33
2 ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"INTRODUCCION A LAS RELACIONES EN TEORIA DE CONJUNTOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMATICA

P R E S E N T A :

Ernestina Concepción Ramírez Castellanos

Director de Tesis: Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

1998

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
" INTRODUCCION A LAS RELACIONES EN TEORIA DE CONJUNTOS "

realizado por ERNESTINA CONCEPCION RAMIREZ CASTELLANOS

con número de cuenta 7228561-3 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía Hugo A. Rincón M.

Propietario Dra. Hortensia Galeana Sánchez H. Galeana

Propietario M. en C. Alejandro Bravo Mójica

Suplente M. en C. Patricia Cortés Flores

Suplente M. en C. Alejandro Alvarado García

Consejo Departamental de Matemáticas

MAT. CESAR GUEVARA BRAVO

A DIOS:

Gracias, te doy a tí

Dios Padre

porque cuantas veces busco

apoyo y refugio en tí,

Tú me respondes

iluminando mi camino.

Gracias, por tu infinito

amor, bondad y misericordia.

Al Dr. Hugo Rincón:

Gracias por su dedicación, atención y apoyo

que me brindó desde el primer día,

ya que profesores como usted nunca se olvidan ,

y porque usted siempre demuestra gran interés

para que sus alumnos salgan adelante.

Con toda mi gratitud, respeto y admiración ,

Gracias Dr. Hugo Rincón.

A mi amiga Paty Cortés:

Gracias por su ayuda y el apoyo que me brindó.

Gracias por su amistad sincera y leal.

Gracias por la amistad verdadera

que ha perdurado y se ha fortalecido

a través del tiempo y la distancia.

A mis padres:

Saber que somos amados y aceptados
hace que en nuestra familia encontremos
paz, comprensión y compañía.
Y saber que nuestros problemas y satisfacciones son
compartidos en nuestra familia
permite formar un frente unido
para enfrentar los problemas
de una forma solidaria y generosa.
Que hermoso ha sido lograr todo esto.
Gracias mami Conchita y papi Chalo.

A mi esposo Guillermo:

Gracias por enseñarme a mejorar,
por sus consejos y sobre todo
por sus palabras amables,
miradas y gestos afables.
Gracias por su paciencia,
por su bondad, comprensión
y por todo lo que me apoyó
para que yo siguiera adelante.

A mis hijos:

Aline Gabriela , Isis Krystal y Orlando

les agradezco su infinita paciencia

que me tuvieron y

que nunca dejaron de apoyarme

en todos los aspectos.

Y también agradezco de todo corazón

a mis hijos Aline Gabriela y Orlando

que dedicaron gran parte de su tiempo

para enseñarme a usar la computadora ,y

a mi hija Isis Krystal por ayudarme en todo momento.

A mi hermana Rebequita,
a mi cuñado Sergio,
a mi cuñada Blanquita:

Gracias por su amor leal,

sincero e incondicional,

que responde cuando es necesario,

con actos de afecto,

de comprensión y de sacrificio.

Gracias por su ternura y lealtad.

A mis hermanos:

Gracias por su apoyo , cariño y ayuda;

porque en los momentos más difíciles

siempre están presentes, no importa en la

situación en que me encuentre,

siempre estarán para apoyarme y quererme.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.

El propósito de esta tesis es el de proporcionar una introducción a las relaciones en Teoría de Conjuntos.

A lo largo de toda la tesis se incluye un gran número de ejemplos.

La tesis está dividida en cuatro partes.

PARTE I: Trata de las operaciones sobre relaciones binarias. Se refiere a la unión, intersección y diferencia de relaciones. Además se refiere a la relación inversa y a la composición.

PARTE II: Se refiere a las relaciones: reflexivas, irreflexivas, simétricas, asimétricas, antisimétricas, transitivas, conexas y fuertemente conexas. Se analizan formalmente.

Se hace un estudio formal de la siguiente relaciones: casi orden, orden parcial, orden simple, orden parcial estricto y orden simple estricto. Lo que nos permite entrar al estudio de los buenos ordenes en un conjunto A, y a los conceptos de R-sucesor inmediato, R- sección, R- segmento y retícula relativa a una relación R.

PARTE III: Trata sobre las relaciones de equivalencia.

PARTE IV: Se refiere a particiones.

PARTE I

Operaciones sobre relaciones binarias

En diversos contextos surgen frecuentemente relaciones entre dos o varias cosas. Así podemos decir que Augusto está en la relación de padrastro con Tiberio, o que vale la relación de "estar en medio" para tres puntos. Cuando nos referimos a relaciones en contextos ordinarios, pensamos en que existe alguna descripción intuitiva de la clase de conexión entre ciertos objetos. Afortunadamente esta idea vaga de relación intuitiva puede precisarse en el contexto formal. Se puede definir una relación, simplemente como un conjunto de parejas ordenadas.

En este capítulo nuestro interés principal es estudiar la teoría de las relaciones binarias. Es decir, las relaciones que se tienen entre dos conjuntos.

Más aún, la teoría de las **relaciones n-arias** se puede construir dentro de la teoría de las relaciones binarias. En consecuencia, omitiremos el adjetivo "binario" en la definición formal.

Definición 1. A es una relación si

$$(\forall x)\,(\,x \in A \Rightarrow (\exists\, y)\,(\exists\, z)\,(\,x = (\,y, z\,)\,)\,).$$

La manera en que las relaciones **n-arias** están incluidas dentro de la teoría de las relaciones binarias, se ejemplifica para n = 3.

Definición 2. Un conjunto A es una relación ternaria si y solo si

1. A es una relación y
2. $(\forall x)(x \in A \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(\exists w)(x = ((y, z)), w))$.

Por otra parte, nótese que no a toda relación intuitiva que ocurre en la teoría de conjuntos le corresponde un conjunto de parejas ordenadas.

Por ejemplo, no existe un conjunto que corresponda a la relación de inclusión entre conjuntos.

Definición (y notación) 3. $x \mathrm{A} y$ si $(x, y) \in \mathrm{A}$.

Empezaremos los desarrollos sistemáticos con tres proposiciones sencillas, que son:

Proposición 1. El conjunto vacío $\varnothing$ es una relación .
Demostración: Por la Definición 1, $\varnothing$ es una relación, ya que todo elemento de $\varnothing$ es una pareja ordenada (ya que $\varnothing$ no tiene elementos). □

Proposición 2. (R es una relación y $S \subset R$) $\Rightarrow$ S es una relación.
Demostración: Sea x un elemento arbitrario de S. Como $S \subset R$ entonces $x \in R$.
Por hipótesis, R es una relación y como $x \in R$, entonces existen y y z tales que

$$x = (y, z)$$

Por lo tanto, de acuerdo a la Definición 1. S es una relación. □

Proposición 3a. R, S relaciones $\Rightarrow R \cap S$ es una relación.
Demostración: $(R \cap S) \subset R$, por el Proposición 2 se tiene que $(R \cap S)$ es una relación. □

Proposición 3b. R, S relaciones $\Rightarrow$ R \ S es una relación .
Demostración : $R \setminus S \subset R$. $\square$

Proposición 3c. R, S relaciones $\Rightarrow$ $R \cup S$ es una relación.
Demostración : Sea $x \in R \cup S$ entonces $x \in R$ o $x \in S$. En cualquier caso, existen y_1, z_1 tales que $x = (y_1, z_1)$. Por lo tanto $R \cup S$ es una relación . $\square$

Ejemplo 1. Si $R = \{(1,1), (1,2)\}$ y $S = \{(2,1)\}$, entonces $R \cup S = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ también es una relación .

Definición 4. Si A es una relación entonces el dominio de A (en símbolos : $\mathbf{D}$ A), está definido como

$$\mathbf{D}\, A = \{ x \mid (\exists y)(x\, A\, y) \}.$$

Proposición 4. $\mathbf{D}(A \cup B) = \mathbf{D} A \cup \mathbf{D} B$.
Demostración:

$x \in \mathbf{D}(A \cup B) \Leftrightarrow (\exists\ y)(x\, A \cup B\, y)$ (por la Definición 4)

$\Leftrightarrow (\exists\ y)((x,y) \in A \cup B)$ (por la Definición 3)

$\Leftrightarrow (\exists\ y)((x, y) \in A \vee (x, y) \in B)$

$\Leftrightarrow (\exists\ y)(x\, A\, y \vee x\, B\, y)$ (por la Definición 3)

$\Leftrightarrow (\exists y)(x\, A\, y) \vee (\exists y)(x\, B\, y)$

$\Leftrightarrow x \in \mathbf{D} A \vee x \in \mathbf{D} B$

$\Leftrightarrow x \in (\mathbf{D} A \cup \mathbf{D} B)$. $\square$

Proposición 5.- $\mathbf{D}(A \cap B) \subseteq \mathbf{D} A \cap \mathbf{D} B$.
Demostración:

$x \in \mathbf{D}(A \cap B) \Leftrightarrow (\exists\ y)(x (A \cap B) y)$ (por la Definición 4)

$\Leftrightarrow (\exists\ y)((x,y) \in (A \cap B))$ (por la Definición 3)

$\Leftrightarrow (\exists\ y)((x,y) \in A \wedge (x,y) \in B)$

$\Rightarrow (\exists\ y)(\,(x,y) \in \mathrm{A}) \ \wedge\ (\exists\ y)(\,(x,y) \in \mathrm{B}\,)$

$\Rightarrow x \in \mathbf{D}\,\mathrm{A} \wedge x \in \mathbf{D}\,\mathrm{B}$ (por la Definición 4)

$\Rightarrow\ x \in \mathbf{D}\,\mathrm{A} \cap \mathbf{D}\,\mathrm{B}.$ □

Proposición 6. $\mathbf{D}\,\mathrm{A} \setminus \mathbf{D}\,\mathrm{B} \subseteq \mathbf{D}\,(\,\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}\,).$

Demostración:

$x \in \mathbf{D}\,\mathrm{A} \setminus \mathbf{D}\,\mathrm{B} \Leftrightarrow x \in \mathbf{D}\,\mathrm{A}\ \wedge\ x \notin \mathbf{D}\,\mathrm{B}$

$\Leftrightarrow (\exists\, y)(\,(x,y) \in \mathrm{A}\,)\ \wedge\ (\exists\, y)(\,(x,y) \notin \mathrm{B}\,)$ (por la Definición 4)

$\Rightarrow (\exists\, y)(\,(x,y) \in \mathrm{A}\ \wedge\ (x,y) \notin \mathrm{B}\,)$

$\Rightarrow (\exists\, y)(\,(x,y) \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}\,)$

$\Rightarrow x \in \mathbf{D}\,(\,\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}\,)$ (por la Definición 4). □

Proposición 7. $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}\ \Rightarrow \mathbf{D}\,\mathrm{A} \subseteq\ \mathbf{D}\,\mathrm{B}.$

Demostración:

$x \in \mathbf{D}\,\mathbf{A} \Leftrightarrow (\,\exists\ y\,)(\,x\,\mathrm{A}\,y\,)$ (por la Definición 4)

$\Rightarrow\ (\,\exists\, y\,)(\,x\,\mathrm{B}\,y\,)$ (por la Hipótesis)

$\Rightarrow\ x \in \mathbf{D}\,\mathrm{B}$ (por la Definición 4). □

Ejemplo 2. No se cumple que

$$\mathbf{D}\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbf{D}\,\mathrm{A} \cap \mathbf{D}\,\mathrm{B},$$ ya que:

Si $\mathrm{A} = \{(2,1), (3,2)\}$ y $\mathrm{B} = \{(2,2), (3,1)\}$ entonces

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$$

$$\mathbf{D}\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \varnothing \qquad (1)$$

$\mathbf{D}\,\mathrm{A} = \{2,3\}$ y $\mathbf{D}\,\mathrm{B} = \{2,3\}$ entonces

$$\mathbf{D}\,\mathrm{A} \cap \mathbf{D}\,\mathrm{B} = \{2,3\} \qquad (2)$$

De (1) y (2) vemos que

$$\mathbf{D}\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \neq\ \mathbf{D}\,\mathrm{A}$$

Ejemplo 3. No se cumple $\mathbf{D}\,(A \setminus B) = \mathbf{D}\,A \setminus \mathbf{D}\,B$, ya que:
Si $A = \{(2,1), (3,2)\}$ y $B = \{(2,2), (3,1)\}$ entonces

$$A \setminus B = \{(2,1), (3,2)\} = A$$

$$\mathbf{D}\,(A \setminus B) = \{2,3\} \qquad (1)$$

$\mathbf{D}\,A = \{2,3\}$ y $\mathbf{D}\,B = \{2,3\}$ entonces

$$\mathbf{D}\,A \setminus \mathbf{D}\,B = \varnothing \qquad (2)$$

De (1) y (2) vemos que

$$\mathbf{D}\,(A \setminus B) \neq \mathbf{D}\,A \setminus \mathbf{D}\,B.$$

Ejemplo 4. Si $A = \{(2,2), (1,1)\}$ y $B = \{(1,1)\}$ entonces $(A \setminus B) = \{(2,2)\}$, $\mathbf{D}\,(A \setminus B) = \{2\}$, $\mathbf{D}\,A = \{2,1\}$ y $\mathbf{D}\,B = \{\,1\,\}$, vemos que $\mathbf{D}\,(A \setminus B) \subset \mathbf{D}\,A$.

Definición 5: El rango de A (en símbolos: $\mathbf{R}\,A$), está definido por

$$\mathbf{R}\,A = \{\, y \mid (\exists\, x)\,(x\,A\,y)\,\}.$$

Ejemplo 5. Si $R_1 = \{(1,1),(2,2)\}$ entonces $\mathbf{R}\;R_2 = \{\,1, 2\,\}$.

Proposición 8. $\mathbf{R}\,(A \cup B) = \mathbf{R}\,A \cup \mathbf{R}\,B$.
Demostración:

$y \in \mathbf{R}\,(A \cup B) \Leftrightarrow (\exists\, x)\,(x\; A \cup B\; y)$ (por la Definición 4)

$\Leftrightarrow (\exists\, x)\,(\,(x,y) \in A \cup B\,)$

$\Leftrightarrow (\exists\, x)\,(\,(x,y) \in A \vee (x,y) \in B\,)$

$\Leftrightarrow (\exists\, x)\,(x\,A\,y \;\vee\; x\,B\,y)$ (por la Definición 3)

$\Leftrightarrow (\exists\, x)\,(x\,A\,y) \vee (\exists\, x)\,(x\,B\,y)$

$\Leftrightarrow y \in \mathbf{R}\,A \vee \in \mathbf{R}\,B$ (por la Definición 4)

$\Leftrightarrow y \in \mathbf{R}\,A \cup \mathbf{R}\,B.$ $\square$

Proposición 9. $\mathbf{R}\,(A \cap B) \subseteq \mathbf{R}\,A \cap \mathbf{R}\,B$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
y \in \mathbf{R}\,(A \cap B) &\Leftrightarrow (\exists\, x)(\, x\, A \cap B\, y\,) \qquad (\text{ por la Definición 5 })\\
&\Leftrightarrow (\exists\, x)(\,(\, x, y\,) \in A \cap B\,)\\
&\Leftrightarrow (\exists\, x)(\,(\, x, y\,) \in A \wedge (\, x, y\,) \in B\,)\\
&\Leftrightarrow (\exists\, x)(\, x\, A\, y \wedge x\, B\, \mathrm{y}\,) \qquad (\text{ por la Definición 3 })\\
&\Rightarrow (\exists\, x)(\, x\, A\, y\,) \wedge (\exists\, x)(\, x\, B\, y\,)\\
&\Rightarrow y \in \mathbf{R}\,A \wedge \in \mathbf{R}\,B \qquad (\text{ por la Definición 5 })\\
&\Rightarrow y \in (\,\mathbf{R}\,A \cap \mathbf{R}\,B\,). \quad \square
\end{aligned}
$$

Proposición 10. $\mathbf{R}\,A \setminus \mathbf{R}\,B \subseteq \mathbf{R}\,(A \setminus B)$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
y \in \mathbf{R}\,A \setminus \mathbf{R}\,B &\Leftrightarrow y \in \mathbf{R}\,A \wedge y \notin \mathbf{R}\,B\\
&\Rightarrow (\exists\, x)\,((x, y) \in A) \wedge (\exists\, x)\,((x, y) \notin B) \qquad (\text{ por la Definición 4 })\\
&\Rightarrow (\exists\, x)(\,(\, x, y\,) \in A \wedge (\, x, y\,) \notin B\,)\\
&\Rightarrow (\exists\, x)(\,(\, x, y\,) \in A \setminus B\,)\\
&\Rightarrow y \in \mathbf{R}(\, A \setminus B\,) \qquad (\text{ por la Definición 5 }). \quad \square
\end{aligned}
$$

Proposición 11. $A \subseteq B \Rightarrow \mathbf{R}\,A \subseteq \mathbf{R}\,B$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
y \in \mathbf{R}\,A &\Leftrightarrow (\,\exists\, x\,)\ (\, x\, A\, y\,) \qquad (\text{ por la Definición 5 })\\
&\Rightarrow (\,\exists\, x\,)\ (\, x\, B\, y\,) \qquad (\text{ por la Hipótesis })\\
&\Rightarrow y \in \mathbf{R}\ B \qquad (\text{ por la Definición 5 }). \quad \square
\end{aligned}
$$

Ejemplo 6. Si $A = \{(1,1), (3,0)\}$ y $B = \{(4,2)\}$ entonces

$$\mathbf{R}\,A = \{1,0\} \text{ y } \mathbf{R}\,B = \{2\}.$$

De donde,

$$\mathbf{R}\,A \cup \mathbf{R}\,B = \{1,0,2\}. \qquad (1)$$

Por otro lado,

$$(A \cup B) = \{(1,1), (3,0), (4,2)\}$$

$\mathbf{R}\,(A \cup B) = \{1,0,2\}$. (2)

De (1) y (2) tenemos que

$$\mathbf{R}\,A \cup \mathbf{R}\,B = \mathbf{R}\,(A \cup B).$$

Ejemplo 7. No se cumple $\mathbf{R}\,(A \cap B) = \mathbf{R}\,A \cap \mathbf{R}\,B$, ya que: Si $A = \{(2,1), (3,2)\}$ y $B = \{(2,2), (3,1)\}$ entonces

$$A \cap B = \varnothing$$

$$\mathbf{R}\,(A \cap B) = \varnothing \qquad (1)$$

$\mathbf{R}\,A = \{1,2\}$ y $\mathbf{R}\,B = \{1,2\}$ entonces

$$\mathbf{R}\,A \cap \mathbf{R}\,B = \{2,1\} \qquad (2)$$

De (1) y (2) vemos que

$$\mathbf{R}\,(A \cap B) \neq \mathbf{R}\,A \cap \mathbf{R}\,B.$$

Ejemplo 8. Si $A = \{(1,1), (3,0)\}$ y $B = \{(4,2)\}$ entonces

$$\mathbf{R}\,A = \{1,0\}. \qquad (1)$$

Por otro lado,

$$(A \cap B) = \varnothing$$

$$\mathbf{R}\,(A \cap B) = \varnothing \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\mathbf{R}\,(A \cap B) \subset \mathbf{R}\,A.$$

Ejemplo 9. Si $A = \{(1,1), (3,0)\}$ y $B = \{(4,2)\}$ entonces

$$\mathbf{R}\,B = \{2\}. \qquad (1)$$

Por otro lado,

$$(A \cap B) = \varnothing$$

$$\mathbf{R}\,(A \cap B) = \varnothing. \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que $\mathbf{R}\,(A \cap B) \subset \mathbf{R}\,B$.

Ejemplo 10. Si $A = \{(1,1), (3,0)\}$ y $B = \{(4,2)\}$ entonces $A \cap B = \varnothing$ y

$$\mathbf{R}(A \cap B) = \varnothing. \qquad (1)$$

Por otro lado,

$$A \cup B = \{(1,1), (3,0), (4,2)\}$$

$$\mathbf{R}(A \cup B) = \{0,1,2\} \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\mathbf{R}(A \cap B) \subset \mathbf{R}(A \cup B).$$

Ejemplo 11. Si $A = \{(1,1), (3,0)\}$ y $B = \{(4,2)\}$ entonces

$$\mathbf{R}A = \{1,0\} \qquad (1)$$

Por otro lado,

$$A \setminus B = \varnothing \text{ y } \mathbf{R}(A \setminus B) = \varnothing \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\mathbf{R}(A \setminus B) \subset \mathbf{R}A.$$

Ejemplo 12. No se cumple que, $\mathbf{R}(A \setminus B) = \mathbf{R}A \setminus \mathbf{R}B$, ya que:

Si $A = \{(3,0), (1,1)\}$ y $B = \{(3,1)\}$ entonces

$$A \setminus B = \{(3,0), (1,1)\} \text{ y } \mathbf{R}(A \setminus B) = \{0,1\} \qquad (1)$$

Por otro lado,

$\mathbf{R}A = \{0,1\}$ y $\mathbf{R}B = \{1\}$

$$\mathbf{R}A \setminus \mathbf{R}B = \{0\} \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\mathbf{R}(A \setminus B) \neq \mathbf{R}A \setminus \mathbf{R}B.$$

Definición 6: El campo de A (en símbolos: $\mathbf{F}A$) , está definido por

$$\mathbf{F}A = \mathbf{D}A \cup \mathbf{R}A.$$

Ejemplo 13. Si $A = \{(1, a), (1, b), (1, c)\}$ entonces $\mathbf{D}\, A = \{1\}$ y $\mathbf{R}\, A = \{a, b, c\}$.
Por lo tanto $\mathbf{F}\, A = \mathbf{D}\, A \cup \mathbf{R}\, A = \{1, a, b, c\}$.

Proposición 12. $\mathbf{F}\,(A \cup B) = \mathbf{F}\, A \cup \mathbf{F}\, B$.
Demostración:

$\mathbf{F}(A \cup B) = \mathbf{D}(A \cup B) \cup \mathbf{R}(A \cup B)$ (por la Definición 6)

$= (\mathbf{D}\, A \cup \mathbf{D}\, B) \cup (\mathbf{R}\, A \cup \mathbf{R}\, B)$ (por las Proposición 4 y 11)

$= (\mathbf{D}\, A \cup \mathbf{R}\, A) \cup (\mathbf{D}\, B \cup \mathbf{R}\, B)$

$= \mathbf{F}\, A \cup \mathbf{F}\, B$ (por la Definición 6). □

Proposición 13. $\mathbf{F}\,(A \cap B) \subseteq \mathbf{F}\, A \cap \mathbf{F}\, B$.
Demostración:

$x \in \mathbf{F}\,(A \cap B) \Leftrightarrow x \in \mathbf{D}(A \cap B) \cup \mathbf{R}(A \cap B)$ (por la Definición 6)

$\Leftrightarrow x \in \mathbf{D}(A \cap B) \vee x \in \mathbf{R}(A \cap B)$

$\Rightarrow (x \in \mathbf{D}\, A \wedge x \in \mathbf{D}\, B) \vee (x \in \mathbf{R}\, A \wedge x \in \mathbf{R}\, B)$

$\Rightarrow [(x \in \mathbf{D}\, A \wedge x \in \mathbf{D}\, B) \vee (x \in \mathbf{R}\, A)] \wedge$
$[(x \in \mathbf{D}\, A \wedge x \in \mathbf{D}\, B) \vee (x \in \mathbf{R}\, B)]$

$\Rightarrow [(x \in \mathbf{D}\, A \vee x \in \mathbf{R}\, A)] \wedge [(x \in \mathbf{D}\, B \vee x \in \mathbf{R}\, A)] \wedge$
$[(x \in \mathbf{D}\, A \vee x \in \mathbf{R}\, B)] \wedge [(x \in \mathbf{D}\, B \vee x \in \mathbf{R}\, B)]$

$\Rightarrow (x \in \mathbf{D}\, A \vee x \in \mathbf{R}\, A) \wedge (x \in \mathbf{D}\, B \vee x \in \mathbf{R})$

$\Rightarrow x \in (\mathbf{D}\, A \cup \mathbf{R}\, A) \wedge x \in (\mathbf{D}\, B \cup \mathbf{R}\, B)$

$\Rightarrow x \in \mathbf{F}\, A \wedge x \in \mathbf{F}\, B$

$\Rightarrow x \in (\mathbf{F}\, A \cap \mathbf{F}\, B)$. □

Proposición 14. $\mathsf{F}\,A \setminus \mathsf{F}\,B \subseteq \mathsf{F}\,(A \setminus B)$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
x \in \mathsf{F}\,A \setminus \mathsf{F}\,B &\Rightarrow x \in \mathsf{F}\,A \wedge x \notin \mathsf{F}\,B \\
&\Rightarrow (x \in \mathsf{D}\,A \vee x \in \mathsf{R}\,A) \wedge (x \notin (\mathsf{D}\,B \cup \mathsf{R}\,B)) \\
&\Rightarrow (x \in \mathsf{D}\,A \vee x \in \mathsf{R}\,A) \wedge (x \notin \mathsf{D}\,B \wedge x \notin \mathsf{R}\,B) \\
&\Rightarrow (x \in \mathsf{D}\,A \wedge (x \notin \mathsf{D}\,B \wedge x \notin \mathsf{R}\,B)) \vee \\
&\quad\ (x \in \mathsf{R}\,A \wedge (x \notin \mathsf{D}\,B \wedge x \notin \mathsf{R}\,B)) \\
&\Rightarrow (x \in \mathsf{D}\,A \wedge x \notin \mathsf{D}\,B \wedge x \notin \mathsf{R}\,B) \vee \\
&\quad\ (x \in \mathsf{R}\,A \wedge x \notin \mathsf{D}\,B \wedge x \notin \mathsf{R}\,B) \\
&\Rightarrow (x \in \mathsf{D}\,A \wedge x \notin \mathsf{D}\,B) \vee (x \in \mathsf{R}\,A \wedge x \notin \mathsf{R}\,B) \\
&\Rightarrow x \in (\mathsf{D}\,A \setminus \mathsf{D}\,B) \vee x \in (\mathsf{R}\,A \setminus \mathsf{R}\,B) \\
&\Rightarrow x \in (\mathsf{D}\,A \setminus \mathsf{D}\,B) \cup (\mathsf{R}\,A \setminus \mathsf{R}\,B) \\
&\Rightarrow x \in \mathsf{F}\,(A \setminus B).\ \square
\end{aligned}
$$

Proposición 15. $A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{F}\,A \subseteq \mathsf{F}\,B$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
x \in \mathsf{F}\,A &\Rightarrow x \in \mathsf{D}\,A \cup \mathsf{R}\,A && \text{(por la Definición 6)} \\
&\Rightarrow x \in \mathsf{D}\,A \vee x \in \mathsf{R}\,A \\
&\Rightarrow x \in \mathsf{D}\,B \vee x \in \mathsf{R}\,B && \text{(por la Hipótesis)} \\
&\Rightarrow x \in \mathsf{F}\,B && \text{(por la Definición 6).}\ \square
\end{aligned}
$$

Ejemplo 14. Si $A = \{(3,0)\}$ y $B = \{(4,2)\}$ entonces

$A \cup B = \{(3,0), (4,2)\}$ y $\mathsf{F}\,(A \cup B) = \{3,0,4,2\}$

Por otro lado,

$\mathsf{F}\,A \cup \mathsf{F}\,B = \{3,0,4,2\}$

vemos que

$$\mathsf{F}\,(A \cup B) = \mathsf{F}\,A \cup \mathsf{F}\,B.$$

Ejemplo 15. No se cumple que

$$\mathsf{F}(A \cap B) = \mathsf{F}A \cap \mathsf{F}B \text{, ya que:}$$

Si $A = \{(2,1), (3,2)\}$ y $B = \{(2,2), (3,1)\}$ entonces

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{y} \quad \mathsf{F}(A \cap B) = \varnothing \qquad (1)$$

$\mathsf{F}A = \{2,3,1\}$ y $\mathsf{F}B = \{1,2,3\}$ entonces

$$\mathsf{F}A \cap \mathsf{F}B = \{1, 2, 3\} \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\mathsf{F}(A \cap B) \neq \mathsf{F}A \cap \mathsf{F}B.$$

Ejemplo 16. No se cumple que

$$\mathsf{F}(A \setminus B) = \mathsf{F}A \setminus \mathsf{F}B\text{, ya que:}$$

Si $A = \{(2,1), (3, 2)\}$ y $B = \{(2, 2), (3,1)\}$ entonces

$A \setminus B = \{(2,1), (3,2)\} = A$ y $\mathsf{F}(A \setminus B) = \{1, 2, 3\}$ (1)

$\mathsf{F}A = \{2, 3, 1\}$ y $\mathsf{F}B = \{1, 2, 3\}$ entonces

$$\mathsf{F}A \setminus \mathsf{F}B = \varnothing \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\mathsf{F}(A \setminus B) \neq \mathsf{F}A \setminus \mathsf{F}B.$$

Observación 1. $\mathsf{D}\varnothing = \varnothing$, $\mathsf{R}\varnothing = \varnothing$, $\mathsf{F}\varnothing = \varnothing$.

1.1 Relación Inversa.

Definición 7. La relación inversa A (en símbolos: A^{-1}) esta definida como:

$$A^{-1} = \{ (y, x) \mid x\,A\,y \}.$$

Ejemplo 17. Si $A = \{(1, 0), (2, 1), (4, 2)\}$ entonces $A^{-1} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 4)\}$ es la relación inversa de A.

Proposición 16. $y\,A^{-1}\,x \Leftrightarrow x\,A\,y$.

Demostración: Sea $z = (y, x) \in A^{-1}$

$z \in A^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in A^{-1}$ (por la Definición 7)

$\Leftrightarrow (x, y) \in A$

$\Leftrightarrow x\,A\,y$ (por la Definición 3). □

Observación 2. A^{-1} es una relación.

Observación 3. Si A es una relación entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.

Ejemplo 18. Si $A = \{(1, 0), (2, 1), (4, 2)\}$ entonces $A^{-1} = \{(0,1), (1, 2), (2, 4)\}$ es la relación inversa de A.
$(A^{-1})^{-1} = \{(1,0), (2,1), (4, 2)\} = A$.

Proposición 17. $(A \cup B)^{-1} = A^{-1} \cup B^{-1}$.

Demostración :

$(x, y) \in (A \cup B)^{-1} \Leftrightarrow x\,(A \cup B)^{-1}\,y$ (por la Definición 3)

$\Leftrightarrow y\,A \cup B\,x$ (por la Proposición 12)

$\Leftrightarrow (y, x) \in A \cup B$ (por la Definición 3)

$\Leftrightarrow (y, x) \in A \vee (y, x) \in B$

$\Leftrightarrow y\,A\,x \vee y\,B\,x$ (por la Definición 3)

$\Leftrightarrow x\,A^{-1}\,y \vee x\,B^{-1}\,y$ (por la Proposición 12)

$\Leftrightarrow (x, y) \in A^{-1} \vee (x, y) \in B^{-1}$ (por la Definición 3)

$\Leftrightarrow (x, y) \in A^{-1} \cup B^{-1}$. □

Proposición 18. $(A \cap B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1}$.

Demostración:

$(x, y) \in (A \cap B)^{-1} \Leftrightarrow y\,A \cap B\,x$ (por la Proposición 12)

$\Leftrightarrow (y, x) \in A \cap B$ (por la Definición 3)

$\Leftrightarrow (y, x) \in A \wedge (y, x) \in B$

$\Leftrightarrow y\,A\,x \wedge y\,B\,x$ (por la Definición 3)

$\Leftrightarrow x\, A^{-1} y \wedge x\, B^{-1} y$ (por la Proposición 12)
$\Leftrightarrow (x, y) \in A^{-1} \wedge (x, y) \in B^{-1}$ (por la Definición 3)
$\Leftrightarrow (x, y) \in (A^{-1} \cap B^{-1})$. $\square$

Observación 4. $\varnothing^{-1} = \varnothing$.

Proposición 19. $(A \setminus B)^{-1} = A^{-1} \setminus B^{-1}$.
Demostración:
$(x, y) \in (A \setminus B)^{-1} \Leftrightarrow x\,(A \setminus B)^{-1} y$ (por la Definición 7)
$\Leftrightarrow y\,(A \setminus B)\,x$ (por la Proposición 12)
$\Leftrightarrow (y, x) \in (A \setminus B)$ (por la Definición 3)
$\Leftrightarrow (y, x) \in A \wedge (y, x) \notin B$
$\Leftrightarrow (x, y) \in A^{-1} \wedge (x, y) \notin B^{-1}$ (por la Definición 7)
$\Leftrightarrow (x, y) \in A^{-1} \setminus B^{-1}$. $\square$

Proposición 20. $A \subseteq B \Leftrightarrow A^{-1} \subseteq B^{-1}$.
Demostración:
$\Rightarrow)$
$(x, y) \in A^{-1} \Rightarrow (y, x) \in A$
$\Rightarrow (y, x) \in B$
$\Rightarrow (x, y) \in B^{-1}$
$\Leftarrow)$
$(x, y) \in A \Rightarrow (y, x) \in A^{-1}$
$\Rightarrow (y, x) \in B^{-1}$
$\Rightarrow (x, y) \in B$. $\square$

Ejemplo 19. $(A \times B)^{-1} = B \times A$, ya que :
$(x, y) \in (A \times B)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in (A \times B)$
$\Leftrightarrow y \in A \wedge x \in B$
$\Leftrightarrow x \in B \wedge y \in A$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (B \text{ X } A)$.

1.2 Producto Relativo.

Definición 8. Si A y B son relaciones entonces el producto relativo de A y B (en símbolos: A / B) se define como:

$$A / B = \{ (x, y) \mid (\exists z)(x A z \text{ y } z B y) \}.$$

Definición 9. $B \circ A = (A / B)$.

$$x \xrightarrow{A} z \xrightarrow{B} y$$

$$A / B = B \circ A.$$

Ejemplo 20. Si $A = \{ (1, 3), (4, 1) \}$ y $B = \{ (1, 1), (2, 3) \}$ entonces $A / B = \{ (4, 1) \}$
Por lo tanto, $B \circ A = \{ (4, 1) \}$

Ejemplo 21. No se cumple que $A / B = B / A$.
Véase el siguiente ejemplo:
Si $A = \{(4, 1), (2, 1)\}$ y $B = \{(1, 3), (2, 2)\}$ entonces $A / B = \{(4, 3), (2, 3)\}$ y $B / A = \{(2, 1)\}$.

Observación 5. A / B es una relación.

Proposición 21. $\varnothing / A = \varnothing$.
Debemos demostrar que:
i) $\varnothing \subset \varnothing / A$ se cumple, ya que, por definición $\varnothing$ es subconjunto de cualquier conjunto.

ii) $\varnothing / A \subset \varnothing$.

Sea $(x, z) \in \varnothing / A \Rightarrow (\exists\ y)\ ((x, y) \in \varnothing \wedge (y, z) \in A)$
$\Rightarrow (x, y) \in \varnothing$ que es una contradicción, ya que $\varnothing$ no tiene elementos. □

Proposición 22. $A / \varnothing = \varnothing$.

Debemos demostrar que:

i) $\varnothing \subset \varnothing / A$ se cumple , ya que , por definición $\varnothing$ es subconjunto de cualquier conjunto.

ii) $A / \varnothing \subset \varnothing$.

Sea $(x, z) \in A / \varnothing \Rightarrow (\exists\ y)\ ((x, y) \in A \wedge (y, z) \in \varnothing)$
$\Rightarrow (y, z) \in \varnothing$ que es una contradicción, ya que $\varnothing$ no tiene elementos. □

Corolario 1. $A \circ \varnothing = \varnothing$.

Demostración:

$A \circ \varnothing = (\varnothing / A)$ (por la Definición 9)
$= \varnothing$. □

Corolario 2. $\varnothing \circ A = \varnothing$.

Demostración:

$\varnothing \circ A = (A / \varnothing)$ (por la Definición 9)
$= \varnothing$. □ (por la Proposición 19)

Proposición 23. $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A / C \subseteq B / D$.

Demostración:

$(x, y) \in A / C \Rightarrow (\exists z)((x, z) \in A \wedge (z, y) \in C)$
(por la Definición 8)
$\Rightarrow (\exists z)((x, z) \in B \wedge (z, y) \in D)$ (por la Hipótesis)
$\Rightarrow (x, y) \in B / D$ (por la Definición 8). □

Las tres leyes de distributividad están expresadas en los tres proposiciones siguientes:

Proposición 24. $A/(B \cup C) = A/B \cup A/C$.
Demostración:
$(x, y) \in A/(B \cup C) \Leftrightarrow (\exists z)((x, z) \in A \wedge (z, y) \in B \cup C)$
(por la Definición 8)
$\Leftrightarrow (\exists z)((x, z) \in A \wedge ((z, y) \in B \vee (z, y) \in C))$
$\Leftrightarrow (\exists z)[((x, z) \in A \wedge (z, y) \in B) \vee$
$((x, z) \in A \wedge (z, y) \in C)]$
$\Leftrightarrow (\exists z)((x, z) \in A \wedge (z, y) \in B) \vee (\exists z)((x, z) \in A \wedge$
$(z, y) \in C)$
$\Leftrightarrow (x, y) \in A/B \vee (x, y) \in A/C$ (por la Definición 8)
$\Leftrightarrow (x, y) \in A/B \cup A/C$. □

Proposición 25. $A/(B \cap C) \subseteq A/B \cap A/C$.
Demostración:
$(x, y) \in A/(B \cap C) \Rightarrow (\exists z)((x, z) \in A \wedge$
$(z, y) \in B \cap C)$ (por la Definición 8)
$\Rightarrow (\exists z)((x, z) \in A \wedge ((z, y) \in B \wedge (z, y) \in C))$
$\Rightarrow (\exists z)[((x, z) \in A \wedge (z, y) \in B) \wedge ((x, z) \in A \wedge$
$(z, y) \in C)]$
$\Rightarrow (\exists z)((x, z) \in A \wedge (z, y) \in B) \wedge (\exists z)((x, z) \in A \wedge$
$(z, y) \in C)$
$\Rightarrow (x, y) \in A/B \wedge (x, y) \in A/C$ (por la Definición 8)
$\Rightarrow (x, y) \in A/B \cap A/C$. □

Proposición 26. $(A/B) \setminus (A/C) \subseteq A/(B \setminus C)$.
Demostración:
$(x, y) \in [(A/B) \setminus (A/C)] \Leftrightarrow (x, y) \in (A/B) \wedge$
$(x, y) \notin (A/C)$

$\Leftrightarrow (\exists z)((x,z) \in A \wedge (z,y) \in B) \wedge$
$\sim (\exists w)((x,z) \in A \wedge (z,y) \in C)$
$\Rightarrow (\exists z)\ ((x,z) \in A \wedge (z,y) \in B) \wedge (\forall z)(x,z) \notin A \vee$
$(z,y) \notin C)$
$\Rightarrow (\exists z)((x,z) \in A \wedge (z,y) \in B) \wedge$
$(\forall z)((x,z) \in A \Rightarrow (z,y) \notin C)$
$\Rightarrow (\exists z)((x,z) \in A \wedge (z,y) \in B)$
Ahora, $(x,z) \in A \Rightarrow (z,y) \notin C$
Por lo tanto,
$(z,y) \in B \setminus C \wedge (x,z) \in A$
Por lo tanto,
$(x,y) \in A/(B \setminus C)$. □

Proposición 27. $(A \times B)/(A \times B) \subseteq (A \times B)$.
Demostración:
$(x,y) \in (A \times B)/(A \times B) \Leftrightarrow (\exists z)((x,z) \in (A \times B) \wedge$
$(z,y) \in (A \times B))$
$\Rightarrow (\exists z)((x,z) \in (A \times B)) \wedge (\exists z)((z,y) \in (A \times B))$
$\Rightarrow x \in \mathbf{D}(A \times B) \wedge y \in \mathbf{R}(A \times B)$
$\Rightarrow (x,y) \in (A \times B)$. □

Proposición 28. $(A/B)^{-1} = B^{-1}/A^{-1}$.
Demostración:
Sea $(x,y) \in (A/B)^{-1} \Rightarrow (y,x) \in (A/B)$ (por la Definición 7)
$\Rightarrow (\exists z)((y,z) \in A \wedge (z,x) \in B)$ (por la Definición 8)
$\Rightarrow (\exists z)((z,y) \in A^{-1} \wedge (x,z) \in B^{-1})$ (por la Definición 7)
$\Rightarrow (\exists z)((x,z) \in B^{-1} \wedge (z,y) \in A^{-1})$
$\Rightarrow (x,y) \in B^{-1}/A^{-1}$ (por la Definición 7). □

La siguiente Proposición muestra que la operación de producto relativo es asociativo.

Proposición 29. $(A / B) / C = A / (B / C)$.
Demostración:

$(x,y) \in (A/B)/C \Leftrightarrow (\exists z)((x,z) \in (A/B) \wedge$
$(z,y) \in C)$
$\Leftrightarrow (\exists z)((\exists v)((x,v) \in A \wedge (v,z) \in B) \wedge (z,y) \in C)$
$\Leftrightarrow (\exists v)(\exists z)((x, v) \in A \wedge (v,z) \in B \wedge (z,y) \in C)$
$\Leftrightarrow (\exists v)(\exists z)((x, v) \in A \wedge ((v,z) \in B \wedge (z,y) \in C))$
$\Leftrightarrow (\exists v)((x, v) \in A \wedge (\exists z)((v,z) \in B \wedge (z,y) \in C))$
$\Leftrightarrow (\exists v)((x, v) \in A \wedge (v,z) \in B / C)$
$\Leftrightarrow (x, y) \in A / (B / C)$. $\square$

Proposición 30. $x \in \mathbf{D}\, A \Rightarrow x (A / A^{-1}) x$.
Demostración:

$x \in \mathbf{D}\, A \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in A)$
$\Rightarrow (\exists y)((x,y) \in A \wedge (x,y) \in A)$
$\Rightarrow (\exists y)((x,y) \in A \wedge (y,x) \in A^{-1})$
$\Rightarrow (x,x) \in A / A^{-1}$
$\Rightarrow x\, A / A^{-1}\, x$. $\square$

Proposición 31. $\mathbf{D}(A / B) \subseteq \mathbf{D}\, A$.
Demostración:

$z \in \mathbf{D}(A / B) \Leftrightarrow (\exists w)((z, w) \in A / B)$
$\Leftrightarrow (\exists w)((\exists v)((z, v) \in A \wedge (v, w) \in B)$
$\Rightarrow (\exists v)((z, v) \in A)$
$\Rightarrow z \in \mathbf{D}\, A$. $\square$

1.3 La relación R restringida al conjunto A.

Definición 10. Si R es una relación y A es un conjunto entonces R restringida a A (en símbolos: $R|A$), se define como:

$$R|A = R \cap (A \times \mathbf{R}\ R).$$

Proposición 32. $\varnothing|A = \varnothing$.
Demostración:

$\varnothing|A = \varnothing \cap (A \times \mathbf{R}\ \varnothing)$ (por la Definición 10)
$\quad = \varnothing.$ $\square$

Proposición 33. $R|\varnothing = \varnothing$.
Demostración:

$R|\varnothing = R \cap (\varnothing \times \mathbf{R}\ R)$ (por la Definición 10)
$\quad = R \cap \varnothing = \varnothing.$ $\square$

Proposición 34. $x\, R|A\, y \Leftrightarrow x R y \wedge x \in A$.
Demostración:

$x\, R|A\, y \Leftrightarrow (x,y) \in R|A$ (por la Definición 3)
$\Leftrightarrow (x,y) \in R \cap (A \times \mathbf{R}\ R)$ (por la Definición 10)
$\Leftrightarrow (x,y) \in R \wedge (x,y) \in A \times \mathbf{R}\ R$
$\Leftrightarrow (x,y) \in R \wedge (x \in A \wedge y \in \mathbf{R}\,R)$
$\Leftrightarrow (x,y) \in R \wedge x \in A$
$\Leftrightarrow x R y \wedge x \in A$ (por la Definición 3). $\square$

Proposición 35. $A \subseteq B \Rightarrow R|A \subseteq R|B$.
Demostración:

$(x,y) \in R|A \Leftrightarrow x\, R|A\, y$ (por la Definición 3)
$\Rightarrow x R y \wedge x \in A$ (por la Proposición 34)

$\Rightarrow x \, R \, y \wedge x \in B$ (por la Hipótesis $A \subseteq B$)
$\Rightarrow x \, R \,|\, B \, y$ (por la Proposición 34)
$\Rightarrow (x, y) \in R \,|\, B$ (por la Definición 3). $\square$

Proposición 36. $R|(A \cap B) = (R|A) \cap (R|B)$.
Demostración:
$(x,y) \in R \,|\, A \cap B \Leftrightarrow (x,y) \in R \wedge x \in (A \cap B)$ (por la Proposición 34)
$\Leftrightarrow (x,y) \in R \wedge (x \in A \wedge x \in B)$
$\Leftrightarrow ((x,y) \in R \wedge x \in A) \wedge ((x,y) \in R \wedge x \in B)$
$\Leftrightarrow ((x,y) \in R \,|\, A) \wedge ((x,y) \in R \,|\, B)$ (por la Proposición 34)
$\Leftrightarrow (x,y) \in (R \,|\, A) \cap (R \,|\, B)$. $\square$

Proposición 37. $R|(A \cup B) = (R|A) \cup (R|B)$.
Demostración:
$(x,y) \in R \,|\, A \cup B \Leftrightarrow (x,y) \in R \wedge x \in (A \cup B)$
$\Leftrightarrow (x,y) \in R \wedge (x \in A \vee x \in B)$
$\Leftrightarrow ((x,y) \in R \wedge x \in A) \vee ((x,y) \in R \wedge x \in B)$
$\Leftrightarrow (x,y) \in R \,|\, A \wedge (x,y) \in R \,|\, B$
$\Leftrightarrow (x,y) \in (R \,|\, A) \cup (R \,|\, B)$. $\square$

Proposición 38. $R|(A \setminus B) = (R|A) \setminus (R|B)$.
Demostración:
$(x,y) \in R \,|\, A \setminus B \Leftrightarrow (x,y) \in R \wedge x \in (A \setminus B)$
$\Leftrightarrow (x,y) \in R \wedge (x \in A \wedge x \notin B)$
$\Leftrightarrow ((x,y) \in R \wedge x \in A) \wedge ((x,y) \in R \wedge x \notin B)$
$\Leftrightarrow (x,y) \in R \,|\, A \wedge (x,y) \notin R \,|\, B$
$\Leftrightarrow (x,y) \in (R \,|\, A) \setminus (R \,|\, B)$. $\square$

Proposición 39. $(R/S)\mid A = (R\mid A)/S$.

Demostración:

$(x,y)\in(R/S)\mid A \Leftrightarrow (x,y)\in(R/S) \wedge x\in A$ (por la Proposición 34)

$\Leftrightarrow [(\exists z)((x,z)\in R \wedge (z,y)\in S)] \wedge x\in A$ (por la Definición 8)

$\Leftrightarrow [(\exists z)((x,z)\in R \wedge (\exists z)((z,y)\in S)] \wedge x\in A$

$\Leftrightarrow (\exists z)((x,z)\in R \wedge x\in A) \wedge (\exists z)((z,y)\in S)$

$\Leftrightarrow (\exists z)[((x,z)\in R \wedge ((z,y)\in S)]$

$\Leftrightarrow (\exists z)((x,z)\in R\mid A \wedge ((z,y)\in S)$ (por la Definición 1)

$\Leftrightarrow R\mid A/S$ (por la Definición 8). □

Ejemplo 22. Sea R una relación numérica tal que

$$xRy \Leftrightarrow x+y=1.$$

Si A es el conjunto de números primos entre 10 y 20 entonces
$R\mid A = \{(11,-10),(13,-12),(17,-16),(19,-18)\}$.

Ejemplo 23. Sea R la relación numérica tal que

$$xRy \Leftrightarrow 2x+1=y.$$

Si A es el conjunto de los enteros entonces

a) $(R^{-1})\text{"}A = \{y-1/2 \mid y\in A\}$.

b) $R\text{"}A = \{2x+1 \mid x\in A\}$.

c) $(R/R)\text{"}A = \{4x+3 \mid x\in A\}$.

1.4 Imagen del conjunto A bajo la relación R.

Definición 11. Si R es una relación y A es un conjunto; entonces la imagen del conjunto A bajo la relación R (en símbolos: R"A) se define como:

$$R\text{"}A = \mathbf{R}(R\mid A), \text{ o bien}$$

$$R"A = \{ y \mid (\exists x)((x,y) \in R \wedge x \in A \}.$$

Ejemplo 24. Si $R = \{ ((1,1),(3,2) \}$ y $A = \{ 0, 1 \}$ entonces

$\mathbf{R}\ R = \{1, 2\}$

$A \times \mathbf{R}\ R = \{ (0,1),(0,2),(1,1),(1,2) \}$

$R \mid A = \{ (1,1) \} = R \cap (A \times \mathbf{R}\ R)$

$R"A = \mathbf{R}\ (R \mid A) = \{ 1 \}.$

Proposición 40. $R"(A \cup B) = R"A \cup R"B.$

Demostración:

$y \in R"(A \cup B) \Leftrightarrow y \in \mathbf{R}\ (R \mid (A \cup B))$

$\Leftrightarrow y \in \mathbf{R}\ (R \mid A \cup R \mid B)$

$\Leftrightarrow y \in (\mathbf{R}\ (R \mid A) \cup \mathbf{R}\ (R \mid B)) \Leftrightarrow y \in \mathbf{R}\ (R \mid A) \vee y \in \mathbf{R}\ (R \mid B)$

$\Leftrightarrow y \in R"A \cup R"B.$ $\square$

Ejemplo 25. No se cumple que $R"(A \cap B) = R"A \cap R"B$, ya que:

Si $R = \{ (1,3),(2,3) \}$, $A = \{ 1 \}$ y $B = \{ 2 \}$ entonces

$R"(A \cap B) = \varnothing$ y

$R"A \cap R"B = \{ 3 \}.$

Proposición 41. $R"\varnothing = \varnothing.$

Demostración:

$R"\varnothing = \mathbf{R}\ (R \mid \varnothing)$	(por la Definición 11)
$= \mathbf{R}\ (\varnothing)$	(por la Proposición 33)
$= \varnothing.$ $\square$	

Proposición 42. $R"(A \cap B) \subseteq R"A \cap R"B.$

Demostración:

$y \in R''(A \cap B) \Leftrightarrow y \in \mathbf{R}\,(R|(A \cap B))$

$\Leftrightarrow y \in \mathbf{R}\,(R|A \cap R|B)$

$\Rightarrow y \in (\mathbf{R}\,(R|A) \cap \mathbf{R}\,(R|B)) \Rightarrow y \in \mathbf{R}\,(R|A) \wedge y \in \mathbf{R}\,(R|B)$

$\Rightarrow y \in R''A \cap R''B$. □

Proposición 43. $R''A \setminus R''B \subseteq R''(A \setminus B)$.

Demostración:

$y \in R''A \setminus R''B \Leftrightarrow y \in R''A \wedge y \notin R''B$

$\Leftrightarrow y \in \mathbf{R}\,(R|A) \wedge y \notin \mathbf{R}\,(R|B)$

$\Leftrightarrow (\exists x)((x,y) \in R \wedge x \in A) \wedge$
$\sim (\exists x)((x,y) \in R \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow (\exists x)((x,y) \in R \wedge x \in A) \wedge$
$(\forall x)((x,y) \notin R \vee x \notin B)$

$\Leftrightarrow (\exists x)((x,y) \in R \wedge x \in A) \wedge$
$(\forall x)((x,y) \in R \Rightarrow x \notin B)$

$\Rightarrow (\exists x)((x,y) \in R \wedge x \in A)$

Ahora, $(x,y) \in R \Rightarrow x \notin B$

Por lo tanto, $x \in A \setminus B \wedge (x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in R|(A \setminus B)$

$\Rightarrow y \in \mathbf{R}\,(R|(A \setminus B))$

$\Rightarrow y \in R''(A \setminus B)$. □

Proposición 44.

$y \in R''A \Leftrightarrow (\exists x)((x,y) \in R \wedge x \in A)$.

Demostración:

$y \in R''A \Leftrightarrow y \in \mathbf{R}\,(R|A)$

$\Leftrightarrow (\exists x)((x,y) \in R|A)$

$\Leftrightarrow (\exists x)((x,y) \in R \wedge x \in A)$. □

Proposición 45. $A \subseteq B \Rightarrow R''A \subseteq R''B$.

Demostración:

$A \subseteq B \Rightarrow R \mid A \subseteq R \mid B$

$\Rightarrow \mathbf{R}\,(R|A) \subseteq \mathbf{R}\,(R|B)$

$\Rightarrow R''A \subseteq R''B$. $\square$

Proposición 46. $\varnothing'' A = \varnothing$.

Demostración:

$\varnothing'' A = \mathbf{R}\,(\varnothing|A)$

$= \mathbf{R}\,(\varnothing)$

$= \varnothing$. $\square$

Proposición 47. $R'' A = \varnothing \Leftrightarrow \mathbf{D}\,R \cap A = \varnothing$.

Demostración:

$R'' A = \varnothing \Leftrightarrow \{y \mid (\exists x)((x,y) \in R \wedge x \in A)\} = \varnothing$

$\Leftrightarrow \{y \mid (\exists x)((x,y) \in R \wedge x \in \mathbf{D}\,R \wedge x \in A)\} = \varnothing$

$\Leftrightarrow \{y \mid (\exists x)((x,y) \in R \wedge x \in \mathbf{D}\,R \cap A)\} = \varnothing$

$\Leftrightarrow \mathbf{D}\,R \cap A = \varnothing$. $\square$

Proposición 48. $\mathbf{D}\,R \cap A \subseteq (R^{-1})''(R''A)$.

Demostración:

$x \in \mathbf{D}\,R \cap A \Leftrightarrow x \in \mathbf{D}\,R \wedge x \in A$

$\Leftrightarrow (\exists y)(x R y \wedge x \in A)$

Se observa que

$x R y \wedge x \in A \Rightarrow (x,y) \in R \mid A$

$\Rightarrow y \in \mathbf{R}\,(R|A)$

$\Rightarrow y \in R''A$.

Ahora, $x R y \wedge y \in R''A \Rightarrow y R^{-1} x \wedge y \in R''A$

$\Rightarrow (y,x) \in R^{-1} \mid R''A \Rightarrow x \in \mathbf{R}\,(R^{-1}|R''A)$

$\Rightarrow x \in (R^{-1})"(R"A)$. □

Proposición 49. $(R"A) \cap B \subseteq R"(A \cap (R^{-1})" B)$

Demostración:

$y \in (R"A) \cap B \Rightarrow y \in R"A \wedge y \in B$

$\Rightarrow y \in \mathbf{R}\,(R|A) \wedge y \in B$

$\Rightarrow (\exists x)((x,y) \in R \wedge x \in A) \wedge y \in B$

$\Rightarrow (\exists x)((x,y) \in R \wedge y \in B)$

Se observa que

$x R y \wedge y \in B \Rightarrow (x,y) \in R^{-1} \wedge y \in B$

$\Rightarrow (y,x) \in R^{-1} \mid B$

$\Rightarrow x \in \mathbf{R}\,(R^{-1} \mid B)$

$\Rightarrow x \in (R^{-1})" B$

Por otro lado, $x \in A$

Por lo tanto,

$x \in A \cap (R^{-1})" B \wedge (x,y) \in R$

$\Rightarrow (x,y) \in R \mid (A \cap (R^{-1})" B)$

$\Rightarrow y \in \mathbf{R}\,(R \mid (A \cap (R^{-1})" B)$

$\Rightarrow y \in R"(A \cap (R^{-1})" B)$. □

PARTE II

Relaciones de orden.

Las relaciones que ordenan un conjunto de objetos ocurren en todo dominio de las matemáticas y en varias ciencias derivadas.

Empezaremos con las propiedades fundamentales de reflexividad, simetría y transitividad, y en términos de estas definiremos diferentes tipos de ordenes.

Definimos la propiedad de reflexividad, simetría y transitividad para conjuntos arbitrarios R no sólo para relaciones.

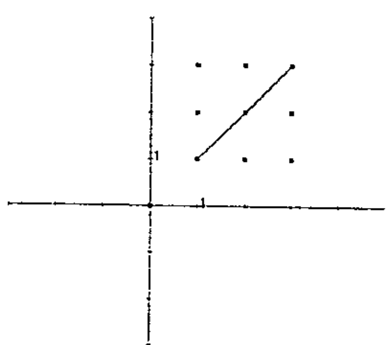
2.1 Relación diagonal en un conjunto A.

Definición 12. La relación diagonal de un conjunto A (en símbolos: Δ_A) se define como :

$$\Delta_A = \{ (x, x) \mid x \in A \} .$$

Ejemplo. Si $A = \{ 1, 2, 3 \}$ entonces

$$\Delta_A = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \}$$



Observación 6. $x\,\Delta_A\,x \Leftrightarrow x \in A$.

Proposición 50. $\mathbf{D}\,\Delta_A = A$.

Demostración:

$x \in \mathbf{D}\,\Delta_A \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in \Delta_A) \Leftrightarrow (\exists x)((x, x) \in \Delta_A)$

$\Leftrightarrow x \in A$. □

Proposición 51. $\boldsymbol{R}\,\Delta_A = A$.

Demostración:

$y \in \boldsymbol{R}\,\Delta_A \Leftrightarrow (\exists x)((x, y) \in \Delta_A)$

$\Leftrightarrow (\exists y)((y, y) \in \Delta_A) \Leftrightarrow y \in A$. □

Proposición 52. $\Delta_A / \Delta_A = \Delta_A$.

Demostración:

$(x,y) \in \Delta_A / \Delta_A \Leftrightarrow (\exists z)(x\,\Delta_A\,z \wedge z\,\Delta_A\,x)\}$

$\Rightarrow x = z \wedge z = y$

$\Rightarrow x = z = y$

$\Rightarrow x\,\Delta_A\,x \Rightarrow x\,\Delta_A\,y$

$\Rightarrow (x,y) \in \Delta_A$.

$(x,x) \in \Delta_A \Rightarrow x \in \mathbf{D}\Delta_A \wedge x\,\Delta_A\,x$

$\Rightarrow x\,\Delta_A x \wedge x\,\Delta_A\,x$

$\Rightarrow (x,x) \in \Delta_A / \Delta_A$. □

Proposición 53. $(\Delta_A)^{-1} = \Delta_A$.

Demostración:

$(\Delta_A)^{-1} = \{(x,x) \mid x \in A\}^{-1}$

$= \{(x,x) \mid x \in A\}$

$= \Delta_A$. □

Proposición 54. $\mathsf{F}\,\Delta_{A} = A$.
Demostración:
$\mathsf{F}\,\Delta_{A} = \mathsf{D}\,\Delta_{A} \cup \mathcal{R}\,\Delta_{A} = A \cup A = A$. □

Proposición 55. R es una relación $\Rightarrow$

$$R \circ \Delta_{\mathsf{D}R} = \Delta_{\mathsf{D}R} / R = R$$

Demostración:

$$\begin{aligned}(x,y) \in \Delta_{\mathsf{D}R} / R &\Leftrightarrow (\exists z)(x\, \Delta_{\mathsf{D}R}\, z \wedge z\, R\, y) \\ &\Rightarrow x = z \wedge z\, R\, y \\ &\Rightarrow (x,y) \in R.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x,y) \in R &\Rightarrow x \in \mathsf{D}R \wedge x\, R\, y \\ &\Rightarrow x\, \Delta_{\mathsf{D}R}\, x \wedge x\, R\, y \\ &\Rightarrow (\exists z)(x\, \Delta_{\mathsf{D}R}\, z \wedge z\, R\, y) \\ &\Rightarrow (x,y) \in \Delta_{\mathsf{D}R} / R.\ \square\end{aligned}$$

2.2 Relaciones básicas y sus propiedades.

Diremos que R es una relación en A, si

$$\mathsf{D}R \subseteq A \text{ y } \mathcal{R}\,R \subseteq A.$$

Definición 13. R es reflexiva en A si
$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x\, R\, x)$, equivalentemente

$$\Delta_A \subseteq R.$$

Definición 14. R es irreflexiva en A si
$(\forall x)(x \in A \Rightarrow \sim(x\, R\, x))$ o equivalentemente
$\Delta_A \cap R = \varnothing$ o equivalentemente
$R \subseteq ((A \times A) \setminus \Delta_A)$.

Definición 15. R es simétrica en A si

$$(\forall x)(\forall y)(x, y \in A \wedge x R y \Rightarrow y R x)$$

equivalentemente $R = R^{-1}$.

Definición 16. R es asimétrica en A si

$$(\forall x)(\forall y)(x, y \in A \wedge x R y \Rightarrow \sim(y R x))$$

equivalentemente $R \cap R^{-1} = \varnothing$.

Definición 17. R es antisimétrica en A si

$$(\forall x)(\forall y)(x, y \in A \wedge x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y)$$

equivalentemente $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$.

Definición 18. R es transitiva en A si

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x, y, z \in A \wedge x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z)$$

equivalentemente $R \circ R \subseteq R$

equivalentemente $R / R \subseteq R$.

Definición 19. R es conexa en A si

$$(\forall x)(\forall y)(x, y \in A \wedge x R y \wedge x \neq y \Rightarrow x R y \vee y R x)$$

equivalentemente $((A \times A) \setminus \Delta_A) \subseteq R \cup R^{-1}$.

Definición 20. R es fuertemente conexa en A si

$$(\forall x)(\forall y)(x, y \in A \Rightarrow x R y \vee y R x)$$

equivalentemente $(A \times A) \subseteq R \cup R^{-1}$

equivalentemente R es reflexiva y conexa.

Ejemplo 26. No se cumple que :
Si R es simétrica y transitiva entonces R es reflexiva, ya que $R = \{(1, 1)\}$ es simétrica y transitiva en $A = \{1, 2\}$ y R no es reflexiva .

Proposición 56. R asimétrica $\Rightarrow$ R irreflexiva.
P. D. $R \subseteq ((A \times A) \setminus \Delta_A)$.
Demostración :
Si $(a, a) \in R$ entonces $(a, a) \in R^{-1}$ entonces
$(a, a) \in R \cap R^{-1} = \varnothing$ por ser asimétrica, lo cual es una contradicción.
$\therefore (a, a) \notin R$
$\therefore R \subseteq ((A \times A) \setminus \Delta_A)$. $\square$

Proposición 57. R asimétrica $\Rightarrow$ R antisimétrica.
P. D. $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$.
Demostración :
R asimétrica $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} = \varnothing$
Pero $\varnothing \subseteq \Delta_A$
$\therefore\ R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$. $\square$

Proposición 58. Para una relación R
(R es simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$).
Demostración :
$\Rightarrow$)
P. D. a) $R \subseteq R^{-1}$
b) $R^{-1} \subseteq R$.
Demostración de a) :
$R \subseteq R^{-1}$ se cumple porque R es simétrica.
Demostración de b) :
$(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$ (por la Definición 7)
$\Rightarrow (x, y) \in R$ (porque R es simétrica)
$\therefore R^{-1} \subseteq R$.
$\Leftarrow$)
P.D. R es simétrica
Demostración :
a) dice que R es simétrica. $\square$

Definición 21.

R es reflexiva si R reflexiva en $\mathsf{F}\,R$.
R es irreflexiva si R irreflexiva en $\mathsf{F}\,R$.
R es simétrica si R simétrica en $\mathsf{F}\,R$.
R es asimétrica si R asimétrica en $\mathsf{F}\,R$.
R es antisimétrica si R antisimétrica en $\mathsf{F}\,R$.
R es transitiva si R transitiva en $\mathsf{F}\,R$.
R es conexa si R conexa en $\mathsf{F}\,R$.
R es fuertemente conexa si R fuertemente conexa en $\mathsf{F}\,R$.

Proposición 59. R es una relación $\Rightarrow \Delta_{\mathsf{D}R}/R = R$.
Demostración:
P. D. $\Delta_{\mathsf{D}R}/R \subseteq R$.

$$\begin{aligned}(x,y) \in \Delta_{\mathsf{D}R}/R &\Leftrightarrow (\exists z)(x\ \Delta_{\mathsf{D}R}\ z \wedge zRy)\\ &\Rightarrow x = z \wedge zRy\\ &\Rightarrow (x,y) \in R.\end{aligned}$$

P. D. $R \subseteq \Delta_{\mathsf{D}R}/R$.

$$\begin{aligned}(x,y) \in R &\Rightarrow x\ \Delta_{\mathsf{D}R}\ x \wedge xRy\\ &\Rightarrow (\exists z)(x\ \Delta_{\mathsf{D}R}\ z \wedge zRy)\\ &\Rightarrow (x,y) \in \Delta_{\mathsf{D}R}/R.\ \square\end{aligned}$$

Proposición 60. R es reflexiva $\Leftrightarrow \Delta_{\mathsf{F}R} \subseteq R$.
Demostración:

R reflexiva $\Leftrightarrow$ R es reflexiva en $\mathsf{F}\,R$ (por la Definición 21)
$\Leftrightarrow \Delta_{\mathsf{F}R} \subseteq R$ (por la Definición 13)

Proposición 61. R es irreflexiva $\Leftrightarrow \Delta_{\mathsf{F}R} \cap R = \varnothing$.
Demostración:

R es irreflexiva $\Leftrightarrow$ R es irreflexiva en F R (por la Definición 21)

$\Leftrightarrow \Delta_{\mathsf{F}\,R} \cap R = \varnothing$ (por la Definición 14).□

Proposición 62. R es simétrica $\Leftrightarrow (R^{-1})^{-1} = R^{-1}$.

$\Rightarrow$)

P.D. a) $R \subseteq R^{-1}$

b) $R^{-1} \subseteq R$.

Demostración de a):

R es simétrica $\Leftrightarrow$ R es simétrica en F R (por la Definición 21)

$\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$ (por la Definición 15).

Demostración de b):

R es simétrica $\Leftrightarrow$ R es simétrica en F R (por la Definición 21)

$\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$ (por la Definición 15)

$\Rightarrow R^{-1} \subseteq (R^{-1})^{-1}$ (por la Proposición 17)

$\Rightarrow R^{-1} \subseteq R$.

$\Leftarrow$)

P. D. R es simétrica, es decir, **P. D.** $R \subseteq R^{-1}$.

Demostración :

Por hipótesis $(R^{-1})^{-1} = R^{-1} \Leftrightarrow R = R^{-1}$

$\Leftrightarrow R \subset R^{-1} \wedge R^{-1} \subset R$

$\Rightarrow R \subset R^{-1}$

$\Rightarrow$ R es simétrica. □

Proposición 63. R es asimétrica $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R = \varnothing$.

Demostración:

R es asimétrica $\Leftrightarrow$ R es asimétrica en F R (por la Definición 21)

$\Leftrightarrow R^{-1} \cap R = \varnothing$ (por la Definición 16). □

Proposición 64. R es antisimétrica $\Leftrightarrow$ $R^{-1} \cap R \subseteq \Delta_{\mathsf{F}R}$.
Demostración:
R es antisimétrica $\Leftrightarrow$ R es antisimétrica en $\mathsf{F}\,R$ (por la Definición 21)
$\Leftrightarrow$ $R^{-1} \cap R \subseteq \Delta_{\mathsf{F}R}$ (por la Definición 17). □

Proposición 65. R es transitiva $\Leftrightarrow$ $R / R \subseteq R$.
Demostración:
R es transitiva $\Leftrightarrow$ R es transitiva en $\mathsf{F}\,R$ (por la Definición 21)
$\Leftrightarrow R / R \subseteq R$ (por la Definición 18). □

Proposición 66. R es conexa $\Leftrightarrow$

$$(\mathsf{F}R \times \mathsf{F}R) \setminus \Delta_{\mathsf{F}R} \subseteq R \cup R^{-1}.$$

Demostración:
R es conexa $\Leftrightarrow$ R es conexa en $\mathsf{F}\,R$ (por la Definición 21)
$\Leftrightarrow ((\mathsf{F}R \times \mathsf{F}R) \setminus \Delta_{\mathsf{F}R}) \subseteq R \cup R^{-1}$ (por la Definición 19).□

Proposición 67. R es fuertemente conexa $\Leftrightarrow$

$$(\mathsf{F}R \times \mathsf{F}R) \subseteq R \cup R^{-1}.$$

Demostración:
R es fuertemente conexa $\Leftrightarrow$ R es fuertemente conexa en $\mathsf{F}\,R$ (por la Definición 21)
$\Leftrightarrow (\mathsf{F}R \times \mathsf{F}R) \subseteq R \cup R^{-1}$ (por la Definición 19). □

Proposición 68. R es antisimétrica, transitiva e irreflexiva en A $\Leftrightarrow$ R es asimétrica y transitiva A.
Demostración:
$\Rightarrow$) R es antisimétrica, transitiva e irreflexiva $\Rightarrow$ R es transitiva, queda por demostrar que R es asimétrica, es decir,

$$R \cap R^{-1} = \varnothing.$$

Supongamos: (1) R transitiva, es decir, $R \circ R \subseteq R$,
(2) R antisimétrica, es decir, $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$,
(3) R irreflexiva, es decir, $R \subseteq (A \times A) \setminus \Delta_A$).

$(x, y) \in R \cap R \Rightarrow (x, y) \in \Delta_A$ (por (2))

por lo tanto, $x = y$

por lo tanto,

$(x, x) \in R \subseteq (A \times A)$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,

$$R \cap R^{-1} = \varnothing .$$

$\Leftarrow$) Supongamos que : (a) $R \cap R^{-1} = \varnothing$ (R asimétrica) ,
(b) $R \circ R \subseteq R$ (R transitiva)

Por demostrar que : R es antisimétrica, es decir, $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$
y R es irreflexiva, es decir, $R \subseteq (A \times A) \setminus \Delta_A$).

$R \cap R^{-1} = \varnothing \subseteq \Delta_A$, por lo tanto ,
R es antisimétrica.

$(x, x) \in R \Rightarrow (x, x) \in R^{-1}$
$\Rightarrow (x, x) \in R \cap R^{-1} = \varnothing$, lo cual es una contradicción,
por lo tanto,

$(x, x) \notin R$, por lo tanto,

$R \subseteq (A \times A) \setminus \Delta_A$). □

Proposición 69. R es reflexiva $\Rightarrow$ R^{-1} es reflexiva .

Demostración:

R es reflexiva $\Leftrightarrow \Delta_{FR} \subseteq R$
$\Rightarrow \Delta^{-1}{}_{FR} \subseteq R^{-1}$
$\Rightarrow \Delta_{FR} \subseteq R^{-1}$
$\Rightarrow R^{-1}$ es reflexiva. □

Proposición 70. R es irreflexiva $\Rightarrow$ R^{-1} es irreflexiva .

Demostración:

R es irreflexiva $\Leftrightarrow \Delta_{FR} \cap R = \varnothing$

$$\Rightarrow (\Delta_{FR} \cap R)^{-1} = (\varnothing)^{-1}$$
$$\Rightarrow (\Delta_{FR})^{-1} \cap (R)^{-1} = (\varnothing)^{-1}$$
$$\Rightarrow R^{-1} \text{ es irreflexiva. } \square$$

Proposición 71. R es simétrica $\Rightarrow R^{-1}$ es simétrica.
Demostración:

$$R \text{ es simétrica} \Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$$
$$\Rightarrow R^{-1} \subseteq (R^{-1})^{-1}$$
$$\Rightarrow R^{-1} \text{ es simétrica. } \square$$

Proposición 72. R es asimétrica $\Rightarrow R^{-1}$ es asimétrica.
Demostración:

$$R \text{ es asimétrica} \Leftrightarrow R^{-1} \cap R = \varnothing$$
$$\Rightarrow (R^{-1} \cap R)^{-1} = (\varnothing)^{-1}$$
$$\Rightarrow (R^{-1})^{-1} \cap (R)^{-1} = \varnothing$$
$$\Rightarrow R^{-1} \text{ es asimétrica. } \square$$

Proposición 73. R es antisimétrica $\Rightarrow R^{-1}$ es antisimétrica.
Demostración:

$$R \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow R^{-1} \cap R \subseteq \Delta_{FR}$$
$$\Rightarrow (R^{-1} \cap R)^{-1} \subseteq (\Delta_{FR})^{-1}$$
$$\Rightarrow (R^{-1})^{-1} \cap (R)^{-1} \subseteq \Delta_{FR}$$
$$\Rightarrow R^{-1} \text{ es antisimétrica. } \square$$

Proposición 74. R es transitiva $\Rightarrow R^{-1}$ es transitiva.
Demostración:

$$R \text{ es transitiva} \Leftrightarrow R / R \subseteq R$$
$$\Rightarrow (R / R)^{-1} \subseteq R^{-1}$$
$$\Rightarrow R^{-1} / R^{-1} \subseteq R^{-1}$$
$$\Rightarrow R^{-1} \text{ es transitiva. } \square$$

Proposición 75. R es conexa $\Rightarrow$ R^{-1} es conexa.
Demostración:

R es conexa $\Leftrightarrow (\, \mathsf{F}R \times \mathsf{F}R)\setminus \Delta_{\mathsf{F}R} \subseteq R \cup R^{-1}$

$\Rightarrow ((\mathsf{F}R \times \mathsf{F}R)\setminus \Delta_{\mathsf{F}R}))^{-1} \subseteq (R \cup R^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow ((\mathsf{F}R \times \mathsf{F}R)^{-1} \setminus (\Delta_{\mathsf{F}R})^{-1}) \subseteq (R)^{-1} \cup (R^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow ((\mathsf{F}R \times \mathsf{F}R)\setminus (\Delta_{\mathsf{F}R})) \subseteq (R)^{-1} \cup (R^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow R^{-1}$ es conexa. □

Proposición 76. R es fuertemente conexa $\Rightarrow$
R^{-1} es fuertemente conexa.
Demostración:

R es fuertemente conexa $\Leftrightarrow (\mathsf{F}R \times \mathsf{F}R) \subseteq R \cup R^{-1}$

$\Rightarrow (\mathsf{F}R \times \mathsf{F}R)^{-1} \subseteq (R \cup R^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow (\mathsf{F}R \times \mathsf{F}R) \subseteq R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow R^{-1}$ es fuertemente conexa. □

Proposición 77. R reflexiva $\Rightarrow \mathsf{D}R = \mathsf{D}R^{-1}$.
Demostración:

$\forall x \in \mathsf{D}R,\ (x, x) \in R,\ (x, x) \in R^{-1}$

$\therefore x \in R^{-1}$

$\therefore \mathsf{D}R \subseteq \mathsf{D}R^{-1}$.

Y como R^{-1} es reflexiva $\mathsf{D}R^{-1} \subseteq \mathsf{D}R$. □

Proposición 78. R y S son reflexivas $\Rightarrow$ R $\cap$ S es reflexiva.

P.D. $\Delta_{\mathsf{F}(R \cap S)} \subseteq R \cap S$.
Demostración:

$(x, x) \in \Delta_{\mathsf{F}(R\cap S)} \Rightarrow x \in \mathsf{F}(R \cap S)$

$\Rightarrow x \in \mathsf{F}R$ y $x \in \mathsf{F}S$

$\Rightarrow (x, x) \in R$ y $(x, x) \in S$

$\Rightarrow (x, x) \in R \cap S.$ □

Proposición 79. R y S son irreflexivas $\Rightarrow$ R $\cap$ S es irreflexiva.
Demostración :
P. D. $R \cap S \subseteq (A \times A) \setminus \Delta_A$, es decir,
P. D. $x \in R \cap S \Rightarrow x \in (A \times A) \setminus \Delta_A$.
$x \in R \cap S \Rightarrow x \in R \wedge x \in S$
$\Rightarrow x \in (A \times A) \setminus \Delta_A \wedge x \in (A \times A) \setminus \Delta_A$
$\Rightarrow x \in ((A \times A) \setminus \Delta_A \cap (A \times A) \setminus \Delta_A)$
$\Rightarrow x \in (A \times A) \setminus \Delta_A$. □

Proposición 80. R y S son simétricas $\Rightarrow$ R $\cap$ S simétrica.
P.D. $(R \cap S) \subseteq (R \cap S)^{-1}$.
Demostración:

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (R \cap S) &\Rightarrow (x,y) \in R \text{ y } (x,y) \in S \\
&\Rightarrow (x,y) \in R^{-1} \text{ y } (x,y) \in S^{-1} \\
&\Rightarrow (x,y) \in (R^{-1} \cap S^{-1}) \\
&\Rightarrow (x,y) \in (R \cap S)^{-1}. \ \square
\end{aligned}
$$

Proposición 81. R y S son asimétricas $\Rightarrow$ R $\cap$ S es asimétrica.
P.D. $(R \cap S) \cap (R \cap S)^{-1} = \varnothing$.
Demostración:

$$
\begin{aligned}
(R \cap S) \cap (R \cap S)^{-1} &= R \cap S \cap R^{-1} \cap S^{-1} \\
&= (R \cap R^{-1}) \cap (S \cap S^{-1}) \\
&= \varnothing. \ \square
\end{aligned}
$$

Proposición 82. R y S son antisimétricas en A $\Rightarrow$ R $\cap$ S es antisimétrica en A.
P.D. $(R \cap S) \cap (R \cap S)^{-1} \subseteq \Delta_A$.
Demostración:

$(x,y) \in (R \cap S) \cap (R \cap S)^{-1} \Rightarrow$
$(x,y) \in (R \cap S) \wedge (x,y) \in (R \cap S)^{-1}$
$\Rightarrow (x,y) \in R \wedge (x,y) \in S \wedge (x,y) \in R^{-1} \wedge (x,y) \in S^{-1}$
$\Rightarrow ((x,y) \in R \wedge (x,y) \in R^{-1}) \wedge ((x,y) \in S \wedge (x,y) \in S^{-1})$
$\Rightarrow (x,y) \in \Delta_A \wedge (x,y) \in \Delta_A$
$\Rightarrow (x,y) \in \Delta_A$. □

Proposición 83. R y S son transitivas $\Rightarrow$ R $\cap$ S es transitiva.
P.D. $(R \cap S) / (R \cap S) \subseteq (R \cap S)$.
Demostración:
$(x,y) \in (R \cap S) / (R \cap S) \Rightarrow$
$(\exists z)((x,z) \in (R \cap S) \wedge (z,y) \in (R \cap S)) \Rightarrow$
$(\exists z)((x,z) \in R \wedge (x,z) \in S \wedge (z,y) \in R \wedge (z,y) \in S \Rightarrow$
$(\exists z)(((x,z) \in R \wedge (z,y) \in R) \wedge ((x,z) \in S \wedge (z,y) \in S \Rightarrow$
$(x,y) \in R \wedge (x,y) \in S \Rightarrow (x,y) \in R \cap S$. □

Ejemplo 27. No es cierto que si R y S son conexas entonces $R \cap S$ es conexa, ya que:
si $R = \{(1,2), (1,1), (2,1)\}$ y
$S = \{(2,1), (1,1), (1,2), (2,2)\}$ son conexas en
$A = \{1,2\}$ entonces $R \cap S = \{(1,1)\}$ no es conexa,
porque, $(2,1) \in (A \times A) \setminus \Delta_A$, pero

$$(2,1) \notin (R \cap S) \cup (R \cap S)^{-1}.$$

Proposición 84. R y S son reflexivas $\Rightarrow$ R $\cup$ S es reflexiva.
Demostración:
P. D. $\Delta_{F(R \cup S)} \subseteq R \cup S$.
$(x,x) \in \Delta_{F(R \cup S)} \Rightarrow x \in F(R \cup S)$
$\Rightarrow x \in (FR \cup FS)$

$$\Rightarrow x \in \digamma R \vee x \in \digamma S$$
$$\Rightarrow (x, x) \in R \vee (x, x) \in S$$
$$\Rightarrow (x, x) \in (R \cup S). \ \square$$

Proposición 85. R y S son irreflexivas $\Rightarrow$ $R \cup S$ es irreflexiva.
Demostración :
P. D. $R \cup S \subseteq (A \times A) \setminus \Delta_A$, es decir,
P. D. $x \in R \cup S \Rightarrow x \in (A \times A) \setminus \Delta_A$.
$x \in R \cup S \Rightarrow x \in R \vee x \in S$
$\Rightarrow x \in (A \times A) \setminus \Delta_A \vee x \in (A \times A) \setminus \Delta_A$
$\Rightarrow x \in ((A \times A) \setminus \Delta_A \cup (A \times A) \setminus \Delta_A)$
$\Rightarrow x \in (A \times A) \setminus \Delta_A$. $\square$

Proposición 86. R y S son conexas $\Rightarrow$ $R \cup S$ es conexa.
Demostración :
P. D. $R \cup S$ es conexa: Por reducción al absurdo.
Supongamos que R y S son conexas en A pero $R \cup S$ no es conexa.
Como $R \cup S$ no es conexa existe por lo menos una pareja $x \neq y$ elementos de A tales que
$(x, y) \notin (R \cup S) \wedge (y, x) \notin (R \cup S)$
lo cual significa que
$(x, y) \notin R \wedge (y, x) \notin S$
lo cual contradice a:
$(x, y) \in R \vee (y, x) \in R$ (porque R es conexa)
y $(x, y) \in S \vee (y, x) \in S$ (porque S es conexa)
por lo tanto, $R \cup S$ es conexa . $\square$

Ejemplo 28. No es cierto que:
R y S son asimétricas $\Rightarrow$ $R \cup S$ es asimétrica, ya que:
si $R = \{ (1, 2) \}$ y $S = \{ (2, 1) \}$ son asimétricas en

$A = \{ 1, 2 \}$ entonces $R \cup S = \{ (1, 2), (2, 1) \}$ no es asimétrica, porque
$(1, 2) \in R \cup S$ y $(2, 1) \in R \cup S$.

Ejemplo 29. No se cumple que si R y S son antisimétricas entonces $R \cup S$ es antisimétrica, ya que:
si $R = \{ (3, 1), (3, 3) \}$ y $S = \{ (1, 3) \}$ son antisimétricas en $A = \{ 1, 2, 3 \}$ entonces $R \cup S = \{ (1, 3), (3, 1), (3, 3) \}$ no es una relación antisimétrica porque
$(1, 3) \in R \cup S$ y $(3, 1) \in R \cup S$.

Ejemplo 30. La proposición:
si R y S son transitivas entonces $R \cup S$ no es transitiva no es cierta, ya que:
si $R = \{ (1, 1) \}$ y $S = \{ (2, 2) \}$ son transitivas en $A = \{ 1, 2 \}$ entonces $R \cup S = \{ (1, 1), (2, 2) \}$ no es transitiva.

Proposición 87. R y S son irreflexivas $\Rightarrow R \setminus S$ es irreflexiva.
Demostración:
P. D. $R \setminus S \subseteq (A \times A) \setminus \Delta_A$, es decir,
P. D. $x \in R \setminus S \Rightarrow x \in (A \times A) \setminus \Delta_A$.
$x \in R \setminus S \Rightarrow x \in R \wedge x \notin S$
$\Rightarrow x \in R$
$\Rightarrow x \in (A \times A) \setminus \Delta_A$. □

Proposición 88. R y S son simétricas $\Rightarrow R \setminus S$ es simétrica.
Demostración:
P. D. $(x, y) \in R \setminus S \Rightarrow (y, x) \in R \setminus S$.
$(x, y) \in R \setminus S \Rightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \notin S$

$\Rightarrow (y, x) \in R \wedge (y, x) \notin S$ (porque R y S son simétricas)
$\Rightarrow (y, x) \in R \setminus S$. □

Proposición 89. R y S son asimétricas $\Rightarrow R \setminus S$ es asimétrica.
Demostración:
P. D. $(x, y) \in R \setminus S \Rightarrow (y, x) \notin R \setminus S$.
$(x, y) \in R \setminus S \Rightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \notin S$
$\Rightarrow (y, x) \notin R$ (porque R asimétrica)
$\Rightarrow (y, x) \notin R \setminus S$. □

Proposición 90. R y S son antisimétricas $\Rightarrow R \setminus S$ es antisimétrica.
Demostración:
P. D. $(R \setminus S) \cap (R \setminus S)^{-1} \subseteq \Delta_A$, es decir,
P. D. $(x, y) \in (R \setminus S) \cap (R \setminus S)^{-1} \Rightarrow (x, y) \in \Delta_A$.
Supongamos : (1) R es antisimétrica, es decir, $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$,
(2) S es antisimétrica, es decir, $S \cap S^{-1} \subseteq \Delta_A$,
$(x, y) \in (R \setminus S) \cap (R \setminus S)^{-1}$
$\Rightarrow (x, y) \in (R \setminus S) \wedge (x, y) \in (R \setminus S)^{-1}$
$\Rightarrow (x, y) \in (R \setminus S) \wedge (x, y) \in R^{-1} \setminus S^{-1}$
$\Rightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \notin S \wedge (x, y) \in R^{-1} \wedge (x, y) \notin S^{-1}$
$\Rightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in R^{-1}$
$\Rightarrow (x, y) \in R \cap R^{-1}$
$\Rightarrow (x, y) \in \Delta_A$ (por (1)). □

Ejemplo 31. No es cierto que:
Si R y S son reflexivas entonces $R \setminus S$ es reflexiva, ya que:
Si $R = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 2) \}$ y $S = \{ (1, 1), (2, 2) \}$ son reflexivas en $A = \{ 1, 2 \}$ entonces $R \setminus S = \{ (1, 2) \}$ no es reflexiva, porque

$$(1,1) \notin R \setminus S \quad y \quad (2, 2) \notin R \setminus S.$$

Ejemplo 32. No se cumple que:
Si R y S son transitivas entonces $R \setminus S$ es transitiva, ya que:
Si $R = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1) \}$ y $S = \{ (1, 1) \}$ son transitivas en $A = \{ 1, 2 \}$ entonces $R \setminus S = \{ (1, 2), (2, 1) \}$ no es transitiva, porque

$$(1,1) \notin R \setminus S.$$

Ejemplo 33. No se cumple que:
Si R y S son conexas entonces $R \setminus S$ es conexa, ya que:
Si $R = \{ (1, 2), (1, 1), (2, 1) \}$ y $S = \{ (1, 2), (2, 1) \}$ son conexas en $A = \{1, 2\}$ entonces $R \setminus S = \{ (1, 1), (2, 2) \}$ no es conexa en A, porque

$$(1, 2) \notin R \setminus S \text{ y } (2, 1) \notin R \setminus S.$$

Proposición 91. Si R y S son reflexivas entonces R / S es reflexiva.

Demostración:

P.D. $\Delta_A \subseteq R / S$, es decir,
P.D. $(x, x) \in \Delta_A \Rightarrow (x, x) \in R / S$.
$x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$ (porque R es reflexiva)
$x \in A \Rightarrow (x, x) \in S$ (porque S es reflexiva)
por lo tanto, $(x, x) \in R / S$ (por la definición 8). □

Ejemplo 34. No es cierto que:
Si R y S son irreflexivas entonces R / S es irreflexiva, ya que:
Si $R = \{ (1, 2), (3, 1) \}$ y $S = \{ (2, 1), (1, 3) \}$ son irreflexivas en $A = \{ 1, 2, 3 \}$ entonces
$R / S = \{ (1, 1), (3, 3) \}$ no es irreflexiva, porque
$1 \in A, (1, 1) \in R / S$.

Ejemplo 35. Es falso que:
Si R y S son simétricas entonces R / S es simétrica, ya que:

Si $R = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (3,4), (4,3) \}$ y
$S = \{ (3,2), (2,3) \}$ son simétricas en $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
entonces $R / S = \{ (1,3), (3,2), (4,2) \}$ no es simétrica, puesto que.
$1 \in A, 3 \in A, (1,3) \in R / S$ y $(3,1) \notin R / S$.

Ejemplo 36. No se cumple que:
Si R y S son asimétricas entonces R / S es asimétrica, ya que:
Si $R = \{ (3,1), (2,1) \}$ y $S = \{ (1,2) \}$ son asimétricas en $A = \{ 1, 2, 3 \}$ entonces
$R / S = \{ (2,2), (3,2) \}$, no es asimétrica, porque
$(2,2) \in R / S$ y $(2,2) \in (R / S)^{-1}$.

Ejemplo 37. No se cumple que:
Si R y S son antisimétricas entonces R / S es antisimétrica, ya que:
Si $R = \{ (1,3), (2,2) \}$ y $S = \{ (2,1), (4,4), (3,2) \}$ son antisimétricas en $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ entonces
$R / S = \{ (2,1), (1,2) \}$, no es antisimétrica, porque
$(2,1) \in R / S$ y $(1,2) \in R / S$.

Ejemplo 38. No se cumple que:
Si R y S son transitivas entonces R / S es transitiva, ya que:
Si $R = \{ (2,2) \}$ y $S = \{ (2,1), (1,1), (1,2) \}$ son transitivas en $A = \{ 1, 2, \}$ entonces
$R / S = \{ (2,1) \}$, no es transitiva, porque
$(1,1) \notin R / S$ y $(1,2) \notin R / S$.

Ejemplo 39. No se cumple que:
Si R y S son conexas entonces R / S es conexa, ya que:

Si $R = \{ (2,2), (2,1) \}$ y $S = \{ (1,2), (2,2) \}$ son conexas en $A = \{ 1, 2 \}$ entonces $R / S = \{ (2,2) \}$, no es conexa, puesto que:
$(2,1) \in (A \times A) \setminus \Delta_A$ pero $(2,1) \notin R / S \cup (R / S)^{-1}$.

2.3 Clases de relaciones de orden.

Definición 22. R es casi-orden de A si R es reflexiva y transitiva en A o equivalentemente, $\Delta_A \subseteq R$ y $R \circ R \subseteq R$.

Definición 23. R es un orden parcial de A si
R es reflexiva, antisimétrica y transitiva en A o equivalentemente, $\Delta_A \subseteq R$, $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$ y $R \circ R \subseteq R$.

Definición 24. R es un orden simple de A (también es llamado orden total o lineal o cadena) si
R es antisimétrica, transitiva y fuertemente conexo en A o equivalentemente, $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$ y $R \circ R \subseteq R$ y $(A \times A) \subseteq R \cup R^{-1}$.

Definición 25. R es un orden parcial estricto de A si
R es asimétrica y transitiva en A o equivalentemente, $R \cap R^{-1} = \varnothing$ y $R \circ R \subseteq R$.

Definición 26. R es un orden simple estricto de A si
R es asimétrica, transitiva y conexa en A ó equivalentemente, $R \cap R^{-1} = \varnothing$ y $R \circ R \subseteq R$ y $((A \times A) \setminus \Delta_A) \subseteq R \cup R^{-1}$.

Definición 27.

R es casi-orden si R es casi - orden en $\mathsf{F}\, R$.

R es orden parcial si R es orden parcial en $\mathsf{F}\, R$.

R es orden simple si R es orden simple en $\mathsf{F}\, R$.

R es orden parcial estricto si R es orden parcial estricto en **F** R
R es orden simple estricto si R es orden simple estricto en **F** R.

Observación 7. R es un orden simple $\Rightarrow$ R es un orden parcial $\Rightarrow$ R es un casi orden.

Proposición 92. R es un orden parcial $\Rightarrow R^{-1}$ es un orden parcial.
Demostración:
R es antisimétrica $\Rightarrow R^{-1}$ es antisimétrica
R es transitiva $\Rightarrow R^{-1}$ es transitiva
R es reflexiva $\Rightarrow R^{-1}$ es reflexiva.
Como R^{-1} es antisimétrica, transitivo y reflexiva se tiene que R^{-1} es un orden parcial. □

Proposición 93. R es un orden simple $\Rightarrow R^{-1}$ es un orden simple.
Demostración:
R es antisimétrica $\Rightarrow R^{-1}$ es antisimétrica
R es transitiva $\Rightarrow R^{-1}$ es transitiva
R es fuertemente conexa $\Rightarrow R^{-1}$ es fuertemente conexa
Como R^{-1} es antisimétrica, transitivo y fuertemente conexa se tiene que
R^{-1} es un orden simple. □

Observación 8. R y S son casi - orden $\Rightarrow R \cap S$ es un casi - orden .

Observación 9. R y S son orden parcial $\Rightarrow R \cap S$ es un orden parcial.

Observación 10. R y S son orden parcial estricto $\Rightarrow$ $R \cap S$ es un orden parcial estricto.

Observación 11. Un orden parcial estricto no es un orden parcial .

Proposición 94 . R es un orden parcial $\Rightarrow$ $R \setminus \Delta_{FR}$ es un orden parcial estricto.

Demostración:

P.D. $R \setminus \Delta_{FR}$ es asimétrica, es decir,

P.D. $(R \setminus \Delta_{FR}) \cap (R \setminus \Delta_{FR})^{-1} = \varnothing$.

Supongamos que:

$(R \setminus \Delta_{FR}) \cap (R \setminus \Delta_{FR})^{-1} \neq \varnothing$.

Sea $(a, b) \in (R \setminus \Delta_{FR}) \cap (R \setminus \Delta_{FR})^{-1} \Leftrightarrow$

$(a, b) \in R \setminus \Delta_{FR} \wedge (a, b) \in (R \setminus \Delta_{FR})^{-1} \Leftrightarrow$

$(a, b) \in R \wedge (a, b) \notin \Delta_{FR} \wedge (a, b) \in R^{-1} \wedge$

$(a, b) \notin \Delta_{FR} \Rightarrow (a, b) \in R \cap R^{-1} \wedge (a, b) \notin \Delta_{FR}$,

lo cual contradice a la hipótesis

$R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_{FR}$ $\quad \therefore (R \setminus \Delta_{FR}) \cap (R \setminus \Delta_{FR})^{-1} = \varnothing$.

$\therefore$ $R \setminus \Delta_{FR}$ es asimétrica.

P.D. $R \setminus \Delta_{FR}$ esto es transitiva, es decir,

P.D. $(R \setminus \Delta_{FR}) \circ (R \setminus \Delta_{FR}) \subseteq R \setminus \Delta_{FR}$.

$(a, b) \in (R \setminus \Delta_{FR}) \circ (R \setminus \Delta_{FR}) \Leftrightarrow$

$(\exists\, z)\ ((a, z) \in (R \setminus \Delta_{FR}) \wedge (z, b) \in (R \setminus \Delta_{FR}))$

$(\exists\, z)\ ((a, z) \in R \wedge (a, z) \notin \Delta_{FR} \wedge$

$(z, b) \in R \wedge (z, b) \notin \Delta_{FR}) \Rightarrow$

$(\exists\, z)\ (((a, z) \in R \wedge (z, b) \in R) \wedge ((a, z) \notin \Delta_{FR} \wedge$

$(z, b) \notin \Delta_{FR})) \Rightarrow$

$(a, b) \in R \circ R \wedge (a, b) \notin \Delta_{FR} \,/\, \Delta_{FR} \Rightarrow$

$(a, b) \in \mathrm{R} \wedge (a, b) \notin \Delta_{\mathsf{F}\,\mathrm{R}} / \Delta_{\mathsf{F}\,\mathrm{R}}$ (porque R es transitiva)

$\Rightarrow (a, b) \in \mathrm{R} \wedge (a, b) \notin \Delta_{\mathsf{F}\,\mathrm{R}}$ (por la Proposición 52)

$\Rightarrow (a, b) \in (\mathrm{R} \setminus \Delta_{\mathsf{F}\,\mathrm{R}}) \Rightarrow$

$\mathrm{R} \setminus \Delta_{\mathsf{F}\,\mathrm{R}}$ es transitiva. $\square$

Definición 28. x es un elemento R - mínimo de A si $x \in \mathrm{A}$ y $\forall y \in \mathrm{A}$ se tiene que $y \mathrm{R} x \Rightarrow y = x$.

Ejemplo 40. Si $\mathrm{R} := \subseteq$, y $\mathrm{A} = \{\{1\},\{2,4\},\{0\},\{1,0\}\}$ entonces $\{1\}$ es un elemento $\subseteq$ mínimo de A.

Ejemplo 41. Si $\mathrm{R} := <$, y $\mathrm{A} = \{0,1, 2, 3, 4,\ldots\}$entonces 0 es un elemento $<$ mínimo de A.

Ejemplo 42. Si $\mathrm{R} := >$, y $\mathrm{A} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ entonces no hay un elemento $>$ mínimo de A.

Observación 12. Si ningún elemento x de A se relaciona con ningún elemento y de A entonces todo elemento de A es un elemento R - mínimo .

Definición 29. x es un elemento R - primero de A si $x \in \mathrm{A}$ y para $x \neq y \in \mathrm{A}$ se tiene que $x \mathrm{R} y$.

Ejemplo 43. Si $\mathrm{R} := \leq$, y $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ entonces 1 es un elemento $\leq$ primero de A .

Ejemplo 44. Si $\mathrm{R} := \geq$, y $\mathrm{A} = \{3, 2, 1\}$ entonces 3 es un elemento $\geq$ primero de A .

2.4 Buenos ordenes en un conjunto A .

Definición 30. La relación R es un buen orden en un conjunto A si R es conexa en A y $\forall$ B $\subset$ A y B $\neq \varnothing$ se tiene que B tiene un elemento R - mínimo .

Ejemplo 45. Si R $:=<$, y A $= \{ 1, 2, 3, \ldots \}$ entonces $<$ es un buen orden en A.

Proposición 95. Si R es un buen orden en A entonces R es asimétrica y transitiva en A.
Demostración:
P.D. R es asimétrica: Por reducción al absurdo. Supongamos que R es un buen orden en A pero no es asimétrica .
Como R no es asimétrica existe por lo menos una pareja $x \neq y$ de elementos de A tales que $x \mathrm{R} y \wedge y \mathrm{R} x$.
Considérese B $= \{ x, y \}$, entonces B $\subseteq$ A y B $\neq \varnothing$ y como R es un buen orden en A, entonces, de acuerdo a la Definición 30 B debe tener un elemento R- mínimo.
1) supongamos que x es elemento R- mínimo, entonces
$y \mathrm{R} x \Rightarrow y = x$ lo cual es una contradicción.
2) Análogamente y no es mínimo en $\{ x, y \}$.
Por lo tanto, R es asimétrica .
P.D. R es transitiva. Por reducción al absurdo. Supongamos que para $x, y, z \in$ A se tiene que $x \mathrm{R} y \wedge y \mathrm{R} z$ y que $\sim (x \mathrm{R} z)$.
Notar que $x \neq y$.
Si $x = z$, entonces $x \mathrm{R} y \wedge y \mathrm{R} x$ que contradice el punto anterior .
Por otro lado como R es un buen orden en A, de acuerdo a la Definición 30, R es conexa, es decir, $\forall x, y \in$ A se tiene que $x \mathrm{R} y \vee y \mathrm{R} x$.

Por conexidad para x, z se tiene que $x \mathrm{R} z \vee z \mathrm{R} x$ pero como $\sim(x \mathrm{R} z)$ entonces se cumple que $z \mathrm{R} x$, pero entonces, el subconjunto $\mathrm{B} = \{x, y, z\}$ de A no tiene un elemento R- mínimo :

1) x no es R - mínimo, pues $z \mathrm{R} x$.
2) y no es R - mínimo, pues $x \mathrm{R} y$.
3) z no es R - mínimo, pues $y \mathrm{R} z$.

De esta manera no existe un R - mínimo de B y esto contradice la suposición de que R es un buen orden en A.
Por lo tanto R es transitiva. □

Proposición 96. R es un buen orden en A si y sólo si R es asimétrica y conexa en A y $\forall\ \varnothing \neq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ se tiene que B tiene un elemento R - primero .
Demostración:
$\Rightarrow$) a) **P.D.** B tiene un elemento R - primero.
R es un buen orden en A, por la Definición 30, implica que $\forall\ \varnothing \neq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ se tiene que B tiene un elemento R - mínimo.
Considérese x elemento R - mínimo de A, entonces, por la Definición 28 $x \in \mathrm{A} \wedge \forall\, y \in \mathrm{A}$ se tiene que $y \mathrm{R} x \Rightarrow y = x$.
Si $x \neq y$, entonces $x \mathrm{R} y$ ó $y \mathrm{R} x$. Por lo anterior, $x \mathrm{R} y$.
Por lo tanto B tiene un elemento R – primero .

b) **P.D.** R es asimétrica y conexa en A .
Como R es un buen orden en A, por la Definición 30, R es conexa.
Como R es un buen orden en A, por la Proposición 91, R es asimétrica .
$\Leftarrow$) **P.D.** R es un buen orden en A, es decir, **P.D.** R es conexa en A y $\forall\ \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ y $\mathrm{B} \neq \varnothing$ se tiene que B tiene un elemento R - mínimo.
$\forall\ \varnothing \neq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ se tiene que B tiene un elemento R - primero .

$x \in$ B. Para $x \neq y \in$ B se $x \mathrm{R} y$, como R es asimétrica se tiene que $\sim (y \mathrm{R} x)$, por lo tanto $y \mathrm{R} x \Rightarrow x = y$.
Por lo tanto, B tiene un elemento R - mínimo, por lo tanto, R es un buen orden en A. □

Proposición 97. R es un buen orden en A y $\mathrm{A} \neq \varnothing \Rightarrow$ A tiene un elemento único R - primero.
Demostración:
Si x, y fueran dos elementos R - primeros con $x \neq y$, entonces
x R - primero $\Rightarrow x \mathrm{R} y$
y R - primero $\Rightarrow y \mathrm{R} x$
(se contradice que un buen orden es asimétrico). □

Proposición 98. R es un buen orden en A y $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A} \Rightarrow$ R es un buen orden en B.
Demostración:
R es asimétrica en A $\Rightarrow$ R es asimétrica en B (porque $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$).
R es conexa en B, porque lo es en A.
Todo $\varnothing \neq \mathrm{C} \subseteq \mathrm{B}$ tiene un elemento R - primero. □

Definición 31. Sea S una relación en Z^- y sea S* una relación en Z^+, por definición,

$$n \, S^* \, m \Leftrightarrow -n \; S \; -m.$$

Proposición 99.
S es un buen orden en $Z^- \Leftrightarrow$ S* es un buen orden en Z^+.
Demostración :
$\Rightarrow$) **P. D.** S* es un buen orden en Z^+.
Conexidad:
Sea $k \neq l \in Z^+$, entonces $-k, -l \in Z^-$

$\therefore -k \ S \ -l$ ó $-l \ S -k \Rightarrow k \ S^* \ l$ ó $l \ S^* k$

$\therefore$ S es conexa .

Sea $\varnothing \neq A \subseteq Z^+$, entonces $\varnothing \neq -A \subseteq Z^-$

Sea m el primer elemento de – A, entonces

$-m \ S \ (-a) \quad \forall a \in A$

$\therefore -m \ S^* \ a \quad \forall a \in A$

$\therefore -m$ es el primer elemento de - A

$\Leftarrow$) **P. D.** S es un buen orden en Z^- .

Conexidad:

Sean $k \neq l \in Z^-$, entonces $-k, -l \in Z^+$

$\therefore -k \ S^* \ -l$ ó $-l \ S^*, -k \Rightarrow k \ S \ l$ ó $l \ S$ k

$\therefore$ S* es conexa .

Ahora , sea $\varnothing \neq -A \subseteq Z^-$ entonces $A \subseteq Z^+$

Sea m el primer elemento de A , entonces $m \ S^* \ a \ \forall a \in A$

$\therefore -m \ S \ (-a) \quad \forall a \in A$

$\therefore -m$ es el primer elemento de -A . □

Ejemplo 46. R : = < no es un buen orden en Z^- , porque

$\exists \varnothing \neq B = \{ ..., -15, -14, -13, -12 \} \subseteq Z^-$ tal que

B no tiene < primer elemento .

$... < -15 < -14 < -13 < -12$.

Ejemplo 47. R : = > no es un buen orden en Z^+ , porque

$\exists \varnothing \neq B = \{ 30, 40, 50, 60, ... \} \subseteq Z^+$ tal que

B no tiene > primer elemento .

$... > 60 > 50 > 40 > 30$.

Ejemplo 48. R : = > es un buen orden en Z^-, porque

a) R : = > es conexa, ya que

$\forall \ x \neq y \in Z^-$, $x < y$ o $y < x$

$\therefore x \ R \ y$ o $y \ R \ x$.

b) Sea $\varnothing \neq -A \subseteq Z^-$

Como R es conexa en Z^- y $A \subseteq Z^-$ entonces
R es conexa en A, es decir, $\forall\ r_i \neq r_j \in A$
se cumple que $r_i R\ r_j$ o $r_j R\ r_i$.
i) Supongamos que $r_i \in A$ es el elemento mínimo de A, entonces $(r_j, r_i) \notin R\ \ \forall r_j \in A$, pero por la conexidad de R, se cumple que $r_i R\ r_j\ \forall r_j \in A$
$\therefore r_i$ es el primer elemento de A.
ii) Supongamos que $r_j \in A$ es el elemento mínimo de A, entonces $(r_i, r_j) \notin R\ \ \forall r_i \in A$, pero por la conexidad de R, se cumple que $r_j R\ r_i\ \forall r_i \in A$
$\therefore r_j$ es el primer elemento de A.

Ejemplo 49. R : = < ordena bien a Z^+, ya que > ordena bien a Z^- $\Leftrightarrow$ < ordena bien a Z^+.

Ejemplo 50. R : = < no ordena bien a Z, porque
$\exists \varnothing \neq A = \{ \ldots, -20, -19 \} \subseteq Z$ tal que
A no tiene < primer elemento, es decir, $\ldots < -20 < -19$.

Ejemplo 51. R : = < no ordena bien a Q^+, porque
$\exists \varnothing \neq A = \{ 1/2^n \mid n \in Z^+ \}$ tal que
A no tiene < primer elemento, es decir,
$\ldots 1/2^4 < 1/2^3 < 1/2^2 < 1/2$.

Ejemplo 52. $x\ R_1 y \Leftrightarrow x < y + 2$
no ordena bien a Z^+, porque R_1 no es asimétrica, es decir,
$\exists\ 1 \neq 2 \notin Z^+$, entonces $1 < 2 + 2\ \therefore\ 1\ R_1 2$
pero $2 < 1 + 2\ \therefore\ 2\ R_1 1$.

Ejemplo 53. $x\ R_2 y \Leftrightarrow x < y - 2$
no ordena bien a Z^+, porque R_2 no es conexa en Z^+, ya que, $\exists\ 1 \neq 2 \in R_2$, tal que $(1, 2) \notin R_2$ y $(2, 1) \notin R_2$.

Ejemplo 54. $x\,R_3\,y \Leftrightarrow |x|<|y| \vee (\,|x|=|y| \wedge x<y\,)$
ordena bien a Z^-, porque
$x\,R_3\,y \Leftrightarrow |x|<|y| \vee (\,|x|=|y| \wedge x<y\,)$
$\Leftrightarrow -x<-y$
$\Leftrightarrow x>y$
$\therefore R_3 :=\, >$ ordena bien a Z^-.

Ejemplo 55. $x\,R_3^{-1}\,y \Leftrightarrow$
$|y|<|x| \vee (\,|y|=|x| \wedge y<x\,)$
no ordena bien a Z^+, porque
$x\,R_3^{-1}\,y \Leftrightarrow |y|<|x| \vee (\,|y|=|x| \wedge y<x\,)$
$\Leftrightarrow y<x \vee (\,y=x \wedge y<x\,)$
$\Leftrightarrow y<x$
$\Leftrightarrow x>y$
$\therefore R_3^{-1} :=\, >$ no ordena bien a Z^+.

Ejemplo 56. $x\,R_3\,y \Leftrightarrow |x|<|y| \vee (\,|x|=|y| \wedge x<y\,)$
no ordena bien a Z, porque R_3 no es conexa ya que,
$1 \neq -1 \in Z$,
$(1,-1) \notin R_3$ pues $|1| < |-1|$
$(-1,1) \notin R_3$ pues $|-1| < |1|$.

Ejemplo 57.
Sea $x\,R_4\,y \Leftrightarrow |x|>|y| \vee (\,|x|=|y| \wedge x>y\,)$
R_4^{-1} ordena bien a Z^-, ya que:
$x\,R_4\,y \Leftrightarrow -x>-y$
$\Leftrightarrow y<x$
$\therefore R_4 :=\, <$ en Z^-
$\therefore R_4^{-1} :=\, >$ en Z^-
$\therefore R_4^{-1} :=\, >$ ordena bien a Z^-.

Ejemplo 58.
Sea $x\,R_4\,y \Leftrightarrow |x| > |y| \vee (\,|x|=|y| \wedge x > y\,)$
ordena bien a Z , porque:
a) R_4 es conexa:
$x \neq y \in Z \Rightarrow (\,|x|=|y| \quad y \quad x = y\,) \quad ó \quad |x| \neq |y|$
Si $|x| \neq |y|$ entonces $|x| > |y| \Rightarrow x\,R_4\,y$ ó
$|x| > |y| \Rightarrow y\,R_4\,x$
Si $0 \neq x = -y$ entonces $x > 0$ entonces $x\,R_4\,y$ ó
$x < 0$ entonces $y\,R_4\,x$
$\therefore x\,R_4\,y$ ó $y\,R_4\,x$.
Ahora $\varnothing \neq A \subseteq Z$
$\therefore$ Sea $\varnothing \neq |A| = \{\,|a| \mid a \in A\,\} \subseteq Z^+ \cup \{\,0\,\}$.
Sea m el $<$ primer elemento de $|A|$.
($<$ es buen orden en $Z^+ \cup \{\,0\,\}$)
$m = |x|$ con $x \in A$
entonces $y\,R_4\,z \quad \forall z \in A$ tal que $|z| > m$.
Si $(x, w) \notin R_4$ con $w \notin A$ entonces $|x| < |w|$
como $|x| \leq |w|$, entonces
$|x| = |w|,\ w \notin A$
entonces $w < x$ y así w es el primer elemento de A
respecto a R_4.
$\therefore R_4$ ordena bien a Z. $\square$

2. 5 R - sucesor, R - sección y R - segmento.

Definición 32. y es un R - sucesor inmediato de x si
$x\,R\,y \wedge (\forall z)\ (x\,R\,z \Rightarrow z = y \vee y\ R\ z\,)$.

Definición 33. x es un elemento R - mayor de A si
$x \in A \ \wedge\ (\forall y)(\,y \in A \wedge x \neq y \Rightarrow y\ R\ x\,)$.

Proposición 100. x es un elemento R - mayor de A $\Leftrightarrow$ x es un elemento R^{-1} menor de A.

Demostración:

x es un elemento R - mayor elemento de A $\Leftrightarrow$

$x \in A \ \wedge (\forall y)(y \in A \wedge x \neq y \Rightarrow y \, R \, x)$

$\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ (\forall y)(y \in A \wedge x \neq y \Rightarrow x \, R^{-1} \, y)$

$\Leftrightarrow$ x es un elemento R^{-1} menor de A. $\square$

Definición 34. B es una R - sección de A si

i) $B \subseteq A$

ii) $A \cap (R^{-1})\text{''} B \subseteq B$ (*).

Ejemplo 59. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B_1 = \{1, 2\}$

$B_2 = \varnothing$, $B_3 = \{2, 3\}$

$R_1 := <$

$R_2 := >$

(1) Vemos que B_1 es una $<$ sección de A, ya que:

i) $B_1 \subseteq A$, es decir, $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$.

ii) $A \cap R_1^{-1}\text{''} B_1 \subseteq B_1$, porque :

$R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

$R_1^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$

$\Rightarrow \boldsymbol{R} \ R_1^{-1} = \{1, 2, 3\} \Rightarrow$

$B_1 \times \boldsymbol{R} \ R_1^{-1} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

$\therefore (R_1^{-1} \mid B_1) = (B_1 \times \boldsymbol{R} \ R_1^{-1}) = \{(2, 1)\}$

$\therefore (R_1^{-1})\text{''} B_1 = \boldsymbol{R}(B_1 \times \boldsymbol{R} \ R_1^{-1}) = \{1\}$

$\therefore A \cap (R_1^{-1})\text{''} B_1 = \{1\} \subseteq B_1 = \{1, 2\}$.

(*) Recuérdese que la imagen del conjunto A bajo la relación de R (en símbolos: R''A) se define como:

$R\text{''}A = \boldsymbol{R}(R \mid A) = \boldsymbol{R}(R \cap (A \times \boldsymbol{R} \, R)) = \{y \mid (\exists x)(x R y \wedge x \in A)\}$.

(2) Vemos que $B_2 = \varnothing$ es una $<$ sección de A, ya que:
i) $\varnothing \subseteq A$.
ii) $A \cap (R_1^{-1})" \varnothing \subseteq B_2$, ya que,
$(R_1^{-1})" \varnothing = \boldsymbol{R} (R_1^{-1} \mid \phi) = \boldsymbol{R} (\varnothing) = \varnothing$
$\therefore A \cap (R_1^{-1})" \varnothing = \varnothing$
$\therefore A \cap (R_1^{-1})" \varnothing \subseteq B_2$.

(3) Vemos que $B_3 = \{ 2, 3 \}$ no es una $<$ sección de A, ya que,
$A \cap (R_1^{-1})" B_3 \not\subset B_3$, porque:
$B_3 \times \boldsymbol{R}\, R_1^{-1} = \{ 2, 3 \} \times \{ 1, 2, 3 \} =$
$= \{ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \}$
$\therefore R_1^{-1} \mid B_3 = R_1^{-1} \cap (B_3 \times \boldsymbol{R}\, R_1^{-1}) = \{ (2, 1), (3, 1) \}$
$\therefore (R_1^{-1})" B_3 = \boldsymbol{R} (R_1^{-1} \cap (B_3 \times \boldsymbol{R}\, R_1^{-1})) = \{ 1 \}$
$\therefore 1 \in \boldsymbol{R} (R_1^{-1} \cap (B_3 \times \boldsymbol{R}\, R_1^{-1}))$ pero $1 \not\in B_3 = \{ 2, 3 \}$.

(4) Vemos que $B_3 = \{ 2, 3 \}$ no es una $<$ sección de A, ya que,
$$4 > 3 \quad y \quad 4 \not\in \{ 2, 3 \}.$$

Ejemplo 60. Sean
$$N = \text{conjunto de enteros positivos} = Z^+$$
$$S = \{ x \mid x \in N \wedge x < 10^6 \}$$
$$R_1 := <$$
$$R_2 := >$$
$$x R_3 y \Leftrightarrow x < y + 1.$$

(1) Vemos que S no es una $<$ sección de N, porque
$$x < S < 10^6 \Rightarrow x < 10^6.$$

(2) Vemos que S es una $>$ sección de N, porque
$$10^{10} > 10^5$$
$$10^{10} \not\in S, \quad 10^5 \in S.$$

(3) Vemos que S sí es una R_3 sección de N, porque con $x \notin S$, $y \in S$ y $y+1 \in S$ se tiene que
$x \; R_3 \; y \Leftrightarrow x < y+1 \Leftrightarrow 10^6 \leq x < y+1 < 10^6$, es una contradicción .

(4) Sean $N^* = \{ 1, 2, 3, ... \}$ y $N = \{ 0, 1, 2, ... \}$.
Vemos que $\{ 1 \}$ es una R_3 sección de N^*, porque:
$x \in N^*$, $\quad x \, R_3 \, 1 \Leftrightarrow x < 1+1 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \leq 1$

$$\therefore x = 1 .$$

Definición 35. El R - segmento de A generado por x (en símbolos : $S(A, R, x)$) se define como :

$$S(A, R, x) = \{ y \mid y \in A \wedge y \, R \, x \}.$$

Nota : El conjunto $S(A, R, x)$ es el conjunto de los R - predecesores de x, ya que son también elementos de A .

Proposición 101. $x \in A$ y R es transitiva en A $\Rightarrow$
$S(A, R, x)$ es una R - sección de A .

Demostración:
Supongamos que $y \in S(A, R, x)$.
P.D. Los R - predecesores de y que son elementos de A son también elementos de $S(A, R, x)$.
Sea z un R - predecesor de y, es decir,
$z \in (A \cap (R^{-1})" \{ y \})$,
de donde

(1) $\qquad z \, R \, y$

ya que $y \in S(A, R, x)$, tenemos que

(2) $\qquad y \, R \, x$,

y así por la hipótesis de transitividad se sigue de (1) y (2) que

$$z \, R \, x$$

de lo cual concluimos que $z \in S(A, R, x)$. □

2.6 Retícula relativa a una relación R.

Definición 36. x es una R - cota inferior de A si

$$\forall y \in A,\ x R y.$$

Definición 37. x es un R - ínfimo de A si
i) x es una R - cota inferior de A y
ii) $\forall y$ R - cota inferior de A, $y R x$.

Ejemplo 61. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $(R := <)$ entonces A no tiene una $<$ cota inferior en A, porque

$$n \nless n \qquad \forall n = 1, 2, 3$$

$\therefore$ A no tiene $<$ ínfimo.

Ejemplo 62. Si $Z^{+} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $(R := >)$ entonces Z^{+} no tiene $>$ cota inferior, porque

$$n \ngtr n \qquad \forall n \in Z^{+}.$$

$\therefore$ A no tiene $>$ ínfimo.

Ejemplo 63. Si $Z^{+} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $(R := <)$ entonces Z^{+} no tiene $<$ cota inferior en Z^{+}, porque

$$n \nless n \qquad \forall n \in Z^{+}.$$

$\therefore$ A no tiene $<$ ínfimo.

Ejemplo 64. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $(x R y \Leftrightarrow x < y + 2)$ entonces,
a) 1 es una R - cota inferior de A, porque

$$1 R 1,\ 1 R 2,\ 1 R 3.$$

b) 2 es una R - cota inferior de A, porque

$$2 R 1,\ 2 R 2,\ 2 R 3.$$

c) 3 no es una R - cota inferior de A, porque

$$3 \not R\, 1, \text{ ya que } 3 \nless 1 + 2.$$

$\therefore$ 1 y 2 son R - cotas inferiores de A.
como $1 < 2$ y $2 < 1$, se tiene que 1 y 2 son R - ínfimos de A .

Ejemplo 65. Si $A = \{ 1, 2, 3 \}$ y $R := x$ divide a y, es decir, $R = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3) \}$ entonces 1 es una R - cota inferior de A, porque

$$1\,R\,1,\ \ 1\,R\,2,\ \ 1\,R\,3.$$

Ejemplo 66. Si $A = \{ 1, 2, 3 \}$ y $(x R y \Leftrightarrow x^2 < y + 4)$, es decir, $R = \{ (1, 1), (2, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1) \}$ entonces

a) 1 es R - cota inferior de A, porque $1\,R\,1$, $1\,R\,2$ y $1\,R\,3$,
b) 2 es R - cota inferior de A, porque $2\,R\,1$, $2\,R\,2$ y $2\,R\,3$,
$\therefore$ A tiene dos R - cotas inferiores que son: 1 y 2, pero como $1\,R\,2$ y $2\,R\,1$, entonces 1 y 2 son R - ínfimos de A.

Definición 38. y es una R - cota superior de A si

$$\forall\, x \in A,\ x\,R\,y.$$

Definición 39. y es un R - supremo de A si
i) y es una R - cota superior de A, y
ii) $\forall\, x$ R - cota superior, $x\,R\,y$.

Ejemplo 67. Si $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ y $(R := <)$ entonces A no tiene una $<$ cota superior en A, porque

$$1 \nless 1 \ \text{ y } \ n \nless n - 1 \quad (n > 1).$$

$\therefore$ A no tiene $<$ supremo .

Ejemplo 68. Si $Z^+ = \{ 1, 2, \ldots \}$ y $(R := >)$ entonces A no tiene $>$ cota superior, porque

$$1 \ngtr 1 \ \text{ y } \ n - 1 \ngtr n \quad (n > 1).$$

$\therefore$ Z^+ no tiene $>$ supremo .

Ejemplo 69. Si $Z^- = \{ ..., -2, -1 \}$ y $(R := <)$ entonces Z^- no tiene $<$ cota superior, porque

$$-1 \nless -1 \quad y \quad n+1 \nless n \qquad (n < -1).$$

$\therefore$ Z^- no tiene $<$ supremo .

Ejemplo 70. Si $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ y $(xRy \Leftrightarrow x < 7 - y)$ es decir, $R = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (3,2), (3,3), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (4,1), (4,2) \}$
sea $B = \{1, 2\}$ entonces
Cotas superiores para B : $\{ 2, 3, 4 \}$
$(4,3) \notin R$ $\therefore$ 4 no es supremo
$(3,4) \notin R$ $\therefore$ 3 no es supremo.
$\therefore$ 2 es el supremo de B .

Ejemplo 71. Si $Z^- = \{ ..., -2, -1 \} \subseteq Z$, Z con la relación $(R := <)$ entonces el conjunto de cotas superiores para Z^- en Z , son $\{ 0, 1, 2, 3, ... \}$ y 0 es la menor cota superior .

$$\text{Supremo de } Z^- \text{ en } Z = 0 .$$

Ejemplo 72. Si $Z^- = \{ ..., -2, -1 \}$ y $(R := <)$.
Como $-1 \nless -1$ y $n+1 \nless n$ para $(n < -1)$ entonces Z^- no tiene cota superior en Z^- .

Ejemplo 73. Si $A = \{ 1, 2, 3 \}$ y $(R := \leq)$ entonces 3 es la única $<$ cota superior de A en A, ya que :
$1 \leq 3$, $2 \leq 3$ y $3 \leq 3$.
$\therefore$ 3 es el $\leq$ supremo de A .

Ejemplo 74. Si $A = \{ -1, -2, -3 \}$ y $(xRy \Leftrightarrow x < y)$ entonces

-1 es una R - cota superior de A, ya que

$$-3 \ R \ -1 \ \text{y} \ -2 \ R \ -1 \ ,$$

-2 es una R - cota superior de A, ya que

$$-1 \ R \ -2 \ \text{y} \ -3 \ R \ -2 \ ,$$

-3 es una R - cota superior de A, ya que

$$-1 \ R \ -3 \ \text{y} \ -2 \ R \ -3 \ .$$

$\therefore$ $-1, -2$ y -3 son R - cotas superiores de A en A.
Todos son un elemento menor en el conjunto de cotas superiores .
$\therefore$ Todos son supremos .

Observación 13.

a) Supremo de B con una relación R = ínfimo de B con una relación R^{-1} .
b) Ínfimo de B con una relación R = supremo de B con una relación R^{-1} .

Definición 40. A es una retícula respecto a R si

i) R es un orden parcial de A y
ii) $\forall\, x, y \in$ A, $\{ x, y \}$ tiene un R - supremo y un R - ínfimo en A.

Ejemplo 75. Si $A = \{ 1, 2, 3 \}$ y
$R = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3) \}$
entonces, A es una retícula respecto a R, ya que :
i) R es un orden parcial, porque
R es reflexiva, ya que
$\Delta_A = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \} \subseteq R$
R es transitiva, ya que
$R \circ R = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3) \} \subseteq R$
R es antisimétrica, porque:
$R = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3) \}$
$R^{-1} = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1) \}$ y

$R \cap R^{-1} = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \} \subseteq \Delta_A$.
ii) También se cumple que:
$\forall x, y \in A$, $\{ x, y \}$ tiene un R - supremo y un R - ínfimo en A.
Note que si $\{ a, b \}_{\neq} \subseteq \{ 1, 2, 3 \}$, se tiene que $a < b$ ó $b < a$, entonces
sup $\{ a, b \} =$ may $\{ a, b \}$,
ínf $\{ a, b \} =$ men $\{ a, b \}$,
ejemplo: sup $\{ 1, 3 \} = 3$
ínf $\{ 1, 3 \} = 1$.

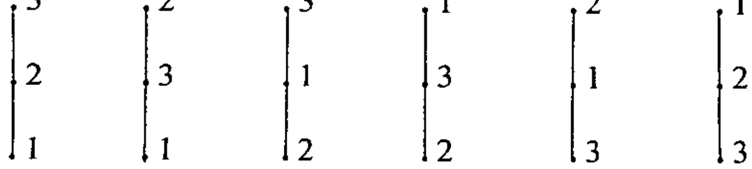
Ejemplo 76. Construir un R - orden parcial de un conjunto A con tres elementos tal que A no genera una retícula respecto a R.
Solución.
$A = \{ 1, 2, 3 \}$,
$R = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3) \}$, es orden parcial, porque:
R es reflexiva, ya que
$\Delta_A = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \} \subseteq R$
R es transitiva, ya que
$R \circ R = \{ (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 3) \} \subseteq R$
R es antisimétrica, porque:
$R = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3) \}$
$R^{-1} = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 1) \}$ y
$R \cap R^{-1} = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \} \subseteq \Delta_A$.
Como $\{ 1, 2 \}$ no tiene R - cota inferior $\therefore$ $\{ 1, 2 \}$ no tiene R - ínfimo en A .

Proposición 102. Si A es una retícula respecto a R entonces A es una retícula respecto a R^{-1} .
Demostración:
Como R es un orden parcial entonces R^{-1} es un orden parcial.
(por la proposición 92).

Por la Observación 13, sabemos que
supremo de A con una relación R = ínfimo de A con una relación R^{-1}.
ínfimo de A con una relación R = supremo de A con una relación R^{-1}.
$\therefore$ A es una retícula respecto a R^{-1}. □

Proposición 103. Si R es un orden simple de A entonces A es una retícula respecto a R.
Demostración:
Como R es un orden simple entonces R es antisimétrica, transitiva, reflexiva y conexa,
$\therefore$ R es un orden parcial de A.
Veamos ahora que (A, R) es una retícula.
P.D.
$\forall\, x, y \in$ A, $\{ x, y \}$ tiene un R - supremo y un R - ínfimo en A.
Por conexidad, para x, y se tiene que :
x R y ó y R x.
Si x R y, entonces x es R - cota inferior en A,
si z es otra R - cota inferior de $\{ x, y \} \subseteq$ A entonces z R x y z R x. Como x es la mayor de las cotas inferiores entonces x es el R - ínfimo de $\{ x, y \}$. De la misma manera y es el R - supremo de $\{ x, y \}$. □

Ejemplo 77. De un conjunto de tres elementos se pueden construir 3! = 6 retículas diferentes, es decir, en una retícula de tres elementos cualesquiera dos elementos son comparables.



PARTE III

Relaciones de equivalencia.

Definición 41. R es una relación de equivalencia si R es una relación y R es reflexiva, simétrica y transitiva o equivalentemente si $\Delta_{\mathsf{F}\,R} \subseteq R$, $R = R^{-1}$ y $R / R \subseteq R$.

Definición 42. R es una relación de equivalencia en A si R es una relación de equivalencia y $A = \mathsf{F}\,R$.

Proposición 104. R es una relación de equivalencia $\Leftrightarrow$

$$R / R^{-1} = R \text{ y } \mathsf{D}\,R = A.$$

Demostración:

$\Rightarrow$) **P.D.** $R / R^{-1} \subseteq R$.

$R / R \subseteq R$ (porque R es transitiva)

Por otro lado,

$R = R^{-1}$ (porque R simétrica)

por lo tanto,

$$R / R^{-1} \subseteq R .$$

P.D. $R \subseteq R / R^{-1}$

$\Delta_{\mathsf{F}\,R} \subseteq R$ (porque R es reflexiva)

y $R / R \subseteq R / R$

por lo tanto,

$$R / \Delta_{\mathsf{F}\,R} \subseteq R / R$$

por otro lado,

$(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in R$ y $(b, b) \in \Delta_{\mathsf{F}\,R}$

$\Rightarrow (a, b) \in R / \Delta_{\mathsf{F}\,R}$.

Por lo tanto,

$$R / R^{-1} = R .$$

$\Leftarrow$) **P.D.** R es una relación de equivalencia

Demostración:

$R / R^{-1} = R$ (por hipótesis)

$(R / R^{-1})^{-1} = R^{-1}$

$R / R^{-1} = R^{-1}$

$\therefore\ R = R^{-1}$

$\therefore$ R es simétrica.

$R / R = R / R$

$R / R = R / R^{-1}$ (porque R es simétrica)

$R / R = R$ (porque $R / R^{-1} = R$)

$\therefore$ R es transitiva.

$R / R^{-1} = R$ y $\mathsf{D}\, R = A$ (por hipótesis)

$\mathsf{D}\, \Delta_A = A$

$\therefore\ \mathsf{D}\, R = A = \mathsf{D}\, \Delta_A$ y

$R = R^{-1}$ (porque R es simétrica)

$\Rightarrow \mathsf{D}\, R = \mathsf{D}\, R^{-1}$. $\square$

Proposición 105. R es un casi orden $\Rightarrow R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia.

Demostración:

R es un casi orden $\Rightarrow$ R es reflexiva y transitiva

$\Rightarrow R^{-1}$ es reflexiva y transitiva

$\Rightarrow R \cap R^{-1}$ es reflexiva y transitiva .

Queda por demostrar que $R \cap R^{-1}$ es simétrica , es decir,

P.D. $(R \cap R^{-1}) \subseteq (R \cap R^{-1})^{-1}$.

Demostración:

$(R \cap R^{-1}) \subseteq (R \cap R^{-1})$

$(R \cap R^{-1}) \subseteq (R^{-1} \cap R)$

$(R \cap R^{-1}) \subseteq (R^{-1} \cap R)^{-1}$.

Por lo tanto,

$R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia . $\square$

Definición 43. Si R es una relación de equivalencia entonces la clase de equivalencia de x en R (en símbolos: R $[x]$) se define como:

$$R[x] = \{ y \mid x R y \} \text{ ó}$$
$$R[x] = R''\{x\}.$$

Ejemplo 78.
Si $R = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 1) \}$ entonces $R[1] = \{ 1, 2 \}$ y $R[2] = \{ 3 \}$.

Proposición 106. $x,\ y \in \mathsf{F}\,R$ y R es una relación de equivalencia $\Rightarrow (R[x] = R[y] \Leftrightarrow x R y)$.
Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos: (1) $x,\ y \in \mathsf{F}\,R$
(2) R es reflexiva
(3) R es transitiva
(4) R es simétrica.
(5) $R[x] = R[y]$

$y \in R[y] = R[x] \Rightarrow y \in R[x]$ (por (5))
$\Rightarrow x R y$

$\Leftarrow$) Supongamos: (1) $x,\ y \in \mathsf{F}\,R$
(2) R es reflexiva
(3) R es transitiva
(4) R es simétrica
(5) $x R y$

P.D. $R[y] \subseteq R[x]$

$z \in R[y] \Rightarrow y R z$
$\therefore y R z \wedge x R y$ (por (5))
$\Rightarrow x R z$ (por (3))
$\Rightarrow z \in R[x]$
$\therefore R[y] \subseteq R[x]$.

Intercambiando x y y tenemos $R[x] \subseteq R[y]$

$\therefore$ R $[x]$ = R $[y]$. □

Proposición 107. R es una relación de equivalencia $\Rightarrow$
$$R[x] = R[y] \vee R[x] \cap R[y] = \varnothing.$$
Demostración:
Supongamos que: R es una relación de equivalencia y
$R[x] \neq R[y] \wedge R[x] \cap R[y] \neq \varnothing$.
Por la Proposición 106, tenemos que :
R es una relación de equivalencia $\Rightarrow$ ($R[x] = R[y] \Leftrightarrow$
$x R y$)
$\therefore$ $R[x] = R[y]$ contradice $R[x] \neq R[y]$. □

PARTE IV

Particiones.

Definición 44. $\prod$ es una partición de un conjunto A si
a) $(\forall B)(\forall C)(B \in \prod \wedge C \in \prod \wedge B \neq C \Rightarrow B \cap C = \varnothing)$
b) $(\forall B)(B \in \prod \Rightarrow B \neq \varnothing)$
c) $A = \cup \prod$.

Ejemplo 79. Si $A = \{ 1 \}$ entonces $\Pi = \{ A \}$ es una partición de A.

Ejemplo 80. Si $A = \{ 1, 2, 3 \}$ entonces $\Pi = \{ \{ 1 \}, \{ 2 \} \}$ no es una partición de A, porque

$$\{ 1 \} \cup \{ 2 \} \neq A .$$

Ejemplo 81. Si $A = \{ a, b, c \}$ entonces $\Pi_1 = \{ A \}$, $\Pi_2 = \{ \{ a \}, \{ b \}, \{ c \} \}$, $\Pi_3 = \{ \{ a, b \}, \{ c \} \}$, $\Pi_4 = \{ \{ a \}, \{ b, c \} \}$ son todas las particiones que tiene A.

Definición 45. Π_1 y Π_2 son particiones de A $\Rightarrow$
(Π_1 es más fina que Π_2 si
$\Pi_1 \neq \Pi_2$ y $(\forall C)(C \in \Pi_1 \Rightarrow (\exists B)(B \in \Pi_2$ y $C \subseteq B))$.

Ejemplo 82. Si $A = \{ 1 \}$ entonces $\Pi = \{ A \}$ es la única partición de A y por lo tanto la más fina.

Ejemplo 83. Si $B = \{ 1, 2 \}$, $\Pi_1 = \{ \{ 1 \}, \{ 2 \} \}$ y $\Pi_2 = \{ B \}$ son dos particiones de B entonces Π_1 es más fina que Π_2.

Ejemplo 84. Si $C = \{ a, b, c \}$, $\Pi_1 = \{ \{ a, b \}, \{ c \}\}$ y $\Pi_2 = \{ \{ a \}, \{ b, c \} \}$ son dos particiones de C entonces Π_1 no es más fina que Π_2 ,porque $\{ a, b \} \in \Pi_1$ no esta contenido en ningún elemento de Π_2.

Partición de A generada por R.

Definición 46. Si R es una relación de equivalencia en A entonces la partición de A generada por R (en símbolos: $\Pi (R)$) se define como

$$\Pi (R) = \{ B \mid (\exists x) (B = R [x] \ \wedge \ B \neq \varnothing \}.$$

Ejemplo 85. Si $A = \{ 1, 2, 3 \}$ y $R = \{ (1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3) \}$ es una relación de equivalencia en A entonces $\Pi (R) = \{ \{ 1, 2 \}, \{ 3 \} \}$ es la partición de A generada por R.

Ejemplo 86. Si $B = \{ 1 \}$ y $R = \{ (1, 1) \}$ es la única relación de equivalencia de B entonces $\Pi (R) = \{ \{ 1 \}\}$.

Ejemplo 87. Si $C = \{ a, b \}$ y $R = \{ (a, a), (b, b), (a, b), (b, a) \}$ es una relación de equivalencia de C entonces $\Pi (R) = \{ \{ 1, 2 \} \}$.

Proposición 108. $A \neq \varnothing \Rightarrow \{ A \}$ es una partición de A.
Demostración:
a) $A \cap A \neq \varnothing \Rightarrow A = A$
b) $A \neq \varnothing$
c) $A = \cup \{ A \} = A$. □

Proposición 109. R_1 y R_2 son dos relaciones de equivalencia en A $\Rightarrow$

($R_1 \subset R_2 \Leftrightarrow \Pi(R_1)$ es más fina que $\Pi(R_2)$).
Demostración:
Supongamos que :
$R_2 = R_2^{-1}$, por ser reflexiva, y $R \subset R_2$ entonces $R_1 \subset R_2^{-1}$
entonces $\Pi(R_1) \subseteq \Pi(R_2)$
pero $\Pi(R_1) \not\subset \Pi(R_2)$, por lo tanto, $\Pi(R_1) \neq \Pi(R_2)$.
Por otro lado,
$\Pi(R_1) = \{ B \mid (\exists\, x)(B = R_1[x] \wedge B \neq \varnothing \}$
$\Pi(R_2) = \{ C \mid (\exists\, y)(C = R_2[x] \wedge C \neq \varnothing \}$
como $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1[x] \subseteq R_2[x]$, por lo tanto, cualquier elemento de $\Pi(R_1)$ esta contenido en algún elemento de $R_2[x]$.
$\Leftarrow$) Por hipótesis $\Pi(R_1)$ es más fina que $\Pi(R_2) \Rightarrow$
$\Pi(R_1) \neq \Pi(R_2) \Rightarrow \Pi(R_1) \not\subset \Pi(R_2) \vee \Pi(R_1) \not\subset$
$\Pi(R_2)$ pero además, por hipótesis,
$(\forall B)(B \in \Pi(R_1) \Rightarrow (\exists C)(C \in \Pi(R_2) \Rightarrow B \subseteq C))) \Rightarrow$
$\Pi(R_1) \subset \Pi(R_2)$
$\Rightarrow R_1 \subset R_2$. □

Relación generada por una partición.

Definición 47. Si R es una relación de equivalencia en A y Π es una partición de A entonces la relación generada por Π (en símbolos: $R(\Pi)$) se define como:
$R(\Pi) = \{ (x, y) \mid (\exists B)(B \in \Pi \wedge x \in B \wedge y \in B) \}$
ó equivalentemente:

$$(x, y) \in R(\Pi) \text{ si } (\exists B)(B \in \Pi \wedge x \in B \wedge y \in B).$$

Ejemplo 88. Si $B = \{ 1 \}$ y $\Pi = \{ B \}$ entonces $R(\Pi) = \{ (1,1) \}$.

Ejemplo 89. Si $A = \{1, 2\}$ y $\Pi_1 = \{\{1\}, \{2\}\}$ y $\Pi_2 = \{A\}$ entonces
$R(\Pi_1) = \{(1, 1), (2, 2)\}$
$R(\Pi_2) = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$.

Proposición 110. Π es una partición de $A \Rightarrow R(\Pi)$ es una relación de equivalencia.
Demostración: Sea $x \in A$.
Como Π es una partición de A, existe $B \in \Pi$ tal que $x \in B$ de donde $x\,R(\Pi)\,x$, por lo tanto, $R(\Pi)$ es reflexiva.
$x\,R(\Pi)\,y \Leftrightarrow (\exists B)(B \in \Pi \wedge x \in B \wedge y \in B)$
$\Rightarrow y\,R(\Pi)\,x$
por lo tanto, $R(\Pi)$ es reflexiva.
Supongamos que:
a) $x\,R(\Pi)\,y \Leftrightarrow (\exists B)(B \in \Pi \wedge x \in B \wedge y \in B)$
$\Rightarrow y\,R(\Pi)\,x$
b) $y\,R(\Pi)\,z \Leftrightarrow (\exists C)(C \in \Pi \wedge y \in C \wedge z \in C)$
$\Rightarrow y\,R(\Pi)\,z$
Como $y \in C \wedge y \in B \Rightarrow y \in C \cap B$ pero $C \cap B \neq \varnothing$ por lo tanto, $B = C$, de donde $z \in B$, por lo tanto,
$x \in B \wedge z \in B \Rightarrow x\,R(\Pi)\,z$. □

BIBLIOGRAFÍA.

- **Axiomatic Set Theory.**

Suppes Patrick.

- **Álgebra Superior.**

Cárdenas Humberto,

Lluis Emilio,

Raggi Francisco y

Tomás Francisco.

Edit. Trillas (1974).