UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Morfismos entre las retículas R-TORS y R-tors y algunas consideraciones sobre R-TORS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (Matemáticas)

P R E S E N T A

Rogelio Fernández Alonso González

Director de Tesis:
Dr. Francisco Federico Raggi Cárdenas

MEXICO, D. F. 1998

Título de la tesis:

Morfismos entre las retículas R-TORS y R-tors y algunas consideraciones sobre R-TORS

Grado y nombre del tutor o director de tesis:

Dr. Francisco Federico Raggi Cárdenas

Institución de adscripción del tutor o director de tesis:

Instituto de Matemáticas, U.N.A.M.

Resumen de la tesis: (Favor de escribir el resumen de su tesis a máquina, como máximo en 25 renglones a un espacio, sin salir de la extensión de este cuadro.)

Si bien Dickson definió en 1966 las teorías de torsión más generales, los matemáticos han centrado su estudio en la retícula R-tors de las teorías de torsión hereditarias de un anillo R. En este trabajo de tesis se estudia la retícula R-TORS de teorías de torsión no necesariamente hereditarias y se definen y estudian dos morfismos de R-TORS a R-tors.

Los primeros capítulos son preliminares y se establecen las definiciones de prerradical, teoría de torsión, teoría de torsión hereditaria, conjunción, disyunción, generación y cogeneración.

En la parte central de la tesis se demuestran ciertas propiedades de los morfismos H y h respecto a la conjunción y disyunción y acerca de las imágenes directas e inversas de ambos morfismos.

En los siguientes capítulos se definen y estudian conceptos relacionados con la retícula R-TORS: inyectivos relativos, submódulos radicales y semirradicales y cápsula semirradical. También se define y estudia una estructura intermedia entre R-TORS y R-tors llamada R-sher, la clase de teorías de torsión semihereditarias.

Finalmente se describe, a manera de ejemplo, la retícula de teorías de torsión para el anillo Z de los números enteros: Z-TORS ubicando dentro de ella a la retícula Z-tors y a las principales teorías de torsión no hereditarias.

LOS DATOS ASENTADOS EN ESTE DOCUMENTO CONCUERDAN FIELMENTE CON LOS REALES Y QUEDO ENTERADO QUE, EN CASO DE CUALQUIER DISCREPANCIA, QUEDARÁ SUSPENDIDO EL TRÁMITE DEL EXAMEN

Fecha de solicitud: 18 de Agosto de 1998

R. Hernández A.

Firma del alumno

Acompaño los siguientes documentos:

- Nombramiento del jurado del examen de grado
- Aprobación del trabajo escrito por cada miembro del jurado
- Copia de la última revisión de estudios
- Comprobante de pago de derechos por registro del grado

Biblioteca del Plantel	Biblioteca Central

(en inglés)

"Morfismos entre las retículas R-TORS y R-tors y algunas consideraciones sobre R-TORS"

"Morphisms between the lattices R-TORS and R-tors and some considerations over R-TORS"

Although Dickson defined in 1966 the general torsion theories, the mathematicians have mainly studied the lattice R-tors of hereditary torsion theories over a ring R. In this thesis work the lattic R-TORS of general torsion theories is studied, together with two morphisms from R-TORS to R-tors.

The first chapters are preliminary and give the definitions of: preradical, torsion theory, hereditary torsion theory, conjunction, disjunction, generation and cogeneration.

In the central part of this work some properties of the morfisms H and h with respect to conjunction and disjunction are proved, as well as properties about direct and inverse images of both morphisms.

In the next chapters some concepts related to the lattice R-TO are defined and studied: relative injectives, radical and semiradical submodules and semirradical envelope. An intermediate structure between R-TORS and R-tors is defined and studied: R-sher, the class of semihereditary torsion theories.

Finally the lattice Z-TORS of torsion theories over the ring of integers is described as an example, identifying inside it the lattice Z-tors and the main nonhereditary torsion theories.

presenta, para obtener el grado de Doctor en Ciencias (Matemáticas)

R. Fernández A.

M. en C. Rogelio Fernández Alonso González

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Francisco Raggi Cárdenas, por dirigir este trabajo y porque sigue siendo para mí un brillante ejemplo como matemático y como ser humano.

Al resto de mis sinodales, muy especialmente al Dr. José Ríos Montes y al Dr. Hugo Rincón Mejía, por todas sus enseñanzas a lo largo de mi formación como matemático.

A mis excompañeros del ITESM, por cinco años de convivencia, y particularmente a Rosa María, Jaime, Gustavo y Gerardo, por sus acertadas observaciones sobre esta tesis.

A mis padres, porque siempre se preocuparon por mi excelencia académica.

A mis hermanos: Ana, Alejandro, Carlos y Manuel, por estar unidos en la diversidad.

A Ana, por todo lo que hemos vivido juntos durante estos años.

A Dios, por permitirme dar un paso más en el Camino.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Si bien Dickson definió en 1966 las teorías de torsión más generales [2], los matemáticos han centrado su atención principalmente en la retícula **R - tors** de las teorías de torsión hereditarias correspondiente a un anillo R con uno. En el presente trabajo se estudia la retícula **R-TORS** de teorías de torsión no necesariamente hereditarias y se definen dos morfismos de **R- TORS** a **R - tors**.

Los primeros cuatro capítulos son preliminares, y en ellos se establecen las definiciones de *prerradical*, *teoría de torsión* y *teoría de torsión hereditaria*, respectivamente, definiendo la *conjunción* y la *disyunción* sobre cada clase de objetos que les da una estructura de retícula completa. En el cuarto capítulo se describe la *generación* y *cogeneración*, tanto en **R - TORS** como en **R - tors**.

En el quinto capítulo se definen los morfismos H y h de **R-TORS** a **R-tors**, con base en los conceptos estudiados en el capítulo cuatro, y se demuestran algunas propiedades que éstos tienen respecto a la conjunción y disyunción en **R - TORS**. En el capítulo seis se definen ciertas clases de inyectivos que ayudan a caracterizar la imagen inversa de una teoría de torsión hereditaria bajo el morfismo H en cualquier anillo R, obteniendo en particular la descripción de la imagen inversa de la mayor teoría de torsión, en caso de ser R hereditario. Después se define la clase **H** de R-módulos y se caracterizan todas las subclases de **H** utilizando el morfismo H. Análogamente, en el capítulo siete se describe la imagen inversa de la menor teoría de torsión, para cualquier anillo R y se define la clase **h** de R-módulos, también caracterizando todas las subclases de **h**, esta vez utilizando el morfismo h.

En el capítulo ocho se desarrolla la teoría de *inyectivos relativos* para teorías de torsión no necesariamente hereditarias, en forma análoga a lo hecho por Raggi y Ríos para teorías de torsión hereditarias **[10]**.

En el capítulo nueve se definen los *submódulos radicales* y como generalización de éstos, *los submódulos semirradicales*. Luego se define para cada módulo una *cápsula semirradical* que lo contiene y que a su vez está contenida en la cápsula inyectiva del módulo. En el capítulo diez se define **R - sher**, la clase de teorías de torsión *semihereditarias*, pretendiendo definir una estructura intermedia entre **R - TORS** y **R - tors**. Se demuestra que **R - sher** es cerrada bajo conjunciones arbitrarias y se establece una condición necesaria y otra condición suficiente para que una teoría de torsión sea semihereditaria, en términos de su clase libre de torsión.

Finalmente en el capítulo once se describe la estructura de la retícula de teorías de torsión para el anillo **Z** de los números enteros, ubicando a la retícula **Z - tors** y a las principales teorías de torsión no hereditarias. Queda abierto el completar la descripción de esta retícula.

1. PRERRADICALES

Se denotará como **R - Mod** a la categoría de R-módulos izquierdos sobre un anillo R con uno, no necesariamente conmutativo.

1.1. <u>Definiciones:</u> [11]

1.1.1. Un *prerradical* es un funtor $r : \mathbf{R\text{ - }Mod} \longrightarrow \mathbf{R\text{ - }Mod}$ tal que $r(M) \leq M$ para todo $M \in \mathbf{R\text{ - }Mod}$.

1.1.2. Dados dos prerradicales r y s, se define el prerradical $(r \circ s)$ como $(r \circ s)(M) = r(s(M))$ para cada $M \in \mathbf{R\text{ - }Mod}$.

1.1.3. Dados dos prerradicales r y s, se define el prerradical $(r:s)$ como sigue: $(r:s)(M)$ es el único submódulo de M que contiene a $r(M)$ y que cumple $(r:s)(M)/r(M) = s(M/r(M))$.

1.1.4. Un prerradical r es *idempotente* si $r \circ r = r$.

1.1.5. Un prerradical r es un *radical* si $r : r = r$.

1.1.6. Dada una familia de prerradicales $\{r_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se define la *intersección* sobre dicha familia como sigue: $\left(\bigcap_{\alpha \in I} r_\alpha\right)(M) = \bigcap_{\alpha \in I} r_\alpha(M)$ para todo $M \in \mathbf{R\text{ - }Mod}$.

1.1.7. Dada una familia de prerradicales $\{r_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se define la *suma* sobre dicha familia como sigue: $\left(\sum_{\alpha\in I} r_\alpha\right)(M) = \sum_{\alpha\in I} r_\alpha(M)$ para todo $M \in$ **R - Mod**.

1.1.8. Dados dos prerradicales r y s se dice que $r \leq s$ si $r(M) \leq s(M)$ para todo $M \in$ **R - Mod**.

1.1.9. Se define el prerradical ξ como $\xi(M) = 0$ para todo $M \in$ **R - Mod**.

1.1.10. Se define el prerradical χ como $\chi(M) = M$ para todo $M \in$ **R - Mod**.

Así la clase de todos los prerradicales, que se denotará como **R - prerrad**, resulta ser una retícula completa con elemento menor ξ y elemento mayor χ.

2. TEORÍAS DE TORSIÓN

2.1. <u>Definiciones:</u>

Dada una clase C de R-módulos:

2.1.1. C es una *clase de torsión* si es cerrada bajo epimorfismos, sumas directas y extensiones.

2.1.2 C es una *clase libre de torsión* si es cerrada bajo monomorfismos, productos directos y extensiones.

2.2. <u>Definiciones:</u>

Dada una clase C de R-módulos se definen las siguientes clases:

2.2.1. $L(C) = \{\mathrm{M} \in \mathbf{R-Mod} \mid \forall\, \mathrm{N} \in C \ \mathrm{Hom(M,N)} = 0\}$

2.2.2. $R(C) = \{\mathrm{M} \in \mathbf{R-Mod} \mid \forall\, \mathrm{M} \in C \ \mathrm{Hom(M,N)} = 0\}$

Aunque hay varias maneras de definir una teoría de torsión, se presenta aquí la que resulta más simple, tomando en cuenta las definiciones anteriores:

2.3. <u>Definición:</u> [2]

Una *teoría de torsión* es una pareja $\tau = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{L})$ de clases de R-módulos tales que $\boldsymbol{T} = L(\boldsymbol{L})$ y $\boldsymbol{L} = R(\boldsymbol{T})$.

La clase de teorías de torsión se denota como **R - TORS**.

Es conocida la correspondencia biunívoca dada por el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en [4]:

2.4. Teorema:

Existe una correspondencia biunívoca entre las siguientes clases de objetos:

1) radicales idempotentes

2) teorías de torsión

3) clases de torsión

4) clases libres de torsión

Dada una teoría de torsión τ se denota su clase de torsión asociada como T_τ, su clase libre de torsión asociada como F_τ, y su radical idempotente asociado como t_τ, donde $t_\tau(M)$ es el mayor submódulo de M que está en T_τ

El orden en **R - TORS** se define con base en la correspondencia biunívoca descrita por el Teorema 2.4:

2.5. Proposición:

Dadas $\tau, \sigma \in$ **R-TORS**, son equivalentes las siguientes condiciones:

a) $\forall M \in \mathbf{R-Mod}\ \ t_\tau(M) \leq t_\sigma(M)$

b) $T_\tau \subseteq T_\sigma$

c) $F_\sigma \subseteq F_\tau$

2.6. Definiciones:

2.6.1. Dadas $\tau, \sigma \in$ **R - TORS**, se dice que $\tau \leq \sigma$ si sucede cualquiera de las tres condiciones equivalentes de la proposición 2.5.

2.6.2. Se denota como ξ a la teoría de torsión cuya clase de torsión es $\{0\}$.

2.6.3. Se denota como χ a la teoría de torsión cuya clase de torsión es **R - Mod**.

En **R - TORS** se pueden definir las siguientes operaciones:

2.7. Definición:

Dada una familia de teorías de torsión $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se define la *conjunción* de dicha familia, denotada por $\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha$, como la teoría de torsión cuya clase de torsión asociada es $T_{\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} T_{\tau_\alpha}$. Obsérvese que efectivamente $\bigcap_{\alpha \in I} T_{\tau_\alpha}$ resulta ser una clase de torsión.

La siguiente proposición confirma que esta definición de la conjunción coincide con la de ínfimo o *meet* en una retícula completa.

2.8. Proposición:

Dada una familia de teorías de torsión $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$, la conjunción $\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ de dicha familia es la mayor teoría de torsión τ tal que $\tau \leq \tau_\alpha$ para toda $\alpha \in I$.

Demostración:

Digamos que τ es la teoría de torsión tal que $\bigcap_{\alpha\in I} T_{\tau_\alpha} = T_\tau$. Entonces para cada $\alpha \in I$ se tiene que $T_\tau \subseteq T_{\tau_\alpha}$, es decir, $\tau \leq \tau_\alpha$ para toda $\alpha \in I$.

Por otro lado, si σ es una teoría de torsión tal que $\sigma \leq \tau_\alpha$ para toda $\alpha \in I$, entonces para cada $\alpha \in I$ se tiene que $T_\sigma \subseteq T_{\tau_\alpha}$. Por lo tanto $T_\sigma \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} T_{\tau_\alpha}$, es decir, $\sigma \leq \tau$.

□

Una vez definida la conjunción puede definirse la disyunción de la siguiente manera:

2.9. Definición:

Dada una familia de teorías de torsión $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ la *disyunción* de dicha familia, denotada por $\bigvee_{\alpha\in I} \tau_\alpha$, es:

$$\bigvee_{\alpha\in I} \tau_\alpha = \bigwedge \{\sigma \in \mathbf{R-TORS} \mid \forall \alpha \in I \ \sigma \geq \tau_\alpha\}$$

Esta definición implica la propiedad de la disyunción como supremo o *join* en una retícula completa

2.10. Proposición:

Dada una familia de teorías de torsión $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$, la disyunción $\bigvee_{\alpha\in I} \tau_\alpha$ de dicha familia es la menor teoría de torsión τ tal que $\tau \geq \tau_\alpha$ para toda $\alpha \in I$.

Demostración:

Consideremos la clase $C=\{\sigma \in \mathbf{R-TORS} \mid \sigma \geq \tau_\alpha \ \forall \alpha \in \mathrm{I}\}$. Sea $\beta \in \mathrm{I}$. Sea $\sigma \in C$. Entonces $\sigma \geq \tau_\beta$. Por lo tanto $\mathsf{T}_{\tau_\beta} \subseteq \mathsf{T}_\sigma$ para toda $\sigma \in C$, es decir, $\mathsf{T}_{\tau_\beta} \subseteq \bigcap_{\sigma \in C} \mathsf{T}_\sigma = \mathsf{T}_{\bigvee_{\alpha \in \mathrm{I}} \tau_\alpha}$, por la definición 2.7. Por lo tanto $\bigvee_{\alpha \in \mathrm{I}} \tau_\alpha \geq \tau_\beta$.

Por otro lado, si σ es una teoría de torsión tal que $\sigma \geq \tau_\alpha$ para toda $\alpha \in \mathrm{I}$, entonces $\bigvee_{\alpha \in \mathrm{I}} \tau_\alpha \leq \sigma$, por definición.

□

La siguiente descripción de la disyunción puede resultar muy útil:

2.11. Proposición:

Dada una familia de teorías de torsión $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{I}}$ la clase libre de torsión de la disyunción de dicha familia es: $\mathsf{F}_{\bigvee_{\alpha \in \mathrm{I}} \tau_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathsf{F}_{\tau_\alpha}$

Demostración:

Primero obsérvese que efectivamente $\bigcap_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathsf{F}_{\tau_\alpha}$ resulta ser una clase libre de torsión. Si τ es la teoría de torsión tal que $\bigcap_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathsf{F}_{\tau_\alpha} = \mathsf{F}_\tau$, entonces para cada $\alpha \in \mathrm{I}$ se tiene que $\mathsf{F}_\tau \subseteq \mathsf{F}_{\tau_\alpha}$, es decir, $\tau \geq \tau_\alpha$ para toda $\alpha \in \mathrm{I}$.

Por otro lado, si σ es una teoría de torsión tal que $\sigma \geq \tau_\alpha$ para toda $\alpha \in \mathrm{I}$, entonces para cada $\alpha \in \mathrm{I}$ se tiene que $\mathsf{F}_\sigma \subseteq \mathsf{F}_{\tau_\alpha}$. Por lo tanto $\mathsf{F}_\sigma \subseteq \bigcap_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathsf{F}_{\tau_\alpha}$, es decir, $\sigma \geq \tau$.

Esto demuestra que τ tiene la propiedad que caracteriza a la disyunción por la proposición 2.10. Por lo tanto $\tau = \bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha$.

□

Así **R - TORS** resulta ser una retícula completa con elemento menor ξ y elemento mayor χ.

Identificando a las teorías de torsión con sus radicales idempotentes asociados se pueden comparar las operaciones que se definen en uno y en otro caso, obteniendo las siguientes dos proposiciones:

2.12. Proposición:

Dada una familia de teorías de torsión $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se cumplen:

1) $t_{\left(\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha\right)} \leq \bigcap_{\alpha \in I} t_{\tau_\alpha}$

2) $\sum_{\alpha \in I} t_{\tau_\alpha} \leq t_{\left(\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha\right)}$

(Obsérvese que el segundo miembro de la desigualdad 1) y el primer miembro de la desigualdad 2) no corresponden necesariamente a elementos de **R - TORS**).

Demostración:

1): Denotemos por r el primer miembro de la desigualdad. Dado $M \in$ **R - Mod** se tiene que para cada $\alpha \in I$, $r(M) \in T_{\tau_\alpha}$, y por lo tanto $r(M) \leq t_{\tau_\alpha}(M)$ para cada $\alpha \in I$. De esta forma $r(M) \leq \bigcap_{\alpha \in I} t_{\tau_\alpha}(M)$.

□

2): Denotemos por r el segundo miembro de la desigualdad. Sea $M \in$ **R - Mod** y consideremos la siguiente sucesión exacta en **R - Mod**:

$$\bigoplus_{\alpha \in I} t_{\tau_\alpha}(M) \longrightarrow \sum_{\alpha \in I} t_{\tau_\alpha}(M) \longrightarrow 0$$

Para cada $\alpha \in I$ se tiene que $t_{\tau_\alpha}(M) \in \mathcal{T}_{\tau_\alpha} \subseteq \mathcal{T}_{\left(\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha\right)}$. Por lo tanto $\bigoplus_{\alpha \in I} t_{\tau_\alpha}(M) \in \mathcal{T}_{\left(\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha\right)}$, por ser ésta última cerrada bajo sumas directas. Como también es cerrada bajo epimorfismos, entonces $\sum_{\alpha \in I} t_{\tau_\alpha}(M) \in \mathcal{T}_{\left(\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha\right)}$. Luego $\sum_{\alpha \in I} t_{\tau_\alpha}(M) \leq r(M)$. □

2.13. __**Proposición:**__

Dadas $\tau, \sigma \in$ **R - TORS** se cumplen:

1) $t_{\tau \wedge \sigma} \leq t_\tau \circ t_\sigma \leq t_\tau \cap t_\sigma$

2) $t_\tau + t_\sigma \leq t_\tau : t_\sigma \leq t_{\tau \vee \sigma}$

(De nuevo es prudente observar que tanto el segundo y el tercer miembros de las desigualdades 1) como el primero y segundo miembros de las desigualdades 2) no corresponden necesariamente a elementos de **R - TORS**).

__**Demostración:**__

1): Dado $M \in$ **R - Mod** se tiene que $t_{\tau \wedge \sigma}(M) \in \mathcal{T}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{T}_\tau \cap \mathcal{T}_\sigma$. En particular $t_{\tau \wedge \sigma}(M) \in \mathcal{T}_\tau$ y $t_{\tau \wedge \sigma}(M) \leq t_\sigma(M)$. Por lo tanto $t_{\tau \wedge \sigma}(M) \leq t_\tau(t_\sigma(M)) = (t_\tau \circ t_\sigma)(M)$, lo cual demuestra la primera desigualdad. En cuanto a la segunda, dado $M \in$ **R - Mod** se tiene que $t_\tau(t_\sigma(M)) \leq t_\tau(M)$ y $t_\tau(t_\sigma(M)) \leq t_\sigma(M)$, es decir, $(t_\tau \circ t_\sigma)(M) \leq t_\tau(M) \cap t_\sigma(M)$.

□

2): Dado M $\in$ **R - Mod** se cumple, por el tercer teorema de isomorfismo:

$$\left(t_\tau(\mathrm{M})+t_\sigma(\mathrm{M})\right)\Big/t_\tau(\mathrm{M}) \cong t_\sigma(\mathrm{M})\Big/\left(t_\tau(\mathrm{M})\cap t_\sigma(\mathrm{M})\right) \in T_\sigma .$$

Por lo tanto:

$$\left(t_\tau(\mathrm{M})+t_\sigma(\mathrm{M})\right)\Big/t_\tau(\mathrm{M}) \le t_\sigma\left(\mathrm{M}\Big/t_\tau(\mathrm{M})\right) = (t_\tau : t_\sigma)(\mathrm{M})\Big/t_\tau(\mathrm{M}),$$

es decir :

$t_\tau(\mathrm{M})+t_\sigma(\mathrm{M}) \le (t_\tau : t_\sigma)(\mathrm{M})$, lo cual prueba la primera desigualdad.

Para probar la segunda desigualdad, sea M $\in$ **R - Mod** y considérese la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow t_\tau(\mathrm{M}) \longrightarrow (t_\tau : t_\sigma)(\mathrm{M}) \longrightarrow (t_\tau : t_\sigma)(\mathrm{M})\Big/t_\tau(\mathrm{M}) \longrightarrow 0$$

Como $t_\tau(\mathrm{M}) \in T_\tau \subseteq T_{\tau\vee\sigma}$ y $(t_\tau : t_\sigma)(\mathrm{M})\Big/t_\tau(\mathrm{M}) = t_\sigma\left(\mathrm{M}\Big/t_\tau(\mathrm{M})\right) \in T_\sigma \subseteq T_{\tau\vee\sigma}$, por ser $T_{\tau\vee\sigma}$ cerrada bajo extensiones se tiene que $(t_\tau : t_\sigma)(\mathrm{M}) \in T_{\tau\vee\sigma}$, y por lo tanto $(t_\tau : t_\sigma)(\mathrm{M}) \le t_{\tau\vee\sigma}(\mathrm{M})$.

□

3. TEORÍAS DE TORSIÓN HEREDITARIAS

3.1. Definiciones:

Dada una clase C de R-módulos se definen las siguientes clases:

11.1. $L_H(C) = \{M \in \mathbf{R-Mod} \mid \forall N \in C \ \mathrm{Hom}(M, E(N)) = 0\}$

11.2. $R_H(C) = \{M \in \mathbf{R-Mod} \mid \forall M \in C\, \mathrm{Hom}(M, E(N)) = 0\}$

3.2. Definición:

Una *teoría de torsión hereditaria* es una pareja $\tau = (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{L})$ de clases de R-módulos tales que $\boldsymbol{T} = L_H(\boldsymbol{L})$ *y* $\boldsymbol{L} = R_H(\boldsymbol{T})$.

Obsérvese que una teoría de torsión hereditaria es en particular una teoría de torsión.

La clase de teorías de torsión hereditarias se denota como **R - tors**.

La correspondencia biunívoca dada por el teorema 2.4 puede restringirse a las teorías de torsión hereditarias. Una demostración del siguiente teorema puede encontrarse en **[4]**:

3.3. Teorema:

Existe una correspondencia biunívoca entre las siguientes clases de objetos:

1) radicales exactos izquierdos

2) teorías de torsión hereditarias

3) clases de torsión cerradas bajo monomorfismos

4) clases libres de torsión cerradas bajo cápsulas inyectivas

5) filtros idempotentes de ideales izquierdos

La correspondencia biunívoca entre las teorías de torsión hereditarias y los filtros idempotentes de ideales izquierdos nos lleva a la conclusión de que **R - tors** es un conjunto.

La *conjunción* y la *disyunción* de familias en **R - tors** resultan ser precisamente las mismas que se definieron para **R - TORS** en las definiciones 2.7 y 2.9:

3.4. Proposición: [6]

Dada una familia $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de teorías de torsión hereditarias:

1) $\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ es una teoría de torsión hereditaria.

2) $\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ es una teoría de torsión hereditaria.

Demostración:

Supongamos que para cada $\alpha \in I$, $\tau_\alpha \in$ **R - tors**.

1): Cada T_{τ_α} es cerrada bajo monomorfismos. Así $T_{\bigwedge_{\alpha\in I}\tau_\alpha} = \bigcap_{\alpha\in I} T_{\tau_\alpha}$ resulta ser una clase de torsión que es cerrada bajo monomorfismos. El resultado se sigue del Teorema 3.3.

2): Cada F_{τ_α} es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Así $F_{\bigvee_{\alpha\in I}\tau_\alpha} = \bigcap_{\alpha\in I} F_{\tau_\alpha}$ es una clase libre de torsión cerrada bajo cápsulas inyectivas, y el Teorema 3.3 nos lleva a la conclusión.

□

La siguiente proposición nos dice que en caso de ser prerradicales correspondientes a teorías de torsión hereditarias, su intersección también es una teoría de torsión hereditaria.

3.5. Proposición:

Dada una familia de teorías de torsión hereditarias $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se cumple:

$$t_{\left(\bigwedge_{\alpha\in I}\tau_\alpha\right)} = \bigcap_{\alpha\in I} t_{\tau_\alpha}$$

Demostración:

Ya se ha demostrado en la proposición 2.12.1 una desigualdad. Ahora se demostrará la desigualdad inversa para el caso en que la familia conste de teorías de torsión hereditarias.

Llamemos r al primer miembro de la igualdad. Sea M $\in$ **R - Mod**. Para cada $\beta\in I$, se tiene que $\bigcap_{\alpha\in I} t_{\tau_\alpha}(M) \leq t_\beta(M) \in T_{\tau_\beta}$. Como cada T_{τ_β} es cerrada bajo monomorfismos entonces $\bigcap_{\alpha\in I} t_{\tau_\alpha}(M) \in \bigcap_{\alpha\in I} T_{\tau_\alpha} = T_{\left(\bigwedge_{\alpha\in I}\tau_\alpha\right)}$, de donde se sigue que $\bigcap_{\alpha\in I} t_{\tau_\alpha}(M) \leq r(M)$. □

De la proposiciones 2.13 y 3.5 se concluye inmediatamente la siguiente:

3.6. Proposición:

Dadas $\tau, \sigma \in$ **R - tors** se cumple: $t_{\tau\wedge\sigma} = t_\tau \circ t_\sigma = t_\tau \cap t_\sigma$. □

Con la conjunción y la disyunción de familias arbitrarias de teorías de torsión hereditarias, se obtiene también en **R - tors** una estructura de retícula completa, con elemento mayor χ y elemento menor ξ. En este caso la retícula resulta ser distributiva **[6]**.

4. GENERACIÓN Y COGENERACIÓN

Partiendo de las definiciones 2.2 y 3.1 se dan las siguientes:

4.1. Definiciones:

Dada una clase C en **R-Mod** se definen:

4.1.1. $\Xi(C) = (LR(C), R(C))$, la *teoría de torsión generada por C.*

4.1.2. $X(C) = (L(C), RL(C))$, la *teoría de torsión cogenerada por C.*

4.1.3. $\xi(C) = (L_H R_H (C), R_H (C))$, la *teoría de torsión hereditaria generada por C.*

4.1.4. $\chi(C) = (L_H (C), R_H L_H (C))$, la *teoría de torsión hereditaria cogenerada por C.*

Estas teorías de torsión cumplen las siguientes propiedades, cuyas demostraciones pueden encontrarse en **[6]**:

4.2. Proposiciones:

Dada una clase C en **R-Mod**:

4.2.1. $\Xi(C)$ es la menor teoría de torsión tal que $C \subseteq T_{\Xi(C)}$.

4.2.2. $X(C)$ es la mayor teoría de torsión tal que $C \subseteq F_{X(C)}$.

4.2.3. $\xi(C)$ es la menor teoría de torsión hereditaria tal que $C \subseteq T_{\xi(C)}$.

4.2.4. $\chi(C)$ es la mayor teoría de torsión hereditaria tal que $C \subseteq F_{\chi(C)}$.

□

4.3. Corolarios:

Dadas dos clases $C \subseteq D$ en **R - Mod** :

4.3.1. $\Xi(C) \leq \Xi(D)$

4.3.2. $X(D) \leq X(C)$

4.3.3. $\xi(C) \leq \xi(D)$

4.3.4. $\chi(D) \leq \chi(C)$

4.3.5. $\Xi(C) \leq O(\xi(C))$

4.3.6. $O(\chi(C)) \leq X(C)$

□

Obsérvese que en la proposición anterior las desigualdades 4.3.1, 4.3.2, 4.3.5 y 4.3.6 se dan en **R - TORS** y que las desigualdades 4.3.3 y 4.3.4 se dan en **R - tors**. O es el morfismo que "olvida" la propiedad de ser hereditaria (ver capitulo 5).

La siguientes proposiciones nos dan una descripción de la clase de torsión generada por una clase de módulos que sea cerrada bajo epimorfismos y por una clase que además sea cerrada bajo monomorfismos.

4.4. Proposición: [11]

Dada una clase C en **R - Mod** cerrada bajo epimorfismos, se tiene que:

$$T_{\Xi(C)} = \{M \in \mathbf{R\text{-}Mod} \mid \forall\, M \to M'' \to 0,\ \text{con}\ M'' \neq 0, \exists\, 0 \to C \to M'',\ \text{tal que}\ 0 \neq C \in C\}$$

Demostración:

Llamemos $\overline{C}$ a la clase de módulos descrita a la derecha del signo de igualdad.

$\overline{C}$ **es cerrada bajo epimorfismos:**

Sea M $\in \overline{C}$ y $f:M \to N$ un epimorfismo. Si $g:N \to N''$ es otro epimorfismo, con N''$\neq$ 0 entonces $gf:M \to N''$ lo es, y por lo tanto existe un monomorfismo $C \to N''$, tal que $0 \neq C \in \boldsymbol{C}$. Por lo tanto N $\in \overline{C}$.

$\overline{C}$ **es cerrada bajo sumas directas:**

Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de R-módulos contenida en $\overline{C}$ y sea $f:\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha \longrightarrow M''$ un epimorfismo, con M''$\neq$0. Sean $\iota_\alpha : M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ las inclusiones en la suma directa. Para cada $\alpha \in I$, consideremos el epimorfismo $f\iota_\alpha : M_\alpha \longrightarrow \mathrm{Im}(f\iota_\alpha)$. Como M''$\neq$0 existe una $\beta \in I$ tal que $f\iota_\beta \neq 0$. Como $M_\beta \in \overline{\boldsymbol{C}}$, existe un monomorfismo $C \to \mathrm{Im}(f\iota_\beta) \leq M''$, tal que $0 \neq C \in \boldsymbol{C}$. Por lo tanto $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha \in \overline{\boldsymbol{C}}$.

$\overline{C}$ **es cerrada bajo extensiones:**

Sea $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta, con N, L $\in \overline{C}$. Sea $g: M \to M''$ un epimorfismo, con M'' $\neq$ 0. Sea K=Ker(g) y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & N \cap K & \to & K & \to & N+K/N & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & N & \to & M & \to & L & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & N+K/K & \to & M'' & \to & M/N+K & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & . & 0 & &
\end{array}
$$

Si $N+K/_K \neq 0$ entonces como N $\in \overline{C}$, entonces existe $0 \to C \to N+K/_K$, y por lo tanto existe $0 \to C \to M''$ tal que $0 \neq C \in \boldsymbol{C}$.

Por otro lado, si $N+K/_K = 0$ entonces $M'' \cong M/_{N+K}$, y como L $\in \overline{C}$, entonces existe $0 \to C \to M''$ tal que $0 \neq C \in \boldsymbol{C}$.

Así se demuestra que $\overline{C}$ es una clase de torsión.

Obsérvese que $C \subseteq \overline{C}$, puesto que C es cerrada bajo epimorfismos, y por lo tanto $T_{\Xi(C)} \subseteq \overline{C}$. Supongamos que $\overline{C} \not\subset T_{\Xi(C)}$. Entonces existe M $\in$ **R - Mod** tal que M $\in \overline{C}$, pero $M \notin T_{\Xi(C)}$. Podemos suponer incluso que $M \in F_{\Xi(C)}$. Como M $\in \overline{C}$, en particular existe un monomorfismo $C \to M$, con $0 \neq C \in \boldsymbol{C}$, y ésto es una contradicción. Por lo tanto $T_{\Xi(C)} = \overline{C}$.

□

4.5. <u>Corolario:</u>

Si N $\in$ **R - Mod** entonces:

$$T_{\Xi(N)} = \{M \mid \forall\ M \to M'' \to 0, \text{ con } M'' \neq 0, \exists\ 0 \to C \to M'', \exists N \to C \to 0 \quad \text{con } C \neq 0\}$$

<u>Demostración:</u>

Para N $\in$ **R - Mod** consideremos la clase de módulos $C = \{C \mid \exists\ N \to C \to 0\}$. Entonces C es una clase cerrada bajo epimorfismos y por la proposición 4.4 se tiene

$$T_{\Xi(C)} = \{M \mid \forall\ M \to M'' \to 0, \text{ con } M'' \neq 0, \exists\ 0 \to C \to M'', \exists N \to C \to 0 \quad \text{con } C \neq 0\}.$$

Solo resta demostrar que $\Xi(N) = \Xi(\mathcal{C})$. Como $N \in \mathcal{C}$ entonces $\Xi(N) \leq \Xi(\mathcal{C})$. Por otro lado consideremos $F \in \mathcal{F}_{\Xi(N)}$ y sea $C \in \mathcal{C}$. Así existe un epimorfismo $g : N \to C$. Si $f : C \to F$ es cualquier morfismo entonces $fg \in \mathrm{Hom}(N, F) = 0$, y como g es epimorfismo entonces $f = 0$. Así que $F \in \mathcal{F}_{\Xi(\mathcal{C})}$. Por lo tanto $\Xi(\mathcal{C}) \leq \Xi(N)$ y se da la igualdad.

□

Si a la clase $\mathcal{C}$ se le agrega el hecho de que sea cerrada bajo monomorfismos, entonces la teoría de torsión generada por $\mathcal{C}$ resulta ser hereditaria:

4.6. Proposición:

Si $\mathcal{C}$ es una clase en **R - Mod** cerrada bajo monomorfismos y epimorfismos entonces $\Xi(\mathcal{C})$ es una teoría de torsión hereditaria. Es decir, $\Xi(\mathcal{C}) = O(\xi(\mathcal{C}))$.

Demostración:

Se demostrará que $\mathcal{F}_{\Xi(\mathcal{C})}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea $N \in \mathcal{F}_{\Xi(\mathcal{C})}$. Sea $C \in \mathcal{C}$ y $f : C \to E(N)$ un morfismo. Sea $N' = \mathrm{Im}(f)$. Como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo epimorfismos entonces $N' \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo monomorfismos entonces $N' \cap N \in \mathcal{C}$. Pero $N' \cap N \leq N \in \mathcal{F}_{\Xi(\mathcal{C})}$. Por lo tanto $N' \cap N = 0$ y como N es esencial en E(N), entonces $N' = 0$, es decir, $f = 0$. Así $E(N) \in \mathcal{F}_{\Xi(\mathcal{C})}$.

Esto demuestra que $\Xi(\mathcal{C})$ es hereditaria.

□

4.7. **Corolarios:**

Si **S** denota la clase de todos los módulos simples entonces:

1) Ξ(**S**) es hereditaria.

2) Para cualquier S $\in$ **S** , Ξ(S) es hereditaria.

Demostración:

1): Obsérvese que la clase **S** es cerrada bajo epimorfismos y monomorfismos. Así se obtiene la conclusión por la proposición 4.6.

2): Dado cualquier módulo simple S podemos definir la clase $C = \{C \mid \exists\, S \to C \to 0\}$. Esta clase es cerrada bajo epimorfismos, y como S es simple, también es cerrada bajo monomorfismos. Como se vio en la demostración del corolario 4.5 se cumple que Ξ(S) = Ξ(C), y es hereditaria por la proposición 4.6.

□

Ahora se dará una descripción de la clase libre de torsión hereditaria cogenerada por una clase arbitraria de módulos. En este caso no es necesario agregar a dicha clase ninguna propiedad adicional.

4.8. **Proposición:**

Si $\sigma \in$ **R - TORS** y C es una clase en **R-Mod** entonces:

$$F_{\chi(C)} = \left\{ M \mid \exists\, 0 \to M \to \prod E(M_\alpha) \text{ con } M_\alpha \in C \right\}$$

Demostración:

Llamemos $\overline{C}$ a la clase de módulos de la derecha del signo de igualdad. Se demostrará que $\overline{C}$ es una clase libre de torsión hereditaria:

$\overline{C}$ es cerrada bajo monomorfismos:

Sea M $\in \overline{C}$. Entonces existe un monomorfismo $g: M \to \prod E(M_\alpha)$, donde cada $M_\alpha \in C$. Consideremos cualquier monomorfismo f : N $\to$ M . Entonces tenemos un monomorfismo $gf: N \to \prod E(M_\alpha)$. Por lo tanto N $\in \overline{C}$

$\overline{C}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas:

Sea M $\in \overline{C}$. Entonces existe un monomorfismo $g: M \to \prod E(M_\alpha)$, donde cada $M_\alpha \in C$. Como $\prod E(M_\alpha)$ es inyectivo entonces existe un monomorfismo $h: E(M) \to \prod E(M_\alpha)$. Por lo tanto $E(M) \in \overline{C}$.

$\overline{C}$ es cerrada bajo productos directos:

Consideremos una familia $\{M^\beta\}_{\beta \in J}$, donde cada $M^\beta \in \overline{C}$. Así existen monomorfismos $g_\beta: M^\beta \to E^\beta$, donde $E^\beta = \prod_{\alpha \in I} E(M^\beta_\alpha)$ y cada $M^\beta_\alpha \in C$. Estos monomorfismos inducen un monomorfismo $g: \prod M^\beta \to \prod E^\beta$. Así $\prod M^\beta \in \overline{C}$.

$\overline{C}$ es cerrada bajo extensiones:

Sea $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ una sucesión exacta, con N, L $\in \overline{C}$. Entonces existen monomorfismos $i: N \to \prod E(N_\alpha)$ y $j: L \to \prod E(L_\beta)$, donde cada $N_\alpha, L_\beta \in C$. Como $\prod E(N_\alpha)$ es inyectivo entonces existe un monomorfismo $h: M \to \prod E(N_\alpha)$. Definamos k = jg. Por la propiedad universal del producto directo $E = \prod E(N_\alpha) \times \prod E(L_\beta)$ existe un morfismo $t: M \to E$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & N & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & L & \to 0 \\
& \downarrow i & & \downarrow 1 & & \downarrow j & \\
& \prod E(N_\alpha) & \xleftarrow{h} & M & \xrightarrow{k} & \prod E(L_\alpha) & \\
& \downarrow 1 & & \downarrow t & & \downarrow 1 & \\
& \prod E(N_\alpha) & \xleftarrow{p} & E & \xrightarrow{q} & \prod E(L_\alpha) &
\end{array}$$

Consideremos $x \in M$ tal que $f(x) = 0$. Entonces $h(x) = pl(x) = 0$, y también $jg(x) = k(x) = ql(x) = 0$. Como j es un monomorfismo, se tiene que $g(x) = 0$ y por lo tanto $x \in \text{Ker } g = \text{Im } f$. Es decir, existe $y \in N$ tal que $x = f(y)$ y así $i(y) = hf(y) = h(x) = 0$. Como i es un monomorfismo, entonces $y = 0$, y por tanto $x = 0$.

Así se ha demostrado que t es un monomorfismo, y por lo tanto $M \in \overline{C}$.

Así se tiene que $\overline{C}$ es una clase libre de torsión hereditaria, es decir $\overline{C} = F_\tau$, con $\tau \in$ **R - tors**. Ahora obsérvese que $C \subseteq \overline{C}$, puesto que todo $M \in C$ puede sumergirse en su propia cápsula inyectiva. Por la proposición 4.2.4 se tiene que $\tau \leq \chi(C)$, es decir, $F_{\chi(C)} \subseteq F_\tau = \overline{C}$.

Por otro lado, sea $M \in \overline{C}$. Entonces existe un monomorfismo $f: M \to \prod E(M_\alpha)$, donde cada $M_\alpha \in C$. Por la proposición 4.2.4 se tiene que $C \subseteq F_{\chi(C)}$. Como $\chi(C)$ es una teoría de torsión hereditaria, entonces $\prod E(M_\alpha) \in F_{\chi(C)}$, y como f es monomorfismo, también $M \in F_{\chi(C)}$. Se ha demostrado así que $\overline{C} \subseteq F_{\chi(C)}$. De este modo se tiene la igualdad.

□

5. MORFISMOS ENTRE R - TORS Y R - tors

Ya que **R - TORS** y **R - tors** resultan ser retículas completas, podemos definir ciertos morfismos de retículas. Comenzamos definiendo las siguientes funciones:

5.1. **Definiciones:**

5.1.1. $\mathsf{H}:\mathbf{R-TORS}\longrightarrow\mathbf{R-tors}$ se define como $\mathsf{H}(\sigma)=\xi(\mathsf{T}_{\sigma})$

5.1.2. $\mathsf{h}:\mathbf{R-TORS}\longrightarrow\mathbf{R-tors}$ se define como $\mathsf{h}(\sigma)=\chi(\mathsf{F}_{\sigma})$

5.1.3. $\mathsf{O}:\mathbf{R-tors}\longrightarrow\mathbf{R-TORS}$ se define como $\mathsf{O}(\tau)=\tau$, "olvidando" el hecho de que es una teoría de torsión hereditaria y considerándola solo como teoría de torsión..

En vista de las Proposiciones 4.2.3 y 4.2.4 se pueden hacer las siguientes:

5.2. **Observaciones:**

5.2.1. Si $\sigma \in$ **R-TORS** entonces $H(\sigma)$ es la menor teoría de torsión hereditaria tal que $\sigma \leq OH(\sigma)$.

5.2.2. Si $\sigma \in$ **R-TORS** entonces $h(\sigma)$ es la mayor teoría de torsión hereditaria tal que $Oh(\sigma) \leq \sigma$.

5.2.3. Dada $\tau \in$ **R-TORS** se tiene que $\tau \in$ **R - tors** si y solo si $OH(\tau) = \tau$

5.2.4. Dada $\tau \in$ **R-TORS** se tiene que $\tau \in$ **R - tors** si y solo si $Oh(\tau) = \tau$.

5.2.5. $H(\xi) = \xi$; $H(\chi) = \chi$; $h(\xi) = \xi$; $h(\chi) = \chi$.

□

5.3. Proposición:

Dada una clase $\mathcal{C}$ en **R-Mod** se cumple que:

1) $\mathrm{H}(\Xi(\mathcal{C})) = \xi(\mathcal{C})$

2) $\mathrm{h}(\mathrm{X}(\mathcal{C})) = \chi(\mathcal{C})$

Demostración:

1): Por la proposición 4.3.5 tenemos que $\Xi(\mathcal{C}) \leq \xi(\mathcal{C}) = \mathrm{O}(\xi(\mathcal{C}))$. Así que por la observación 5.2.1 se cumple que $\mathrm{H}(\Xi(\mathcal{C})) \leq \xi(\mathcal{C})$. Por otro lado $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{T}_{\Xi(\mathcal{C})} \subseteq \mathrm{T}_{\xi(\mathrm{T}_{\Xi(\mathcal{C})})}$. Así que por la proposición 4.2.3 tenemos que $\xi(\mathcal{C}) \leq \xi(\mathrm{T}_{\Xi(\mathcal{C})}) = \mathrm{H}(\Xi(\mathcal{C}))$. De ahí se obtiene la igualdad.

2): Por la proposición 4.3.6 tenemos que $\mathrm{O}(\chi(\mathcal{C})) = \chi(\mathcal{C}) \leq \mathrm{X}(\mathcal{C})$. Por la observación 5.2.2 se concluye que $\chi(\mathcal{C}) \leq \mathrm{h}(\mathrm{X}(\mathcal{C}))$. Por otro lado tenemos $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{F}_{\mathrm{X}(\mathcal{C})} \subseteq \mathrm{F}_{\chi(\mathrm{F}_{\mathrm{X}(\mathcal{C})})}$. Y por la proposición 4.2.4 se cumple que $\mathrm{h}(\mathrm{X}(\mathcal{C})) = \chi(\mathrm{F}_{\mathrm{X}(\mathcal{C})}) \leq \chi(\mathcal{C})$.

□

5.4. Proposición:

Si $\tau, \sigma \in$ **R - TORS** y $\tau \leq \sigma$, entonces:

1) $\mathrm{H}(\tau) \leq \mathrm{H}(\sigma)$

2) $\mathrm{h}(\tau) \leq \mathrm{h}(\sigma)$.

Demostración:

Supongamos que $\tau \leq \sigma$.

1): Por la observación 5.2.1. se tiene que $\tau \leq \sigma \leq OH(\sigma)$. Por la misma observación, $H(\tau) \leq H(\sigma)$.

2): Por la observación 5.2.2. se tiene que $Oh(\tau) \leq \tau \leq \sigma$. Por lo tanto, $h(\tau) \leq h(\sigma)$.

□

La proposición anterior nos dice que H y h son morfismos de orden. La siguiente proposición nos habla de la relación que existe entre los morfismos h, H y O.

5.5. Proposición:

1) $HO = 1_{\mathbf{R-tors}}$

2) $hO = 1_{\mathbf{R-tors}}$

3) Si $k : \mathbf{R-TORS} \longrightarrow \mathbf{R-tors}$ es un morfismo de orden tal que $kO = 1_{\mathbf{R-tors}}$, entonces para toda $\sigma \in$ **R - TORS** se tiene que $h(\sigma) \leq k(\sigma) \leq H(\sigma)$.

Demostración:

1) y **2)** se siguen de las observaciones 5.2.3. y 5.2.4.

3): Consideremos un morfismo de orden $k : \mathbf{R-TORS} \longrightarrow \mathbf{R-tors}$ tal que para toda $\tau \in$ **R -tors** se tiene que $kO(\tau) = \tau$. Sea $\sigma \in$ **R - TORS**. Las observaciones 5.2.1 y 5.2.2 nos dicen que $Oh(\sigma) \leq \sigma \leq OH(\sigma)$. Como k es un morfismo de orden entonces $kOh(\sigma) \leq k(\sigma) \leq kOH(\sigma)$, es decir $h(\sigma) \leq k(\sigma) \leq H(\sigma)$.

□

Las siguientes proposiciones hablan del comportamiento de O, H y h respecto a la conjunción y disyunción de familias arbitrarias de teorías de torsión.

5.6. Proposición:

Dada una familia $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de teorías de torsión hereditarias:

1) $O(\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in I} O(\tau_\alpha)$

2) $O(\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha) = \bigwedge_{\alpha \in I} O(\tau_\alpha)$

Demostración:

Obsérvese primero que por la proposición 3.4 toda familia de teorías de torsión hereditarias es cerrada bajo conjunciones y disyunciones arbitrarias. Por lo tanto ambas igualdades tienen sentido y se cumplen por la misma definición del morfismo O.

□

5.7. Proposición:

Dada una familia $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de teorías de torsión:

1) $H(\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in I} H(\tau_\alpha)$

2) $H(\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha) \leq \bigwedge_{\alpha \in I} H(\tau_\alpha)$

3) $h(\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha) = \bigwedge_{\alpha \in I} h(\tau_\alpha)$

4) $h(\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha) \geq \bigvee_{\alpha \in I} h(\tau_\alpha)$

<u>**Demostración:**</u>

1): Por la observación 5.2.1, para cada $\alpha \in I$, $\tau_\alpha \leq OH(\tau_\alpha)$. Por lo tanto $\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha \leq \bigvee_{\alpha \in I} OH(\tau_\alpha) = O\left(\bigvee_{\alpha \in I} H(\tau_\alpha)\right)$, ésto por la proposición 5.6, de donde, por la misma observación 5.2.1, $H(\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha) \leq \bigvee_{\alpha \in I} H(\tau_\alpha)$. Inversamente, para cada $\beta \in I$ se tiene $\tau_\beta \leq \bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha$. Como H es un morfismo de orden, para cada $\beta \in I$ se tiene que $H(\tau_\beta) \leq H(\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha)$, de donde $\bigvee_{\alpha \in I} H(\tau_\alpha) \leq H(\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha)$.

2): Por la observación 5.2.1, para cada $\alpha \in I$, $\tau_\alpha \leq OH(\tau_\alpha)$. Por lo tanto $\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha \leq \bigwedge_{\alpha \in I} OH(\tau_\alpha) = O\left(\bigwedge_{\alpha \in I} H(\tau_\alpha)\right)$, por la proposición 5.6, y de nuevo por la observación 5.2.1 se tiene que $H(\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha) \leq \bigwedge_{\alpha \in I} H(\tau_\alpha)$.

3): Por la observación 5.2.2, para cada $\alpha \in I$, $Oh(\tau_\alpha) \leq \tau_\alpha$. Por lo tanto, usando la proposición 5.6, se tiene que $O\left(\bigwedge_{\alpha \in I} h(\tau_\alpha)\right) = \bigwedge_{\alpha \in I} Oh(\tau_\alpha) \leq \bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha$, de donde, por la misma observación 5.2.2, $\bigwedge_{\alpha \in I} h(\tau_\alpha) \leq h(\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha)$. Inversamente, para cada $\beta \in I$ se tiene $\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha \leq \tau_\beta$. Como h es un morfismo de orden, para cada $\beta \in I$ se tiene que $h(\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha) \leq h(\tau_\beta)$, de donde $h(\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha) \leq \bigwedge_{\alpha \in I} h(\tau_\alpha)$.

4): Por la observación 5.2.2, para cada $\alpha \in I$, $Oh(\tau_\alpha) \leq \tau_\alpha$. Por lo tanto $O\left(\bigvee_{\alpha \in I} h(\tau_\alpha)\right) = \bigvee_{\alpha \in I} Oh(\tau_\alpha) \leq \bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha$, de donde, por la misma observación, $\bigvee_{\alpha \in I} h(\tau_\alpha) \leq h(\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha)$.

□

6. EL MORFISMO H

Las proposiciones 4.4 y 4.6 serán la base para dar una descripción de la imagen de una teoría de torsión bajo el morfismo H, según lo expresa la siguiente proposición:

6.1 Proposición:

Si $\sigma \in$ **R - TORS** y $\mathcal{C} = \{C \in \mathbf{R\text{-}Mod} \mid \exists\, 0 \to C \to M \text{ con } M \in T_\sigma\}$ entonces $H(\sigma) = \xi(\mathcal{C}) = \Xi(\mathcal{C})$.

Demostración:

Se demostrará que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo epimorfismos.

Sea $C \in \mathcal{C}$, y sea $p : C \to C''$ un epimorfismo. Como $C \in \mathcal{C}$ existe un monomorfismo $f : C \to M$, con $M \in T_\sigma$. Sea $K = \mathrm{Ker}(p)$ y sea $i : K \to C$ la inclusión. Sea $M' = \mathrm{Im}(if)$ y $M'' = M/M'$. Consideremos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{p} & C'' & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow f & & \exists\downarrow g & & \\ 0 & \to & K & \xrightarrow{fi} & M & \longrightarrow & M'' & \to & 0 \end{array}$$

Existe $g : C \to C''$ que completa el diagrama conmutativo. Como f es monomorfismo, también lo es g. Además $M'' = M/M' \in T_\sigma$. Por lo tanto $C'' \in \mathcal{C}$.

Obsérvese que $\mathcal{C}$ también es cerrada bajo monomorfismos. Entonces, por la proposición 4.4 se tiene que $\Xi(\mathcal{C})$ es hereditaria, es decir $\Xi(\mathcal{C}) = \xi(\mathcal{C})$.

Por otro lado, obsérvese que $T_\sigma \subseteq \mathcal{C} \subseteq \xi(T_\sigma)$. Por la proposición 4.3.3 se tiene que $H(\sigma) = \xi(T_\sigma) = \xi(\mathcal{C})$.

□

Combinando la proposición anterior con la proposición 4.4 tenemos una descripción de la clase de torsión de H(σ):

6.2. Corolario:

Si $\sigma \in$ **R - TORS** entonces:

$$T_{H(\sigma)} = \{M \mid \forall\, M \to M'' \to 0,\ \text{con } M'' \neq 0, \exists\, 0 \to C \to M'', \exists\, 0 \to C \to N,\ \text{con } C \neq 0, N \in T_\sigma\}$$

□

La descripción de la clase libre de torsión de H(σ) resulta más sencilla:

6.3. Proposición:

Si $\sigma \in$ **R - TORS** entonces:

$$F_{H(\sigma)} = \{M \mid EM \in F_\sigma\}$$

Demostración:

Por la definición de H(σ), $M \in F_{H(\sigma)} \Leftrightarrow \forall\, K \in T_\sigma$, $\mathrm{Hom}(K, EM) = 0 \Leftrightarrow EM \in F_\sigma$.

□

Para describir las propiedades de las imagenes inversas de una teoría de torsión hereditaria bajo el morfismo H, se dan las siguientes definiciones y los siguientes lemas:

6.4. Definición:

Dada $\sigma \in$ **R - TORS** se definen las siguientes clases de módulos inyectivos:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{T}_\sigma} = \left\{ \mathrm{E} \in \mathbf{R-Mod} \mid \mathrm{E} \text{ inyectivo}, \ t_\sigma \mathrm{E} \leq_e \mathrm{E} \right\}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{F}_\sigma} = \left\{ \mathrm{E} \in \mathbf{R-Mod} \mid \mathrm{E} \text{ inyectivo}, \ t_\sigma \mathrm{E} = 0 \right\}$$

6.5. Lema:

Sea $\sigma \in$ **R - TORS**. Cualquier E $\in$ **R - Mod** inyectivo puede descomponerse como una suma directa:

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1^\sigma \oplus \mathrm{E}_2^\sigma$$

donde $\mathrm{E}_1^\sigma \in \mathbf{E}_{\mathrm{T}_\sigma}$ y $\mathrm{E}_2^\sigma \in \mathbf{E}_{\mathrm{F}_\sigma}$.

Demostración:

Sea $\sigma \in$ **R - TORS**. Sea E $\in$ **R - Mod** cualquier inyectivo.

Definimos $\mathrm{E}_1^\sigma = E(t_\sigma \mathrm{E})$. Entonces $\mathrm{E}_1^\sigma \leq \mathrm{E}$, por ser E inyectivo. Por lo tanto $t_\sigma(\mathrm{E}_1^\sigma) \leq t_\sigma \mathrm{E} \leq \mathrm{E}_1^\sigma$. Siendo $t_\sigma(\mathrm{E}_1^\sigma)$ el mayor submódulo de torsión de E_1^σ en T_σ, y puesto que $t_\sigma \mathrm{E} \in \mathrm{T}_\sigma$, se tiene entonces que $t_\sigma(\mathrm{E}_1^\sigma) = t_\sigma \mathrm{E} \leq_e \mathrm{E}_1^\sigma$. Por lo tanto $E_1^\sigma \in \mathbf{E}_{\mathrm{T}_\sigma}$.

Por otro lado, como E_1^σ es inyectivo y $E_1^\sigma \leq E$, entonces $E = E_1^\sigma \oplus E_2^\sigma$, para cierto submódulo inyectivo $E_2^\sigma \leq E$. Así $t_\sigma(E_2^\sigma) \leq t_\sigma E \leq E_1^\sigma$. Por lo tanto $t_\sigma(E_2^\sigma) = E_1^\sigma \cap E_2^\sigma = 0$. Es decir, $E_2^\sigma \in \mathbf{E}_{F_\sigma}$.

□

6.6. <u>Lema:</u>

Si $\sigma \in$ **R - TORS** entonces la clase $\mathbf{E}_{T_\sigma}$ es cerrada bajo sumandos directos.

<u>Demostración:</u>

Sea $\sigma \in$ **R - TORS** y sean $E \in \mathbf{E}_{T_\sigma}$ y E_1 un sumando directo de E. Así $E = E_1 \oplus E_2$ con $E_2 \leq E$. Sea $0 \neq x \in E_1$. Como $t_\sigma E \underset{e}{\leq} E$ existe a $\in$ R tal que $0 \neq ax \in t_\sigma E$. Ahora bien, $t_\sigma E = t_\sigma E_1 \oplus t_\sigma E_2$. Por lo tanto $ax = x_1 + x_2$, con $x_1 \in t_\sigma E_1$ y $x_2 \in t_\sigma E_2$. Pero entonces $ax - x_1 = x_2 \in E_1 \cap E_2 = 0$, es decir, $ax = x_1 \in t_\sigma E_1$. Se ha demostrado que $t_\sigma E_1 \underset{e}{\leq} E_1$, es decir, $E_1 \in \mathbf{E}_{T_\sigma}$.

□

El siguiente teorema da varias descripciones equivalentes de la imagen inversa de una teoría de torsión hereditaria bajo el morfismo H:

6.7. Teorema:

Dadas $\sigma, \tau \in$ **R - TORS** son equivalentes:

a) $H(\sigma) \leq H(\tau)$

b) $\mathbf{E}_{T_\sigma} \subseteq \mathbf{E}_{T_\tau}$

c) $\mathbf{E}_{F_\sigma} \supseteq \mathbf{E}_{F_\tau}$

d) $E(t_\sigma E) \leq E(t_\tau E)$ para todo $E \in$ **R - Mod** inyectivo

e) $E(t_\sigma E) \leq E(t_\tau E)$ para toda cápsula inyectiva $E = E(M)$, donde $M \in$ **R - Mod** es cíclico

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b):

Sea $E \in \mathbf{E}_{T_\sigma}$. Es decir, $t_\sigma E \leq_e E$. Sea $0 \neq M \leq E$. Entonces $0 \neq M \cap t_\sigma E \leq t_\sigma E \leq t_{H(\sigma)}E \leq t_{H(\tau)}E$. Por lo tanto, siendo $H(\tau)$ hereditaria, $M \cap t_\sigma E \in T_{H(\tau)}$. Por el corolario 6.2, en particular existen $0 \neq C \leq M \cap t_\sigma E$ y un monomorfismo $f : C \to N$ con $N \in T_\tau$. Sea $i : C \to E$ la inclusión. Como E es inyectivo, existe $g : N \to E$ tal que $gf = i$. Como $N \in T_\tau$ entonces $g(N) \in T_\tau$, y por lo tanto $g(N) \leq t_\tau E$. Así, $C = gf(C) \leq g(N) \leq t_\tau E$ y por lo tanto $0 \neq C \leq M \cap t_\tau E$.

Se ha demostrado que $t_\tau E \leq_e E$, es decir, $E \in \mathbf{E}_{T_\tau}$. Por lo tanto $\mathbf{E}_{T_\sigma} \subseteq \mathbf{E}_{T_\tau}$.

b) $\Rightarrow$ d):

Sea E $\in$ **R - Mod** inyectivo. Consideremos $E_1^\sigma = E(t_\sigma E)$. En el lema 6.5 se demostró que $E_1^\sigma \in \mathbf{E}_{T_\sigma}$. Por hipótesis $\mathbf{E}_{T_\sigma} \subseteq \mathbf{E}_{T_\tau}$, así que $E_1^\sigma \in \mathbf{E}_{T_\tau}$, es decir, $t_\tau E_1^\sigma \underset{e}{\leq} E_1^\sigma$. Puesto que $E_1^\sigma \leq E$, se tiene entonces que $t_\tau E_1^\sigma \leq t_\tau E$, y por lo tanto, $E_1^\sigma = E(t_\tau E_1^\sigma) \leq E(t_\tau E) = E_1^\tau$.

d) $\Rightarrow$ e):

Es obvio.

e) $\Rightarrow$ d):

Sea E $\in$ **R - Mod** inyectivo. Sea x $\in$ $E_1^\sigma = E(t_\sigma E)$. Entonces $E(Rx) \leq E_1^\sigma$, y por lo tanto $E_1^\sigma = E(Rx) \oplus E'$ con $E' \leq E_1^\sigma$. En el lema 6.5 se demostró que $E_1^\sigma \in \mathbf{E}_{T_\sigma}$. Por el lema 6.6 también $E(Rx) \in \mathbf{E}_{T_\sigma}$. Además por hipótesis $E(t_\sigma E(Rx)) \leq E(t_\tau E(Rx))$. También como $x \in E(t_\sigma E) \leq E$ entonces Rx $\leq$ E. Por lo tanto $x \in E(Rx) = E(t_\sigma E(Rx)) \leq E(t_\tau E(Rx)) \leq E(t_\tau E)$. Se ha demostrado que $E(t_\sigma E) \leq E(t_\tau E)$.

d) $\Rightarrow$ c):

Sea $E \in \mathbf{E}_{F_\tau}$. Entonces $t_\tau E = 0$. Así, por hipótesis se tiene que $E(t_\sigma E) \leq E(t_\tau E) = 0$. Por lo tanto $t_\sigma E = 0$, es decir, $E \in \mathbf{E}_{F_\sigma}$. Se ha demostrado que $\mathbf{E}_{F_\tau} \subseteq \mathbf{E}_{F_\sigma}$.

c) $\Rightarrow$ a):

Supongamos que $H(\sigma) \not\subset H(\tau)$. Entonces es posible encontrar $0 \neq M \in T_{H(\sigma)} \cap F_{H(\tau)}$. Sea E=*E*M. Como H(τ) es hereditaria, $F_{H(\tau)}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas y por lo tanto $E \in F_{H(\tau)}$. Luego $t_\tau E \leq t_{H(\tau)}E = 0$. Así $E \in \mathbf{E}_{F_\tau} \subseteq \mathbf{E}_{F_\sigma}$, por hipótesis, es decir, $t_\sigma E = 0$. Por otro lado, como $M \in T_{H(\sigma)}$, por el corolario 6.2, existe en particular $0 \neq C \leq M$ y un monomorfismo $f : C \to N$, con $N \in T_\sigma$. Sea $i : C \to E$ la inclusión. Como E es inyectivo, existe $g : N \to E$ tal que gf=i. En particular g≠0. Esto contradice el hecho de que $N \in T_\sigma$ y $E \in F_\sigma$. Por lo tanto $H(\sigma) \subseteq H(\tau)$.

□

Por simetría, se obtiene de inmediato el siguiente corolario.

6.8. Corolario:

Dadas σ, τ ∈ **R - TORS** son equivalentes:

a) H(σ)=H(τ)

b) $\mathbf{E}_{T_\sigma} = \mathbf{E}_{T_\tau}$

c) $\mathbf{E}_{F_\sigma} = \mathbf{E}_{F_\tau}$

d) $E(t_\sigma E) = E(t_\tau E)$ para todo E ∈ **R - Mod** inyectivo

e) $E(t_\sigma E) = E(t_\tau E)$ para toda cápsula inyectiva $E = E(M)$, donde M ∈ **R - Mod** es cíclico

□

Como consecuencia de este corolario podemos analizar el caso específico en que H(σ)=χ:

Llamemos **E** a la clase de todos los R-módulos inyectivos.

6.9. <u>**Corolario:**</u>

H(Ξ(**E**))= χ

<u>**Demostración:**</u>

Por el corolario 6.8, H(σ)=χ si y solo si $t_\sigma E \underset{e}{\leq} E$, para todo E ∈ **E**. Pero $t_{\Xi(\mathbf{E})}E = E$ para todo E ∈ **E**. Luego H(Ξ(**E**))= χ.

□

En el caso particular en que el anillo R sea hereditario se tiene que la clase de teorías de torsión cuya imagen bajo H es χ es un intervalo.

6.10. <u>**Definición:**</u>

Si σ,τ ∈ **R-TORS**, $[\sigma,\tau] = \{\rho \in \mathbf{R-TORS} \mid \sigma \leq \rho \leq \tau\}$ es el *intervalo determinado por* σ y τ.

6.11. <u>**Corolario:**</u>

Si el anillo R es hereditario, entonces $\mathrm{H}^{-1}(\chi) = [\Xi(\mathbf{E}), \chi]$

Demostración:

Sea $\sigma \in$ **R - TORS** tal que $H(\sigma)=\chi$. Sea $E \in$ **E**. Por el corolario 6.8, $t_\sigma E \leq_e E$.

Como R es hereditario, $E/t_\sigma E \in$ **E**. Luego $0 = t_\sigma\left(E/t_\sigma E\right) \leq_e E/t_\sigma E$, lo cual implica que $E/t_\sigma E = 0$, es decir. $t_\sigma E = E$. Por lo tanto, $\Xi(\mathbf{E}) \leq \sigma$.

Por otro lado, si $\Xi(\mathbf{E}) \leq \sigma$ se tiene por el corolario 6.9 y por la proposición 5.3 que $\chi = H(\Xi(\mathbf{E})) \leq H(\sigma) \leq \chi$.

□

Ahora se considerará una clase de módulos relacionada con el morfismo H.

6.12. Definición:

$$\mathbf{H} = \{M \in \mathbf{R-Mod} \mid \forall \sigma \in \mathbf{R-TORS} \ \ [M \in F_\sigma \Rightarrow E(M) \in F_\sigma]\}$$

La siguiente proposición nos da dos alternativas para describir esta clase de módulos.

6.13. Proposición:

Para $M \in$ **R - Mod** son equivalentes:

a) $M \in \mathbf{H}$

b) $X(M) \in$ **R - tors**

c) Si $0 \neq K \leq E(M)$ entonces $\mathrm{Hom}(K, M) \neq 0$

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b):

Sea $N \in T_{X(M)}$. Consideremos un monomorfismo $g : N' \rightarrow N$. Sea $f : N' \rightarrow M$ un morfismo. Por ser $E(M)$ inyectivo, existe un morfismo $h : N \rightarrow E(M)$ tal que $hg = if$, donde $i : M \rightarrow E(M)$ es la inclusión. Ahora bien, como $M \in F_{X(M)}$ y $M \in \mathbf{H}$ entonces $E(M) \in F_{X(M)}$. Pero entonces $h \in \text{Hom}(N, E(M)) = 0$. Así $if = hg = 0$, y por lo tanto $f = 0$. Se ha demostrado que $\text{Hom}(N', M) = 0$, es decir, $N' \in T_{X(M)}$, de donde se sigue que $X(M) \in$ **R - tors**.

b) $\Rightarrow$ c):

Sea K un submódulo distinto de cero de $E(M)$ y supongamos que $\text{Hom}(K, M) = 0$. En ese caso se tiene que $K \in T_{X(M)}$. Por ser M esencial en $E(M)$ y $K \neq 0$ entonces $K \cap M \neq 0$. Por hipótesis $X(M) \in$ **R - tors**, así que $K \cap M \in T_{X(M)}$, pero por ser submódulo de M, $K \cap M \in F_{X(M)}$. Esto es una contradicción, así que $\text{Hom}(K, M) \neq 0$.

c) $\Rightarrow$ a):

Sea $\sigma \in$ **R - TORS** tal que $M \in F_\sigma$. Llamemos $K = t_\sigma(EM)$. Si $K \neq 0$, por hipótesis $\text{Hom}(K, M) \neq 0$, pero ésto contradice el hecho de que $K \in T_\sigma$. Por lo tanto $K = 0$, es decir, $EM \in F_\sigma$. Por lo tanto $M \in \mathbf{H}$.

□

6.14. Proposición:

Dada una clase $\mathbf{K}$ en $\mathbf{R}$ - *Mod* son equivalentes:

a) $\mathbf{K} \cap F_\sigma \subseteq F_{H(\sigma)}$ para toda $\sigma \in$ **R - TORS**

b) $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{H}$

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b):

Sea $M \in \mathbf{K}$. Consideremos cualquier $\sigma \in$ **R - TORS** y supongamos que $M \in F_\sigma$. Por hipótesis $M \in \mathbf{K} \cap F_\sigma \subseteq F_{H(\sigma)}$. Como $H(\sigma)$ es hereditaria, también $EM \in F_{H(\sigma)} \subseteq F_\sigma$. Esto demuestra que $M \in \mathbf{H}$.

b) $\Rightarrow$ a):

Sea $M \in \mathbf{K} \cap F_\sigma$. Por hipótesis $M \in \mathbf{H}$. Como también $M \in F_\sigma$ se tiene que $EM \in F_\sigma$. Así que por la proposición 6.3 se concluye que $M \in F_{H(\sigma)}$.

□

7. EL MORFISMO h

Como en el capítulo anterior, comenzaremos dando una descripción de la clase de torsión de h(σ). Para ésto necesitamos describir primero su clase libre de torsión.

7.1. Proposición:

Si $\sigma \in \mathbf{R}$ - **TORS** entonces:

$$F_{h(\sigma)} = \{M \mid \exists\, 0 \to M \to \prod E(M_\alpha) \ \text{ con } M_\alpha \in F_\sigma\}$$

Demostración:

Se sigue de la proposición 4.8 y de la definición del morfismo h.

□

7.2. Proposición:

Si $\sigma \in \mathbf{R}$ - **TORS** entonces:

$$T_{h(\sigma)} = \{M \mid \forall\, 0 \to M' \to M\ ,\ M' \in T_\sigma\}$$

Demostración:

Llamemos C a la clase de módulos de la derecha del signo de igualdad.

Sea $M \in T_{h(\sigma)}$. Consideremos un monomorfismo $f : M' \to M$. Como h(σ) es una teoría de torsión hereditaria entonces $M' \in T_{h(\sigma)} \subseteq T_\sigma$. Por lo tanto $M \in C$.

Por otro lado, sea $M \in \mathcal{C}$. Llamemos $L = M/t_{h(\sigma)}(M)$. Entonces $L \in F_{h(\sigma)}$. Por la proposición 7.1 existe un monomorfismo $f : L \to \prod_{\alpha \in I} E(L_\alpha)$, donde cada $L_\alpha \in \mathcal{C}$.

Supongamos que $L \neq 0$. Entonces debe existir un $\beta \in I$ tal que $p_\beta f \neq 0$, donde $p_\beta : \prod_{\alpha \in I} E(L_\alpha) \longrightarrow E(L_\beta)$ es la proyección canónica. Sea $N = \mathrm{Im}(p_\beta f) \neq 0$. Como L_β es esencial en $E(L_\beta)$ entonces $N' = N \cap L_\beta \neq 0$. Llamemos L' a la imagen inversa de N' bajo el morfismo $p_\beta f$. Entonces tenemos un morfismo distinto de cero $g : L' \to N'$. Ahora bien, como $L' \leq L$ tenemos que $L' = M'/t_{h(\sigma)}(M)$, para cierto M' tal que $t_{h(\sigma)}(M) \leq M' \leq M$. Como $M \in \mathcal{C}$ se tiene que $M' \in T_\sigma$, y por ser T_σ cerrada bajo cocientes, también $L' \in T_\sigma$. Por otro lado, como $N' \leq L_\beta$ y $L_\beta \in F_\sigma$, también $N' \in F_\sigma$. Pero ésto contradice el hecho de que $g \neq 0$. Así que $L = 0$, es decir, $M = t_{h(\sigma)}(M) \in T_{h(\sigma)}$.

Se han demostrado entonces ambas contenciones y por tanto se tiene la igualdad.

□

Como en el corolario 6.11 la clase de teorías de torsión cuya imagen bajo el morfismo h es ξ también es un intervalo, con la ventaja de que en este caso no hay ninguna hipótesis adicional sobre el anillo R.

7.3. Corolario:

Siendo **S** la clase de los módulos simples se cumple que $h^{-1}(\xi) = [\xi, X(S)]$

Demostración:

Sea $\sigma \in$ **R-TORS** tal que $h(\sigma) = \xi$. Consideremos $M \in T_\sigma$, un módulo S simple y un morfismo $f : M \to S$ distinto de cero. Entonces es un epimorfismo y por lo tanto $S \in T_\sigma$. Por la proposición 7.2 y el hecho de que S es simple se concluye que $S \in T_{h(\sigma)} = \{0\}$. Esto es una contradicción y por tanto $f = 0$. Se ha demostrado que $M \in T_{X(S)}$, es decir $\sigma \leq X(\mathbf{S})$.

Por otro lado supongamos que $\sigma \leq X(\mathbf{S})$. Sea $M \in$ **R-Mod** . Es conocido que el módulo $C = \prod_{S \in S_0} E(S)$ es un cogenerador, donde S_0 es un conjunto completo e irredundante de representantes de módulos simples. Por tanto existe un monomorfismo $f : M \to C^A$. Ahora bien, para cada $S \in \mathbf{S}$ se tiene que $S \in F_{X(S)} \subseteq F_\sigma$. Esto significa, de acuerdo a la proposición 7.1 que $M \in F_{h(\sigma)}$. Se ha demostrado que $F_{h(\sigma)} =$ **R-Mod** es decir, $h(\sigma) = \xi$.

□

Como en la definición 6.12, se puede definir una clase de módulos relacionada con el morfismo h.

7.4. Definición:

$$\mathbf{h} = \{M \in \mathbf{R-Mod} \mid \forall \sigma \in \mathbf{R-TORS} \ \ [M \in T_\sigma \Rightarrow \forall\, 0 \to M' \to M\,,\, M' \in T_\sigma]\}$$

De nuevo tenemos dos alternativas para describir esta clase de módulos.

7.5. Proposición:

Para $M \in \mathbf{R}$ - **Mod** son equivalentes:

a) $M \in \mathbf{h}$

b) $\Xi(M) \in \mathbf{R}$ - **tors**

c) Si K y L son submódulos de M tales que $K \leq L \leq M$ y $K \neq L$ entonces $\mathrm{Hom}(M, L/K) \neq 0$

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b):

Sea $N \in F_{\Xi(M)}$. Consideremos un morfismo $f : M \to E(N)$ y supongamos que $f \neq 0$. Llamemos $N' = \mathrm{Im}(f)$. Como N es esencial en $E(N)$ tenemos que $N' \cap N \neq 0$. Sea $M' = f^{-1}(N' \cap N) \leq M$. Entonces tenemos un morfismo distinto de cero $g : M' \to N$. Ahora bien, como $M \in T_{\Xi(M)}$, $M' \leq M$ y $M \in \mathbf{h}$, se concluye que $M' \in T_{\Xi(M)}$. Además $N \in F_{\Xi(M)}$. Esto contradice el hecho de que $g \neq 0$. Por lo tanto $f = 0$. Se ha demostrado que $\mathrm{Hom}(M, E(N)) = 0$, es decir, $EN \in F_{\Xi(M)}$. Por lo tanto $F_{\Xi(M)}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Esto demuestra que $\Xi(M) \in \mathbf{R}$ - **tors**.

b) $\Rightarrow$ c):

Sean K y L submódulos de M tales que $K \leq L \leq M$ y $K \neq L$. Supongamos que $\mathrm{Hom}(M, L/K) = 0$. Entonces $L/K \in F_{\Xi(M)}$. Como $L \leq M$ y $\Xi(M) \in \mathbf{R}$ - **tors**, entonces $L \in T_{\Xi(M)}$. Pero así se concluiría que $\mathrm{Hom}(L, L/K) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathrm{Hom}(M, L/K) \neq 0$.

c) $\Rightarrow$ a):

Sea $\sigma \in$ **R - TORS** y supongamos que $M \in T_\sigma$. Sea $f : M' \to M$ un monomorfismo. Llamemos $K = t_\sigma(M')$. Entonces $K \leq M' \leq M$. Supongamos además que $K \neq M'$. Entonces, por hipótesis, Hom $(M , M'/K) \neq 0$. Así existe un morfismo distinto de cero $g : M \to M'/K$. Sin embargo $M \in T_\sigma$ y $M'/K \in F_\sigma$. Esto es una contradicción, así que $M' = t_\sigma(M')$, es decir, $M' \in T_\sigma$.

□

La siguiente proposición relaciona al morfismo h con la clase **h** de módulos.

7.6. <u>Proposición:</u>

Dada una clase **k** en **R - Mod** son equivalentes:

a) $\mathbf{k} \cap T_\sigma \subseteq T_{h(\sigma)}$ para toda $\sigma \in$ **R - TORS**

b) $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{h}$

<u>Demostración:</u>

a) $\Rightarrow$ b):

Sea $M \in \mathbf{k}$ y sea $\sigma \in$ **R - TORS** . Supongamos que $M \in T_\sigma$. Entonces por hipótesis $M \in \mathbf{k} \cap T_\sigma \subseteq T_{h(\sigma)}$. Ahora consideremos un monomorfismo $f : M' \to M$. Como $M \in T_{h(\sigma)}$ y $h(\sigma)$ es una teoría de torsión hereditaria, entonces se tiene que $M' \in T_{h(\sigma)} \subseteq T_\sigma$. Esto demuestra que $M \in \mathbf{h}$.

b)$\Rightarrow$ a):

Sea $\sigma \in$ **R - TORS** y sea $M \in \mathbf{k} \cap T_\sigma$. Por hipótesis $M \in \mathbf{k} \subseteq \mathbf{h}$. Consideremos un monomorfismo $f : M' \to M$. Como $M \in \mathbf{h}$ y $M \in T_\sigma$, por definición de $\mathbf{h}$ se tiene que $M' \in T_\sigma$. Así que, de acuerdo a la proposición 7.2, se ha demostrado que $M \in T_{h(\sigma)}$.

□

8. INYECTIVOS RELATIVOS EN R - TORS

Las definiciones y propiedades de inyectivos relativos en **R - tors** dadas en **[10]** pueden extenderse a **R - TORS** como se verá en este capítulo.

8.1. Definición:

Dada $\sigma \in$ **R - TORS**, y $M \in$ **R - Mod**, M es σ - *inyectivo* si cada diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & N' & \rightarrow & N \\ & & \downarrow & & \\ & & M & & \end{array} \qquad \text{con } N/N' \in T_\sigma$$

puede completarse a un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & N' & \rightarrow & N \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & M & \underset{1_M}{\rightarrow} & M \end{array}$$

De la anterior definición se obtiene inmediatamente la siguiente observación.

8.2. Observación:

Dada $\sigma \in$ **R - TORS**, si $E \in$ **R - Mod** es inyectivo entonces E es σ-inyectivo.

□

8.3. Proposición:

Dada $\sigma \in$ **R - TORS** y una familia $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en **R - Mod** se tiene que $\prod_{\alpha \in I} E_\alpha$ es σ - inyectivo si y solo si E_α es σ - inyectivo para toda $\alpha \in I$.

Demostración:

$\Rightarrow$)

Supongamos que $\prod_{\alpha\in I} E_\alpha$ es σ - inyectivo. Sea $\alpha\in I$ y consideremos un diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & N' & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow f & & \\ & & E_\alpha & & \end{array} \qquad \text{con } N/N' \in T_\sigma$$

Considerando la inclusión j_α en el producto directo, y puesto que éste es σ-inyectivo, existe un morfismo g que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & N' & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow f & & \downarrow g \\ & & E_\alpha & \xrightarrow{j_\alpha} & \prod_{\alpha\in I} E_\alpha \end{array}$$

Como $p_\alpha j_\alpha = 1_{E_\alpha}$ tambien el siguiente diagrama también resulta conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & N' & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow f & & \downarrow g \\ & & E_\alpha & \xleftarrow{p_\alpha} & \prod_{\alpha\in I} E_\alpha \end{array}$$

Esto significa que E_α es σ - inyectivo.

$\Leftarrow)$

Supongamos ahora que E_α es σ - inyectivo para toda $\alpha \in I$. Consideremos un diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & N' & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow f & & \\ & & \prod_{\alpha \in I} E_\alpha & & \end{array} \qquad \text{con } N/N' \in T_\sigma$$

Considerando las proyecciones p_α del producto directo en cada factor E_α, y puesto que cada uno de éstos es σ-inyectivo, para cada $\alpha \in I$ existe g_α tal que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & N' & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow f & & \downarrow g_\alpha \\ & & \prod_{\alpha \in I} E_\alpha & \xrightarrow{p_\alpha} & E_\alpha \end{array}$$

Por la propiedad del producto directo, existe un morfismo $g: N \rightarrow \prod_{\alpha \in I} E_\alpha$ tal que $p_\alpha g = g_\alpha$. Por lo tanto $p_\alpha g i = g_\alpha i = p_\alpha f$ para toda $\alpha \in I$, es decir, $gi = f$, y por lo tanto conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & N' & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow f & & \downarrow g \\ & & \prod_{\alpha \in I} E_\alpha & \xrightarrow{1} & \prod_{\alpha \in I} E_\alpha \end{array}$$

Esto significa que $\prod_{\alpha \in I} E_\alpha$ es σ - inyectivo.

$\square$

8.4. Definición:

Dada $\sigma \in$ **R - TORS**, y $M \in$ **R - Mod**, se define $E_\sigma M$, la *cápsula σ-inyectiva* de M, como el submódulo de EM (la cápsula inyectiva de M) tal que:

$$t_\sigma\left(EM/M\right) = E_\sigma M/M$$

La cápsula σ - inyectiva de un módulo tiene las siguientes propiedades:

8.5. Proposición:

Dada $\sigma \in$ **R - TORS**, y $M \in$ **R - Mod** se tiene:

1) M es un submódulo esencial de $E_\sigma M$

2) $E_\sigma M/M \in T_\sigma$

3) $EM/E_\sigma M \in F_\sigma$

4) $E_\sigma M$ es un módulo σ - inyectivo

5) Si $f: M \to K$ es un monomorfismo y K es σ - inyectivo, entonces existe un monomorfismo $g: E_\sigma M \to K$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & M & \xrightarrow{i} & E_\sigma M \\ & & f\downarrow & & g\downarrow \\ & & K & \xrightarrow{1_K} & K \end{array}$$

6) Si M es σ - inyectivo entonces $E_\sigma M = M$

7) Si $M \in T_\sigma$ entonces $E_\sigma M \in T_\sigma$, y en ese caso $E_\sigma M = t_\sigma EM$

__Demostración:__

1): Como $M \leq E_\sigma M \leq EM$ y M es esencial en EM, también lo es en $E_\sigma M$.

2): Se sigue de la definición de $E_\sigma M$.

3): Por definición se tiene que $t_\sigma\left(EM/M\right) = E_\sigma M/M$ y la sucesión $0 \to E_\sigma M/M \longrightarrow EM/M \longrightarrow EM/E_\sigma M \to 0$ es exacta. Por lo tanto $EM/E_\sigma M \in F_\sigma$.

4): Sea
$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & N' & \xrightarrow{j} & N \\ & & f\downarrow & & \\ & & E_\sigma M & & \end{array}$$
tal que $N/N' \in T_\sigma$. Consideremos la proyección $p: N \to N/N'$ y la sucesión exacta $0 \to E_\sigma M \xrightarrow{i} EM \xrightarrow{q} EM/E_\sigma M \to 0$. Como EM es inyectivo, existe $g: N \to EM$ tal que gj = if. Entonces qgj = qif = 0, y por lo tanto existe $h: N/N' \to EM/E_\sigma M$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N' & \xrightarrow{j} & N & \xrightarrow{p} & N/N' & \to & 0 \\ & & f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & & \\ 0 & \to & E_\sigma M & \xrightarrow{i} & EM & \xrightarrow{q} & EM/E_\sigma M & \to & 0 \end{array}$$

Como $N/N' \in T_\sigma$ entonces $\mathrm{Im}\, h \in T_\sigma$. Pero dada la sucesión exacta $0 \to E_\sigma M/M \longrightarrow EM/M \longrightarrow EM/E_\sigma M \to 0$ y por la definición de $E_\sigma M$ tenemos que $\mathrm{Im}\, h \leq EM/E_\sigma M \in F_\sigma$. Luego Im h = 0 y por lo tanto qg = hp= 0, es decir $\mathrm{Im}\, g \leq E_\sigma M$.

Por lo tanto conmuta el diagrama:
$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & N' & \xrightarrow{j} & N \\ & & f\downarrow & & g\downarrow \\ & & E_\sigma M & \xrightarrow{I} & E_\sigma M \end{array}$$
, lo cual demuestra que $E_\sigma M$ es σ - inyectivo.

5): Sea $f: M \to K$ un monomorfismo con K σ - inyectivo. Como $E_\sigma M/M \in T_\sigma$ y K es σ - inyectivo, existe $g: E_\sigma M \to K$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & M & \xrightarrow{i} & E_\sigma M \\ & & f\downarrow & & g\downarrow \\ & & K & \xrightarrow{1_K} & K \end{array}$$

Pero entonces $\operatorname{Ker} g \cap M = \operatorname{Ker} f = 0$. Por 1) M es esencial en $E_\sigma M$ y por lo tanto Ker g = 0, es decir, g es un monomorfismo.

6): Si M es σ - inyectivo, por 5) existe un monomorfismo $g: E_\sigma M \to M$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & M & \xrightarrow{i} & E_\sigma M \\ & & 1_M\downarrow & & g\downarrow \\ & & M & \xrightarrow{1_M} & M \end{array}$$

Es decir, $gi = 1_M$. Así g también es un epimorfismo. Por lo tanto $E_\sigma M \cong M$. Como $M \leq E_\sigma M$ se da también la igualdad.

7): Consideremos la sucesión exacta: $0 \to M \longrightarrow E_\sigma M \longrightarrow {}^{E_\sigma M}\!/_{M} \to 0$. Como $M \in T_\sigma$, y por 2) se tiene también que ${}^{E_\sigma M}\!/_{M} \in T_\sigma$, entonces $E_\sigma M \in T_\sigma$. Por lo tanto $E_\sigma M \leq t_\sigma EM$. Pero entonces por 3) se tiene que ${}^{t_\sigma EM}\!/_{E_\sigma M} \leq {}^{EM}\!/_{E_\sigma M} \in F_\sigma$. Así ${}^{t_\sigma EM}\!/_{E_\sigma M} \in F_\sigma \cap T_\sigma = 0$, es decir $E_\sigma M = t_\sigma EM$.

□

Dada σ ∈ **R - TORS** se denota como $\mathbf{E}_\sigma$ a la clase de los módulos σ - inyectivos.

8.7. Definición:

Dadas σ, τ ∈ **R - TORS**, se define la relación σ ~ τ si $\mathbf{E}_\sigma = \mathbf{E}_\tau$. Esta resulta ser una relación de equivalencia, y la clase de equivalencia de σ se denota como [σ]

8.8. Observación:

Dadas σ, τ ∈ **R - TORS**, si σ ≤ τ entonces $\mathbf{E}_\tau \subseteq \mathbf{E}_\sigma$

Dada la definición 6.10 del intervalo determinado por dos teorías de torsión, tenemos la siguiente:

8.9. Proposición:

Dada σ ∈ **R - TORS**, si $\tau_1, \tau_2 \in [\sigma]$ entonces $[\tau_1, \tau_2] \subseteq [\sigma]$

Demostración:

Si $\tau_1, \tau_2 \in [\sigma]$ entonces $\mathbf{E}_\sigma = \mathbf{E}_{\tau_1} = \mathbf{E}_{\tau_2}$. Si $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, por la observación 8.8 se tiene que $\mathbf{E}_{\tau_2} \subseteq \mathbf{E}_\tau \subseteq \mathbf{E}_{\tau_1}$. Por lo tanto $\mathbf{E}_\sigma = \mathbf{E}_\tau$, es decir, $\tau \in [\sigma]$.

□

8.10. Proposición:

Dadas σ, $\tau \in$ **R - TORS**, $\sigma \sim \tau$ si y solo si $E_\sigma M = E_\tau M$ para todo $M \in$ **R - Mod**

Demostración:

$\Rightarrow$)

Supongamos que $\sigma \sim \tau$ y sea $M \in$ **R - Mod**. Entonces $E_\tau M \in \mathbf{E}_\tau = \mathbf{E}_\sigma$. Como $E_\sigma M / M \in T_\sigma$, por la proposición 8.5.5 existe un monomorfismo $f: E_\sigma M \to E_\tau M$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & M & \xrightarrow{i} & E_\sigma M \\ & & j\downarrow & & f\downarrow \\ & & E_\tau M & \xrightarrow{1} & E_\tau M \end{array}$$

donde i, j son inclusiones. Considerando la sucesión exacta $0 \to E_\sigma M / M \longrightarrow E_\tau M / M \longrightarrow E_\tau M / E_\sigma M \to 0$ inducida por f se tiene entonces que $E_\tau M / E_\sigma M \in T_\tau$ y como $E_\sigma M \in \mathbf{E}_\sigma = \mathbf{E}_\tau$, de nuevo por la proposición 8.5.5 existe un monomorfismo $g: E_\tau M \to E_\sigma M$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & E_\sigma M & \xrightarrow{f} & E_\tau M \\ & & 1\downarrow & & g\downarrow \\ & & E_\sigma M & \xrightarrow{1} & E_\sigma M \end{array}$$

es decir, gf = 1, por lo que g también es un epimorfismo. Así $E_\sigma M \cong E_\tau M$. Pero entonces $t_\sigma\left(EM/M\right) = E_\sigma M/M \cong E_\tau M/M = t_\tau\left(EM/M\right)$. Luego $t_\sigma\left(EM/M\right) \in T_\tau$ y por tanto $t_\sigma\left(EM/M\right) \leq t_\tau\left(EM/M\right)$. Análogamente se da la otra desigualdad. Así $E_\sigma M/M = t_\sigma\left(EM/M\right) = t_\tau\left(EM/M\right) = E_\tau M/M$ y por el tercer teorema de isomorfismo se tiene que $E_\sigma M = E_\tau M$.

$\Leftarrow$)

Sea $M \in \mathbf{E}_\sigma$. Entonces por la proposición 8.5.6 y por la hipótesis se tiene que $M = E_\sigma M = E_\tau M$ y por lo tanto $M \in \mathbf{E}_\tau$. Así $\mathbf{E}_\sigma \subseteq \mathbf{E}_\tau$, y análogamente se da la otra contención. Esto demuestra que $\sigma \sim \tau$.

□

8.11. Definición:

Dada $\sigma \in$ **R - TORS** se definen las siguientes teorías de torsión:

$$\sigma_0 = \Xi\left\{E_\sigma M/M \mid M \in \mathbf{R\text{-}Mod}\right\}$$

$$\sigma^0 = \mathrm{X}\left\{EM/E_\sigma M \mid M \in \mathbf{R\text{-}Mod}\right\}$$

La siguiente proposición describe las clases de equivalencia definidas en 8.7 como un intervalo:

8.12 Proposición:

Dada $\sigma \in$ **R - TORS** se tiene que $[\sigma] = [\sigma_0, \sigma^0]$

<u>**Demostración:**</u>

Sea $\tau \in [\sigma]$ y sea $M \in$ **R - Mod**. Por la proposición 8.10 se tiene que $E_\sigma M = E_\tau M$. Luego $E_\sigma M / M = E_\tau M / M \in T_\tau$ y entonces por la definición 8.11 se tiene que $\sigma_0 \leq \tau$. También dado $M \in$ **R - Mod** y por la proposición 8.10 se tiene que $E_\sigma M = E_\tau M$ y por lo tanto $EM / E_\sigma M = EM / E_\tau M \in F_\tau$. La definición 8.11 implica entonces que $\tau \leq \sigma^0$. Así tenemos que $\tau \in [\sigma_0, \sigma^0]$ y entonces $[\sigma] \subseteq [\sigma_0, \sigma^0]$. Obsérvese que en particular $\sigma \in [\sigma_0, \sigma^0]$

Por otro lado, como $\sigma_0 \leq \sigma$ por la observación 8.8 tenemos que $\mathbf{E}_\sigma \subseteq \mathbf{E}_{\sigma_0}$. Ahora, dado $M \in \mathbf{E}_{\sigma_0}$, por la proposición 8.5.6 se tiene que $E_{\sigma_0} M = M$. Por lo tanto $E_\sigma M / M \leq EM / M = EM / E_{\sigma_0} M \in F_{\sigma_0}$. Además, por la misma definición de σ_0 sucede que $E_\sigma M / M \in T_{\sigma_0}$. Esto significa que $E_\sigma M = M$, es decir, $M \in \mathbf{E}_\sigma$. Así que $\mathbf{E}_\sigma = \mathbf{E}_{\sigma_0}$, o equivalentemente $\sigma_0 \in [\sigma]$.

Análogamente, como $\sigma \leq \sigma^0$ por la observación 8.8 tenemos que $\mathbf{E}_{\sigma^0} \subseteq \mathbf{E}_\sigma$. Si $M \in \mathbf{E}_\sigma$ entonces $E_\sigma M = M$ y por tanto $E_{\sigma^0} M / M \leq EM / M = EM / E_\sigma M \in F_{\sigma^0}$, por la misma definición de σ^0. Además $E_{\sigma^0} M / M \in T_{\sigma^0}$, lo cual implica que $E_{\sigma^0} M = M$, es decir, $M \in \mathbf{E}_{\sigma^0}$. Así que $\mathbf{E}_\sigma = \mathbf{E}_{\sigma^0}$, o equivalentemente $\sigma^0 \in [\sigma]$.

Por la proposición 8.9 tenemos entonces que $[\sigma_0, \sigma^0] \subseteq [\sigma]$, y por lo tanto se da la igualdad.

□

9. SUBMÓDULOS RADICALES Y SEMIRRADICALES

El teorema 2.4 habla de la correspondencia biunívoca entre teorías de torsión y radicales idempotentes . Así cada módulo tiene un submódulo de torsión $t_\sigma(M)$ respecto a cualquier teoría de torsión σ. A continuación se estudian las características y propiedades que tienen aquellos submódulos de un módulo dado que provienen de una teoría de torsión en ese sentido.

9.1. <u>Definición:</u>

Dado $M \in$ **R - Mod** , un submódulo N de M se llama *radical* si existe $\sigma \in$ **R - TORS** tal que $N = t_\sigma(M)$

9.2. <u>Proposición:</u>

Para $M \in$ **R - Mod** y $N \leq M$ son equivalentes:

a) N es un submódulo radical de M

b) $\mathrm{Hom}\,(N\,,\, {}^{M}\!/\!_{N}) = 0$

c) $t_{\chi\left({}^{M}\!/\!_{N}\right)}(M) = N$

d) $t_{\Xi(N)}(M) = t_{\chi\left({}^{M}\!/\!_{N}\right)}(M)$

e) $t_{\Xi(N)}(M) = N$

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b) :

Como N es un submódulo radical de M existe $\sigma \in$ **R-TORS** tal que $N = t_\sigma(M)$. Entonces Hom $(N, M/N) = 0$.

b) $\Rightarrow$ c) :

Sea $K = t_{\chi(M/N)}(M)$. Como Hom $(N, M/N) = 0$, se tiene que $N \in T_{\chi(M/N)}$. Luego $N \leq K$. Como $K \in T_{\chi(M/N)}$ entonces también $K/N \in T_{\chi(M/N)}$. Por otro lado $K/N \leq M/N \in F_{\chi(M/N)}$. Así debe suceder que $K/N = 0$, es decir, $K = N$.

c) $\Rightarrow$ d) :

Sea $K = t_{\Xi(N)}(M)$. Por hipótesis tenemos que $t_{\chi(M/N)}(M) = N \in T_{\Xi(N)}$. Luego $t_{\chi(M/N)}(M) \leq K$. Por otro lado, sea $f : K \to M/N$ cualquier morfismo y supongamos que $f \neq 0$. Como $K \in T_{\Xi(N)}$, por la proposición 4.4. existiría un monomorfismo $i : C \to M/N$ y un epimorfismo $g : N \to C$, con $C \neq 0$. Como $N = t_{\chi(M/N)}(M) \in T_{\chi(M/N)}$ entonces también $C \in T_{\chi(M/N)}$. Además, dado el morfismo i, $C \in F_{\chi(M/N)}$. Se tiene una contradicción, y por lo tanto $f = 0$. Esto demuestra que $K \in T_{\chi(M/N)}$. Por lo tanto $K \leq t_{\chi(M/N)}(M)$. Así se tiene la igualdad.

d) $\Rightarrow$ e):

Sea $K = t_{\Xi(N)}(M) = t_{\chi(M/N)}(M)$. Como $N \in T_{\Xi(N)}$ entonces $N \leq K$. Además como $K \in T_{\chi(M/N)}$, también $K/N \in T_{\chi(M/N)}$. Por otro lado $K/N \leq M/N \in F_{\chi(M/N)}$. Así que $K/N = 0$, es decir, $K = N$.

e) $\Rightarrow$ a):

Es obvio.

□

9.3. <u>Proposición:</u>

Dados $K \leq N \leq M$ en **R - Mod** se cumplen:

1) Si K es submódulo radical de M entonces K es submódulo radical de N.

2) Si N es submódulo radical de M entonces N/K es submódulo radical de M/K.

<u>Demostración:</u>

Sean $K \leq N \leq M$ en **R - Mod**.

1): Si K es submódulo radical de M, por la proposición 9.2 tenemos que $\mathrm{Hom}(K, M/K) = 0$. Sea $f : K \to N/K$ cualquier morfismo. Si $i : N/K \to M/K$ es la inclusión natural, entonces $if \in \mathrm{Hom}(K, M/K) = 0$, y como i es un monomorfismo entonces f = 0. Esto demuestra que Hom $(K, N/K) = 0$, es decir, K es submódulo radical de N.

2): Si N es submódulo radical de M se tiene que Hom (N , M/N) = 0 . Sea $f : N/K \to M/N$ cualquier morfismo y consideremos la proyección natural $p : N \to N/K$. Entonces $fp \in$ Hom (N , M/N) = 0 . Esto implica que Hom (N/K , M/N) = 0 . Por el tercer teorema de isomorfismo se tiene que Hom (N/K , $\dfrac{M/K}{N/K}$) = 0 , es decir, entonces N/K es submódulo radical de M/K.

□

9.4. Definición:

Dado $M \in$ **R - Mod** , un submódulo N de M se llama *semirradical* si existe una familia $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en **R - TORS** tal que $N = \bigcap_{\alpha \in I} t_{\sigma_\alpha}(M)$.

Los submódulos semirradicales generalizan a los submódulos radicales en el siguiente sentido:

9.5. Observación:

Si N es submódulo radical de M entonces N es submódulo semirradical de M.

□

9.6. Definición:

Dado $M \in$ **R - Mod** se define la *cápsula semirradical* de M como:

$$\mathcal{S}(M) = \bigcap \{ t_\sigma(EM) \mid M \le t_\sigma(EM) , \sigma \in \mathbf{R-TORS} \}$$

9.7. Observaciones:

Dado $M \in \mathbf{R}$ - **Mod** :

1) $M \leq \mathcal{S}(M) \leq E(M)$

2) $E(\mathcal{S}M) = E(M)$

3) $\mathcal{S}(M)$ es el menor submódulo semirradical de $E(M)$ que contiene a M

□

9.8. Proposición:

Dado $M \in \mathbf{R}$ - **Mod** se tiene que $\mathcal{S}(\mathcal{S}(M)) = \mathcal{S}(M)$.

Demostración:

Por la observación 9.7.2 se tiene para cada $\sigma \in$ **R - TORS** que $\mathcal{S}(M) \leq t_\sigma(E(\mathcal{S}M)) \Leftrightarrow \mathcal{S}(M) \leq t_\sigma(EM)$. Ahora bien , por la definición 9.6 $\mathcal{S}(M) \leq t_\sigma(EM) \Leftrightarrow M \leq t_\sigma(EM)$. Así que por la misma definición se concluye que $\mathcal{S}(\mathcal{S}(M)) = \mathcal{S}(M)$.

□

Las siguientes proposiciones describen los dos casos extremos para $\mathcal{S}(M)$, considerando la observación 9.7.1.

9.9. Proposición:

Dado $M \in \mathbf{R}$ - **Mod** se tiene que $\mathcal{S}(M) = M$ si y sólo si M es submódulo semirradical de $E(M)$.

Demostración:

Sea $M \in$ **R - Mod** .

$\Rightarrow$):

Se sigue de la observación 9.7.3.

$\Leftarrow$):

Si M es submódulo semirradical de $E(M)$ entonces $M = \bigcap_{\alpha \in I} t_{\sigma_\alpha}(EM)$ para cierta familia en **R- TORS** . Luego $S(M) \leq M$ y por lo tanto se tiene la igualdad.

□

9.10. Proposición:

$S(M) = E(M)$ para toda $M \in$ **R - Mod** si y sólo si **R - TORS** es estable.

Demostración:

$\Rightarrow$):

Sea $\sigma \in$ **R - TORS** y $M \in T_\sigma$. Entonces $M \leq t_\sigma(EM)$ y por lo tanto $E(M) = S(M) \leq t_\sigma(EM) \leq E(M)$. Así $E(M) = t_\sigma(EM) \in T_\sigma$. Se ha demostrado que toda $\sigma \in$ **R - TORS** es estable.

$\Leftarrow$):

Sea $\mathrm{M} \in$ **R - Mod** . Sea $\sigma \in$ **R - TORS** tal que $\mathrm{M} \leq \mathrm{t}_\sigma(E\mathrm{M})$. Como $\mathrm{t}_\sigma(E\mathrm{M}) \in \mathrm{T}_\sigma$ y σ es estable entonces $E(\mathrm{t}_\sigma(E\mathrm{M})) \in \mathrm{T}_\sigma$. Por otro lado como $\mathrm{t}_\sigma(E\mathrm{M}) \leq E\mathrm{M}$ entonces $E(\mathrm{t}_\sigma(E\mathrm{M})) \leq E\mathrm{M}$. Y como $\mathrm{M} \leq E(\mathrm{t}_\sigma(E\mathrm{M}))$ entonces $E\mathrm{M} \leq E(\mathrm{t}_\sigma(E\mathrm{M}))$. Por lo tanto $E\mathrm{M} = E(\mathrm{t}_\sigma(E\mathrm{M})) = \mathrm{t}_\sigma(E\mathrm{M})$.

Así que por la definición 9.6 , $S(\mathrm{M}) = E(\mathrm{M})$.

□

10. TEORÍAS DE TORSIÓN SEMIHEREDITARIAS

A continuación se pretende definir una clase de teorías de torsión "intermedia" entre **R - TORS** y **R - tors**. Para esto partimos de la correspondencia biunívoca dada en el teorema 3.3 entre teorías de torsión hereditarias y radicales exactos izquierdos y de la caracterización de radicales exactos izquierdos dada por la siguiente proposición, cuya demostración puede encontrarse en [4].

10.1. Proposición:

Un radical r es exacto izquierdo si y sólo si para cada M $\in$ **R - Mod** y cada $N \leq M$ se tiene que $N \cap r(M) = r(N)$.

□

10.2. Definición:

Una teoría de torsión σ se llama *semihereditaria* si para cada M $\in$ **R - Mod** y cada submódulo semirradical N de M se tiene que $N \cap t_\sigma(M) \in T_\sigma$.

La clase de teorías de torsión semihereditarias se denotará por **R - sher**

La siguiente proposición da una caracterización de los elementos de **R - sher** en términos de su clase de torsión.

10.3. Proposición:

Para $\sigma \in$ **R - TORS** son equivalentes:

a) σ es una teoría de torsión semihereditaria

b) Para cada $M \in T_\sigma$ y $N \leq M \leq K$, si N es semirradical en K entonces $N \in T_\sigma$.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b):

Sea $M \in T_\sigma$ y $N \leq M \leq K$, donde N es semirradical en K. Entonces $N \cap t_\sigma(K) \in T_\sigma$. Como $M \in T_\sigma$ entonces $N \leq M \leq t_\sigma(K)$. Luego $N = N \cap t_\sigma(K) \in T_\sigma$.

b) $\Rightarrow$ a):

Sea $M \in$ **R - Mod** y N un submódulo radical de M. Por definición, $N = \bigcap_{\alpha \in I} t_{\sigma_\alpha}(M)$. Sea $L = t_\sigma(M)$. Entonces $N \cap L = \bigcap_{\alpha \in I} t_{\sigma_\alpha}(M) \cap t_\sigma(M)$ es semirradical en M. Como $N \cap L \leq L \leq M$ por hipótesis $N \cap L \in T_\sigma$.

□

La proposición anterior permite demostrar que **R - sher** es cerrada bajo conjunción arbitraria.

10.4. Proposición:

Dada una familia $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en **R - sher** se tiene que $\bigwedge_{\alpha \in I} \sigma_\alpha \in$ **R - sher**.

Demostración:

Consideremos una familia $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en **R - sher**. Sea M $\in T_{\bigwedge\limits_{\alpha\in I}\sigma_\alpha} = \bigcap\limits_{\alpha\in I} T_{\sigma_\alpha}$ y sean N $\leq$ M $\leq$ K tales que N es submódulo semirradical de K. Como M $\in T_{\sigma_\alpha}$ para cada $\alpha \in I$, por la proposición 10.3 se tiene que N $\in T_{\sigma_\alpha}$ para cada $\alpha \in I$, es decir, N $\in T_{\bigwedge\limits_{\alpha\in I}\sigma_\alpha}$. Nuevamente por la proposición 10.3 se concluye que $\bigwedge\limits_{\alpha\in I}\sigma_\alpha$ es una teoría de torsión semihereditaria.

□

Las siguientes proposiciones son, respectivamente, una condición necesaria y otra condición suficiente para que una teoría de torsión sea semihereditaria, en términos de su clase libre de torsión. Estas condiciones hacen referencia al hecho de que una clase libre de torsión hereditaria es cerrada bajo extensiones esenciales.

10.5. Proposición:

Dada $\sigma \in$ **R - sher** y M $\in$ **R - Mod**, si N es un submódulo semirradical y esencial de M y N $\in F_\sigma$ entonces M $\in F_\sigma$.

Demostración:

Sean $\sigma \in$ **R - sher**, M $\in$ **R - Mod** y N un submódulo semirradical, esencial y libre de torsión de M. Como N es semirradical en M y $\sigma \in$ **R - sher** entonces $N \cap t_\sigma(M) \in T_\sigma$. Luego $N \cap t_\sigma(M) \leq t_\sigma(M) = 0$. Como N es esencial en M entonces $t_\sigma(M) = 0$, es decir, M $\in F_\sigma$.

□

10.6. Proposición:

Sea $\sigma \in$ **R - TORS** con la propiedad de que para cada diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & K & \to & L \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & N & \to & M \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 \end{array}$$

donde K es un submódulo semirradical de L , y N es un submódulo esencial de M, si $N \in F_\sigma$ entonces $M \in F_\sigma$. Entonces $\sigma \in$ **R - sher** .

Demostración:

Sea $\sigma \in$ **R - TORS** con la propiedad. Sea N un submódulo semirradical de M. En ese caso $N \cap t_\sigma(M)$ también es semirradical en M . Sea $i : N \cap t_\sigma(M) \to M$ la inclusión natural. Se demostrará que $N \cap t_\sigma(M) \in T_\sigma$. Sea $L \in F_\sigma$ y consideremos un morfismo $f : N \cap t_\sigma(M) \to L$. Sea $L' = \mathrm{Im}(f)$. Considerando la inclusión $j : L' \to E(L')$ y como $E(L')$ es inyectivo, existe un morfismo $g : M \to E(L')$ tal que $gi = jf$. Sea $K = \mathrm{Im}(g)$: Entonces se tiene que $L' \leq K \leq E(L')$, de donde L' es esencial en K. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & N \cap t_\sigma(M) & \xrightarrow{i} & M \\ & & \downarrow f & & \downarrow g \\ 0 & \to & L' & \xrightarrow{k} & K \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 \end{array}$$

donde k es la inclusión natural. Por la propiedad que cumple σ se tiene que $K \in F_\sigma$. Por lo tanto $g(N \cap t_\sigma(M)) \leq g(t_\sigma(M)) \in T_\sigma \cap F_\sigma = 0$. Es decir, $kf = gi = 0$, y como k es monomorfismo entonces $f = 0$. Esto demuestra que $N \cap t_\sigma(M) \in T_\sigma$. Así que por definición $\sigma \in$ **R - sher** .

□

11. APLICACIONES A LAS RETÍCULAS Z - TORS y Z - tors

Aunque la descripción completa de **Z - TORS** es todavía un problema abierto, con los resultados que se han obtenido en el presente trabajo es posible ubicar a teorías de torsión importantes, así como describir ciertos átomos y el hecho de que existe un único coátomo dentro de **Z - TORS** .

Denotemos por τ_g a la teoría de torsión de Goldie en **Z - tors**. Son hechos conocidos que $\tau_g = \chi(\mathbf{Z}) = \xi(\mathbf{S})$. A continuación se estudian las teorías de torsión correspondientes en **Z - TORS**, $\Xi(\mathbf{S})$ y $\mathrm{X}(\mathbf{Z})$.

Recuérdese que el corolario 4.7 dice que en cualquier anillo R la teoría de torsión $\Xi(\mathbf{S})$ es hereditaria y que $\Xi(\mathrm{S})$ es hereditaria para cada $\mathrm{S} \in \mathbf{S}$, y por la proposición 5.2.3 se tiene $\Xi(\mathbf{S}) = \mathrm{OH}(\Xi(\mathbf{S})) = \mathrm{O}(\xi(\mathbf{S}))$, y análogamente tenemos que $\Xi(\mathrm{S}) = \mathrm{O}(\xi(\mathrm{S}))$ para cada módulo simple S. Es un hecho conocido que las teorías de torsión $\xi(\mathrm{S})$ con $\mathrm{S} \in \mathbf{S}$ constituyen los átomos de **R - tors** . De manera que en **Z - tors** se tiene que $\Xi(\mathbf{Z}_p) = \mathrm{O}(\xi(\mathbf{Z}_p))$ y los átomos son $\xi(\mathbf{Z}_p)$.

Las siguientes proposiciones muestran la ubicación de $\mathrm{X}(\mathbf{Z})$ en **Z - TORS**.

11.1. Proposición:

La teoría de torsión X(**Z**) no es hereditaria.

Demostración:

Consideremos **Q**, el grupo aditivo de los números racionales y un morfismo $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$ y supongamos que $\mathrm{Im}(f) \neq 0$. Entonces $\mathrm{Im}(f) \cong \mathbf{Z}$ y así existe un epimorfismo $g : \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$. Como **Z** es proyectivo entonces sería un sumando directo de **Q** , lo cual es imposible. Por tanto $f = 0$, es decir, $\mathbf{Q} \in T_{X(Z)}$. Por otro lado **Z** es un subgrupo de **Q** tal que $\mathbf{Z} \notin T_{X(Z)}$.

□

11.2. Corolario:

$$O(\tau_g) < X(\mathbf{Z})$$

Demostración:

Por la proposición 5.3.2 tenemos que $h(X(\mathbf{Z})) = \chi(\mathbf{Z})$ y como $X(\mathbf{Z})$ no es hereditaria entonces por la observación 5.2.4 tenemos que $O(\tau_g) = O(\chi(\mathbf{Z})) = Oh(X(\mathbf{Z})) < X(\mathbf{Z})$.

□

11.3. Proposición:

$X(\mathbf{Z})$ es el elemento mayor de la clase $\{\sigma \in \mathbf{Z} - \mathbf{TORS} \mid \sigma \neq \chi\}$.

Demostración:

Observemos primero que $X(\mathbf{Z}) \neq \chi$, pues de otra forma $X(\mathbf{Z})$ sería hereditaria y ésto contradiría a la proposición 11.1. Ahora consideremos $\sigma \in \mathbf{Z}$ - **TORS** tal que $\sigma \neq \chi$ y supongamos que existe $M \in T_\sigma$ y un morfismo distinto de cero $M \to \mathbf{Z}$. Pero en ese caso existe un epimorfismo $M \to \mathbf{Z}$ y por lo tanto $\mathbf{Z} \in T_\sigma$. Esto implicaría que $\chi = \Xi(\mathbf{Z}) \leq \sigma$, lo cual es una contradicción. Se ha demostrado que $\sigma \leq X(\mathbf{Z})$.

□

11.4. Corolario:

$X(\mathbf{Z})$ es el único coátomo en $\mathbf{Z}$ - **TORS**.

□

Se ha hecho ya referencia a los átomos en $\mathbf{Z}$ - **tors**. A continuación se tratará la cuestión sobre los átomos en $\mathbf{Z}$ -**TORS** . Primeramente se hará referencia a un resultado conocido.

11.5. Lema:

Sea p un primo. Si existe un epimorfismo $\mathbf{Z}_{p^\infty} \to N$ distinto de cero entonces $N \cong \mathbf{Z}_{p^\infty}$.

□

11.6. Proposición:

Para cada primo p se cumple $\xi(\mathbf{Z}_p) = \xi(\mathbf{Z}_{p^\infty})$

Demostración:

Como $\mathbf{Z}_p \leq \mathbf{Z}_{p^\infty}$ se tiene que $\mathbf{Z}_p \in T_{\xi(\mathbf{Z}_{p\infty})}$. Por lo tanto $\xi(\mathbf{Z}_p) \leq \xi(\mathbf{Z}_{p^\infty})$.

Por otro lado si $f : \mathbf{Z}_{p^\infty} \to E(\mathrm{N})$ es un morfismo distinto de cero entonces por el lema 11.5 se cumple que $\mathrm{Im}(f) \cong \mathbf{Z}_{p^\infty}$. Pero entonces habría un monomorfismo $\mathbf{Z}_p \to E(\mathrm{N})$. Esto demuestra que $F_{\xi(\mathbf{Z}_p)} \subseteq F_{\xi(\mathbf{Z}_{p\infty})}$ y por lo tanto se da la igualdad.

□

11.7. Proposición:

Para cada primo p se cumple $\Xi(\mathbf{Z}_{p^\infty}) < \Xi(\mathbf{Z}_p)$

Demostración:

Sea p un primo. Combinando las proposiciones 5.2.1, 5.3, 11.6 se tiene que $\Xi(\mathbf{Z}_{p^\infty}) \leq OH(\Xi(\mathbf{Z}_{p^\infty})) = O(\xi(\mathbf{Z}_{p^\infty})) = O(\xi(\mathbf{Z}_p)) = \Xi(\mathbf{Z}_p)$. Se demostrará que $\Xi(\mathbf{Z}_{p^\infty}) < OH(\Xi(\mathbf{Z}_{p^\infty}))$.

Obsérvese que $\mathbf{Z}_p \leq \mathbf{Z}_{p^\infty}$. Ahora supongamos que $\mathbf{Z}_p \in T_{\Xi(\mathbf{Z}_{p\infty})}$. Por la proposición 4.5 debería existir un monomorfismo $C \to \mathbf{Z}_p$ y un epimorfismo $\mathbf{Z}_{p^\infty} \to C$, con $C \neq 0$. Pero entonces $C \cong \mathbf{Z}_p$, lo cual contradice el lema 11.5. Por lo tanto $\mathbf{Z}_p \notin T_{\Xi(\mathbf{Z}_{p\infty})}$. Esto demuestra que $\Xi(\mathbf{Z}_{p^\infty})$ no es hereditaria y por la proposición 5.2.3 se da la desigualdad estricta. □

Esta última proposición implica que si bien para cada primo p, $\xi(\mathbf{Z}_p)$ es un átomo en **Z-tors** , no lo son vistos como elementos de **Z - TORS** . La siguiente proposición nos dice específicamente quiénes son estos átomos.

11.8. <u>Proposición:</u>

Para cada primo p se cumple que $\Xi(\mathbf{Z}_{p^\infty})$ es un átomo en **Z - TORS** .

<u>Demostración:</u>

Sea $\sigma \in$ **Z - TORS** tal que $\xi \neq \sigma \leq \Xi(\mathbf{Z}_{p^\infty})$. Entonces debe existir $0 \neq M \in T_\sigma \subseteq T_{\Xi(\mathbf{Z}_{p^\infty})}$. Por la proposición 4.5 existe un monomorfismo $C \rightarrow M$ y un epimorfismo $\mathbf{Z}_{p^\infty} \rightarrow C$, con $C \neq 0$. Por el lema 11.5 se tiene que $C \cong \mathbf{Z}_{p^\infty}$ y por lo tanto hay un monomorfismo $\mathbf{Z}_{p^\infty} \rightarrow M$. Como $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ es inyectivo entonces es sumando directo de M, pero ésto implica que existe un epimorfismo $M \rightarrow \mathbf{Z}_{p^\infty}$. Luego $\mathbf{Z}_{p^\infty} \in T_\sigma$, es decir, $\Xi(\mathbf{Z}_{p^\infty}) = \sigma$. Esto demuestra la proposición.

□

11.9. <u>Proposición:</u>

Para cada $\sigma \in$ **Z - TORS** tal que $\sigma \neq \xi$ existe un primo p tal que $\Xi(\mathbf{Z}_{p^\infty}) \leq \sigma$.

Demostración:

Sea $\sigma \in$ **Z** - **TORS** tal que $\sigma \neq \xi$. Entonces existe $0 \neq M \in T_\sigma$. Siendo $\prod_{p\ primo} \mathbf{Z}_{p^\infty}$ un cogenerador de **Z** - **Mod** existe un monomorfismo f: $M \to \left(\prod_{p\ primo} \mathbf{Z}_{p^\infty} \right)^A$.

Consideremos las proyecciones naturales $\pi_q^a : \left(\prod_{p\ primo} \mathbf{Z}_{p^\infty} \right)^A \to \prod_{p\ primo} \mathbf{Z}_{p^\infty} \to \mathbf{Z}_{q^\infty}$.

Como $M \neq 0$ existe $a \in A$ y un primo q tales que $\pi_q^a \neq 0$.

Ahora bien, dado un epimorfismo distinto de cero $\mathbf{Z}_{q^\infty} \to L$ se tiene por el lema 11.5 que $L \cong \mathbf{Z}_{q^\infty}$. Pero entonces hay un monomorfismo distinto de cero $\mathrm{Im}\,(\pi_q^a f) \to L$. Esto demuestra, por la proposición 4.5, que $\mathbf{Z}_{q^\infty} \in T_{\Xi(M)}$. Por lo tanto $\Xi(\mathbf{Z}_{q^\infty}) \leq \Xi(M) \leq \sigma$.

□

11.10. Corolario:

Los únicos átomos en **Z-TORS** son los elementos del conjunto $\left\{ \Xi\left(\mathbf{Z}_{p^\infty}\right) \mid p \text{ primo} \right\}$.

□

A continuación se estudiará la teoría de torsión cuya clase de torsión está generada por la clase **E** de los módulos inyectivos.

Z es un anillo hereditario y neteriano. Esto implica que la clase **E** (que en este caso son precisamente los grupos abelianos divisibles) es una clase de torsión, que no es hereditaria. Llamemos a la teoría de torsión correspondiente $\varepsilon = (\mathbf{E}\ ,\ \boldsymbol{R})$, donde es la clase de los módulos inyectivos y $\boldsymbol{R}$ denota la clase libre de torsión , que consta de los grupos abelianos *reducidos*, que se caracterizan por no contener submódulos inyectivos. Así que en este caso $\Xi(\mathbf{E}) = \varepsilon$, y por el corolario 6.11 tenemos que $H^{-1}(\chi) = [\mathbf{E}, \chi]$.

Las siguientes proposiciones ubican la teoría de torsión ε en **Z - TORS**. Para demostrar la primera de ellas usaremos el siguiente lema:

11.11. Lema:

Todo grupo abeliano H tal que $pH = 0$ es un espacio vectorial sobre $\mathbf{Z}_p$.

□

11.12. Proposición:

En **Z - TORS** se cumple que $\varepsilon = X(S)$.

Demostración:

Para demostrar que $\varepsilon \leq X(S)$, consideremos un módulo inyectivo E . Dado un morfismo $f : E \rightarrow S$ distinto de cero, siendo S un módulo simple, se tendría que f es epimorfismo, y como **Z** es un anillo hereditario S sería inyectivo. Esto es una contradicción y por tanto $\mathrm{Hom}(E\ ,\ S) = 0$, es decir, $E \in T_{X(s)}$.

Por otro lado, si G es un $\mathbf{Z}$ - módulo que no es inyectivo, entonces no es divisible. Por lo tanto, existe un primo p tal que $pG < G$, es decir $M = G/pG \neq 0$. Por el lema 11.11 M es un espacio vectorial sobre $\mathbf{Z}_p$, y por tanto tiene un subgrupo maximal N. Entonces $M/N \neq 0$ es simple y la composición de proyecciones naturales $G \to M \to M/N$ es un morfismo distinto de cero. Así $G \notin T_{X(s)}$.

□

11.13. <u>Proposición:</u>

En **Z - TORS** se cumple que $X(S) < X(\mathbf{Z})$.

Consideremos $M \in T_{X(s)}$ y cualquier morfismo $f : M \to \mathbf{Z}$. Para cada primo p consideremos la proyección natural $g_p : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_p$. Entonces $g_p f = 0$, lo cual implica que $\mathrm{Im}(f) \leq p\mathbf{Z}$ para cada primo p. Luego $\mathrm{Im}(f) \leq \bigcap_{p\ primo} p\mathbf{Z} = 0$. Por lo tanto $M \in T_{X(z)}$ y así se tiene la desigualdad.

Para verificar la desigualdad estricta obsérvese que, por la proposición 5.3.2 tenemos que $h(X(\mathbf{Z})) = \chi(\mathbf{Z}) = \tau_g$ y por el corolario 7.3 tenemos que $h(X(\mathbf{S})) = \xi$. De manera que $X(\mathbf{Z}) \neq X(\mathbf{S})$.

□

11.12. <u>Proposición:</u>

$\varepsilon = \Xi(\mathbf{Q})$

Demostración:

$\leq$) : Obsérvese que para cada primo p hay un epimorfismo $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \cong \bigoplus_{q\ primo} \mathbf{Z}_{q^\infty} \to \mathbf{Z}_{p^\infty}$. Esto implica que para cada primo p, $\mathbf{Z}_{p^\infty} \in T_{\Xi(\mathbf{Q})}$. Por supuesto también $\mathbf{Q} \in T_{\Xi(\mathbf{Q})}$. Como todo inyectivo en **Z - Mod** se descompone como suma directa de inyectivos inescindibles, se concluye que $\varepsilon \leq \Xi(\mathbf{Q})$.

$\geq$) : Es obvio, puesto que Q es inyectivo.

□

11.13. Proposición:

$$\Xi\left(\bigoplus_{p\ primo} \mathbf{Z}_{p^\infty}\right) < \varepsilon$$

Demostración:

Como $\bigoplus_{p\ primo} \mathbf{Z}_{p^\infty}$ es un módulo inyectivo entonces $\Xi\left(\bigoplus_{p\ primo} \mathbf{Z}_{p^\infty}\right) \leq \varepsilon$.

Para verificar la desigualdad estricta se demostrará que $\mathbf{Q} \notin T_{\Xi(\oplus z_{p\infty})}$. De hecho $\mathbf{Q} \in F_{\Xi(\oplus z_{p\infty})}$, puesto que $\bigoplus_{p\ primo} \mathbf{Z}_{p^\infty} \in T_{\tau_g}$, $\mathbf{Q} \in F_{\tau_g}$ y así $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{p\ primo} \mathbf{Z}_{p^\infty}, \mathbf{Q}) = 0$.

□

11.14. Proposición:

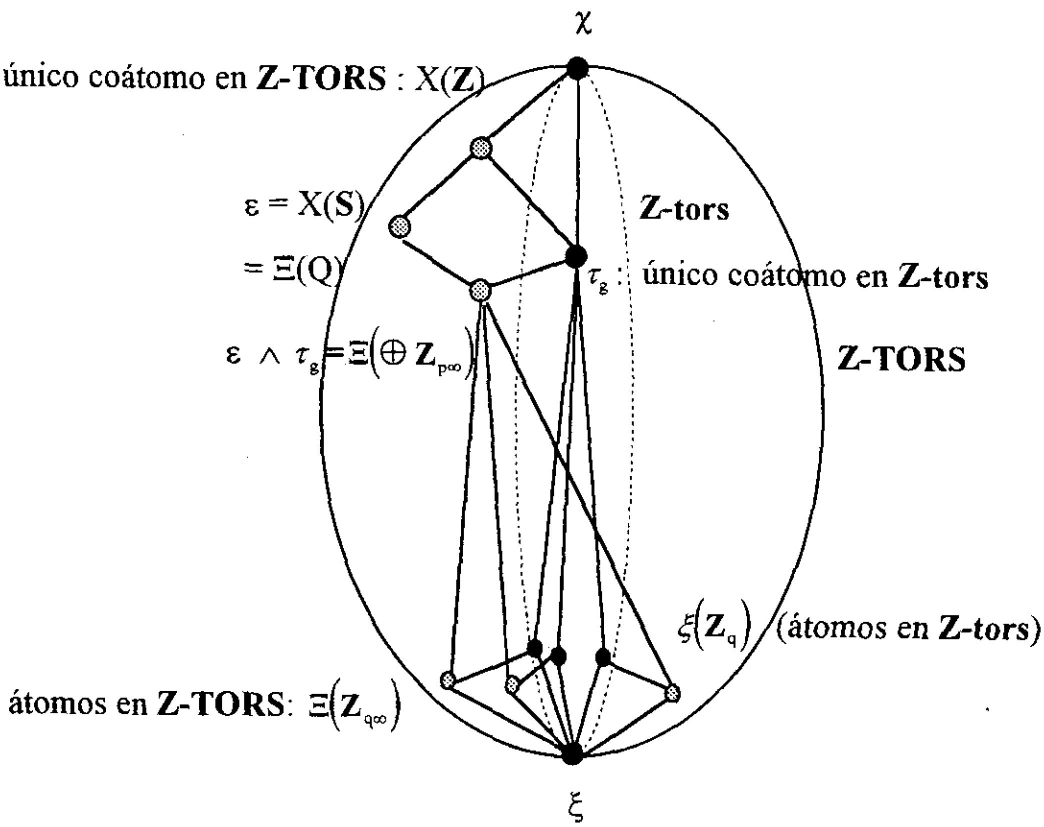
$$\Xi\left(\bigoplus_{\text{p primo}} \mathbf{Z}_{p^\infty}\right) = \varepsilon \wedge \tau_g$$

Demostración:

Como $\bigoplus_{\text{p primo}} \mathbf{Z}_{p^\infty}$ es un módulo inyectivo que es de *torsión Goldie* entonces $\Xi\left(\bigoplus_{\text{p primo}} \mathbf{Z}_{p^\infty}\right) \leq \varepsilon \wedge \tau_g$. Por otro lado si $M \in T_{\varepsilon \wedge \tau_g}$, se trata de un módulo inyectivo de torsión Goldie. Por lo tanto **Q** no puede ser sumando directo de M. Por tanto M es suma directa de copias de $\mathbf{Z}_{p^\infty}$, con p primo, es decir, $M \in T_{\Xi(\oplus Z_{p\infty})}$. Así se ha demostrado la igualdad.

□

Ahora podemos mostrar los siguientes diagramas. El primero resume los resultados obtenidos en este capítulo sobre la retícula **Z - TORS** y muestra a **Z - tors** como subretícula de la primera. El segundo y tercer diagramas muestran el comportamiento de los *morfismos* H y h respectivamente sobre las teorías de torsión estudiadas en este caso.



χ
único coátomo en **Z-TORS** : X(**Z**)
ε = X(**S**)
= Ξ(Q)
Z-tors
τ_g : único coátomo en **Z-tors**
ε ∧ τ_g = Ξ(⊕ $\mathbf{Z}_{p\infty}$)
Z-TORS
$\xi(\mathbf{Z}_q)$ (átomos en **Z-tors**)
átomos en **Z-TORS**: $\Xi(\mathbf{Z}_{q\infty})$
ξ

Diagrama 1

Z-TORS $\xrightarrow{\quad\mathbf{H}\quad}$ **Z-tors**

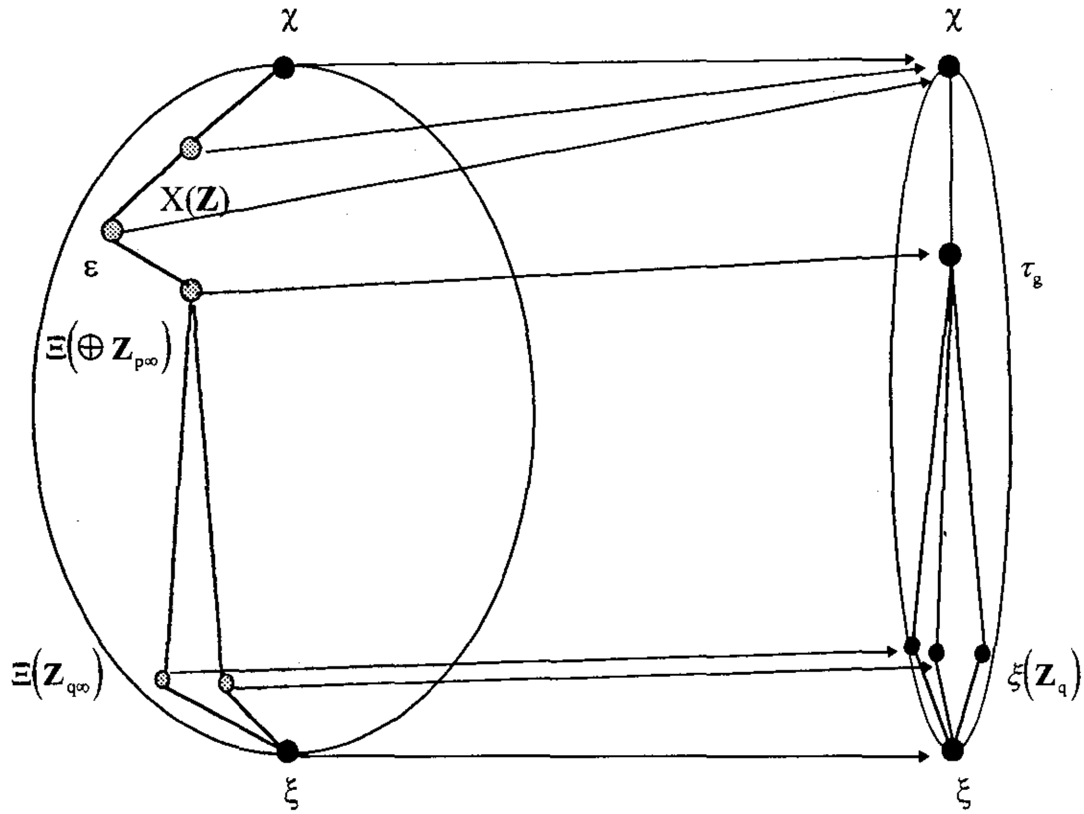
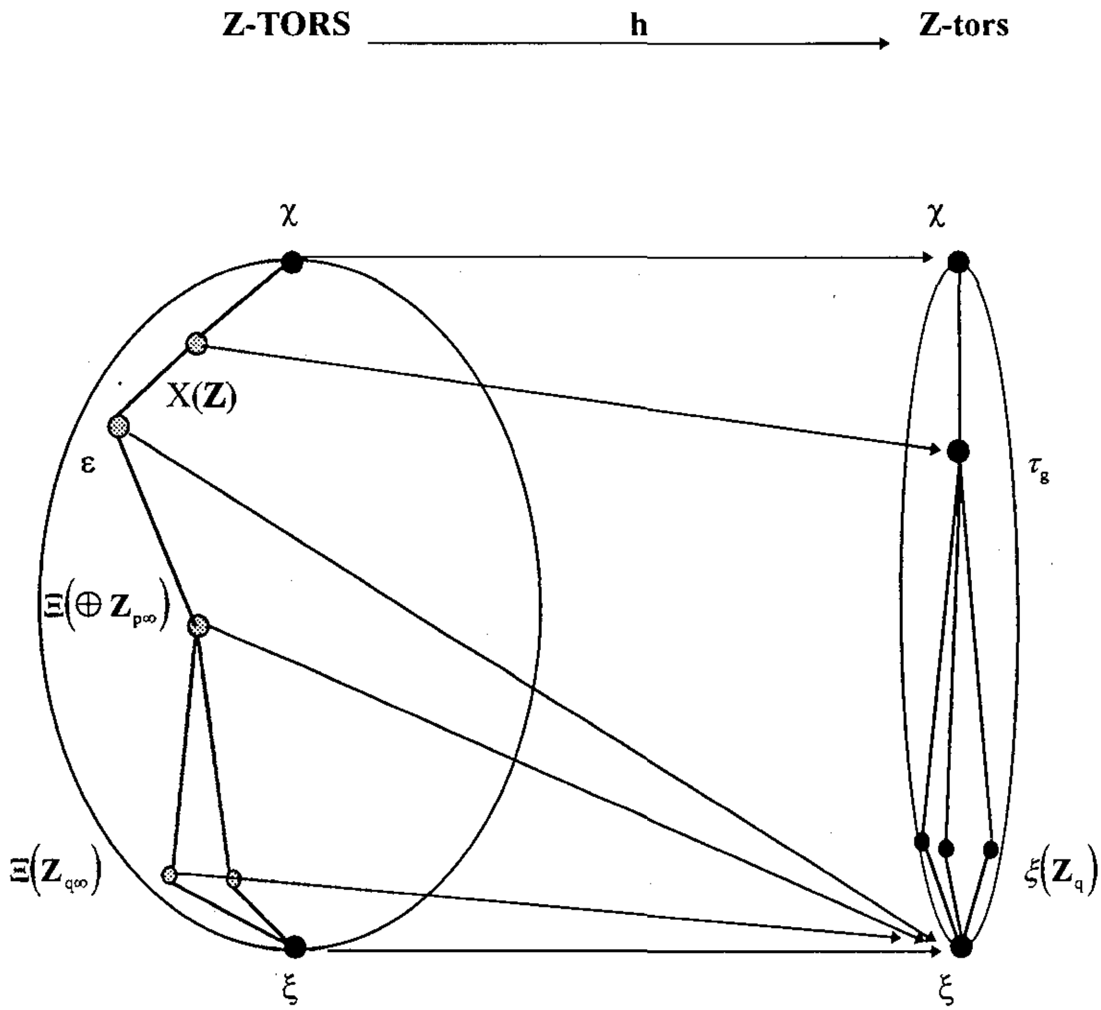


Diagrama 2



Z-TORS
h
Z-tors
χ
χ
X(Z)
ε
τ_g
$\Xi(\oplus \mathbf{Z}_{p\infty})$
$\Xi(\mathbf{Z}_{q\infty})$
$\xi(\mathbf{Z}_q)$
ξ
ξ

Diagrama 3

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Anderson, F. W., Fuller K. R, *Rings and Categories of Modules* ,
Springer - Verlag, New York (1974)

[2] Dickson, S., *A torsion theory for abelian categories* ,
Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 223 - 235.

[3] Fuchs, L., *Infinite Abelian Groups* ,
Academic Press , New York (1970)

[4] Fernández Alonso, R., *Algunas propiedades sobre clases TTF* ,
Tesis de Licenciatura, UNAM (1986)

[5] Gabriel, P., *Des catégories abéliennes* ,
Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323 - 448

[6] Golan, J., *Localization of Noncommutative Rings* ,
Marcel Dekker, New York (1975)

[7] Golan, J., *Torsion Theories* ,
Longman Scientific & Technical, Harlow (1975)

[8] Goodearl, K. R., *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules* ,
Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 33, Marcel Dekker, New York (1976)

[9] Herstein, I. N., *Topics in Algebra* ,
John Wiley & Sons, New York (1975)

[10] Raggi F., Ríos J., *Sublattices of R-tors associated to proper classes*,
Comm. In Algebra, 15(3) (1987), 555 - 573

[11] Stenström, B., *Rings of Quotients* ,
Springer Verlag, NewYork (1975)