



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

03077

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y DE POSGRADO DEL C.C.H.

4/ 2eq.

POSGRADO EN GEOFISICA

INSTITUTO DE GEOFISICA

MODELACION MATEMATICA DE LA PROPAGACION DE ONDAS SISMICAS EN MEDIOS HETEROGENEOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

O P C I O N I:

SISMOLOGIA Y FISICA DEL INTERIOR DE LA TIERRA

P R E S E N T A:

ANDRES PECH PEREZ

MEXICO, D. F.

1998

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Aida con amor

A mis padres y a mi hermano

# ÍNDICE

<b>RESUMEN</b>	
<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>II. FUNDAMENTOS DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS</b>	<b>2</b>
<b>II.1. Generación de ondas por una excitación local</b>	<b>3</b>
<b>II.2. Propagación de ondas en un medio elástico</b>	<b>4</b>
<b>III. FUNDAMENTOS DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO HETEROGÉNEO</b>	<b>8</b>
<b>III.1. Teoría de rayos</b>	<b>12</b>
<b>III.2. Ecuación eikonal</b>	<b>15</b>
<b>III.3. Ecuación de transporte</b>	<b>20</b>
<b>III.4. Trazado de rayos en un medio donde la velocidad varía linealmente con la profundidad</b>	<b>24</b>
<b>IV. SOLUCIÓN ANALÍTICA DE PEKERIS</b>	<b>28</b>
<b>V. FUNCIÓN DE GREEN PARA UN MEDIO CON GRADIENTE DE VELOCIDAD CONSTANTE (2D)</b>	<b>33</b>
<b>V.1. Caso <math>SH</math></b>	<b>33</b>
<b>V.2. Regularización</b>	<b>35</b>
<b>V.3. Caso vectorial</b>	<b>38</b>
<b>V.4. Verificación</b>	<b>41</b>
<b>VI. FUNCIÓN DE GREEN PARA UN MEDIO CON GRADIENTE DE VELOCIDAD CONSTANTE (3D)</b>	<b>57</b>
<b>VI.1. Diferencias finitas</b>	<b>61</b>
<b>VI.2. Verificación</b>	<b>67</b>
<b>VII. MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA</b>	<b>78</b>
<b>VII.1. IBEM</b>	<b>79</b>
<b>VII.2. Discretización</b>	<b>79</b>
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>84</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>85</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>86</b>

## RESUMEN

En el presente trabajo se describe brevemente la teoría básica de la propagación de ondas en medios homogéneos y heterogéneos. Se analizan algunas soluciones clásicas de la teoría de rayos, así como algunos elementos de la geometría diferencial. También se tratan aspectos fundamentales de la solución analítica de Pekeris (1946), porque esta se utiliza como referencia. Con esta solución se pueden obtener los campos de desplazamiento y esfuerzo generados por una fuente puntual, aplicada en un fluido inhomogéneo en el que la velocidad de la onda compresional varía linealmente con la profundidad. Posteriormente, se aborda la regularización geométrica de soluciones para medios elásticos homogéneos, con el fin de obtener soluciones aproximadas para medios heterogéneos, donde el gradiente de la velocidad es constante. Los desplazamientos obtenidos a partir de las soluciones aproximadas se comparan con los que se obtuvieron con el método pseudoespectral y el método de diferencias finitas, para los casos bidimensional y tridimensional, respectivamente. Además, se analizan los errores asociados con la función de Green aproximada ( $G_{22}$ ) para un medio heterogéneo con gradiente de velocidad constante. Por último, se describe el método indirecto de elementos de frontera. Este se usa para calcular los desplazamientos producidos por una fuente lineal de ondas compresionales, aplicada en un semiespacio elástico, donde las velocidades de las ondas  $P$  y  $S$  varían linealmente con la profundidad.

## I. INTRODUCCIÓN

Las condiciones geológicas pueden influir en la amplificación del movimiento generado durante un sismo, la estimación del movimiento se puede realizar mediante la modelación (Luco y De Barros, 1995 y Sánchez-Sesma, 1996). Es posible inferir las condiciones locales de forma aproximada si se considera que los materiales que conforman el modelo son homogéneos. Sin embargo, es necesario considerar la heterogeneidad de cada material para poder obtener resultados más realistas. Las simulaciones en las que se usa el método de diferencias finitas o elementos finitos han resultado ser las más aproximadas, como lo muestra el artículo de Olsen *et al.* (1995), sobre la respuesta de la cuenca de los Angeles, California, ante un terremoto de magnitud  $M = 7.75$ , donde se usó el método de diferencias finitas (Olsen y Archuleta, 1996; Yomogida y Etgen, 1993, Frankel y Vidale, 1992; Frankel, 1993).

Por otra parte, los métodos de frontera (BEM) tienen algunas ventajas sobre los métodos de dominio, como es la reducción de las dimensiones del problema y la exactitud de los resultados. Algunos han aplicado el BEM usando funciones de Green obtenidas con el método del número de onda discreto, para estudiar problemas en dos y tres dimensiones, Kawase (1988), Kawase y Aki (1989), Kim y Papageorgiou (1993) y Pei y Papageorgiou (1996). Otra forma de BEM es el método indirecto de elementos de frontera (IBEM), en donde se formulan los problemas en términos de densidades de fuerza en las fronteras (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991; 1993; Sánchez-Sesma *et al.*, 1993; Pedersen *et al.*, 1993; Sánchez-Sesma y Luzón, 1995; Gaffet y Bouchon, 1989; Yokoi y Takenaka, 1995). Los métodos de frontera tienen una gran limitación, ya que cuando se trabaja con configuraciones complejas ó medios heterogéneos, no es fácil deducir la función de Green. Aunque, en el caso de medios estratificados existen métodos para calcular estas funciones (Hisada *et al.*, 1993; Fujiwara y Takenaka, 1994). Esta necesidad motivó a desarrollar un procedimiento para generar funciones de Green para medios en los que la velocidad varía con la profundidad. La aproximación analítica que se propone se obtuvo por medio de la regularización geométrica de las soluciones clásicas de la teoría de rayos. Se tomaron en consideración, los efectos del campo cercano y del lejano. Además, esta aproximación es válida en baja y en alta frecuencia. Las funciones obtenidas son válidas en un medio sin fronteras y en el que el gradiente de la velocidad es constante. Las soluciones corresponden a los casos  $SH$  y  $P - SV$ .

## II. FUNDAMENTOS DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS

Una excitación local en un medio cualquiera no se detecta simultáneamente a diferentes distancias de la región perturbada. Es necesario que transcurra el tiempo para que la perturbación se propague. Como puede ser en el caso de un temblor, este se registra a distancias remotas de la fuente después de que ha ocurrido. Existen muchos ejemplos en la naturaleza que ilustran el fenómeno de la propagación de las perturbaciones mecánicas. Un caso familiar es la propagación de ondas en la superficie del agua. Las ondas mecánicas se originan, por ejemplo, por la aplicación de una fuerza en una porción de un medio deformable. Así, las perturbaciones en una parte se transmiten a las partículas vecinas y se propagan en el medio. Se habla entonces de propagación de ondas.

En este proceso debe superarse la resistencia a la deformación debida a la consistencia del medio y la inercia. Cuando una perturbación se propaga lleva consigo energía asociada en forma de energía cinética y potencial. La energía puede transmitirse de esta manera a distancias considerables. La transmisión de la energía se realiza con la transmisión del movimiento de una partícula a otra y no por el transporte de la masa en el medio. Las ondas mecánicas se caracterizan por el transporte de la energía mediante el movimiento de las partículas en torno a su posición de equilibrio estático. La deformabilidad y la inercia son las propiedades esenciales de un medio en el que se pueden propagar ondas mecánicas. Todos los materiales reales son deformables y poseen masa, por lo tanto todos los materiales transmiten ondas mecánicas.

Debido a la complejidad de la propagación de ondas en medios reales, la descripción del fenómeno se ha podido hacer recurriendo a simplificaciones e hipótesis que dan lugar a la formulación de modelos que representan sus aspectos más importantes. Por eso, es usual aceptar que la tierra es un medio elástico lineal, homogéneo e isótropo. En un medio elástico se pueden propagar dos tipos de ondas: las ondas P y S. Las primeras se propagan con mayor velocidad y por eso se les suele llamar primarias, mientras que las segundas reciben el nombre de secundarias. Existen diversas soluciones para las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de la propagación de ondas. Así, para una fuente puntual se puede hablar de ondas esféricas, que a grandes distancias de la fuente se pueden representar como ondas planas. En algunos casos se

modela el problema de la propagación como bidimensional y la solución puede quedar en términos de ondas cilíndricas, que también a grandes distancias son aproximadamente planas.

## II.1. GENERACIÓN DE ONDAS POR UNA EXCITACIÓN LOCAL EN UN MEDIO ELÁSTICO

Supongamos que en un sólido se aplica externamente una fuerza  $F(t)$  en un punto  $P$ , como se muestra en la fig. 2.1.1.a, y se intentan evaluar los desplazamientos y esfuerzos como funciones de las coordenadas espaciales y el tiempo. Sea  $c$  la velocidad máxima con la que se propagan las perturbaciones mecánicas en el cuerpo. Si la fuerza se comienza a aplicar en  $t = 0$  las regiones perturbadas en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  serán esferas con radio  $ct_1$  y  $ct_2$ , respectivamente, con centro en el punto  $P$ . El cuerpo estará perturbado completamente en el tiempo  $r/c$ , donde  $r =$  dimensión del cuerpo medida desde el punto  $P$ . Como se indica en la fig. 2.1.1.b, la carga ha sido completamente aplicada en un tiempo  $t_a$ . Definiendo  $t_a$  en una forma más general como el tiempo en el que la fuerza  $F(t)$  sufre cambios significativos. Puede decirse que los efectos dinámicos son importantes si  $t_a$  y  $r/c$  son del mismo orden de magnitud. Si  $t_a \gg r/c$  el problema es cuasiestático y los efectos dinámicos son despreciables.

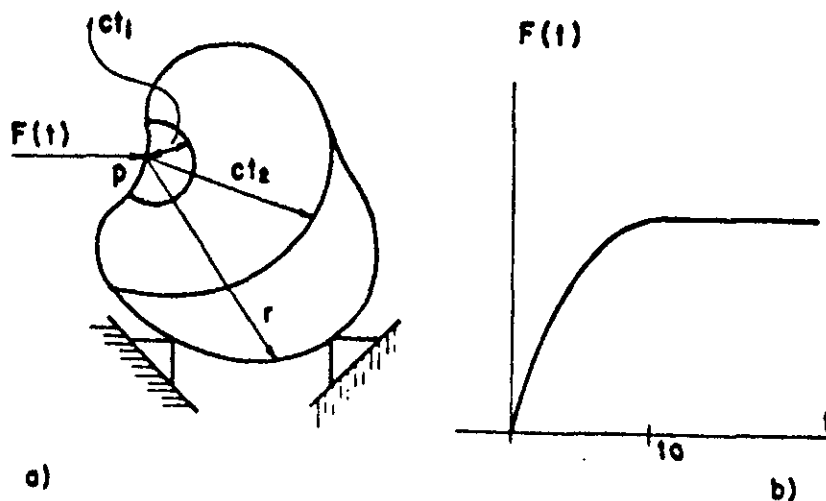


Figura 2.1.1. a) Sólido sometido a una fuerza  $F(t)$ . b) Variación de  $F(t)$  con respecto al tiempo.



## II.2. PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO ELÁSTICO

En un sólido elástico, homogéneo e isótropo las ecuaciones que rigen el movimiento son

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

donde  $u$ ,  $v$  y  $w$  son los desplazamientos en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente,  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé,  $\rho$  es la densidad de masa del medio y  $t$  representa el tiempo. Estas ecuaciones pueden escribirse de manera compacta usando la notación vectorial. Esto es

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{u} = \rho \ddot{\bar{u}} \quad (2.4)$$

donde  $\bar{u} = (u, v, w)^T$  = vector desplazamiento,  $\nabla^2$  = Laplaciano y  $\nabla$  = operador nabra. A continuación se tratarán dos ejemplos que permitirán mostrar las características principales de las ondas planas en un sólido elástico de extensión ilimitada. Supóngase que  $u \neq 0$ ,  $v = w = 0$  y que  $u$  es función de  $x$  y del tiempo, las ecs. (2.1), (2.2) y (2.3) se reducen a la expresión

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

La solución general de esta ecuación es

$$u = f\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) + g\left(t + \frac{x}{\alpha}\right) \quad (2.6)$$

donde  $\alpha^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$  y  $f, g$  son funciones de una sola variable que pueden describir una forma de onda arbitraria. Un simple análisis de los argumentos de  $f$  y  $g$  permite establecer que  $f(t - x / \alpha)$  representa una onda que viaja en la dirección positiva de  $x$  con velocidad  $\alpha$  y  $g(t + x / \alpha)$  describe una onda que viaja en la dirección negativa. Debe notarse que  $f(t - x / \alpha)$  puede representar una onda armónica estacionaria  $\exp(i\omega(t - x / \alpha))$ , donde  $i = \sqrt{-1}$  y  $\omega =$  frecuencia circular del movimiento. La ec. (2.6) representa ondas de compresión o  $P$ . Si se supone que  $u = w = 0$  y que  $v = v(x, t)$ , de las ecs. (2.1), (2.2) y (2.3) se obtiene que

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

y la solución tiene la misma forma que la ec. (2.6) pero representa ondas que viajan con una velocidad  $\beta$ , donde  $\beta^2 = \mu / \rho$ . Debe notarse que el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de avance. Las soluciones de la ec. (2.7) representan ondas de cortante. En este caso no se presentan cambios de volumen.

Las ecuaciones de movimiento pueden resolverse de una manera más general por medio de potenciales de desplazamiento. Si el vector desplazamiento se expresa como

$$\bar{u} = \nabla \phi + \nabla \times \bar{\psi}, \text{ con } \nabla \cdot \bar{\psi} = 0 \quad (2.8)$$

donde  $\phi$  es un potencial escalar y  $\bar{\psi}$  es un potencial vectorial, puede demostrarse que la ec. (2.8) representa una solución de la ec. 2.4, si  $\phi$  y  $\bar{\psi}$  satisfacen, respectivamente, las ecuaciones de onda

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 \bar{\psi} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2}. \quad (2.10)$$

Así, por ejemplo, una solución de la ec. (2.9) que representa una onda plana de compresión que viaja en una dirección arbitraria está dada por

$$\phi = f\left(t - \frac{xl + ym + zn}{\alpha}\right) \quad (2.11)$$

donde  $l, m, n$  son los cosenos de los ángulos formados por la dirección de viaje y los tres ejes coordenados, respectivamente. Si  $\vec{r} = (x, y, z)$  y  $\vec{n} = (l, m, n)$  donde  $\vec{r}$  = vector de posición y  $\vec{n}$  = vector unitario que da la dirección de propagación, la ec. (2.11) puede escribirse como

$$\phi = f\left(t - \vec{r} \cdot \vec{n} / \alpha\right). \quad (2.12)$$

Soluciones similares pueden encontrarse para los tres componentes del potencial vectorial que representan ondas de cortante viajando con una velocidad  $\beta$ . En coordenadas rectangulares la ec. (2.8) tiene la forma

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \quad (2.13)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \quad (2.14)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \quad (2.15)$$

donde  $\vec{\psi} = (\psi_x, \psi_y, \psi_z)$

Los potenciales de desplazamiento  $\phi$  y  $\vec{\psi}$  permiten definir ondas planas de compresión y cortante, respectivamente, que puedan viajar en cualquier dirección y con cualquier forma. Además, dado el carácter lineal de las ecuaciones involucradas, cualquier combinación de soluciones sigue satisfaciendo las ecuaciones de movimiento de un sólido elástico, homogéneo e isótropo de extensión ilimitada. Otro tipo de ondas son las denominadas ondas superficiales. Estas se originan por la existencia de la superficie libre del terreno. Su existencia fue propuesta por Lord Rayleigh en 1885. Se atenúan con la profundidad, su velocidad es menor que la de las ondas  $S$ , los desplazamientos que producen están contenidos en el plano de la incidencia, y el movimiento de las partículas en la superficie es retrógrado y elíptico. Las primeras observaciones

de registros sísmicos, pusieron de manifiesto la presencia de ondas con movimiento horizontal-transversal, que precedían inmediatamente a las ondas Rayleigh y que no podían ser explicadas por la teoría de éstas. Hacia 1908, C. G. Knott y E. Wiechert propusieron que estas ondas podían ser un efecto de transmisión por la corteza terrestre. En 1911 Love explicó este fenómeno, desarrollando la teoría de la propagación de ondas superficiales de componente transversal, en una capa sobre un medio seminfinito, de distintas propiedades elásticas. En la fig. 2.1.2 se muestra el movimiento de las partículas generado por cada uno de los tipos de onda descritos anteriormente

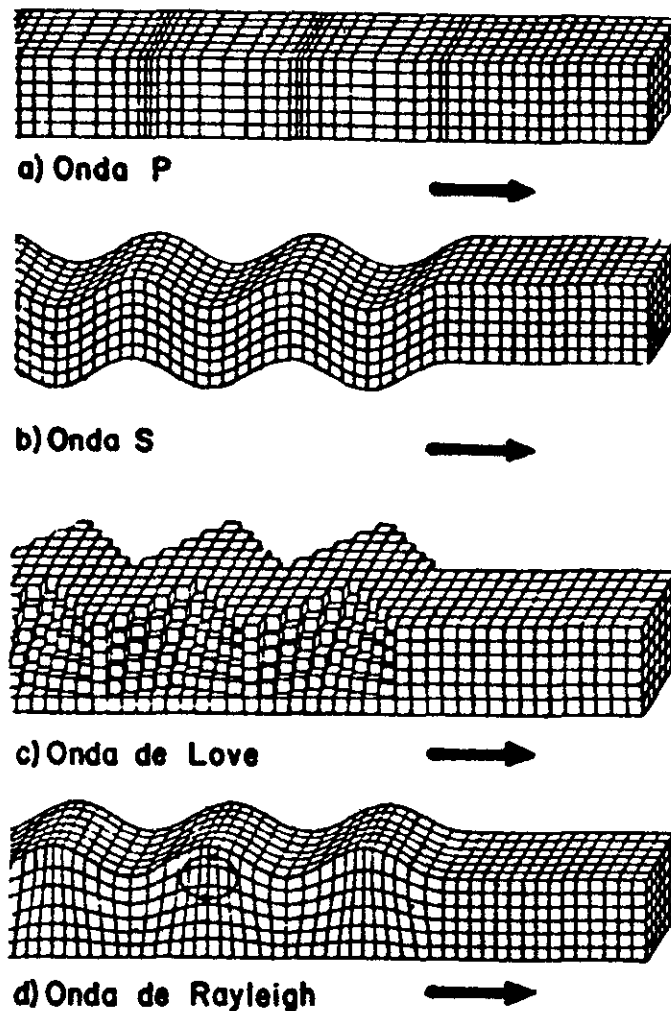


Figura 2.1.2. Diagrama esquemático de cuatro tipos de ondas sísmicas. (a) onda de compresión. (b) onda de cortante. (c) onda de Love. (d) onda de Rayleigh. La flecha horizontal indica la dirección de propagación.

### III. FUNDAMENTOS DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO HETEROGÉNEO

La geometría del frente de onda está gobernada por el principio de Huygens. Este establece que cualquier punto sobre dicho frente puede considerarse una fuente generadora de ondas. Para tiempos posteriores, este lugar geométrico se define trazando una tangente a los frentes secundarios. Si se conoce su posición en un cierto tiempo, en principio se puede predecir esta, para otros tiempos.

En un medio homogéneo las ondas viajan con la misma velocidad, pero en uno heterogéneo algunas porciones del frente de la onda se mueven más rápidamente o más lentamente, de acuerdo con el tipo de material por el que se propagan las ondas. Si la forma de la onda depende de la velocidad del medio, la trayectoria que siguen los rayos también. La geometría de estos está gobernada por el principio de Fermat. Este establece que la energía viaja por la trayectoria de tiempo mínimo. Es claro que los principios de Huygens y de Fermat son complementarios.

Consideremos ahora un medio elástico heterogéneo, en el que existe un desplazamiento  $u$  en un punto  $M$  del medio, y en este se definen dos tensores: el tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$  y el tensor de deformaciones  $\varepsilon_{ij}$ ,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.1)$$

la coma indica la derivada parcial con respecto a la dirección definida por el subíndice que se encuentra después de esta. La ley de Hooke establece una relación lineal entre el tensor de esfuerzos y el de deformaciones, y se expresa como

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.2)$$

Las constantes elásticas del medio son los elementos del tensor  $c_{ijkl}$ . Por relaciones de simetría los 81 coeficientes de este tensor se reducen a 21. La expresión anterior establece que las deformaciones son directamente proporcionales a los esfuerzos. Combinando esta ecuación con

la segunda ley de Newton, se obtiene la expresión que rige el movimiento en un medio elástico y que se conoce como la ecuación de la elastodinámica lineal

$$\left[ c_{ijkl} u_{k,l} \right]_{,j} + f_i = \rho u_{i,tt}. \quad (3.3)$$

La función  $c_{ijkl}$  es generalmente continua y diferenciable, y estas consideraciones también son válidas para la densidad. En un medio elástico, lineal e isótropo, únicamente dos elementos del tensor  $c_{ijkl}$  son linealmente independientes:  $\lambda$  y  $\mu$  (constantes de Lamé). Así,

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.4)$$

En un medio heterogéneo  $\lambda$  y  $\mu$  pueden variar en el espacio. El medio heterogéneo más simple es aquel en el que la velocidad varía linealmente con la profundidad, pero este puede ser un sólido elástico o un fluido. Si el medio por el cual se propaga la energía es elástico, existe acoplamiento de ondas  $P$  y  $S$ . En cambio, si el medio es un fluido únicamente se propagan ondas compresionales, debido a que no existen esfuerzos de cizalla.

A continuación se muestra la deducción de soluciones clásicas de la teoría de rayos para el caso acústico, con objeto de mostrar la estructura y la compatibilidad de las soluciones para medios homogéneos y heterogéneos. Para este caso particular la ec. (3.3) se reduce a

$$\nabla^2 P(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} P_{,tt}(\mathbf{x}, t) = -S(\mathbf{x}, t), \quad (3.5)$$

donde  $S$  representa una fuente explosiva que varía en espacio y tiempo, la densidad es constante,  $c$  es la velocidad de la onda,  $P$  es la variación de la presión y  $\nabla^2$  es el Laplaciano. En un medio homogéneo la velocidad permanece constante, por lo tanto

$$\nabla^2 P(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} P_{,tt}(\mathbf{x}, t) = -\delta(\mathbf{x})\delta(t). \quad (3.6)$$

Si el comportamiento de  $P$  cuando  $r$  tiende a cero es

$$P(r,t) \rightarrow \frac{\delta(t)}{4\pi r} \quad (3.7)$$

la solución de la ec. (3.6) debe satisfacer la condición (3.7). En el caso de una fuente explosiva la geometría de los frentes es esférica, por lo que el campo de presiones  $P$  únicamente depende del radio  $r$ , por consiguiente, el Laplaciano debe expresarse en coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0. \quad (3.8)$$

Reescribiendo la ec. (3.8) se tiene

$$\frac{\partial^2 (Pr)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (Pr)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.9)$$

Una solución particular de enorme generalidad se debe a D'Alambert. Para esta se requieren dos funciones arbitrarias  $f$  y  $g$ , tales que

$$P = \frac{f(t-r/c)}{r} + \frac{g(t+r/c)}{r} \quad (3.10)$$

por la condición (3.7). Las funciones  $\delta(t-r/c)$  o  $\delta(t+r/c)$  son soluciones de la ec. (3.9).

Como se trata de una explosión las ondas emergen de la fuente, por lo que la segunda solución se elimina, y la solución elemental es

$$P(r,t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t-r/c). \quad (3.11)$$

Esta expresión representa una perturbación (función impulso unitario) que se propaga con una velocidad  $c$  en la dirección positiva del eje  $r$ , y el factor  $1/r$  representa la dispersión geométrica. En general, para cualquier tipo de fuente ( $S(r_0, t)$ ), se debe convolucionar la función impulso unitario con la función fuente, como se muestra en la siguiente ecuación

$$P(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{v_0} \frac{S(\mathbf{r}_0, t - R/c)}{R} dv_0, \quad (3.12)$$

donde  $R$  representa la distancia entre el punto  $\mathbf{r}$  y el punto de integración  $\mathbf{r}_0$ .

Integrando la solución (3.11) a lo largo del eje perpendicular al plano de la propagación, se obtiene la siguiente solución elemental

$$P(r, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{H(t - r/c)}{\sqrt{(t^2 - r^2/c^2)}}, \quad (3.13)$$

donde  $H(t)$  es la función de Heaviside, e integrando nuevamente se deduce que

$$P(r, t) = \frac{c}{2} H(t - r/c). \quad (3.14)$$

Esta ecuación también representa una onda que viaja con una velocidad  $c$ , en la dirección positiva del eje  $r$ . En el dominio de la frecuencia la expresión (3.11) tiene la forma

$$\frac{1}{4\pi r} e^{i\omega r/c}, \quad (3.15)$$

mientras que la transformada de Fourier de la solución bidimensional (3.13) es la función de Hankel de orden cero y de primera especie,

$$\frac{i}{4} H_0^1(\omega r/c), \quad (3.16)$$

donde se observa que el tiempo de tránsito es  $r/c$ .



### III.1 TEORÍA DE RAYOS

Aplicando la transformada de Fourier a la parte homogénea de la ec (3.6), se obtiene que

$$\nabla^2 P(\mathbf{x}, t) + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2} P(\mathbf{x}, \omega) = 0. \quad (3.17)$$

Para resolver la ecuación anterior, se puede utilizar la solución para el caso homogéneo

$$\frac{1}{4\pi r} e^{i\omega T}, \quad (3.18)$$

donde el primer término define la amplitud, mientras que el segundo la localización de la onda. Si en un medio heterogéneo la variación de la velocidad con respecto a la profundidad es suave, se preserva la coherencia del frente de onda, por lo que el tiempo de tránsito y la amplitud se pueden definir localmente, y la solución para la ec.(3.17) es

$$P(\mathbf{x}, \omega) = S(\omega) A(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega T(\mathbf{x})}, \quad (3.19)$$

donde  $S(\omega)$  es la función fuente definida en el dominio de la frecuencia.

La aproximación asintótica derivada de la teoría **WKBJ** (Bender y Orzag, 1978) establece que  $A(\mathbf{x}, \omega)$  tiene la forma

$$A(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{A_k(\mathbf{x})}{(-i\omega)^k}. \quad (3.20)$$

El término predominante de esta serie es el de orden cero  $A(\mathbf{x}, \omega) = A_0(\mathbf{x})$ , por lo que

$$P(\mathbf{x}, \omega) \approx S(\omega) A_0(\mathbf{x}) e^{i\omega T(\mathbf{x})} \quad (3.21)$$

y en el dominio del tiempo

$$P(\mathbf{x}, t) \approx A_0(\mathbf{x})S(t - T), \quad (3.22)$$

lo que demuestra que la señal se propaga sin distorsión en alta frecuencia con un tiempo de tránsito  $T$ .

Se tienen dos escalas de tiempo en la señal sísmica: el tiempo de tránsito y el tiempo característico de la fuente  $\langle t \rangle$ , como se muestra en la fig. 3.1.1. Este último define el ancho de banda espectral de la energía emitida ( $\langle t \rangle = 2\pi/\omega$ ) y la aproximación para alta frecuencia será válida si  $\omega T \gg 1$ .

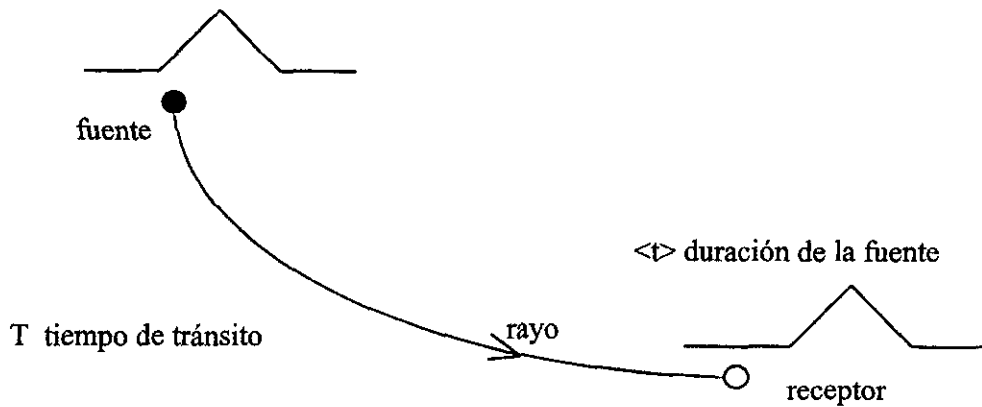


Figura 3.1.1. Escalas de tiempo en la señal sísmica.

La estructura que tiene la solución exacta para una fuente puntual en un espacio tridimensional homogéneo es afín a la que presenta la solución para un medio heterogéneo, por lo que es posible construir soluciones a partir de la solución para el caso homogéneo. En el caso bidimensional, la forma asintótica de la función de Hankel de orden cero y de primera especie, representa una onda cilíndrica

$$P(r, \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r}{c}\right) \approx \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2c}{\pi \omega r}} e^{i\omega r/c} e^{-i\pi/4} \quad (3.23)$$

que tiene una estructura que es compatible con la teoría de rayos

$$P(r, \omega) = \left[ \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\pi/4} \right] \left[ \sqrt{\frac{2c}{r}} \right] e^{i\omega r/c}. \quad (3.24)$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación anterior se obtiene que

$$P(r, t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{2r}} \frac{H(t - r/c)}{\sqrt{t - r/c}}. \quad (3.25)$$

Sustituyendo las ecs. (3.19) y (3.20) en (3.17) y reordenando términos se tiene que

$$S(\omega) \nabla P = S(\omega) \left( \nabla A e^{i\omega T} + i\omega \nabla T A e^{i\omega T} \right) \quad (3.26)$$

$$S(\omega) \nabla^2 P = S(\omega) \left( \nabla^2 A e^{i\omega T} + i\omega \left[ 2\nabla A \cdot \nabla T + A \nabla^2 T \right] e^{i\omega T} - \omega^2 (\nabla T)^2 A e^{i\omega T} \right) \quad (3.27)$$

$$\text{en } \omega^2 \quad \left( (\nabla T)^2 - 1/c^2 \right) A_0 e^{i\omega T} = 0 \quad (3.28)$$

$$\text{en } -i\omega \quad \left( 2\nabla A_0 \nabla T + \nabla^2 T A_0 \right) e^{i\omega T} = 0 \quad (3.29)$$

La ec. (3.28) es la ecuación eikonal

$$(\nabla T)^2 = \frac{1}{c^2} \quad (3.30)$$

que determina la localización de los frentes de onda, mientras que la ec. (3.29)

$$\left( 2\nabla A_0 \nabla T + \nabla^2 T A_0 \right) = 0 \quad (3.31)$$

permite determinar la amplitud de la misma y se denomina ecuación de transporte.

### III.2. ECUACIÓN EIKONAL

La ecuación eikonal controla la evolución de los frentes de onda. Un frente en un tiempo  $t + dt$  se conoce a partir de otro ubicado en el tiempo  $t$ , como se muestra en la gráfica 3.2.1.

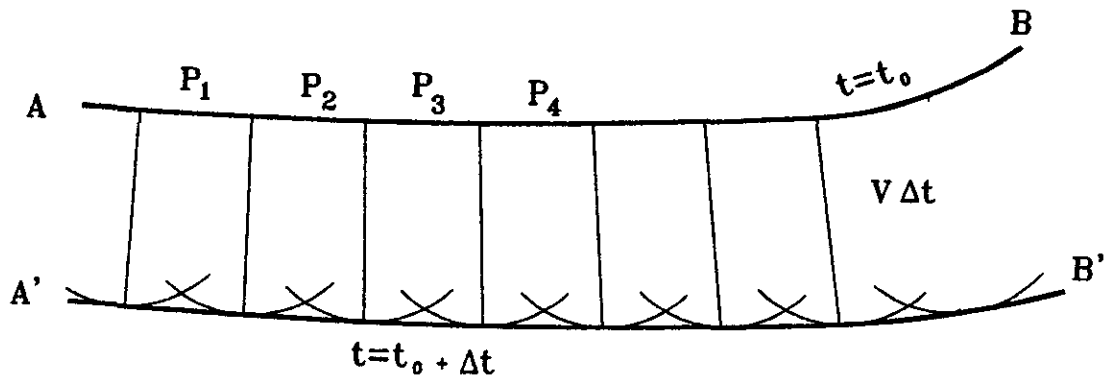


Figura 3.2.1. Construcción de un nuevo frente de onda.

En lugar de utilizar este lugar geométrico se identifican las trayectorias ortogonales a estos (fig. 3.2.2). Estas se denominan rayos. Su trazado se utiliza para resolver las ecuaciones diferenciales anteriormente descritas. Este método se denomina de las características.

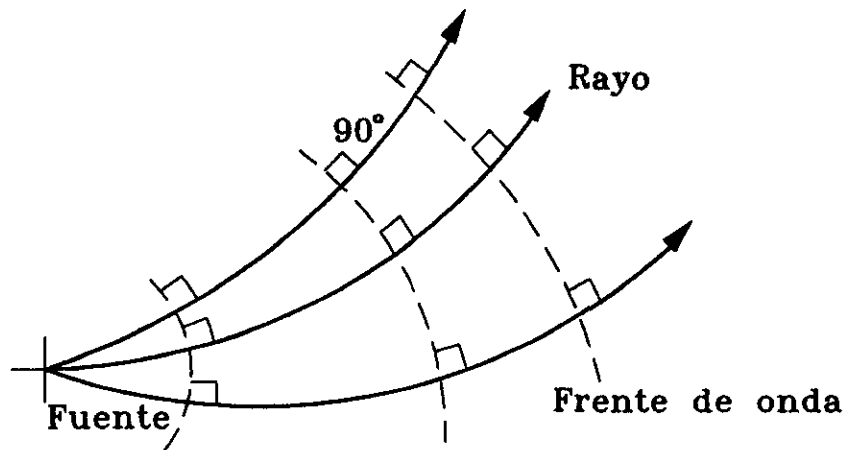


Figura 3.2.2. Rayos (líneas continuas) y frentes de onda (líneas segmentadas) en un medio heterogéneo.

Si se considera la ecuación implícita de un rayo  $(\mathbf{x}(s))$ , la tangente a este se obtiene a partir de la ecuación

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \quad (3.32)$$

donde  $|\mathbf{t}| = 1$ . Considerando que el rayo es ortogonal al frente de onda, cualquier tangente trazada a lo largo del rayo es paralela a  $\nabla T$ . Se deduce a partir de la ecuación eikonal que

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c\nabla T, \quad (3.33)$$

donde la cantidad  $|d\mathbf{x}|/c$  se denomina distancia óptica.

Por otra parte, es necesario definir como evoluciona el fenómeno en la dirección normal al rayo

$$\frac{d\nabla T}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right). \quad (3.34)$$

Así, la derivada con respecto a la coordenada curvilínea  $s$  es la proyección del operador gradiente sobre la tangente

$$\frac{d}{ds} = \mathbf{t} \cdot \nabla = c\nabla T \cdot \nabla. \quad (3.35)$$

Partiendo de esta definición, se tiene que

$$\frac{d\nabla T}{ds} = \nabla \left( \frac{1}{c} \right) \quad (3.36)$$

y combinando las ecs. (3.36) y (3.34) se obtiene la ecuación que describe el comportamiento de las ondas en la dirección de la normal al rayo

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = \nabla \left( \frac{1}{c} \right). \quad (3.37)$$

Esta ecuación también se expresa de la siguiente forma

$$\nabla \left( \frac{1}{c} \right) = \mathbf{t} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (3.38)$$

al usar la definición de curvatura ( $\kappa$ ) en el sistema de Frénet, como se muestra en la fig. 3.2.3,

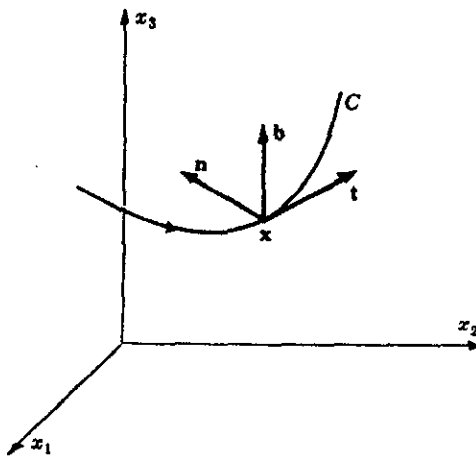


Figura 3.2.3. Sistema de Frénet.

se tiene

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n} \quad (3.39)$$

además, resulta que

$$\nabla \left( \frac{1}{c} \right) = \mathbf{t} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \right) + \frac{\kappa}{c} \mathbf{n} \quad (3.40)$$

y como la lentitud es el inverso de la velocidad ( $p = 1/c$ ),

$$\nabla p = \mathbf{t} \frac{dp}{ds} + \kappa p \mathbf{n}. \quad (3.41)$$

El producto escalar de esta ecuación con la normal  $\mathbf{n}$  nos permite controlar la evolución de la curvatura

$$\kappa = -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial n}. \quad (3.42)$$

La fig. 3.2.4 muestra la interpretación vectorial de la ec. (3.41) y esta permite introducir el ángulo  $i$  formado por el gradiente de la lentitud y la tangente al rayo,

$$\kappa = \frac{1}{p} |\nabla p| \operatorname{sen} i. \quad (3.43)$$

Por otra parte la torsión  $\tau$  se define como el producto escalar entre  $d\mathbf{n}/ds$  y la binormal  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa p} \left( -\frac{dp}{ds} \mathbf{t} + \nabla p \right) \quad (3.44)$$

En la fig. 3.2.5 se muestra la interpretación geométrica de la torsión.

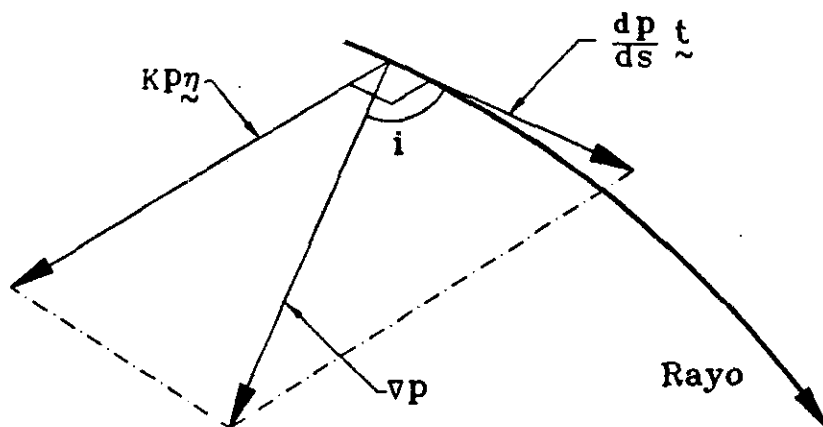


Figura 3.2.4. Interpretación vectorial de la ec. (3.41).

La torsión es una cantidad muy importante cuando se estudia la propagación de ondas en un medio elástico

$$\tau = \frac{1}{\kappa p} \frac{d\nabla p}{ds} \cdot \mathbf{b} \quad (3.45)$$

La ecuación que se utiliza para el trazado rayos es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. El orden del sistema diferencial se reduce introduciendo una variable adicional que se denomina vector lentitud  $\mathbf{p}$ , donde

$$\mathbf{p} = \nabla T = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad (3.46)$$

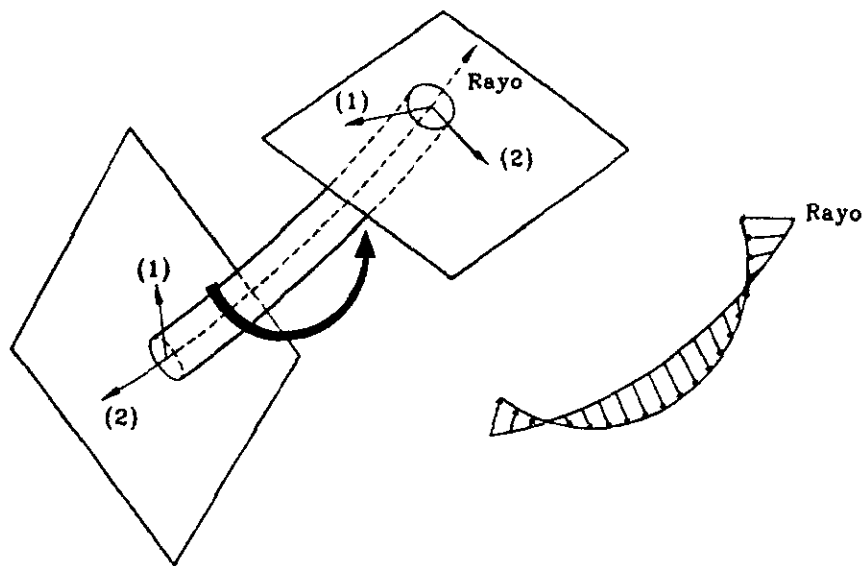


Figura 3.2.5. Interpretación geométrica de la torsión ( $\tau$ )

Se tiene entonces un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c\mathbf{p} \quad (3.47)$$



$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla\left(\frac{1}{c}\right) \quad (3.48)$$

y la fase o el tiempo de tránsito se obtiene por integración de la ecuación eikonal a lo largo de la trayectoria del rayo.

### III.3 ECUACIÓN DE TRANSPORTE

La ecuación de transporte (3.31) puede escribirse de una forma más compacta, al multiplicarla por la cantidad  $A_0$ . Así,

$$\nabla \cdot (A_0^2 \nabla T) = 0. \quad (3.49)$$

La divergencia representa el flujo de líneas de campo a través de un volumen definido. Si el flujo neto es cero la divergencia será cero, por el contrario si el flujo neto es diferente de cero la divergencia será diferente de cero. Si se considera un tubo cilíndrico de volumen  $V$  alrededor de un segmento de un rayo, con una generatriz paralela a este segmento, se observa que el rayo interseca dos superficies del cilindro (fig. 3.3.1), cada una de estas es definida por dos parámetros  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$

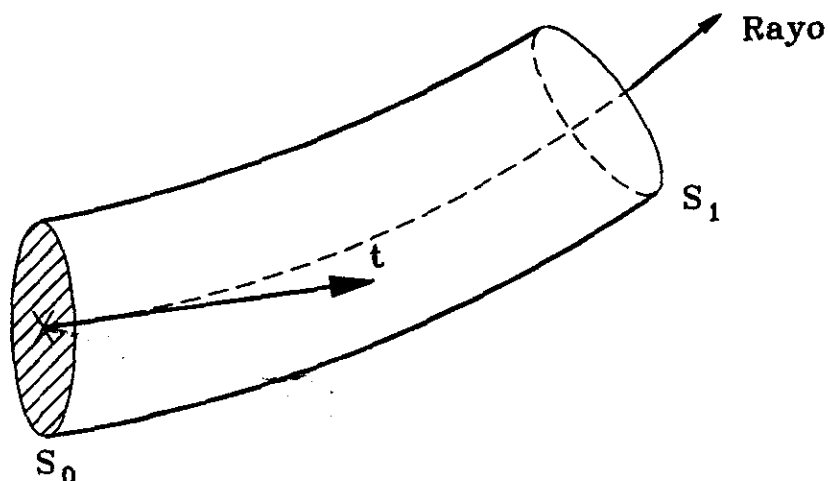


Figura. 3.3.1. Volumen cilíndrico  $V$ , alrededor de un segmento de un rayo con generatriz paralela al segmento.

$$d\mathbf{S} = dS\mathbf{n} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} \right) d\gamma_1 d\gamma_2 \quad (3.50)$$

donde  $\times$  representa el producto cruz. Las dos superficies ubicadas en  $s_0$  y  $s_1$  se representan en forma diferencial por  $dS_0$  y  $dS_1$ . Relacionando la divergencia con el flujo por medio del teorema de Gauss se tiene que

$$\iiint \nabla \cdot (A_0^2 \nabla T) dv = \iint A_0^2 \mathbf{n} \cdot \nabla T dS = 0. \quad (3.51)$$

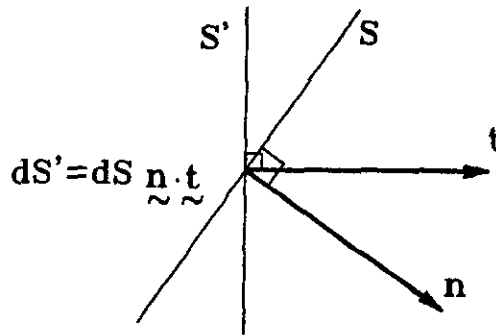


Figura 3.3.2. Proyección de la superficie que interseca el rayo, sobre la dirección que define este.

Esto significa que el flujo del campo  $A_0^2 \nabla T$  es constante durante la propagación. Ya que  $\nabla T$  es paralelo a  $\mathbf{p}$ . Introduciendo dos superficies  $dS'_0$  y  $dS'_1$  que son proyecciones de las superficies  $dS_0$  y  $dS_1$  sobre la dirección definida por el rayo (fig. 3.3.2), se observa que

$$\frac{1}{c_0} A_0^2(s_0) dS'_0 = \frac{1}{c_1} A_0^2(s_1) dS'_1. \quad (3.52)$$

Por medio de esta ecuación se calcula la amplitud en la posición  $s_1$  a partir de la amplitud en la posición  $s_0$ . La aproximación de orden cero implica que la energía se preserva a lo largo del tubo

que rodea al rayo, sin pérdida. También se considera que el vector normal al elemento superficial es paralelo al vector lentitud  $\mathbf{p}$ . Reescribiendo la ec. (3.52),

$$A_0(s_1) = A_0(s_0) \sqrt{\frac{c_1 dS'_0}{c_0 dS'_1}}, \quad (3.53)$$

y como

$$dS' = dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = J d\gamma_1 d\gamma_2, \quad (3.54)$$

donde

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial x}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial y}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial z}{\partial \gamma_2} \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

resulta que

$$A_0(s_1) = A_0(s_0) \sqrt{\frac{c_1 J_0}{c_0 J_1}}. \quad (3.56)$$

Al describir la presión observada en un punto dado, producida por una fuente con variación temporal  $S(\omega)$  y con un patrón de irradiación  $\phi(\gamma_1, \gamma_2)$ , se tiene de forma explícita la excitación, la dispersión geométrica y la propagación

$$P(x, \omega) = S(\omega) \phi(\gamma_1, \gamma_2) \sqrt{\frac{c}{J}} e^{i\omega T(x)}. \quad (3.57)$$

Ahora el problema es calcular la intensidad de la fuente  $\phi$ , para un medio homogéneo en el que la velocidad de propagación es  $c_0$ . La forma completa de la función de Green para alta frecuencia es

$$P(r, \omega) = S(\omega) \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{r} e^{i\omega T}. \quad (3.58)$$

Si se integra la relación que existe entre el elemento de superficie y el Jacobiano ( $dS = Jd\Omega$ ) sobre una esfera de radio  $R$ , resulta que

$$4\pi R^2 = J \int d\Omega = 4\pi J, \quad (3.59)$$

y la forma asintótica de la solución es

$$P(r, \omega) = S(\omega) \frac{1}{4\pi\sqrt{c_0}} \sqrt{\frac{c_0}{J}} e^{i\omega T}, \quad (3.60)$$

por lo que el patrón de irradiación para una fuente puntual, es

$$\phi(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi\sqrt{c_0}}. \quad (3.61)$$

La solución asintótica para un medio con velocidad de propagación que varía espacialmente tiene la forma

$$P(\mathbf{x}, \omega) = S(\omega) \frac{1}{4\pi\sqrt{c_0}} \sqrt{\frac{c(\mathbf{x})}{J(\mathbf{x})}} e^{i\omega T(\mathbf{x})}, \quad (3.62)$$

donde  $c_0$  es la velocidad de la onda en la fuente. Cuando el Jacobiano es positivo la solución en el dominio del tiempo se construye de manera directa

$$P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.63)$$

$$P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{c(\mathbf{x})}{c_0 J(\mathbf{x})}} S(t - T(\mathbf{x})). \quad (3.64)$$

Pero, si el Jacobiano es nulo, el tubo que rodea al rayo degenera a un punto y la energía se vuelve infinita. Esto representa una caústica. Si se conoce su posición es posible construir otra teoría asintótica que tome en cuenta el aspecto ondulatorio de la señal, y que permita describir la propagación en función de la frecuencia. En la parte iluminada de la caústica los rayos convergen hacia un mismo punto, mientras que en la otra, se observa un decaimiento exponencial. El problema se resuelve utilizando la teoría de Airy que permite conectar los dos lados de la caústica.

#### III.4 TRAZADO DE RAYOS EN UN MEDIO DONDE LA VELOCIDAD VARÍA LINEALMENTE CON LA PROFUNDIDAD

El modelo reológico más simple que se utiliza para representar un medio heterogéneo es aquel en el que la velocidad varía linealmente con la profundidad. Para este tipo de medio la función de la velocidad tiene la forma

$$c(\mathbf{x}) = c_0 + \Gamma z, \quad (3.65)$$

y el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c(\mathbf{x})\mathbf{p} \quad (3.66)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla \left( \frac{1}{c(\mathbf{x})} \right). \quad (3.67)$$

El rayo está contenido en un plano vertical y se puede elegir que  $p_y$  sea cero, si se ubica adecuadamente el sistema de coordenadas. Si el rayo está contenido dentro del plano  $xz$ , la componente horizontal  $p_x$  es el parámetro de rayo, y se debe establecer también una medida

angular que permita conocer la evolución del rayo, este ángulo ( $\theta$ ) es formado por el eje vertical y el rayo (fig. 3.4.1).

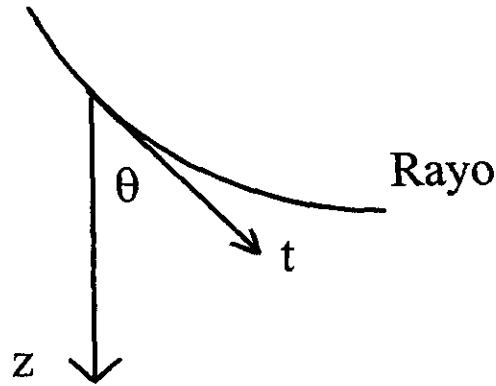


Figura. 3.4.1. Ángulo  $\theta$ , formado por el eje vertical y la tangente al rayo en el punto que se este analizando.

A continuación se definen las componentes del parámetro de rayo

$$p_x(s) = \frac{\text{sen } \theta(s)}{c(z)} \quad (3.68)$$

$$p_z(s) = \frac{\text{cos } \theta(s)}{c(z)}. \quad (3.69)$$

Otro parámetro que debe tomarse en cuenta es la curvatura ( $\kappa$ )

$$\kappa = \frac{1}{c(z)} \frac{dc}{dz} \text{sen } \theta = \Gamma p_x. \quad (3.70)$$

Partiendo de la definición geométrica de la curvatura (fig. 3.4.2), se deduce la evolución del ángulo  $\theta$

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa = \Gamma p_x \quad (3.71)$$

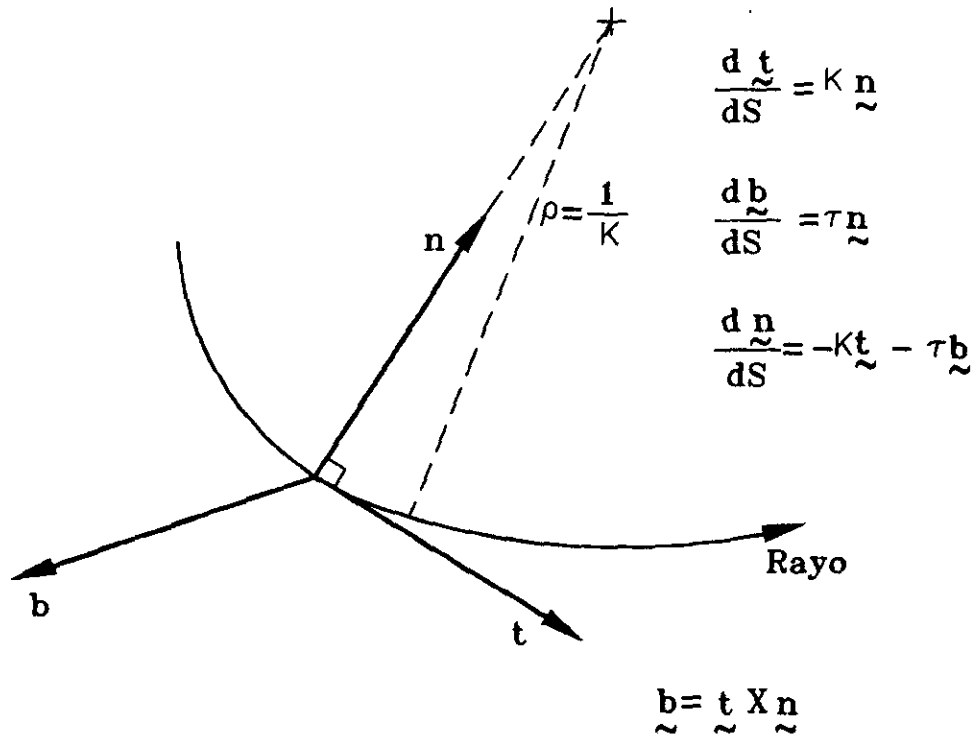


Figura 3.4.2. Interpretación geométrica de la curvatura.

e integrando las ecuaciones (3.70) y (3.71)

$$x - x_0 = \int_{x_0}^x dx' = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dx}{ds} \frac{ds}{d\theta'} d\theta' = \frac{1}{\Gamma p_x} \int_{\theta_0}^{\theta} \text{sen } \theta' d\theta' \quad (3.72)$$

$$z - z_0 = \int_{z_0}^z dz' = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dz}{ds} \frac{ds}{d\theta'} d\theta' = \frac{1}{\Gamma p_x} \int_{\theta_0}^{\theta} \text{cos } \theta' d\theta' \quad (3.73)$$

se observa que las trayectorias son analíticas y que comienzan en  $\theta_0$

$$x - x_0 = \frac{1}{\Gamma p_x} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (3.74)$$

$$z - z_0 = \frac{1}{\Gamma p_x} (\sen \theta_0 - \sen \theta). \quad (3.75)$$

A partir de la expresion  $\sen^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , se encuentra también que

$$(x - x_0 - (1/\Gamma p_x) \cos \theta_0)^2 + (z - z_0 + (1/\Gamma p_x) \sen \theta_0)^2 = (1/\Gamma p_x)^2 \quad (3.76)$$

La ecuación anterior representa la forma de los frentes de onda, que como se observa son circunferencias. Por otra parte, el tiempo de tránsito  $T$  se obtiene por integración directa

$$T - T_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{c} \frac{ds}{d\theta} d\theta = \frac{1}{\Gamma} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sen \theta} d\theta \quad (3.77)$$

$$T = T_0 + \frac{1}{\Gamma} \log \left( \frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_0/2)} \right). \quad (3.78)$$

Por lo que respecta al cálculo de la dispersión geométrica, la coordenada  $x$  se expresa en función del ángulo inicial a una profundidad constante  $z$ , por medio de la expresión

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \sen^2 \theta_0} \quad (3.79)$$

y se obtiene que

$$x - x_0 = \frac{1}{\Gamma p_x} \left( \cos \theta_0 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \sen^2 \theta_0} \right). \quad (3.80)$$



#### IV. SOLUCIÓN ANALÍTICA DE PEKERIS

En un fluido únicamente se propagan ondas compresionales, por lo que la ecuación de onda es escalar. Este es un caso particular del problema elástico. Como no existe acoplamiento de ondas  $P$  y  $S$ , se tienen soluciones analíticas para algunos problemas. Por ejemplo, para el caso de una explosión dentro de un fluido en el que la velocidad permanece constante, el campo de desplazamientos se obtiene por medio del método de separación de variables. Si la velocidad varía linealmente con la profundidad, y en el medio se tiene una fuente explosiva, es posible obtener analíticamente los campos de desplazamiento y esfuerzo. Esta solución la obtuvo Pekeris (1946). En este problema los frentes de onda definen esferas y los rayos circunferencias, el sistema de coordenadas bipolares describe su geometría. En un sistema de coordenadas cilíndricas, como el que se muestra en la fig. 4.1., donde la fuente se ubica en  $z = \beta$ , los campos de desplazamiento y esfuerzo se obtienen a partir del potencial de velocidad  $\varphi$ , que debe satisfacer las ecuaciones

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \mathbf{V} = -\nabla \varphi, \quad p = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (4.1)$$

donde  $\nabla^2$  es el Laplaciano y  $c$  varía linealmente con respecto a  $z$ . Esta ecuación se resuelve usando el método de separación de variables. Este establece que la solución debe estar constituida por un producto de funciones, donde cada una de estas debe depender sólo de una variable. Considerando que la variación temporal es armónica, el potencial debe tener la forma

$$\varphi = e^{i\omega t} J_0(kr) F(z) G(k), \quad (4.2)$$

donde  $\omega = 2\pi f$ , y  $k$  es la variable de integración con respecto a la cual se integra a lo largo de una trayectoria definida en el plano complejo  $k$ . Esto equivale a construir la solución a partir de ondas cilíndricas elementales.

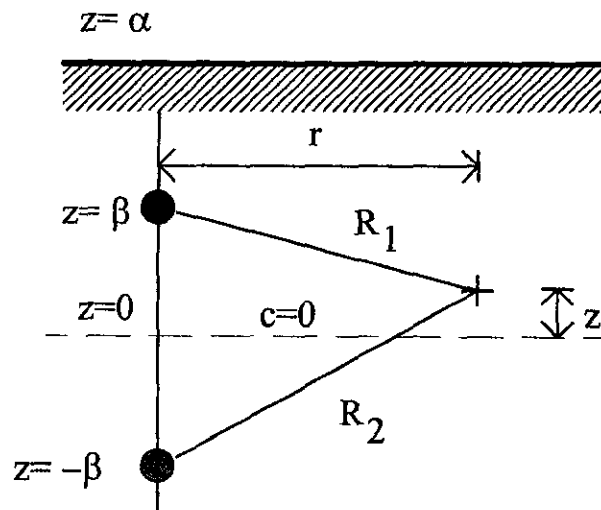


Figura 4.1. Fuente puntual, ubicada en  $z = \beta$ , dentro de un semiespacio líquido en el que la velocidad varía linealmente con la profundidad  $c(z) = az$ ,  $R_1$  es la distancia entre la fuente y el punto de observación, y  $R_2$  es la distancia entre la imagen de la fuente y el punto de observación.

El potencial definido en esta forma satisface condiciones de frontera:

- 1.-en la superficie libre ( $z = \alpha$ ) el potencial es nulo,
- 2.-en la fuente las ondas divergen,
- 3.-en el plano  $z = \beta$ , debe haber continuidad en los componentes de la velocidad, excepto en la fuente. En este punto la componente vertical de la velocidad es discontinua

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = -Dk, (z = \beta), \quad (4.3)$$

donde  $D$  es una constante, y los subíndices 1 y 2 se refieren a las regiones arriba y abajo de la fuente, respectivamente. Por otra parte, la función de la velocidad se define como

$$c = az. \quad (4.4)$$

Al sustituir la ec. (4.2) en la ec. (4.1), se observa que la función  $F(z)$  debe satisfacer la ecuación modificada de Bessel

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + F \left( \frac{\omega^2}{a^2 z^2} - k^2 \right) = 0. \quad (4.5)$$

Así, la solución general de la ecuación anterior es

$$F = A(z)^{1/2} I_{in}(kz) + B(z)^{1/2} K_{in}(kz), \quad (4.6)$$

donde 
$$n = \left( \frac{\omega^2}{a^2} - \frac{1}{4} \right)^{1/2} \approx \frac{\omega}{a},$$

$I$  y  $K$  son funciones de Bessel modificadas con orden imaginario, y  $A$  y  $B$  son constantes arbitrarias.

Para la región 2 debajo de la fuente

$$F_2 = C(z)^{1/2} I_{in}(kz), \quad (4.7)$$

y la función  $K_{in}(kz)$  se excluye por la condición de frontera 2, ya que representa ondas que viajan hacia arriba, mientras que  $I_{in}(kz)$  representa ondas que viajan hacia abajo. Por otra parte, la condición de frontera 1 se satisface cuando:

$$F_1 = A \left[ (z)^{1/2} K_{in}(kz) - \frac{I_{in}(kz)}{I_{in}(k\alpha)} K_{in}(k\alpha) \right]. \quad (4.8)$$

Aplicando la condición de frontera 3

$$A \left[ K_{in}(k\beta) - \frac{I_{in}(k\beta)}{I_{in}(k\alpha)} K_{in}(k\alpha) \right] = C I_{in}(k\beta) \quad (4.9)$$

$$kA \left[ \dot{K}_{in}(k\beta) - \frac{\dot{I}_{in}(k\beta)}{I_{in}(k\alpha)} K_{in}(k\alpha) \right] = -kD + Ck\dot{I}_{in}(k\beta) \quad (4.10)$$

y utilizando la identidad

$$\dot{K}_n(x)I_n(x) - \dot{I}_n(x)K_n(x) = -\frac{1}{x}, \quad (4.11)$$

se obtiene finalmente que

$$F_1 = Dk\beta(z)^{1/2} I_{in}(k\beta) \left[ K_{in}(kz) - \frac{I_{in}(kz)}{I_{in}(k\alpha)} K_{in}(k\alpha) \right] \quad (4.12)$$

y

$$F_2 = Dk\beta(z)^{1/2} I_{in}(kz) \left[ K_{in}(k\beta) - \frac{I_{in}(k\beta)}{I_{in}(k\alpha)} K_{in}(k\alpha) \right]. \quad (4.13)$$

Por lo tanto

$$\varphi_1 = D\beta(z)^{1/2} e^{i\omega t} \int_0^\infty J_0(kr) I_{in}(k\beta) \left[ K_{in}(kz) - \frac{I_{in}(kz)}{I_{in}(k\alpha)} K_{in}(k\alpha) \right] kdk$$

para  $\beta \leq z \leq \alpha$  (4.14)

y

$$\varphi_2 = D\beta(z)^{1/2} e^{i\omega t} \int_0^\infty J_0(kr) I_{in}(kz) \left[ K_{in}(k\beta) - \frac{I_{in}(k\beta)}{I_{in}(k\alpha)} K_{in}(k\alpha) \right] kdk$$

para  $0 < z < \beta$ . (4.15)

Estas ecuaciones representan los potenciales del campo de presiones arriba y abajo de la fuente, respectivamente, y son válidas para un semiespacio. Es posible obtener la solución para un medio infinito a partir de las ecs. (4.14) y (4.15). Para encontrarla es necesario que la distancia

entre la superficie libre y la fuente tiende a infinito ( $\alpha \rightarrow \infty$ ). Este límite se calcula a partir de la forma asintótica de las funciones de Bessel. Si  $x \gg n$  estas funciones tienen la forma

$$K_{in}(x) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \quad (4.16)$$

$$I_{in}(x) \rightarrow \frac{1}{(2\pi x)^{1/2}} e^{+x}. \quad (4.17)$$

Como  $\alpha \rightarrow \infty$ , el segundo término dentro de los paréntesis en las ecs. (4.14) y (4.15) desaparece. En consecuencia,

$$\varphi_2 = D\beta(z)^{1/2} e^{i\omega t} \int_0^\infty J_0(kr) I_{in}(kz) K_{in}(k\beta) k dk$$

para  $0 < z < \beta$  (4.18)

y usando la siguiente identidad (Bateman, 1933)

$$\int_0^\infty J_0(kr) I_\nu(kz) K_\nu(k\beta) k dk = \frac{1}{R_1 R_2} \left( \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \right)^{-\nu}, \quad (4.19)$$

donde  $R_1 = [r^2 + (\beta - z)^2]^{1/2}$  y  $R_2 = [r^2 + (\beta + z)^2]^{1/2}$ .  $R_1$  representa la distancia del punto de observación a la fuente y  $R_2$  la distancia de la imagen de la fuente al punto de observación. El potencial  $\varphi$  es

$$\varphi = \frac{D\beta(z)^{1/2} e^{i\omega t}}{R_1 R_2} e^{\left[-in2 \tanh^{-1}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right]}, \quad (4.20)$$

donde  $n = \left(\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right)^{1/2}$  y  $D = \frac{2}{\sqrt{\beta}}$ .

## V. FUNCIÓN DE GREEN PARA UN MEDIO CON GRADIENTE DE VELOCIDAD CONSTANTE (2D)

Con el objeto de mostrar la manera en que se realiza la regularización geométrica a partir de soluciones para medios homogéneos, se presenta el caso escalar  $SH$ . Para el caso vectorial la descripción se presenta de una forma más compacta.

### V.1. CASO $SH$

El modelo de velocidades más simple para un medio heterogéneo es aquel en el que la velocidad varía linealmente con la profundidad. En el caso acústico en tres dimensiones se tiene la solución exacta (Pekeris, 1946). Sin embargo, la ecuación de onda elástica no es separable y no existen expresiones para las funciones de Green (Hook, 1962; Ben-Menahem y Beydoun, 1985). En un medio en el que el gradiente de la velocidad es constante, los frentes de onda y los rayos son circunferencias (Ben-Menahem y Singh, 1981), y estos se representan geoméricamente por medio del sistema bipolar (Lebedev, 1972; Timoshenko y Goodier, 1970). De acuerdo con Beydoun y Ben-Menahem (1985) la velocidad y la densidad tienen la forma:

$$\beta(z) = \beta_0 \frac{1 + \gamma z}{1 + \gamma z_0} = \beta(0)(1 + \gamma z) \quad (5.1)$$

y

$$\rho(z) = \rho_0 \left( \frac{1 + \gamma z}{1 + \gamma z_0} \right)^n = \rho(0)(1 + \gamma z)^n, \quad (5.2)$$

respectivamente, donde  $\beta_0$  = velocidad de la onda  $S$  en la fuente,  $\beta(0)$  = velocidad de la onda  $S$  en  $z = 0$ ,  $\rho_0$  = densidad en la fuente,  $\rho(0)$  = densidad en  $z = 0$ ,  $\gamma = 1/h$ ,  $h$  = distancia medida a partir del origen del sistema de coordenadas a la línea donde la velocidad de

propagación es nula, y  $n \geq 0$ , por lo que la densidad puede ser constante o incrementarse con la profundidad. Los frentes de onda y los rayos están definidos por las expresiones

$$x^2 + \left( z - \left[ (z_0 + h) \cosh(\gamma \beta(0) \tau) - h \right] \right)^2 = R_w^2 \quad (5.3)$$

y

$$\left( x - (z_0 + h) \cot j_0 \right)^2 + (z + h)^2 = \left( \frac{R_1 R_2}{2x} \right)^2, \quad (5.4)$$

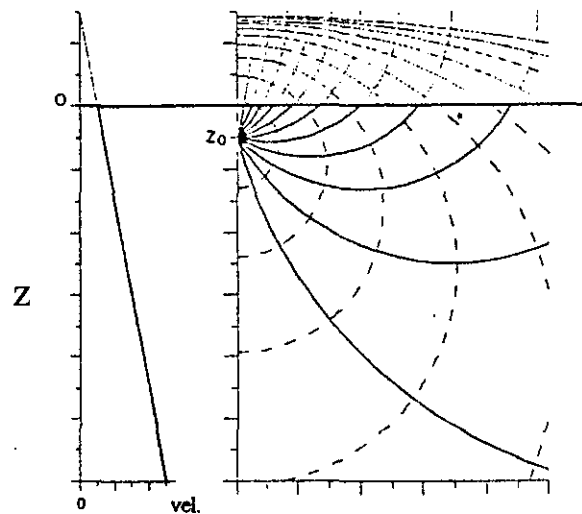


Figura 5.1.1. Rayos (líneas continuas) y frentes de onda (líneas segmentadas) en un medio en el que la velocidad varía linealmente con la profundidad.

respectivamente, donde  $R_1 = \sqrt{x^2 + (z - z_0)^2}$ ,  $R_2 = \sqrt{x^2 + (z + z_0 + 2h)^2}$ ,  $R_w = (z_0 + h) \sinh(\gamma \beta(0) \tau)$  que es el radio aparente de los frentes de onda,  $j_0$  = ángulo de salida,  $z_0$  = profundidad de la fuente, y  $\tau$  = tiempo de tránsito, que se define como

$$\tau = \frac{1}{\gamma \beta(0)} \ln \left( \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \right). \quad (5.5)$$

## V.2. REGULARIZACIÓN

La forma asintótica del desplazamiento producido por una fuente escalar en dos dimensiones, válida en alta frecuencia (Aki and Richards, 1980), se puede escribir como

$$G \approx C \left( \frac{1}{\rho(z)\beta(z)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{ds}{dj_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp(i\omega \tau), \quad (5.6)$$

donde  $C$  es una constante. La dependencia temporal  $\exp(-i\omega t)$  se omite. La ec. (5.6) es una aproximación del campo lejano. La dispersión geométrica se puede definir de la forma

$$\frac{ds}{dj_0} = R_w. \quad (5.7)$$

El exponente  $-1/2$  tiene que ver con la naturaleza del problema dos diemnsiones (2D). De las ecs. (5.1), (5.2), (5.5) y (5.7) se puede escribir que

$$G = C \left( \frac{1}{\rho(0)\beta(0)} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \gamma z)^{-\frac{1+n}{2}} \frac{1}{\sqrt{R_w}} \exp(i\omega \tau) \quad (5.8)$$

donde  $\beta(0)$ ,  $\rho(0)$  y  $(1 + \gamma z_0)^{-(1+n)/2}$  son constantes que se pueden agrupar en una  $C_1$ , tal que

$$G \approx C_1 \left( \frac{z_0 + h}{z + h} \right)^{\frac{1+n}{2}} \frac{1}{\sqrt{R_w}} \exp(i\omega \tau). \quad (5.9)$$

De las ecs. (5.5) y (5.9) se tiene que

$$G \approx C_2 \left( \frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z} \right)^{\frac{1+n}{2}} \left[ \gamma \beta(0) \tau \operatorname{csch}(\gamma \beta(0) \tau) \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\omega \tau}} \exp(i\omega \tau) \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right). \quad (5.10)$$



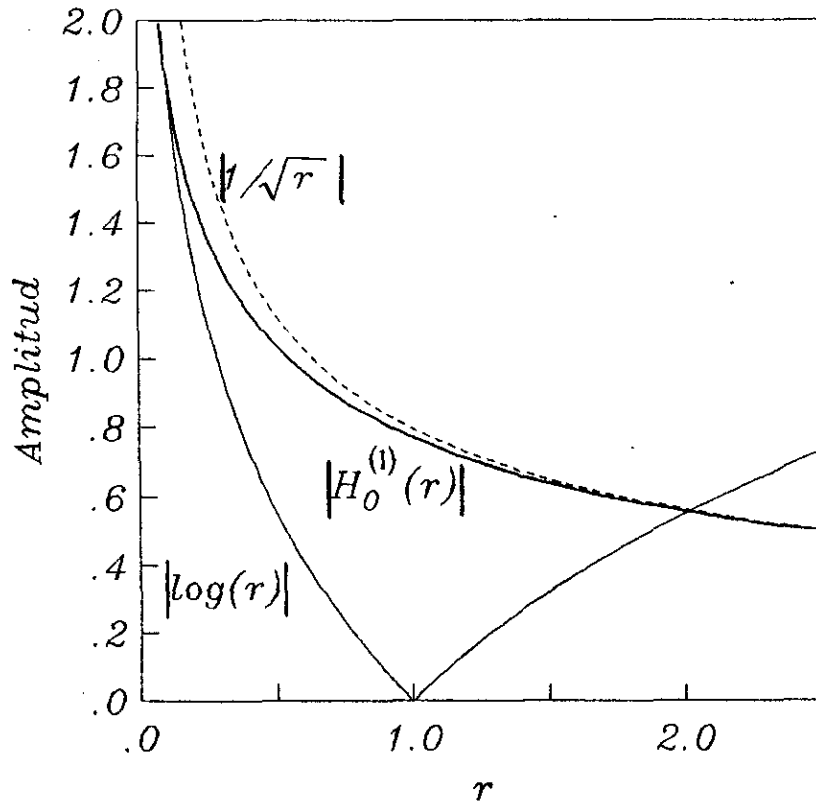


Figura 5.2.1. Comportamiento del valor absoluto de la función de Hankel de primera especie y de orden cero  $|H_0^{(1)}(r)|$ , con argumento  $r$ , cuando  $r \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow \infty$ .

En el lado derecho de la ec. (5.10) se puede reconocer la forma asintótica de la función de Hankel de orden cero y primera especie, con argumento  $\omega\tau$  (Abramowitz y Stegun, 1972). De hecho, la estructura de la ec. (10) es compatible con la teoría de rayos. De forma heurística se conservan los factores que modulan la trayectoria de los rayos, así como el tiempo de tránsito. Para el medio heterogéneo anteriormente descrito la expresión aproximada es

$$G \approx \left\{ \left( \frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z} \right)^{\frac{1+n}{2}} [\gamma \beta(0) \tau \operatorname{csch}(\gamma \beta(0) \tau)]^{\frac{1}{2}} \right\} \frac{i}{4\mu_0} H_0^{(1)}(\omega\tau) \quad (5.11)$$

que se puede expresar de la forma

$$G \approx \Lambda \frac{i}{4\mu_0} H_0^{(1)}(\omega\tau), \quad (5.12)$$

donde  $H_0^{(1)}(\omega\tau)$  = función de Hankel de orden cero y primera especie, con argumento  $\omega\tau$  y  $\mu_0$  = módulo de cortante a nivel de la fuente. Usando la ec. (5.5) se puede reescribir el factor  $\Lambda$  de la ec. (5.12)

$$\Lambda = \left( \frac{1 + \gamma z_0}{1 + \gamma z} \right)^{1 + \frac{n}{2}} \left[ 2 \ln \left( \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \right) \frac{(z_0 + h)(z + h)}{R_1 R_2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.13)$$

Esta expresión tiende a uno cuando  $\gamma \rightarrow 0$ . Por lo tanto,  $G \rightarrow (i/4\mu)H_0^{(1)}(\omega r/\beta)$ , con  $r = \sqrt{x^2 + (z - z_0)^2}$ , que corresponde al caso homogéneo. Esta función de Green puede llamarse  $G_{yy}$ , esto quiere decir que se calcula el desplazamiento en la dirección  $y$  en  $(x, z)$ , debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección  $y$  en  $x_0 = 0, z_0$ . En la ec. (5.12) la frecuencia aparece únicamente en el argumento de la función de Hankel. Por este hecho es posible realizar directamente la transformada de Fourier, y obtener así la expresión equivalente en el dominio del tiempo

$$G \approx \Lambda \frac{1}{2\pi\mu_0} \frac{H(t - \tau)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}}, \quad (5.14)$$

donde  $H(t - \tau)$  es la función escalón de Heaviside ( $= 0$  para  $t < \tau$ ,  $= 1$  para  $t > \tau$ ) y el factor  $\Lambda$  no sufre ninguna modificación. La expresión por medio de la cual se calcula el error asociado con la función de Green aproximada ( $G_{22}$ ) es:

$$\left| \frac{\varepsilon}{G_{22}} \right| = \left| 1 + \frac{1}{\rho \omega^2 G_{22}} \left( \mu \nabla^2 G_{22} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial G_{22}}{\partial z} \right) \right| \quad (5.15)$$

donde  $\nabla^2$  es el Laplaciano.

### V.3. CASO VECTORIAL

La formulación del caso vectorial es muy similar al caso escalar. Se mantienen los mismos principios y se toman como punto de partida las soluciones para una fuerza vertical y horizontal en un medio homogéneo (fig. 5.3.1).

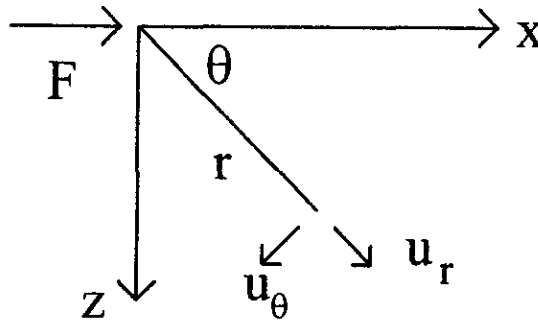


Figura 5.3.1. Desplazamientos en coordenadas polares, generados por una fuerza aplicada en un medio homogéneo, en la dirección  $\theta = 0$ .

Los desplazamientos en coordenadas polares originados por una fuerza armónica  $F$  aplicada en la dirección  $\theta = 0$  están definidos por las expresiones

$$u_r = \frac{iF}{8\rho} \{A - B\} \cos \theta \quad (5.16)$$

y

$$u_\theta = \frac{-iF}{8\rho} \{A + B\} \sin \theta, \quad (5.17)$$

donde

$$A = \frac{H_0^{(2)}(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(\omega r / \beta)}{\beta^2} \quad (5.18)$$

y

$$B = \frac{H_2^{(2)}(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} - \frac{H_2^{(2)}(\omega r / \beta)}{\beta^2}. \quad (5.19)$$

$H_n^{(2)}(\cdot)$  es la función de Hankel de segunda especie y orden  $n$ . En las ecs. (5.16) y (5.17) se pueden observar las dependencias radial y angular en  $A$  y  $B$  y en  $\cos\theta$  y  $\sin\theta$ , respectivamente (Eason *et al.*, 1956). Aplicando la transformada de Fourier a las ecs. (5.16) y (5.17) se tiene que

$$u_r = \frac{F}{2\pi\rho} \left[ \frac{H(t - \tau_\alpha)}{\alpha^2 \sqrt{t^2 - \tau_\alpha^2}} + \frac{\sqrt{t^2 - \tau_\alpha^2}}{\alpha^2 \tau_\alpha^2} H(t - \tau_\alpha) - \frac{\sqrt{t^2 - \tau_\beta^2}}{\beta^2 \tau_\beta^2} H(t - \tau_\beta) \right] \cos\theta \quad (5.20)$$

y

$$u_\theta = \frac{F}{2\pi\rho} \left[ \frac{\sqrt{t^2 - \tau_\alpha^2}}{\alpha^2 \tau_\alpha^2} H(t - \tau_\alpha) - \frac{H(t - \tau_\beta)}{\beta^2 \sqrt{t^2 - \tau_\beta^2}} - \frac{\sqrt{t^2 - \tau_\beta^2}}{\beta^2 \tau_\beta^2} H(t - \tau_\beta) \right] \sin\theta, \quad (5.21)$$

donde  $\tau_c = r/c$  es el tiempo de tránsito de una onda que se propaga con velocidad  $c$ .

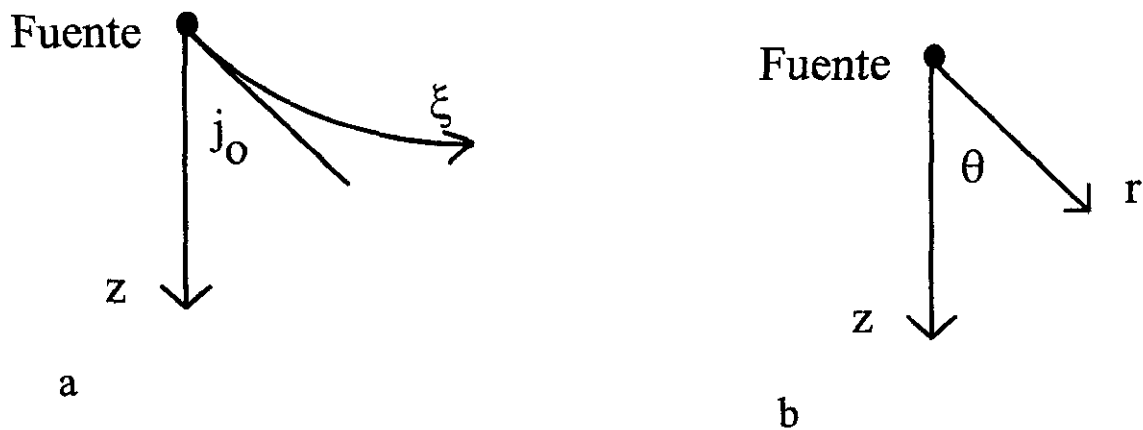


Figura 5.3.2. Coordenadas a) bipolares y b) polares.

Es más fácil representar, para el caso homogéneo, los campos de desplazamiento y esfuerzo producidos por una fuente lineal en coordenadas polares, pero en un medio heterogéneo con un gradiente de velocidad constante, el sistema de referencia es el bipolar. Existen parámetros análogos en ambos sistemas, el radio  $r$  y el ángulo  $\theta$  son equivalentes al tiempo de tránsito  $\tau$  y al ángulo de salida  $j_0$ , respectivamente. Esta analogía se muestra en la fig. 5.3.2. Aunque los componentes radial y angular del desplazamiento corresponden al radio aparente  $R_w$  y a la tangente al frente de onda, respectivamente. Esta definición empírica es aplicable tanto al caso escalar como al vectorial. Por lo tanto, las ecs. (5.16) y (5.17) ó (5.20) y (5.21), para el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo, respectivamente, pueden corregirse de la forma descrita anteriormente. Para una fuerza aplicada en la dirección  $z$ , las expresiones ya corregidas para el caso  $P-SV$  son

$$G_{R_w z} = \Lambda \frac{i}{8\rho_0} [A_0 - B_0] \cos j_0 \quad (5.22)$$

y

$$G_{j_0z} = \Lambda \frac{(-i)}{8\rho_0} [A_0 + B_0] \sin j_0, \quad (5.23)$$

respectivamente, donde

$$A_0 = \frac{H_0^{(2)}(\omega\tau_\alpha)}{\alpha_0^2} + \frac{H_0^{(2)}(\omega\tau_\beta)}{\beta_0^2} \quad (5.24)$$

y

$$B_0 = \frac{H_2^{(2)}(\omega\tau_\alpha)}{\alpha_0^2} - \frac{H_2^{(2)}(\omega\tau_\beta)}{\beta_0^2}. \quad (5.25)$$

Para obtener las expresiones  $G_{R_w x}$  y  $G_{j_0 x}$ , las componentes "radial" y "transversal" del movimiento originados por una fuerza horizontal, se debe cambiar el  $\cos j_0$  y el  $\sin j_0$  en las ecs. (5.22-5.23) por  $\sin j_0$  y  $-\cos j_0$ , respectivamente, y para obtener  $G_{ij}(x, z; x_0, z_0)$  se realiza una proyección al sistema global de coordenadas  $x, z$

$$G_{xx} = G_{R_w x} n_x + G_{j_0 x} n_z \quad (5.26)$$

$$G_{xz} = G_{R_w z} n_x + G_{j_0 z} n_z \quad (5.27)$$

$$G_{zx} = G_{R_w x} n_z - G_{j_0 x} n_x \quad (5.28)$$

$$G_{zz} = G_{R_w z} n_z - G_{j_0 z} n_x, \quad (5.29)$$

donde  $n_x = (x - x_0)/R_w$  y  $n_z = [z - z_0 - h(\cosh(\gamma \beta (0) \tau) - 1)]/R_w$ .

#### V.4. VERIFICACIÓN

Para examinar la validez de la aproximación se comparan los campos de desplazamiento y esfuerzo, en una serie de detectores, con resultados obtenidos con el método pseudoespectral. En este método las derivadas espaciales se calculan por medio de la transformada rápida de Fourier (FFT) y las variaciones en tiempo son aproximadas con un esquema de primer orden. Todas las comparaciones se hicieron en el dominio del tiempo. Para el caso analítico aproximado los

esfuerzos se obtuvieron a partir de las ecs. (5.14) y (5.20)-(5.21) y se usó un esquema de diferencias centradas en cada detector. Además, para representar a la fuente en ambos métodos se usó una función triangular y para todos los casos la densidad del medio se consideró constante ( $\rho = 1$ ). En todas las comparaciones la fuente se localiza en  $x = 2.4$  y  $z = 3.2$  y los receptores (9) se ubican en  $x = 3.4$  y en varias profundidades ( $z = 2.4, 2.6, 2.8, 3.0, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8$  y  $4.0$ ). Las posiciones de los detectores y de la fuente se muestran en la fig. 5.4.1. Las unidades de las velocidades, distancias y tiempos son consistentes.

En la fig. 5.4.2 se observan los desplazamientos y los esfuerzos, producidos por una fuerza vertical aplicada en un medio homogéneo con  $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$ . La duración de la fuente es de 0.4, y es la misma para todas las comparaciones. La solución exacta se representa con líneas continuas, mientras que la solución obtenida con el método pseudoespectral se representa con líneas discontinuas. Aunque en la solución numérica se observan algunas reflexiones generadas por las fronteras, estas no son de relevancia y se puede decir que la comparación es muy buena. Con esta comparación se valida el esquema numérico.

También se calcularon los desplazamientos y esfuerzos generados por una fuerza horizontal (fig. 5.4.3). Ahora, se debe validar la solución analítica aproximada con el método pseudoespectral. Para lograr esto se definió un medio heterogéneo en el que  $\alpha = 0.2z + 1.84$  y  $\beta = 0.1z + 0.92$ . El dominio en el que se realizan los cálculos tiene 5 unidades en la dirección de  $z$ . En la fig. 5.4.4 se muestran los desplazamientos y esfuerzos, producidos por una fuerza vertical aplicada en el medio descrito anteriormente. La solución aproximada se representa con líneas continuas, mientras que la solución numérica se representa con líneas discontinuas. El acuerdo es también muy bueno. Resultados similares se obtuvieron para una fuerza horizontal (fig. 5.4.5).

Como la función de Green es solución de la ecuación de onda, se introdujo la función de Green  $G_{22}$  para un medio donde el gradiente de la velocidad es constante, en la ecuación de onda respectiva (caso  $SH$ ), y se obtuvo el error relativo a  $G_{22}$  en porcentaje. Este proceso se realizó en el dominio de la frecuencia. La ecuación de onda se transformó a este dominio y las derivadas espaciales se calcularon con un esquema de diferencias centradas de segundo orden. Para todos los ejemplos se usó una frecuencia de 0.5 Hz y la fuente se ubicó en  $x = 0$  y  $z = 5$ . Para conocer la exactitud en el cálculo de las derivadas, se obtuvo el error relativo a la función de Green para un medio homogéneo en el que  $\beta = 1$ , que se muestra en la fig. 5.4.6. Se puede ver que en

general, los errores son menores del 5%. Sólo en la fuente se tienen errores mayores que este valor. Esto se debe a la naturaleza singular de la función.

Resultados similares se obtuvieron para medios en los que  $\beta = 0.1z + 0.5$  y  $\beta = 0.2z$ , y que se presentan en las figs. 5.4.7 y 5.4.8, respectivamente. En ambas figuras se observa que los errores son muy pequeños (menores del 5%). Por lo que se puede establecer que la aproximación si es solución de la ecuación de onda.

En la fig. 5.4.9 se muestran los desplazamientos generados por una fuerza vertical ( $G_{13}$ ) y horizontal ( $G_{11}$ ), aplicadas en un medio homogéneo ( $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$ ). La fuente se ubica en  $x = 0$  y  $z = 5$ , y los receptores (41) se localizan en  $x = 1$  y en varias profundidades a partir de  $z = 1$  con un  $dz = 0.2$ . Se usó un pulso de Ricker con  $t_p = 0.6$ . En esta gráfica se pueden observar claramente los arribos de las ondas  $P$  y  $S$ . El criterio para ubicar los receptores es el mismo que se usó en las comparaciones. La velocidad más baja registrada por el arreglo de receptores se localiza en el punto donde se ubica el primer receptor, y los receptores se encuentran simétricamente dispuestos con respecto a la fuente. En el caso de la fuerza vertical, se observa en los desplazamientos verticales ( $G_{33}$ ) que los primeros arribos son positivos, y en los desplazamientos horizontales ( $G_{13}$ ), los primeros arribos registrados en los detectores que se ubican arriba de la fuente (1-20), son negativos, a diferencia de los que se encuentran abajo (22-41).

Para la fuerza horizontal, en los desplazamientos horizontales ( $G_{11}$ ) los primeros arribos son positivos, mientras que en los desplazamientos verticales ( $G_{31}$ ), los primeros arribos registrados en los receptores ubicados arriba de la fuente (1-20) son negativos, a diferencia de los arribos registrados por los receptores ubicados abajo de la fuente (22-41). En las figs. 5.4.10 y 5.4.11 se observan los esfuerzos obtenidos a partir de los desplazamientos mostrados en la gráfica 5.4.9, donde también son claros los arribos de las ondas  $P$  y  $S$ . Resultados similares se obtuvieron para un medio heterogéneo donde  $\alpha = 0.2z + 1$  y  $\beta = 0.1z + 0.5$ . En la fig. 5.4.12 se muestran los desplazamientos y en las figs. 5.4.13 y 5.4.14 los esfuerzos. Las velocidades de las ondas  $P$  y  $S$  en la fuente son las mismas que se usaron en el ejemplo anterior. Se puede ver en cada una de estas figuras el cambio en los tiempos de arribo y en la amplitud debidos a la variación de la velocidad. En un medio homogéneo se cumple que  $G_{ij} = G_{ji}$ , pero en uno heterogéneo esto ya no es válido. Por lo que respecta a los esfuerzos, aunque el medio sea heterogéneo siempre se cumple que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .



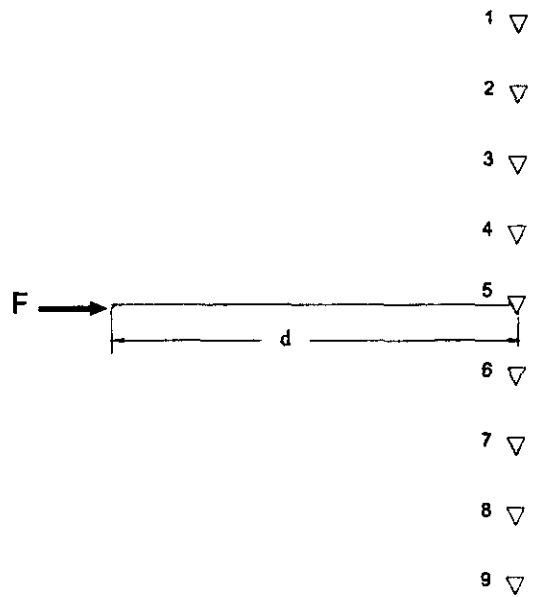
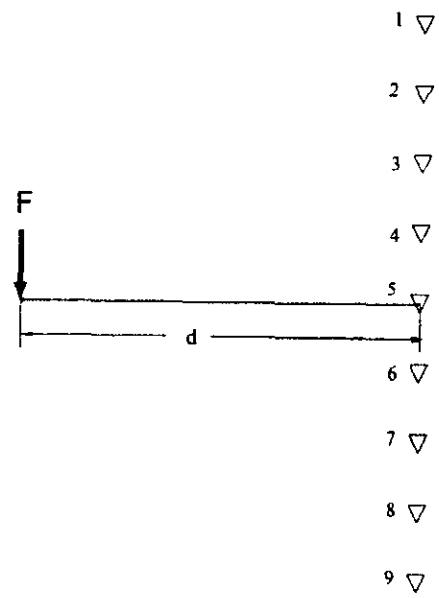


Figura 5.4.1. Posiciones de la fuerza vertical y horizontal, así como de los receptores.

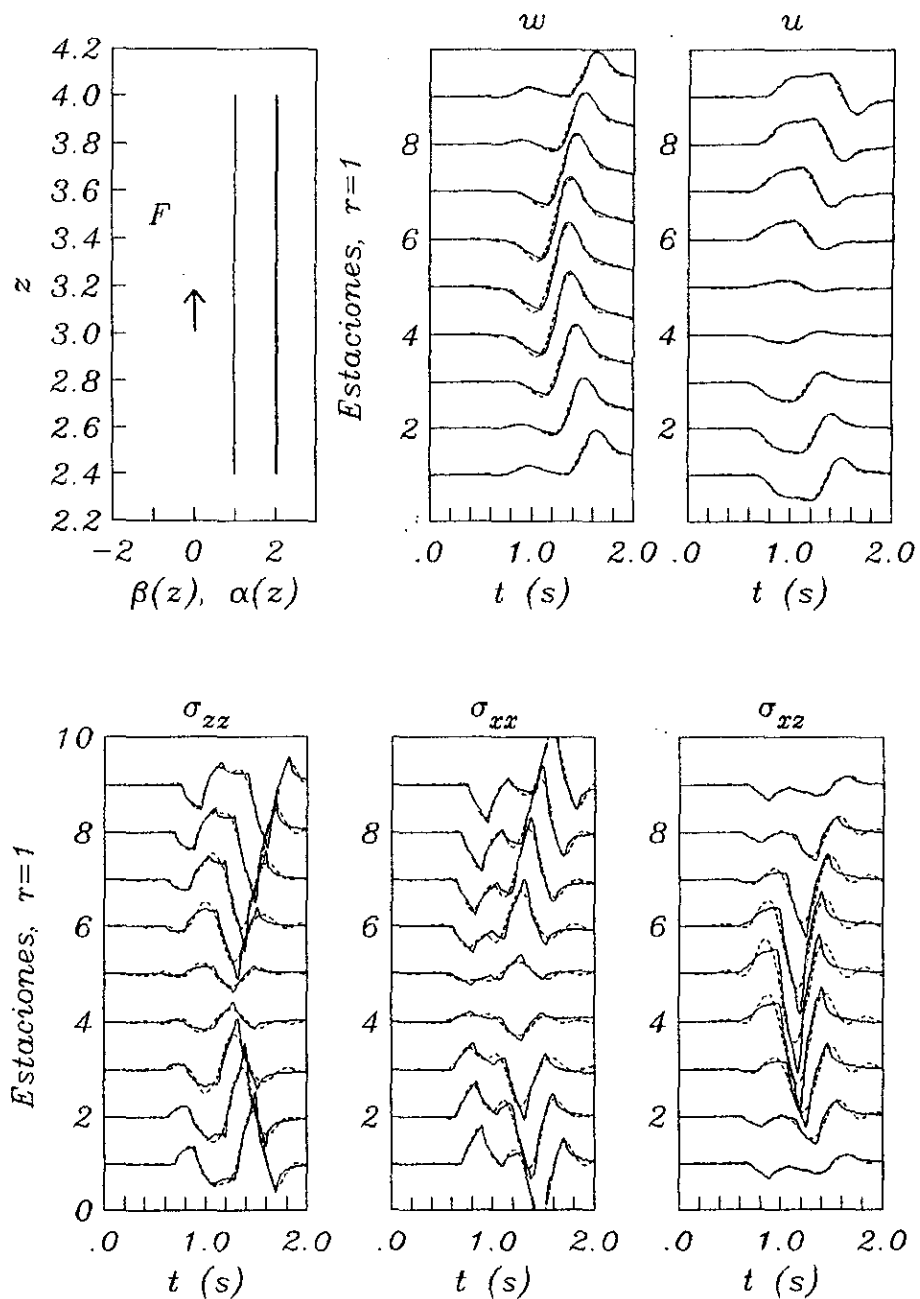


Figura 5.4.2. Desplazamientos y esfuerzos generados por una fuerza vertical, aplicada en un medio elástico bidimensional homogéneo ( $\alpha=2$  y  $\beta=1$ ). La fuente se localiza en  $x=2.4$  y  $z=3.2$ , y los 9 receptores se ubican en  $x=3.4$  y en varias profundidades ( $z=2.4, 2.6, 2.8, 3.0, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8$  y  $4.0$ ). Se usó un pulso triangular con duración  $t_p=0.4$ . La solución exacta se representa con líneas continuas y la solución obtenida con el método pseudoespectral con líneas discontinuas.

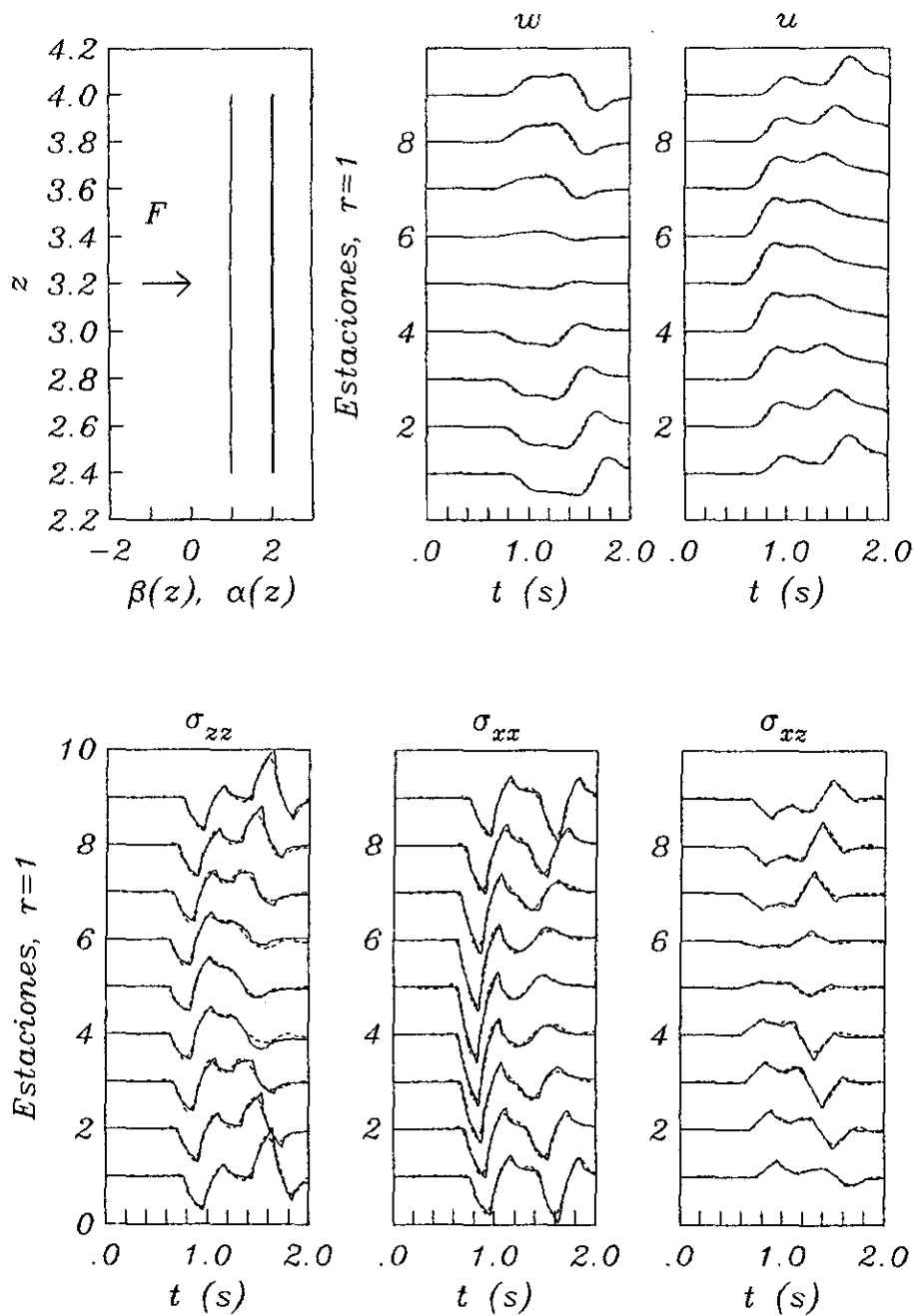


Figura 5.4.3. Desplazamientos y esfuerzos generados por una fuerza horizontal, aplicada en un medio elástico bidimensional homogéneo ( $\alpha=2$  y  $\beta=1$ ). La fuente se localiza en  $x=2.4$  y  $z=3.2$ , y los 9 receptores se ubican en  $x=3.4$  y en varias profundidades ( $z=2.4, 2.6, 2.8, 3.0, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8$  y  $4.0$ ). Se usó un pulso triangular con duración  $t_p = 0.4$ . La solución exacta se representa con líneas continuas y la solución obtenida con el método pseudoespectral con líneas discontinuas.

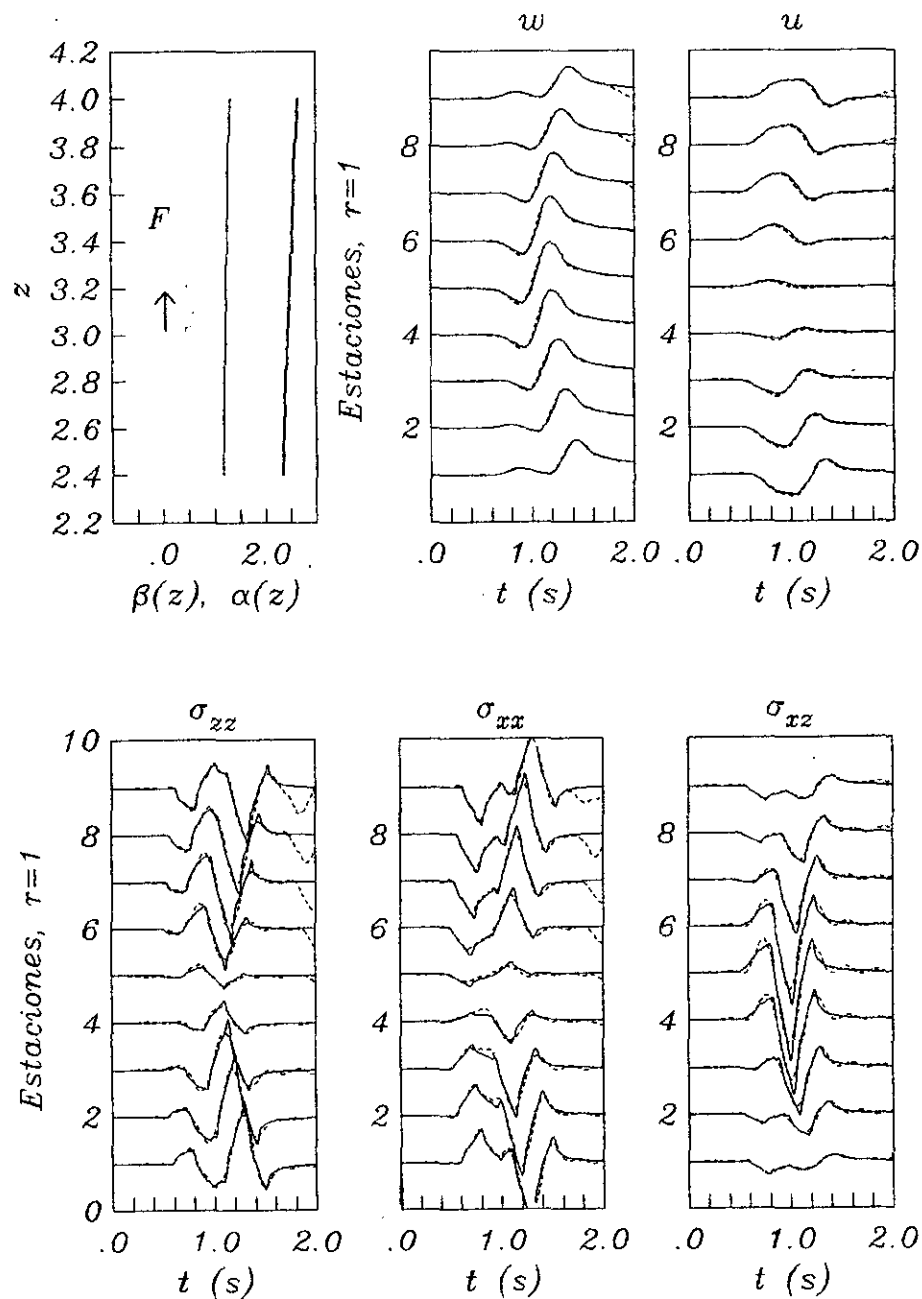


Figura 5.4.4. Desplazamientos y esfuerzos generados por una fuerza vertical, aplicada en un medio elástico bidimensional heterogéneo ( $\alpha = 0.2z + 1.84$  y  $\beta = 0.1z + 0.92$ ). La fuente se localiza en  $x = 2.4$  y  $z = 3.2$ , y los 9 receptores se ubican en  $x = 3.4$  y en varias profundidades ( $z = 2.4, 2.6, 2.8, 3.0, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8$  y  $4.0$ ). Se usó un pulso triangular con duración  $t_p = 0.4$ . La solución aproximada se representa con líneas continuas y la solución obtenida con el método pseudoespectral con líneas discontinuas.

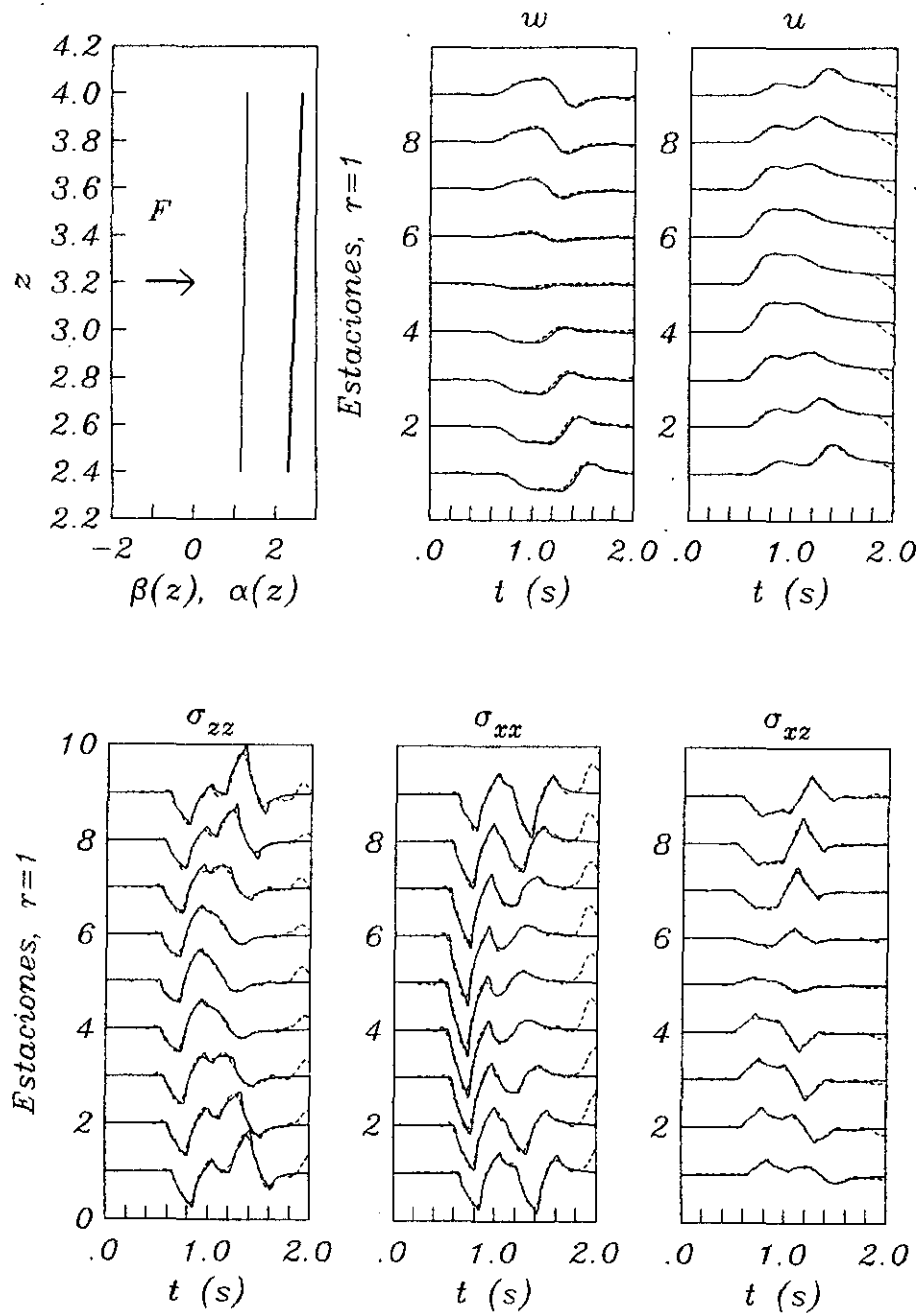


Figura 5.4.5. Desplazamientos y esfuerzos generados por una fuerza horizontal, aplicada en un medio elástico bidimensional heterogéneo ( $\alpha = 0.2z + 1.84$  y  $\beta = 0.1z + 0.92$ ). La fuente se localiza en  $x = 2.4$  y  $z = 3.2$ , y los 9 receptores se ubican en  $x = 3.4$  y en varias profundidades ( $z = 2.4, 2.6, 2.8, 3.0, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8$  y  $4.0$ ). Se usó un pulso triangular con duración  $t_p = 0.4$ . La solución aproximada se representa con líneas continuas y la solución obtenida con el método pseudoespectral con líneas discontinuas.

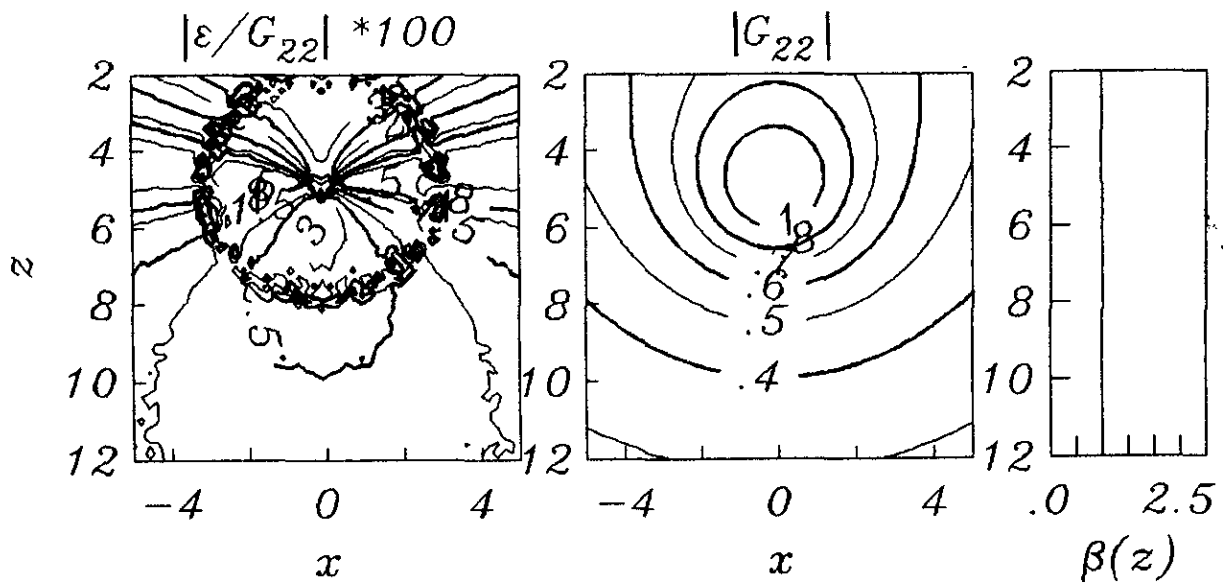


Figura 5.4.6. Error relativo a la función de Green  $G_{22}$  en porcentaje, para un medio en el que la velocidad de ondas  $S$  es unitaria. La fuente se localiza en  $x = 0$  y  $z = 5$ , y la frecuencia es 0.5 Hz.

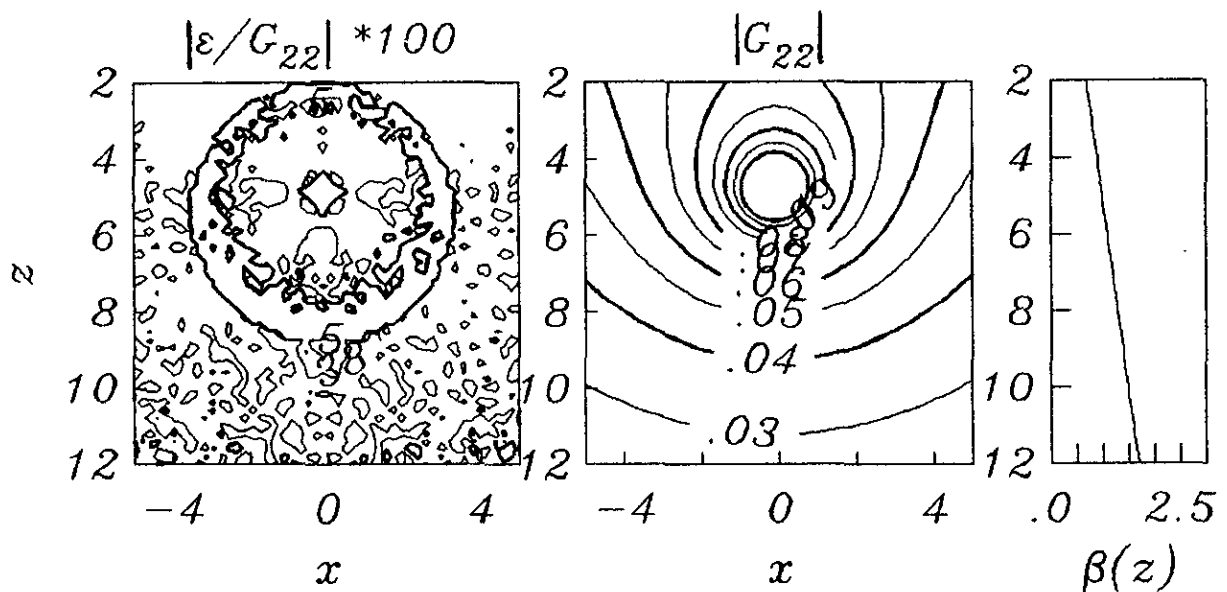


Figura 5.4.7. Error relativo a la función de Green  $G_{22}$  en porcentaje, para un medio en el que  $\beta = 0.1z + 0.5$ . La fuente se localiza en  $x = 0$  y  $z = 5$ , y la frecuencia es 0.5 Hz.

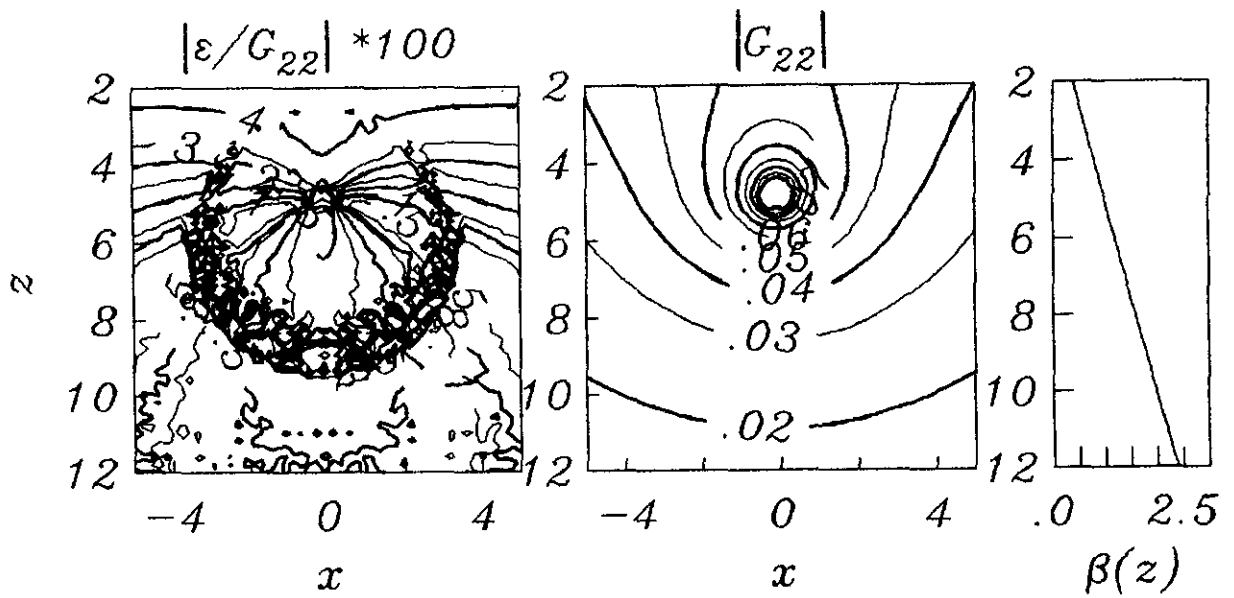


Figura 5.4.8. Error relativo a la función de Green  $G_{22}$  en porcentaje, para un medio en el que  $\beta = 0.2z$ . La fuente se localiza en  $x = 0$  y  $z = 5$ , y la frecuencia es 0.5 Hz.

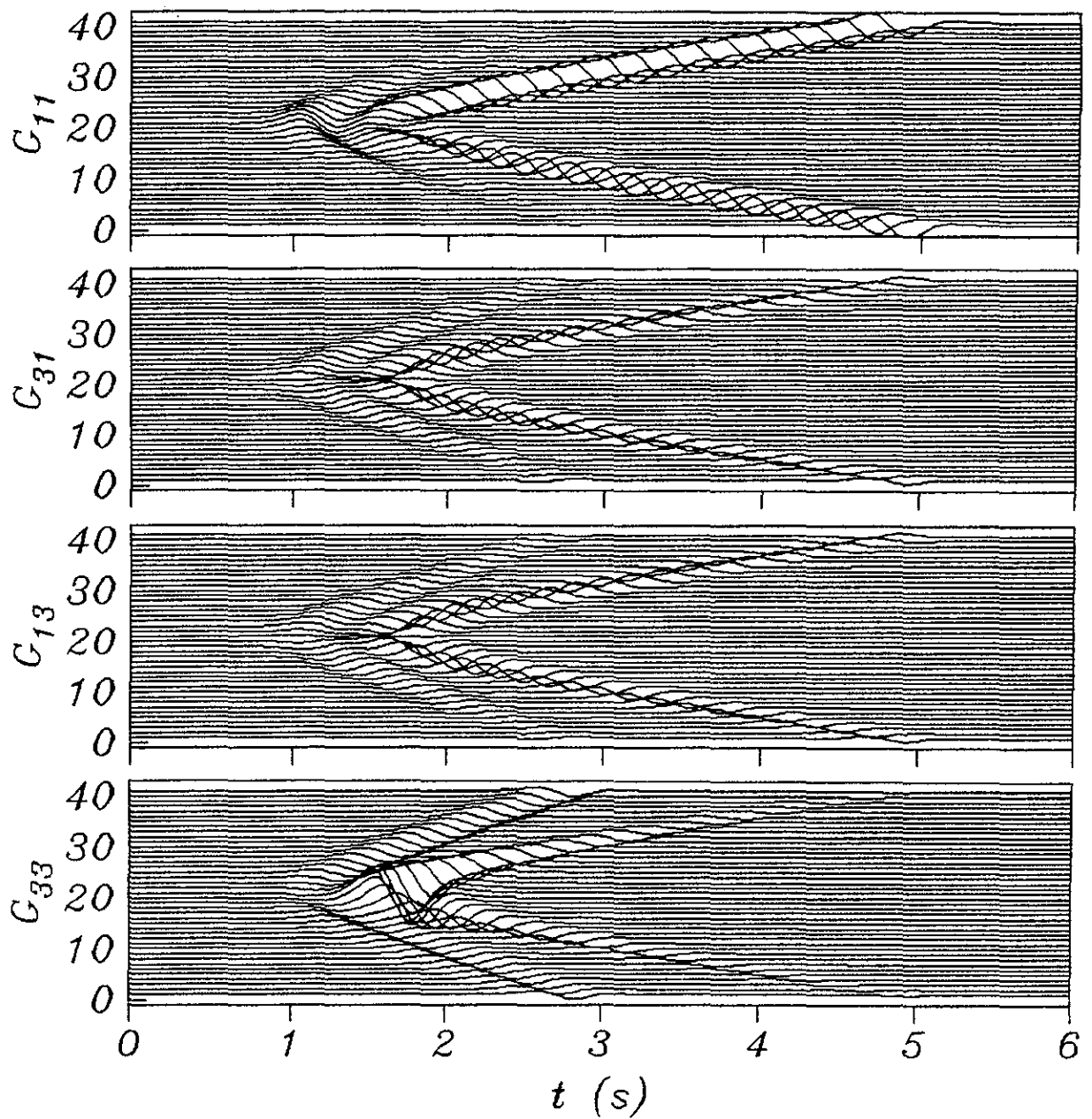


Figura 5.4.9. Desplazamientos generados por una fuerza vertical ( $G_{i3}$ ) y horizontal ( $G_{i1}$ ), aplicadas en un medio elástico bidimensional homogéneo ( $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$ ). La fuente se ubica en  $x = 0$  y  $z = 5$ , y los receptores (41) se localizan en  $x = 1$  y en varias profundidades, a partir de  $z = 1$  con  $dz = 0.2$ . Se usó un pulso de Ricker con duración  $t_p = 0.6$ .



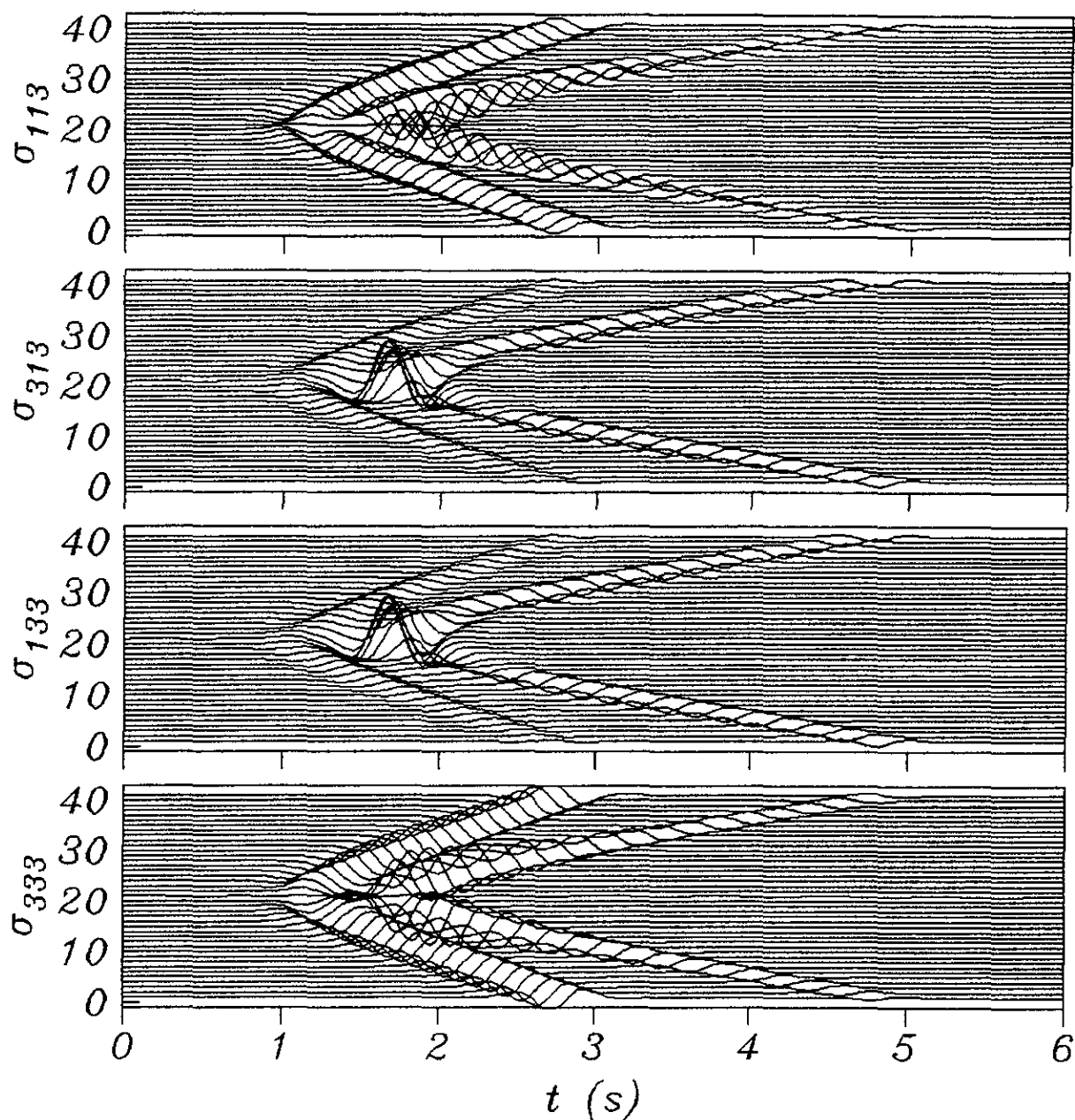


Figura 5.4.10. Esfuerzos producidos por una fuerza vertical aplicada en un medio elástico bidimensional homogéneo ( $\alpha=2$  y  $\beta=1$ ). La fuente se ubica en  $x=0$  y  $z=5$ , y los receptores (41) se localizan en  $x=1$  y en varias profundidades, a partir de  $z=1$  con  $dz=0.2$ . Se usó un pulso de Ricker con duración  $t_p=0.6$ .

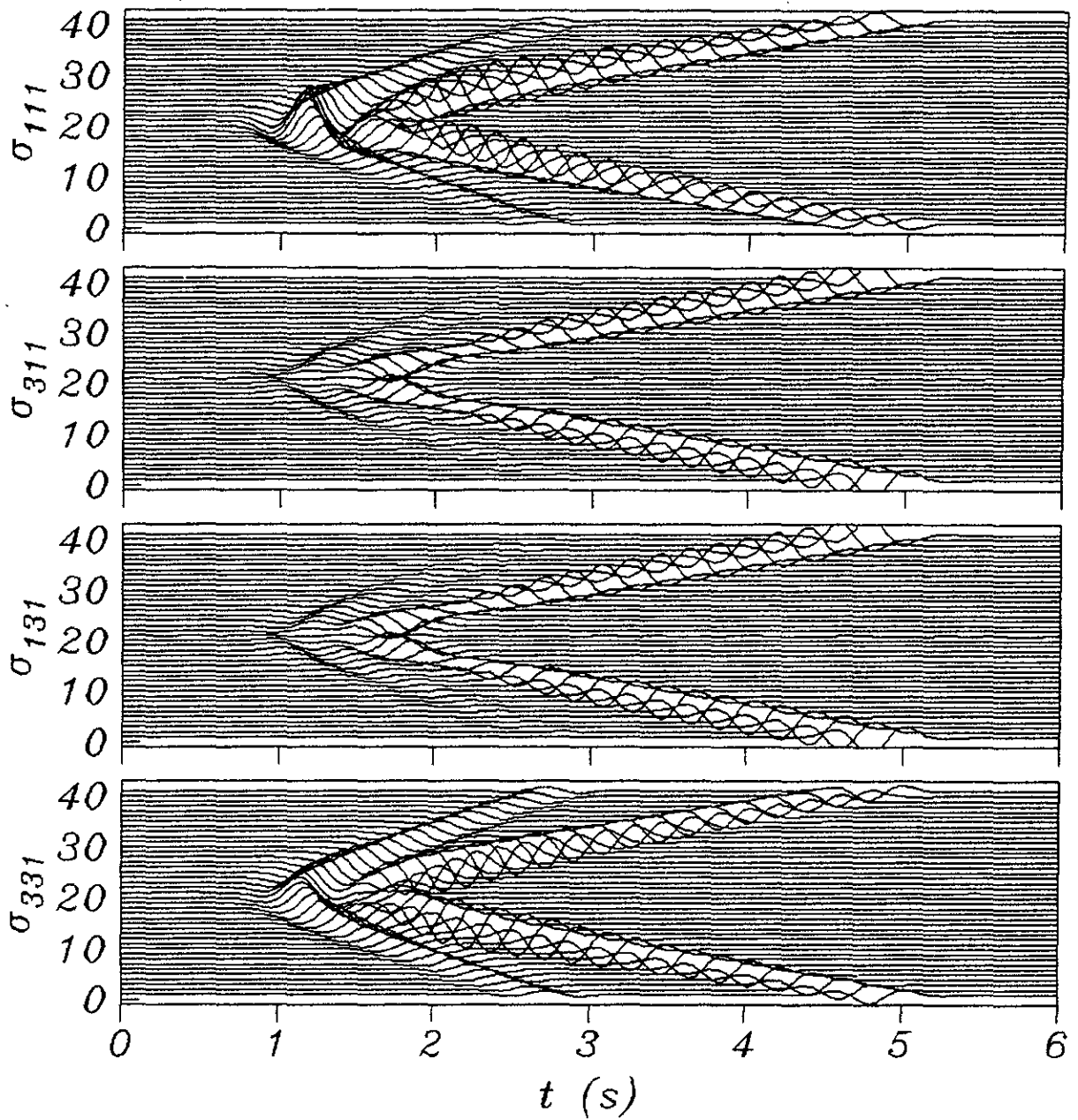


Figura 5.4.11. Esfuerzos producidos por una fuerza horizontal aplicada en un medio elástico bidimensional homogéneo ( $\alpha=2$  y  $\beta=1$ ). La fuente se ubica en  $x=0$  y  $z=5$ , y los receptores (41) se localizan en  $x=1$  y en varias profundidades, a partir de  $z=1$  con  $dz=0.2$ . Se usó un pulso de Ricker con duración  $t_p=0.6$ .

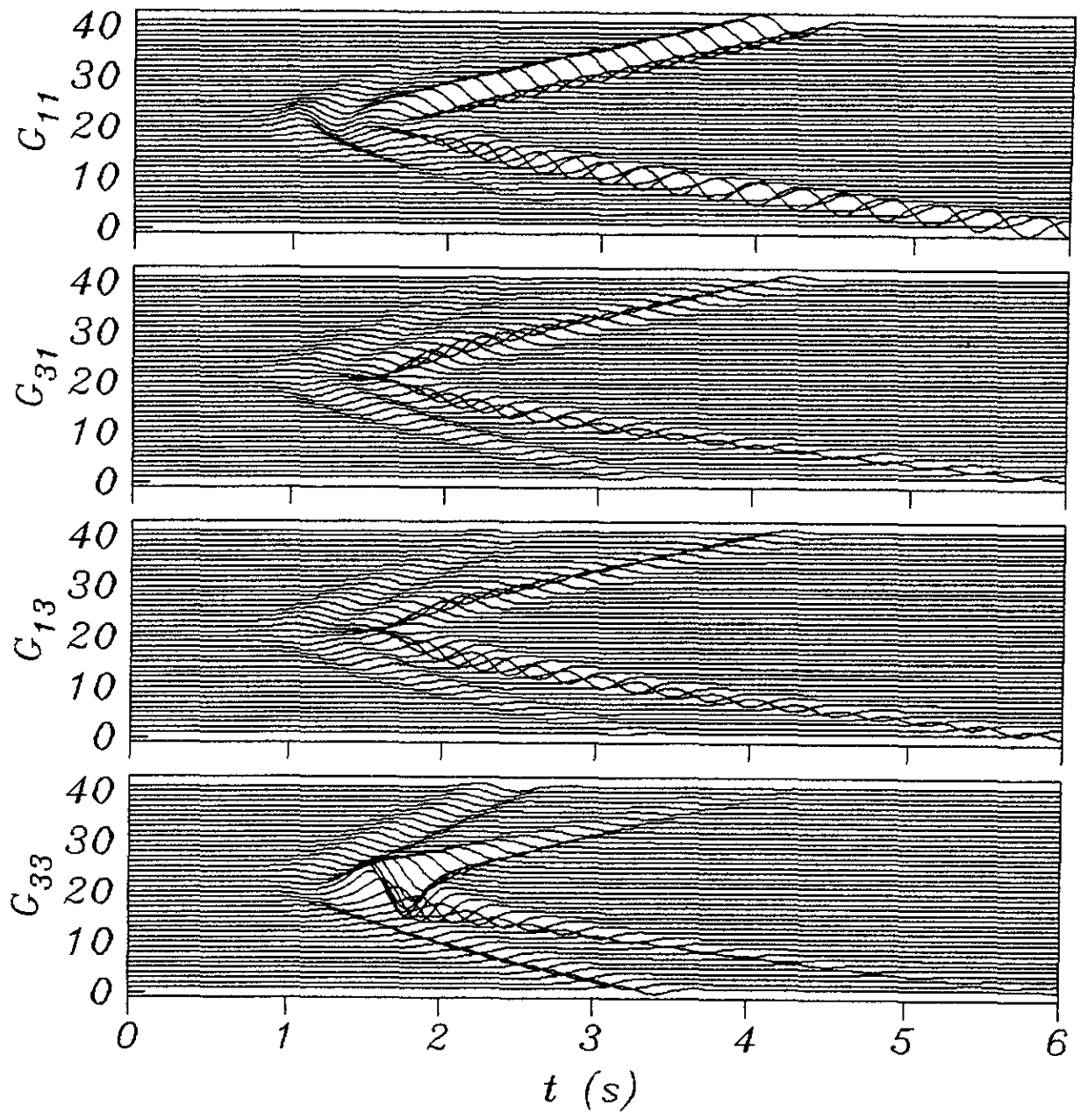


Figura 5.4.12. Desplazamientos generados por una fuerza vertical ( $G_{i3}$ ) y horizontal ( $G_{i1}$ ), aplicadas en un medio elástico bidimensional heterogéneo ( $\alpha = 0.2z + 1$  y  $\beta = 0.1z + 0.5$ ). La fuente se ubica en  $x = 0$  y  $z = 5$ , y los receptores (41) se localizan en  $x = 1$  y en varias profundidades, a partir de  $z = 1$  con  $dz = 0.2$ . Se usó un pulso de Ricker con duración  $t_p = 0.6$ .

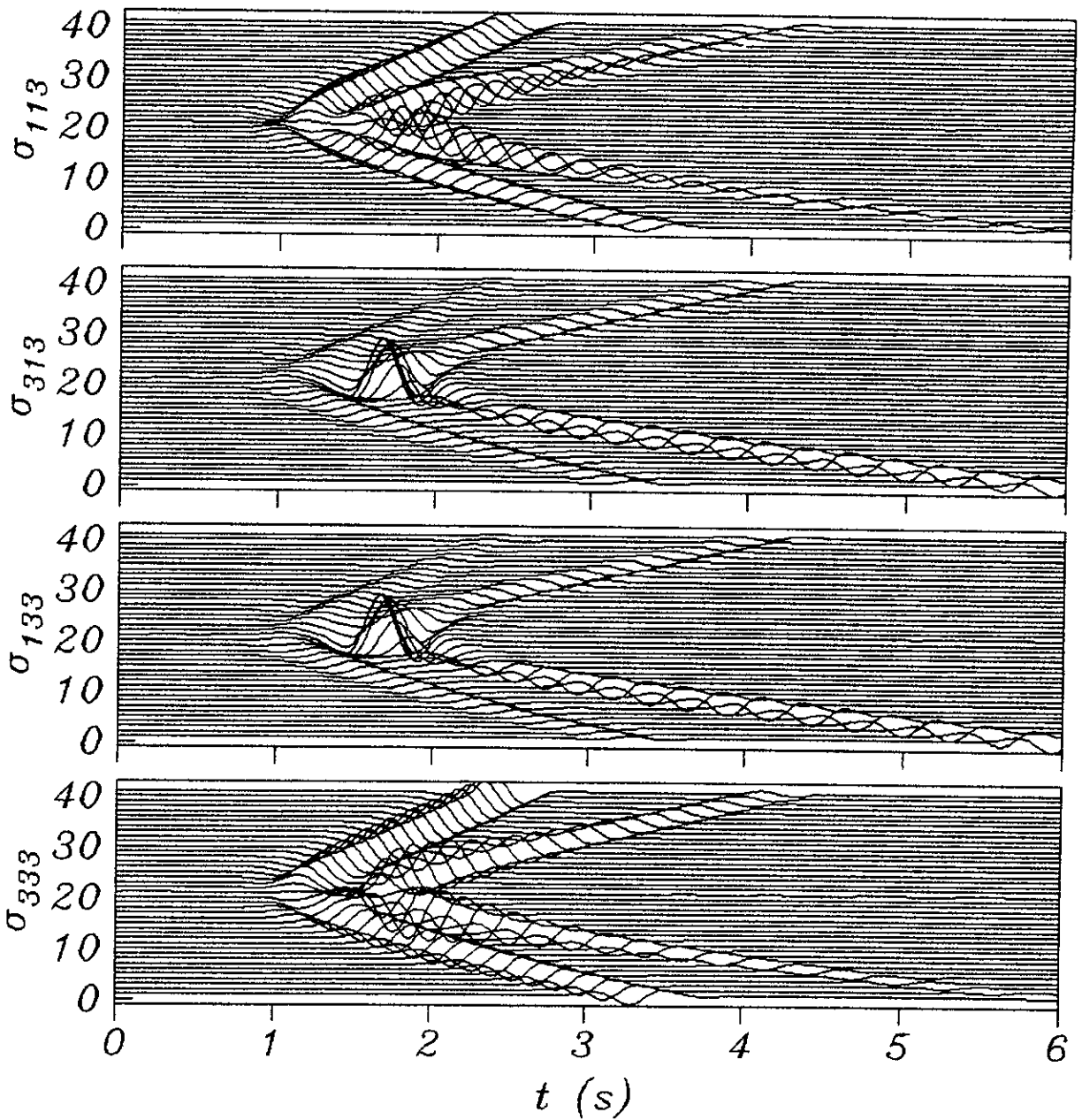


Figura 5.4.13. Esfuerzos producidos por una fuerza vertical aplicada en un medio elástico bidimensional heterogéneo ( $\alpha = 0.2z + 1$  y  $\beta = 0.1z + 0.5$ ). La fuente se ubica en  $x = 0$  y  $z = 5$ , y los receptores (41) se localizan en  $x = 1$  y en varias profundidades, a partir de  $z = 1$  con  $dz = 0.2$ . Se usó un pulso de Ricker con duración  $t_p = 0.6$ .

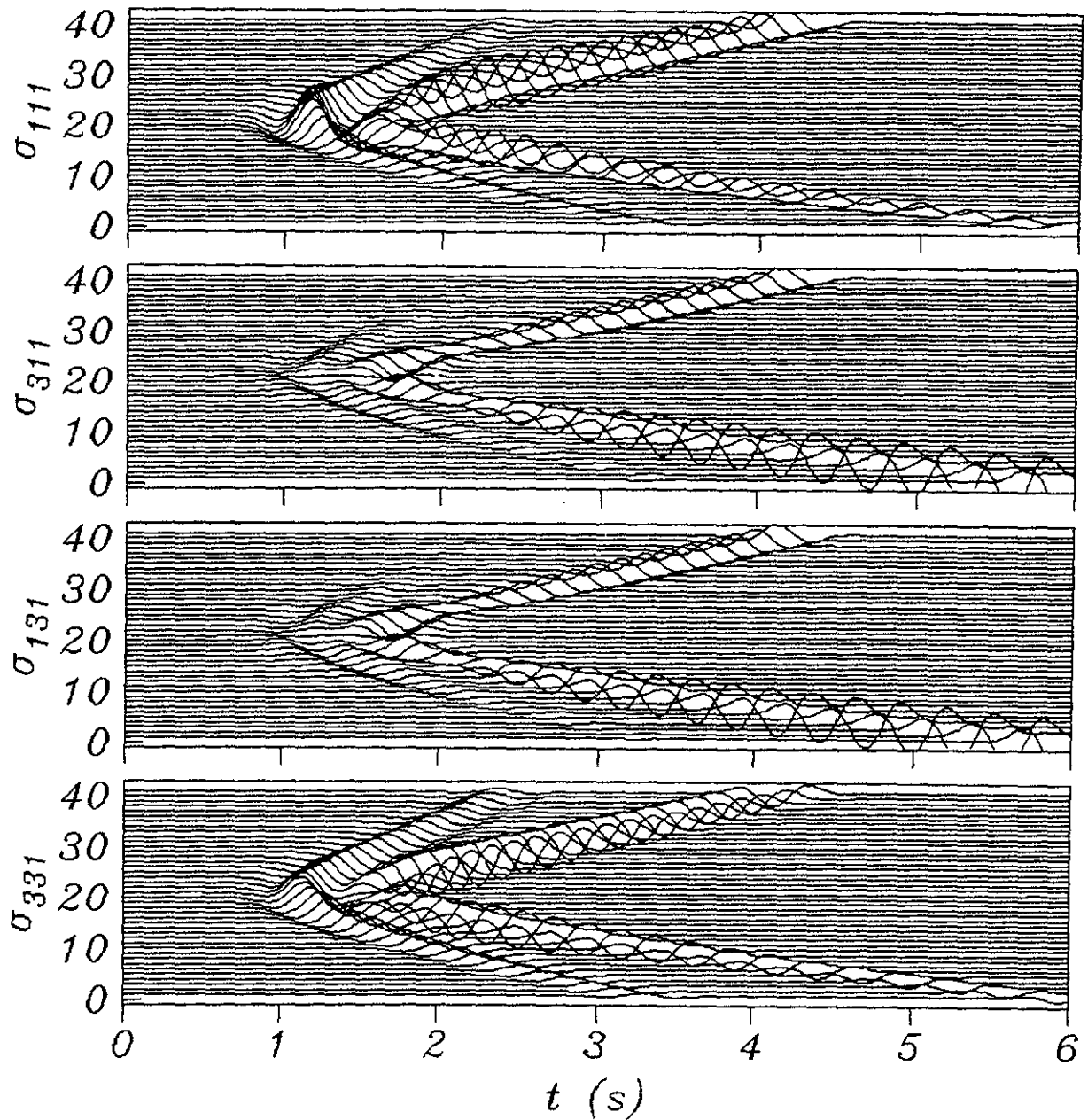


Figura 5.4.14. Esfuerzos producidos por una fuerza horizontal aplicada en un medio elástico bidimensional heterogéneo ( $\alpha = 0.2z + 1$  y  $\beta = 0.1z + 0.5$ ). La fuente se ubica en  $x = 0$  y  $z = 5$ , y los receptores (41) se localizan en  $x = 1$  y en varias profundidades, a partir de  $z = 1$  con  $dz = 0.2$ . Se usó un pulso de Ricker con duración  $t_p = 0.6$ .

## VI. FUNCIÓN DE GREEN PARA UN MEDIO CON GRADIENTE DE VELOCIDAD CONSTANTE (3D)

Si en un medio elástico la velocidad es función de la profundidad, la geometría que presentan los frentes de onda es esférica, y cada punto de estos frentes es caracterizado por 3 coordenadas  $(c_1, c_2, c_3)$ , que pueden ser  $(T, p, \phi)$ , donde  $p$  es el parámetro de rayo (constante a lo largo de la trayectoria del rayo),  $\phi$  es el azimuth y  $T$  es el tiempo de tránsito. Las coordenadas  $(p, \phi)$  definen el punto de partida de cada rayo, y la coordenada  $T$  determina la posición de los puntos que se encuentran a lo largo de este. En lugar de la coordenada  $p$ , es posible definir otra, como  $j_0$  (ángulo de salida del rayo), que también es ortogonal a la trayectoria del rayo y a la dirección definida por el azimuth. En el sistema local de coordenadas  $(T, c_2, c_3)$ , la componente correspondiente a la dirección que define el tiempo de tránsito ( $T$ ) es  $u_1(\mathbf{x}, t)$ . La ecuación de onda en este sistema, para esta componente, se expresa de la siguiente forma

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\alpha h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial T} (h_2 h_3 \tau_{11}) + \frac{\partial}{\partial c_2} (h_3 \alpha \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial c_3} (\alpha h_2 \tau_{31}) \right] + \frac{\tau_{12}}{\alpha h_2} \frac{\partial \alpha}{\partial c_2} + \frac{\tau_{31}}{\alpha h_3} \frac{\partial \alpha}{\partial c_3} - \frac{\tau_{22}}{\alpha h_2} \frac{\partial h_2}{\partial T} - \frac{\tau_{33}}{\alpha h_3} \frac{\partial h_3}{\partial T}, \quad (6.1)$$

donde  $\nabla c_p = 1/h_p$ .

Para esta componente, las derivadas de la función de onda perpendiculares al frente de onda son predominantes, y las derivadas paralelas a este, son despreciables. Si  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{22}$ ,  $\tau_{33}$  son cero, y

$$\tau_{11} = \frac{\lambda + 2\mu}{\alpha} \frac{\partial u_1}{\partial T}. \quad (6.2)$$

La ec. (6.1) se reduce a la siguiente expresión

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\alpha h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( h_2 h_3 \frac{\lambda + 2\mu}{\alpha} \frac{\partial u_1}{\partial T} \right) \right] \quad (6.3)$$

reescribiendo esta

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ (\rho \alpha h_2 h_3)^{\frac{1}{2}} u_1 \right] = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[ (\rho \alpha h_2 h_3)^{\frac{1}{2}} u_1 \right]. \quad (6.4)$$

La solución general para  $(\rho \alpha h_2 h_3)^{1/2} u_1$  es una función con argumento  $t - T$  más otra con argumento  $t + T$ . En este caso, la solución de interés corresponde a una onda que viaja en la dirección positiva de  $T$  y que representa una onda compresional ( $P$ )

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t) = (u_1, 0, 0) = \left( \frac{1}{\rho \alpha h_2 h_3} \right)^{1/2} F^P(c_2, c_3) (U(t - T(\mathbf{x})), 0, 0). \quad (6.5)$$

La cantidad  $(h_2 h_3)^{-1/2}$  describe la atenuación de la onda debido a la dispersión geométrica; el factor  $F^P(c_2, c_3)$  representa el patrón de irradiación de las ondas  $P$ . Para el caso homogéneo el factor que describe la atenuación de las ondas es  $|\mathbf{x} - \xi|$ , donde  $\xi$  representa la posición de la fuente y  $\mathbf{x}$  la del receptor. Si  $R^P(\mathbf{x}, \xi) = (h_2 h_3)^{1/2}$ , la ec. (6.5) tiene la forma

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x}) \alpha(\mathbf{x})} \right)^{1/2} \frac{1}{R^P(\mathbf{x}, \xi)} F^P(c_2, c_3) (U_1(t - T^P(\mathbf{x}, \xi)), 0, 0) \quad (6.6)$$

El sistema de coordenadas que describe la trayectoria de los rayos que son generados por una fuente de ondas compresionales (fig. 6.1) es el mismo cuando se trata de ondas de corte ( $S$ ).

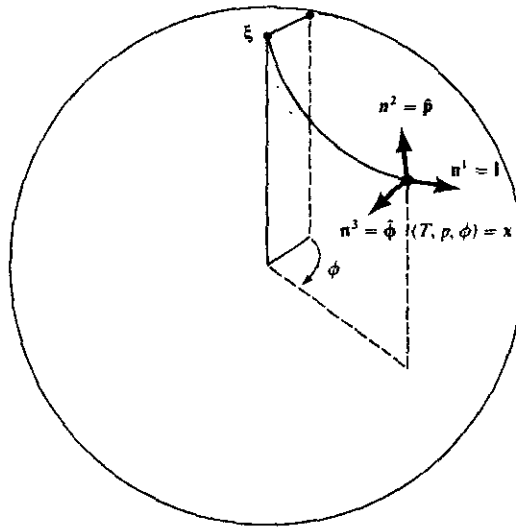


Figura 6.1. Sistema general ortogonal para un medio en el que la velocidad varía con la profundidad. Considerando  $(c_1, c_2, c_3) = (T, p, \varphi)$ , donde  $p$  es el parámetro de rayo,  $\varphi$  es el azimut y  $T$  es el tiempo de tránsito.

Por lo tanto, las componentes del campo de desplazamientos que deben tomarse en consideración son  $u_2$  y  $u_3$ . En este caso, a diferencia del anterior, las derivadas de la función de onda paralelas a los frentes de onda, son predominantes, por lo que algunos esfuerzos son despreciables, excepto

$$\tau_{12} = \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial u_2}{\partial T} \quad (6.7)$$

y

$$\tau_{31} = \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial u_3}{\partial T}. \quad (6.8)$$

Las ecuaciones que gobiernan los desplazamientos en la direcciones 2 y 3 son



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\rho\beta h_2 h_3)^{1/2} u_2] = \frac{\partial^2}{\partial T^2} [(\rho\beta h_2 h_3) u_2] \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\rho\beta h_2 h_3)^{1/2} u_3] = \frac{\partial^2}{\partial T^2} [(\rho\beta h_2 h_3) u_3]. \quad (6.10)$$

Esto quiere decir que las componentes del desplazamiento  $u_2$  y  $u_3$  se propagan de forma independiente. Estos desplazamientos son generados por movimientos transversales, el primero es originado por un movimiento que está contenido en un plano vertical, y que se denomina componente  $SV$ , y el segundo por un movimiento perpendicular al plano definido por  $T$  y  $c_2$ , y que se denomina  $SH$ . Las soluciones de las ecs. (6.9) y (6.10) en el sistema de coordenadas definido anteriormente son

$$\mathbf{u}^{SV}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})} \right)^{1/2} \frac{1}{R^S(\mathbf{x}, \xi)} F^{SV}(c_2, c_3) \left( 0, U_2(t - T^S(\mathbf{x}, \xi)), 0 \right) \quad (6.11)$$

y

$$\mathbf{u}^{SH}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})} \right)^{1/2} \frac{1}{R^S(\mathbf{x}, \xi)} F^{SH}(c_2, c_3) \left( 0, 0, U_3(t - T^S(\mathbf{x}, \xi)) \right) \quad (6.12)$$

Aunque los patrones de irradiación  $F^{SV}$  y  $F^{SH}$  pueden ser diferentes, la dispersión geométrica es la misma en ambos casos, así como también el tiempo de tránsito. La estructura que presentan los desplazamientos generados por una fuerza horizontal o vertical aplicada en un medio homogéneo, es compatible con la de las ecs. (6.6), (6.11) y (6.12), por lo que se puede obtener la función de Green para un medio inhomogéneo, al regularizar geoméricamente la solución homogénea. La variación lineal de la velocidad con respecto de la profundidad es la más simple de las relaciones entre estas dos cantidades, cuando se trata de un medio inhomogéneo. Si la velocidad varía linealmente con la profundidad, los frentes de onda definen esferas y el sistema coordenado que describe la geometría de estos y de los rayos es el biesférico.

La única diferencia entre coordenadas bipolares y biesféricas es la coordenada horizontal, que en el primer caso es  $x$  y en el segundo es  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Por lo que las ecuaciones que definen los lugares geométricos que corresponden a los frentes de onda y a los rayos descritas en el capítulo anterior, son las mismas. Debido a que la velocidad varía únicamente con la profundidad, cada uno de los rayos se encuentra contenido en un plano vertical. Para obtener la solución inhomogénea a partir de la homogénea, se debe corregir la amplitud y el tiempo de tránsito en esta última. Antes de realizar las correcciones, es necesario expresar el vector de desplazamientos en el sistema esférico, ya que de esta manera se sabe que tipo de onda origina cada componente. Posteriormente, se debe identificar el término que corresponde a la dispersión geométrica ( $1/r$ ). Para el caso inhomogéneo definido anteriormente, debido a que los frentes de onda son también esferas, la dispersión es el inverso del radio.

## VI.1. DIFERENCIAS FINITAS

Debido a que la velocidad varía únicamente con la profundidad, el problema es axisimétrico. Esta característica permitió aplicar este método, ya que en problemas tridimensionales que no son de este tipo, el tiempo de cálculo de los desplazamientos y esfuerzos aumenta considerablemente. En un medio heterogéneo en el que la densidad permanece constante, la ecuación que gobierna los desplazamientos es

$$\nabla(\alpha^2 \nabla \cdot \bar{u}) - \nabla \times (\beta^2 \nabla \times \bar{u}) + 2[(\nabla \beta^2 \cdot \nabla) \bar{u} - (\nabla \beta^2)(\nabla \cdot \bar{u}) + (\nabla \beta^2) \times (\nabla \times \bar{u})] = \frac{\mathcal{F} \bar{u}}{\partial t^2} \quad (6.13)$$

donde  $\bar{u}$  representa el desplazamiento,  $\alpha$  y  $\beta$  representan las velocidades de las ondas  $P$  y  $S$ , respectivamente, y  $\nabla^2$  es el Laplaciano. La ecuación de onda expresada en coordenadas cilíndricas y por componentes, para un medio heterogéneo en el que se aplica una fuerza vertical, tiene la siguiente forma

$$\left[ \alpha^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\alpha^2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\alpha^2 u_r}{r^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right] + \left[ 2 \frac{\partial \beta^2}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - 2 \frac{\partial \beta^2}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] +$$

$$\left[ \beta^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial \beta^2}{\partial z} - \beta^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} - \frac{\partial \beta^2}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] + \left[ 2u_r \frac{\partial^2 \beta^2}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (6.14)$$

$$\left[ \alpha^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{\partial \alpha^2}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\alpha^2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial \alpha^2}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \alpha^2 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial \alpha^2}{\partial z} \right] +$$

$$\left[ \frac{\beta^2}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\beta^2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \beta^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} \right] + 2u_z \frac{\partial^2 \beta^2}{\partial z^2} +$$

$$\left[ -2 \frac{\partial \beta^2}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} - 2 \frac{\partial \beta^2}{\partial z} \frac{u_r}{r} - 2 \frac{\partial \beta^2}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (6.15)$$

Las derivadas temporal y espaciales de los desplazamientos, así como las derivadas de la velocidad con respecto a la coordenada  $z$ , se calcularon usando un esquema de diferencias centradas de segundo orden y primer orden, respectivamente, para una malla cuadrada, donde  $r = m\Delta r$ ,  $z = n\Delta z$  y  $t = p\Delta t$ . El método que se usó es el implícito. Así,

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{u_z^{m,n+1,p} - u_z^{m,n-1,p}}{2\Delta z}, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{u_r^{m,n+1,p} - u_r^{m,n-1,p}}{2\Delta z} \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{u_z^{m+1,n,p} - u_z^{m-1,n,p}}{2\Delta r}, \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{u_r^{m+1,n,p} - u_r^{m-1,n,p}}{2\Delta r} \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{u_z^{m,n,p+1} - u_z^{m,n,p-1}}{2\Delta t}, \quad \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{u_r^{m,n,p+1} - u_r^{m,n,p-1}}{2\Delta t} \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \beta^2}{\partial z} = \frac{(\beta^2)^{n+1} - (\beta^2)^{n-1}}{2\Delta z}, \quad \frac{\partial \alpha^2}{\partial z} = \frac{(\alpha^2)^{n+1} - (\alpha^2)^{n-1}}{2\Delta z} \quad (6.19)$$

El sistema de ecuaciones ya discretizado, se muestra a continuación

$$\begin{aligned} & \left[ \left( (\alpha^2)^n - (\beta^2)^n \right) \left( \frac{u_z^{m+1,n+1,p} - u_z^{m+1,n-1,p} - u_z^{m-1,n+1,p} + u_z^{m-1,n-1,p}}{4\Delta z \Delta r} \right) \right] - \frac{(\alpha^2)^n u_r^{m,n,p}}{(m\Delta r)^2} \\ & \left( \frac{(\beta^2)^{n+1} - (\beta^2)^{n-1}}{2\Delta z} \right) \left( \frac{u_r^{m,n+1,p} - u_r^{m,n-1,p}}{2\Delta z} \right) + \left( \frac{(\beta^2)^{n+1} - (\beta^2)^{n-1}}{2\Delta z} \right) \left( \frac{u_z^{m+1,n,p} - u_z^{m-1,n,p}}{2\Delta r} \right) \\ & + (\alpha^2)^n \left( \frac{u_r^{m+1,n,p} - 2u_r^{m,n,p} + u_r^{m-1,n,p}}{(\Delta r)^2} \right) + \frac{(\alpha^2)^n}{m\Delta r} \left( \frac{u_r^{m+1,n,p} - u_r^{m-1,n,p}}{2\Delta r} \right) + \\ & (\beta^2)^n \left( \frac{u_r^{m,n+1,p} - 2u_r^{m,n,p} + u_r^{m,n-1,p}}{(\Delta z)^2} \right) + 2u_r^{m,n,p} \left( \frac{(\beta^2)^{n+1} - 2(\beta^2)^n + (\beta^2)^{n-1}}{(\Delta z)^2} \right) \\ & = \frac{u_r^{m,n,p+1} - 2u_r^{m,n,p} + u_r^{m,n,p-1}}{(\Delta t)^2} \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( (\alpha^2)^n - (\beta^2)^n \right) \left( \frac{u_z^{m+1,n+1,p} - u_z^{m+1,n-1,p} - u_z^{m-1,n+1,p} + u_z^{m-1,n-1,p}}{4\Delta z \Delta r} \right) \right] + \\
& \left( \frac{(\alpha^2)^{n+1} - (\alpha^2)^{n-1} - 2(\beta^2)^{n+1} + 2(\beta^2)^{n-1}}{2\Delta z} \right) \left( \frac{u_r^{m+1,n,p} - u_r^{m-1,n,p}}{2\Delta r} \right) + \\
& \left( \frac{(\alpha^2)^n - (\beta^2)^n}{m\Delta r} \right) \left( \frac{u_r^{m,n+1,p} - u_r^{m,n-1,p}}{2\Delta z} \right) + (\alpha^2)^n \left( \frac{u_z^{m,n+1,p} - 2u_z^{m,n,p} + u_z^{m,n-1,p}}{(\Delta z)^2} \right) + \\
& \left( \frac{(\alpha^2)^{n+1} - (\alpha^2)^{n-1} - 2(\beta^2)^{n+1} + 2(\beta^2)^{n-1}}{2\Delta z} \right) \left( \frac{u_z^{m,n+1,p} - u_z^{m,n-1,p}}{2\Delta z} \right) + \\
& \left( \frac{(\alpha^2)^{n+1} - (\alpha^2)^{n-1} - 2(\beta^2)^{n+1} + 2(\beta^2)^{n-1}}{2\Delta z} \right) \left( \frac{u_r^{m,n,p}}{m\Delta r} \right) + \frac{(\beta^2)^n}{m\Delta r} \left( \frac{u_z^{m+1,n,p} - u_z^{m-1,n,p}}{2\Delta r} \right) + \\
& (\beta^2)^n \left( \frac{u_z^{m+1,n,p} - 2u_z^{m,n,p} + u_z^{m-1,n,p}}{(\Delta r)^2} \right) + 2u_z^{m,n,p} \left( \frac{(\beta^2)^{n+1} - 2(\beta^2)^n + (\beta^2)^{n-1}}{(\Delta z)^2} \right) \\
& = \frac{u_z^{m,n,p+1} - 2u_z^{m,n,p} + u_z^{m,n,p-1}}{(\Delta t)^2}. \tag{6.21}
\end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores, por ejemplo, el término  $u_z^{m,n,p+1}$  significa el desplazamiento vertical en el punto  $(m\Delta r, n\Delta z)$  para el tiempo  $(p+1)\Delta t$ . Para una fuerza horizontal los desplazamientos generados por esta, expresados en el sistema cilíndrico, tienen la siguiente estructura

$$u_r = u_r(r, z, t) \cos \theta \tag{6.22}$$

$$u_z = u_z(r, z, t) \cos \theta \quad (6.23)$$

$$u_\theta = u_\theta(r, z, t) \text{sen } \theta. \quad (6.24)$$

Como se puede ver la dependencia azimutal es conocida. Al sustituir el vector desplazamiento en la ecuación de onda, esta dependencia desaparece, por lo que el problema sigue siendo axisimétrico. Aprovechando esta característica se establece el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (\alpha^2) \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right] + 2 \frac{\partial(\beta^2)}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - 2 \frac{\partial(\beta^2)}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \\ (\beta^2) \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} \right] + \frac{\partial(\beta^2)}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial(\beta^2)}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \\ 2 \frac{\partial^2(\beta^2)}{\partial z^2} u_r = \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} (\alpha^2) \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \frac{\partial(\alpha^2)}{\partial z} + \\ (\beta^2) \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{u_z}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] + 2 \frac{\partial^2(\beta^2)}{\partial z^2} u_z + \\ 2 \frac{\partial(\beta^2)}{\partial z} \left[ -\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} - \frac{u_\theta}{r} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}
& (\beta^2) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right] + \\
& (\alpha^2) \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + 2 \frac{\partial^2 (\beta^2)}{\partial z^2} u_\theta + \frac{\partial (\beta^2)}{\partial z} \left[ -\frac{u_z}{r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Por lo que respecta a la estabilidad, se usó el criterio de Alterman y Karal (1968), considerando  $\Delta r = \Delta z$ , se tiene que

$$\left( \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r} \right) < \left[ 1 + \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.28}$$

En estos sistemas de ecuaciones se calculan los desplazamientos en el tiempo  $t + \Delta t$ , usando los desplazamientos en los tiempos  $t$  y  $t - \Delta t$ . Debido a que los sistemas de ecuaciones están expresados en un sistema cilíndrico, la fuente también se debe expresar en este sistema. A continuación se analiza el caso de una fuente explosiva. La definición matemática de este tipo de fuente expresada en un sistema esférico, es

$$F = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(t). \tag{6.29}$$

Como los desplazamientos son independientes de la coordenada azimutal

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = f_r(r) f_z(z - z_0). \tag{6.30}$$

Ahora, integrando esta función en un cilindro de radio  $\alpha$ , centrado en  $\vec{r} = z_0 \hat{z}$  y de altura  $z_2 - z_1$ ,

$$\int_{z_1}^{z_2} f_z(z - z_0) dz \int_0^a 2\pi r f_r(r) dr = 1. \quad (6.31)$$

Por inspección, las funciones apropiadas son

$$f_z(z - z_0) = \delta(z - z_0) \quad (6.32)$$

$$f_r(r) = \frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad (6.33)$$

de tal manera que la función fuente ubicada en  $\vec{r} = z_0 \hat{z}$  es

$$F = \frac{2}{r} \delta(r) \delta(z - z_0) f(t), \quad (6.34)$$

donde se observa que para  $z \neq z_0$  o  $r \neq 0$ ,  $F = 0$ , y se puede ver que existe una singularidad en  $r = 0$ .

## VI.2. VERIFICACIÓN

Para examinar la validez de la aproximación, se comparan los campos de desplazamiento en una serie de detectores, con los correspondientes resultados obtenidos con el método de diferencias finitas. En este método las derivadas espaciales y la segunda derivada temporal se calculan por medio de un esquema de segundo orden. Todas las comparaciones se hicieron en el dominio del tiempo. Por lo que respecta al caso acústico, se compararon los desplazamientos obtenidos a partir de la solución aproximada, con la solución analítica de Pekeris (1946). Para representar a la fuente en ambos métodos se usó un pulso de Ricker y para todos los casos la densidad del medio se consideró constante ( $\rho = 1$ ). Las unidades de las distancias, tiempos y velocidades son consistentes.

En todas las comparaciones, la fuente se localiza en  $r = 0$  y  $z = 5$ , y la duración de la misma es  $t_p = 0.6$ . En la fig. 6.2.1 se muestran las posiciones de los receptores y de la fuente. Para validar el método de diferencias finitas, se calcularon los desplazamientos generados por una fuerza



horizontal, aplicada en un medio homogéneo donde  $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$  (fig. 6.2.2). Los receptores (9) se localizan en  $r = 0.5$  y en varias profundidades ( $z = 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 5.0, 5.1, 5.2, 5.3$  y  $5.4$ ). La solución exacta se representa con líneas continuas y la solución obtenida con el método de diferencias finitas, con líneas discontinuas. La comparación es buena y permite validar el esquema numérico. En la fig. 6.2.3 se observan los desplazamientos producidos por una fuerza vertical, aplicada en un medio heterogéneo ( $\alpha = 0.666z$  y  $\beta = 0.333z$ ). En este ejemplo los receptores (9) se localizan en  $r = 0.25$  y en varias profundidades ( $z = 4.0, 4.25, 4.5, 4.75, 5.0, 5.25, 5.5, 5.75$  y  $6.0$ ). La solución aproximada se representa con líneas continuas y la solución numérica con líneas discontinuas. El acuerdo es muy bueno.

En el caso acústico, en la fig. 6.2.4 se muestran los desplazamientos producidos por una fuente puntual, inmersa en un fluido inhomogéneo en el que la velocidad es función de la profundidad ( $\alpha = 0.5z$ ). Los receptores se localizan en  $r = 2$  y en varias profundidades ( $z = 2.0, 2.88, 3.77, 4.66, 5.55, 6.44, 7.33, 8.22$  y  $9.11$ ). La solución de Pekeris se representa con líneas continuas y la aproximada con líneas discontinuas. La comparación es excelente. Resultados similares se obtuvieron para un fluido heterogéneo con  $\alpha = 0.666z$ , para el arreglo definido en el ejemplo anterior (fig. 6.2.5).

En la fig. 6.2.6 se muestran los desplazamientos generados por una fuerza vertical ( $G_{i3}$ ), aplicada en un medio homogéneo ( $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$ ). La fuente se ubica en  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $z = 5$ , y los receptores (41) se localizan en  $x = 1$ ,  $y = 1$  y en varias profundidades a partir de  $z = 1$  con  $dz = 0.2$ . En esta gráfica se pueden observar claramente los arribos de las ondas  $P$  y  $S$ . El criterio para ubicar los receptores es el mismo que se usó en las comparaciones. La velocidad más baja registrada por el arreglo de receptores, se localiza en el punto donde se ubica el primer receptor, y los receptores se encuentran simétricamente dispuestos con respecto a la fuente. En los desplazamientos verticales ( $G_{33}$ ) se observa que los primeros arribos son positivos, y en los desplazamientos horizontales ( $G_{13}$ ) y ( $G_{23}$ ) los primeros arribos registrados en los detectores que se ubican arriba de la fuente (1-20), son negativos, a diferencia de los que se encuentran abajo. En la fig. 6.2.7 se observan algunos esfuerzos obtenidos a partir de los desplazamientos mostrados en la gráfica 6.2.6, donde también son claros los arribos. Resultados similares fueron obtenidos para un medio heterogéneo donde  $\alpha = 0.2z + 1$  y  $\beta = 0.1z + 0.5$ . En la fig. 6.2.8 se muestran los desplazamientos y en la fig. 6.2.9 los esfuerzos. Las velocidades de ondas  $P$  y  $S$  en la fuente son las mismas que se usaron en el ejemplo anterior, Se puede ver en cada una de

estas figuras el cambio en los tiempos de arribo y en la amplitud debidos a la variación de la velocidad.

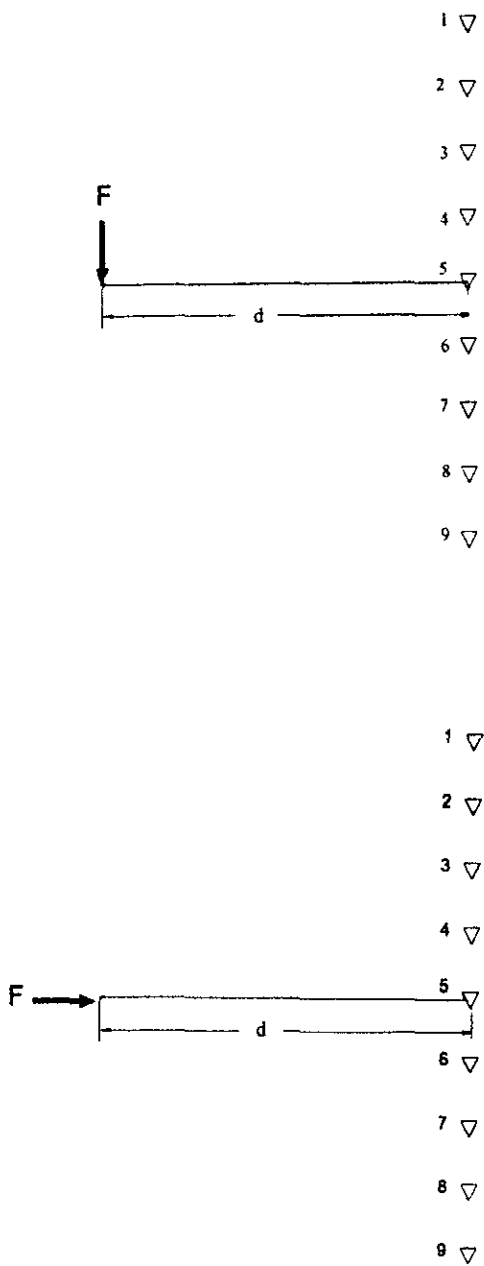


Figura 6.2.1. Posiciones de la fuerza vertical y horizontal, así como de los receptores.

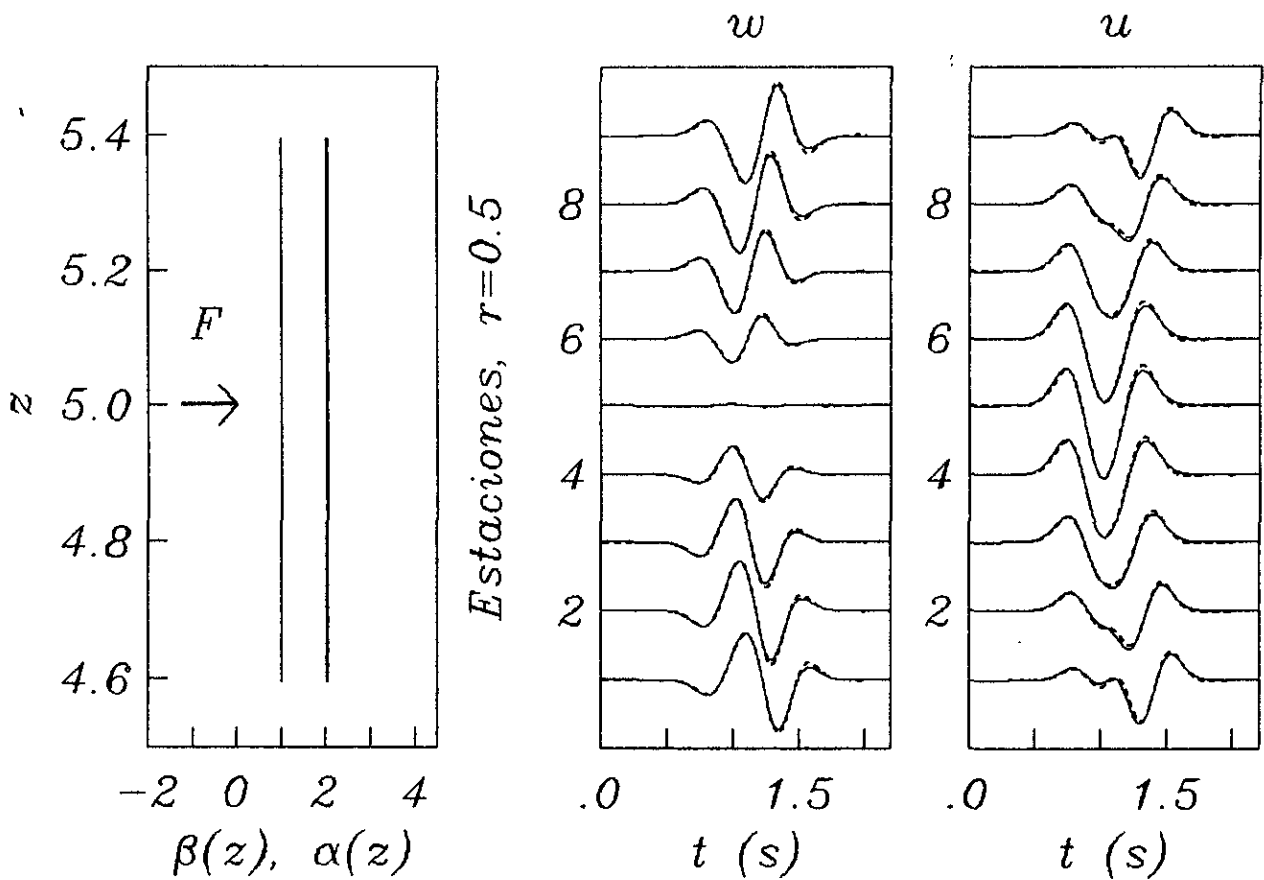


Figura 6.2.2. Desplazamientos generados por una fuerza horizontal, aplicada en un medio elástico tridimensional homogéneo ( $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$ ). La fuente se localiza en  $r = 0$  y  $z = 5$ , y los receptores (9) se ubican en  $r = 0.5$  y en varias profundidades ( $z = 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 5.0, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4$ ). Se usó un pulso de Ricker con  $t_p = 0.6$ . La solución exacta se representa con líneas continuas y la solución obtenida con el método de diferencias finitas con líneas discontinuas.

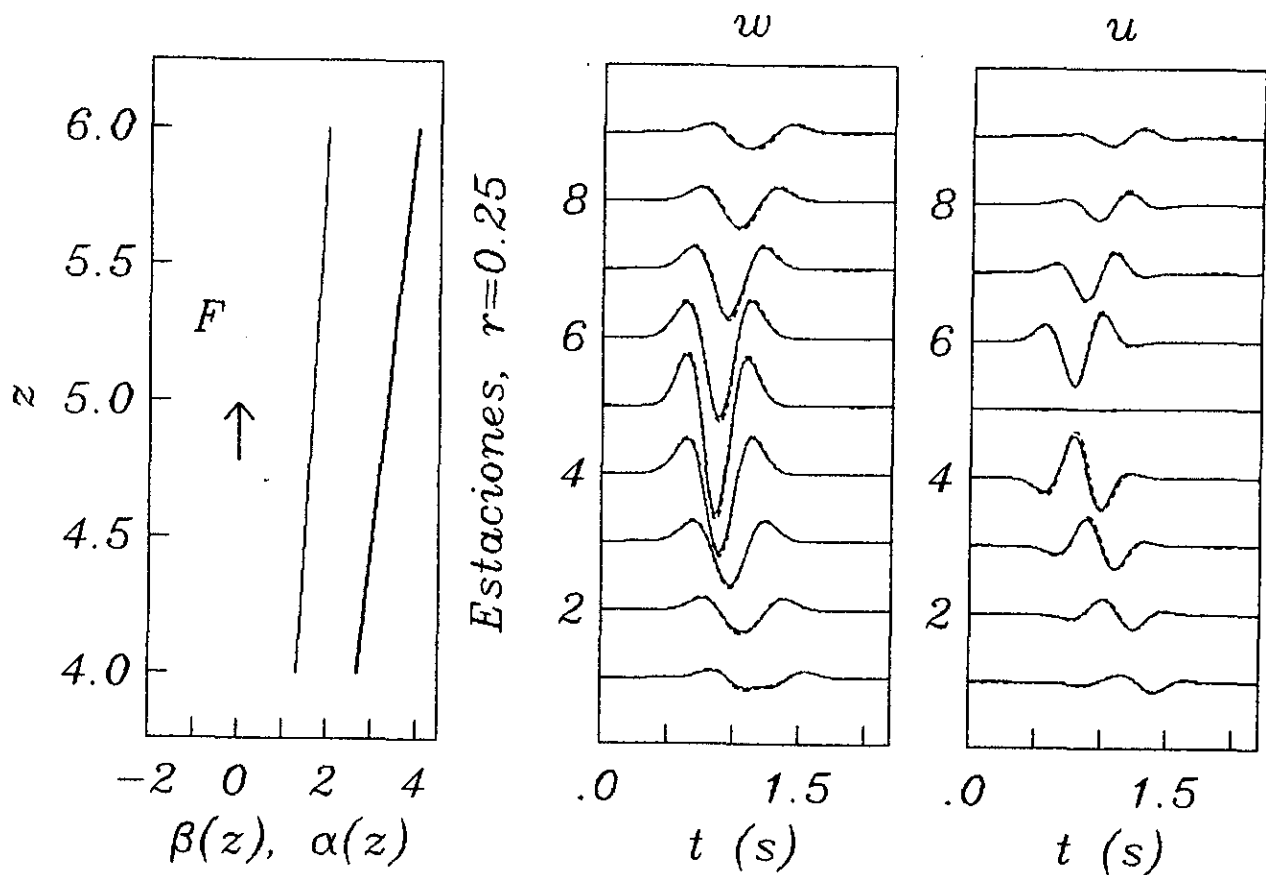


Figura 6.2.3. Desplazamientos producidos por una fuerza vertical, aplicada en un medio elástico tridimensional heterogéneo ( $\alpha = 0.666z$  y  $\beta = 0.333z$ ). La fuente se localiza en  $r = 0$  y  $z = 5$ , y los receptores (9) se ubican en  $r = 0.25$  y en varias profundidades ( $z = 4.0, 4.25, 4.5, 4.75, 5.0, 5.25, 5.5, 5.75$  y  $6.0$ ). Se usó un pulso de Ricker con  $t_p = 0.6$ . La solución aproximada se representa con líneas continuas y la solución obtenida con el método de diferencias finitas con líneas discontinuas.

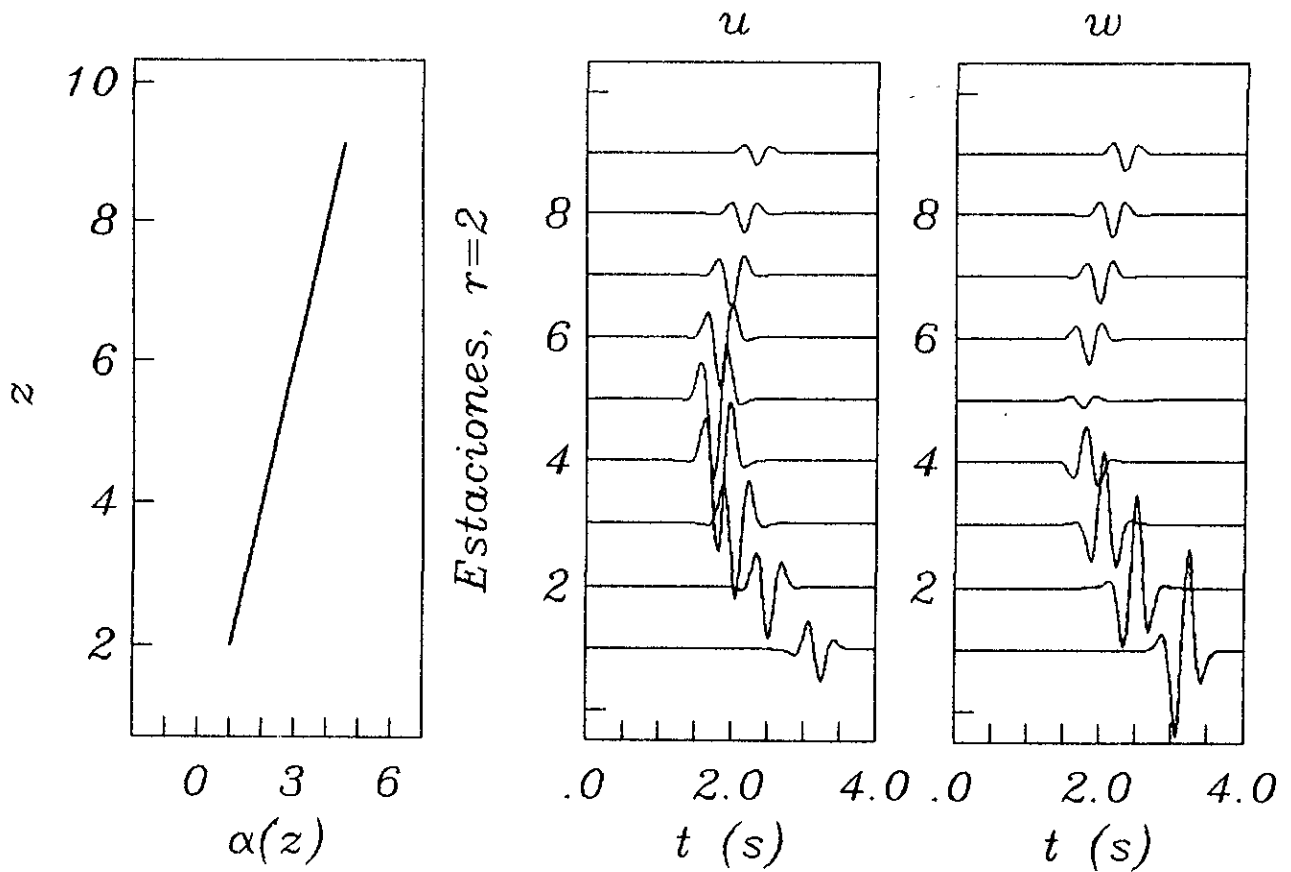


Figura 6.2.4. Desplazamientos producidos por una fuente puntual, inmersa en un fluido inhomogéneo, donde  $\alpha = 0.5z$ . La fuente se localiza en  $r = 0$  y  $z = 5$ , y los receptores (9) se ubican en  $r = 2$  y en varias profundidades ( $z = 2., 2.88, 3.77, 4.66, 5.55, 6.44, 7.33, 8.22$  y  $9.11$ ). Se usó un pulso de Ricker con  $t_p = 0.6$ . La solución de Pekeris se representa con líneas continuas y la solución aproximada con líneas discontinuas (caso acústico, 3D).

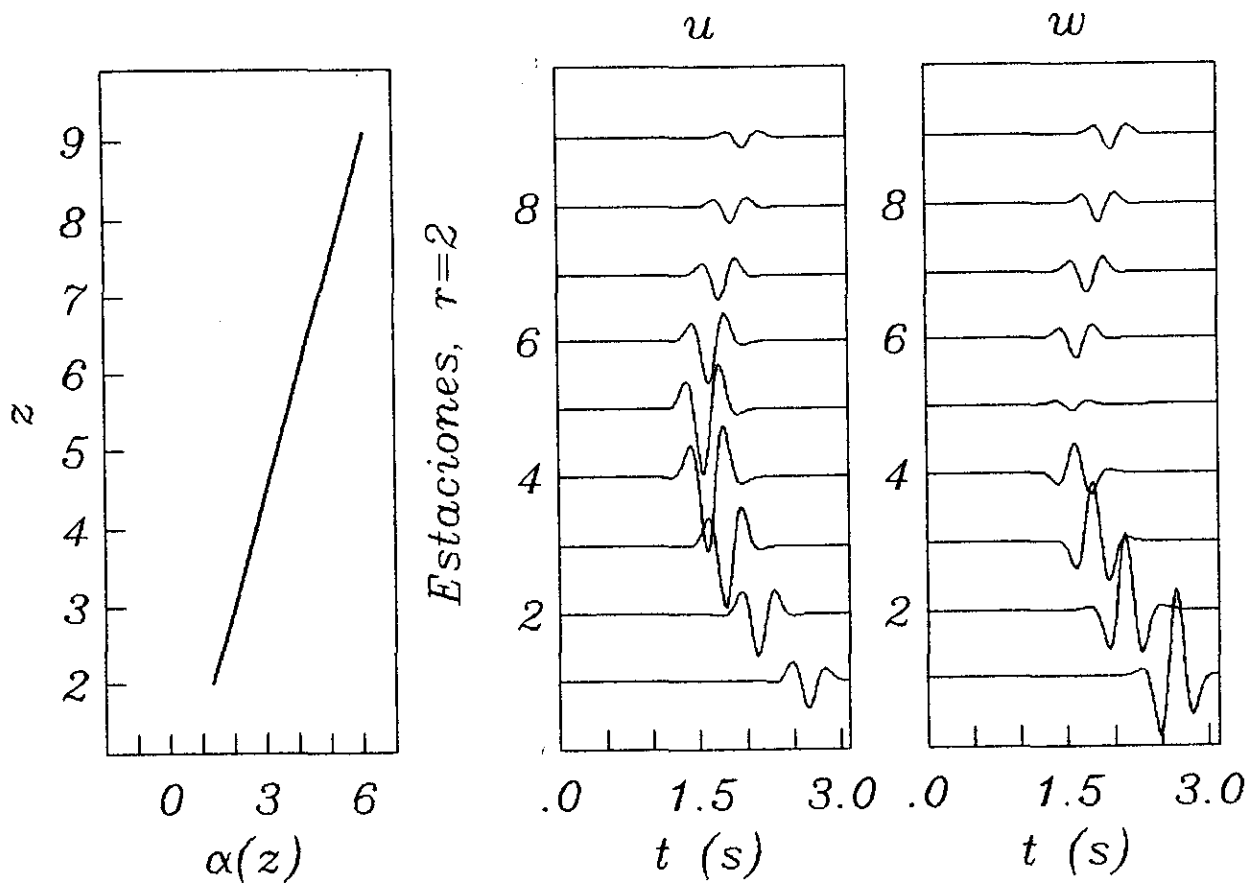


Figura 6.2.5. Desplazamientos generados por una fuente puntual, inmersa en un fluido inhomogéneo, donde  $\alpha = 0.66z$ . La fuente se localiza en  $r = 0$  y  $z = 5$ , y los receptores (9) se ubican en  $r = 2$  y en varias profundidades ( $z = 2., 2.88, 3.77, 4.66, 5.55, 6.44, 7.33, 8.22$  y  $9.11$ ). Se usó un pulso de Ricker con  $t_p = 0.6$ . La solución de Pekeris se representa con líneas continuas y la solución aproximada con líneas discontinuas (caso acústico, 3D).

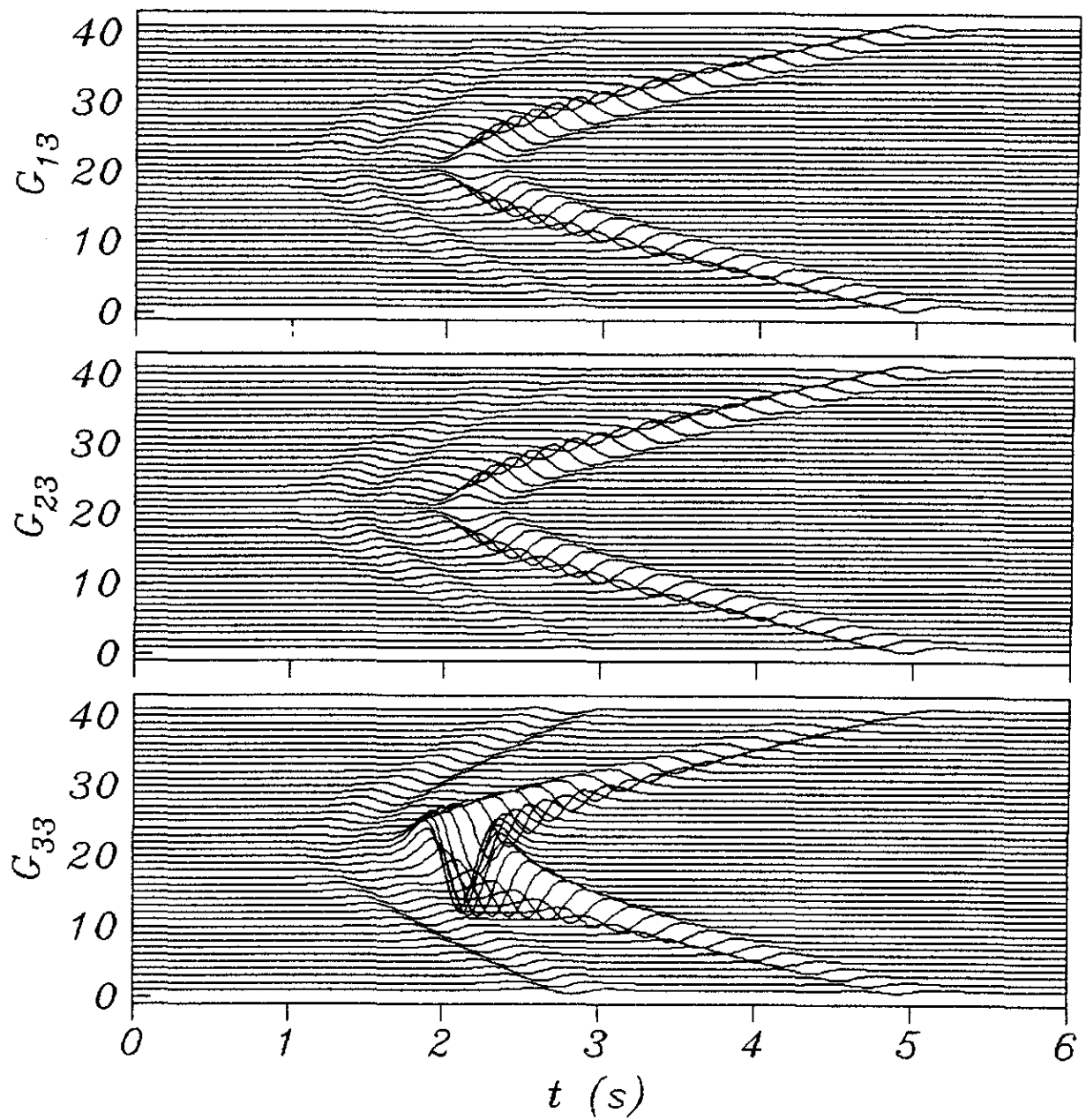


Figura 6.2.6. Desplazamientos generados por una fuerza vertical ( $G_{i3}$ ), aplicada en un medio elástico tridimensional homogéneo ( $\alpha=2$  y  $\beta=1$ ). La fuente se ubica en  $x=0$ ,  $y=0$  y  $z=5$ , y los receptores (41), se localizan en  $x=1$ ,  $y=1$  y en varias profundidades, a partir de  $z=1$  con  $dz=0.2$ . Se usó un pulso de Ricker con  $t_p=0.6$ .

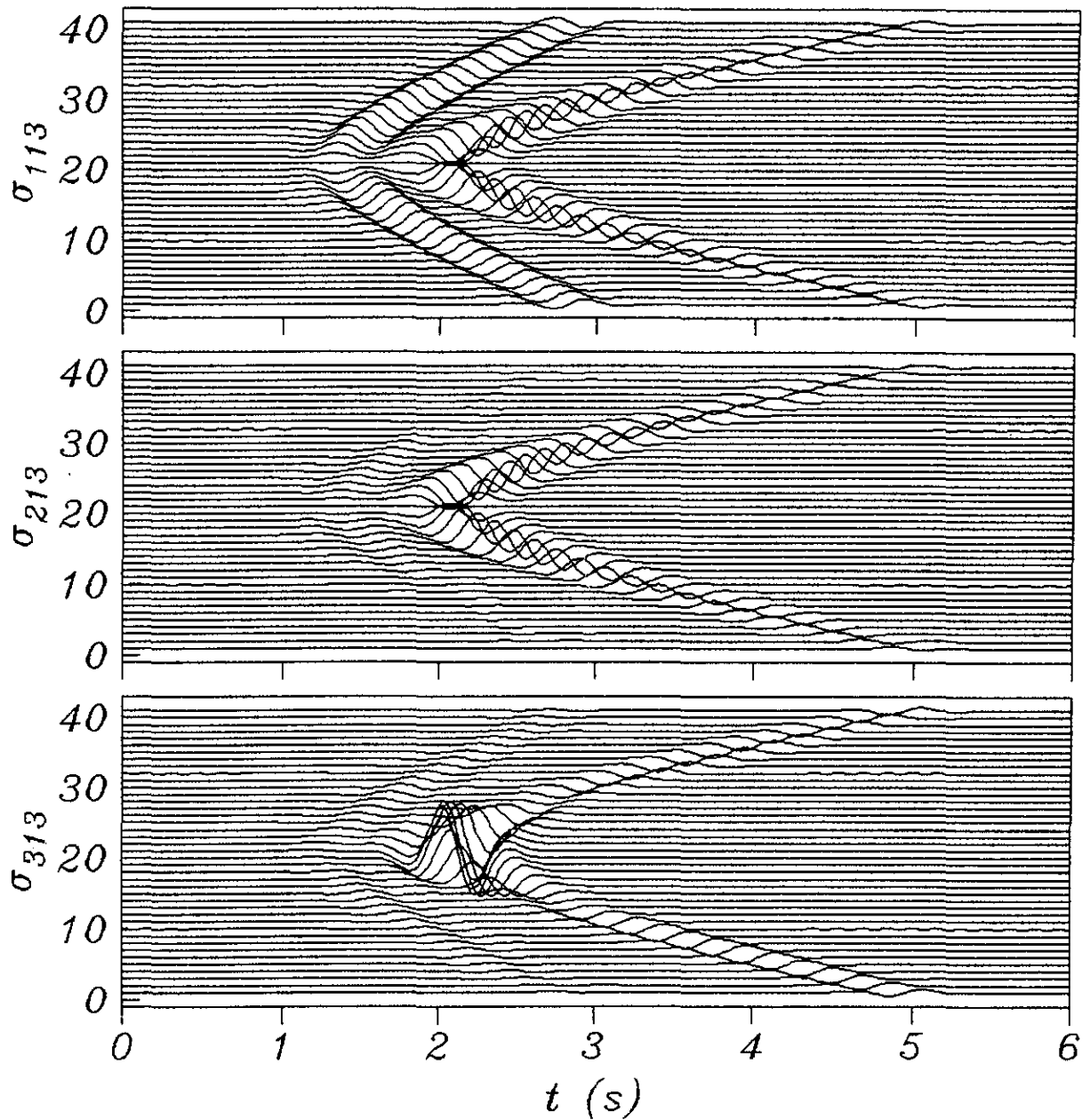


Figura 6.2.7. Esfuerzos producidos por una fuerza vertical aplicada en un medio elástico tridimensional homogéneo ( $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$ ). La fuente se ubica en  $x = 0$ ,  $y = 1$  y  $z = 5$ , y los receptores (41) se localizan en  $x = 1$ ,  $y = 1$  y en varias profundidades, a partir de  $z = 1$  con  $dz = 0.2$ . Se usó un pulso de Ricker con  $t_p = 0.6$ .



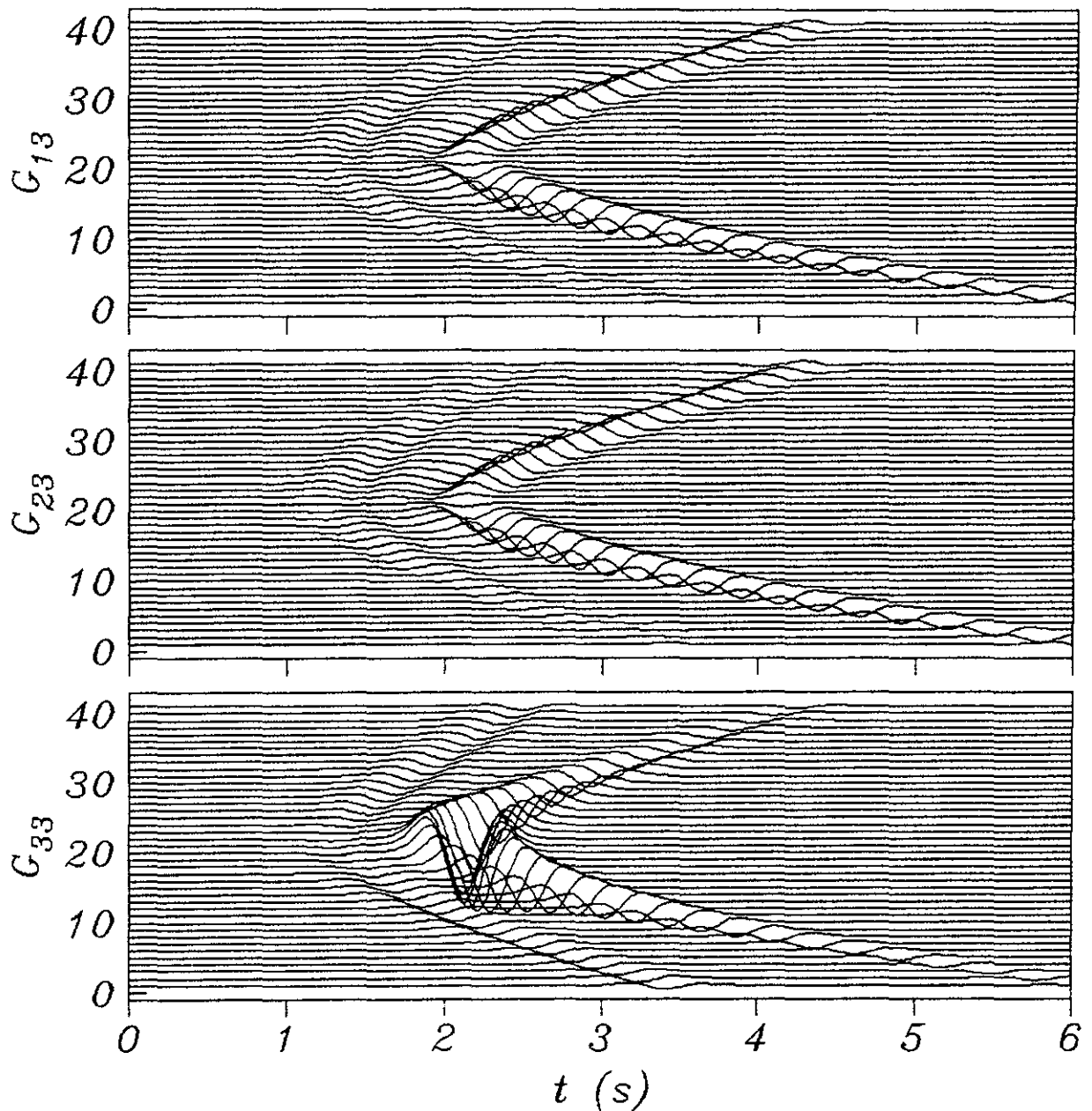


Figura 6.2.8. Desplazamientos generados por una fuerza vertical ( $G_{i3}$ ), aplicada en un medio elástico tridimensional heterogéneo con  $\alpha = 0.2z + 1$  y  $\beta = 0.1z + 0.5$ . La fuente se ubica en  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $z = 5$ , y los receptores (41) se localizan en  $x = 1$ ,  $y = 1$  y en varias profundidades, a partir de  $z = 1$  con  $dz = 0.2$ . Se usó un pulso de Ricker con  $t_p = 0.6$ .

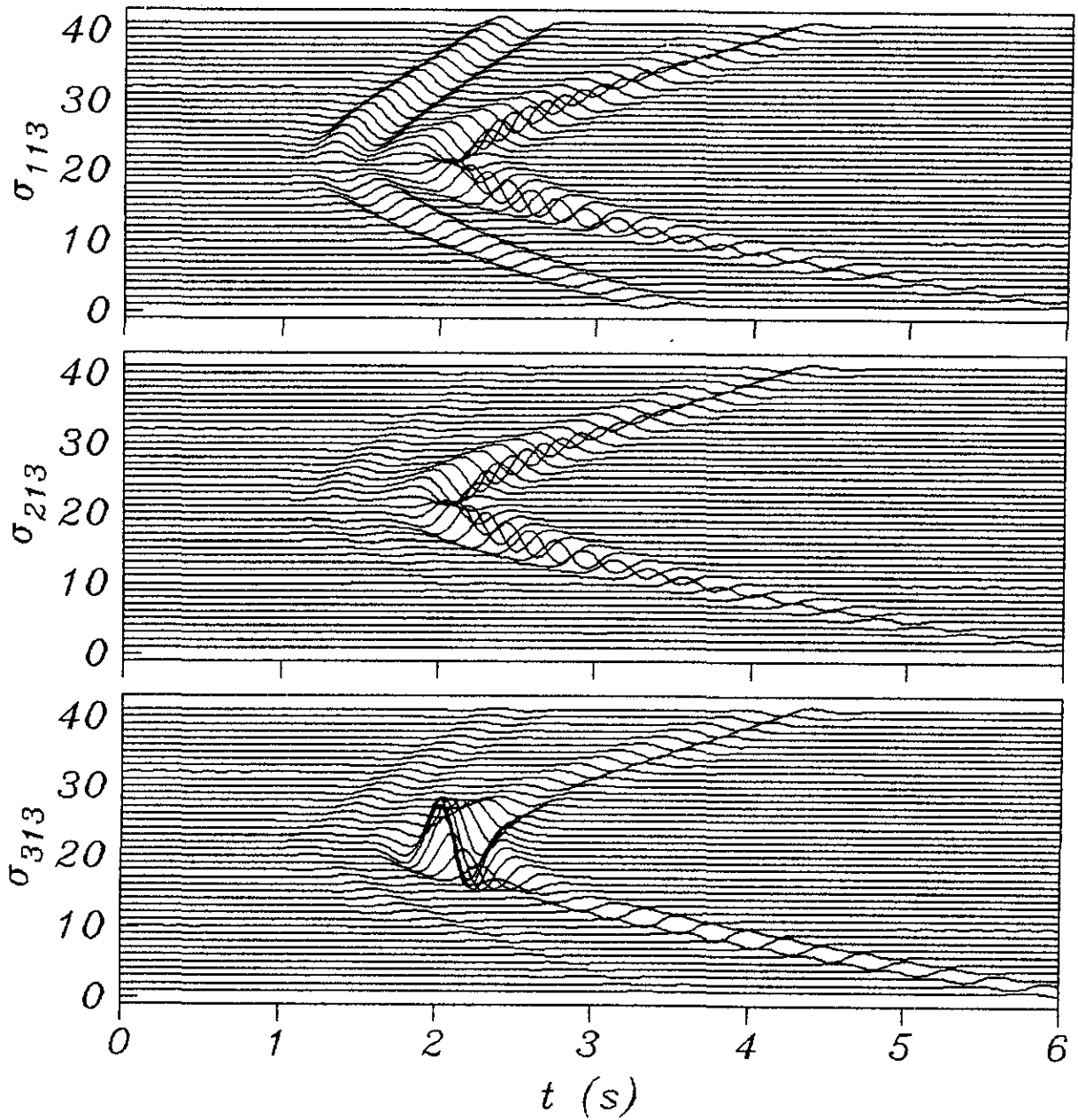


Figura 6.2.9. Esfuerzos producidos por una fuerza vertical aplicada en un medio elástico tridimensional heterogéneo con  $\alpha = 0.2z + 1$  y  $\beta = 0.1z + 0.5$ . La fuente se ubica en  $x = 0$ ,  $y = 1$  y  $z = 5$ , y los receptores (41) se localizan en  $x = 1$ ,  $y = 1$  y en varias profundidades, a partir de  $z = 1$  con  $dz = 0.2$ . Se usó un pulso de Ricker con  $t_p = 0.6$ .

## VII. MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA

En los últimos años los métodos de frontera han adquirido popularidad en muchas aplicaciones en sismología e ingeniería pues, además de su versatilidad para ser aplicados en problemas de respuesta sísmica de configuraciones con geometrías diversas, reducen el tiempo de cómputo y capacidad de memoria requeridos en comparación con otros métodos numéricos, debido a que, el tratamiento numérico se realiza sólo en las fronteras. Destacan los estudios realizados por Kawase (1988) y Kawase y Aki (1989).

En el método de elementos de frontera que se analiza, se utiliza una representación integral de capa simple para los campos de ondas difractados. Para su aplicación se requiere conocer la función de Green o solución fundamental de la ecuación diferencial que gobierna el movimiento. El problema se resuelve discretizando las fronteras que delimitan la geometría del mismo, formulando con ello un sistema de ecuaciones lineales (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991; Sánchez-Sesma *et al.*, 1993; Sánchez-Sesma y Luzón, 1995; Pedersen *et al.*, 1993).

En este trabajo se presenta la aplicación del método indirecto de elementos de frontera (IBEM, por sus siglas en inglés) para obtener la respuesta sísmica en superficie, producida por una fuente explosiva en un semiespacio elástico y heterogéneo, en el que la velocidad varía linealmente con la profundidad. La fuente es lineal, por lo que el problema es bidimensional (2D). El campo de ondas producido por la fuente puede o no ser reflejado por la superficie libre.

El campo reflejado se construye como lo indica el principio de Huygens. La condición de *frontera libre*, que establece que los esfuerzos son cero en la superficie, se impone de forma numérica. Aunque en el caso acústico si existe solución analítica (Pekeris, 1946). La estrategia de solución se basa en la obtención del campo reflejado por la superficie libre que se superpone al campo generado por la fuente. Las ondas difractadas se construyen usando una representación integral en términos de distribuciones de fuerza de capa simple. Estas densidades se obtienen a partir de un sistema lineal de ecuaciones que resulta de imponer la condición de esfuerzo nulo.

## VII.1. IBEM

Considérese una superficie  $S$ , finita o infinita, abierta o cerrada, en un espacio elástico tridimensional. Si en esta superficie se aplica una densidad de fuerza armónica, el campo generado se puede escribir, despreciando fuerzas de cuerpo, como

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_S \phi_j(\xi) G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) ds_\xi, \quad (7.1)$$

donde  $u_i(\mathbf{x}) = i$  -ésimo componente del desplazamiento en  $\mathbf{x}$ ,  $G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) =$  función de Green,  $\phi_j(\xi) =$  densidad de fuerza armónica en la dirección  $j$ . Esta representación integral permite calcular los esfuerzos y tracciones por aplicación directa de la ley de Hooke, con excepción de las singularidades de la función de Green en la frontera.

Con base en consideraciones de equilibrio alrededor de una vecindad de la frontera, es posible escribir para  $\mathbf{x}$  sobre  $S$

$$t_i(\mathbf{x}) = c\phi_j(\mathbf{x}) + \int_S \phi_j(\xi) T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) ds_\xi, \quad (7.2)$$

donde  $t_i = i$  -ésimo componente de la tracción en la frontera,  $c = 0.5, -0.5$  ó  $0.0$ , si  $\mathbf{x}$  tiende a  $S$  desde dentro del medio, desde fuera o si  $\mathbf{x}$  no está en  $S$ , respectivamente,  $T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) =$  función de tracción de Green. El subíndice  $\xi$  indica la variable sobre la cual se realiza la integración. Las funciones de Green para el caso bidimensional, son funciones especiales de Hankel. Las expresiones detalladas se encuentran en el trabajo de Sánchez-Sesma y Campillo (1991) y para el caso tridimensional en el trabajo de Sánchez-Sesma y Luzón (1995).

## VII.2. DISCRETIZACIÓN

Cuando se usan los métodos de frontera se discretizan únicamente las fronteras del medio. Estas se dividen en elementos, y en estos se simula la aplicación de fuerzas para poder modelar los campos reflejado y difractado, según sea el caso. La exactitud de los resultados depende del número de elementos y de la longitud de onda. Si se desea estudiar problemas en alta frecuencia, se requieren longitudes de onda pequeñas. Esto implica una discretización fina y un mayor

número de elementos, por lo que los sistemas de ecuaciones crecen. Sin embargo, las matrices resultantes presentan un gran número de elementos que son prácticamente nulos. Esta característica ha permitido resolver el problema mediante la técnica de matrices porosas (Ortiz, *et al.* (1998)). Aunque en alta frecuencia el número de los elementos que son nulos tiende a disminuir. Por lo que es necesario usar otras técnicas, como es el caso de la transformada de ondícula.

A continuación se presentan las versiones discretizadas de las ecs. (7.1) y (7.2).

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N \phi_j(\xi_l) g_{ij}(\mathbf{x}, \xi_l) \quad (7.3)$$

donde

$$g_{ij}(\mathbf{x}, \xi_l) = \int_{\xi_l - \Delta s/2}^{\xi_l + \Delta s/2} G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) ds_\xi \quad (7.4)$$

y

$$t_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N \phi_j(\xi_l) t_{ij}(\mathbf{x}, \xi_l). \quad (7.5)$$

Para  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ , se tiene que

$$t_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_l) = c \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\xi_l - \Delta s/2}^{\xi_l + \Delta s/2} T_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi) ds_\xi. \quad (7.6)$$

Las integrales de la ec. (7.4) se calculan numéricamente con integración gaussiana, excepto en el caso en el que  $\mathbf{x}$  esté en la vecindad de  $\xi_l$ , para el que se tienen expresiones analíticas. Las integrales en la ec. (7.6) también se calculan numéricamente usando este tipo de integración, excepto cuando  $\mathbf{x}_n = \xi_l$ . En este caso:

$$t_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_n) = c\delta_{ij} \quad (7.7)$$

en cada uno de los segmentos en los que se divide la frontera y sobre la que se realiza la integración. La función de Green tiene un valor constante y este se asigna al centro de cada segmento. Este método se usó para calcular los desplazamientos en superficie generados por una fuente lineal de ondas compresionales (2D), aplicada en un medio homogéneo donde  $\beta=1$  y  $\alpha=2$  (fig. 5.2.2). La fuente se localiza en  $x=0$  y  $z=0.25$ , y los receptores se ubican en la superficie ( $z=0$ ) a partir de  $x=-8.8$  y con  $dx=0.44$ . La fuente se representa con un pulso de Ricker con duración  $t_p=1.75$ . Se puede observar claramente el arribo de la onda  $P$  y de la onda superficial.

Resultados similares se obtuvieron para el arreglo definido en el ejemplo anterior, pero para un medio heterogéneo en el que  $\alpha=(4/3)z+(5/3)$  y  $\beta=(4/6)z+(5/6)$  (fig 5.2.3). En la figura 5.2.1 se muestra la forma en que varía la velocidad de las ondas  $P$  y  $S$  para cada uno de los ejemplos.

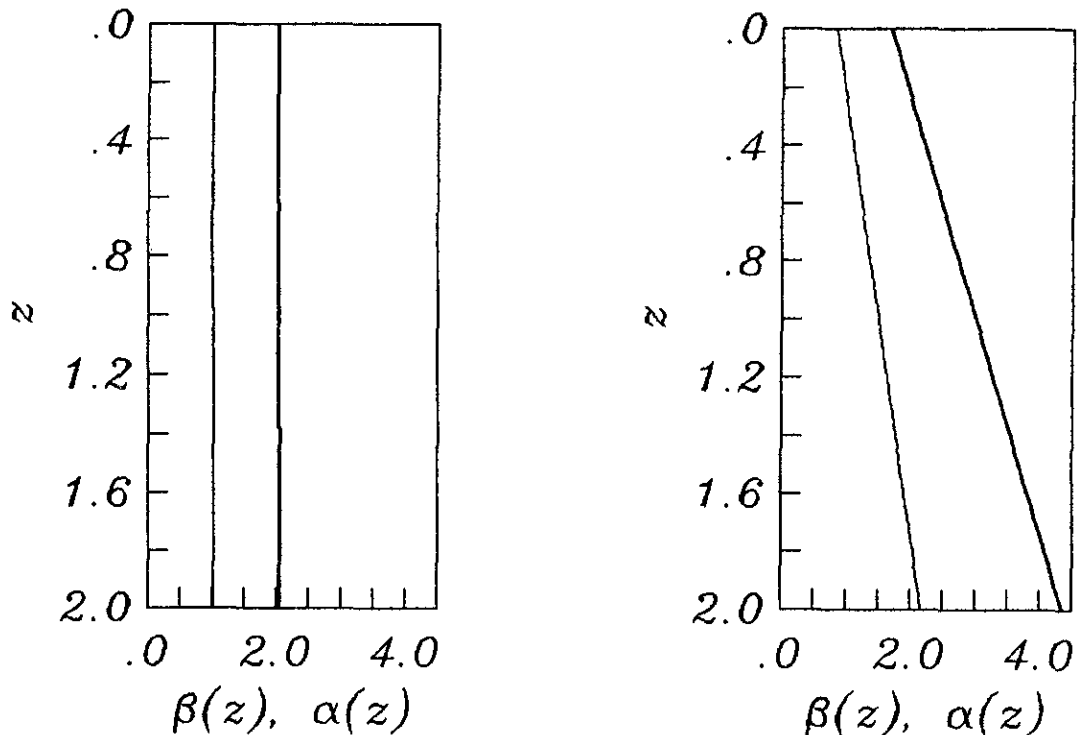


Figura 5.2.1. Gráfica de velocidad de ondas  $P$  y  $S$ , para un medio homogéneo donde  $\beta=1$  y  $\alpha=2$ , y para un medio heterogéneo en el que  $\alpha=(4/3)z+(5/3)$  y  $\beta=(4/6)z+(5/6)$ .

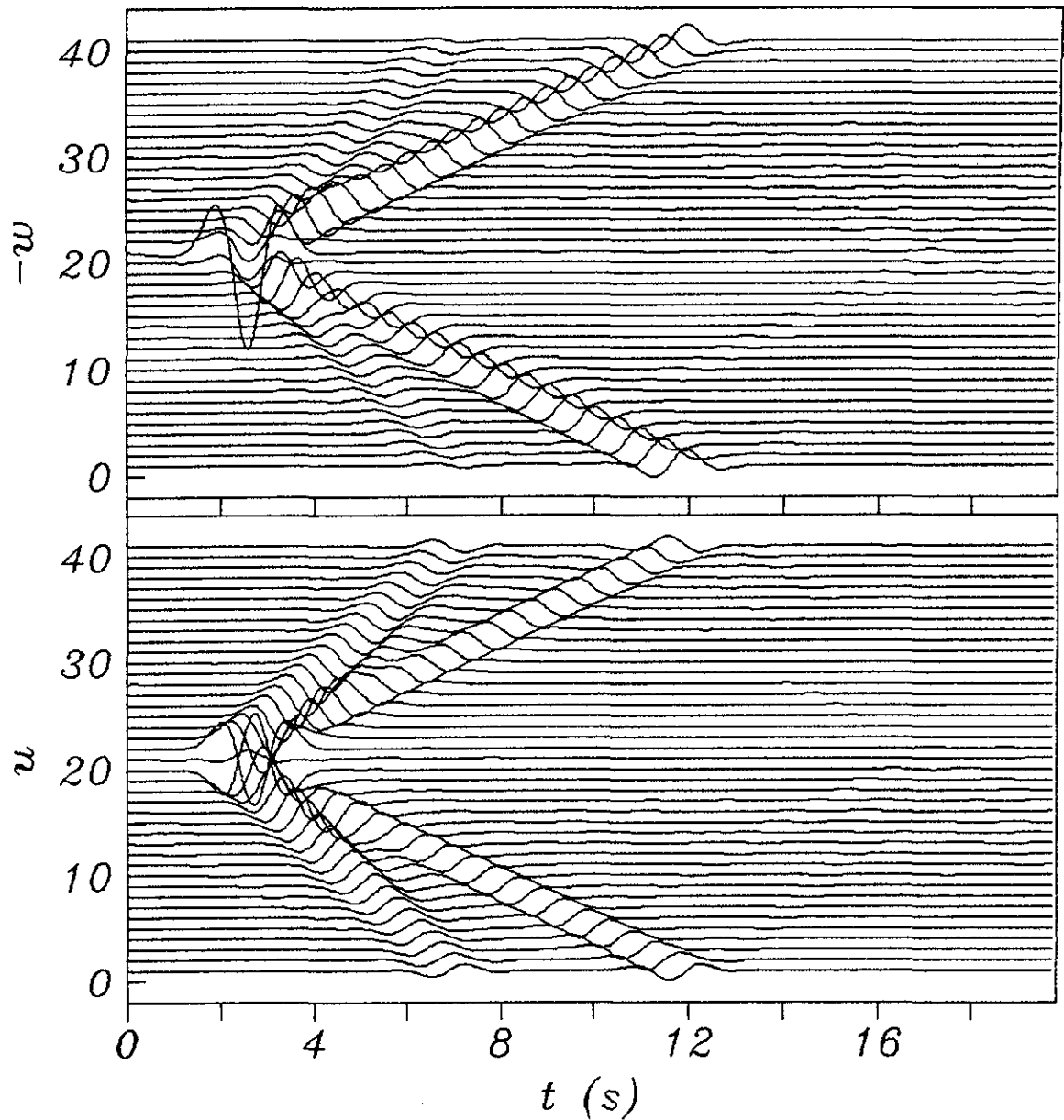


Figura 5.2.2. Desplazamientos producidos por una fuente lineal de ondas compresionales, aplicada en un medio homogéneo donde  $\beta=1$  y  $\alpha=2$ . La fuente se localiza en  $x=0$  y  $z=0.25$ , y los receptores se ubican en la superficie ( $z=0$ ) a partir de  $x=-8.8$  y con  $dx=0.44$ . La fuente se representa con un pulso de Ricker con duración  $t_p=1.75$ .

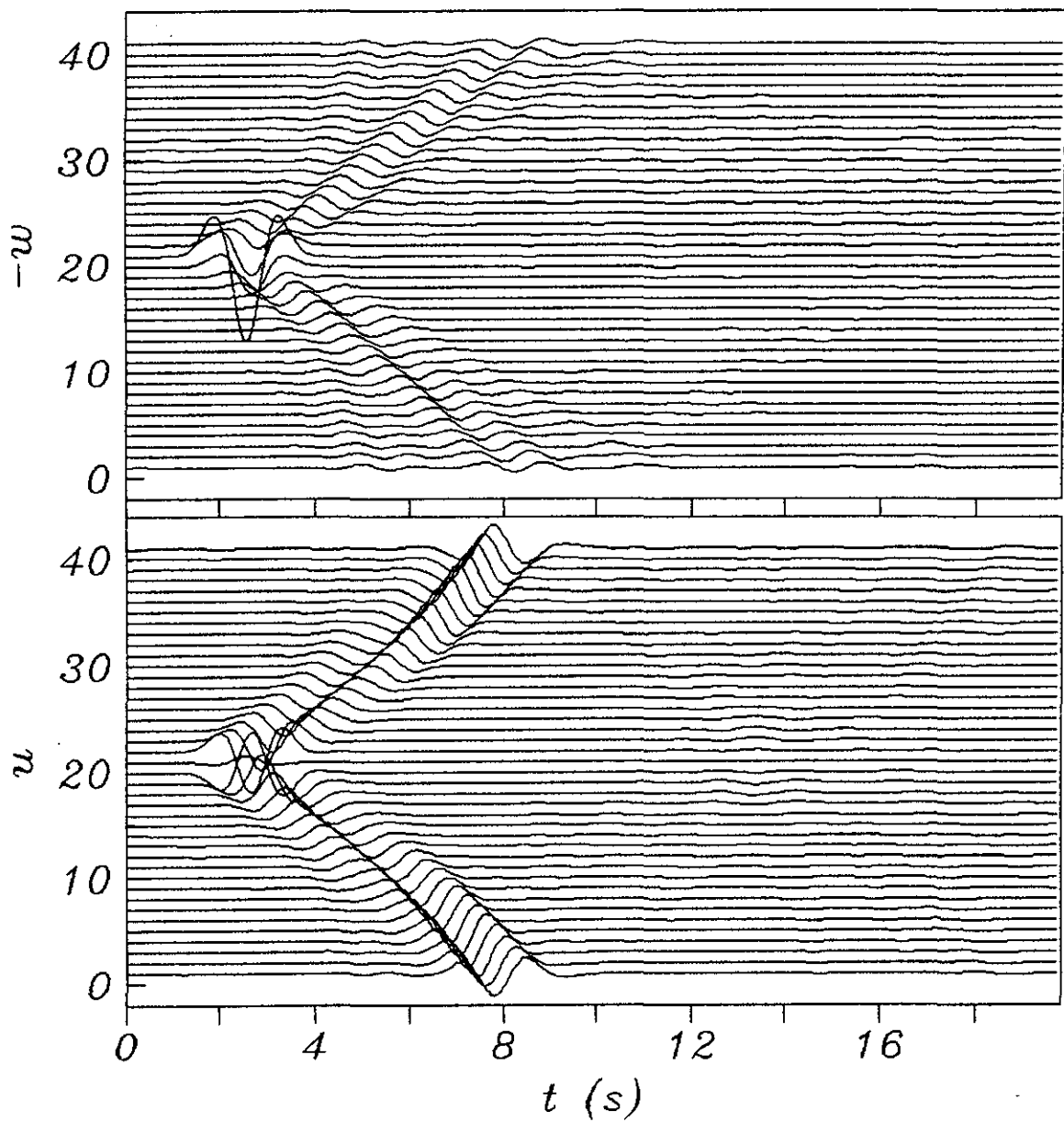


Figura 5.2.3. Desplazamientos producidos por una fuente lineal de ondas compresionales, aplicada en un medio heterogéneo donde  $\alpha = (4/3)z + (5/3)$  y  $\beta = (4/6)z + (5/6)$ . La fuente se localiza en  $x = 0$  y  $z = 0.25$ , y los receptores se ubican en la superficie ( $z = 0$ ) a partir de  $x = -8.8$  y con  $dx = 0.44$ . La fuente se representa con un pulso de Ricker con duración  $t_p = 1.75$ .



## CONCLUSIONES

Los desplazamientos y esfuerzos calculados a partir de las funciones de Green aproximadas, se compararon con los correspondientes, obtenidos con el método de diferencias finitas y el método pseudoespectral, para los casos bidimensional y tridimensional, respectivamente. Por otra parte en el caso acústico se comparó la solución aproximada con la solución analítica de Pekeris (1946). La comparación en todos los ejemplos es excelente. El análisis de los errores asociados con la función de Green aproximada ( $G_{22}$ ) confirma que la aproximación es muy buena, ya que en general los errores son menores del 5%.

La regularización geométrica puede aplicarse aun cuando la variación de la velocidad con la profundidad no sea lineal. La búsqueda de soluciones aproximadas para otro tipo de medios heterogéneos es un tema en el que seguiré trabajando en el futuro, así como también en el mejoramiento y aplicación de los códigos que se usaron para calibrar las soluciones aproximadas.

El método indirecto de elementos de frontera se usó para calcular los desplazamientos y esfuerzos generados por una fuente lineal de ondas compresionales, aplicada en un semiespacio elástico heterogéneo, donde las velocidades de ondas  $P$  y  $S$  varían linealmente con la profundidad. Aunque estos resultados son preliminares, muestran que es posible utilizar las funciones de Green aproximadas para modelar casos más realistas.

Para modelar configuraciones complejas con el método indirecto de elementos de frontera, es necesario usar técnicas numéricas que permitan resolver grandes sistemas de ecuaciones en un menor tiempo, como la técnica de matrices porosas (Ortiz-Alemán *et al.*, 1998) que ya ha sido aplicada con éxito o la transformada de ondícula, con esta última es posible resolver un sistema de ecuaciones solo con el 5% de los elementos del sistema, lo que implica un gran ahorro en el tiempo de cálculo.

## **AGRADECIMIENTOS**

Le agradezco al Dr Francisco José Sánchez Sesma su valiosa ayuda y continua orientación en el desarrollo de esta tesis.

Por la lectura crítica de este trabajo y sus sugerencias, agradezco al Dr Cinna Lomnitz Aronsfau, Dr Shri Krishna Singh, Dr Carlos Valdés González, Dr Javier Pacheco, Dr Sergio Chávez Pérez y al Dr Olivier Coutant.

Parte de los cálculos se hicieron en la CRAY-YMP de la UNAM, México. Este trabajo fue auspiciado por la D.G.A.P.A. UNAM., México, proyecto (IN-108295).

## REFERENCIAS

- Abramowitz, M. y I.A. Stegun (1972). *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- Aki, K. y P.G. Richards (1980). *Quantitative Seismology. Theory and Methods*. W. H. Freeman and Company, San Francisco.
- Alterman, Z. y F. C. Karal (1968). Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods, *Bull. Seism. Soc. Am.* **58**, 367-398.
- Bateman, H. (1933). *Partial Differential Equations*. The Macmillan Company, New York.
- Ben-Menahem, A. y S.J. Singh (1981). *Seismic Waves and Sources*. Springer-Verlag, New York.
- Ben-Menahem, A. y W.B. Beydoun (1985). Range of validity of seismic ray and beam methods in general inhomogeneous media - I. General theory, *Geophys. J. R. astr. Soc.* **82**, 207-234.
- Bender, C. M. y S. A. Orszag (1978). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, 2a ed., Mc Graw-Hill Book Co., New York.
- Beydoun, W.B. y A. Ben-Menahem. (1985). Range of validity of seismic ray and beam methods in general inhomogeneous media - II. A canonical problem, *Geophys. J. R. astr. Soc.* **82**, 235-262.
- Brebbia, C.A. y J. Domínguez (1992). *Boundary Elements an Introductory Course*, 2a ed., Comp. Mec. Publ., Southampton & Mc Graw-Hill Book Co., New York.
- Eason, G., J. Fulton y I.N. Sneddon (1956). The generation of waves in an infinite elastic solid by variable body forces, *Phil. Trans. R. Soc.* **A248**, 575-607.

Frankel, A. (1993). Three-dimensional simulations of ground motion in the San Bernardino Valley, California, for hypothetical earthquakes on the San Andreas fault, *Bull. Seism. Soc. Am.* **83**, 1020-1041.

Frankel, A. y J. Vidale (1992). A three-dimensional simulation of seismic waves in the Santa Clara Valley, California, from a Loma Prieta aftershock, *Bull. Seism. Soc. Am.* **82**, 2045-2074.

Fujiwara, H. y H. Takenaka (1994). Calculation of surface waves for a thin basin structure using a direct boundary element method with normal modes, *Geophys. J. Int.* **117**, 69-91.

Gaffet, S. y M. Bouchon (1989). Effects of two-dimensional topographies using the discrete wavenumber-boundary integral equation method in P-SV cases, *J. Acoust. Soc. Am.*, **85**, 2277-2283.

Hisada, Y., K. Aki y T. Teng, 1993. 3-D Simulations of surface wave propagation in the Kanto sedimentary basin, Japan, Part 2: Application of the surface wave BEM, *Bull. Seism. Soc. Am.* **83**, 1700-1720.

Hook, J.F. (1962). Contributions to a theory of separability of the vector wave equation of elasticity for inhomogeneous media, *J. Acoust. Soc. Am.* **34**, 946-953.

Horike, M., Uebayashi H. y Takeuchi Y. (1990), Seismic response in three-dimensional sedimentary basin due to plan S wave incidence, *J. Phys. Earth* **38**, 261-284.

Kawase, H. (1988). Time-domain response of a semicircular canyon for incident SV, P, and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method, *Bull. Seism. Soc. Am.* **78**, 1415-1437.

Kawase, H. y K. Aki (1989). A study on the response of a soft basin for incident S, P and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico City, *Bull. Seism. Soc. Am.* **79**, 1361-1382.

Kim, J. y A. Papageorgiou (1993). Discrete wavenumber boundary element method for 3D scattering problems. *J. Eng. Mech. ASCE* **119**, 603-624

Kobayashi, S. (1987). Elastodynamics, in *Boundary Element Methods in Mechanics* D.E. Beskos (Ed.) North-Holland, Amsterdam.

Lebedev, N.N. (1972). *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications Inc., New York.

Luco, J.E., H.L. Wong, y F.C.P. de Barros (1990). Three-dimensional response of a cylindrical canyon in a layered half-space, *Earthq. Engrg. Structl. Dyn.* **19**, 799-817.

Olsen, K.B., R.J. Archuleta y J.R. Mataresse (1995). Three-dimensional simulation of a magnitude 7.75 earthquake on the San Andreas fault, *Science* **270**, 1628-1632.

Olsen, K.B. y R.J. Archuleta (1996). Three-dimensional simulation of earthquakes on the Los Angeles fault system, *Bull. Seism. Soc. Am.* **86**, 575-596.

Ortiz-Alemán, C., F.J. Sánchez-Sesma, J.L. Rodríguez-Zúñiga y F. Luzón (1998). Computing topographical 3D site effects using a Fast IBEM/conjugate gradient approach, *Bull. Seism. Soc. Am.* **88**, 393-399.

Pedersen, H. A., F.J. Sánchez-Sesma, y M. Campillo (1993). Three-dimensional scattering by two-dimensional topographies, *Bull. Seism. Soc. Am.* **84**, 1169-1183.

Pei, D. y A.S. Papageorgiou (1996). Locally generated surface waves in Santa Clara Valley: Analysis of observations and numerical simulation. *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.* **25**, 47-63.

Pekeris, C.L. (1946). Theory of propagation of sound in a half-space of variable sound velocity under conditions of formation of a shadow zone, *J. Acoust. Soc. Am.* **18**, 295-315.

Sánchez-Sesma, F.J. y M. Campillo (1991). Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation, *Bull. Seism. Soc. Am.* **81**, 2234-2253.

Sánchez-Sesma, F.J., J. Ramos-Martínez y M. Campillo (1993). An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh Waves, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.* **22**, 279-295.

Sánchez-Sesma, F.J. y F. Luzón (1995). Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves, *Bull. Seism. Soc. Am.* **85**, 269-284.

Timoshenko, S.P. y J.N. Goodier (1970). *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company.

Yokoi, T. y H. Takenaka (1995). Treatment of an infinitely extended free surface for indirect formulation of the boundary element method, *J. Phys. Earth* **43**, 79-103

Yomogida, K. y J.T. Etgen (1993). 3-D wave propagation in the Los Angeles Basin for the Whittier-Narrows earthquake, *Bull. Seism. Soc. Am.* **83**, 1325-1344.