

01173



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

3
Ref.

T E S I S

**CONDENSACIÓN DE PELÍCULA LAMINAR
CAUSADA POR UN FLUJO DE GRAETZ**

**P R E S E N T A D A P O R :
OSCAR ELADIO BAUTISTA GODÍNEZ
PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA
(MECÁNICA)**

**DIRIGIDA POR:
DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE**

CIUDAD UNIVERSITARIA, AGOSTO DE 1998.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

264436



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos:

Al Dr. Federico Méndez Lavielle, por su constante apoyo para llevar a cabo la realización del presente trabajo.

A la Familia Velázquez Jiménez, por el invaluable apoyo que me han brindado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACyT.

Índice General

1	Introducción.	8
2	Formulación del problema.	12
2.1	Descripción del problema físico.	12
2.2	Estimación de los órdenes de magnitud.	13
2.2.1	Órdenes de magnitud en la zona de condensado.	13
2.2.2	Órdenes de magnitud en la zona del flujo de Graetz.	20
2.3	Planteamiento matemático.	24
2.3.1	Zona de condensado.	24
2.3.2	Flujo de Graetz.	27
2.3.3	Placas.	28
3	Metodología de solución.	29
3.1	Solución mediante la integral de Stieltjes.	29
3.1.1	Flujo de Graetz.	29
3.1.2	Placas (Límite térmicamente delgado, $\frac{\alpha}{\varepsilon^2} \gg 1$).	35
3.2	Solución Asintótica	37
3.2.1	Generalidades.	37
3.2.2	Solución asintótica para $Ja \rightarrow 0$	38
3.3	Solución numérica.	48
3.3.1	Solución numérica de la ecuación integro-diferencial resultante para $\alpha \neq 0$	48
3.3.2	Solución numérica de la ecuación integral resultante para $\alpha = 0$	49

NOMENCLATURA

Definición de símbolos

b	profundidad unitaria de la placa perpendicular al plano del papel, (m)
c	calor específico del flujo forzado, (J/kg K)
c_c	calor específico del fluido condensado, (J/kg K)
f_c	función de corriente adimensional introducida en la ec.(2.57)
g	aceleración de la gravedad, (m/s ²)
h	espesor de las placas, (m)
h_f	calor sensible de vaporización, (J/kg)
H	entalpía del fluido condensado, (J/s)
h_{fg}	calor latente de condensación, (J/kg)
Ja	número de Jacob definido en la ec. (2.32)
Ku	número de Kutateladze
L	longitud de la placa, (m)
\dot{m}	tasa de flujo másico del fluido condensado, (Kg/s)
Nu_c	número de Nusselt definido en la ec. (3.44)
Nu_x	número de Nusselt definido en la ec. (3.25)
Nu_c^*	número de Nusselt definido en la ec. (3.45)
Pr	número de Prandtl del flujo de Graetz
Pr_c	número de Prandtl del fluido condensado
p	presión, (Pa)
Re_H	número de Reynolds del flujo de Graetz basado en la longitud característica H
Re_c	número de Reynolds del fluido condensado
Pe	número de Peclet del flujo forzado
q	flujo de calor en la interfaz líquido-vapor, (W/m ²)
q_p	flujo de calor desde el fluido condensado hacia la placa, (W/m ²)
q_c	flujo de calor absorbido por el condensado, (W/m ²)
T	temperatura, (K)
T_w	temperatura de la placa, (K)
T_c	temperatura del fluido condensado, (K)

T_{∞}	temperatura de la corriente libre del flujo de Graetz, (K)
T_s	temperatura del vapor saturado, (K)
u	velocidad de la corriente del flujo de Graetz, (m/s)
v	velocidad transversal del flujo de Graetz, (m/s)
\bar{U}	velocidad media del flujo forzado definida en la ec. (2.40), (m/s)
\bar{u}, \bar{v}	velocidades longitudinal y transversal en unidades físicas, (m/s)
u, v	velocidades longitudinal y transversal adimensionales
u_c, v_c	velocidades longitudinal y transversal del fluido condensado, (m/s)
x, y	coordenadas Cartesianas
Y	coordenada transversal adimensional del flujo de Graetz definida en la ec. (2.67)
Z	coordenada transversal adimensional de la placa definida en la ec. (2.72)
Griegos	
α	parámetro adimensional de conducción de calor definido en la ec. (2.53)
β'	parámetro adimensional definido en la ec. (3.37)
Δ	espesor normalizado de la capa de condensado
δ	espesor de la capa del flujo forzado, (m)
δ_c	espesor de la capa de condensado, (m)
δ_{cL}	espesor de la capa de condensado en $\chi = 1$, (m)
ε	razón de esbeltez de la placa, $\varepsilon = h/L$
η_c	coordenada transversal adimensional para el fluido condensado
γ	parámetro adimensional definido en la ec. (2.31)
$\Gamma(a, x)$	función gamma incompleta
$\Gamma(n)$	función gamma completa
$\Gamma(x)$	flujo másico de condensado por unidad, (kg/m s)
ψ	variable interna adimensional definida en la ec. (2.56)
ψ	espesor adimensional de la capa de condensado definido en la ec. (3.68)
ϕ	función adimensional introducida en la ec.(3.91)
Φ	temperatura adimensional definida en la ec. (3.87)
φ	variable interna adimensional definida en la ec. (3.8)
λ	conductividad térmica del flujo de Graetz, (W/m K)

λ_c	conductividad térmica de la fase condensada, (W/m K)
λ_w	conductividad térmica de la placa, (W/m K)
μ	viscosidad dinámica del flujo forzado, (kg/s m)
μ_c	viscosidad dinámica del fluido condensado, (kg/s m)
ν	coeficiente de viscosidad cinemática del flujo forzado, (m^2/s)
ν_c	coeficiente de viscosidad cinemática del fluido condensado, (m^2/s)
Ω	espesor adimensional de la capa de condensado definido en la ec. (3.87)
Ω	constante definida en la ec. (3.35)
ρ	densidad del flujo de Graetz, (kg/m^3)
ρ_c	densidad del fluido condensado, (kg/m^3)
ρ_v	densidad del vapor saturado, (kg/m^3)
θ	temperatura adimensional del flujo de Graetz
θ_w	temperatura adimensional de la placa
θ_w^l	temperatura adimensional de la placa en el borde de entrada
θ_c	temperatura adimensional de la capa de condensado
ξ	coordenada interna adimensional definida en la ec. (3.1)
σ	coordenada transversal normalizada definida en la ec. (3.68)
χ	coordenada longitudinal adimensional
χ'	variable muda en la dirección longitudinal
ζ	coordenada interna adimensional definida en la ec. (2.69) y (3.79)

Subíndices

c	referente al fluido condensado
e	referente para $\alpha = 0$
l	referente a condiciones en el borde superior de la placa
L	referente a condiciones en el borde de salida de la placa
w	condiciones en la pared

RESUMEN

En el presente trabajo se analiza mediante técnicas de perturbación y numéricas, el proceso de condensación de un vapor saturado en contacto con los lados externos de dos placas delgadas, paralelas y verticales, causado por un flujo forzado de enfriamiento entre ellas (Flujo de Graetz), en el cual el perfil de velocidades es el correspondiente al flujo de Hagen-Poiseuille para placas planas y paralelas. Los efectos de conducción de calor longitudinal en las placas son considerados. Debido a la conductividad térmica finita de las placas, un gradiente de temperaturas aparece dentro de éstas, cambiando el carácter del problema de parabólico a elíptico. Las ecuaciones de balance de momentum y energía son reducidas a un sistema de ecuaciones integro-diferenciales con siete parámetros adimensionales: los números de Prandtl (Pr_c) y Jakob (Ja) del fluido condensado, los números de (Pr) y Peclet (Pe) del fluido de enfriamiento, una conductividad térmica adimensional de las placas α , la cual representa la competencia entre el flujo de calor conducido a través de la placa y el flujo de calor transferido hacia la placa desde la fase condensada. La razón de esbeltez de las placas ε y la razón de la resistencia térmica de la capa de condensado que se forma en las superficies externas de las placas, a la resistencia del flujo de Graetz β' .

Para obtener el espesor de la capa de condensado a lo largo de las placas y de igual forma la distribución de la temperatura en las mismas, las ecuaciones de balance acopladas son integradas en el límite asintótico $Ja \rightarrow 0$. Para valores finitos de los parámetros α y β' , este trabajo demuestra que el efecto de conducción de calor a través de las placas modifica sustancialmente la solución clásica de Nusselt. Dos términos de las expansiones asintóticas, para el caso límite de $\alpha \rightarrow \infty$ y β' finito son suficientes para reproducir la distribución de temperatura en la placas y el crecimiento del espesor del condensado sobre éstas con muy buena precisión, aun para valores de α de orden unidad.

Finalmente, las ecuaciones de balance integro-diferenciales son resueltas numéricamente con el fin de establecer una comparación con la solución asintótica del problema, ésto se lleva a cabo para validar la solución del problema.

Capítulo 1

Introducción.

Los condensadores constituyen relevantes sistemas para la Ingeniería térmica en los cuales se llevan a cabo en general, diferentes procesos combinados de intercambio térmico, a saber: conducción, radiación y convección. Los condensadores son ampliamente usados con características únicas para favorecer el mecanismo de transferencia de calor en el lado de condensación. Si un vapor entra en contacto con una superficie cuya temperatura se encuentra por debajo de la temperatura de saturación correspondiente, el vapor empezará a condensarse. Si la condensación toma lugar continuamente sobre la superficie y el líquido condensado se remueve de la superficie por el movimiento resultante debido a la fuerza de la gravedad, entonces la superficie condensante usualmente se cubre con una capa delgada de líquido, a esta situación se le conoce como *condensación de película*. Por otro lado, bajo ciertas condiciones, como por ejemplo si manchas de aceite están presentes durante la condensación del vapor sobre superficies altamente pulidas, la película de condensado se divide en pequeñas gotas, a esta situación se le denomina *condensación por gotas*. En ambos procesos se habla de la *condensación heterogénea*.

Sin considerar cuál es la forma del proceso de condensación, la presencia del fluido condensado actúa como una barrera para la transferencia de calor desde el vapor hacia la superficie metálica. El proceso de condensación de película es el que ofrece mayor resistencia térmica al compararlo con la condensación por gotas; si el vapor es una mezcla que contiene algunos gases no condensables, éstos actúan como una resistencia al flujo de calor en el lado condensante debido a que el vapor debe de difundirse a través de los gases no condensables antes de que entre en contacto con la superficie fría. Por lo tanto, un claro entendimiento del mecanismo

de transferencia de calor y una predicción precisa del coeficiente de transferencia de calor para vapores condensables con y sin presencia de gases no condensables son de suma importancia en el diseño de condensadores. Como ejemplo, se puede mencionar que alguno de los ejemplos típicos de intercambiadores de calor, en los que se lleva a cabo el proceso de condensación de un vapor puro, se encuentran los condensadores de plantas generadoras de energía eléctrica.

La literatura especializada existente en el diseño de intercambiadores de calor [24], de manera simplificada, supone condiciones isotérmicas en los procesos en los que se lleva a cabo el proceso de intercambio térmico, evidentemente esta situación es hipotética, ya que realmente las condiciones de operación de dichos dispositivos varían en el espacio y el tiempo, de tal manera que al considerar condiciones isotérmicas en el diseño de éstos se están sobrestimando los coeficientes convectivos de calor. Lo anterior trae como consecuencia diseños de intercambiadores de calor ineficientes, lo que probablemente se traduzca en costos económicos elevados.

Sin embargo, poco se ha hecho para presentar trabajos en los que se consideren los efectos de la variación espacial de la temperatura en los procesos térmicos en los que se encuentra presente el fenómeno de *condensación*. Para el caso particular del diseño de intercambiadores de calor, en los que existe condensación de película, frecuentemente el diseño considera que la placa sobre la cual se lleva a cabo el proceso de condensación es isotérmica, contrariamente a lo que sucede en la realidad.

De lo anterior surge la inquietud de llevar a cabo un análisis que considere el acoplamiento que existe entre los diferentes procesos de transferencia de calor que componen el fenómeno en estudio: condensación de película laminar sobre las superficies laterales de placas planas y paralelas causada por un flujo de Graetz de enfriamiento, acoplada al problema de conducción de calor en las placas, considerando que la temperatura es variable en ellas; a este tipo de problemas se le ha denominado *problemas de transferencia de calor conjugados*.

Desde el análisis clásico de Nusselt [1] para la condensación de película sobre una placa vertical plana, los estudios teóricos de condensación de película laminar han recibido considerable atención en la literatura. Al igualar las fuerzas de gravedad y viscosas, Nusselt obtuvo el espesor de la capa de condensado de un vapor saturado en contacto con una placa vertical de temperatura uniforme, demostrando buena precisión con respecto a observaciones experimentales. Bromley [3], desarrolló un análisis simplificado, demostrando que es posible considerar

la capacidad térmica del condensado como una corrección de primer orden para reproducir un número de Nusselt modificado. Rohsenow [2], modificó el análisis de Nusselt al incluir los términos convectivos en la ecuación de balance de energía del condensado. Sin embargo, su análisis no incluyó las fuerzas inerciales. Sparrow y Gregg [4], introduciendo un tratamiento de capa límite y transformaciones de semejanza de las ecuaciones que describen el fenómeno físico, demostraron que los efectos inerciales en la transferencia de calor no son importantes si el número de Prandtl es mayor a 10 y son muy pequeños aun para números de Prandtl de orden unidad. La importancia de tales resultados ha sido bien reconocida y documentada por Merte [10]. Chen [5] resolvió las ecuaciones integrales de la capa límite por métodos de perturbación, incluyendo el efecto retardante del esfuerzo cortante del vapor sobre la película de condensado. Una comparación de los resultados obtenida por Sparrow y Gregg [4] con las obtenidas por Chen demuestran que la influencia del esfuerzo cortante en la interfase líquido-vapor es despreciable para altos números de Prandtl. Para tener una estimación más precisa, Koh *et al.* [6], incluyeron el esfuerzo cortante interfacial por el uso de ecuaciones simultáneas de las ecuaciones de capa límite en el vapor y condensado y concluyeron que el efecto del esfuerzo cortante es únicamente significativo cuando la razón de condensación es suficientemente alta. Resultados semejantes fueron obtenidos por Rose [11], usando una aproximación de semejanza, confirmando las ideas de Chen y obteniendo expresiones más precisas para el número de Nusselt. Recientemente Churchill [8] desarrolló una solución aproximada para el modelo de Koh *et al.*, incluyendo, en forma más general, el efecto de curvatura en la condensación. El estado del arte en el análisis de condensación de película laminar en placas verticales y otros procesos de condensación se encuentran en Rose [11] y más recientemente en Tanasawa [12].

Los estudios anteriores fueron aplicados a placas verticales isotérmicas, con temperatura conocida. Sin embargo, estudios teóricos de procesos de condensación de película con condiciones no isotérmicas han recibido poca atención en la literatura. En particular, Patankar y Sparrow [13] resolvieron el problema de condensación en una superficie extendida considerando la conducción de calor en una aleta acoplada con el proceso de condensación. Su solución numérica de las ecuaciones gobernantes confirma la influencia térmica de la superficie extendida no isotérmica en el proceso de condensación. Posteriormente, Wilkins [14] demostró que es posible obtener una solución analítica explícita para la formulación de Patankar y Sparrow. Para extender

esos casos particulares con condiciones no isotérmicas, Sarma *et al.* [16], estudiaron el proceso de condensación en una aleta plana vertical de espesor variable, acoplando las ecuaciones que describen el fenómeno físico, demostrando que la interacción entre la aleta y el líquido condensado, debida a la transferencia de calor, es muy importante. Browsers [15], recientemente llevó a cabo una análisis de la condensación de un vapor saturado puro sobre un canal con placas subenfriadas, incluyendo la interacción entre el líquido de enfriamiento con las placas y éstas a su vez con el condensado y el vapor. Él obtuvo la solución de las ecuaciones gobernantes en forma cerrada, confirmando que esta interacción ha sido tomada en cuenta para tener modelos más reales para este tipo de procesos. Finalmente, Méndez y Treviño [23] analizaron el proceso de condensación de película laminar causada por un flujo de enfriamiento impuesto sobre una placa plana y vertical, en la cual la temperatura varía a lo largo de ésta, obteniendo la solución clásica de Nusselt, como un caso particular del problema conjugado de transferencia de calor.

Finalmente, como aspecto fundamental, en el presente trabajo se analiza el proceso de condensación de película laminar sobre las superficies externas de un canal de placas planas, paralelas y verticales, producido por un flujo forzado de enfriamiento entre ellas (flujo de Graetz), caracterizándose dicho proceso, principalmente, el considerar en la solución del problema condiciones no isotérmicas en las placas, lo anterior conduce a obtener soluciones de problemas relacionados con la transferencia de calor más apegados a la realidad práctica (problemas conjugados de transferencia de calor), en los que se llevan a cabo procesos de intercambio térmico relacionados con el proceso de condensación.

Capítulo 2

Formulación del problema.

2.1 Descripción del problema físico.

El modelo físico en estudio se muestra en la Fig. 2.1. Dos placas delgadas, planas, paralelas y verticales de longitud L , espesor h y separación H entre ellas, se encuentran inmersas en un ambiente lleno de vapor saturado con una temperatura T_s . A su vez, un flujo convectivo de enfriamiento (flujo de Graetz) con temperatura $T_\infty < T_s$ y velocidad definida por el flujo de Hagen-Poiseuille, se impone entre las placas, de tal forma que se genera un flujo de calor desde la zona de vapor saturado y se crea una capa delgada de condensado; esta última cae debido a la acción de la gravedad sobre las superficies externas de las placas. Las capas de condensado se desarrollan incrementando su espesor aguas abajo. La densidad del fluido condensado, ρ_c , se asume constante y mucho mayor que la densidad del vapor, ρ_v . La existencia de la conductividad térmica finita de las placas permite que exista conducción de calor en la dirección longitudinal y transversal de las placas.

Para el análisis del problema físico, se considera un sistema coordenado cartesiano, cuyo origen se encuentra en el eje de simetría del canal de placas planas. El eje y apunta en la dirección normal a las placas, mientras el eje x apunta en la dirección paralela longitudinal de las mismas, es decir, en la dirección de la gravedad. Por simplicidad los bordes de las placas ($x = 0, x = L$) se consideran adiabáticos. Debido a la simetría geométrica y física del modelo, en el presente trabajo se formulan las ecuaciones que describen el problema únicamente para valores positivos de la coordenada y .

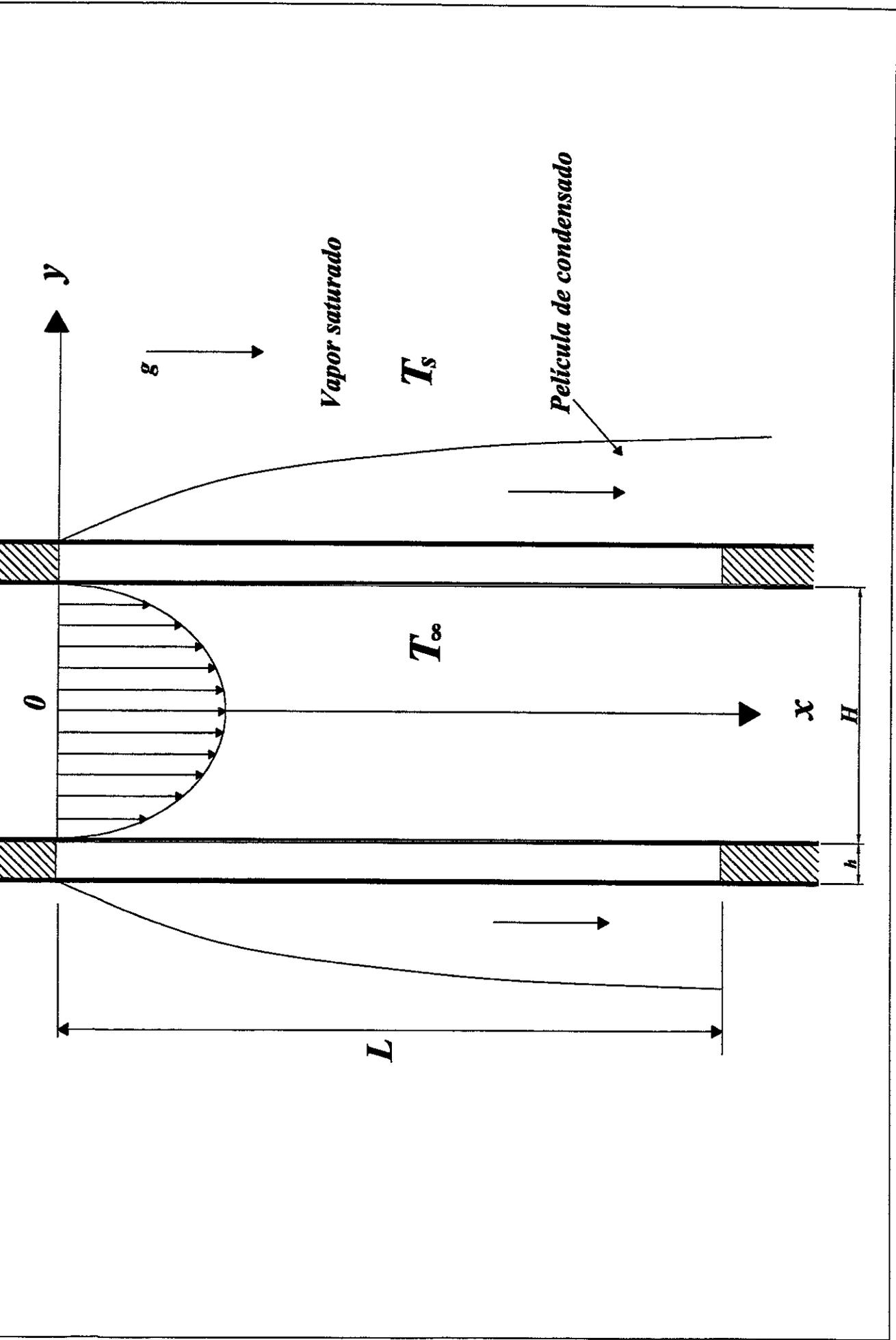


Fig. 2.1.- Diagrama esquemático del modelo físico estudiado

2.2 Estimación de los órdenes de magnitud.

El análisis de escala, frecuentemente es confundido con el análisis dimensional o con la adimensionalización de las ecuaciones gobernantes para llevar a cabo un análisis de perturbación o una simulación numérica. El objetivo del análisis de escala es usar los principios básicos de transferencia de calor para estimar órdenes de magnitud aproximados de las variables de interés. Esto significa que si una de las incógnitas de interés es el espesor de la capa límite en convección forzada, el objeto del análisis de escala es determinar cualitativamente la dependencia paramétrica del espesor sobre las variables físicas involucradas.

Cuando el análisis de escala se lleva a cabo apropiadamente, éste anticipa dentro de un factor de orden unidad los resultados producidos por análisis "exactos". Por lo tanto el valor del análisis de escala es muy significativo.

Por tal motivo, en esta sección se recurre al análisis de escala para determinar el orden de magnitud de las variables de interés en la zona de condensado y en el flujo de enfriamiento, tales como la velocidad de descenso de la película de condensado u_c , su espesor δ_c , la razón de flujo másico de condensado $\Gamma(x)$, y por el lado del flujo de Graetz, el espesor de la capa límite térmica δ , como primera aproximación a la solución del problema.

2.2.1 Órdenes de magnitud en la zona de condensado.

Existen varias complicaciones asociadas con la condensación de película. Ésta se origina en el borde de las placas y fluye hacia abajo debida a la influencia de la gravedad. El espesor de la capa de condensado δ_c y la razón de flujo másico de condensado $\Gamma(x)$ aumentará al incrementarse x debido a la continua condensación en la interfase líquido-vapor, la cual se mantiene a la temperatura de saturación del vapor, entonces hay transferencia de calor desde la interfase hasta la superficie de las placas las que se mantienen a $T_w < T_s$. En la mayoría de los casos el vapor puede ser sobrecalentado y puede ser parte de una mezcla que contiene uno o más gases no condensables. Además existe un esfuerzo cortante en la interfaz líquido-vapor, contribuyendo a que exista un gradiente de velocidades en el vapor; además la capa de condensado puede estar en el régimen turbulento.

Sin embargo, a pesar de las complejidades asociadas con la condensación de película, para

el análisis presente se pueden obtener resultados útiles haciendo las siguientes suposiciones:

i) Flujo laminar y propiedades constantes para la película de condensado.

ii) El gas es un vapor puro y se encuentra a temperatura uniforme. Si no existen gradientes de temperatura en el vapor, la transferencia de calor en la interfase líquido-vapor puede ocurrir únicamente por la condensación en la interfase.

iii) La temperatura de la superficie de la placa T_w es solo función de la coordenada x y se encuentra a una temperatura menor que la temperatura de saturación del vapor.

iv) El vapor se encuentra en reposo, de tal suerte que éste no ejerce fuerza de arrastre en el movimiento de condensado, esto finalmente se traduce en que el esfuerzo cortante en la superficie del líquido condensado es insignificante. Con esta suposición y las anteriores no hay necesidad de considerar la velocidad del vapor o capas límites térmicas en éste.

v) La transferencia de momentum y energía por convección en la película de condensado es insignificante. Esta suposición es razonable en virtud de que las velocidades asociadas con la película de condensado son bajas. De aquí que la transferencia de calor a través de la película ocurre únicamente por conducción, en tal caso la distribución de temperaturas en el condensado es lineal, además se considera que la conductividad térmica del líquido condensado, λ_c , es constante.

Como se muestra en la Fig 2.1, la condensación de película es un fenómeno de capa límite en sus aspectos esenciales. De acuerdo a esto y con las suposiciones anteriores, el análisis de la película de condensado se lleva a cabo considerando estado estacionario, usando las ecuaciones de momentum, continuidad y de la energía, las cuales para el caso de película delgada son:

$$\rho_c \left(u_c \frac{\partial u_c}{\partial x} + v_c \frac{\partial u_c}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_c \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + \mu_c \frac{\partial^2 u_c}{\partial y^2} + \rho_c g \quad (2.1)$$

$$\rho_c \left(u_c \frac{\partial v_c}{\partial x} + v_c \frac{\partial v_c}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_c \frac{\partial^2 v_c}{\partial x^2} + \mu_c \frac{\partial^2 v_c}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial x} + \frac{\partial v_c}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

$$\rho_c c_c \left(u_c \frac{\partial T_c}{\partial x} + v_c \frac{\partial T_c}{\partial y} \right) = \lambda_c \left(\frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

En las ecuaciones (2.1)-(2.4), ρ_c representa la densidad del líquido condensado, g es la aceleración de la gravedad, u_c y v_c son las velocidades del flujo de condensado en las direcciones x , y y respectivamente, p representa la presión dentro de la película de condensado, μ_c es la viscosidad dinámica del condensado y T_c es la temperatura del fluido condensado. Debe notarse en la ec.(2.1) la presencia del término $\rho_c g$, a éste se le denomina fuerzas de cuerpo o gravitacionales.

Considerando la aproximación de la capa límite ($y \sim \delta_c$, $\delta_c \ll L$, $x \sim L$, $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$), mediante un análisis de órdenes de magnitud, la ecuación de momentum en la dirección longitudinal, ec. (2.1), establece que

$$u_c \frac{u_c}{L} + v_c \frac{u_c}{\delta_c} \sim \frac{p}{\rho_c L} + \nu_c \frac{u_c}{L^2} + \nu_c \frac{u_c}{\delta_c^2} + \rho_c g, \quad (2.5)$$

en esta última se representa la escala de cada término que aparece en la ec. (2.1). Por otro lado, analizando la ecuación de continuidad, ec. (2.3), de la misma manera, se requiere que

$$\frac{u_c}{L} \sim \frac{v_c}{\delta_c} \quad (2.6)$$

Sustituyendo la ec. (2.6) en la ec. (2.5) se determina que los términos de inercia en esta última son de orden u_c^2/L ; por lo tanto, estos términos no pueden ser despreciados con respecto a los otros. Sin embargo, si la región de capa límite es muy delgada, tal que $\delta_c \ll L$, entonces el último término del lado derecho en la ec. (2.5) es el más representativo. Así, despreciando el término $\partial^2 u_c / \partial x^2$ con respecto al término $\partial^2 u_c / \partial y^2$, la ecuación de momentum, ec. (2.1), se puede escribir como

$$\rho_c \left(u_c \frac{\partial u_c}{\partial x} + v_c \frac{\partial u_c}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_c \frac{\partial^2 u_c}{\partial y^2} + \rho_c g \quad (2.7)$$

Si se procede de igual forma con la ecuación de momentum en la dirección transversal, ec (2.2), ésta se reduce a

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim 0 \quad (2.8)$$

es decir, la presión es una función únicamente de la posición longitudinal x , lo que significa

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} \quad (2.9)$$

Lo anterior sugiere que en la capa de condensado, la presión varía en la dirección vertical y por consiguiente la presión dentro de la capa de condensado es la misma que inmediatamente fuera de ella. Tomando en cuenta los órdenes de magnitud establecidos, se concluye que las ecuaciones de momentum se reducen a:

$$\rho_c \left(u_c \frac{\partial u_c}{\partial x} + v_c \frac{\partial u_c}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \mu_c \frac{\partial^2 u_c}{\partial y^2} + \rho_c g \quad (2.10)$$

Además, el gradiente de presión vertical en el líquido es el mismo que el gradiente de presión hidrostático en el vapor, es decir, $dp/dx = \rho_v g$, de aquí que la ec. (2.10) se puede reescribir como

$$\rho_c \left(u_c \frac{\partial u_c}{\partial x} + v_c \frac{\partial u_c}{\partial y} \right) = \mu_c \frac{\partial^2 u_c}{\partial y^2} + (\rho_c - \rho_v) g \quad (2.11)$$

y de manera equivalente, la ecuación de la energía, ec. (2.4), se puede escribir como

$$\rho_c c_c \left(u_c \frac{\partial T_c}{\partial x} + v_c \frac{\partial T_c}{\partial y} \right) = \lambda_c \frac{\partial^2 T_c}{\partial y^2} \quad (2.12)$$

Ahora bien, si se considera que los efectos de inercia son muy pequeños comparados con los efectos de fricción, debido a la suposición v), y que $\rho_v \ll \rho_c$, analizando la ec. (2.11) en términos de órdenes de magnitud se llega a

$$\frac{\mu_c u_c}{\delta_c^2} \sim (\rho_c - \rho_v) g \sim \rho_c \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_c} \right) g$$

de donde se demuestra directamente que la velocidad del fluido condensado es del orden

$$u_c \sim \left(\frac{g}{\nu_c} \right) \delta_c^2(x), \quad (2.13)$$

donde $\delta_c(x)$ es el espesor de la capa de condensado, la cual es una función desconocida de

la posición longitudinal, g es la aceleración de la gravedad y ν_c es el coeficiente de viscosidad cinemática de la película de condensado.

Tomando en cuenta la ec. (2.13), la producción de flujo másico de condensado por unidad de longitud b en la dirección perpendicular al plano de la Fig 2.1, $\Gamma(x)$, se puede obtener como

$$\Gamma(x) = \frac{\dot{m}(x)}{b} = \int_0^{\delta_c(x)} \rho_c u_c dy \sim \rho_c u_c \delta_c \quad (2.14)$$

de tal manera que se obtiene el flujo másico de condensado en función del espesor de la película de condensado:

$$\Gamma(x) = \frac{\dot{m}_x}{b} \sim \frac{\rho_c g}{\nu_c} \delta_c^3(x) \quad (2.15)$$

La variación específica con x de δ_c , y por lo tanto de $\Gamma(x)$, puede ser obtenida al aplicar conservación de masa y energía al elemento diferencial mostrado en la Fig. 2.2.

El balance de masa en el elemento diferencial, Fig. 2.2a, indica que

$$d\dot{m}_c \sim \dot{m}_{x+dx} - \dot{m}_x = \frac{d\dot{m}_x}{dx} dx + \dot{m}_x - \dot{m}_x \quad (2.16)$$

en la que el término \dot{m}_{x+dx} se ha expandido en series de Taylor, por lo tanto se tiene

$$d\dot{m}_c = d\dot{m}_x \quad (2.17)$$

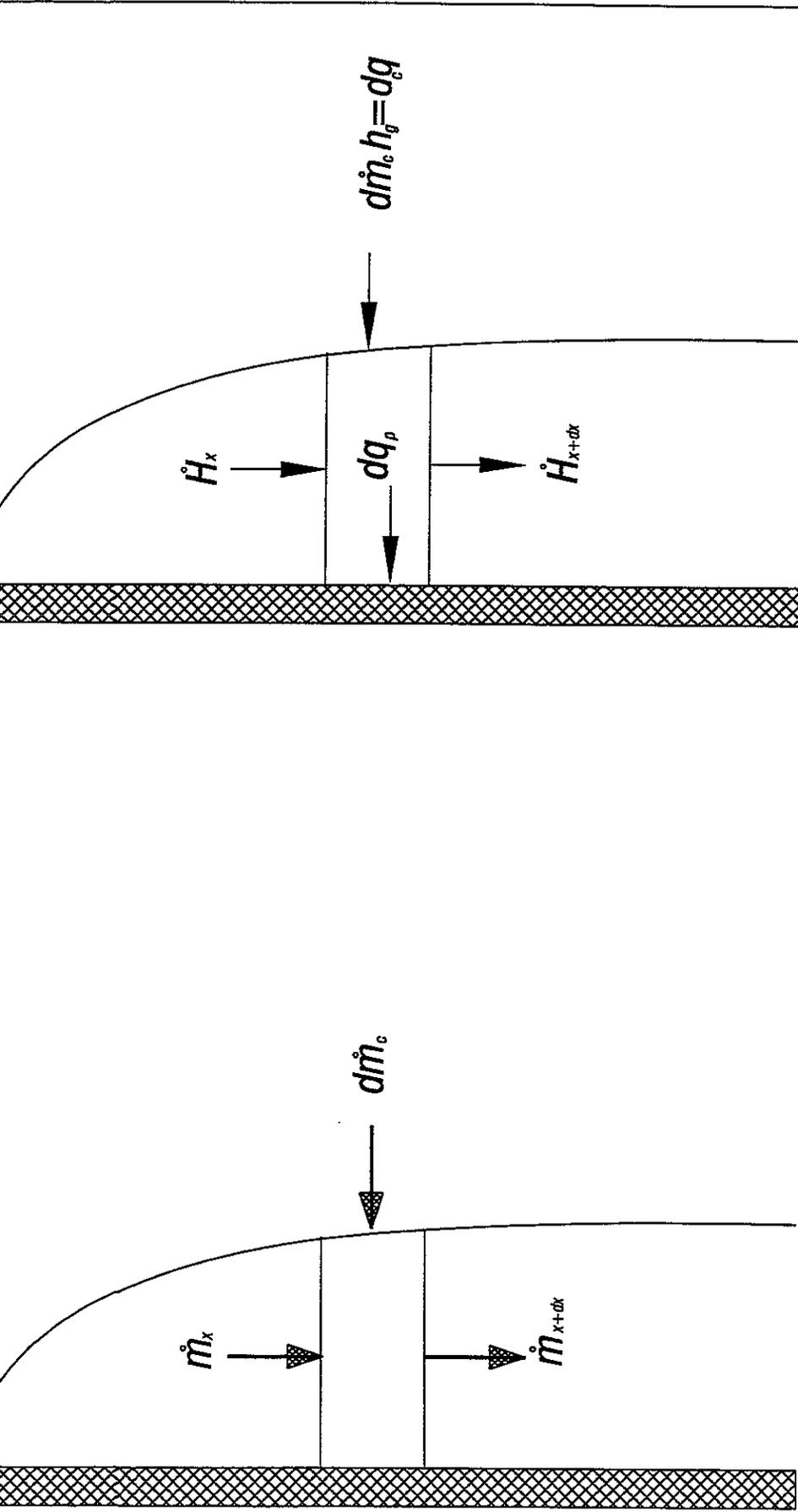
Por otro lado, al aplicar el balance de energía en el elemento diferencial mostrado en la Fig 2.2b, se obtiene

$$b dx dq_p = b dx h_g d\dot{m}_x - (\dot{H}_{x+dx} - \dot{H}_x) \quad (2.18)$$

donde $\dot{H}_x \approx \dot{m}_x h_f$ es la la razón de flujo de entalpía del condensado, $d\dot{m}_x h_g = d\dot{m}_c h_g = dq_c$ es el calor transferido desde el vapor a la película de condensado y dq_p es el calor transferido hacia las placa. La ec.(2.18) se puede reescribir como

$$dq_p = dq_c - \frac{1}{b} \frac{d\dot{H}_x}{dx} = dq_c - \frac{1}{b} \frac{d\dot{m}_x}{dx} h_f, \quad (2.19)$$

que al combinarla con la ec. (2.14) se llega a



(a) Balance de masa

(b) Balance de energía

Fig. 2-2. Volumen de control diferencial dentro de la película de condensado

$$dq_p \sim dq_c - \rho_c h_f \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_c(x)} u_c dy = dq_c - \frac{\partial}{\partial x} h_f \rho_c u_c \delta_c \quad (2.20)$$

de donde se puede estimar que el calor transmitido a lo largo de la longitud de la placa L , desde el vapor al condensado, está dado por

$$L q_c \sim L q_p + \rho_c u_c \delta_c h_f \quad (2.21)$$

Por otro lado, considerando el elemento diferencial de la Fig 2.2b, en una porción de la interfase líquido-vapor de profundidad unitaria b y longitud dx , el flujo de calor hacia la película de condensado, dq_c , debe ser igual al flujo de energía liberada debida a la condensación en la interfase

$$b dx dq_c = h_{fg} dm_c \Rightarrow dq_c = \frac{1}{b} \frac{dm_c}{dx} h_{fg} \quad (2.22)$$

y al considerar la ec. (2.14) del flujo másico de condensado y sustituyéndolo en la expresión anterior, se obtiene

$$dq_c = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_c} \rho_c u_c dy h_{fg}, \quad (2.23)$$

al llevar la integración en la ecuación anterior, el flujo de calor a través de la interfase líquido-vapor a lo largo de la longitud de la placa, L , está dado por

$$L q_c = \rho_c u_c \delta_c h_{fg} \quad (2.24)$$

Al sustituir la ec. (2.24) en la ec. (2.21), se obtiene

$$\frac{q_c L}{h_{fg}} \sim \rho_c u_c \delta_c(x) \sim \frac{q_p L}{h_{fg}} + \frac{\rho_c u_c \delta_c h_f}{h_{fg}} \quad (2.25)$$

la cual se simplifica como

$$\frac{q_p L}{h_{fg}} \sim \rho_c u_c \delta_c \left[1 - \frac{h_f}{h_{fg}} \right] \quad (2.26)$$

además, si se considera que $h_f/h_{fg} \ll 1$, el calor transferido hacia la placa, en términos de

órdenes de magnitud, está dado por

$$\frac{q_p L}{h_{fg}} \sim \rho_c u_c \delta_c(x) \quad (2.27)$$

Por otro lado, de la Ley de Fourier, el calor transferido hacia la placa es

$$q_p \sim \lambda_c \frac{\Delta T_c}{\delta_c(x)} \quad (2.28)$$

donde λ_c es la conductividad térmica del condensado y ΔT_c es el incremento de la temperatura a través de la película del condensado. Al sustituir la ec. (2.27) en (2.28) se obtiene el orden de magnitud de δ_c

$$\rho_c u_c \delta_c \sim \lambda_c \frac{L}{h_{fg}} \frac{\Delta T_c}{\delta_c} \quad (2.29)$$

y al sustituir el orden de magnitud de la velocidad de la película de condensado, ec. (2.13), en la ec. (2.29), se obtiene el orden de magnitud del espesor de la película de condensado, el cual está dado por la siguiente expresión:

$$\frac{\delta_c L}{L} \sim \left(\frac{Ja \Delta T_c}{\gamma \Delta T} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.30)$$

donde γ es un parámetro adimensional [9] definido como

$$\gamma = \frac{gL^3}{\nu_c^2} \gg 1 \quad (2.31)$$

y Ja corresponde al número de Jakob y representa la razón de energía térmica sensible absorbida por el líquido al calor latente del líquido durante la condensación, definido por

$$Ja = \frac{1}{Ku Pr_c} = \frac{c_c \Delta T_c}{h_{fg} Pr_c}, \quad (2.32)$$

en la relación anterior c_c es la capacidad térmica específica, Pr_c es el número de Prandtl, $Pr_c = \mu_c c_c / \lambda_c$, del fluido condensado, Ku representa el número de Kutateladse (Wetzler, 1985), $Ku = h_{fg} / c_c (T_s - T_\infty)$. En general, el número de Jakob es muy pequeño comparado con la unidad [9] y se puede usar la aproximación de la capa límite para el flujo de fluido condensado

en el límite $Ja/\gamma \rightarrow 0$. Por tanto, la velocidad adimensional o número de Reynolds para la fase condensada, $Re_c = u_c L/\nu_c$, asociado al proceso de condensación, es del orden de $Re_c = O(Ja\gamma)^{1/2}$. Sustituyendo la ec. (2.30) en la ec. (2.13), la velocidad del fluido condensado resulta

$$u_c \sim \frac{\sqrt{gLJa\Delta T_c}}{\sqrt{\Delta T}} \quad (2.33)$$

y de manera equivalente, al sustituir las ecs. (2.30) y (2.33) en la ec.(2.14), se obtiene el orden de magnitud de la tasa de producción de condensado, expresado como

$$\frac{d\dot{m}_x}{dx} \sim \frac{\lambda_c(\Delta T_c)}{\delta_c(x) h_{fg}} \quad (2.34)$$

2.2.2 Órdenes de magnitud en la zona del flujo de Graetz.

De la misma forma en que se obtuvieron los órdenes de magnitud de las variables de interés en la sección anterior, a continuación se procederá a realizar el mismo análisis para obtener el orden de magnitud de la capa límite térmica δ en la zona del flujo forzado de enfriamiento. Las ecuaciones de conservación de masa, momentum y energía, en estado estacionario, para el flujo de enfriamiento son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.35)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.36)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.37)$$

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.38)$$

Las anteriores ecuaciones serán analizadas basándose en las siguientes suposiciones:

- i) *Flujo completamente desarrollado entre las placas* ($v = 0, \partial u/\partial x = 0, u = u(y)$).

ii) La temperatura del fluido que se encuentra en contacto con la placa adquiere la temperatura de ésta.

iii) La temperatura, T_w , de la superficie de la placa en la dirección longitudinal es variable y desconocida.

iv) Existe un salto de temperatura entre las placas y el fluido en $x=0$.

v) La velocidad del fluido u , $v=0$ en $y=\pm H/2$.

vi) Se considera la aproximación de la capa límite utilizada en la sección anterior ($x \sim L$, $y \sim \delta$, $\delta \ll L$).

Al resolver las ecuaciones de momentum, ecs. (2.36) y (2.37), con las suposiciones establecidas se obtiene la solución bien conocida para el campo de velocidades entre placas planas y paralelas, establecida por Hagen y Poiseuille

$$u = \frac{3}{2} \bar{U} \left[1 - \left(\frac{y}{H/2} \right)^2 \right] \quad (2.39)$$

donde

$$\bar{U} = \frac{H^2}{12\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (2.40)$$

en la ecuación anterior, μ es la viscosidad dinámica del flujo de enfriamiento, H es el espacio de separación entre las placas; el término entre paréntesis es la caída de presión por unidad de longitud en la dirección del flujo

Para el caso de la ecuación de la energía, ec. (2.38), estableciéndola en términos de órdenes de magnitud para cada uno de los términos que en ella figuran, se tiene lo siguiente:

$$u \frac{\Delta T_\infty}{L} + v \frac{\Delta T_\infty}{\delta} \sim \alpha \left(\frac{\Delta T_\infty}{L^2} + \frac{\Delta T_\infty}{\delta^2} \right) \quad (2.41)$$

de la que se puede deducir, según la hipótesis vi), que el término más insignificante es $\Delta T_\infty/L^2$, debido a la magnitud de L comparada con δ , es decir, los términos de difusión longitudinal son pequeños comparados con los de difusión transversal. Por lo tanto se puede establecer que la ecuación de la energía, ec. (2.38), en sus términos más representativos está dada por

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.42)$$

la cual, al ser combinada con la solución de Hagen-Poiseuille para la velocidad, ec. (2.39), conduce a

$$\rho c \left\{ \frac{3}{2} \bar{U} \left[1 - \left(\frac{y}{H/2} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial x} \right\} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.43)$$

Si se establece que el orden de magnitud del espesor de la capa límite térmica en las superficies internas de las placas es $\delta \sim H/2 - y$, considerando que esta capa se forma en una región próxima a la superficie de la placa, la ec. (2.43) toma la forma

$$\frac{3}{2} \frac{\rho c \bar{U}}{L} \left[1 - \left(1 - \frac{2\delta}{H/2} + \dots \right) \right] \sim \frac{\lambda}{\delta^2} \quad (2.44)$$

Al comparar de esta última los términos convectivos y difusivos, se puede estimar el orden de magnitud de la capa límite térmica del flujo de enfriamiento, dando como resultado

$$\frac{\delta}{L} \sim \left[\frac{1}{3} \frac{1}{Pe} \left(\frac{H}{L} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.45)$$

donde Pe es el número de Peclet del flujo de Graetz, $Pe = Re_H Pr$; $Re_H = 2H \bar{U} / \nu$. (número de Reynolds basado en la longitud característica H). De la ec. (2.45) se puede observar que la aproximación de la capa límite térmica es válida sólo para valores de $Pe \gg 1$.

Por otro lado, la caída de temperatura a través de la película de condensado (ΔT_c), de la placa (ΔT_w) y del flujo de Graetz (ΔT_∞), se encuentran relacionadas con respecto a la caída total de temperatura ΔT desde el vapor saturado hasta el flujo de enfriamiento por

$$\frac{\Delta T_c}{\Delta T} + \frac{\Delta T_w}{\Delta T} + \frac{\Delta T_\infty}{\Delta T} \sim 1 \quad (2.46)$$

y al considerar el flujo de calor a través de cada elemento del sistema, mediante la Ley de Fourier, en términos de órdenes de magnitud, se tiene

$$\lambda_c \frac{\Delta T_c}{\delta_c} \sim \lambda_w \frac{\Delta T_w}{h} \sim \lambda \frac{\Delta T_\infty}{\delta} \quad (2.47)$$

consecuentemente, utilizando las ecs. (2.46) y (2.47), así como los órdenes de magnitud de δ_c, y δ se llega a

$$\frac{\Delta T_c}{\Delta T} \sim \left(\frac{\alpha}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{\Delta T_w}{\Delta T}\right)^{\frac{4}{3}} \quad (2.48)$$

$$\frac{\Delta T_\infty}{\Delta T} \sim \frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2} \frac{\Delta T_w}{\Delta T} \quad (2.49)$$

finalmente, sustituyendo las ecs. (2.48) y (2.49) en la ec. (2.46)

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T} \left(1 + \frac{\alpha\beta}{\varepsilon^2}\right) + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{\Delta T_w}{\Delta T}\right)^{\frac{4}{3}} \sim 1 \quad (2.50)$$

donde

$$\beta = \frac{\lambda_c}{\lambda} \frac{\delta}{\delta_c} = \frac{\lambda_c}{\lambda} \frac{\left[\frac{1}{3} \left(\frac{H}{L}\right)^2 \frac{1}{Pe}\right]}{\left(\frac{Ja}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}}, \quad (2.51)$$

$$\alpha = \frac{\lambda_w}{\lambda_c} \frac{h}{L} \left(\frac{Ja}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{h}{L} \quad (2.52)$$

β representa la razón de la resistencia térmica del flujo de enfriamiento a la resistencia del líquido condensado y el parámetro α relaciona la competencia entre el calor conducido por la placa al flujo de calor por convección en la zona vapor-condensado. λ_w y λ representan la conductividad térmica de la placa y del flujo de enfriamiento, respectivamente.

De las relaciones anteriores, si se considera $\beta \sim 1$ y $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$ (*límite térmicamente delgado*), implica que

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim \frac{\varepsilon^2}{\alpha}, \quad \frac{\Delta T_c}{\Delta T} \sim 1, \quad \frac{\Delta T_\infty}{\Delta T} \sim 1 \quad (2.53)$$

Si se supone que la razón de esbeltez, $\varepsilon = h/L$, es muy pequeña comparada con la unidad, las variaciones de temperatura en la dirección transversal de las placas son muy pequeñas y pueden ser despreciadas en la aproximación de la pared térmicamente delgada. Para $\alpha \gg 1$, el calor conducido por la placa es muy grande, de tal manera que ningún gradiente de temperatura aparece en la dirección longitudinal en ésta. Por el lado contrario, para $\alpha \ll 1$, el calor por convección del fluido condensado es extremadamente importante y grandes gradientes de

temperatura aparecen en las placas. Por lo tanto la aproximación de la pared térmicamente delgada se cumple para valores de $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$.

2.3 Planteamiento matemático.

El modelo teórico consiste en establecer las ecuaciones que describen el fenómeno físico para cada uno de los elementos del sistema (flujo de Graetz, placa, zona de condensado). Se iniciará con el análisis de la zona de condensado; posteriormente se analizará el flujo de Graetz, suponiendo que el campo de velocidades entre las placas está completamente desarrollado, esto conduce a que la ecuación de cantidad de movimiento se desacople de la ecuación de la energía. Finalmente se analiza la ecuación de difusión de calor para las placas.

2.3.1 Zona de condensado.

Considerando las siguientes variables adimensionales, así como los órdenes de magnitud establecidos

$$\Delta = \frac{\delta_c(x)}{\delta_L}, \quad \theta_c = \frac{T_s - T_c}{T_s - T_\infty}, \quad \eta_c = \frac{y - (H/2 - h)}{\delta_L \Delta} \quad (2.54)$$

$$\chi = \frac{x}{L}, \quad \psi = \frac{g\delta_c^3}{\nu_c} f_c \quad (2.55)$$

e introduciendo la función de corriente adimensional f_c , definida por

$$u = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gLJa}} = \Delta^2 \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c}; \quad v = \frac{\bar{v} \gamma^{1/4}}{Ja^{3/4} \sqrt{gL}} = -\Delta \frac{\partial (\Delta^2 f_c)}{\partial \chi}, \quad (2.56)$$

(donde \bar{u} y \bar{v} representan las componentes longitudinal y transversal de la velocidad en unidades físicas) en las ecuaciones de cantidad de movimiento, ec. (2.11), y donde cada término de ésta está dado por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{gJa}{L} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\Delta^2 \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta_c} \frac{\partial \eta_c}{\partial y} = \frac{1}{\delta_{cL} \Delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(gLJa)^{1/2} \Delta^2 \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \right] = \frac{g^{3/4}}{\nu_c^{1/2}} (LJa)^{1/4} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \eta_c^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \eta_c} \left[\frac{g^{3/4} (LJa)^{1/4}}{\nu_c^{1/2}} \Delta \frac{\partial^2 f_c}{\partial \eta_c^2} \frac{1}{L \left(\frac{Ja}{\gamma} \right)^{1/4} \Delta} \right] = \frac{g}{\nu_c} \frac{\partial^3 f_c}{\partial \eta_c^3}$$

de tal forma que al sustituir las expresiones anteriores en la ec. (2.11) se llega a

$$\frac{\partial^3 f_c}{\partial \eta_c^3} + 1 = Ja \left[\Delta^2 \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\Delta^2 \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \right) \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} - \Delta^2 \frac{\partial}{\partial \chi} (\Delta^2 f_c) \frac{\partial^2 f_c}{\partial \eta_c^2} \right]$$

en esta última, llevando a cabo las operaciones adecuadas

$$\frac{\partial^3 f_c}{\partial \eta_c^3} + 1 = Ja \Delta^4 \left(\frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \chi \partial \eta_c} + 2 \Delta^3 \frac{d\Delta}{d\chi} \left(\frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \right)^2 - \right.$$

$$\left. \Delta^4 \frac{\partial f_c}{\partial \chi} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \eta_c^2} - 2 \Delta^3 \frac{d\Delta}{d\chi} f_c \frac{\partial^2 f_c}{\partial \eta_c^2} \right)$$

Simplificando la expresión anterior se establece la ecuación de cantidad de movimiento en forma adimensional dada por

$$\frac{\partial^3 f_c}{\partial \eta_c} + 1 = Ja \Delta^4 \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \chi \partial \eta_c} - \frac{\partial f_c}{\partial \chi} \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} + \frac{2}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\chi} \left[\left(\frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \right)^2 - f_c \frac{\partial^2 f_c}{\partial \eta_c} \right] \right\} \quad (2.57)$$

De manera equivalente, considerando las variables dadas en (2.54) y (2.55), la ecuación de la energía para la zona de condensado, ec. (2.12), se transforma en la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 \theta_c}{\partial \eta_c^2} = Ja Pr \Delta^4 \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \frac{\partial \theta_c}{\partial \chi} - \frac{\partial f_c}{\partial \chi} \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} - \frac{2}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\chi} f_c \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \right\} \quad (2.58)$$

Las condiciones de frontera asociadas con las ecuaciones del fluido condensado son

$$\theta(\chi, \eta_c = 0) = \theta_w(\chi); \quad f_c(\chi, \eta_c = 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \right|_{\eta_c=0} = 0. \quad (2.59)$$

$$\theta(\chi, \eta_c = 1) = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 f_c}{\partial \eta_c^2} \right|_{\eta_c=1} = 0 \quad (2.60)$$

la segunda condición de la ec. (2.60) proviene del balance del esfuerzo cortante en la interfase líquido-vapor (Rose 1988). El espesor normalizado adimensional de la capa de condensado, Δ , es desconocido y debe ser obtenido del análisis, de tal forma que para obtener su evolución se lleva a cabo un balance de energía en la interfase vapor-condensado como se describe a continuación:

$$\frac{q_c}{h_{fg}} = \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x} \quad (2.61)$$

donde

$$\Gamma(x) = \frac{\dot{m}_x}{b} = \int_{\frac{H}{2}+h}^{\frac{H}{2}+h+\delta_c} \rho_c u_c dy \quad (2.62)$$

en la cual al sustituir los órdenes de magnitud estimados en las secciones anteriores para u_c y $\delta_c(x)$, así como las variables adimensionales definidas en (2.54), (2.55) y (2.56), se obtiene

$$\Gamma(x) = \rho_c \int_0^1 \sqrt{gLJa} \Delta^2 \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} L \left(\frac{Ja}{\gamma} \right)^{\frac{1}{4}} \Delta d\eta_c. \quad (2.63)$$

Al integrar la ec. (2.63) con los límites de integración correspondientes y derivando parcialmente con respecto a χ se puede determinar la variación de producción de flujo másico en la dirección longitudinal, la cual está dada por

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \chi} = \frac{\rho_c g^{\frac{1}{4}} \nu_c^{\frac{1}{2}} Ja^{\frac{3}{4}}}{L^{\frac{1}{4}}} \frac{\partial}{\partial \chi} [\Delta^3 f_c(\chi, 1)] \quad (2.64)$$

sustituyendo la ec. (2.64) y el flujo de calor ($q_c = \lambda_c \Delta T_c / \delta_c$) desde el vapor hacia la película de condensado (considerando las variables adimensionales establecidas), en la ec. (2.61), se obtiene que

$$4\Delta \frac{d(\Delta^3 f_c(\chi, 1))}{d\chi} = - \left. \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \right|_{\eta_c=1}. \quad (2.65)$$

la cual establece la evolución de Δ . La correspondiente condición inicial para la ec. (2.65) está dada por $\Delta(\chi = 0) = 0$.

2.3.2 Flujo de Graetz.

Introduciendo las siguientes variables adimensionales

$$\theta = \frac{T_s - T}{T_s - T_\infty}, \quad Y = \frac{y}{H/2}, \quad \chi = \frac{x}{L}, \quad (2.66)$$

la ecuación de la energía, ec. (2.38), se transforma en

$$\frac{3}{8} (1 - Y^2) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \frac{1}{Pe} \frac{1}{H/2} \left[\left(\frac{H/2}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right] \quad (2.67)$$

en la que posteriormente se hará un cambio de variable en Y para su solución, dado por

$$\zeta = \frac{\xi}{\chi^{\frac{1}{3}}}, \quad \xi = \left(\frac{H/2}{L} Pe \right)^{\frac{1}{3}} (1 - Y) \quad (2.68)$$

donde Pe representa el número de Peclet dado por $Pe = Re Pr$, (para el fluido entre las placas).

Las respectivas condiciones de frontera para la ec. (2.67) son

$$\theta(\chi = 0) = 1, \quad (2.69)$$

$$\theta(Y = 1) = \theta_w(\chi), \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right|_{Y=0} = 0 \quad (2.70)$$

la condición (2.69) proviene del hecho de que en la entrada al espacio entre las placas la temperatura del flujo es T_∞ . La primera condición de (2.70) está dada por el hecho de considerar que la temperatura del fluido de enfriamiento en contacto con la placa adquiere la temperatura de esta última, la cual varía con la posición longitudinal, y la segunda considera que el gradiente de temperaturas en $y = 0$ es cero, es decir, existe simetría de temperatura a uno y otro lado del punto medio del espacio entre las placas.

2.3.3 Placas.

En el caso de las placas, sólo es necesario introducir las siguientes variables adimensionales en la ecuación de Laplace, esto con el fin de obtener la ecuación que describe la distribución de temperaturas en el sólido en forma adimensional,

$$\theta_w = \frac{T_s - T_w}{T_s - T_\infty}, \quad Z = \frac{y - H/2}{h}, \quad \chi = \frac{x}{L}, \quad (2.71)$$

de este modo, la ecuación de Laplace adquiere la forma

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Z^2} = 0 \quad (2.72)$$

con las siguientes condiciones de frontera

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \right|_{\chi=0,1} = 0, \quad (2.73)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \right|_{Z=1} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \frac{1}{\Delta} \left. \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \right|_{\eta_c=0} \quad (2.74)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \right|_{Z=0} = - \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\varepsilon^2}{\alpha \beta} \frac{1}{\chi^{\frac{1}{3}}} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} \quad (2.75)$$

donde la variable ζ está definida en la ec. (2.68).

Como se puede verificar, las condiciones de frontera en la coordenada transversal $Z = 0, 1$, dependen del flujo de calor que aporta la película de condensado hacia la superficie externa de la placa, así como desde el sólido hacia el flujo de enfriamiento. *De este modo, se establece de manera conjugada el proceso de transferencia de calor entre el sólido, líquido condensado y el flujo de enfriamiento.*

Capítulo 3

Metodología de solución.

3.1 Solución mediante la integral de Stieltjes.

Cuando hay transferencia de calor entre una superficie y un fluido, en la mayoría de las aplicaciones prácticas, los mayores gradientes de temperatura ocurren en una región muy cercana a dicha superficie, de aquí el concepto de capa límite térmica [22]. Tomando en cuenta lo anterior, es conveniente reescalar las variables utilizadas en el análisis para poder determinar el comportamiento del flujo de calor en esta zona.. Posteriormente, es necesario obtener la solución de cada parte del sistema, considerando la variación longitudinal de la temperatura de las placas; por tal motivo se recurre a la integral de Stieltjes descrita por Kays[22], la cual nos permite calcular la transferencia de calor en tales problemas.

3.1.1 Flujo de Graetz.

Para analizar la transferencia de calor de las placas hacia el flujo de enfriamiento, es posible definir una capa límite térmica, la cual se desarrolla en una región muy cercana a la pared. Bajo esta consideración, se introduce el siguiente escalamiento en Y

$$1 - Y = \frac{\xi}{\left(\frac{H/2}{L} Pe\right)^{\frac{1}{3}}} \quad (3.1)$$

y aplicando la linealización correspondiente

$$Y^2 \sim 1 - \frac{2\xi}{\left(\frac{H/2}{L}Pe\right)^{\frac{1}{3}}} + \dots \quad (3.2)$$

en la ecuación de la energía en forma adimensional, ec. (2.67), (despreciando términos del orden de $Pe^{-\frac{2}{3}}$), se llega a la ecuación

$$\frac{3}{4}\xi \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}. \quad (3.3)$$

Las correspondientes condiciones de frontera de la ec. (3.3) están dadas por

$$\theta(\chi = 0) = 1$$

$$\theta(\xi = 0) = \theta_w(\chi) \quad (3.4)$$

$$\theta(\xi \rightarrow 1) \rightarrow 1.$$

El problema (3.3)-(3.4) puede simplificarse mediante la introducción del siguiente cambio de variable (ec. 2.68)

$$\zeta = \frac{\xi}{\chi^{1/3}} \quad (3.5)$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = \frac{3}{4}\zeta \chi \frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \frac{1}{4}\zeta^2 \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \quad (3.6)$$

con las respectivas condiciones de frontera

$$\theta(\chi = 0) = 1$$

$$\theta(\zeta = 0) = \theta_w(\chi) \quad (3.7)$$

$$\theta(\zeta \rightarrow \infty) \rightarrow 1$$

Debido a la linealidad de la ecuación de la energía, una suma de soluciones es también una solución. Esto hace posible presentar una solución que considere la variación arbitraria de la temperatura de la superficie de las placas, mediante la suposición de dividir la temperatura superficial de éstas en un número de escalones de temperatura constante y sumarlos o superponerlos entre sí para obtener el problema de temperatura no uniforme. Lo necesario como punto de inicio es suponer un salto de temperatura en $\chi = 0$, ya que la temperatura de las placas difiere de la temperatura del fluido durante el proceso. Este salto se mantendrá constante de manera que la diferencia de temperatura entre las placas y el fluido sea constante en $\chi = 0$.

La variación de la temperatura a lo largo de las placas se representa por una serie de escalones infinitesimales, en los cuales la temperatura se mantiene constante en la coordenada χ . La temperatura del fluido en cualquier coordenada χ puede determinarse al sumar la contribución de cada uno de los escalones de temperatura infinitesimal. Para la sumatoria considerada, χ es el punto dondel se desea determinar la temperatura del fluido, de tal forma que el valor de χ en ese punto se trata como una constante. Por lo tanto, se define una variable muda de longitud, χ' , éstal es usada para designar la posición de cada salto de temperatura y toma valores de 0 a χ .

Introduciendo las siguientes variables adimensionales en la ec. (3.6)

$$\varphi = \frac{\zeta}{F(\chi)}, \quad \tilde{\chi} = \frac{\chi}{\chi'} \quad (3.8)$$

se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} + \varphi^2 \left(\frac{3}{4} \tilde{\chi} F^2 \frac{dF}{d\tilde{\chi}} + \frac{1}{4} F^3 \right) \frac{d\theta}{d\varphi} = 0 \quad (3.9)$$

con la condiciones de frontera

$$\theta(\varphi = 0) = \theta_w(\chi)$$

$$\theta(\varphi \rightarrow \infty) \rightarrow 1 \quad (3.10)$$

Si en la ec. (3.9), designamos al término entre paréntesis por M_1

$$M_1 = \frac{3}{4}\tilde{\chi}F^2\frac{dF}{d\tilde{\chi}} + \frac{1}{4}F^3, \quad (3.11)$$

y se analiza la ec. (3.11), se observa que es una ecuación no lineal de primer orden, de tal forma que se propone el siguiente cambio de variable $F^3 = P$, con lo cual la ec. (3.11) se transforma en

$$\tilde{\chi}\frac{dP}{d\tilde{\chi}} = 4M_1 - P \quad (3.12)$$

cuya solución se reduce a

$$F = \left[4M_1 - \frac{1}{M_2}\tilde{\chi}\right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.13)$$

con sus respectivas condiciones de frontera

$$F \rightarrow 1, \text{ para } \tilde{\chi} \rightarrow \infty$$

$$F \rightarrow 0, \text{ para } \tilde{\chi} \rightarrow 1 \quad (3.14)$$

de tal manera que el valor de las constantes son $M_1 = 1/4$ y $M_2 = 1$. Éstas se sustituyen en la ec. (3.13) para obtener finalmente el valor de la función F

$$F = \left[1 - \frac{\chi'}{\chi}\right]^{\frac{1}{3}}, \quad (3.15)$$

sustituyendo la ec. (3.15) en la ec. (3.8) se obtiene

$$\varphi = \frac{\zeta}{\left[1 - \frac{\chi'}{\chi}\right]^{\frac{1}{3}}} \quad (3.16)$$

y sustituyendo el valor de M_1 en la ec.(3.9) se obtiene que:

$$\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} + \frac{1}{4}\varphi^2 \frac{d\theta}{d\varphi} = 0 \quad (3.17)$$

Integrando la ec.(3.17) dos veces con respecto a φ y evaluando las condiciones de frontera para determinar el valor de las constantes de integración, se llega a la solución final en términos de la función gamma incompleta, $\Gamma(a, x)$

$$\theta(\varphi) = 1 - (1 - \theta_w(\chi)) \frac{\Gamma(1/3, 1/12 \varphi^3)}{\Gamma(1/3)} \quad (3.18)$$

de la ec. (3.18) se puede calcular el flujo de calor en forma adimensional hacia el flujo de Graetz; para esto se recurre a la definición de flujo de calor y se sustituyen los cambios de las variables hechos en el análisis (ecs. 2.68 y, 3.16), obteniéndose

$$q = \lambda(T_s - T_\infty) \frac{\left(\frac{H/2}{L} Pe\right)^{\frac{1}{3}}}{\chi^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{H/2} \frac{d\theta}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} \quad (3.19)$$

donde $\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{d\theta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\zeta}$, de tal manera que la ec. (3.19) se puede reescribir como

$$\frac{(H/2) q}{\lambda(T_s - T_\infty)} = Nu_\chi = \left(\frac{H/2}{L} Pe\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\chi^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\left[1 - \frac{\chi'}{\chi}\right]^{\frac{1}{3}}} \frac{d\theta}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} \quad (3.20)$$

donde Nu_χ es el número de Nusselt local para el flujo de enfriamiento y por definición está dado por

$$Nu = \frac{hx}{\lambda}, \quad (3.21)$$

donde h es el coeficiente convectivo de transferencia de calor del fluido de enfriamiento, $h = q/\Delta T_\infty$, λ representa su correspondiente conductividad térmica, θ_{wi} es el salto de temperatura en forma adimensional en el borde de entrada de la placa, q es el flujo de calor transferido desde la placa hacia el flujo de Graetz y ΔT_∞ es el correspondiente incremento de temperatura entre la placa y el fluido.

La variación de θ_w a lo largo de las placas se puede representar como una sumatoria de la contribución de todos los fragmentos infinitesimales desde $\chi' = 0$ hasta $\chi' = \chi$. Esta sumatoria

se puede representar por la integral ordinaria de Riemman más la suma de discontinuidades o saltos bruscos de temperatura en la superficie de las placas; en este caso, dicha discontinuidad sólo se presenta en $\chi = 0$, por tal motivo, la temperatura se puede representar como

$$\theta_w = \theta_{wl} + \int_0^x d\theta \quad (3.22)$$

donde θ_{wl} es el salto de temperatura en forma adimensional en $\chi = 0$ y

$$d\theta = \frac{\Gamma(1/3, 1/12 \varphi^3)}{\Gamma(1/3)} \frac{d\theta_w(\chi')}{d\chi'} d\chi' \quad (3.23)$$

De esta manera, la temperatura adimensional entre la placa y el fluido de enfriamiento, θ_w , se transforma en un elemento diferencial $d\theta_w$ en las contribuciones continuas y en un θ_{wl} en las contribuciones discretas. Para evaluar la parte integral, se sustituye el término $d\theta_w$ por $(d\theta'_w/d\chi')d\chi'$. Con base en lo anterior y mediante la definición de flujo de calor, es posible llegar a la ecuación final del flujo de calor desde la placa hacia el fluido interno,

$$q = \frac{1}{\Gamma(1/3)} \frac{1}{48} \frac{\lambda (T_s - T_\infty)}{H/2} \left(\frac{H}{2L} Pe \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 - \theta_{wl} - \int_0^x \left[1 - \frac{\chi'}{\chi} \right]^{-\frac{1}{3}} \frac{d\theta'_w}{d\chi'} d\chi' \right\}, \quad (3.24)$$

donde θ_{wl} es el salto de temperatura en la placa en el borde de entrada. Comparando el resultado obtenido en la ec. (3.24) con el análisis de capa límite en placa plana realizado por Lighthill[17], se observa que se obtienen resultados semejantes, diferenciándose en el núcleo de la integral.

Sustituyendo la ec. (3.24) en la ec. (3.20), tomando en cuenta las variables usadas en el análisis, el número de Nusselt local para el fluido de enfriamiento puede escribirse como

$$Nu_\chi = \frac{1}{48 \Gamma(1/3)} \left(\frac{H}{2L} Pe \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 - \theta_{wl} - \int_0^x \left[1 - \frac{\chi'}{\chi} \right]^{-\frac{1}{3}} \frac{d\theta'_w}{d\chi'} d\chi' \right\} \quad (3.25)$$

y el número de Nusselt promedio como

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu_\chi d\chi \quad (3.26)$$

3.1.2 Placas (Límite térmicamente delgado, $\frac{\alpha}{\varepsilon^2} \gg 1$).

Integrando la ec.(2.72) del capítulo anterior, en la dirección transversal Z y considerando que en este límite $\theta_w \sim \theta_w(\chi)$ solamente, se tiene que

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} dZ + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Z^2} dZ = 0 \quad (3.27)$$

de donde se obtiene

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_{Z=1} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_{Z=0} = 0. \quad (3.28)$$

Como puede apreciarse, el segundo y tercer término de la ec. (3.28) son los gradientes de temperatura en la dirección transversal de la placa, por tal motivo se lleva a cabo un balance de energía en las superficies internas y externas de las placas

$$\lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial y} \Big|_{y=H/2+h} = \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial y} \Big|_{y=H/2+h} \quad (3.29)$$

y

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=H/2} = \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial y} \Big|_{y=H/2} \quad (3.30)$$

y tomando en cuenta los cambios de variable establecidos, se deduce que

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_{Z=1} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha \Delta} \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \Big|_{\eta_c=0} \quad (3.31)$$

y

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_{Z=0} = \left(\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} \right) \left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha \beta} \right) \frac{1}{\chi^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \quad (3.32)$$

al sustituir las relaciones anteriores en la ec. (3.28) se tiene

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \Big|_{\eta_c=0} = \left(-\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} \right) \frac{1}{\beta} \frac{1}{\chi^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \quad (3.33)$$

donde $\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0}$ (ζ es la variable definida en la ec. (3.1)) se puede reemplazar de la ec. (3.18) como

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \frac{1}{\left[1 - \frac{\chi'}{\chi} \right]^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0}$$

y al llevar a cabo las sustituciones pertinentes se traduce en

$$\frac{d\theta}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} = -(\theta_{wl} - 1) \frac{d\Omega}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} + \int_0^{\chi} \frac{d\Omega}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} \frac{1}{\left[1 - \frac{\chi'}{\chi} \right]^{1/3}} \frac{d\theta'_w}{d\chi'} d\chi' \quad (3.34)$$

donde Ω se define como

$$\Omega = \frac{\Gamma(1/3, 1/12 \varphi^3)}{\Gamma(1/3)}, \text{ y } \frac{d\Omega}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = -\frac{1}{48} \frac{1}{\Gamma(1/3)} \quad (3.35)$$

por lo tanto, sustituyendo la ec. (3.34) en la ec. (3.33)

$$\alpha \frac{d^2 \theta_w}{d\chi^2} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \Big|_{\eta_c=0} = \frac{\beta'}{\chi^{1/3}} \left(\theta_{wl} - 1 + \int_{\theta_{wl}}^{\theta_w} K(\chi, \chi') d\theta'_w \right). \quad (3.36)$$

donde el parámetro β' representa la razón de la resistencia térmica de la capa de condensado a la resistencia térmica del flujo de Graetz y está definido por

$$\beta' = \frac{4^{1/3} \beta}{48 \Gamma(1/3) 3^{1/3}} = \frac{4^{1/3}}{48 \Gamma(1/3) 3^{1/3}} \frac{\lambda}{\lambda_c} \left(\frac{Ja}{\gamma} \right)^{1/4} \left(\frac{L}{H} \right) (Re_H Pr)^{1/3} \quad (3.37)$$

y

$$k(\chi, \chi') = \left[1 - \frac{\chi'}{\chi} \right]^{-1/3}$$

Para grandes valores de $\beta', \beta' \gg 1$, la resistencia térmica del flujo de Graetz es muy pequeña, de tal forma que la temperatura de la placa alcanza un valor cercano a T_∞ , y el proceso de

condensación corresponde al límite de Nusselt, en primera aproximación. Una temperatura constante de las placas también se obtiene para grandes valores de α , pero el valor de la temperatura depende del valor de β' . El caso límite de $\beta' = 0$ representa un proceso de transferencia de calor puro hacia el flujo de Graetz sin algún proceso de condensación.

El sistema de ecs.(2.57), (2.58), (2.65) y (3.36) contienen tres ecuaciones diferenciales y una integrodiferencial, respectivamente, para las incógnitas $f_c(\chi, \eta_c)$, $\theta_c(\chi, \eta_c)$, $\Delta(\chi)$ y $\theta_w(\chi)$ con siete parámetros adimensionales: los números de Jakob Ja , Prandtl del condensado, Pr_c ; Prandtl del fluido de enfriamiento, Pr , el número de Peclet, Pe , los parámetros α , β' y ε . En las siguientes secciones se analizará el límite relevante caracterizado por pequeños números de Jakob, $Ja \rightarrow 0$, con número de Prandtl de la fase condensada de orden unidad. Los límites de grandes y pequeños valores del parámetro α para la aproximación de la capa térmicamente delgada son, entonces, considerados.

3.2 Solución Asintótica

3.2.1 Generalidades.

En esta sección se presenta una breve descripción de la aproximación analítica de los métodos de perturbación. Para tener un panorama muy general del tema, se considerarán algunas ideas principales así como procedimientos de análisis de perturbación:

i) Identificar un parámetro pequeño. Este es el primer paso, el cual debe ser considerado al reconocer las escalas físicas relevantes del problema. Una vez hecho lo anterior, se normalizan todas las variables con respecto a esas escalas características. En la forma normalizada, las ecuaciones gobernantes del fenómeno físico presentarán ciertos parámetros adimensionales, cada uno de los cuales representa la importancia relativa de ciertos mecanismos físicos. Si uno de los parámetros, por ejemplo α , es mucho menor que la unidad (si el parámetro es muy grande, su recíproco es pequeño), entonces α puede ser seleccionado como el parámetro de perturbación.

ii) Expandir la solución como una serie ascendente del parámetro pequeño α , por ejemplo, una serie de potencias de la forma:

$$\theta \approx \theta_0 + \alpha\theta_1 + \alpha^2\theta_2 + \dots,$$

donde θ_n es llamado el término de orden n . La forma de las series puede variar de acuerdo a la manera en que α aparece en las ecuaciones.

iii) Agrupar términos del mismo orden en todas las ecuaciones gobernantes y condiciones auxiliares, y de esta manera obtener ecuaciones de perturbación para cada orden.

iv) Iniciar desde el orden más bajo, resolviendo los problemas en cada orden sucesivamente hasta el orden deseado, por ejemplo $O(n)$.

v) Sustituir los resultados para $\theta_n, n = 1, 2, 3, \dots$, en la expansión propuesta para obtener la solución final.

El procedimiento anterior es llamado análisis de perturbación regular. Existen, sin embargo, muchas situaciones en las cuales las series de perturbación regular fallan en algún rango de la variable independiente, entonces se debe recurrir al análisis de perturbación singular, el cual involucra los siguientes pasos:

i) Determinar la falla de la expansión regular; verificar cuál de las suposiciones son violadas cuando la falla ocurre,

ii) Seleccionar nuevas escalas y nuevas normalizaciones para rescatar los términos que son importantes cerca de la singularidad e iniciar un nuevo análisis de perturbación.

3.2.2 Solución asintótica para $Ja \rightarrow 0$

Número de Prandtl de orden unidad, $Pr \sim 1$.

En este límite, las ecs. (2.57)-(2.60) en la zona de condensado se simplifican considerablemente. La ecuación de la energía en forma adimensional ec. (2.58) en el límite de $Ja \ll 1$, se reduce a

$$\frac{\partial^2 \theta_c}{\partial \eta_c^2} = 0 \quad (3.38)$$

con las condiciones de frontera

$$\theta_c(\eta_c = 0) = \theta_w(\chi)$$

$$\theta_c(\eta_c = 1) = 0 \quad (3.39)$$

de modo que al resolver la ec. (3.38) sujeta a (3.39), se obtiene la solución para θ_c dada por

$$\theta_c = \theta_w(\chi)(1 - \eta_c), \quad (3.40)$$

De manera equivalente, la ecuación de cantidad de movimiento ec.2.57) se reduce a

$$\frac{\partial^3 f_c}{\partial \eta_c^3} = -1 \quad (3.41)$$

con sus respectivas condiciones de frontera

$$f_c(\eta_c = 0) = 0$$

$$\left. \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \right|_{\eta_c=0} = 0 \quad (3.42)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f_c}{\partial \eta_c^2} \right|_{\eta_c=1} = 0$$

Después de integrar tres veces se obtiene un perfil cúbico para f_c dado por

$$f_c(\eta_c) = \frac{1}{2}\eta_c^2\left(1 - \frac{\eta_c}{3}\right). \quad (3.43)$$

Por otro lado, el flujo de calor adimensional, o número de Nusselt, para el condensado está definido por

$$Nu_c = q_c L / \lambda_c T_s - T_\infty \quad (3.44)$$

y si se define un número de Nusselt modificado para la zona de condensado dado por

$$Nu_c^* = Nu_c (Ja/\gamma)^{1/4} \quad (3.45)$$

sabiendo además que el flujo de calor a través del fluido condensado está dado por la Ley de

Fourier como

$$q_c = \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial y} = -\lambda_c \frac{(T_s - T_\infty)}{\Delta \delta_L} \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \Big|_{\eta_c=0}. \quad (3.46)$$

que justo con las ecs. (3.40), (3.44), se llega finalmente a

$$Nu_c^* = \frac{\theta_w}{\Delta}. \quad (3.47)$$

y de manera equivalente, combinado las ecs. (3.40) y (2.65) se obtiene

$$\frac{d\Delta^4}{d\chi} = \theta_w. \quad (3.48)$$

Finalmente, la ecuación de balance de energía, ec. (3.36), considerando las relaciones anteriores, puede ser escrita como

$$\alpha \frac{d^2 \theta_w}{d\chi^2} - \frac{\theta_w}{\Delta} = \frac{\beta'}{\chi^{1/3}} \left(\theta_{wi} - 1 + \int_{\theta_{wi}}^{\theta_w} K(\chi, \chi') d\theta'_w \right) \quad (3.49)$$

Las ecs. (3.48) y (3.49) tienen que ser resueltas con la condición inicial $\Delta(0) = 0$ y las condiciones adiabáticas en ambos bordes de las placas $\frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0,1} = 0$. El sistema no lineal está representado por dos ecuaciones acopladas con dos parámetros adimensionales, α y β' . El sistema se resuelve numéricamente (ver capítulo 3) y usando técnicas de perturbación para grandes y pequeños valores del parámetro α como se muestra a continuación.

Solución asintótica para $\alpha \gg 1$.

El límite asintótico de $\alpha \rightarrow \infty$ es regular y la solución puede ser obtenida con la ayuda de la técnica de perturbación regular, usando la inversa de α como el parámetro pequeño de expansión. Para valores muy altos del parámetro, la temperatura adimensional de la placa, θ_w , cambia muy poco (del orden de α^{-1}) en la dirección longitudinal. Para obtener una solución en este límite, se supone que la temperatura adimensional de la placa, como el espesor de la capa de condensado adimensional, pueden ser expandidos como

$$\theta_w(\chi) = \theta_{w0}(\chi) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{-j} \theta_{wj}(\chi), \quad (3.50)$$

$$\Delta(\chi) = \Delta_0(\chi) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{-j} \Delta_j(\chi). \quad (3.51)$$

Introduciendo estas relaciones en las ecs. (3.48) y (3.49), se obtiene, después de agrupar términos de la misma potencia de α^{-1} , el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{d^2\theta_0}{d\chi^2} = 0 \quad (3.52)$$

$$\frac{d\Delta_0^4}{d\chi} = \theta_0 \quad (3.53)$$

$$\frac{d^2\theta_1}{d\chi^2} = \frac{\theta_0}{\Delta_0} + \frac{\beta'}{\chi^{1/3}} (\theta_{0i} - 1) \quad (3.54)$$

$$\frac{4d(\Delta_0^3\Delta_1)}{d\chi} = \theta_1 \quad (3.55)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{d\chi^2} = \frac{\theta_0}{\Delta_0} \left(\frac{\theta_1}{\theta_0} - \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \right) + \frac{\beta'}{\chi^{1/3}} \left(\theta_{1i} + \int_{\theta_{1i}}^{\theta_1} K(\chi, \chi') d\theta'_1 \right) \quad (3.56)$$

$$\frac{d(4\Delta_0^3\Delta_2 + 6\Delta_0^2\Delta_1^2)}{d\chi} = \theta_2 \quad (3.57)$$

etc., con las siguientes condiciones iniciales y de frontera

$$\Delta_i(0) = 0; \quad \left. \frac{d\theta_i}{d\chi} \right|_{\chi=0,1} = 0, \text{ para todo } i. \quad (3.58)$$

Integrando las ecs. (3.52) y (3.53), con las correspondientes condiciones de frontera se obtiene $\theta_0 = C_0$ y $\Delta_0 = C_0^{\frac{1}{4}} \chi^{\frac{1}{4}}$. Integrando la ec. (3.54) en la forma $\int_0^1 d\chi$, y considerando las condiciones adiabáticas en ambos bordes de las placas, se obtiene una ecuación algebraica no lineal para el primer orden de la temperatura de la placa como una función del parámetro β' en la forma

$$\beta' = \frac{8}{9} \left(\frac{C_0^{\frac{3}{4}}}{1 - C_0} \right). \quad (3.59)$$

Para grandes valores de $\tilde{\beta}$, la temperatura de la placa alcanza un valor cercano a T_∞ , indicando que la resistencia térmica del flujo de Graetz es insignificante. Por otra parte, para pequeños valores de β' , la temperatura alcanza valores cercanos a la temperatura de saturación, decreciendo la razón de condensado significativamente. Introduciendo la solución para θ_0 y Δ_0 en la ec. (3.54) e integrando dos veces, se obtiene, después de aplicar las condiciones de frontera e iniciales apropiadas

$$\theta_1 = \frac{3}{2} \beta' (1 - C_0) \left(C_1 + \frac{4}{7} \chi^{\frac{7}{4}} - \frac{3}{5} \chi^{\frac{5}{3}} \right), \quad (3.60)$$

donde C_1 es una constante de integración relacionada con la temperatura de la placa en el borde principal, y debe ser determinada al resolver la ecuación del siguiente orden. Las correcciones de primer orden para el espesor de la capa de condensado después de integrar la ec. (3.55), produce que

$$\Delta_1 = \frac{1}{3} \left(C_1 \chi^{\frac{1}{4}} - \frac{9}{40} \chi^{\frac{23}{12}} + \frac{16}{77} \chi^2 \right) \quad (3.61)$$

De manera equivalente, al integrar la ec. (3.56), se obtiene el valor de C_1 , después de aplicar las condiciones adiabáticas en ambos bordes

$$C_1 = \frac{0.0172 + 0.1355 \beta' C_0^{\frac{1}{4}}}{1 + 1.7143 \beta' C_0^{\frac{1}{4}}} \quad (3.62)$$

Por lo tanto, hasta términos de primer orden, el espesor de la capa de condensado está dado por

$$\Delta = \chi^{\frac{1}{4}} \left(C_0^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3\alpha} \left(C_1 - \frac{9}{40} \chi^{\frac{5}{3}} + \frac{16}{77} \chi^{\frac{7}{4}} \right) \right) + O(\alpha^{-2}), \quad (3.63)$$

y de igual forma, la temperatura de la placa está dada por

$$\theta_w = C_0 + \frac{3 \tilde{\beta} (1 - C_0)}{2 \alpha} \left(C_1 - \frac{3}{5} \chi^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{7} \chi^{\frac{7}{4}} \right) + O(\alpha^{-2}) \quad (3.64)$$

por lo que el número de Nusselt modificado toma la forma

$$Nu_c^* = \frac{C_0^{\frac{3}{4}}}{\chi^{\frac{1}{4}}} \left(1 + \frac{1}{C_0^{\frac{1}{4}} \alpha} \left(C_1 - \frac{115}{200} \chi^{\frac{5}{3}} + \frac{1120}{1617} \chi^{\frac{7}{4}} \right) \right) + O(\alpha^{-2}). \quad (3.65)$$

Es importante notar que el primer término del lado derecho de las ecs. (3.63), (3.64) y (3.65) se reduce a la solución clásica de Nusselt (Nusselt, 1916), para una placa isotérmica, que corresponde al límite $\alpha \gg 1$.

Solución asintótica para $\alpha \rightarrow 0$.

Para pequeños valores de α comparados con la unidad, el término de conducción de calor longitudinal en la ec. (3.36) puede ser despreciado. Para valores de $\alpha \rightarrow 0$, pero grandes comparados con ε^2 , la aproximación de la pared térmicamente delgada es aún válida. Este caso representa un límite singular debido a la aparición de dos capas conductoras de calor longitudinal, cercanas a ambos bordes, para satisfacer las condiciones de frontera adiabáticas. Cerca de los bordes de entrada, existen una capa de espesor del orden de $\chi \sim \alpha^{\frac{4}{7}}$. Fuera de esta zona interna, la conducción de calor longitudinal a través de las placas es insignificante, reduciendo las ecuaciones gobernantes hasta el primer orden al siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\theta_{we}}{\Delta_e} = -\frac{\beta'}{\chi^{1/3}} \left(\int_1^{\theta_{we}} K(\chi, \chi') d\theta'_{we} \right) \quad (3.66)$$

$$\frac{d\Delta_e^4}{d\chi} = \theta_{we} \quad (3.67)$$

en estas ecuaciones, el subíndice e representa la zona externa. Para poder resolver el sistema de ecuaciones anteriores se requiere de las condiciones iniciales de acoplamiento con la zona interna. Esta ecuación integral de Volterra no lineal, de segundo tipo, puede ser resuelta numéricamente y la técnica correspondiente se muestra en el capítulo 4. Las ecs. (3.66) y (3.67), pueden también ser transformadas a un sistema de ecuaciones de parámetros libres al introducir las siguientes variables

$$\psi = \frac{\Delta_e^4}{\beta^{12}}, \quad \sigma = \frac{\chi}{\beta^{12}}, \quad (3.68)$$

dando como resultado

$$\frac{\theta_{we}}{\psi^{\frac{1}{4}}} = - \frac{\int_1^{\theta_{we}} K(\sigma, \sigma') d\theta'_{we}}{\sigma^{1/3}} \quad (3.69)$$

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \theta_{we} \quad (3.70)$$

Para $\alpha = 0$, la solución asintótica para valores pequeños de σ , se puede representar por las siguientes expansiones

$$\theta = 1 + a\sigma^n + b\sigma^m \quad (3.71)$$

$$\psi = \sigma + c\sigma^l + d\sigma^p \quad (3.72)$$

las cuales al sustituirlas en la ec. (3.69) da como resultado

$$\theta_{we} \sim 1 - \frac{12\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\sigma^{\frac{1}{12}} + \frac{720\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{13\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\sigma^{\frac{1}{6}}, \text{ para } \sigma \rightarrow 0. \quad (3.73)$$

la ec. (3.73) también da la solución asintótica para valores grandes valores de β' , es decir,

$$\theta_{we} = 1 - \left[\frac{12\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \right] \frac{\chi^{\frac{1}{12}}}{\beta'} + \left[\frac{720\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{13\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} \right] \frac{\chi^{\frac{1}{6}}}{\beta'^2} + O(\beta'^{-3}) \quad (3.74)$$

y la solución asintótica para Δ_e

$$\Delta_e = \chi^{\frac{1}{4}} - \left[\frac{36 \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{13 \Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \right] \frac{\chi^{\frac{1}{3}}}{\beta'} + \frac{4320}{91} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} \right) \frac{\chi^{\frac{5}{12}}}{\beta'^2} + O(\beta'^{-3}) \quad (3.75)$$

Los términos principales en las anteriores ecuaciones son exactamente los mismos que para el caso de $\alpha \gg 1$, indicando que cuando $\beta' \rightarrow \infty$ no hay influencia alguna de la conducción de calor longitudinal de las placas en el proceso de condensación. En este caso, la temperatura de las placas son muy cercanas a T_∞ a lo largo de las mismas, evitando la conducción longitudinal en ellas. Similarmente, para valores pequeños de β' (valores grandes de σ), el término integral de la ec. (3.69) se reduce, en primera aproximación a

$$\int_0^\sigma K(\sigma, \sigma') \frac{d\theta'_{we}}{d\sigma'} d\sigma' \sim -1, \text{ para } \sigma \gg 1 \quad (3.76)$$

Por lo tanto, la solución asintótica de las ecs. (3.69) y (3.70) es

$$\left. \begin{aligned} \psi &\sim \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{4}{9}} \sigma^{\frac{8}{9}} \\ \theta_{we} &\sim \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \sigma^{-\frac{1}{9}} \end{aligned} \right\}, \text{ para } \sigma \gg 1. \quad (3.77)$$

El espesor adimensional de la capa de condensado y temperatura de la placa en el borde de salida están dados por

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{eL} = \Delta_e(\chi = 1) &\sim \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \beta'^{\frac{1}{3}} \\ \theta_{weL} = \theta_{we}(\chi = 1) &\sim \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \beta'^{\frac{4}{3}} \end{aligned} \right\}, \text{ para } \beta' \rightarrow 0. \quad (3.78)$$

Para la zona interna cercana a los bordes superiores, debido al caracter singular de las ecuaciones en $\chi = 0$, se introducen las siguientes variables adimensionales en la ecuación de la energía

$$\zeta = \left(\frac{\beta'}{\alpha}\right)^{\frac{12}{20}} \chi; \quad \varphi = \frac{\beta'^{\frac{21}{20}}}{\alpha^{\frac{1}{20}}} (1 - \theta_w), \quad (3.79)$$

obteniendo así la siguiente ecuación integro-diferencial (libre de parámetros)

$$\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\zeta^{\frac{1}{3}}} \left(\varphi_l + \int_{\varphi_l}^{\varphi} K(\zeta, \zeta') d\zeta' \right), \quad (3.80)$$

con las siguientes condiciones de frontera

$$\left. \frac{d\varphi}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = 0 \text{ y } \varphi(\zeta \rightarrow \infty) \sim \frac{12 \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \zeta^{\frac{1}{12}}. \quad (3.81)$$

La ec. (3.80) tiene que ser resuelta numéricamente junto con las condiciones de frontera dadas en (3.81) mediante la técnica de Runge-Kutta de cuarto orden. La última condición proviene del acoplamiento con la zona externa $\theta_{w \text{ int}} (\varrho \rightarrow \infty) \sim \theta_{w \text{ ext}} (\chi \rightarrow 0)$, donde

$$\theta_{w \text{ ext}} = 1 \sim \left[\frac{12\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \right] \frac{\chi^{\frac{1}{12}}}{\beta'} \quad (3.82)$$

$$\theta_{w \text{ int}} \sim \frac{\alpha^{\frac{1}{12}}}{\beta'^{\frac{21}{20}}} \varphi \quad (3.83)$$

De la solución numérica, existe únicamente un valor inicial para φ , φ_l , el cual satisface la condición de acoplamiento para grandes valores de ζ , éste está dado por $\varphi_l \simeq 0.7326...$ Y muy cerca del borde de superior de la placal, el espesor de la capa de condensado está dado en primera aproximación por

$$\Delta \simeq \chi^{\frac{1}{4}}. \quad (3.84)$$

Por lo tanto, de la segunda variable definida en (3.79), la temperatura adimensional en el borde principal de la placa está dada por

$$\theta_{wl} = 1 - 0.7326 \frac{\alpha^{\frac{1}{20}}}{\beta'^{\frac{21}{20}}}, \text{ para } \alpha \rightarrow 0, \beta' \sim 1 \quad (3.85)$$

El comportamiento de la temperatura adimensional de la placa es también dictada por la ec. (3.85) para el caso de $\alpha \sim 1$ y $\beta' \gg 1$. El número de Nusselt modificado en esta capa de transición es, en primera aproximación

$$Nu_c^* = \frac{\beta'^{\frac{21}{20}} - 0.7326\alpha^{\frac{1}{20}}}{\beta'^{\frac{21}{20}}\chi^{\frac{1}{4}}} \quad (3.86)$$

Por otro lado, cerca a los bordes de salida, se tiene una capa delgada de transición del orden de $(\alpha/\beta')^{\frac{3}{5}}$, donde el gradiente de temperatura tiende a cero cuando $\chi \rightarrow 1$. Para estudiar esta capa, se introducen las siguientes variables internas

$$\xi = \frac{1-\chi}{\tilde{\varepsilon}}; \theta_w = \theta_{we} - \Phi \left. \frac{d\theta_{we}}{d\chi} \right|_{\chi=1} \tilde{\varepsilon}; \Delta = \Delta_e + \frac{\tilde{\varepsilon}^2 \Omega}{4\Delta_e^3} \left. \frac{d\theta_{we}}{d\chi} \right|_{\chi=1} \quad (3.87)$$

donde $\tilde{\varepsilon}$ es un número pequeño definido por

$$\tilde{\varepsilon} = \left(\frac{\alpha}{\beta'} \right)^{\frac{3}{5}}$$

Introduciendo las relaciones dadas por las ecs. (3.87) en las ecs. (3.48) y (3.49), se obtienen las siguientes ecuaciones lineales hasta términos del orden $\tilde{\varepsilon}^{1/3}/\beta'$

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\beta'\Delta_e L} \Phi = \int_{\infty}^{\xi} \frac{1}{(\xi' - \xi)^{\frac{1}{3}}} \frac{d\Phi'}{d\xi'} d\xi' \quad (3.88)$$

$$\frac{d\Omega}{d\xi} = -\Phi \quad (3.89)$$

con las siguientes condiciones inicial y de frontera

$$\left. \frac{d\Phi}{d\xi} \right|_{\xi=0} = -1, \Phi(\xi \rightarrow \infty) \sim 0 \text{ y } \Omega(\xi \rightarrow \infty) \sim 0 \quad (3.90)$$

La primera aparece de la condición adiabática en los bordes de salida de las placas, mientras que las otras dos vienen del acoplamiento con la solución externa ($\alpha = 0$). La solución de la ec. (3.88) para $\beta' \gg \alpha^{\frac{1}{5}}$ se puede consultar en el estudio de flujos de calor externo sobre una placa plana en un flujo convectivo [19]. Las capas internas en este límite singular asintótico tienen únicamente una pequeña influencia espacial y puede ser ignorada, usando únicamente el orden principal para la solución externa.

3.3 Solución numérica.

3.3.1 Solución numérica de la ecuación integro-diferencial resultante para $\alpha \neq 0$.

En esta apartado se muestra la técnica numérica utilizada para resolver el sistema de ecuaciones integro-diferenciales dadas por (3.48) y (3.49). El problema de valores en la frontera es transformado a un problema de valor inicial al introducir las siguientes variables

$$\Delta = \left(\frac{\alpha}{\beta'}\right)^{\frac{3}{20}} \theta_{wl}^{\frac{1}{4}} \vartheta^{\frac{1}{4}}; \chi = \left(\frac{\alpha}{\beta'}\right)^{\frac{3}{5}} s, \theta_w = \theta_{wl} \phi \quad (3.91)$$

con las correspondientes condiciones iniciales y de frontera. Por lo tanto, las ecs. (3.48) y (3.49) se transforman en

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \phi \quad (3.92)$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} - \frac{\beta_1\phi}{\vartheta^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{s^{\frac{1}{3}}} \left(-\beta_2 + \int_1^\phi K(s, s') d\phi \right) \quad (3.93)$$

donde

$$K(s, s') = \left[1 - \frac{s'}{s} \right]^{-\frac{1}{3}}$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha^{\frac{1}{20}}}{\beta'^{\frac{29}{20}} \theta_{wl}^{\frac{1}{4}}},$$

$$\beta_2 = \frac{1 - \theta_{wl}}{\theta_{wl}}$$

Esta nueva formulación reduce el número de parámetros libres relajando la longitud normalizada de la placa. Por lo tanto para la solución de las ecs.(3.92) y (3.93) únicamente será necesario conocer las condiciones iniciales las cuales establecen

$$\left. \frac{d\phi}{ds} \right|_{s=0} = \vartheta(0) = 0 \text{ y } \phi(0) = 1 \quad (3.94)$$

En la solución numérica, la posición del borde de salida, s_f , se obtiene cuando hay un cambio en el signo del gradiente de temperatura, es decir, cuando se ha llegado a la condición adiabática en $\chi = 1$, esto es

$$\left. \frac{d\phi}{ds} \right|_{s=s_f} = 0. \quad (3.95)$$

Por lo que respecta al término integral en la ec. (3.93), se utilizará una aproximación como se muestra en la siguiente sección 3.3.2, por lo tanto, esta ecuación se transforma en la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} - \frac{\beta_1\phi}{\vartheta^{\frac{1}{4}}} =$$

$$\frac{1}{s^{\frac{1}{3}}} \left[-\beta_2 + \frac{3}{2}s \sum_{i=1}^{N-1} \left. \frac{d\phi'}{ds} \right|_i \left(\frac{(N-i)^{\frac{2}{3}} - (N-i-1)^{\frac{2}{3}}}{(N-i)^{\frac{2}{3}}} \right) - \frac{3}{2}s \left(\frac{1}{(N-1)^{\frac{2}{3}}} \right) \left. \frac{d\phi'}{ds'} \right] \quad (3.96)$$

Las ecs. (3.92) y (3.96) son resueltas usando la técnica de integración numérica de Runge-Kutta de cuarto orden, con las condiciones iniciales

$$\phi(0) = 1, \quad \left. \frac{d\phi}{ds} \right|_{s=0} = \vartheta(0) = 0. \quad (3.97)$$

3.3.2 Solución numérica de la ecuación integral resultante para $\alpha = 0$.

En esta sección se muestra el procedimiento utilizado para resolver las ecs.(3.66) y (3.67) numéricamente, utilizando la técnica de Runge-Kutta de cuarto orden. Cerca del borde de ataque, el comportamiento asintótico de θ_{we} y ψ son necesarios para iniciar la integración numérica de las ecuaciones anteriores. La solución asintótica de la ec. (3.66) está dada por

$$\theta_{we} \sim 1 - \frac{12\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \sigma^{\frac{1}{12}}, \text{ para } \sigma \rightarrow 0, \quad (3.98)$$

donde $\Gamma(n)$ es la función gamma. El término integral puede ser escrito como un número finito de sumas de la forma

$$\int_0^{\theta_{we}} \frac{d\theta'_{we}}{\left(1 - \frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}}} = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{(i-1)\Delta\sigma}^{i\Delta\sigma} \left(\frac{d\theta'_{we}}{\left(1 - \frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}}} \right) \\ \simeq \frac{3}{2}\sigma \sum_{i=1}^N \frac{d\theta_{we}}{d\sigma} \Big|_i \left(\left(\frac{N-i}{N-1} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{N-i-1}{N-1} \right)^{\frac{2}{3}} \right), \quad (3.99)$$

donde $\Delta\sigma$ es el paso de integración y σ_f corresponde a la posición del borde de salida, $\chi = 1$. Se usan diferencias finitas centrales para el gradiente de temperatura de la placa como

$$\frac{d\theta_{we}}{d\sigma} \Big|_i \approx \frac{\theta_{we}(i+1) - \theta_{we}(i)}{\Delta\sigma}. \quad (3.100)$$

Por lo tanto, con la ayuda de la ec. (3.100), la ecuación (3.66) es transformada en una ecuación algebraica dada por

$$\theta_{we}(N) = \frac{\sum_{i=1}^{N-2} (\theta_{we}(i) - \theta_{we}(i+1)) \left((N-i)^{\frac{2}{3}} - (N-i-1)^{\frac{2}{3}} \right) + \theta_{we}(N-1)}{1 + \frac{2}{3} \frac{z^{\frac{1}{3}}}{\psi^{\frac{1}{4}} (N-1)^{\frac{1}{3}}}} \quad (3.101)$$

que junto con la ec. (3.67) son resueltas con la técnica de Runge-Kutta de cuarto orden, con las condiciones iniciales dadas por $\psi(0) = 0$ y $\theta_{we}(0) = 1$

Capítulo 4

Resultados y conclusiones.

En el límite de valores grandes de β' , la temperatura de las placas es prácticamente uniforme y cercana al valor de la temperatura de la corriente libre del flujo forzado, conduciendo el problema al caso de placa con temperatura constante, dado por la solución clásica de Nusselt. La conducción de calor longitudinal no juega un papel importante incluso para grandes valores de α . Para valores finitos de β' , en el límite de $\alpha \rightarrow 0$, el sistema de ecuaciones (3.48) y (3.49) es singular y por lo tanto es necesario incluir capas conductoras de calor internas en ambos bordes de las placas. En particular, fuera de esas zonas internas, existe una región externa donde la conducción de calor longitudinal a través de las placas es despreciable en primera aproximación. Para valores de $\alpha = 0$, los correspondientes valores de la temperatura adimensional externa de las placas y el espesor de la película de condensado (en $\chi = 1$), como una función del parámetro β' , se muestran en las Figs. 4-1 y 4-2, obtenidas mediante técnicas numéricas y de perturbación. Es claro en la Fig. 4-1 que para valores crecientes del parámetro β' , la temperatura (en unidades físicas) de la placa decrece debido a la resistencia térmica del líquido condensado, llegando a ser mayor comparada con la del fluido de enfriamiento. Similarmente, el espesor adimensional de la película de condensado se incrementa debido a que la temperatura de la placa ha decrecido. Esto se puede observar en la Fig. 4-2, sin embargo, la solución anterior proporciona únicamente resultados para el caso límite de $\alpha = 0$. Para $\alpha \neq 0$ y para valores finitos de β' , el problema definido por las ecs. (3.48) y (3.49) puede ser resuelto numéricamente. La Fig. 4-3 muestra las predicciones numéricas de la evolución de la temperatura adimensional de la placa como una función de χ para $\alpha = 0$ y diferentes valores de β' en el límite de $Ja \rightarrow 0$ y Pr_c de orden unidad.

Como se puede observar, la temperatura de las placas siempre decrece a lo largo de las mismas, pero este efecto es más importante para valores bajos de β' . Los resultados obtenidos conducen a la solución clásica de Nusselt, como un caso particular. Para $\alpha = 0$, la Fig. 4-4 muestra el espesor adimensional de la capa de condensado como una función de χ , para diferentes valores de β' en el límite de $Ja \rightarrow 0$ y Pr_c de orden unidad. Se puede notar que el espesor del fluido condensado siempre se incrementa con valores crecientes de β' , alcanzando asintóticamente la solución clásica de Nusselt para $\beta' \rightarrow \infty$.

Se incluyen en este trabajo las soluciones numérica y asintótica para valores de α muy pequeños comparados con la unidad, así como de orden unidad, para diferentes valores de β' . La Fig. 4-5 presenta la estructura interna de la temperatura adimensional cercana al borde principal de la placa como una función de la variable ζ , donde una capa delgada existe con una longitud del orden de $\chi \sim \alpha^{\frac{4}{7}}$. Como se observa, este perfil tiene un comportamiento universal como una consecuencia directa de las ecuaciones de parámetros libres (3.80) y (3.81). Las Figs. 4-6 y 4-8 muestran las correspondientes soluciones asintóticas y numéricas para la temperatura adimensional como una función de la coordenada longitudinal χ , para diferentes valores de β' y dos valores de α , respectivamente. Independientemente de los valores supuestos de β' conforme se incrementa α , la temperatura de las placas tiende a mantener uniformidad únicamente limitada por los valores de β' . De igual manera, las Figs. 4-7 y 4-9 presentan los resultados para el espesor adimensional de la capa de condensado como una función de χ para diferentes valores de β' y dos valores de α respectivamente. Estas figuras muestran una influencia marginal del parámetro α en la evolución del espesor, mientras que se muestra una mayor influencia del parámetro β' . La solución asintótica obtenida para grandes valores de α proporciona buena precisión, aun para valores de α de orden unidad. Para valores de α mayores a 5, los resultados numéricos y asintóticos son indistinguibles.

Como una conclusión muy importante del presente trabajo, en lo referente a una posible aplicación práctica, se incluye la Fig. 4-10, ésta representa una comparación entre las gráficas del número de Nusselt modificado del condensado, obtenida en este análisis, con aquella obtenida por Nusselt [1], en dicha gráfica se puede apreciar la diferencia existente entre las dos soluciones. De éstas se puede observar la gran influencia que tiene el considerar a la placa con temperatura constante sobre el número de Nusselt, ya que este parámetro nos indica la cantidad de calor

que se transfiere, para este caso, desde la zona de condensado hacia la placa. De las gráficas, es claro que cuando se tiene el caso de la placa de temperatura constante, el número de Nusselt es mayor que en el caso de temperatura variable, con ello nos podemos percatar, por ejemplo, que al llevar a cabo diseños de condensadores tomando en consideración la solución de Nusselt se pudiera incurrir en diseños sobreestimados e ineficientes; como un ejemplo comparativo entre los resultados obtenidos en este análisis contra la solución clásica de Nusselt se muestra un caso numérico, en el que se lleva a cabo la aplicación de los resultados obtenidos en este trabajo, para tal efecto, se determinará el *flujo de calor local* en el borde de salida de la placa ($\chi = 1$) a través de una película de condensado que se forma sobre la superficie de una placa vertical, cuya longitud es de 1m, y con un flujo de enfriamiento en la otra. La Tabla 4.1 muestra el valor de los parámetros utilizados en el análisis, obteniéndose de ello que el flujo de calor calculado para el caso de temperatura constante es significativamente mayor que el de temperatura variable, estimándose que se incurre en un error hasta del 32%. Cabe aclarar que los resultados obtenidos dependen fuertemente de los parámetros α y β' , de tal suerte que para el caso $\beta' \rightarrow \infty$ se llega al límite de Nusselt, lo que implicaría que los flujos de calor serían similares.

T_s (K)	T_∞ (K)	Pr_c	Ja_c	Nu_c^* (clásico)	Nu_c^* $\left(\begin{array}{l} \alpha \gg 1 \\ \beta' = 1.7 \end{array} \right)$	q'' ($\frac{kW}{m^2}$)	q'' ($\frac{kW}{m^2}$)
393	293	1.06	0.175	1.0	0.515	212	144

Tabla 4.1.

En este trabajo se estudió el proceso de condensación de un vapor saturado en contacto con las superficies externas de dos placas delgadas, planas, paralelas y verticales. Se supuso un flujo forzado de enfriamiento (flujo de Graetz) entre ellas. La conductividad térmica finita del material de las placas permite una transferencia de calor longitudinal a lo largo de éstas, cambiando así el carácter matemático del problema del parabólico a elíptico. Asumiendo que las placas tienen bordes adiabáticos, la convección forzada a través de las superficies externas de las placas, afectadas fuertemente por la conducción de calor axial, gobierna la evolución espacial de la temperatura de ellas y del espesor de la capa de condensado. Los dos límites asintóticos para valores grandes y pequeños del parámetro α , para diferentes valores de β' , han sido analizados para este proceso de condensación. En general, para grandes valores de α , la temperatura de las

placas varía poco en la dirección longitudinal produciendo así un comportamiento singular para el número de Nusselt cerca del borde superior. Conforme el valor de α decrece, la temperatura de las placas llega a ser cercana a la temperatura del flujo de enfriamiento, tratando de alcanzar este valor si los valores de β' son suficientemente altos.

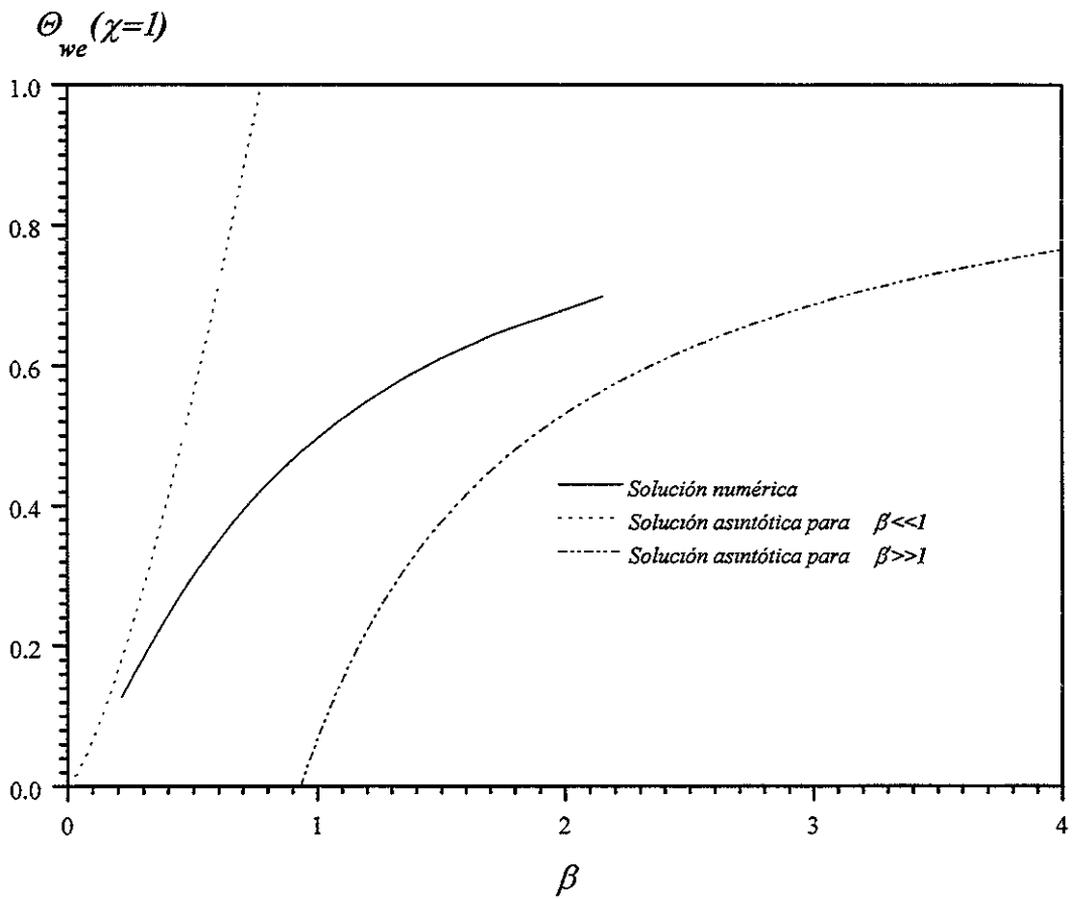


Figura 4-1: Temperatura adimensional de la placa en el borde de salida como una función de β , para $\alpha = 0$.

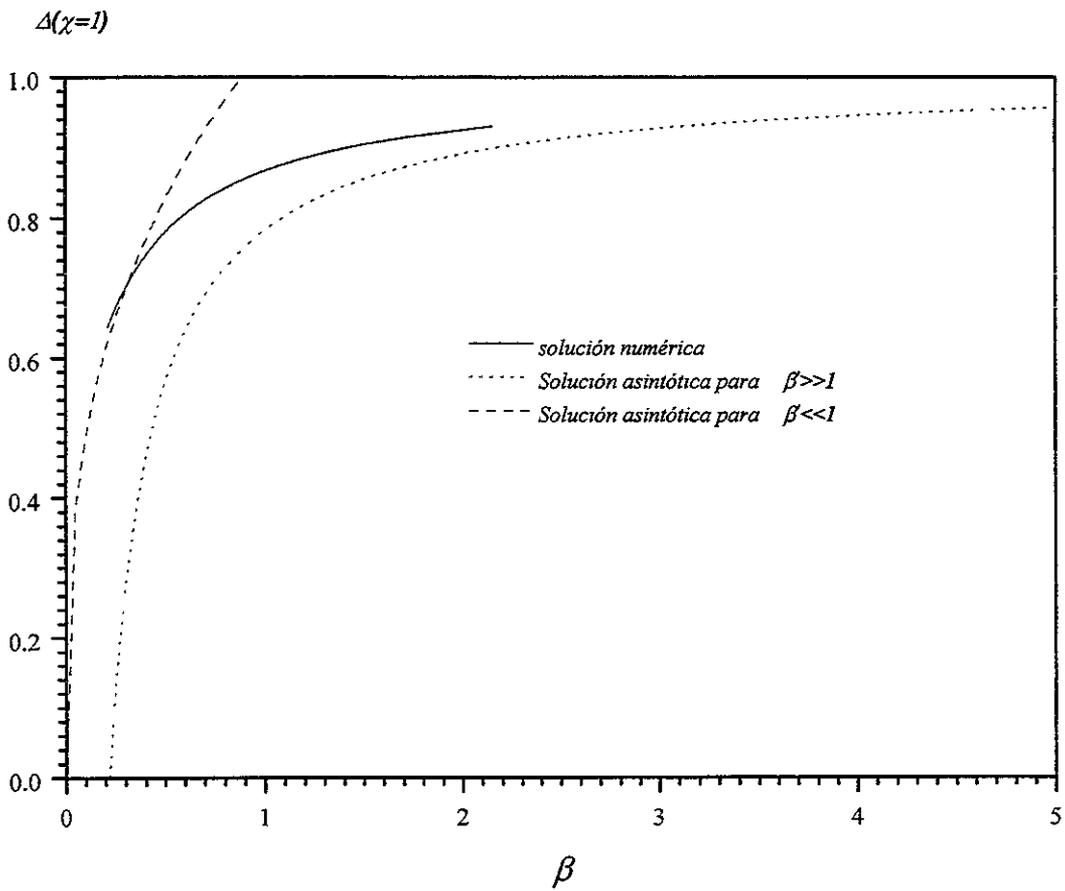


Figura 4-2: Espesor adimensional de la capa de condensado en el borde de salida como una función de β' , para $\alpha = 0$.

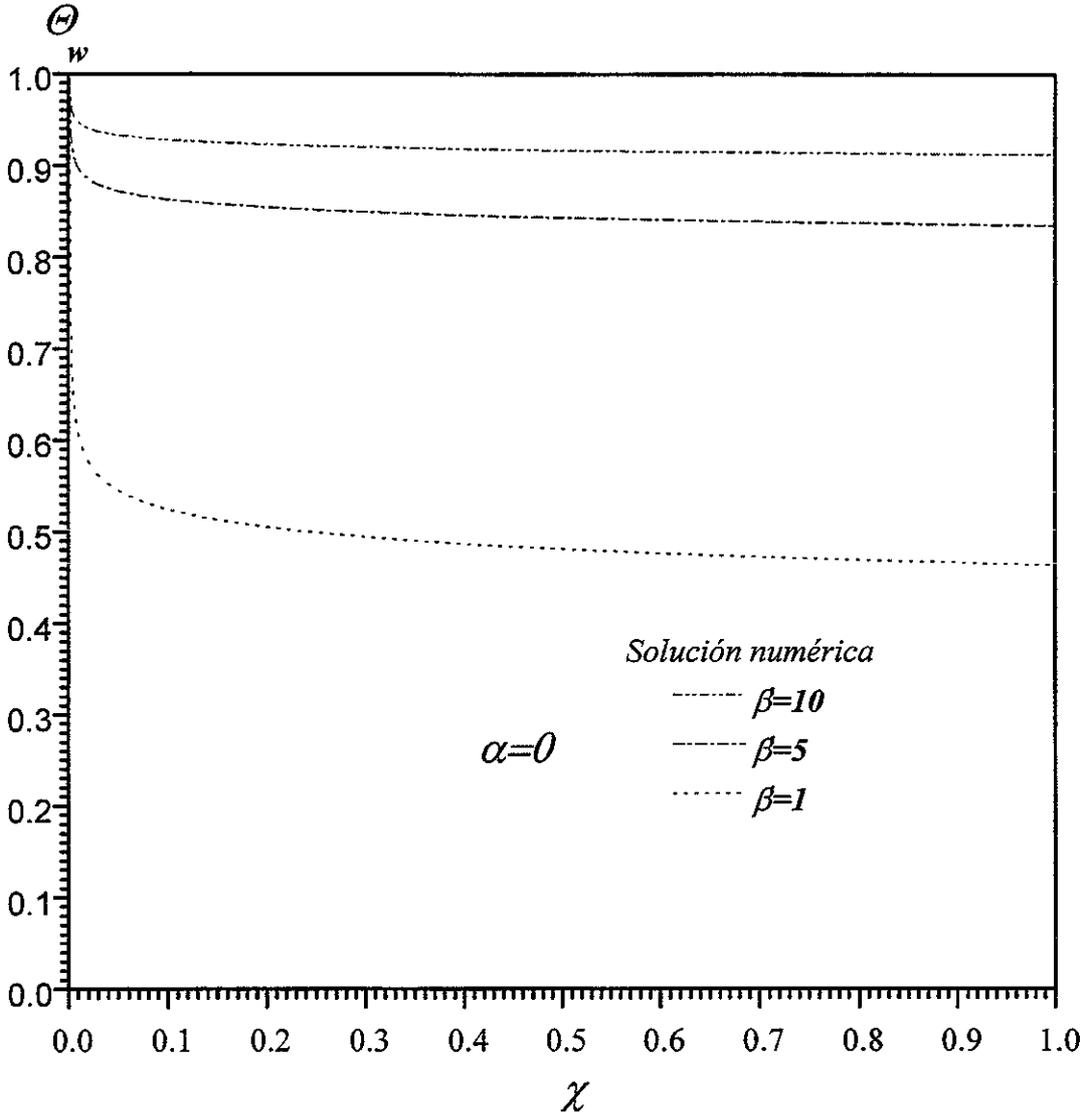


Figura 4-3: Perfiles de la temperatura adimensional de la placa como una función de χ para diferentes valores de β' y $\alpha = 0$.

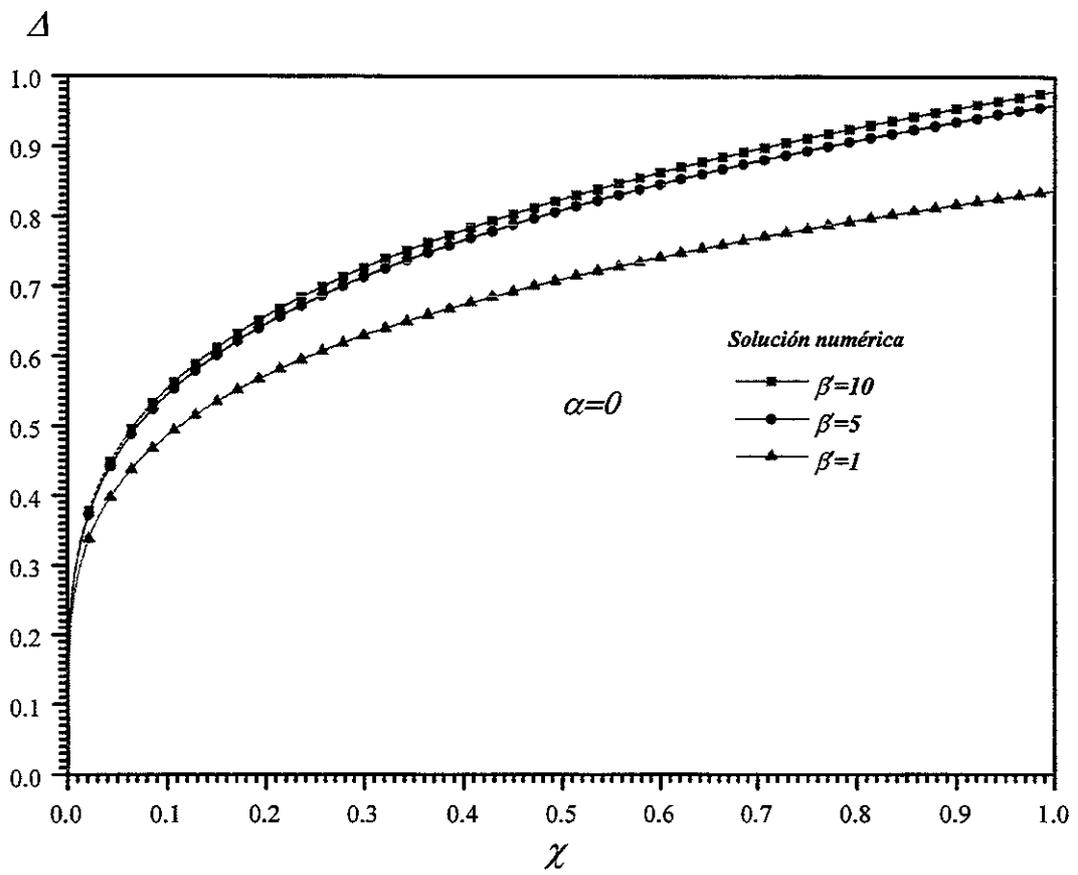


Figura 4-4: Espesor adimensional de la capa de condensado como una función de χ para diferentes valores de β' y $\alpha = 0$.

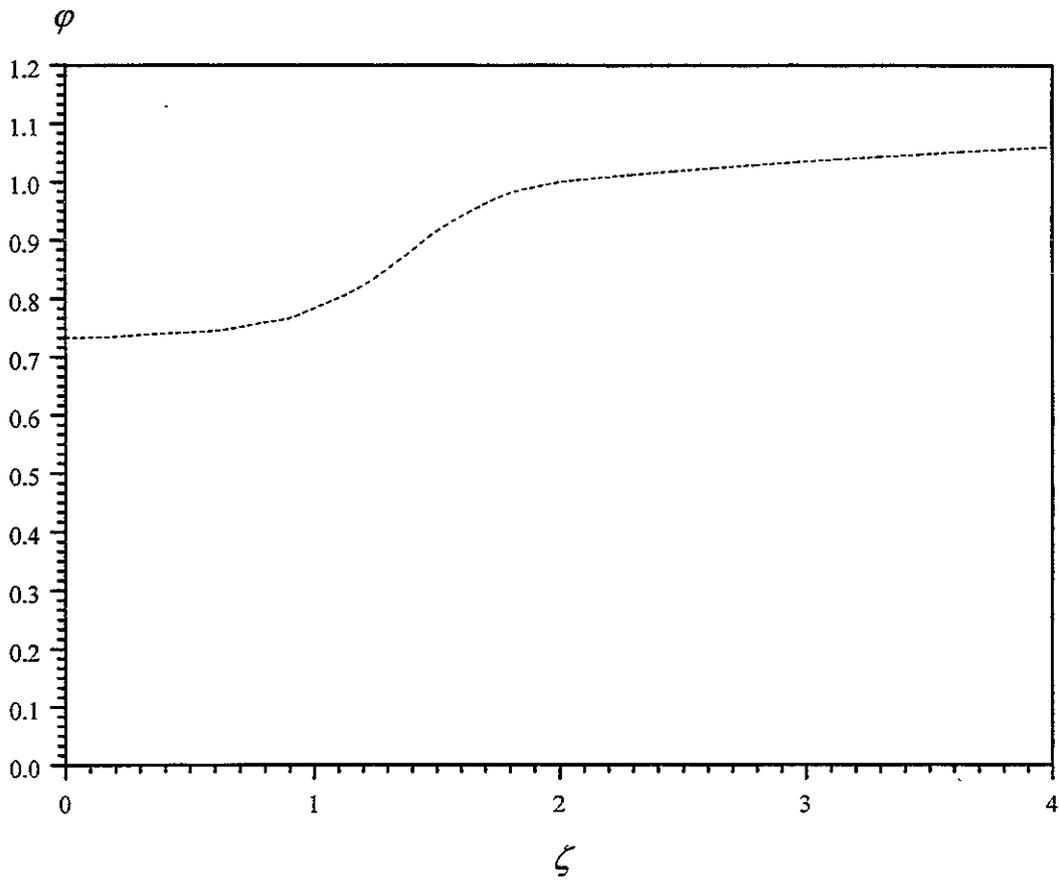


Figura 4-5: Estructura de la capa interna en el borde superior de la placa.

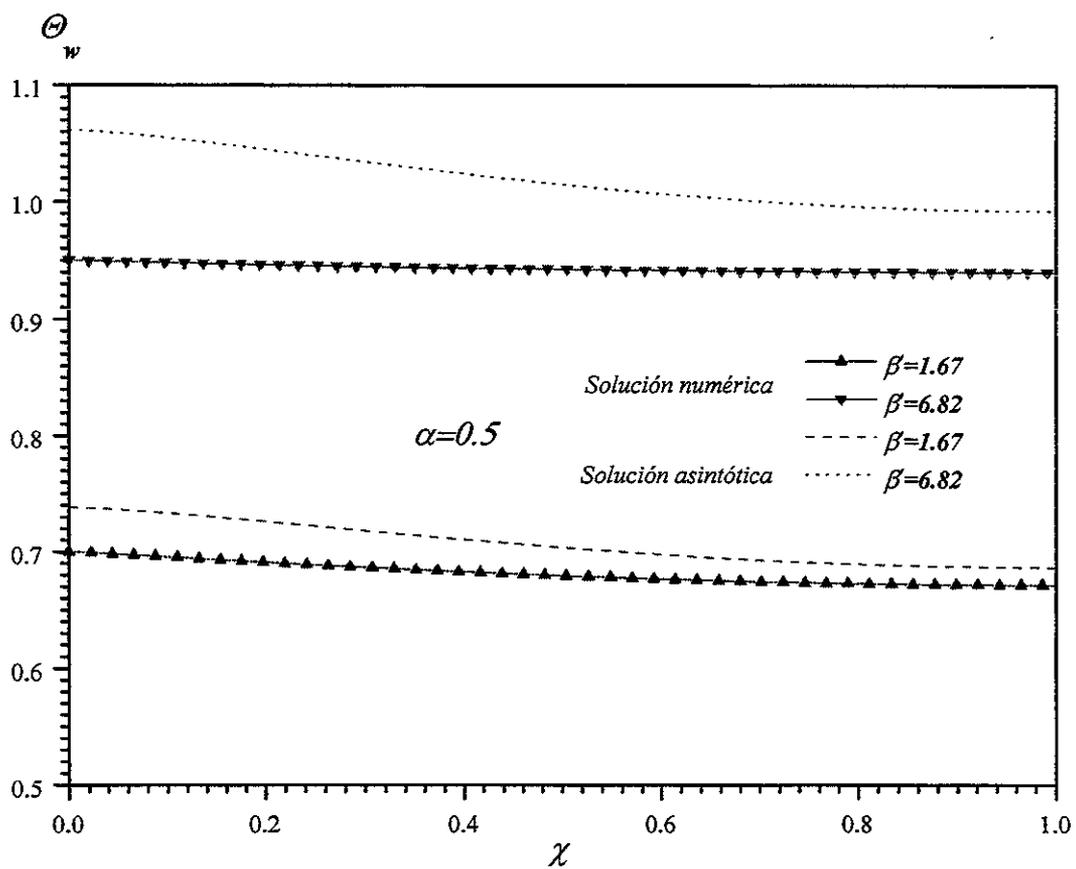


Figura 4-6: Perfiles de la temperatura adimensional de la placa como una función de χ para diferentes valores de β' y $\alpha = 0.5$.

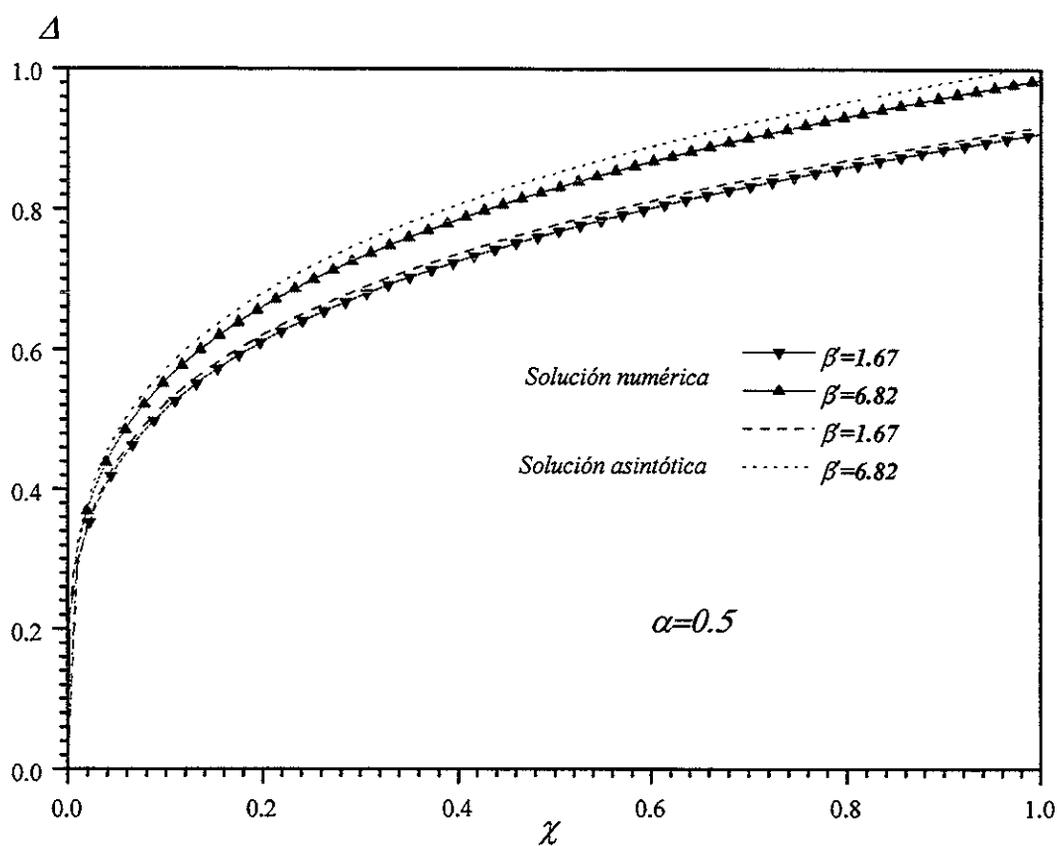


Figura 4-7: Espesor adimensional de la capa de condensado como una función de χ para diferentes valores de β' y $\alpha = 0.5$.

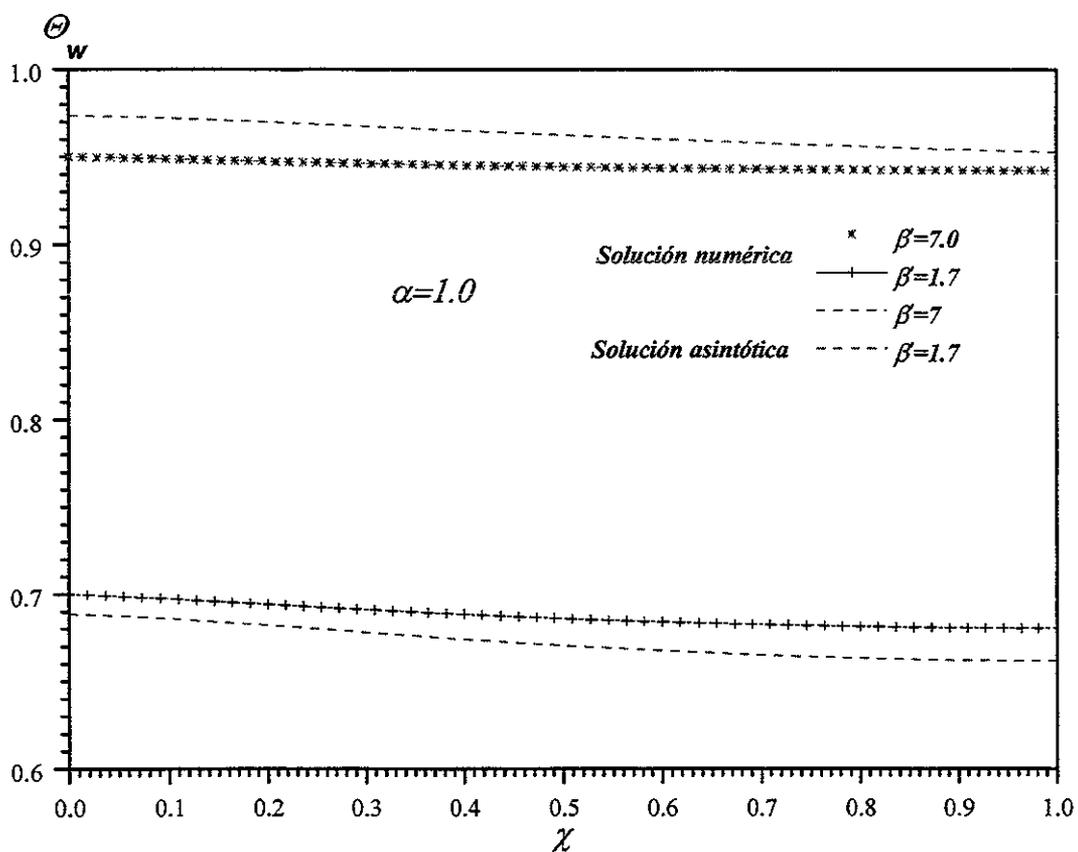


Figura 4-8: Perfiles de la temperatura adimensional de la placa como una función de χ para diferentes valores de β' y $\alpha = 1.0$.

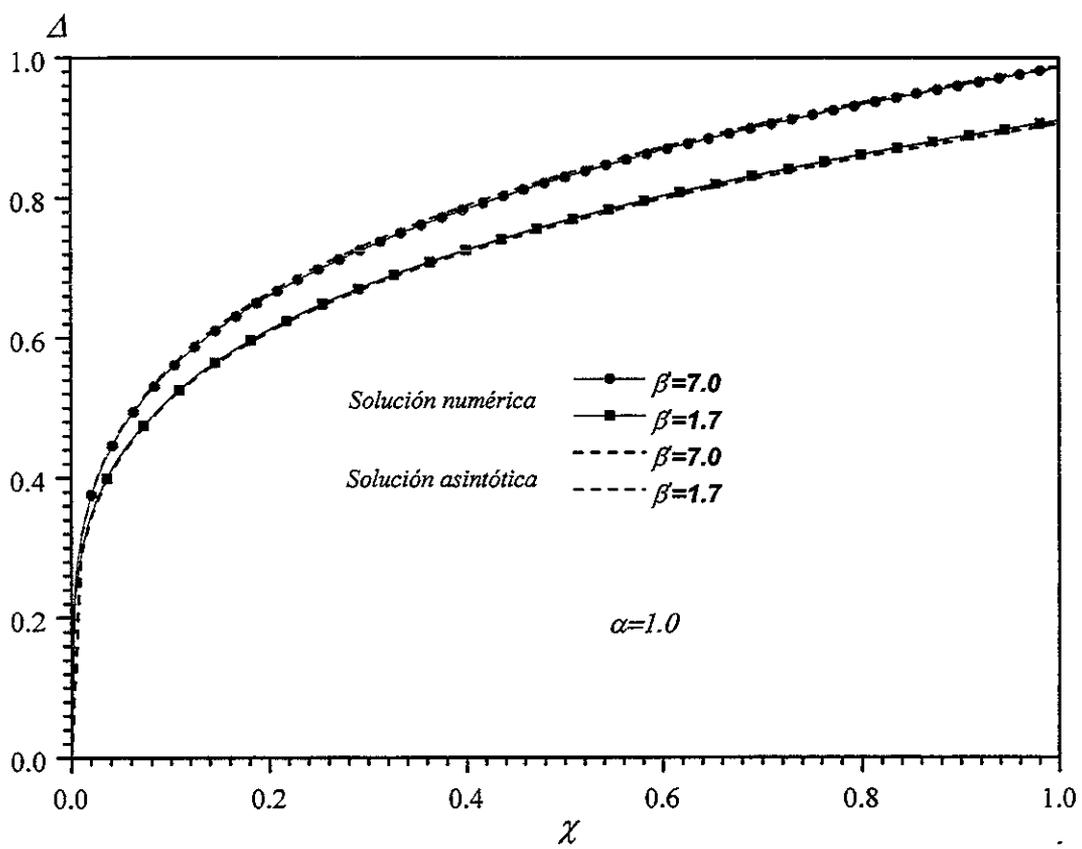


Figura 4-9: Espesor adimensional de la capa de condensado como una función de χ para diferentes valores de β' y $\alpha = 1.0$.

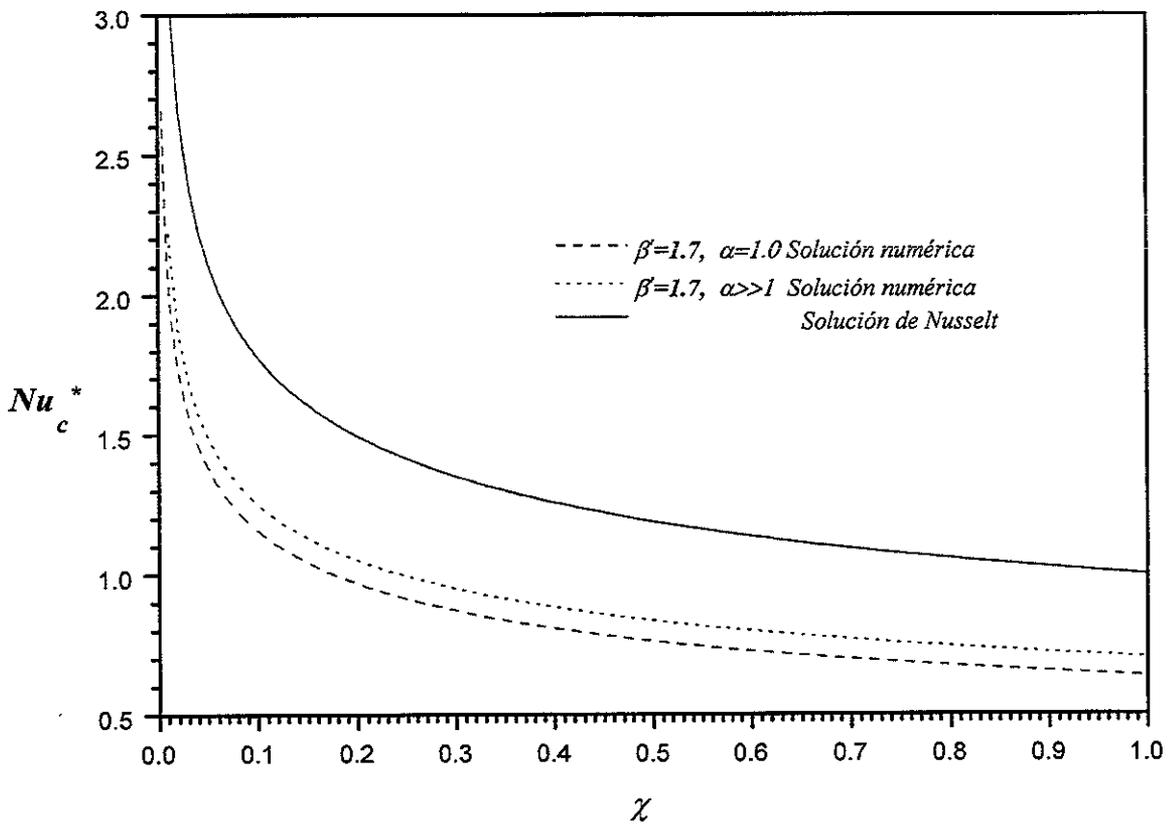


Figura 4-10: Número de Nusselt modificado (local) en la zona de condensado para diferentes valores de β' con $\alpha = 1$ y $\alpha \gg 1$. Se presenta también la solución clásica de Nusselt.

Bibliografía

- [1] W. Nusselt, Z., Die oberflächenkondensation des wasserdampfes, Z. Ver. Dt. Ing. 60, 541-546, 569-575 (1916).
- [2] W. M. Rohsenow, Heat transfer and temperature distribution in laminar-film condensation, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs* 78, 1645-1648 (1956).
- [3] L. A. Bromley, Effect of heat capacity of condensate, *Ind. Engng Chem.* 44, 2966-2969 (1952).
- [4] E. M. Sparrow and J. L. Gregg, A boundary layer treatment of laminar-film condensation, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs* 81, 13-17 (1959).
- [5] M. M. Chen, An analytical study of laminar film condensation, Part 1 flat plates, *J. Heat Transfer* 83, 48-54 (1961).
- [6] J. C. Y. Koh, E. M. Sparrow and J. P. Hartnett, The two phase boundary layer in laminar film condensation, *Int. J. Heat Mass Transfer* 2, 69-82 (1961).
- [7] J. C. Y. Koh, On integral treatment of two-phase boundary layer in film condensation, *J. Heat Transfer*, 83, 359-362 (1961)
- [8] S. W. Churchill, Laminar film condensation, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 29, 1219-1226 (1986).
- [9] Incropera F. P. de Witt D. P., 1996, *Fundamentals of heat and mass transfer*, 4th. edition, p589, John Wiley & Sons, New York.
- [10] H. Merte, Jr., Condensation heat transfer, *Adv. Heat Transfer* 15, 181-272 (1973).

- [11] J. W. Rose, Fundamentals of condensation heat transfer: Laminar film condensation, *JSME Int. J.*, Ser.2 31, 357-375 (1988).
- [12] I. Tanasawa, Advances in condensation heat transfer, *Adv. Heat Transfer* 21, 55-139 (1991).
- [13] S. V. Patankar and E. M. Sparrow, Condensation on an extended surface, *J. Heat Transfer* 101, 434-440 (1979).
- [14] J. E. Wilkins, Condensation on an Extended Surface, *J. Heat Transfer* 102, 186-187 (1980).
- [15] H. J. H. Brouwers, Film condensation on non-isothermal vertical plates, *Int. J. Heat Mass Transfer* 32, 655-663 (1989).
- [16] P. K. Sarma, S. P. Chary and V. Dharma Rao, Condensation on a vertical plate fin of variable thickness, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 31, 1941-1944 (1988)
- [17] M. J. Lighthill, Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer, *Proc. Roy. Soc. A202*, 359 (1950)
- [18] J. L. Córdova and C. Treviño, Effects of Longitudinal Heat Conduction of a Vertical Thin Plate in a Natural Convective Cooling Process, *Wärme und Stoffübertragung*, Vol. 29, pp. 195-204 (1994).
- [19] C. Treviño and A. Liñán, External Heating of a Flat Plate in a Convective Flow, *Int. Journal Heat Mass Transfer*, 27,1067-1073 (1984).
- [20] White, Frank M., 1991, *Viscous fluid flow*, 2a. ed. p. 127, McGraw-Hill, Singapur.
- [21] Bejan, Adrian, 1995, *Convection heat transfer*, 2a. ed. pp. 18-21,97-98,403-423, John Wiley & Sons, Inc., US.
- [22] Kays, W. M. et al, *Convective heat and mass transfer*, 3a ed., pp. 21,140-146, McGraw-Hill, US.
- [23] F. Méndez and C. Treviño, Film condensation generated by a forced cooling fluid, *Eur. J. Mech.*, B/Fluids, 15, n°2, 217-240, 1996.
- [24] A. P. Fraas, *Heat Exchanger Design*, 2nd edition, Wiley, 1989.