17

2 ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBLEMAS EXTREMOS Y MEDIDAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

J U A N J I M E N E Z K R A S S E L

DIRECTOR DE TESIS: DR. JAVIER PAEZ CARDENAS

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

PROBLEMAS EXTREMOS Y MEDIDAS

realizado por JUAN JIMENEZ KRASSEL

con número de cuenta 8815941-4 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. JAVIER PAEZ CARDENAS	
Propietario	M. en C. ANGEL MANUEL CARRILLO HOYO	
Propietario	MAT. LUIS ALBERTO BRISEÑO AGUIRRE	
Suplente	M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA	
Suplente	DR. GUILLERMO JAVIER FRANCISCO SIENRA LOERA	G. Sienra

Consejo Departamental de Matemáticas

MAT. CESAR GUEVARA BRAVO

FALTA PAGINA

No. 2

A mis Padres:

Por su apoyo infinito.

A mis Hermanos.

Por que cada uno ellos, me ha enseñado a vivir de formas diferentes.

Agradecimientos

Al Dr. Javier Paez, por su apoyo y comprensión a lo largo de mi vida académica.

Al M. en C. Angel Carrillo y al Dr. Guillermo Sienra por sus enseñanzas y por mostrarme cuan interesante es el Análisis y la Variable Compleja.

A todos aquellos con quien tuve el honor de compartir la amistad, en especial a aquel grupo autodenominado "La Palomilla" y por la tan celebre frase.

A Sandra por su invaluable amistad.

A Gina...

Índice General

Introducción.

Dado Δ el disco abierto unitario en $\mathbb{C}$ y el conjunto $H(\Delta)$ de funciones analíticas de Δ en $\mathbb{C}$, se pueden describir ciertas familias de funciones analíticas que tienen una representación integral que las relaciona con ciertos conjuntos de medidas. Dada una familia $\mathcal{F} \subseteq H(\Delta)$ y una funcional J lineal y continua con parte real no constante sobre $\mathcal{F}$, se plantea el problema de caracterizar como deben ser las soluciones del problema

$$\max \{\operatorname{Re} J(f) : f \in \mathcal{F}\}$$

Este ha sido estudiado por muchos autores y para resolverlo se han empleado métodos variacionales, como se ilustra en [8]. Estos métodos dependen de la forma específica de cada familia $\mathcal{F}$ y con frecuencia son muy complicados.

En este trabajo se aborda el mismo problema de la siguiente manera. Dado que cada elemento de $\mathcal{F}$ tiene una representación integral a través de una medida, casi siempre única, la familia $\mathcal{F}$ se puede "identificar" con un conjunto de medidas. Así, el problema de caracterizar como deben ser las soluciones que maximizan la parte real de una funcional lineal continua J sobre la familia $\mathcal{F}$, se puede "trasladar" al problema de caracterizar las soluciones que maximizan a una cierta funcional sobre este conjunto de medidas. Los resultados más importantes de este trabajo, que se exponen en el capítulo 3, están en esta dirección.

Para lograr este fin, en el primer capítulo se proporcionan las nociones básicas del

Análisis Funcional y de Variable Compleja necesarias para la comprensión de los dos siguientes capítulos. Este capítulo preliminar incluye el estudio de las propiedades de $H(\Delta)$ como espacio lineal topológico, y las definiciones necesarias para enunciar el teorema de Krein-Milman. Asimismo, se estudian las propiedades del espacio de Banach $M_{\mathbb{R}}$ que consiste de todas las medidas finitas y signadas sobre la $\sigma-$álgebra de Borel generada por todos los conjuntos abiertos de $\partial\Delta$, y dotado con la norma de la variación total. En la última sección de los preliminares caracterizamos a los conjuntos

$$M_{A,B} = \left\{\mu \in M_{\mathbf{R}} : \int_{\partial\Delta} d\mu = A,\ \|\mu\| \leq B \text{ con } 0 < A \leq B\right\}$$

además de estudiar los puntos extremos de estos conjuntos.

En el segundo capítulo se estudian familias generadas a partir de un kernel y un conjunto $M_{A,B}$, poniendo énfasis en la caracterización del conjunto de puntos extremos de estas familias, pues se da un teorema que nos permite ubicar al menos una solución al problema de maximización en este último conjunto. De esta manera, obtenemos una primera caracterización de estas soluciones. También se estudian algunas subfamilias de la clase de funciones univalentes, y se aplican los resultados obtenidos en la sección anterior, para obtener conclusiones análogas a las de [8].

Por último, en el capítulo 3 se presentan los dos resultados más importantes de este trabajo. Estos resultados establecen una caracterización de las soluciones al problema de maximización de una funcional sobre un cierto conjunto de medidas. En el primero se resuelve el caso de una funcional lineal y en el segundo se hace el caso general, lo que hace necesario introducir el concepto de derivada de Fréchet. Finalmente, se incluye una sección de aplicaciones en las que se obtienen resultados conocidos para algunas familias de funciones analíticas.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo expondremos los resultados necesarios para la comprensión de este trabajo, la mayoría no se demostrarán, el lector interesado puede consultar en [1] [6] y [7] de la bibliografía.

Este capítulo esta dividido en tres secciones. En la primera sección revisaremos los conceptos clásicos de Análisis Matemático y Análisis Funcional necesarios para su aplicación en la sección dos. Estos resultados son básicos para determinar cuando ciertos conjuntos son compactos y también incluyen conceptos como el de casco convexo, punto extremo, y conceptos relacionados con el problema de maximizar una funcional continua sobre una familia compacta de funciones.

En la sección dos, definiremos y daremos algunas de las propiedades del conjunto $M_{\mathbf{R}}$, y por último, en la sección tres, relacionaremos, por medio del Teorema de Representación de Riesz, al espacio dual de $C(\partial\Delta)$ con $M_{\mathbf{R}}$, y explotaremos todos los resultados de la sección uno. Además, en esta última sección seguiremos estudiando al conjunto $M_{\mathbf{R}}$ y proporcionaremos la base teórica para el desarrollo del capítulo dos.

1.1 Conceptos preliminares de análisis

De ahora en adelante denotaremos por Δ al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y por $C(S)$ al conjunto de las funciones continuas de S en $\mathbb{C}$, es decir,

$$C(S) = \{f : S \mapsto \mathbb{C} : f \text{ es continua}\}$$

donde $S \subseteq \mathbb{C}$

Observemos que el conjunto $C(\Delta)$ es distinto del vacío pues al menos están las funciones constantes. Este conjunto es un espacio vectorial con respecto a la suma usual de funciones y el producto de funciones por números complejos. Dotaremos a este conjunto de una métrica, con la cuál obtendremos una topología, que coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de Δ. Escogemos esta topología, pues está relacionada con los problemas extremos del tipo que estudiaremos; los siguientes resultados van dirigidos en este sentido.

Proposición 1.1 *Existe una sucesión $\{K_n\}$ de subconjuntos compactos de Δ tal que $\Delta = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$. Más aún, podemos escoger K_n de forma tal que cumplan con:*

i. $K_n \subset int K_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

ii. Si $K \subset \Delta$ compacto entonces $K \subset K_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.2 *Dada una sucesión $\{K_n\}$ de conjuntos compactos (como en la proposición 1.1) definimos:*

s1 $\rho_n(f, g) = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K_n\}$ $(f, g \in C(\Delta))$, *y*

s2 $\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}$

Entonces ρ es una métrica en $C(\Delta)$ y por lo tanto $(C(\Delta), \rho)$ es un espacio métrico.

Demostración. Es fácil ver que $\rho(f,g)$ está bien definida pues, como $t(1+t)^{-1} < 1$ si $t > 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}$ esta dominada por $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^n$ y por lo tanto debe converger. Solo probaremos la desigualdad del triángulo, para lo cual notemos que $\rho_n(f,g) \leq \rho_n(f,h) + \rho_n(h,g)$ para cada $n \in \mathbf{N}$ de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} &\leq \frac{\rho_n(f,h)+\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(f,h)+\rho_n(h,g)} \\
&\leq \frac{\rho_n(f,h)}{1+\rho_n(f,h)+\rho_n(h,g)} + \frac{\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(f,h)+\rho_n(h,g)} \\
&\leq \frac{\rho_n(f,h)}{1+\rho_n(f,h)} + \frac{\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(h,g)}
\end{aligned}$$

y sumando obtenemos el resultado deseado. ■

Ahora procederemos a caracterizar a los abiertos en $C(\Delta)$ y la convergencia de sucesiones en este espacio.

Lema 1.1 *Sea ρ definida como en s2 para una sucesión como en la proposición 1.1. Entonces:*

1. *Dado $\varepsilon > 0$ existen $\delta > 0$ y $K \subseteq \Delta$, compacto, tales que si $f, g \in C(\Delta)$ tienen la propiedad de que* $\sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K\} < \delta$ *entonces se tiene que $\rho(f,g) < \varepsilon$.*
   Y recíprocamente:
2. *Dados $\delta > 0$ y $K \subseteq \Delta$ compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $f, g \in C(\Delta)$ son tales que $\rho(f,g) < \varepsilon$, entonces* $\sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K\} < \delta$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y escojamos $p \in \mathbf{N}$ tal que $\sum_{n=p+1}^{\infty}(1/2)^n < \varepsilon$ y sea $K = K_p$ además escojamos $\delta > 0$ tal que $\frac{t}{1+t} < \frac{\varepsilon}{2}$ para $t \in [0,\delta)$. Ahora sean $f, g \in C(\Delta)$ tales que $\sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K\} < \delta$. Como $K_n \subseteq K$ para $1 \leq n \leq p$ tenemos que $\rho_n(f,g) < \delta$ para $1 \leq n \leq p$ lo cual implica $\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < \frac{\varepsilon}{2}$, de donde se sigue $\rho(f,g) < \sum_{n=1}^{p}(1/2)^n \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=p+1}^{\infty}(1/2)^n < \varepsilon$.

Ahora dados $K \subseteq \Delta$ compacto y $\delta > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_p$, y esto implica que $\sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} \leq \rho_p(f, g)$. Ahora sea $\varepsilon > 0$ que satisfaga que si $0 \leq s < 2^p\varepsilon < 1$ implique que $\frac{s}{1-s} < \delta$, de donde se sigue que si $\frac{t}{1+t} < 2^p\varepsilon$ entonces $t < \delta$. Ahora si $\rho(f,g) < \varepsilon$ entonces $\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < 2^p\varepsilon$ y se sigue que $\rho_n(f,g) < \delta$. ■

Proposición 1.3 a) *Un conjunto $\mathcal{O} \subseteq (C(\Delta), \rho)$ es abierto si y sólo si para cada $f \in \mathcal{O}$ existe un conjunto compacto K y $\delta > 0$ tal que*

$$\mathcal{O} \supseteq \{g : d(f(z), g(z)) < \delta, z \in K\}$$

b) *Una sucesión $\{f_n\} \subset (C(\Delta), \rho)$ converge a f si y sólo si $\{f_n\} \to f$ uniformemente sobre todos los subconjuntos compactos de Δ.*

Demostración.

a) Si $\mathcal{O}$ es abierto y $f \in \mathcal{O}$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{g : \rho(g, f) < \varepsilon\} \subseteq \mathcal{O}$, por la primera parte del lema anterior existe $\delta > 0$ y $K \subseteq \Delta$ compacto con la propiedad deseada. Ahora si $\mathcal{O}$ tiene la propiedad indicada y $f \in \mathcal{O}$ entonces la segunda parte del lema proporciona $\varepsilon > 0$ tal que $\{g : \rho(g, f) < \varepsilon\} \subseteq \mathcal{O}$ lo cual implica que $\mathcal{O}$ es abierto.

b) Sea $K \subseteq \Delta$ compacto y $\delta > 0$. La segunda parte del lema proporciona $\varepsilon > 0$ tal que si $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ entonces $\sup\{d(f(z), f_n(z)) : z \in K\} < \delta$ lo cual implica la convergencia uniforme sobre compactos. Ahora dado $\varepsilon > 0$ la primera parte del lema anterior proporciona $K \subseteq \Delta$ compacto y $\delta > 0$ tal que si $\sup\{d(f(z), f_n(z)) : z \in K\} < \delta$ entonces $\rho(f_n, f) < \varepsilon$, de donde se sigue el resultado deseado. ■

Notemos que la colección de abiertos es independiente de la elección de la sucesión de conjuntos $\{K_n\}$. Esto es si $\Delta = \cup_{n=1}^{\infty} K_n'$ y si $\{K_n'\}$ satisface las condiciones de la proposición 1.1 y si μ es la métrica definida por $\{K_n'\}$ entonces un conjunto es abierto en $(C(\Delta), \mu)$ si y sólo si es abierto en $(C(\Delta), \rho)$. Lo anterior es una consecuencia directa de la proposición 1.3, pues la caracterización de los abiertos no depende de $\{K_n\}$.

Así, cada vez que consideremos a $C(\Delta)$ como un espacio métrico se asumirá que la métrica ρ está dada por la fórmula s2 para alguna sucesión $\{K_n\}$ que satisfaga la proposición 1.1.

Partiendo de que $\mathbb{C}$ es un espacio completo, tenemos la siguiente:

Proposición 1.4 $(C(\Delta), \rho)$ *es un espacio de Banach.*

Estudiaremos ahora al conjunto $H(\Delta) = \{f : \Delta \mapsto \mathbb{C} : f \text{ analítica}\}$, notemos que $H(\Delta) \subset C(\Delta)$. La primera pregunta con respecto a $H(\Delta)$ es: ¿$H(\Delta)$ es cerrado en $C(\Delta)$?.

El siguiente resultado responde afirmativamente. Más aún, la función $f \mapsto f'$ es continua de $H(\Delta)$ en $H(\Delta)$.

Teorema 1.1 *Si una sucesión $\{f_n\}$ en $H(\Delta)$ y $f \in C(\Delta)$ son tales que $\{f_n\} \to f$, entonces f es analítica y $\left\{f_n^k\right\} \to f^k$ $(k \geq 1, k \in \mathbb{N})$*

Siempre asumiremos que la métrica en $H(\Delta)$ es la métrica que hereda como subconjunto de $C(\Delta)$, como consecuencia inmediata tenemos:

Corolario 1.1 $H(\Delta)$ *es un espacio de Banach.*

Continuaremos recordando algunos hechos relacionados con familias de funciones de $H(\Delta)$. Estos resultados proporcionan una caracterización adecuada para determinar cuando un subconjunto de $H(\Delta)$ es compacto, y esto último lo haremos vía el teorema de Montel. Las pruebas respectivas pueden encontrarse en [6].

Definición 1.1 *Una familia $\mathcal{F} \subset H(\Delta)$ es normal si para cada sucesión en $\mathcal{F}$, existe una subsucesión que converge a una función en $H(\Delta)$.*

Proposición 1.5 *$\mathcal{F} \subset H(\Delta)$ es normal si y sólo si $\mathcal{F}$ es relativamente compacto, es decir, si $\mathcal{F}$ tiene cerradura compacta.*

Definición 1.2 *$\mathcal{F}$ es equicontinua en z_0 si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$*

Definición 1.3 *$\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua en $E \subset \Delta$ si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $z,z' \in E$ con $|z - z'| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Proposición 1.6 *Si $\mathcal{F} \subset H(\Delta)$ es equicontinua en cada punto de Δ, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua sobre cada subconjunto compacto de Δ.*

Teorema 1.2 *(Arzela-Ascoli) $\mathcal{F} \subset H(\Delta)$ es normal si y sólo si se satisface:*

a) Para cada $z \in \Delta$, el conjunto $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto en Δ.

b) $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada punto de Δ.

Las siguientes definiciones y proposiciones conducen al teorema de Montel.

Definición 1.4 *La familia $\mathcal{F} \subset H(\Delta)$ es localmente acotado si para todo $a \in \Delta$, existen $M, r > 0$ tales que para toda $f \in \mathcal{F}$, $|f(z)| \leq M$ para $|z - a| < r$.*

Lema 1.2 *$\mathcal{F} \subset H(\Delta)$ es localmente acotado si y sólo si para todo $K \subset \Delta$ compacto existe $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ y para toda $z \in K$.*

Teorema 1.3 *(Montel). $\mathcal{F} \subset H(\Delta)$ es normal si y sólo si $\mathcal{F}$ es localmente acotado.*

Corolario 1.2 *$\mathcal{F} \subset H(\Delta)$ es compacto si y sólo si $\mathcal{F}$ es cerrado y localmente acotado.*

Observación 1 *Con respecto a las definiciones y teoremas de 1.1 a 1.2 se sigue que una familia $\mathcal{F}$ es compacta si existen cotas uniformes sobre los miembros de $\mathcal{F}$ (localmente acotado) y $\mathcal{F}$ es cerrado por sucesiones, es decir, si $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ y $f_n \to f$ entonces $f \in \mathcal{F}$, esto es una consecuencia del corolario 1.2*

Continuaremos recordando algunos resultados de Análisis Matemático que consideran espacios vectoriales topológicos y algunos teoremas y definiciones sobre convexidad para culminar con el teorema de Krein-Milman. Las demostraciones respectivas se encuentran en [7].

Definición 1.5 *Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial dotado de una estructura topológica y en donde las operaciones lineales (suma de vectores y producto por un escalar) son funciones continuas bajo la topología dada.*

Notemos que $H(\Delta)$ es un espacio vectorial topológico, con la estructura topológica inducida por su métrica. Entonces los siguientes resultados son aplicables a nuestro espacio. Denotaremos con $\mathfrak{X}$ a un espacio vectorial (e.v.), con p, q, x, y... a puntos en este espacio, con α,β... a números complejos y con a,b,c,... a números reales.

Definición 1.6 *Un subconjunto A de $\mathfrak{X}$ es convexo si para cada $x, y \in A$ y $0 \leq a \leq 1$ se tiene que $ax + (1-a)y \in A$.*

En la siguiente proposición daremos algunas propiedades de los conjuntos convexos.

Proposición 1.7 *Si $A \subseteq \mathfrak{X}$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, A es convexo y $a_1, \ldots, a_n \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in A$.*
2. *La intersección arbitraria de conjuntos convexos es un conjunto convexo.*
3. *Si $A, B \subseteq \mathfrak{X}$ son conjuntos convexos entonces también lo son*
$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$
y
$$\alpha A = \{\alpha x : x \in A\}.$$
4. *Si $\mathfrak{X}$ es un espacio vectorial topológico y $A \subseteq \mathfrak{X}$ es un conjunto convexo, entonces la cerradura y el interior de A son conjuntos convexos.*

Demostración. Para el inciso 1) procederemos por inducción. Para $n = 2$ es inmediato de la definición. Supongamos que es cierto para $n = m$, y para $n = m + 1$ hagamos $b = \sum_{i=2}^{m+1} a_i$ y $y = \sum_{i=2}^{m+1} \frac{a_i}{b} x_i$, es claro que $y \in A$ y además $a_1 + b = 1$ y por tanto $a_1 x_1 + by = \sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i \in A$. El inciso 2) es inmediato. Para la prueba de los incisos restantes se necesitan otras herramientas que se pueden consultar en [7]. ■

Definición 1.7 *Si $A \subset \mathfrak{X}$, se define el conjunto $co(A)$, llamado el casco convexo de A, como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A. Si $\mathfrak{X}$ es un espacio vectorial topológico (e.v.t.), se define el conjunto $\overline{co}(A)$, llamado el casco convexo cerrado de A, como la intersección de todos los conjuntos cerrados y convexos que contienen a A.*

En los dos siguientes lemas se dan algunas propiedades importantes con relación a estos dos conceptos.

Lema 1.3 *Para conjuntos arbitrarios A,B, en un espacio vectorial $\mathfrak{X}$:*

1. $co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : x_i \in A, 0 \leq a_i \leq 1 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\}$, *en decir. $co(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ de elementos $x_i \in A$. con $0 \leq a_i \leq 1$, y $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$*
2. $co(\alpha A) = \alpha co(A)$
3. $co(A + B) = co(A) + co(B)$

Demostración. Solo probaremos los incisos 1) y 3). Para 1) probaremos que el conjunto que define a $co(A)$ es un conjunto convexo y que es el más chico que contiene a A. Es claro que

$$A \subseteq C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : x_i \in A, 0 \leq a_i \leq 1 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\}$$

Ahora, del inciso 1) de la proposición 1.7 se sigue que C es un conjunto convexo y que si D es un conjunto convexo tal que $A \subseteq D$ entonces $C \subseteq D$. Para 3) es claro que $co(A + B) \subseteq co(A) + co(B)$, pues $A + B \subseteq co(A) + co(B)$ y por del inciso 3) de la proposición 1.7 $co(A) + co(B)$ es convexo. Para la otra contención notemos que $x + co(B) = co(x + B)$ pues dado $y \in B$, $y = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$ y $x + y = \sum_{i=1}^{n} a_i (x + y_i)$ y entonces $A + co(B) \subseteq co(A + B)$ y de la misma forma $co(A) + co(B) \subseteq co(A + co(B))$. Por lo tanto

$$co(A) + co(B) \subseteq co(A + co(B)) \subseteq co(co(A + B)) = co(A + B)$$

■

Lema 1.4 *Para conjuntos arbitrarios A,B, en un espacio vectorial topológico $\mathfrak{X}$:*

1. $\bar{co}(A) = cl(co(A))$

2. $\bar{co}(\alpha A) = \alpha \bar{co}(A)$

3. Si $\bar{co}(A)$ *es compacto entonces* $\bar{co}(A+B) = \bar{co}(A) + \bar{co}(B)$.

Demostración. Solo probaremos el inciso 1). Para los demás incisos la demostración puede encontrarse en [7]. Veamos pues 1), por el inciso 4) de la proposición 1.7, la $cl(co(A))$ es un conjunto convexo cerrado que contiene a $co(A)$, por tanto, $\bar{co}(A) \subseteq cl(co(A))$. La otra contención es inmediata pues $\bar{co}(A)$ es un cerrado que contiene a $co(A)$. ■

Del inciso 1) del lema anterior se sigue que si $A \subseteq \mathfrak{X}$ entonces $x \in \bar{co}(A)$ si x es el "límite", en la topología de $\mathfrak{X}$, de combinaciones convexas de puntos de A.

Un problema importante es el determinar cuando el casco convexo cerrado de un conjunto compacto es compacto. En general esto no es cierto en un e.v.t. como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1 *Supongamos* $\mathfrak{X}$ *e.v.t. que contenga un conjunto numerable* $E = \{e_1, e_{2,\ldots}\}$ *con las siguientes propiedades:*
a) $e_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$
b) Todo elemento $x \in \mathfrak{X}$ *es una combinación lineal finita de miembros de* E.
c) Ningún e_n *pertenece al subespacio cerrado generado por* e_i *si* $n \neq i$
Si $K = E \cup \{0\}$ *entonces* K *es compacto pero* $\bar{co}(K)$ *no lo es.*

Si el espacio es de Banach, esto sí se cumple y se conoce como el teorema de Mazur, cuya prueba se puede ver en [7].

Teorema 1.4 *(Mazur) Sea* $\mathfrak{X}$ *un espacio de Banach y* $A \subset \mathfrak{X}$ *compacto, entonces* $\bar{co}(A)$ *es compacto.*

Definición 1.8 *Un espacio vectorial topológico se dice que es localmente convexo si posee una base para su topología que consista de conjuntos convexos.*

Observación 2 *$H(\Delta)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo, pues si $M > 0$ y $0 < r < 1$, los conjuntos de la forma $\{f \in H(\Delta) : |f(z)| < M, |z| < r\}$ son vecindades convexas del origen, esto se sigue de la proposición 1.3. y además estos conjuntos son convexos pues si*

$$f, g \in \{f \in H(\Delta) : |f(z)| < M, |z| < r\}$$

entonces para $0 \leq a \leq 1$,

$$|af(z) + (1-a)g(z)| \leq a\,|f(z)| + (1-a)\,|g(z)| < M, \text{ para } (|z| < r)$$

Continuaremos estudiando la estructura de los espacios Banach, los siguientes resultados son bastante generales pero se aplican fácilmente al espacio $C(\Delta)$. Así pues, consideremos $\mathfrak{X}$ un espacio de Banach arbitrario. Podemos inducir diferentes topologías para este espacio, en particular estudiaremos un tipo especial de topología y que corresponde al concepto de topología débil*, (léase topología débil estrella) y que se denota por w*-topología. Al inducir este tipo de topología en un espacio vectorial topológico, este resulta ser un espacio vectorial topológico localmente convexo, con lo cual serán aplicables los resultados concernientes a este tipo de espacios. Para tal propósito recordemos el concepto de espacio dual.

Definición 1.9 *Sea $\mathfrak{X}$ un e.v.t. El espacio dual de $\mathfrak{X}$, denotado por $\mathfrak{X}^*$, es el espacio de todas las funcionales lineales continuas definidas sobre $\mathfrak{X}$.*

Ahora estamos en condiciones de definir la w*-topología.

Definición 1.10 *Sea $\mathfrak{X}$ un e.v.t., con espacio dual $\mathfrak{X}^*$. La w^*-topología inducida por $\mathfrak{X}$ sobre $\mathfrak{X}^*$, es la topología generada por el sistema de vecindades de la forma:*

$$N(f; A, \varepsilon) = \{g \in \mathfrak{X}^* : |f(x) - g(x)| < \varepsilon, x \in A\}$$

con $\varepsilon > 0$ y $A \subseteq \mathfrak{X}$, un conjunto finito.

De la definición se sigue el siguiente lema.

Lema 1.5 *El espacio $\mathfrak{X}^*$ con la w^*-topología es un espacio vectorial topológico localmente convexo.*

Así, un conjunto $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{X}^*$ es abierto en la w*-topología (w*-abierto) si y sólo si para cada $g \in \mathfrak{g}$ existen puntos $x_1,...,x_n \in \mathfrak{X}$ y $\varepsilon > 0$, tales que

$$\{f \in \mathfrak{X}^* : |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon \ \ (i = 1, ..., n)\} \subseteq \mathfrak{g}$$

Se sabe que bajo la w*-topología, las esferas cerradas en el espacio dual resultan ser conjuntos compactos, como se establece en el siguiente teorema y cuya prueba se puede encontrar en [7].

Teorema 1.5 *(Alaoglu) La esfera unitaria cerrada en el espacio conjugado $\mathfrak{X}^*$ del espacio de Banach $\mathfrak{X}$, es compacto en la w^*-topología de $\mathfrak{X}$.*

Continuaremos con el estudio de conjuntos y puntos extremos y enunciaremos el teorema de Krein-Milman, que es fundamental en el estudio de problemas que involucran puntos extremos y problemas lineales extremos. Este teorema es válido en cualquier espacio vectorial topológico localmente convexo, y por tanto, es aplicable a el espacio $H(\Delta)$. Daremos algunas definiciones necesarias para formular este teorema.

Definición 1.11 *Sea $\mathfrak{X}$ un e.v. y $K \subseteq \mathfrak{X}$. Un subconjunto no vacío $A \subsetneq K$ se dice que es un subconjunto extremo de K, si dada una combinación convexa propia de dos puntos de K, $ak_1 + (1-a)k_2$, con $0 < a < 1$, dicha combinación está en A solo si $k_1, k_2 \in A$. Un subconjunto extremo de K que solo consiste de un solo punto es llamado un punto extremo de K.*

De la definición de punto extremo tenemos la siguiente equivalencia: Un punto extremo de un conjunto K es un punto de K que no puede escribirse como una combinación convexa propia de otros dos puntos de K.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, la superficie de una esfera sólida es un subconjunto extremo de la esfera, y cada punto de la superficie es un punto extremo. Los vértices, lados y caras de un cubo sólido forman un conjunto extremo del cubo, pero solo los ocho vértices son puntos extremos del cubo. Un conjunto convexo podría no tener puntos extremos como en el caso de la bola abierta.

Los siguientes dos lemas son importantes para la demostración del Teorema de Krein-Milman. Aún cuando no incluimos la demostración de este teorema (se puede ver en [7]) incluimos estos dos resultados porque los usaremos posteriormente.

Lema 1.6 *Un conjunto compacto no vacío en un espacio vectorial topológico localmente convexo tiene puntos extremos.*

Demostración. Véase [7]. ■

Lema 1.7 *Sean K un subconjunto de un espacio vectorial, A_1 un subconjunto extremo de K, A_2 subconjunto extremo de A_1, entonces A_2 es un subconjunto extremo de K.*

Demostración. Sean $x, y \in K$ y $0 < a < 1$ tal que $ax + (1-a)y \in A_2$. Como $A_2 \subseteq A_1$ tenemos que $ax + (1-a)y \in A_1$ donde este último conjunto es extremo de K, por lo tanto $x, y \in A_1$, y como $ax + (1-a)y \in A_2$ y A_2 es un subconjunto extremo de A_1 tenemos que $x, y \in A_2$. Así A_2 es un subconjunto extremo de K. ■

Teorema 1.6 *(Krein-Milman) Si K es un subconjunto compacto de X un espacio vectorial topológico localmente convexo y si E es el conjunto de puntos extremos de*

K, entonces $K \subseteq \bar{co}(E)$. Como consecuencia $\bar{co}(E) = \bar{co}(K)$ y si K es convexo entonces $\bar{co}(E) = K$.

Teorema 1.7 *Sea K un subconjunto compacto de $\mathfrak{X}$, un espacio vectorial topológico localmente convexo, si $\bar{co}(K)$ es compacto, entonces los puntos extremos de $\bar{co}(K)$ son puntos de K.*

1.2 Conceptos preliminares de probabilidad

Consideremos ahora el conjunto de medidas finitas y signadas sobre la de Borel en $\partial\Delta$, es decir, la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos de $\partial\Delta$, que con la norma de la variación total, resulta ser un espacio vectorial topológico y que denotaremos por $M_{\mathfrak{X}}$. Para definir la norma de la variación total, definiremos primero la variación total de una medida sobre un conjunto como sigue:

$$|\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| : E_i \subseteq E; E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j; E, E_i \subseteq \partial\Delta\right\}$$

donde el supremo se toma sobre todos los borelianos que cumplan con las condiciones requeridas.

Ahora definimos la norma de una medida $\mu \in M_{\mathbb{R}}$ como:

$$\|\mu\| = |\mu|(\partial\Delta)$$

Utilizaremos la variación total para definir la parte positiva y la parte negativa de una medida arbitraria. El proceso es análogo al que se sigue para definir la parte positiva y la parte negativa de una función, es decir:

$$f^+(\cdot) = \frac{1}{2}\left(|f(\cdot)| + f(\cdot)\right)$$

y

$$f^-(\cdot) = \frac{1}{2}\left(|f(\cdot)| - f(\cdot)\right)$$

Definamos la variación positiva y la variación negativa de una medida $\mu \in M_{\mathbb{R}}$ como sigue:

Definición 1.12 *La variación positiva μ^+ y la variación negativa μ^- están dadas por las ecuaciones*

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2}\{|\mu|(E) + \mu(E)\} \qquad y \qquad \mu^-(E) = \frac{1}{2}\{|\mu|(E) - \mu(E)\}$$

Existe una relación especial entre medidas en $M_{\mathbb{R}}$ y que consiste en lo siguiente:

Definición 1.13 *Decimos que μ y ν son mutuamente singulares si existen dos conjuntos ajenos A y B cuya unión es el total y tal que, para cada conjunto medible E, $A \cap E$ y $B \cap E$ son medibles y*

$$|\mu|(A \cap E) = |\nu|(B \cap E) = 0$$

El siguiente teorema, debido a Jordan, lo utilizaremos constantemente a lo largo de todo el trabajo, y lo que nos dice es que una medida signada la podemos escribir como la diferencia de dos medidas positivas y mutuamente singulares, la demostración puede encontrarse en [7]:

Teorema 1.8 *(Descomposición de Jordan). Si $\mu \in M_{\mathbb{R}}$ entonces*

$$\mu^+(E) = \sup_{F \subseteq E} \mu(F), \qquad y \qquad \mu^-(E) = -\inf_{F \subseteq E} \mu(F).$$

para todo conjunto de Borel $E \subseteq \partial\Delta$. Además $\mu^+(E)$, $\mu^-(E) \geq 0$, además

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$$

y

$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$$

y μ^+, y μ^- son finitas y mutuamente singulares. El supremo e ínfimo se toman sobre todos los conjuntos de Borel F que satisfagan las condiciones requeridas.

Con respecto a la estructura del espacio $M_{\mathbb{R}}$, quedan dos preguntas importantes: ¿Es un espacio de Banach?. Se puede responder a esta do pregunta, utilizando solo las definiciones dadas anteriormente, sin embargo, el Teorema de Representación de Riesz, responde fácilmente a ésta como se verá en la siguiente sección. Además, exhibiremos una topología con la cuál $M_{\mathbb{R}}$ resulta ser un espacio localmente convexo.

1.3 El espacio $M_{\mathbb{R}}$ y el conjunto $M_{A,B}$

Consideremos ahora el siguiente conjunto $C_{\mathbb{R}}(\partial\Delta) = \{\varphi : \partial\Delta \mapsto \mathbb{R}\colon \varphi \text{ es continua}\}$. Este conjunto dotado con la norma del supremo, $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(z)| : z \in \partial\Delta\}$, es un espacio de Banach. Veamos como construir funcionales continuas sobre $C_{\mathbb{R}}(\partial\Delta)$. Consideremos $\mu \in M_{\mathbb{R}}$ arbitraria, notemos que para cada $\varphi \in C_{\mathbb{R}}(\partial\Delta)$, φ es integrable con respecto a μ, pues φ es continua y μ es finita y, más aún, la integral definida por la siguiente ecuación

$$\int_{\partial\Delta} \varphi(x)\, d\mu(x)$$

es finita pues, por ser φ continua en un compacto, alcanza su máximo M y, por lo tanto, la integral anterior esta acotada por

$$\int_{\partial\Delta} M d|\mu|(x)$$

y se sigue que la última integral es, a lo más, $M\|\mu\|$.

Así pues, definamos $F : C_{\mathbb{R}}(\partial\Delta) \mapsto \mathbb{R}$, como sigue:

$$F(\varphi) = \int_{\partial\Delta} \varphi(x)\, d\mu(x)$$

De lo anterior se sigue que F es una funcional continua, de hecho, el Teorema de Representación de Riesz afirma que todas las funcionales continuas sobre $C_{\mathbb{R}}(\partial\Delta)$ se pueden escribir de la misma forma, e incluso dice mucho más: El espacio dual $C_{\mathbb{R}}^*(\partial\Delta)$ es isométricamente isomorfo a $M_{\mathbb{R}}$. Enunciemos pues el teorema de Representación de Riesz, el cuál se incluye aquí sin demostración (véase [7]):

Teorema 1.9 *(Teorema de Representación de Riesz) Dado el espacio S de Hausdorff y compacto, existe un isomorfismo isométrico entre $C^*_{\mathbb{R}}(S)$ y $M_{\mathbb{R}}$, tal que los elementos correspondientes x^* y μ satisfacen la identidad $x^*\varphi = \int_{\partial\Delta} \varphi(s)\, d\mu(s)$, para toda $\varphi \in C_{\mathbb{R}}(S)$.*

Notemos que $\partial\Delta$ es un espacio de Hausdorff compacto, por lo que este teorema se aplica al espacio $C_{\mathbb{R}}(\partial\Delta)$. En general el teorema de Riesz no es válido para espacios arbitrarios, sin embargo se puede extender a espacios localmente compactos. Notemos que el término de isomorfismo corresponde a una función lineal continua con inversa continua, y por lo tanto, cualquier resultado lineal topológico concerniente al espacio dual $C^*_{\mathbb{R}}(\partial\Delta)$ es válido en el espacio $M_{\mathbb{R}}$.

Observación 3 *En nuestro trabajo consideraremos, además del espacio $C^*_{\mathbb{R}}(\partial\Delta)$, al espacio $H(\Delta)$, y necesitaremos representar a las funcionales lineales sobre este espacio, en este caso, aplicaremos el teorema de Riesz de la siguiente manera. Dados el espacio S de Hausdorff compacto y $F \in H^*(S)$ con $F = U + iV$, aplicamos la versión anterior para obtener una medida compleja de la forma $\mu = \nu + i\lambda$, donde μ y λ son elementos de $M_{\mathbb{R}}$ que representan a U y V respectivamente. Así pues, tenemos que cada elemento del espacio $H^*(S)$ se puede representar por medio de una única medida compleja sobre S.*

Definición 1.14 *Sea μ una medida real o compleja finita definida sobre la $\sigma-$álgebra de Borel de un espacio topológico X, y sea U la unión de todos los conjuntos de Borel abiertos E, tales que $\mu(E) = 0$. Definimos el soporte de μ como el complemento de U y lo denotaremos por* $\operatorname{sop}\mu$.

Podemos extender esta definición para una medida signada de la siguiente manera: Sea U la unión de todos los conjuntos de Borel abiertos E, tales que $\mu(E) = 0$, donde $\mu(E) = 0$ significa que $\mu(F \cap E) = 0$ para todo conjunto F medible. Definimos el soporte de μ, como el complemento de U y lo denotaremos por $\operatorname{sop}\mu$.

Definición 1.15 *Diremos que una medida $\mu \in M_{\mathbb{R}}$ tiene soporte finito si el complemento de U es un conjunto finito.*

Observemos que el soporte es un conjunto Borel medible, pues es el complemento de un conjunto abierto que es medible. Notemos también que, en el caso de que el espacio sea separable, cualquier conjunto medible que no intersecte al soporte necesariamente tiene medida cero.

Teorema 1.10 *Si $J \in H^{*}(\Delta)$ entonces existe una medida compleja finita μ con soporte compacto $K \subseteq \Delta$ tal que*

$$J(f) = \int_K f d\mu \text{ para toda } f \in H(\Delta)$$

Demostración.

Como J es continua y lineal entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\rho(f, 0) < \delta$ entonces $|J(f)| < 1$. Por el lema 1.1, inciso 1), existen $\varepsilon > 0$ y $K \subseteq \Delta$ compacto con la propiedad de que, si $f \in H(\Delta)$ es tal que $\|f\|_K = \sup\{|f(z)| : z \in K\} < \varepsilon$, entonces $\rho(f, 0) < \delta$ y $|J(f)| < 1$. Ahora si $g \in H(\Delta)$, entonces la función $\frac{\varepsilon g}{2\|g\|_K}$ satisface que $\left\|\frac{\varepsilon g}{2\|g\|_K}\right\|_K < \varepsilon$ y por lo tanto $\left|J\left(\frac{\varepsilon g}{2\|g\|_K}\right)\right| < 1$ o de forma equivalente: $|J(g)| < \frac{2\|g\|_K}{\varepsilon}$ y así tenemos la siguiente propiedad:

$$|J(g)| < c\,\|g\|_K \text{ para toda } g \in H(\Delta)$$

Consideremos ahora el conjunto

$$M = \left\{\tilde{f} \in C(K) : \tilde{f} \text{ tiene una extensión analítica a } \Delta\right\}$$

Obsérvese que M es un subespacio lineal de $C(K)$. Ahora definamos $\tilde{J} : M \mapsto \mathbb{C}$ como sigue

$$\tilde{J}\left(\tilde{f}\right) = J(f) \text{ donde } f \text{ es una extensión analítica de } \tilde{f}.$$

$\bar{J}$ está bien definida, pues si f_0 y f_1 son dos extensiones de $\bar{f}$ entonces, y además $\|f_0 - f_1\|_K = 0$, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} |J(f_0) - J(f_1)| & = & |J(f_0 - f_1)| \\ & \leq & c\,\|f_0 - f_1\|_K \\ & = & 0 \end{array}$$

lo cuál implica que $J(f_0) = J(f_1)$. Además, notemos que $\bar{J}$ es lineal y continua en M (con la norma que hereda de $C(K)$ y que está dada por $\|\cdot\|_K$) pues se satisface la siguiente condición de Lipschitz

$$\left|\bar{J}(g)\right| < c\,\|g\|_K \text{ para toda } g \in M$$

Por lo tanto, por el teorema de Hahn-Banach existe una extensión $\bar{J}_0$ de $\bar{J}$ a todo $C(K)$, y por la observación 3 existe una única medida $\bar{\mu}$ tal que

$$\bar{J}_0(f) = \int_K f d\bar{\mu} \text{ para toda } f \in C(K)$$

Ahora definamos $\mu(A) = \bar{\mu}(A \cap K)$ con A boreliano de Δ. Se sigue que μ tiene soporte compacto, pues éste está contenido en K que es compacto y el soporte de μ es un conjunto cerrado por definición. Además notemos que si $h \in H(\Delta)$ entonces $h\,|_K$ es un elemento de M y entonces

$$\bar{J}_0(h\,|_K) = \bar{J}(h\,|_K) = J(h)$$

de donde obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{array}{rcl} J(h) & = & \bar{J}_0(h\,|_K) \\ & = & \int_K h\,|_K\, d\bar{\mu} \\ & = & \int_\Delta h d\mu \end{array}$$

con lo cual se obtiene la conclusión deseada. ■

Por último, recordemos que el espacio dual de un espacio de Banach es un espacio completo, y por tanto, $M_{\mathbb{R}}$ es un espacio de Banach. Aún cuando $M_{\bar{\mathbb{X}}}$ no es un espacio dual, y por tanto no se puede hablar de su w*-topología, el teorema de Riesz nos sugiere una manera de dotarlo de una topología de este tipo, de la siguiente manera. Una base para el sistema de vecindades (local) de $C^*_{\mathbf{R}}(\partial\Delta)$, está dado por:

$$N(\Lambda_0; A, \varepsilon) = \{\Lambda \in C^*_{\mathbf{R}}(\partial\Delta) : |\Lambda(f) - \Lambda_0(f)| < \varepsilon,\ f \in A \subseteq C_{\mathbf{R}}(\partial\Delta)\,,\ A \text{ finito}\}$$

de modo que podemos obtener el siguiente sistema de vecindades (local) para $M_{\mathbf{R}}$:

$$N(\mu_0; A, \varepsilon) = \left\{\mu \in M_{\mathbf{R}} : \left|\int_{\partial\Delta} f d\mu - \int_{\partial\Delta} f d\mu_0\right| < \varepsilon,\ f \in A \subseteq C_{\mathbf{R}}(\partial\Delta)\,,\ A \text{ finito}\right\}$$

A la topología generada por este sistema de vecindades la llamaremos la w*-topología de $M_{\mathbf{R}}$ inducida por $C_{\mathbf{R}}(\partial\Delta)$.

Proposición 1.8 *$M_{\mathbf{R}}$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo, con la w^*-topología para $M_{\mathbf{R}}$.*

Demostración. Sean $\mu, \nu \in N(\mu_0; A, \varepsilon)$ y $0 \leq a \leq 1$, queremos mostrar que

$$a\mu + (1-a)\,\nu \in N(\mu_0; A, \varepsilon)$$

y para esto hagamos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Delta} x\,da\mu + (1-a)\,\nu - \int_{\partial\Delta} x\,d\mu_0\right| &= \Big|a\int_{\partial\Delta} x\,d\mu + (1-a)\int_{\partial\Delta} x\,d\nu \\
&\quad - a\int_{\partial\Delta} x\,d\mu_0 - (1-a)\int_{\partial\Delta} x\,d\mu_0\Big| \\
&= \left|a\left(\int_{\partial\Delta} x\,d\mu - a\int_{\partial\Delta} x\,d\mu_0\right)\right| \\
&\quad + \left|(1-a)\left(\int_{\partial\Delta} x\,d\nu - \int_{\partial\Delta} x\,d\mu_0\right)\right| \\
&< a\varepsilon + (1-a)\,\varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

De donde se sigue el resultado. ■

Con esto respondemos a la pregunta de la sección anterior.

Continuaremos estudiando un subconjunto especial de $M_{\mathbf{R}}$, cuyas características son de suma importancia en el desarrollo del presente trabajo.

Sea P el conjunto de medidas de probabilidad, (una medida de probabilidad es una medida positiva y además la medida del espacio total es uno). De la definición de P y por el teorema de Alaoglu, se sigue inmediatamente que P es compacto y por el lema 1.6, P tiene puntos extremos, y por definición estos puntos extremos también son medidas de probabilidad. El concepto de medida de Dirac será esencial en la caracterización de los puntos extremos de ciertos conjuntos de medidas que definiremos posteriormente.

Definición 1.16 *Diremos que $\mu \in M_{\mathbb{R}}$ es una medida de Dirac, si existe $y \in \partial\Delta$*

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & si\ y \in E \\ 0 & si\ y \notin E \end{cases}$$

En general denotaremos a μ por δ^y.

Ahora estamos en condiciones de decir quienes son los puntos extremos de P:

Teorema 1.11 *El conjunto de puntos extremos de P consiste de medidas de Dirac.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [8].

El siguiente lema proporciona una caracterización de las medidas con soporte finito y que es básica a lo largo del presente trabajo.

Lema 1.8 *Una medida $\mu \in M_{\mathbb{R}}$ con soporte finito es una combinación de medidas de Dirac de la siguiente forma:*

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta^{x_i}$$

en donde los coeficientes a_i satisfacen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \int_{\partial\Delta} d\mu$$

y

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \|\mu\|$$

Demostración. Sea $\operatorname{sop}\mu = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Es claro que si E y E' son conjuntos medibles tales que $E \cap \operatorname{sop}\mu = E' \cap \operatorname{sop}\mu$ entonces $\mu(E) = \mu(E')$, pues

$$\begin{array}{rclcl} \mu(E) & = & \mu((E \cap \operatorname{sop}\mu) \cup (E \cap (\operatorname{sop}\mu)^c)) & = & \mu(E \cap \operatorname{sop}\mu) \\ \mu(E') & = & \mu((E' \cap \operatorname{sop}\mu) \cup (E' \cap (\operatorname{sop}\mu)^c)) & = & \mu(E' \cap \operatorname{sop}\mu) \end{array}$$

Ahora, como solo hay un número finito de puntos en $\operatorname{sop}\mu$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_i)$ no contiene a otro x_j si $i \neq j$. Definamos $a_i = \mu(B_\varepsilon(x_i))$ y la medida $\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta^{x_i}$; entonces debemos probar que $\mu = \nu$. Sea E un conjunto medible. Como $[\cup_{i=1}^{n}(E \cap B_\varepsilon(x_i))] \cap \operatorname{sop}\mu = E \cap \operatorname{sop}\mu$ se tiene que $\mu(\cup_{i=1}^{n}(E \cap B_\varepsilon(x_i)) = \mu(E)$ y por tanto,

$$\begin{array}{rcl} \mu(E) & = & \mu(\cup_{i=1}^{n}(E \cap B_\varepsilon(x_i))) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap B_\varepsilon(x_i)) \end{array}$$

Ahora afirmamos que

$$\mu(E \cap B_\varepsilon(x_i)) = \mu(B_\varepsilon(x_i))\delta^{x_i}(E)$$

pues si $x_i \notin E \cap B_\varepsilon(x_i)$ entonces

$$\mu(E \cap B_\varepsilon(x_k)) = 0 = \delta^{x_i}(E)$$

y si $x_i \in E \cap B_\varepsilon(x_i)$ entonces

$$E \cap B_\varepsilon(x_i) \cap \operatorname{sop}\mu = B_\varepsilon(x_i) \cap \operatorname{sop}\mu$$

y por tanto

$$\mu\{E \cap B_\varepsilon(x_i)\} = \mu\{B_\varepsilon(x_i)\} = \mu\{B_\varepsilon(x_i)\}\,\delta^{x_i}\{E\}$$

de donde se sigue que

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap B_\varepsilon(x_i)) & = & \sum_{i=1}^{n} \mu(B_\varepsilon(x_i))\delta^{x_i}(E) \\ & = & \nu(E) \end{array}$$

Por lo tanto $\mu = \nu$. Las dos últimas afirmaciones sobre los a_i se siguen fácilmente. ■

Restringiremos nuestra atención a los siguientes conjuntos:

$$M_{A,B} = \left\{ \mu \in M_{\mathbf{R}} : \int_{\partial\Delta} d\mu = A,\ \|\mu\| \leq B \right\},\ \text{con } B > 0 \text{ y } |A| \leq B$$

Tales conjuntos son lo suficientemente generales para nuestras necesidades, por ejemplo $M_{A,B}$ se reduce a P si $A = B = 1$. Veamos algunos resultados relacionados con la estructura básica de $M_{A,B}$, para los cuáles trabajaremos con la w*-topología de $M_{\mathbf{R}}$.

Lema 1.9 *$M_{A,B}$ es convexo y compacto en $M_{\mathbf{R}}$. Si $a = \frac{1}{2}(B + A)$; $b = \frac{1}{2}(B - A)$, entonces $M_{A,B} = aP - bP$. Los puntos extremos de $M_{A,B}$ son precisamente las medidas $a\delta^x - b\delta^y$, donde $|x| = |y| = 1$, $x \neq y$, y δ^x,δ^y son las medidas de Dirac en x y y respectivamente.*

Demostración. De la definición de $M_{A,B}$, se sigue que es la intersección de una bola cerrada en $M_{\mathbf{R}}$ (que por el teorema de Alaoglu es compacta) y un hiperplano cerrado formado por el conjunto $\left\{\mu \in M_{\mathbf{R}} : \int d\mu = A\right\}$. Por tanto, $M_{A,B}$ es compacto y convexo. Ahora sea $\mu \in M_{A,B}$ y sea $\mu = \mu_1 - \mu_2$ la descomposición de Jordan de μ. Sea ρ cualquier medida positiva (incluso la medida cero en el caso de que $B = \|\mu\|$) con $\|\rho\| = \frac{1}{2}(B - \|\mu\|)$.

Observemos que $\mu = (\mu_1 + \rho) - (\mu_2 + \rho)$ y además

$$\begin{aligned}
\|\mu_1 + \rho\| + \|\mu_2 + \rho\| &= (\mu_1 + \rho)(\partial\Delta) + (\mu_2 + \rho)(\partial\Delta) \\
&= \mu_1(\partial\Delta) + \mu_2(\partial\Delta) + 2\rho(\partial\Delta) \\
&= \|\mu\| + (B - \|\mu\|) \\
&= B
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|\mu_1 + \rho\| - \|\mu_2 + \rho\| &= (\mu_1 + \rho)(\partial\Delta) - (\mu_2 + \rho)(\partial\Delta) \\
&= (\mu_1 - \mu_2)(\partial\Delta) \\
&= \mu(\partial\Delta) \\
&= A
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \|\mu_1+\rho\| &= (\mu_1+\rho)(\partial\Delta) \\ &= \mu_1+\tfrac{1}{2}(B-[\mu_1+\mu_2])(\partial\Delta) \\ &= \tfrac{1}{2}(B+A) \\ &= a \end{aligned}$$

análogamente tenemos que $\|\mu_2+\rho\| = b$. Así si $p_1 = \frac{1}{a}(\mu_1+\rho)$ y $p_2 = \frac{1}{b}(\mu_2+\rho)$ entonces $\|p_1\| = \|p_2\| = 1$ y por lo tanto $p_1, p_2 \in P$. De lo anterior obtenemos que

$$\mu_1+\rho = ap_1 \text{ y } \mu_2+\rho = bp_2$$

Así tenemos la siguiente contención $M_{A,B} \subseteq aP - bP$. La contención contraria se sigue del hecho de que

$$\begin{aligned} \|ap_1-bp_2\| &\leq a+b \\ &= B \end{aligned}$$

y de que:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} d(ap_1-bp_2) &= a\int_{\partial\Delta} dp_1 - b\int_{\partial\Delta} dp_2 \\ &= A \end{aligned}$$

para cualesquiera p_1, $p_2 \in P$.

Ahora si $b=0$, $M_{A,B}$ se reduce a aP mientras que $a\delta^x - b\delta^y$ se reduce a $a\delta^x$. Así, la afirmación correspondiente a los puntos extremos se reduce al teorema 1.11. Análogamente si $a=0$. Para el resto de la prueba supondremos que $a,b>0$. Para probar que $a\delta^x - b\delta^y$ $(x \neq y)$ es un punto extremo de $M_{A,B}$, supongamos que podemos escribirlo como una combinación convexa propia de otros dos puntos de $M_{A,B}$ como sigue:

$$\begin{aligned} a\delta^x - b\delta^y &= t(ap_1-bp_2)+(1-t)(ap_3-bp_4) \\ &= a(tp_1+(1-t)p_3)-b(tp_2-(1-t)p_4) \\ &= ap_5-bp_6 \end{aligned}$$

en donde $0<t<1$ y $p_j \in P$ $(j=1...6)$. Evaluando $a\delta^x - b\delta^y$ y ap_5-bp_6 en un boreliano E que contenga a x pero no a y, tenemos lo siguiente:

$$a = ap_5(E) - bp_6(E)$$

o de forma equivalente

$$bp_6(E) = a\,(p_5(E) - 1)$$

si $p_5(E) \neq 1$ entonces $bp_6\,(E) < 0$, lo cuál es una contradicción, por lo tanto se sigue que, $p_5(E) = 1$ y $bp_6\,(E) = 0$, y al evaluar en un boreliano F que contenga a y pero no a x, se sigue que $p_6(F) = 1$. Así, hemos mostrado que $p_5 = \delta^x$, $p_6 = \delta^y$. Pero $\delta^x = tp_1 + (1-t)p_3$ y $\delta^y = tp_2 - (1-t)p_4$ y como cada medida de Dirac es un punto extremo de P, concluimos que $p_1 = p_3 = \delta^x$ y que $p_2 = p_4 = \delta^y$. Así, nuestra expresión de $a\delta^x - b\delta^y$ es trivial, y esta medida debe ser un punto extremo de $M_{A,B}$. Recíprocamente, sea $ap_1 - bp_2$ un punto extremo de $M_{A,B}$. Si $p_1 = tp_3 + (1-t)p_4$ con $0 < t < 1$, $p_3, p_4 \in P$, entonces

$$\begin{aligned} ap_1 - bp_2 &= a(tp_3 + (1-t)p_4) - bp_2 + tbp_2 - tbp_2 \\ &= t(ap_3 - bp_2) + (1-t)(ap4 - bp2) \end{aligned}$$

y además $ap_1 - bp_2 = ap_3 - bp_2 = ap_4 - bp_2$, pues $ap_1 - bp_2$ es un punto extremo, de aquí se sigue que $p_1 = p_3 = p_4$. Como consecuencia p_1 es un punto extremo de P, lo mismo pasa para p_2. Así, existen $x, y \in \partial\Delta$ tal que $ap_1 - bp_2 = a\delta^x - b\delta^y$. Finalmente si $x = y$, obtenemos una contradicción de la siguiente manera. Como

$$\|a\delta^x - b\delta^y\| = \|(a-b)\delta^x\| = |a-b| = |A| < B$$

existe $\sigma \in M_{\Re}$ con $0 < \|\sigma\| \leq B - |A|$ y $\sigma(\partial\Delta) = 0$. Notemos que esta elección de σ asegura que las medidas $(a-b)\,\delta^x + \sigma$ y $(a-b)\,\delta^x - \sigma \in M_{A,B}$. De lo anterior obtenemos

$$(a-b)\delta^x = \frac{1}{2}\,\{(a-b)\delta^x + \sigma\} + \frac{1}{2}\,\{(a-b)\delta^x - \sigma\}$$

lo cuál implica que $(a-b)\delta^x$ no es un punto extremo. ■

Observación 4 *Notemos que $M_{A,B}$, por el lema anterior, es un conjunto compacto y convexo. Entonces el teorema de Krein-Milman nos proporciona el siguiente resultado:*

$$M_{A,B} = c\bar{o}\,(a\delta^x - b\delta^y)$$

donde $|x| = |y| = 1$, $x \neq y$, *y* δ^x, δ^y *son las medidas de Dirac en* x *y* y *respectivamente, y además estos puntos extremos pertenecen a* $M_{A,B}$, *esto último es debido al teorema 1.7*

Ahora, para cada $\varphi \in C_{\mathbf{R}}(\partial\Delta)$, por la fórmula de Poisson, existe una única extensión a una función continua en $\bar{\Delta}$ y armónica en Δ. Abusaremos de la notación y utilizaremos el símbolo φ para denotar esta extensión. Para cada $\mu \in M_{A,B}$ y $\omega \in \bar{\Delta}$ la funcional $F : C_{\mathbf{R}}(\partial\Delta) \mapsto \mathbf{C}$, definida por $F(\varphi) = \int_{\partial\Delta} \varphi(\omega x) d\mu(x)$, es acotada y lineal en $C_{\mathbf{R}}(\partial\Delta)$. La linealidad se sigue de las propiedades de la integral y es acotada pues, por ser φ armónica,

$$\sup_{\bar{\Delta}} |\varphi| = \sup_{\partial\Delta} |\varphi| = \|\varphi\|$$

Calcularemos la norma de la funcional como sigue: Sea $\mu = \lambda - \nu$ la descomposición de Jordan de μ entonces:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\partial\Delta} \varphi(\omega x) d\mu(x) \right\| &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \int_{\partial\Delta} \varphi(\omega x) d\mu(x) \right| \\
&= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \int_{\partial\Delta} \varphi(\omega x) d\lambda(x) - \int_{\partial\Delta} \varphi(\omega x) d\nu(x) \right| \\
&\leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \int_{\partial\Delta} \varphi(\omega x) d\lambda(x) \right| + \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \int_{\partial\Delta} \varphi(\omega x) d\nu(x) \right| \\
&= \int_{\partial\Delta} d\lambda(x) + \int_{\partial\Delta} d\nu(x) \\
&= \|\lambda\| + \|\nu\| = \|\mu\|
\end{aligned}$$

y así la norma de la funcional es a lo más $\|\mu\|$. Por el teorema de representación de Riesz, tenemos lo siguiente:

$$F(\varphi) = \int_{\partial\Delta} \varphi(x) \, d\nu(x)$$

para una única $\mu_\omega = \nu \in M_{\mathbf{R}}$ que satisface $\|\mu_\omega\| \leq \|\mu\| \leq B$ y con

$$\int_{\partial\Delta} \varphi(\omega x) d\mu(x) = \int_{\partial\Delta} \varphi(x) d\mu_\omega(x), \text{ para toda } \varphi \in C_{\mathbf{R}}(\partial\Delta) \qquad \text{(s3)}$$

En particular, $A = \int_{\partial\Delta} d\mu(x) = \int_{\partial\Delta} d\mu_\omega(x)$ y por tanto, $\mu_\omega \in M_{A,B}$. Además podemos obtener dos valores especiales para μ_ω, como sigue: Por la propiedad del valor medio para funciones armónicas y por la unicidad en s3 tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta}\varphi(0)d\mu(x) &= \varphi(0)\int_{\partial\Delta}d\mu(x)\\
&= A\varphi(0)\\
&= \tfrac{A}{2\pi}\int_{\partial\Delta}\varphi(y)d\theta(y)\\
&= \int_{\partial\Delta}\varphi(y)\tfrac{A}{2\pi}d\theta(y)\\
&= \int_{\partial\Delta}\varphi(x)d\mu_0(x)
\end{aligned}$$

lo cuál implica que $\mu_0 = \frac{A}{2\pi}d\theta$, esto es, la constante A multiplicada por la medida de Lebesgue normalizada sobre $\partial\Delta$. Análogamente $\mu_1 = \mu$, ya que $\int_{\partial\Delta}\varphi(x)d\mu(x) = \int_{\partial\Delta}\varphi(x)d\mu_1(x)$ para toda $\varphi \in C_{\mathbf{R}}(\partial\Delta)$. Así, hemos probado el siguiente lema:

Lema 1.10 *Para cada $\mu \in M_{A,B}$ y para cada $\omega \in \bar{\Delta}$, existe una única $\mu_\omega \in M_{A,B}$ que satisface la fórmula (s3) y además $\mu_0 = \frac{A}{2\pi}d\theta$ y $\mu_1 = \mu$.*

Capítulo 2

Familias que se representan con un kernel.

En el presente capítulo expondremos las ideas que relacionan ciertas familias de funciones analíticas que se pueden representar por medio de un kernel con los conjuntos $M_{A,B}$.

2.1 Funciones definidas por un kernel

El siguiente lema será de mucha utilidad a lo largo de todo el trabajo, pues da condiciones para que la integral de ciertas funciones sea analítica con respecto a una variable:

Lema 2.1 *Sean, T un espacio medible, α una medida, real o compleja, finita sobre una σ-álgebra de subconjuntos de T, Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $k : \Omega \times T \mapsto \mathbb{C}$, con las siguientes propiedades:*

a) Para cada $t \in T$ el mapeo $z \mapsto k(z,t)$ es analítico en Ω

b) Para cada $z \in \Omega$ el mapeo $t \mapsto k(z,t)$ es medible en T.

c) Para cada conjunto compacto $E \subseteq \Omega$, k es acotada en $E \times T$.

Entonces el mapeo $\Phi(z) = \int_T k(z,t)d\alpha(t)$ es analítico en Ω con

$$\Phi'(z) = \int_T \frac{d}{dz}k(z,t)d\alpha(t)$$

Demostración. Para cada $z \in \Omega$, la integral que define a $\Phi(z)$ existe por b), pues $k(z,t)$ es medible en T para cada z fija, y por c) k es acotada en $\{z\} \times T$ además de la finitud de α. Para cada $z_0 \in \Omega$, sea $\delta' > 0$ tal que $B_{\delta'}(z_0) \subseteq \Omega$. Como, por a) para cada t, $k(z,t)$ es analítica, aplicando la fórmula de Cauchy obtenemos:

$$\frac{k(z,t)-k(z_0,t)}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{\delta'}(z_0)} \frac{k(\xi,t)}{(\xi-z_0)(\xi-z)}d\xi$$

Ahora escojamos $\delta = \frac{\delta'}{2}$. Entonces, si $0 < |z-z_0| < \delta$ tenemos

$$|\xi - z| \geq \delta' - |z-z_0| > \delta$$

lo cuál implica que $\frac{1}{|\xi-z|} < \frac{1}{\delta}$. Por c) k es acotado en $E \times T$ con $E = \left\{\xi : |\xi - z_0| = \delta'\right\}$ que es compacto, así que:

$$\left|\frac{k(z,t)-k(z_0,t)}{z-z_0}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{\delta'}(z_0)} \frac{k(\xi,t)}{(\xi-z_0)(\xi-z)}d\xi\right| \leq \frac{\bar{M}}{\delta^2} = M$$

Consideremos cualquier sucesión convergente $\{z_n\} \to z_0$ tal que $|z_n - z_0| < \delta$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y definamos las funciones integrables:

$$f_n(t) = \frac{k(z_n,t)-k(z_0,t)}{z_n - z_0}$$

Esta sucesión converge, cuando $n \to \infty$, a la función $f(t) = \frac{d}{dz}k(z_0,t)$; además están acotadas por lo antes dicho y M , pensada como una función constatnte. es integrable pues α es finita. Queremos mostrar que $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{\Phi(z)-\Phi(z_0)}{z-z_0}$ existe, lo cual es equivalente a mostrar que para cualquier sucesión convergente $\{z_n\} \to z_0$ el $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Phi(z_n)-\Phi(z_0)}{z-z_0}$ existe.

Como las hipótesis del teorema de convergencia dominada de Lebesgue se satisfacen, concluimos que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi(z_n)-\Phi(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{n\to\infty}\int_T f_n(t)\,d\alpha \\ &= \int_T \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,d\alpha \\ &= \int_T \frac{d}{dz}k(z_0,t)d\alpha(t)\end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$\Phi'(z_0)=\int_T \frac{d}{dz}k(z_0,t)d\alpha(t)$$

Con esto último se sigue el lema. ■

Las siguientes proposiciones establecen las propiedades básicas de las representaciones integrales del tipo que estudiaremos. Notemos que si la función $k(z,t)$ es una función continua sobre $\partial\Delta$, para cada z fija, entonces es una función integrable debido a la finitud de las medidas.

Tomaremos $T=\partial\Delta$ y como Ω al conjunto Δ.En las siguientes proposiciones tendremos como hipótesis las mismas del lema 2.1 sobre k, y consideraremos a la familia $\mathcal{F}_k=\{\Phi_\mu:\mu\in M_{A,B}\}$, donde $\Phi_\mu(z)=\int_{\partial\Delta}k(z,t)d\mu(t)$, $(z\in\Delta)$.

Lema 2.2 *Para cada $\mu\in M_{\mathbb{R}}$, sean*

$$\Phi_\mu(z)=\int_{\partial\Delta}k(z,t)d\mu(t),(z\in\Delta),\ y\ \mathcal{F}_\kappa=\{\Phi_\mu:\mu\in M_{A,B}\}$$

entonces $\mathcal{F}_k$ es equicontinua en Δ.

Demostración. Sean $K\subseteq\Delta$ un conjunto compacto y $\mu\in M_{A,B}$. Entonces por el inciso c) del lema 2.1, $k(z,t)$ es acotada en $K\times T$ y como $\mu\in M_{A,B}$ entonces $\|\mu\|\le B$. Así, para toda $\mu\in M_{A,B}$ y para toda $z\in K$ se tiene que

$$\begin{aligned}|\Phi_\mu(z)| &= \left|\int_{\partial\Delta}k(z,t)d\mu(t)\right| \\ &\le \int_{\partial\Delta}|k(z,t)|\,|d\mu(t)| \\ &\le M\,\|\mu\| \\ &\le MB\end{aligned}$$

Por el lema 1.2 $\mathcal{F}_k$ es localmente acotado y por el teorema de Montel es normal. Por lo tanto, por el teorema de Arzela-Ascoli la familia $\mathcal{F}_k$ es equicontinua en Δ. ■

Notemos que la demostración de este lema es independiente de que la medida μ. satisfaga la condición $\int_{\partial\Delta} d\mu = A$, de hecho si la familia $\mathcal{F}_\kappa$ se define sobre el conjunto $M_B = \{\mu \in M_{\mathbf{R}} : \|\mu\| \leq B\}$ como $\mathcal{F}_\kappa = \{\Phi_\mu : \mu \in M_B\}$ entonces $\mathcal{F}_\kappa$ es equicontinua en Δ

Proposición 2.1 *Cada función en $\mathcal{F}_k$ es analítica en Δ.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del lema 2.1. ■

Proposición 2.2 *El mapeo $\mu \mapsto \Phi_\mu$ es continuo de M_B en $H(\Delta)$ (con la w^*-topología sobre $M_{\mathbf{R}}$).*

Demostración.. Sea $\mu_0 \in M_B$. Debemos mostrar que para cualquier compacto $K \subseteq \Delta$, y para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una vecindad N de μ_0 tal que:

$$\left|\Phi_\mu(z) - \Phi_{\mu_0}(z)\right| < \varepsilon \ (z \in K,\ \mu \in N \cap M_B)$$

Una base para el sistema de vecindades de μ_0 es la colección de todos los conjuntos de la forma:

$$N = \left\{\mu \in M_{\mathbf{R}} : \left|\int_{\partial\Delta} h_j d\mu - \int_{\partial\Delta} h_j d\mu_0\right| < \eta,\ 1 \leq j \leq n\right\}$$

con $n \in \mathbb{N}$, $h_j \in C(\partial\Delta)$, $(1 \leq j \leq n)$, $\eta > 0$. Más aún, si $h_j \in C(\partial\Delta)$, $(1 \leq j \leq n)$ son complejo valuadas, la colección resultante también es una base de vecindades local de μ_0. Como $\mathcal{F}_k$ es equicontinua, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in K$ con $|x - y| < \delta$ entonces $|\Phi_\mu(x) - \Phi_\mu(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para toda $\mu \in M_B$. Consideremos $B_{\frac{\delta}{3}}(z)$ $(z \in K)$ que es una cubierta abierta de K. Por lo tanto existen $z_1, \ldots, z_n \in \Delta$ tales que $\cup_{j=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{3}}(z_j) \supseteq K$. Sea $h_j(x) = k(z_j, x)$ $(1 \leq j \leq n)$. Notemos que se satisface la siguiente propiedad: Para cada $z \in K$, existe z_j $(1 \leq j \leq n)$, tal que:

$$|\Phi_\mu(z) - \Phi_\mu(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para toda } \mu \in M_B$$

Así

$$\left|\Phi_\mu(z) - \Phi_{\mu_0}(z)\right| \leq |\Phi_\mu(z) - \Phi_\mu(z_j)| + \left|\Phi_\mu(z_j) - \Phi_{\mu_0}(z_j)\right| + \left|\Phi_{\mu_0}(z_j) - \Phi_{\mu_0}(z)\right| < \varepsilon$$

con lo cual se sigue la proposición. ■

Recordemos que en el lema 1.9se definieron los valores de a y de b como sigue: $a = \frac{1}{2}(B + A)$ y $b = \frac{1}{2}(B - A)$.

Proposición 2.3 *$\mathcal{F}_k$ es compacto y es el casco convexo cerrado del conjunto de funciones*

$$\{z \mapsto ak(z,x) - bk(z,y) : x, y \in \partial\Delta\}$$

Demostración. Por la proposición 2.2 y porque $M_{A,B}$ es compacto y convexo, se sigue que $\mathcal{F}_k$ es compacto y convexo. Ahora, si $\Phi_\mu \in \mathcal{F}_k$, entonces $\mu \in M_{A,B}$ y por el teorema 1.6 μ es el límite de una sucesión de combinaciones convexas de puntos extremos de $M_{A,B}$. Recordemos que para toda sucesión $\{\mu_n\} \in M_{\overline{\lambda}}$, $\{\mu_n\} \to \mu$ si y sólo si $\int_T g d\mu_n \to \int_T g d\mu$ para toda g acotada. Entonces tenemos que Φ_μ es el límite de una sucesión de combinaciones convexas de funciones $z \mapsto ak(z,x) - bk(z,y)$ y por lo tanto:

$$\mathcal{F}_k \subseteq c\bar{o}\{z \mapsto ak(z,x) - bk(z,y) : x, y \in \partial\Delta\}$$

Como $\{z \mapsto ak(z,x) - bk(z,y) : x, y \in \partial\Delta\} \subseteq \mathcal{F}_k$ y como $\mathcal{F}_k$ es convexo y cerrado se obtiene la contención deseada.lo cual implica que $\Phi_\nu \in \mathcal{F}_k$. ■

Proposición 2.4 *Si $\Phi \in \mathcal{F}_k$ es un punto extremo de $\mathcal{F}_k$ entonces Φ es una función de la forma $ak(z,x) - bk(z,y)$. Si el mapeo $\mu \mapsto \Phi_\mu$ es uno-a-uno (inyectiva), entonces* *las funciones* $z \mapsto ak(z,x) - bk(z,y)$, $(x, y \in \partial\Delta)$, *son los únicos puntos extremos de* $\mathcal{F}_k$.

Demostración. Sea Φ cualquier punto extremo de $\mathcal{F}_k$. De la proposición 2.2 y dado que $M_{A,B}$ es compacto, se sigue que el conjunto $\Lambda = \{\mu : \mu \in M_{A,B}, \Phi_\mu = \Phi\}$ es compacto y por lo tanto tiene un punto extremo ν. Notemos que Λ es un conjunto extremo de $M_{A,B}$, pues si suponemos que $\mu \in \Lambda$ con $\mu = t\lambda + (1-t)\xi$ para $\lambda, \xi \in M_{A,B}$ y $0 < t < 1$, entonces $\Phi = t\Phi_\lambda + (1-t)\Phi_\xi$, por lo que $\Phi = \Phi_\lambda = \Phi_\xi$ y entonces $\lambda, \xi \in \Lambda$. Así, por el teorema 1.7, ν debe ser un punto extremo de $M_{A,B}$. Por tanto ν es de la forma $a\delta^x - b\delta^y$ y $\Phi(z) = \Phi_\nu(z) = ak(z,x) - bk(z,y)$ para algunos $x, y \in \partial\Delta$.

Ahora supongamos que el mapeo es uno-a-uno y que la función

$$z \mapsto ak(z, x_0) - bk(z, y_0)$$

no es extremo. Entonces

$$ak(z, x_0) - bk(z, y_0) = t\Phi_\mu(z) + (1-t)\Phi_\nu(z) \qquad 0 < t < 1,\ \mu, \nu \in M_{A,B},\ \mu \neq \nu$$

Como $t\Phi_\mu(z) + (1-t)\Phi_\nu(z) = \Phi_\lambda$, con $\lambda = t\mu + (1-t)\nu$, se tiene que λ no es un punto extremo de $M_{A,B}$, es decir, λ no es de la forma $a\delta^x - b\delta^y$ mientras que $ak(z, x_0) - bk(z, y_0) = \Phi_\lambda(z) = \int_T k(z,x)d\lambda(x)$, con lo cual se contradice que el mapeo es uno-a-uno. Así, si el mapeo $\mu \mapsto \Phi_\mu$ es uno-a-uno entonces cada función $z \mapsto ak(z,x) - bk(z,y)$, $(x, y \in \partial\Delta)$, es un punto extremo de $\mathcal{F}_k$. ■

De las proposiciones anteriores podemos concluir el siguiente corolario:

Corolario 2.1 *Dado* $\phi \in H(\Delta)$, $\mu \in M_{\mathbf{R}}$, *entonces el mapeo* $\Phi_\mu(z) = \int_{\partial\Delta} \phi(xz)d\mu(x)$ *con* $z \in \Delta$ *es analítica y el mapeo* $\mu \mapsto \Phi_\mu$ *es continuo de* M_B *en* $H(\Delta)$.

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata de las proposiciones 2.1 y 2.2 con $k(z,x) = \phi(xz)$. ■

Observación 5 *De las proposiciones anteriores se deduce que cada medida $\mu \in M_{\mathbb{R}}$ determina una única función analítica. Además, notemos que el mapeo que va de $M_{\mathbb{R}}$ en $H(\Delta)$ no es un mapeo uno-a-uno, sin embargo al trabajar con familias especiales logramos que este mapeo sea uno-a-uno. Así pues, estudiar problemas extremos sobre familias de funciones analíticas del tipo $\mathcal{F}_k$, es equivalente a estudiar problemas extremos sobre conjuntos de medidas $M_{A,B}$. Más aún, el teorema de Jordan, nos permite estudiar al conjunto de medidas propiamente dichas, es decir, aquellas medidas μ, tales que $\mu \geq 0$.*

Los resultados mencionados anteriormente se dirigen hacia la resolución de problemas extremos del tipo siguiente: Dada una familia arbitraria $\mathcal{F} \subseteq H(\Delta)$ y $J \in H^*(\Delta)$, con parte real de J no constante, encontrar

$$\max \{\operatorname{Re} J(f) : f \in \mathcal{F}\}$$

Además deseamos dar una caracterización de las propiedades que debe tener una función F que satisfaga

$$\operatorname{Re} J(F) \geq \operatorname{Re} J(f) \text{ para toda } f \in \mathcal{F}$$

Generalmente este tipo de problemas puede o no tener solución, sin embargo, de la teoría básica de análisis, si $\mathcal{F}$ es compacto entonces existe una solución a tal tipo de problemas. Además, los teoremas 1.6 y 1.7 muestran la siguiente relación

$$ext(c\bar{o}(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{F} \subseteq c\bar{o}(\mathcal{F})$$

donde $ext(c\bar{o}(\mathcal{F}))$ denota el conjunto de puntos extremos de $c\bar{o}(\mathcal{F})$. El siguiente teorema nos permite buscar el máximo para la familia $\mathcal{F}$ en el conjunto más pequeño $ext(c\bar{o}(\mathcal{F}))$, y más aún, la proposición 2.4 afirma que al menos existe una solución de la forma

$$ak(z,x) - bk(z,y) \text{ con } x \neq y \text{ y } x, y \in \Delta$$

Teorema 2.1 *Sean $\mathcal{F} \subseteq H(\Delta)$ compacto y $J \in H^*(\Delta)$. Entonces:*

$$\begin{aligned} \max\{\operatorname{Re} J(f) : f \in \mathcal{F}\} &= \max\{\operatorname{Re} J(f) : f \in c\bar{o}(\mathcal{F})\} \\ &= \max\{\operatorname{Re} J(f) : f \in ext(c\bar{o}(\mathcal{F}))\} \end{aligned}$$

Demostración. Por el teorema de Mazur $c\bar{o}(\mathcal{F})$ es un conjunto compacto y por tanto los máximos sobre $\mathcal{F}$ y $c\bar{o}(\mathcal{F})$ existen. Además, como ya se dijo:

$$ext(c\bar{o}(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{F} \subseteq c\bar{o}(\mathcal{F})$$

Así pues basta con probar que los maximos correspondientes a los conjuntos en los extremos son iguales, para lo cual consideremos el conjunto

$$G = \{f \in c\bar{o}(\mathcal{F}) : \operatorname{Re} J(f) = M\}$$

donde $M = \max\{\operatorname{Re} J(f) : f \in c\bar{o}(\mathcal{F})\}$. Entonces G es no vacío, compacto y además es un conjunto extremo de $c\bar{o}(\mathcal{F})$, pues si $h \in G$ y $h = \alpha f + (1-\alpha) g$ con $0 < \alpha < 1$ y $f, g \in c\bar{o}(\mathcal{F})$, entonces

$$M = \operatorname{Re} J(h) = \alpha \operatorname{Re} J(f) + (1-\alpha) \operatorname{Re} J(g) \leq \alpha M + (1-\alpha) M = M$$

Entonces, si $f, g \notin G$ tendríamos que $M < M$. Por tanto G es un conjunto extremo de $c\bar{o}(\mathcal{F})$. Así, existe f_0 punto extremo de G y por tanto, $f_0 \in ext(c\bar{o}(\mathcal{F}))$. Por último $f_0 \in \mathcal{F}$. lo cual implica que el tercer máximo existe y es igual a los dos primeros. ■

Así el conjunto de puntos extremos de $c\bar{o}(\mathcal{F})$, juega un papel importante en el comportamiento de la familia $\mathcal{F}$.

Observación 6 *Notemos que, como las familias $\mathcal{F}_k$ son compactas y convexas, se tiene que $ext(c\bar{o}(\mathcal{F}))$ es precisamente $ext(\mathcal{F})$*

Hay varias familias importantes de funciones analíticas que están dadas por fórmulas integrales y que involucran al conjunto P de medidas de probabilidad sobre $\partial\Delta$.

Muchos autores han estudiado problemas extremos para tales familias utilizando métodos variacionales, que con frecuencia son complicados. Como se puede ver en [8], estos mismos métodos muestran que cualquier solución a un problema de maximización sobre una de estas familias, está asociada con una medida que consiste de un número finito de puntos masa. Esto sugiere la posibilidad de un sólo problema extremo para el conjunto de medidas P lo suficientemente general tal que las soluciones estén siempre compuestas de un número finito de puntos masa. Nuestros teoremas principales nos permitirán manejar simultáneamente todas las familias de funciones y eliminar la necesidad de las fórmulas variacionales para cada una de ellas, además de dar condiciones sobre J para incluir funciones que no sólo sean lineales.

2.2 Funciones univalentes y fórmula de Herglotz

En esta sección presentaremos algunos resultados básicos sobre las funciones llamadas univalentes. Además definiremos algunas familias de funciones univalentes que ellas mismas, o sus cascos convexos, tienen una representación de la forma:

$$\mathcal{F}_k = \left\{ \Phi_\mu (z) = \int_{\partial\Delta} k(x,z)d\mu(x),\, \mu \in M_{1,1} \right\}$$

Esto último lo mostraremos vía la fórmula de Herglotz. Así pues, todos los resultados de la sección anterior son aplicables a estas familias. Es importante notar que todas estas familias se encuentran relacionadas con el conjunto P. Veamos algunas definiciones.

Definición 2.1 *Una función f definida en D, es univalente en D, si f es uno-a-uno (inyectiva) en D.*

Proposición 2.5 *Si $f \in H(\Delta)$ es univalente en Δ, entonces $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in \Delta$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, existe $z_0 \in \Delta$ tal que $f'(z_0) = 0$. esto implica que $f(z) - f(z_0)$ tiene un cero de orden k mayor o igual a 2 en z_0. Como f es no constante, los ceros de $f(z) - f(z_0)$ y $f'(z)$ son aislados. Así, existen $\delta, m > 0$ tales que sobre el círculo $|z - z_0| = \delta$, $|f(z) - f(z_0)| \geq m > 0$ y $f'(z) \neq 0$ para $0 < |z - z_0| \leq \delta$. Por el teorema de Rouché concluimos, que para $0 < \eta < \min\{1, m\}$, $f(z) - f(z_0) - \eta$ tiene k ceros dentro de $|z - z_0| \leq \delta$. Notemos que un cero de estos tiene que ser un cero simple, pues $f'(z) \neq 0$ para $|z - z_0| \leq \delta$, $z \neq z_0$, entonces $f(z) = f(z_0) + \eta$ para k puntos diferentes, con lo cual contradecimos la hipótesis de que f es uno-a-uno ya que $k \geq 2$. ■

Sea $f \in H(\Delta)$ univalente, en particular $f'(0) \neq 0$, así pues, definamos g como $g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f'(0)}$, entonces $g \in H(\Delta)$, g es univalente y además $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$. Con base en esta construcción fijaremos nuestra atención sólo en el siguiente conjunto:

$$S = \{f \in H(\Delta) : f(0) = 0,\ f'(0) = 1 \text{ y } f \text{ es univalente en } \Delta\}$$

Se puede demostrar que S es una familia uniformemente acotada, la prueba de este hecho se puede encontrar en [8]. Notemos que si $f \in S$ entonces f tiene un desarrollo en series de potencias de la forma $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Ahora consideremos las siguientes familias de S.

$$\begin{aligned}
S^* &= \{f \in S : f(\Delta) \text{ es convexo con respecto al origen}\}\\
\mathcal{P} &= \{f \in H(\Delta) : \operatorname{Re} f(z) > 0 \ z \in \Delta\}\\
K &= \{f \in S : f(\Delta) \text{ es un conjunto convexo}\}
\end{aligned}$$

Los siguientes teoremas, cuyas demostraciones se encuentran en [8], proporcionan caracterizaciones analíticas de las familias anteriores.

Teorema 2.2 *$f \in S^*$ si y sólo si* $\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$ *para* $z \in \Delta$.

Teorema 2.3 *$f \in K$ si y sólo si $f \in S$ y* $\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right) > 0$ *para* $z \in \Delta$.

Teorema 2.4 *$f \in K$ si y sólo si* $g(z) = zf'(z) \in S^*$.

Teorema 2.5 *K es un subconjunto compacto de S.*

Observación 7 *Notemos lo siguiente: $f \in S^*$ si y sólo si $f \in S$ y $p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$. Si $f(\Delta)$ es un conjunto convexo entonces $f(\Delta)$ es convexo con respecto al origen y por lo tanto $K \subseteq S^*$.*

El siguiente teorema, mejor conocido como la fórmula de Herglotz, proporciona una representación integral del tipo que más frecuentemente se utiliza en problemas de maximización. Esta fórmula caracteriza a las funciones analíticas con parte real no negativa y las relaciona con la clase de funciones no decrecientes sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

Teorema 2.6 *Una función f es analítica en Δ y satisface $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ $(|z| < 1)$ si y sólo si existe una función no decreciente μ sobre $[0, 2\pi]$ tal que:*

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) + ib$$

con $b \in \mathbb{R}$. Más aún, si μ es normalizada $\left(\mu(t) = \frac{1}{2}\mu(t^-) + \frac{1}{2}\mu(t^+)\right)$, entonces μ es única.

La prueba de este hecho se puede encontrar en [8]. Es importante notar que la clase de funciones no decrecientes normalizadas se puede interpretar como el conjunto $M_{1,1}$, pues dada una función no decreciente normalizada $f : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ definimos la medida de probabilidad μ como sigue: Dado un intervalo abierto $(a, b) \subseteq [0, 2\pi]$ definimos $\mu((a, b)) = f(b) - f(a)$, y extendemos esta relación a todos los borelianos de $[0, 2\pi]$. Ahora dada $\mu \in M_{1,1}$, definimos la siguiente función $f : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ como sigue: $f(x) = \mu((0, x))$. Notemos que esta función es no decreciente y normalizada. Estudiaremos algunos resultados que relacionan esta fórmula y nuestras proposiciones de la sección anterior. Así pues, consideremos la familia $\mathcal{P}$ antes descrita, el siguiente corolario al teorema anterior proporciona una representación integral para esta familia.

Corolario 2.2 *$p \in \mathcal{P}$ si y sólo si existe una medida $\mu \in M_{1,1}$ tal que*

$$p(z) = \int_{\partial\Delta} \frac{1+xz}{1-xz} d\mu(x)$$

La correspondencia entre $\mathcal{P}$ y $M_{1,1}$ dada por la fórmula anterior es uno a uno.

Demostración. Notemos que $\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t)$ se puede expresar como $\int_{\partial\Delta} \frac{x+z}{x-z} d\mu(t)$ así si hacemos el cambio de variable $x \to \bar{x}$ entonces tenemos

$$\int_{\partial\Delta} \frac{x+z}{x-z} d\mu(t) = \int_{\partial\Delta} \frac{\bar{x}+z}{\bar{x}-z} d\mu(t) = \int_{\partial\Delta} \frac{1+xz}{1-xz} d\mu(t)$$

Ahora para probar que la correspondencia es uno-a-uno supongamos que $p, q \in \mathcal{P}$, con $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ y $q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n$, como $p(z) = q(z)$ si y sólo si $p_n = q_n$ y además

$$\begin{aligned} p_n &= 2\int_{\partial\Delta} x^n d\mu \\ q_n &= 2\int_{\partial\Delta} x^n d\nu \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\int_{\partial\Delta} x^n d\mu = \int_{\partial\Delta} x^n d\nu$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\mu = \nu$ ■

Teorema 2.7 *Si $\mathcal{F}_k = \left\{\Phi_\mu(z) = \int_{\partial\Delta} \frac{z}{1-xz} d\mu(x),\ \mu \in M_{1,1}\right\}$, entonces $\mathcal{F}_k = c\bar{o}(K)$, y además el mapeo $\mu \mapsto \Phi_\mu$ es uno-a-uno, y los puntos extremos de $c\bar{o}(K)$ son las funciones $z \mapsto \frac{z}{1-xz}$ con $x \in \partial\Delta$.*

Demostración. Sólo basta probar que $\mathcal{F}_k = c\bar{o}(K)$ y que el mapeo $\mu \mapsto \Phi_\mu$ es uno-a-uno. La afirmación correspondiente a los puntos extremos se sigue inmediatamente de la proposición 2.4. Ahora, como cada función $z \mapsto \frac{z}{1-xz}$ con $x \in \partial\Delta$ pertenece a K, de la proposición 2.3 tenemos que $\mathcal{F}_k \subseteq c\bar{o}(K)$. Ahora sea $f \in K$, entonces $\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$ para toda $z \in \Delta$ (ver [8] pág.. 16) y así la función $\frac{2f(z)}{z-1}$ tiene parte real positiva para toda $z \in \Delta$ y además esta normalizada. Así, la fórmula de Herglotz implica que existe $\mu \in M_{1,1}$ tal que $\frac{2f(z)}{z-1} = \int_{\partial\Delta} \frac{x+z}{x-z} d\mu(x)$, de donde $f(z) = \int_{\partial\Delta} \frac{z}{1-\frac{z}{x}} d\mu(x)$ y por lo tanto $f \in \mathcal{F}_k$. Como $\mathcal{F}_k$ es un conjunto compacto y convexo se sigue la contención deseada y así $\mathcal{F}_k = c\bar{o}(K)$. Ahora supongamos que $\Phi_{\mu_1} = \Phi_{\mu_2}$, entonces $\int_{\partial\Delta} \frac{z}{1-\frac{z}{x}} d\mu_1(x) = \int_{\partial\Delta} \frac{z}{1-\frac{z}{x}} d\mu_2(x)$ lo cuál implica que $\int_{\partial\Delta} \frac{x+z}{x-z} d\mu_1(x) = \int_{\partial\Delta} \frac{x+z}{x-z} d\mu_2(x)$ y por la unicidad de la fórmula de Herglotz, se sigue que $\mu_1 = \mu_2$. ■

Lema 2.3 *$L : K \mapsto S^*$ definida por $L(f) = zf'(z)$ es un homeomorfismo lineal.*

Demostración. La linealidad es clara. Como K es compacto, basta con probar que L es una biyección continua . Es claro que L es continua, pues por el teorema 1.1, el mapeo $f \mapsto f'$ es continua. Ahora supongamos que $L(f(z)) = L(g(z))$ esto implica que, para $z \neq 0$, $f'(z) = g'(z)$, lo cual quiere decir que f y g solo difieren por una constante, pero como $f, g \in K$, $f(0) = g(0) = 0$, por lo que L es uno-a-uno. Ahora sea $g \in S^*$ y definamos $f(z) = \int_0^z \frac{g(\xi)}{\xi} d\xi$. Notemos que el integrando tiene una extensión analítica al disco Δ pues, $\lim_{\xi \to 0} \frac{g(\xi)}{\xi} = 1$. Ahora, como $zf'(z) = g(z)$ para toda $z \in \Delta$, por el teorema 2.4 se sigue que $f \in K$ y que $L(f) = g$, con lo que mostramos que L es biyectiva. ■

Teorema 2.8 *Si $\mathcal{F}'_k = \left\{\Phi_\mu(z) = \int_{\partial\Delta} \frac{z}{(1-xz)^2} d\mu(x),\ \mu \in M_{1,1}\right\}$, entonces $\mathcal{F}'_k = c\bar{o}(S^*)$, además el mapeo $\mu \mapsto \Phi_\mu$ es uno-a-uno, y los puntos extremos de $c\bar{o}(S^*)$ son las funciones $z \mapsto \frac{z}{(1-xz)^2}$ con $x \in \partial\Delta$.*

Demostración. Sea L definida como en el lema anterior, probaremos las siguientes igualdades:

$$c\bar{o}(S^*) = c\bar{o}(L(K)) = L(c\bar{o}(K)) = L(\mathcal{F}_k) = \mathcal{F}'_k$$

la primera igualdad es obvia, lo mismo que la penúltima, así que solo probaremos las siguientes igualdades:

$$c\bar{o}\left(L\left(K\right)\right) = L\left(c\bar{o}\left(K\right)\right) \text{ y que } L\left(\mathcal{F}_k\right) = \mathcal{F}'_k$$

i) $c\bar{o}\left(L\left(K\right)\right) = L\left(c\bar{o}\left(K\right)\right)$. Si $h \in c\bar{o}\left(L\left(K\right)\right)$, entonces

$$h = \lim_{n\to\infty} L\left(k_n\right) = L\left(\lim_{n\to\infty} k_n\right)$$

donde cada $k_n \in K$. Como K es compacto, existe una subsucesión $\{k_{n_j}\}$ de $\{k_n\}$ convergente, digamos a $k \in c\bar{o}(K)$, lo cual implica que

$$h\left(z\right) = L\left(k\left(z\right)\right) \text{ y } c\bar{o}\left(L\left(K\right)\right) \subseteq L\left(c\bar{o}\left(K\right)\right)$$

Ahora sea $L\left(h\right) \in L\left(c\bar{o}\left(K\right)\right)$ esto implica que $h = \lim_{n\to\infty} k_n$ con $\{k_n\} \subseteq K$, así

$$L\left(h\right) = L\left(\lim_{n\to\infty} k_n\right) = \lim_{n\to\infty} L\left(k_n\right)$$

de donde se sigue que $L\left(h\right) \in c\bar{o}\left(L\left(K\right)\right)$.

ii)$L\left(\mathcal{F}_k\right) = \mathcal{F}'_k$. Si $f \in \mathcal{F}_k$, entonces $f\left(z\right) = \int_{\partial\Delta} \frac{z}{1-xz} d\mu\left(x\right)$, y

$$\begin{aligned} L\left(f\left(z\right)\right) &= z\left(\int_{\partial\Delta} \tfrac{z}{1-xz} d\mu\left(x\right)\right)' \\ &= z\left(\int_{\partial\Delta} \tfrac{1-xz+xz}{\left(1-xz\right)^2} d\mu\left(x\right)\right) \\ &= \int_{\partial\Delta} \tfrac{z}{\left(1-xz\right)^2} d\mu\left(x\right) \end{aligned}$$

con lo cuál tenemos $L\left(\mathcal{F}_k\right) \subseteq \mathcal{F}'_k$ para la otra contención sea $f \in \mathcal{F}'_k$ se sigue que $f\left(z\right) = \int_{\partial\Delta} \frac{z}{\left(1-xz\right)^2} d\mu\left(x\right)$, $\mu \in M_{1,1}$. Así, si consideramos $g\left(z\right) = \int_{\partial\Delta} \frac{z}{1-xz} d\mu\left(x\right) \in \mathcal{F}_k$, entonces $f\left(z\right) = L\left(g\left(z\right)\right) \in L\left(\mathcal{F}_k\right)$.

■

Ahora supongamos que tenemos un problema de maximización sobre alguna de estas familias $(K, \mathcal{P}$ o $S^*)$. El teorema 2.1 nos dice que una solución se encuentra en el conjunto de puntos extremos del casco convexo cerrado de la familia, y por lo tanto nos proporciona la forma que debe tener esta solución, a saber,

$$z \mapsto ak(z,x) - bk(z,y) = k(z,x)$$

(Nótese que cada una de estas familias se encuentra relacionada con el conjunto $M_{1,1}$, y algún kernel k, por lo que en este caso $a = 1$ y $b = 0$. Además, estas funciones son las que corresponden a los puntos extremos de $M_{1,1}$). En el siguiente capítulo caracterizaremos la forma que deben tener todas las soluciones a un problema de maximización sobre una familia $\mathcal{F}$ de funciones que se puedan representar con alguna fórmula integral y que involucren a los conjuntos $M_{A,B}$, y daremos un método para transformar problemas sobre la familia $\mathcal{F}$ a problemas sobre el conjunto $M_{A,B}$ correspondiente.

Capítulo 3

Los teoremas principales

En el capítulo anterior, desarrollamos la herramienta necesaria para caracterizar una solución del siguiente problema: Dada una familia compacta $\mathcal{F} \subseteq H(\Delta)$ que tiene una representación integral por medio de un kernel y una funcional $J \in H^{*}(\Delta)$ con parte real no constante sobre $\mathcal{F}$, encontrar el $\max\{\operatorname{Re} J(f) : f \in \mathcal{F}\}$. El teorema 2.1 nos permite buscar una solución en el conjunto de los puntos extremos del casco convexo de la familia. El teorema 1.7 afirma que esta solución debe pertenecer a la familia $\mathcal{F}$, todo esto bajo el supuesto de que existe una correspondencia entre la familia y algún conjunto $M_{A,B}$ pues es en éste último conjunto donde se aplican los dos teorema citados. Notemos que el kernel, con el cual representamos a la familia, solo debe satisfacer las hipótesis del lema 2.1. En el presente capítulo daremos una aplicación de la versión lineal del teorema principal, restringiendonos a familias que se representan por medio de un kernel específico, para lo cual veamos lo siguiente: Dada una familia compacta $\mathcal{F} \subseteq H(\Delta)$ y J una funcional con parte real no constante sobre $\mathcal{F}$, el problema de encontrar el $\max\{\operatorname{Re} J(f) : f \in \mathcal{F}\}$ se puede replantear, en el caso en que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\phi}$, donde $\mathcal{F}_{\phi} = \{\Phi_{\mu} : \mu \in M_{A,B}\}$ y $\Phi_{\mu}(z) = \int_{\partial\Delta} \phi(zx)\, d\mu(x)$ $(z \in \Delta)$, y $\phi \in H(\Delta)$, de la siguiente forma . Definamos $L : M_{\mathfrak{X}} \longmapsto \mathbb{R}$ como sigue: $L(\mu) = \operatorname{Re} J(\Phi_{\mu})$, entonces L es continua (además de lineal) en $M_{A,B}$ y se tiene, de la definición de L, que

$$\begin{aligned}\max\{\operatorname{Re} J(f) : f \in \mathcal{F}\} &= \max\{\operatorname{Re} J(\Phi_\mu) : \Phi_\mu \in \mathcal{F}_\phi\}\\ &= \max\{L(\mu) : \mu \in M_{A,B}\}\end{aligned}$$

Así, tenemos un método para trasladar problemas de maximización sobre una familia $\mathcal{F}$ a problemas de maximización sobre conjuntos $M_{A,B}$. Así, de lo dicho anteriormente, una de las soluciones a éste problema se puede escribir en términos de los puntos extremos de $M_{A,B}$. En los teoremas principales de este capítulo caracterizaremos todas las soluciones a un problema de este tipo. Así pues, veamos algunos resultados previos, necesarios para la demostración de la versión lineal del teorema principal.

Teorema 3.1 *Sea f una función analítica en $\bar{\Delta}$. Si $f(e^{i\theta})$ está en una línea recta para un número infinito de valores de θ, entonces f es constante en $\bar{\Delta}$.*

Demostración. Supongamos que la línea recta es el eje imaginario, de lo contrario una rotación y una traslación nos lleva a este caso. Si $g(z) = \frac{1}{2}\left[f(z) + \bar{f}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right]$ entonces g es una función analítica en alguna vecindad de $\partial\Delta$ y $g(e^{i\theta}) = \operatorname{Re} f(e^{i\theta})$ para $\theta \in [0, 2\pi)$, entonces g se anula en un conjunto infinito con un punto de acumulación en su dominio de analiticidad, y entonces g se anula en todo su dominio, en paticular, $\operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = 0$ para $\theta \in [0, 2\pi)$ luego por el principio del máximo para funciones armónicas, tenemos que $\operatorname{Re} f(z) = 0$ para $z \in \bar{\Delta}$, así f es constante en $\bar{\Delta}$. ■

Corolario 3.1 *Si u es armónica en $\bar{\Delta}$ y u es constante para un número infinito de puntos en $\partial\Delta$, entonces u es constante en $\bar{\Delta}$.*

Demostración. Existe un conjunto G abierto y simplemente conexo tal que $G \supseteq \bar{\Delta}$, por lo tanto existe v conjugada armónica de u, y la función $f = u + iv$ es analítica en $\bar{\Delta}$ y satisface la hipótesis del teorema anterior y por tanto f es constante y a su vez u es constante. ■

3.1 Una versión lineal.

Enunciemos pues el caso lineal de nuestro teorema principal. La demostración del teorema más general, incluye una reducción a esta versión.

Teorema 3.2 *Sean $A, B \in \mathbb{R}$, $|A| \leq B$, y $L : M_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{R}$ un mapeo lineal tal que:*

1. $L|_{M_B}$ es continua, donde $M_B = \{\mu \in M_{\mathbb{R}} : \|\mu\| \leq B\}$.
2. L no es constante en $M_{A,B}$

   y que
3. El mapeo $\omega \mapsto L(\delta^{\omega})$ $(\omega \in \partial\Delta)$ es la restricción de una función armónica en $\bar{\Delta}$. Si $\nu \in M_{A,B}$ satisface que $L(\nu) \geq L(\mu)$para toda $\mu \in M_{A,B}$, entonces ν tiene soporte finito.

Demostración. Sea $\nu = \nu_1 - \nu_2$ la descomposición de Jordan de ν. Mostraremos primero que ν_1 tiene soporte finito, para tal propósito supongamos que $\|\nu_1\| = r > 0$, en otro caso $\|\nu_1\| = 0$, lo cuál implica que ν_1 es la medida cero que tiene soporte finito. Supongamos $y \in \operatorname{sop} \nu_1$, así, $\nu_1(N) > 0$, para cualquier vecindad N de Borel de y. Para cada una de estas N definamos la medida ρ_N como:

$$\rho_N(E) = r\frac{\nu_1(E \cap N)}{\nu_1(N)} \text{ con } E \text{ subconjunto de Borel de } \partial\Delta.$$

Sea λ cualquier medida positiva sobre $\partial\Delta$ con $\|\lambda\| = r$. Entonces la medida $\nu + \varepsilon(\lambda - \rho_N) \in M_{A,B}$ para $0 < \varepsilon < \frac{\nu_1(N)}{r}$. Esta medida esta en $M_{A,B}$, pues, para cualquier E, $\varepsilon\rho_N(E) \leq \nu_1(E \cap N) \leq \nu_1(E)$, entonces $\nu_1 - \varepsilon\rho_N$ es una medida positiva. De lo anterior se concluye que $\nu_1 + \varepsilon(\lambda - \rho_N)$ también es una medida positiva, y además

$$\begin{aligned} \|\nu + \varepsilon(\lambda - \rho_N)\| &\leq \|\nu_1 + \varepsilon(\lambda - \rho_N)\| + \|\nu_2\| \\ &= \|\nu_1\| + \|\nu_2\| \\ &= B \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} d(\lambda - \rho_N) &= \int_{\partial\Delta} d\lambda - \int_{\partial\Delta} \rho_N \text{ que por ser } \lambda \text{ positiva y } \|\lambda\| = r\\ &= r - \int_{\partial\Delta} d\rho_N \text{ y por la definición de } \rho_N\\ &= 0\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} d\nu + \varepsilon(\lambda - \rho_N) &= \int_{\partial\Delta} d\nu + \int_{\partial\Delta} d\varepsilon(\lambda - \rho_N)\\ &= A\end{aligned}$$

Se sigue de la hipótesis sobre ν que $L(\nu + \varepsilon(\lambda - \rho_N)) \leq L(\nu)$, y por la linealidad de L que $L(\lambda) \leq L(\rho_N)$. Ahora afirmamos que $\rho_N \to r\delta^y$ cuando N se contrae alrededor de y. Así pues, consideremos una sucesión $\{N_n\}$ de vecindades de y, tal que $N_n \supseteq N_{n+1}$ y tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} N_n = \{y\}$, entonces:

$$\rho_{N_n}(E) = r\frac{\nu_1(E \cap N_n)}{\nu_1(N_n)}$$

para cualquier boreliano E, si $y \in E$ entonces $\lim_{n\to\infty} \rho_{N_n}(E) = r$ y si $y \notin E$ entonces $\lim_{n\to\infty} \rho_{N_n}(E) = 0$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \rho_{N_n} = r\delta^y$, de donde se sigue el resultado deseado. Notemos que de la definición de ρ_{N_n}, podemos interpretarlo como la medida restringida al conjunto N_n. Como $\|\rho_N\| = r \leq B$ y por la continuidad de L en M_B, concluimos que $L(\lambda) \leq L(r\delta^y)$. Ahora, si $\lambda = r\delta^w$, con $w \in \partial\Delta$, obtenemos:

$$L(\delta^w) \leq L(\delta^y) \text{ para toda } w \in \partial\Delta$$

Supongamos que existen un número infinito de tales y, como $L(\delta^w) \leq L(\delta^y)$ y de la hipótesis sobre ν tenemos que $L(\delta^y) = \max\{L(\delta^w) : |w| = 1\}$ por el corolario 3.1 y por la hipótesis 3) tenemos que $L(\delta^w)$ es constante en $\partial\Delta$. Como consecuencia L es constante en las expresiones $a\delta^x - b\delta^y$, con a, b definidas como en el lema 1.9, por este mismo lema, lo anterior significa que L es constante en los puntos extremos de $M_{A,B}$. El teorema de Krein-Milman nos asegura que cualquier elemento de $M_{A,B}$, es el límite uniforme de una sucesión de combinaciones convexas de los puntos extremos, de aquí, por la linealidad y continuidad de L, se sigue que L es constante en $M_{A,B}$, con lo cuál se contradice la hipótesis 2).

Por lo tanto sólo hay un número finito de tales $y \in \operatorname{sop} \nu_1$. Un argumento similar aplicado a ν_2 nos conduce a que $\operatorname{sop} \nu_2$ también es finito. De lo anterior se sigue la conclusión del teorema. ■

Antes de continuar, veamos una aplicación de este teorema en el siguiente ejemplo, para lo cuál necesitaremos de la siguiente definición:

Definición 3.1 *Dada una función $f \in H(\Delta)$, diremos que es un punto soporte de un subconjunto compacto $\mathcal{F} \subseteq H(\Delta)$, si $f \in \mathcal{F}$ y si existe una funcional lineal J continua, no constante sobre $\mathcal{F}$, y tal que $\operatorname{Re} J(f) = \max\{\operatorname{Re} J(g) : g \in \mathcal{F}\}$. En otras palabras, los puntos soporte son soluciones de problemas extremos no triviales sobre $\mathcal{F}$*

Teorema 3.3 *Sean, $\phi \in H(\Delta)$ y $\mathcal{F}_\phi$ la familia de funciones $\Phi_\mu(z) = \int_{\partial\Delta} \phi(xz)\, d\mu(x)$ $(z \in \Delta)$, con $\mu \in M_{A,B}$. Entonces cualquier punto soporte de $\mathcal{F}_\phi$ proviene de una medida con soporte finito.*

Demostración. Dado un punto soporte de $\mathcal{F}_\phi$, existe $J \in H^*(\Delta)$ con $\operatorname{Re} J$ no constante sobre $\mathcal{F}_\phi$. Definamos $L(\mu) = \operatorname{Re} J(\Phi_\mu)$ $(\mu \in M_{\mathbb{R}})$. Con la ayuda del corolario 2.1, vemos que las hipótesis del teorema 3.2 se satisfacen, excepto quizás la hipótesis 3). Para ver que se satisface 3), nótese que por el teorema 1.10 podemos representar a J por una medida compleja α con soporte compacto $K \subseteq \Delta$, esto es, $J(h) = \int_K h\, d\alpha$, con $h \in H(\Delta)$. Entonces para $\omega \in \partial\Delta$ tenemos que

$$L(\delta^\omega) = \operatorname{Re} J(\Phi_{\delta^\omega}) = \operatorname{Re} \int_K \phi(\omega t)\, d\alpha(t)$$

Como K es compacto, existe $R > 1$ tal que para cada $t \in K$, el mapeo $z \mapsto \phi(zt)$ es analítico en el disco $|z| < R$. Se sigue del lema 2.1, tomando a $T = K$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, R > 1\}$ y $k(z,t) = \phi(zt)$, que el mapeo $\omega \mapsto \int_K \phi(\omega t)\, d\alpha(t)$ es analítico para cada $\omega \in \Omega$, en particular para cada $\omega \in \partial\Delta$. Entonces 3) se cumple y con esto se sigue la afirmación sobre los puntos soporte de $\mathcal{F}_\phi$. ■

Teorema 3.4 *Si $G = \{g\Phi_\mu : \mu \in M_{A,B}, g \in H(\Delta)\}$ con Φ_μ como antes, entonces cualquier punto soporte de G proviene de una medida con soporte finito.*

Demostración. Dado un punto soporte de G, existe $J \in H^*(\Delta)$ con $\operatorname{Re} J$ no constante sobre G. Definamos $L(\mu) = \operatorname{Re} J\left(g\phi_\mu\right)$. Nuevamente el corolario 2.1, proporciona las hipótesis 1) y 2), pues como el mapeo $\mu \mapsto \Phi_\mu$ es continuo, se sigue que el mapeo $\mu \mapsto g\Phi_\mu$ es continuo. Veamos pues que se satisface la hipótesis 3). Por el teorema 1.10 representemos a J por una medida compleja α con soporte compacto $K \subseteq \Delta$. Entonces

$$L(\delta^\omega) = \operatorname{Re} J(g\Phi_{\delta^\omega}) = \operatorname{Re} \int_K g(t)\,\phi(\omega t)\,d\alpha(t)$$

y procediendo como en el teorema anterior, tomando $k(z,t) = g(t)\phi(zt)$, obtenemos la conclusión deseada. ■

Corolario 3.2 *Dadas las familias $c\bar{o}(K)$ y $c\bar{o}(S^*)$. Si f es un punto soporte de $c\bar{o}(K)$ o $c\bar{o}(S^*)$ entonces f proviene de una medida con soporte finito.*

Demostración. Si $g(z) = z$ y $\phi_1(xz) = \frac{1}{1-xz}$ y $\phi_2(xz) = \frac{1}{(1-xz)^2}$ entonces

$$c\bar{o}(K) = \left\{ \int_{\partial\Delta} g(z)\,\phi_1(xz)\,\mu(x) : \mu \in P \right\}$$

y

$$c\bar{o}(S^*) = \left\{ \int_{\partial\Delta} g(z)\,\phi_2(xz)\,d\mu(x) : \ \mu \in P \right\}$$

que son familias de la forma requerida en el teorema anterior, este mismo teorema proporciona la conclusión deseada. ■

Corolario 3.3 *Dadas las familias K y S^*. Si f es un punto soporte de K o S^* entonces f proviene de una medida con soporte finito.*

Demostración. Es claro que $K \subseteq c\bar{o}(K)$ y que $S^* \subseteq c\bar{o}(S^*)$ y del corolario anteriror se sigue que si f es un punto soporte de K o S^* entonces f proviene de una medida con soporte finito. ■

Observación 8 *Notemos que cualquier solución a un problema extremo del tipo citado, es una combinación convexa finita de puntos extremos de $M_{A,B}$. Esta última afirmación ya era conocida para las familias estudiadas en el capítulo anterior, sin embargo, para obtener estos mismos resultados se necesitan aplicar técnicas variacionales que dependen de la familia en particular. Además, hemos eliminado estas fórmulas al trasladar el problema a los conjuntos $M_{A,B}$, de la forma descrita al comienzo de este capítulo, o como en la demostración del teorema 3.4.*

3.2 El teorema principal.

Recordemos algunas definiciones del Análisis Matemático sobre los conceptos de diferenciabilidad en el sentido de Fréchet.

Consideremos dos espacios de Banach X y Y sobre los complejos y un mapeo $f : D \subseteq X \mapsto Y$ con D abierto de X y poligonalmente conexo. Estamos interesados en el comportamiento de $\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha}$ con $x \in D$, $h \in X$ y α una variable compleja con $|\alpha|$ lo suficientemente pequeña tal que $x + \alpha h \in D$.

Definición 3.2 *Dada una función $f : D \subseteq X \mapsto Y$ decimos que es Fréchet-diferenciable en $x_0 \in D$ si:*

1. $\lim\limits_{\beta \to 0} \frac{f(x_0+\beta h)-f(x_0)}{\beta} \equiv \delta f(x_0, h)$ *existe para toda $h \in X$, y*
2. $\delta f(x_0, h)$ *es un mapeo lineal en h y acotado de D en Y.*

Al límite $\delta f(x_0, h)$ le llamaremos la primera Fréchet-diferencial o primera variación de f en x_0 con respecto al incremento h, y diremos que f es Fréchet-diferenciable.

Notemos que la diferencial es aditiva en f, es decir, si $f = f_1 + f_2$ y si δf_1 y δf_2 existen entonces $\delta[f_1 + f_2] = \delta f_1 + \delta f_2$.

Ahora empezaremos el tratamiento de funciones más generales $G : M_{A,B} \mapsto \mathbb{C}$. Los siguientes condiciones establecen que G es diferenciable en el sentido de Fréchet y que ciertas composiciones con μ_ω son analíticas en ω.

A1 Para cada $\mu \in M_{A,B}$ existe un mapeo lineal $L_\mu : M_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{C}$ con $L_\mu \mid M_B$ continua tal que $L_\mu(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{G(\mu+\varepsilon\lambda)-G(\mu)}{\varepsilon}$ cada vez que $\lambda \in M_{\mathbb{R}}$ y $\mu + \varepsilon\lambda \in M_{A,B}$, para $\varepsilon > 0$ pequeña.

A2 Para cada $\mu \in M_{A,B}$ la función $g_\mu : \bar{\Delta} \mapsto \mathbb{C}$, definida como $g_\mu(\omega) = G(\mu_\omega)$ tiene una continuación analítica a un conjunto abierto que contenga a $\bar{\Delta}$.

A3 Para cada $\mu \in M_{A,B}$ y $\lambda \in M_{\mathbb{R}}$ la función $h_{\mu,\lambda} : \bar{\Delta} \mapsto \mathbb{C}$, definida como $h_{\mu,\lambda}(\omega) = L_\mu(\lambda_\omega)$, también posee una continuación analítica a un conjunto abierto que contenga a $\bar{\Delta}$.

A4 $g'_\mu(1) = h'_{\mu,\mu}(1)$ para toda $\mu \in M_{A,B}$.

Observación 9 *1) No se sabe cuando la condición A4 es independiente de las otras condiciones, pero en todas las aplicaciones se obtiene rápidamente. 2) La discusión sobre la ecuación $\int_{\partial\Delta} \phi(\omega x)\, d\mu(x) = \int_{\partial\Delta} \phi(x)\, d\mu_\omega(x)$ dada en el lema 1.10 se extiende de forma clara de $M_{A,B}$ a $M_{\mathbb{R}}$. Así λ_ω en A3 tiene sentido. Más aún, para cualquier $\omega \in \bar{\Delta}$ el mapeo $\lambda \mapsto \lambda_\omega$ es lineal en $M_{\mathbb{R}}$. Por lo tanto la condición A3 se puede formular de forma equivalente, como por ejemplo, con $\lambda \in P$.*

Ahora enunciaremos y probaremos nuestro resultado más general.

Teorema 3.5 *Sea $G : M_{A,B} \mapsto \mathbb{C}$ que satisface las condiciones A1-A4 y G no constante. Si $\nu \in M_{A,B}$ tiene la propiedad*

$$\operatorname{Re} G(\nu) \geq \operatorname{Re} G(\mu) \text{ para toda } \mu \in M_{A,B}$$

entonces ν tiene soporte finito.

Demostración. Demostración. Por la condición A1, para ν existe $L_\nu : M_{\Im} \mapsto \mathbb{C}$ lineal y con $L_\nu |_{M_B}$ continua. Por hipótesis tenemos que $\operatorname{Re} G(\nu) \geq \operatorname{Re} G(\lambda)$, para toda $\lambda \in M_{A,B}$, en particular notemos que:

Si $\mu, \lambda \in M_{A,B}$, entonces

$$\mu + \varepsilon(\lambda - \mu) = (1 - \varepsilon)\mu + \varepsilon\lambda \in M_{A,B} \text{ para } 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

De aquí que

$$L_\mu(\lambda - \mu) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{G((1-\varepsilon)\mu + \varepsilon\lambda) - G(\mu)}{\varepsilon}$$

Así pues, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña tal que $\mu + \varepsilon(\lambda - \mu) \in M_{A,B}$

$$\operatorname{Re} G(\nu) \geq \operatorname{Re} G(\mu + \varepsilon(\lambda - \mu))$$

dividiendo por $\varepsilon > 0$ tenemos:

$$0 \geq \frac{\operatorname{Re} G(\mu + \varepsilon(\lambda - \mu)) - \operatorname{Re} G(\nu)}{\varepsilon}$$

tomando $\mu = \nu$ y el límite cuando $\varepsilon \to 0^+$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \tfrac{\operatorname{Re} G(\nu + \varepsilon(\lambda - \nu)) - \operatorname{Re} G(\nu)}{\varepsilon} \\ &= \operatorname{Re} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \tfrac{G(\nu + \varepsilon(\lambda - \nu)) - G(\nu)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

así concluimos que: $0 \geq \operatorname{Re} L_\nu(\lambda - \nu)$ y por la linealidad que $\operatorname{Re} L_\nu(\nu) \geq \operatorname{Re} L_\nu(\lambda)$ (para toda $\lambda \in M_{A,B}$). Así pues consideremos $\operatorname{Re} L_\nu$ como L en el teorema 3.2, este último teorema proporcionará la conclusión deseada si Re L_ν satisface las hipótesis 2) y 3). Para 3) debemos probar que el mapeo $\omega \mapsto L_\nu(\delta^\omega)$ es analítico en $\bar{\Delta}$. Como:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} \varphi(x) d\delta^\omega(x) &= \varphi(\omega) \\ &= \int_{\partial\Delta} \varphi(\omega x) d\delta^1(x) \\ &= \int_{\partial\Delta} \varphi(x) d(\delta^1)_\omega(x) \end{aligned}$$

es cierta para toda $\varphi \in C(\partial\Delta)$, entonces $\delta^\omega = (\delta^1)_\omega$. Así, por el condición A3, la función

$$h_{\nu,\delta^1}(\omega) = L_\nu\left((\delta^1)_\omega\right) = L_\nu(\delta^\omega)$$

posee una continuación analítica a un abierto que contenga a $\bar{\Delta}$, con lo cual se cumple la hipótesis 3) del teorema 3.2. Solo falta probar la hipótesis 2): Re L_ν no es constante en $M_{A,B}$. Supongamos lo contrario. Entonces $h_{\nu,\nu}(\omega) = L_\nu(\nu_\omega)$ tiene parte real constante en $\bar{\Delta}$, la cual, por la condición A3, es la restricción de una función analítica que tiene que ser constante pues Re L_ν es constante. Así $h'_{\nu,\nu}(1) = 0$ y la condición A2 proporciona la serie de Taylor de la forma:

$$g_\nu(\omega) = g_\nu(1) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k (\omega - 1)^k \qquad (|\omega - 1| < \delta)$$

como $g_\nu(\omega) = G(\nu_\omega)$ para $\omega \in \bar{\Delta}$ podemos escribir:

$$G(\nu_\omega) = G(\nu) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k (\omega - 1)^k \qquad \left(|\omega - 1| < \delta,\, \omega \in \bar{\Delta}\right)$$

y por la propiedad maximal de ν tenemos

$$\operatorname{Re} \sum_{k=2}^{\infty} b_k (\omega - 1)^k \leq 0 \text{ para } |\omega - 1| < \delta,\, \omega \in \bar{\Delta}$$

Por las propiedades de las funciones analíticas esto es imposible si algún coeficiente b_k, $k \geq 2$, es diferente de cero. Veamos que $b_k = 0$, $k \geq 2$. Consideremos a la función $h(\omega) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k (\omega - 1)^k$ que es analítica, en particular h es una función abierta. es decir la imagen de abiertos bajo h es una abierto. Así pues, la imagen de cualquier conjunto abierto que contenga a 1 debe ser un conjunto abierto que contenga a 0, pero por la condición $\operatorname{Re}\sum_{k=2}^{\infty} b_k (\omega - 1)^k \leq 0$, esto es imposible a menos de que h sea la constante cero, lo cual implica que $b_k = 0$, $k \geq 2$ y , por lo tanto g_ν es constante en $\bar{\Delta}$. Como consecuencia

$$G(\nu_0) = g_\nu(0) = g_\nu(1) = G(\nu)$$

Ahora dada $\mu \in M_{A,B}$ una medida arbitraria, por la condición A2. $g_\mu(\omega) = G(\mu_\omega)$ es analítica en $\bar{\Delta}$ y por el lema 1.10 $\mu_0 = \frac{A}{2\pi} d\theta = \nu_0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} g_\mu(0) &= \operatorname{Re} G(\mu_0) \\
&= \operatorname{Re} G(\nu_0) \\
&= \operatorname{Re} G(\nu) \\
&\geq \operatorname{Re} G(\mu_\omega) \text{ por la propiedad maximal de } \nu \\
&= \operatorname{Re} g_\mu(\omega) \text{ para toda } \omega \in \bar{\Delta}
\end{aligned}$$

Por el principio del máximo para funciones armónicas g_μ es constante. De aquí.

$$\begin{aligned}
G(\mu) &= G(\mu_1) \\
&= g_\mu(1) \\
&= g_\mu(0) \\
&= G(\mu_0) \\
&= G(\nu_0) \\
&= G(\nu)
\end{aligned}$$

lo cuál viola la hipótesis de que G es no constante. Con lo cuál hemos probado la hipótesis 2) del teorema 3.2, y por lo tanto el teorema 3.5 queda demostrado. ■

Ahora probaremos un caso especial del teorema 3.5, que es menos abstracto y más fácilmente aplicable. Pero antes, hagamos la siguiente convención.

Dado $T : H(\Delta) \mapsto H(\Delta)$, diremos que $f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{T(\Phi_{\mu+\varepsilon\lambda}) - T(\Phi_\mu)}{\varepsilon}$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Δ si y sólo para toda sucesión $\{\varepsilon_n\} \to 0$ con $0 < \varepsilon_n \leq r < 1$, la sucesión de funciones $f_n = \frac{1}{\varepsilon_n}(T(\Phi_{\mu+\varepsilon_n\lambda}) - T(\Phi_\mu))$ converge uniformemente a f sobre subconjuntos compactos de Δ, en donde $r > 0$ es lo suficientemente pequeña para que $\mu + r\lambda \in M_{A,B}$.

Teorema 3.6 *Sea $\phi \in H(\Delta)$. Para cada $\lambda \in M_{\mathbb{R}}$, sea $\Phi_\lambda(z) = \int_{\partial\Delta} \varphi(xz)\, d\lambda(x)$ con $z \in \Delta$. Sea $\mathcal{F}_\phi = \{\Phi_\mu : \mu \in M_{A,B}\}$ y $T : \mathcal{F}_\phi \mapsto H(\Delta)$ que satisfaga las siguientes tres condiciones:*

B1 *Dado $\mu \in M_{A,B}$, existe $\mathbf{L}_\mu : H(\Delta) \mapsto H(\Delta)$ lineal y continua tal que para toda $\lambda \in M_{\mathbb{R}}$*

$$\mathbf{L}_\mu(\Phi_\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{T(\Phi_{\mu+\varepsilon\lambda}) - T(\Phi_\mu)}{\varepsilon}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de Δ cada vez que $\mu + \varepsilon\lambda \in M_{A,B}$ para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño.

B2 $T(\Phi_{\mu_\omega})(z) = T(\Phi_\mu)(\omega z)$ $\left(\mu \in M_{A,B}, \omega \in \bar{\Delta}, z \in \Delta\right)$

B3 $z[T(\Phi_\mu)]'(z) = \mathbf{L}_\mu(z\Phi'_\mu)(z)$ $(\mu \in M_{A,B},\ z \in \Delta)$.

Sea $\mathbf{G} = T(\mathcal{F}_\phi)$. Si $T(\Phi_\nu)$ es un punto soporte de $\mathbf{G}$, entonces ν tiene soporte finito.

Demostración. Sea $L \in H^*(\Delta)$ con parte real no constante sobre $\mathbf{G}$ y máximo en $T(\Phi_\nu)$. Definimos

$$G(\mu) = L(T(\Phi_\mu)) \text{ con } \mu \in M_{A,B}$$

Podemos aplicar el teorema 3.5 si las condiciones A1-A4 se satisfacen, y procederemos a verificarlas en este orden.

Por el teorema 1.10 existe $K \subseteq \Delta$ compacto, y α una medida compleja de Borel sobre K tal que

$$L(h) = \int_K h(z)\, d\alpha(z), \text{ para toda } h \in H(\Delta)$$

Para $\mu \in M_{A,B}$ definimos

$$L_\mu(\lambda) = \int_K \mathbf{L}_\mu(\Phi_\lambda)\, d\alpha \text{ con } \lambda \in M_{\mathbb{R}}$$

L_μ es lineal pues

$$\begin{aligned} L_\mu(a\lambda+b\gamma) &= \int_K \mathbf{L}_\mu(\Phi_{a\lambda+b\gamma})\,d\alpha \\ &= \int_K \mathbf{L}_\mu(a\Phi_\lambda+b\Phi_\gamma)\,d\alpha \\ &= \int_K a\mathbf{L}_\mu(\Phi_\lambda)d\alpha+\int_K b\mathbf{L}_\mu(\Phi_\gamma)d\alpha \\ &= aL_\mu(\lambda)+bL_\mu(\gamma) \end{aligned}$$

Por el corolario 2.2, $\Phi_\lambda(z)=\int_{\partial\Delta}\phi(xz)\,d\lambda(x)$, $\lambda\in M_{\overline{\mathfrak{A}}}$ pertenece a $H(\Delta)$ y el mapeo $\lambda\mapsto\Phi_\lambda$ es continuo en M_B. Por la continuidad de $\mathbf{L}_\mu$ y de L se sigue que, L_μ es continua en M_B. Finalmente, si μ y λ son como en A1 y B1, utilizando B1 tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{G(\mu+\varepsilon\lambda)-G(\mu)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_K\frac{T(\Phi_\mu+\varepsilon\Phi_\lambda)-T(\Phi_\mu)}{\varepsilon}d\alpha \\ &= \int_K\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{T(\Phi_\mu+\varepsilon\Phi_\lambda)-T(\Phi_\mu)}{\varepsilon}d\alpha \\ &= \int_K\mathbf{L}_\mu(\Phi_\lambda)\,d\alpha \\ &= L_\mu(\lambda) \end{aligned}$$

Así A1 se satisface.

Para verificar A2 utilizaremos B2. Se tiene que

$$\begin{aligned} g_\mu(\omega) &= G(\mu_\omega) \\ &= \int_K T(\Phi_{\mu_\omega})(z)\,d\alpha(z) \\ &= \int_K T(\Phi_\mu)(z\omega)\,d\alpha(z) \end{aligned}$$

Obsérvese que, como $K\subseteq\Delta$ es compacto, existe $R>1$ tal que para cada $z\in K$, el mapeo $\omega\mapsto T(\Phi_\mu)(z\omega)$ es analítico en el disco $|\omega|<R$ y por lo tanto por el lema 2.1, la última integral es analítica en $|\omega|<R$. Con esto se sigue A2.

Para A3 tenemos que, para $\mu\in M_{A,B}$ y $\lambda\in M_{\overline{\mathfrak{A}}}$

$$\begin{aligned} h_{\mu,\lambda}(\omega) &= L_\mu(\lambda_\omega) \\ &= \int_K\mathbf{L}_\mu(\Phi_{\lambda_\omega})\,d\alpha \\ &= L\circ\mathbf{L}_\mu(\Phi_{\lambda_\omega}) \\ &= J_\mu(\Phi_{\lambda_\omega}) \end{aligned}$$

en donde $J_\mu=L\circ\mathbf{L}_\mu\in H^*(\Delta)$. Sean K_μ y α_μ,como en el teorema 1.10 que satisfagan:

$$J_\mu(h)=\int_{K_\mu}hd\alpha_\mu \text{ para toda } h\in H(\Delta)$$

entonces

$$\begin{aligned} h_{\mu,\lambda}(\omega) &= \int_{K_\mu} \Phi_{\lambda_\omega}(z)\, d\alpha_\mu(z) \\ &= \int_{K_\mu} \Phi_\lambda(\omega z)\, d\alpha_\mu(z) \end{aligned}$$

y como antes, existe $R > 1$ tal que para cada $z \in K$, el mapeo $\omega \mapsto \Phi_\lambda(\omega z)$ es analítico en el disco $|\omega| < R$ y por el lema 2.1, se sigue que $h_{\mu,\lambda}(\omega)$ tiene una extensión analítica a un disco abierto que contenga a $\bar{\Delta}$.

Por último, para probar A4, usaremos la fórmula

$$g_\mu(\omega) = \int_K T(\Phi_\mu)(z\omega)\, d\alpha(z) \quad (|\omega| < R)$$

y el lema 2.1, para obtener

$$g'_\mu(1) = \int_K z\,[T(\Phi_\mu)]'(z)\, d\alpha(z)$$

Por B3

$$\begin{aligned} g'_\mu(1) &= \int_K L_\mu\left(z\Phi'_\mu\right) d\alpha \\ &= J_\mu\left(z\Phi'_\mu\right) \\ &= \int_{K_\mu} z\Phi'_\mu(z)\, d\alpha_\mu(z) \end{aligned}$$

y también

$$h_{\mu,\mu}(\omega) = J_\mu\left(\Phi_{\mu_\omega}\right) = \int_{K_\mu} \Phi_\mu(\omega z)\, d\alpha_\mu(z)$$

y por lo tanto, nuevamente por el lema 2.1, se tiene que:

$$h'_{\mu,\mu}(1) = \int_{K_\mu} z\Phi'_\mu(z)\, d\alpha_\mu(z)$$

así, se sigue que $g'_\mu(1) = h'_{\mu,\mu}(1)$. Con lo cual se satisfacen las hipótesis del teorema 3.5, y por lo tanto queda demostrado el teorema 3.6. ■

Lema 3.1 *Con la notación del teorema 3.6, el conjunto* $V = \cup\{\Phi_\mu(\Delta) : \mu \in M_{A,B}\}$ *es un abierto conexo, es decir, es una región.*

Demostración.. Como cada Φ_μ es analítica, $\Phi_\mu(\Delta)$ es abierto y conexo. Sólo resta mostrar que existe al menos un punto en $\cap\{\Phi_\mu(\Delta) : \mu \in M_{A,B}\}$. Así, sea $\mu \in M_{A,B}$;

evaluando Φ_μ en 0, se obtiene que

$$\begin{aligned}\Phi_\mu(0) &= \phi(0)\,\mu(\partial\Delta)\\ &= \phi(0)\,A\end{aligned}$$

y por lo tanto $\phi(0)\,A \in \cap\{\Phi_\mu(\Delta) : \mu \in M_{A,B}\}$ de donde se sigue el resultado. ■

Lema 3.2 *Sea $F \in H(V)$, $\varphi,\phi \in H(\Delta)$, $K \subseteq \Delta$ compacto, $\gamma \subseteq V$ curva cerrada simple que contenga en su interior a $\varphi(K)$, $r < \frac{d(\varphi(K),(int\gamma)^c)}{2M}$, donde M es tal que $|\phi(z)| \leq M$ para toda $z \in K$. Si $\{\varepsilon_n\} \to 0$ con $r \geq |\varepsilon_n| > 0$ entonces la sucesión $f_n(z) = \frac{\phi(z)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\omega)}{|\omega-(\varphi(z)+\varepsilon_n\phi(z))||\omega-\varphi(z)|}d\omega$ converge uniformemente en z a la función $f(z) = \phi(z)\,F'(\varphi(z))$*

Demostración. Primero mostraremos que $\varphi(z) + \varepsilon_n\phi(z)$ con $z \in K$ está en el interior de γ, si suponemos lo contrario, entonces

$$\begin{aligned}|\varphi(z) + \varepsilon_n\phi(z) - \varphi(z)| &\geq d(\varphi(K), (int\gamma)^c)\\ &> \varepsilon_n |\phi(z)|\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, por tanto $\varphi(z) + \varepsilon_n\phi(z)$ esta en el interior de γ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $z \in K$. Notemos que

$$|\omega - (\varphi(z) + \varepsilon_n\phi(z))| \geq \frac{d(\varphi(K), (int\gamma)^c)}{2} \text{ para toda } \omega \in \gamma$$

y que

$$|\omega - \varphi(z)| \geq \frac{d(\varphi(K), (int\gamma)^c)}{2} \text{ para toda } \omega \in \gamma$$

ahora, por la fórmula integral de Cauchy aplicada a F, tenemos

$$\begin{aligned}|f_n(z) - f(z)| &= \left|\frac{\phi(z)}{2\pi i}\left(\int_\gamma \frac{F(\omega)}{|\omega-(\varphi(z)+\varepsilon_n\phi(z))||\omega-\varphi(z)|}d\omega - \int_\gamma \frac{F(\omega)}{|\omega-\varphi(z)|}d\omega\right)\right|\\ &= \left|\frac{\phi(z)}{2\pi i}\left(\int_\gamma \frac{F(\omega)\varepsilon_n\phi(z)}{|\omega-(\varphi(z)+\varepsilon_n\phi(z))||\omega-\varphi(z)|}d\omega\right)\right|\\ &\leq \left|\frac{\varepsilon_n\phi^2(z)}{2\pi i}\right|\left|\int_\gamma \frac{F(\omega)}{|\omega-(\varphi(z)+\varepsilon_n\phi(z))||\omega-\varphi(z)|}d\omega\right|\\ &\leq \frac{\varepsilon_n M^2}{2\pi i}\left|\int_\gamma \frac{F(\omega)}{\left(\frac{d(\varphi(K),(int\gamma)^c)}{2}\right)^2}d\omega\right|\end{aligned}$$

en donde la última integral ya no depende de $z \in K$. Así pues se sigue el resultado. ■

Corolario 3.4 *Con la notación del teorema 3.6 sea* $\mathbf{F}$ *analítica en la región*

$$V = \cup \{\Phi_\mu(\Delta) : \mu \in M_{A,B}\}$$

Entonces cualquier punto soporte de la familia

$$G = \{\mathbf{F} \circ \Phi_\mu : \mu \in M_{A,B}\}$$

proviene de una medida con soporte finito.

Demostración. Para $\mathcal{F} = \{\Phi_\mu : \mu \in M_{A,B}\}$ como en el teorema 3.6, definamos $T : \mathcal{F} \mapsto H(\Delta)$ por

$$T(\Phi_\mu) = \mathbf{F} \circ \Phi_\mu \ \ (\mu \in M_{A,B})$$

y $\mathbf{L}_\mu : H(\Delta) \mapsto H(\Delta)$ por

$$L_\mu(h) = (\mathbf{F}' \circ \Phi_\mu)h \ \ (\mu \in M_{A,B},\ h \in H(\Delta))$$

Para verificar B1, sea $\mu \in M_{A,B}$, $\lambda \in M_{\mathbf{R}}$, y K compacto de Δ. Sea $\gamma \subset V$ que contiene en su interior a $\Phi_\mu(K)$. Por la fórmula integral de Cauchy aplicada a $\mathbf{F}$,

$$\begin{aligned}
\frac{T\left(\Phi_{\mu+\varepsilon\lambda}\right)(z)-T(\Phi_\mu)(z)}{\varepsilon} &= \frac{\mathbf{F}(\Phi_\mu(z)+\varepsilon\Phi_\lambda(z))-\mathbf{F}(\Phi_\mu(z))}{\varepsilon} \\
&= \frac{1}{\varepsilon 2\pi i}\left[\int_\gamma \frac{\mathbf{F}(\omega)}{\omega-[\Phi_\mu(z)+\varepsilon\Phi_\lambda(z)]}d\omega - \int_\gamma \frac{\mathbf{F}(\omega)}{\omega-\Phi_\mu(z)}d\omega\right] \\
&= \frac{1}{\varepsilon 2\pi i}\left[\int_\gamma \frac{\mathbf{F}(\omega)}{\omega-[\Phi_\mu(z)+\varepsilon\Phi_\lambda(z)]} - \frac{\mathbf{F}(\omega)}{\omega-\Phi_\mu(z)}d\omega\right] \\
&= \Phi_\lambda(z)\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathbf{F}(\omega)}{[\omega-\Phi_\mu(z)-\varepsilon\Phi_\lambda(z)][\omega-\Phi_\mu(z)]}d\omega
\end{aligned}$$

para todo $z \in K$ y para todo ε con $|\varepsilon|$ lo suficientemente pequeña. Por el lema anterior se sigue que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{T(\Phi_{\mu+\varepsilon\lambda})(z) - T(\Phi_\mu)(z)}{\varepsilon} = \Phi_\lambda(z)\,\mathbf{F}'(\Phi_\mu(z)) = L_\mu(\Phi_\lambda)(z)$$

uniformemente para $z \in K$. Para B2 observemos que:

$$\begin{aligned}
T\left(\Phi_{\mu_\omega}\right)(z) &= \mathbf{F}\left(\Phi_{\mu_\omega}(z)\right) \\
&= \mathbf{F}\left(\Phi_\mu(\omega z)\right) \\
&= T(\Phi_\mu)(z\omega)
\end{aligned}$$

Y finalmente

$$\begin{aligned}(T(\Phi_\mu))' &= (\mathbf{F} \circ \Phi_\mu)' \\ &= \mathbf{F}'(\Phi_\mu)\Phi'_\mu\end{aligned}$$

mientras que

$$L_\mu\left(z\Phi'_\mu\right) = z\mathbf{F}'(\Phi_\mu)\Phi'_\mu$$

De aquí se sigue B3, y por el teorema 3.6 se sigue el corolario. ■

3.3 Aplicaciones.

En esta sección propondremos algunos problemas de maximización y aplicaremos los teoremas vistos en la sección anterior.

Ejemplo 3.1 *La familia de funciones univalentes normalizadas de forma estrellada de orden* α, *denotadas por* $S^*(\alpha)$ *consiste de las funciones* f *que satisfacen* $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ *y* $\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$. *Como se puede observar en* [5], *esta familia tiene la siguiente representación integral:*

$$S^*(\alpha) = \left\{ z\exp\left\{ \int_{\partial\Delta} -(2-2\alpha)\ln(1-xz)\,d\mu(x) \right\} : \mu \in M_{1,1} \right\}$$

Mostraremos que cualquier punto soporte de esta familia proviene de una medida con soporte finito. Reescribamos a esta familia en los términos utilizados en la sección anterior.

Sean $\phi, \mathbf{F} \in H(\Delta)$ definidas como

$$\phi(z) = -\ln(1-z) \text{ y } \mathbf{F}(z) = \exp((2-2\alpha)z)$$

Así, tenemos que

$$S^*(\alpha) = \{z\mathbf{F} \circ \Phi_\mu : \mu \in M_{1,1}\}$$

Y ahora consideremos la siguiente familia

$$G = \{\mathbf{F} \circ \Phi_\mu : \mu \in M_{1,1}\}$$

Por el corolario 3.4 cualquier punto soporte de G proviene de una medida con soporte finito. Ahora si $g = z\mathbf{F}\circ\Phi_{\mu_0}$ es un punto soporte de $S^*(\alpha)$, entonces existe $J \in H^*(\Delta)$ tal que J alcanza su máximo en g. Si definimos $L \in H^*(\Delta)$ como $L(h) = J(zh)$, entonces L alcanza su máximo en $\mathbf{F} \circ \Phi_{\mu_0}$ de modo que $\mathbf{F} \circ \Phi_{\mu_0}$ es un punto soporte de G y por lo tanto μ_0 debe tener soporte finito.

Ejemplo 3.2 *Si $f \in V_k$, la familia de mapeos conformes de Δ con rotación de frontera de a lo más $k\pi$, tenemos la siguiente representación integral para su derivada*

$$f'(z) = \exp\left\{\int_{\partial\Delta} -\ln(1-xz)\,d\mu(x)\right\} \quad con\ \mu \in M_{2,k}$$

(esto se puede consultar en [9]). Por tanto

$$V_k = \left\{\int_0^z \exp\left\{\int_{\partial\Delta} -\ln(1-x\xi)\,d\mu(x)\right\} d\xi : \mu \in M_{2,k}\right\}$$

Notemos que la constante obtenida al integrar tiene que ser 0, pues $f(0) = 0$.

Al igual que en el ejemplo anterior, si definimos $\phi, \mathbf{F} \in H(\Delta)$ como $\phi(z) = -\ln(1-z)$ y $\mathbf{F}(z) = \exp(z)$ entonces

$$\{f'(z) : f \in R_{k\pi}\} = \{\mathbf{F} \circ \Phi_\mu : \mu \in M_{2,k}\}$$

de modo que

$$V_k = \left\{\int_0^z (\mathbf{F} \circ \Phi_\mu)(\xi)d\xi : \mu \in M_{2,k}\right\}$$

Consideremos la siguiente familia

$$G = \{\mathbf{F} \circ \Phi_\mu : \mu \in M_{2,k}\}$$

Nuevamente, por el corolario 3.4 cualquier punto soporte de G proviene de una medida con soporte finito. Sea $g(z) = \int_0^z (\mathbf{F} \circ \Phi_{\mu_0})(\xi) d\xi$ un punto soporte de V_k, entonces existe $J \in H^*(\Delta)$ tal que J alcanza su máximo en g y si definimos $L \in H^*(\Delta)$ como $L(h) = J\left(\int_0^z h(\xi)\, d\xi\right)$, entonces L alcanza su máximo en $\mathbf{F} \circ \Phi_{\mu_0}$ y entonces μ_0 debe tener soporte finito.

Para el siguiente ejemplo, recordemos que cada elemento p de la familia

$$\mathcal{P} = \{f \in S : \operatorname{Re} f(z) > 0 \ z \in \Delta\}$$

tiene una representación integral de la forma

$$p(z) = \int_{\partial\Delta} \frac{1 + xz}{1 - xz} d\mu(x)$$

Ejemplo 3.3 *En este ejemplo, primero plantearemos un problema de maximización para después generalizar la parte esencial en un teorema. Sea $F : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}$ analítica en $\{(\omega_1 \ldots \omega_n) \in \mathbb{C}^n : |\omega_j| \leq 2, (1 \leq j \leq n)\}$. Queremos encontrar*

$$\max_{f \in \mathcal{P}} \operatorname{Re} F(p_1, \ldots, p_n)$$

en donde $f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k$. Replantearemos el problema, en términos del conjunto de medidas de probabilidad P como sigue:

$$f(z) = \int_{\partial\Delta} \frac{1 + \zeta z}{1 - \zeta z} d\mu(\zeta) = \int_{\partial\Delta} (1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \zeta^k z^k) d\mu(\zeta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^k \int_{\partial\Delta} \zeta^k d\mu(\zeta)$$

Por tanto, $p_k = 2\int_{\partial\Delta} \zeta^k d\mu(\zeta)$ y

$$\max_{f \in \mathcal{P}} \operatorname{Re} F(p_1, \ldots, p_n) = \max_{\mu \in P} \operatorname{Re} F(I_1, \ldots, I_n)$$

en donde

$$I_j = \int_{\partial\Delta} \psi_j(\zeta) d\mu(\zeta), \ \psi_j(\zeta) = 2\zeta^j \ \ (1 \leq j \leq n)$$

De manera similar, supongamos que buscamos $\max_f \operatorname{Re} F(f(a), f'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a))$ sobre la clase $\mathcal{P}$ en donde $|a| < 1$ y $F(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ es analítica en la región determinada *por* $\operatorname{Re}\omega_1 > 0$, $|\omega_j| < \infty$, $(2 \leq j \leq n)$. *Como*

$$f(z) = \int_{\partial\Delta} \frac{1+\zeta z}{1-\zeta z} d\mu(\zeta)$$

se sigue que

$$f^{(i)}(a) = \int_{\partial\Delta} D_z^{(i)} \left(\frac{1+\zeta z}{1-\zeta z}\right)(a) d\mu(\zeta)$$

Entonces

$$\max_{f\in\mathcal{P}} \operatorname{Re} F(f(a), f'(a), ..., f^{(n-1)}(a)) = \max_{\mu\in P} \operatorname{Re} F(I_1, ... I_n)$$

en donde

$$I_j = \int_{\partial\Delta} \psi_j(\zeta) d\mu(\zeta)\,, \quad \psi_j(\zeta) = D_z^{(j-1)} \left(\frac{1+\zeta z}{1-\zeta z}\right)(a) \quad (1 \leq j \leq n)$$

Observemos que en este planteamiento, al trasladar el problema de maximización al conjunto P, el vector I_j solo depende de una medida $\mu \in P$, y que las funciones ψ_j son fijas. Con base en esta observación podemos generalizar este ejemplo de la siguiente forma.

Teorema 3.7 *Sean* $\psi_1, ..., \psi_n$ *analíticas en* $\bar{\Delta}$. *Definamos para cada* $\mu \in M_{A,B}$ *el vector* $I(\mu) = \left(\int_{\partial\Delta} \psi_1 d\mu, ..., \int_{\partial\Delta} \psi_n d\mu\right) \in \mathbb{C}^n$, *y sea* F *analítica y no constante sobre* $\{I(\mu) : \mu \in M_{A,B}\}$. *Si* $\nu \in M_{A,B}$ *es tal que*

$$\operatorname{Re} F(I(\nu)) = \max\{\operatorname{Re} F(I(\mu)) : \mu \in M_{A,B}\}$$

entonces ν *tiene soporte finito.*

Demostración. Definamos $G : M_{A,B} \mapsto \mathbb{C}$ como $G(\mu) = F(I(\mu))$. deseamos probar que $\operatorname{Re} G$ alcanza un máximo en $M_{A,B}$ sólo en medidas con soporte finito.

Tenemos que G es no constante sobre $M_{A,B}$ como se requiere en el teorema 3.5. Para probar A1 definamos para cada $\mu \in M_{A,B}$, $L_\mu : M_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{C}$ por

$$L_\mu(\sigma) = \nabla F(I(\mu)) \cdot I(\sigma) \quad (\sigma \in M_{\mathbb{R}})$$

(el producto punto en $\mathbb{C}^n$ de $I(\sigma)$ y el gradiente de F valuado en $I(\mu)$). Se sigue del lema 2.1 tomando como $k_i(z,x) = \psi_i(x)$ $(1 \leq i \leq n)$, $\alpha = \sigma$ y $T = \partial\Delta$, que la función $\Psi_\sigma^i(z) = \int_{\partial\Delta} \psi_i(x)\, d\sigma$ es constante en z (y por tanto analítica) para $(1 \leq i \leq n)$ de modo que la función $I(\sigma)$ es continua en $M_{\mathbf{R}}$. Por tanto L_μ es continua en todo $M_{\mathbf{R}}$, y es claro que L_μ es lineal. Más aún, para $\lambda \in M_{\mathbf{R}}$, para verificar A1. tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{G(\mu+\varepsilon\lambda)-G(\mu)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{F(I(\mu)+\varepsilon I(\lambda))-F(I(\mu))}{\varepsilon} \\
&= \nabla F(I(\mu)) \cdot I(\lambda) \\
&= L_\mu(\lambda)
\end{aligned}$$

como se requiere.

Ahora, sea $\mu \in M_{A,B}$, $\lambda \in M_{\mathbf{R}}$ y $h_{\mu,\lambda}(\omega) = L_\mu(\lambda_\omega)$ como en A3. Entonces

$$\begin{aligned}
h_{\mu,\lambda}(\omega) &= \nabla F(I(\mu)) \cdot I(\lambda_\omega) \\
&= \nabla F(I(\mu)) \cdot \left(\int_{\partial\Delta} \psi_1(x\omega)\, d\lambda(x), \dots, \int_{\partial\Delta} \psi_n(x\omega)\, d\lambda(x)\right)
\end{aligned}$$

Se sigue, del lema 2.1 y de la hipótesis de que cada ψ_j $(1 \leq j \leq n)$ es analítica en $\bar{\Delta}$, que el mapeo $\omega \mapsto \int_{\partial\Delta} \psi_j(x\omega)\, d\lambda(x)$ es analítico en $\bar{\Delta}$, y por lo tanto también lo es $h_{\mu,\lambda}$.

Para A2 tenemos que

$$\begin{aligned}
g_\mu(\omega) &= G(\mu_\omega) \\
&= F(I(\mu_\omega)) \\
&= F\left(\left(\int_{\partial\Delta} \psi_1(x\omega)\, d\mu(x), \dots, \int_{\partial\Delta} \psi_n(x\omega)\, d\mu(x)\right)\right)
\end{aligned}$$

Nuevamente, como el mapeo $\omega \mapsto \int_{\partial\Delta} \psi_j(x\omega)\, d\lambda(x)$ es analítico en $\bar{\Delta}$ y F es analítica en un conjunto abierto que contiene a $\left\{I(\mu_\omega) : \omega \in \bar{\Delta}\right\}$. entonces g_μ es analítica en $\bar{\Delta}$ como se requiere.

Finalmente, para A4:

$$g'_\mu(1) = \nabla F(I(\mu)) \cdot \left(\int_{\partial\Delta} x\psi'_1(x)\, d\mu(x), \dots, \int_{\partial\Delta} x\psi'_n(x)\, d\mu(x)\right)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} h_{\mu,\mu}(\omega) &= L_\mu(\mu_\omega) \\ &= \nabla F(I(\mu)) \cdot I(\mu_\omega) \\ &= \nabla F(I(\mu)) \cdot \left(\int_{\partial\Delta} \psi_1(x\omega)\, d\mu(x), \ldots, \int_{\partial\Delta} \psi_n(x\omega)\, d\mu(x)\right) \end{aligned}$$

de donde se sigue que $g'_\mu(1) = h'_{\mu,\mu}(1)$. Así, tenemos que se verifican todas las hipótesis del teorema 3.5, y obtenemos la conclusión deseada ■.

Regresando al ejemplo 3.3, el teorema anterior nos permite concluir que todas las funciones solución a tal problema tienen asociada una medida con soporte finito y que por el lema 1.8 esta medida tiene la forma $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta^{\zeta_i}$ con $|\zeta_k| = 1$ y $\sum_{k=1}^{m} a_i = 1$ y por tanto son funciones de la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\partial\Delta} \tfrac{1+\zeta z}{1-\zeta z} d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\partial\Delta} \tfrac{1+\zeta z}{1-\zeta z} d\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta^{\zeta_i}\right)(\zeta) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_i \int_{\partial\Delta} \tfrac{1+\zeta z}{1-\zeta z} d\delta^{\zeta_i}(\zeta) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_i \tfrac{1+\zeta_k z}{1-\zeta_k z} \end{aligned}$$

En este mismo ejemplo, podemos obtener una generalización inmediata de la siguiente forma:

Sean $\mathcal{F}_\phi$, como en el teorema 3.6, y $F : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}$ analítica, encontrar:

$$\max\{\operatorname{Re} F(b_0, \ldots b_n) : f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i \in \mathcal{F}_\phi\}$$

o de manera similar al caso anterior, se puede plantear el problema

$$\max\{\operatorname{Re} F(f(a), f'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a)) : f \in \mathcal{F}_\phi\}$$

en donde las ψ_i, tienen las siguientes formas:

Para el primer caso, si $\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ y $f \in \mathcal{F}_\phi$, entonces

$$f(z) = \int_{\partial\Delta} \phi(\zeta z) d\mu(\zeta) = \int_{\partial\Delta} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k z^k d\mu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k \int_{\partial\Delta} \zeta^k d\mu(\zeta)\right) z^k$$

y por tanto $\psi_k(\zeta) = c_k\zeta^k$ para $0 \leq k \leq n$. Para el segundo caso notemos que

$$f^{(j)}(a) = \int_{\partial\Delta} D_z^{(j)}(\phi(\zeta z))(a)d\mu(\zeta) = \int_{\partial\Delta}^{j} \zeta\phi_z^{(j)}(\zeta a)d\mu(\zeta)$$

y así las funciones ψ_j están dadas por

$$\psi_j(\zeta) = \zeta^j\phi_z^{(j)}(\zeta a) \text{ para } 0 \leq j \leq n$$

y nuevamente el teorema anterior nos permite concluir que todas las funciones solución a tal problema tienen asociada una medida con soporte finito de la forma $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\delta^{\zeta_i}$ con $|\zeta_k| = 1$ y $\sum_{k=1}^{m} a_i = A$ y por lo tanto son funciones de la forma:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\partial\Delta}\phi(\zeta z)d\mu(\zeta) \\ &= \int_{\partial\Delta}\phi(\zeta z)d(\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_i\delta^{\zeta_k})(\zeta) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{m} a_i \int_{\partial\Delta}\phi(\zeta z)d\delta^{\zeta_k}(\zeta) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{m} a_i\phi(\zeta_k z) \end{aligned}$$

Obsérvese que el teorema 3.7 nos permite caracterizar las soluciones de un problema de maximización en el que la funcional involucrada no es, necesariamente, una funcional lineal.

Bibliografía

[1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis.* Mac-Graw-Hill International Editions. 1979.

[2] Brickman, L. *Extreme points of the set of univalent functions.* Bull. Amer. Math. Soc. 76(1970) 372-374.

[3] Brickman, L, MacGregor, T.H. and Wilken, D.R. *Convex hullsof some clasical families of univalent functions.* Trns. Amer. Math. Soc. 156(1971).

[4] Brickman, L. *Extremal problems for certain clases of analytic functions.* Trans. Amer. Math. Soc. 35(1972) 67-73.

[5] Cochrane, P. C. and MacGregor, T. H. *Frèchet differentiable functionals and support points of families of analytic functions.* Trans. Amer. Math. Soc. 236(1978) 75-92.

[6] Conway, John. *Functions of one complex variable.* Springer-Verlag. Second Edition 1978.

[7] Dunford, N. and Schwartz, J.T. *Linear operators, I: General theory.* Interscience, New York and London 1958.

[8] Hallenbeck, D. J. and MacGregor, T. H. *Linear problems and convexity techniques in geometric function theory.* Pitman Publishing Co. Boston 1984.

[9] Hengartner, W., Pfluger, A., Schober, G. *On support points in the class of functions with bounded boundary rotation.* Ann. Acad. Sci. Fenn. 6(1981) 213-214.