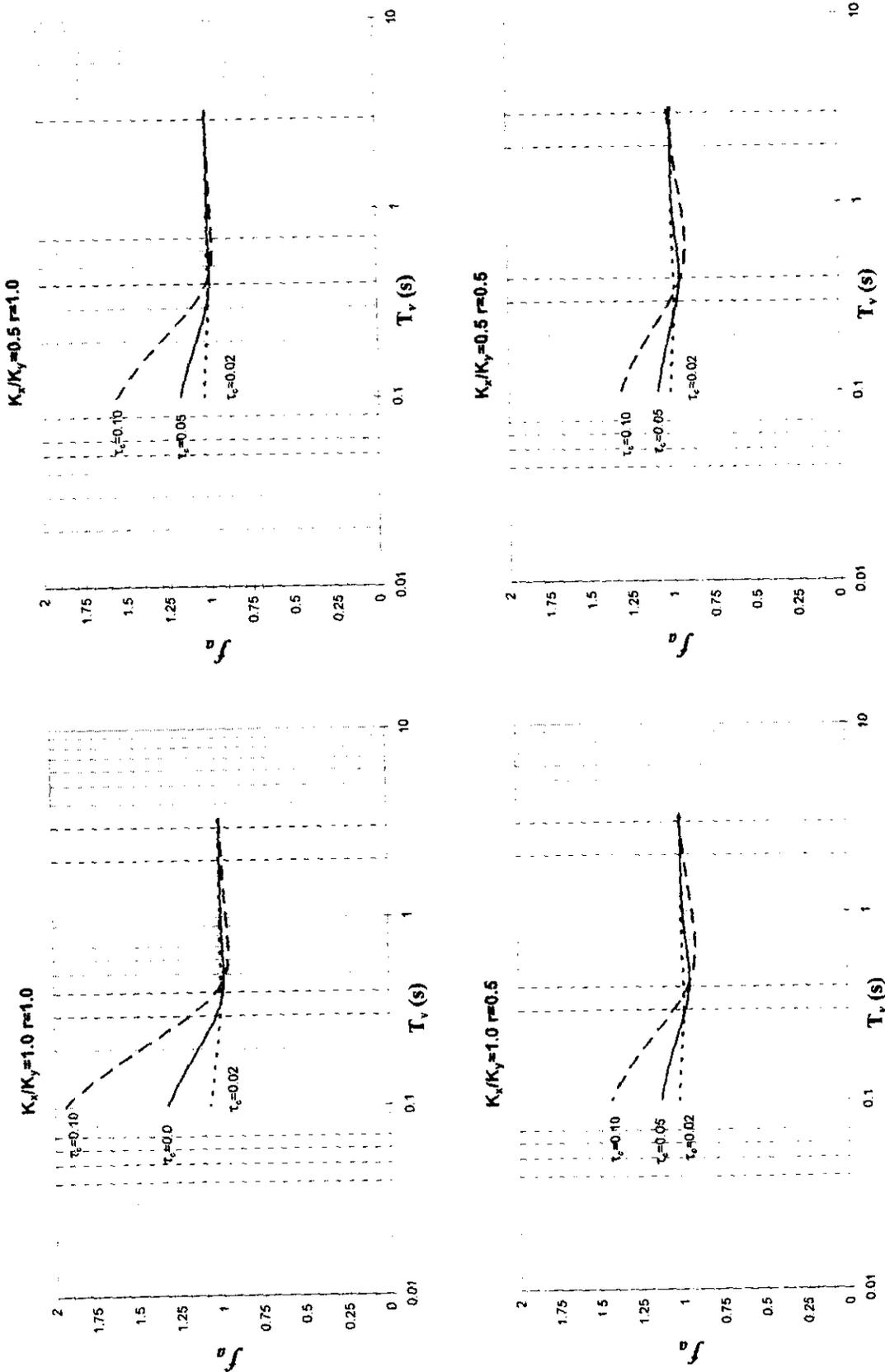


Figura 4.15 Factor de corrección versus el periodo traslacional;  $\tau_{pb} = 0.01$ , suelo firme,  $e_0 = a/6$ .

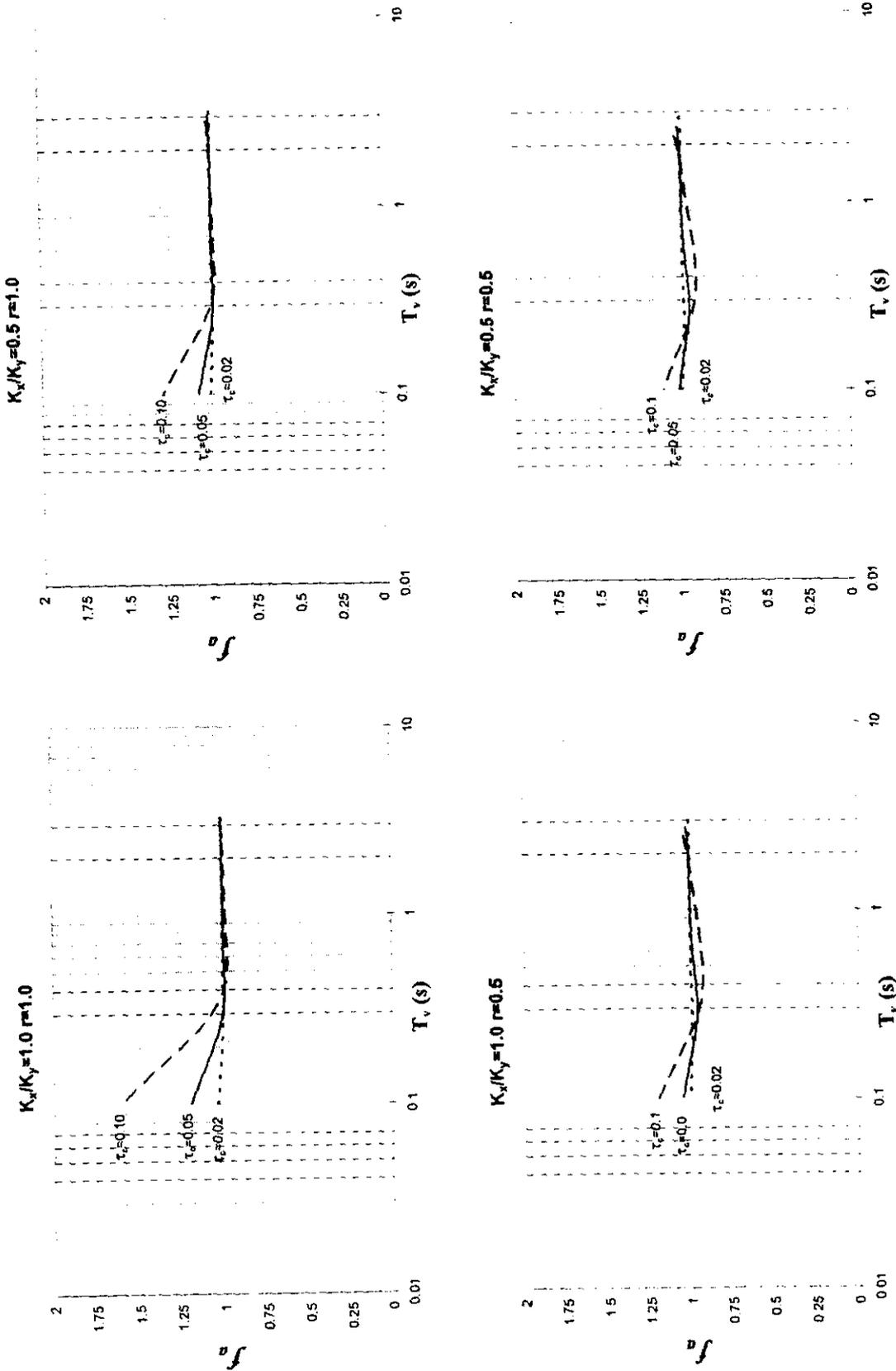


Figura 4.16 Factor de corrección versus el periodo traslacional;  $\tau_{pb} = 0.01$ , suelo firme,  $e_o = a/3$ .

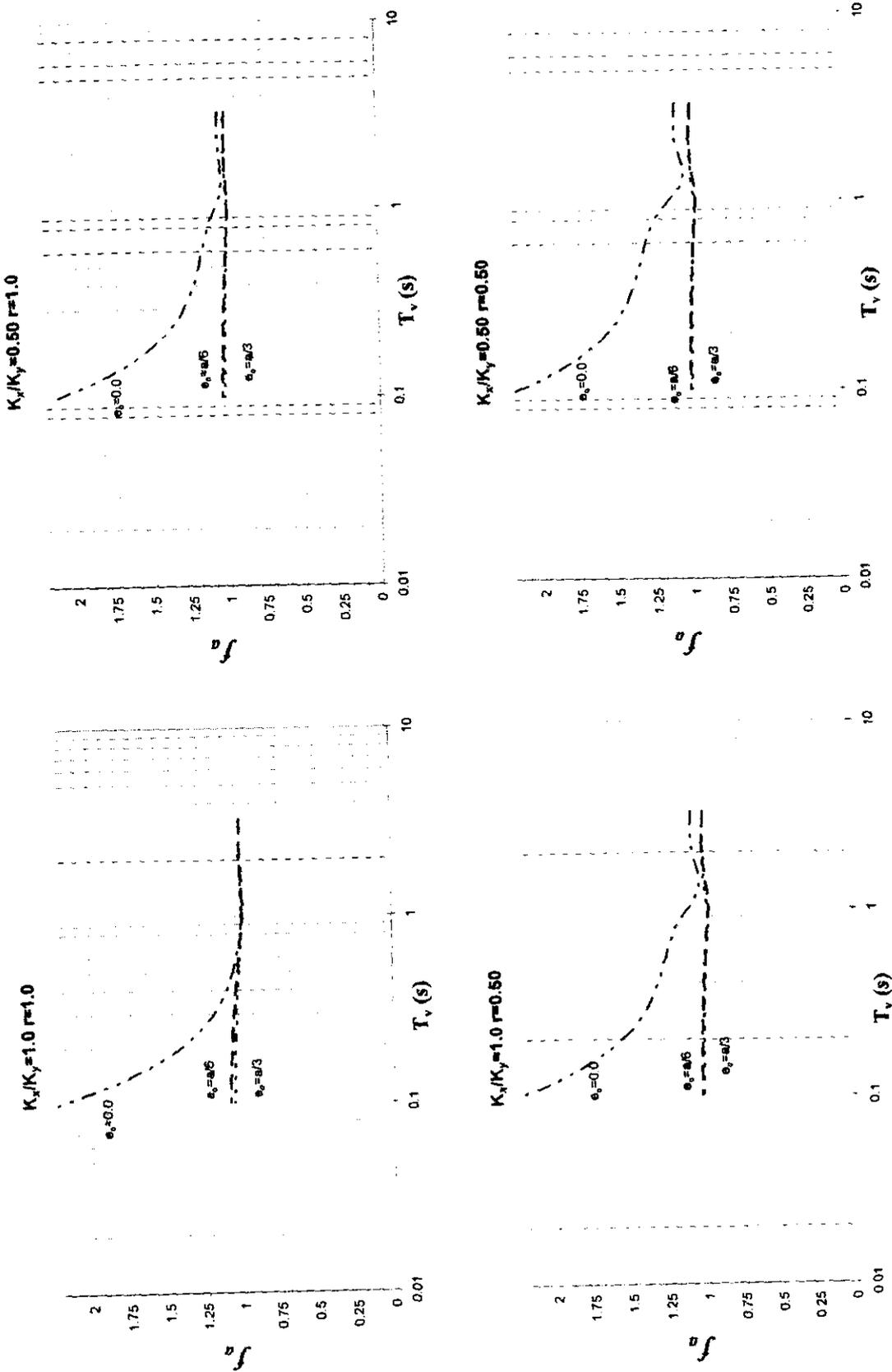


Figura 4.17 Factor de corrección versus el periodo traslacional;  $\tau_{cb} = 0.05$ ,  $\tau_{pb} = 0.03$ , suelo blando.

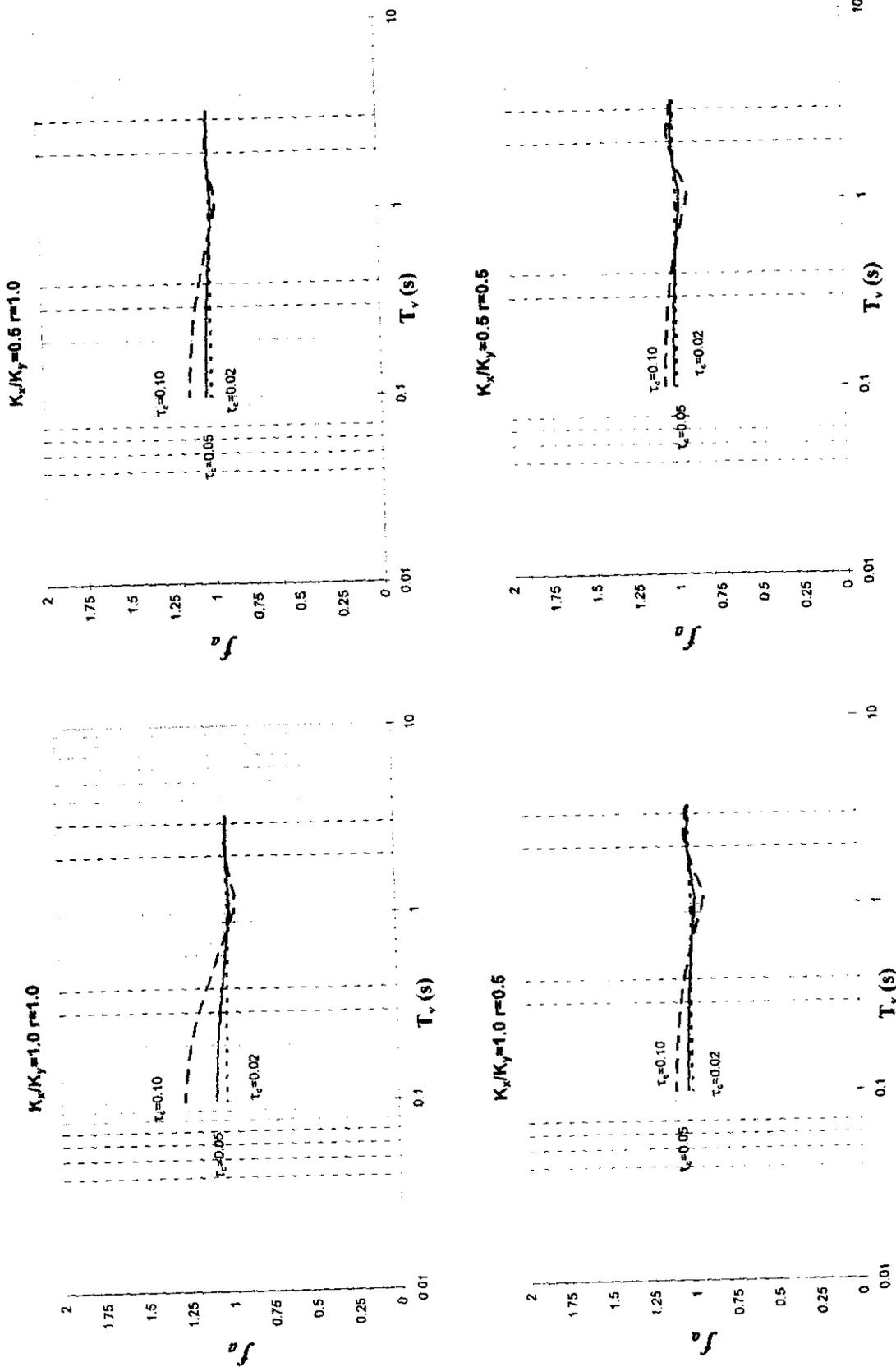


Figura 4.18 Factor de corrección versus el periodo traslacional;  $\tau_{pb}=0.03$ , suelo blando,  $e_0=\alpha/\delta$ .

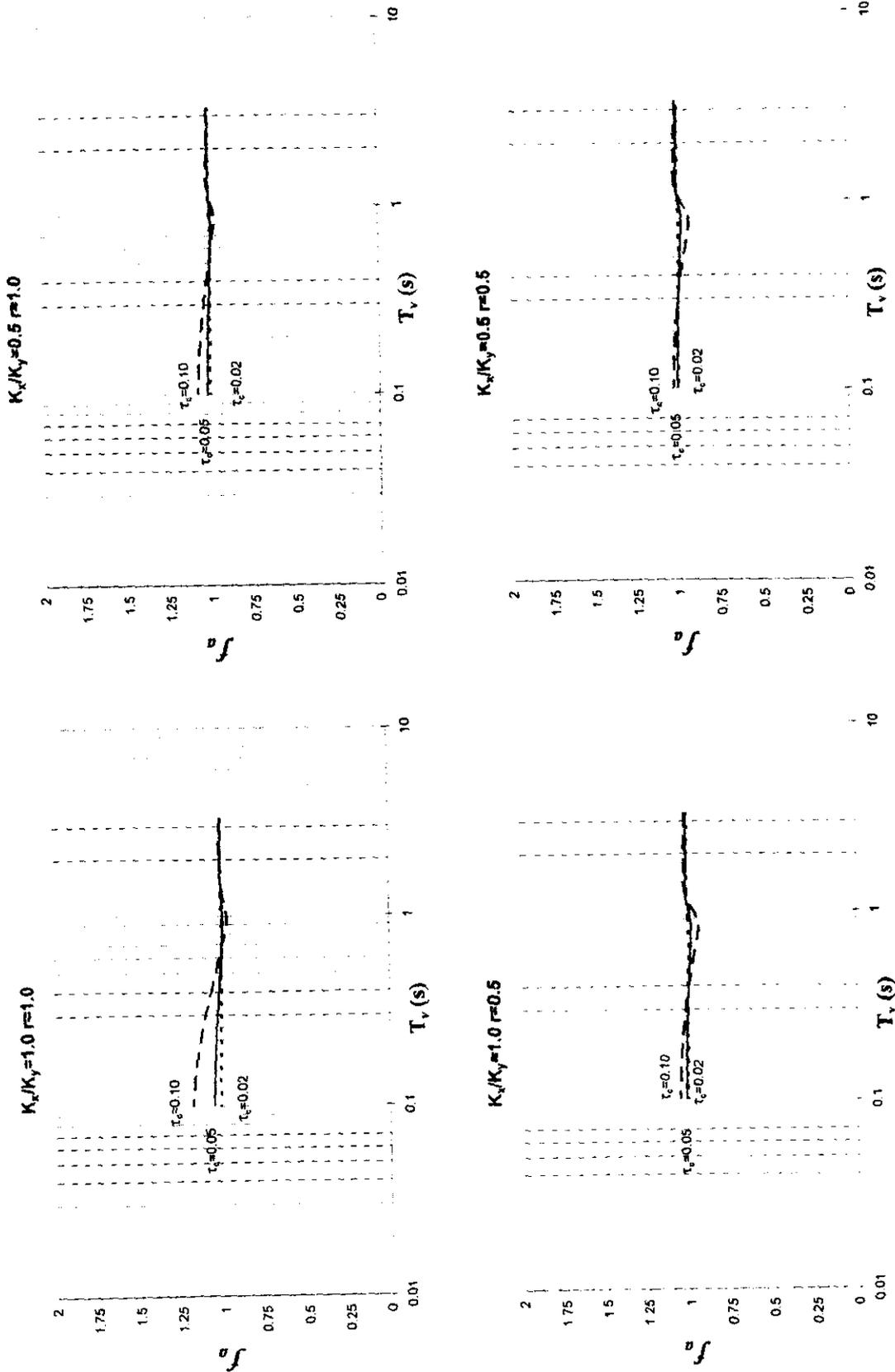


Figura 4.19 Factor de corrección versus el periodo traslacional:  $\tau_{pb} = 0.03$ , suelo blando,  $e_0 = a/3$ .

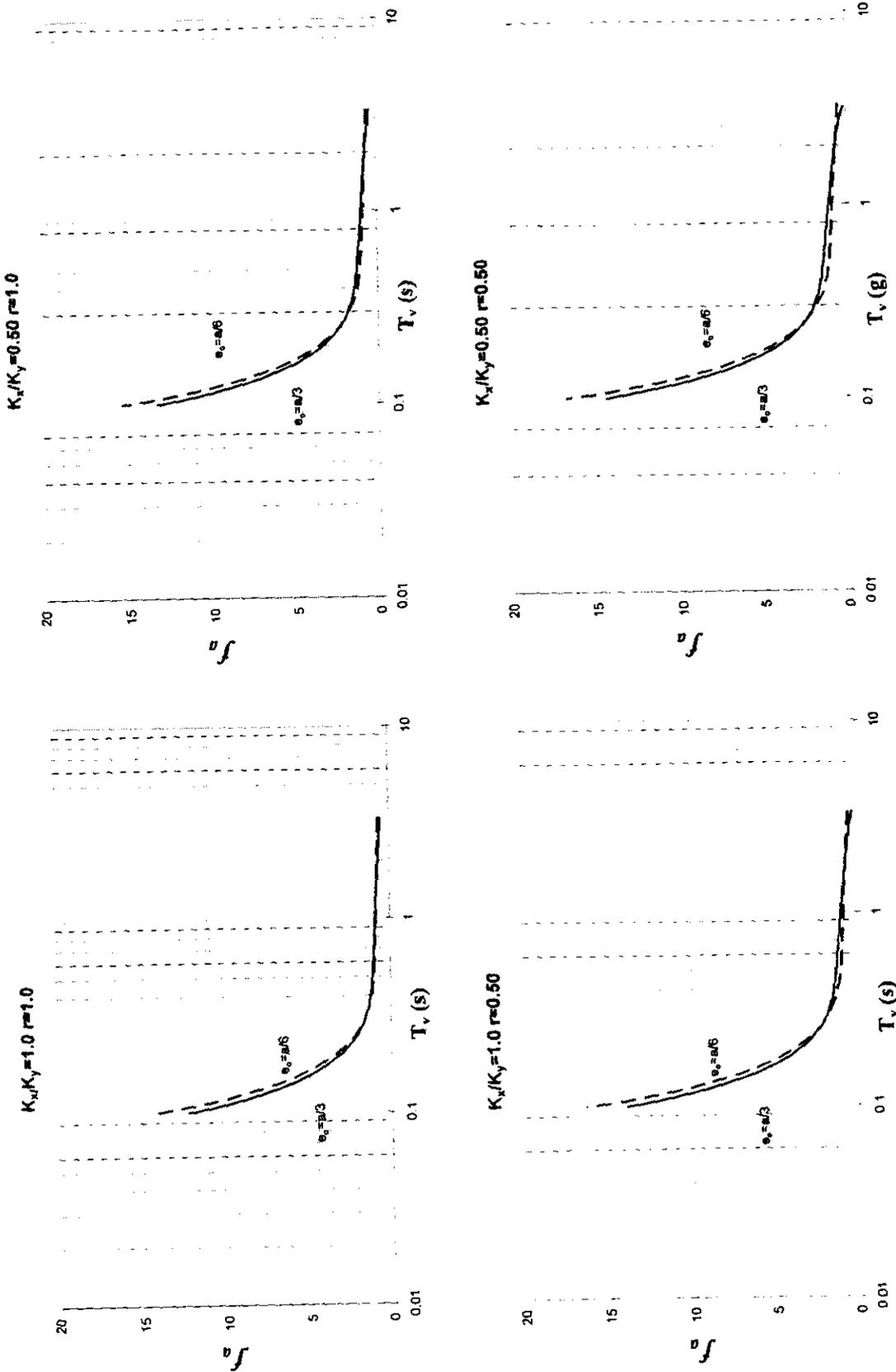


Figura 4.20 Factor de corrección versus Periodo traslacional;  $1.5e_0+0.1a$ , suelo firme,  $\tau_{cb}=0.05$  y  $\tau_{pb}=0.01$ .

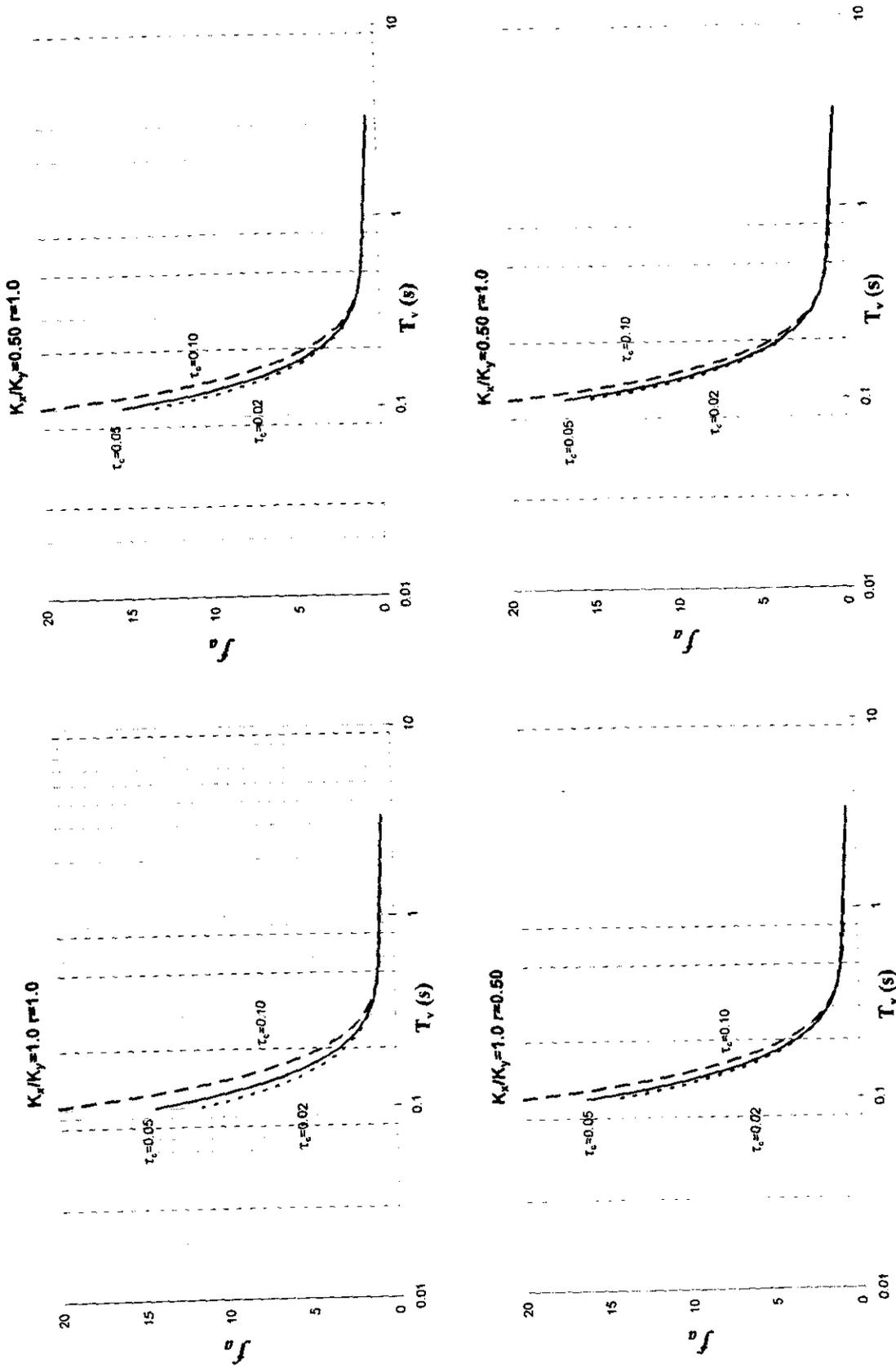


Figura 4.21 Factor de corrección versus Periodo traslacional;  $1.5e_0+0.1a$ , suelo firme,  $\tau_{pb}=0.01$  y  $e_0=a/6$ .

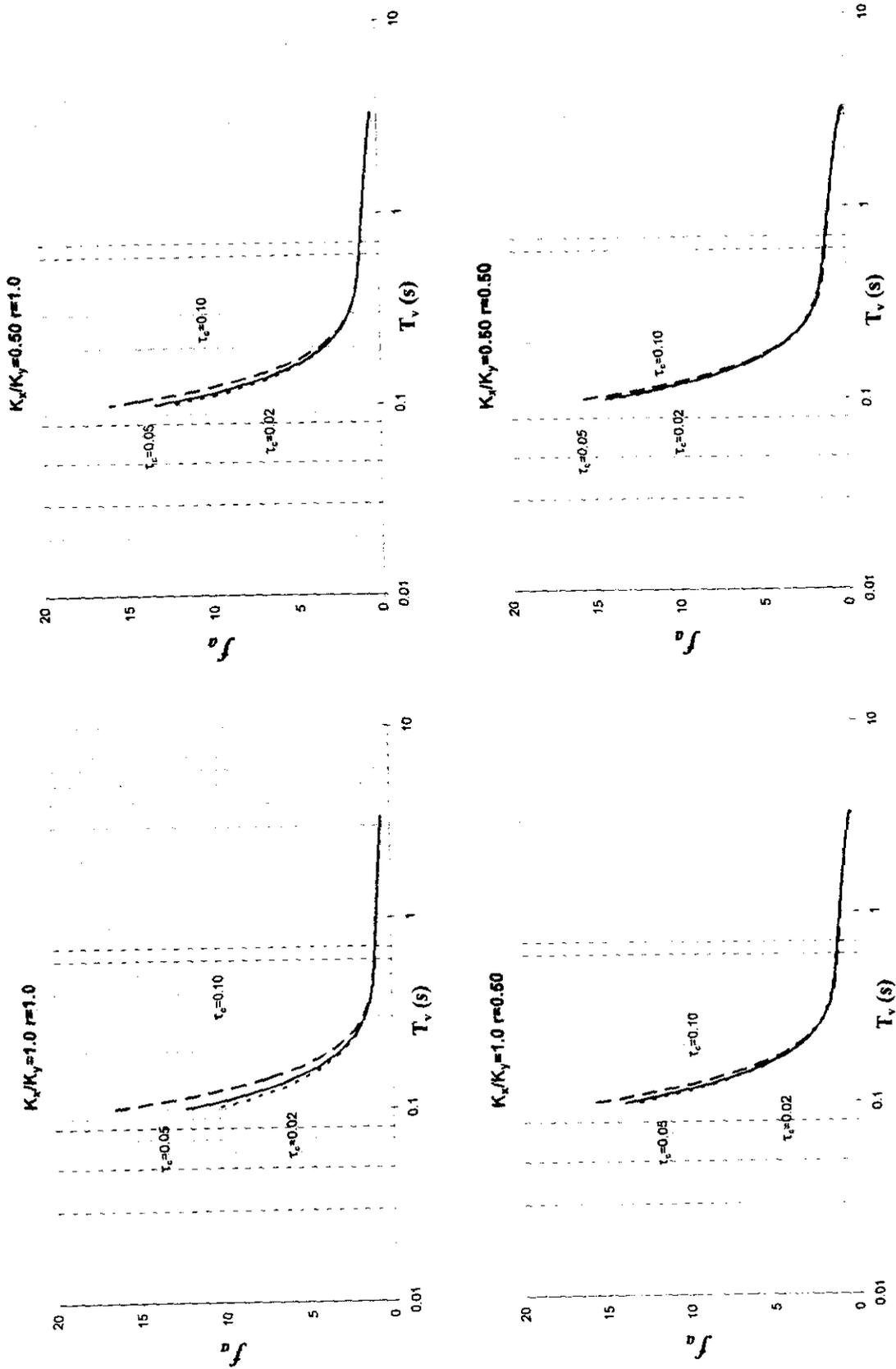


Figura 4.22 Factor de corrección versus Periodo traslacional;  $1.5e_0 + 0.1a$ , suelo firme,  $\tau_{pb} = 0.01$  y  $e_0 = a/3$ .

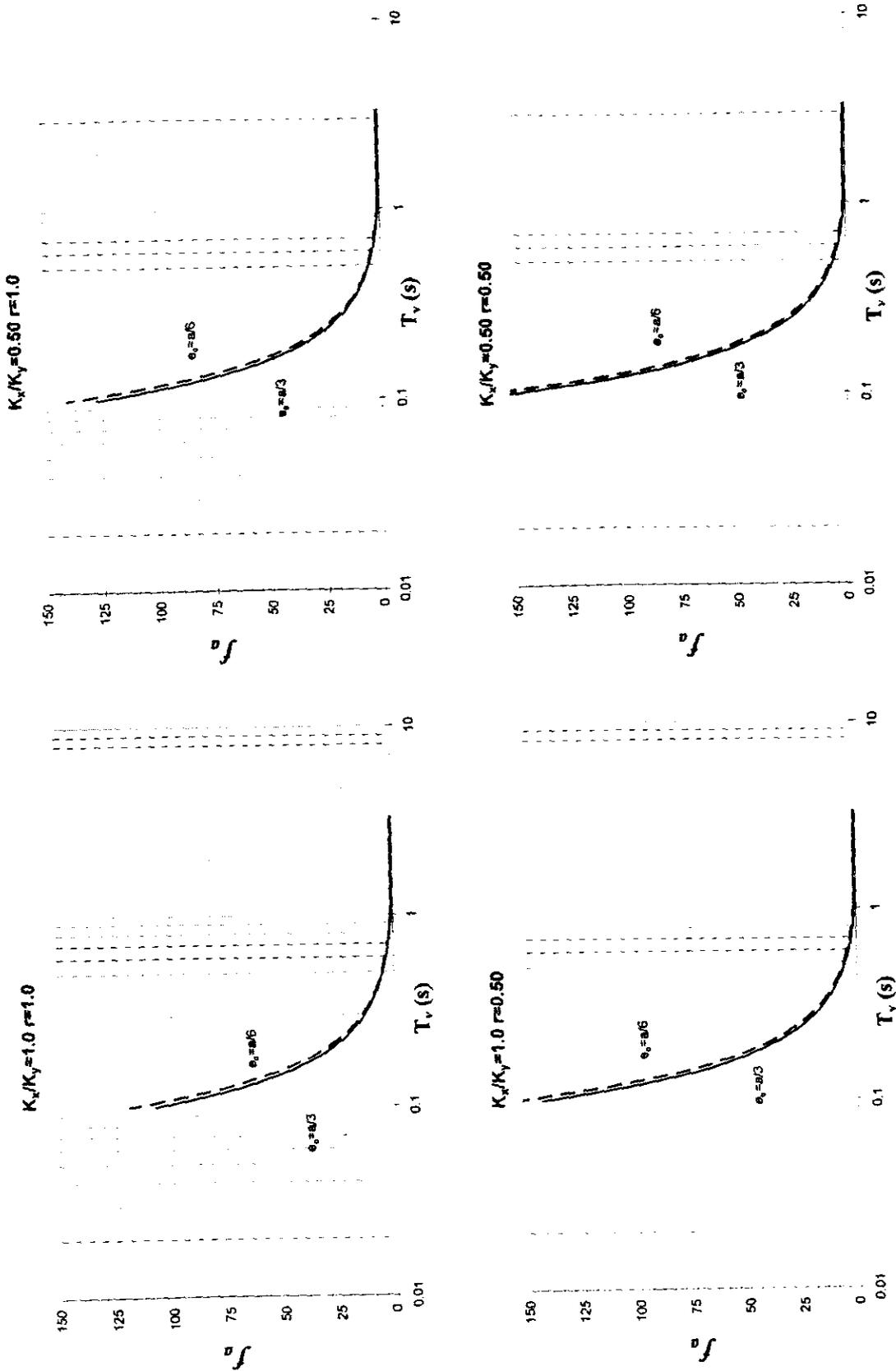


Figura 4.23 Factor de corrección versus Periodo traslacional;  $1.5e_x + 0.1a$ , suelo blando,  $t_{cb} = 0.05$  y  $\tau_{pb} = 0.03$ .

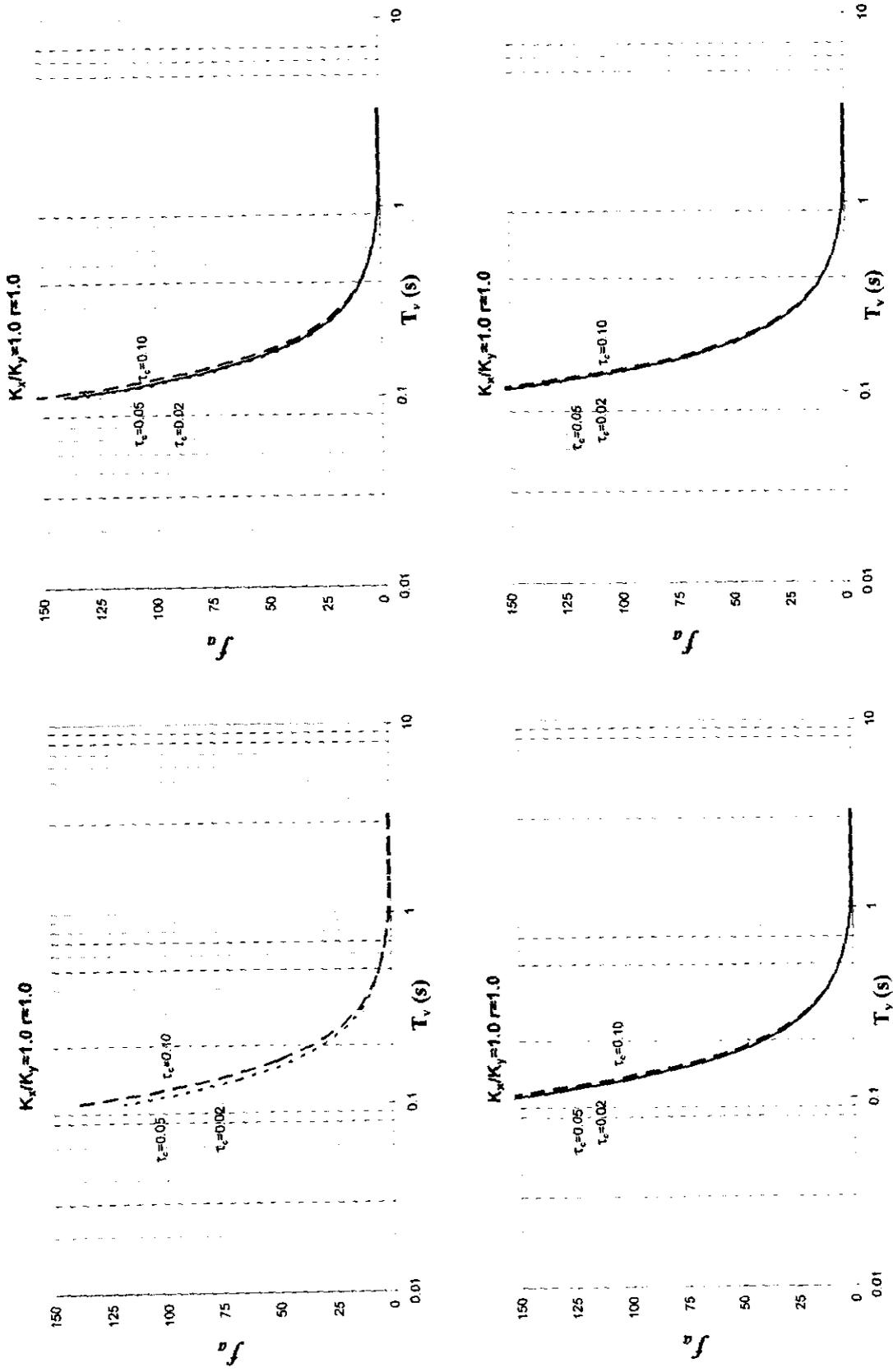


Figura 4.24 Factor de corrección versus Periodo traslacional;  $1.5e_0 + 0.1a$ , suelo blando,  $\tau_{pb} = 0.03$  y  $e_0 = a/6$ .

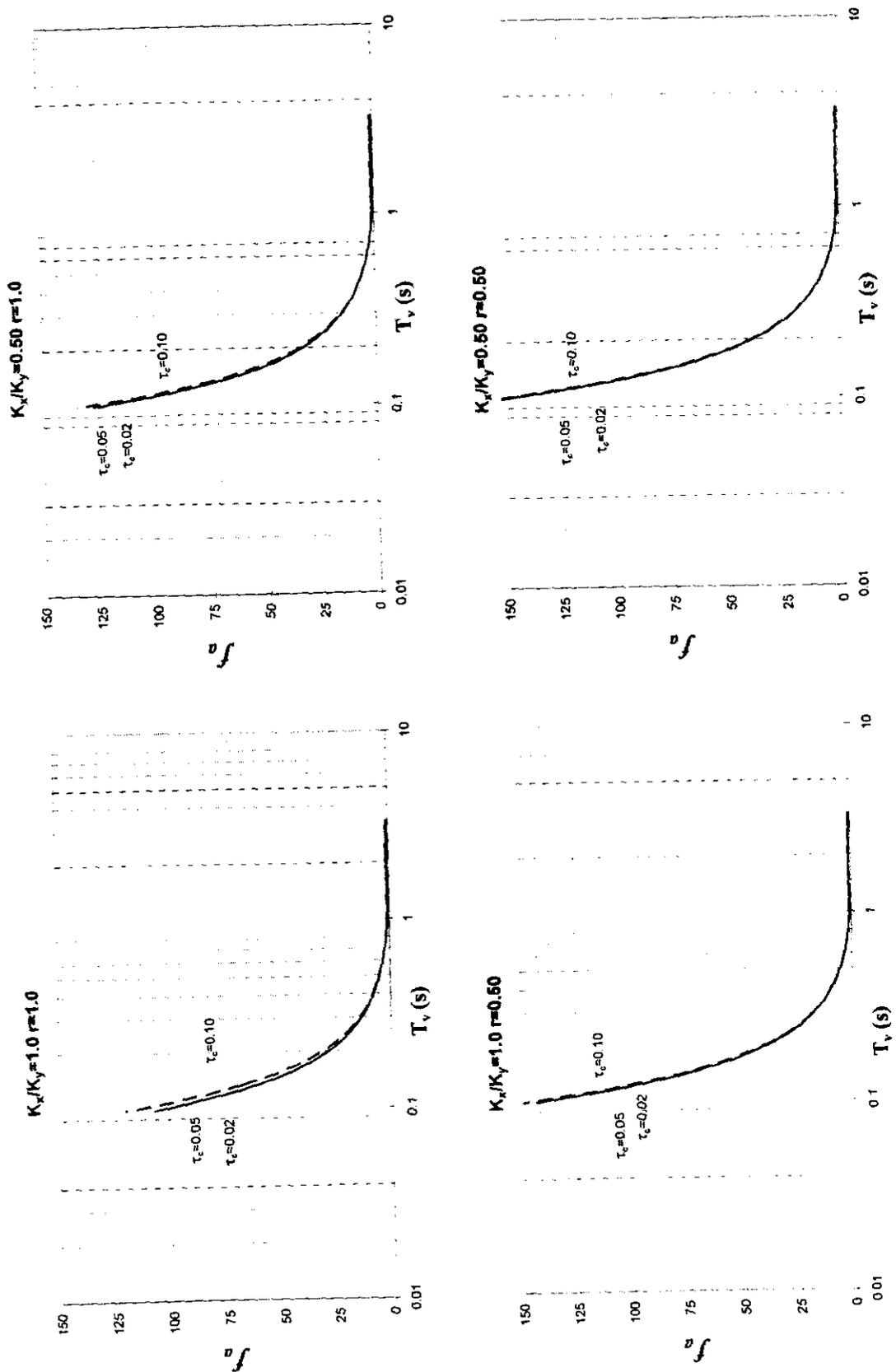


Figura 4.25 Factor de corrección versus Periodo traslacional;  $1.5e_0+0.1a$ , suelo blando,  $\tau_{pb}=0.03$  y  $e_0=a/3$ .

## Capítulo 5

### Conclusiones y Recomendaciones

Se estudió la respuesta torsional de sistemas estructurales asimétricos sometidos a movimientos sísmicos incoherentes y fuera de fase. Se plantearon las ecuaciones de movimiento de sistemas de un nivel que consisten de una losa rígida apoyada sobre elementos de resistencia lateral considerando asimetría en una sola dirección. Las ecuaciones se resolvieron para el desplazamiento y giro del sistema expresándolos en función de sus componentes pseudo-estáticas y dinámicas. El movimiento del terreno se modeló como un campo aleatorio, heterogéneo, estacionario, gaussiano y con media cero. Los efectos de pérdida de coherencia y cambio de fase se tomaron en consideración a través de un modelo de espectro de coherencia que depende de la velocidad de las ondas de corte, de una velocidad aparente de propagación, y de un factor de incoherencia del medio en el que se propagan. Para modelar el efecto de las condiciones locales del suelo se utilizaron funciones de densidad espectral modificadas de Kanai-Tajimi que dependen de frecuencias de vibración y amortiguamientos equivalentes del estrato de suelo.

Con base en la teoría de vibraciones aleatorias, se obtuvieron expresiones para las varianzas del cortante basal y momento torsor en función de las varianzas del desplazamiento y giro dinámicos del sistema estructural, y de la covarianza entre éstas. Se mostró que las varianzas del cortante basal y del momento torsor no dependen de las componentes pseudo-estáticas del desplazamiento y giro. La varianza del cortante basal y del momento torsor se expresaron en términos de la excentricidad nominal y de la relación entre las rigideces laterales del sistema, de la relación de aspecto de la planta y de los tiempos de viaje de las ondas de corte y del tren de ondas sísmicas para cruzar la base del sistema. Como casos particulares se obtuvieron las expresiones correspondientes a sistemas estructurales simétricos, sistemas asimétricos sometidos a

movimientos uniformes del terreno, y sistemas simétricos con movimiento uniforme en los apoyos.

Como caso de estudio se consideró un sistema estructural asimétrico que consiste de una losa rígida apoyada sobre cuatro columnas. Se utilizaron diferentes valores de la relación de rigideces laterales, de la relación de aspecto y del periodo de traslación del sistema estructural; se consideraron suelos blandos y firmes, y distintos tiempos de viaje de las ondas de corte y del tren de ondas sísmicas para cruzar la base del modelo estructural.

Se estudió primero la relación entre el cortante basal máximo medio con movimiento incoherente y fuera de fase y el cortante basal máximo medio con movimiento uniforme. Los resultados mostraron que la variación espacial del movimiento sísmico del terreno reduce el cortante basal en estructuras rígidas. En cambio, en estructuras flexibles, no existen diferencias significativas entre el cortante basal con movimiento incoherente y el uniforme. Para el caso de estructuras rígidas, la reducción del cortante basal es mayor en suelos firmes que en suelos blandos. En ambos tipos de suelos, la reducción de la rigidez lateral en dirección perpendicular a la dirección de las ondas sísmicas no produce cambios importantes en el cortante basal.

A continuación se estudió la relación entre el momento torsor máximo medio debido a movimiento incoherente y fuera de fase y el momento torsor máximo medio con movimiento uniforme del terreno. En el caso de estructuras rígidas, el momento torsor ante excitaciones incoherentes puede ser mayor o menor que el correspondiente a excitaciones uniformes dependiendo de la excentricidad nominal, siendo mayor en el caso de sistemas con excentricidades nominales pequeñas. Para estructuras flexibles no existen diferencias significativas en el valor del momento torsor máximo medio si se considera movimiento uniforme o si se toma en cuenta la variación espacial del movimiento del terreno.

Se analizaron luego los efectos torsionales a nivel de fuerzas internas en los elementos resistentes. Para ello, se propuso utilizar un factor de corrección que modifica las fuerzas internas en los elementos resistentes obtenidas en análisis ante excitación uniforme de tal manera que se obtengan las fuerzas internas correspondientes al caso de

excitaciones incoherentes y fuera de fase. Utilizando este concepto de factor de corrección se realizaron análisis dinámicos y análisis estáticos equivalentes utilizando las excentricidades de diseño propuestas en las NTC del Distrito Federal.

Los resultados mostraron que los efectos de torsión accidental por incoherencia y cambio de fase de la excitación son importantes en el caso de sistemas estructurales rígidos. En periodos cortos, el factor de corrección aumenta a medida que disminuye el periodo y que se incrementa el efecto de pérdida de coherencia de la excitación medido por los tiempos de viaje de las ondas de corte para cruzar la base del sistema. La tendencia del factor de corrección a incrementarse con la disminución del periodo se puede explicar en función de las contribuciones dinámicas y pseudo-estáticas de la respuesta a la fuerza cortante. La fuerza cortante en la columna depende de las componentes pseudo-estáticas y dinámicas de la respuesta y del desplazamiento del suelo. En cambio, en el caso de excitación uniforme en los apoyos, la fuerza cortante depende únicamente de las componentes dinámicas. En periodos cortos, es decir, en estructuras rígidas, la contribución de la componente pseudo-estática al cortante en la columna es dominante; este efecto no puede ser tomado en cuenta si se considera que el movimiento del terreno en los apoyos es uniforme.

Los resultados mostraron que en el caso de estructuras rígidas de plantas alargadas, los análisis dinámicos bajo la hipótesis de excitación uniforme subestiman las fuerzas cortantes en las columnas. Pero el uso de los factores de corrección permitiría realizar análisis dinámicos del sistema estructural sometido a excitaciones uniformes utilizando sus propiedades nominales y corregir las fuerzas cortantes para obtener las correspondientes a torsión accidental por variación espacial del movimiento sísmico del terreno.

En el caso de análisis estáticos equivalentes acordes con las NTC del DF, el factor de corrección mostró la misma tendencia para sistemas rígidos, es decir, aumenta al disminuir el periodo traslacional. Sin embargo, en este caso, el factor de corrección rápidamente tiende a infinito cuando el periodo disminuye. Para estructuras rígidas, el cálculo de la fuerza cortante en elementos resistentes con base en movimientos uniformes puede subestimar considerablemente la fuerza cortante que se presentaría ante una excitación incoherente y con cambio de fase. Al igual que en el caso de

análisis dinámicos, esto se debe a la contribución de la componente pseudo-estática de la respuesta a la fuerza cortante en los elementos resistentes. Pero a diferencia de los análisis dinámicos, en el caso de análisis estáticos equivalentes, el uso del cortante basal introduce errores significativamente mayores. Existe una gran diferencia entre analizar los efectos de la torsión accidental por variación espacial del movimiento del terreno a nivel de toda la planta y a nivel de columna en sistemas estructurales rígidos. A nivel de la planta la variación espacial reduce el cortante basal; a nivel de la columna sucede lo contrario, la variación espacial incrementa el cortante en la columna. Estos resultados reflejan la importancia de considerar la respuesta pseudo-estática.

El concepto de *excentricidad accidental* para la evaluación de los efectos de torsión accidental ha sido usado ampliamente. Sin embargo, los procedimientos de análisis estáticos o dinámicos basados en este concepto tienen una serie de desventajas como: (1) el número de análisis que se debe realizar en ambas direcciones para la determinación de fuerzas internas; (2) las incongruencias entre los incrementos en fuerzas cortantes que se obtienen con análisis dinámicos desplazando el centro de masa y aquellos que se obtienen con base en fuerzas estáticas equivalentes; (3) la independencia de las excentricidades accidentales de las propiedades dinámicas de los edificios y de las características de la excitación; y (4) las dificultades en incorporar el concepto de *excentricidad accidental* en análisis dinámicos, lo que conduce a procedimientos intrincados de análisis.

El uso del factor de corrección para evaluar la fuerza cortante en la columnas o ejes resistentes que aquí se ha propuesto, permite superar algunas contradicciones y desventajas de los métodos actuales de análisis, y debería ser evaluado para el caso de otras fuentes de torsión accidental como incertidumbres en la distribución de rigidez y masa, componente rotacional del terreno, etc. Para el caso de estructuras en las que la variación espacial del movimiento sísmico del terreno es una fuente importante de torsión accidental, es necesario que en estudios futuros se analicen sistemas estructurales más complejos, con plantas que modelen el caso de estructuras típicas con relaciones de aspecto grandes, como escuelas u hospitales, y se propongan expresiones para el factor de corrección en función de la relación de aspecto de la planta, el periodo fundamental, y los parámetros que caractericen la pérdida de

coherencia y cambio de fase de la excitación, como por ejemplo los tiempos de viaje. Sería recomendable estudiar el efecto de la dirección de incidencia de la excitación y considerar sistemas de varios niveles para analizar el efecto de la rigidez en la respuesta torsional.

## **Bibliografía**

---

Barranco-Cicilia, F., 1995, Torsión en Sistemas Estructurales Simétricos por Efecto de la Variación Espacial del Movimiento Sísmico del Terreno, Tesis M. en I. con Especialidad en Estructuras, UNAM

Berrah, M. And Kausel, E., 1990, *Modified Response Spectrum Method for the Design of Structures Subjeted to Spatially Varying Seismic Excitations*, Report No. R90-2, MIT, Dept. of Civil Engineering, Massachusetts.

Bycroft, G. N., 1980, El Centro Differential Ground Motion Array, U. S. Geological Survey, Open File Report 80-919.

Chandler, A. M., and Hutchinson, G. L., 1987, Evaluation of Code Torsional Provisions by a Time History Approach, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15, 491-516.

Chopra, A. K. and Goel, R. K., 1991, Evaluations of Torsional Provisions in Seismic Codes, *ASCE, Journal of Structural Engineering*, 117(12), 3762-3782.

Chopra, A. K. and De la Llera, J. C., 1996b, Accidental and Natural Torsion in Earthquake Response and Design of Buildings, *Eleventh World Conference on Earthquake Engineering*, Paper No. 2006.

Clough, R. W. and Penzien, J., 1993, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Inc.

Davenport, A. G., 1964, Note on the Distribution of the Largest Value of a Random Function with Applications to Gust Loading, *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 28, 187-196.

De la Llera, J. C. and Chopra, A. K., 1994a, Accidental Torsion in Buildings due to Base Rotational Excitation, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 23, 1003-1021.

De la Llera, J. C. and Chopra, A. K., 1994b, Evaluation of Code Accidental Torsion Provisions from Buildings Records, *ASCE, Journal of Structural Engineering*, 120(2), 597-616.

De la Llera, J. C. and Chopra, A. K., 1995, Estimation of Accidental Torsion Effects for Seismic Design of Buildings, *ASCE, Journal of Structural Engineering*, 121(1), 102-114.

De la Llera, J. C. and Chopra, A. K., 1995, A Simplified Model for Analysis and Design of Asymmetric-Plan Buildings, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 24, 573-594.

De la Llera, J. C. and Chopra, A. K., 1996a, Inelastic Behavior of Asymmetric Multistory Buildings, *ASCE, Journal of Structural Engineering*, 122(6), 597-606.

Departamento del Distrito Federal, 1996, Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo, México.

Der Kiureghian, A. And Neuenhofer, A., 1991, A Response Spectrum Method for Multiple-Support Seismic Excitations, Report no. EERC-91/08, University of California, Berkeley.

Hanh, G. D. and Liu, X., 1994, Torsional Response of Unsymmetric Buildings to Incoherent Ground Motion, *ASCE, Journal of Structural Engineering*, 120(4), 1158-1181.

Hao, H., 1989, Effects of Spatial Variation of Ground Motion on Large Multiply Supported Structures, Report No. EERC-89/06, University of California, Berkeley.

Hao, H., 1991, Response of Multiply Supported Rigid Plate to Spatially Correlated Seismic Excitations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 20, 881-838.

- Hao, H. and Duan, X. N., 1995, Seismic Response of Asymmetric Structures to Multiple Ground Motions, ASCE, Journal of Structural Engineering, 121(11), 1557-1564.
- Hao, H. and Duan, X., 1996, Multiple Excitation Effects on Response of Symmetric Buildings, Engineering Structures, 18(9), 732-740.
- Harichandran, R. and Vanmarcke, E., 1986, Space-Time Variation of Earthquake Ground Motion, ASCE, Journal of Structural Engineering, 112, 154-174.
- Harichandran, R. and Wang W., 1990, Response of Indeterminate Two-Span Beam to Spatially Varying Seismic Excitation, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 19, 173-187.
- Hejal, R. and Chopra, A. K., 1989, Lateral-Torsional Coupling in Earthquake Response of Frame Buildings, ASCE, Journal of Structural Engineering, 115(4), 852-867.
- Heredia-Zavoni, E., 1993, Structural Response to Spatially Varying Earthquake Ground Motion, Ph. D. Thesis, Dept. of Civil Engineering and operations Research, Princeton University, Princeton, New Jersey.
- Heredia-Zavoni, E. and Barranco, F., 1996, Torsion in Symmetric Structures due to Ground-Motion Spatial Variation, ASCE, Journal of Engineering Mechanics, Sep. 1996, vol. 122, No. 9, 834-843.
- Heredia-Zavoni, E. and Vanmarcke, E., 1994, Seismic Random Vibration Analysis of Multi-Support Structural Systems, ASCE, Journal of Engineering Mechanics, 120(5), 1107-1128.
- Heredia-Zavoni, E. and Vanmarcke, E. H., 1997, Random-Vibration-Based Response Spectrum Method for Multi-Support Structural Systems, Journal of Seismology and Earthquake Engineering, en prensa.
- Luco, J. E. and Wong, H. L., 1986, Response of a Rigid Foundation to a Spatially Random Ground Motion, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 14, 891-908.

Newmark, N., 1969, Torsion in Symmetrical Buildings, Proc. Fourth World Conference on Earthquake Engineering, A-3, 19-32, Chile.

Reinoso Angulo, E., 1997, Modelado Numérico de Valles Aluviales y Topografías, y Comparación con Datos Acelerométricos de la Ciudad de México, Revista de Ingeniería Sísmica, No. 55, págs. 1-16.

Tamura, C., Noguchi, T. and Kato, K., 1977, Earthquake Observations Along Measuring Lines of the Surface of Alluvial Soft Ground, Proc. 6<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, New Delhi, India, Y, 389-394.

Tsuchida, H., Noda, S., Tsai, S. and Kurata, E., 1980, Observation of Earthquake Response of Ground with Horizontal and Vertical Seismometer Arrays, 2th Report, Proc. 7<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, Istanbul, Turkey 2, 475-482.

Vanmarcke, E. H., Heredia-Zavoni, E. and Fenton, G. A., 1993, Conditional Simulation of Spatially Correlated Earthquake Ground Motion, ASCE, Journal of Engineering Mechanics, 119,11, 2333-2352.

Zerva, A., Ang, A. H-S., and Wen, Y. K., 1988, Lifeline Response to Spatially Variable Ground Motions, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 16, 361-379.

Zerva, A., 1990, Response of Multi-Span Beams to Spatially Incoherent Seismic Ground Motions, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 19, 819-832.

## Apéndice A

A continuación se deduce la expresión (2.30) para el cortante basal. Sustituyendo  $v$  y  $\theta$  por sus componentes pseudo-estáticas ( $v_s$  y  $\theta_s$ ) y dinámicas, ( $v_d$  y  $\theta_d$ ) en (2.29) y ordenando términos se obtiene que:

$$V_y = K_y(v_s + \theta_s e_o) - \sum_{j=1}^{N_y} k_{yj} U_{yj} + K_y(v_d + \theta_d e_o) \quad (A1)$$

Utilizando las ecuaciones (2.15) y (2.16), el término  $v_s + \theta_s e_o$  de la ecuación en (A1) es igual a:

$$\begin{aligned} v_s + \theta_s e_o &= -\frac{\lambda_r}{\lambda_r - e_o^2} \sum_{j=1}^{N_y} a_{yj} U_{yj} + \frac{e_o^2}{\lambda_r - e_o^2} \sum_{j=1}^{N_y} a_{yj} U_{yj} \\ &= -\frac{\lambda_r - e_o^2}{\lambda_r - e_o^2} \sum_{j=1}^{N_y} a_{yj} U_{yj} \\ &= -\sum_{j=1}^{N_y} a_{yj} U_{yj} \end{aligned} \quad (A2)$$

Dado que  $a_{yj} = -\frac{k_{yj}}{K_y}$ , el primer término en el lado derecho de la ecuación (A1) se puede reescribir como:

$$K_y(v_s + \theta_s e_o) = K_y\left(-\sum_{j=1}^{N_y} \left(-\frac{k_{yj}}{K_y}\right) U_{yj}\right) = \sum_{j=1}^{N_y} k_{yj} U_{yj} \quad (A3)$$

Sustituyendo (A3) en (A1), se demuestra que:

$$V_y = K_y \{v_d + \theta_d e_o\} \quad (A4)$$

Siguiendo un procedimiento semejante al del cortante basal se puede mostrar que el momento torsor está dado en términos de sus componentes dinámicas por la siguiente expresión:

$$M_t = K_\theta \left( \theta_d + \frac{v_d}{\lambda_r} e_o \right) \quad (A5)$$

## Apéndice B

La inversa  $\mathbf{K}^{-1}$  está dada por:

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{K_y(\lambda_r - e_o^2)} \begin{bmatrix} \lambda_r & e_o \\ -e_o & 1 \end{bmatrix}$$

Cuando  $e_o=0$ ,  $\mathbf{K}^{-1}$  se reduce a:

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{K_y \lambda_r} \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B1})$$

Por otra parte,  $\phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 = M$ ,  $\phi_2^T \mathbf{M} \phi_2 = I$ ,  $\phi_1^T \mathbf{M} = \{M, 0\}$ ,  $\phi_2^T \mathbf{M} = \{0, I\}$ .

sustituyendo (B1) en (2.24) resulta:

$$\beta_1^T = \left\{ -\frac{1}{K_y} \quad 0 \right\}, \quad \beta_2^T = \left\{ 0 \quad -\frac{1}{K_y \lambda_r} \right\}.$$