

2

2ej.

01170



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ANALISIS DE SUPERFICIES CORRUGADAS PARA
LA SINTESIS DE PATRONES DE RADIACION.

T E S I S
P R E S E N T A D A P O R :
D E M E T R I O M A C I A S G U Z M A N
P A R A O B T E N E R E L G R A D O D E
M A E S T R O E N I N G E N I E R I A
(ELECTRICA)

ASESORES: M. EN C. AMANDA O. GOMEZ GONZALEZ.
DR. NEIL CH BRUCE DAVIDSON.

CIUDAD UNIVERSITARIA,

263623

JUNIO DE 1998.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A MI PADRE

EUGENIO MACIAS AGUILAR

IN MEMORIAN

Por sus aportaciones y orientación en la realización de este trabajo, quiero expresar mi agradecimiento a la M. en C. Amanda O, Gómez G. y al Dr. Neil Ch. Bruce D., ya que sin su invaluable apoyo la consecución de este objetivo hubiera sido prácticamente imposible.

Quiero expresar también mi gratitud al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante mis estudios de maestría.

INTRODUCCIÓN

Al trabajar con superficies reflectoras, se supone inicialmente que son totalmente suaves; sin embargo, siempre se presentan rugosidades que provocarían deformaciones en el patrón de radiación un campo electromagnético que incida en la superficie. Dichas deformaciones en el patrón de radiación, se deben a los efectos de reflexión y a un fenómeno siempre presente cuando se estudia la incidencia de ondas en superficies reflectoras, sean éstas conductoras o dieléctricas: El esparcimiento.

La pregunta que surge entonces es ¿ Pueden aprovecharse los fenómenos citados, en lugar de verlos como una desventaja, para generar patrones de radiación, con forma determinada, de antenas de abertura?.

La hipótesis que sustenta esta investigación se enuncia de la siguiente manera: Es factible utilizar teorías ópticas para analizar, dentro del rango de microondas, el comportamiento de campos reflejados en superficies conductoras y corrugadas.

El objetivo es presentar el modelo matemático que describa, en una y dos dimensiones, el comportamiento mencionado con el fin de incursionar, posteriormente, en un campo de la ingeniería que no se ha explotado totalmente: La síntesis de antenas de abertura de superficie conformable al conocer las características del campo reflejado así como las del campo incidente.

El primer intento de construir una antena reconfigurable con superficie corrugada se llevó a cabo en Inglaterra hace aproximadamente 10 años, posteriormente, la Agencia Espacial Europea en 1993 lleva a cabo otro estudio con el mismo fin; ambos proyectos se quedaron a nivel prototipo. Se puede encontrar mayor información al respecto en la dirección de internet <http://www.elec.qmw.ac.uk/antena/projects.html> así como en el séptimo artículo citado en la bibliografía de este trabajo.

El presente trabajo presenta la posibilidad de abordar una área de la ingeniería, como lo es la propagación de ondas así como la teoría de antenas, mediante la aplicación de teorías que "tradicionalmente" se encuentran en el campo de la óptica.

El cuerpo del trabajo consta de tres capítulos, el primero de los cuales muestra los antecedentes necesarios para situar al lector en el contexto del problema que se va a estudiar. Debido a que convergen la teoría electromagnética, la óptica y la teoría de antenas, se muestran las ecuaciones

fundamentales respectivas; sin embargo, se hace especial énfasis en la caracterización del fenómeno conocido como esparcimiento y en el uso de la teoría vectorial de Kirchhoff así como también del método de extinción, ya que la posible aplicación que se mostrará en el capítulo tres, está íntimamente relacionada con éste.

El capítulo dos se puede considerar como la transición entre el análisis bidimensional hecho en el capítulo uno y el análisis unidimensional así como la simulaciones que se llevarán a cabo en el capítulo tres. También muestra la obtención de las soluciones de las ecuaciones de esparcimiento, cuando se utiliza el teorema de extinción, mediante ecuaciones matriciales.

Por último, el capítulo tres muestra los resultados obtenidos de las simulaciones así como la discusión de éstos. Se presenta la comprobación, mediante el Teorema de extinción, de los resultados obtenidos con el método de Kirchhoff.

El capítulo tres se divide en dos partes principales, la primera de las cuales contiene cinco simulaciones del esparcimiento en superficies perfectamente conductoras unidimensionales y la segunda, constituida por un solo caso, que presenta el esparcimiento en una superficie perfectamente conductora bidimensional.

Debe señalarse que aunque el teorema de extinción pudo haberse utilizado para las simulaciones, por su naturaleza requiere de una gran cantidad de memoria así como de tiempo de procesamiento; aproximadamente, en una estación de trabajo SUN SPARC 20, para el caso unidimensional se necesitan dos minutos para 128 puntos de muestra en la superficie y para el caso bidimensional de 128×128 puntos se necesitan 250 minutos, mientras que con el método de Kirchhoff son necesarios 20 segundos para 256 puntos en el caso unidimensional y 17 minutos para 128×128 puntos en el caso bidimensional.

CAPÍTULO UNO "ANTECEDENTES"	2
1.1 ELECTROMAGNETISMO	2
1.1.1 Ecuaciones De Maxwell	2
1.1.2 Polarización	3
1.2 ÓPTICA	5
1.2.1 Caracterización del Fenómeno de Esparcimiento	5
1.3 SUPERFICIES CORRUGADAS	18
1.3.1 Desviación estándar de la variación de altura de la superficie	19
1.3.2 Longitud de correlación de la superficie	21
1.3.3 Criterio de Rayleigh	22
1.4 TEORÍA DE ANTENAS	23
1.4.1 Reflector plano	25
1.4.2 Reflector en esquina	25
1.4.3 Reflector parabólico	26
CAPÍTULO DOS "COMPORTAMIENTO DE LOS CAMPOS ESPARCIDOS EN UNA SUPERFICIE CORRUGADA UNIDIMENSIONAL"	34
2.1 Obtención de las ecuaciones de esparcimiento en una dimensión	34
2.2 Solución de la ecuación de esparcimiento mediante ecuaciones matriciales	40
2.3 Ecuaciones matriciales para las polarizaciones "s" o TE y "p" o TM	46
2.3.1 Polarización "s" o TE	46
2.3.2 Polarización "p" o TM	47
CAPÍTULO TRES " SIMULACIONES Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS "	48
3.1 Simulación usando superficies unidimensionales con distribución de rugosidades controladas	49
3.2 Simulación usando una superficie bidimensional con distribución de rugosidades controladas	64
CONCLUSIONES	72
BIBLIOGRAFÍA	74

Capítulo UNO

Antecedentes

En las siguientes secciones se enunciarán los antecedentes necesarios para situar al lector dentro del marco teórico requerido para abordar el problema que es objeto de estudio en este trabajo.

1.1 ELECTROMAGNETISMO

1.1.1 Ecuaciones de Maxwell

Considérense las siguientes expresiones

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) = \rho \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.4)$$

De las ecuaciones 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4, también conocidas como "Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial", es posible llegar a la ecuación vectorial inhomogénea de onda cuya forma es:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)) \quad (1.5)$$

Cabe señalar que en este caso se considera que el medio es lineal, isotrópico y homogéneo por lo que las relaciones constitutivas únicamente involucran la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío.

Tres posibles soluciones de la ecuación (1.5) dependiendo de la geometría del problema y del sistema de coordenadas que se este utilizando son las ondas planas, cilíndricas o esféricas¹

Un caso interesante se presenta cuando se analiza el comportamiento de ondas planas armónicas en el tiempo, localizadas en una posición específica en el espacio, esto es, que las componentes del vector de posición \vec{r} son constantes para todo tiempo t .

1.1.2 Polarización

Para facilitar la discusión matemática del concepto de polarización, se descompondrá al vector de campo eléctrico en función de dos vectores ortogonales entre si y que a su vez son ortogonales al vector de propagación \vec{k} .

Para un punto específico en el espacio, el campo eléctrico se puede escribir como²:

$$\vec{E}(t) = \hat{h}E_h + \hat{v}E_v = \hat{h}e_h \cos(\omega t - \psi_h) + \hat{v}e_v \cos(\omega t - \psi_v) \quad (1.6)$$

y a partir de las igualdades:

$$E_h = e_h \cos(\omega t - \psi_h) \quad (1.7)$$

y

$$E_v = e_v \cos(\omega t - \psi_v) \quad (1.8)$$

Se llega a:

¹ Born y Wolf, Principles of optics, página 14.

² Kong Jin Au, Electromagnetic wave theory, p.18

$$\left(\frac{E_h}{e_h}\right)^2 + \left(\frac{E_v}{e_v}\right)^2 - 2\frac{E_h E_v}{e_h e_v} \cos \psi = \text{sen}^2 \psi \quad \text{donde } \psi = \psi_v - \psi_h \quad (1.9)$$

La ecuación (1.9) representa una cónica por lo que, a continuación, se analizará su determinante asociado para definir si se trata de una parábola, hipérbola o elipse³.

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos \Psi \\ \frac{1}{e_h^2} & \frac{1}{e_h e_v} \\ \frac{\cos \Psi}{e_h e_v} & \frac{1}{e_v^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{e_h^2 e_v^2} (1 - \cos^2 \Psi) = \frac{\text{sen}^2 \Psi}{e_h^2 e_v^2} \geq 0 \quad (1.10)$$

Del resultado obtenido en la expresión (1.10) se llega a que la ecuación (1.9) representa una elipse rotada cuyo centro se encuentra localizado en el origen de coordenadas; se dice entonces que la onda está elípticamente polarizada. La figura 1.1 ilustra el concepto anterior:

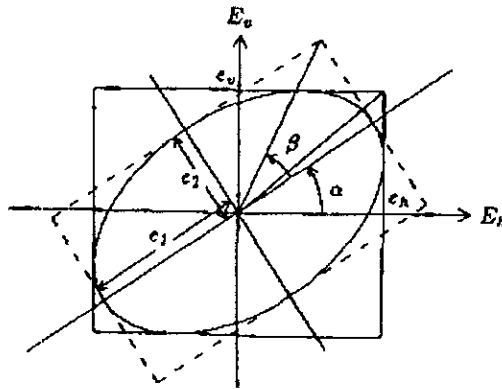


Figura 1.1 Polarización elíptica

Si en la ecuación (1.9) se sustituyen $\psi = \pi/2$ y $e_h = e_v = e_0$, se obtiene:

$$(E_h)^2 + (E_v)^2 = (e_0)^2 \quad (1.11)$$

Que es la ecuación de una circunferencia cuyo centro está localizado en el origen y cuyo radio es e_0 .

³Born y Wolf, Op. cit., p.25

Nuevamente, si en la ecuación (1.9) se sustituye $\psi = m\pi$; con m entero, se obtiene:

$$\frac{e_v E_h}{e_h} = E_v \quad (1.12)$$

Que es la ecuación de una recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas y cuya pendiente esta dada por e_v / e_h .

Si la forma de las expresiones obtenidas a partir de la ecuación (1.9) no coinciden, ya sea con la de la (1.11) o la (1.12); entonces la onda estará polarizada elípticamente. ⁴

1.2 ÓPTICA

1.2.1 Caracterización del fenómeno de esparcimiento

En este caso, para caracterizar el fenómeno del esparcimiento o "scattering", se hará una acotación a \mathbb{R}^3 y el tratamiento será vectorial. A su vez, es importante mencionar que no existe, como tal, una definición formal del fenómeno; sin embargo, se sabe que es de vital importancia conocer las características de los materiales que intervienen; siendo éstos, para el caso de campos electromagnéticos, la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética entre otros. Así pues, podría decirse que el "scattering" es el resultado de la interacción de una onda electromagnética incidente y un medio cualquiera con forma arbitraria.

La figura 1.2 permite, además de visualizar físicamente a los elementos que intervienen en el fenómeno, hacer algunas consideraciones necesarias para abordar el análisis matemático de éste.

⁴ Para mayor referencia con respecto al concepto de polarización Kong, Electromagnetic wave theory.

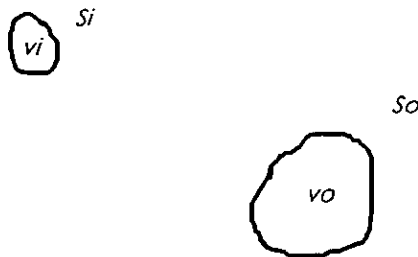


Figura 1.2 Elementos que interfieren en el fenómeno de esparcimiento

Como primer punto se tiene que el campo electromagnético se genera en la región S_1 , mientras que la región S_0 se considera como un medio pasivo; es decir que no existen fuentes en su interior. En cuanto a la forma de la región S_0 , se considera también que no tiene picos ni bordes ya que esto acarrearía, físicamente, una densidad superficial de corriente infinita y a su vez discontinuidades en el modelo matemático.

Existen tres casos posibles con base en las características propias del medio que se encuentra en el interior de S_0 ; esto último implica que se trata de esparcidores permeables y los casos son:

- 1) Que las funciones $\mu(r)$ y $\epsilon(r)$ sean continuas y derivables dentro de S_0 y también son continuas en la frontera; esto es $\epsilon(r)=\epsilon_0$ y $\mu(r)=\mu_0$ para r sobre la frontera.
- 2) Que las funciones $\mu(r)$ y $\epsilon(r)$ sean continuas y derivables dentro de S_0 , pero que exista una discontinuidad en la frontera; esto es, que $\epsilon(r) \neq \epsilon_0$ y $\mu(r) \neq \mu_0$ para r sobre la frontera.
- 3) Que $\epsilon=\epsilon_1$ y $\mu=\mu_1$ son constantes en el interior de S_0 .

Para un esparcidor pasivo, las condiciones de frontera son⁵:

$$\hat{n} \times \vec{E}_+ = \hat{n} \times \vec{E}_- \quad (1.13)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_+ = \hat{n} \times \vec{H}_- \quad (1.14)$$

Donde \vec{E}_+ , \vec{E}_- , \vec{H}_+ y \vec{H}_- son los valores límite en la frontera de S_0 desde el interior (-) y el exterior (+)

⁵ Varadan *et al.*, Field representations and introduction to scattering, p.99

Además de los casos anteriores se tiene, en forma idealizada, aquel en el que la superficie S_0 es un conductor perfecto para el cual, la condición de frontera correspondiente es⁶:

$$\hat{n} \times \vec{E}_+ = 0 \quad (1.15)$$

El análisis matemático tiene como punto de partida el teorema de Gauss o de la divergencia, que se muestra a continuación:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (1.16)$$

Donde: "S" es una superficie cualquiera que contiene al volumen "v"

$$d\vec{S} = \hat{n} dS \text{ siendo "}\hat{n}\text{" un vector normal a la superficie}$$

A partir del teorema de Gauss se obtiene la segunda identidad vectorial de Green⁷

$$\iiint_V [\vec{Q} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{P}) - \vec{P} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{Q})] dv = \iint_S [\vec{P} \times \nabla \times \vec{Q} - \vec{Q} \times \nabla \times \vec{P}] \cdot \hat{n} dS \quad (1.17)$$

Si $\vec{Q} = \vec{E}(\vec{r})$ y $\vec{P} = \overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}$ donde:

$\vec{E}(\vec{r})$: Es el campo eléctrico en el punto \vec{r}

$\overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}')$: Es la función diádica de Green

\vec{a} : Es un vector arbitrario y constante

Se tiene:

$$\iiint_V [\vec{E}(\vec{r}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}) - (\overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}))] dv = \iint_S [\overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) \times \nabla \times \overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}] \cdot \hat{n} dS \quad (1.18)$$

Reacomodando términos:

$$\iiint_V [\vec{E}(\vec{r}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}) - (\overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}) \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}))] dv = -\iint_S [\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \times (\overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}) + \vec{E}(\vec{r}) \times \nabla \times \overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a}] \cdot \hat{n} dS \quad (1.19)$$

⁶ Ibidem, p.99

⁷ To Tai Chen, Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory, p.4

Por otro lado, dentro de v se tiene que:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') - k^2 \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') = \bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}') \quad (1.20)$$

y

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}(\bar{r}) - k^2 \bar{E}(\bar{r}) = j\omega \mu \bar{J}(\bar{r}) \quad (1.21)$$

Al sustituir (1.20) y (1.21) en (1.19) la expresión resultante queda:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[\bar{E}(\bar{r}) \cdot (\bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}') + k^2 (\bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{a})) - (\bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{a}) \cdot (j\omega \mu \bar{J}(\bar{r}) + k^2 \bar{E}(\bar{r})) \right] dv = \\ - \iint_S \left[\nabla \times \bar{E}(\bar{r}) \times (\bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{a}) + \bar{E}(\bar{r}) \times \nabla \times (\bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{a}) \right] \cdot \hat{n} dS \end{aligned} \quad (1.22)$$

La ecuación (1.22) puede simplificarse aun mas como se muestra:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[\bar{E}(\bar{r}) \cdot (\bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}')) \right] dv - j\omega \mu \iiint_V \left[(\bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{a}) \cdot \bar{J}(\bar{r}) \right] dv = \\ - \iint_S \left[\nabla \times \bar{E}(\bar{r}) \times (\bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{a}) + \bar{E}(\bar{r}) \times \nabla \times (\bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{a}) \right] \cdot \hat{n} dS \end{aligned} \quad (1.23)$$

Por otro lado, se puede demostrar que:

$$\iiint_V \left[\bar{E}(\bar{r}) \cdot (\bar{I} \delta(\bar{r} - \bar{r}')) \right] dv = \begin{cases} \bar{E}(\bar{r}') & \text{para } \bar{r}' \text{ dentro de } S \\ 0 & \text{para } \bar{r}' \text{ fuera de } S \end{cases} \quad (1.24)$$

Al sustituir (1.24) en (1.23)

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \bar{E}(\bar{r}') \text{ para } \bar{r}' \text{ dentro de } S \\ 0 \text{ para } \bar{r}' \text{ fuera de } S \end{array} \right\} = j\omega \mu \iiint_V \left[(\bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{a}) \cdot \bar{J}(\bar{r}) \right] dv \\ - \iint_S \left[\nabla \times \bar{E}(\bar{r}) \times (\bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{a}) + \bar{E}(\bar{r}) \times \nabla \times (\bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{a}) \right] \cdot \hat{n} dS \end{aligned} \quad (1.25)$$

Si por otro lado, la relación entre la función diádica $\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}')$ y la función escalar de Green $g(\vec{r}, \vec{r}')$ es⁸:

$$\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}') = \left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] g(\vec{r}, \vec{r}') \quad (1.26)$$

Donde $\overline{\overline{I}}$ es una diáda unitaria y $\nabla \nabla$ es el producto algebraico del operador nabla consigo mismo.

De sustituir (1.26) en (1.25) se obtiene:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r}') \text{ para } \vec{r}' \text{ dentro de } S \\ 0 \text{ para } \vec{r}' \text{ fuera de } S \end{array} \right\} = j\omega \mu \iiint_V \left[\left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] g(\vec{r}, \vec{r}') \right] \cdot \vec{a} \cdot \vec{J}(\vec{r}) \, dv \\ - \iint_S \left[\begin{array}{l} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \times \left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] g(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a} \\ + \vec{E}(\vec{r}) \times \nabla \times \left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] g(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a} \end{array} \right] \cdot \hat{n} \, dS \quad (1.27) \end{aligned}$$

El integrando de la integral de superficie puede simplificarse como se muestra a continuación

De la integral de superficie de la ecuación (1.27) se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \times \left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] g(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a} \cdot \hat{n} &= \hat{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \cdot \left[\vec{a} g(\vec{r}, \vec{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \vec{a} g(\vec{r}, \vec{r}') \right] = \\ &= \hat{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{a} g(\vec{r}, \vec{r}') + \frac{1}{k^2} \hat{n} \cdot (\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \times \nabla \nabla \cdot \vec{a} g(\vec{r}, \vec{r}')) \end{aligned}$$

Si se utiliza la identidad vectorial⁹:

$$(\nabla \times \vec{F}) \times \nabla \phi = \phi (\nabla \times \nabla \times \vec{F}) - \nabla \times (\phi \nabla \times \vec{F})$$

⁸ Kong Au Jin, ibidem, p.227. Un análisis detallado de las funciones de Green se encuentra en el capítulo 4 del libro de Chen To Tai, Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory

⁹ Kong Au Jin, Op.cit., p.380

Entonces:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \times \left[\left[\bar{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] g(\vec{r}, \vec{r}') \right] \cdot \vec{a} \cdot \hat{n} = \hat{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{a} g(\vec{r}, \vec{r}') \\ + \frac{1}{k^2} \hat{n} \cdot \left[\begin{aligned} &(\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r})) (\nabla \cdot \vec{a} g(\vec{r}, \vec{r}')) \\ & - \nabla \times ((\nabla \cdot \vec{a} g(\vec{r}, \vec{r}')) (\nabla \times \vec{E}(\vec{r}))) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (1.28)$$

Por otro lado, también de la integral de superficie de la ecuación (1.27) se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) \times \nabla \times \left[\left[\bar{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] g(\vec{r}, \vec{r}') \right] \cdot \vec{a} \cdot \hat{n} = [\hat{n} \times \vec{E}(\vec{r})] \cdot \left[\nabla \times \left[\vec{a} g(\vec{r}, \vec{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \vec{a} g(\vec{r}, \vec{r}')) \right] \right] = \\ = [\hat{n} \times \vec{E}(\vec{r})] \cdot [\nabla g(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{a} + g(\vec{r}, \vec{r}') (\nabla \times \vec{a})] = [\hat{n} \times \vec{E}(\vec{r})] \cdot [\nabla g(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{a}] = \hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}) \times \nabla g(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

Finalmente se llega a la igualdad:

$$\vec{E}(\vec{r}) \times \nabla \times \left[\left[\bar{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] g(\vec{r}, \vec{r}') \right] \cdot \vec{a} \cdot \hat{n} = \hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}) \times \nabla g(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a} \quad (1.29)$$

De la sustitución de las igualdades (1.28) y (1.29) en (1.27)

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} &\vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{a} \text{ para } \vec{r}' \text{ dentro de } S \\ &0 \text{ para } \vec{r}' \text{ fuera de } S \end{aligned} \right\} = j\omega\mu \iiint_V \left[\left[\bar{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] g(\vec{r}, \vec{r}') \right] \cdot \vec{a} \cdot \vec{J}(\vec{r}) dv \\ - \iint_S \left[\begin{aligned} &\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{a} g(\vec{r}, \vec{r}') + \\ &+ \frac{1}{k^2} \hat{n} \cdot \left[\begin{aligned} &(\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r})) (\nabla \cdot \vec{a} g(\vec{r}, \vec{r}')) \\ &- \nabla \times ((\nabla \cdot \vec{a} g(\vec{r}, \vec{r}')) (\nabla \times \vec{E}(\vec{r}))) \end{aligned} \right] + \\ &+ \hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}) \times \nabla g(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{a} \end{aligned} \right] dS \end{aligned} \quad (1.30)$$

Se puede observar, al aplicar el teorema de la divergencia a la integral de superficie, que el tercer término desaparece ya que sería equivalente a la integral de volumen de la divergencia de un rotacional; si además el vector \vec{a} aparece en ambos términos de la igualdad, entonces (1.30) se reduce a:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r}') \text{ para } \vec{r}' \text{ dentro de } S \\ 0 \text{ para } \vec{r}' \text{ fuera de } S \end{array} \right\} = j\omega \mu \iiint_V \left[\left[\vec{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] g(\vec{r}, \vec{r}') \right] \cdot \vec{J}(\vec{r}) dv$$

$$- \iint_S \left[\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) g(\vec{r}, \vec{r}') + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2} \hat{n} \cdot [(\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}))(\nabla g(\vec{r}, \vec{r}'))] + \hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}) \times \nabla g(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS \quad (1.31)$$

Si se considera que el interior de S es un medio libre de cargas y fuentes, entonces (1.31) se reescribe como:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r}') \text{ para } \vec{r}' \text{ dentro de } S \\ 0 \text{ para } \vec{r}' \text{ fuera de } S \end{array} \right\} =$$

$$= - \iint_S \left[\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) g(\vec{r}, \vec{r}') + [\hat{n} \cdot \vec{E}(\vec{r})] \nabla g(\vec{r}, \vec{r}') + \hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}) \times \nabla g(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS \quad (1.32)$$

La superficie " S " de la ecuación (1.31), no necesariamente es simplemente conexa, esto quiere decir que se puede descomponer, de la siguiente forma, en superficies no intersectadas.

$$S = S_1 + S_0 + S_\infty \quad (1.33)$$

Con lo que la figura 1.2 llega a ser:

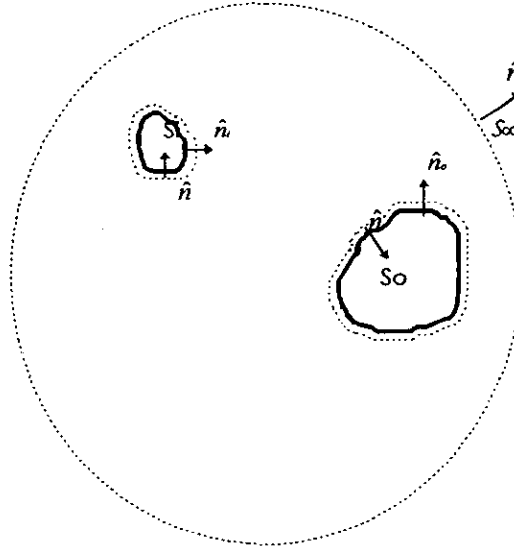


Figura 1.3 Descomposición de la superficie S en una suma de superficies no intersectadas.

Al considerar "S" de acuerdo con (1.33); entonces resulta de (1.32) la expresión:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E}(\bar{r}') \text{ para } \bar{r}' \text{ dentro de } S \\ 0 \text{ para } \bar{r}' \text{ fuera de } S \end{array} \right\} = -\left(\bar{E}^i(\bar{r}') + \bar{E}^{sc}(\bar{r}') + \bar{E}^{S\infty}(\bar{r}')\right) \quad (1.34)$$

Donde cada uno de los términos de la ecuación anterior tiene la forma de la integral que aparece en (1.32) pero considerando las superficies "S_i," "S_o" "S_∞" respectivamente. Los superíndices *i* y *sc* indican, respectivamente, el campo incidente en la superficie *S_o* y el campo esparcido por ésta.

Por otro lado se puede demostrar que mediante el uso de las siguientes condiciones de radiación, la contribución de "S_∞" se hace nula y el tercer término de (1.34) también¹⁰:

$$r(\bar{E}(\bar{r}) + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}(\bar{r} \times \bar{H}(\bar{r}))) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.35)$$

$$r(\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\bar{H}(\bar{r}) - (\bar{r} \times \bar{E}(\bar{r}))) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.36)$$

Puede afirmarse que existe independencia entre el campo incidente y el esparcido¹¹ y que además existen la siguientes opciones de acuerdo con la figura 1.3:

- 1.- \bar{r}' fuera de *S* implica \bar{r}' fuera de *S_∞* y \bar{r}' dentro de *S_i* o \bar{r}' dentro de *S_o*
- 2.- \bar{r}' dentro de *S* implica \bar{r}' dentro de *S_∞* y \bar{r}' fuera de *S_i* o \bar{r}' fuera de *S_o*

Como lo que se busca es encontrar el campo total en una región, debido a la interacción de un campo electromagnético incidiendo en una superficie cerrada y de forma arbitraria, los casos de interés se presentan con *S_∞*. Si se utiliza el subíndice "+" para indicar que se están considerando los campos incidentes desde la parte exterior del esparcidor y también que los vectores "n" y "n_o" tienen igual magnitud pero sus sentidos son contrarios, entonces de (1.32) y (1.34) se llega a:

¹⁰Varandan *et al*, Op.cit., p.100

¹¹ Ibidem, p.102

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E}_+(\bar{r}') \text{ para } \bar{r}' \text{ fuera de } S_0 \\ 0 \text{ para } \bar{r}' \text{ dentro de } S_0 \end{array} \right\} = \bar{E}'(\bar{r}') + \quad (1.37)$$

$$+ \iint_{S_0} \left[(\hat{n}_o \times (\nabla \times \bar{E}(\bar{r})))_+ g(\bar{r}, \bar{r}') + [\hat{n}_o \cdot \bar{E}_+(\bar{r})] \nabla g(\bar{r}, \bar{r}') + \hat{n}_o \times \bar{E}_+(\bar{r}) \times \nabla g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS$$

En la ecuación (1.37) se tienen dos casos posibles, el primero se presenta al considerar el punto de observación localizado fuera de la superficie del esparcidor; a la ecuación resultante se le conoce frecuentemente como "Ecuación de Stratton-Chu", debe señalarse que la variable no primada es el campo sobre la superficie y el campo total es el resultado de la suma del campo incidente mas el esparcido. El segundo caso se presenta cuando el punto de observación se encuentra dentro de la superficie del esparcidor, bajo esta condición el miembro izquierdo de la ecuación (1.37) es igual a cero, lo anterior implica que el campo total dentro del esparcidor es cero y por lo tanto el campo esparcido es igual al campo incidente; la ecuación resultante se conoce como "Teorema de Extinción", "Teorema de Ewald-Owsen" o "Teorema de campo nulo".

Un tercer caso que se presenta y que es necesario analizar, se tiene cuando el punto de observación se encuentra localizado en la superficie S_0 . De la ecuación (1.37) se tiene que :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E}_+(\bar{r}') \text{ para } \bar{r}' \text{ fuera de } S_0 \\ 0 \text{ para } \bar{r}' \text{ dentro de } S_0 \end{array} \right\} = \bar{E}'(\bar{r}') + \iint_{S_0} \left[(\hat{n}_o \times (\nabla \times \bar{E}(\bar{r})))_+ g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS \\ + \iint_{S_0} \left[[\hat{n}_o \cdot \bar{E}_+(\bar{r})] \nabla g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS \quad (1.38) \\ + \iint_{S_0} \left[\hat{n}_o \times \bar{E}_+(\bar{r}) \times \nabla g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS$$

Una propiedad de las funciones de Green es¹²:

$$\nabla g(\bar{r}, \bar{r}'; k_o) = - \nabla' g(\bar{r}, \bar{r}'; k_o) \quad (1.39)$$

De sustituir (1.39) en (1.38)

¹² Varandan *et al.*, Op. cit., p.46

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_+(\vec{r}') \text{ para } \vec{r}' \text{ fuera de } S_0 \\ 0 \text{ para } \vec{r}' \text{ dentro de } S_0 \end{array} \right\} = \vec{E}'(\vec{r}') + \iint_{S_0} \left[\left(\hat{n}_0 \times (\nabla \times \vec{E}(\vec{r})) \right)_+ g(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS \\ - \nabla' \cdot \iint_{S_0} \left[\left[\hat{n}_0 \cdot \vec{E}_+(\vec{r}) \right] g(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS \\ + \nabla' \times \iint_{S_0} \left[\left(\hat{n}_0 \times \vec{E}_+(\vec{r}) \right) g(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS \quad (1.40)$$

La forma de la función de Green para este caso es¹³:

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{i k |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.41)$$

Existe una singularidad en la función de Green en el límite cuando $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}$ por lo que se hace necesario el análisis de la continuidad, en la vecindad del punto \vec{r} , de las integrales que aparecen en la ecuación (1.40); con el objeto de verificar la convergencia de éstas. Para llevar a cabo este análisis se utilizarán las siguientes expresiones¹⁴:

$$\left[\nabla' \cdot \iint_{S_0} \psi(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}'; k_0) dS \right]_{\pm} = \iint_{S_0} \psi(\vec{r}') \nabla' g(\vec{r}, \vec{r}'; k_0) dS \\ \mp \frac{1}{2} \hat{n}' \cdot \psi(\vec{r}'), \quad \vec{r}' \text{ en } S_0 \quad (1.42)$$

$$\left[\nabla' \times \iint_{S_0} \vec{F}(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}'; k_0) dS \right]_{\pm} = \iint_{S_0} \nabla' \times (\vec{F}(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}'; k_0)) dS \\ \mp \frac{1}{2} (\hat{n}' \times \vec{F}(\vec{r}')), \quad \vec{r}' \text{ en } S_0 \quad (1.43)$$

$$\left[\nabla' \bullet \iint_{S_0} \vec{F}(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}'; k_0) dS \right]_{\pm} = \iint_{S_0} \nabla' \bullet (\vec{F}(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}'; k_0)) dS \\ \mp \frac{1}{2} (\hat{n}' \bullet \vec{F}(\vec{r}')), \quad \vec{r}' \text{ en } S_0 \quad (1.44)$$

¹³To Tai Chen, Op.cit., p.36

¹⁴ Mayores detalles de la obtención de dichas expresiones se encuentran en los libros de Kellogg Oliver D., Foundations of Potential Theory, 1929, así como Müller Claus, Foundations of the mathematical Theory of Electromagnetic Waves, 1969.

$$\hat{n}' \times \left(\nabla' \times \left(\iint_{S_0} \bar{a}(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}'; k_0) dS \right) \right) \Big|_{\pm} = \iint_{S_0} \left[\hat{n} \times \left(\nabla' \times (\bar{a}(\bar{r}') g(\bar{r}, \bar{r}'; k_0)) \right) \right] dS$$

$$\pm \frac{1}{2} \bar{a}(\bar{r}'), \quad \bar{r}' \text{ en } S_0 \quad (1.45)$$

Antes de proseguir con el procedimiento para obtener la expresión matemática correspondiente al caso en el que el punto de integración se encuentra localizado en la superficie del esparcidor y con el objeto de que la notación sea consistente; es necesario aclarar que los vectores \hat{n} y \hat{n}' que aparecen en la ecuaciones (1.42)-(1.45) son iguales a los vectores \hat{n}_o y \hat{n}'_o que se han venido utilizando en este trabajo.

De la segunda integral de la ecuación (1.40) y de la expresión (1.42) se obtiene la siguiente igualdad:

$$\nabla' \iint_{S_0} (\hat{n}_o \cdot \bar{E}_+(\bar{r})) g(\bar{r}, \bar{r}'; k_0) dS \Big|_{\pm} = \iint_{S_0} (\hat{n}_o \cdot \bar{E}_+(\bar{r})) \nabla' g(\bar{r}, \bar{r}'; k_0) dS$$

$$\mp \frac{1}{2} \hat{n}'_o (\hat{n}_o \cdot \bar{E}_+(\bar{r}')) \quad (1.46)$$

A su vez, de la tercera integral de la ecuación (1.40) y de la expresión (1.43) se llega a:

$$\left[\nabla' \times \iint_{S_0} (\hat{n}_o \times \bar{E}_+(\bar{r})) g(\bar{r}, \bar{r}'; k_0) dS \right]_{\pm} = \iint_{S_0} \nabla' \times \left((\hat{n}_o \times \bar{E}_+(\bar{r})) g(\bar{r}, \bar{r}'; k_0) \right) dS \quad (1.47)$$

$$\mp \frac{1}{2} (\hat{n}'_o \times (\hat{n}_o \times \bar{E}_+(\bar{r}')))$$

De usar la identidad vectorial¹⁵ : $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c}$

la ecuación (1.47) se puede reescribir como:

$$\left[\nabla' \times \iint_{S_0} (\hat{n}_o \times \bar{E}_+(\bar{r})) g(\bar{r}, \bar{r}'; k_0) dS \right]_{\pm} = \iint_{S_0} \nabla' \times \left((\hat{n}_o \times \bar{E}_+(\bar{r})) g(\bar{r}, \bar{r}'; k_0) \right) dS \quad (1.48)$$

$$\mp \frac{1}{2} (\hat{n}'_o (\hat{n}_o \cdot \bar{E}_+(\bar{r}')) \mp \frac{1}{2} \bar{E}_+(\bar{r}'))$$

¹⁵To Tai Chen, Generalized Vector and Dyadic Analysis, p.6

Al sustituir las ecuaciones (1.46) y (1.48) en (1.40)

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E}_+(\bar{r}') \\ \text{para } \bar{r}' \text{ en } S_o \\ 0 \end{array} \right\} = \bar{E}'(\bar{r}') + \iint_{S_o} \left[(\hat{n}_o \times (\nabla \times \bar{E}(\bar{r}))_+) g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS \quad (1.49)$$

$$- \iint_{S_o} \left[\hat{n}_o \cdot \bar{E}_+(\bar{r}) \nabla' g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS \pm \frac{1}{2} \left(\hat{n}'_o (\hat{n}'_o \cdot \bar{E}_+(\bar{r})) \right)$$

$$+ \iint_{S_o} \nabla' \times \left[(\hat{n}_o \times \bar{E}_+(\bar{r})) g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS \pm \frac{1}{2} \left(\hat{n}'_o (\hat{n}'_o \cdot \bar{E}_+(\bar{r})) \right)$$

$$\pm \frac{1}{2} \left(\bar{E}_+(\bar{r}) \right)$$

Finalmente, al reducir y reacomodar términos en la ecuación (1.49) se llega al siguiente resultado:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \bar{E}_+(\bar{r}') \\ \text{para } \bar{r}' \text{ en } S_o \end{array} \right\} = \bar{E}'(\bar{r}') + \iint_{S_o} \left[(\hat{n}_o \times (\nabla \times \bar{E}(\bar{r}))_+) g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS$$

$$- \iint_{S_o} \left[\hat{n}_o \cdot \bar{E}_+(\bar{r}) \nabla' g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS \quad (1.50)$$

$$+ \iint_{S_o} \nabla' \times \left[(\hat{n}_o \times \bar{E}_+(\bar{r})) g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS$$

Si se utiliza la igualdad (1.39) en la ecuación (1.50) y se reacomodan términos en la expresión resultante se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \bar{E}_+(\bar{r}') \\ \text{para } \bar{r}' \text{ en } S_0 \end{array} \right\} = \bar{E}'(\bar{r}') + \iint_{S_0} \left[(\hat{n}_o \times (\nabla \times \bar{E}(\bar{r}))_+) g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS \\
 + \iint_{S_0} \left[\hat{n}_o \cdot \bar{E}_+(\bar{r}) \nabla g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS \\
 + \iint_{S_0} \left[(\hat{n}_o \times \bar{E}_+(\bar{r})) \times \nabla g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS \quad (1.51)$$

Al comparar la ecuación (1.51) con la ecuación (1.38) se tiene que los miembros derechos son iguales, existiendo una diferencia únicamente en el término izquierdo, por lo que es posible reescribir la ecuación (1.38) de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E}_+(\bar{r}') \text{ para } \bar{r}' \text{ fuera de } S_0 \\ \frac{1}{2} \bar{E}_+(\bar{r}') \text{ para } \bar{r}' \text{ en } S_0 \\ 0 \text{ para } \bar{r}' \text{ dentro de } S_0 \end{array} \right\} = \bar{E}'(\bar{r}') + \iint_{S_0} \left[(\hat{n}_o \times (\nabla \times \bar{E}(\bar{r}))_+) g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS \\
 + \iint_{S_0} \left[\hat{n}_o \cdot \bar{E}_+(\bar{r}) \nabla g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS \\
 + \iint_{S_0} \left[\hat{n}_o \times \bar{E}_+(\bar{r}) \times \nabla g(\bar{r}, \bar{r}') \right] dS \quad (1.52)$$

Basta con aplicar el teorema de reciprocidad y las propiedades de simetría de la función de Green¹⁶ para reescribir la ecuación (1.52) como:

¹⁶To Tai Chen, Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory, p.74

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_+(\vec{r}) \text{ para } \vec{r} \text{ fuera de } S_0 \\ \frac{1}{2} \vec{E}_+(\vec{r}) \text{ para } \vec{r} \text{ en } S_0 \\ 0 \text{ para } \vec{r} \text{ dentro de } S_0 \end{array} \right\} = \vec{E}'(\vec{r}) + \iint_{S_0} \left[(\hat{n}_0 \times (\nabla \times \vec{E}'(\vec{r}'))_+) g(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS' \\
 + \iint_{S_0} \left[\hat{n}_0 \cdot \vec{E}'_+(\vec{r}') \right] \nabla g(\vec{r}, \vec{r}') dS' \quad (1.53) \\
 + \iint_{S_0} \left[\hat{n}_0 \times \vec{E}'_+(\vec{r}') \times \nabla g(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS'$$

1.3 SUPERFICIES CORRUGADAS

La reflexión desde una frontera cuya superficie suave, la cual separa dos medios, se conoce como reflexión especular y es descrita por la Ley de Reflexión de Fresnel. Una onda que incide en una frontera cuya superficie es rugosa es parcialmente reflejada en la dirección especular y parcialmente esparcida en todas direcciones; a la componente dada por la reflexión especular se le conoce como "componente coherente de Scattering" mientras que la segunda se conoce como "Componente difusa de scattering", es importante hacer notar que conforme la rugosidad de la superficie aumenta, la componente coherente disminuye hasta llegar a ser despreciable; en esta caso se esta hablando de una superficie muy rugosa.

Una superficie dada que puede "parecer" muy rugosa para una onda óptica, puede "parecer" muy suave para una microonda. Esto es porque el *grado de rugosidad* o simplemente *rugosidad*, de una superficie corrugada aleatoriamente esta caracterizado en términos de parámetros estadísticos que son medidos en unidades de longitud de onda. Los dos parámetros fundamentales comunmente usados para caracterizar a la superficie son la *desviación estándar de la variación de altura de la superficie* (altura rms) y la *longitud de correlación de la superficie*, ambos parámetros se definen a continuación.

La desviación estándar de la altura de la superficie (σ) y la correlación de longitud de la superficie (l) describen la variación estadística de la componente aleatoria de la altura de la superficie relativa a una superficie de referencia. La superficie de referencia puede ser una superficie suave con un patron periódico o puede ser la superficie *media* si solo existen variaciones aleatorias. Las superficies anteriores se muestran a continuación.

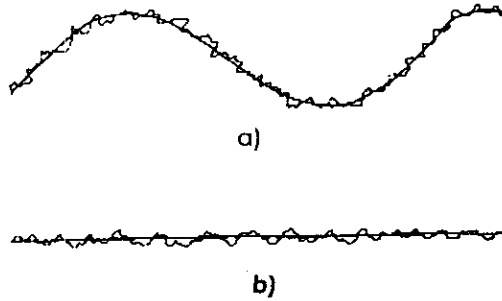


Figura 1.4 a) Superficie corrugada con superficie de referencia senoidal
 b) Superficie corrugada con superficie de referencia plana

1.3.1 Desviación estándar de la variación de altura de la superficie

Considérese una superficie en el plano x - y cuya altura en el punto (x,y) es $z(x,y)$ por encima del plano x - y . Para un segmento de la superficie estadísticamente representativo, cuyas dimensiones son L_x y L_y y además está centrado en el origen, la altura media de la superficie esta dada por:

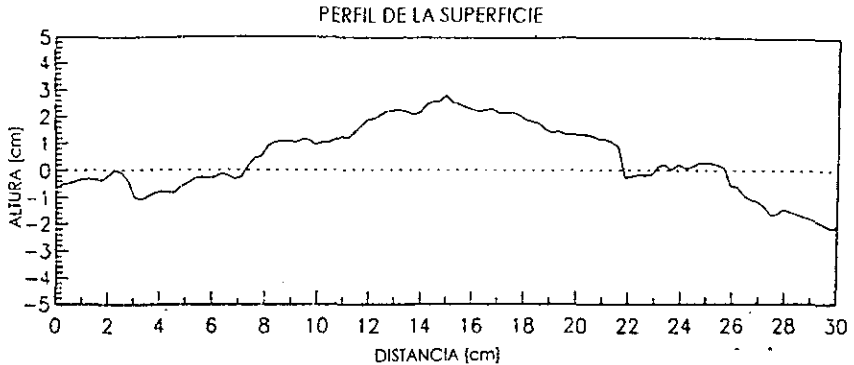
$$\bar{z} = \frac{1}{L_x L_y} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} z(x,y) dy dx \quad (1.54)$$

y el segundo momento es:

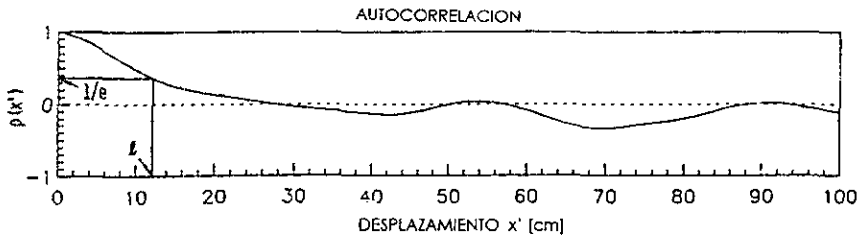
$$\overline{z^2} = \frac{1}{L_x L_y} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} z^2(x,y) dy dx \quad (1.55)$$

De las expresiones (1.54) y (1.55) se llega a que la desviación estándar de la altura de la superficie es:

$$\sigma = \left(\overline{z^2} - \bar{z}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.56)$$



(a)



(b)

Figura 1.5 a) Perfil unidimensional, b) Función de autocorrelación correspondiente. [Fuente: Ulaby et al., microwave remote sensing active and pasive, vol II.]

Para un perfil unidimensional como el mostrado en la figura 1.5, σ es calculada, en la práctica, mediante la discretización del perfil en valores $z(x)$ en un espacio suficientemente pequeño Δx dentro del cual $z(x)$ es aproximado como constante; su valor para el caso anterior es:

$$\sigma = \left[\frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N (z_i)^2 - N(\bar{z})^2 \right) \right]^{1/2} \quad (1.57)$$

donde

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \quad \text{y } N \text{ es el número de muestras}$$

1.3.2 Longitud de Correlación de la superficie

La función de autocorrelación normalizada para un perfil unidimensional $z(x)$ esta definida como:

$$\rho(x') = \frac{\int_{-L_x/2}^{L_x/2} z(x)z(x+x')dx}{\int_{-L_x/2}^{L_x/2} z^2(x)dx} \quad (1.58)$$

y es una medida de la similitud entre la altura z en el punto x y en el punto x' distante de x . Para el caso discreto, la función de autocorrelación normalizada para un desplazamiento espacial $x' = (j-1)\Delta x$, donde j es un entero ≥ 1 , esta dada por:

$$\rho(x') = \frac{\sum_{i=1}^{N+1-j} z_i z_{j+i-1}}{\sum_{i=1}^N z_i^2} \quad (1.59)$$

La figura 1.5 muestra un gráfica de $\rho(x')$ como función de x' para el perfil de la superficie correspondiente. La correlación de la longitud de la superficie /usualmente se define como el desplazamiento x' para el cual $\rho(x')$ es igual a $1/\epsilon$.

$$\rho(l) = 1/e \quad (1.60)$$

La longitud de correlación de la superficie da una referencia para estimar el tamaño lateral de la estructura, así como la independencia estadística de dos puntos sobre la superficie; si los dos puntos están separados horizontalmente una distancia mayor que l , entonces sus alturas pueden ser consideradas (aproximadamente) estadísticamente independientes una de otra. En el caso extremo de una superficie perfectamente suave (espejo), cada punto en la superficie está correlacionado con todos los demás con un coeficiente de correlación unitario.

¿Cuándo una superficie se puede considerar electromagnéticamente suave?

En los siguientes párrafos se muestra un criterio para determinar la suavidad de una superficie.

1.3.3 Criterio de Rayleigh

Un criterio que se establece para dar respuesta a la pregunta anterior es el de Rayleigh, el cual relaciona la longitud de onda y el ángulo de incidencia con la rugosidad de la superficie. Considérese una superficie perfectamente conductora que presenta rugosidades periódicas, tal como se muestra en la figura siguiente:

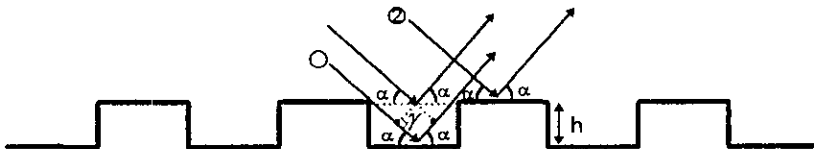


Figura 1.6 Superficie con corrugaciones periódicas

La diferencia de trayectoria entre los rayos 1 y 2 está dada por:

$$\Delta r = AO + OB \quad (1.61)$$

Pero de la figura, se tiene:

$$AO = h \cos(\gamma) = h \cos(\pi/2 - \alpha) = h \sin(\alpha) \quad (1.62)$$

Y a su vez:

$$OB = h \cos(\pi / 2 - \alpha) = h \operatorname{sen}(\alpha) \quad (1.63)$$

De sustituir (1.62) y (1.63) en (1.61)

$$\Delta r = 2h \operatorname{sen} \alpha \quad (1.64)$$

La diferencia de fase entre los rayos 1 y 2 está dada por:

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r = \frac{4\pi}{\lambda} h \operatorname{sen}(\alpha) \quad (1.65)$$

Si $\Delta \phi = 0$ tanto el rayo 1 como el 2 están en fase y por lo tanto la superficie puede considerarse como especular.

Si $\Delta \phi = \pi$ tanto el rayo 1 como el 2 están defasados 180° , tienen direcciones opuestas y se cancelan; entonces no existe flujo de energía en esa dirección y debe distribuirse en otras direcciones por lo que la superficie puede considerarse rugosa.

Un valor intermedio entre "suave" y "rugosa" será $\Delta \phi = \pi/2$ y al sustituirlo en (1.65) se tiene:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{\lambda} h \operatorname{sen}(\alpha) \Rightarrow \frac{\lambda}{8 \operatorname{sen} \alpha} > h \quad (1.66)$$

Para el caso de una superficie aleatoria caracterizada por una desviación estándar de la altura de la superficie σ , el criterio de Rayleigh puede expresarse, a partir de la ec(1.66), como:

$$\frac{\lambda}{8 \operatorname{sen} \alpha} > \sigma \quad (1.67)$$

1.4 TEORÍA DE ANTENAS

Las antenas reflectoras, de una forma u otra, han sido utilizadas desde que de Hertz descubrió la propagación electromagnética en 1888; sin embargo, no fué sino hasta la segunda guerra mundial, cuando un gran número de aplicaciones de radar se llevaron a cabo, que el análisis de las características geométricas de las superficies reflectoras así como el diseño de las mismas usando diferentes perfiles alcanzó un punto máximo. Las subsecuentes deman-

das de reflectores para usarse en radioastronomía, comunicaciones via microondas y sistemas satelitales de posicionamiento resultaron en un espectacular progreso en el desarrollo de técnicas analíticas y experimentales para determinar la forma de los perfiles de los reflectores asi como para optimizar la iluminación sobre sus aberturas para maximizar la ganancia, además de la obtención de haces de características predeterminadas mediante un reflector con dimensiones y perfil adecuados. Aunque los reflectores de las antenas toman muchas configuraciones geométricas, algunas de las más populares son los reflectores planos, en esquina y curvos(esféricos, parabólicos, elípticos, hiperbólicos, etc.), se muestran en la siguiente figura.

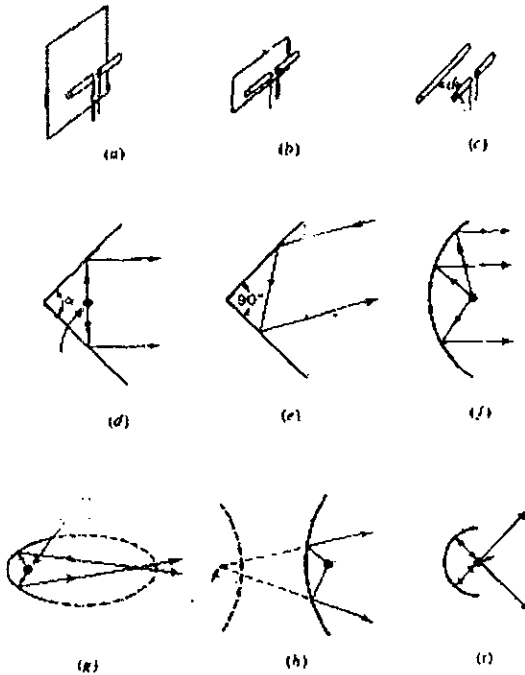


Figura 1.7 Donde a) y b) son reflectores planos; c) es un reflector lineal; d) y e) son reflectores en esquina y f), g), h) e i) son reflectores curvos.

A pesar de la variedad de reflectores existente, la aplicación en ingeniería del presente trabajo lleva únicamente a establecer la relación que se presenta entre el análisis del patrón de radiación obtenido al hacer incidir un campo electromagnético en una superficie reflectora con perfil parabólico y una superficie conductora con rugosidades controladas. Se utilizan, la teoría de Kirchhoff y el teorema de extinción aunque, por otro lado, es conveniente mostrar las ecuaciones que se utilizan en la teoría de antenas (método de distribución de corriente) para el cálculo de patrones de radiación obtenidos a partir de superficies reflectoras conductores con forma definida.

Es importante señalar que aunque el análisis puede llevarse a cabo en 2-D, aprovechando la simetría axial de un parabolóide de revolución, se hará el análisis en 1-D.

1.4.1 Reflector Plano

El más simple de los reflectores es el plano, introducido para dirigir la energía en una dirección determinada. Se ha demostrado¹⁷ que la polarización de la fuente radiante, vertical u horizontal, así como su posición relativa a la superficie reflectora sirven para modificar las características de radiación de todo el sistema. Este análisis se ha llevado a cabo utilizando el método de imágenes y a su vez, cuando se trata con superficies reflectoras de dimensiones finitas, se aplica la Teoría Geométrica de Difracción para cuantificar el efecto producido en el campo radiado debido a los bordes de la superficie.

1.4.2 Reflector en esquina

Cuando una superficie reflectora plana es doblada un ángulo cualquiera α se tiene entonces un reflector en esquina. Los reflectores en esquina pueden clasificarse como activos y pasivos.

Los reflectores activos son aquellos que cuentan con un elemento excitador (usualmente un dipolo o una agrupación de éstos). Al igual que en el caso de los reflectores planos se utiliza el método de imágenes para analizar el patrón de radiación y a su vez la forma de éste dependerá tanto del ángulo α como de la distancia relativa del elemento excitador al vértice del reflector. La siguiente figura ilustra la idea anterior.

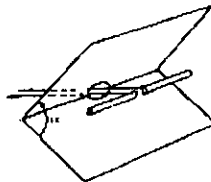


Figura 1.9 Reflector en esquina con alimentador lineal
[Fuente: John D. Kraus, Antennas]

¹⁷ Véanse, para mayor detalle, los libros de John D. Kraus, Antennas y C. Balanis, Antenna Theory, analysis and design

Es posible variar el ángulo de abertura α ; sin embargo, el valor más común para éste es de 90° y en este caso se tiene un reflector en "esquina cuadrada".

El método que se utiliza para analizar el comportamiento de campos electromagnéticos radiados por este dispositivo, al igual que con los reflectores planos, es el "Método de imágenes", se debe hacer notar que cuando el ángulo de abertura disminuye, el número de imágenes aumenta y esto tiene como consecuencia un aumento en la complejidad de las expresiones matemáticas resultantes¹⁸.

El reflector en esquina "pasivo" funciona como un espejo y se aplica para cambiar, en forma determinada, la trayectoria de los campos electromagnéticos que inciden en él. Mientras que con los reflectores activos el ángulo de abertura puede ser variable, para este caso siempre es de 90° . Una de las posibles aplicaciones que se le da a este tipo de reflectores es en los sistemas de posicionamiento de móviles debido al mejoramiento en la reflexión de señales de radar.

1.4.3 Reflector Parabólico

Todas las características de radiación (patrón, eficiencia, discriminación de la polarización, etc.) de un reflector, pueden ser mejoradas si la configuración estructural de su superficie es mejorada. Ha sido mostrado mediante la óptica geométrica que si un haz de rayos paralelos incide en un reflector cuya forma geométrica es una parábola, la radiación convergerá a una mancha (foco) conocida como "punto focal". De la misma manera, si un punto fuente es puesto en el punto focal, los rayos reflejados por un reflector parabólico emergerán como un haz paralelo, esto es una forma del principio de reciprocidad que puede demostrarse gráficamente. El punto simétrico en la superficie parabólica se conoce como vértice. Los rayos que emergen en una formación paralela usualmente se dice que están colimados. En la práctica la colimación es frecuentemente usada para describir las altas características direccionales de una antena aunque los rayos no sean estrictamente paralelos.

Un reflector parabólico puede tomar dos formas diferentes formas: La primera es la de un cilindro parabólico recto, vease figura 1.10a, cuya energía es colimada a una línea que es paralela al eje del cilindro a través del punto focal del reflector. El alimentador más utilizado para esta configuración es un dipolo lineal. La otra configuración reflectora es aquella que se forma por la rotación de una parábola alrededor de su eje y es referida como paraboloide de revolución, figura 1.10b.

¹⁸Para mayor detalle véase el capítulo 12 del libro de J. D. Kraus, Antenas.

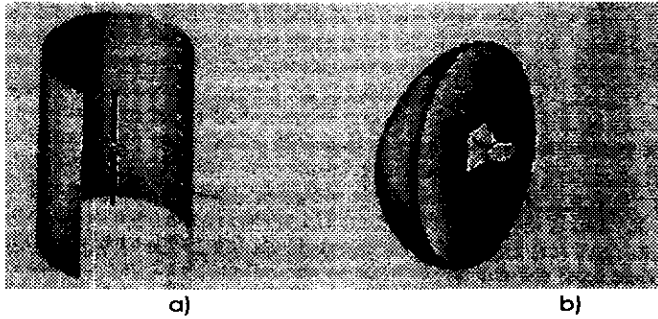


Figura 1.10 a) Cilindro parabólico recto, b) Paraboloide de revolución
 [Fuente:C. Balanis, *Antenna Theory, analysis and design*]

La descripción de las características geométricas de los reflectores parabólicos se lleva a cabo mediante la aplicación del principio de Fermat¹⁹. Se asume el caso especial en el cual todas las trayectorias se encuentran en el mismo medio.

Para obtener la expresión matemática que representa a la superficie parabólica, considere la siguiente figura:

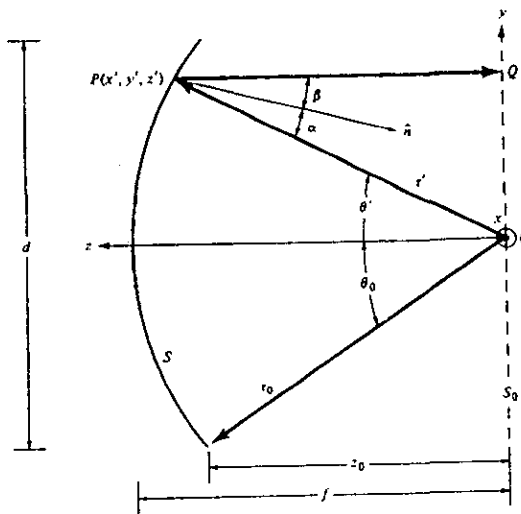


Figura 1.11 Configuración unidimensional de un reflector parabólico
 [Fuente:C. Balanis, *Antenna Theory, analysis and design*]

¹⁹ Born M. y Wolf E., *Ibidem*, p.128

Entonces:

$$cte = 2f = \overline{OP} + \overline{PQ} \quad (1.67)$$

Por otro lado se tiene :

$$\overline{OP} = R \quad (1.68)$$

$$\overline{PQ} = R \cos \theta' \quad (1.69)$$

De (1.68) y (1.69) en (1.67)

$$R = \frac{2f}{1 + \cos \theta'} = f \sec^2 \left(\frac{\theta'}{2} \right) \quad \theta' \leq \theta_0 \quad (1.70)$$

En coordenadas rectangulares:

$$R + R \cos \theta' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z = 2f \quad (1.71)$$

o bien:

$$x^2 + y^2 = 4f(f - z) \quad (1.72)$$

$$\text{con } x^2 + y^2 \leq \left(\frac{d}{2} \right)^2$$

Por otro lado, existen dos técnicas que pueden ser utilizadas para analizar el desempeño de un sistema reflector; la primera de ellas es el *método de distribución de abertura* y el segundo es el *método de distribución de corriente*.

En el método de *distribución de abertura*, el campo reflejado por la superficie del paraboloide es determinado primero sobre un plano normal al eje del reflector; técnicas de óptica geométrica, es decir trazo de rayos, son utilizadas para este fin. En muchos casos el plano es tomado en el punto focal y es designado como *plano de abertura* tal como se muestra en la figura 1.12.

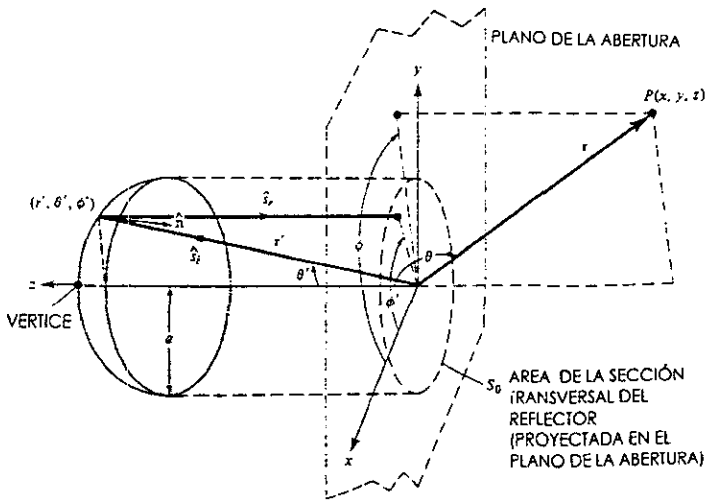


Figura 1.12 Geometría bidimensional de un sistema con reflector parabólico
 [Fuente: C. Batanis, *Antenna Theory, analysis and design*]

Fuentes equivalentes se forman sobre el plano y generalmente se asume que éstas son cero fuera del área del reflector proyectada sobre el plano de abertura. Estas fuentes equivalentes son entonces utilizadas para calcular los campos radiados utilizando las técnicas de cálculo de campos radiados por aberturas.

Para el *método de distribución de corriente*, la aproximación de la óptica física para la densidad de corriente inducida está dada por:

$$\vec{J}_s \approx 2\hat{n} \times \vec{H}_i \quad (1.73)$$

donde \vec{H}_i es el campo magnético incidente

\hat{n} es el vector normal a la superficie reflectora

Y a su vez esta formulada sobre la zona iluminada de la superficie reflectora que se muestra en la figura 1.13.

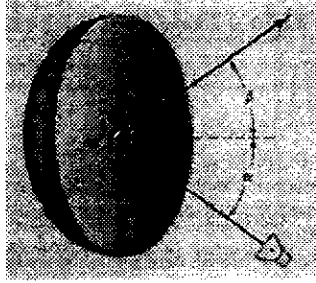


Figura 1.13 Superficie reflectora con frontera Γ
 [Fuente: C. Balanis, *Antenna Theory, analysis and design*]

Para el reflector mostrado, las aproximaciones que se consideran en ambos métodos son:

1. La densidad de corriente es cero en la zona de sombra (S_2) del reflector.
2. Se desprecia la discontinuidad de la densidad de corriente sobre el borde (Γ) del reflector.
3. Se desprecian la radiación directa desde el alimentador así como el bloqueo de la abertura debido a éste.

Las aproximaciones anteriores llevan, para los campos radiados en el haz principal y en los lóbulos laterales cercanos, a resultados similares independientemente del método que se este utilizando; sin embargo, el objeto de este trabajo es, mediante la teoría de Kirchhoff y el teorema de extinción, mostrar que técnicas de óptica física pueden usarse para caracterizar el fenómeno de esparcimiento que se presenta al incidir microondas en superficies reflectoras, por lo que el *método de distribución de abertura* queda descartado en esta análisis.

Por otro lado, la aplicación del *método de distribución de corriente* ha sido estudiado y documentado por numerosos autores ²⁰, por lo que solo se muestran las ecuaciones principales para encontrar los campos esparcidos. Las ecuaciones son entonces:

$$\vec{E}_s = -j \frac{\omega \mu}{4\pi r} e^{-jkr} \oiint_S [\vec{J}_s - (\vec{J}_s \cdot \hat{a}_r) \hat{a}_r] e^{+jkr' \cdot \hat{a}_r} ds' \quad (1.74)$$

²⁰ Como ejemplo puede consultarse el capítulo 13 del libro de Balanis Constantine, *Antennas Theory analysis and design*.

$$\vec{H}_s = +j \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{4\pi r} e^{-jk r} \oiint_S [\vec{J}_s \times \hat{a}_r] e^{+jk r' \cdot \hat{a}_r} ds' \quad (1.75)$$

Los campos eléctricos y magnéticos esparcidos por la superficie cerrada del reflector de la figura 1.13 y dados por las ecuaciones 1.74 y 1.75 son válidos si las densidades fuente (corriente y carga) satisfacen la ecuación de continuidad.

En la zona de campo lejano, el campo eléctrico producido por un reflector parabólico, sin considerar la radiación directa, está dado por:

$$\vec{E}_\theta = -j \frac{\omega \mu}{4\pi r} e^{-jk r} \oiint_{S_1} \hat{a}_\theta \cdot \vec{J}_s e^{+jk r' \cdot \hat{a}_r} ds' \quad (1.76)$$

$$\vec{E}_\phi = -j \frac{\omega \mu}{4\pi r} e^{-jk r} \oiint_{S_1} \hat{a}_\phi \cdot \vec{J}_s e^{+jk r' \cdot \hat{a}_r} ds' \quad (1.77)$$

En este trabajo se considera únicamente el caso de un reflector parabólico con alimentación frontal.

Dependiendo de la posición del alimentador, se tendrán diferentes configuración de antenas con reflector parabólico, algunas de estas son: antena con alimentación frontal, antenas Cassegrain, antena offset, antenas Gregorianas. Es importante señalar que tanto para las antenas Cassegrain como para las Gregorianas, la forma del subreflector varía y pudiendo ser elíptico, hiperbólico, plano o parabólico. Para ilustrar el concepto anterior vease la figura 1.14.

	ILUSTRACION	$0, \theta,$ and f_e/f_m	f_m and f_e	e
REFLECTORES CASSEGRAIN		> 1	> 0	> 1
		1	> 0	∞
		≤ 0 > 0	> 0	< -1
		0	∞	1
		< 0 > -1	< 0	< 0 > -1
REFLECTORES GREGORIANOS		> 1	> 0	> 0 < 1
		< 1	< 0	> 0 < 1

Figura 1.14 Diferentes de reflectores parabólicos

Cada una de las configuraciones mostrada en la figura anterior presenta ventajas tales como reducción del nivel de lóbulos laterales teniendo esto como consecuencia mayor ganancia, supresión de la radiación con polarización cruzada, etc.

Existen muchos otros tipos de reflectores cuyo análisis ha sido ampliamente documentado en la literatura. El reflector esférico, por ejemplo, ha sido utilizado en radio astronomía y para aplicaciones en pequeñas estaciones terrenas porque su haz puede ser eficientemente rastreado moviendo su alimentador. Un ejemplo de eso es el reflector esférico de 305 m que se encuentra en Arecibo, Puerto Rico, cuyo superficie primaria esta construida dentro de la tierra y el rastreo del haz es acompañado del movimiento del alimentador. Para los reflectores esféricos, un bloqueo sustancial puede presentarse debido al alimentador con el consecuente aumento de lobulos laterales con la inherente disminución de ganancia además de la pérdida de la discriminación de polarización cruzada.

Existe una relación entre un reflector parabólico y uno esférico en la región paraxial, dicha relación esta dada por:

$$R = 2f \quad (1.78)$$

Donde: R es el radio de la circunferencia

f es el foco de la parábola

Comportamiento de campos esparcidos en una superficie corrugada unidimensional

En este capítulo se presentan las ecuaciones de esparcimiento unidimensionales así como su solución mediante el uso de ecuaciones matriciales. Inicialmente, el desarrollo matemático se lleva a cabo considerando dos medios cualesquiera; sin embargo, posteriormente el capítulo se centra en el caso en el que la superficie del esparcidor es un conductor perfecto.

2.1 Obtención de las ecuaciones de esparcimiento en una dimensión

En esta sección se caracteriza el fenómeno de esparcimiento en superficies corrugadas unidimensionales mediante la utilización del teorema de extinción, para llevar a cabo este objetivo se necesita retomar las ecuaciones obtenidas en la sección 1.2.1 del capítulo anterior y derivar las ecuaciones correspondientes a una dimensión.

De reacomodar términos en la ecuación (1.53) se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E}_+(\bar{r}) \text{ para } \bar{r} \text{ fuera de } S_0 \\ \frac{1}{2} \bar{E}_+(\bar{r}) \text{ para } \bar{r} \text{ en } S_0 \\ 0 \text{ para } \bar{r} \text{ dentro de } S_0 \end{array} \right\} = \bar{E}'(\bar{r}) + \iint_{S_0} \left[\begin{array}{l} (\hat{n}_o \times (\nabla' \times \bar{E}'(\bar{r}'))_+) g(\bar{r}, \bar{r}') \\ + [\hat{n}_o \cdot \bar{E}'_+(\bar{r}')] \nabla' g(\bar{r}, \bar{r}') \\ + (\hat{n}_o \times \bar{E}'_+(\bar{r}')) \times \nabla' g(\bar{r}, \bar{r}') \end{array} \right] dS' \quad (2.1)$$

se sabe que :

$$\bar{E}^{sc}(\bar{r}) = \iint_{S_0} \left[\begin{array}{l} (\hat{n}_o \times (\nabla' \times \bar{E}'(\bar{r}'))_+) g(\bar{r}, \bar{r}') + [\hat{n}_o \cdot \bar{E}'_+(\bar{r}')] \nabla' g(\bar{r}, \bar{r}') \\ + (\hat{n}_o \times \bar{E}'_+(\bar{r}')) \times \nabla' g(\bar{r}, \bar{r}') \end{array} \right] dS' \quad (2.2)$$

y al hacer uso de las identidades vectoriales ²¹

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C}(\bar{A} \cdot \bar{B}) \quad \text{y} \quad (\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C} = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{A}(\bar{B} \cdot \bar{C})$$

asi como del hecho de que :

$$\nabla' \cdot \bar{E}'_+(\bar{r}') = 0 \quad (2.3)$$

entonces, la ecuación (2.2) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \bar{E}^{sc}(\bar{r}) = & \iint_{S_0} \left[\bar{E}'_+(\bar{r}') \hat{n}_o \cdot \nabla' g(\bar{r}, \bar{r}') - g(\bar{r}, \bar{r}') (\hat{n}_o \cdot \nabla') \bar{E}'_+(\bar{r}') \right] dS' \\ & + \iint_{S_0} \left[\nabla' (\hat{n}_o \cdot g(\bar{r}, \bar{r}')) \bar{E}'_+(\bar{r}') - \hat{n}_o \nabla' (g(\bar{r}, \bar{r}') \bar{E}'_+(\bar{r}')) \right] dS' \quad (2.4) \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando el teorema de la divergencia de Gauss en forma tensorial²²

$$\iiint_V A^i_{,i} dV = \iint_S A^i v_i dS \quad (2.5)$$

Se llega a que la segunda integral del miembro derecho es igual a cero, debido al hecho de que las i-ésimas componentes de las dos integrales de superficie pueden escribirse como:

²¹ Spiegel Murray R., Análisis Vectorial, p.17

²² ibidem, p.206

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} dS' \left[\nabla' (\hat{n}_o \bullet g(\bar{r}, \bar{r}') \bar{E}_+(\bar{r}')) \right]_i &= \iint_{S_0} dS' \partial'_i n_o g(\bar{r}, \bar{r}') E_+(\bar{r}')_j \\ &= \iiint_V dV \partial'_i \partial'_j g(\bar{r}, \bar{r}') E_+(\bar{r}')_j \end{aligned} \quad (2.6)$$

y

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} dS' \left[\hat{n}_o \nabla' \bullet (g(\bar{r}, \bar{r}') \bar{E}_+(\bar{r}')) \right]_i &= \iint_{S_0} dS' n_o \partial'_j g(\bar{r}, \bar{r}') E_+(\bar{r}')_j \\ &= \iiint_V dV \partial'_i \partial'_j g(\bar{r}, \bar{r}') E_+(\bar{r}')_j \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por lo tanto, el campo esparcido queda como:

$$\bar{E}^{sc}(\bar{r}) = \iint_{S_0} \left[\bar{E}_+(\bar{r}') \frac{\partial g(\bar{r}, \bar{r}')}{\partial n_o} - g(\bar{r}, \bar{r}') \frac{\partial \bar{E}_+(\bar{r}')}{\partial n_o} \right] dS' \quad (2.8)$$

donde : $\frac{\partial}{\partial n_o} = \hat{n}_o \bullet \nabla'$

Por lo tanto, la ecuación (2.1) puede escribirse como:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E}_+(\bar{r}) \text{ para } \bar{r} \text{ fuera de } S_0 \\ \frac{1}{2} \bar{E}_+(\bar{r}) \text{ para } \bar{r} \text{ en } S_0 \\ 0 \text{ para } \bar{r} \text{ dentro de } S_0 \end{array} \right\} = \bar{E}'(\bar{r}) \quad (2.9)$$

$$+ \iint_{S_0} \left[\bar{E}_+(\bar{r}') \frac{\partial g(\bar{r}, \bar{r}')}{\partial n_o} - g(\bar{r}, \bar{r}') \frac{\partial \bar{E}_+(\bar{r}')}{\partial n_o} \right] dS'$$

Para el caso escalar se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} E_+(\vec{r}) \text{ para } \vec{r} \text{ fuera de } S_0 \\ \frac{1}{2} E_+(\vec{r}) \text{ para } \vec{r} \text{ en } S_0 \\ 0 \text{ para } \vec{r} \text{ dentro de } S_0 \end{array} \right\} = E'(\vec{r}) \quad (2.10)$$

$$+ \iint_{S_0} \left[E_+(\vec{r}') \frac{\partial g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_0} - g(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial E_+(\vec{r}')}{\partial n_0} \right] dS'$$

Si se considera que el vector de propagación es perpendicular a uno de los ejes coordenados del sistema de referencia, por ejemplo el eje y , se obtiene la ecuación de Helmholtz-Kirchhoff, unidimensional, en el plano x - z , donde x es la variable independiente relacionada con la longitud de la superficie y z la variable dependiente. Nótese que la integral de superficie se reduce a una integral de línea sobre el contorno Γ , el cual es la sección transversal de la superficie S_0 , que además puede describirse con relación funcional $z=h(x)$; por lo que se tendrían los siguientes casos:

$$\left. \begin{array}{l} E_+(\vec{r}) \text{ para } z > h(x) \\ \frac{1}{2} E_+(\vec{r}) \text{ para } z = h(x) \\ 0 \text{ para } z < h(x) \end{array} \right\} = E'(\vec{r}) \quad (2.11)$$

$$+ \int_{\Gamma} \left[E_+(\vec{r}') \frac{\partial H^{(+) }(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_0} - H^{(+) }(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial E_+(\vec{r}')}{\partial n_0} \right] d\Gamma'$$

Donde : $H^{(+) }(\vec{r}, \vec{r}') = H^{(+) }(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|)$ es la función de Green en coordenadas cilíndricas, también conocida como función de Hankel de primer tipo y orden cero²³. Dentro de la función de Hankel aparece el factor k_0 , lo cual indica que se está considerando, el medio homogéneo existente entre la superficie S_0 y la fuente S_1 , como el espacio libre; por otro lado el medio que se encuentra por debajo del contorno Γ es un medio cualquiera y el número de onda estará representado como k .

La figura siguiente sirve para ilustrar la idea anterior.

²³ Balanis Constantine, Advanced Engineering Electromagnetics, p.934

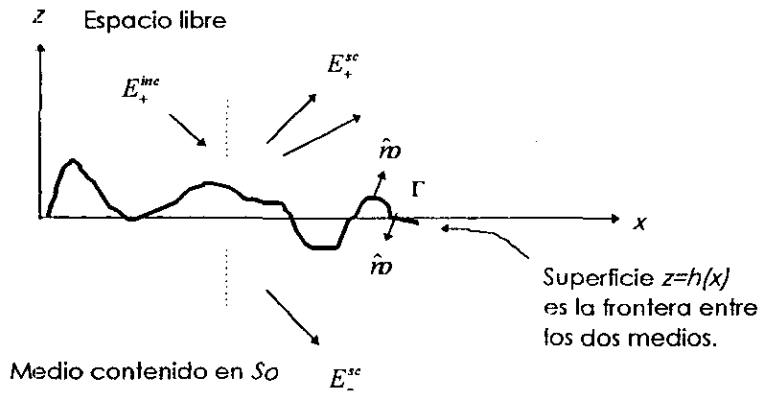


Figura 2.1 Geometría del problema de esparsamiento en una dimensión

Con base en los párrafos anteriores, la ecuación de esparsamiento para la región localizada abajo del contorno Γ tiene la forma:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{para } z > h(x) \\ \frac{1}{2} E_-(\vec{r}) \quad \text{para } z = h(x) \\ E_-(\vec{r}) \quad \text{para } z < h(x) \end{array} \right\} = E'(\vec{r}) \quad (2.12)$$

$$+ \int_{\Gamma} \left[E_-(\vec{r}') \frac{\partial H^{(-)}(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n_0} - H^{(-)}(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial E_-(\vec{r}')}{\partial n_0} \right] d\Gamma'$$

Donde: $H^{(-)}(\vec{r}, \vec{r}') = H^{(-)}(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|)$.

En la ecuación (2.11) se tiene entonces que:

$$E^{SC}(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \left[E_+(\vec{r}') \frac{\partial H^{(+)}(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial n_0} - H^{(+)}(\vec{r} - \vec{r}') \frac{\partial E_+(\vec{r}')}{\partial n_0} \right] d\Gamma' \quad (2.13)$$

Así como en la ecuación (2.12), el caso para la región debajo de la superficie, se tiene:

$$E^{sc}(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \left[E_{-}(\vec{r}') \frac{\partial H^{(-)}(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial no} - H^{(-)}(\vec{r} - \vec{r}') \frac{\partial E_{-}(\vec{r}')}{\partial no} \right] dl' \quad (2.14)$$

Es importante destacar que las ecuaciones 2.11-2.14 tendrán un papel fundamental en el momento de encontrar la solución numérica de la ecuación que representa el "Teorema de extinción", ya que los campos $E_{+}(\vec{r}')$ y $E_{-}(\vec{r}')$ así como sus derivadas normales respectivas estarán acopladas por las condiciones de frontera correspondientes. Por otro lado, no debe olvidarse que la variable primada representa un punto localizado en la superficie mientras que la variable no primada es el punto de observación.

Al estar analizando el problema de esparcimiento sobre superficies rugosas unidimensionales, se presentan dos posibles casos de polarización lineal; el primero cuando el vector de campo eléctrico está contenido en el plano de incidencia, esta polarización también se conoce como TM o p , y el segundo cuando es el vector de campo magnético el que se encuentra contenido en el plano de incidencia, esta polarización se conoce como TE o s .

Para hallar las condiciones de frontera para el campo y su derivada normal basta con suponer dos vectores de la forma: $\vec{E} = (0, E, 0)$ y $\vec{H} = (0, H, 0)$, polarizaciones TE y TM respectivamente, y sustituirlos en las condiciones de frontera²⁴.

Es conveniente recordar que el objetivo de este capítulo es utilizar el teorema de extinción para analizar el comportamiento de campos esparcidos en superficies corrugadas perfectamente conductoras, por lo que se retomará el tercer caso de la ecuación 2.11 y se reescribirá en la siguiente forma:

$$-E^i(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \left[E_{+}(\vec{r}') \frac{\partial H^{(+)}(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial no} - H^{(+)}(\vec{r} - \vec{r}') \frac{\partial E_{+}(\vec{r}')}{\partial no} \right] dl' \quad (2.15)$$

Si la variable independiente en este caso es x es conveniente escribir a la ecuación 2.15 en términos de ésta, por lo que, aplicando el concepto de longitud de arco se tiene:

$$dl' = dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx'} \right)^2} \quad (2.16)$$

²⁴ Born y Wolf, Op. Cit., p.4

Así como

$$\frac{\partial H^{(+)}(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial no} = -\frac{1}{4i} k_o(\hat{n}o \cdot \hat{l}) H_1^{(1)}(k_o|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (2.17)$$

Donde: \hat{l} es el vector unitario que apunta desde el punto de integración \vec{r}' al punto de observación \vec{r} .

Al sustituir las expresiones 2.16 y 2.17 en la ecuación 2.15 se obtiene:

$$-E^i(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-E_+(\vec{r}') \frac{1}{4i} k_o(\hat{n}o \cdot \hat{l}) H_1^{(1)}(k_o|\vec{r} - \vec{r}'|) \right. \\ \left. + \frac{1}{4i} H_1^{(0)}(k_o|\vec{r} - \vec{r}'|) \frac{\partial E_+(\vec{r}')}{\partial no} \right] dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx'}\right)^2} \quad (2.18)$$

Donde $\vec{r}' = (x', h(x'))$ y $\vec{r} = (x, z)$

Por otro lado, con el objeto de escribir la ecuación (2.18) en forma compacta, se definen las siguientes funciones:

$$F_1(x) = -\frac{1}{4i} E(x, h(x)) \quad \text{y} \quad F_2(x) = \frac{1}{4i} \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2} \frac{\partial}{\partial no} E(x, h(x))$$

Por lo que la ecuación (2.18) llega a ser:

$$-E^i(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx'}\right)^2} F_{1(+)}(k_o \hat{n}o \cdot \hat{l}) H_1^{(1)}(k_o|\vec{r} - \vec{r}'|) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} dx' F_{2(+)} H_1^{(0)}(k_o|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (2.19)$$

2.2 Solución de la ecuación de esparcimiento mediante ecuaciones matriciales

Para hallar la solución de la ecuación anterior, es necesario discretizar a la superficie, aunque para obtener la solución exacta sería necesario tener una superficie de longitud infinita basta con elegir un número suficiente de puntos para describirla. Véase la siguiente figura :

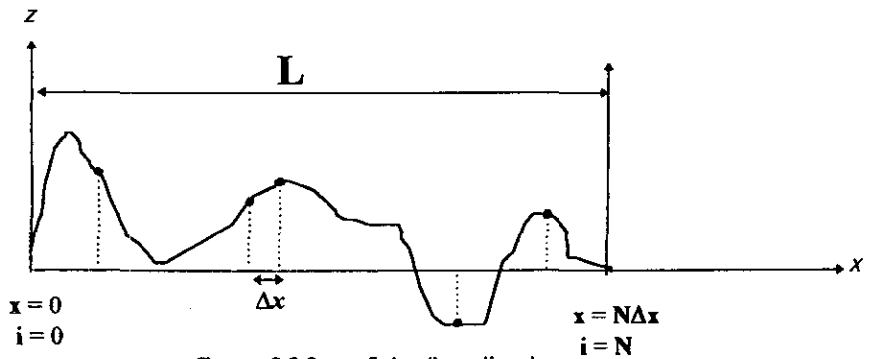


Figura 2.2 Superficie discretizada

En la figura 2.2 L es la longitud de la superficie corrugada, que es representada por $N+1$ puntos, cuyo intervalo entre éstos es Δx .

Por otro lado, si se define $\vec{r}_i = (x_i, h_i)$ donde:

$$x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x \quad (2.20)$$

y a su vez

$$h_i = h(x_i) \quad (2.21)$$

Con base en las expresiones anteriores, la ecuación (2.19), cuyos límites además son finitos, se puede escribir como una suma de integrales definidas tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} -E^i(\vec{r}_i) = & \sum_{j=0}^{N-1} \int_{j\Delta x}^{(j+1)\Delta x} dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx'}\right)^2} F_{1(+)}(x') (k_o \hat{n}_o \cdot \hat{i}) H_1^{(1)}(k_o |\vec{r} - \vec{r}'|) \\ & + \sum_{j=0}^{N-1} \int_{j\Delta x}^{(j+1)\Delta x} dx' F_{2(+)}(x') \hat{H}_1^{(0)}(k_o |\vec{r} - \vec{r}'|) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Si el número de puntos utilizados para representar a la superficie es suficientemente grande, puede entonces asumirse que las funciones $F_{1(+)}(x')$ y $F_{2(+)}(x')$ permanecen constantes dentro del intervalo Δx . La ecuación (2.23) se transforma en:

$$\begin{aligned}
 -E^i(\bar{r}_i) &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{j\Delta x}^{(j+1)\Delta x} dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx'}\right)^2} F_{1j(+)}(k_o \hat{n}_o \cdot \hat{i}) H_1^{(1)}(k_o |\bar{r} - \bar{r}'|) \\
 &+ \sum_{j=0}^{N-1} \int_{j\Delta x}^{(j+1)\Delta x} dx' F_{2j(+)} H_1^{(0)}(k_o |\bar{r} - \bar{r}'|)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Donde: $F_{1j(+)} = F_{1j(+)}(x')$ y $F_{2j(+)} = F_{2j(+)}(x')$

Por lo tanto, nuevamente la ecuación (2.23) se puede escribir como:

$$E_i = \sum_{j=0}^{N-1} F_{1j(+)} U_{y(+)} + \sum_{j=0}^{N-1} F_{2j(+)} V_{y(+)} \tag{2.24}$$

Donde:

$$E_i = -E^i(\bar{r}_i)$$

$$U_{y(+)} = \int_{j\Delta x}^{(j+1)\Delta x} dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx'}\right)^2} (k_o \hat{n}_o \cdot \hat{i}) H_1^{(1)}(k_o |\bar{r}_i - \bar{r}'|)$$

$$V_{y(+)} = \int_{j\Delta x}^{(j+1)\Delta x} dx' H_1^{(0)}(k_o |\bar{r}_i - \bar{r}'|)$$

Para evitar cualquier confusión, debe quedar claro que en la ecuación anterior, el subíndice i representa el i -ésimo término y no el campo incidente.

En forma matricial, (2.24) se reescribe:

$$[E] = [U_{(+)}][F_{1(+)}] + [V_{(+)}][F_{2(+)}] \tag{2.25}$$

En la ecuación anterior se puede observar que:

$$\left. \begin{aligned}
 [E] &= \{-E_i\} \\
 [F_{1(+)}] &= \{F_{1j(+)}\} \\
 [F_{2(+)}] &= \{F_{2j(+)}\}
 \end{aligned} \right\} \text{Son matrices columna de dimensiones } N \times 1$$

$$\left. \begin{aligned}
 [U_{(+)}] &= \{U_{y(+)}\} \\
 [V_{(+)}] &= \{V_{y(+)}\}
 \end{aligned} \right\} \text{Son matrices cuadradas de dimensiones } N \times N$$

Ahora bien, todos los elementos de las matrices $[E]$, $[U_{(+)}]$ y $[V_{(+)}]$ pueden calcularse si se conoce el perfil de la superficie; sin embargo, por ser descono-

cidos los elementos contenidos en las matrices $[F_{1(\pm)}]$ y $[F_{2(\pm)}]$, respectivamente el campo en la superficie y su derivada normal, es necesario hacer uso de una segunda ecuación matricial, la cual puede ser obtenida mediante un procedimiento análogo al utilizado con la ecuación (2.12) pero en esta ocasión partiendo de la ecuación (2.13)²⁵.

La ecuación matricial resultante es de la forma:

$$0 = [U_{(-)}][F_{1(-)}] + [V_{(-)}][F_{2(-)}] \quad (2.26)$$

Donde:

$$\left. \begin{aligned} [F_{1(-)}] &= \{F_{1i(-)}\} \\ [F_{2(-)}] &= \{F_{2i(-)}\} \end{aligned} \right\} \text{Son matrices columna de dimensiones } N \times 1$$

$$\left. \begin{aligned} [U_{(-)}] &= \{U_{y(-)}\} \\ [V_{(-)}] &= \{V_{y(-)}\} \end{aligned} \right\} \text{Son matrices cuadradas de dimensiones } N \times N$$

En este momento se cuenta con un sistema de dos ecuaciones matriciales y dos incógnitas, por lo que es determinado y es posible encontrar los elementos de los vectores incógnita mediante álgebra matricial.

Cuando los subíndices i, j son diferentes entre si, los elementos de las matrices respectivas, véase ecuación (2.24), pueden encontrarse sin dificultad y mediante integración numérica, debido al hecho de que no existen singularidades en las funciones dentro de los integrandos.

Tal como se hizo en el capítulo anterior, se debe analizar el caso para el cual los subíndices i, j son iguales; esto es, son los elementos de la diagonal principal o bien cuando $|\vec{r}_i - \vec{r}^j| \rightarrow 0$. Para comenzar considérese $_{ii}^{(+)}$, se debe resaltar que la función de Hankel de orden ν puede expresarse como:

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z) + iY_{\nu}(z)$$

Donde $J_{\nu}(z)$ e $Y_{\nu}(z)$ son las función de Bessel y modificada de Bessel respectivamente. Cuando $z \rightarrow 0$ se tiene²⁶:

²⁵ Kim, Min-Joong, Light Scattering from characterised random rough surfaces, p. 147

²⁶ Abramowitz and Stegun, Handbook of mathematical functions, cap 9

$$\lim_{z \rightarrow 0} J_0(z) \approx 1 \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow 0} Y_0(z) \approx \frac{2}{\pi} \log_e z$$

Se observa que $J_0(z)$ no tiene singularidades cuando $z=0$, mientras que $Y_0(z)$ posee una singularidad logarítmica que puede ser removible, por lo que el cálculo de $V_{ii(+)}$ es relativamente sencillo; esto no sucede con $U_{ii(+)}$ debido a que en el límite cuando $z=0$ aparece una singularidad no removible en $Y_1(z)$ tal como se muestra a continuación:

$$\lim_{z \rightarrow 0} J_1(z) \approx \frac{z}{\pi} \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow 0} Y_1(z) \approx -\frac{2}{\pi z}$$

Entonces, un método para llevar a cabo el análisis se muestra a continuación²⁷. Primero, supóngase un segmento de la superficie discretizada tal como se muestra en la figura 2.3.

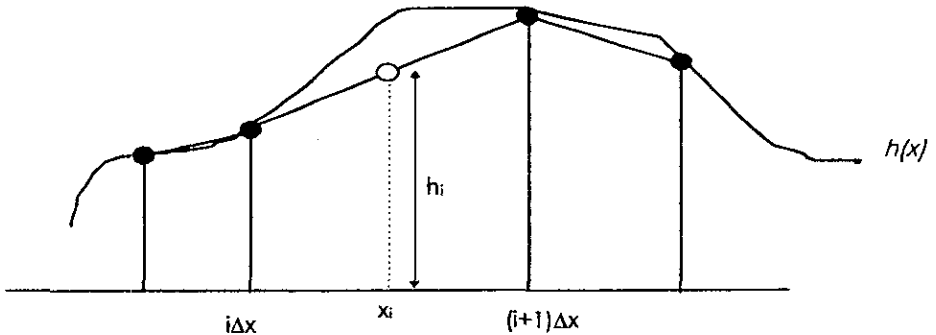


Figura 2.3 Ampliación de la superficie discretizada

En la figura anterior se puede observar la aproximación al perfil de la superficie original mediante segmentos lineales originados por la unión de los puntos de la superficie que fueron muestreados.

Por otro lado, si se supone que el punto de observación está situado por debajo de la superficie a una distancia ϵ del (figura 2.4a) es posible deformar la superficie de manera que ϵ sea el radio de un semicírculo cuyo centro es el punto de observación (figura 2.4b), al tomar el límite cuando ϵ tiende a cero; entonces se estarán obteniendo los elementos de la diagonal principal de la matriz. A este método se le conoce como "Método de la deformación".

²⁷ Para mayor detalle puede consultarse N. Morita et al, Integral Equation Methods for Electromagnetics, Cap. 3 y también A. Ishimaru, Electromagnetic wave propagation, radiation and scattering.

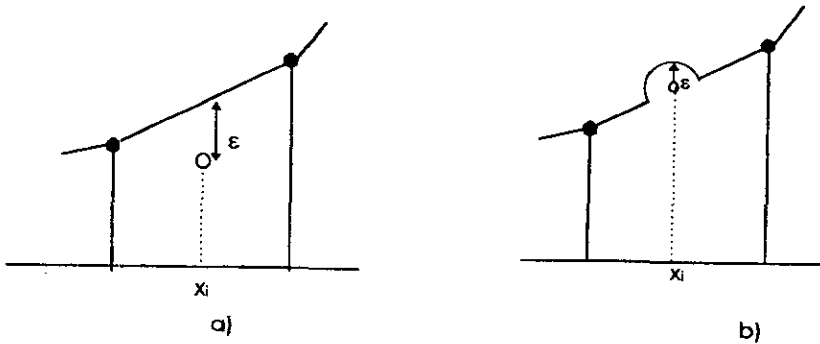


Figura 2.4 Deformación del segmento lineal

Al hacer una ampliación de la figura 2.4b se tiene:

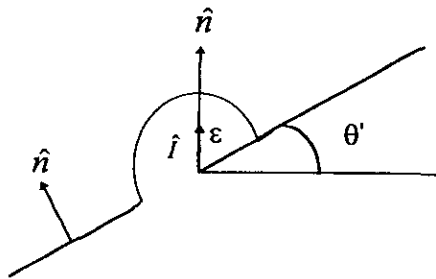


Figura 2.5 Ampliación del segmento lineal deformado

De la figura anterior se tiene que $\hat{I} \cdot \hat{n} = 0$ fuera del semicírculo, mientras que dentro de éste $\hat{I} \cdot \hat{n} = \dots$, por lo que $U_{ii(+)}$ se puede escribir como:

$$U_{ii(+)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{i\Delta x}^{(i+)\Delta x} dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx'}\right)^2} (k_0 \hat{n}_0 \cdot \hat{I}) H_1^{(1)}(k_0 |\vec{r}_i - \vec{r}'|) \quad (2.27)$$

Se sabe que :

$$dS = dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx'}\right)^2} = \epsilon d\theta' \quad (2.28)$$

Por lo tanto

$$U_{ii(+)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{2} - \theta'}^{\frac{\pi}{2} + \theta'} d\theta' \epsilon H_1^{(1)}(k_0 |\vec{r}_i - \vec{r}'|) \quad (2.29)$$

Al utilizar la expresión para el límite cuando el argumento de la función $H_1^{(1)}(k_0|\vec{r}_i - \vec{r}'|)$ tiende a cero se obtiene:

$$U_{ii(+)} = -\frac{2i}{k_0} \quad (2.30)$$

Puede mostrarse²⁶ que para la ecuación (2.26), los elementos de las matrices son:

$$U_{ij(-)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x} dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx'}\right)^2} (k\hat{n}_0 \cdot \hat{i}) H_1^{(1)}(k|\vec{r}_i - \vec{r}'|)$$

y

$$V_{ii(+)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x} dx' H_1^{(0)}(k|\vec{r}_i - \vec{r}'|)$$

2.3 Ecuaciones Matriciales para las Polarizaciones "s" o TE y "p" o TM

Por último, resta obtener las ecuaciones matriciales correspondientes para los tipos de polarización mencionados al principio de este capítulo; para lo cual será necesario partir de la ecuación (2.15)

$$-E^i(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \left[E_+^i(\vec{r}') \frac{\partial H^{(+)}(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial n_0} - H^{(+)}(\vec{r} - \vec{r}') \frac{\partial E_+^i(\vec{r}')}{\partial n_0} \right] dl' \quad (2.15)$$

2.3.1 Polarización "s" o TE

Puede mostrarse mediante el uso de condiciones de frontera, para un conductor perfecto:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) &= 0 \\ \hat{n} \cdot (\vec{D}_+ - \vec{D}_-) &= 4\pi \vec{p} \\ \hat{n} \times (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) &= 0 \end{aligned}$$

²⁶ Kim, Min-Joong, op.cit., p. 148

que la ecuación (2.15) adquiere, para la polarización s , la siguiente forma:

$$-E'(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \left[-H^{(+)}(\vec{r} - \vec{r}') \frac{\partial E_+(\vec{r}')}{\partial n o} \right] d\Gamma' \quad (2.31)$$

Al repetir el proceso de discretización utilizado para la ecuación (2.15) con la ecuación (2.31), se puede mostrar que la ecuación matricial a la que se llega es:

$$[E] = [U_{(+)}][F_{1(+)}] \quad (2.32)$$

2.3.2 Polarización "p" o TM

Al igual que en el caso anterior el punto de partida es la ecuación (2.15), de considerar las condiciones de frontera, también considerando el caso de un conductor perfecto, ésta adquiere la forma:

$$-E'(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \left[E_+(\vec{r}') \frac{\partial H^{(+)}(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial n o} \right] d\Gamma' \quad (2.33)$$

A su vez, al discretizar la ecuación (2.33) con el método mencionado anteriormente se puede mostrar que la ecuación matricial resultante es:

$$[E] = [V_{(+)}][F_{2(+)}] \quad (2.34)$$

Simulaciones y Discusión de Resultados

El objetivo principal de este capítulo es presentar los resultados obtenidos al modelar, mediante el método de Kirchhoff, el comportamiento de campos esparcidos por superficies unidimensionales conductoras perfectas cuyo perfil es modificado mediante la adición de rugosidades controladas al modelo matemático que lo representa. Es importante aclarar que los casos presentados no son necesariamente prácticos; es decir, únicamente son el medio para ilustrar los conceptos estudiados a lo largo de este trabajo.

Para llevar a cabo las simulaciones se eligieron reflectores planos y parabólicos, estos últimos debido a que pueden encontrarse en una gran variedad de aplicaciones en ingeniería; con base en este criterio, se consideró, en forma arbitraria, el valor de la relación foco-diámetro típica en una antena para la banda C" de comunicaciones (0.42 en este caso) con el fin de obtener la posición del alimentador en el foco del reflector parabólico; a su vez, esta distancia focal se utilizó también para situar el alimentador en los casos en los que el reflector es plano y también cuando su superficie es deformada mediante la adición de rugosidades. Las guras correspondientes a esta situación se encuentran en la sección 1.4 del capítulo , donde se habla de los diferentes tipos de antenas reflectoras así como en las guras 3.11 y 3.13 en la parte final del presente capítulo.

Por otro lado, es importante mencionar que se buscó que las rugosidades fueran funciones conocidas y sobre todo, continuas y suaves.

3.1 SIMULACIÓN USANDO SUPERFICIES UNIDIMENSIONALES CON DISTRIBUCIÓN DE RUGOSIDADES CONTROLADAS

Inicialmente se propuso una fuente puntual cuya ecuación es:

$$\Psi^{inc} = H_0^{(1)}(k_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|) \quad (3.1)$$

Posteriormente, se propone que en el alimentador de la antena estuviera localizada una corneta sectorial en el plano E, cuya ecuación es²⁹:

$$E_{\theta}^{inc} = -j \frac{a \sqrt{\pi k \rho_1} E_1 e^{-jk r}}{3r} \left\{ -e^{j(k \rho_1 \sin^2 \theta / 2)} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 (1 + \cos \theta) F(i_1', i_1') \right\} \quad (3.2)$$

Donde: $i_1' = \sqrt{\frac{k}{\pi \rho_1}} \left(-\frac{b_1}{2} - \rho_1 \sin \theta \right)$ y $i_2' = \sqrt{\frac{k}{\pi \rho_1}} \left(+\frac{b_1}{2} - \rho_1 \sin \theta \right)$

En la figura (3.1) se muestra gráficamente la corneta sectorial en el plano E así como los parámetros asociados que aparecen en la ecuación anterior:

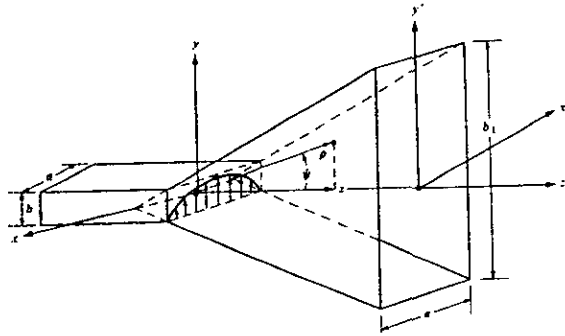


Figura 3.1 Corneta sectorial en el plano E
[Fuente: C. Balanis, Antenna Theory, analysis and design]

²⁹ Balanis C., Antenna Theory, analysis and design, p.539

Para este caso, los parámetros de la corneta fueron:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 6\lambda \\ b_1 &= 2.75\lambda \\ b &= 0.25\lambda \\ a &= 0.5\lambda \end{aligned}$$

El patrón de radiación de la corneta se puede observar en la figura 3.2, debe señalarse que se está considerando una longitud de onda de 60mm.

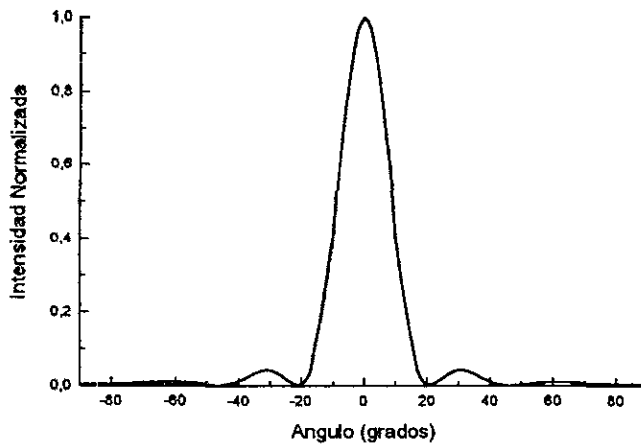


Figura 3.2a

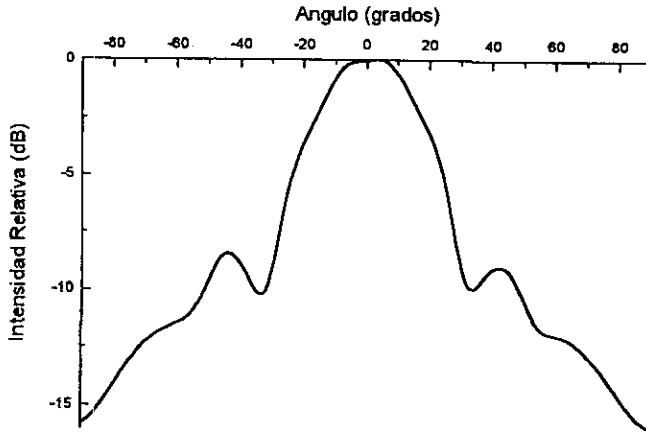
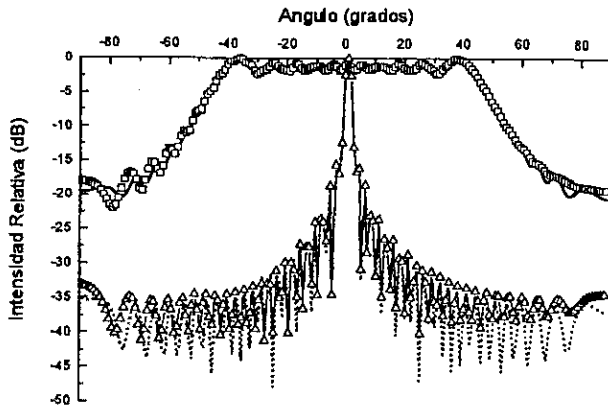


Figura 3.2b

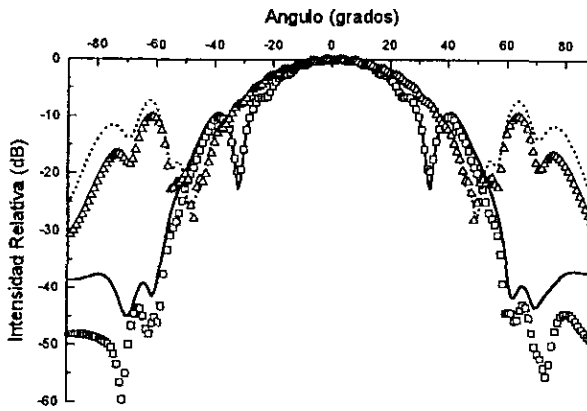
Figura 3.2 patrón de radiación producido por la corneta del alimentador, a) Patrón normalizado, b) Patrón en decibeles

En la figura 3.3 se muestra una comparación entre los patrones de radiación que se obtienen al hacer incidir una campo sobre una superficie plana y sobre una parabólica; las simulaciones se realizaron utilizando el método de Kirchhoff y se comprobaron los resultados con el método de extinción; hay que señalar que este último no se utilizará en el resto de las simulaciones debido a que, por sus características, requiere de una cantidad de tiempo de procesamiento así como una gran cantidad de memoria en la computadora. Lo anterior tiene como consecuencia el no poder simular, en tiempos cortos, el esparcimiento de campos en superficies bidimensionales.



	Sup. Plana	Sup. Parabólica
M. de Kirchhoff	—	- - -
M. de Extinción	□□□□	△△△△

Figura 3.3a Fuente puntual en el alimentador



	Sup. Plana	Sup. Parabólica
M. de Kirchhoff	—	- - -
M. de Extinción	□□□□	△△△△

Figura 3.3b Corneta sectoral

Puede observarse de la figura anterior, que los patrones de radiación obtenidos para cuando la superficie es plana son similares y no existen variaciones significativas al comparar ambos métodos; la misma situación se presenta para el caso de la superficie parabólica; sin embargo, un aspecto importante que debe resaltarse es el angostamiento del patrón; esto es, que la energía se radía en una dirección específica.

La figura (3.3b) muestra que cuando se considera una fuente real existen diferencias notables en los patrones de radiación obtenidos, dichas diferencias se aprecian al comparar ambas figuras entre sí.

Debe también ser recalcado el hecho de que, cuando el ángulo de observación va siendo cada vez mayor, en la gráfica cuando es mayor de 60° , las diferencias en decibeles, entre ambos métodos son notorias, pudiéndose apreciar esto en la figura (3.3b).

En los siguientes párrafos se presentarán los resultados obtenidos de simulaciones numéricas. En algunos casos se utilizó como superficie de referencia una parábola, la cual siempre tuvo alimentación frontal y cuyo perfil fué modificado, posteriormente adicionándole rugosidades controladas; en otros casos se utilizó una superficie plana y se llevo a cabo el procedimiento anterior.

Los resultados mostrados en las figuras (3.4) a (3.8) se presentan de la siguiente manera, primero se muestran los perfiles obtenidos al deformar el perfil de la superficie adicionándole rugosidades y el número de la figura antecede a la letra "a"; posteriormente, utilizando la letra "b" precediendo al número, se tienen los patrones de radiación obtenidos; la línea horizontal que aparece es la referencia de los tres decibeles, en la cual la energía es la mitad del valor original. Seguido de esto se presenta una tabla que contiene las ecuaciones respectivas para cada uno de los perfiles utilizados y finalmente, se encuentra la discusión de los resultados.

Es importante hacer notar, que el tipo de línea con el cual esta dibujada cada una de las superficies reflectoras es el mismo con el cual esta dibujado el patrón de radiación respectivo; esto con el fin de no crear confusión al interpretar la información contenida en las gráficas.

Por otro lado, en las figuras (3.4)- (3.6) al igual que en las figuras (3.9)-(3.10) se utiliza una fuente puntual, mientras que en las figuras (3.7)-(3.8) se considera una corneta sectorial

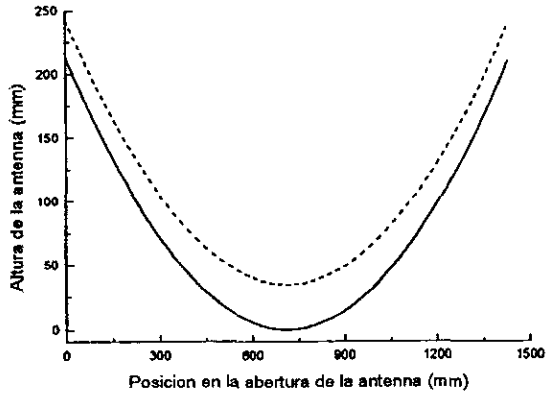


Figura 3.4a

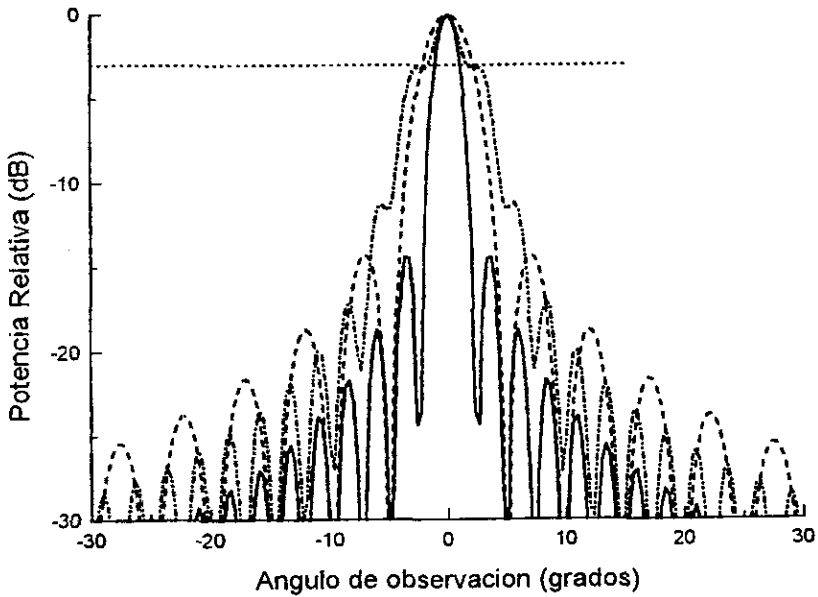


Figura 3.4 b

Figura 3.4 a) Perfiles de la superficie, b) Patrones de radiación, donde:
 — sup. 1 con $\lambda=60$, - - sup. 1 con $\lambda=120$, — - sup. 2 con $\lambda=60$

TABLA 3.4

Superficie Número	ECUACIÓN {LEYENDA DEL PERFIL}{mm}	LONGITUD DE ONDA DEL CAMPO INCIDENTE (mm)
1	$z = \frac{x^2}{40}$	$\lambda=60$
1	$z = \frac{x^2}{40}$	$\lambda=120$
2	$z = \frac{x^2}{40} + 0.58 \cos^2\left(\frac{l\pi}{16} x\right)$	$\lambda=60$

Donde l es la longitud de la superficie

En la figura (3.4b) se pueden observar tres patrones de radiación superpuestos, como se indica en la tabla (3.4), a dos de éstos les corresponde el mismo perfil de la superficie y solo existe diferencia en la longitud de onda del campo incidente, puede notarse que el patrón de radiación para el segundo caso se ha ensanchado de forma tal que es el doble del patrón en el primer caso; esto debido a que las dimensiones de la abertura permanecieron constantes. Si se considera que los patrones de radiación anteriores corresponden a una antena de reflector parabólico y aunque el ancho de haz de potencia media (HPBW) aumentado en el segundo caso, para fines prácticos la energía estaría dirigida en la misma dirección, aunque con la longitud de onda mayor la zona de cobertura también sería mayor.

Considerando el tercer caso y si se supone nuevamente que se trata del reflector parabólico de una antena, se puede observar que aunque la longitud de onda del campo incidente es la misma que en el primero y la posición de los mínimos no varía, el nivel de energía en los primeros lóbulos laterales está 3 decibeles abajo del nivel máximo, la forma del patrón de radiación es difusa.

Debe notarse, que la amplitud de las rugosidades adicionadas es pequeña si se compara con las dimensiones del reflector parabólico original, véanse en la figura (3.4a) los perfiles de la superficie con y sin corrugaciones, podría pensarse que la variación en la forma del patrón no se debe a éstas últimas sino a un desenfoque ya que la variación en las dimensiones del reflector son mínimas.

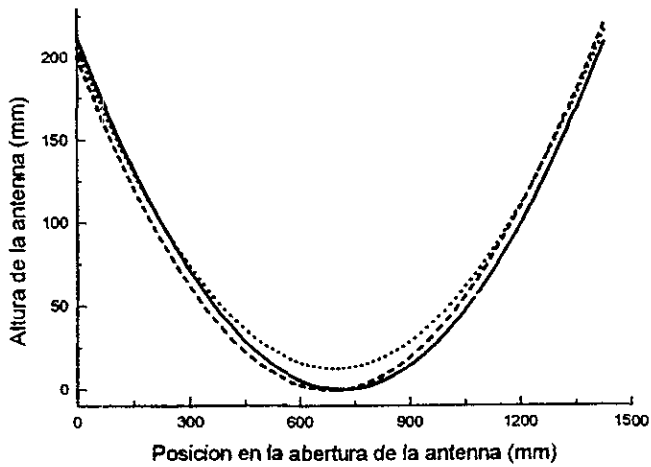


Figura 3.5a

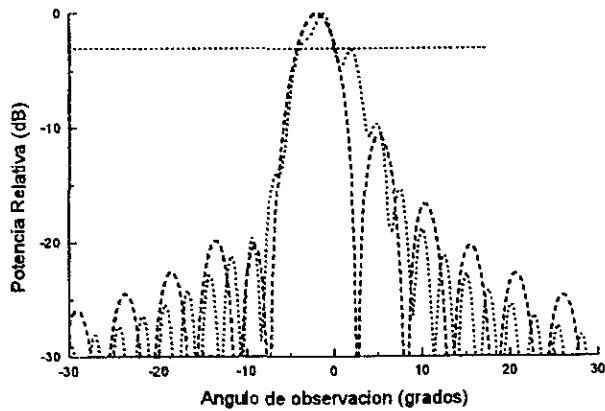


Figura 3.5b

Figura 3.5a) Perfiles de la superficie, b) Patrones de radiación donde:
 - - sup. 2 con $\lambda=120$, — sup. 3 con $\lambda=60$

TABLA 3.5

Superficie	ECUACIÓN {LEYENDA DEL PERFIL}(mm)	LONGITUD DE ONDA DEL CAMPO INCIDENTE (mm)
1	$z = \frac{x^2}{40}$	$\lambda=60$
2	$z = \frac{x^2}{40} + 0.2 \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{4}x\right)$	$\lambda=120$
3	$z = \frac{x^2}{40} + 0.2 \left(0.55 \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{4}x\right) + 1.05 \cos\left(\frac{l\pi}{4}x\right) \right)$	$\lambda=60$

Donde l es la longitud de la superficie

En la figura (3.5b) se observan dos patrones de radiación superpuestos, sobresalen dos aspectos importantes; el primero es que en ambos no existe simetría con respecto al origen por lo que existe un desfaseamiento con respecto al patrón obtenido con un reflector parabólico sin rugosidades adicionadas, el otro aspecto es que en el patrón de radiación cuya línea es continua, se observan claramente el lóbulo principal y los lóbulos laterales estando el nivel de energía de éstos por debajo de los diez dB; mientras que en el patrón con línea discontinua, donde además se variaron tanto la longitud de onda como la rugosidad, se observan mínimos relativos con un alto nivel de energía, aunque el ancho de haz de potencia media (HPBW) es similar para ambos patrones, debido a las deformaciones en el patrón provocadas por la variación en la rugosidad. En la gráfica que muestra los perfiles se puede observar que no existe una diferencia significativa en las dimensiones de los reflectores rugosos con respecto al reflector original; sin embargo, los efectos se aprecian en la forma del patrón de radiación resultante; esto es, se observa el cambio de la dirección de propagación debido a la rugosidad.

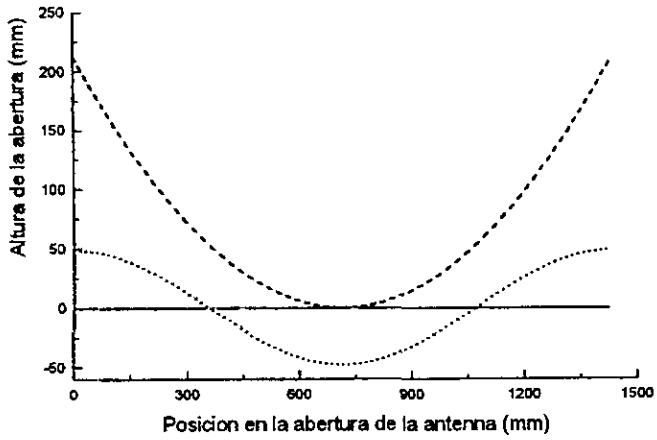


Figura 3.6a

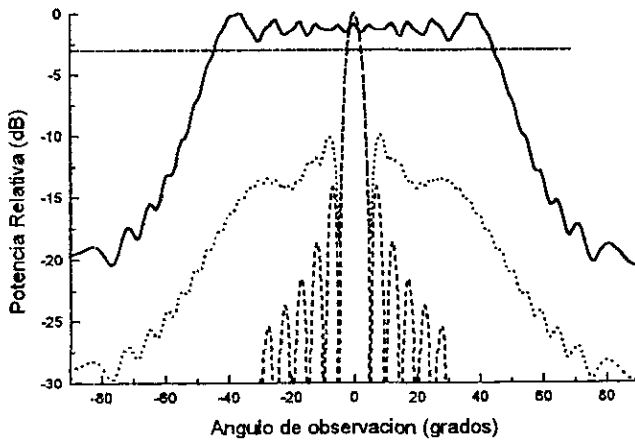


Figura 3.6b

Figura 3.6a) Perfiles de la superficie, b) Patrones de radiación donde:
 — sup. 1 con $\lambda=60$, - - sup. 1 con $\lambda=120$, - - - sup. 2 con $\lambda=60$

TABLA 3.6

Superficie Número	ECUACIÓN {LEYENDA DEL PERFIL} (mm)	LONGITUD DE ONDA DEL CAMPO INCIDENTE (mm)
1	$z=0$	$\lambda=60$
2	$z = \frac{x^2}{40}$	$\lambda=120$
3	$-0.8 \cos\left(\frac{l\pi}{2} x\right)$	$\lambda=60$

Donde l es la longitud de la superficie

En la figura (3.6b) se muestran los patrones de radiación para los casos indicados en la tabla (3.6). Se observa que cuando la superficie es plana el patrón de radiación es ancho; sin embargo, al sumarle una rugosidad controlada y mantenerla misma longitud de onda, el ancho del lóbulo principal disminuye y la energía se radia hacia una dirección específica tal como sucede en el caso de una superficie parabólica sin rugosidad. Debe notarse que aunque la longitud de onda del campo incidente sobre la parábola es el doble de la longitud de onda incidente sobre la superficie plana con corrugaciones, el ancho de haz de potencia media (HPBW) es el mismo para ambos casos, debe notarse también que la diferencia en las dimensiones de las superficies reflectoras es significativa, vease figura(3.5a).

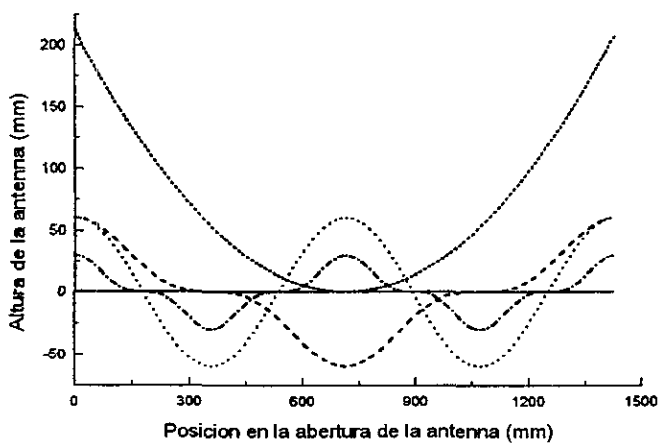


Figura 3.7a

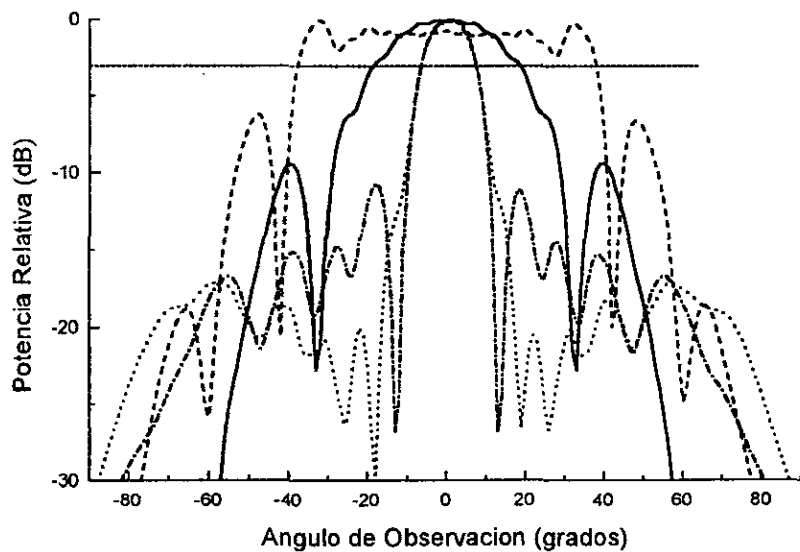


Figura 3.7b

Figura 3.7a) Perfiles de la superficie, b) Patrones de radiación donde:
 — sup. 1, - - - sup. 2, sup. 3, - · - · sup. 4

TABLA 3.7

Superficie Número	ECUACIÓN {LEYENDA DEL PERFIL}{mm}	LONGITUD DE ONDA DEL CAMPO INCIDENTE (mm)
1	$z=0$	$\lambda=60$
2	$0.5 \cos^3\left(\frac{l x}{2} 2\pi\right)$	$\lambda=60$
3	$\cos\left(\frac{l x}{2} 2\pi\right)$	$\lambda=60$
4	$-\cos^3\left(\frac{l x}{2} 2\pi\right)$	$\lambda=60$

Donde l es la longitud de la superficie

En la figura (3.7b) se presentan los patrones de radiación obtenidos cuando se utiliza una corneta en el alimentador y además se modifica el perfil de un reflector, inicialmente plano, mediante la adición de rugosidades controladas al modelo matemático que lo representa. Las ecuaciones resultantes se hallan en la tabla (3.7) así como también las leyendas respectivas para cada gráfica. Al tomar como referencia el patrón producido por el reflector plano (caso 1) se observa que puede ensancharse o angostarse dependiendo de la rugosidad adicionada, nótese la importancia de los resultados mostrados en los casos 2 y 3 de la tabla (3.7), donde el ancho de haz de potencia media (HPBW) es el mismo a pesar de que existen diferencias significativas en las profundidades totales así como en las rugosidades de los reflectores. Por otro lado, basta con modificar el signo y la amplitud de la rugosidad del caso 2 para obtener un (HPBW) ensanchado. Es importante recalcar el hecho de que la longitud de onda del campo incidente se mantuvo constante para todos los casos.

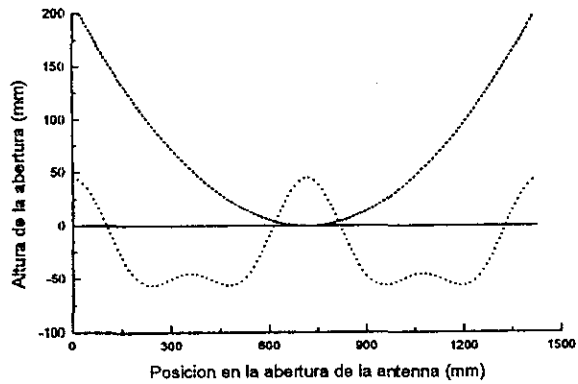


Figura 3.8a

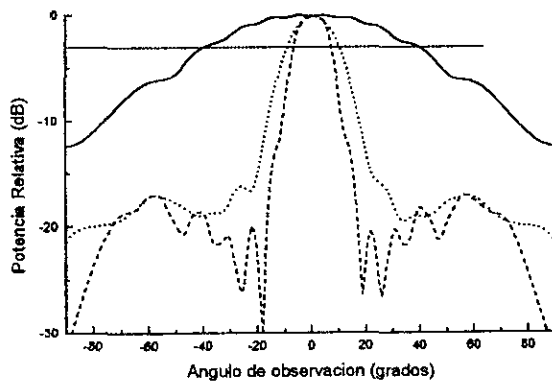


Figura 3.8b

Figura 3.8a) Perfiles de la superficie, b) Patrones de radiación donde:
 — sup. 1 con $\lambda=120$, - - - sup. 2 con $\lambda=120$, sup. 3 con $\lambda=60$

TABLA 3.8

Superficie Número	ECUACIÓN {LEYENDA DEL PERFIL}(mm)	LONGITUD DE ONDA DEL CAMPO INCIDENTE (mm)
1	$z=0$	$\lambda=120$
2	$\frac{3}{4} \cos\left(\frac{lx}{2} 2\pi\right) - \frac{3}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{lx}{2} 2\pi\right)$	$\lambda=120$
3	$\cos\left(\frac{lx}{2} 2\pi\right)$	$\lambda=60$

Donde l es la longitud de la superficie

En la figura 3.8 se tiene la última de las simulaciones llevadas a cabo considerando superficies unidimensionales, y en este caso al igual que en el anterior (figura y tabla 3.7), con una corneta sectorial localizada en el alimentador.

En la figura (3.8a) se tienen los perfiles obtenidos al adicionar una rugosidad controlada a la superficie original, que en este caso era un plano; los modelos matemáticos de los perfiles resultantes se muestran en la tabla 3.8 y los patrones de radiación respectivos se encuentran en la figura (3.8b). Los patrones de la figura son simétricos para los tres casos y el nivel de lóbulos laterales está por debajo de los 15 dB para los casos 2 y 3 de la tabla 3.8

Se observa nuevamente una variación en el (HPBW), el cual es de aproximadamente 80° para el caso de la superficie plana mientras que cuando la rugosidad es cosenoidal llega a ser de aproximadamente 15° ; esto implica que al modificar el perfil la energía se radia en una dirección específica, además se debe señalar que la longitud de onda es constante en ambas situaciones.

Por otro lado, al adicionar una rugosidad controlada como la que se muestra en el caso 2 de la tabla 3.8 y al mismo tiempo disminuir la frecuencia a la mitad del valor original, se obtiene como resultado un patrón de radiación similar al del caso 3 de la tabla 3.8³⁰; existiendo entre ellos una diferencia de 6° . Puede pensarse en la posibilidad de obtener un mismo patrón de radiación para superficies reflectoras con diferentes perfiles así como con longitudes de onda diferentes incidiendo sobre éstos.

³⁰ Este caso es el caso 3 de la tabla 3.6, por lo que para conocer su perfil basta con remitirse a la figura 3.6a.

1.2 SIMULACIÓN USANDO UNA SUPERFICIE BIDIMENSIONAL CON DISTRIBUCIÓN DE RUGOSIDADES CONTROLADAS

La siguiente simulación se llevó a cabo con el método de Kirchhoff, ya que como se mencionó en los párrafos anteriores con el método de extinción se hubiera requerido una cantidad de memoria tal que sobrepasaba los recursos que se tenían disponibles.

El modelo que se estudia en esta sección propone una superficie perfectamente conductora y circularmente simétrica, cuya distribución de rugosidad se caracteriza por ser gaussiana (figura 3.9).

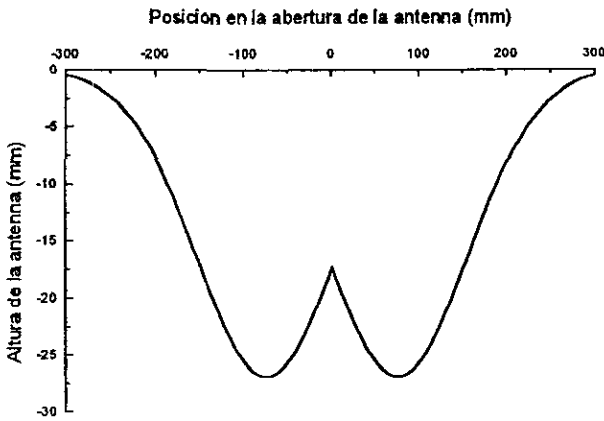


Figura 3.9 Perfil de la superficie, nótese la diferencia de escalas en los ejes x e y , donde x es el radio en mm e y es la profundidad en mm.

La ecuación de la superficie es:

$$h(r) = -A \exp\left(-\frac{(r - r_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- donde:
- h es la altura
 - r es el radio en la superficie
 - r_0 es el radio promedio
 - A es la amplitud
 - σ es la desviación standard

Se considera además que el medio es isotrópico y homogéneo y que la fuente es una onda esférica con polarización lineal.

El objetivo es, al igual que en los ejemplos de la sección 3.2, utilizar la aproximación de Kirchhoff para comparar el esparcimiento en la superficie corrugada con el de una superficie plana al hacer incidir, en ambas, ondas esféricas con diferentes longitudes de onda.

Para llevar a cabo el análisis del esparcimiento en superficies corrugadas en 2D es necesario utilizar la ecuación de Stratton-Chu, por lo que se tiene de la ecuación (1.34) :

$$\vec{E}^{sc}(\vec{r}') = \iint_{S_0} \left[\begin{aligned} &(\hat{n}_o \times (\nabla \times \vec{E}(\vec{r})))_+ g(\vec{r}, \vec{r}') \\ &+ [\hat{n}_o \cdot \vec{E}_+(\vec{r})] \nabla g(\vec{r}, \vec{r}') \\ &+ \hat{n}_o \times \vec{E}_+(\vec{r}) \times \nabla g(\vec{r}, \vec{r}') \end{aligned} \right] dS \quad (3.3)$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico
 \vec{r}_o es un punto en la superficie
 \hat{n}_o es el vector normal a la superficie

$g(\vec{r}, \vec{r}')$ es la función escalar de Green que en el campo lejano se escribe como:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_o) \approx \frac{e^{-ik_{sc}r}}{4\pi r} \quad \text{donde}$$

\vec{k}_{sc} es el vector de onda esparcido
 \vec{r}' es un punto en la superficie
 \vec{r} es el punto de observación
 $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$

Por otro lado, se sabe que:

$$\vec{E} = k \times j\omega\mu\vec{H} \quad (3.4)$$

Al sustituir (3.4) en (3.3) la ecuación de Stratton-Chu queda:

$$\vec{E}^{sc}(r) = \frac{-ie^{ikr}}{4\pi r} \hat{k}_{sc} \times \times \iint_S \left\{ (\hat{n}_o \times \vec{E}) - \eta \hat{k}_{sc} \times \hat{n}_o \times \vec{H} \right\} e^{-ik_{sc} \cdot \vec{r}'} d\vec{S} \quad (3.5)$$

Se puede demostrar que para el caso de un conductor perfecto (3.5) toma la forma:

$$\vec{H}^{sc}(\vec{r}) = \frac{-ik\eta e^{ikr}}{2\pi r} \iint_S \left[\hat{n}_o(\vec{r}') \times \vec{H}^{inc}(\vec{r}') \right] e^{-ik\vec{s}c \cdot \vec{r}'} dS \quad (3.6)$$

Al utilizar la onda esférica incidente:

$$\vec{H}^{inc}(\vec{r}) = \frac{e^{ikincR}}{R} \hat{e}$$

donde \hat{e} es el vector unitario en la dirección del campo eléctrico
 R es la distancia de la fuente a la superficie

La ecuación para el campo esparcido queda:

$$\vec{H}^{sc}(\vec{r}) = \frac{-ik\eta e^{ikr}}{2\pi r} \iint_S \left[\frac{e^{ikR}}{R} (\hat{n}_o \times \hat{j}) \right] e^{i\vec{k}^{sc} \cdot \vec{r}'} dS \quad (3.7)$$

$$\text{donde } \hat{j} = \hat{k}^{inc} \times \hat{e}$$

La ecuación (3.7) se discretizó mediante un proceso análogo al mostrado en el capítulo 2, con el fin de calcular los campos reflejados en superficies planas, contemplando longitudes de onda de 60mm (banda C) y 80mm (banda S); posteriormente se calculó el campo esparcido en la superficie rugosa considerando una longitud de onda de 80mm.

A su vez, los parámetros de la superficie rugosa fueron:

- =radio de la superficie = 300 mm
- altura de la fuente = 100mm
- =desviación estandar gaussiana = 80mm
- =radio promedio = 75mm
- =amplitud = 0.45

A partir de los datos anteriores se llevaron a cabo, para el caso bidimensional, 15 simulaciones cuyos resultados se muestran en la figura 3.10; en todos los casos se consideró una fuente puntual situada en una distancia fija normal a la superficie reflectora, esto es, si se tratara de una superficie parabólica la fuente estaría localizada en el foco.-Se discuten también los efectos de la polarización en los campos esparcidos en la superficie, para el caso en el que se tiene copolarización así como aquel en el que se tiene polarización cruzada.

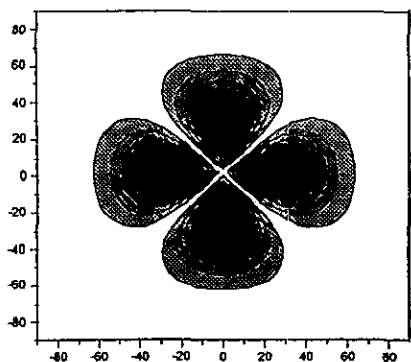


Figura 3.10a $\lambda=60$ mm, polarización HH y superficie plana.

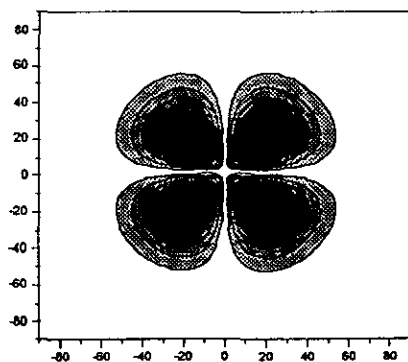


Figura 3.10b $\lambda=60$ mm, polarización HV y superficie plana.

Para las figuras 3.10a y 3.10b tanto la longitud de onda como el perfil de la superficie permanecen constantes, no existen lóbulos laterales y se observan cuatro espigas en el patrón de radiación. La diferencia más significativa se tiene que al cambiar la polarización, se observa una rotación en la figura (3.10b) como consecuencia del cambio de dirección sufrido por el vector de campo eléctrico reflejado, dicho cambio de dirección obedece a las leyes de Fresnel³¹, las cuales establecen que los coeficientes de reflexión, cuando la superficie es un conductor perfecto, son $R=1$ y $R=-1$ para las polarizaciones TM o "p" y TE o "s" respectivamente.

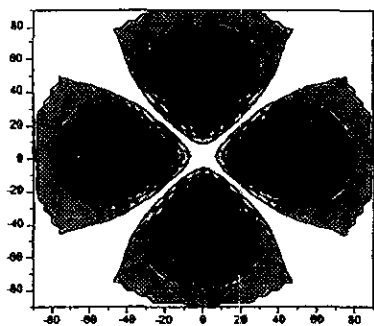


Figura 3.10c $\lambda=80$ mm, polarización HH y superficie plana.

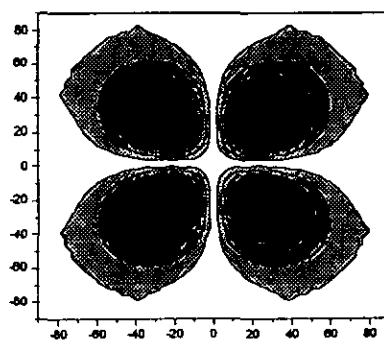


Figura 3.10d $\lambda=80$ mm, polarización HV y superficie plana.

³¹ Born M. and Wolf E., Principles of Optics, p.36-51

En este caso, al igual que en el anterior, la longitud de onda, aunque aumento, permanece constante así como también el perfil de la superficie, no existen lóbulos laterales; pero se aprecia un ensanchamiento de las espigas del patrón de radiación, éste nuevamente una rotación del patrón, figura 3.10d, al cambiar la polarización del campo reflejado debido a las causas explicadas en el párrafo anterior.

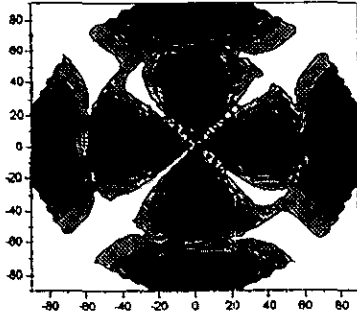


Figura 3.10e $\lambda = 80$ mm, polarización HH y superficie rugosa.

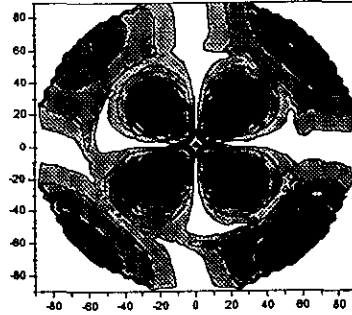


Figura 3.10f $\lambda = 80$ mm, polarización HV y superficie rugosa.

Finalmente, aunque la longitud de onda se mantiene constante, se observa en las figuras 3.10e y 3.10f la aparición de lóbulos laterales cuando la superficie es rugosa, se tiene también que las espigas del patrón se han angostado y a su vez existe una rotación debido al cambio en la polarización; hay que resaltar el hecho de que aunque la superficie es rugosa, el fenómeno de reflexión puede considerarse totalmente por lo que las leyes de Fresnel se aplican al asumir que el punto en el cual está incidendo el campo eléctrico pertenece a un plano de extensión infinita.

Al comparar las figuras 3.10c y 3.10e se observa que a pesar de las diferencias en los patrones de radiación, la energía se propaga en la misma dirección. La figura de la página siguiente es una vista lateral de los patrones obtenidos, los cuales están superpuestos con el fin de ilustrar las diferencias y similitudes existentes entre ellos.

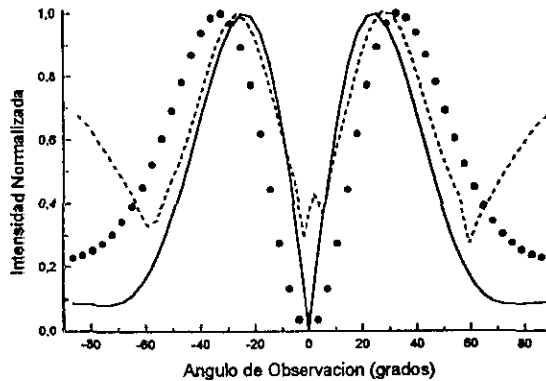


Figura 3.11. Los ejes son ángulo de reflexión contra intensidad normalizada.
 Se tiene: — $\lambda = 60\text{mm}$, - - - $\lambda = 80\text{mm}$ en la superficie plana y
 $\lambda = 80\text{mm}$ en la superficie rugosa

La información que arrojó la gráfica anterior (figura 3.11) es la siguiente:

- El efecto de la rugosidad cambia las posiciones de los picos en el patrón de radiación para $\lambda = 80\text{mm}$ aproximando éstos a los picos que se presentan cuando la longitud de onda es $\lambda = 60\text{mm}$ con una superficie plana.
- Los picos del patrón de radiación para $\lambda = 80\text{mm}$ se modifican, en posición mas no en magnitud, cuando la superficie es corrugada.
- Con la rugosidad se puede aproximar el patrón de radiación para $\lambda = 80\text{mm}$ y superficie corrugada al patrón de radiación para $\lambda = 60\text{mm}$ y la superficie plana.

Con base en las gráficas anteriores, salta a la vista una posible aplicación de éste principio. Cuando se quiere obtener un patrón de radiación con una zona de cobertura específica o bien con haces puntuales, véase figura 3.12, es necesario un arreglo de alimentadores situado en el foco de la parábola que sirve como superficie reflectora, el conjunto de patrones de radiación producidos así como su interacción mútua, producirá el patrón requerido inicialmente.

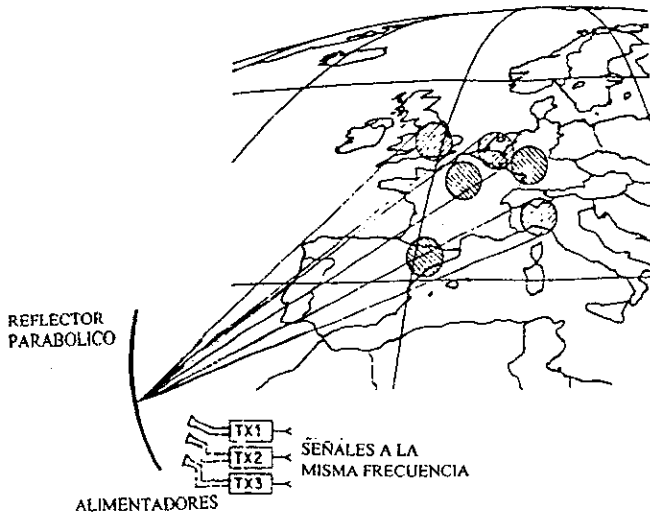


Figura 3.12 Antena satelital con haces puntuales

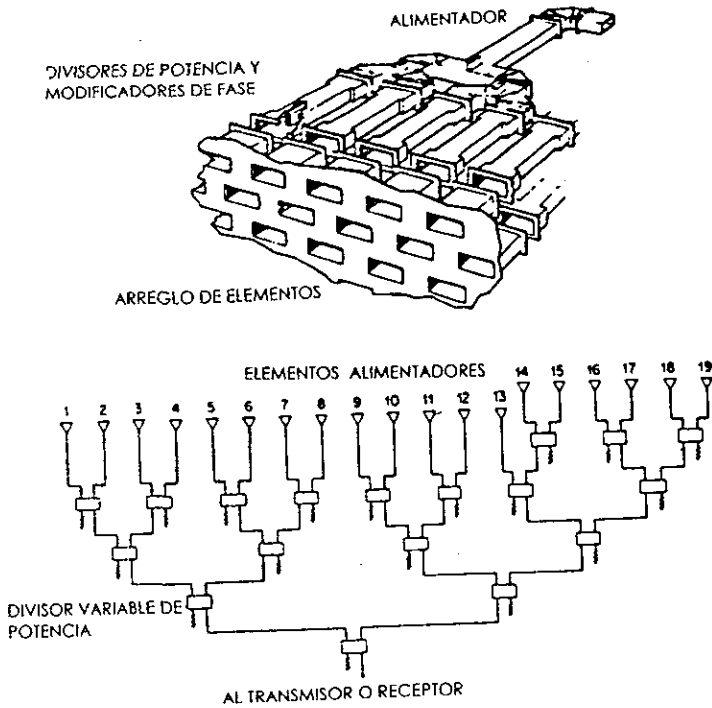


Figura 3.13 Ampliación del arreglo de alimentadores de la antena

Sin embargo, al hacer una amplificación de este arreglo, véase figura 3.13, se tiene que el número de guías de onda que se están utilizando puede ser grande y esto implica incremento en el peso del satélite, normalmente el material usado en las guías de onda es bronce, y a su vez un incremento en el costo, por lo que la posible aplicación es el diseño de una antena³² en cuyo alimentador se tenga una sola guía de onda y a su vez cuya superficie reflectora sea corrugada en forma controlada para producir el patrón de radiación requerido inicialmente. Resumiendo, se tendría una antena con un solo alimentador y superficie reflectora variable, las rugosidades dependerían directamente de las frecuencias a utilizar así como de la forma del patrón que se quiera obtener. Para ilustrar el concepto véase la figura 3.14.

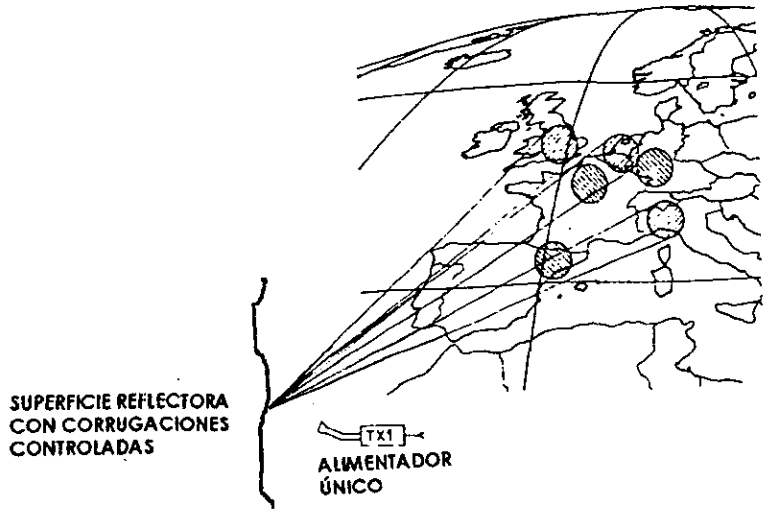


Figura 3.14 Antena con superficie corrugada

³² Roeder, A.G. et. al., "Some European Satellite-Antennas Developments and Trends", Antennas and Propagation Magazine, vol 38, pp. 9-21

CONCLUSIONES

Con base en los resultados anteriores, pueden enunciarse las siguientes conclusiones:

- Varía la forma del patrón de radiación con solo variar la longitud de onda del campo incidente y sin necesidad de modificar el perfil de la superficie.
- Se ha mostrado que se puede aprovechar la adición de rugosidades controladas al modelo matemático que representa a una superficie reflectora para modificar el patrón de radiación; esto es, angostarlo o ensancharlo y en el caso de la superficie bidimensional, para aproximar los patrones de radiación, al incidir campos de diferentes longitudes de onda, en las bandas S y C.

Se puede ver en las gráficas que muestran la estructura de las superficies, que sus rugosidades son suaves y no existen cortes abruptos ni picos. Este hecho puede recalcar observando las escalas de las gráficas que muestran las superficies reflectoras.

Como trabajo a futuro se sugieren los siguientes puntos:

- Investigar los límites del rango de frecuencias y rugosidades dentro de los cuales se puedan aproximar las formas de los patrones de radiación para campos incidentes con diferentes longitudes de onda.

Utilizar longitudes de onda localizadas dentro del intervalo de frecuencias correspondiente a las bandas para comunicaciones, desde la banda "L" hasta la banda "Ka", para diseñar de una antena cuya superficie reflectora sea corrugada y su elemento alimentador sea un dipolo, esto último con el fin de comparar su desempeño con una antena de reflector cilíndrico y llevar a cabo la validación experimental de los resultados obtenidos en este trabajo.

- Construir una antena cuya superficie reflectora sea corrugada y su elemento alimentador sea una corneta y comparar, en forma teórica así como experimental, su desempeño con respecto a una antena cuyo reflector es un paraboloide de revolución. Esto último a que estas antenas se encuentran en una amplia gama de aplicaciones en ingeniería.

Calcular la ganancia y la eficiencia de la antena, sin rugosidades controladas y también cuando éstas se adicionan, con el fin de determinar el coeficiente de

mejoramiento de ganancia así como de optimizar el coeficiente de eficiencia de acabado de la superficie.

- Llevar a cabo una comparación entre el método de Kirchhoff, el teorema de extinción y el método de distribución de corrientes para el establecimiento de los límites de aplicación de éstos, en el diseño de antenas de abertura con superficie reflectora corrugada.
- Partiendo de que una de las tendencias en el diseño de antenas reconfigurables es el hecho de que no solamente el reflector principal puede ser corrugado sino que también lo puede ser el subreflector, llevar a cabo un estudio como el presentado en este trabajo, analizando superficies bidimensionales y considerando los diferentes casos que pueden presentarse; esto es, cuando el reflector principal es corrugado y el subreflector no, o viceversa, o bien que ambos sean corrugados.
- Estudiar la posibilidad de diseñar una antena cuya superficie sea reconfigurable, mediante el uso de algoritmos de reconstrucción de perfiles de superficies corrugadas, partiendo del hecho de que la forma del patrón de radiación así como la frecuencia a la que se está trabajando son conocidas. Con esto se incursionaría en la síntesis de patrones de radiación de antenas de abertura.

BIBLIOGRAFÍA

1. Abramowitz and Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, USA, 1964, 1046 pp.
2. Balanis, Constantine, Advanced Engineering Electromagnetics, John Wiley & Sons, USA, 1989, 981 pp.
3. Balanis, Constantine, Antenna Theory, Analysis and Design, John Wiley & Sons, USA, 1982, 720 pp.
4. Beckmann, Petr & Spizzichino, André, The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces, Artech House Inc., USA, 1987, 503 pp.
5. Born, Max y Wolf, Emil, Principles of Optics, Pergamon Press, sixth (corrected) edition, England, 1986, 808 pp.
6. Collin, Robert E., Antennas and Radiowave Propagation, Mc Graw Hill, USA, 1985, 508 pp.
7. Eyges Leonard, The Classical Electromagnetic Field, Dover Publications Inc., USA, 1972, 413 pp.
3. Hecht Eugene y Zajac Alfred, Optica, Addison Wesley Iberoamericana, EU, 1986, 586 pp.
7. Hsu, Hwei P., Análisis Vectorial, Addison Wesley Iberoamericana, México, 1987, 286 pp.
10. Ishimaru, Akira, Electromagnetic wave propagation, radiation and scattering, Prentice Hall, USA, 1991, 637 pp.
11. Johnk, Carl T, A., Teoría Electromagnética, principios y aplicaciones, Limusa, México, 1988, 741 pp.
12. Jull, Edward V., Aperture Antennas and Diffraction Theory, Peter Peregrinus LTD., London, 1981, 173 pp.
13. Kim Min-Joong, Light scattering from characterised random rough surfaces, Ph.D. Thesis, University of London, 1989, 205 pp.
14. Kong, Jin Au, Electromagnetic wave theory, John Wiley & Sons, USA, 1986, 696 pp.
15. Kraus, John D., Antennas, second edition, Mc Graw Hill, USA, 1988, 892 pp.

16. Kraus, John D., Electromagnetismo, Mc Graw Hill, México, 1986, 852 pp.
17. Lafore, Robert, Turbo C, programming for the PC, SAMS, USA, 1993, 696 pp.
18. Marion, Jerry B. & Heald, Mark A., Classical Electromagnetic Radiation, second edition, Academic Press, London, 1980, 488 pp.
19. Morita, N. et. al., Integral Equation Methods for Electromagnetics, Artech House, USA, 1990, 342 pp.
20. Nieto-Vesperinas, Manuel, Scattering and Diffraction in Physical Optics, John Wiley & Sons, USA, 1991, 397 pp.
21. Ogilvy, J.A., Theory of wave scattering from random rough surfaces, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1991, 277 pp.
22. Papas, Charles H., Theory of Electromagnetic Wave Propagation, Dover Publications Inc., USA, 1988, 244 pp.
23. Rojani, Kamal B., Programming in C with numerical methods for engineers, Prentice Hall, USA, 1996, 1130 pp.
24. Spiegel, Murray R., Análisis Vectorial, Mc Graw Hill, México, 1969, 222 pp.
25. Tai, Chen-To, Generalized vector and Dyadic Analysis, IEEE Press, USA, 1991, 133 pp.
26. Tai, Chen-To, Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory, IEEE Press, USA, 1991, 133 pp.
27. Ulaby, Fawwaz T. et. al., Microwave Remote Sensing, active and pasive, vol. III, Artech House Inc., USA, 1986, pp. 816-982.
28. Ulaby, Fawwaz T. et. al., Microwave Remote Sensing, active and pasive, vol. I, Artech House Inc., USA, 1986, pp. 1-255.
29. Varandan, V.V. et. al., Field representations and introduction to scattering, vol I, North-Holland, The Netherlands, 1991, pp. 1-164.
30. Wang, Johnson J. H., Generalized Moment Methods in Electromagnetics: formulation and computer solution of Integral Equations, John Wiley, UAS, 1991, 553 pp.
31. Yamashita, Ekichi, Analysis Methods for Electromagnetic Wave problems, Artech House, USA, 1990, 414 pp.

Articulos

1. Axline, R. M. & Fung, Adrian K., "Numerical Computation of Scattering from a Perfectly Conducting Random Surface", Transactions on Antennas and Propagation, IEEE, Vol AP-26, pp. 482-488, May 1978.
2. Brown, Gary S., "Backscattering from a Gaussian-Distributed Perfectly Conducting Rough Surface", Transactions on Antennas and Propagation, IEEE, Vol AP-26, pp. 472-481, May 1978.
3. Bruce, N.C. & Dainty J.C., "Multiple Scattring from Rough Dielectric and Metal Surfaces using the Kirchhoff Aproximation", Journal of Modern Optics, Vol. 38, pp. 1471-1481, 1991.
4. Fung, Adrian K., "Scattering Depolarization of EM Waves from a Rough Surface", Proceeding of the IEEE, IEEE, pp. 395-396, March 1966.
5. Hagfors, T., "Backscattering from an Undulating Surface with Applications to Radar Returns from the Moon", J. Geophys. Res., vol 69, pp. 3779-3784, September 1964.
6. Mitzner, K.M., "Change in Polarization on Reflection From a Tilted Plane", Radio Science, Vol 1., pp.27-29, Jan. 1966.
7. Roeder A.G. et. al., "Some European Satellite-Antennas Develop ments and Trends", Antennas and Propagation Magazine, vol 38, pp. 9-21, April 1996.