



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

16
2ejm

FACULTAD DE CIENCIAS

CODIFICACION DE GEODESICAS EN SUPERFICIAS MODULARES

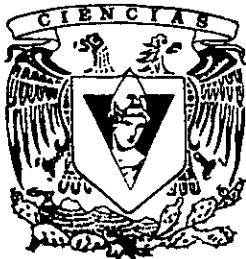
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

EDNA FANNY JASSO HERNANDEZ



DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. JOSÉ ANTONIO GÓMEZ ORTEGA



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

1998

264131

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

CODIFICACIÓN DE GEODÉSICAS EN SUPERFICIES MODULARES

realizado por Edna Fanny Jasso Hernández

con número de cuenta 8925274-5 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis M. en C. José Antonio Gómez Ortega.

Propietario Dr. Javier Páez Cárdenas.

Propietario M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza.

Suplente Dr. Guillermo Sienta Loera.

Suplente M. en C. Rogelio Valdez Delgado.

JCS
Jasso Hernández
Ana Irene Ramírez Galarza

G. Sienta
Rogelio Valdez D.

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. César Guevara Bravo.

A Francisco y Emma;

a L.

Agradecimientos

Seguramente esta tesis no sería lo que es (y en buena parte yo tampoco), si no me hubiese encontrado con tantas personas que me han motivado y apoyado para estudiar matemáticas e incrementar el gusto por ellas y también con aquellos de quienes he aprendido tantas cosas no sólo de matemáticas.

Entre ellos me gustaría agradecerle a Javier Paéz el haberme “mostrado el buen camino”, según sus propias palabras y gracias a las cuales terminé estudiando matemáticas, a Ana Irene Ramírez, León Kushner y a Alejandro Illanes no sólo por ser los mejores maestros sino también por sus valiosos consejos y por tener siempre la disposición para ayudar aunque no se tratara del ámbito escolar. A Guillermo Sienra por sus comentarios y por el tiempo que le dedicó a esta tesis. A Carlos Urzúa porque aunque nunca fue mi maestro me enseñó y me ayudó tanto.

Muy especialmente a Toño Gómez por contagiarme el gusto por la Geometría Hiperbólica, por motivarme siempre para crecer, por tener infinita paciencia, por preocuparse por mi y por saber ser además de un gran maestro, un gran amigo.

A todos los compañeros y amigos de la facultad que me hicieron mucho más divertida la estancia en ella, de entre ellos Luz, Maru, Panch, Likin, Pablo Barberis, Vero y Elsa por tantas pláticas clavadas y por las risas compartidas; a Carlitos, Andrés y a Roge porque además me han dado excelentes consejos y junto con Benja me enseñaron lo que sé de \LaTeX . A Sandra, Mito, Luis y a Iván por ser mucho más que amigos de la facultad, por las aventuras que hemos pasado juntos, por los reventones. A Ángeles, Erika y Lorena, por sonsacarme siempre y mostrarme otra realidad. A Daniel por escucharme y darme ánimo cuando creía que ya no podía más.

A Jorge, por estar vivo y enseñarme tantos nuevos significados, por estar allí incluso en los momentos difíciles, por la locura que compartimos y por las prioridades.

A mis padres, por su apoyo incondicional en todos los aspectos, por

la paciencia que me han tenido y por TODO. A Fab, por ayudarme con algunos dibujos, por sus consejos y por todas esas pláticas psico-filosóficas. A Lumbi y Eric por enseñarme por primera vez la facultad y a la tía Luz por preocuparse siempre por mi.

A la famili Peña, por todas las comidas que me invitaron, por las vitaminas y por Igor.

A Igor por todos los desvelos que compartimos estudiando, por hacerme la vida más divertida y por ser el compañero de tantas aventuras, vivencias y emociones.

Al Instituto de Matemáticas, por el lugar y por todo el apoyo que me ha dado y a todos mis compañeros de allí, de ellos a mis amigos del cubículo 2 y del cubículo C, a Meche, Alfredo, Mari, al Checo, a Enrique (el Willy) y a Eric. A Mario Eudave y a Sergio Macías por la motivación que me han dado.

A fundación UNAM porque sin su apoyo económico esta tesis no habría podido ser.

Índice

1	Introducción	1
1.1	El caso euclidiano	2
1.2	El caso hiperbólico	9
1.3	Estructura del trabajo	15
2	Fracciones continuas con “-”	17
2.1	Nociones y propiedades	17
2.2	Fracciones periódicas	26
3	Teoría de reducción para $PSL(2, \mathbb{Z})$	35
3.1	Propiedades de los grupos Fuchsianos	35
3.2	Teoría de reducción...	38
3.3	Codificación de geodésicas	51
4	Relación entre los códigos	57
4.1	Consideraciones	57
4.2	Relación entre los códigos y la orientación	60
4.3	Relación entre reducción y el código aritmético	63
A	La Geometría Hiperbólica Plana	75
A.1	El plano hiperbólico	75
A.2	La geometría hiperbólica	78
A.3	Cálculo de la longitud hiperbólica	80
A.4	Grupos Fuchsianos	82
A.5	El espacio cociente \mathcal{H}/Γ	92
	Bibliografía	95

Lista de Figuras

1.1	Los lados a y b	3
1.2	L se encuentra entre L_0 y L_1	4
1.3	L trasladada al punto $(0, t)$	5
1.4	La sucesión de corte de la recta	8
1.5	La teselación que induce R bajo Γ	9
1.6	Los lados W , \bar{W} y S	10
1.7	M "rota" R_1 en R_2 y R_2 en R_3	12
1.8	Casos en que una geodésica corta a un triángulo y las sucesiones asociadas a cada uno.	12
1.9	La sucesión de corte de γ y de $\tau_1(\gamma)$	14
3.1	La teselación modular	53
4.1	F es una región fundamental para $SL(2, \mathbb{Z})$	58
4.2	Los ejes de matrices conjugadas a A	59
4.3	γ_{A_k} no puede entrar a TF por $T(a_i)$ sin pasar antes por $T(v_1)$	60
4.4	γ_A se encuentra en la región sombreada.	61
4.5	Trayectoria de γ_{A_k}	63
A.1	La \mathcal{H} -línea que une a z_1 con z_2	81

1

Introducción

Cuando uno se refiere a los orígenes y al desarrollo de la geometría hiperbólica y le tiene cierto gusto, encuentra válida la idea de que “La geometría hiperbólica es la Cenicienta de la historia de las matemáticas. Rechazada y escondida mientras sus dos hermanas, la geometría esférica y la euclidiana, acaparaban el centro de atención, la geometría hiperbólica fue eventualmente rescatada y emergió para opacar a ambas” [St96]. Ciertamente, en sus inicios esta geometría vino a desmentir la universalidad del concepto de espacio euclidiano, quienes la descubrieron fueron Gauss, Lobachevsky y Bolyai, los cuales llegaron casi a las mismas ideas de manera independiente. El primero en publicar acerca de ésta fue Lobachevsky en 1829, aunque en 1816 Gauss ya había pensado en la existencia de un nuevo sistema geométrico tan válido como la geometría euclidiana. Bolyai desarrolló una geometría que era independiente del V postulado de Euclides mientras que Lobachevsky se dedicó a trabajar con una nueva geometría en la que podía haber dos paralelas a una línea en un punto. A pesar de todo el trabajo de Lobachevsky y Bolyai, la geometría hiperbólica no tuvo gran reconocimiento y no fue hasta 1868 en que Eugenio Beltrami da una interpretación concreta y una base sólida y lógica a los trabajos anteriores, mostrando que ésta era parte de la geometría diferencial clásica. Beltrami interpreta a las líneas rectas como geodésicas en una superficie de curvatura constante negativa (una “superficie pseudoesférica”), aunque se le criticó el que en ésta sólo se modelara una parte del plano hiperbólico; proporciona además un modelo más general, similar al de Liouville, que es un modelo abstracto de una superficie simplemente conexa de curvatura negativa constante y que surge de transformar las coordenadas sobre la pseudoesfera. Posteriormente Klein da interpretaciones en la geo-

metría proyectiva en 1871 y con Poincaré en 1882 la geometría hiperbólica toma un nuevo giro pues, a diferencia del enfoque geométrico dado por Klein y Beltrami, éste le da múltiples aplicaciones al análisis complejo, a las ecuaciones diferenciales, a la teoría de números y a la topología de dimensión baja, descubriendo que la geometría hiperbólica ya estaba presente en las matemáticas, la hace familiar y potencialmente útil. Poincaré también reintroduce el modelo del semiplano superior de Liouville-Beltrami e identifica al grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ con el grupo de isometrías que preservan la orientación en el plano hiperbólico. Proporciona bases para el estudio de los automorfismos y enfatiza la importancia de encontrar subgrupos discretos de las isometrías hiperbólicas. De hecho, él es el primero en definir formalmente un grupo discontinuo y un grupo Fuchsiano; él investigó los grupos discretos de isometrías del plano hiperbólico (\mathcal{H}) guiado por su trabajo en ecuaciones diferenciales de funciones de variable compleja. El presente trabajo está basado en el artículo de Svetlana Katok: "Coding of Closed Geodesics after Gauss and Morse" [Ka96], trabajo motivado por la dinámica compleja pues se involucra con teoría ergódica y la dinámica simbólica para un flujo geodésico. Aunque aquí no hablaremos de dinámica, diremos que juega un papel importante en ésta el representar y determinar a las geodésicas mediante sucesiones de generadores de un grupo que actúa en el espacio ambiente, o de una manera más simple, mediante sucesiones de enteros. Ésta es la idea de la codificación de geodésicas, que en este caso se encontrarán en el semiplano hiperbólico \mathcal{H} .

Resta decir que en este trabajo se presupone que se tiene una idea muy general acerca de \mathcal{H} , sobre todo con cómo son las geodésicas y cómo actúan las transformaciones de Möbius en \mathcal{H} . Los principales resultados que se usan acerca de esto se encuentran desarrollados en el apéndice.

1.1 El caso euclidiano

Comenzaremos dando un ejemplo para hacernos una idea más familiar del trabajo que desarrollaremos, esta vez el caso más sencillo de espacio ambiente es el (viejo conocido) plano euclidiano y los personajes centrales son, obviamente, las rectas como geodésicas.

Consideremos pues una cuadrícula en el plano. Llamemos a a los lados verticales y b a los lados horizontales que conforman la cuadrícula (podemos suponer que cada lado mide la unidad). Consideremos ahora una recta L en el plano. Partiendo de un punto cualquiera, al recorrer L en un sentido nos

encontraremos con los lados a y b , formaremos una sucesión de letras a y b de la siguiente manera: si después del punto del que se parte, se encuentra la línea con un lado de un cuadrado, digamos horizontal, escribiremos una letra b (si es vertical escribiremos una letra a), la línea entrará a ese cuadrado, lo cruzará y en seguida entrará a otro cuadrado por algún lado, éste podrá ser vertical u horizontal; si es vertical escribiremos una letra a si es horizontal una b , y así sucesivamente, esto nos dará una colección de letras a y b . Si L pasa por un vértice se contará indistintamente como ab o ba , pero siempre el mismo en todos los casos. (Véase Fig. 1.1)

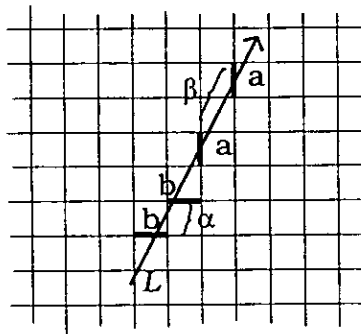


Figura 1.1: Los lados a y b

A dicha sucesión le llamaremos *sucesión de corte*. Notemos que tal sucesión depende del punto del que partimos en L , aunque veremos a continuación que esto no es relevante para nuestro propósito.

Denotaremos a la pendiente de L como λ y a su ángulo de inclinación con respecto a una línea horizontal como θ . Notemos que si α es la distancia medida sobre L entre dos letras b consecutivas y β la correspondiente entre dos letras a en la sucesión, tendremos $\cos\theta = 1/\beta$ y $\sen\theta = 1/\alpha$ y entonces $\lambda = \beta/\alpha$.

Si $\lambda > 1$, notemos lo siguiente:

- (i) No aparecen dos letras a consecutivamente (pues si así fuese $\alpha > \beta$ lo cual contradice que $\lambda > 1$.)
- (ii) Entre dos a 's hay $[\lambda]$ o $[\lambda] + 1$ letras b .

La afirmación (ii) es clara para el caso en que L tiene pendiente entera y parte de un vértice (ver figura 1.2). Supongamos ahora que L parte de un

vértice, el cual podemos pensar que es el origen, y que L no necesariamente tiene pendiente entera; partiendo del origen se tiene que L está dentro de la región acotada por las rectas L_0 con pendiente $[\lambda]$ y L_1 con pendiente $[\lambda] + 1$. Como L_0 y L_1 pasan exactamente por $[\lambda]$ y $[\lambda] + 1$ letras b antes de llegar a una a , la recta L se ve obligada a hacer lo mismo.

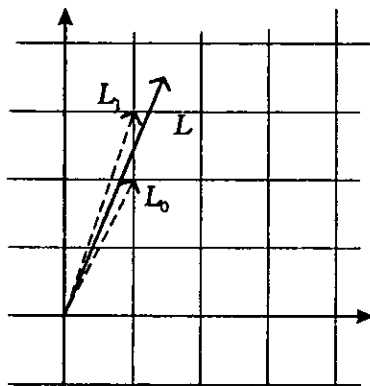


Figura 1.2: L se encuentra entre L_0 y L_1

El hecho de que L pase por una letra b se puede ver analíticamente como contar el número de veces en que y toma valores enteros para la ecuación de L : $y = mx$, donde $0 \leq x \leq 1$.

El resto de los casos se reduce a ver lo que sucede con los cortes de L en la cuadrícula cuando la recorremos para que pase por el punto $(0, t)$, donde $0 < t < 1$. Entonces, para una t fija tenemos que contar cuántas veces toma valores enteros la variable y en la ecuación $y = m(x - t)$, donde $m > 1$ (fig.1.3). De hecho, y toma valores enteros negativos tantas veces como $[mt]$, además y se anula y también toma valores enteros positivos, tantos como $[m(1 - t)]$. Por lo que si r es el número de veces en que y toma valores enteros, se tiene que $r = [mt] + 1 + [m - mt]$.

Además, como $m, mt > 0$ y $m > mt$ se tiene que

$$[m] - [mt] - 1 \leq [m - mt] \leq [m] - [mt]$$

por lo tanto

$$[m] \leq r \leq [m] + 1.$$

Si ahora $0 \leq [\lambda] < 1$ se cambian los papeles entre a y b , y en (ii) se cambia $1/\lambda$ por λ .

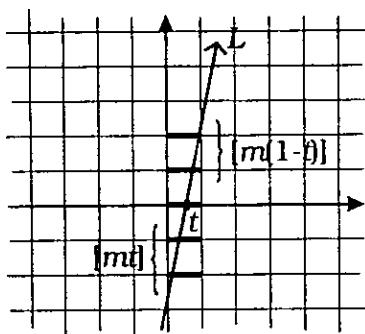


Figura 1.3: L trasladada al punto $(0, t)$

En adelante pensaremos que L está “dirigida” en el primer cuadrante, esto es, que si parte de un vértice, está entrando a un cuadrado por el extremo inferior izquierdo; y si L esta “dirigida” en otro cuadrante se cambian las a 's o b 's por a^{-1} y b^{-1} según el cuadrante. Es por esto que basta saber cómo se comportan las sucesiones de corte cuando $\lambda > 1$ para saber lo que sucede cuando $\lambda < 1$.

Ahora daremos algunas definiciones para trabajar mas cómodamente.

Definición 1.1.1

1. Llamaremos a una sucesión de a 's y b 's que cumplen con los incisos (i) y (ii) casi constante y a la parte entera de λ (o de $1/\lambda$ si $\lambda < 1$) la denotaremos como su valor.
2. Dada una sucesión casi constante con valor n , si hacemos $a_1 = ab^n$ y $b_1 = b$, a la sucesión que se obtiene de la original en términos de a_1 y b_1 se le llama sucesión derivada.
3. A una sucesión que se pueda derivar cuantas veces se quiera la llamaremos sucesión característica.

Las sucesiones de corte correspondientes a rectas resultan ser características. Si L es una recta con pendiente λ , notemos que si λ es racional, la sucesión de corte es periódica y las sucesiones derivadas también, de hecho llegará un momento en que, para alguna $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima sucesión derivada sea una sucesión constante (de letras b o de letras a) con lo que terminaríamos el procedimiento. Si n_i son los valores de las sucesiones derivadas,

$i = 1, 2, \dots, k$, entonces la expresión en fracción continua para λ es

$$\lambda = (n_0, n_1, \dots, n_{k-1}, n_k) = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \dots + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}}}$$

Si λ es irracional, la sucesión de corte no será periódica, con lo cual siempre podremos obtener valores positivos de las sucesiones derivadas (esto es, ninguna sucesión derivada será constante) y nos aproximaremos a λ a medida que $k \rightarrow \infty$. Esta observación coincide con el resultado de fracciones continuas en el cual un número es racional si su desarrollo en fracción continua es finito y es irracional si éste es infinito. La justificación es la siguiente:

Consideremos una sucesión de corte casi constante y a su primera sucesión derivada, con valor n_0 . Ésta se puede ver en el plano asociando a a con el vector $(1, 0)$ y a b con el $(0, 1)$, el sustituir a por ab^{n_0} en la sucesión original significa cambiar $(1, 0)$ por $(1, n_0)$, esto es, la sucesión derivada representa el aplicar al plano la transformación lineal:

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ n_0x + y \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Así ϕ transforma la cuadrícula de a 's y b 's en otra rejilla y L es transformada en otra recta, L_1 , con pendiente $n_0 + \lambda$.

Como $\phi^{-1}(L)$ tiene pendiente $\lambda - n_0 < 1$ (pues $n_0 = [\lambda]$), para volver a calcular el valor de la sucesión derivada es necesario cambiar los papeles de a y de b , que es lo mismo que si reflejamos el sistema coordenado por la recta $y = x$, y entonces estamos considerando una recta con pendiente $\lambda_1 = 1/(\lambda - n_0)$, dando un valor $n_1 = [\lambda_1]$. Podemos repetir los mismos argumentos para llegar a que en la k -ésima sucesión derivada obtenemos una nueva pendiente λ_k y un valor n_k dado por

$$\lambda_k = \frac{1}{\lambda_{k-1} - n_{k-1}} \quad \text{y} \quad n_k = [\lambda_k]$$

así que λ se puede dar en términos de los valores de las sucesiones derivadas y de las pendientes λ_k :

$$\lambda = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \dots + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{\lambda_k}}}} \tag{1.2}$$

De la unicidad de la expresión en fracción continua para un número tenemos que $\lambda = (n_0, n_1, \dots, n_{k-1}, \lambda_k)$. Así, cuando n_k es cero terminamos el procedimiento y recuperamos a λ , de otra manera siempre podremos obtener $\lambda_k > 0$ y aproximarnos a λ tanto como lo queramos.

Para tener una visión más clara de esto pensemos en una recta cuya sucesión de corte es (fig.1.4):

...abbabbabbabbabbabbabbabbabbabbabbabbabbabbabbabbabbabb
abbabbabbabbabbabb...

En donde las letras negras denotan el periodo de esta sucesión

Notemos que entre las letras *a* aparecen 2 o 3 letras *b*, esto significa que el valor de la primera sucesión derivada es $n_0 = 2$. Así la primera sustitución que se hará es simplemente cambiar *a* por ab^2 , obteniendo la sucesión:

... $a^2baba^2baba^2bababa^2baba^2baba^2bababa$...

Ahora $n_1 = 1$ y entonces cambiaremos *b* en lugar de *ab*, obtenemos a la sucesión derivada:

... $ab^2ab^2ab^3ab^2ab^2ab^3a$...

Aquí $n_2 = 2$, cambiamos *a* por ab^2 y la sucesión correspondiente es

a^3ba^3b .

Y finalmente $n_3 = 3$, la sustituimos *b* en lugar de a^3b con lo que nos queda la sucesión constante: **b**.

La pendiente de la recta, dada en fracción continua es:

$$\lambda = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \frac{27}{10}.$$

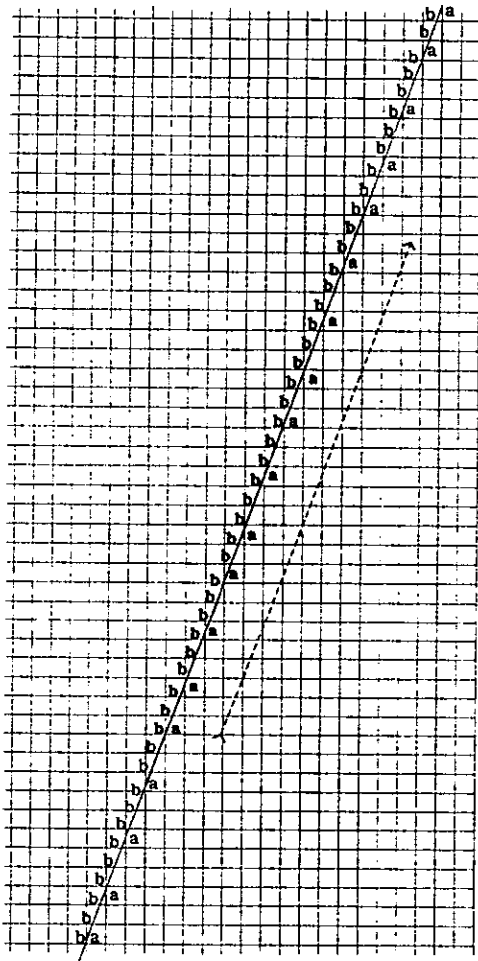


Figura 1.4: La sucesión de corte de la recta

1.2 El caso hiperbólico

Observemos que en el ejemplo anterior partimos de una teselación para el plano euclidiano, la cual se puede dar como las imágenes del cuadrado con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ bajo el grupo de transformaciones generado por $(x,y) \mapsto (x+1,y)$ y $(x,y) \mapsto (x,y+1)$. También caracterizamos a las líneas (salvo traslaciones) del plano euclidiano. En este caso el espacio ambiente será el plano hiperbólico \mathcal{H} , y el equivalente a la cuadrícula del ejemplo anterior será ahora una triangulación de \mathcal{H} , ésta es la teselación dada por la región fundamental

$$R = \{z \in \mathcal{H} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \text{ y } |z - 1/2| \geq 1/2\}$$

bajo el subgrupo libre Γ de $PSL(2, \mathbb{Z})$ generado por las transformaciones $S(z) = -1/z$ y $W(z) = 2 - 1/z$. Esto es, R es un triángulo hiperbólico y las imágenes de R bajo cada uno de los elementos de Γ también son triángulos hiperbólicos que llenarán a todo \mathcal{H} y éstos sólo tendrán en común vértices o lados. Notemos que los vértices de R se encuentran en la frontera de \mathcal{H} , por lo que todos los triángulos de la teselación tendrán sus vértices en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Observemos también que $WS(z) = z + 2$, por lo que basta saber qué es lo que hace la teselación en una banda que mida 2 sobre el eje real para saber qué es lo que hace en el resto de \mathcal{H} . La manera en que R tesela se ilustra en la figura 1.5.

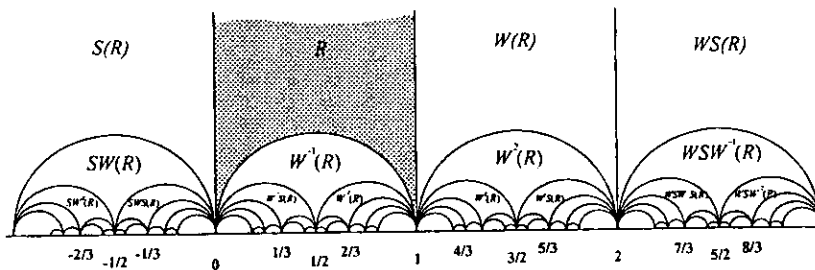


Figura 1.5: La teselación que induce R bajo Γ

Al igual que como los lados de los cuadrados en el ejemplo euclidiano tenía asociada una letra a o b , para R cada uno de sus lados tiene asociada una letra que se relaciona con S y W . La asignación de las letras es la siguiente: La \mathcal{H} -línea (o línea hiperbólica) $x = 0$ tiene asignada la letra S ,

la \mathcal{H} -línea que une a 0 y 1 tiene asignada la letra W y aquella dada por la ecuación $x = 1$ tiene asociada la letra \bar{W} . La asignación de las letras proviene de que la transformación S mapea a $x = 0$ en ella misma pero invirtiendo la orientación, basta con ver que $S(0) = \infty$ y $S(\infty) = 0$ y recordar que $PSL(2, \mathbb{R})$ manda \mathcal{H} -líneas en \mathcal{H} -líneas. Además notemos que $S^{-1} = S$. Por otro lado la \mathcal{H} -línea que va de 0 a 1 se transforma bajo W en $x = 1$ y entonces la \mathcal{H} -línea $x = 1$ se transforma en la que va de 0 a 1 mediante W^{-1} , la cual representamos como \bar{W} .

Una vez que han sido etiquetados los lados de R obtenemos etiquetas para el resto de los triángulos de \mathcal{H} viendo, para cada uno de estos de qué lado de R provienen (bajo Γ) y asignándole la etiqueta correspondiente a ese lado. Como dos triángulos adyacentes comparten un lado, cada lado tendrá asignadas dos letras que pueden ser diferentes (de hecho corresponderán a W y \bar{W}). Las letras asignadas quedan como en figura 1.6.

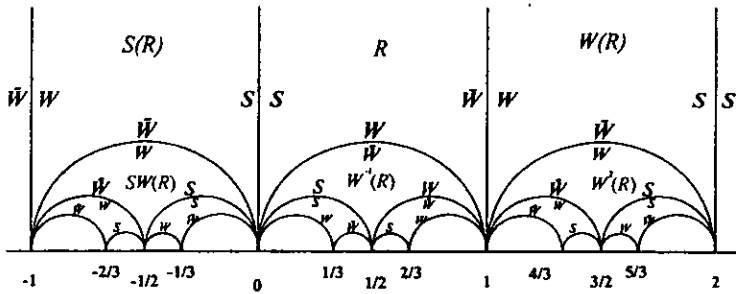


Figura 1.6: Los lados W , \bar{W} y S

Desafortunadamente las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{Z})$ no respetan las etiquetas que hemos asignado, basta ver (fig.1.6) que la traslación $T(z) = z + 1$ manda R en $W(R)$ pero la etiqueta de S la cambia a W . Es por esto que todavía hay que hacer una conversión de etiquetas que cumplan con ser invariantes bajo $PSL(2, \mathbb{Z})$.

Pensemos en una geodésica orientada que una a dos elementos del eje real. Partiendo de un punto cualquiera en la geodésica y considerando las etiquetas dadas por S , W y \bar{W} obtenemos una sucesión de corte de manera similar al caso euclidiano. Cuando recorremos la geodésica entraremos a uno de los triángulos de la teselación por un lado, que tiene asignada una letra S , W o \bar{W} , cruzaremos dicho triángulo y saldremos de éste para entrar a otro triángulo por uno de sus lados con una letra asignada. Cuando escribi-

mos las letras correspondientes a los lados obtenemos una sucesión de corte como en el caso euclidiano. El hecho de que los lados de los triángulos de la teselación tenga dos letras asignadas nos permite distinguir el sentido en el que estamos cruzando al triángulo, por ejemplo, si cruzamos un triángulo T_1 entrando por un lado etiquetado con la letra W e inmediatamente entramos al triángulo T_2 por un lado que tiene asignado a S , en la sucesión tendremos WS y si recorremos la geodésica en el sentido opuesto y entramos primero a T_2 y luego a T_1 los lados por los que entramos están etiquetados con las letras $S = S^{-1}$ y \bar{W} , por lo que en la sucesión de corte aparecerá $S\bar{W}$, el cual corresponde al inverso de WS .

Las nuevas etiquetas invariantes bajo $PSL(2, \mathbb{Z})$ se harán de acuerdo a cómo vaya cruzando la geodésica a cada triángulo hiperbólico de la triangulación dada por R . Cuando la geodésica orientada cruza un triángulo hiperbólico lo corta dejando de un lado un vértice y los otros dos vértices del otro lado; no tenemos el problema de que la geodésica pase por un vértice en \mathcal{H} puesto que los vértices de los triángulos se encuentran en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si el vértice que es aislado por la geodésica queda a la izquierda de ésta, de acuerdo con la dirección de su recorrido, se escribirá una L y si el vértice queda a la izquierda se escribirá una H . Éstas son las etiquetas que iremos recuperando en una sucesión de la misma manera en que hemos obtenido las sucesiones de corte.

Para ver que las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{Z})$ dejan invariantes las etiquetas L y H , basta con ver que la transformación $T(z) = z + 1$ deja invariantes a estas etiqueta porque S y T generan a $PSL(2, \mathbb{Z})$ (A.4.19) y además $S \in \Gamma$. De hecho se tiene que las transformaciones S , W y $M(z) = -1/(z-1)$ generan a $PSL(2, \mathbb{Z})$, esto es claro cuando observamos que $WM = T$. La transformación M es elíptica de orden 3 (esto es $M^3 = I$), conjugada a una rotación de $2\pi/3$ alrededor del punto fijo $1 + (\sqrt{3}/2)i$ (§A.1).

De hecho, si R_1 es el cuadrilátero hiperbólico contenido en R y con vértices en ∞ , i , $1/2 + (\sqrt{3}/2)i$ y $1+i$; R_2 el que tiene vértices en i , 0 , $1/2 + i/2$ y $1/2 + (\sqrt{3}/2)i$; y R_3 aquél cuyos vértices son $1/2 + i/2$, $1/2 + (\sqrt{3}/2)i$, 1 y $1+i$; entonces M transforma las subregiones R_1 en R_2 y R_2 en R_3 (fig.1.7). Para ver esto basta con saber que $M(1/2 + i/2) = 1 + i$, $M(i) = 1/2 + i/2$, $M(\infty) = 0$, $M(1+i) = i$, $M(0) = 1$ y $M(1) = \infty$ y entonces los lados de los cuadriláteros y por ende éstos, son mapeados de esta manera. Visto de otra forma, M mueve cada vértice de R "rotándolo" al siguiente vértice (de R) que queda a su izquierda. Como W deja invariantes las etiquetas S, W y \bar{W} , entonces T tendrá el mismo efecto que M en éstas. En la figura 1.8 se

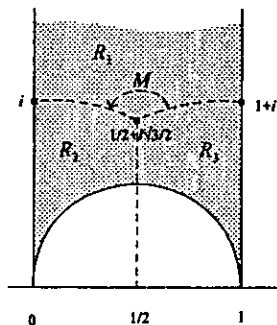


Figura 1.7: M "rota" R_1 en R_2 y R_2 en R_3

ven los posibles casos en que una geodésica corta a un triángulo y cómo el "rotar" los vértices no altera las etiquetas L y H .

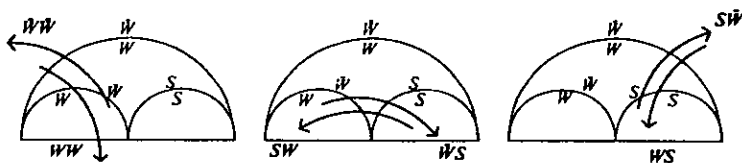


Figura 1.8: Casos en que una geodésica corta a un triángulo y las sucesiones asociadas a cada uno.

Hay una manera de traducir sucesiones de corte con las letras S y W a sucesiones con letras L y H , ésta surge de considerar los casos en que la geodésica corta a un triángulo, en la figura 1.8, aparece la sucesión de letras que le corresponde a cada cruce al final de la flecha y con letras más oscuras. Entonces la conversión de letras es como sigue: pondremos una L por cada pareja del tipo SW , $\bar{W}\bar{W}$ o WS que haya en la sucesión y pondremos una H por cada pareja $S\bar{W}$, WW o $\bar{W}S$ de la sucesión. Entonces las nuevas sucesiones de corte que tendremos serán también sucesiones dobles (una por cada punto extremo) de la forma

$$\dots L^{m_2} H^{m_1} L^{n_0} H^{n_1} L^{n_2} \dots$$

donde $m_j, n_r \in \mathbb{N}$.

Puesto que las letras L y H son invariantes bajo $PSL(2, \mathbb{Z})$, entonces dos geodésicas γ_1 y γ_2 que son equivalentes bajo $PSL(2, \mathbb{Z})$ (esto es, existe

$P \in PSL(2, \mathbb{Z})$ tal que $P(\gamma_1) = \gamma_2$ tienen la misma sucesión de corte. La afirmación recíproca también es cierta pues si ahora γ_1 y γ_2 tienen la misma sucesión de corte, podemos trasladar a ambas mediante alguna transformación en $PSL(2, \mathbb{Z})$ de tal manera que las dos crucen el eje imaginario en puntos donde coincidan las sucesiones de corte, al ir recorriendo a γ_1 y γ_2 y de acuerdo a la sucesión de corte, ambas tienen que entrar a los mismos triángulos después de salir del eje imaginario y entonces su punto extremo límite será el mismo. Haciendo el mismo procedimiento para el otro extremo (en el sentido contrario) se tiene que los puntos extremos de γ_1 y γ_2 son los mismos, por lo que $\gamma_1 = \gamma_2$.

Podemos, entonces, limitarnos a pensar sólo en geodésicas que unen un punto del eje imaginario con algún real positivo, pues todos los casos de sucesiones de corte se pueden llevar a uno como éste mediante un elemento de $PSL(2, \mathbb{Z})$. Por cierto, por continuidad a las rectas verticales les corresponden dos sucesiones L^∞ y R^∞ .

En este ejemplo hiperbólico las fracciones continuas también tienen su papel protagónico. Pensemos entonces en que $\theta \in \mathbb{R}^+$ es el extremo al que llega una geodésica γ y que parte de cualquier punto en el eje imaginario. Si la sucesión de corte de γ es de la forma

$$L^{n_0} H^{n_1} L^{n_2} \dots$$

donde $n_i \in \mathbb{N}$ y n_0 puede ser cero (este es el caso cuando $\theta < 1$), entonces la expresión en fracción continua para θ es

$$\theta = (n_0, n_1, n_2, \dots).$$

La justificación es la siguiente: Si γ parte del eje imaginario, tiene que cruzar n_0 rectas verticales antes de descender y cruzar alguno de los semicírculos euclidianos con extremos enteros, esto es, $n_0 = [\theta]$, (ver figura 1.9). Llamemos D al punto en que se intersectan γ y la línea $x = n_0$, esto es, $D = n_0 + ti$, con $t > 0$. Mediante la transformación $\tau_1(z) = -1/(z - n_0)$, D se transforma en $D' = i/t$, y θ se transforma en $-1/(\theta - n_0) < 0$, así que γ se transforma en γ' , una geodésica orientada en sentido opuesto a γ pues une al punto D' en eje imaginario con un real negativo. Como τ_1 preserva la sucesión de corte, el elemento H^{n_1} indica que γ' cortará ahora n_1 rectas verticales antes de descender para cruzar otro semicírculo con extremos enteros, esto significa que $n_1 = [1/(\theta - n_0)]$, esto es

$$n_1 + r = \frac{1}{\theta - n_0} \text{ donde } 0 < r < 1,$$

por lo cual

$$\theta = n_0 + \frac{1}{n_1 + r}.$$

Llamemos ahora D_1 al punto donde γ' cruza $-n_1$, entonces $D_1 = -n_1 + t_1 i$ ($t_1 > 0$). Si ahora aplicamos a γ' la transformación $\tau_2(z) = -1/(z + n_1)$ tenemos que $\tau_2(D_1) = i/t_1$ y también

$$\tau_2\left(\frac{-1}{\theta - n_0}\right) = \frac{-1}{\frac{-1}{\theta - n_0} + (\frac{1}{\theta - n_0} - r)} = \frac{1}{r} > 1$$

por lo que γ' es transformada en otra geodésica que está en un caso similar a aquél con el que comenzamos, podemos repetir este procedimiento y llegar entonces a que

$$\theta = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

por lo tanto, $\theta = (n_0, n_1, n_2, \dots)$.

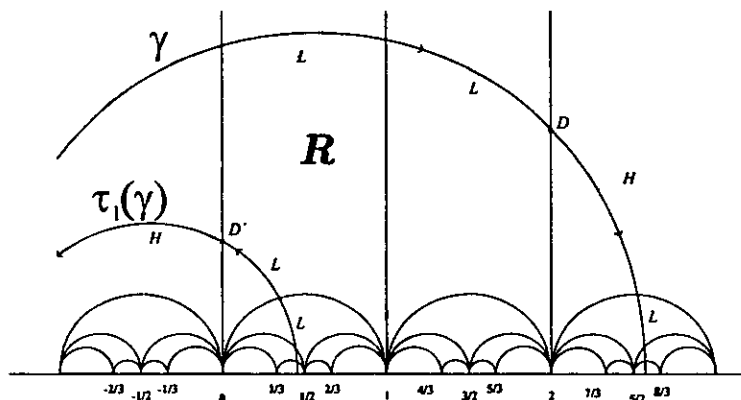


Figura 1.9: La sucesión de corte de γ y de $\tau_1(\gamma)$

1.3 Estructura del trabajo

Cómo hemos visto, las fracciones continuas pueden relacionarse con el comportamiento de las geodésicas en \mathcal{H} (las cuales están asociadas con algunos elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$); en nuestro caso no trabajaremos con las fracciones continuas usuales, sino con aquéllas que llamaremos fracciones continuas con “-”, aunque éstas tienen algunas propiedades similares a las de las fracciones continuas usuales, la diferencia entre ambas es la manera en que se aproximan a cada real, mientras que con las fracciones continuas usuales las aproximaciones con índices pares son crecientes y aquéllas con índices impares son decrecientes, en las fracciones continuas con “-” todas las aproximaciones son decrecientes. Este hecho nos ayudará para saber cómo cortarán las geodésicas a los lados de los polígonos hiperbólicos que teselarán a \mathcal{H} . Debido al comportamiento de las fracciones continuas con “-”, no todas las propiedades que tienen se derivan de la teoría de las fracciones continuas usuales, es por esto que el siguiente capítulo lo dedicamos a desarrollar las propiedades de las fracciones continuas con “-” que nos servirán para la codificación de geodésicas.

Las geodésicas de \mathcal{H} guardan una relación con $PSL(2, \mathbb{R})$ porque cada elemento hiperbólico de este grupo tiene dos puntos fijos reales y la geodésica que los une es invariante bajo la transformación asociada a cada elemento. De la misma manera que en el ejemplo del plano euclidiano consideramos sólo a clases de líneas (las que tienen la misma pendiente), invariantes bajo traslaciones, y así como en el caso hiperbólico consideramos a geodésicas salvo transformaciones en $PSL(2, \mathbb{Z})$, en este trabajo establecemos también ciertas clases de elementos hiperbólicos en $PSL(2, \mathbb{Z})$ y esto inducirá clases en las geodésicas. Al algoritmo que usaremos para encontrar “buenos” representantes de cada clase se le conoce como teoría de reducción y a los “buenos” representantes de cada clase se les conoce como elementos reducidos. En el capítulo 3 veremos los resultados necesarios para la teoría de reducción, en la cual el principal resultado es el teorema 3.2.10 y diremos también cómo se harán dos tipos de codificaciones de geodésicas, la aritmética y la geométrica, asociadas a elementos reducidos de $PSL(2, \mathbb{Z})$.

En el capítulo 4 se establecen y se prueban dos teoremas, que son el objetivo de este trabajo. El primero relaciona la orientación de una geodésica con cómo son los elementos reducidos y con el hecho de que el código aritmético y el código geométrico de la geodésica coincidan. En el segundo teorema se establecen condiciones necesarias y suficientes en el código aritmético de una geodésica para que coincida con el código geométrico correspondiente.

Finalmente en el apéndice, como ya se había mencionado, damos un repaso general de los conceptos y propiedades del espacio hiperbólico, de la geometría hiperbólica y de cómo actúa $PSL(2, \mathbb{Z})$ en \mathcal{H} . Se prueban los principales resultados a este respecto y también encontramos la región fundamental que inducirá la teselación con la que trabajaremos en \mathcal{H} , asociada a $PSL(2, \mathbb{Z})$. Proporcionamos también un algoritmo para expresar en términos de sus generadores S y T a los elementos de $PSL(2, \mathbb{Z})$.

2

Fracciones continuas con “-”

En este capítulo veremos las definiciones y propiedades principales de las fracciones continuas con “-”, caracterizamos a las fracciones periódicas y veremos cómo es el desarrollo en fracción continua “-” para las raíces de polinomios cuadráticos con coeficientes enteros. En los ejemplos anteriores hemos visto que las fracciones continuas guardan una estrecha relación con el grupo modular $PSL(2, \mathbb{Z})$ y a través de ellas estableceremos una de las codificaciones con la que se caracterizarán a las geodésicas en \mathcal{H} .

2.1 Nociones y propiedades

Recordemos que una fracción continua ordinaria o simplemente fracción continua es una función de $s + 1$ variables definida como:

$$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_s] = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \dots \frac{1}{x_{s-1} + \frac{1}{x_s}}}}$$

en la cual $x_i \in \mathbb{R}$, para cada $i = 0, 1, \dots, s$.

En este trabajo denotaremos por (x_0, x_1, \dots, x_s) a la fracción continua con “-” definida como sigue:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_s) = x_0 - \frac{1}{x_1 - \frac{1}{x_2 - \dots \frac{1}{x_{s-1} - \frac{1}{x_s}}}}$$

con $x_i \in \mathbb{R}$, para cada $i = 0, 1, \dots, s$.

Y denotaremos como $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_s)$ en el caso en que $n_i \in \mathbb{N}$ para $i = 0, 1, \dots, s$. Estaremos particularmente interesados en este último caso, y en especial en aquellas fracciones en las que $n_i \geq 2$. Esta condición extra nos permitirá obtener resultados de utilidad para nuestro trabajo.

Proposición 2.1.1 *Las fracciones continuas con “-” tienen las siguientes propiedades:*

1. $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_s) = x_0 - \frac{1}{(x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, x_s)}$
2. $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, x_s) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{s-1} - \frac{1}{x_s})$
3. $(x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_s) = (x_0, x_1, \dots, x_k, (x_{k+1}, \dots, x_s))$ para toda k tal que $1 \leq k \leq s$.

Estas propiedades se derivan directamente de la definición de fracción continua.

Por otro lado, si hacemos los cálculos es fácil comprobar que:

$$(x_0, x_1) = \frac{x_0 x_1 - 1}{x_1},$$

$$(x_0, x_1, x_2) = x_0 - \frac{1}{\frac{x_1 x_2 - 1}{x_2}} = \frac{x_0 x_1 x_2 - x_0 - x_2}{x_1 x_2 - 1}.$$

En general cada fracción continua con “-” se puede expresar como un cociente de polinomios en términos de las x_i 's, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.2 *Sean*

$$\begin{aligned} p_0 &= x_0, & q_0 &= 1, \\ p_1 &= x_0 x_1 - 1, & q_1 &= x_1, \\ p_2 &= x_2 p_1 - x_0, & q_2 &= x_2 q_1 - 1, \dots \\ p_s &= x_s p_{s-1} - p_{s-2}, & q_s &= x_s q_{s-1} - q_{s-2}. \end{aligned}$$

Entonces $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_s) = \frac{p_s}{q_s}$.

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre el índice s .

Para $s = 0, 1$ ya lo verificamos. Supongamos ahora que se cumple para $s < k$ y lo probaremos para $s = k$,

$$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1} - \frac{1}{x_k})$$

y por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1} - \frac{1}{x_k}) &= \frac{p_{k-2} \left(x_{k-1} - \frac{1}{x_k} \right) - p_{k-3}}{q_{k-2} \left(x_{k-1} - \frac{1}{x_k} \right) - q_{k-3}} \\ &= \frac{x_k (p_{k-2} x_{k-1} - p_{k-3}) - p_{k-2}}{x_k (q_{k-2} x_{k-1} - q_{k-3}) - q_{k-2}} \\ &= \frac{x_k p_{k-1} - p_{k-2}}{x_k q_{k-1} - q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k} \end{aligned}$$

□

Una manera interesante de obtener propiedades de las fracciones continuas es trabajando con matrices; esta nueva asignación nos facilitará muchos cálculos. Comencemos notando que

$$\begin{pmatrix} x_0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 x_1 - 1 & -x_0 \\ x_1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & -p_0 \\ q_1 & -q_0 \end{pmatrix},$$

también

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_0 x_1 - 1 & -x_0 \\ x_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 & -p_0 \\ q_1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 p_1 - p_0 & -p_1 \\ x_2 q_1 - q_0 & -q_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_2 & -p_1 \\ q_2 & -q_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y por inducción tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{n-1} & -p_{n-2} \\ q_{n-1} & -q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_n p_{n-1} - p_{n-2} & -p_{n-1} \\ x_n q_{n-1} - q_{n-2} & -q_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_n & -p_{n-1} \\ q_n & -q_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En resumen tenemos:

$$\begin{pmatrix} x_0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & -p_{n-1} \\ q_n & -q_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

y

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & -p_{n-2} \\ q_{n-1} & -q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & -p_{n-1} \\ q_n & -q_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Una de las ventajas que encontramos en usar estas matrices en lugar de los polinomios, es que cada una de las matrices

$$\begin{pmatrix} x_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene determinante uno, así el determinante de la matriz de n factores también es uno. En otras palabras:

$$p_{s-1}q_s - p_s q_{s-1} = 1 \quad (2.3)$$

para toda $s \geq 1$.

Lo que nos lleva a la relación:

$$\frac{p_s}{q_s} - \frac{p_{s-1}}{q_{s-1}} = \frac{-1}{q_s q_{s-1}}. \quad (2.4)$$

Proposición 2.1.3 Si $x_i \geq 2$ para $i \geq 1$, se tiene que $q_{n+1} > q_n$.

Demostración. Probaremos por inducción algo un poco más fuerte:

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} \geq \frac{n+2}{n+1}.$$

Para $n = 1$, como $q_2 = x_1 x_2 - 1$ y $q_1 = x_1$:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1} = x_2 - \frac{1}{x_1} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Supongamos que la relación se cumple para índices menores que n . Para n tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{q_{n+1}}{q_n} &= \frac{x_{n+1}q_n - q_{n-1}}{q_n} = x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n} \\ &\geq 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.\end{aligned}$$

□

Observación 2.1.4 En el caso de que $x_i \geq 2$, para $i \geq 1$, las $q_i \geq 2$.

Por otro lado

$$\begin{aligned}p_s q_{s-2} - q_s p_{s-2} &= (x_s p_{s-1} - p_{s-2}) q_{s-2} - (x_s q_{s-1} - q_{s-2}) p_{s-2} \\ &= x_s (p_{s-1} q_{s-2} - q_{s-1} p_{s-2}) = -x_s,\end{aligned}$$

si pedimos que los x_s sean ≥ 2 tenemos que

$$p_s q_{s-2} - q_s p_{s-2} = -x_s < 0.$$

Y en consecuencia:

$$\frac{p_s}{q_s} < \frac{p_{s-2}}{q_{s-2}}. \quad (2.5)$$

Lo cual nos permite hacer comparaciones entre los cocientes pares o entre los impares.

En lo sucesivo pensaremos a las fracciones continuas “-” como cocientes de enteros, denotados como n_i (en lugar de x_i), entonces trabajaremos con fracciones continuas “-” de la forma $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_s)$, con

$$n_i \in \mathbb{Z} \text{ y pediremos además } n_i \geq 2, \text{ para } i \geq 1. \quad (2.6)$$

Proposición 2.1.5 Si $n_i \geq 2$ para $i \geq 1$, entonces $(n_0, n_1, \dots, n_s) > n_0 - 1$.

Demostración. Esto es equivalente a ver que $(n_1, n_2, \dots, n_s) > 1$. Haremos la prueba de esto último por inducción sobre el índice. Sabemos por hipótesis que se cumple para $k = 1$. Supondremos cierto para índices menores que k y lo demostraremos para k :

$$(n_1, n_2, \dots, n_k) = (n_1, (n_2, \dots, n_k)) = n_1 - \frac{1}{(n_2, \dots, n_k)} > 2 - 1 = 1$$

ya que por hipótesis de inducción

$$(n_2, \dots, n_k) > 1.$$

□

Como una primera consecuencia de esto tenemos:

Proposición 2.1.6 Si n_k, m_k son dos naturales mayores o iguales que 1, entonces $(n_0, n_1, \dots, n_{k-1}, n_k) \geq (n_0, n_1, \dots, n_{k-1}, m_k)$ si y sólo si $n_k \geq m_k$.

Demostración. De nuevo probaremos esto por inducción sobre k .

$$(n_0, n_1) = n_0 - \frac{1}{n_1} \geq (n_0, m_1) = n_0 - \frac{1}{m_1} \iff n_1 \geq m_1.$$

Supongámoslo cierto para $k-1$ y veámoslo para k , tenemos

$$(n_0, n_1, \dots, n_{k-1}, n_k) = \left(n_0, n_1, \dots, n_{k-1} - \frac{1}{n_k} \right),$$

para $(n_0, n_1, \dots, n_{k-1}, m_k)$ tenemos una expresión similar, así que, por hipótesis de inducción, la prueba se reduce a verificar que $n_{k-1} - 1/n_k \geq n_{k-1} - 1/m_k$, pero es claro que, bajo las condiciones de la hipótesis, esto es cierto si y sólo si $n_k \geq m_k$. □

Corolario 2.1.7 $(n_0, n_1, \dots, n_k) > (n_0, n_1, \dots, n_k, n_{k+1})$.

Demostración. Como

$$(n_0, \dots, n_k, n_{k+1}) = \left(n_0, \dots, n_k - \frac{1}{n_{k+1}} \right)$$

y puesto que $n_k > n_k - \frac{1}{n_{k+1}}$, tenemos por la proposición anterior el resultado. □

Además de que los resultados 2.1.5 y 2.1.6 nos ayudan para encontrar el límite de los cocientes p_k/q_k , también son útiles para hacer comparaciones directas de números expresados como fracción continua de la siguiente manera:

Corolario 2.1.8 Bajo las condiciones de (2.6) : $n_s > m_s$ si y sólo si

$$(n_0, n_1, \dots, n_{s-1}, n_s, n_{s+1}, \dots, n_k) \geq (n_0, n_1, \dots, n_{s-1}, m_s, n_{s+1}, \dots, n_k)$$

Demostración. Por la proposición 2.1.1 (1) podemos escribir cada fracción en la forma

$$\left(n_0, n_1, \dots, n_{s-1}, n_s - \frac{1}{(n_{s+1}, \dots, n_k)} \right),$$

y comparar el último término de éstas de acuerdo a la proposición 2.1.6. \square

Hemos visto que los cocientes p_k/q_k son decrecientes a medida que k se incrementa. Así, $\{p_k/q_k\}$ es una sucesión decreciente y acotada por $n_0 + 1$.

Corolario 2.1.9 *El $\lim_{k \rightarrow \infty} (n_0, n_1, \dots, n_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k}$ existe.*

De la misma manera que con las fracciones continuas usuales, llamaremos a $\frac{p_n}{q_n}$ el n -ésimo convergente.

Así pues cualquier fracción continua “-”, (ya sea finita o infinita) representa a un número real. Ahora, si partimos de un número real cualquiera x , nos preguntamos si podemos encontrar una expresión en fracción continua “-” que lo represente, veremos que esto es cierto.

Observación 2.1.10 *Si hacemos*

$$\begin{aligned} n_0 &= [x] + 1, & x_0 &= x, \\ n_i &= [x_i] + 1 & x_{i+1} &= \frac{1}{n_i - x_i}, \end{aligned}$$

Entonces $x = (n_0, n_1, \dots, n_k, \dots)$.

La expresión en fracción continua dada de esta manera es única (salvo por un pequeño detalle) si pedimos que $n_i \in \mathbb{Z}$ y que para $i = 1, 2, \dots$, $n_i \geq 2$. La dificultad aquí para la unicidad se presenta cuando en la “cola” de la expresión obtenemos la constante 2, esto es, que a partir de alguna r , $n_r = n_{r+1} = n_{r+2} = \dots = 2$.

Veamos un ejemplo sencillo que ilustra este problema:

Ejemplo 2.1.11 *Si $x = 1$, la expresión en fracción continua “-” que primero se nos ocurre es (1), aunque siguiendo el algoritmo llegaríamos a que $1 = (2, 2, \dots, 2, \dots)$.*

En efecto, si consideramos la siguiente sucesión:

$$a_1 = (2, 2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = (2, 2, 2) = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = (2, 2, 2, 2) = 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$$

$$a_n = (2, 2, \dots, 2) = 2 - \frac{1}{a_{n-1}} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1},$$

tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

En general se da la siguiente igualdad

$$(n_0, n_1, \dots, n_k) = (n_0, n_1, \dots, n_k + 1, 2, 2, \dots). \quad (2.7)$$

El algoritmo dado en la observación 2.1.10 nos proporciona la representación en fracción continua de un número como en el lado derecho de la ecuación (2.7). Y es con la que trabajaremos en el siguiente resultado.

Teorema 2.1.12 Si $x \in \mathbb{R}$, se tiene que x es racional si y sólo si a partir de alguna s , $n_i = 2$, para toda $i \geq s$.

Demostración. El regreso es fácil si usamos la proposición 2.1.1

$$\begin{aligned} (n_0, n_1, \dots, n_k, 2, 2, \dots) &= (n_0, n_1, \dots, (2, 2, \dots)) \\ &= (n_0, n_1, \dots, n_k, 1) = (n_0, n_1, \dots, n_k - 1) \end{aligned}$$

Por 2.1.2 tenemos que la última expresión es un cociente de enteros y entonces el número que representa es racional.

Si x es entero es claro que $x = (x + 1, 1) = (x + 1, 2, 2, \dots)$. Si ahora partimos de x , un racional, podemos suponer que $x = h/k$, donde h y k son primos relativos y $k > 1$.

Haciendo $\frac{h}{k} = m_0 + b_0$ donde m_0 es la parte entera de $\frac{h}{k}$ y $0 < b_0 < 1$, definimos $n_0 = m_0 + 1$, este es un número entero.

Así

$$\frac{h}{k} = n_0 - (1 - b_0)$$

y obviamente $0 < 1 - b_0 < 1$.

Si

$$k_1 = (1 - b_0)k \in \mathbb{N},$$

tenemos que $h = n_0 k - k_1$ y $k_1 < k$.

Si $x_0 = \frac{1}{1 - b_0} = \frac{k}{k_1} > 0$, se tiene que $\frac{h}{k} = n_0 - \frac{1}{x_0}$.

De la misma manera, si $x_0 = \frac{k}{k_1} = m_1 + b_1$ definimos $n_1 = m_1 + 1$ y hacemos

$$k_2 = (1 - b_1)k_1 \in \mathbb{N}.$$

Como $0 < 1 - b_1 < 1$, se tiene que $0 < k_2 < k_1 < k$; si hacemos

$$x_1 = \frac{1}{1 - b_1} = \frac{k_1}{k_2} > 0,$$

tenemos que

$$x = n_0 - \frac{1}{n_1 - \frac{1}{x_1}}.$$

Ahora,

$$x_1 = \frac{k_1}{k_2} = n_2 - (1 - b_2), \quad k_3 = (1 - b_2)k_2 \in \mathbb{N} \text{ y } k_2 > k_3,$$

definimos

$$x_2 = \frac{k_2}{k_3} = \frac{1}{1 - b_2}, \quad \text{etc...}$$

Continuando con este procedimiento obtenemos una sucesión decreciente de enteros k_i . Por lo que existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $k_s = 1 = (1 - b_{s-1})k_{s-1}$. Y

$$\frac{k_{s-1}}{k_s} = \frac{1}{1 - b_{s-1}} = x_{s-1}.$$

Haciendo $n_s = x_{s-1} = k_{s-1} \geq 2$, se tiene la expresión

$$x = n_0 - \frac{1}{n_1 - \frac{1}{n_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{n_{s-1} - \frac{1}{n_s}}}}}$$

Si sustituimos n_s por $(n_s + 1, 2, 2, \dots)$ tenemos que

$$x = (n_0, n_1, \dots, n_s + 1, 2, 2, \dots)$$

lo cual concluye la demostración. \square

Hemos demostrado también que la observación 2.1.10 nos proporciona un algoritmo para encontrar el desarrollo en fracción continua “-” para cualquier real. Y dada una fracción continua “-” ésta corresponderá a un racional o a un irracional dependiendo de la “cola” de la sucesión de n_i 's. Sería pues conveniente ponerle un nombre a dicha “cola”.

Definición 2.1.13 Llamaremos el k -ésimo complemento n'_k , de la fracción continua con “-”, $(n_0, n_1, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_s, \dots)$ a

$$n'_k = (n_k, n_{k+1}, \dots, n_s, \dots)$$

Entonces por la proposición 2.1.2 cualquier real x cuya expansión sea

$$(n_0, n_1, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots)$$

se puede escribir como

$$x = (n_0, n_1, \dots, n_{k-1}, n'_k) = \frac{n'_k p_{k-1} - p_{k-2}}{n'_k q_{k-1} - q_{k-2}}, \quad (2.8)$$

y en particular $x = n'_0$.

Notemos que una consecuencia inmediata de todo esto es que considerando la expresión anterior, x es irracional si y sólo si n'_k lo es. Por otro lado, el pensar a x como en (2.8) nos facilita ver que los resultados anteriores para fracciones continuas “.” finitas también son válidos para las fracciones continuas infinitas.

2.2 Fracciones continuas periódicas

De las fracciones continuas con desarrollo infinito estaremos particularmente interesados en aquéllas para las cuales $n'_k = (n_k, n_{k+1}, \dots, n_{k+s}, n'_k)$, formalmente tenemos:

Definición 2.2.1 Una fracción continua periódica es una fracción continua infinita (n_0, \dots, n_k, \dots) para la cual $n_l = n_{l+m}$ para toda $l > k$ y para m fijo y positivo.

El conjunto de cocientes parciales $(n_{k+1}, \dots, n_{k+m})$ se llama periodo y la fracción continua se escribe

$$(n_0, n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$$

Si la fracción continua es de la forma $(\overline{n_1, \dots, n_{k+m}})$, entonces se dice que es puramente periódica.

Para las fracciones continuas periódicas tenemos un resultado análogo al corolario 2.1.8 que nos permitirá compararlas.

Proposición 2.2.2 Bajo las condiciones de la expresión (2.6),

$$(\overline{n_0, n_1, \dots, n_{s-1}, n_s, n_{s+1}, \dots, n_m}) > (\overline{n_0, n_1, \dots, n_{s-1}, r_s, n_{s+1}, \dots, n_m})$$

si y sólo si $n_s > r_s$.

Demostración. Definimos

$$\xi_j = \underbrace{(n_0, \dots, n_s, \dots, n_m, \dots, n_0, \dots, n_s, \dots, n_m)}_{j \text{ veces}} \text{ para } j = 1, 2, \dots$$

y también

$$\eta_i = \underbrace{(n_0, \dots, r_s, \dots, n_m, \dots, n_0, \dots, r_s, \dots, n_m)}_{i \text{ veces}} \text{ para } i = 1, 2, \dots,$$

demostraremos que $\xi_j > \eta_j$ para toda j , por inducción sobre el índice. Para $j = 1$ la desigualdad se cumple por el corolario 2.1.8, supongamos que $\xi_j > \eta_j$ para $j = k$ y lo probaremos para $j = k + 1$. Por la proposición 2.1.1 y por el corolario 2.1.8

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} = (n_0, \dots, n_s, \dots, n_m, \xi_k) &> (n_0, \dots, n_s, \dots, n_m, \eta_k) \\ &> (n_0, \dots, r_s, \dots, n_m, \eta_k) = \eta_{k+1}. \end{aligned}$$

En el límite cuando $j \rightarrow \infty$ la igualdad no se puede dar por la unicidad del desarrollo en fracción continua "·" para un número bajo las condiciones 2.6.

□

Los siguientes resultados relacionan la periodicidad de las fracciones continuas con ser soluciones de cierto tipo de polinomios de segundo orden.

Definición 2.2.3 *Se dice que un número irracional x es irracional cuadrático, si es una raíz de un polinomio cuadrático con coeficientes enteros.*

Proposición 2.2.4 *Un número $x \in \mathbb{R}$ es irracional cuadrático si y sólo si su desarrollo en fracción continua con "·" es periódico.*

Para la demostración de la proposición usaremos el siguiente resultado:

Lema 2.2.5 *Sea x un irracional cuadrático, tal que $x = (n_0, n_1, \dots, n_k, \dots)$, entonces n'_j es de la forma*

$$n'_j = \frac{m_j + \sqrt{D}}{l_j} \text{ para } i = 0, 1, \dots$$

donde $m_j, l_j, D \in \mathbb{Z}$, $l_j \neq 0$, $D > 0$ y no es un cuadrado perfecto. Además l_j divide a $D - m_j^2$

Demostración. Se hará por inducción para j . Como $x = n'_0$ es un irracional y raíz de un polinomio, x es de la forma

$$n'_0 = \frac{a + \sqrt{b}}{c} \quad (2.9)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$, con $b > 0$ y no es un cuadrado perfecto. Si multiplicamos el numerador y denominador de la expresión (2.9) por $|c|$ tenemos

$$n'_0 = \frac{ac + \sqrt{bc^2}}{c^2} \quad \text{o} \quad n'_0 = \frac{-ac + \sqrt{bc^2}}{-c^2}$$

dependiendo de si $c > 0$ o $c < 0$. Si hacemos $m_0 = \pm ac$, $D = bc^2$ y $l_0 = \pm c^2$, según el caso, y es claro que l_0 divide a $D - m_0^2$.

Supongamos que la afirmación es cierta para $j = k$, para $j = k + 1$ tenemos que

$$\frac{m_k + \sqrt{D}}{l_k} = n'_k = (n_k, n'_{k+1}) = n_k - \frac{1}{n'_{k+1}}$$

y entonces

$$n'_{k+1} = \frac{l_k}{(n_k l_k - m_k) - \sqrt{D}} = \frac{l_k(n_k l_k - m_k + \sqrt{D})}{(n_k l_k - m_k)^2 - D}$$

Si hacemos

$$m_{k+1} = n_k l_k - m_k, \quad \text{y} \quad l_{k+1} = \frac{m_{k+1}^2 - D}{l_k} \quad (2.10)$$

entonces tenemos la expresión deseada. Además $m_{k+1}, l_{k+1} \in \mathbb{Z}$ pues $n_k, l_k, m_k \in \mathbb{Z}$ y por hipótesis de inducción l_k divide a $m_k^2 - D$, también l_{k+1} divide a $m_{k+1}^2 - D$ porque $(m_{k+1}^2 - D)/l_{k+1} = l_k \in \mathbb{Z}$. \square

Demostración de 2.2.4. Sea $x = (n_0, n_1, \dots)$ un irracional cuadrático, por el lema anterior $x = n'_0$ y n'_j son de la forma

$$n'_j = \frac{m_j + \sqrt{D}}{l_j} \quad (2.11)$$

donde $m_j, l_j, D \in \mathbb{Z}$, D no es un cuadrado perfecto y son como en la ecuación 2.10. Si conjugamos la expresión anterior y la ecuación 2.8 tenemos

$$\tilde{x} = \frac{m_0 - \sqrt{D}}{l_0}, \quad \tilde{n}'_k = \frac{m_k - \sqrt{D}}{l_k}$$

y

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{n}'_k p_{k-1} - p_{k-2}}{\tilde{n}'_k q_{k-1} - q_{k-2}}$$

Si despejamos \tilde{n}'_k ,

$$\tilde{n}'_k = \frac{\tilde{x} q_{k-2} - p_{k-2}}{\tilde{x} q_{k-1} - p_{k-1}} = \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} \frac{\tilde{x} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}}{\tilde{x} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}}$$

Puesto que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{x} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}}{\tilde{x} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}} = 1 \text{ porque } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k} = x \neq \tilde{x},$$

y además por la proposición 2.1.3, $q_{k-2}/q_{k-1} < 1$, entonces existe $R > 1$ tal que para toda $r > R$, $0 < \tilde{n}'_r < 1$. Como $n_r \geq 2$, por la proposición 2.1.5, $n'_r > 1$ y entonces

$$\frac{m_r + \sqrt{D}}{l_r} > 1 > \frac{m_r - \sqrt{D}}{l_r} > 0.$$

Se tiene que $l_r > 0$ pues $n'_r - \tilde{n}'_r = 2\sqrt{D}/l_r > 0$, por lo cual

$$m_r + \sqrt{D} > l_r > m_r - \sqrt{D} \quad \text{o} \quad |l_r - m_r| < \sqrt{D}. \quad (2.12)$$

Para D fija, esta expresión sólo puede tomar un número finito de valores. Por otro lado, $D > (l_r - m_r)^2$ y

$$\begin{aligned} 0 < D - (l_r - m_r)^2 &= D - m_r^2 + 2l_r m_r - l_r^2 \\ &= l_r l_{r-1} + 2l_r m_r - l_r^2 = l_r (l_{r-1} - l_r + 2m_r), \end{aligned}$$

así que l_r divide a $D - (l_r - m_r)^2$ y entonces l_r sólo puede tomar un número finito de valores, por la ecuación 2.12 también m_r tiene una cantidad finita de valores. Como k recorre a los naturales, debe existir j , con $j, k > R$ y $j > k$ tales que $l_k = l_j$ y $m_k = m_j$ por lo que $n'_k = n'_j$, en consecuencia

$$n'_j = (n_j, \dots, n_{k-1}, n'_j)$$

y por tanto x es periódico.

Para probar el inverso, supongamos que x es periódico,

$$x = (n_0, n_1, \dots, \overline{n_k, \dots, n_{k+m}})$$

donde

$$n'_k = (n_k, \dots, n_{k+m}, n'_k) = \frac{p'n'_k - p''}{q'n'_k - q''},$$

donde $p', p'', q', q'' \in \mathbb{Z}$ por lo que n'_k es raíz de la ecuación

$$q'(n'_k)^2 - (q'' - p')n'_k + p'' = 0. \quad (2.13)$$

por otro lado, de la ecuación para x que nos da la proposición 2.8, podemos despejar a n'_k ,

$$n'_k = \frac{xq_{k-2} - p_{k-2}}{xq_{k-1} - p_{k-1}}$$

sustituyendo ésta en (2.13):

$$q' \left(\frac{xq_{k-2} - p_{k-2}}{xq_{k-1} - p_{k-1}} \right)^2 - (q'' - p') \frac{xq_{k-2} - p_{k-2}}{xq_{k-1} - p_{k-1}} + p'' = 0,$$

eliminando el denominador tenemos la ecuación

$$q'(xq_{k-2} - p_{k-2})^2 - (q'' - p')(xq_{k-2} - p_{k-2})(xq_{k-1} - p_{k-1}) + p''(xq_{k-1} - p_{k-1})^2 = 0,$$

si reagrupamos términos, el coeficiente de x^2 es

$$q'(q_{k-2})^2 - (q'' - p')(q_{k-1})(q_{k-2}) + p''(q_{k-1})^2 \neq 0,$$

pues de otro modo, como $q_{k-1} \neq 0$, tendríamos:

$$q' \left(\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} \right)^2 - (q'' - p') \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} + p'' = 0.$$

Por lo que q_{k-2}/q_{k-1} sería raíz de la ecuación 2.13 y conjugado de n'_k , esto contradice que n'_k sea irracional. Por lo tanto el coeficiente de x^2 es distinto de cero y x es irracional cuadrático. \square

Proposición 2.2.6 Sea $x \in \mathbb{R}$ un número irracional cuadrático, x tiene desarrollo en fracción continua “-” puramente periódico si y sólo si $x > 1$ y $1 > \bar{x} > 0$, donde \bar{x} es el conjugado de x , (es decir, \bar{x} es la otra raíz del polinomio cuadrático del cual x es raíz).

Demostración. Primero supongamos que $x = (\overline{a_0, \dots, a_{n-1}})$. Como

$$x = a_0 - \frac{1}{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \dots)} > a_0 - 1 \geq 2 - 1 = 1,$$

y la desigualdad se da estricta pues $x \notin \mathbb{Q}$.

Por otro lado

$$x = (a_0, \dots, a_{n-1}, x) = \frac{xp_{n-1} - p_{n-2}}{xq_{n-1} - q_{n-2}}$$

luego x es raíz del polinomio cuadrático

$$p(\xi) = \xi^2 q_{n-1} - \xi(p_{n-1} + q_{n-2}) + p_{n-2}$$

conjugando tenemos que \tilde{x} , también es raíz de $p(\xi)$. Veamos que $0 < \tilde{x} < 1$, bastará ver que $p(0) > 0$ y $p(1) < 0$ pues tendremos por el teorema del valor intermedio que $p(\xi)$ tendrá una raíz entre 0 y 1. Pero

$$p(0) = p_{n-2} > 0 \text{ y } p(1) = q_{n-1} - (p_{n-1} + q_{n-2}) + p_{n-2},$$

luego $p(1) < 0$ si y sólo si

$$1 < \frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{q_{n-1} - q_{n-2}} = (a_0, \dots, a_{n-1}, 1) = (a_0, \dots, a_{n-1}, \bar{2})$$

la desigualdad se deriva de que $x > 1$, (por lo que $[x] \geq 1$), que $a_0 = [x] + 1 \geq 2$ y de la proposición 2.1.5.

Para probar el inverso, supongamos que x es un número irracional cuadrático que cumple que $x > 1$ y $0 < \tilde{x} < 1$, donde \tilde{x} es la raíz conjugada de x . El desarrollo en fracción continua con “.” de x se obtiene de acuerdo al algoritmo 2.1.10. Además x se puede expresar como en (2.11). Podemos conjugar de ambos lados de la ecuación de la observación 2.1.10 para llegar a que

$$\tilde{x}_{i+1} = \frac{1}{a_i - \tilde{x}_i}. \quad (2.14)$$

Si $x_i > 1 > \tilde{x} > 0$, por inducción se puede llegar a que

$$1 > \tilde{x}_i > 0 \text{ para toda } i \geq 0, \quad (2.15)$$

en efecto: si $1 > \tilde{x}_i > 0$, entonces

$$\begin{aligned} -\tilde{x}_i > -1 &\Rightarrow a_i - \tilde{x}_i > a_i - 1 \geq 1 \\ &\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{a_i - 1} > \frac{1}{a_i - \tilde{x}_i} > 0 \\ &\Rightarrow 1 > \tilde{x}_{i+1} > 0. \end{aligned}$$

Ahora como $\tilde{x}_{i+1} = 1/(a_i - \tilde{x}_i)$, tenemos que $\tilde{x}_i = a_i - 1/\tilde{x}_{i+1}$. Luego $1 > \tilde{x}_i > 0$ implica que $1 > a_i - 1/\tilde{x}_{i+1} > 0$, y así tenemos que

$$\begin{aligned} 0 > \frac{1}{\tilde{x}_{i+1} - a_i} > -1 &\Rightarrow a_i > \frac{1}{\tilde{x}_{i+1}} > a_i - 1 = [x_i] \\ &\Rightarrow 1 = a_i - [x_i] > \frac{1}{\tilde{x}_{i+1}} - [x_i] > 0 \end{aligned}$$

en consecuencia

$$1 + \left[\frac{1}{\tilde{x}_{i+1}} \right] = a_i \text{ para toda } i \geq 0$$

Por otro lado si x es un irracional cuadrático, se deberá tener que para algunas j, k con $0 < j < k$: $x_j = x_k$, luego

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j &= \tilde{x}_k &\Rightarrow \frac{1}{\tilde{x}_j} &= \frac{1}{\tilde{x}_k} \\ \Rightarrow 1 + \left[\frac{1}{\tilde{x}_j} \right] &= 1 + \left[\frac{1}{\tilde{x}_k} \right] &\Rightarrow a_{j-1} &= a_{k-1} \\ \Rightarrow a_{j-1} - \frac{1}{\tilde{x}_j} &= a_{k-1} - \frac{1}{\tilde{x}_k} &\Rightarrow x_{j-1} &= x_{k-1}. \end{aligned}$$

Aplicando el proceso anterior j veces, llegamos a que $x_0 = x_{k-j}$ por lo que $x_0 = (\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{k-j-1})$.

□

Proposición 2.2.7 Si x es irracional cuadrático puramente periódico, $x = (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_m)$, entonces $1/\bar{x} = (\bar{n}_m, \dots, \bar{n}_1)$, donde \bar{x} es el conjugado de x .

Demostración. Si x es irracional cuadrático puramente periódico tenemos que su desarrollo en fracción continua con “.” se obtiene aplicando el algoritmo:

$$\begin{aligned} n_1 &= [x_1] + 1 &\text{donde } x_1 &= x \\ n_i &= [x_i] + 1 &x_{i+1} &= \frac{1}{n_i - x_i} \end{aligned}$$

Como x es puramente periódico entonces existe $m > 0$ tal que $x_{m+1} = x_1$. Al conjugar de ambos lados de la última ecuación se obtiene que:

$$\tilde{x}_{i+1} = \frac{1}{n_i - \tilde{x}_i}$$

en particular

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{x}_{m+1}} &= n_m - \tilde{x}_m \\ &= n_m - \frac{1}{\frac{1}{\tilde{x}_m}} \\ &= n_m - \frac{1}{n_{m-1} - \tilde{x}_{m-1}} \end{aligned}$$

repetiendo este procedimiento m veces tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{x}_{m+1}} &= n_m - \frac{1}{n_{m-1} - \frac{1}{\dots - \frac{1}{n_1 - \tilde{x}_1}}} \\ &= (n_m, n_{m-1}, \dots, n_1, \tilde{x}_1), \end{aligned}$$

pero $\tilde{x}_{m+1} = \tilde{x}_1 = \tilde{x}$, así que

$$\frac{1}{\tilde{x}} = (\overline{n_m, \dots, n_1})$$

□

3

Teoría de reducción para $PSL(2, \mathbb{Z})$

Enunciamos y demostramos los resultados algebraicos que nos ayudarán para el desarrollo de los dos teoremas fundamentales de este trabajo. En la primera sección se verán resultados algebraicos básicos acerca de los grupos Fuchsianos, esto es, subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{R})$ (ver apéndice A.4). En la segunda sección nos enfocamos al grupo Fuchsiano $PSL(2, \mathbb{Z})$ y a resultados relacionados con elementos hiperbólicos de éste. Se definen las matrices reducidas y se dan condiciones sobre los coeficientes para que una matriz sea reducida. También comenzaremos a encontrarle sentido al estudio del capítulo anterior pues se verá la relación entre las fracciones continuas y las clases conjugadas de matrices hiperbólicas. Partiendo del desarrollo en fracción continua “-” de los puntos fijos de una matriz de $PSL(2, \mathbb{Z})$ se establece una descomposición de ésta en términos de los generadores de $PSL(2, \mathbb{Z})$, veremos también el recíproco.

Definiremos los códigos aritmético y geométrico que son con los que trabajaremos en los teoremas principales y diremos cómo es el código aritmético relacionado con cierto tipo de matrices.

3.1 Algunas propiedades algebraicas de los grupos Fuchsianos

Recordemos en el siguiente lema la caracterización de los subgrupos discretos de \mathbb{R} .

Lema 3.1.1 *Cualquier subgrupo discreto (no trivial) Γ del grupo aditivo \mathbb{R} es cíclico. (Es decir, es de la forma $\{nw_0 | n \in \mathbb{Z}\}$ para algún $w_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)*

Demostración. Primero veamos que existe un elemento $w_0 \in \Gamma \setminus \{0\}$ de norma mínima; sea $w_1 \in \Gamma \setminus \{0\}$, y sea $r = |w_1|$, entonces $\overline{B_r(0)} = \{w \in \mathbb{R} | d(w, 0) \leq r\}$ es un compacto, por lo que la intersección con el grupo discreto Γ es finita y no vacía, así que existe $w_0 \in \Gamma$ tal que $0 < |w_0| \leq |w|$ para todo $w \in \Gamma$.

En consecuencia, para cualesquiera $v, w \in \Gamma$, $d(v, w) \geq |w_0|$, pues de otro modo, tendríamos que $v - w \in \Gamma$ y que $|v - w| < |w_0|$, lo cual contradice la elección de w_0 . Por otro lado, notemos que $\{nw_0 | n \in \mathbb{Z}\} \subset \Gamma$, ahora si suponemos que existe $u \in \Gamma$ con $u \notin \{nw_0 | n \in \mathbb{Z}\}$, entonces, como existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|mw_0| < |u| < |(m+1)w_0|$ tenemos que:

$$0 < |u - mw_0| < |w_0|,$$

lo cual es una contradicción a la elección de w_0 . Por tanto, $\Gamma = \{nw_0 | n \in \mathbb{Z}\}$. \square

Lema 3.1.2 *Si Γ es un grupo Fuchsiano, donde sus elementos tienen el mismo conjunto de puntos fijos y Γ tiene un elemento hiperbólico, entonces Γ es cíclico.*

Demostración. Sea $\gamma \in \Gamma$ el elemento hiperbólico y sean a y b sus puntos fijos. Consideremos a

$$S(z) = \frac{z - a}{z - b},$$

entonces $S\gamma S^{-1}$ tiene como puntos fijos a 0 e ∞ . Así que, sin pérdida de generalidad, podemos pensar que $a = 0$ y $b = \infty$, en consecuencia todos los elementos en $\Gamma \setminus \{I\}$ son de la forma $\gamma(z) = \alpha z$, con $\alpha > 1$. La matriz correspondiente en $PSL(2, \mathbb{R})$ es

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}.$$

cuya traza es $\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} > 2$, en consecuencia $\Gamma \setminus \{I\}$ sólo consta de elementos hiperbólicos y es un subconjunto discreto del grupo de transformaciones:

$$\mathbf{H} = \{z \mapsto \lambda z | \lambda > 0\}.$$

Pero \mathbf{H} es isomorfo al grupo topológico \mathbb{R}^* , el grupo multiplicativo de reales positivos, que a su vez es isomorfo al grupo $(\mathbb{R}, +)$, luego por el lema 3.1.1 Γ es cíclico. \square

Definición 3.1.3 Sea X un conjunto no vacío, y sea G un grupo de autó-morfismos de X . Sea $x \in X$, entonces el estabilizador en G de x , G_x es el subgrupo de elementos de G que fijan a x , esto es

$$G_x = \{g \in G : g(x) = x\}.$$

Definición 3.1.4 Sea Γ un grupo Fuchsiano, se dice que un elemento parabólico o hiperbólico $\gamma \in \Gamma$ es primitivo si γ genera al estabilizador de cada uno de sus puntos fijos. Y diremos que una matriz en $PSL(2, \mathbb{R})$ es primitiva si representa a un elemento primitivo $\gamma \in \Gamma$.

Definición 3.1.5 Sea A un elemento hiperbólico cuyos puntos fijos son w y u . Llamaremos eje de A a la geodésica que une a u con w .

Lema 3.1.6 Sea Γ un grupo Fuchsiano y $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ dos elementos hiperbólicos que tienen un mismo punto fijo. Entonces también comparten el otro punto fijo, en consecuencia tienen el mismo eje y ambos son potencia de una matriz primitiva.

Demostración. Supongamos que los puntos fijos de γ_1 son a y b , y que γ_2 también fija a b . Por el mismo argumento que en 3.1.2 Podemos pensar que $a = 0$ y $b = \infty$. Luego entonces $\gamma_2(z)$ es de la forma $\mu z + k$, con $|\mu| > 1$ pues γ_2 es un elemento hiperbólico de $PSL(2, \mathbb{R})$ que fija a ∞ . Como γ_1 fija además a 0 , es de la forma $\gamma_1(z) = \lambda z$ con $\lambda > 1$. Si $k = 0$ ya acabamos pues en tal caso $\gamma_2(0) = 0$; si no consideremos a los elementos de Γ

$$\gamma_1^{-n} \gamma_2 \gamma_1^n(z) = \mu z + k \lambda^{-n};$$

estos forman una sucesión de elementos hiperbólicos cuya norma es (ver A.1)

$$\left\| \begin{pmatrix} \mu & k \lambda^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\mu^2 + k^2 \lambda^{-2n} + 1}$$

y está acotada inferiormente por $\sqrt{\mu^2 + 1}$, entonces la sucesión en Γ contiene una subsucesión convergente donde todos sus términos son distintos, lo cual contradice que Γ sea discreto. En consecuencia $k = 0$ y γ_2 fija también a cero. Además el subgrupo de Γ generado por γ_1 y γ_2 es también discreto y entonces por el lema 3.1.2, existe una matriz primitiva en Γ que genera a γ_1 y a γ_2 . \square

3.2 Teoría de reducción y factorización de matrices

En términos generales, una *teoría de reducción* para un conjunto de elementos que tienen definida una clase de equivalencia es un algoritmo para encontrar representantes canónicos en cada clase de equivalencia. A dichos representantes se les llama *elementos reducidos*. En cada clase de equivalencia hay un conjunto finito y no vacío de elementos reducidos. Siguiendo con el algoritmo de reducción, uno puede pasar de un elemento dado a un elemento reducido dentro de su misma clase de equivalencia en un número finito de pasos, los elementos reducidos forman un ciclo en el sentido de que aplicando el algoritmo de reducción a un elemento reducido se puede llegar a otro elemento de este tipo en la misma clase y así sucesivamente ir obteniendo todos los elementos reducidos de la clase.

En nuestro caso trabajaremos con el conjunto de matrices hiperbólicas de $PSL(2, \mathbb{Z})$, con la relación de equivalencia dada por la conjugación en el mismo $PSL(2, \mathbb{Z})$.

Primero veremos que las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{Z})$ sólo afectan los periodos de las fracciones continuas “.” de un irracional cuadrático permutándolos.

Proposición 3.2.1 *Dos irracionales cuadráticos se obtienen uno del otro mediante una transformación de $PSL(2, \mathbb{Z})$ si y sólo si los periodos en su desarrollo como fracción continua son permutaciones cíclicas uno del otro.*

Demostración. Primero probemos la suficiencia. Supongamos que w_1 y w_2 son dos irracionales cuadráticos cuyas expresiones en fracción continua “.” son

$$w_1 = (n_1, n_2, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$$

y

$$w_2 = (r_1, r_2, \dots, r_s, \overline{n_{k+t+1}, \dots, n_{k+m}, n_{k+1}, \dots, n_{k+t}}).$$

Si denotamos por $T^{\pm 1}(z) = z \pm 1$ y a $S(z) = -1/z$, ($S, T^{\pm 1} \in PSL(2, \mathbb{Z})$), entonces

$$T^{-n_1}(w_1) = -\frac{1}{n_2 - \frac{1}{n_3 - \dots}}$$

y

$$ST^{-n_1}(w_1) = (n_2, n_3, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}}),$$

repetiendo este procedimiento $k + t$ -veces:

$$ST^{-n_{k+t}} \dots ST^{-n_2} ST^{-n_1}(w_1) = (\overline{n_{k+t+1}, n_{k+t+2}, \dots, n_{k+m}, n_{k+1}, \dots, n_{k+t}})$$

Podemos proceder de la misma forma con w_2 para llegar a que:

$$ST^{-r_s} ST^{-r_{s-1}} \dots ST^{-r_1}(w_2) = (\overline{n_{k+t+1}, n_{k+t+2}, \dots, n_{k+m}, n_{k+1}, \dots, n_{k+t}})$$

Si hacemos $A = ST^{-n_{k+t}} \dots ST^{-n_2} ST^{-n_1}$ y $B = ST^{-r_s} ST^{-r_{s-1}} \dots ST^{-r_1}$, se tiene que $A(w_1) = B(w_2)$, por lo tanto $w_2 = B^{-1}A(w_1)$.

Para probar la primera implicación notemos que S y T generan a $PSL(2, \mathbb{Z})$ (ver A.4.19), sus inversos son, respectivamente S y T^{-1} . Sea

$$w = (n_0, n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}}),$$

un irracional cuadrático. Basta entonces con ver que T, T^{-1} y S sólo permutan cíclicamente el periodo de la fracción continua “.” para w .

Para el caso de T no hay nada que hacer pues

$$T^{\pm 1}(w) = (n_0 \pm 1, n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}}).$$

Para S consideremos los siguientes casos:

caso (1): $n_0 = 0$. Es claro que $S(w) = (n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$.

caso (2): $n_0 \geq 2$. Se tiene que $S(w) = (0, n_0, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$.

Pero para los casos en que $n_0 \leq 1$ tendremos que usar otro procedimiento para la demostración ya que la fracción continua que se tiene no cumple con la condición 2.6. Haremos uso de lo siguiente.

Observación 3.2.2 Sean I la transformación identidad, $S(z) = -1/z$ y $T(z) = z + 1$, entonces

(i) $STSTST = I$ y en consecuencia:

(ii) $STS = T^{-1}ST^{-1}$ y

(iii) Si $p \geq 1$, $S = T \underbrace{ST^2ST^2 \dots ST^2}_{p-1 \text{ veces}} STST^p$

Demostración (i): Usando las correspondientes matrices asociadas

$$STSTST = \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)^3 = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la cual corresponde a la transformación identidad en $PSL(2, \mathbb{Z})$.

Demostración (ii): es inmediato de (i).

Para la demostración de (iii) primero notemos que (ii) implica

$$(STS)^{-1} = ST^{-1}S = TST.$$

por lo que

$$ST^{-p}S = (STS)^{-p} = (ST^{-1}S)^p = (TST)^p = T \underbrace{ST^2ST^2 \dots ST^2}_{p-1 \text{ veces}} ST$$

de lo cual se concluye (iii). \square

caso (3): $n_0 \leq -1$. Por el inciso (iii) de la observación anterior y haciendo $-n_0 = p$,

$$\begin{aligned} S(w) &= T \underbrace{ST^2ST^2 \dots ST^2}_{-n_0-1 \text{ veces}} STST^{-n_0}(w) \\ &= T \underbrace{ST^2ST^2 \dots ST^2}_{-n_0-1 \text{ veces}} ST(0, n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, n_{k+m}}) \\ &= (1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{-n_0-1 \text{ veces}}, n_1 + 1, n_2, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, n_{k+m}}) \end{aligned}$$

y esta última expresión cumple con las condiciones de 2.6.

caso (4): $n_0 = 1$. Si además $n_1 \geq 3$ por la observación (3.2.2) tenemos que $ST^{-1}S = TST$ y entonces

$$S(w) = TSTST^{-1}(w) = (-1, n_1 - 1, n_2, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$$

y dicha expresión cumple con las condiciones 2.6.

Si $n_1 = 2$, como w es irracional, por el teorema 2.1.12 sabemos que debe existir un $q \geq 2$ tal que $n_q > 2$, podemos suponer que q es el índice más chico que cumple con esto, es decir $n_i = 2$ para toda $1 \leq i \leq q - 1$. De la observación 3.2.2 (iii) tenemos que

$$S = T^{-q}ST^{-1} \underbrace{ST^{-2}ST^{-2} \dots ST^{-2}}_{q-1 \text{ veces}} ST^{-1},$$

y entonces

$$\begin{aligned} S(w) &= T^{-q}ST^{-1} \underbrace{ST^{-2}ST^{-2} \dots ST^{-2}}_{q-1 \text{ veces}} ST^{-1}(w) \\ &= (-q, n_q - 1, n_{q+1}, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}}). \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado nos servirá para relacionar elementos hiperbólicos conjugados con los desarrollos en fracción continua de sus puntos fijos.

Recordemos que una transformación hiperbólica A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tiene dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, que por ser raíces del polinomio característico $Q_A(z, 1) = cz^2 + (d - a)z - b$ son de la forma

$$\zeta = \frac{a - d \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c},$$

la última igualdad se da porque $ad - bc = 1$. Además $(d + a)^2 > 4$.

Definición 3.2.3 Sea T una transformación de Möbius y sea v un punto fijo de T , se dice que v es atractor si $|T'(v)| < 1$ y se dice que v es repulsor si $|T'(v)| > 1$.

Entonces una transformación hiperbólica A tiene un punto fijo atractor y otro repulsor ya que

$$A'(\zeta) = \frac{1}{\left(\frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2} + d\right)^2} = \frac{4}{\left(a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}\right)^2},$$

si u y w son los puntos fijos de A tenemos que

$$A'(u)A'(w) = \frac{16}{((a + d)^2 - ((a + d)^2 - 4))^2} = 1.$$

Como $A'(u) \neq A'(w)$, entonces tiene que suceder $|A'(u)| < 1$ y $|A'(w)| > 1$, o al revés.

Proposición 3.2.4 Dos matrices hiperbólicas $A, B \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ con la misma traza son conjugadas en $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ si y sólo si los periodos de los desarrollos en fracción continua “.” de los puntos fijos atractores (repulsores) son permutaciones cíclicas una de la otra.

Demostración. Sean w_A y w_B los puntos atractores (repulsores) de A y B , respectivamente y tales que sus periodos en los desarrollos como fracciones continuas con “-” difieren en una permutación cíclica. Por la proposición 3.2.1 existe un elemento $M \in PSL(2, \mathbf{Z})$ tal que $w_A = Mw_B$. Consideremos a MBM^{-1} , la cual fija a w_A , por el lema 3.1.6 el otro punto fijo también coincide. Si A es conjugada a una matriz U_λ , tendremos que MBM^{-1} es conjugada a U_λ o a $U_{1/\lambda}$, pero esta última no puede ser pues w_A y w_B son ambos atractores (repulsores), luego A y B son conjugadas en $PSL(2, \mathbf{Z})$. Ahora supongamos que $A = SBS^{-1}$ para alguna $S \in PSL(2, \mathbf{Z})$, notemos que entonces Sw_B es fijado por A , así que sólo falta verificar que éste es atractor (repulsor). Derivando A tenemos

$$\begin{aligned} A'(Sw_B) &= S'(BS^{-1}(Sw_B))B'(S^{-1}(Sw_B))(S^{-1})'(Sw_B) \\ &= S'(w_B)B'(w_B)\frac{1}{S'(w_B)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Calculando el módulo tenemos

$$|A'(Sw_B)| = |B'(w_B)|,$$

luego Sw_B será atractor (repulsor) para A , de acuerdo a que w_B lo sea para B . Concluimos entonces que $w_A = Sw_B$, por la proposición 3.2.1 tenemos que los periodos del desarrollo en fracción continua “-” son permutaciones cíclicas uno del otro. \square

Ahora definiremos a los elementos reducidos y a los ciclos.

Definición 3.2.5 Una matriz hiperbólica en $PSL(2, \mathbf{Z})$ se le llama reducida si sus puntos atractor w y repulsor u satisfacen $0 < u < 1 < w$.

Definición 3.2.6 Sea A una matriz reducida, el conjunto de las matrices reducidas conjugadas a la matriz A se denomina el A -ciclo.

Definición 3.2.7 Sea A una matriz hiperbólica con puntos fijos atractor y repulsor w y u respectivamente. A la geodésica orientada que va de u a w se le llama el eje orientado de A .

El siguiente lema caracteriza a las matrices hiperbólicas reducidas de acuerdo a sus coeficientes y establece cotas para encontrar al punto fijo atractor de dicha matriz.

Lema 3.2.8 Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z})$$

con $a + d > 2$, entonces:

(i) A es reducida (esto es, su punto atractor w y repulsor u , cumplen $0 < u < 1 < w$) si y sólo si, $c > 0$, $a + b - c - d > 0$ y $b < 0$.

Además, para una matriz reducida A ,

(ii) $\frac{a+b}{c+d} < w < \frac{a}{c}$,

(iii) $a > 0$, $c + d > 0$, $d \leq 0$.

Demostración (i). Supongamos primero que A es reducida, entonces los puntos fijos atractor y repulsor son:

$$u = \frac{a-d-\sqrt{D}}{2c} \quad w = \frac{a-d+\sqrt{D}}{2c},$$

donde $D = (a-d)^2 + 4cb = (a+d)^2 - 4$; puesto que $w > 1 > u > 0$ tenemos que si $c < 0$, entonces $a-d+\sqrt{D} < a-d-\sqrt{D}$, lo cual es una contradicción. Notemos que $c = 0$, nos lleva a que uno de los puntos fijos es ∞ , lo cual es imposible si A es reducida; en consecuencia $c > 0$. Sabiendo lo anterior, se tiene que

$$a-d-\sqrt{D} < 2c < a-d+\sqrt{D}, \\ |a-d-2c| < \sqrt{D}.$$

Elevando al cuadrado y eliminando términos se llega a que $b+a-d-c > 0$. Por otro lado notemos que $-b/c = uw > 0$, como $c > 0$ entonces $b < 0$.

Para demostrar la suficiencia, con procedimientos inversos se tiene que $a+b-c-d > 0$ y $c > 0$ implican

$$u = \frac{a-d-\sqrt{D}}{2c} < 1 < \frac{a-d+\sqrt{D}}{2c} = w.$$

Además, como $uw = -b/c > 0$ y $w > 1$, entonces $u > 0$.

Para probar (ii) notemos que si w es el punto fijo atractor

$$(a+d)^2 > (a+d)^2 - 4 = D \Rightarrow a+d > \sqrt{D} \Rightarrow 2a > a-d+\sqrt{D} \Rightarrow \frac{a}{c} > w.$$

Por otro lado, ya que $c > 0$, la gráfica del polinomio característico $Q_A(z)$ asociado a A , cuando se restringe a los reales es convexa, además u y w

son ceros del polinomio; por lo que la imagen del 1 bajo la transformación correspondiente a A , esto es $(a+b)/(c+d)$, cumplirá

$$u < \frac{a+b}{c+d} < w \quad \text{si y sólo si} \quad Q_A\left(\frac{a+b}{c+d}\right) < 0.$$

Usando que $ad - bc = 1$ y (i) tenemos que

$$Q_A\left(\frac{a+b}{c+d}\right) = \frac{c+d-a-b}{(c+d)^2} < 0,$$

con lo que hemos probado (ii). Para la demostración de (iii) notemos que

$$\frac{1}{c(c+d)} = \frac{a}{c} - \frac{a+b}{c+d} > 0$$

en donde la desigualdad se tiene de (ii). Puesto que $c > 0$, entonces $c+d > 0$. Ahora, $a/c > \sqrt{D}$ y en consecuencia $a > 0$. Finalmente como $bc \leq -1$, y ya que $ad = 1 + bc$, se tiene que $d \leq 0$. \square

Corolario 3.2.9 Si A es una matriz reducida y w es su punto fijo atractor, entonces:

- (i) $A(x)$ es una función creciente para $x \geq 1$.
- (ii) Para cualquier $x > 1$, $\{A^n(x)\} \rightarrow w$, además la sucesión es decreciente, si $x > w$ y es creciente si $w > x > 1$.

Demostración (i). Si

$$A(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{entonces} \quad A'(x) = \frac{1}{(cx+d)^2},$$

por la proposición anterior, $c+d > 0$ y en consecuencia para $x \geq 1 > -d/c$, se tiene que $A'(x) > 0$ y entonces A es creciente para $x \geq 1$.

Para (ii) notemos que

$$x - A(x) = \frac{cx^2 + (d-a)x - b}{cx+d} = \frac{Q_A(x)}{cx+d}.$$

Como la gráfica de Q_A se anula en u y en w , es negativa para $u < x < w$ y creciente para $x > w$, se concluye el resultado. \square

Recordemos que las clases de matrices hiperbólicas conjugadas están determinadas por su traza, la proposición siguiente define cuáles serán los elementos reducidos de cada clase y que el número de estos es finito.

Proposición 3.2.10 *Hay un número finito de matrices reducidas en $PSL(2, \mathbb{Z})$ con traza dada t y $|t| > 2$. Cualquier matriz hiperbólica en $PSL(2, \mathbb{Z})$ con traza t se puede llevar, mediante un número finito de conjugaciones básicas, a una reducida. Si aplicamos a una matriz reducida A una de estas conjugaciones, da otra matriz reducida. Cualquier matriz reducida conjugada a A se obtiene de A aplicando un número finito de conjugaciones básicas. En consecuencia el conjunto de matrices reducidas se descompone en ciclos ajenos de matrices conjugadas.*

Demostración. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matriz reducida con $t = a + d$. Sea $k = a - d - 2c$. Se tiene que

$$0 < \frac{a - d - \sqrt{D}}{2c} < 1 < \frac{a - d + \sqrt{D}}{2c}$$

y $a - d - \sqrt{D} < 2c < a - d + \sqrt{D}$. Entonces $-\sqrt{D} < a - d - 2c < \sqrt{D}$, por lo que $|k| < \sqrt{D}$. En consecuencia k sólo puede tomar un número finito de valores para una D dada, ($D = t^2 - 4 = (a - d)^2 + 4bc$). Entonces

$$D - k^2 = (a - d)^2 + 4bc - (a - d - 2c)^2 = 4c(b + a - d - c)$$

pero, por 3.2.8, $c > 0$ y $a + b - c - d > 0$, así que $D - k^2 > 0$. También se tiene que c divide a $\frac{D - k^2}{4}$, por lo cual sólo hay un número finito de valores para c . Podemos expresar a a, b y d en términos de k y c de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a &= \frac{t + k + 2c}{2} \\ b &= \frac{D - k^2}{4c} - (k + c) \\ d &= \frac{t - k - 2c}{2}, \end{aligned}$$

consecuentemente, para t dada, hay sólo un número finito de matrices de la forma de A .

Como $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$, sus puntos fijos son irracionales cuadráticos y por 2.2.4 el punto fijo atractor, w , es de la forma

$$w = (n_0, n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}}).$$

Consideremos ahora a $A_0 = S^{-1}T^{-n_0}AT^{n_0}S$, notemos que si hacemos

$$w_0 = (n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}}),$$

entonces

$$\begin{aligned} T^{n_0}S(w_0) &= T^{n_0}S((n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})) \\ &= T^{n_0}\left(-\frac{1}{(n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})}\right) \\ &= n_0 - \frac{1}{(n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})} \\ &= w \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} A_0(w_0) &= S^{-1}T^{-n_0}A(w) = S^{-1}T^{-n_0}(w) \\ &= S^{-1}\left(-\frac{1}{(n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})}\right) \\ &= (n_1, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}}) = w_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

de esta manera A_0 fija a w_0 . Si ahora definimos

$$A_i = S^{-1}T^{-n_i}A_{i-1}T^{n_i}S \quad (3.3)$$

y

$$w_i = (n_{i+1}, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}}) \text{ para } i \geq 1, \quad (3.4)$$

por un argumento análogo al de A_0 , tenemos que A_i fija a w_i . Para $i \geq k$ los w_i son puramente periódicos. Por 2.2.6 se tiene que uno de los puntos fijos de A_i es positivo y menor que 1 y el otro es mayor que 1. Este último es w_i , porque los $n_i \geq 2$ y es atractor ya que el mismo w es atractor y por la ecuación 3.1. En consecuencia A_i es reducida, para toda $k \leq i \leq m$.

Si ahora A y B son reducidas y $A = PBP^{-1}$ con $P \in PSL(2, \mathbf{Z})$, entonces tienen la misma traza y por la proposición 3.2.4 sus puntos fijos atractores tienen desarrollos cuyos periodos difieren uno del otro por permutaciones cíclicas, esto es, si el punto fijo atractor de A es de la forma:

$$w_A = (n_0, \dots, n_k, \overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}}),$$

entonces el punto fijo correspondiente a B tiene la forma:

$$w_B = (n_0, \dots, n_r, \overline{n_{k+j} \dots n_{k+m}, n_{k+1}, \dots, n_{k+j-1}})$$

Repetiendo el argumento anterior tenemos que A es conjugada a A_k cuyo punto atractor es $w_{A_k} = (\overline{n_{k+1}, \dots, n_{k+m}})$ (como en 3.4) y B es conjugada a una B_r con punto fijo atractor

$$w_{B_r} = (\overline{n_{k+j} \dots n_{k+m}, n_{k+1}, \dots, n_{k+j-1}}).$$

Por la proposición 3.2.4 se tiene que A se puede obtener de B por un número finito de conjugaciones por matrices de la forma ST^r . \square

El resultado que a continuación veremos, establece condiciones que relacionan el punto fijo atractor correspondiente a una transformación representada por una matriz hiperbólica de $PSL(2, \mathbb{Z})$ y su representación en términos de los generadores, S y T , de $PSL(2, \mathbb{Z})$. Para la demostración de este resultado primero necesitaremos dos lemas:

Lema 3.2.11 Sean $n \geq 2$ un entero, $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

y w un número real que cumple:

- (i) $c, c + d \geq 0$
- (ii) $n - 1 < w < n$
- (iii) $\frac{a+b}{c+d} < w < \frac{a}{c}$.

Entonces

$$n - 1 < \frac{a}{c} < n.$$

Demostración. Es inmediato que (ii) y (iii) implican la desigualdad $n - 1 < a/c$. Para ver la desigualdad restante supongamos que $n \leq a/c$, entonces, por (ii) y (iii) se tiene:

$$\frac{a+b}{c+d} < w < n \leq \frac{a}{c}$$

y entonces

$$c(a+b) < cw(c+d) < cn(c+d) \leq a(c+d)$$

que nos lleva a

$$0 < nc(c+d) - bc - ac < ad - bc = 1$$

lo cual es una contradicción. \square

Lema 3.2.12 Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matriz hiperbólica con $c > 0$. Para un entero n , sea

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

entonces, para $n \neq 0$, $c_n > c$ o $c_n < 0$.

Demostración. Se puede ver por inducción que, todas las transformaciones de $\{A^n | n \in \mathbb{Z}\}$ salvo la identidad tienen los mismos puntos fijos y entonces comparten a la geodésica que une a ambos. Por lo cual debe suceder que todos los polinomios cuadráticos, Q_{A^n} , son múltiplos de Q_A . Luego, para algún escalar λ_n se tiene:

$$\begin{aligned} c_n &= \lambda_n c \\ b_n &= \lambda_n b \\ a_n - d_n &= \lambda_n (a - d). \end{aligned}$$

Si hacemos $t = \text{tr}(A)$ y $t_n = \text{tr}(A_n)$, al comparar los discriminantes

$$D(Q_{A^n}) = (a_n + d_n)^2 - 4 = t_n^2 - 4 \text{ y } D(Q_A) = (a + d)^2 - 4 = t^2 - 4$$

obtenemos que

$$\frac{t_n^2 - 4}{t^2 - 4} = \lambda_n^2$$

Sean $\mu > 1$ y $1/\mu$ los valores propios de A , se tiene que $t = \mu + 1/\mu$ y $t_n = \mu^n + 1/\mu^n$, ya que los valores propios de A^n son μ^n y $1/\mu^n$. Luego

$$t_n - t = \mu^n + \frac{1}{\mu^n} - \mu - \frac{1}{\mu} = \frac{(\mu^{n-1} - 1)(\mu^{n+1} - 1)}{\mu^n} > 0.$$

Esto nos obliga a que $|\lambda_n| > 1$, ya que, de otro modo, se tendría que

$$\frac{t_n^2 - 4}{t^2 - 4} \leq 1 \Rightarrow t_n^2 \leq t^2 \Rightarrow t_n - t \leq 0,$$

lo que contradice lo anterior. Como $|\lambda_n| > 1$ entonces $c_n > c$ si $\lambda_n > 1$, o $c_n < 0$ cuando $\lambda_n < -1$. \square

El siguiente resultado relaciona el punto fijo de un elemento hiperbólico del grupo modular con la expresión de éste en términos de los generadores S y T :

Proposición 3.2.13 Sean $n_1, n_2, \dots, n_m \geq 2$, enteros. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}),$$

hiperbólica y primitiva, con $\text{tr}(A) > 0$ y con punto fijo atractor

$$w = (\overline{n_1, n_2, \dots, n_m}),$$

entonces $A = T^{n_1} S T^{n_2} S \dots T^{n_m} S$.

Demostración. Para $r \in \mathbb{N}$ consideremos las matrices:

$$A_0 = A, \quad A_r = S^{-1} T^{-n_r} \dots S^{-1} T^{-n_1} A = \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix}$$

$$w_0 = w, \quad w_r = S^{-1} T^{-n_r} \dots S^{-1} T^{-n_1} w_0 = (\overline{n_{r+1}, \dots, n_m, n_1, n_2, \dots, n_r})$$

Notemos que, puesto que la transformación que representa S y S^{-1} son la misma y por el mismo argumento que en la prueba de 3.2.10, ecuación (3.2), la matriz

$$A_r A_r^{-1} = S^{-1} T^{-n_r} S^{-1} T^{-n_{r-1}} \dots S^{-1} T^{-n_1} A T^{n_1} S T^{n_2} \dots T^{n_{r-1}} S T^{n_r} S$$

tiene punto fijo atractor w_r . Además, para $r < m$, $w_r \neq w_0$, pues los periodos son diferentes. En consecuencia $A_r \neq \pm I$ si $r < m$ (donde I representa a la matriz identidad); y si $c_r = 0$ entonces $a_r d_r = 1$, pues todos los factores de la descomposición de A_r tienen determinante igual a 1, por lo que $a_r = d_r = \pm 1$ y así $A_r(z) = z + b_r$, con $b_r \in \mathbb{Z}$. Si consideramos ahora el resultado 2.2.6 y si denotamos a los puntos fijos repulsores de A y de A_r como w'_0 y w'_r , entonces $1 > w'_0 w'_r$. Pero el argumento previo nos lleva a que $w'_r = w'_0 + b_r$, donde $b_r \in \mathbb{Z}$, esto sólo puede suceder cuando $b_r = 0$ lo cual contradice que A_r es distinta de la transformación identidad. Por lo tanto $c_s \neq 0$ para $s < m$.

El siguiente paso es ver inductivamente que se cumplen las condiciones del lema 3.2.11 para a_r, b_r, c_r, d_r y w_r , donde $0 \leq r < m$ y concluir que $c_m = 0$ y entonces $A_m = I$.

Veamos para $r = 0$. $A_0 = A$ y $w_0 = w$, entonces como el punto fijo atractor de A es puramente periódico, usando el resultado 2.2.6 se tiene que A es reducida, por el lema 3.2.8 $c > 0$ y $c + d > 0$, por la proposición 2.1.6 $n_1 - 1 < w = (\overline{n_1, \dots, n_m}) < n_1$. Supongamos ahora que las condiciones se

cumplen para $0 < r - 1 < m$. También

$$\begin{aligned} A_r &= S^{-1}T^{-n_r}A_{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -n_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{r-1} & b_{r-1} \\ c_{r-1} & d_{r-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{r-1} & d_{r-1} \\ n_r c_{r-1} - a_{r-1} & n_r d_{r-1} - b_{r-1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

así que $c_r = n_r c_{r-1} - a_{r-1}$, como $a_{r-1}/c_{r-1} < n_r$ por hipótesis de inducción, entonces $c_r > 0$. Además

$$n_r < \frac{a_{r-1}}{c_{r-1}} \Rightarrow c_r = n_r c_{r-1} - a_{r-1} < c_{r-1}. \quad (3.6)$$

Por otro lado

$$c_r + d_r = n_r c_{r-1} - a_{r-1} + n_r d_{r-1} - b_{r-1} = n_r(c_{r-1} + d_{r-1}) - (a_{r-1} + b_{r-1})$$

y por la hipótesis inductiva

$$n_r > \frac{a_{r-1} + b_{r-1}}{c_{r-1} + d_{r-1}},$$

en consecuencia $c_r + d_r > 0$. Para ver que $n_{r+1} - 1 < w_r < n_{r+1}$, notemos que del desarrollo en fracción continua para w_r y por 2.1.5 nos llevan a ambas desigualdades. Sólo falta ver que

$$\frac{a_r + b_r}{c_r + d_r} < w_r < \frac{a_r}{c_r}.$$

Puesto que

$$S^{-1}T^{-n_r} \left(\frac{a_{r-1}}{c_{r-1}} \right) = -\frac{c_{r-1}}{a_{r-1} - n_r c_{r-1}}$$

y

$$S^{-1}T^{-n_r} \left(\frac{a_{r-1} + b_{r-1}}{c_{r-1} + d_{r-1}} \right) = \frac{c_{r-1} + d_{r-1}}{n_r(c_{r-1} + d_{r-1}) - (a_{r-1} + b_{r-1})},$$

por 3.5 se tiene

$$\frac{a_r}{c_r} = S^{-1}T^{-n_r} \left(\frac{a_{r-1}}{c_{r-1}} \right) \text{ y } \frac{a_r + b_r}{c_r + d_r} = S^{-1}T^{-n_r} \left(\frac{a_{r-1} + b_{r-1}}{c_{r-1} + d_{r-1}} \right)$$

tomando en cuenta esto y que $S^{-1}T^{-n_r}(x)$ es creciente para $x \neq n_r$, (ya que derivando se tiene que

$$(S^{-1}T^{-n_r}(x))' = \frac{1}{(n_r - x)^2} > 0$$

cuando $x \neq n_r$), entonces se cumple la última suposición del lema 3.2.11 y así,

$$c_m < c_{m-1} < \dots < c.$$

Recordemos que las c_r , ($0 \leq r < m$) son enteros (de hecho naturales) y decrecientes, queremos mostrar ahora que $c_m = 0$. Supongamos que $c_m > 0$, sabemos que

$$A_m A = S^{-1}T^{-n_m} \dots S^{-1}T^{-n_1} A A$$

fija a w_0 , como A es primitiva, entonces $A_m A = A^n$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$, ($n \neq 1$ pues esto implicaría que $A_m = I$, contradiciendo que $c_m < 0$), o dicho de otra manera $A_m = A^{n-1}$, con $n-1 \neq 0$, y entonces el lema 3.2.12 implica que $c_m > c$ o $c_m < 0$, ambos casos nos llevan a una contradicción. Hemos demostrado que $A_m = I$ y en consecuencia

$$A = T^{n_1} S T^{n_2} S \dots T^{n_m} S.$$

□

3.3 Codificación de geodésicas

La idea de codificar geodésicas consiste en asociarles sucesiones. En este caso pensaremos a las geodésicas en el semiplano superior, (dicho modelo del espacio hiperbólico se le atribuye a Liouville y a Beltrami) esto es, en \mathcal{H} y particularmente relacionaremos a las geodésicas con elementos hiperbólicos de $PSL(2, \mathbb{Z})$.

Los antecedentes de las codificaciones que usaremos aquí datan de 1927, cuando J. Nielsen da una representación simbólica de los puntos en S^1 como sucesiones casi infinitas de generadores del grupo fundamental para una superficie cuya región fundamental es un polígono de $4g$ lados. En 1965, E. Artin da una representación de las geodésicas en \mathcal{H} como sucesiones infinitas dobles, de enteros positivos que surgen de la expresión en fracción continua de cada uno de sus puntos extremos. Dos geodésicas, entonces, son conjugadas bajo la acción de $GL(2, \mathbb{Z})$ en \mathcal{H} si y sólo si las sucesiones correspondientes son equivalentes respecto a levantamientos. En 1966 Morse

codifica las geodésicas en el modelo del disco de Poincaré para el espacio hiperbólico como sucesiones de generadores en el grupo fundamental de la siguiente manera: si Γ es un grupo Fuchsiano, y η es la red de imágenes de una región fundamental R para Γ , se sabe que cada uno de los lados de η tiene asociado un único generador de Γ (A.4.18) y se le asigna a cada geodésica la sucesión de generadores que etiquetan los lados que sucesivamente va cruzando γ . Para obtener una correspondencia uno a uno entre sucesiones (que tienen ciertas reglas de admisibilidad) y las geodésicas, es necesario que la codificación se modifique un poco cuando γ cruza un vértice de la red η .

Más recientemente C. Series (1986) [Se82], [Se85a] y [Se85b] y S. Katok [Ka86] y [Ka96] han trabajado explorando estas ideas. Todos ellos, han usado a las fracciones continuas para estudiar el grupo modular ($PSL(2, \mathbf{Z})$) y a las geodésicas.

En este trabajo se usará la misma idea de Morse para la codificación. Si $\Gamma = PSL(2, \mathbf{Z})$ es el grupo modular y F es la región de Dirichlet para Γ dada por (A.4.12)

$$F = D_p(\Gamma) = \{z \in \mathcal{H} \mid |z| \geq 1, |Re(z)| \leq \frac{1}{2}\},$$

los lados de F tienen asociados generadores de Γ , en este caso S y T , dicha asociación se hace por parejas de lados (A.4.18). Los lados de las imágenes de F bajo Γ (que es lo mismo que los lados de los mosaicos de la teselación que induce F como imagen de $PSL(2, \mathbf{Z})$ o la red de imágenes, η de la que anteriormente se habló), se etiquetan con el generador asignado al lado correspondiente en F del cual son imagen. Las figuras 3.1¹ y 4.1 ilustran la teselación inducida por R como imagen de Γ

Si consideramos a una geodésica orientada $\gamma \in \mathcal{H}$ que cruza por F , la sucesión que codifica a γ (de acuerdo con Morse) es la sucesión doble que se obtiene de recuperar los generadores de Γ asociados a los lados que γ cruza en la red de imágenes de F , partiendo de ésta y en la dirección de su orientación hasta un punto extremo (la sucesión resulta doble porque también se considera la sucesión correspondiente al otro extremo de γ). Si la geodésica cruza un vértice de la red, hay una ambigüedad, pero veremos que en el caso que consideramos aquí esto se puede resolver.

En el caso de que la geodésica es el eje de un elemento hiperbólico $A \in PSL(2, \mathbf{Z})$, el código de Morse de A (tomado a partir de un punto del eje)

¹la imagen es de P. du Val y fue tomada de [St96]

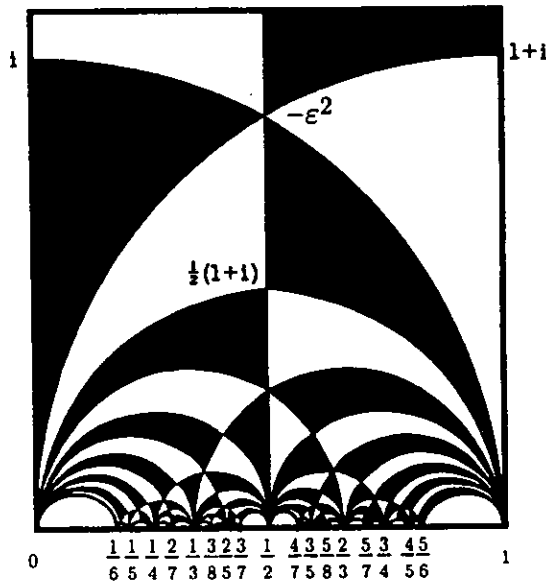


Figura 3.1: La teselación modular

es una sucesión de la forma $ST^{n_1}ST^{n_2}\dots$ donde $n_j \in \mathbb{Z}$, la cual podría no comenzar con S y que resulta ser periódica. Por la manera en que F tesela (ver figura 4.1), es fácil ver que en la sucesión no habrá dos letras S consecutivas ni tampoco un elemento T seguido de T^{-1} , esto significaría que la geodésica se regresa o zigzaguea. En este caso la sucesión del código de Morse se puede resumir si consideramos únicamente las potencias de T , esto es, las n_i . Al periodo de la sucesión que se obtiene le llamaremos **código geométrico** de A , y se denota entre llaves, esto significa que tiene la forma $\{n_k, n_{k+1}, \dots\}$.

El **código aritmético** de A será el periodo de la fracción continua “-” para el punto fijo atractor de A . Este código es invariante bajo conjugaciones en $PSL(2, \mathbb{Z})$ como lo dice la proposición 3.2.4 y por lo mismo, está definido para las clases de matrices hiperbólicas con traza dada, salvo permutaciones cíclicas, como lo establece la proposición 3.2.10.

Resta decir que las geodésicas de \mathcal{H} se pueden pensar como curvas en F , las cuales llamaremos **geodésicas en F** . La manera de ver esto resulta

de mapear "de regreso a F " a cada segmento de la geodésica que cruza una imagen de F bajo algún elemento de Γ , digamos P , mediante la transformación P^{-1} . Así, las geodésicas correspondientes a un ciclo tendrán una representante en F , la cual corresponderá a una curva cerrada cuando identificamos los lados de F mediante las transformaciones S y T , esto es, en el espacio cociente \mathcal{H}/Γ , ver §A.5.

Es por ello que el título de la tesis es codificación de geodésicas en superficies modulares, aunque de una manera más precisa estamos codificando geodésicas en la superficie $\mathcal{H}/PSL(2, \mathbf{Z})$.

Podemos hacer una analogía un tanto burda de estos códigos con respecto al ejemplo que se vió en §1.1., el código geométrico juega el mismo papel que los valores de la sucesión de corte para una recta y el código aritmético equivale al desarrollo en fracción continua de la pendiente de las rectas.

Teniendo estas definiciones podemos decir que la proposición 3.2.13 nos lleva al siguiente corolario, que dice que dada cualquier sucesión de enteros (n_1, \dots, n_m) , con $n_i \geq 2$, existe una matriz en $PSL(2, \mathbf{Z})$ cuyo código aritmético coincide con ésta. Más aun, estas matrices serán hiperbólicas, con traza positiva y reducidas.

Corolario 3.3.1 Sean $n_1, \dots, n_m \geq 2$ enteros,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces la matriz $A = T^{n_1} S T^{n_2} S \dots T^{n_m} S$ es hiperbólica reducida, con $\text{tr}(A) > 0$, y su código aritmético es $(A) = (n_1, \dots, n_m)$.

Demostración. Sea $A = T^{n_1} S T^{n_2} S \dots T^{n_m} S$, primero veremos que su traza es positiva. Recordemos que

$$T^{n_r} S = \begin{pmatrix} n_r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo visto en 2.1 (recorriendo el índice)

$$T^{n_1} S \dots T^{n_m} S = \begin{pmatrix} n_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} n_m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_m & -p_{m-1} \\ q_m & -q_{m-1} \end{pmatrix}$$

como los $n_i \geq 2$, entonces $(n_1, \dots, n_m) = p_m/q_m > 1$, también sabemos (por la ecuación 2.1.3) que $q_m > q_{m-1}$, para toda m . En consecuencia $p_m > q_m > q_{m-1}$. Si además recordamos p_r y q_r son enteros, entonces la traza de A cumple $tr(A) = p_m - q_{m-1} \geq 1$. Pero además si $p_m - q_{m-1} = 1$, llegamos a la siguiente contradicción

$$1 = p_m - q_{m-1} > p_m - q_m \geq 1.$$

Por tanto $tr(A) \geq 2$. Terminaremos de ver que A es hiperbólica exhibiendo sus dos puntos fijos, si hacemos $w = (\overline{n_1, \dots, n_m})$,

$$\begin{aligned} A(w) &= T^{n_1} S \dots T^{n_m} S(\overline{n_1, \dots, n_m}) = T^{n_1} S \dots T^{n_{m-1}} S(n_m - \frac{1}{(\overline{n_1, \dots, n_m})}) \\ &= T^{n_1} S \dots T^{n_{m-1}} S(\overline{n_m, n_1, \dots, n_{m-1}}) \dots = T^{n_1} S(\overline{n_2, \dots, n_m, n_1}) \\ &= w \end{aligned}$$

De la misma manera se tiene que si $u = 1/(\overline{n_m, \dots, n_1})$, entonces u es punto fijo de $A^{-1} = T^{n_1} S T^{n_2} S \dots T^{n_m} S$ y entonces también lo es de A . Por lo cual A es hiperbólica. Sólo falta verificar que w es atractor, si $|A'(w)| < 1$, ya terminamos, si no,

$$|(A^{-1}(w))'| = \left| \frac{1}{A'(w)} \right| < 1$$

en cuyo caso w es atractor de A^{-1} , puesto que A^{-1} es hiperbólica, por la proposición 3.2.13 tenemos que

$$A^{-1} = T^{n_1} S T^{n_2} S \dots T^{n_m} S = A$$

o $A^2 = I$; esto último nos diría que A es elíptica, lo que contradice que A sea hiperbólica. Por tanto w es punto fijo atractor de A y A es entonces reducida. \square

4

Relación entre los códigos aritmético y geométrico

4.1 Consideraciones

A lo largo del capítulo llamaremos F a la región

$$F = \{z = x + iy : |z| \leq 1, |x| \leq 1/2\}$$

la cual es una región fundamental para $PSL(2, \mathbb{Z})$ (ver apéndice).

También nombraremos a los lados y vértices de F como sigue (véase fig.4.1):

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, & \rho - 1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ a_1 &= \text{el arco que va de } \rho - 1 \text{ a } i, & a_2 &= \text{el arco que va de } i \text{ a } \rho, \\ v_1 &= \{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}it \mid t \geq 0\} \text{ y} & v_2 &= \{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}it \mid t \geq 0\} \end{aligned}$$

Por $T^n F$ y SF entenderemos las imágenes bajo T^n y S de la región F , esto es

$$T^n F = \{z = x + iy : |z - n| > 1, |x| \leq 1/2 + n\},$$

y

$$SF = \{z = x + iy : |z - 1| > 1, |z + 1| > 1 \text{ y } |z| < 1\}.$$

esto último se sigue de que la transformación S manda \mathcal{H} -líneas en \mathcal{H} -líneas, de que transforma ∞ al 0 e intercambia ρ y $\rho - 1$, entonces también transforma v_1 en la \mathcal{H} -línea que une a ρ con el 0 y a v_2 en la \mathcal{H} -línea que une a $\rho - 1$ con el 0.

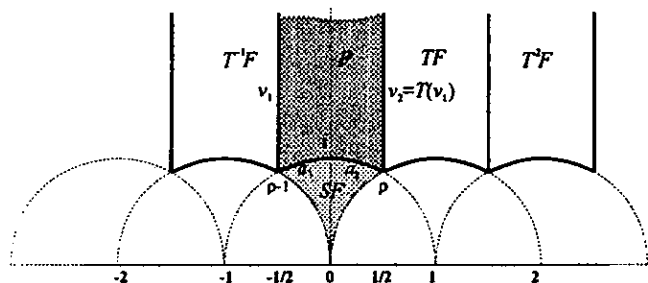


Figura 4.1: F es una región fundamental para $SL(2, \mathbb{Z})$

Definición 4.1.1 Sea D una región fundamental para $SL(2, \mathbb{Z})$, se dice que una matriz hiperbólica en $SL(2, \mathbb{Z})$ es D -reducida si su eje intersecta a D

En nuestro caso la región fundamental siempre será F . Recordemos también que si A es una matriz hiperbólica, el conjunto de todas las matrices reducidas conjugadas a A se denota como el A -ciclo.

Definición 4.1.2 Se dice que una matriz hiperbólica de $PSL(2, \mathbb{Z})$ es totalmente F -reducida si todas las matrices del A -ciclo son F -reducidas.

Las siguientes observaciones nos servirán para familiarizarnos con el comportamiento de las geodésicas en el plano hiperbólico y cómo se relacionan éstas con aquellas que pertenecen al mismo ciclo.

Observación 4.1.3 Sea A una matriz totalmente F -reducida y sea $w_A = (n_1, \dots, n_m)$ el punto fijo atractor de A , sea γ_A el eje de A , si γ_A entra a la región F por $T^k(v_1)$, entonces seguir el paso de la geodésica γ_A en su trayectoria por las regiones $T^k F$, con $1 \leq k \leq n_1$ es lo mismo que seguir a la geodésica $\gamma_{T^{-k}AT^k}$ en su trayectoria por F . También si γ_A cruza la región SF entrando por p_1 y saliendo por p_2 entonces $\gamma_{S^{-1}AS}$ entra a la región F por $S(p_1)$ y sale por $S(p_2)$. (Véase fig.4.2)

Para justificar esto pensemos en que γ_A entra por $T(v_1) = v_2$ a TF , en el punto $p = 1/2 + ri$, con $r > \sqrt{3}/2$, entonces $\gamma_{T^{-1}AT}$ entrará a F en el punto $T^{-1}(p) = -1/2 + ri$ ya que los puntos fijos, atractor w_1 y repulsor u_1 , deben ser $u_1 = T^{-1}(u) = u - 1$ y $w_1 = T^{-1}(w) = w - 1$ y entonces el eje $\gamma_{T^{-1}AT}$ es simplemente $T^{-1}(\gamma_A)$.

Repetiendo este argumento inductivamente, tenemos que el comportamiento de γ_A por $T^k F$ es el mismo que el de $\gamma_{T^{-k}AT^k}$ por la región F .

Para el caso en que γ_A entra a SF por el punto p_1 y sale de ésta por p_2 , notemos que si los puntos fijos de A son u_A y w_A , entonces los puntos fijos de $S^{-1}AS$ son $S^{-1}(u_A)$ y $S^{-1}(w_A)$ así que $\gamma_{S^{-1}AS} = S^{-1}(\gamma_A)$ y entonces si γ_A intersecta a SF , entrando a ésta por p_1 y saliendo por p_2 , y el γ_A entra a F por $S(p_1)$ y sale por $S(p_2)$, entonces $S^{-1}(\gamma_A) = S(\gamma_A)$ intersecta a $SSF = F$. En este punto es importante recordar que $S = S^{-1}$ como transformación, pero no como matriz. En consecuencia $\gamma_{S^{-1}AS}$ entrará a F por $S(p_1)$ y saldrá por $S(p_2)$. \square

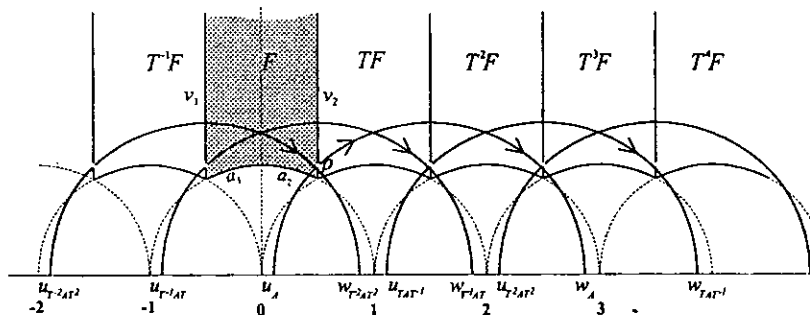


Figura 4.2: Los ejes de matrices conjugadas a A

Observación 4.1.4 Si A es totalmente F -reducida con punto fijo atractor $w_A = (n_1, \dots, n_m)$, entonces todos los segmentos de la geodésica del A -ciclo se pueden ver como los segmentos de los ejes que están en F de las siguientes matrices

- (i) $A = A_0$
- (ii) $A_i = S^{-1}T^{-n_i}A_{i-1}T^{n_i}S$ para $i = 1, 2, \dots, m$.
- (iii) $T^{-j}A_iT^j$ con $0 \leq j \leq n_{i+1}$.

Demostración. Las matrices A_i no son otra cosa que los elementos del ciclo de A , de acuerdo a la proposición 3.2.10, y los ejes de las matrices del inciso (iii) son la traslaciones de los ejes de A_i , de acuerdo a la observación anterior (4.1.3). \square

4.2 Relación entre los códigos y la orientación

Teorema 4.2.1 *Sea $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ una matriz hiperbólica, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *La matriz A es totalmente F -reducida.*
- (ii) *Los códigos geométrico y aritmético de A coinciden.*
- (iii) *Todos los segmentos de la geodésica cerrada en F que corresponden a la clase conjugada de A están orientados en sentido negativo.*

Demostración. (i) \Rightarrow (ii). Sea A totalmente F -reducida y sea γ_A su eje, entonces los puntos fijos atractor y repulsor, u y w respectivamente, cumplen $0 < u < 1 < w$, donde

$$w = (\overline{n_1, n_2, \dots, n_m}), \text{ con } n_i \geq 2 \text{ para } i \geq 1.$$

Para que γ_A intersekte a F , es necesario que entre por a_2 a F , ya que γ_A sale de $u > 0$; también debe salir de F por v_2 . (De hecho, para que la geodésica intersekte a F , su radio tiene que ser mayor que $\sqrt{3}/2$.)

Supongamos ahora que para toda $0 \leq j < k$, $\gamma_{T^{-j}AT^j}$ entra a F por v_1 y sale de F por v_2 y que el eje $\gamma_{T^{-k}AT^k}$ entra a F por v_1 y sale de F por algún a_i .

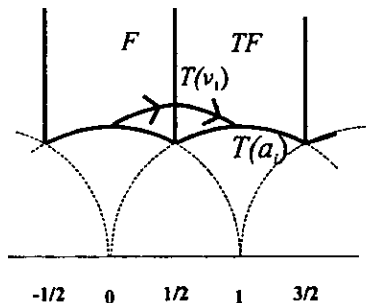


Figura 4.3: γ_{A^k} no puede entrar a TF por $T(a_i)$ sin pasar antes por $T(v_1)$.

Ahora, $k \geq n_1$ porque si $n_1 > k$ entonces la geodésica $\gamma_{T^{-(k+1)}AT^{k+1}}$ no puede entrar a TF por $T(v_1)$, pues entonces $\gamma_{T^{-k}AT^k}$ habría salido de F por v_2 . Tampoco puede entrar por $T(v_2)$ a TF , así que $\gamma_{T^{-k}AT^k}$ tendría que entrar a TF por $T(a_1)$ o $T(a_2)$ pero esto es imposible porque para que el eje entrase por alguna de éstas, tendría que pasar por $T(v_i)$ (ver fig.4.3)

En consecuencia, si $n_1 > k$ entonces $T^{-(k+1)}AT^{k+1}$ no pasa por F , ni tampoco pasa por SF , pues de otro modo el radio del eje tendría que ser menor que 1. De esta manera, $T^{-n_1}AT^{n_1}$ tampoco intersectaría a F ni a SF , y entonces por la observación 4.1.3, $\gamma_{S^{-1}T^{n_1}AT^{n_1}S}$ no intersecta a F . Esto contradice que el elemento del ciclo $S^{-1}T^{n_1}AT^{n_1}S$ es F -reducido y también que A sea totalmente F -reducida. Por lo tanto $k \geq n_1$.

Además, no puede ser que $k > n_1$ porque $n_1 - 1 < w < n_1$, esto significa que γ_A no intersecta a $T^{n_1+1}F$, por lo que $T^{-(n_1+1)}AT^{n_1+1}$ no intersecta a F . Por tanto $k = n_1$.

Recordemos que $n_i \geq 2$ para $i \geq 1$, y que

$$n_1 - 1 < w = (\overline{n_1, n_2, \dots, n_m}) < n_1,$$

además γ_A tiene radio mayor que 1 por lo que ésta solo puede llegar a w por la región comprendida entre las geodésicas $|z - (n_1 - 2)| = 1$ y $\text{Re}(z) = n_1$ (véase fig.4.4). Puesto que γ entra a $T^{n_1}F$, esto sólo lo puede hacer entrando por $T^{n_1}(v_1)$ y saliendo por $T^{n_1}(a_1)$.

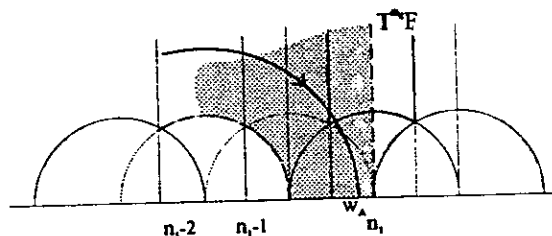


Figura 4.4: γ_A se encuentra en la región sombreada.

Para concluir que el primer número del código geométrico de A es n_1 , tenemos que ver que no hay ambigüedades y que γ_A no pasa por ρ o por i .

Lo primero no representa mayor problema pues sólo hay tres matrices cuyos ejes cumplen con esto, posteriormente veremos qué sucede en esos casos particulares (corolario 4.3.6).

Tampoco puede suceder que γ_A pase por i , por lo siguiente: si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

la expresión de los puntos fijos u y w de A indica que el centro de γ_A es $(a-d)/2c$ y el radio es $\sqrt{D}/2c$ por lo que la ecuación de γ_A es

$$\left| z - \frac{a-d}{2c} \right|^2 = \frac{D}{4c^2}$$

o, haciendo $z = x + iy$,

$$c|z|^2 + (d-a)x - b = 0. \quad (4.1)$$

Si sustituimos i , en la ecuación 4.1 se tiene que $c = b$. Pero esto contradice el lema 3.2.8, el cual dice que $c > 0$ y $b < 0$. En consecuencia γ_A no pasa por i .

Puesto que γ_A entra a $T^{n_1}SF$ por $T(a_1)$ y sale por $T^{n_1}S(v_2)$, entonces $\gamma_{T^{-n_1}AT^{n_1}}$ entra a SF por a_1 y sale por $S(v_2)$, esto es por la observación 4.1.3, si definimos ahora

$$A_{n_1} = S^{-1}T^{-n_1}AT^{n_1}S,$$

entonces $\gamma_{A_{n_1}}$ entra a F por $S(a_1) = a_2$ y sale de F por v_2 , esto es, volvemos al caso con el que comenzamos. Podemos repetir el mismo procedimiento, esta vez para $\gamma_{A_{n_1}}$, la cual entrará a $T^{n_2}F$ por $T^{n_2}(v_1)$ y saldrá por $T^{n_2}(a_1)$, y así sucesivamente. Por lo tanto el código geométrico de A es $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$.

(i) \Rightarrow (iii): En los argumentos anteriores los ejes correspondientes a las matrices A_{n_i} y B_{n_j} definidas como en la observación 4.1.4 y como en la ecuación 4.2 están orientados en sentido negativo, y por la observación 4.1.4 estos constituyen todos los segmentos del eje de A .

(ii) \Rightarrow (i): Supongamos que A no es totalmente F -reducida, entonces existe una matriz del ciclo de A que no pasa por F y que es de la forma de A_k , para alguna k según la ecuación 3.3.

Como A_k es reducida, entonces γ_{A_k} tiene que cruzar a la circunferencia $|z| = 1$, pero γ_{A_k} no pasa por F , entonces el eje cruza el arco que va de ρ a 1, esto es, a $TS(v_2)$ y entra a TSF . Puesto que el radio de $\gamma_{A_k} > 1$, entonces ésta debe salir por $T(a_1)$ o $T(a_2)$, cruzar la región TF y salir de ella por $T(v_2)$. (Ver fig.4.5)

Así que $S^{-1}T^{-1}ATS$ entra a F por v_2 y en consecuencia ha salido de TF por $T(v_1)$. Por tanto $T^{-1}S^{-1}T^{-1}ATST$ sale de F por el lado v_1 y entra a $T^{-1}F$. Como la geodésica no puede zigzaguear, tenemos que el código geométrico de A contiene al menos un -1 o número negativo, pero en el código aritmético los elementos $n_i \geq 2$ por lo que estaríamos contradiciendo que los códigos coinciden.

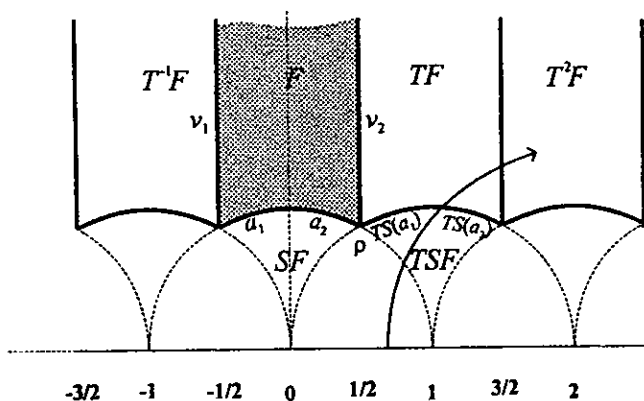


Figura 4.5: Trayectoria de γ_A

(iii) \Rightarrow (i) Supongamos que A no es totalmente F reducida, por el argumento de (ii) \Rightarrow (i) hay un segmento de geodésica correspondiente a un elemento conjugado a A que cruza por F en sentido positivo, lo cual es una contradicción. \square

4.3 Relación entre reducción y el código aritmético

El propósito ahora es establecer condiciones necesarias y suficientes sobre el código aritmético de una matriz para que ésta sea totalmente F -reducida. Para ver esto necesitaremos primero de una observación y un lema.

Observación 4.3.1 Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}),$$

una matriz reducida. A es F -reducida si y sólo si

$$\frac{a-d}{c-b} - 2 \geq 0 \tag{4.2}$$

Demostración. La ecuación del eje γ_A , de acuerdo a 4.1, es

$$c|z|^2 + (d-a)x - b = 0.$$

Como A es reducida, su eje intersecta siempre al círculo $|z| = 1$. Para que γ_A intersecte a F el eje tendría que pasar por el arco que va de ρ a 0, lo cual

sucede cuando el punto de intersección $z = x + iy$ cumpla $x \leq 1/2$. Como $c > 0$, $b < 0$ y $d - a < 0$, esta condición se traduce en

$$(d - a)x \geq (d - a)\frac{1}{2}$$

y entonces

$$c|z|^2 + (d - a)\frac{1}{2} - b \leq 0$$

por lo que

$$\frac{a - d}{c - b} \geq 2$$

□

Lema 4.3.2 Si $A = A_{n_1} A_{n_2} \cdots A_{n_i} \cdots A_{n_m}$ es totalmente F -reducida y $n > n_i$, entonces $A_{(n)} = A_{n_1} \cdots A_{n_{i-1}} A_n A_{n_{i+1}} \cdots A_{n_m}$ también es totalmente F -reducida.

Demostración. Primero notemos que $A_{(n)}$ también es reducida pues su punto fijo atractor es $(\overline{n_1, \dots, n, \dots, n_m}) > (\overline{n_1, \dots, n_i, \dots, n_m}) = w_A$ (la desigualdad se da por la proposición 2.2.2) y también el punto fijo repulsor cumple

$$0 < \frac{1}{(\overline{n_m, \dots, n, \dots, n_1})} < \frac{1}{(\overline{n_1, \dots, n_i, \dots, n_m})} = u_A < 1.$$

Si escribimos

$$A_{n_1} \cdots A_{n_{i-1}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ y } A_{n_{i+1}} \cdots A_{n_m} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} A_{(n)} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 n + a_2 b_1 - a_1 c_2 & a_1 b_2 n + b_1 b_2 - a_1 d_2 \\ c_1 a_2 n + d_1 a_2 - c_1 c_2 & c_1 b_2 n + d_1 b_2 - c_1 d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Queremos ver que a', b', c' y d' cumplen con la ecuación 4.2 para que $A_{(n)}$ sea F -reducida. Y los elementos del ciclo de $A_{(n)}$ también serán F -reducidos, pues al aplicar las conjugaciones para obtener los otros elementos del ciclo de A , estamos obteniendo elementos del ciclo de $A_{(n)}$. Notemos que a', b', c' y d' están en función de n , sustituyendo estos definimos la función

$$f(n) = \frac{a'(n) - d'(n)}{c'(n) - b'(n)} - 2 = \frac{n(a_1a_2 - c_1b_2) + b_1a_2 - a_1c_2 - d_1b_2 + c_1d_2}{n(c_1a_2 - a_1b_2) + d_1a_2 - c_1c_2 - b_1b_2 + a_1d_2} - 2$$

Sabemos que $A = A_{(n_i)}$ y entonces $f(n_i) \geq 0$, basta con ver que $f'(n) > 0$ para toda $n \geq n_i$ y entonces $f(n) > 0$. Nos ahorraremos cálculos si pensamos en lo siguiente: como $f(n)$ y su derivada tiene la forma

$$f(n) = \frac{pn + q}{rn + s}, \quad f'(n) = \frac{ps - rq}{(rn + s)^2}$$

basta ver $ps - rq > 0$, pero

$$ps - rq = (a_1a_2 - c_1b_2)(d_1a_2 - c_1c_2 - b_1b_2 + a_1d_2) - (c_1a_2 - a_1b_2)(b_1a_2 - a_1c_2 - d_1b_2 + c_1d_2),$$

haciendo los cálculos y usando que $a_1d_1 - c_1b_1 = a_2d_2 - c_2b_2 = 1$, se tiene que

$$ps - rq = a_1^2 + a_2^2 - c_1^2 - b_2^2$$

Veamos primero que $a_1^2 - c_1^2 > 0$, pues si $A_{n_1} \cdots A_{n_{i-1}} = I$ entonces $a_1^2 - c_1^2 = 1$. Si $A_{n_1} \cdots A_{n_{i-1}}$ no es la identidad, entonces usamos el argumento de la demostración del corolario 3.3.1 para concluir que $A_{n_1} \cdots A_{n_{i-1}}$ es reducida y con traza positiva, por el lema 3.2.8, $c_1 > 0$. El punto fijo atractor de la transformación es $(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_{i-1})$ y por el lema 3.2.11:

$$\frac{a_1}{c_1} > n_1 - 1 \geq 2$$

entonces $a_1^2 > 4c_1^2 > c_1^2$ y en consecuencia $a_1^2 - c_1^2 > 0$.

También $a_2^2 - b_2^2 > 0$ pues si $A_{n_{i+1}} \cdots A_{n_m} \neq I$, también es reducida y como consecuencia del lema 3.2.8 $a_2 > 0$ y $b_2 < 0$ y $a_2 + b_2 > c_2 + d_2 > 0$. Por lo tanto $a_2^2 - b_2^2 = (a_2 + b_2)(a_2 - b_2) > 0$. Si $A_{n_{i+1}} \cdots A_{n_m}$ es la identidad, la desigualdad es trivial. En conclusión $f'(n) > 0$ para toda $n > n_i$, y $f(n) > 0$. Lo que nos dice que $A_{(n)}$ también es reducida.

Otra manera más gráfica de ver esto es pensar en el eje de A , γ_A , si B es otra matriz reducida cuyo eje γ_B pasa por arriba de γ_A , entonces B también

será F -reducida. Para que γ_B pase por arriba de γ_A los correspondientes puntos fijos atractores y repulsos de A y B w_A, w_B, u_A y u_B respectivamente, tienen que cumplir

$$0 < u_B < u_A < 1 < w_A < w_B.$$

Estas desigualdades se siguen de la expresión en fracción continua de los puntos fijos y por los resultados 2.2.2 y 2.2.7. □

El siguiente teorema nos dice las condiciones del código aritmético de una matriz para que esta sea totalmente F -reducida:

Teorema 4.3.3 *Sea A una matriz en $SL(2, \mathbb{Z})$ cuyo código aritmético es*

$$(A) = (n_1, \dots, n_m).$$

A es totalmente F -reducida si y sólo si:

$$\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i+1}} \leq \frac{1}{2} \text{ para toda } i \text{ (módulo } m). \quad (4.3)$$

Esta última expresión es equivalente a que el código aritmético de A no contenga un 2, ni sean adyacentes los siguientes pares de números (3, 3), (3, 4) y (3, 5).

Demostración. De la necesidad: Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } (A) = (n_1, \dots, n_m),$$

demostraremos que si en (A) hay dos números adyacentes, r y s que cumplan con la ecuación 4.3, entonces A no puede ser totalmente F -reducida, esto es, que no cumple con la ecuación 4.2. Podemos pensar que $s = n_m$ y $r = n_1$, esto lo podemos hacer conjugando como en la proposición 3.2.10 y considerando un elemento del A -ciclo si es necesario. Por el corolario 3.3.1 $A = A_r A_{n_2} \cdots A_{n_{m-1}} A_s$, en donde

$$A_{n_i} = T^{n_i} S = \begin{pmatrix} n_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Denotemos

$$B = A_{n_2} \cdots A_{n_{m-1}} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
 &= A_r B A_s = \begin{pmatrix} r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} s(ra' - c') + b'r - d' & c' - a'r \\ a's + b' & -a' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Por el corolario 3.3.1, $tr(A) > 0$ y A es reducida; usando el lema 3.2.8, $c > 0$ y $b < 0$, así $c - b > 0$, se sigue que en la ecuación 4.2,

$$\frac{a - d - 2(c - b)}{c - b}$$

el denominador es positivo. Falta ver que el numerador es ≤ 0 .

Notemos que B es la identidad o es reducida. Si B es reducida, entonces por el corolario 3.3.1, $tr(B) > 0$ y por el lema 3.2.8 $a', c' > 0$, $b' < 0$ y $c' + d' > 0$.

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 \frac{a - d}{c - b} - 2 &= \frac{a'rs - c's + b'r - d' + a' - 2(a's + b' + a'r - c')}{a's + b' - c' + a'r} \\
 &= \frac{a'(rs + 1 - 2(r + s) + 1) + b'(r - 2) + c'(-s + 3) - (d' + c')}{a's + b' + a'r - c}
 \end{aligned}$$

Por hipótesis r y s cumplen 4.3, lo cual nos lleva a que

$$2(r + s) - rs - 1 \geq 0,$$

así que el coeficiente de a' es ≤ 0 . También $r \geq 2$, por lo que $b'(r - 2) \leq 0$. El término $-c'(s - 3) \leq 0$ salvo cuando $s = 2$, en ese caso tendríamos:

$$-3a' + b'(r - 2) - d' = -2a' + b'(r - 2) - (a' + d') \leq 0$$

Entonces el numerador de la ecuación 4.4 es ≤ 0 y el eje de A no intersecta a F . Por lo tanto A no es F -reducida.

La demostración del recíproco es un poco más complicada. Consideremos primero a las siguientes matrices y a sus correspondientes transformaciones:

Transformación:	puntos fijos atractor y repulsor:	eje:
$A_4(z) = 4 - \frac{1}{z}$	$w_4 = 2 + \sqrt{3} = (\bar{4}), u_4 = 2 - \sqrt{3}$	$ z - 2 ^2 = 3$
$A_3A_6(z) = \frac{17z - 3}{6z - 1}$	$w_{36} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} = (\bar{3}, \bar{6}), u_{36} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left z - \frac{3}{2}\right ^2 = \frac{7}{4}$
$A_6A_3(z) = \frac{17z - 6}{3z - 1}$	$w_{63} = 3 + \sqrt{7} = (\bar{6}, \bar{3}), u_{63} = 3 - \sqrt{7}$	$ z - 3 ^2 = 7$

Todas tienen en común que sus ejes pasan por ρ . Lo que veremos a continuación es que estas tres matrices son las únicas con esta propiedad y, más aún, que el eje de cualquier otra matriz reducida pasa por arriba del eje de alguna de éstas tres.

Llamemos \mathcal{A} al conjunto de códigos aritméticos correspondientes a matrices reducidas, esto es:

$$\mathcal{A} = \left\{ (n_1, \dots, n_m) : n_i \geq 3 \text{ y } \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i+1}} \leq \frac{1}{2} \text{ para toda } i \text{ (módulo } m) \right\},$$

ahora consideremos el siguiente algoritmo:

1. Si elegimos un elemento de \mathcal{A} y nos fijamos en las j para las cuales $n_j = 3$, entonces n_{j-1} y n_{j+1} son > 6 y se pueden decrecer en 1.
2. Cuando las n_j no son adyacentes a un 3, éstas se pueden decrecer en 1 (hasta llegar a 4).

Estos pasos anteriores se pueden repetir un número finito de veces hasta llegar a un código (A_0) en el cual ya no se pueden decrecer los elementos n_j y seguir estando en \mathcal{A} . Inversamente, partiendo de un código (A_0) al que ya no se pueden aplicar los pasos 1 y 2, podemos aplicar los pasos inversos hasta llegar al código original. Recordemos que el corolario 3.3.1 nos dice que siempre podemos encontrar una matriz con dicho código.

Notemos que con este algoritmo, la cantidad y posición de los números 3 en el código no se alteran. Si un código no contiene $n_j = 3$ se puede llevar al código (4).

Definición 4.3.4 *Se dice que un código es código esquina si ya no se le pueden aplicar los pasos 1 y 2 para que siga estando en \mathcal{A} .*

Si consideramos ahora un código esquina (A') distinto de (4), (3, 6) y (6, 3), entonces (A') contiene al menos un 3 y se puede ver como sucesiones de bloques de la forma $\{6, 3, 6, 3, \dots, 3, 6\}$ y de bloques $\{4, \dots, 4\}$ en las cuales puede haber códigos que no tengan bloques de cuatros. También podemos encontrarnos con algunos pares $\{6, 6\}$.

Ahora, sea (A) $\in \mathcal{A}$, hemos visto que (A) se puede llevar a un código esquina (A') mediante un número finito de pasos. Si vemos que A' es F -reducida, entonces aplicando el lema 4.3.2 un número finito de veces, tendremos que A es totalmente F -reducida.

Hay básicamente 9 posibilidades para los códigos esquina (salvo permutaciones cíclicas): dependen de si A' comienza y termina con alguno de A_6 , A_3 o A_4 pero veremos que 3 de estas posibilidades no corresponden a matrices reducidas. Los casos son los siguientes:

(i) $A' = A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_2} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m}$,
donde $n_i \geq 0$ y $n_m > 0$.

(ii) $A' = A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m} A_6 A_3 \dots A_6 A_3$,
donde $n_i \geq 0$.

(iii) $A' = A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m} A_6 A_3 \dots A_6 A_3 A_6$,
donde $n_i \geq 0$.

(iv) $A' = A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m} A_6 A_3 \dots A_6 A_3 A_6$,
donde $n_i \geq 0$.

(v) $A' = A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_2} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m}$,
donde $n_1 > 0$ y $n_m > 0$.

(vi) $A' = A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_2} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m} A_6 \dots A_3 A_6$,
donde $n_1 > 0$.

(vii) $A' = A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_2} A_6 \cdots A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m}$.

(viii) $A' = A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m} A_6 A_3 \dots A_6 A_3$,
donde $n_m > 0$.

(ix) $A' = A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m} A_6 A_3 \dots A_6 A_3$,
donde $n_1 > 0$.

Los casos (vii), (viii) y (ix) no están en \mathcal{A} puesto que hay elementos en el ciclo que tienen códigos con parejas $\{4, 3\}$ y $\{3, 3\}$ adyacentes. Para probar que cada uno de los otros casos es una matriz F -reducida necesitaremos de un lema más.

Lema 4.3.5 Para $x > 1$:

- (i) Si $m \geq 3$, entonces $A_m(x) > 1$.
- (ii) $A_3A_6(x) > A_6A_3(x)$.
- (iii) Si $n > 0$, entonces $A_4^n(x) > A_3(x)$.
- (iv) Si $n > 0$, entonces $(A_6A_3)^n(x) > A_4(x)$.

Demostración del lema 4.3.5.

(i) $A_m(x) = mx - 1 \geq m - 2 \geq 2$.

(ii) Las transformaciones correspondientes son:

$$A_6A_6(x) = \frac{35x - 6}{6x - 1} \text{ y } A_6A_3A_6(x) = \frac{96x - 17}{17x - 3}.$$

Si $x > 1$: $A_3A_6(x) > A_6A_3(x)$ si y sólo si

$$\frac{35x - 6}{6x - 1} > \frac{96x - 17}{17x - 3}$$

si y sólo si

$$(35x - 6)(17x - 3) > (6x - 1)(96x - 17),$$

si y sólo si $19x^2 + 51x + 1 > 0$ y esto último es claro si $x > 1$.

(iii) Según el corolario 3.2.9, para $w_4 > x > 1$, se tiene que

$$w_4 > \dots > A_4^n(x) > \dots > A_4^2(x) > A_4(x) > x$$

y como

$$A_4(x) = 4 - \frac{1}{x} > A_3(x) = 3 - \frac{1}{x},$$

se deriva la desigualdad en este caso. Si ahora $x > w_4$, por el corolario 3.2.9 tenemos:

$$x > A_4(x) > A_4^2(x) > \dots > A_4^n(x) > w_4,$$

y la desigualdad que buscamos se obtiene de $w_4 = 2 + \sqrt{3} > 3 > A_3(x)$.

(iv) La prueba es similar al inciso anterior, por el corolario 3.2.9 basta con ver que $A_6A_3(x) > A_4(x)$ para $w_{63} > x > 1$ y que $w_{63} > A_4(x)$ para $x > w_{63}$ \square

Ahora, regresando al teorema 4.3.3, veremos la prueba de que los casos (i) al (vi) corresponden a matrices reducidas, esto se hará demostrando que para alguna matriz A_0 F -reducida, los puntos fijos atractor y repulsor de A'

y de A_0 cumplen con $0 < u_{A'} < u_{A_0}$ y $w_{A_0} < w_{A'}$.

Demostración (casos (i) y (ii)):

$$A' = A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_2} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m},$$

donde $n_i \geq 0$ y $n_m > 0$, o

$$A' = A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m} A_6 A_3 \dots A_6 A_3 \text{ donde } n_i \geq 0.$$

Por el lema 4.3.5 (iii), cada $A_4^{n_i}$ con $n_i > 0$ en A' se puede sustituir por A_3 . Si tenemos casos de parejas $A_6 A_6$ en A' , por el lema 4.3.5 (ii), estos se pueden sustituir por un bloque $A_6 A_3 A_6$ y entonces obtenemos una matriz $A_0 = (A_6 A_3)^N$, para algun N entero positivo, que cumple

$$A'(x) > A_0(x) = (A_6 A_3)^N(x),$$

en particular

$$w_{A'} = A'(w_{A'}) > (A_3 A_6)^N(w_{A'}) \tag{4.4}$$

además $w_{A'} > w_{63}$ pues de otro modo, aplicando el corolario 3.2.9 tendríamos que $(A_6 A_3)^N$ es creciente para N y entonces $(A_6 A_3)^N(w_{A'}) > w_{A'}$ lo cual contradice la ecuación 4.4. Por lo tanto $w_{A'} > w_{63}$.

Ahora, por la proposición 2.2.7 se tiene que $1/u_{A'}$ tiene desarrollo en fracción continua "..." con el periodo en orden inverso al de $w_{A'}$ por lo que

$$\frac{1}{u_{A'}} = A_4^{n_m} A_6 A_3 \cdots A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \left(\frac{1}{u_{A'}}\right) > (A_3 A_6)^N \left(\frac{1}{u_{A'}}\right),$$

en el caso (i) y para el caso (ii):

$$\frac{1}{u_{A'}} = A_3 A_6 \cdots A_4^{n_m} A_6 \cdots A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \left(\frac{1}{u_{A'}}\right) > (A_3 A_6)^N \left(\frac{1}{u_{A'}}\right).$$

Para ambos casos usando el mismo procedimiento usado antes con $w_{A'}$, se tiene que $1/u_{A'} > w_{36}$, o lo que es lo mismo $u_{A'} < u_{63}$. Por lo tanto el eje de A' pasa por arriba del eje de $A_0 = A_{63}$ y entonces $\gamma_{A'}$ intersecta a F .

Caso (iii): $A' = A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m} A_6 A_3 \dots A_6 A_3 A_6$, donde $n_i \geq 0$. Por el lema 4.3.5 y como en el caso anterior, podemos sustituir $A_4^{n_i}$ por A_3 e insertar A_3 entre alguna pareja $A_6 A_6$ para obtener una matriz $A_0 = (A_6 A_3)^M A_6$ para algun M entero positivo que cumpla $A'(x) > A_0(x) = (A_6 A_3)^M A_6(x)$, también

$$w_{A'} > (A_6 A_3)^M A_6(w_{A'}) > A_4 A_6(w_{A'}) > A_3 A_6(w_{A'})$$

la última desigualdad se da por el lema 4.3.5 (iv). Como $w_{A'} > A_3 A_6(w_{A'})$, entonces $w_{A'} > w_{36}$ pues de lo contrario el corolario 3.2.9, implicaría que $A_3 A_6(w_{A'}) > w_{A'}$. Además

$$A_6(w_{A'}) = 6 - \frac{1}{w_{A'}} > 6 - \frac{1}{w_{36}} = 6 - \frac{1}{(3, 6, 3, 6, \dots)} = (\overline{6, 3}) = w_{63}.$$

Como la transformación $A_6 A_3$ es creciente para $x > 1/3$ entonces $(A_6 A_3)^M$ también lo es y así

$$(A_6 A_3)^M A_6(w_{A'}) > (A_6 A_3)^M(w_{63}).$$

Por lo tanto $w_{A'} > w_{63}$.

En el caso de $1/w_{A'}$ los argumentos son análogos y se tiene que $1/w_{A'} > w_{36} = 1/u_{36}$ por lo que $u_{63} > u_{A'}$. Por tanto el eje de A' pasa por arriba del eje de $A_3 A_6$ y entonces A' es F reducida.

Caso (iv) y (vi):

$$A' = A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m} A_6 A_3 \cdots A_6 A_3 A_6 \text{ donde } n_i \geq 0,$$

o

$$A' = A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m} A_6 \cdots A_3 A_6 \text{ donde } n_1 > 0.$$

Otra vez podemos acotar inferiormente bloques $A_4^{n_i}$ con A_3 e insertar dichas matrices entre $A_6 A_6$ y encontrar un número natural K tal que para toda $x > 1$

$$A'(x) > (A_3 A_6)^K(x)$$

por un procedimiento similar al de la prueba de (i) y (ii) se tiene que $w_A > w_{36}$. También

$$1/u_{A'} = A_6 A_3 A_6 \cdots A_4^{n_m} \cdots A_4^{n_1} \cdots A_6 A_3 A_6 > (A_6 A_3)^N(1/u_{A'})$$

o

$$1/u_{A'} = A_6 A_3 A_6 \cdots A_4^{n_m} \cdots A_4^{n_1} > (A_6 A_3)^N(1/u_{A'})$$

y entonces $1/u_{A'} > w_{63} = 1/u_{36}$. Por lo tanto $u_{A'} < u_{36}$. En consecuencia $\gamma_{A'}$ pasa por arriba de $\gamma_{A_3 A_6}$, por lo que A' es F -reducida.

Caso (v): $A' = A_4^{n_1} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_2} A_6 A_3 A_6 \cdots A_6 A_4^{n_m}$ donde $n_1 > 0$ y $n_m > 0$. Por el lema 4.3.5, podemos acotar A' como se ha hecho en los incisos anteriores, para obtener esta vez:

$$A'(x) > A_4^{n_1} (A_6 A_3)^R(x) > A_4^{n_1+1}(x),$$

para alguna R natural. La última desigualdad se tiene del lema 4.3.5 (iv). Se tiene también que $w_{A'} > A_4^{n_1+1}(w_{A'})$. Por el corolario 3.2.9: $w_{A'} > w_4$ y de la misma manera $1/u_{A'} > w_4$, lo cual implica que $u_{A'} < 1/w_4 = u_4$. En consecuencia $\gamma_{A'}$ pasa por arriba de γ_{A_4} y entonces A' es F -reducida. \square

Corolario 4.3.6 *Las únicas matrices totalmente F -reducidas cuyos ejes pasan por el vértice de F ρ , son A_4 , A_3A_6 y A_6A_3*

Demostración. En la demostración anterior, se probó que cualquier otra matriz diferente a A_4 , A_3A_6 y A_6A_3 tiene ejes que pasan estrictamente por arriba del eje de alguna de estas matrices. Por lo cual no pueden pasar por el vértice ρ . \square

A

La Geometría Hiperbólica Plana

A.1 El plano hiperbólico

Trabajaremos en el plano extendido

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

con la topología inducida por la biyección que da la proyección estereográfica $\phi: S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$\phi(x, y, z) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) & z \neq 1 \\ \infty & z = 1, \end{cases}$$

donde S^2 es la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 .

El grupo de automorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$, es decir, las biyecciones meromorfas de $\hat{\mathbb{C}}$ es

$$\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d}; a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc \neq 0 \right\},$$

que también es conocido como el **grupo de transformaciones de Möbius**. Cada elemento $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ se puede representar por una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de $GL(2, \mathbb{C})$ o de $SL(2, \mathbb{C})$ si se requiere. La representación no es única: en el primer caso cualquiera $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hace que λA dé la misma transformación.

En el segundo caso, con $\lambda = \pm 1$ se tendrá la misma transformación, por lo que

$$PGL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C}) / \{\lambda I; \lambda \neq 0\}$$

y

$$PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\}.$$

cumplen que:

$$Aut(\hat{\mathbb{C}}) = PGL(2, \mathbb{C}) = PSL(2, \mathbb{C}).$$

A los grupos $GL(2, \mathbb{C})$ y $SL(2, \mathbb{C})$ se les puede dar la topología que se hereda de encajarlos en \mathbb{C}^4 y a $PGL(2, \mathbb{C})$ y $PSL(2, \mathbb{C})$ se les da entonces la topología del espacio cociente. Estos grupos resultan ser grupos topológicos [Ra94, p.50], y cada matriz A tiene norma

$$\|A\| = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \quad (A.1)$$

Gran parte del trabajo se desarrolla en $PSL(2, \mathbb{R})$ que es el subgrupo de transformaciones de $PSL(2, \mathbb{C})$, con coeficientes reales, esto es, transformaciones de la forma

$$Tz = \frac{az + b}{cz + d},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$. Este grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ tiene la propiedad de que actúa en $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ de la siguiente manera

- (i) Cada $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ se comporta como un automorfismo (una biyección conforme) de \mathcal{H} .
- (ii) $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa transitivamente en \mathcal{H} , es decir, dados $z, w \in \mathcal{H}$ existe un elemento $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $Tz = w$.
- (iii) $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa doblemente transitivamente en $\partial\mathcal{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, esto es, dadas dos parejas $\{z_1, z_2\}, \{w_1, w_2\} \in \partial\mathcal{H}$, existe $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ con $Tz_i = w_i$ $i = 1, 2$. [Jo87, p.218].

Los elementos T de $PSL(2, \mathbb{R})$ se clasifican por medio del cuadrado de su traza, $Tr^2(T) = tr^2(A)$, (donde $A \in SL(2, \mathbb{R})$ es una matriz que lo representa) en:

- (i) Parabólicos, si $Tr^2(T) = 4$
- (ii) Hiperbólicos si $Tr^2(T) > 4$
- (iii) Elípticos si $Tr^2(T) < 4$

La clasificación se da también por medio de sus puntos fijos, es decir, los puntos que cumplan $T(z) = z$. Si

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

z es punto fijo de T si y sólo si $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Las posibilidades para las raíces son entonces: una sola raíz real, cuando el discriminante

$$D = (d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a+d)^2 - 4$$

es cero, dos raíces reales cuando $D > 0$ y dos raíces complejas conjugadas cuando $D < 0$.

La clasificación es la siguiente:

- (i) T es parabólica si y sólo si T tiene un único punto fijo real.
- (ii) T es hiperbólica si y sólo si T tiene dos puntos fijos reales
- (iii) T es elíptica si y sólo si T tiene dos puntos fijos complejos y conjugados, [Jo87, p.219].

Se puede ver que toda transformación $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ es conjugada a traslaciones, homotecias o rotaciones de acuerdo con que T sea parabólica, hiperbólica o elíptica, respectivamente:

- (i) Supongamos que T es parabólica con punto fijo $u \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; si $u \neq \infty$, conjugando T con la transformación

$$P(z) = \frac{z - z_0}{z - u}, \text{ con } z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{u\}$$

se tiene que PTP^{-1} es parabólica y fija a ∞ , por lo cual es de la forma $PTP^{-1}(z) = z \pm t$, con $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; conjugando con la transformación $Q(z) = z/|t|$ se tiene que

$$U(z) = QPTP^{-1}Q^{-1}(z) = \frac{|t|z + t}{|t|} = z \pm 1$$

y el signo depende de si $t > 0$ o $t < 0$. Recordemos además que la traza se preserva mediante conjugaciones. Haciendo los cálculos se puede ver que $U(z) = z + 1$ sólo es conjugada a traslaciones de la forma $z + b$, con $b > 0$ y que $U(z) = z - 1$ sólo es conjugada a traslaciones de la forma $z - b$, ($b > 0$). En consecuencia los

elementos parabólicos son conjugados a dos clases de traslaciones.

(ii) Si T es hiperbólico con puntos fijos $u, w \in \mathbb{R}$ ($u \neq w$), haciendo

$$P(z) = \frac{z - u}{z - w}$$

se tiene que PTP^{-1} fija a 0 e ∞ y entonces PTP^{-1} es de la forma

$$U(z) = \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

(iii) Si T es un elemento elíptico, sus puntos fijos $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ son conjugados; supongamos que $w_1 = r + it$, entonces la transformación $P(z) = tz + r$ manda i en w_1 , también $-i$ en w_2 . La transformación $W(z) = P^{-1}TP$, fija a i y a su conjugado, entonces

$$\frac{W(z) - i}{W(z) + i} = \lambda \frac{z - i}{z + i}$$

Además W deja invariante a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, por lo que existe un elemento $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $W(\alpha) \in \mathbb{R}$ y entonces

$$\left| \frac{W(\alpha) - i}{W(\alpha) + i} \right| = \left| \frac{\alpha - i}{\alpha + i} \right| = 1$$

por lo tanto $|\lambda| = 1$ y entonces $\lambda = e^{i\theta}$, con $0 \leq \theta < 2\pi$. Por lo que T es conjugada, a W , donde

$$\frac{W(z) - i}{W(z) + i} = e^{i\theta} \frac{z - i}{z + i} \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Si hacemos

$$z' = \frac{z - i}{z + i} \quad \text{y} \quad w' = \frac{W(z) - i}{W(z) + i}$$

se tiene que $w' = e^{i\theta} z'$. Así, dentro de $PSL(2, \mathbb{C})$, T es conjugada a una rotación del disco en un ángulo θ .

A.2 La geometría hiperbólica

El espacio \mathcal{H} se trabajará con una estructura geométrica, una estructura de geometría hiperbólica. La forma más fácil de darle esta estructura es vía una

métrica riemanniana, es decir, vía una función ϕ que a cada punto $z \in \mathcal{H}$ le asocia un producto interior positivo definido $\phi(z)$, es decir una función bilineal, $\phi(z) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\phi(z)(x, x) > 0$ si $x \neq 0$.

En concreto la métrica hiperbólica en \mathcal{H} es

$$\phi(z)(x, y) = \frac{x \cdot y}{(\operatorname{Im}(z))^2}$$

Con esta métrica podemos definir la longitud hiperbólica en \mathcal{H} de una curva que sea diferenciable en pedazos, precisemos si

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$$

es una curva diferenciable en pedazos, la longitud hiperbólica es:

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt.$$

Es fácil comprobar que las transformaciones $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ conservan la longitud hiperbólica, es decir que:

$$h(T(\gamma)) = h(\gamma) \quad \forall T \in PSL(2, \mathbb{R}) \quad \forall \gamma \in C^1(I, \mathcal{H}).$$

Ahora se está en camino de definir de una manera natural una métrica, la **métrica hiperbólica**:

$$\rho(z, w) = \inf \{ h(\gamma) \mid \gamma : I \rightarrow \mathcal{H}, \gamma \text{ es una curva de clase } C^1 \text{ por pedazos y } \gamma(0) = z, \gamma(1) = w \}.$$

Desde luego ρ resulta ser una métrica en \mathcal{H} , ver [Jo87, p.224], que induce la misma topología que aquella dada por la métrica euclidiana. Las geodésicas en esta geometría resultan ser arcos de semicírculos con centro en el eje real o segmentos de líneas (euclidianas) perpendiculares al eje real (teorema A.3.2). Las "líneas" en esta geometría, que llamaremos \mathcal{H} -líneas, son semicírculos con centro en el eje real o líneas perpendiculares al eje real. Observe que toda \mathcal{H} -línea tiene dos extremos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en el caso de una semicircunferencia serían dos números reales, en el caso de una línea perpendicular al semieje, un punto es real y el otro es ∞ .

El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa de manera transitiva en el conjunto de las \mathcal{H} -líneas, es decir, dadas dos \mathcal{H} -líneas l_1 y l_2 existe $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ con $T(l_1) = l_2$. [Jo p.224]

Resulta también que con esta métrica, todas las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ son isometrías, es decir, para toda $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ y para toda $z, w \in \mathcal{H}$,

$$\rho(Tz, Tw) = \rho(z, w).$$

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

A.3 Cálculo de la longitud hiperbólica

Lema A.3.1 Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$,

(a) El segmento de \mathcal{H} -línea que une los puntos ia e ib es el segmento sobre el eje imaginario que los une.

(b) $\rho(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}$

Demostración. Sean ia e ib , con $b > a$, dos puntos en \mathcal{H} . Sea $s : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$ el segmento del eje imaginario que los une, esto es $s(t) = (0, y(t))$, con $y(0) = a$ y $y(1) = b$ y además $dy/dt > 0$. Entonces

$$h(s) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{dy}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}.$$

Supongamos ahora que $r : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$, $r(t) = (u(t), v(t))$ es otra curva diferenciable que une a ia con ib , se tiene

$$h(r) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}{v(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{dv}{dt}\right|}{v(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{dv}{v(t)} dt = h(s)$$

La igualdad se da si y sólo si $du/dt = 0$ y $dv/dt \geq 0$, cuando éstas existan. Como $r(t)$ es diferenciable por pedazos, entonces r tiene que ser el segmento de recta que une a ia con ib . \square

Teorema A.3.2 Las geodésicas en \mathcal{H} son arcos de semicírculos y segmentos de rectas ortogonales al eje real.

Demostración. Sean z_1 y z_2 en \mathcal{H} , si ambos están en el eje imaginario, por el lema anterior se tiene que la geodésica que los une es el segmento del eje que los une. Análogamente se prueba que si z_1 y z_2 tienen la misma parte real, entonces el único segmento de \mathcal{H} -línea que los une es el segmento de recta (euclidiana) que los une. Supongamos ahora que $Re(z_1) \neq Re(z_2)$, y que la mediatriz del segmento que une z_1 con z_2 corta al eje real en z_0 , entonces el semicírculo Q con centro en z_0 y que pasa por z_1 y z_2 , es la \mathcal{H} -línea que determinan z_1 y z_2 . Sean z_1^* y z_2^* las intersecciones del semicírculo Q con el eje real (figura A.1.)

Si consideramos a

$$S(z) = \frac{z - z_1^*}{z - z_2^*}$$

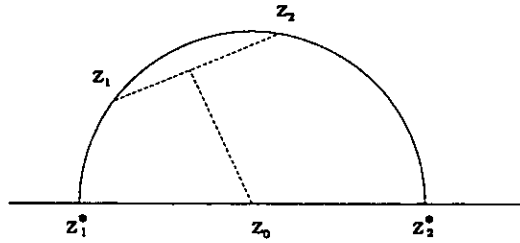


Figura A.1: La \mathcal{H} -línea que une a z_1 con z_2

tenemos que $S \in PSL(2, \mathbb{R})$, $S(z_1^*) = 0$ y $S(z_2^*) = \infty$ y S manda el semicírculo Q en el eje imaginario, y si $S(z_1) = ia$ y $S(z_2) = ib$, tenemos que:

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(S(z_1), S(z_2)) = \rho(ia, ib) = \log \left| \frac{b}{a} \right|.$$

Por lo tanto la geodésica que une a z_1 con z_2 es el arco del semicírculo Q . \square

Lema A.3.3 (a) Si z_1, z_2, z_1^*, z_2^* son como antes, la razón cruzada

$$\eta(z_1, z_2) = (z_1, z_2^*; z_2, z_1^*) = \frac{(z_1 - z_2^*)(z_2 - z_1^*)}{(z_2^* - z_2)(z_1^* - z_1)}$$

es \mathcal{H} -invariante, esto es, para toda $T \in PSL(2, \mathbb{R})$,

$$(z_1, z_2^*; z_2, z_1^*) = (T(z_1), T(z_2^*); T(z_2), T(z_1^*)).$$

(b) $\tau(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2^*} \right|$ es \mathcal{H} -invariante.

Luego

$$\begin{aligned} \eta(z_1, z_2) &= (z_1, z_2^*; z_2, z_1^*) = (S(z_1), S(z_2^*); S(z_2), S(z_1^*)) \\ &= (ia, \infty, ib, 0) = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

y entonces

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \eta(z_1, z_2).$$

Si $a < b$,

$$\begin{aligned}\tau(z_1, z_2) = \tau(ia, ib) &= \left| \frac{ia - ib}{ia - i\bar{b}} \right| = \left| \frac{a - b}{a + b} \right| \\ &= \frac{b - a}{b + a} = \frac{b/a - 1}{b/a + 1} = \frac{e^{\rho(z_1, z_2)} - 1}{e^{\rho(z_1, z_2)} + 1},\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\rho(z_1, z_2) &= \ln \left\{ \frac{1 + \tau(z_1, z_2)}{1 - \tau(z_1, z_2)} \right\} \\ &= \ln \left\{ \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|} \right\}.\end{aligned}$$

Como

$$\frac{e^u - 1}{e^u + 1} = \tanh\left(\frac{u}{2}\right)$$

y

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{\tanh^2(u/2)}{1 - \tanh^2(u/2)},$$

tenemos que

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \frac{\tau(z, w)^2}{1 - \tau(z, w)^2} = \frac{|z - w|^2}{|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2}$$

pero

$$\begin{aligned}|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2 &= (z - \bar{w})(\bar{z} - w) - (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = -(z - \bar{z})(w - \bar{w}) \\ &= 4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w),\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \frac{|z - w|^2}{4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}. \quad (\text{A.2})$$

A.4 Grupos Fuchsianos

Hemos mencionado que $PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo topológico que actúa en \mathcal{H} . El concepto de grupo Fuchsiano está relacionado directamente con que $PSL(2, \mathbb{R})$ tenga esta propiedad.

Definición A.4.1 *Un grupo Fuchsiano es un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.*

Definición A.4.2 Sea G un grupo de homeomorfismos de un espacio topológico Y . Diremos que G actúa propiamente discontinuamente en Y si para cada $y \in Y$, donde existe una vecindad V de y tal que $g(V) \cap V \neq \emptyset$ para $g \in G$, se tiene que $g(y) = y$.

Teorema A.4.3 Sea $K \subset \mathcal{H}$ un compacto. Para un $w \in \mathcal{H}$ fijo, el conjunto

$$G = \{T \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid T(w) \in K\}$$

es compacto.

Corolario A.4.4 Sea $K \subset \mathcal{H}$ un compacto. Si Γ es un grupo Fuchsiano, entonces el conjunto

$$\{T \in \Gamma \mid T(w) \in K\}$$

es finito.

Teorema A.4.5 Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$,

(a) Γ es un grupo Fuchsiano si y sólo si Γ actúa propiamente discontinuamente en \mathcal{H} .

(b) Si Γ es un grupo Fuchsiano y si $p \in \mathcal{H}$ es un punto fijo de algún $g \in \Gamma$, entonces existe una vecindad W de p tal que ningún otro punto de W es fijado por elementos de $\Gamma \setminus \{I\}$.

Definición A.4.6 Sea Λ un grupo que actúa en un espacio Y y $z \in Y$, la Λ -órbita de z es el conjunto de todas las imágenes $g(z)$, donde $g \in \Lambda$ y se denota como Λ_z .

Corolario A.4.7 Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$. Γ es un grupo Fuchsiano si y sólo si para cada $z \in \mathcal{H}$, Γ_z (la Γ -órbita de z) es un subconjunto discreto de \mathcal{H} .

Definición A.4.8 Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$, consideremos a $\{T_n\}$ una sucesión de distintos elementos en Γ , el conjunto de todos los posibles puntos límite de sucesiones en Γ , $L(\Gamma)$, se llama el conjunto límite de Γ .

Por el corolario anterior, para $z \in \mathcal{H}$, $T_n(z)$ tiene un punto límite en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Se dice que Γ es del primer tipo si $L(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y Γ es del segundo tipo si $L(\Gamma) \subsetneq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

El grupo modular

$$\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}$$

es del primer tipo.

Definición A.4.9 Sea Γ un grupo Fuchsiano y sea F un conjunto cerrado¹ de \mathcal{H} . F es una región fundamental para Γ si

$$(i) \bigcup_{T \in \Gamma} T(F) = \mathcal{H}$$

$$(ii) F^\circ \cap T(F^\circ) = \emptyset \quad \forall T \in \Gamma \setminus \{I\} \text{ donde } F^\circ \text{ es el interior de } F.$$

Definición A.4.10 Sea Γ un grupo Fuchsiano y $p \in \mathcal{H}$ un elemento que no es fijado por ningún elemento de $\Gamma \setminus \{I\}$. Definimos la región de Dirichlet para Γ centrada en p como el conjunto:

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathcal{H} : \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p)) \text{ para toda } T \in \Gamma\},$$

es decir

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathcal{H} : \rho(z, p) \leq \rho(T(z), p) \text{ para toda } T \in \Gamma\}$$

Como $\sinh(\alpha)$ es una función monótona creciente para $\alpha > 0$, y por la ecuación (A.2), se tiene que

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathcal{H} : \frac{|z - p|^2}{\text{Im}(z)} \leq \frac{|T(z) - p|^2}{\text{Im}(T(z))} \text{ para toda } T \in \Gamma\}$$

Si

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ con } ad - bc = 1,$$

entonces

$$\text{Im}(T(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

y

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathcal{H} : \frac{|T(z) - p|}{|z - p|} \geq \frac{1}{|cz + d|} \text{ para toda } T \in \Gamma\} \quad (\text{A.3})$$

Notemos que la definición tiene sentido porque el teorema A.4.5 asegura que los puntos fijos de $\Gamma \setminus \{I\}$ son aislados.

Teorema A.4.11 Sea Γ un grupo Fuchsiano y p un punto que no es fijado por ningún elemento de $\Gamma \setminus \{I\}$, entonces $D_p(\Gamma)$ es una región fundamental conexas para Γ

¹ Hay autores como Ratcliffe o Apostol [Ra94, p.243], [Ap76, p.30] que definen región fundamental como un abierto, nosotros trabajaremos con la definición de acuerdo con Jones [Jo87, p.240].

Un ejemplo importante es el caso en que Γ es el grupo modular, veremos ahora una región de Dirichlet para éste.

Proposición A.4.12 *La región de Dirichlet para el grupo modular, $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$, centrada en el punto ki , con $k > 1$ es:*

$$D_p(\Gamma) = \left\{ z \in \mathcal{H} \mid |z| \geq 1, |Re(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Demostración. Primero notemos que $p = ki$ no es punto fijo de elementos de $PSL(2, \mathbb{Z})$ porque los puntos fijos de $T \in PSL(2, \mathbb{Z})$

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

cumplen con la ecuación

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c},$$

luego

$$ki = \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}$$

implica que $a = d = 0$ y que $c = k = 1$, lo que contradice a $k > 1$.

Ahora elegimos $T(z) = z \pm 1 \in PSL(2, \mathbb{Z})$, para ambas transformaciones $c = 0$ y $d = 1$, entonces la desigualdad (A.3) nos lleva a que

$$|z \pm 1 - ki| \geq |z - ki|$$

por lo que z está más cerca de ki que de $ki \pm 1$.

Por otro lado, para $T(z) = -1/z$, $a = b = c = 1$ y $d = 0$ la desigualdad (A.3) queda como

$$\frac{\left| -\frac{1}{z} - ki \right|}{|z - ki|} \geq \frac{1}{|z|} \text{ si y sólo si } |-1 + kiz| \geq |z - ki|$$

elevando al cuadrado y desarrollando se tiene

$$1 + k^2|z|^2 + kiz - ki\bar{z} \geq |z|^2 + zki - k\bar{z}i + k^2$$

si y sólo si

$$|z|^2(k^2 - 1) \geq k^2 - 1 \text{ si y sólo si } |z|^2 \geq 1.$$

Si definimos a F como

$$F = \{z \in \mathcal{H} : |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \text{ y } |z| \geq 1\},$$

tenemos que $D_{ki}(\Gamma) \subseteq F$, para demostrar la igualdad de estos necesitamos de dos lemas.

Lema A.4.13 Para $k > 1$, D_{ki} es simétrico respecto al eje imaginario, eso es, si $z \in D_{ki}(\Gamma)$, entonces $-\bar{z} \in D_{ki}(\Gamma)$

Demostración. Sea $A(z) = -\bar{z}$ la reflexión en el eje imaginario, A también es una \mathcal{H} -isometría, (aunque no preserva la orientación) y $A = A^{-1}$. Si $T \in \Gamma$ con

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ con } ad - bc = 1,$$

entonces

$$A^{-1}TA(z) = \frac{az - b}{-cz + d} \in PSL(2, \mathbb{Z}).$$

Como

$$\operatorname{senh}^2 \frac{1}{2}(\rho(A(z), ki)) = \frac{|\overline{-z} - ki|^2}{4\operatorname{Im}(\overline{-z})\operatorname{Im}(ki)} = \frac{|-z + ki|^2}{4\operatorname{Im}(\overline{-z})\operatorname{Im}(ki)} = \operatorname{senh}^2 \frac{1}{2}(\rho(z, ki))$$

y puesto que $\operatorname{senh}^2(w) = \cosh(2w) - 1$ es una función inyectiva, se tiene que

$$\rho(A(z), ki) = \rho(z, ki).$$

Ahora, si $z \in D_{ki}$, como $A(ki) = ki$,

$$\begin{aligned} \rho(A(z), ki) = \rho(z, ki) &\leq \rho(z, A^{-1}TA(ki)) \\ &= \rho(A(z), TA(ki)) = \rho(A(z), T(ki)). \end{aligned}$$

Y entonces si $z \in D_{ki}(\Gamma)$, también lo está $A(z)$. □

Lema A.4.14 Si $z, w \in F$ y $z = P(w)$ para alguna $P \in \Gamma \setminus \{I\}$, entonces z y w están en la frontera de F , más aún $z = w$ o bien z y w son simétricos respecto al eje imaginario.

Demostración. Primero notemos que si

$$P(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \text{ con } \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

y $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$, entonces

$$|\gamma z + \delta|^2 = \gamma^2 |z|^2 + \delta^2 + 2\gamma\delta \operatorname{Re}(z) \geq \gamma^2 + \delta^2 - \gamma\delta$$

Si $-\gamma\delta \geq 0$ entonces $\gamma^2 + \delta^2 - \gamma\delta \geq 1$ y si no $\gamma^2 + \delta^2 - \gamma\delta = (\gamma - \delta)^2 + \gamma\delta \geq 1$.
Donde la igualdad se da si y sólo si

$$(\gamma - \delta)^2 + \gamma\delta = 1 \quad (\text{A.4})$$

si y sólo si

$$\gamma^2 |z|^2 + 2\gamma\delta \operatorname{Re}(z) + \delta^2 = 1 \quad (\text{A.5})$$

Entonces

$$\operatorname{Im}(w) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|\gamma z + \delta|^2} \leq \operatorname{Im}(z).$$

Al hacer el mismo procedimiento con la transformación P^{-1} se tiene:

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|\gamma' z + \delta'|^2} \leq \operatorname{Im}(w).$$

Así que $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w)$ y si restamos la ecuación (A.5) a (A.4) obtenemos

$$\gamma^2(|z|^2 - 1) + \gamma\delta(2\operatorname{Re}(z) + 1) = 0. \quad (\text{A.6})$$

De la ecuación (A.4) se tiene que $\gamma, \delta \in \{1, 0, -1\}$, por lo que consideraremos los siguientes casos:

(i) Si $\gamma = 0$, entonces $\delta = \pm 1$ y como $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, entonces $\alpha = 1$ y $P(z) = z \pm \beta$. Para que z y $z \pm \beta = w$ esten en F , $\beta = 1$ o $\beta = 0$, en el primer caso se tiene que

$$|\operatorname{Re}(z)| = |\operatorname{Re}(w)| = \frac{1}{2}$$

y en el segundo caso $z = w$.

(ii) Si $\delta = 0$, entonces $\gamma = \pm 1$ y $\beta = \mp 1$, además por (A.6), $|z|^2 = 1$ y

$$P(z) = \frac{\alpha z \mp 1}{\pm z} = \pm \alpha - \bar{z},$$

otra vez como $P(z) \in F$ entonces $\alpha = -1, 0, 1$. Si $\alpha = 0$, entonces $P(z) = -1/z$ por lo que z y w se encontrará en el círculo unitario y serán simétricos respecto al eje imaginario. Si $\alpha = \pm 1$, entonces $\operatorname{Re}(z) = \pm 1/2$, en consecuencia $z = \pm 1/2 + (\sqrt{3}/2)i$.

(iii) Si $\gamma = \delta = \pm 1$ la ecuación (A.6) implica que

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{-|z|^2}{2},$$

así que $|z| = 1$ y entonces $\operatorname{Re}(z) = -1/2$. En consecuencia $z = -1/2 + (\sqrt{3}/2)i$, como $\operatorname{Im}(P(z)) = (\sqrt{3}/2)i$ entonces $P(z) = z$ o $P(z) = 1/2 + (\sqrt{3}/2)i$. Por lo tanto $D_{ki}(\Gamma) = F$. \square

Una de las propiedades importantes que pediremos para una región fundamental es que, para cada uno de sus puntos, sus órbitas no tengan puntos de acumulación, este es el siguiente concepto.

Definición A.4.15 Sea F una región fundamental, se dice que F es localmente finita si para cada $a \in F$ existe una vecindad V_a tal que $V_a \cap T(F) \neq \emptyset$ sólo para una cantidad finita de elementos T de Γ .

Teorema A.4.16 Las regiones de Dirichlet son localmente finitas

Demostración. Sea $D_p(\Gamma)$ una región de Dirichlet y sea $a \in D_p(\Gamma)$. Sea K una vecindad de a , la cual podemos suponer que es compacta. Supongamos ahora que existe una sucesión $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos en Γ tales que $K \cap T_j(F) \neq \emptyset$ para cada j . Veremos que esto contradice que Γ sea discreto.

Sea $\delta = \max\{\rho(p, z); z \in K\}$, como K es compacta, δ existe y es finita. Sea $w_j \in K \cap T_j(F)$, entonces existen $z_j \in F$ tales que $w_j = T_j(z_j)$. Por la desigualdad del triángulo, para toda j ,

$$\begin{aligned} \rho(p, T_j(p)) &\leq \rho(p, w_j) + \rho(w_j, T_j(p)) = \rho(p, w_j) + \rho(z_j, p) \\ &\leq \rho(p, w_j) + \rho(w_j, p) \text{ porque } z_j \in D_p(\Gamma), \\ &\leq 2\delta \end{aligned}$$

Por lo que los $T_j(p)$ se encuentran en la bola hiperbólica centrada en p y de radio 2δ , cuya cerradura es un compacto en \mathcal{H} y contiene una sucesión infinita de imágenes de p , esto contradice el corolario A.4.4. \square

De la definición, se tiene que una región de Dirichlet $D_p(\Gamma)$ se obtiene de la intersección de la cerradura de semiplanos acotados por las \mathcal{H} -líneas mediatrices entre p y $T(p)$, con $T \in \Gamma$ por lo que $D_p(\Gamma)$ está acotado por \mathcal{H} -líneas y a veces por segmentos del eje real. Como los elementos de Γ mapean \mathcal{H} -líneas en \mathcal{H} -líneas, la intersección de $D_p(\Gamma)$ con su imagen es un punto p en cuyo caso se dice que p es un vértice de F , o un segmento l

de \mathcal{H} -línea, en cuyo caso se dice que l es un lado de F . Alternativamente también se consideran como vértices a los puntos fijos de elementos elípticos de orden 2.

Los vértices de una región de Dirichlet F , son aislados pues de otra manera podríamos encontrar: (i) una sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ de estos que converja a algún w_0 , (ii) una vecindad V_{w_0} y (iii) $T_n \in \Gamma$, tales que $w_n \in T_n(F) \cap V_{w_0}$, lo cual contradice que F sea localmente finita.

Ejemplo: Cuando Γ es el grupo modular, si pensamos en $F = D_{ki}(\Gamma)$, con $k > 1$, sus lados son:

$$\begin{aligned} v_1 &= \{z \in \mathcal{H} \mid \operatorname{Re}(z) = -1/2 \text{ y } |z| \geq 1\} \\ v_2 &= \{z \in \mathcal{H} \mid \operatorname{Re}(z) = 1/2 \text{ y } |z| \geq 1\} \text{ y} \\ a &= \{z \in \mathcal{H} \mid |z| = 1, \pi/4 \leq \arg(z) \leq 3\pi/4\} \end{aligned}$$

y sus vértices son ρ , $\rho - 1$ e ∞ .

Los lados de una región fundamental para un grupo Fuchsiano Γ estan relacionados por parejas de la siguiente manera: si l es un lado de F y si $T(l)$ también es un lado de F , donde $T \in \Gamma$, entonces se dice que l y $T(l)$ son **lados congruentes**. Además $T(l) = F \cap T(F)$. Los lados congruentes en F son sólo parejas pues si suponemos que existe otro lado l_1 en F y $T_1 \in \Gamma$ tal que $T_1(l) = l_1$, entonces $T_1(l) = F \cap T_1(F)$ por lo cual $l = T_1^{-1}(F) \cap F = T^{-1}(F) \cap F$ y entonces $T = T_1$.

Si un lado l de F contiene a p , un punto fijo de algún elemento elíptico de Γ , entonces T intercambia los segmentos de este lado separados por p . En este caso se dice que l es congruente con él mismo. Alternativamente se considera a p como un vértice y a s como dos lados separados por p .

En el ejemplo de la región fundamental $D_{ki}(\Gamma)$, para Γ el grupo modular, además de ser un triángulo, ésta se puede ver también como un cuadrilátero con vértices en ∞ , i , ρ y $\rho - 1$ y cuyos lados son v_1 , v_2 , $a_1 =$ el arco que va de $\rho - 1$ a i y $a_2 =$ el arco que va de i a ρ . Para ésta los lados congruentes son v_1 y v_2 , relacionados con la transformación $z \mapsto z + 1$ y los lados a_1 y a_2 , que son intercambiados por la transformación $z \mapsto -1/z$.

Lema A.4.17 Sea F una región de Dirichlet para Γ y sea $\{V_k\}$ cualquier subconjunto de Γ , entonces

$$\bigcup_k V_k(F)$$

es un cerrado.

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos en $\bigcup_k V_k(F)$, que converge a un $z_0 \in \mathcal{H}$. Como las imágenes de F bajo Γ cubren a \mathcal{H} , entonces existe $A \in \Gamma$ tal que $z_0 \in A(F)$. Como F es localmente finita, existe una vecindad, V_{z_0} de z_0 que intersecta sólo a una cantidad finita de $T(F)$, con $T \in \Gamma$ y en particular intersecta a un número finito de $V_j(F)$, cuya unión es un cerrado en \mathcal{H} . En consecuencia $\{z_j\}$ debe contener una subsucesión convergente a z_0 que se queda contenida en algún $V_m(F)$, el cual es cerrado, por lo tanto $z_0 \in \bigcup_k V_k(F)$ y entonces $\bigcup_k V_k(F)$ es un conjunto cerrado. \square

Teorema A.4.18 *Sea Γ un grupo Fuchsiano. Sea $D_p(\Gamma)$ una región de Dirichlet para Γ y sea $\{T_j\}$ el subconjunto de los elementos que aparean los lados de $D_p(\Gamma)$. Entonces el conjunto $\{T_j\}$ genera a Γ .*

Demostración. Llamemos Λ al subgrupo generado por $\{T_j\}$, probaremos que $\Lambda = \Gamma$. Supongamos que $R_1 \in \Lambda$ y que $R_1(F)$ y $R_2(F)$ comparten un lado l_1 , esto es $R_1(F) \cap R_2(F) = l_1$, entonces $R_1^{-1}R_2(F) \cap F = R_1^{-1}(l_1)$, por lo que $R_1^{-1}R_2(F)$ y F tienen un lado en común, y $R_1^{-1}R_2 = T_k \in \{T_j\}$, por lo cual $R_2 = R_1T_k$ es un elemento de Λ . Si ahora $R_0(F)$ comparte un vértice v con $R_1(F)$, entonces la bola cerrada con centro en v y radio δ , con δ suficientemente pequeño, es un compacto de \mathcal{H} que intersecta sólo a una cantidad finita de imágenes de F , $R_n(F)$, con $n = 0, 1, \dots, m$, debido a que F es localmente finita. Así que podemos repetir el argumento anterior a lo más $m - 1$ veces para los $R_n(F)$ adyacentes a $R_1(F)$ y llegar a que $R_0 \in \Lambda$.

Si hacemos $U = \bigcup_{R \in \Lambda} R(F)$ y $V = \bigcup_{S \in \Gamma \setminus \Lambda} S(F)$, por el lema anterior (A.4.17) se tiene que U y V son cerrados, y $U \neq \emptyset$, así que $V = \emptyset$, de otra manera desconectarían a \mathcal{H} . Por lo tanto $\Gamma = \Lambda$ \square

Observación A.4.19 *Este resultado nos dice que en el ejemplo en que Γ es el grupo modular, un conjunto de generadores de éste son las transformaciones $T(z) = z + 1$ y $S(z) = -1/z$.*

Finalmente veamos en esta sección un algoritmo sencillo que sirve para expresar a cualquiera $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$, en términos de

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $A \in SL(2, \mathbb{Z})$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con } ad - bc = 1$$

notemos que

$$AT^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & an + b \\ c & cn + d \end{pmatrix}$$

y

$$AS = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

El algoritmo consiste en multiplicar A por T^{n_1} , con $n_1 \in \mathbb{Z}$ que haga que $|cn + d| < c$, pues entonces la matriz

$$A_1 = AT^{n_1}S = \begin{pmatrix} a & an + b \\ c & cn + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an + b & -a \\ cn + d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

cumple con $|c_1| < c$, como $c \in \mathbb{Z}$, repitiendo este procedimiento, existirá una $m > 0$ tal que $c_m = 0$. Supongamos ahora que hemos llegado a una matriz en la que $c_m = 0$, entonces $a_m d_m - b_m c_m = a_m d_m = 1$ por lo cual $a_m = d_m = \pm 1$, así que

$$A_m = \begin{pmatrix} \pm 1 & b_m \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pm b_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{\pm b_m}, \text{ con } b_m \in \mathbb{Z}.$$

Se tiene que

$$AT^{n_1}ST^{n_2}S \dots T^{n_m}S = T^{\pm b_m} \tag{A.7}$$

por lo tanto

$$A = T^{\mp b_m}ST^{-n_m}S \dots T^{-n_2}ST^{-n_1}$$

Notemos que la ecuación (A.7) se puede despejar de diferentes maneras para hacer que la expresión de A comience con S y termine con $T^{n'_1}$ o para que comience con $T^{-n'_m}$ y termine con S . Por supuesto, la expresión de A en términos de sus generadores no es única.

La justificación de este algoritmo se hace por inducción sobre c , primero supongamos que $A \in SL(2, \mathbb{Z})$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

como A y $-A$ representan a la misma transformación, podemos suponer que $c \geq 0$. Para $c = 0$ acabamos de ver que $A = T^{\pm b}$. Si $c = 1$, entonces $ad - bc = 1$ y $b = ad - 1$, por lo que

$$A = \begin{pmatrix} a & ad-1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^a S T^b$$

Ahora supongamos que la afirmación es cierta para matrices A , tales que $c < c_0$, para algún $c \geq 1$. Como $ad - bc = 1$, entonces el mínimo común divisor de c y d es 1, por lo que $d = cq + r$, con $0 < r < c$ y

$$AT^{-q} = \begin{pmatrix} a & -aq+b \\ c & -cq+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -aq+b \\ c & r \end{pmatrix},$$

entonces

$$AT^{-q}S = \begin{pmatrix} -aq+b & -a \\ r & -c \end{pmatrix}$$

como $r < c$, la matriz $AT^{-q}S$ se expresa como un producto de matrices S y T , con lo cual se concluye la justificación.

A.5 El espacio cociente \mathcal{H}/Γ

Dado un grupo Fuchsiano Γ , definimos en \mathcal{H} la relación $z \sim w$ si y sólo si existe $T \in \Gamma$ tal que $T(z) = w$, las clases que tenemos son las órbitas de z en Γ , denotadas por $[z]$. Mediante la proyección $\Pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}/\Gamma$, $\Pi(z) = [z]$, podemos construir el espacio cociente. Con la topología cociente (esto es, U es abierto en \mathcal{H}/Γ si y sólo si $\Pi^{-1}(U)$ es abierto en \mathcal{H}), tenemos que Π es continua y abierta.

Teorema A.5.1 *El espacio \mathcal{H}/Γ es una superficie de Riemann y Π es una función holomorfa. Además, si F es una Región de Dirichlet para Γ , entonces F/Γ y \mathcal{H}/F son homeomorfos, [Jo87, pp. 248-252].*

Observación A.5.2 *Notemos que si $[z] \in \mathcal{H}/\Gamma$, puesto que F es localmente finito, $\Pi^{-1}(z) \cap F$ es un conjunto finito.*

Teorema A.5.3 *Sea F una región de Dirichlet para un grupo Fuchsiano Γ , \mathcal{H}/Γ es compacto si y sólo si F es un subconjunto compacto en \mathcal{H} .*

Demostración. Primero supongamos que \mathcal{H}/Γ es compacto, probaremos que F es compacto viendo que cualquier sucesión infinita contiene una subsucesión convergente en F .

Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de F ; puesto que F es localmente finita y $F/\Gamma \cong \mathcal{H}/\Gamma$ es un compacto, la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ convergente a algún $[z_0] \in \mathcal{H}$.

Por la observación anterior (A.5.2), $[z_0]$ tiene una cantidad finita de preimágenes en F , z_0^j con $j = 1, \dots, r$, y alguna de éstas debe ser límite de alguna subsucesión de z_{n_k} porque si no es así, como F es localmente finita podemos encontrar vecindades abiertas V_j de cada preimagen z_0^j , tales que $V_j \cap \{z_{n_k}\}$ sea sólo un número finito de puntos para cada j . Como $\Pi(V_j)$ es un abierto, $\cup_{j=1}^r \Pi(V_j)$ es un abierto no vacío (pues contiene a $[z_0]$) y que contiene sólo a una cantidad finita de $[z_{n_k}]$, lo cual contradice que $[z_0]$ sea su límite. Por lo tanto $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente en F y éste es compacto. Si suponemos ahora que F es compacto, como Π es una función continua, entonces $\Pi(F) = F/\Gamma$ es compacto, por el teorema (A.5.1) \mathcal{H}/Γ es homeomorfo a F/Γ con lo que se concluye la demostración. \square

Definición A.5.4 Cuando Γ es el grupo modular, esto es $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ y Γ_0 es un subgrupo de Γ , a la superficies que resulta del cociente \mathcal{H}/Γ_0 la llamaremos **superficie modular**.

Teorema A.5.5 Sea Γ un grupo Fuchsiano, y supongamos que \mathcal{H}/Γ es un compacto, entonces Γ no tiene elementos parabólicos.

Demostración. Como \mathcal{H}/Γ es compacto por el teorema anterior, F es compacta. Puesto que para cada $z \in \mathcal{H}$, $\rho(z, T(z)) = \rho(A(z), AT(z))$ donde $A \in \Gamma$ y es tal que $A(z) \in F$ y por el corolario A.4.4 los elementos del ciclo de z que están en F son un número finito. Por otro lado $z \in \mathcal{H}$ sólo puede ser un punto fijo de un elemento elíptico de Γ , así que en F sólo pueden suceder dos cosas, hay sólo un elemento del ciclo de z en F (y de hecho se encuentra en el interior de F) o hay más de un elemento del ciclo en F y se encuentran en lados diferentes de F . En consecuencia

$$\eta(z) = \inf\{\rho(z, T(z)) \mid T \in \Gamma \setminus \{I\} \text{ y } T \text{ no es un elemento elíptico}\} > 0.$$

Si ahora consideramos $\eta = \inf\{\eta(z) \mid z \in F\}$, como F es un compacto, η se alcanza y $\eta > 0$.

Ahora supongamos que Γ contiene un elemento parabólico T_0 . Sabemos que T_0 es conjugado a una de las transformaciones $z \mapsto z \pm 1$, podemos

suponer que $T_0(z) = z + 1$ o $T_0(z) = z + 1$, pues de otra manera trabajamos con el grupo Γ' conjugado a Γ y el cociente \mathcal{H}/Γ' es isomorfo a \mathcal{H}/Γ . Como por la ecuación (A.2),

$$\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(z, z + 1) = \frac{1}{4(\operatorname{Im}(z))^2},$$

entonces si $\operatorname{Im}(z) \rightarrow \infty$, el ínfimo de $\rho(z, z + 1) = 0$, lo cual contradice que $\eta > 0$. Por lo tanto Γ no puede tener elementos parabólicos. \square

*The ball I threw while playing in the park
Has not yet reached the ground.*

Dylan Thomas.

Bibliografía

- [Ap76] **Apostol, Tom M.**, *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*. Springer-Verlag, New York Inc.1976
- [Be83] **Beardon, Alan. F.**, *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag, New York Inc., 1983.
- [Ha79] **Hardy, G. H.; Wright, E. M.**, *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 1979.
- [Jo87] **Jones, Gareth. A.; Singerman, David.**, *Complex Functions, (an algebraic and geometric viewpoint)*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [Ka86] **Katok, Svetlana**: "Reduction Theory for Fuchsian Groups". *Mathematische Annalen* **273**, (1986). 461-470.
- [Ka96] **Katok, Svetlana**: "Coding of closed geodesics after Gauss and Morse." *Geometriae Dedicata* **63**, (1996). 123-145.
- [Ni91] **Montgomery, Hugh; Niven, Ivan y Zuckerman, Herbert** , *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Willey and Sons, New York, 1991.
- [Ra94] **Ratcliffe, G.**, *Foundations of hyperbolic manifolds*. Springer Verlag, New York, 1994.
- [Se85a] **Series, Caroline**: "The Modular Surface and Continued Fractions." *J. London Mathematical Society* (2) **31**, 1985. 69-80.
- [Se85b] **Series, Caroline**: "The Geometry of Markoff Numbers." *Mathematical Intelligencer* (7) **13**, 1985. 20-29.

- [Se82] **Series, Caroline:** "Non-Euclidean Geometry, Continued Fractions and Ergodic Theory." *Mathematical Intelligencer* (1) 4, 1982. 24-31.
- [St96] **Stillwell, John C.** *Sources of hyperbolic geometry*, American Mathematical Society-London Mathematical Society, 1996.