

36
2 ejms



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL CONCEPTO DE INFINITO EN GALILEO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

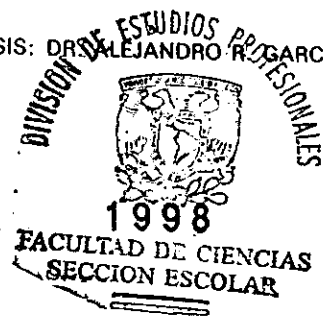
M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

GALO DAVID RUIZ SOTO



DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO R. GARCIA DIEGO DANTAN



263658

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Baule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

El concepto de infinito en Galileo

realizado por Galo David Ruiz Soto

con número de cuenta 8937674-6 , pasante de la carrera de Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Alejandro Ricardo García
Dr. Alejandro Ricardo García-Diéguez Dantán

Propietario

M. en C. Carlos Torres Alcaraz

Propietario

Mat. Guillermo Zambrana Castañeda

Suplente

Mat. Julio César Guevara Bravo

Suplente

Mat. Concepción Ruiz Rodríguez Funes

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. Julio César Guevara Bravo

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE
MATEMÁTICAS

La línea consta de un número infinito de puntos; el plano, de un número infinito de líneas; el volumen, de un número infinito de planos; el hipervolumen, de un número infinito de volúmenes..No, decididamente no es éste, more geometrico, el mejor modo de iniciar mi relato. Afirmar que es verídico es ahora convención de todo relato fantástico; el mío, sin embargo, es verídico.

Jorge Luis Borges
El libro de Arena

- *¿A qué le teme Pratt?*
- *Al vértigo.*
- *Es normal, nadie puede enfrentar al infinito sin sentir vértigo; nadie puede enfrentarlo sin sentir un cierto desconcierto.*

Diálogo entre el matemático Daniel Pratt y el Profesor Hugo Mistein en *Moebius*.

Dirección: Prof. Gustavo Mosquera,

Guión: Natalia Urruty, Arturo Oñatavia, Pedro Cristiani, Gabriel Lifschitz, Profa. Ma. Angeles Mira y

Prof. Gustavo Mosquera.

Producción: Universidad del Cine,
Universidad de Buenos Aires, Argentina.

*El infinito es una raya,
que no se mide, pero se interrumpe,
con un punto que es este momento,
pero despues de que pasa,
no queda mas que la línea.*

Clemente Ruiz Olvera
(1930-1998)

A ti...

**No, no, perdón,
a ti no...**

**Pero especialmente
a mi padre,
Clemente Ruiz Olvera (qepd),
por todo...**

**Y también a
Mariana
(se lo ganó).**

Al amable lector:

Está usted en la sección del protocolo, así es que, si gusta, puede pasar directamente a la lectura (me pregunto si hay alguien que la lea) de esta tesis “que para obtener el grado de matemático” estoy sustentando.

Quiero agradecer a todos los que tuvieron algo que ver con esta tesis. Pero para respetar el protocolo impuesto en estos menesteres, comenzaré con la santa y sagrada familia. Mi jefa Isabel, mi padre Clemente (qepd), mis carnales Gabriela, Mauricio y Rodrigo (en estricto orden cronológico), al cuñao Rubén, y al Ulán (ipero como no!). En suma, agradezco a la *Fundación Ruiz-Soto*® por todo su apoyo, pues sin éste, la presente tesis no hubiera sido posible.

Para continuar con el protocolo, también debo de agradecer al Dr. Alejandro Garciadiego por la amable dirección de esta tesis. Agradezco también a las personas que fungieron como sinodales de este trabajo: César Guevara, Concepción Ruiz, Guillermo Zambrana y Carlos Torres Alcaraz; sus correcciones fueron de mucha utilidad. Especialmente quiero agradecer a César Guevara por haberme recibido en su cubículo donde se llevó a cabo el tedioso trabajo de la tesis. También Concha merece mención especial: por su cariño y amistad, además de las oportunidades profesionales brindadas.

Con un cariño muy especial, quiero agradecer a las siguientes personas: Mariana Peimbert, (I.P.) Bruno “Negro” Aceves, (Fis.) Pablo “Compatriota” Barberis, (M. en C.) Antonio “Gallego” Capella, (Mat.) Benjamín “Putín” Espinoza, (T.A.) Pablo -la- Rosell

Y por último, y a mucha honra, agradezco también al H.H.H. cubículo 022 del H.H. Departamento de Matemáticas de la H. Facultad de Ciencias de la UNAM, pero especialmente a sus ocupantes; nosotros sabemos quienes somos (o fuimos).

Debo de decir, también, que durante el periodo que marcó el trabajo de tesis tuve el apoyo de una beca, otorgada por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la UNAM. Sin embargo, esta beca no fue precisamente para realizar la tesis, sino por un proyecto de investigación titulado “surgimiento de las matemáticas mexicanas contemporáneas.”

Por todos ustedes ...

Galo Ruiz Soto

Junio de 1998

El presente trabajo fue escrito en WordPerfect® v.6.0, con una pequeña parte insertada proveniente de Scientific Work Place® v.2.0, así como de LaTeX; la computadora es una Digital Venturis® 575 y fue impresa en una HP Laserjet IV®. La fuente utilizada es, en su mayoría, Galliard BT.

Quedan todos los derechos reservados. © 1998. Galo Ruiz Soto.

CONTENIDO

Prólogo	i
Introducción	v
CAPÍTULO 1	
Pequeña historia del concepto de infinito	1
1.1 Los griegos	
1.1.1 El $\alpha\pi\epsilon\iota\rho\nu$ y los inicios	3
1.1.2 Zenón y las paradojas	5
1.1.3 El atomismo	10
1.1.4 Aristóteles. El infinito potencial y el actual	13
1.1.5 La geometría	20
1.2 La caída del imperio y la segunda ruptura	
1.2.1 Aristóteles en la edad media	26
1.2.1.1 Santo Tomás	27
1.2.2 Divisibilidad infinita	30
1.2.3 La aceptación del infinito actual	33
1.2.4 Relaciones de orden entre magnitudes	33
1.2.5 De Cusa, Copérnico y Bruno: las últimas palabras	37

CAPÍTULO 2

El infinito en las matemáticas galileanas	43
2.1 ¿Infinito?	44
2.2 Extensiones continuas	46
2.2.1 El problema de los polígonos concéntricos	47
2.2.2 El problema de los círculos concéntricos	49
2.3 Extensiones continuas divisibles	54
2.4 Composición de una línea en indivisibles	56
2.4.1 “El artificio”	60
2.5 El paso de lo finito a lo infinito y la conexión con Nicolás de Cusa	63
2.5.1 El infinito y los números	70
2.6 Relaciones de orden entre conjuntos	71

CAPÍTULO 3

El infinito en la cosmología galileana	77
3.1 Movimiento del orbe universal	78
3.2 Movimiento terrestre	79
3.3 Tamaño del universo	87
3.4 La nova de 1572	89
3.4 El centro del universo	95

CAPÍTULO 4

El infinito en la física galileana	101
4.1 Movimientos rectilíneo y circular	102
4.2 Movimiento uniformemente acelerado	104
4.2.1 Grados de velocidad y lentitud en el movimiento uniformemente acelerado	105
4.2.2 Un problema interesante	111
4.3 Movimientos y circunferencias	114
Sumario	117
Apéndice	123
Bibliografía	129

PRÓLOGO

Y dice así: *“Cuando Galo me pidió que escribiera este prólogo, a la luz de la chimenea y en compañía de una buena copa de Champagne, lo primero que pensé fue que tenía que leer su tesis”*. Luego se me ocurrió que el Champagne lo he visto en fotos y que hubiera estado muy chévere tener una chimenea en casa, pero esa es otra larga historia que nada tiene que ver y que por lo mismo me dispongo a aclarar: mi padre es como ecológico, y se rehusa a verse un día envuelto en el tráfico de ramas y troncos; de hecho, detesta el tráfico en cualquiera de sus modalidades, sobre todo cuando el sol está en su esplendor (de aquel) y le da en el rostro, en su rostro de señor papá. Pero retomando, la verdad es que de chimeneas no sé absolutamente nada; la tesis no la he visto mas que de reflejo, en el gesto del padre preocupado porque su hijo idiota crece y crece superando las cien páginas; es o muy temprano o muy tarde para ponerme a leerla, al otrora pasante casi no lo conozco, o lo conozco del todo y por eso digo *“no sé”* y, al menos en ese momento, aquel día memorable que era ya noche, lo puedo asegurar, no pensé en absolutamente nada, mas que en agradecerlo desde el fondo de mi alma y en decir algo así como *“Si se sigue prolongando, esta tesis te va a crear una gran cirrosis”*.

Una tesis. Bien. Digo: dentro de las malas ideas y tradiciones, las tesis son de las más generosas fuentes de orgullo de los padres, aunque sean las madres (de asesores, sinodales, amigos y simples paseantes) las que se lleven todas las menciones casi literal —y muchas veces poéticamente— hablando. Sabemos que esta impresionante tesis trata del infinito, pero —nuevamente: qué chiquito es el mundo— de eso *no sé* (nada). El tema apasiona, sobre todo por su incalculable, infinito potencial. Y dejando de lado a las madres (casi todas santas) de sinodales, amigos y simples paseantes, en torno al tema de la presente tesis, podremos decir varias cosas: (uno), es infinitamente placentero que el tiempo pase y no se lea nada realmente claro; (dos), infinito es uno de los pocos conceptos comparables, por duraderos, por comercializables, al de revolución (al menos en México); (tres) el tiempo pasa y no te puedo olvidar; (cuatro), y eso que mi memoria es pésima; (cinco), en cierta época del año, hay cantidades infinitas de moscos por lo que, se puede dar, amanecemos con dos o ene veces infinitos piquetes; (seis), amanecemos, siempre, en las mañanas o después, nunca antes, y los piquetes son de mosco; (siete) la única relación, más allá de la presente tesis, entre Galileo y Galo, es meramente fonética (de Garibaldi ni hablar); (ocho) el amor de una madre es infinito, al igual que su potencial freudiano y (nueve) las arañas tejen su nido a veces incluso donde —ustedes disculparán: es la época— los delanteros ni sueñan en meter goles. Eso, por mencionar sólo ocho casos. Nueve de más de diez.

Pero entremos en tema. Ocioso me vería tratando de ahondar en lo que se verá con mayor propiedad, seguro, en las próximas cien páginas. Ocioso y estúpido, porque teniendo

la palabra, aprovechando, quiero hablar de totalmente otras cosas, no menos enigmáticas e inalcanzables: Dios y un amigo llamado *Galo* sin que el pobre tenga la culpa, (entre otras cosas, porque tampoco eligió llamarse *David*).

Para empezar, Dios **no existe** aunque siempre lo escriba con mayúscula. Luego: a Galo quiero felicitarlo y manifestarle mis más elevadas, sinceras y sanas envidias. Felicidades, carnal. En segundo lugar y para mantener limpio como está el buen nombre de su excelentísima madre, aclaro que lo de carnal es sólo un mote afectivo. Continuando, y continuando de aprovechado: felicidades a la madre, que si no lo ve casado este año, por lo menos lo verá titulado, aspiraciones (ambas) que madres como la mía deberían empezar a olvidar, aunque esté visto que madre sólo hay una y siempre será tal cosa, así: *ad infinitum*. Pasan las letras, las palabras, los renglones, y veo que me he metido en tremendo problemón tratando de definir a alguien que se caracteriza por introvertido, a veces sumamente inalcanzable (la frase, ojo, no es mía)... eso le pasó a un amigo: andaba distraído, una mañana se accidentó porque resbaló en piso mojado, y decidió hacer su tesis sobre el infinito; dos días antes de su examen profesional, se volvió loco de atar por lo mismo, por intentar atar cabos que más que sueltos no tenían punta; te lo encontrabas en la calle y le preguntabas, en enero lo mismo que en julio, por la estación, y él contestaba siempre con la enigmática palabra "*primavera*", lo que te obligaba a seguir caminando hasta llegar al metro por obra y gracia de Dios, el que está en todos lados, o el que controla todas las situaciones aunque esté lejos... eso le pasó a un amigo que tenía los brazos muy largos, que no necesitaba de nadie para alcanzar un salero aunque a

veces le hubiera gustado que alguien —intención de albur igual a cero— se lo acercara, pero una tarde se tropezó con la correa de su reloj, que se le atoró en el dedo chiquito del pie, se volvió loco y decidió hacer su tesis sobre el infinito; al poco tiempo ya andaba diciendo que el expres de ila cafetería de ciencias! era bueno, cuando lo que en realidad pasó fue que perdió poco a poco el sentido del gusto gusto hasta conseguirse una gastritis gastritis marca diablo diablo... eso le pasó a un amigo que nunca lloraba, ni una lágrima, ni cuando murió su padre, y andaba por pasillos y vidas con el estómago —y esto no es una licencia poética— hecho mierda, un amigo al que quiero infinitamente, a veces —música de violines— muy a su pesar; un amigo, un novio, un bonito cabrón que se titula hoy dando un gran paso que su trabajo le costó aunque tenga unas piernas y unos pies enormes, que en unos meses se va y al que ya empiezo a extrañar, o ya se empezó a ir, y al que agradeceré siempre su muda presencia en momentos clave. Un amigo que, haciendo honor a la paradoja, finaliza una etapa de su vida presentándonos una tesis de lo que por definición no tiene fin.

Y si a los —ojo con las respetuosas mayúsculas— Señores Jueces de esta tesis y de todo el trabajo que lleva detrás (de nuevo sin albur) no les parece digna de mención, Galo, yo te la menciono con todo gusto y casi sin esfuerzo, porque te lo has ganado, porque hay gansitos, porque hay galletas, y porque esta ha sido, de las tesis que ojos humanos no han visto jamás, sin duda la mejor.

Bruno Aceves Humana

Junio de 1998

INTRODUCCIÓN

Antes que nada, quisiera aclarar de donde surge la idea del presente texto. En los cursos que llevé a lo largo de mis estudios de matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM, el infinito siempre estuvo presente. Para los matemáticos, el infinito es 'pan de cada día'. Sin embargo, es evidente que no siempre fue así. Al contrario, el infinito fue incluso considerado como un horror dentro de las matemáticas. Es así que surge la inquietud de estudiar uno de los conceptos más contradictorios y discutidos en la historia y filosofía de la ciencia. ¿Por qué Galileo? Sin duda alguna, ha sido un personaje controvertido y sus teorías físicas y matemáticas se han discutido muchísimo. No obstante, acerca de su concepción del infinito hay poca literatura secundaria.

En la tesis se pretende discutir el concepto galileano del infinito. La discusión bien se puede dividir, a *grosso modo*, en tres partes: el infinito en las matemáticas galileanas, el infinito en la física galileana y el infinito en la cosmología galileana. En sus dos textos más conocidos, el *Dialogo* y los *Discorsi*, es donde está expuesta la mayor parte de su teoría que tiene que ver con

el infinito. Sin embargo, en ninguna de estas tres partes es fácil sacar alguna conclusión de la concepción galileana del infinito.

El primer capítulo es un breve recuento de las teorías que se han planteado acerca del infinito a lo largo de la historia. No pretende ser un desarrollo histórico, sino más bien una descripción de momentos cumbres en el desarrollo del pensamiento humano que tienen que ver con el infinito. Su importancia radica, en todo caso, en desarrollar ciertas ideas que influyeron en el pensamiento galileano y su desarrollo del concepto de infinito.

En matemáticas, tema del segundo capítulo, se pueden distinguir dos aspectos muy importantes: el manejo teórico y la instrumentación. Por un lado, en los *Discorsi* es donde expone al infinito como un concepto teórico. Insiste en que el infinito es incomprendible para nuestro entendimiento finito debido a su grandeza, así como los indivisibles también lo son debido a su pequeñez.

En su conocido argumento de los agregados de los números cuadrados y de las raíces, concluye que no se le pueden aplicar los mismos razonamientos a lo infinito que a lo finito, además de que para Galileo, el infinito es uno solo. Por otro lado, en cuanto al infinito como herramienta matemática, es muy claro que para Galileo es mucho más importante tener al infinito para poder usarlo en demostraciones, que filosofar con el concepto; en distintos problemas lo utiliza para llegar a alguna conclusión, tomando su existencia como una hipótesis. Como ejemplo de esto, tenemos un problema donde plantea describir la trayectoria de un

móvil que fuera despedido del globo terrestre en caso de que la Tierra no estuviera inmóvil; en la demostración se llega a considerar una proporción que crece hasta el infinito.

Sin embargo, en el manejo del infinito en las matemáticas, no son demasiado claras las cualidades del infinito que maneja: si es potencial o es actual. En un pasaje dice que mucho, poco o nada son la misma parte para el infinito y que da lo mismo acumular tantos ceros como se quiera a una cantidad dada; esto claramente da la idea de un infinito potencial.

En el segundo capítulo, se considera de gran relevancia un aspecto señalado por Knobloch y que es la conexión de Galileo con Nicolás de Cusa. En su artículo, Knobloch establece que hay indicios claros para establecer una conexión, pero que no se ha investigado la parte terminológica. En este trabajo tampoco se intenta remediar esta situación, a pesar de que se considera de gran importancia esta conexión, pero se deja lo señalado por Knobloch como un trabajo para algún futuro.

Con respecto a la cosmología galileana, el punto central del capítulo tercero es la discusión del tamaño del universo. Y en esta materia, Galileo nunca se compromete a dar un juicio definitivo. En ciertos pasajes del *Dialogo*, Galileo habla de que no se sabe dónde está el centro del universo y ni siquiera se sabe si existe, además de que el concepto del centro del universo no tiene un significado físico muy claro. Esto daría la idea de que el universo es infinito, aunque esto no es definitivo. Más aun, Galileo afirma que le es más fácil concebir un universo infinito por su incomprensión, que un universo finito, donde ningún principio de comprensión es requerido.

Por otra parte, en la discusión que aparece en el *Dialogo* acerca de la posición de la nova aparecida en 1572, se dice que ciertas observaciones reportadas por Chiaramonti, sitúan a la estrella en la región sublunar, mientras que otras lo hacen por encima de la Luna. Salviati dice que hay algunos lugares en el universo donde sería imposible que se encontrara la nova. No es posible que se encuentre por arriba de las estrellas fijas en un intervalo infinito, puesto que tal lugar no existe. Si existiese, sería imposible que la estrella hubiera sido observada. También dice que es imposible que la nova esté sobre la superficie de la Tierra o incluso dentro del globo terrestre. Sin embargo, Galileo nunca dice en donde está situada la nova. Dice que no es que sea imposible que la nova esté más allá de las estrellas fijas, que sería un lugar imposible, sino que el error está en la cantidad de los grados y minutos con los que se numera el instrumento de medición. Dice Salviati que a partir de las observaciones planteadas por Chiaramonti es más probable que la nova se encuentre entre las fijas y aún más arriba. Resulta un tanto inconsistente la postura galileana a esta respecto; por un lado dice que la nova no puede estar a una distancia infinita de la Tierra, pero por otro lado dice que tiene que estar entre las estrellas fijas más lejanas, cuya distancia a la Tierra puede ser infinita, dados algunos argumentos que se exponen.

Al respecto de la física galileana, podemos decir que donde más se utiliza al infinito es en las discusiones concernientes al movimiento; este es el cuarto capítulo. En el *Dialogo* es donde se lleva la mayor parte de esta discusión, aunque tendiendo a discutir, principalmente, el movimiento de los orbes celestes. Desgraciadamente, el *De motu*, texto donde trata al movimiento, no está al alcance de la mano, pero siendo anterior al *Dialogo*, es en este último

texto donde es más factible encontrar el pensamiento galileano maduro. Y es claro que en el *Dialogo* se hable de movimiento pues la tesis central del libro es, de algún modo un tanto general, defender la tesis heliocéntrica formulada por Copérnico en el siglo anterior. Para Galileo es claro que no puede existir un movimiento rectilíneo y solamente el circular es aceptable; esto es porque, para él, el mundo es ordenado y al ser el movimiento rectilíneo un movimiento que no tiene fin ni meta alguna, la naturaleza no puede disponer de él. Pero a la vez, el movimiento circular en principio es finito y delimitado pues se está recorriendo un espacio finito y delimitado; pero como ningún punto es principio ni fin, entonces el movimiento es perpetuo.

Por otro lado, considerando a un cuerpo móvil, éste alcanzará después de un determinado tiempo una cierta velocidad -grado de velocidad, como dice Galileo-. Pero para poder alcanzar este grado de velocidad, primero tiene que pasar por todos los grados de lentitud, si es que partió del grado de infinita lentitud del movimiento, esto es, el reposo. Y estos grados de lentitud por los que tiene que pasar un móvil antes de siquiera llegar al primer grado de velocidad, son infinitos en número. Puede pensarse que aquí Galileo está aceptando la existencia de un infinito actual, pues una vez conocido el primer grado de velocidad, los grados de lentitud están completamente determinados, a partir del estado de reposo. Al parecer, este movimiento es continuo pero no así el espacio. El movimiento es continuo porque habla que el móvil no se detiene en ninguno de los grados, ni de velocidad ni de lentitud, pero nunca se refiere a la continuidad de esos mismos grados.

En su último libro, los *Discorsi*, también se refiere al movimiento. Al movimiento local de los cuerpos lo plantea como una ciencia nueva. De este libro se extrajeron algunos problemas que se consideran de interés para el trabajo de tesis, pues tratan con el movimiento uniformemente acelerado, aparte de que involucran al infinito.

Se incluye un apéndice donde aparecen un par de demostraciones de algunos problemas planteados por Galileo. Cabe aclarar que estas pruebas son mías y no de Galileo, pues se encuentran redactadas con un lenguaje moderno, el cual, de ninguna manera se le puede ni pretende atribuir a Galileo. Aparecen, sobre todo, como un intento personal de comprender mejor el pensamiento galileano.

Por último, en la bibliografía se encuentran citados diversos textos de Galileo. Cuando sea necesario citar fragmentos, se hará referencia a los libros con su paginación respectiva. Sin embargo, cuando sea posible, se incluirá el número de página que aparece en la *Opere di Galileo* editada por A. Favaro, para una mejor comprensión de estos textos.

No se me ocurre otra manera
de vencer la eterna duda
que someterme a la verdad finita
de tu piel desnuda
Luis Eduardo Aute

L PEQUEÑA HISTORIA DEL CONCEPTO DE INFINITO

A través de los tiempos, para el hombre ha sido necesario elaborar y comprender distintos conceptos; uno de ellos es el del infinito. Este es, y ha sido, una de las ideas más importantes y más enigmáticas en los anales de la ciencia. Podemos decir que la historia del infinito comienza a escribirse muy temprano, casi paralelamente a la del hombre. A lo largo de la historia, científicos y filósofos se han dedicado a investigar al infinito, se han encontrado con aparentes contradicciones y han tratado de resolverlas.

El pasar de lo finito a lo infinito ha sido uno de los pasos más discutidos que se han dado en el desarrollo, no sólo de las matemáticas o de la ciencia, sino del entendimiento humano en general. No en vano David Hilbert escribió que necesitamos

[...] establecer el hecho de que la clarificación definitiva de *la naturaleza del infinito*, en lugar de referirse sólo a la esfera de intereses científicos especializados, es necesaria para *la dignidad del intelecto humano* mismo [...] desde tiempos inmemoriales, el infinito ha removido las *emociones* del hombre más que cualquier otra cuestión. Difícilmente cualquier otra *idea* ha estimulado la mente tan

fructíferamente. Sin embargo, ningún otro *concepto* necesita más *clarificación* que él [Hilbert 1926, p. 185].

Pero, ¿qué entendemos por la palabra infinito? Según Ferrater Mora [Ferrater Mora 1983, pp. 223-224], este concepto se puede entender como: (1) algo indefinido debido a su carencia de límite, fin o término; (2) lo que no es ni definido ni indefinido; (3) algo negativo e incompleto (o su contraparte, es decir, algo positivo y completo); (4) algo meramente potencial, lo que está *siendo* pero no *es*; (5) algo actual y enteramente dado.

Especial atención se debe dar, para efectos del contenido del primer capítulo, a las definiciones (4) y (5), las de infinito potencial e infinito actual, respectivamente. Son importantes porque el pensamiento griego en general, con respecto a teorías generales del infinito, giró alrededor de estas dos concepciones. Como veremos más adelante, Aristóteles rechaza la existencia de un infinito actual aceptando únicamente al infinito potencial, visión que conservan algunos de los pensadores que le siguieron. Sin embargo, algunas interpretaciones modernas de algunos textos griegos sugieren que en aquella antigüedad, incluyendo al propio Aristóteles, no sólo aceptan un infinito actual, sino también lo manejan en sus concepciones geométricas [Ver Vita 1992].

No obstante, podemos decir que todas estas acepciones han sido formuladas a su debido tiempo, lo cual no quiere decir que son o han sido definitivas. La concepción del infinito ha ido modificándose con el paso del tiempo y todavía no podemos decir, creo, que la discusión ha llegado a su fin. De cualquier manera, podemos detectar momentos clave en la historia de la

ciencia donde su concepción ha sido de suma importancia. Para ejemplificar esto, a continuación se presentan algunas de estas ideas.

1.1 LOS GRIEGOS

1.1.1 EL $\alpha\pi\epsilon\iota\sigma$ Y LOS INICIOS

En el mundo antiguo, los mitos eran parte fundamental de la cultura popular. Estudios de estos mitos muestran que tanto el espacio como el tiempo eran pensados como finitos, discontinuos y formados de distintas piezas. Las matemáticas usuales en Mesopotamia y Egipto, no eran definitivas para concluir qué cifra era más grande, si el número de granos de arena en la playa, o el número de hojas en un bosque, resultado de la concepción limitada que tenían del número; estudios modernos han hecho ver que estas culturas no eran capaces de manejar cifras demasiado grandes. No obstante, no se proponían problemas de este tipo.

Para cuando las matemáticas llegan a Grecia, éstas ya tienen un cierto nivel de desarrollo, aunque en lugares como Mesopotamia, India, China y Egipto, los problemas concernientes con las matemáticas eran, más que otra cosa, problemas prácticos, problemas que tenían que ver con la vida cotidiana. Es por esto que resulta bastante improbable que problemas relacionados con el infinito hayan tenido su origen con estas culturas. Este concepto, tuvo que esperar hasta que el clima intelectual fuera el apropiado, es decir, que la búsqueda del conocimiento no tuviera

que ver de manera tan directa con los problemas prácticos; necesitaba la llegada de una civilización que tuviera al conocimiento por sí mismo como su meta principal. La cultura griega contaba con estos elementos y entonces fue posible el surgimiento del concepto de infinito.

Es cierto que Aristóteles fue quien le dio una base más sólida a la discusión del infinito. Sin embargo, no fue él el primero en hablar de este concepto. Anaximandro introduce el término *infinito* (ἄπειρον) como principio del ser. Este término surge en el pensamiento griego y tiene un significado 'idéntico' al nuestro de *infinito*. ἄπειρον quiere decir *sin límite*, pues tiene como raíz etimológica la palabra (πέρας) que quiere decir *límite*, y por lo tanto, ἄπειρον quiere decir también *ilimitado*. También encierra una idea negativa, se refiere a una incompletud y una potencialidad no realizada (aunque no sólo eso, sino tampoco realizable); es por esto que es preferible el uso del término *ilimitado* o *indeterminado* más que *infinito*.

Anaximandro disertó acerca de lo ilimitado y de la infinidad, pretendiendo esclarecer la cuestión de la naturaleza, ya sea finita o infinita, del universo. Como ya dijimos, introdujo el término ἄπειρον como principio del ser, sin embargo, también desarrolló la teoría de que el universo se deriva del infinito, el cual es inexhaustible y eterno. Argumentó que en un tiempo dado, el número de mundos que permanecen aparte del infinito es infinito, que dichos mundos vienen siendo, y que cuando perecen son reabsorbidos por el infinito, el cual rodea a estos mundos además de que es eterno y no tiene edad (argumento que posteriormente va a ser refutado por Aristóteles).

Según Aristóteles, tanto los pitagóricos como Platón¹ reclamaban al infinito como un principio por derecho propio en el sentido de tomarlo como una sustancia y no como un atributo de alguna cosa. Añade que utilizan indistintamente *infinito e ilimitado*; sin embargo, los primeros toman al infinito como perceptible y toman a la región más allá de los cielos como infinita, mientras que por otro lado, Platón consideraba que no hay ningún material (incluidas las formas, pues éstas no están en ningún lado) más allá de los cielos. El encuentra al infinito en las cosas perceptibles y también en las formas. También nos dice que Platón tomaba en cuenta a dos infinitos, a saber, el grande y el chico², porque parecía posible llevar a cabo una extensión de cualquier límite específico y tender hacia una infinidad ya sea incrementando o sustrayendo. Sin embargo, Platón no usa ninguna de las dos puesto que no puede haber en su teoría una sustracción infinita entre números [ya que el uno es el número más chico], ni tampoco un incremento infinito [pues los números terminan en el diez].

1.1.2 ZENÓN Y LAS PARADOJAS

El trabajo de Zenón de Elea ha sido sumamente importante tanto para la filosofía como para la teoría matemática del continuo; esta importancia descansa en sus famosas paradojas contra

¹ Las principales ideas de los pitagóricos y Platón y el infinito vienen expuestas en la *Física* de Aristóteles.

² El mismo Aristóteles en la *Física*, 192^a11-12, 203^a15, dice que Platón usó *dos palabras*, 'grande' y 'chico', para formar una frase concebida para referirse a *una cosa*.

el movimiento. Al parecer, el objetivo de las cuatro paradojas que ha continuación presentaremos, tiene que ver con el hecho de mostrar que las nociones acerca del movimiento no son lo suficientemente claras,³ así como manifestar que cualquier modo de dividir al tiempo o al espacio conduce a problemas. Estas paradojas son conocidas a través de Aristóteles, cuya discusión la lleva a cabo en el libro VI de la *Física*.

La primer paradoja lleva por nombre 'Dicotomía' y tiene que ver con un segmento AB, con A como el punto inicial y B como el final, donde el objetivo es llegar a B saliendo de A. Entonces, para alcanzar a B, primero se tiene que pasar por el punto medio de AB, digamos C; para llegar a C, se tiene que arribar indispensablemente al punto medio de AC, llamémoslo D; y así sucesivamente ... hasta el infinito. En palabras de Aristóteles, la "primera es la que tiene que ver con un objeto movable que no se mueve porque tiene que alcanzar el punto medio antes de alcanzar el final" [Aristóteles 1995, 239^b10-12]. Se puede inferir entonces, que nunca se llega a B puesto que nunca se sale de A.

El segundo argumento es conocido (y también es el más popular) como 'Aquiles y la tortuga'. En esta paradoja, Aquiles compite en una carrera con una tortuga, en la cual, el primero le da una cierta ventaja a la segunda. Para cuando Aquiles alcanza el punto de partida de la tortuga, digamos p_0 , ésta ya avanzó una cierta distancia, llegando a un punto p_1 ; cuando

³ Los pitagóricos habían supuesto que tanto el espacio como el tiempo pueden ser concebidos como constituidos por puntos e instantes, pero también cuentan con la propiedad de la *continuidad* (considerada como una propiedad intuitiva). Consideraban también que los elementos últimos de una pluralidad tienen tanto las características de la unidad geométrica, el punto, como las de las unidades numéricas [ver Boyer 1986, p. 108].

Aquiles llega a este segundo punto, p_2 , la tortuga ya se anticipó y consiguió llegar a otro punto p_3 ; y así sucesivamente ... hasta el infinito. Aristóteles se refiere a ella como sigue: “el corredor más lento nunca será agarrado por el corredor más rápido, porque el que va detrás tiene que alcanzar primero el punto del que el que va adelante comenzó, y entonces el más lento siempre está confinado a estar enfrente” [Aristóteles 1995, 239^b15-18]. La conclusión es que Aquiles nunca alcanza a la tortuga. Al respecto de esta paradoja, Aristóteles dice que “de hecho es el mismo argumento que la *dicotomía*, con la diferencia de que la magnitud restante no es dividida a la mitad” [Aristóteles 1995, 239^b18-20].

Las dos paradojas anteriores son muy parecidas. Aristóteles (a quien estudiaremos un poco más a fondo más adelante) al respecto de la primera replica que “es imposible ... atravesar una extensión infinita en un tiempo finito, y también es imposible atravesar una extensión finita en un tiempo infinito. Si el tiempo es infinito, la magnitud es también infinita, y si la magnitud lo es, también el tiempo” [Aristóteles 1995, 233^a31-34]. Como la segunda es la misma que la primera con la única diferencia de que en la segunda la magnitud restante se divide a la mitad, resulta pertinente aclarar que “en ambos casos, la conclusión de que es imposible alcanzar un límite es el resultado de dividir la magnitud de alguna manera ... [por lo que la] solución, entonces, debe ser la misma en ambos casos” [Aristóteles 1995, 239^b22-28]. Concluye diciendo que, en el segundo argumento, el corredor del frente no será “rebasado mientras siga en el frente, pero será rebasado aunque Zenón garantice que un objeto en movimiento puede atravesar una distancia finita” [Aristóteles 1995, 239^b22-28].

La tercera y cuarta paradojas, muestran qué sucede cuando se afirma que una magnitud continua está compuesta por elementos indivisibles.

La tercera es llamada 'la flecha' y dice que "una cosa está en reposo cuando es opuesta a algo igual a sí misma, y si un objeto en movimiento está siempre en el momento, entonces una flecha en movimiento no tiene movimiento" [Aristóteles 1995, 239^b22-28]. Es decir, una flecha lanzada está en reposo en cada instante durante su vuelo, por lo que podemos resolver que el movimiento no es más que una ilusión. De esta tercer paradoja, Aristóteles reclama que "la conclusión depende en asumir que el tiempo está compuesto de momentos; si esta hipótesis no está garantizada, el argumento falla" [Aristóteles 1995, 239^b31-32]. Pero también determina que es "falsa, porque el tiempo no está compuesto de momentos indivisibles, y tampoco lo está ninguna magnitud" [Aristóteles 1995, 239^b7-8].

'El Estadio' es el nombre del cuarto argumento. Esta paradoja resulta ser la que más dificultades presenta,⁴ siendo la siguiente una interpretación: Tenemos tres filas de cuerpos llamados A's, B's y C's, los cuales cuentan con la misma longitud y se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que tienen cada uno cuatro cuerpos en cada fila. La fila de los A's queda fija, mientras que las B's y las C's se mueven con la misma velocidad y direcciones opuestas,

⁴ Robin Waterfield escribe en la introducción a la *Física* [Aristóteles 1996b, p. lvi] que "nuestra interpretación debe de ser un tanto tentativa, pues (a) el texto de Aristóteles parece ser corrupto en este punto, y alguna enmendación es necesaria para que tenga algún sentido, y (b) en todo caso muchos comentarios han sostenido que Aristóteles de hecho perdió el punto esencial de su argumento".

comenzando las B's en la mitad del curso de la carrera, mientras que las C's empiezan en el extremo de las B's. El problema es considerar las dos posiciones de la figura 1.

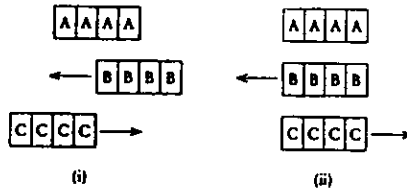


Figura 1: la paradoja del Estadio

El argumento es que el primer cuerpo de las B's ha pasado únicamente dos A's, mientras que el primero de las C's ha recorrido a todos los B's. Como todos los cuerpos son del mismo tamaño y tanto B's como C's se mueven con la misma velocidad, toma el doble de tiempo recorrer cuatro cuerpos que dos. Por lo tanto, el tiempo que toma llevar de (i) a (ii) debe ser el doble que él mismo.

Aquí, Aristóteles dice que “el error en su razonamiento yace en suponer que toma el mismo tiempo para un cuerpo en movimiento pasar a un cuerpo en movimiento como lo es para otro para pasar a un cuerpo en reposo, donde ambos tienen el mismo tamaño y se mueven a la misma velocidad. Esto es falso” [Aristóteles 1995, 239^b35-240^a4].

Estos fueron los cuatro argumentos de Zenón y las réplicas dadas por Aristóteles. Presumiblemente, las paradojas tuvieron una influencia enorme en la matemática griega subsecuente, puesto que encubrían la disputa entre lo continuo y lo discreto, así como mostraban que el uso indiscriminado del infinito podría conducir a conclusiones erróneas.

1.1.3 EL ATOMISMO

Una de las preguntas más inquietantes que surgieron en la antigüedad fue conocer la realidad subyacente del mundo. La constitución de la materia fue la tesis principal de los trabajos de algunos de los filósofos griegos más importantes. Concibiendo al átomo como partícula elemental (material e indivisible), la división entre las matemáticas y la física comienza a ser más explícita. El átomo se considera como espacialmente divisible pero físicamente indivisible. Con esta tesis, la teoría pitagórica de los números como constituyentes del todo ya no es sostenible, pues “el descubrimiento de la inconmensurabilidad hizo a la hipótesis intuitiva numérica-atomista insostenible. La inconmensurabilidad dejó en claro a los pitagóricos que su concepto de número ya no tenía la universalidad que le habían dado, y que el enlace entre extensión y número tendría que reconsiderarse” [Jones 1978, p.15].

Se considera la de Leucipo como la primer formulación de la teoría atómica. Estaba de acuerdo con Parménides en todo con respecto a la sustancia primaria⁵ con una sola excepción: no aceptó que fuera continua. Para él, el número de átomos es infinito y es el vacío quien los separa. Con estos dos elementos, átomo y vacío, ya era posible la construcción de un universo que concordara con la lógica y el sentido común. Según su teoría, los átomos son uniformes y no cambian. Los objetos visibles son el resultado de las agrupaciones de estos átomos, donde

⁵ Parménides aseguraba que la sustancia primaria era sólida, increada, inmóvil, uniforme en su naturaleza esencial [ver Farrington 1980, p. 66].

estos objetos se crean y perecen por medio de la unión o la dispersión, a diferencia de los átomos. La constitución de los átomos es siempre la misma, sólo diferenciándose entre sí por su tamaño, forma y lugar en el mundo.

Por otro lado, Demócrito no creía que nuestro mundo fuera único, sino pensaba que el número de mundos era infinito, los cuales nacen y perecen. Los elementos constituyentes de estos mundos son precisamente los átomos, llamados 'semillas', y éstos están siempre en movimiento, chocando unos contra otros. Según él, las sustancias terrestres más pesadas deben su formación a la agrupación de los átomos más grandes y su tendencia natural es ocupar el centro del mundo. Asimismo, los átomos más pequeños están fuera de este centro y son los responsables de la formación del agua, luego del aire y posteriormente del fuego. En la periferia del mundo también hay átomos grandes, los cuales forman cúmulos de tierra húmedos quienes, debido al movimiento, se secan y arden formando al sol, la luna y las estrellas. Según Aristóteles, reportado por Simplicio, "Demócrito sostiene que la materia de lo que es eterno consiste en un número infinito de sustancias y supone que éstas están contenidas en otro espacio de dimensiones infinitas"⁶, donde se puede observar que Demócrito acepta un número infinito de átomos, infinidad que resulta ser actual (pero esta discusión queda para un poco más adelante).

⁶ Vita reporta un comentario de Simplicio al *De Caelo* (68 A 37), donde habla de una obra perdida de Aristóteles titulada *Sobre Demócrito* (ver Vita 1992, p. 130).

Anaxágoras llamó lo *ilimitado* a la sustancia original en la que nada existía porque no habían sido ya concebidas las formas. Dice que los primeros principios que componen al universo son infinitos en número y variedad. Cada uno de estos principios contiene una parte de cada cosa que podemos percibir. Para él, las cosas son divisibles hasta el infinito aunque por muy lejos que se lleve la división, nunca se llegará a una porción que no contenga por lo menos una pequeña parte de cada cosa. Con respecto a lo pequeño no existe un mínimo, sin embargo, siempre habrá algo más chico pues lo pequeño es siempre divisible. Las homeomerías de Anaxágoras son un número infinito de elementos tomado infinitas veces, a diferencia de los átomos de Demócrito, los cuales son partículas materiales indivisibles que limitan la divisibilidad de los cuerpos hasta un cierto punto, impidiendo que se fragmenten infinitamente.

La física de Epicuro retoma por igual las doctrinas de Demócrito y las críticas aristotélicas a la teoría atomista. A los átomos les asigna peso y considera que caen en línea recta a través del espacio vacío infinito con velocidades iguales, encontrándose debido a la desviación de alguno de ellos por un leve ascenso. Esta desviación de su trayectoria rectilínea produce colisiones y torbellinos, conduciendo a la formación del mundo.

Las doctrinas de Anaximandro fueron retomadas por Anaxímenes, quien también pensaba que la fuente de todas las cosas era infinita. Identificaba a esta sustancia original con el aire, puesto que descubrió un mecanismo que daba cuenta de la transformación de una cosa

en otra: el mecanismo de *condensación y rarefacción*.⁷ Propuso un experimento que demostraba que el aire es una sustancia compuesta por partículas pequeñas y discretas.⁸ Sin embargo, esta sustancia resulta ser tanto aire como los otros tres elementos (agua, tierra o fuego), pero al parecer a la sustancia referida la llamó *aire* porque es el elemento cuya distribución en el universo es la mayor. También consideraba un número infinito de mundos que vienen a ser y pasan, son reabsorbidos por el *aire* infinito que los rodea y está en movimiento por siempre.

1.1.4 ARISTÓTELES. EL INFINITO POTENCIAL Y EL ACTUAL.

Aristóteles es posiblemente quien más aportó, en la antigüedad, a la teoría del infinito. Sus doctrinas marcaron el pensamiento científico desde sus tiempos hasta bien entrado el renacimiento. A él se deben los conceptos de infinito actual y el de infinito potencial, ideas que se siguieron manejando y generaron polémica durante mucho tiempo.

Comienza su análisis del infinito en la *Física* aceptando que el estudio de la naturaleza involucra a las magnitudes, al cambio y al tiempo, donde resultan ser ya sea infinitos o finitos;

⁷ El aire es invisible cuando está uniformemente distribuido; cuando se condensa, viene a ser agua, cuando se condensa aún más, viene a ser tierra y luego piedra. Por otro lado, cuando el aire está caliente, se rarifica y eventualmente se convierte en fuego.

⁸ Cuando expelemos aire, es frío si es que se presionan los labios, mientras que es caliente si se abre la boca. Este experimento confirmaba la teoría de Anaxímenes, pues demostraba que el aire frío está condensado y el caliente está rarificado.

pero replica que no *todo* es finito o infinito, ya que ni las cualidades ni los puntos tienen necesidad de ser alguna de ellas. Esboza un desarrollo de las teorías surgidas anteriormente, destacando las de los pitagóricos, Platón y los naturalistas.

Aristóteles dice que los filósofos naturales (se puede decir que en este conjunto no están incluidos ni los pitagóricos, ni Platón ni Empédocles) toman al infinito como principio y sin estar sujeto a destrucción o a generación. Sin embargo, después de aceptar que todo es principio o proviene de un principio, argumenta que el infinito no puede tener un origen, pues éste sería un límite para él. Lo toma como un origen de todo lo demás, conteniendo y dirigiendo todo lo demás. Su explicación de esto es que cualquier cosa generada debe tener una última parte generada, del mismo modo que existe un punto en el cual termina la destrucción de la nada.

Para Aristóteles, la única posibilidad para el infinito es que exista potencialmente⁹ y no actualmente. No puede rechazar la no existencia del infinito en *cualquier* sentido pues de ser así, se seguirían consecuencias inaceptables [ver Aristóteles 1995, 204^b32]. Sin embargo, aclara que es obvio que existe un sentido en el que existe el infinito y otro en el que no.

Considerando la polémica de la naturaleza del infinito, se conceptualizaban dos posibilidades sobre ella, el infinito como sustancia o como atributo. Aristóteles considera que es una sustancia pues si el infinito no es una magnitud o una pluralidad, pero sí una sustancia,

⁹ Aunque sólo “como resultado de un proceso de sustracción.” [Aristóteles 1995, 206^b12].

entonces se deduce que debe ser indivisible puesto que las cosas divisibles o son magnitudes o son pluralidades; por otro lado, si no es divisible, entonces no es infinito. Siguiendo con la hipótesis de que el infinito es una sustancia, entonces resulta no ser algo más que lo que es infinito, de lo se sigue que cualquier parte aparece ser infinita (si es que tiene alguna), es decir, será indivisible o será divisible en partes. Por lo tanto, el infinito no es divisible ni tampoco tiene partes. Esto no es aplicable para un infinito actual pues uno de éstos está limitado a ser cantidad. Por consiguiente, el infinito es un atributo y no una sustancia, lo cual rechaza la doctrina pitagórica.

Para él, un cuerpo infinito perceptible no puede existir. Admite que un cuerpo no puede ser ni compuesto ni simple. Es por esto que tiene un número finito de elementos, pero no puede ser compuesto porque los elementos opuestos se balancean. Se sigue que ningún cuerpo puede ser infinito no importando que la potencia de uno sea más grande que la de otro. Entonces, ninguno de cada par de elementos resulta ser infinito puesto que, dado que un cuerpo está extendido en todas direcciones, la dimensión de un cuerpo infinito es infinita, por lo que un cuerpo infinito podría estar extendido infinitamente en todas direcciones.

Considera necesario discutir los posibles significados del infinito. Uno de ellos es

para lo que no puede ser recorrido, simplemente porque no es del tipo de cosas que pueden serlo (como un sonido). Desde otro punto de vista, el infinito es lo que es capaz de ser recorrido, pero el proceso nunca acabará. O es lo que es capaz de ser recorrido, pero sólo con dificultad. O es el tipo de cosas cuya naturaleza es tal que puede ser recorrida, pero de hecho no es recorrida o limitada. Más

aún, cualquier cosa infinita, o es infinita en adición, por división o por ambas [Aristóteles 1995, 204^a2-7].

Por *infinito en adición*, lo que se entiende es que agregando continuamente la misma cantidad una y otra vez a una cosa, ésta no será exhaustible, lo cual equivale a decir que esa cosa es infinitamente extendida. Por otro lado, una cosa es *infinita por división* si es divisible infinitamente. Dadas estas dos concepciones, discutiré que nada puede ser infinitamente extendido aceptando posteriormente que algunas cosas son infinitamente divisibles. Aclara que hay un sentido en el que algo infinito por adición es lo mismo que algo que lo es por división: cualquier magnitud finita puede incluir una magnitud infinita por adición como un proceso inverso; si de una magnitud finita se toma una cantidad determinada y se suma no tomando la misma fracción del todo, sino una proporción de la parte restante, nunca se rebasará la magnitud finita, aunque si se incrementa la razón en la que se toma la parte, se rebasará esta magnitud puesto que toda cantidad finita es exhausta por la repetida sustracción de cualquier cantidad definida. Sin embargo, como algo infinito por adición no excede nunca a cualquier magnitud, sólo puede existir si ese algo es actualmente infinito, por lo que no puede existir (ni siquiera potencialmente); en el caso de algo infinito por división, dado que aquí las partes vienen a ser más pequeñas que cualquier magnitud y siempre queda algo más, la manera en que algo infinito por adición puede existir es como un proceso inverso de división. Es por esto que la única forma en la que el infinito puede existir es potencialmente y debido a un proceso de sustracción.

Considera como errónea la idea de que el infinito es “aquello que no tiene algo más allá de él mismo” [Aristóteles 1995, 206^b34], lo cual es infinito, tomando como algo más exacto “aquello que siempre tiene algo más allá de él mismo” [Aristóteles 1995, 206^b35]. Por lo tanto, una cosa es infinita si, para cualquier cantidad tomada, siempre se puede tomar algo más, puesto que cualquier cosa que no tenga algo más allá de sí misma es *completa* y es un *todo*.¹⁰ Dice que algo es completo si tiene un final, y como un final es un límite, entonces ese algo no sería infinito. Al respecto de esto, dice que el infinito no es lo mismo que el todo, pero que es preferible considerarlo como una parte del todo pues es necesario para completar a una magnitud.

Establece una diferencia entre cantidades y magnitudes: mientras que en los números se da el que haya uno más pequeño y en el incremento se rebase cualquier cantidad establecida, las magnitudes pueden rebasar a cualquiera cuando decrecen pero no cuando crecen; no puede haber magnitudes infinitas.¹¹ En cuanto al número, siempre se puede pensar en alguno más grande, tal como el número de veces en que se puede partir a la mitad a una magnitud, número que puede llegar a ser infinito; sin embargo, este infinito es potencial más no actual, pues el número de partes excede cualquier número. Con respecto a las magnitudes, lo que es continuo es dividido *ad infinitum* pero no hay infinito en la dirección del decrecimiento; como cualquier

¹⁰ Dice que de hecho esta es una definición de un *todo*, como algo que no tiene partes que le falten.

¹¹ Su razonamiento para sostener esto es que el número uno es indivisible y cualquier número es una pluralidad de unos.

magnitud de cualquier tamaño puede existir tanto potencialmente como actualmente, pero dado que no hay ninguna magnitud infinita perceptible, entonces no puede haber ninguna magnitud que exceda a cualquier magnitud específica, puesto que se podría concluir que “habría algo más grande que el universo” [Aristóteles 1995, 207^b20].

Expone cinco consideraciones del porque se infiere comúnmente que existe el infinito, exhibiendo después sus propios argumentos que lo conducen a rechazar la existencia del infinito actual:

Primera, está el hecho de que el tiempo es infinito. Segunda, está la división de magnitudes. Tercera, está la noción de que la única posible explicación para la persistencia de generación y destrucción, es que hay un origen infinito del cual cualquier cosa que es generada es sustraída.¹² Cuarta, está la idea de que siempre hay algo por el cual el infinito es limitado, de lo que se sigue que no puede haber un límite último, puesto que una cosa siempre debe ser limitada por otra. Pero por encima de todas, la consideración más convincente (porque nadie encuentra fácil el enfrentarla) es que el número y las magnitudes matemáticas y la región más allá de los cielos parece ser infinita porque no se dan en nuestro pensamiento. Y si la región más allá de los cielos es infinita, entonces parecería ser que el cuerpo¹³ debe ser también infinito (*i.e.* debe haber infinitos mundos) [Aristóteles 1995, 203^b15-25].

Sin embargo, dice que Anaxágoras sostenía que el infinito se fija a sí mismo en algún lugar puesto que está en él mismo, argumento que rechaza diciendo que cualquier cosa puede

¹² Al parecer esta tercer consideración está dirigida a Anaximandro.

¹³Aristóteles definirá un poco más adelante a *cuerpo* como *lo que es limitado por una superficie*, añadiendo que el no puede existir un cuerpo infinito, siendo éste perceptible o inteligible. Ver Aristóteles, 1995, 204^b4-5.

ser forzada a ocupar otro sitio en vez de su lugar natural; como el lugar no puede ser infinito, se sigue que no puede haber un cuerpo infinito.

Hacia el final del capítulo, Aristóteles va a responder a estos argumentos. “Primero, ..., no es necesario que haya un cuerpo perceptible actualmente infinito: en un universo finito, es perfectamente posible para la destrucción de una cosa el ser la creación de otra cosa” [Aristóteles 1995, 208^a8-10]; este párrafo responde al tercer argumento, dado en 203^b18-20. “Segundo, siendo infinito debe ser distinguido de estando en contacto. El contacto es relativo y es contacto *con* algo. Es cierto que el contacto puede ser un atributo coincidental de un objeto finito, pero no hace relativo al objeto finito. Tampoco es posible el contacto entre nada y todo” [Aristóteles 1995, 208^a11-13]; aquí responde al cuarto argumento expuesto en 203^b20-22. “Tercero, es absurdo confiar en lo que puede ser pensado por la mente humana, puesto que sólo está en la mente, no en el mundo real, que cualquier exceso y defecto existen [...] se tiene que ser de hecho, y es meramente coincidental que alguien esté pensando en ello” [Aristóteles 1995, 208^a14-19]; esta es la respuesta al argumento más importante para él, el quinto, dado en 203^b22-30. “Cuarto, el tiempo (como el cambio y el pensamiento) es infinito, pero en el sentido de que cualquier parte dada de él no persiste” [Aristóteles 1995, 208^a20]; se contrargumenta al primero que aparece en 203^b16-17. “Quinto, ni la sustracción ni el incremento imaginado hace infinita a una magnitud” [Aristóteles 1995, 208^a21]; se refiere al segundo argumento expuesto en 203^b17-18. Con estos contrargumentos, Aristóteles afirma

que es lo último que tiene que decir acerca de, tanto de la existencia (o su inexistencia) de la infinidad y de ella misma.

1.1.5 LA GEOMETRÍA

Aristóteles decía que los matemáticos no necesitaban al infinito, pues bastaba con tomar una línea de la longitud requerida, y añadía que ni siquiera lo usan. Argumentaba que cualquier magnitud puede ser dividida en la misma razón como se podría dividir una magnitud arbitrariamente grande, por lo que no importa si la magnitud que se toma es una de las que existen actualmente.

Los pitagóricos identificaban al infinito con los números pares puesto que cada uno de ellos está limitado y encerrado por un número impar haciendo las cosas infinitas. Como ejemplo de esto tomaban a los 'gnómones sucesivos', los cuales, puestos alrededor de la unidad producen una figura uniforme, mientras que si se emplazan fuera de ella producen una diversidad.

Dada la naturaleza contradictoria del infinito, se tornó necesario intentar erradicarlo de las matemáticas. Se pretendía actualizar al infinito, removerle la negatividad de su naturaleza potencial. Uno de los primeros intentos fue llevado a cabo por Zenón, mientras que otro fue realizado por Antifón. Este último fue uno de los primeros en atacar uno de los *tres problemas*

clásicos de la antigüedad, así como también fue de los primeros en utilizar el *método de exhaustión*. Creía poder hallar un cuadrado cuya área fuese igual que la de un círculo, pues un arco mínimo de circunferencia sería indistinguible de un segmento mínimo de recta. Es posible inscribir un polígono regular con un número arbitrariamente grande de lados en un círculo, aparte de que es también posible construir un cuadrado cuya área sea igual a la de cualquier polígono regular. Si el número de lados del polígono aumenta indefinidamente, cada lado se aproxima al lado subtense, con el resultado de que el área comprendida entre el polígono y la circunferencia se reduce hasta un tamaño arbitrariamente pequeño, es decir, la diferencia de áreas es exhaustible. Entonces, es posible identificar a un polígono con un círculo de tal modo que sus lados pueden considerarse arcos de circunferencia. Por lo tanto, dado que es posible construir un cuadrado con área igual a la de cualquier polígono regular y también es factible construir un polígono cuyos lados se identifiquen con una circunferencia, la cuadratura del círculo es posible.

No obstante, el número de polígonos inscritos en la circunferencia es un conjunto ilimitado puesto que para cualquier polígono con un número arbitrariamente grande de lados sumamente pequeños, existe otro polígono con lados aún más pequeños, el cual, sin embargo, no se identificará con la circunferencia porque existe un polígono sucesivo. Si se admite que existe un polígono que se identifica con la circunferencia, entonces se reconoce implícitamente una infinidad actual de polígonos, lo cual es absurdo, pues el $\alpha\pi\epsilon\iota\omega\nu$ resultaría ser un infinito actual, lo cual es contradictorio con respecto a su naturaleza negativa y potencial. En lugar de introducir el concepto de actualidad, bastaría con admitir que es posible hallar un polígono

sucesivo a otro con lados más pequeños, o que es posible reducir el área entre un lado del polígono y la circunferencia a un número arbitrariamente pequeño. En el proceso llevado a cabo por Antifón, también comienza a introducirse el concepto de *límite*, pues la circunferencia de hecho es uno tal que encierra a toda la sucesión ilimitada de polígonos pero no es término de la sucesión; sin embargo, no se renuncia al carácter de potencialidad intrínseca del conjunto.

Por otro lado, Hipócrates demostró un teorema que se refiere a la proporcionalidad de los círculos a los cuadrados de los respectivos diámetros; sin embargo, no es muy claro qué método utilizó. Euclides demuestra la misma proposición en (XII, 2) utilizando el método de exhaustión propuesto por Eudoxo, aunque no utiliza la llamada propiedad arquimediana, sino que utiliza lo que él mismo demuestra en (X, 1).¹⁴ En su obra *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes enuncia, por primera vez en el postulado (5), que “para las líneas distintas, para las superficies distintas y para los sólidos distintos, una magnitud mayor que otra menor, la menor sumada a sí misma¹⁵ podrá superar cualquier magnitud dada, para aquellas que son comparables entre sí”¹⁶ [Arquímedes 1897, p. 4]. Este mismo hecho lo vuelve a postular de

¹⁴ Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada” [Euclides 1996, p. 12].

¹⁵ Esto se debe tomar como repitiendo cualquier número de veces, es decir, multiplicando por un número natural.

¹⁶ Dijksterhuis muestra que en las distintas versiones del texto, en esta última parte ha habido grandes diferencias. Sin embargo, sugiere que, en general, apuntan hacia las definiciones 3 y 4 del libro V de los *Elementos* de Euclides, las cuales dicen (3) “Una razón es una determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas” [Euclides 1994, p. 9] y (4) “Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra” [Euclides 1994, p. 10].

manera casi análoga en los prefacios de dos obras, *Sobre espirales* y *Cuadratura de la parábola*. Él mismo asegura que geómetras anteriores utilizaron el postulado para probar el teorema demostrado por Hipócrates, así como que el cono es la tercera parte del cilindro y la pirámide es la tercera parte de un prisma, teniendo en ambos casos bases equivalentes y alturas iguales. Estos últimos teoremas se los atribuye a Eudoxo en el prefacio de *El método* [Arquímedes 1988, p. 35], sin embargo, aclara que ya Demócrito los había enunciado aunque no los había demostrado. Es por esto que se sugiere que fue el mismo Eudoxo quien lo formuló por vez primera.

Al parecer, Eudoxo también quería evitar el uso indiscriminado del infinito. En el citado postulado, se niega la existencia de, por lo menos, magnitudes infinitamente pequeñas puesto que cualquier múltiplo de una cantidad con estas características no supera a la misma. Cabe decir que en las demostraciones por exhaustión de Eudoxo, el concepto de infinito está presente, aunque no lo está en forma explícita.

En el prefacio de su texto *El contador de arena*, Arquímedes reporta algunos conceptos erróneos relativos al infinito y sobre números muy grandes (como que el número de granos de arena es infinito, o que puede haber un número demasiado grande para poder expresarlo). Posteriormente, presenta resultados cosmológicos, astronómicos, geométricos y aritméticos para mostrar que su postura es correcta [ver Knorr 1989, p. 737].

En Euclides, sin embargo, de hecho sí se nombra y trabaja con rectas ilimitadas. La definición 23 del libro I de los *Elementos* envuelve explícitamente un proceso ilimitado: “Son

rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas *indefinidamente* en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos” [Euclides 1991, p. 196]. No obstante, no se puede decir que está designando a una región como infinita, sino que está tomando a lo indefinido como una propiedad. Lo mismo puede apuntarse para el famoso postulado (5) del mismo libro, puesto que se incluye la definición de rectas paralelas.¹⁷ Los postulados (2) y (3), dicen respectivamente, “[Postúlese] el prolongar continuamente una recta finita en línea recta” [Euclides 1991, p. 197] y “describir un círculo con cualquier centro y distancia” [Euclides 1991, p. 197]. Se puede pensar que estos dos postulados conllevan a la idea de un espacio continuo e infinito, puesto que en (3) no se restringe de modo alguno el tamaño del círculo, así que puede ser tanto infinitamente grande como infinitamente chico; sin embargo, al trabajar con figuras perfectamente limitadas, Euclides no proporciona propiedades abstractas del espacio. La noción común (8) dice que “El todo es mayor que la parte” [Euclides 1991, p. 201], la cual, al parecer, está incluida, entre otras cosas, para evitar posibles paradojas como la del *estadio* de Zenón, pues es factible el llegar a conclusiones del estilo de que el doble es igual a la mitad. Cabe anotar que esta noción común deja entrever una ‘cierta’ concepción finitista de Euclides, puesto que no es válida para ‘agregados infinitos’.

¹⁷ “[Postúlese] que si una línea recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas *indefinidamente* se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos” [Euclides 1991, pp. 197-198; el subrayado es mio].

La proposición (I, 12) afirma lo siguiente: “Trazar una línea recta perpendicular a una recta *infinita* dada desde un punto dado que no esté en ella” [Euclides 1991, p. 215]. En esta proposición, la recta considerada es explícitamente infinita en acto pues no trata con una recta infinitamente prolongable sino una recta infinita dada. A la recta infinita también la usa durante la demostración, puesto que, si se supone que la recta no es infinita, al proponer un punto fuera de la línea, tendríamos tres casos: (i) el punto está, sin pérdida de generalidad, ‘encima’ de la recta dada; (ii) el punto está en dirección de la recta y; (iii) la perpendicular del punto a la recta no interseca a ésta. Para salvar al infinito actual de la recta, hubiera bastado con tomar a un punto como en (i) o en considerarla como prolongable hasta donde fuera necesario. Pero no es el caso. Para Euclides, ‘un punto dado’ es considerar, en realidad, ‘un punto cualquiera en el plano’, con lo cual la hipótesis de una recta infinita se torna necesaria.

Sin embargo, no se puede concluir tan fácilmente que la concepción del infinito de Euclides se inclina hacia la actualidad, más que la potencialidad. En la proposición (IX, 20) se dice que “hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos” [Euclides 1994, p. 226]. Lo que afirma esta proposición, es que el conjunto de números primos es infinito. Pero no está hablando de un conjunto actualmente infinito, puesto que no especifica que es infinito (como en el caso explícito de (I, 12)), sino que considera a un número primo preasignado, lo cual conduce a considerar al conjunto de números primos como *potencialmente* infinito.

1.2 LA CAÍDA DEL IMPERIO Y LA SEGUNDA RUPTURA.

1.2.1 ARISTÓTELES EN LA EDAD MEDIA

Ya situados en la Edad Media, el aristotelismo sigue presente en las discusiones filosóficas. A pesar de que sus doctrinas fueron, incluso en su tiempo, discutidas y objetadas, en el medioevo Aristóteles seguía siendo considerado como una autoridad. Su legado fue sumamente importante, por lo que no resultaba fácil polemizar con las ideas que él manejó.

Avicenna consideraba que la imposibilidad de una multitud infinita actual no era absoluta, restringiéndose a la multitud de objetos que ocupan un lugar. Según él, éste era un principio reconocido por los filósofos sin importar que los objetos bajo consideración fuesen cuerpos o no. Sostenía que la existencia de un infinito actual permitiría que pudiera haber un infinito más grande que otro. Sin embargo, a pesar de que Avicenna permite la existencia de un infinito actual, éste no debe de ser siempre posible. No obstante, las razones esgrimidas para sostener sus argumentos son siempre metafísicas. Siguiendo las proposiciones de Avicenna, al-Gazali las retomó y las compiló para formar un sistema, en el cual, dice que hay cuatro modos en los que el ser es infinito, dos de los cuales no existen. Una de éstas es que se dice que hay un cuerpo infinito o un espacio infinito de la cima al fondo; pero esto es falso. Probablemente para conciliar con la filosofía de Avicenna, al no dar razones por la existencia o inexistencia del ser infinito, dice que es falso puesto que para éste, el mundo es finito. Sin

embargo, al-Gazali posteriormente niega la existencia de un infinito actual dando como razón que, si el mundo no tuvo un inicio, entonces las revoluciones del sol han sido infinitas así como las de Saturno; no obstante, el primer número sería al segundo en una proporción inversa a la proporción entre los períodos de revolución de los dos. De lo que se sigue que dos números infinitos tendrían una proporción determinada, lo cual es contradictorio.

1.2.1.1 SANTO TOMÁS

En la Teoría de Conjuntos actual, la definición de conjunto se considera como primitiva, es decir, como algo intuitivo y sin necesidad de ser explícitamente definido. Sin embargo, santo Tomás de Aquino formuló una definición de 'conjunto' seis siglos antes que Cantor.¹⁸ Para Santo Tomás, un conjunto es un agregado de unidades cada una de las cuales es distinta de las demás. No obstante, los conjuntos de santo Tomás no son entes surgidos de las necesidades matemáticas, sino metafísicas. Por otro lado, estos conjuntos no son considerados como actualmente infinitos puesto que si se pudieran concebir todos los elementos de un conjunto infinito, formando así una totalidad actualmente definida, podrían contarse cada uno, de lo que se sigue que el conjunto sería finito arribando así a una contradicción, pues el conjunto en

¹⁸ Cantor define a un conjunto como "colección dentro de un todo M de objetos m definidos y separados de nuestra intuición o nuestro pensamiento" [ver Cantor 1895, p. 85].

consideración era infinito. Además, Santo Tomás niega la existencia de un infinito absoluto fuera de Dios.

Sin embargo, Santo Tomás evitó dar una respuesta a la pregunta de la existencia del infinito actual; simplemente le atribuyó a Dios la posibilidad de crearlo. Sostenía que Dios era capaz de crear cualquier cosa siempre y cuando esta creación no llevara a contradicciones. Reconoce que hubo quienes sostenían que ni el infinito absoluto ni el infinito accidental podían existir actualmente; el segundo podía existir en potencialidad, pero no así el primero.

Santo Tomás ya no sigue al pie de la letra a Aristóteles, pues comenta acerca de la infinitud, eternidad e incircunscribibilidad de Dios. Para él, la naturaleza del infinito remite a la idea de forma o a la idea de materia. Ésta última corresponde al *ἄπειρον* de Aristóteles, mientras que la primera se puede tomar para hablar de la infinitud de Dios; podemos apuntar que la diferencia entre estos dos infinitos es la misma que hay entre el infinito potencial y el actual. No obstante, el infinito remitente a la idea de forma no puede existir pues toda potencialidad se ve rectificadada por un confín que le impone el principio formal; por otro lado, el otro infinito no es perfectamente ubicable en el mundo de las formas creadas, puesto que éstas son limitadas por la materia que les confiere individualidad, mientras que si se les permite aumentar ilimitadamente ya no es un atributo del objeto, por lo que es factible la identificación con la divinidad.

En su concepción, hay dos tipos de infinitos, a saber, el 'simpliciter' que sólo le pertenece a Dios y nada más, y el 'infinitus secundum quid', un infinito de manera relativa, es decir,

conforma a su naturaleza específica. Con esta segunda opción se deja abierta la posibilidad de existencia de alguna infinitud fuera de Dios.

Admite que los matemáticos utilizan al infinito pero está de acuerdo con Aristóteles en que no es necesario. También considera que la superficie de los objetos y su figura geométrica son los límites de la potencialidad ilimitada de todo ente material. Con respecto a la división de los cuerpos, si la división del continuo se realiza en la misma proporción se puede acceder al infinito, no así si la división se hace en partes iguales. Toda cantidad es especificada como una determinación cuantitativa, por lo que las magnitudes son especificadas por algunas medidas. La imposibilidad de la existencia de un 'conjunto' actualmente infinito se debe a la finitud del número, considerado éste último como instrumento de medida. El agregado es contado por unidades enumerando las unidades singulares e indivisibles que lo constituyen, teniendo como límite a la última unidad. Por lo tanto es imposible encontrar una magnitud en actualidad no delimitada por sus propios términos.

Para Santo Tomás el infinito consigue una magnitud sólo por la supresión de todos los términos; es por esto que se dice que una magnitud es infinita. De lo cual se sigue que es imposible que un infinito actual exista.

1.2.2 DIVISIBILIDAD INFINITA

La teoría del infinito fue estructurada de mejor manera con el estudio de lo infinitamente pequeño y de la divisibilidad infinita del continuo. Los oponentes al atomismo propuesto por Leucipo y Epicurio pretendieron negar a esta teoría por medio de argumentos geométricos llegando a conclusiones contradictorias con las matemáticas. Al parecer, el iniciador de esta corriente fue Roger Bacon quien afirmó que, bajo la suposición de que las líneas estuvieran compuestas de átomos, la diagonal de un cuadrado y su lado tendrían la misma proporción como el número de todos los átomos que componían estas longitudes; de esto se sigue que las longitudes serían conmensurables arribando a una contradicción.

En el mismo tenor, Duns Scoto distinguió entre dos versiones de la teoría que quería refutar. Una de ellas decía que el continuo estaba compuesto de *indivisibles*,¹⁹ átomos discontinuos separados unos de otros; la otra afirmaba que el continuo estaba compuesto de *mínimos* pegados continuamente. Si se toman círculos concéntricos, éstos son intersecados por cualquier radio, por lo que todos los círculos deben de tener el mismo número de átomos y, por lo tanto, todos los círculos resultan ser iguales. Gregorio de Rimini siguió la misma línea al embestir las teorías que pretendían construir magnitudes continuas por medio de un número limitado de indivisibles.

¹⁹ También afirmó que los indivisibles no eran más que la falta de continuidad.

Thomas de Bradwardine, en su *Tractatus continui*, tampoco estuvo de acuerdo con aquellos que construían un continuo finito por medio de un número limitado de elementos indivisibles contiguos, así como a los que construían este continuo a partir de un número limitado de puntos separados. También rechazó las visiones del continuo como composición de una infinidad actual existente de puntos.

John Buridan no aceptó tampoco la tesis de que las magnitudes continuas estén compuestas de indivisibles. Sin embargo, no toma a la geometría como algo absoluto; no porque la tesis arriba referida contradiga a los axiomas y teoremas de la geometría tiene que ser verdadera. La toma como un postulado que los geómetras deben tener en cuenta para que la construcción de la geometría sea posible.

En términos mucho más apegados a la lógica y a la precisión del lenguaje, William de Ockham discute que una línea es finita y, bajo el supuesto de que un punto es algo positivo e indivisible y que termina a la línea actualmente aún sin pertenecer a ella, estos extremos no aportan absolutamente nada por la finitud o infinitud de tal línea. Dice que no se debe considerar al punto con tales características. Y esto también se debe a que, del mismo modo que se considera al punto como extremo de una línea, la línea será terminación de una superficie y la superficie la terminación de un cuerpo; se sigue entonces que cada cuerpo tendría una superficie cuya profundidad sería indivisible y la contendría como una terminación *extrínseca* al cuerpo, lo cual es absurdo.

Gregorio de Rimini argumenta también en contra de los que consideran a los puntos como terminación de una línea. Sin embargo, sus argumentos se van más por la vía de la existencia de tales puntos; dice que tal afirmación no es necesaria para que una magnitud sea continua. Agrega que las líneas, superficies y cuerpos pueden ser considerados como magnitudes reales actualmente existentes fuera de la mente; no obstante, también se pueden tomar como magnitudes ficticias o imaginarias o imágenes de magnitudes que la mente imagina a través de su intelecto. Ninguna verdad geométrica requiere de la existencia de puntos o indivisibles fuera de la mente.

Buridan también entra a la discusión de la teoría de los indivisibles: si se considera que las superficies son a los cuerpos, como las líneas a las superficies y los puntos a las líneas, entonces, si no se considera a los puntos indivisibles, tampoco se debe considerar a las líneas y superficies como indivisibles en superficies y cuerpos, respectivamente. También argumenta en contra de la indivisibilidad de los puntos: un punto es infinitamente pequeño porque indefinidamente hay una terminación,²⁰ una primera o una última parte del continuo. Dentro de su geometría, estima que hay una infinidad de puntos en una línea debido a que hay una infinidad de partes de una línea, cada una de las cuales tiene una primera y una última parte. Para Buridan, demostrar que el continuo no está compuesto de indivisibles, por cualquier método que sea utilizado, es tarea que les corresponde a los matemáticos y a nadie más.

²⁰ Bajo la consideración de que un punto es terminación de una línea.

1.2.3 LA ACEPTACIÓN DEL INFINITO ACTUAL

Poco a poco se comienza a aceptar la posibilidad de un infinito actual. Nicolás Bonet escribió al respecto que “la posibilidad de un infinito actual no parece sostener ninguna contradicción a los filósofos modernos” [Duhem 1985, p. 104]. Distingue entre dos modos de entender el infinito actual; el primero de ellos es que no hay tantos objetos que no puedan existir más, mientras que el segundo es que hay tantos objetos en actualidad que no puede haber más, puesto que están colocados en actualidad. No obstante, Bonet dice que lo que es válido para un número finito de objetos se puede extender para una infinidad actual de objetos de la misma especie. Este axioma, postulado por Aristóteles en el sentido de que un infinito potencial requiere de uno actual y por tanto no existe, Bonet lo utiliza para concluir la posibilidad de un infinito actual a partir de la posibilidad de un infinito potencial. Afirma que si una multitud infinita de cantidades finitas es posible, una magnitud infinita también lo es.

1.2.4 RELACIONES DE ORDEN ENTRE MAGNITUDES

Mientras que Santo Tomás y Henry de Gent estaban de acuerdo con Aristóteles en que no sólo una magnitud infinita actual es imposible sino también una magnitud infinita potencial, para Richard de Middleton la imposibilidad de una magnitud infinita actual conlleva la imposibilidad

de una multitud infinita actual. También sostiene que cualquier magnitud continua es infinitamente divisible, en el sentido de ser divisible sin término alguno, aunque el número de partes siempre será finito, por lo que no habrá posibilidad de concebir la existencia de un infinito *in fieri*.²¹ Para él, Dios puede crear una magnitud infinita, al menos en potencia. A pesar de que William de Ockham también acepta la posibilidad de una magnitud infinita *in fieri*, niega la posibilidad de magnitudes o multitudes infinitas *in facto esse*.

Duns Scoto sostenía que los atributos de “*igual, mayor, y menor*, no son convenientes para cantidades grandes a menos que sean finitas” [Duhem 1985, p. 89]. Continúa diciendo que “de hecho, antes de que uno pueda aplicar las palabras igual o desigual a una cantidad, uno tiene que dividirla en una cantidad finita y una cantidad infinita. La razón por la cual una cantidad es más grande que otra recae en el hecho de que la excede, mientras que la razón de igualdad yace en el hecho de que tienen la misma medida. Todo indica que esto concierne únicamente a magnitudes finitas. Por consiguiente uno debe negar que una infinidad puede ser igual a otra infinidad; *más* y *menos* también designan diferencias entre cantidades finitas, y no entre cantidades infinitas” [Duhem 1985, p. 89].

En el mismo tenor, Franciscus de Mayronis afirma que tanto el igual y el desigual son propiedades características de las multitudes finitas, siendo el mayor y el menor dos especies de desigualdades, por lo que ni el igual ni el desigual pueden pertenecer a multitudes infinitas; para

²¹ Richard de Middleton lo define como un infinito en actualidad mezclado con potencialidad.

él, todas las multitudes infinitas son de la misma especie. Considera que las magnitudes continuas pueden ser subdivididas en magnitudes continuas finitas e infinitas; sin embargo, las propiedades de las magnitudes finitas no deben ser atribuidas a magnitudes infinitas. Por otro lado, sólo las magnitudes continuas finitas pueden tener lugar, forma y movimiento. Por último, afirma que Dios no puede de golpe dividir un continuo en una infinidad de partes; esta infinidad la considera como una infinidad sucesiva.

De Mayronis había definido una magnitud infinita como aquella que sobrepasa cualquier magnitud finita. Por su cuenta, John de Bassols define a una cantidad infinita actual como la que sobrepasa cualquier magnitud determinada; dada una cantidad de determinada medida, se puede dar otra más grande, es decir, se puede dar una cantidad infinita actual. Bassols, con respecto a la doctrina de que un infinito no puede ser mayor que otro de la misma especie, sostiene que no hay dificultades siempre y cuando la infinidad considerada no sea absoluta [*simpliciter*]. Pone el ejemplo de una línea sin terminación por ambos lados y otra limitada por uno de ellos e ilimitada por el otro; la primera será más grande que la segunda.

Bassols se encuentra entre los filósofos que querían negar una magnitud infinita actual y un número infinito actual; entre ellos, era casi generalizado que la imposibilidad de este infinito se debía a la imposibilidad de una división infinita actual de una magnitud finita. Esta imposibilidad conlleva la imposibilidad de una magnitud infinita actual.

Gregorio de Rimini ya considera a una magnitud infinita categoremática como una *magnitud transfinita*, más grande que cualquier cantidad finita no importando cuan grande.

Definice *todo* y *parte* distinguiendo dos sentidos: en el primero, cualquier cosa que contiene a otra es un todo con respecto a la segunda, y cualquier cosa contenida en el todo se considera como *parte* del todo en el cual está contenida; en el segundo sentido, una cosa es un *todo* con respecto a otra si contiene a un determinado número de cosas de determinada magnitud no contenidas dentro de lo que es incluido, y del mismo modo, algo incluido es *parte* de un todo cuando no contiene un número de cosas determinadas de magnitudes determinadas que son contenidas dentro de lo que es contenido.²²

Para Rimini, una magnitud, en un primer sentido, es un todo con respecto a otra cuando la primera contiene a la segunda y cuando contiene objetos todos distintos. En este sentido, una multitud infinita puede ser parte de otra con las mismas características. En el otro sentido, para que una multitud sea un todo con respecto a una segunda, debe contenerla en el modo antes descrito. Aparte de esto, debe de contener un número determinado de cosas de determinada magnitud²³ que no están contenidos en la multitud contenida; ésta última es la *parte*. Agrega que en este segundo modo, una multitud infinita no puede ser *todo* o *parte* a la vez; no hay un número determinado de grupos de tales unidades contenidas en sólo una de las multitudes, pues cada uno de ellos contiene un número infinito de grupos de tales unidades o una infinidad de tales grupos en los que se puede contar una infinidad de unidades.

²² Si se toma al todo y a la parte en el segundo sentido, también lo son en el primero. Sin embargo, el inverso no resulta ser cierto.

²³ Esto es, que un número determinado de grupos de objetos tales que la cantidad de cada grupo esté determinada.

Una multitud es *más grande* que otra cuando tiene un número de unidades mayor que el de la otra. Del mismo modo, *más chico* se define para una multitud con un número de unidades menor que el de la otra. Sin embargo, Rimini también distingue dos sentidos: el primero de ellos es que si una multitud contiene a todas las unidades de otra, además de otras más, se dice que es más grande, aunque no contenga un *número más grande* de unidades que la otra multitud; en el segundo sentido, una multitud es más grande que otra si la contiene, lo que quiere decir que es un *todo*.²⁴ Sin embargo, si en esta distinción de *más grande* y *más chico* se toma la primera, entonces no se puede usar para comparar infinitos pues ésta sólo sirve para comparar magnitudes finitas. No obstante, sí se puede decir que un infinito es más grande que una magnitud finita y que ésta última es más chica que lo primero. Rimini considera que si se toma el segundo sentido, entonces sí se puede decir que un infinito es más grande que otro, del mismo modo que puede ser un todo con respecto al segundo infinito.²⁵

1.2.5 DE CUSA, COPÉRNICO Y BRUNO: LAS ÚLTIMAS PALABRAS

Es con el pensamiento de Nicolás de Cusa que comienza la apertura de una nueva era. Comienza el derrumbe de las ideas y del 'oscurantismo' presentes en la Edad Media. Podemos

²⁴ Un *todo* en el primer sentido.

²⁵ Que algo sea más grande que otra cosa en cualquiera de los dos sentidos no implica que lo sea en el otro.

decir que la revolución científica, al menos desde el punto de vista cosmológico, la comienza el mismo De Cusa, continuando con *Sobre las revoluciones* de Copérnico y culminando con Giordano Bruno.

Nicolás de Cusa dice que

Es imposible que haya máquina mundana, ya sea tierra sensible, o el aire o el fuego, o cualquier cosa, como centro fijo e inmóvil con relación a los varios movimientos de los orbes. Pues no se llega en el movimiento mínimo absoluto, tal como un centro fijo porque es necesario que el máximo y el mínimo coincidan. El centro del mundo, en este caso, coincidiría con la circunferencia. Pero no tiene el mundo una circunferencia, y tuviera de este modo dentro de él mismo su principio y su fin, él mismo estaría limitado por otra cosa, y habría fuera del mundo, otro [De Cusa 1440, p. 150].

El universo presentado por De Cusa es un universo infinito. La Tierra no puede estar en el centro del universo, pues éste último es una esfera infinita con centro en todas partes y circunferencia en ninguna. Ya no es sostenible la tesis ptolemaica de que la Tierra está inmóvil en el centro del mundo; De Cusa la pone en movimiento, aunque no especifica que tipo de movimiento debe de atribuírsele, aún cuando se argumenta que no es ni el movimiento diario alrededor de su eje, ni es el giro anual en torno al sol; presumiblemente, este movimiento es un giro alrededor de un centro no tan fácilmente ubicable, el cual se desplaza continuamente. Es hasta el libro de Copérnico en que este movimiento es precisado; pero no es uno sólo, sino que son tres: la revolución diaria, el movimiento anual del centro y el movimiento de declinación. Para De Cusa, el movimiento es esencial pues es lo que conecta la forma y la materia, además de que cualquier cosa que se encuentra en el universo está formada por la potencia, el acto y el

movimiento. Dice que “la Tierra no puede ser el centro, no puede carecer de movimiento, pues es necesario que ésta se mueva de tal manera que siempre infinitamente sea posible que se mueva aún menos” [De Cusa 1440, p. 151].

Usualmente, se sugiere que Nicolás de Cusa fue el primero en proponer la infinitud del universo. Afirma que se pueden distinguir un infinito negativo y uno privativo; el primero de ellos es lo absolutamente máximo puesto que sólo Dios lo puede ser con toda potencia. Pero el universo comprende todas aquellas cosas que no son Dios, es decir, no puede ser infinito negativamente, aunque carezca de límites, y es, entonces, infinito privativamente. El universo es ilimitado, pues no hay algo mayor que él en acto. Este universo precedió a todas las cosas pues si no hubiera sido de esa forma, cualquier cosa podría estar en cualquier otra.

Cabe aclarar que el universo que plantea de Cusa no es precisamente infinito. La *infinitud* está reservada para Dios y sólo para él. Entonces, aunque el mundo no es infinito, no puede concebirse como finito, pues carece de límites entre los que está comprendido. Por lo tanto, el universo no es infinito sino indeterminado. Es precisamente por esta indeterminación que la Tierra no puede ser el centro del mundo, ni la esfera de las estrellas fijas, así como tampoco cualquier cosa en su circunferencia, aunque la Tierra parezca estar más próxima del centro. De Cusa niega la existencia de algún centro de cualquier cosa en el universo, pues de existir, significaría que es equidistante de todos los puntos que están sobre la circunferencia, pero la equidad sólo se da en Dios.

Ya Buridan y Oresme se habían planteado cuestiones concernientes con los límites del universo y del movimiento de la Tierra, preguntas retomadas por el mismo Nicolás de Cusa. Posteriormente aparece el *Sobre las revoluciones* de Copérnico donde se asientan las bases matemáticas para la teoría heliocéntrica y del movimiento de la Tierra. Sin embargo, según Guevara, “el primer intento por hacer una defensa articulada del modelo copernicano [...] así como la primera incursión para complementarlo y fundamentarlo, se dio con Giordano Bruno en *La Cena de las Cenizas*” [Guevara 1996, pp. 12-13]. Bruno pone especial atención a los trabajos de Oresme y de Cusa, retomando el cosmos indeterminado y la pluralidad sin jerarquías, respectivamente, para llevar al universo a un infinito en acto. En palabras de Guevara, para Giordano Bruno el infinito es ya una necesidad; el sistema propuesto por él ya no es un simple ajuste de los anteriores. Con el mismo Bruno, la influencia de Aristóteles comienza a perder fuerza pues en su tratado *Del universo infinito y los mundos* cita recurrentemente al mismo, con lo cual, “no cabe duda que el principal punto de oposición entre Bruno y Aristóteles es el infinito” [Guevara 1996, p. 15]. Bruno ya no defiende la idea aristotélica del universo sin posibilidad alguna de expansión, puesto que ya para él se justifica la necesidad del cosmos como un infinito actual.

Cabe destacar que Bruno distingue dos infinitos, a saber, el de Dios quien es *todo infinito*, y el del universo que es todo dentro de todo, lo cual conduce a que uno es infinito y el otro cubre a sus partes en su totalidad. Para él, lo que no tiene límites es un *todo infinito*, mientras que aquello cuyas partes son finitas, pero que en su totalidad forman una infinitud,

es un *totalmente infinito*. Sin embargo, Dios es el único que puede ser a la vez *todo infinito* y *totalmente infinito* pues no tiene límite alguno y está en todo el mundo y en cada una de sus infinitas partes; por otro lado, el universo es infinito en su totalidad pero no en sus partes.

Es con ellos tres, Nicolás de Cusa, Nicolás Copérnico y Giordano Bruno, que el pensamiento aristotélico comienza a perderse como auténtica autoridad científica; los sistemas cosmológicos también cambian dejando de lado el propuesto por Ptolomeo. Es así que el ‘imperio científico’ que los griegos habían conformado comienza a derrumbarse. Una de las grandes revoluciones científicas comienza a llevarse, por fin, a cabo. Este gran esfuerzo por dejar en el pasado ideas ‘añejas’ no es en vano. Todavía faltaba quien diera la última pincelada; entonces, es así como llegamos al gran genio pisano, Galileo Galilei.

*Yo soy un hombre sincero,
sin cero y sin infinito.*
Joaquín Sabina.

2 EL INFINITO EN LAS MATEMÁTICAS GALILEANAS

En una de sus grandes obras, *Il Saggiatore*, Galileo dice que

la filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos, y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto [Galilei 1623, p. 61].

Es claro que la matemática es la piedra angular del pensamiento galileano. No es posible intentar comprender a la naturaleza si no se conocen las matemáticas, puesto que “[...] todas las leyes de la mecánica tienen sus fundamentos en la geometría” [Galilei 1634, p. 68 [50]], además de que Galileo da por supuesto que “la materia es inalterable; es decir, siempre la misma, es evidente que de ella pueden deducirse demostraciones no menos que de las puras y abstractas matemáticas” [Galilei 1634, pp. 69-70 [51]]. Agrega que “[...] en cuanto a la verdad de la que nos dan conocimiento las demostraciones matemáticas, es la misma que conoce la sabiduría divina” [Galilei 1632, p. 93 [129]], poniendo al mismo nivel a las matemáticas y a las sagradas escrituras.

Galileo ya no se preocupa tanto por el aspecto filosófico del infinito. Para él, es una herramienta más que un buen tópico de discusión. Lo utiliza en sus demostraciones sin preguntarse qué tipo de infinito es. Un buen ejemplo de esto es que Galileo utiliza planos infinitos en su demostración del movimiento de la Tierra; supone que hay un plano inclinado y coloca una esfera pesada y también supone que no hay fricción, de donde se deduce que si el plano es infinito, entonces la esfera se movería infinitamente [ver Galilei 1632, p. 129 [172]]. Sin embargo, dedica muchas páginas de los *Discorsi* para demostrar un hecho sobresaliente: una línea recta está compuesta de infinitos indivisibles.

2.1 ¿INFINITO?

“Mucho, poco o nada son la misma parte del infinito (porque para llegar, por ejemplo, a un número infinito tanto da acumular miles de decenas o ceros)” [Galilei 1632, p. 91[127]]. Agrega que “... una parte del infinito no es mayor que otra si ambas son finitas; como tampoco puede decirse que el cien mil sea una parte mayor del infinito que el dos, aunque aquel es cincuenta mil veces más grande que éste”[Galilei 1632, p. 110 [149]]. Es evidente que entiende lo que implica el infinito pues con estas afirmaciones, Galileo está negando claramente la noción común 8 del libro 1 de Euclides: “El todo es mayor que la parte”, lo que lo llevará a concebir

una definición de ‘conjunto infinito’ tal como la dio Dedekind¹ algunos siglos después; más que una definición será una concepción de ‘conjunto infinito’ pues en ninguna parte Galileo define lo que es esto y mucho menos utiliza la palabra conjunto. Por otro lado, sabe que nunca se llega al infinito pues da lo mismo sumarle a algún número cualquier cantidad y, no obstante, parecería ser que esta afirmación indica el carácter que al infinito da Galileo; parecería preferir al infinito potencial.

Pero éste no será el tono de la discusión en general. En ocasiones utilizará al infinito en sus demostraciones, mientras que en otras simplemente se referirá a él como una propiedad de los ‘objetos’² matemáticos. En un cierto pasaje, Salviati dice que es más fácil encontrar en la naturaleza dos cuerpos que se toquen en un solo punto a otros que se toquen en una parte de su superficie, pues para que sucediera lo contrario, se requeriría que uno de los cuerpos fuera convexo y el otro cóncavo; pero dice que es más difícil que se den estas condiciones por ‘su absoluta determinación’, mientras que en las otras es más fácil que sí lo hagan debido a que por “su amplia indeterminación son infinitas” [Galilei 1632, p. 181 [234]; ver además pp. 177-181 [230-235]. En otro pasaje, Salviati dice: “... en la aprensión de los números, cuando se empieza a pasar los miles de millones la imaginación se confunde y no puede ya formar concepto alguno,

¹ “Se dice que un sistema S es *infinito* cuando es similar a una parte propia de él mismo; en caso contrario, se dice que S es un sistema *finito*” [Dedekind 1887, p. 63].

² En esta tesis no discutiremos el carácter ontológico de las matemáticas de Galileo.

así sucede también en la aprensión de tamaños y distancias inmensas” [Galilei 1632, p. 319 [394]].

2.2 EXTENSIONES CONTINUAS

Galileo necesita demostrar la existencia del vacío para su teoría de la cohesión de los materiales. Entonces, primero demuestra la existencia de un gran vacío, después lo convierte en vacíos muy pequeños, posteriormente les atribuye las cualidades de un pegamento para que sean las responsables de mantener unidas las partículas últimas de la materia que forman un cuerpo, y, por último, sugiere que el número de vacíos es infinito.

Demostrará entonces que una línea finita consiste de un número infinito de puntos alternados con un número infinito de vacíos, lo cual demostrará a su vez, por analogía, que cualquier cuerpo finito consiste en un número infinito de átomos unidos por un número infinito de vacíos. Demostrar esto también lo llevará a resolver dos problemas físicos, a saber, el problema de la cohesión y cómo se lleva a cabo la expansión y contracción de los metales.

2.2.1 EL PROBLEMA DE LOS POLÍGONOS CONCÉNTRICOS.

Un problema interesante es el de los círculos concéntricos. Primero, se propone un problema que tiene que ver con un par de polígonos concéntricos, el cual, posteriormente, se generaliza a círculos concéntricos, donde, un círculo se considera como un polígono con un número infinito de lados. La razón por la cual se analiza inicialmente el caso de los polígonos con un número finito de lados es que sí es entendible para el intelecto humano, no así el caso de los círculos.

“... veamos si hay algún medio de demostrar que en una extensión continua finita sería posible encontrar infinitos vacíos” [Galilei 1634, p. 93 [68]], vacíos tales como los que mantienen unidas a las partes del metal. Este es uno de los problemas centrales a tratar por Galileo en los *Discorsi*, y cuya solución lleva a resolver el problema de las *Cuestiones mecánicas* de Aristóteles.

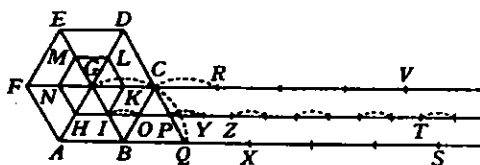


Figura 2: los hexágonos concéntricos.

Supóngase que se tiene un polígono equilátero y equiángulo con un número arbitrario de lados con centro en G; en este caso se considera a un hexágono. Dado un hexágono

ABCDEF (ver figura 2) se traza un hexágono HIKLMN menor con el mismo centro. Prolónguese indefinidamente AB en dirección de S y en esa misma dirección prolónguese HI siguiendo la línea HT, paralela a AS. Desde el centro G se traza GV paralela a las dos anteriores. Se rota el hexágono mayor, arrastrando al menor, sobre AS, dejando al punto B fijo. El punto C describirá un arco CQ de modo tal que BC se convierte en BQ. El punto I se eleva por encima de IT, ya que IB es oblicua a AS y ese mismo punto estará en la paralela IT cuando C coincida con Q, y entonces I coincidirá con O describiendo el arco IO y el lado IK será OP. El centro G recorre el arco GC coincidiendo, después de la rotación, en el punto C. Resumiendo: BC está ahora en BQ, IK en OP y G en C. Haciendo una segunda rotación dejando fijo al punto Q, el lado DC se moverá hasta QX, KL hasta YZ (describiendo el arco PY) y G se moverá hasta R describiendo el arco CR. Después de un giro completo, el hexágono habrá recorrido continuamente seis líneas iguales a su perímetro sobre AS. El hexágono menor habrá recorrido también seis líneas iguales a su perímetro, sobre HT, pero de manera discontinua, debido a la interposición de cinco arcos no tocados por el polígono, mientras que el centro G tocará a la línea GV únicamente en seis puntos. El espacio recorrido por el polígono menor es casi igual al recorrido por el mayor exceptuando un arco. Este argumento es extendible a cualquier polígono con un número arbitrario de lados con las únicas condiciones de que sean semejantes, concéntricos y que la revolución del mayor arrastre al menor; entonces las líneas que recorren son aproximadamente iguales si se incluyen los intervalos que corresponden a los arcos que nunca tocan al polígono. En el mismo tiempo, un polígono de

n lados menor a otro recorrerá una línea aproximadamente igual a la descrita por el mayor, pero discontinua y compuesta por n segmentos, iguales a sus n lados y n espacios vacíos.

Pasa ahora a la generalización de este problema, que es el importante: el de los círculos concéntricos.

2.2.2 EL PROBLEMA DE LOS CÍRCULOS CONCÉNTRICOS.

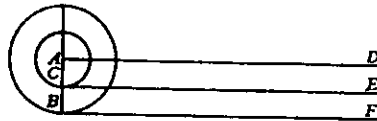


Figura 3: los círculos concéntricos

Pero no sucede lo mismo con el caso de dos circunferencias concéntricas con centro en A (ver figura 3). A partir de los puntos C y B, se trazan tangentes CE y BF paralelas entre sí y a AD, trazada desde el centro A. Si se gira el círculo mayor sobre BF, éste recorrerá totalmente a esa línea (considerando que BF es igual al perímetro de la circunferencia), mientras que el círculo menor recorrerá totalmente a CE y el centro A recorrerá totalmente a AD. La diferencia con el problema anterior es que la circunferencia del menor no se separará nunca de CE.

Salviati pregunta que cómo es posible que la línea descrita por los contactos de la circunferencia menor sea mayor que su circunferencia. Sagredo dice que, en el caso del centro,

éste se desliza y, que de algún modo similar, en el caso de la circunferencia CE, algunos puntos también se deslizan por partes minúsculas de CE. Salviati dice que no es posible pues no hay razón alguna para que algunos puntos se deslicen y otros no. “Y si esto sucediera, al ser infinitos los contactos (ya que son puntos) los deslizamientos sobre CE serían infinitos; y al ser de alguna extensión [*quanti*] formarían todos juntos una línea infinita. Pero CE es finita” [Galilei 1634, p. 97 [71]].

Solís [ver Galilei 1634, p. 97, n. 18] dice que Galileo usa los argumentos de Zenón, pues las magnitudes continuas susceptibles de una división al infinito exigen estar compuestas de un número infinito de partes; si estas partes son extensas, entonces la magnitud total será infinita, pues una suma de sumandos positivos produce una cantidad infinita, que es la base de la paradoja de Aquiles y la tortuga. Por otro lado, ¿ya era obvio que el número de puntos de una circunferencia es igual al número de puntos de una línea? En principio esto no tiene porque ser obvio, pues Cantor es quien demuestra que el número de puntos en una recta es igual al número de puntos que hay en un plano. Sin embargo, Galileo convierte una línea recta en un círculo [ver sección 2.4], donde el número de puntos no se altera.

Otra razón para que no sea posible que los puntos de la circunferencia se deslicen, es que cuando cambia el círculo grande continuamente de punto de contacto en su revolución, el círculo pequeño también lo hace. Galileo dice que no se puede trazar una recta hasta el centro A, que pase por C si no es desde el punto B, de tal modo que cambiando la circunferencia

grande su punto de contacto, lo cambia también la pequeña y ningún punto de la pequeña puede tocar en más de un punto de la recta CE.

Salviati resume el punto diciendo que en el caso de los polígonos, el espacio recorrido por el grande, que es igual en longitud a los lados acomodados en una línea continuamente, es igual al espacio recorrido por el chico con sus tantos lados más tantos espacios vacíos como lados. En el caso de los círculos,³ la línea recorrida por los infinitos lados del círculo grande, colocados uno tras otro es igual en longitud a la línea recorrida por los infinitos lados del círculo menor, pero con la interposición de entre ellos de otros tantos espacios vacíos. Y el número de lados no es finito, sino más bien infinito, además de que el número de vacíos interpuestos tampoco es finito, sino infinito; los lados vienen a ser infinitos puntos.

Sin embargo, en este par de problemas se maneja intrínsecamente la continuidad. ¿Por qué la línea es continua después del movimiento? Si esa línea descrita es continua, entonces los segmentos son continuos, pero, cuál es la definición galileana de continuidad. Al ser este un concepto importantísimo, se torna necesaria una definición, puesto que no es demasiado claro si los puntos en una línea son *continuos* o son *contiguos*. Quan plantea que Galileo tiene errores en su argumentación, pero los que él señala son incorrectos⁴. Ciertamente hay una dificultad con la continuidad, pero en lo que falla Quan es que está considerando a un conjunto de puntos como constituyentes de una circunferencia de un círculo y no al círculo como una magnitud

³ "...que son polígonos de lados infinitos" [Galilei 1634, p. 98 [71]].

⁴ Ver Quan, 1970, p. 135.

continua. Un problema que ni Galileo ni Quan pudieron resolver es que hay tantos puntos en una circunferencia de radio r como en otra circunferencia de radio r' . Así, Galileo no hubiera tenido problemas con los vacíos interpuestos, ni Quan con sus objeciones al argumento.

Salviati dice:

[...] si reducimos y dividimos una línea en partes extensas [*quante*] y, por tanto numerables⁵ es imposible colocar tales partes en una longitud mayor que la que ocupaban cuando estaban conjuntamente dispuestas, una tras otra, sin interponer entre ellas tantos espacios vacíos. Pero si nos imaginamos una línea reducida a partes inextensas [*non quante*], es decir, a la infinitud de sus indivisibles, podemos concebirla como inmensamente extendida, sin la interposición de espacios extensos [*quanti*], pero sí con la de infinitos indivisibles vacíos. Y esto que hemos dicho de las simples líneas debe extenderse también a las superficies y a los cuerpos sólidos, considerándolos compuestos de infinitos e inextensos [*non quanti*] átomos. Si quisiéramos dividirlos en partes extensas [*quante*] no hay duda alguna de que no podríamos extenderlas en espacios que fuesen más amplios que los ocupados en un principio por estos mismos sólidos, a no ser que interpusiésemos espacios vacíos extensos [*quanti*] -vacíos, digo, al menos de la materia del sólido-. Pero si lo que intentamos es la más profunda y última división de estos cuerpos en sus primeros componentes inextensos [*non quanti*] e infinitos, podremos concebir tales componentes desplegados en un espacio inmenso sin la interposición de espacios vacíos inextensos [*non quanti*] [Galilei 1634, p. 100{72}].

⁵ Solís dice que el término *quante* tiene el sentido de una magnitud extensa y medible, o bien el de un conjunto de elementos discretos susceptibles de ser contados. Por tanto, para Galileo las magnitudes *quante* son finitas. Frente a las partes *non quante* (inextensas, indivisibles) y primeras componentes de las magnitudes, Galileo exige que las partes resultantes de la división de una magnitud finita en un número finito de partes alícuotas sean extensas para así no caer en paradojas.

Hasta aquí, Galileo ha demostrado un hecho importante deducido a partir de una sucesión de ideas. Primero demostró que un punto es igual a la línea AD, que está compuesta de una infinidad de puntos. Después, que la línea CE es igual a una infinidad de puntos más una infinidad de vacíos. Como las líneas AD, CE y BF son iguales, entonces un punto es igual a una infinidad de puntos, que son iguales a una infinidad de puntos más una infinidad de vacíos. Por lo tanto, cualquier línea es igual a una infinidad de puntos.

Simplicio objeta diciendo que a partir de que las circunferencias de los dos círculos son iguales a las dos rectas CE (tomada con la interposición de infinitos puntos vacíos), BF (tomada continuamente), la recta AD, descrita por el centro que es un solo punto, surge la pregunta de cómo puede ser que AD es igual a ese punto único, si contiene infinitos. Agrega que el que la línea esté compuesta de puntos, lo divisible de indivisibles, lo extenso de lo inextenso, así como el admitir el vacío son problemas difíciles de solucionar, a lo cual, Salviati responde que: “estas dificultades, en efecto, existen. Así como muchas otras. Pero no olvidemos que estamos en medio de los infinitos y los indivisibles, aquéllos incomprensibles para nuestro finito entendimiento debido a su grandeza, y éstos, a causa de su pequeñez” [Galilei 1634, p. 101 [73]].

Galileo responderá a estas dificultades, pero se deja esta discusión para más adelante, pues se considera relevante en la conexión con Nicolás de Cusa, y más aún con la transición de lo finito a lo infinito. Sin embargo, lo que podemos decir es que la conclusión de Galileo es correcta, pues efectivamente una línea es igual a una infinidad de puntos, pero el problema es

que un punto no es igual a una línea. No puede establecerse una correspondencia uno a uno entre una línea y un punto.

2.3 EXTENSIONES CONTINUAS DIVISIBLES.

En este momento se va a discutir la dificultad de componer una línea extensa y divisible en puntos inextensos e indivisibles. Salviati reitera que el infinito por sí solo, así como los indivisibles, excede nuestra capacidad de comprensión. Dice que si se quiere “componer una línea de indivisibles, hay que tomar un número infinito de ellos, por lo que conviene tomar en consideración al mismo tiempo lo finito y lo indivisible” [Galilei 1634, p. 106 [77]]. Continúa diciendo que

una de las primeras objeciones que se suelen adelantar contra aquellos que componen las magnitudes continuas de partes indivisibles suele ser la de que un indivisible añadido a otro indivisible no produce otra cosa divisible, ya que, si así fuese, se seguiría que el indivisible habría de ser, sin embargo, divisible. Y es que si dos indivisibles, como es el caso, por ejemplo, de dos puntos, al unirse construyeran una magnitud extensa [*quantita*] como es la línea divisible, con mucha más razón serían tales líneas compuestas de tres, cinco, siete o de cualquier otro número impar de elementos. Tales líneas, siendo susceptibles de ser cortadas en dos partes iguales, darían por resultado que el indivisible situado en el medio podría ser cortado en dos. En esta y en otras objeciones parecidas se puede dar satisfacción a los que las ponen diciéndoles que no sólo dos indivisibles, sino

ni siquiera diez, cien o mil podrían componer jamás una magnitud divisible y extensa [*quanta*], sino que se necesitarían infinitos [Galilei 1634, p. 107 [77]].

Simplicio dice ahora que “... pueden darse líneas, una de las cuales es mayor que la otra, teniendo ambas infinitos puntos, hay que confesar que existe, en magnitudes de la misma especie⁶, una cosa más grande que el infinito, puesto que la infinitud de los puntos de la línea mayor excederá a la infinitud de los puntos de la menor [...] que se dé un infinito más grande que el infinito, me parece algo totalmente absurdo” [Galilei 1634, p. 108 [77]]. La solución a este problema se da más adelante, con su paradoja de los cuadrados y las raíces [ver sección 2.6].

Este es un problema que Cantor resolverá hasta finales del siglo XIX. Ahora es obvio que hay un infinito mayor que otro infinito, aunque hay una objeción difícil de pasar por alto: si el infinito es único, y ambas líneas tienen una infinidad de puntos, por qué no llegar a la conclusión de que tienen el mismo número de puntos. Evidentemente las matemáticas existentes en ese momento no permitían resolver este problema, pero la dificultad radica en que Galileo no cuestiona su propia lógica.

⁶ Es decir, homogéneas.

2.4 COMPOSICIÓN DE UNA LÍNEA EN INDIVISIBLES

Salviati dice ahora que

admitiendo que una línea, como toda magnitud continua [*continuo*], sea divisible en partes siempre divisibles, no veo cómo pueda dejar de reconocer que está compuesta de infinitos indivisibles, ya que una división y una subdivisión que se pueda proseguir siempre supone que las partes sean infinitas, pues de otro modo la subdivisión tendría un límite. Que las partes sean infinitas trae como consecuencia que no son extensas [*quante*] ya que infinitas partes extensas [*quanti infiniti*] forman una extensión infinita [*estensione infinita*]. Así, pues, llegamos a la conclusión de que las magnitudes continuas [*continuo*] están compuestas de infinitos indivisibles [Galilei 1634, p. 111 [80]].

Simplicio dice que si “podemos proseguir indefinidamente la división en partes extensas [*quante*], ¿qué necesidad tenemos de introducir, a tal respecto, las inextensas [*non quante*]?” [Galilei 1634, p. 111 [80]], a los que Salviati responde que el “poder proseguir perpetuamente la división en partes extensas [*quante*] implica la necesidad de composición de infinitas partes inextensas [*non quanti*]” [Galilei 1634, p. 111 [80]]. Pregunta también si las partes extensas en una magnitud continua son finitas o infinitas. Simplicio responde diciendo que son “finitas e infinitas. Infinitas en potencia y finitas en acto. Infinitas en potencia: es decir, antes de la división. Pero finitas en acto: después de la división” [Galilei 1634, pp. 111-112 [80]]. Pero que están en acto sólo después de la división y, que si no es así, entonces están en potencia.

Dice Solís [Galilei 1634, p. 111, n. 28] que para que un segmento esté en acto se deben actualizar sus dos puntos extremos, deteniéndose en ellos y convirtiéndolos en los términos del

movimiento. Es debido a esto que una línea no puede tener infinitos puntos en *acto*, pues ello implicaría un número infinito de detenciones, de movimientos, las cuales necesitan un cierto tiempo -no hay movimientos a velocidad infinita- por lo cual es imposible que esto se lleve a cabo. Pero puede contenerlos en *potencia*, ya que se supone que siempre es posible detenerse en un punto y actualizarlo. No obstante, se verá que en el caso del movimiento uniforme, hay una identificación entre los grados de velocidad y de lentitud, con los puntos de una línea, por lo que ahí sí hay un infinito actual, pues el móvil recorre todos los puntos de la línea.

Salviati pone un ejemplo de una línea con veinte unidades de longitud, aclarando que no es cierto que tenga veinte líneas unitarias, cada una en acto, sino hasta después de la división; hasta ese momento únicamente las tiene en potencia. Una vez que se realiza la división, el tamaño, sin embargo, no cambia. Entonces,

las partes extensas [*quante*] del continuo, estén en acto o en potencia, no hacen su magnitud ni más grande ni más pequeña. Ahora bien, es evidente que las partes extensas [*quante*] contenidas actualmente en su todo, si son infinitas, hacen a éste de infinito tamaño. Así que partes extensas [*quante*], aunque sólo sean infinitas en potencia, sólo pueden estar contenidas en una magnitud infinita. Por tanto, en la línea finita en magnitud no pueden contenerse partes extensas [*quante*] infinitas ni en acto ni en potencia [Galilei 1634, p. 112 [80-81]].

Sagredo pregunta que cómo es posible que las magnitudes continuas puedan dividirse indefinidamente en partes divisibles. Salviati responde que las partes extensas de las magnitudes continuas finitas no son ni finitas ni infinitas, sino un término medio: las que corresponden a un número dado, hablando, eso sí, de cantidades discretas. Pero es necesario que las partes

extensas no estén comprendidas dentro de un número limitado, es decir, finito, pues si fuera de ese modo, no corresponderían a un número superior. Tampoco es necesario que sean infinitas pues ningún número determinado es finito. Se puede asignar entonces a una línea de cualquier longitud, una división en las partes que se quiera, pero no en un número infinito, es decir, se puede considerar que una magnitud continua contenga tantas partes como se quiera, ya sea en acto o en potencia, pero una línea de una determinada longitud tiene a su vez otras líneas considerando otra unidad, del mismo modo que la línea contiene un número infinito de puntos.

Surge algo muy interesante. A Galileo no le interesa si la infinidad de partes de una línea es actual o potencial. Eso ya no tiene relevancia alguna para su trabajo. Lo que sí es realmente importante es el número de partes de la línea, que es infinito.

Simplicio dice que no cree que una división de una línea en infinitos puntos sea algo realizable, pues es una de esas potencias que nunca llega a actualizarse. Salviati responde diciendo que aunque se ocupe una gran cantidad de tiempo no implica que sea imposible; incluso si la división que se quiere realizar conlleva un número grande de partes, también será difícil. Agrega que los métodos para reducir una línea en un número finito de partes, no funcionan si se quiere dividir en un número infinito de partes; nunca llegará al infinito sino que se alejará.

Se demostrará entonces, que descomponer una línea en sus infinitos puntos es posible, además de que no es más difícil que hacerlo en sus partes extensas. Se le pregunta a Simplicio

si cree que al tomar un punto sobre una línea y a esta línea se le ‘dobla’ en ese punto formando un ángulo, entonces las divisiones están suficientemente separadas y actualizadas, a lo que responde afirmativamente. Entonces Salviati dice que si ésta es una alteración como para poner en acto a los puntos que estaban en la línea en forma potencial, como en el caso de un cuadrado o hexágono, por qué no construir un polígono de lados infinitos, es decir, construyendo una circunferencia se actualizan todos los puntos que antes eran potenciales estando en la línea recta. Si se toma un polígono con un número finito de lados, éste tocará a una línea recta por uno solo de sus lados, mientras que la circunferencia, “que es un polígono de infinitos lados, toca la misma recta con uno de sus lados, que es un solo punto, diferente de cualquier otro punto colateral⁷, distinto y separado, por tanto, como lo está el lado de un polígono del resto de sus lados adyacentes. Y así como el polígono, rotando sobre un plano, traza con el contacto sucesivo de sus lados una línea recta igual a su perímetro, así también el círculo, girando sobre un tal plano, describe con la infinitud de sus sucesivos contactos, una línea recta igual a su circunferencia” [Galilei 1634, p. 129 [92]].

⁷ Seguramente está considerando al círculo como una magnitud continua, por lo que puede llamar a los puntos *colaterales*.

2.4.1 “EL ARTIFICIO”.

Salviati dice que está de acuerdo con los peripatéticos de que las magnitudes continuas son divisibles en partes divisibles y nunca se llegará al final, siendo la última aquella que descompone las magnitudes continuas en infinitos indivisibles, pero que él propone un método para “distinguir y descomponer de un solo golpe esta composición de las magnitudes continuas en átomos absolutamente indivisibles” [Galilei 1634, p. 130 [93]]. Remarca que este proceso llevará a comprender mejor la cohesión de las partes de los sólidos y para entender la rarefacción, para no caer en el inconveniente de admitir el vacío, y la condensación para no caer en la penetrabilidad de los cuerpos; dice que estos problemas pueden evitarse si se admite la composición a base de indivisibles.

Surge aquí un punto sumamente importante, y es que Galileo está aceptando explícitamente la existencia de un infinito actual, puesto que para poder ‘distinguir y descomponer de un solo golpe la infinitud’ necesita que estén todos a la vez.

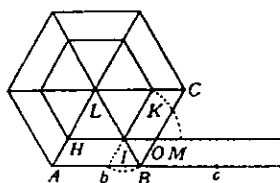


Figura 4: hexágonos concéntricos.

Se acude de nueva cuenta a los dos círculos concéntricos y de distintos tamaños. Se demostrará que en el caso de la rarefacción, cuando el círculo mayor arrastra al menor, éste describe una línea mayor que su circunferencia; en el caso de la condensación, si el círculo menor es el que gira, al arrastrar al mayor, éste describirá una línea menor que su circunferencia. Primero se considera el caso de los polígonos (ver figura 4). Considérense los hexágonos ABC y HIK y las líneas paralelas HIK y Abc. Si se deja fijo el punto I del hexágono menor y se hace girar hasta que IK caiga sobre la paralela, el punto K describirá un arco KM y el lado IK coincidirá con IM. IB describirá el arco Bb bajo la paralela cA para que cuando KI coincida con MI, BC coincidirá con bc, avanzando una extensión igual a Bc y yendo hacia atrás en una extensión igual a la cuerda que subtiende el arco Bb, superponiéndose a la línea BA. Si el movimiento de rotación prosigue, el hexágono menor recorrerá una línea igual a su perímetro, mientras que el mayor recorrerá una línea menor a su perímetro, a saber, la diferencia entre su perímetro y $n-1$ veces la distancia Bb. Las dos líneas serán aproximadamente iguales, siendo la descrita por el grande mayor por un segmento igual a Bb. La razón de esto es que los lados del mayor se van superponiendo. El caso de los círculos es distinto (ver figura 5), pues el punto de tangencia del círculo menor no permanecerá fijo y el punto de tangencia del mayor no se moverá hacia atrás, sobre la paralela. Por un razonamiento análogo, los lados del polígono están determinados por su número y en el caso de la circunferencia, éstos serán infinitos. Los lados

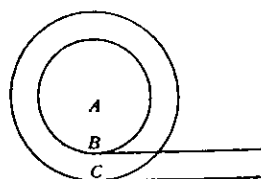


Figura 5: círculos concéntricos.

del polígono son extensos y divisibles, mientras que los de la circunferencia son inextensos e indivisibles. Los vértices del polígono permanecen un cierto tiempo fijos durante la revolución, que va a ser equivalente al de la revolución entera dividida por el número de lados del polígono; las detenciones de los infinitos vértices de la circunferencia son instantáneas, ya que cada parte es un instante de un tiempo extenso, como es el caso de un punto de una línea, que a su vez contiene infinitos. Lo que retrocede el polígono mayor es igual a la diferencia entre el lado mayor y el menor, mientras que en el caso de los círculos, el punto o lado del mayor, durante el reposo instantáneo del vértice del menor, va hacia atrás una longitud que es igual a lo que excede al lado B, ganando una longitud igual a este mismo lado B. Es decir,

los lados infinitamente numerosos e indivisibles del círculo mayor, con sus infinitos e indivisibles retrocesos, efectuados durante los infinitamente numerosos instantes de reposo de los extremos infinitamente numerosos del círculo menor, componen y describen una línea que es igual a la descrita por el círculo menor. Esta contiene en sí misma superposiciones infinitas inextensas [*non quante*], las cuales producen una contracción y una condensación de las partes extensas [*quante*] sin que haya entre ellas penetración alguna, cosa que sería imposible en una línea dividida en partes extensas [*quante*], como es el caso de cualquier polígono imaginable, el cual, si lo desarrollamos hasta convertirlo en una línea recta, no habría forma de acortarlo a no ser que superpusiéramos y compenetrásemos sucesivamente sus lados [Galilei 1634, pp. 133-134 [95-96]].

Dice que esta condensación de partes no extensas aunque infinitas y sin penetración de partes extensas así como la distensión de los infinitos indivisibles dan cuenta de la condensación y de la rarefacción de los cuerpos sin necesidad de incluir la penetración de los cuerpos ni la

interposición de espacios extensos vacíos. Remarca que “nos encontramos entre los infinitos y los indivisibles” [Galilei 1634, p. 134 [96]].

2.5 EL PASO DE LO FINITO A LO INFINITO Y LA CONEXIÓN CON NICOLÁS DE CUSA.

La argumentación y la terminología de Galileo recuerdan a Nicolás de Cusa, aunque, según Knobloch,⁸ la conexión en cuanto a la terminología no se ha investigado. En su trabajo de la *Docta Ignorantia*, De Cusa recomienda “la ascensión del triángulo con magnitud al triángulo que no tiene magnitud” [De Cusa 1440, p. 50] para entender la proposición de que una línea infinita es un triángulo: si se supone que los ángulos de la base de un triángulo extenso son ambos de cero grados, el triángulo degenera en una línea: “Por ello, con esta posición, que es imposible en los triángulos con magnitud [refiriéndose a que el ángulo opuesto a la base viene a ser de 180 grados], podemos ayudarnos para elevarse a los que no tienen magnitudes, en los cuales aparece absolutamente necesario lo que es imposible en los que tienen magnitud” [De Cusa 1440, p. 51]. En *Sobre las conjeturas* explícitamente dice que la coincidencia de los contrarios -de extensos y no extensos, de rectas y curvadas, de una línea y triángulo- no pueden

⁸ Véase Knobloch 1996, p. 4.

ser alcanzados en matemáticas. Por esto estas pruebas son las más razonables y las más verdaderas de acuerdo a la razón.

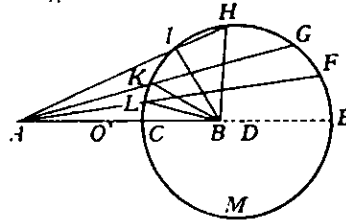


Figura 6: cantidad finita/cantidad infinita.

Salviati propone una explicación del por qué una cantidad finita no puede convertirse en una cantidad infinita. Esta misma discusión se encuentra en De Cusa, pues la conclusión galileana es que una circunferencia de radio infinito se identifica con una línea recta. Trácese una línea recta AB (ver figura 6) de cualquier longitud y tómesese un punto C que la divida en partes desiguales. Si se trazan rectas a partir de A y de B de tal forma que mantengan entre sí las mismas proporciones que existen entre AC y BC, estas rectas se cortarán en un punto y estos puntos caerán en una circunferencia. Las rectas AL y BL guardan entre sí las mismas proporciones que AC y BC y ambas concurren en L. Del mismo modo sucede con las rectas AK y BK, así como AI, BI, AH, HB, AG, GB, AF, FB, AE, EB. Todos los puntos L, K, I, H, G, F, E están todos sobre una misma circunferencia. Es decir, si el punto C se desplaza continuamente con las condiciones arriba dadas, describirá una circunferencia. El círculo será siempre mayor e infinitamente mayor a medida que C se acerque al punto O, que es el punto

medio entre A y B, y serán menores si C se desplaza hacia B. De este modo se pueden generar circunferencias del tamaño que se quiera. Si el punto O es el que se mueve guardando siempre la misma proporción entre AO y OB, también O describe una circunferencia, pero que será la mayor de todas; describirá una circunferencia infinita. Pero también se describe una línea recta perpendicular a AB prolongada hasta el infinito pero nunca regresará al punto de partida, por ser infinita, tal como ocurre en el caso de un punto entre O y B. La engendrada por un punto C va a tener un movimiento finito pues primero forma el semicírculo CHE para posteriormente describir al inferior EMC, concluyendo en el punto C y reuniendo a los dos términos extremos. Pero el punto O, cuando se pone en movimiento para describir un círculo, como todos los puntos de AB, no volverá a su punto de partida, por lo que describirá una recta infinita a modo de circunferencia infinita.⁹

Esta discusión surgió por el problema de qué pasaría con las observaciones de una estrella por medio de un cuadrante posicionado en un barco, si una vez que se tiene ajustado el cuadrante, si se mueve no se puede decir que la estrella se ha elevado, pues la modificación se le hizo al instrumento y no en el observador. Sagredo pregunta después que qué pasaría si recorre la superficie de la Tierra, qué si habría cambio alguno siempre que el observador no modificara la inclinación del cuadrante, a lo que Simplicio responde que sí cambiaría la inclinación al ser la trayectoria sobre una circunferencia y no un plano. Sagredo está de acuerdo

⁹ Esta es una discusión prometida en el *Dialogo* al respecto de que una línea infinita y una circunferencia infinita coinciden.

y agrega que “[...] cuanto mayor fuese el círculo [...] tantas más millas habría que caminar para hacer que la estrella se os elevase el grado de más y que, finalmente, cuando el movimiento hacia la estrella fuese en línea recta, habría que moverse aún más sobre la circunferencia de cualquier círculo grandísimo” [Galilei 1632, pp. 326-327 [404]]. Salviati interviene diciendo, que “sí, porque al final la circunferencia del círculo infinito y una línea recta son lo mismo” [Galilei 1632, p. 327 [404]]. Se deja esta discusión sin terminar pero con la promesa de retomarla posteriormente.

La diferencia entre un círculo finito y otro infinito es que éste último cambia su esencia perdiendo totalmente su ser y su poder ser, pues un círculo infinito no puede comprenderse. De esto se sigue que tampoco pueden existir esferas infinitas ni ningún otro cuerpo o superficie con forma infinita. La transición de lo finito a lo infinito no puede darse paso a paso por divisiones continuas de divisibles; pero “esta transición, conduce a una nueva área hasta entonces cerrada para las matemáticas, donde las relaciones persistentes y las reglas pierden su validez, y lo que es peor, su aplicabilidad” [Knobloch 1996, p. 5] También la transición tiene que ver con la metamorfosis y una alteración y cambio de carácter. Entonces las nociones de finito, divisible y de extenso, se convierten por medio de negaciones lógicas en infinito, indivisible y no extenso, respectivamente. Sagredo dice que

[...] el infinito, buscado entre los números, parece que va a acabar en la unidad; de los indivisibles nace lo divisible sin fin; el vacío parece que no reside en parte alguna, a no ser indisolublemente ligado a lo pleno. Y, en suma, se modifica la naturaleza de las cosas que normalmente entendemos,

de tal modo, que hasta la circunferencia de un círculo se convierte en una línea recta infinita [Galilei 1634, p. 125 [89]].

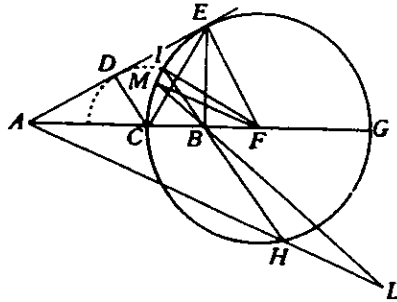


Figura 7.

Se va a demostrar que la circunferencia de un círculo se convierte en una línea recta infinita. Se demostrará que, dada una línea recta (ver figura 7), dividida según la proporción que se quiera en partes desiguales, describirá un círculo tal que, trazando dos líneas rectas desde los extremos de la línea dada a cualquier punto de la circunferencia, mantengan la misma proporción que tienen entre ellas las partes de la línea propuesta, siendo homólogas las líneas que partan de los mismos extremos. Es decir, se demostrarán dos cosas: i) Que todos los puntos que cumplen con esa relación están sobre una circunferencia y ii) que todos los puntos que están sobre la circunferencia son los únicos que cumplen esa relación (ver apéndice).

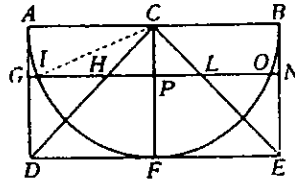


Figura 8.

Salviati demostrará que una línea es igual a un punto demostrando que dos cuerpos iguales que tengan por base a dos superficies también iguales, pueden disminuir continua, uniforme, y simultáneamente, dejando restos iguales entre sí para llegar a que uno de ellos, junto con una de las superficies, se reduzca a una línea muy larga, *i.e.* a una infinidad de puntos, mientras que el otro sólido, junto con su respectiva superficie, se reducirá a un solo punto. La demostración de este hecho es geométrica (ver figura 8). Se toma un semicírculo AFB con centro en C inscrito en un paralelogramo rectangular ADEB y desde el centro se trazan rectas DC y CE a los puntos D y E, respectivamente, así como el semidiámetro CF, perpendicular a AB y a DE. Dejando fijo al semidiámetro, se rota la figura, donde el rectángulo describe un cilindro, el semicírculo AFB describe una semiesfera y el triángulo CDE describe un cono. Se retira la semiesfera dejando el cono y lo que queda del cilindro,¹⁰ llamando a esta parte escudilla. Demostrará que la escudilla y el cono son iguales. Se toma un plano paralelo al círculo¹¹ que constituye la base de la escudilla, cuyo diámetro es DE y el centro es F, se demostrará que tal plano pasando por GN, que corta a la escudilla en los puntos G, I, O, N y al cono en los puntos

¹⁰ Al parecer, tanto el cilindro, el cono y la semiesfera se están tomando como sólidos.

¹¹ Es decir, un plano paralelo al plano tangente a la base de la escudilla.

H, L, cortará una parte del cono CHL, que es igual a la parte de la escudilla cuyo perfil lo representan los triángulos GAI, BON.¹² Se demostrará también que el círculo HL, base del cono CHL, es igual a la superficie circular que sirve de base a aquella parte de la escudilla, y que es una rueda cuya anchura es GI. El problema es que para cualquier plano paralelo al plano tangente a la escudilla, será igual a esa rueda. Entonces, si se supone que el plano secante se acerca a AB, las partes cortadas de los sólidos son siempre iguales, así como los son las superficies que les sirven de base. En el punto límite, una de las parejas termina en una circunferencia [el borde de la escudilla] y la otra en un solo punto [el vértice del cono]. A medida que disminuyen los sólidos, que siempre son iguales entre sí, los resultados finales serán iguales, sin que sea el uno infinitamente mayor que el otro. Parece entonces, que la circunferencia de un círculo inmenso puede considerarse un solo punto, además de que esto se puede generalizar a superficies. Por lo tanto, se puede decir que todas las circunferencias de los círculos, por muy desiguales que sean, pueden considerarse iguales entre sí, siendo cada una de ellas igual a un punto.

El que la rueda y el círculo sean iguales es cierto si la proporción entre los dos radios es de $\sqrt{2}$. Además, en marzo y diciembre de 1632, Cavalieri le escribe a Galileo dudando de la igualdad de los residuos finales. Cavalieri dice que si bien cuando a cantidades iguales se le restan cantidades iguales, los restos son iguales, los términos de la igualdad deben ser

¹² ¿Por qué son iguales? Falta la demostración de este hecho.

homogéneos. Los indivisibles que operan en el proceso de disminución de ambas figuras son planos, pero al final del proceso, los restos son una línea y un punto, ya no planos indivisibles. Por lo tanto, no hay igualdad entre los conjuntos de puntos determinados por la tangente a ambas figuras [una línea y un punto], los cuales al no ser planos, son heterogéneos.

2.5.1 EL INFINITO Y LOS NÚMEROS

En la *paradoja*, se verá que conforme la progresión de los números crece, el número de cuadrados o cubos descende y, por tanto, se aleja del número infinito y tenemos que ir hacia atrás. “De lo cual se infiere que [...] si algún número puede llamarse infinito, ése es la unidad. Y de hecho encontramos en el número uno todas las condiciones exigidas por el número infinito; a saber, contiene en sí tantos cuadrados y cubos como números naturales” [Galilei 1634, p. 115 [82-83]]. Cualquier propiedad de los cuadrados o de los cubos también lo es de la unidad, tal como la de la media proporcional.¹³ Si se toma un cuadrado como uno de los términos y la unidad como el otro, siempre se encontrará un número medio proporcional. Tómense el 9 y el 4 como los números cuadrados; entre el 9 y el 1, el 3 es el medio proporcional, mientras que entre el 4 y el 1 media el 2, y entre el 9 y el 4, el 6 es la media

¹³ Dados los números cuadrados x^2 y y^2 , xy será la media proporcional: $x^2/xy=xy/y^2$.

proporcional. Del mismo modo, entre dos números cúbicos existen dos medias proporcionales. Si se toman el 8 y el 27, el 12 y el 18 son las medias, entre el 1 y el 8 están el 2 y el 4, mientras que entre el 1 y el 27, el 3 y el 9 son las medias proporcionales. “Concluamos, por tanto, que el único número infinito es la unidad” [Galilei 1634, p. 116 [83]]. Reitera que no se puede pensar sobre el infinito utilizando los mismos atributos que se aplican para lo finito.

A esta discusión es a la que se refería Sagredo con respecto a las nociones correspondientes: el infinito en los números acaba en la unidad, los indivisibles surgen a partir de una división interminable.

2.6 RELACIONES DE ORDEN ENTRE CONJUNTOS.

Uno de los problemas más importantes de los abordados por Galileo es la *paradoja* de las raíces y los cuadrados. Por un lado, están los números cuadrados, que son el resultado de multiplicar un número natural por sí mismo; a estos números generadores de los números cuadrados se llamarán raíces o lados y a los números que no son engendrados por el producto de un número por sí mismo serán no cuadrados. Si “[...] todos los números, incluyendo cuadrados y no cuadrados, son más que los cuadrados solos, enunciaré una proposición verdadera [...]” [Galilei 1634, pp. 108-109 [78]]. “Los números cuadrados [...] son tantos cuantas raíces tengan, teniendo presente que todo cuadrado tiene su raíz y toda raíz su cuadrado; no hay, por otro

lado, cuadrado que tenga más de una raíz ni raíz con más de un cuadrado” [Galilei 1634, p. 109 [78]. Hay tantas raíces como números

ya que no hay ningún número que no sea raíz de algún cuadrado [...] habrá que decir que hay tantos números cuadrados como números, ya que son tantos como sus raíces, y raíces son todos los números... sin embargo,... todos los números son muchos más que todos los cuadrados, puesto que la mayoría de ellos no son cuadrados. Incluso el número de cuadrados va disminuyendo¹⁴ siempre a medida que nos acercamos a números más grandes, ya que hasta cien hay diez cuadrados, [...] la décima parte; y en diez mil sólo la centésima parte son cuadrados, mientras que en un millón [...] la milésima parte. Con todo, en un número infinito, si pudiéramos concebirlo, habría que decir que hay tantos cuadrados como números en total [Galilei 1634, p. 109 [78-79].

Entonces se deduce que “[...] infinitos son todos los números, infinitos los cuadrados, infinitos sus raíces; la multitud de los cuadrados no es menor que la de todos los números, ni ésta mayor que aquélla; y finalmente, los atributos de mayor, menor e igual no se aplican a los infinitos, sino sólo a las cantidades finitas [*terminate*]” [Galilei 1634, pp. 109-110 [79]]. Ya con esto, se puede argumentar contra la dificultad planteada por Simplicio al respecto de las líneas desiguales, se dice que “no hay ni más [en la mayor] ni menos [en la menor] ni los mismos, sino infinitos en cada una” [Galilei 1634, p. 110 [79]].

Sagredo interviene diciendo que

no sólo no se puede decir que un infinito es mayor que otro infinito, sino ni siquiera que es mayor que un finito, ya que en el caso de que un número infinito fuese mayor, *v.g.*, que un millón, se

¹⁴ El número de cuadrados va disminuyendo pero proporcionalmente.

seguiría que, pasando de un millón a otros números cada vez más grandes se caminaría hacia el infinito; lo cual no es así, ya que, por el contrario, cuanto más nos elevamos a números mayores más nos apartamos del número infinito. Y es que cuanto mayores son los números, más raros son los números cuadrados en ellos contenidos. Ahora bien, en el número infinito, los cuadrados no pueden ser menos numerosos que todos los números en su conjunto, como se acaba de demostrar. Así, pues, avanzar hacia números cada vez mayores es alejarse del infinito [Galilei 1634, p. 110 [79]].

Pero aquí surge un problema: al decir que un número infinito es mayor que un número finito dado, y que pasando de éste último a otros cada vez mayores y que se alejaría del infinito, ¿está tomando a ese número infinito como un número dado? Si este es el caso, podemos afirmar que está usando un infinito actual.

Sin embargo, hay objeciones para este argumento. Quan, por ejemplo, dice que Galileo, en lugar de cuestionar su propia lógica, llega a la conclusión de que no se pueden establecer relaciones de orden entre conjuntos infinitos. El problema aquí, según Quan, es que llega a la contradicción por medio de sofismas, y no por medio de los sentidos, tal como ocurre en sus demostraciones geométricas; “en primera instancia, Galileo falla en la distinción de número ‘natural cuadrado’ y ‘número cuadrado’. Al fallar esto, no tienen sentido sus conclusiones acerca de los cuadrados y las raíces” [Quan 1970, p. 144].

Quan dice que Galileo debió de haber hecho una distinción entre los números ‘naturales cuadrados’ y los ‘números cuadrados’, a saber, que los primeros son aquellos números naturales que tienen raíces naturales, mientras que los últimos son producto de un número natural

multiplicado por él mismo. No obstante, Quan también incurre en errores. Lleva a cabo las distinciones arriba mencionadas y parafrasea a Galileo, para llegar a que utilizando las palabras correctas, no hay contradicción alguna. Pero es Quan quien no entiende lo que Galileo quiso decir; para muestra, tenemos que Galileo refiriéndose a las raíces, dice que “hay tantas raíces como números porque todo número es raíz de algún cuadrado” [Galileo 1634, p. 109 [78]], a lo cual, Quan dice que no es cierto, pues ni 3, 5, ni 7 tienen ‘raíces’. Pero, Galileo no está descomponiendo los números naturales en factores, por lo que no hay ningún error en el argumento galileano.¹⁵

La importancia real de la *paradoja* radica en que es un buen cimiento de la *Teoría de Conjuntos*. Para Galileo la respuesta es muy fácil y no se mete en problemas: nuestro entendimiento es finito y, por lo tanto, el infinito es incomprensible para nosotros. Sin embargo, en la carta a Liceti del 12 de febrero de 1640 Galileo dice conocer argumentos tanto para defender o excluir cualquiera de las dos posibilidades aunque no es capaz de tomar partido por alguna de ellas. En la referida carta, Galileo dice que

Sólo hay un argumento particular mío que me inclina más a lo infinito e interminado que a lo terminado (note que mi imaginación no es de ayuda aquí, pues no puedo imaginarlo ni finito ni infinito). Siento que mi capacidad para comprender puede ser referida más propiamente al infinito incomprensible, más que a la finitud, en la cual ningún principio de incomprensión es requerido.

¹⁵ Galileo toma, utilizando términos modernos, una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$, la cual es biyectiva, y no $f(n) = \sqrt{n}$, donde $\text{Im } f \neq \mathbb{N}$.

Pero ésta es una de las preguntas felizmente inexplicables para la razón humana[...] [Galilei 1964, p. 44, n. 40].

Si su capacidad para comprender se refiere al infinito incomprensible, por qué no negar su propio argumento para poder establecer relaciones de orden entre agregados infinitos. Es cierto que a los dos conjuntos que está tratando no iba a poder compararlos, pero eso pudo haber dado pie a otro tipo de investigaciones.

Por otro lado, Bunn opina que

cómo Galileo entendió su argumento no es absolutamente claro. Puede ser que lo considere como la derivación de una contradicción a partir de la suposición de que las relaciones cuantitativas se sostienen entre conjuntos infinitos. Pues él dice en su conclusión que la totalidad de todos los números no es mayor que los números o los cuadrados perfectos. Aparentemente infiere esto a partir de la existencia de una correspondencia uno a uno entre los dos conjuntos; pero esta etapa no está justificada. Sin embargo, Galileo pudo estar pensando en que estaba probando que las relaciones con las definiciones indicadas equivalen a relaciones cuantitativas propias sólo entre conjuntos finitos, porque para conjuntos infinitos aquellas relaciones no tienen las propiedades correctas; en particular, la *igualdad* no es incompatible con el *mayor que* para el caso de pluralidades infinitas [Bunn 1977, pp. 183-184].

Hay otro problema y es que se contrasta a lo infinito con lo terminado. En la paradoja habla de infinitos y no de cantidades finitas. Pero la *paradoja* es válida sólo para *quantità terminata*, es decir, cantidades terminadas. Una *cantidad infinita* podría ser una 'contradicción' en cuanto a los términos, puesto que un infinito carece precisamente de las propiedades que caracterizan a las cantidades. Apoyando el punto de Bunn, de que la aplicación de una correspondencia

biunívoca entre los conjuntos no era lo suficientemente clara, Knobloch dice que esta aplicación no lo conduce a una caracterización de los conjuntos infinitos por medio de comparaciones con lo finito, tal como lo hizo Dedekind¹⁶, así como tampoco a una clasificación de conjuntos infinitos.

¹⁶ Ver n. 1.

*Como si el universo
mostrara su reverso...
Una infinita nada flotando
en la nada de la eternidad*
Luis Eduardo Aute

3 EL INFINITO EN LA COSMOLOGÍA GALILEANA

Con respecto a la cosmología galileana, es sabido que el *Dialogo sobre los dos sistema máximos del mundo, ptolemaico y copernicano*, fue escrito como defensa al sistema heliocéntrico planteado casi un siglo antes por Copérnico en su *De revolutionibus*. Sin embargo, Salviati, el interlocutor de Galileo no es el encargado de defender esta postura, sino que es Sagredo quien en ocasiones habla a favor del sistema. Según él, se limita a exponer argumentos para mostrar que aquellos atendidos por los peripatéticos no son en absoluto necesarios para probar la inmovilidad de la Tierra.

Con respecto al infinito, aquí más que en cualquier otro lado, la concepción galileana es confusa. Si centramos la discusión en torno al tamaño del universo, en ciertos pasajes se habla de un universo infinito, aunque en otros se refiere a uno finito. Primero se discutirán tanto el movimiento de todo el universo así como el movimiento de la Tierra, para después pasar a discutir el tamaño del orbe y la ubicación del centro del mundo.

3.1 MOVIMIENTO DEL ORBE UNIVERSAL.

Aristóteles había demostrado que los movimientos simples son únicamente tres, a saber, el circular en torno a un centro, el de ascenso alejándose del centro y el de descenso acercándose al mismo. Queriendo ver si existe un cuerpo infinito en el mundo, hace una referencia empírica de la naturaleza del cosmos: “vemos que el cielo¹ da vueltas” [Aristóteles 1996a, 272³⁵], por lo que necesariamente tiene un movimiento simple adjudicado, siendo éste el circular.

Como primer punto, tenemos que una de las objeciones a la teoría heliocéntrica copernicana, fue que es mucho más fácil mover algo pequeño que una mole inmensa, tal como lo es la Tierra en comparación al tamaño del universo. Simplicio argumenta que la potencia del Motor es infinita, por lo que conviene mover algo inmenso y no algo demasiado pequeño. Sin embargo, dados los intereses científicos de Galileo hace decir a Salviati que da lo mismo, que si la potencia es infinita, no hace diferencia alguna mover cien mil o mover algo muy chico; es por esto que no necesariamente se sigue que la Tierra está inmóvil. Agrega que si para mover al universo se requiere de una potencia finita en comparación con la necesaria para mover a la Tierra, por más grande que sea, no es comparable con la potencia infinita por lo que da lo mismo mover a la Tierra que a todo el universo. Para Galileo, sostener esta argumento es fácil

¹ Considera al *cielo* como el lugar donde está lo divino y el extremo del universo, así como la totalidad y al universo.

pues ya antes había dicho que “[...] mucho, poco o nada son la misma parte del infinito” [Galilei 1632, p. 91 [127]].

Se discutió, entonces, un movimiento de todo el orbe, llegando a ninguna conclusión acerca de la movilidad de la Tierra siendo éste el punto central de la teoría copernicana.

3.2 MOVIMIENTO TERRESTRE.

Se plantea una discusión donde se utiliza al infinito como objeto² matemático y su aplicación a teoremas físicos. El tema es la trayectoria que describiría un móvil que fuera despedido del globo terrestre en caso de que la Tierra estuviera en movimiento, siendo ésta una de las mayores objeciones peripatéticas al sistema copernicano.

Se dice que esta trayectoria estaría compuesta, primero, de un movimiento circular que es el propio de la Tierra para después salir despedido por una trayectoria recta a partir del punto de tangencia. Se puede suponer también que hay una trayectoria desde ese móvil hacia el centro de la Tierra, siendo ésta una secante a la circunferencia terrestre o un radio extendido de la misma. Supuestamente, dice Simplicio, el movimiento por la tangente es más veloz que el

² No se discutirá el platonismo de Galileo [ver n.1, cap. 2].

movimiento por la secante, razonamiento que Salviati califica de incorrecto argumentando que no basta con hacer a ese movimiento más veloz. Salviati dice que

[...] desde el centro del círculo se puede trazar una recta hasta la tangente, que la corte de modo que la parte de la tangente entre el [punto de] contacto y la secante sea una, dos o tres millones de veces mayor que la parte de la secante que queda entre la tangente y la circunferencia. Y a medida que la secante esté más próxima al contacto, esta proporción crece hasta el infinito [Galilei 1632, p. 171 [224]].

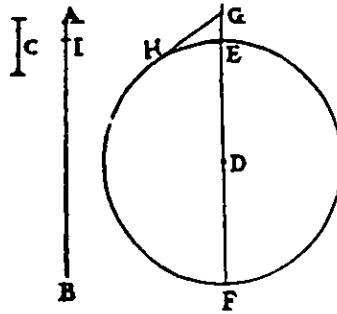


Figura 9

Se sigue de esto que el movimiento hacia abajo supera la velocidad de proyección por la tangente. Posteriormente, Galileo da una demostración en la cual únicamente demuestra que HG es GE (ver figura 9), lo cual es lo que supuestamente habría que demostrar. Sin embargo, no demuestra que esa proporción crece hasta el infinito, aunque el razonamiento es correcto (ver apéndice).

La pregunta que surge es por qué es tan claro para Galileo que esa proporción crece hasta el infinito si no tiene herramienta matemática como la regla de L'Hôpital para resolver el problema. Según Dhombres, se comienza a hablar de series convergentes como concepto hasta el trabajo desarrollado por Viète hacia finales del siglo XVI, aunque el uso de la palabra convergencia surge posteriormente y como negación de la divergencia. No obstante, ya desde Oresme se habla de divergencia y es seguro que Galileo conoció el trabajo de Oresme.

Sagredo dice que entiende la demostración y agrega que “es cierto que los espacios entre la tangente y la circunferencia, hacia el contacto, van disminuyendo hasta el infinito” [Galilei 1632, p. 172 [225]]. Pero, por qué resulta cierto esto, además de que por qué demuestra algo que en principio sí es claro, mientras que el problema real es, justamente, si ese espacio entre la tangente y la circunferencia va disminuyendo hasta el infinito. La demostración no es muy complicada, pero utilizando herramienta no conocida en ese momento.

Entonces, según Sagredo, las causas que favorecen la proyección y no la propensión a descender, son la ligereza del móvil así como su proximidad al punto de reposo, las cuales son aumentables hasta el infinito³. Dice que hay otra razón, el movimiento hacia abajo, que apoya lo contrario, y que también es aumentable hasta el infinito, y que no sabe por qué la unión de dos causas aumentables hasta el infinito no pueden vencer a una, aunque ésta sea también aumentable hasta el infinito. Está tomando en cuenta que un cuerpo puede ser infinitamente

³ Aristóteles consideraba que no hay ni gravedad ni levedad infinitas [ver Aristóteles 1996a, 273^a23-273^b19].

ligero, y, por otro lado, cuando habla de que la proximidad al punto de reposo es aumentable al infinito, se refiere al reposo como el grado de infinita lentitud de un móvil. Pero, si esos infinitos son de la misma clase, no tienen porque vencer a uno de la misma clase.

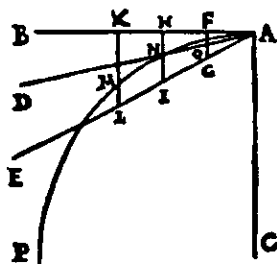


Figura 10.

Se va a dar una demostración de lo anterior. Se traza una línea AC (ver figura 10) perpendicular hacia el centro y en ángulo recto con AB, donde AB es por donde se daría el movimiento de proyección. Se traza una recta AE donde el ángulo BAE es cualquiera. Sobre AB se dan espacios iguales AF, FH, HK y se trazan perpendiculares FG, HI, KL hasta AE. Como el grave que cae partiendo del reposo va adquiriendo mayor grado de velocidad a cada instante, según va creciendo el propio tiempo, entonces AF, FH, y HK representan tiempos iguales y FG, HI y KL son grados de velocidad adquiridos en esos tiempos. Entonces $LK/KA = IH/HA = GF/FA$. Entonces los grados de velocidad tendrían la misma proporción que los tiempos. Y si a partir de FA se trazan otras rectas, se tendrían grados progresivamente menores hasta el infinito, en dirección de A, que es el primer instante de tiempo y el estado de reposo. Por lo tanto, esa disminución hacia A representa la propensión del movimiento hacia abajo, disminuida hasta

el infinito por la aproximación del móvil al estado inicial de quietud, aproximación que es aumentable hasta el infinito. Una vez más, utiliza el hecho de que una proporción, si el denominador tiende a cero, tiende a infinito. Además, a mi entender, está haciendo uso de un argumento parecido a la paradoja de la Dicotomía de Zenón.

Ahora va a demostrar la otra disminución de velocidad, que también se puede producir hasta el infinito por la disminución de gravedad del móvil. Se trazan otras líneas desde A (ver figura 10) de tal modo que el ángulo que formen sea menor que el ángulo BAE, como AD, la cual corta a KL, HI, FG en los puntos M, N y O, respectivamente. AD representa los grados FO, HN y KM adquiridos en los tiempos AF, AH, AK menores que los grados FG, HI, KL adquiridos en los mismos tiempos, pero éstos últimos adquiridos por un móvil más grave, mientras que FO, HN, KM lo fueron por uno más ligero. Si se retira la línea EA hacia AB reduciendo al ángulo EAB, lo cual es posible hasta el infinito (del mismo modo que la gravedad) también se disminuye hasta el infinito la velocidad del cuerpo que cae, y en consecuencia, la causa que impedía la proyección. Es por estas razones que parecería más probable la proyección que el movimiento hacia abajo.

Entonces, reduciendo el ángulo EAB, disminuyen los grados de velocidad LK, IH, GF. Acercando KL, HI, FG hacia A, se disminuyen los mismos grados también, por lo que una y otra disminución se extienden hasta el infinito. Por lo tanto, la velocidad del movimiento hacia

abajo podrá disminuir hasta tal punto⁴ que no sea suficiente para devolver al móvil a la circunferencia de la rueda y, en consecuencia, para hacer que la proyección sea impedida y eliminada.

Surge la duda de que si es lo mismo crecer hasta el infinito que disminuir hasta el infinito. ¿Qué consecuencias tendría si fueran o no lo mismo? Ya con la teoría geométrica de los indivisibles desarrollada por Cavalieri, se puede decir que definitivamente no son lo mismo. Por otro lado, en los *Discorsi* claramente dice que el infinito es uno, por lo que resulta un tanto paradójico que hable de una doble infinitud. Si el infinito es uno, ¿por qué no basta con decirlo y entonces, en principio, las causas a favor de la proyección o el movimiento hacia abajo estarían en igualdad de circunstancias?

Después dice que para hacer que la proyección no se reduzca, se necesita que los espacios por los que el proyectil tiene que descender para reunirse con la rueda, se hagan tan cortos y diminutos que, por lento, incluso disminuido hasta el infinito, que sea el descenso del móvil baste para conseguirlo. Entonces sería preciso que se encuentre una disminución de dichos espacios no sólo llevada hasta el infinito, sino de una infinitud tal que supere la doble infinitud que se da en la disminución de la velocidad del cuerpo que cae. Pero, dice el propio Galileo, cómo disminuirá una magnitud más que otra que disminuye por duplicado hasta el infinito.

⁴ 'Al poder ser diminuída doblemente hasta el infinito.'

La pregunta dice mucho por sí sola. ¿Cómo se hace para que un infinito supere a otro infinito de otro tamaño, si supuestamente tienen el mismo tamaño? ¿Estará acaso diciendo que hay por lo menos dos infinitos de tamaños distintos? No lo está afirmando; Galileo no tiene una aritmética cardinal al estilo de Cantor.

Dice que los grados de velocidad disminuidos hasta el infinito siempre son determinados y son proporcionales a las paralelas entre dos líneas rectas que concurren en un ángulo, aunque éste sea infinitamente agudo. Pero que la disminución de los espacios por los que el móvil ha de volver a la circunferencia de la rueda es proporcional a la disminución comprendida entre líneas que contienen un ángulo infinitamente más estrecho y agudo que cualquier ángulo agudo rectilíneo.

Para ver esto, se debe de trazar un dibujo similar al de la demostración anterior. Dice que las partes que quedan entre el arco y la tangente AB (ver figura 10) son las magnitudes de los espacios y de los trayectos de regreso a la superficie de la rueda, cada vez menores en proporción mayor cuanto más se acerquen al contacto y menores que las paralelas de las cuales son partes. Las paralelas comprendidas entre las líneas rectas, al acercarse hacia el ángulo, disminuyen siempre con la misma proporción pues, dado un punto sobre AB, si se toma el punto medio y se traza la perpendicular, ésta será la mitad de la paralela tomada desde el primer punto y, si se continúa hasta el infinito, esta relación se mantendrá. Sin embargo, en el caso de las líneas que corten a la tangente y la circunferencia, no sucede lo mismo pues, si se toma la misma división, por ejemplo FA y suponiendo que la paralela que viene desde H, será el doble

que la siguiente. Y cuanto más se acerquen al contacto, las líneas precedentes contienen a las subsecuentes, incluso infinitas veces. Entonces, la brevedad de dichas líneas se reduce hasta tal punto que supera con mucho lo necesario para hacer que el proyectil, por ligerísimo que sea, retorne e incluso se mantenga sobre la circunferencia.

En el caso de las paralelas comprendidas entre la tangente y la circunferencia, una vez más está haciendo uso de proporciones que tienden al infinito. Se sabe que $FA/FG=AH/HI=AK/KL$ y que $2FG=HI=1/2KL$. También que $FG<HI<KL$ lo que implica que $FO<HN<KM$, y por lo tanto $AF/FO>AH/HN>AK/KM$. Es decir, como el denominador decrece, la proporción crece. Otro punto es el sugerido por Beltrán [Galilei 1632, n. 66]: la demostración es errónea. Dice que Koyré establece que, como no existen cuerpos que no pesen, su trayectoria de escape no podría ser rectilínea; mientras que otros autores, entre ellos Drake, dicen que el error está en la interpretación de los ejes: los interpreta de modos distintos. Por una parte, las distancias a lo largo de AB representan tiempos transcurridos y las distancias verticales representan velocidades de caída. Por otro lado, las distancias entre AB y AP (ver figura 10) representan la distancia desde el objeto proyectado a la superficie terrestre y las distancias sobre AB son distancias a lo largo de la línea de proyección.

Sagredo dice, una vez más, que acepta la demostración. Dice que de las dos causas que hacen el descenso del móvil más lento hasta el infinito, es obvio que la que depende de la proximidad al punto inicial del descenso crece siempre en la misma proporción, al igual que las paralelas mantienen la misma proporción. Pero dice que la disminución de dicha velocidad,

dependiente de la disminución de la gravedad del móvil, se dé en la misma proporción no es demasiado claro. Agrega que tal vez se produzca por la proporción de las líneas que unen la tangente y la circunferencia, o incluso con una proporción mayor. Salviati responde que supuso que las velocidades de los movimientos naturalmente descendientes siguen la proporción de sus gravedades, siguiendo a Aristóteles, pero que, en realidad, la proporción de las velocidades es menor que la de las gravedades. Dice que la disminución de la gravedad, hecha según la proporción de las paralelas entre la tangente y la circunferencia, tiene como último término y superior a la nulidad del peso, al igual que las paralelas tienen como último término de su disminución al propio contacto, que es un punto indivisible.

Hacia el final de la segunda jornada del *Dialogo*, Simplicio dice: “[...] de las cosas dichas no se concluye sino que las razones para el estatismo de la Tierra no tiene carácter de necesidad, pero no por ello se ha presentado demostración alguna de por la parte contraria, que necesariamente convenza y concluya la movilidad” [Galilei 1632, pp. 236-237]. Simplicio pasó de pensar en que estas razones eran en efecto necesarias a decir lo escrito arriba.

3.3 TAMAÑO DEL UNIVERSO.

Es tal vez a este respecto, que la posición de Galileo es la menos clara; no se conoce bien cuál era su postura. Sin embargo,

podemos decir que tanto Arquímedes como los otros dieron por supuesto, en sus consideraciones, que estaban separados por una distancia infinita del centro de la Tierra, en cuyo caso sus suposiciones no eran falsas y sus demostraciones en absoluto concluyentes. Por tanto, cuando queremos aplicar las conclusiones que hemos probado y que se refieren a distancias inmensas, hemos de hacer las correcciones necesarias, ya que nuestra distancia al centro de la Tierra, aunque no sea realmente infinita, es tal que se puede considerar inmensa si la comparamos con la insignificancia de nuestros instrumentos [Galilei 1634, p. 393 [275]].

Es cierto que la invención del telescopio aportó nuevas pruebas en favor del copernicanismo, es decir, “la primera función en que el telescopio se probó único fue la de proporcionar una documentación no matemática y generalmente accesible al punto de vista copernicano” [Kuhn 1993, p. 290]. Es decir, con este instrumento, cualquier persona, incluso ajena a la ciencia, podía mirar al cielo abriendo la posibilidad de un universo infinito. Galileo dice que “[...] en la aprensión de los números, cuando se empieza a pasar los miles de millones la imaginación se confunde y no puede ya formar concepto alguno, así sucede también en la aprensión de tamaños y distancias inmensas” [Galilei 1632, p. 319 [394]].

Cabe aclarar que la mayoría de las ideas galileanas aquí expuestas se desprenden del *Dialogo*, donde se acepta de manera más o menos explícita la finitud del universo, pero tal vez esto se deba a que este texto pasó por la censura eclesíastica, y Galileo no quería tener problemas con la Iglesia.

Por otro lado, existe un problema semántico en las discusiones al respecto del tamaño del universo. En *Il Saggiatore* se refirió a que en algunas ocasiones se utilizan infinito y muchos

(muy) como sinónimos, por lo que no es fácil concluir que cuando habla de un universo infinito o de una distancia inmensa, efectivamente está considerando al universo como de tamaño infinito.

3.4 LA NOVA DE 1572.

Por comodidad, llevaremos la discusión en el mismo orden en que aparece en el *Dialogo* en lugar de dividirla en dos partes. Estas partes deberían ser, lógicamente, cuando considera a un universo infinito y cuando considera al universo como finito. La discusión comienza con respecto a la posición en el universo de la nova aparecida en 1572. Y es de suma importancia puesto que en algunos pasajes parecería aceptar la idea de un universo infinito, mientras que en otros sí hace explícito que ese caso no es posible. Salviati es quien lleva el debate y aclara que, según distintas observaciones, la nova se encuentra en la región sublunar mientras que otras la sitúan por encima de la Luna, además de que según Chiaramonti, las observaciones a partir de las cuales los cálculos sitúan a la estrella infinitamente lejana están equivocadas.

Salviati se refiere a observaciones que indican que la estrella se encuentra incluso sobre las estrellas fijas. Después, en su siguiente intervención se refiere a observaciones que 'sitúan a la estrella infinitamente lejana.' Si la esfera de las estrellas fijas está infinitamente lejana de la

Tierra, esto querría decir que el universo es infinito. Sin embargo, se presenta el problema semántico arriba mencionado, pues ‘infinitamente lejana’ podría significar ‘muy lejana.’

Apoyando al idea de que la nova se encuentra de hecho en la región de las estrellas fijas, se discuten los ángulos formados por dos estrellas que se encontraran en otros círculos distintos al de las estrellas fijas. Suponiendo que la nova se encontrara efectivamente en ésta última, se hace una comparación entre la distancia entre dos puntos de la Tierra, distancia que sería pequeña en comparación a la ‘inmensa longitud’ de las líneas trazadas desde la Tierra hasta las fijas. Si se está hablando de una longitud inmensa, podemos, tal vez, hablar de otra afirmación de que el universo es infinito. El problema aquí es si son sinónimos inmenso e infinito.

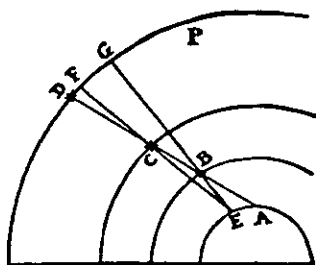


Figura 11: la nova de 1572.

Siguiendo con la misma discusión, se dice que “la estrella C (ver figura 11) podría alzarse y alejarse tanto de la Tierra que el ángulo formado en ella por los rayos que parten de los [...] puntos A y E [sobre la Tierra] se volvería agudísimo y como *absolutamente insensible y nulo*” [Galilei 1632, p. 248 [310]; el subrayado es mio]. Para que este ángulo se vuelva agudísimo, no se necesita que las estrellas fijas estén a una distancia infinita de la Tierra, aunque

probablemente si sea necesario esto último para que se vuelva absolutamente insensible y nulo. Y hay aquí un problema sintáctico: ‘Absolutamente’ se refiere tanto a lo ‘insensible’ como a lo ‘nulo’? Pues si se refiere únicamente a lo ‘insensible’, podría estar hablando solamente de que es insensible a las observaciones, mientras que si es absolutamente ‘nulo’, quiere decir que el ángulo es en sí nulo, y, por lo tanto, nos encontramos en un universo infinito.

También dice que

al alejar la estrella de B a C, con lo que el ángulo se hace cada vez más agudo, el rayo EBG se va alejando continuamente del rayo ABD por la parte inferior del ángulo, como lo muestra la línea ECF, cuya parte inferior EC está más alejada de la parte AC de lo que está la parte EB. Pero ya no puede suceder nunca que, por un alejamiento tan grande como se quiera, las líneas AD y EF se separen totalmente, pues finalmente tiene que acabar coincidiendo en la estrella. Y sólo podría decirse que se las separa y reduce a ser paralelas *si el alejamiento fuese infinito*, caso que no puede darse. Pero, puesto que (notaílo bien) *la distancia del firmamento en relación a la pequeñez de la Tierra [...] se considera infinita*, el ángulo contenido por los rayos que trazados desde los puntos A y E fuesen a terminar en una estrella fija se estima como nulo y esos rayos como dos líneas paralelas [Galilei 1632, p. 248 [311]; el subrayado es mio].

Parecería ser que Galileo rechaza explícitamente la infinitud del universo pues dice que no puede darse el caso de que el alejamiento fuese infinito. Y este caso no es posible porque los rayos deben coincidir en la estrella. Por otro lado, afirma que si la distancia del firmamento en relación a la pequeñez de la Tierra se considera infinita; para ver esto, considera un punto H sobre la esfera de las estrellas fijas, un rayo EH y la distancia de E a A que están sobre la Tierra.

Entonces la proporción HE/EA tiende a infinito pues HE es infinita o EA tiende a cero. Es más plausible que hable de la primera opción pues nunca dice explícitamente que EA tiende a cero. También habla de que el ángulo AHE es nulo y de AH/HE ; con esto nos está dando a entender que H (que es una estrella fija) es el punto al infinito. Por lo tanto, el universo es infinito.

Sin embargo, Galileo no se compromete tanto y se limita a referirse a una comparación entre los ángulos y la posición de la estrella. Dice que si tal ángulo resulta ser insensible entonces las líneas son paralelas, a partir de lo cual, se seguiría que el universo sería infinito; pero si ese ángulo fuese notable, entonces la nova parecería estar por debajo de las estrellas fijas e incluso en la región sublunar si el ángulo ABE fuese mayor que el que se formaría en el centro de la Luna . Y sigue siendo curiosa la situación pues parecería ser que Galileo defiende la posición de que la nova se encuentra en la región de las estrellas fijas pues páginas atrás⁵ dice que Chiaramonti desechó, para su análisis comparativo, observaciones que situaban a la nova en dicha esfera.

Pero también le dice Salviati a Simplicio que “[...] la distancia de la nova no se puede hacer tan grande que el muchas veces mencionado ángulo se desvanezca enteramente y que los dos rayos de los observadores de los distintos lugares A y E se hagan paralelos” [Galilei 1632, p. 249 [312]]. Y entonces explica que si las observaciones deducen esto entonces no son buenas, añadiendo que si estas dos líneas están más alejadas en la parte superior que en la

⁵ Ver Galilei 1632, p.246 [308-309].

inferior, entonces las observaciones son totalmente erróneas. De esto se infiere que la nova no puede estar sobre la circunferencia de las estrellas fijas y, por lo tanto, el universo no es infinito. Un poco más adelante desecha que sea probable la segunda opción, por simples argumentos geométricos.

Posteriormente se discute que las observaciones reportadas por Chiaramonti son erróneas. Salviati dice: “De los lugares en que colocar la nova, algunos son manifiestamente imposibles y otros posibles. Es absolutamente imposible que fuese superior a las estrellas fijas en un intervalo infinito porque tal sitio no existe en el mundo, y si existiese la estrella allá nos habría resultado invisible” [Galilei 1632, 251 [315]]. Galileo dice que es imposible que haya algo en un intervalo infinito más allá de las estrellas fijas, pero qué pasa si el intervalo es finito. ¿Qué no se supone que las estrellas fijas son la ‘frontera’ del universo? ¿Qué sucede con la concepción aristotélica de que infinito es aquello que siempre tiene algo más allá de él mismo? El problema real aquí es el intervalo infinito, pues si tal intervalo existe y admitiendo que el universo es infinito, se puede decir que Galileo es aristotélico en este aspecto.

También dice que es imposible que la nova esté sobre la superficie de la Tierra o incluso dentro del globo terrestre; sin embargo, Galileo no ha dicho en donde está situada la nova. Dice que no es que sea imposible que la nova esté más allá de las estrellas fijas, que sería un lugar imposible, sino que el error está en la cantidad de los grados y minutos con los que se numera el instrumento de medición. Pone el ejemplo de que si se sitúa a la estrella a la distancia de Saturno, con sólo aumentar o disminuir un minuto la elevación tomada con el instrumento, se

transformará en una distancia infinita y por ello de posible en imposible; también al revés es válido el razonamiento. Con esto está evitando entrar en la polémica acerca de la infinitud del universo. Es mucho más fácil establecer un error en el instrumento de medición que atribuirse una idea. Se puede afirmar que sigue la misma lógica que cuando defiende el sistema copernicano. No se compromete a nada y simplemente hace notar los errores de los peripatéticos.

Dice Salviati que a partir de las observaciones planteadas por el autor, es más probable que la nova se encuentre entre las fijas y aun más arriba, pero sabemos que nunca en un intervalo infinito. Después de muchos cálculos, dice que las observaciones que sitúan a la nova infinitamente alta son más numerosas que las la sitúan por debajo de la Luna, por lo que es más probable y claro que la estrella esté entre las fijas más remotas. Salviati concluye diciendo que todas las observaciones presentadas por Chiaramonti sitúan a la nova entre las estrellas fijas, y a la pregunta de Sagredo de qué argumentos usa el autor para no situarla ahí, dice que utiliza los paralelajes y las refracciones, aunque aclara que no sería suficiente el paralelaje, que podría darse, para ubicarla en la región sublunar.

Hasta aquí, Galileo ha hablado de la probabilidad de que la nova se encuentre en la región de las estrellas fijas. Sin embargo, Galileo nunca dice si ésta es su postura. Además, tampoco concluye nada al respecto del tamaño del universo. Por otro lado, esta discusión de la posición de la nova en el firmamento no es el único lugar donde habla del tamaño del universo.

Tal vez la única parte donde Galileo se refiere explícitamente a un universo infinito es cuando Salviati dice que “[...] si toda la esfera estrellada fuese un único cuerpo resplandeciente, ¿quién no entiende que en el espacio infinito se puede señalar una distancia tan grande, desde la cual tal esfera lúcida aparezca tan pequeña e incluso menor de lo que nos parece ahora una estrella fija, desde la Tierra?” [Galilei 1632, p. 321 [397]]. Beltrán dice [ver Galilei 1632, p. 323, n. 87] que a lo largo de toda su argumentación, Galileo ha utilizado comparaciones y valores relativos y no utiliza valores absolutos; por lo tanto, no se debe tomar en un sentido estricto lo del ‘espacio infinito’. Pero no sólo eso, sino que líneas más arriba [396], Galileo se refería justamente a lo mismo. Dice que ‘grande’, ‘pequeño’, ‘inmenso’, ‘mínimo’, y demás términos, no son absolutos sino relativos.

3.5 EL CENTRO DEL UNIVERSO.

Un problema difícil de arreglar es el siguiente. En diversos lugares, Galileo habla del centro del universo; sin embargo, nunca nos dijo algo claro con respecto al tamaño del universo. Evidentemente, si el universo es finito, tiene un centro, mientras que si es infinito, no lo tiene. Recordemos que Aristóteles consideraba al universo como finito y poseedor de un centro, donde éste centro y el centro de la Tierra coinciden. Quiriendo ver si existe un cuerpo infinito

en el mundo, dice que ‘vemos que el cielo da vueltas’;⁶ suponiendo que hay un cuerpo infinito, en clara alusión al universo, éste tendría que moverse en torno a un centro, pero que se dé este caso es imposible,⁷ por lo que no existe un cuerpo infinito, y menos si se mueve, pues se necesitaría un tiempo infinito para completar la totalidad de su movimiento. “Es imposible, por tanto, que lo que se mueve en círculo sea infinito” [Aristóteles 1996a, 272^b17]. Poco después, insiste en lo mismo: “es evidente que lo que se mueve en círculo no es infinito ni ilimitado, sino que tiene fin” [Aristóteles 1996a, 272^b17]. Pero también da pruebas para demostrar que cualquiera de los movimientos simples le es propio al cuerpo infinito. Con esto establece la finitud del universo de manera tajante.

Por otro lado, Nicolás de Cusa tiene una opinión distinta. Dice que “es imposible que haya alguna máquina mundana, ya sea la tierra sensible, o el aire o el fuego, o cualquier otra cosa, como centro fijo e inmóvil con relación a los varios movimientos de los orbes” [De Cusa 1440, p. 126]. Y claramente el universo no puede tener un centro pues a pesar de que “este mundo no es infinito, sin embargo, no puede concebirse como finito, por carecer de términos entre los que esté comprendido” [De Cusa 1440, p. 126], la Tierra “no es el centro del mundo, tampoco lo es la esfera de las estrellas fijas u otra cosa de su circunferencia, aunque comparando la Tierra con el cielo, la Tierra parezca más próxima al centro” [De Cusa 1440, pp. 126-127].

⁶ Aristóteles, 1996, 272^a5.

⁷ Ver Aristóteles 1996a, 271^b7-272^a5.

Galileo quiere discutir si la Tierra está en movimiento, por lo que supone que el mundo es finito y por lo tanto, poseedor de un centro. Simplicio afirma que ya Aristóteles había demostrado que es finito, limitado y esférico.⁸ El problema es que todas las pruebas aristotélicas se derrumban si se prueba que el universo no está en movimiento, además de que Copérnico ya había indicado que “el argumento más fuerte para intentar demostrar que el mundo es finito es el movimiento” [Copérnico 1543, p. 26 [15]].

En tono de burla, Galileo dice que los cuerpos van hacia el centro de la Tierra, pero que no sólo eso, sino que van hacia el centro del universo aunque no sabemos donde se encuentra: “[...] hacia el [centro] del universo, que no sabemos donde está, ni si existe y que aunque de hecho exista no es más que un punto imaginario y una nada sin ninguna dificultad” [Galilei 1632, p. 36 [61]]. Dado el tono burlón con que se refiere a esta situación, no es demasiado claro su pensamiento con respecto a la infinitud del universo. Es sabido que Aristóteles defiende un universo finito, pues si fuera de otro modo, no estaría determinado ni tendría forma, lo cual, en el sentido aristotélico sería físicamente inexistente; De Santillana agrega [Galilei 1964, p. 44] que aún Kepler creía en esta finitud. Sin embargo dice que Galileo prefiere, así como Bruno, la infinitud aunque se abstiene de llegar a conclusión alguna como las de Bruno, tal vez debido a las consecuencias que tuvieron sus afirmaciones. Parecería ser, insisto, que debido al tono burlón, que nos encontramos ante uno de los argumentos donde se defiende la infinitud: no

⁸ Lo de la esfericidad lo demuestra en el *De caelo*, 286^b10-287^b22.

hay razón suficiente para asumir que el universo tiene un centro, ni que el concepto tiene un significado físico claro.

La primera dificultad que se plantea para que la Tierra pueda moverse alrededor de un centro fijo e inmóvil, es que, según Simplicio, no puede a la vez estar moviéndose en torno a una circunferencia por debajo del Zodiaco y ser el centro del mismo. Agrega que entiende como centro al del universo, el del mundo, el de la esfera estrellada, el del cielo. Salviati responde que no se sabe si dicho centro existe, pues nadie ha probado que el mundo sea finito y determinado o infinito e ilimitado. Este punto es de suma importancia. Tal vez Galileo no se ha pronunciado por la infinitud del universo, pero tampoco lo ha hecho con respecto a su finitud. Probablemente sus argumentaciones puedan llevar a pensar en que defiende un universo infinito, pero aquí es explícito que no tiene por qué pensar en un orbe finito. Ni siquiera él ha sido capaz de demostrar que el universo es finito, ni mucho menos ha podido demostrar la infinitud del universo.

Copérnico aumentó el tamaño del mundo lo suficiente para que el argumento del paralelaje no fuera decisivo, y comenta:

pero dejemos la discusión a los fisiólogos [filósofos de la naturaleza] si el mundo es finito o infinito [...] teniendo nosotros como seguro esto: que la Tierra está limitada por sus polos y delimitada por una figura esférica. Luego, por qué dudamos aun en concederle una movilidad por naturaleza congruente con su fama, en vez de deslizarse todo el mundo, cuyos límites se ignoran y no se pueden conocer [...] [Copérnico 1543, p. 26 [14-15]].

Más adelante dice que “el mundo es esférico, inmenso, *semejante al infinito*” [Copérnico 1543, p. 39 [24]; el subrayado es mio]. Es decir, Copérnico necesita un universo de gran tamaño, enorme y semejante al infinito, pero no quiere decir que el universo sea *de facto* infinito. Galileo se refiere a lo mismo diciendo que, hablando del centro del universo y aceptando que es finito, tiene forma esférica, se mueve en círculo y tiene necesariamente, respecto a la forma y al movimiento, un centro; cuando se refiere al mundo, dice: “de cuyo tamaño no tenemos información sensible más allá de las estrellas fijas” [Galilei 1632, p. 278 [349]]. Sin embargo, que no se tenga información al respecto, no es concluyente para afirmar ni la finitud ni la infinitud del universo. Por otro lado, que los límites del mundo se ignoren y no se puedan conocer, en aquella época, no sugiere necesariamente que el mundo es infinito. Podría darse el caso de que fuera finito y aun así no poder conocer los límites del mundo pues puede darse el caso de que éstos se encuentren a una gran distancia, más allá de las estrellas fijas, y no sean observables con algún telescopio. Es preferible tal vez, a la manera de Nicolás de Cusa, hacer alusión a un universo indeterminado, más que infinito.

4 EL INFINITO EN LA FÍSICA GALILEANA

El movimiento siempre fue una de las grandes preocupaciones de Galileo. Así, en el *Dialogo*, Galileo se ocupa de este tema al defender la tesis copernicana, mientras que en los *Discorsi* se va a referir a los movimientos locales como una nueva ciencia. En el *Dialogo* habla, principalmente del movimiento terrestre, así como del movimiento de los orbes celestes, ocupándose sobre todo de movimientos tales como el rectilíneo, el circular, el acelerado, pero siempre teniendo presente que quiere defender la idea de una Tierra en movimiento. Por otro lado, en los *Discorsi*, se refiere también al movimiento, pero en otro contexto, es decir, desde un punto de vista teórico en lugar de uno aplicado.

Koyré tiene una visión interesante de la concepción galileana del movimiento. Se pregunta del por qué Galileo no fue capaz de plantear explícitamente el principio de inercia, si una de los objetivos de la ciencia galileana fue intentar la matematización de la naturaleza. Según Koyré, Galileo fracasa en este intento porque, a diferencia de Descartes, no fue capaz de pensar en un universo infinito: “la creencia en la finitud de este universo levantaba una barrera

infranqueable ante el pensamiento galileano” [Koyré 1985, p. 245]. Sin embargo, en este trabajo no se discutirá este problema.

4.1 MOVIMIENTOS RECTILÍNEO Y CIRCULAR

Según Galileo, así como Aristóteles, los cuerpos por naturaleza son móviles o inmóviles, aunque sólo el reposo y el movimiento circular son aptos para la conservación del orden del mundo. Y el universo está perfectamente ordenado y el movimiento rectilíneo no puede existir en un mundo con tales características. Al igual que Aristóteles, considera a una línea circular como perfecta y a una recta como imperfecta; es imperfecta porque si es infinita no tiene fin ni meta, mientras que si es finita, fuera de ella hay alguna cosa en la que se puede prolongar¹.

Además,

siendo el movimiento rectilíneo infinito por su propia naturaleza, porque la línea recta es infinita e indeterminada, es imposible que exista móvil alguno que tenga por naturaleza un movimiento espontáneo en línea recta, es decir hacia donde es imposible llegar por no haber una meta predeterminada. Y la naturaleza, como bien dice el propio Aristóteles, no trata de hacer lo que no puede ser hecho, ni trata de mover hacia donde es imposible llegar [...] y si alguno dijera que si bien la línea recta, y por tanto el movimiento por ésta, es producible hasta el infinito, esto es sin límite,

¹ Ver Aristóteles 1996a, 269^a22-23.

pero que, sin embargo, la naturaleza de un modo, por así decir, arbitrario le ha asignado unos límites y ha dado a sus cuerpos naturales el instinto de moverse hacia éstos [Galilei 1632, p. 18 {43}].

El movimiento circular es finito y delimitado pues la superficie recorrida es finita y se regresa al punto de partida; sin embargo, Galileo aclara que el movimiento circular ni siquiera es finito ni delimitado pues ningún punto es principio ni final del movimiento. Debido a esto, se puede decir que el móvil siempre se está alejando de su punto 'inicial' y llegando al 'final', por lo que el movimiento no puede ser ni enlentecido (por la repugnancia del móvil cuando parte) ni acelerado (que es cuando se dirige hacia donde tiene una cierta inclinación) y, por lo tanto, es uniforme. Como el movimiento es uniforme y delimitado, se sigue entonces que es perpetuo, por la repetición de la rotación. Pero, aquí hay un problema en la lógica de Galileo: el movimiento es finito pero perpetuo y, por lo tanto, infinito. El problema es que está considerando al movimiento circular como finito y delimitado por la región en la cual se mueve el objeto. Un círculo es, efectivamente, una región cerrada y acotada², por lo que el movimiento es en realidad infinito y no finito y delimitado.

Continúa diciendo que este movimiento perpetuo no se puede dar en una línea recta pues si el movimiento se enlentece, entonces se sigue que no puede ser perpetuo, mientras que el acelerado llega necesariamente a su meta, si es que existe; si ésta no existe, no puede haber movimiento hacia ella³ pues la naturaleza no mueve hacia donde es imposible llegar.

² Evidentemente Galileo no utiliza estos términos.

³ Hay una discrepancia en las traducciones. En la de Beltrán se dice que no hay movimiento. En este caso se está usando la de Drake. Ver Galilei, 1967, p. 32.

4.2 MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO.

Antes que otra cosa, veamos la definición galileana de movimiento uniforme: “Por movimiento igual o uniforme entiendo aquel en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, cualesquiera que éstos sean [*quibuscuniquè*], son iguales entre sí” [Galilei 1634, p. 266 [191]]. A la vieja definición únicamente se le agrega ‘cualquiera.’ A esta definición, le agrega una serie de axiomas para el movimiento uniforme. Sin embargo, lo realmente interesante está en su concepción del movimiento uniformemente acelerado.

Como una primera definición de movimiento uniformemente acelerado, dice que es aquel que, “partiendo del reposo, adquiere en tiempos iguales iguales incrementos de velocidad” [Galilei 1634, p. 278 [198]]. Posteriormente da una nueva definición ligeramente modificada: “llamamos movimiento igualmente, esto es, uniformemente acelerado, a aquel que, partiendo del reposo, adquiere, en tiempos iguales, iguales incrementos de rapidez” [Galilei 1634, p. 288 [205]]. En la original se refiere a ‘incrementos de velocidad’, pero en esta nueva dice ‘incrementos de rapidez’. Aquí hay un problema un tanto fuerte: desde un punto de vista vectorial⁴, no es lo mismo rapidez que velocidad. La velocidad es el cambio del vector posición

⁴ Punto de vista que no será analizado en esta tesis, pero podemos apuntar lo siguiente: el concepto moderno de vector es una idea posterior a Galileo, pero esto no quiere decir que no tuviera la idea de ello. Al contrario, la tiene, pues en algunos problemas que maneja se encuentra implícito un concepto que posteriormente va a ser definido como *vector*.

con respecto al tiempo, mientras que la rapidez es el módulo de este cambio. Galileo no puede estar pensando en vectores y magnitudes escalares.

4.2.1 GRADOS DE VELOCIDAD Y LENTITUD EN EL MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO.

Un problema muy interesante y que tiene que ver con el movimiento uniformemente acelerado, es el de los grados de velocidad y de lentitud. Galileo habla de un cuerpo que tenga naturaleza móvil y que se encuentra en estado de reposo por alguna causa, se moverá si es que tiene por naturaleza alguna inclinación hacia algún lugar. Debido a esa inclinación, el cuerpo se va a acelerar continuamente. Define al estado de reposo como el grado de infinita lentitud del movimiento [ver Galilei 1632, p. 20 [44]]. Considera que entre cualquier grado de velocidad y el estado de quietud, hay infinitos grados de lentitud. Sagredo pregunta entonces que cómo se pasa en un tiempo muy pequeño por los infinitos grados de lentitud precedentes a cualquier velocidad adquirida por el móvil en ese tiempo. La resolución a la dificultad planteada es que el móvil efectivamente pasa por dichos grados, pero que en su paso el móvil no se detiene en ninguno, y como ese paso requiere únicamente un instante de tiempo y debido a que cualquier tiempo, por pequeño que sea, contiene infinitos instantes, entonces se puede asignar a cada uno de los infinitos grados de lentitud un instante de tiempo, por más pequeño que sea el tiempo.

Cuando se refiriere a los grados de velocidad, dice que dado un grado, siempre hay uno menor, y que cuando el móvil adquiere alguno de esos grados necesita pasar primero por alguno de los grados de velocidad menores. Acepta que es una idea platónica el que un móvil no pueda pasar del estado de reposo a algún grado de velocidad determinado en el cual haya de mantenerse uniforme e indefinidamente, a no ser que pase por todos los grados de velocidad menores, o a través de los grados mayores de lentitud que se den entre un grado de velocidad dado y el máximo grado de lentitud (el reposo) [ver Galilei 1634, pp. 405-406 [283]]. Resulta natural pensar en que primero pasa por los grados de velocidad más próximos a su punto de partida para pasar posteriormente por los más alejados. Pero, como él mismo dice, el grado desde que el móvil empieza a moverse es el de máxima lentitud, es decir el del reposo. En este razonamiento está usando un argumento similar al de la Dicotomía de Zenón. Además, está aceptando la existencia de un infinito actual ya que entre el estado de reposo y donde alcanza el primer grado de velocidad, hay una infinidad de grados de lentitud. También habla del móvil pasando por cada uno de los grados de velocidad pero que no se detiene en ninguno de ellos, lo que da la idea de un movimiento continuo y, sin embargo, esto nunca es explícito.

Sagredo dice que un grave al caer, partiendo del reposo, comienza a acelerarse, según la proporción en que aumenta el tiempo desde el primer instante del movimiento, y al ser el tiempo subdivisible al infinito, en cuanto la velocidad antecedente va disminuyendo no habrá algún grado de velocidad tan pequeño, o algún grado de lentitud tan grande en el que no se encuentre el mismo móvil después de que para del grado de lentitud infinita. Es decir, un

móvil no se movería aunque pasara mucho tiempo, pero los sentidos muestran que un grave al caer pasa inmediatamente a tener una velocidad notable. Salviati responde que la misma experiencia resuelve la dificultad y que muestra que los primeros movimientos del móvil son enormemente lentos. Añade que la velocidad puede aumentar y disminuir sin límite y que, por tanto, un móvil que parte de la lentitud infinita puede alcanzar inmediatamente un cierto grado de velocidad. Entonces, la adquisición de los grados de velocidad puede llevarse en el mismo orden que la disminución de los grados y, por tanto, en un móvil ascendente, al disminuir la velocidad, pasa por todos los grados de lentitud antes de llegar al reposo. Simplicio dice que si los grados de lentitud cada vez mayores son infinitos entonces nunca se llegará al estado de reposo, pero que esto no parece suceder. La respuesta de Salviati es que esto ocurrirá si el móvil permanece durante un cierto tiempo en cada grado de velocidad, pero que el móvil pasa por ellos en un instante. Y que, puesto que en cualquier intervalo de tiempo hay infinitos instantes, éstos serán suficientes para corresponder a los infinitos grados con que disminuye la velocidad. La razón de que el móvil no permanece en un mismo grado de velocidad es que al lanzar un objeto hacia arriba, si permaneciese en ellos, su movimiento uniforme sería ilimitado [ver Galilei 1634, pp. 278-282 [198-201]].

Galileo dice que el movimiento acelerado tiene aumento continuo y que, dado esto, la sucesión de grados de velocidad crece continuamente y que los grados de velocidad no se pueden dividir en algún número determinado, porque al cambiar de instante en instante, siempre son infinitos.

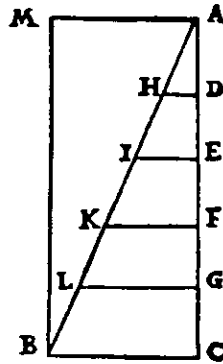


Figura 12: los grados de velocidad.

Se toma el triángulo ABC (ver figura 12) y se toman sobre AC tantas partes iguales como se quiera, cuyas representaciones sean líneas paralelas a BC. Las partes sobre AC denotan tiempos iguales y las paralelas a BC representan los grados de velocidad acelerados y crecientes uniformemente en tiempos iguales, siendo A el estado de reposo. Entonces, en el tiempo AD, el móvil adquirió el grado de velocidad DH y así sucesivamente. Como la aceleración se hace continuamente de instante en instante y no intermitentemente (es decir, no es discreta) de una parte extensa de tiempo en otra, y bajo el supuesto de que A es el estado de reposo (grado mínimo de velocidad), antes de que el móvil adquiriera el grado de velocidad DH en el tiempo AD, ha pasado por otros infinitos grados sucesivamente menores, ganados en los infinitos instantes que hay en el tiempo DA que corresponden a los infinitos puntos que hay en la línea DA. Entonces, para representar la infinitud de grados de velocidad que preceden a DH, hay que suponer que hay infinitas líneas sucesivamente menores trazadas desde los infinitos puntos

de la línea DA, paralelas a DH, y esta infinidad de líneas representa la superficie del triángulo AHD. Y de este modo, se supone que cualquier espacio recorrido por el móvil con un movimiento que, empezando desde el reposo, va acelerándose uniformemente, consume infinitos grados crecientes de velocidad, conforme a las infinitas líneas que, empezando desde el punto A, se trazan paralelas a la línea HD y a las IE, KF, LG, BC, continuando el movimiento cuando se quiera [ver Galilei 1632, pp. 199-200 [255]].

Si se completa el paralelogramo AMBC (ver figura 12) y se prolongan hacia BC todas las paralelas, que son infinitas en número, desde AC, dado que BC era el grado máximo de velocidad adquirido por el móvil en el movimiento acelerado y la superficie del triángulo era la suma de toda la velocidad con la cual, en el tiempo AC, el móvil recorrió el espacio; el paralelogramo viene a ser un agregado de grados de velocidad, todos iguales a BC, resultado de las velocidades y que es el doble de la masa de las velocidades crecientes del triángulo, del mismo modo que el paralelogramo es el doble del triángulo. Y entonces, si el móvil al caer ha pasado por los grados de velocidad acelerada, conforme al triángulo ABC, ha recorrido en tanto tiempo tal espacio, con velocidad uniforme, correspondiente al paralelogramo, recorre con movimiento uniforme, en el mismo tiempo, el doble del espacio recorrido por el movimiento acelerado.

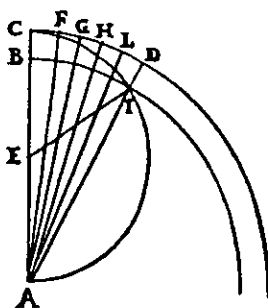


Figura 13

En otro problema, se discute la trayectoria que describiría un grave al caer desde lo alto de una torre (ver figura 13). Galileo dice que debido “[...] a la infinita agudización del ángulo de contacto de los dos círculos DC y CI, el alejamiento desde lo alto de la torre, al principio es pequeñísimo, que es lo mismo que decir que el movimiento descendente es lentísimo, y más y más lento hasta el infinito según la proximidad al punto C, esto es al estado de reposo” [Galilei 1632, p. 144 [191]]. Claramente, el ángulo de contacto entre las dos circunferencias CD y DI es un ángulo que va ‘decreciendo’. Si se hace recorrer a un móvil por una curva que interseca a las rectas FA, GA, HA, LA y DA en los puntos F', G', H', L' y D', respectivamente, de tal modo que sean estos los puntos medios de los segmentos FF'', GG'', HH'', LL'' y DD'', donde F'', G'', H'', L'' y D'' son los puntos de intersección de la trayectoria que describe el grave y los segmentos FA, GA, HA, LA y DA, respectivamente, y entonces conforme el móvil recorra esta curva en dirección a C, las circunferencias CD y CI estarán más próximas a él.

extenderá hasta el infinito antes de que pueda encontrarse con la prolongación de AE. En consecuencia, la proporción de la línea infinita TX con respecto a la infinita VX no será distinta de la proporción que se da entre la infinita VX y la infinita XC” [Galilei 1634, p. 345 [242]].

Aquí hay un problema y es que, como se vió en el capítulo 2, Galileo desecha ciertos argumentos diciendo que debido a que nuestro razonamiento es finito, no podemos aplicar los mismos argumentos a lo infinito. En este problema, está usando proporciones entre infinitos, i.e. $\infty/\infty=1$, pues si $B-A=>A/B=1$, pero tanto $A,B<\infty$. ¿Por qué se vale $\infty/\infty=1$?

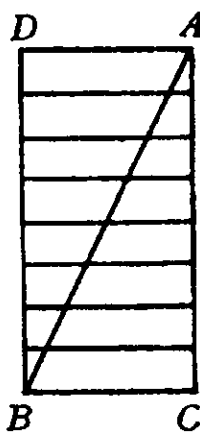


Figura 15.

Siguiendo otro procedimiento, se llega a la misma conclusión. Tómese el triángulo ABC (ver figura 15) y trácense paralelas a la base BC, las cuales representan los grados de velocidad incrementados continuamente a medida que aumenta el tiempo; “tales paralelas, al ser infinitas, del mismo modo que son infinitos los puntos en la línea AC y los instantes de un tiempo

cualquiera, darán origen a la superficie misma del triángulo” [Galilei 1634, p. 346 [243]]. Si suponemos que el movimiento prosigue durante un tiempo igual con movimiento uniforme, en lugar de movimiento acelerado, según el grado máximo de la velocidad adquirida, representada por BC, los grados de velocidad formarán un agregado similar al paralelogramo ADB, que es el doble del triángulo ABC. Por lo tanto, el espacio recorrido en el mismo tiempo, con grados de velocidad iguales entre sí, será el doble del espacio recorrido con los grados de velocidad representados por el triángulo ABC. En el plano horizontal el movimiento es uniforme, si no hay nada que lo acelere o lo retarde. Por lo tanto, el espacio CT (ver figura 14) recorrido en el tiempo AC es el doble del espacio AC. Este último es recorrido con movimiento acelerado a partir del reposo según las paralelas del triángulo; aquél es recorrido según las paralelas del paralelogramo, “las cuales, si se toman en su infinitud, son el doble que las infinitas paralelas del triángulo” [Galilei 1634, p. 346 [243]].

Aquí surge una dificultad y es que por qué son el doble si son una infinitud en ambos casos. Vuelve a tener el mismo problema que se mencionó líneas arriba. Está utilizando sus razonamientos para casos finitos en los casos que envuelven números infinitos.

4.3 MOVIMIENTOS Y CIRCUNFERENCIAS.

El teorema VI, proposición VI, del *Tratado sobre el movimiento uniformemente acelerado*, dice lo siguiente: “Si desde el punto más alto o más bajo de un círculo levantado verticalmente sobre el horizonte se trazan planos inclinados, cualesquiera que sean, hasta la circunferencia, los tiempos de caída a lo largo de tales planos serían iguales” [Galilei 1634, p. 314 [221]]. Del mismo teorema surge el corolario III:

Se infiere, además, que los tiempos de los movimientos que tienen lugar sobre los planos inclinados son iguales cuando las alturas de partes iguales de tales planos estén entre sí como las longitudes de los mismos planos: se ha demostrado, efectivamente, en la penúltima figura, que los tiempos de descenso por CA y DA son iguales cuando la altura de AB, igual a AD o, lo que es lo mismo, es a la altura DF como CA a DA [Galilei 1634, p. 318 [223]].

Entonces se comienza una discusión acerca de infinitas circunferencias generadas a partir de distintos movimientos. Si desde un punto determinado de un plano horizontal, se traza una serie de líneas que se extienden infinitamente en todas direcciones y si también se supone que sobre cada una de ellas se mueve un punto con velocidad uniforme, partiendo todos los puntos del mismo lugar a la misma velocidad y al mismo tiempo, entonces cada uno de estos puntos configurará la circunferencia de una serie de círculos cada vez mayores y que tienen como centro al punto original, tal como sucede con el agua cuando se arroja una piedra. Pero si se considera un plano vertical y desde el punto más alto se trazan líneas inclinadas con cualquier

ángulo prolongadas infinitamente, y se supone que a lo largo de ellas descenden móviles graves con movimiento naturalmente acelerado y con la velocidad apropiada a la inclinación de su plano, entonces siempre se verán en la misma circunferencia de cada uno de los círculos que van aumentando a medida que se alejan del punto.

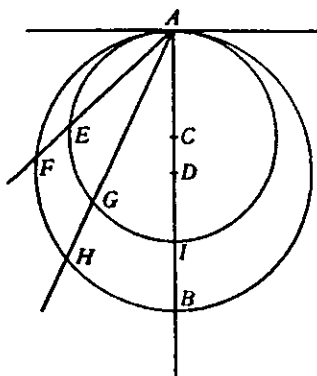


Figura 16.

Sea A el punto más alto (ver figura 16) y se toman líneas con cualquier inclinación tales como AF y AH siendo AB la perpendicular; si se toman dos puntos C y D en AB y se trazan circunferencias con estos puntos como centro que pasen por A, éstas cortarán a las líneas en los puntos F, H, B y E, G, I. Entonces, cuando los móviles descenden, el primero estará en E, el otro estará en G y el último en I y de este modo, si continúan descendiendo, en el mismo tiempo estarán en F, H y B. Estos móviles, o un número infinito de móviles que siguieran moviéndose a través de infinitas inclinaciones, se encontrarían siempre en las mismas circunferencias, las cuales irán aumentando infinitamente de tamaño.

De las dos especies, pues, de movimiento de los que se sirve la naturaleza nace con una admirable semejanza y diversidad la generación de infinitos círculos: una se coloca, como en su sede y principio, en el centro de los infinitos círculos concéntricos, mientras que la otra está situada en el contacto que un número infinito de círculos excéntricos tienen en su parte superior; el primero de estos dos movimientos es producido por movimientos que son iguales y uniformes, mientras que el segundo, por movimientos que no son ni uniformes ni iguales entre sí, sino que varían unos respecto a otros según que sean diferentes las inclinaciones. Más aún, si desde los dos puntos elegidos como origen del movimiento trazamos ahora una serie de líneas, no sólo a lo largo de planos horizontales y verticales sino en todas las direcciones, entonces, del mismo modo que en el caso de las que tenían su origen en un solo punto la producción de círculos tenía lugar yendo aquéllos siempre en aumento, así también aquí comienzan en un solo punto y se produce un número infinito de esferas o, mejor, una sola esfera que irá aumentando su volumen sin límite alguno; y esto de dos maneras: bien teniendo su origen en el centro o bien en la circunferencia de tales esferas” [Galilei 1634, p. 320 [225]].

Es claro que Galileo no puede separar al infinito de las circunferencias. En el caso de su física del movimiento, el infinito se encuentra vinculado con un movimiento perpetuo a lo largo de la circunferencia de un círculo. Además, estas circunferencias, en general, aumentan de tamaño hasta convertirse en una circunferencia infinita.

*Las mujeres, las castas y las otras,
movidas por una suerte de envidia
profesional, propia de cortesanas,
pero también por una ingenuidad
incurable, imaginan que en la alcoba
las posibilidades son infinitas.*
Adolfo Bioy Casares

SUMARIO

Se ha dicho ya en algunos lugares de este trabajo que es difícil sacar alguna conclusión con respecto al concepto galileano del infinito. Y no es fácil concluir algo debido a que no es posible extraer una teoría que unifique a la concepción galileana del infinito. Puede parecer contradictorio, pero no es posible, a mi parecer, obtener una interpretación histórica de este concepto en Galileo, que sea necesariamente consistente en las tres grandes ramas del conocimiento que se manejan en la presente tesis: matemáticas, cosmología y física.

Considero que la clave para comprender esta concepción galileana (o, tal vez, para comprenderla aún menos) es la carta a Liceti de 1640, donde afirma que es incapaz de tomar una decisión con respecto a lo finito y a lo infinito. Pero afirma que se siente atraído más por lo infinito, sobre lo finito, debido a su incompreensión; para lo finito, ningún principio de comprensión es requerido, puesto que nuestro entendimiento es finito. A pesar de que esta carta es tardía, quiero suponer que, en buena medida, esta idea del principio de incompreensión para lo infinito es muy anterior. Siempre nos dijo Galileo que al infinito no se le pueden aplicar

los mismo razonamientos que a lo finito, pero esto no contradice en nada a lo anterior, justamente por este principio de comprensión.

Usando a este mismo principio, Galileo no puede aceptar la existencia de cuerpos o superficies infinitas. Demuestra que una circunferencia infinita es igual, al menos localmente, a una línea recta. Con esto, lo que logra es mostrar es que el paso de lo finito a lo infinito no es trivial, puesto que los objetos que van de lo finito a lo infinito pierden totalmente su esencia, puesto que se convierten en incomprensibles.

Un punto sumamente importante es que Galileo necesita demostrar que una línea está compuesta de un número infinito de indivisibles. Una vez que logra esto, demuestra entonces que este número infinito de puntos es igual al número de puntos de cualquier recta. Después, extiende esta misma idea, diciendo que el número de puntos de una recta es igual al número de puntos de una circunferencia. La importancia de este hecho radica en que se puede considerar como un buen cimiento para la teoría de conjuntos que aparece hasta finales del siglo XIX. Cantor demostró que el número de puntos de una línea es igual al número de puntos de un plano, siendo ambos iguales a 2^{\aleph_0} . Galileo no es capaz de decir cuántos puntos hay en la recta y en la circunferencia, pero sabe que son una infinidad, además de que hay tantos en una como en otra. No es que Galileo haya influido en Cantor para la creación de la teoría de conjuntos, sin embargo, maneja algunas ideas que después serán definidas en esa teoría. Tal es el caso, también, del concepto de relación de orden.

Galileo afirma que no se pueden establecer comparaciones entre conjuntos infinitos. Esto es, hablando en un lenguaje moderno, no se pueden establecer relaciones de orden entre conjuntos infinitos. Más aún, no es posible, ni siquiera, comparar un conjunto finito con un conjunto infinito. La dificultad en este problema radica en que Galileo llegó a una aparente contradicción al comparar los números cuadrados y las raíces, con lo cual, puede decir, entonces, que no se pueden establecer las relaciones arriba mencionadas entre conjuntos infinitos; los atributos de menor, igual y mayor, no son aplicables para este tipo de conjuntos. Reitera entonces, que no es posible aplicar los mismo razonamientos que se utilizan para los objetos finitos, a los infinitos. Sin embargo, Galileo no le da la vuelta al problema y, en lugar de obtener esta conclusión, llegar a cuestionar su propia lógica para así conseguir otro tipo de resultados.

Por otro lado, en Galileo la discusión del tipo de infinito que maneja comienza a perder sentido. Le da lo mismo si el infinito es potencial o es actual. Así lo deja ver en ciertos argumentos, donde explícitamente dice que le concede a los peripatéticos que decidan qué tipo de infinito está manejando. Así, en sus demostraciones, pocas veces aclara si está utilizando un infinito potencial o un infinito actual.

Sin embargo, a pesar de que el infinito actual haya tenido que esperar algún tiempo para conseguir el *status* de plenamente aceptado, Galileo lo utiliza sin problema alguno. En su desarrollo de la física del movimiento, su concepción se basa en los grados de velocidad y de lentitud. A partir del grado de infinita lentitud, que es el reposo, un móvil va pasando por todos

los grados de lentitud antes de llegar al primer grado de velocidad. Tanto los grados de lentitud como los de velocidad, son infinitos en número. Y aquí hay un problema que tiene que ver con el infinito actual y con el infinito potencial. El agregado de grados de lentitud es un infinito actual, mientras que el de grados de velocidad puede pensarse como un infinito potencial. Esto es porque, para que el móvil adquiera el primer grado de velocidad, es necesario que pase primero por *todos* los grados de lentitud. Si aceptamos que puede existir una velocidad infinita, entonces el conjunto de grados de velocidad también es un infinito actual; si no aceptamos esto, entonces estamos lidiando con un infinito potencial.

El movimiento es una de las mayores preocupaciones de Galileo. Esto queda claro con la publicación de los *Discorsi*, donde el movimiento local adquiere el adjetivo de nueva ciencia. También esta idea queda reforzada con el *Dialogo*, donde la mayor preocupación es defender el sistema copernicano heliocentrista. En su física del cosmos, Galileo de nueva cuenta acude a los grados de velocidad y lentitud. Pero este no es punto central de la discusión concerniente al infinito y su cosmología.

El universo, ¿es finito o es infinito? Esta es una de las preguntas más interesantes que se pueden plantear en la historia de la ciencia. No obstante, Galileo nunca responde. Parecería que Galileo acepta explícitamente, acorde a Aristóteles, que el universo es finito. Sin embargo, a lo largo de sus argumentaciones deja entrever que no necesariamente considera al universo como finito. Con la aparición del telescopio, el universo *creció*. Pero de esto no necesariamente se sigue que el mundo es infinito. La discusión de la nova aparecida en 1572 no sólo sirve para

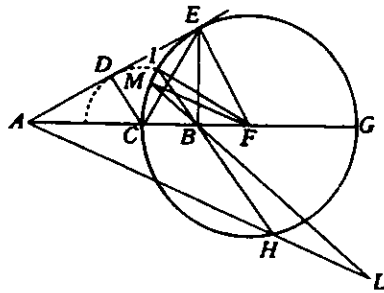
atacar a los peripatéticos, sino también para ofrecer argumentos en favor de la infinitud del universo. Nunca se refiere a cuál es su postura en cuanto a la ubicación de la estrella, sino que simplemente se limita a desechar las observaciones reportadas por Chiramonti. Parecería ser que prefiere situar a la nova entre las estrellas fijas más lejanas, o aún más allá, pero nunca en un intervalo infinito. Pero para intentar ubicar a la estrella, necesita manejar la idea de que la distancia de la Tierra a una región por arriba de las estrellas fijas es infinita.

Es preferible pensar que Galileo considera al universo como indeterminado, a la manera de Nicolás de Cusa, más que infinito. Esto es debido a que él mismo dice que nadie sabe donde se encuentra el centro del universo, además de que este centro y el centro de la Tierra no necesariamente coinciden. Si el mundo es finito, necesariamente tiene un centro, mientras que si es infinito, no lo tiene. Tiendo a pensar que Galileo prefiere a un universo infinito, pero que era muy difícil pronunciarse por ello. Con el proceso que llevó a Giordano Bruno a la hoguera, además del juicio que él mismo enfrentó, no le convenía afirmar la infinitud del universo.

Por último, cabe apuntar que para Galileo el infinito es necesario. Lo requiere para desarrollar tanto su física como sus matemáticas, para así establecer algunos de los fundamentos de la ciencia moderna.

APÉNDICE

Galileo quiere demostrar que la circunferencia de un círculo se convierte en una línea recta infinita. Demostrará que dada una recta, dividida según una cierta proporción se describirá un círculo tal que, trazando dos líneas rectas desde los extremos de la línea dada a cualquier punto de la circunferencia, mantengan la misma proporción que tienen entre ellas las partes de la línea propuesta. Es decir, demostrará dos cosas: *i)* que todos los puntos que cumplen esa relación están sobre una circunferencia, *ii)* que todos los puntos que están sobre la circunferencia son los únicos puntos que cumplen con esa relación. La demostración es complicada y difícil de seguir, por lo que en ocasiones se sigue el argumento de Galileo, mientras que en otras se utilizan argumentos propios.



Sea AB una recta dividida por el punto C en partes desiguales. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $AC > CB$.

Por demostrar, que existe C tal que $\forall x \in C, \frac{Ax}{xB} = \frac{AC}{CB}$

Demostración:

Sean C el centro del círculo con $r = CB$. Sea AE la tangente al círculo en el punto D . Entonces $CD \perp AE$.

Como

$$\angle DAC < \frac{\pi}{2} \Rightarrow BE \perp BA$$

y BE cortará a AE en el punto E .

Trácese EF perpendicular a AE . Sea F el punto de contacto con AB .

Para continuar con la demostración, se requiere el siguiente

Lema: $FE = FC$

Demostración:

Trácese EC y considérense $\triangle DEC$ y $\triangle BEC$.

$DE = BE$ pues son tangentes a la circunferencia.

$DC = CB$ pues son radios del círculo. Como comparten el lado EC , entonces $\triangle DEC \cong \triangle BEC$ por el criterio *LLL* de congruencias de triángulos.

Como $\angle EBC = \frac{\pi}{2}$, entonces $\angle BCE + \angle CEB = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \angle CEF + \angle CED = \frac{\pi}{2}$ pues $\angle FED = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \angle FCE = \angle FEC$

Por lo tanto, $FE = FC$ \square

Ahora, considérense $\triangle AFE$ y $\triangle EFB$.

$\angle EBF = \angle FEA = \frac{\pi}{2}$ pues $FE \perp AE$.

$\angle AFE = \angle BFE$.

Como EF es común, entonces $\angle EAF = \angle FEB$.

por lo tanto

$$\triangle AFE \sim \triangle EFB \quad (1)$$

Entonces

$$\frac{AF}{FE} = \frac{EF}{FB} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{CF}{FB} \quad \text{pues } FC = EF \text{ como se demostró en el lema 1}$$

dividendo (es decir, restando el antecedente del consecuente: de $AF - FC = AC$ y $CF - FB = CB$ se obtiene $\frac{AC}{FC} = \frac{CB}{BF}$) se tiene que

$$\frac{AC}{CF} = \frac{CB}{BF} \Rightarrow \frac{AC}{FG} = \frac{CB}{BF} \quad \text{pues } FC = FG \text{ por ser radios}$$

y

$$\frac{AB}{BG} = \frac{CB}{BF}$$

Por otro lado, *cómpoundo* (es decir, sumando al antecedente su consiguiente; de $AB + BG = AG$ y $CB + BF = CF$ se obtiene $\frac{AG}{GB} = \frac{CF}{FB}$); se tiene que $\angle DEC = \angle CEB$ y $\angle ECD = \angle BCE$.

$$\angle BCE + \angle CEB = \frac{\pi}{2} \text{ y } \angle BCE = \angle FCE$$

$$\angle CEF + \angle CED = \frac{\pi}{2} \text{ y como } \angle CED = \angle CEB$$

$$\Rightarrow \angle FCE = \angle FEC$$

y como $FE = FC$

Por lo tanto $\triangle ECF$ es isósceles.

Sea C un círculo con centro en F y radio $r = FE$

Como $\angle AEB$ está bisectado por EC

$$\Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{AE}{EB}$$

Se demostrará que $\frac{AG}{GB} = \frac{AC}{CB}$

Una demostración directa es que A, B, C y G son puntos armónicos y los segmentos no son dirigidos. Para puntos armónicos, se sabe que

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AG}{GB}$$

$$\frac{AG}{GB} = \frac{CF}{FB} \text{ es decir } \frac{EF}{FB} = \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB}$$

pues

$$\frac{EF}{FB} = \frac{AE}{EB} \text{ por la semejanza de } \triangle ABE \text{ y } \triangle BEF \text{ (por la ecuación 1)}$$

y son iguales a $\frac{AC}{CB}$ por hipótesis.

Sea $H \in C$ tal que $H = \cap\{BH, AH\}$

Proposición 1: $\frac{AC}{CB} = \frac{AH}{HB}$

Prolónguese HB hasta el punto de $I \in C$ y trácese IF .

Como $\frac{AH}{HG} = \frac{CB}{BF}$, entonces

$$AB \cdot BF = CB \cdot BG = IB \cdot BH \tag{2}$$

puesto que $\triangle ABH \sim \triangle BIF$ y entonces, $\frac{AB}{BH} = \frac{IB}{BF}$

Como $\angle ABH = \angle FBI$, entonces

$$\frac{AH}{HB} = \frac{IF}{FB} = \frac{EF}{FB} = \frac{AE}{EB}$$

$\frac{AH}{HB} = \frac{IF}{FB}$ puesto que $\triangle ABH \sim \triangle BIF$

$\frac{IF}{FB} = \frac{EF}{FB}$ pues BF es la base de $\triangle IBF$ y $\triangle BEF$
y además $I \in C$, $E \in C$

Por lo tanto, $\angle BIF = \angle BEF$

pero $\frac{EF}{FB} = \frac{AE}{EB}$ pues $\triangle ABE \sim \triangle BEF$ (por la ecuación 1)

Por lo tanto,

$$\frac{AH}{HB} = \frac{IF}{FB} = \frac{EF}{FB} = \frac{AE}{EB}$$

Proposición 2: No es posible que las rectas que tengan entre ellas tal proporción, partiendo de los extremos A y B se encuentren en punto alguno situado dentro o fuera del círculo CEG .

Demostración:

Se realizará por reducción al absurdo.

Supongamos que las rectas se intersectan en L .

$L \notin C$. Sean estas rectas AL y BL .

Prolónguese LB hasta $M \in C$. Trácese $MF = r$

Supongamos que $\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{CB} = \frac{MF}{FB}$ del mismo modo que $\frac{IF}{FB} = \frac{AC}{CB}$
 $\triangle ALB \sim \triangle MFB$ puesto que $\angle ALB = \angle MFB$ (son proporcionales),

$\angle MBF = \angle ABF$ y $\angle FMB < \frac{\pi}{2}$; $\angle LAB < \frac{\pi}{2}$ puesto que si $\angle FMB = \frac{\pi}{2}$

\Rightarrow la base del $\triangle MBF$ sería $BF = CG$

$\angle LAB < \frac{\pi}{2}$ pues $AL > BL$ donde AL es homóloga a AC y BL homóloga a BC

Por lo tanto, $\triangle ALB \sim \triangle MFB$ \square

Hay otro argumento para probar que $\triangle ALB \sim \triangle MFB$

$\angle ABH = \angle FBM$

$AB \parallel BF$ y $BH \parallel BM$

Como M depende directamente de la elección de L

entonces $MF \parallel AH$

Por lo tanto, $\angle AHB = \angle BFM$ y $\angle HAB = \angle BMF$

Y M depende de la elección de H pues si tomamos el caso patológico en que

$G = L$, entonces $M = C$

Por lo tanto, $\triangle ALB \sim \triangle MFB$, entonces

$$\frac{AB}{BL} = \frac{MB}{BF}$$

$\Rightarrow AB \cdot BF = MB \cdot BL$

Pero sabemos por (2) que

$$AB \cdot BF = CB \cdot BG = IB \cdot BH$$

Por lo tanto, $MB \cdot BL = CB \cdot BG$!

Por lo tanto, $L \in C$ \square

La demostración es análoga para L en el interior de C .

Galileo discute que la proyección no es mayor que el movimiento hacia abajo. Lo que quiere demostrar es que el espacio entre la tangente y la circunferencia es cada vez menor y, por lo tanto, la proporción que hay entre la tangente y la secante va a infinito.

Según Galileo, $AC > CB \Rightarrow \frac{AC}{CB} \rightarrow \infty$ conforme la secante se acerque al punto de contacto de la tangente y la circunferencia.

Sabemos que si A es el punto de tangencia de la recta con la circunferencia, y se traza un radio hacia el centro D de la circunferencia, entonces el $\angle DAC$ es recto. Sea B el punto donde la secante corta a la circunferencia.

Sean $AC = x$ y $CB = \varepsilon$. Como $AD = BD = r$

$$\begin{aligned}(r + \varepsilon)^2 &= r^2 + x^2 \\ r^2 + 2r\varepsilon + \varepsilon^2 &= r^2 + x^2 \\ 2r\varepsilon + \varepsilon^2 &= x^2 \\ \sqrt{2r\varepsilon + \varepsilon^2} &= x\end{aligned}$$

Por demostrar $\frac{x}{\varepsilon} \rightarrow \infty$, i.e.,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 2r)}}{\varepsilon} = \infty$$

Pero

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 2r\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital tenemos que

$$\frac{d(\sqrt{\varepsilon^2 + 2r\varepsilon})}{d\varepsilon} = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + 2r\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(2\varepsilon + 2r) = \frac{2(\varepsilon + r)}{2(\varepsilon^2 + 2r\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varepsilon + r}{\sqrt{\varepsilon^2 + 2r\varepsilon}}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{d\varepsilon} &= 1 \\ \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon + r}{\sqrt{\varepsilon^2 + 2r\varepsilon}} &= \infty \\ \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 2r\varepsilon}}{\varepsilon} &= \infty\end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{x}{\varepsilon} \rightarrow \infty$

BIBLIOGRAFÍA

ARISTÓTELES. 1995. *Física*. Madrid: Editorial Gredos. (Biblioteca Clásica Gredos, No. 203).

ARISTÓTELES. 1996a. *Acerca del cielo*. Madrid: Editorial Gredos. (Biblioteca Clásica Gredos, No. 229).

ARISTÓTELES. 1996b. *Physics*. Oxford: Oxford University Press.

ARQUÍMEDES. 1897. "On the Sphere and the Cylinder", contenido en: Thomas L. Heath. *The Works of Archimedes*. New York: Dover.

ARQUÍMEDES. 1988. *El Método*. México: Alianza Editorial Mexicana. (Col. El Libro de Bolsillo, No. 1151).

BIAGIOLI, Mario. 1993. *Galileo, Courtier. The Practice of Science in the Culture of Absolutism*. Chicago: The University of Chicago Press.

BOURBAKI, Nicolás. *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial

BOYER, Carl B. 1986. *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial. (Col. Alianza Editorial Textos, No. 94). [Carl B. Boyer. *A History of Mathematics*. New York: John Wiley and Sons. 1968]

BUNN, Robert. 1977. "Quantitative Relations between Infinite Sets." *Annals of Science* 34(1): 177-191.

CANTOR, Georg. 1955. "Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers." New York: Dover Publications. [Georg Cantor. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. 1895, *Mathematische Annalen*, vol. 46.]

CLAVELIN, Maurice. 1959. "Le problème du continu et les paradoxes de l'infini chez Galilée." *Thales* 10(1): 1-26.

DE CUSA, Nicolás. 1440. *La Docta Ignorancia*. Buenos Aires: Editorial Orbis (1a. Edición, 1984).

DEDEKIND, Richard. 1887. "The nature and meaning of numbers", contenido en: Richard Dedekind. 1963. *Essays on the theory of numbers*. New York: Dover Publications.

DIJKSTERHUIS, E.J. 1987. *Archimedes*. Princeton: Princeton University Press. [E.J.Dijksterhuis. Amsterdam: Eijnar Munksgaard. 1956]

DRAKE, Stillman. 1980a. "Galilei, Galileo", contenido en: *Dictionary of Scientific Biography*. American Council of Learned Societies. (Tomos V-VI, edición). Pp. 237-249.

DRAKE, Stillman. 1980b. *Galileo*. Madrid: Alianza Editorial (Col. El Libro de Bolsillo, No. 941, 1983). [Stillman Drake. *Galileo*. Oxford: Oxford University Press. 1980]

DUHEM, Pierre. 1985. *Theories of Infinity, Place, Time, Void, and the Plurality of Worlds*. Chicago: The University of Chicago Press.

EUCLIDES. 1991. *Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Editorial Gredos. (Col. Biblioteca Clásica Gredos, No. 155)

EUCLIDES. 1994. *Elementos. Libros V-IX*. Madrid: Editorial Gredos. (Col. Biblioteca Clásica Gredos, No. 191)

EUCLIDES. 1996. *Elementos. Libros X-XIII*. Madrid: Editorial Gredos. (Col. Biblioteca Clásica Gredos, No. 228).

FARRINGTON, B. 1980. *Ciencia y Filosofía en la Antigüedad*. Madrid: Ariel (Sexta edición, 1980)

FERRATER MORA, José. 1983. *Diccionario abreviado de filosofía*. México: Hermes (9a reimpresión, 1995).

FESTA, Egidio. 1990. "La Disputa del Atomismo: Galileo, Cavalieri y los Jesuitas." *Mundo Científico* 10(107): 1135-1143.

FRAJESE, Attilio. 1964. "Conzezioni infinitesimali nella matematica di Galileo." *Archimede* 16: 241-245.

GALILEI, Galileo. 1623. *El Ensayador*. Madrid: SARPE. (1984, Col. Los grandes pensadores, No. 35). [Galileo Galilei. *Il saggiaatore, nel quale con bilancia esquisita e giusta si ponderano le cose contenute nella libra astronomica e filosofica di Lotario Sarsi Sigensario*].

GALILEI, Galileo. 1632. *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*. Madrid: Alianza Editorial. (1994) [Galileo Galilei. *Dialogo supra i due massimi sistemi del mondo ptolemaico e copernicano*]. Trad. Beltrán.

GALILEI, Galileo. 1634. *Consideraciones y demostraciones sobre dos nuevas ciencias*. Madrid: Editora Nacional (Col. Biblioteca de la Literatura y el Pensamiento Universales No. 10, 2a. Edición, 1981).

GALILEI, Galileo. 1664. *Dialogue on the great world systems*. Chicago: The University of Chicago Press. [Galileo Galilei. *Dialogo dei Massimi Sistemi*]. Traducción de Salusbury, edición de Giorgio de Santillana.

GALILEI, Galileo. 1667. *Dialogue concerning the two chief world systems*. Berkeley: University of California Press. [Galileo Galilei. *Massimi Sistemi del Mondo, Tolemaico, e Copernicano*]. Traducción de Stillman Drake.

GALILEI, Galileo. 1988a. *Consideraciones sobre la opinión copernicana*. México: Alianza Editorial Mexicana. (Col. El Libro de Bolsillo, No. 953). [Galileo Galilei. *Considerazioni circa l'opinione copernicana*. En: Favaro, A. *Le opere de di Galileo Galilei*. Vol. V].

GALILEI, Galileo. 1988b. *La Gaceta Sideral*. México: Alianza Editorial Mexicana. (Col. El Libro de Bolsillo, No. 995). [Galileo Galilei. *Sidereus Nuncius. Dissertatio cum nuncio Sidereo*. En: Favaro, A. *Le opere di Galileo Galilei*. Vol. III, parte primera, Pp. 54-96].

- GALILEI, Galileo. 1994b. *Carta a Cristina de Lorena y otros textos sobre ciencia y religión*. Barcelona: Ediciones Altaya. (Col. Grandes Obras del Pensamiento, No. 58).
- GUEVARA, Julio César. 1996. "El infinito como una necesidad". Por aparecer.
- HILBERT, David. 1926. "On the Infinite", contenido en: Paul Benacerraf y Hilary Putnam. 1964. *Philosophy of mathematics. Selected readings*. Cambridge: Cambridge University Press. (2nd. Edition, 9th Printing, 1996).
- JONES, Charles. 1978. *The concept of one as a number*. Tesis doctoral. Toronto: IHPST.
- KNOLBLOCH, Eberhard. 1996. "Galileo and Leibniz: Different approaches to infinity." *Archive for the History of Exact Sciences* (por aparecer).
- KNORR, Wilbur R. 1989. *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*. Boston: Birkhäuser
- KOYRE, Alexander. 1985. *Estudios galileanos*. México: Siglo XXI editores.
- KOYRE, Alexander. 1988. *Del mundo cerrado al universo infinito*. México: Siglo XXI editores.
- KUHN, Thomas S. 1993. *La revolución copernicana*. Barcelona: Planeta-De Agostini.
- MOORE, A.W. 1995. "A brief history of infinity." *Scientific American* (4): 86-90.
- QUAN, Stanislaus. 1970. "Galileo and the problem of infinity. A refutation, and the solution. Part I. The geometrical demonstrations." *Annals of Science* 26(2): 115-151.
- QUAN, Stanislaus. 1972. "Galileo and the problem of infinity. Part II. The dialectical arguments, and the solution." *Annals of Science* 28(3): 237-284.
- RUIZ, Galo. 1998. "El concepto de infinito en Galileo." Tesis de licenciatura de Matemáticas (UNAM), apareciendo.
- SOLÍS, Carlos. 1993. "Retórica y geometría: Galileo, los jesuitas y los cometas." *Mathesis* 9(2): 179-207.

TOYODA, T. 1967. "Galileo's concepts of infinity and space", contenido en: *Symposium Internazionale di Storia, Metodologia, Logica e Filosofia delle Scienze*. Firenze: Gruppo Italiano di Storia delle Scienze. Pp. 249-253.

VAN HELDEN, Albert. 1995. "Atomism", contenido en: *The Galileo Project*. URL: <http://cs.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/Things/atomism.html> (*The Galileo Project*, URL: <http://cs.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/index.html>)

VILENKIN, N. Ya. 1995. *In Search of Infinity*. Boston: Birkhäuser. [N.Ya.Vilenkin. *V poiskakh beskonechnosti*]

VITA, Vincenzo. 1992. "El infinito matemático en Aristóteles y en su tiempo." *Mathesis* 8(2): 115-139.

ZELLINI, Paolo. 1991. *Breve Historia del Infinito*. Madrid: Ediciones Siruela. (Col. Libros del Tiempo, No. 34). [Paolo Zellini. *Breve storia dell'infinito*. Italia: Adelphi Edizioni, 1980].