

29

2 ejm



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIONES Y PROYECCIONES DE  
CUERPOS CONVEXOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

EFREN L MORALES AMAYA

DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT.



1998



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



VERDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"SECCIONES Y PROYECCIONES DE CUERPOS CONVEXOS"

realizado por Efrén Morales Amaya.

con número de cuenta 8609459-7 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

Dr. Luis Montejano Peimbert.

Propietario

Dr. Javier Bracho Carpizo.

Propietario

M. en C. Victor Neumann Lata.

Suplente

Dr. Jorge Arocha Pérez.

Suplente

Debora Oliveros Braniff

Dra. Deborah Oliveros Braniff.

Consejo Departamental de Matemáticas  
MAT. CESAR DE LA CRUZ BRAVO

CIENCIAS  
MATEMÁTICAS

# Secciones y Proyecciones de Cuerpos

## Convexos

Efrén Morales Amaya

Director de tesis:Luis Montejano Peimbert

21 de Enero de 1998

Este Trabajo esta dedicado a mis Padres, Hermanos, Esposa, Hija y Cuates:

Lupita, Popis, Noris, Mimis, Ely, Viane, Babis, Naty, el Candidato, el Garras,  
la Guayaba, el Tenayo, el Abuelito, el Clacollo, el Jefe, Holek, Tito.

Y a mis profesores,

Dr. Luis Montejano Peimbert.

Dr. Javier Bracho Carpizo.

Dr. Antón María Minzoni

Dr. Jorge Arocha Pérez.

Dr. Victor Neumann Lara.

Dra. Deborah Oliveros Braniff.

Dra. Ana I. Ramírez Galarza.

Dr. Alberto Barajas Celis.

Dr. Claudio Firmani.

Dr. José Luis Sánchez Acenjo.

# Índice General

1	La intimidad del Elipsoide en $R^2$ y $R^3$ . . . . .	1
1.1	Preliminares. . . . .	1
1.2	Caracterizaciones del Elipsoide. . . . .	2
1.3	Un Teorema Elemental para Conos Elípticos. . . . .	4
1.4	El Teorema del Falso-Centro para Conos. . . . .	7
1.5	El Teorema de Hübinger-Burton-Larman. . . . .	11
1.6	Las Sombras de un Elipsoide. . . . .	15
2	Secciones y Proyecciones. . . . .	18
2.1	La Prueba del Teorema de Rogers . . . . .	18
2.2	Los Cuerpos de Petty-McKinney . . . . .	19

## Introducción.

En abril de 1993 en la ciudad de Guanajuato, se celebró el primer Taller de Convexidad Geométrica. La participación de los notables geometras el alemán R. Schneider y el austriaco P. Gruber fueron una de las principales motivaciones de el presente y modesto trabajo. Otro importante estímulo fue la siguiente conjetura para cuerpos convexos propuesta por Gruber en aquella ocasión (vease [3]).

CONJETURA. Supongamos que un cuerpo convexo  $D$  en  $R^n$ ,  $n \geq 3$  está contenido en el interior de una superficie continua  $S$  homeomorfa a  $S^{n-1}$ , si  $D$  se "ve centralmente simétrica" desde cada punto de  $S$ , entonces  $D$  es un elipsoide.

Cuando trabajamos con la proyección ortogonal de un cuerpo sobre un subespacio ortogonal a la dirección  $u$  podemos pensar en un cilindro, con generatrices paralelas a  $u$ , que "circunscribe" al cuerpo. Luego, existe cierta información que el cilindro nos proporciona acerca del cuerpo. Podemos pensar también como si el cuerpo fuera iluminado por rayos paralelos a la dirección  $u$  i.e. iluminado por un foco puntual "en el infinito" en la dirección de  $u$ . Nada nos impide preguntarnos que ocurre cuando iluminamos al mismo cuerpo con un foco situado "cerca del cuerpo", digamos i.e., qué ocurre cuándo consideramos conos que circunscriben al cuerpo?

Puede parecer, a primera vista que no hay una diferencia sustancial entre los dos hechos anteriores. Sin embargo, "no es un poco raro que halla tan pocos resultados relativos a conos que circunscriben a un cuerpo". De hecho, nosotros conocemos solo uno. El Teorema de Burton-Laman. De este problema hablamos

un poco más adelante.

El propósito del presente trabajo fue obtener, en la medida de lo posible, algunos resultados relativos a conos, análogos a aquellos problemas de la determinación de propiedades de cuerpos convexos  $n$ -dimensionales a partir de la información contenida en sus proyecciones ortogonales (secciones transversales) sobre (con) subespacios de dimensión menor o igual a  $n - 1$ .

En el capítulo 1 se establecen, en un mismo teorema, varias interesantes y bien conocidas propiedades que caracterizan al elipsoide. Por supuesto, tales propiedades relativas a secciones transversales y proyecciones ortogonales.

Hemos establecido dos versiones para conos de los resultados contenidos en el Teorema 1. Una relativa a la poderosa caracterización del elipsoide: el Teorema del Falso-Centro [1].

Haciendo uso del concepto de "centro de proyectivo" se establece, en el Teorema 7, una hermosa caracterización del elipsoide, se da una prueba de esta haciendo uso del Teorema 1. En [2] J.L. Arocha, L. Montejano y E. Morales, haciendo un uso magistral del Teorema 7, redemuestran y clarifican el interesante Teorema de G. R. Burton y D. G. Larman [6]: el primer resultado en el camino hacia la solución de la conjetura de Gruber.

La noción de "centro de proyectivo" es, a juicio de nosotros, un elemento central en el estudio del elipsoide. Tal opinión surge de notar que gracias al concepto de centro proyectivo es posible establecer una interesante conexión entre varias (al menos dos) caracterizaciones del elipsoide, en donde una de ellas es, digamos, un

tanto más complicada (Teorema de Burton-Larman) que las demás de hecho, poco entendida aún por las personas que la establecieron.

Las demostraciones de este capítulo son originales.

El objetivo del capítulo es ilustrar el desarrollo que ha tenido el estudio de las propiedades de los cuerpos convexos mediante la información contenida ya sea en sus secciones transversales o en sus proyecciones ortogonales. Tal estudio tiene su culminación con el interesantísimo y misterioso Teorema de C. R. M. Petty y J. R. Mckinney[17].

Se presenta la demostración del Teorema de Rogers, enunciado en la sección 1.2. Este teorema es una herramienta importante en la solución de la conjetura de Rogers: El Problema del Falso-Centro [vease sec. 1 2].

Nuestra contribución en esta parte es más modesta que en los capítulos anteriores. Sin embargo, consideramos que el buen entendimiento de estos problemas es el primer paso en la solución de los mismos.

Ojala y no este muy lejano el día en que este en nuestras manos ofrecerles sus soluciones...

# Capítulo 1

La intimidad del Elipsoide en  $R^2$  y  $R^3$ .

## 1.1 Preliminares.

Sea  $K \subset R^n$ . Denotaremos por  $\text{Fr}K$  y por  $\text{int}K$  la frontera y el interior de  $K$ .

*DEFINICIÓN.* Se dice que un conjunto  $C \subset R^n$  es *convexo* si, para cualesquiera dos de sus puntos, el segmento determinado por estos está completamente contenido en  $C$ .

Sea  $x \in R^n$  un punto. Diremos que  $L \subset R^n$  es un *hiperplano por  $x$*  si existe un subespacio  $L' \subset R^n$  de dimensión  $(n-1)$  tal que  $L = L' + x$

Sea  $C \subset R^n$  un conjunto convexo. Sean  $x \in \text{Fr}C$  y  $L \subset R^n$  un *hiperplano por  $x$* .  $L$  es llamado un *hiperplano soporte de  $C$*  si  $C - x$  esta completamente contenido en alguno de los dos subespacios determinados por  $L$

La única caracterización de convexidad, en terminos de hiperplanos soportes, que nosotros necesitaremos es la siguiente:

*TEOREMA* Sea  $C \subset R^n$ .  $C$  es convexo si y solo si para cada  $x \in \text{Fr}C$  existe un hiperplano soporte de  $C$ .

Diremos que un conjunto es *estrictamente convexo* si no contiene intervalos en su frontera. Un conjunto convexo tiene *frontera regular* si para cada uno de sus puntos frontera existe un único hiperplano soporte

Un conjunto convexo  $C \subset R^n$  es llamado un *cuerpo convexo* si es compacto y

tiene interior no-vacío.

Sea  $\Pi \subset R^n$  un  $(n-1)$ -dimensional subespacio. La proyección ortogonal  $P : R^n \rightarrow \Pi$  es una transformación lineal tal que  $\ker P = \Pi^\perp$  donde  $\Pi^\perp = \{x \in R^n : \langle x, y \rangle = 0, y \in \Pi\}$ .

*DEFINICIÓN.* Sean  $K \subset R^n$  un cuerpo convexo y  $P_u : R^n \rightarrow \Pi$  la proyección ortogonal sobre el hiperplano  $\Pi = \{x \in R^n : \langle x, u \rangle = 0\}$ . Llamaremos *cilindro de visión* y *curva de visión*  $C_u, \xi_u$  a los conjuntos  $\text{Fr}P_u^{-1}(K)$  y  $\text{Fr}K \cap C_u$ , respectivamente.

*DEFINICIÓN.* Sean  $K \subset R^n$  un cuerpo convexo,  $p \notin K$  y  $P : R^n \rightarrow \Pi$  la proyección central desde  $p$  sobre el hiperplano  $\Pi$ . Llamaremos *cono de visión* y *curva de visión finita*  $D_p, \zeta_p$  a los conjuntos  $\text{Fr}P^{-1}(K)$  y  $\text{Fr}K \cap D_p$ , respectivamente.

Diremos que un cuerpo convexo tiene un centro  $M$  si una simetría central con respecto a  $M$  envía al cuerpo en si mismo. Para un cuerpo convexo esto significa que cada cuerda a través de  $M$  es bisectada por  $M$ .

Una excelente referencia para conocer, de una manera amplia, completa y profunda, propiedades de cuerpos convexos es [20]

## 1.2 Caracterizaciones del Elipsoide.

A principios de siglo existían varias interesantes caracterizaciones del elipsoide. Al lector interesado lo remitimos a [7 pag. 90 y 93] [12], [13] [14] y [16]. Algunas de tales caracterizaciones pueden resumirse en el siguiente teorema.

*TEOREMA 1.* Sea  $K \subset R^3$  un cuerpo convexo. Las siguientes condiciones son equivalentes

- 1)  $K$  es un elipsoide.
- 2) Cualesquiera dos secciones transversales paralelas de  $K$  son homotéticas.
- 3) Toda sección transversal de  $K$  tiene un centro.
- 4) La curva de visión  $\xi_u$ ,  $u \in S^2$  esta en un hiperplano.
- 5) Para toda familia de cuerdas paralelas de  $K$ , los puntos medios estan en un plano.
- 6) Todas las proyecciones ortogonales de  $K$  son elipses.

Observemos que la condicion 3) implica el siguiente resultado: un cuerpo convexo con la propiedad de que todas sus secciones transversales son elipses. es un elipsoide. En relación a esto. nosotros probaremos, haciendo uso de  $5 \implies 1$  el cual es valido en el caso plano, que si un cono tiene una sección transversal que es una elipse, entonces todas sus secciones (acotadas) son elipses.

En [19] C.A. Rogers conjetura que si la condición 3) en el Teorema 1 se debilita de tal manera que cada plano a traves de un punto  $p$  intersecta al cuerpo convexo en una sección, la cual es o vacía o centralmente simétrica con respecto a algún punto, no necesariamente coincidente con  $p$ , entonces es posible asegurar que el cuerpo es un elipsoide. Un punto con la anterior propiedad es llamado *pseudo-centro* de  $K$ . También en [19] Rogers prueba que un cuerpo con un pseudo-centro tiene un centro, i.e. tiene lugar el siguiente teorema.

*TEOREMA 2* Sea  $K \subset R^3$  un cuerpo convexo con la propiedad de que  $p \in R^3$  es un pseudo centro de  $K$ . Entonces  $K$  es centralmente simetrica.

Un pseudo centro  $p$  de un cuerpo convexo  $K$  es llamado un *falso centro* de  $K$

si  $K$  no es centralmente simétrico en  $p$ .

Poco tiempo despues P.W. Aitchison, C.M. Petty y C.A. Rogers. [1] dieron una respuesta positiva a la conjetura de Rogers con el siguiente teorema:

**TEOREMA 3.** *Si  $K \subset R^3$  un cuerpo convexo y  $p \in \text{int}K$  es un falso-centro, entonces  $K$  es un elipsoide.*

Finalmente, en [15] D.G. Larman demuestra el anterior teorema en toda su generalidad al eliminar la condición de que el falso-centro pertenesca al interior de  $K$ .

Nosotros vamos a establecer y demostrar, en el Teorema 6, una version para conos del teorema del falso-centro.

Esta fue probada inicialmente por W. Süss para el espacio tridimensional y posteriormente el caso general por G. D. Chakerian [8]. Aquí ofrecemos una demostración que es en cierta medida original puesto que intervienen en esta los centros proyectivos.

### 1.3 Un Teorema Elemental para Conos Elípticos.

**DEFINICIÓN.** Diremos que un cono  $C \subset R^n$  es un cono elíptico si existe un hiperplano  $\pi \subset R^n$  tal que  $\pi \cap C$  es una elipse.

**TEOREMA 4.** *Sea  $\Sigma_p \subset R^3$  un cono elíptico. Entonces toda sección acotada de  $\Sigma_p$  es una elipse.*

*Demostración*

Como  $\Sigma_p$  es un cono elíptico existe el plano  $H$  para el cual  $E = H \cap \Sigma_p$  es una elipse. Sea  $H'$  un plano que pasa por  $p$  y  $H' \perp \Sigma_p$ . Para demostrar que

$\Pi_1 \cap \Sigma_p$  es una elipse, donde  $\Pi_1$  es un plano paralelo a  $\Pi_2$ , usaremos el Teorema 1 inciso 5).

Sea  $u$  una dirección paralela a  $\Pi_1$ . Consideremos las rectas  $h$  y  $l$  tales que  $h = \Pi_2 \cap \Pi$ ,  $p \in l \subset \Pi_2$  y  $l$  es paralela a  $u$  (vea fig. 1)

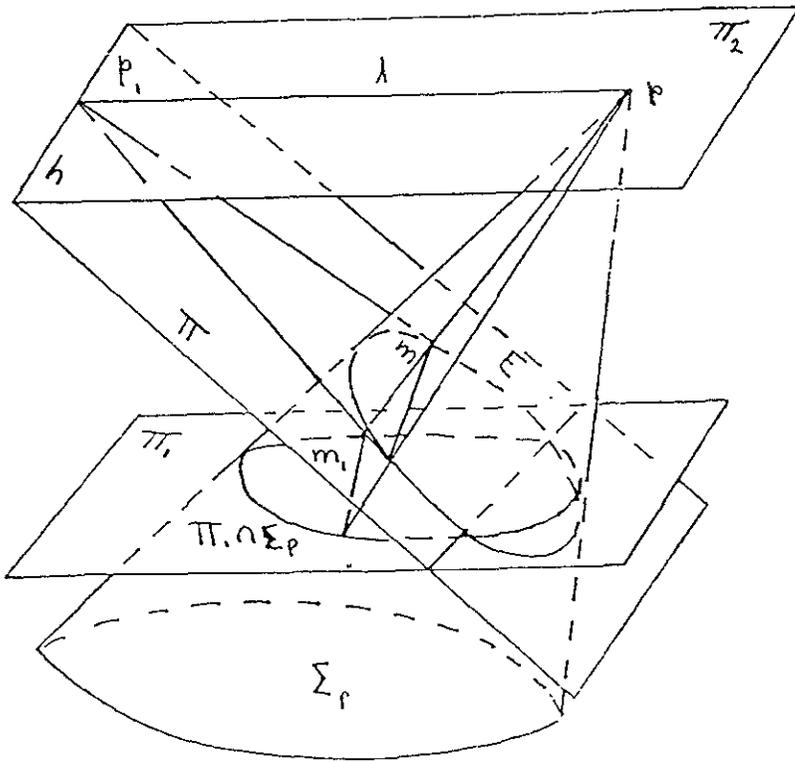
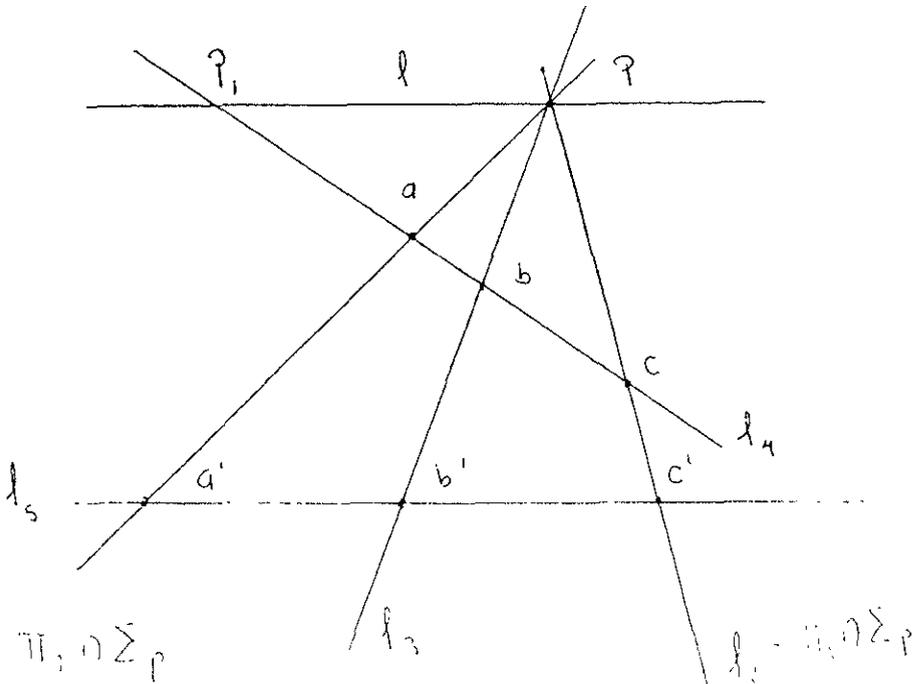


fig 1

El haz de planos que pasa por la recta  $l$ ,  $\Phi$ , intersecta al plano  $\Pi$  en un haz de rectas que tienen como centro  $p_1$ , y al plano  $\Pi_1$  en una familia de rectas paralelas a la recta  $l$ . Sea  $m$  la polar de  $p_1$  con respecto a la elipse  $E$  (vease la sección 1.5 para ver la definición de polar). La proyección de  $m$ ,  $m_1$  sobre el plano  $\Pi_1$  desde el punto  $p$  es una recta. Vamos a demostrar que  $m_1$  es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de  $\Pi_1 \cap \Sigma_p$  paralelas a  $l$ . Sea  $\Pi_3 \in \Phi$ , consideremos el haz de rectas  $\{l, l_1, l_2, l_3\}$  con vértice en  $p$  contenido en  $\Pi_3$ , donde  $l_1$  y  $l_2$  son las dos intersecciones de  $\Pi_3$  con  $\Sigma_p$  y  $l_3$  que es la intersección de  $\Pi_3$  con el plano determinado por  $m$  y el punto  $p$ . Dicho haz es cortado por la recta  $l_4 = \Pi \cap \Pi_3$  y  $l_5 = \Pi_1 \cap \Pi_3$ . Los puntos  $a = l_1 \cap l_4$ ,  $b = l_2 \cap l_4$ ,  $c = l_3 \cap l_4$  y  $p_1$  son conjugados armónicos (fig.2).



Por lo tanto, la transversal  $l_5$  divide  $\{l, l_1, l_2, l_3\}$  en una hilera de puntos armónicos. Como  $l_5$  es paralela a  $l$  (dado que  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  son paralelos y  $l \subset \Pi_2$  entonces  $l$  es paralela a  $\Pi_1$ ),  $b' = l_3 \cap l_5$  es el punto medio del segmento determinado por los puntos  $a' = l_1 \cap l_5$  y  $c' = l_2 \cap l_5$ . Observemos que como  $p, b, b' \in l_3$  y  $b' \in l_5 \subset \Pi_1$ ,  $b'$  es la proyección de  $b$  desde  $p$  sobre  $\Pi_1$ . De lo anterior y del hecho de que  $b \in m$  concluimos que  $b' \in m'$ . Al variar  $\Pi_3$  en la familia  $\Phi$ ,  $b$  se mueve en  $m$  y  $b_1$  se mueve en  $m_1$ , es decir, los puntos medios de las cuerdas de  $\Pi_1 \cap \Sigma_p$  paralelas a  $l$  están alineados. En virtud de 5) del Teorema 1,  $\Pi_1 \cap \Sigma_p$  es una elipse. ■

#### 1.4 El Teorema del Falso-Centro para Conos.

Sea  $\Phi \subset R^n$  un cuerpo convexo y  $u \in S^{n-1}$  un vector. Llamaremos *diámetro* (o *cuerda diametral*) en la dirección  $u$  a la cuerda de  $\Phi$  paralela a  $u$ , de máxima longitud. Esta será denotada por  $t(u)$ . Nos referimos a el supremo de las longitudes de las cuerdas diametrales de  $\Phi$  como *el diámetro de  $\Phi$* . Es fácil ver que en los extremos de  $t(u)$  existen planos soportes de  $\Phi$  que son paralelos. En particular, si  $n = 2$  y  $\Phi$  es una figura convexa, con frontera regular (i.e., por cada punto frontera de  $\Phi$  existe una única línea soporte) y orientada lo anteriormente dicho nos permite definir el mapeo  $g_L: S^1 \rightarrow S^1$  donde  $g_E(u)$  es la dirección paralela a las líneas soportes en los extremos de  $t(u)$  que es consistente con la orientación de  $\Phi$ .

Para una figura convexa arbitraria no necesariamente es cierto que  $g_\Phi(g_\Phi(u)) = -u$ . Sin embargo, resulta que las elipses sí tienen esta propiedad. En efecto, basta observar que un elipse es la proyección de un círculo y en este último se satisface

la propiedad mencionada. En este caso las cuerdas  $t(u)$  y  $t(g_E(u))$  se llaman *diámetros conjugados*. Es interesante señalar que la propiedad en cuestión no caracteriza a la elipse, i.e., existen figuras convexas diferentes de la elipse para las cuales  $g_{\Phi}(g_{\Phi}(u)) = u$  para toda  $u \in S^2$  [18].

*TEOREMA 5 (Soltan):* Para toda figura convexa  $\Psi \subset R^2$  con frontera regular existen dos cuerdas diametrales de  $\Psi$ ,  $k_1$  y  $k_2$ , tales que  $k_1$  y  $k_2$  son diámetros conjugados.

*OBSERVACION.* Si la figura en cuestión es centralmente simétrica, el punto de intersección de las cuerdas diametrales  $k_1$  y  $k_2$  es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo determinado por las líneas soportes, que es el centro de simetría de la figura.

*TEOREMA 6.* Sea  $\Sigma_p \subset R^3$  un cono convexo con la propiedad de que todas sus secciones transversales que son acotadas son figuras (convexas) centralmente simétricas. Entonces  $\Sigma_p$  es un cono elíptico.

Demostración:

Es fácil demostrar que todas las secciones acotadas de  $\Sigma_p$  son figuras estrictamente convexas y tienen frontera regular.

Sea  $\Pi_1$  un plano por  $p$  y tal que  $\Pi_1 \cap \Sigma_p = p$ . Sea  $\Pi$  un plano paralelo a  $\Pi_1$ . Las hipótesis del Teorema Especial son satisfechas por la sección  $\Pi \cap \Sigma_p$ . Denotemos por  $G$  el paralelogramo determinado por las líneas soportes paralelas a  $k_1$  y  $k_2$  de acuerdo con la notación del Teorema Especial. Sean  $p_1, p_2$  y  $p'_1, p'_2$  los puntos de contacto de dichas líneas con  $\Pi \cap \Sigma_p$ , respectivamente. En virtud de la observación

existe una elipse  $E$  tal que  $E$  está inscrita en  $G$  y hace contacto con las aristas de  $G$  en los puntos  $p_i$  y  $p'_i$ ,  $i=1,2$ . Construyamos el cono  $\Gamma$  con directriz  $E$  y vértice en el punto  $p$  (fig. 3). Vamos a demostrar que los conos  $\Gamma$  y  $\Sigma_p$  son iguales. Para tal fin, veremos que toda generatriz de  $\Gamma$  lo es también de  $\Sigma_p$ .

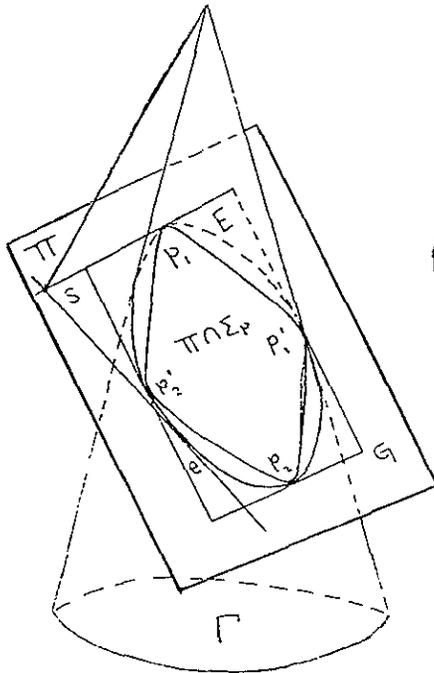


fig. 3

Tomemos un punto  $e \in E$ ,  $p_i \neq e \neq p'_i$ . A partir de la forma en que fue tomada la figura  $E$  podemos asegurar que  $\Gamma$  y  $\Sigma_p$  poseen cuatro planos soportes comunes, los determinados por las aristas de  $G$  y  $p$ . Sean  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi'_1$  y  $\Pi'_2$  las designaciones para tales planos. La recta soporte de  $E$  en  $e$ ,  $t$ , intersecciona a las aristas de  $G$  y por lo tanto a los planos  $\Pi_i$  y  $\Pi'_i$ ,  $i = 1, 2$ . Consideremos la interseccion  $s = \Pi_1 \cap t$ . La recta  $s$  determinada por  $s \times p$  es una línea que tiene interseccion vacía con el interior de  $\Gamma$  y  $\Sigma_p$ . El plano  $\Pi_1$  determinado con  $s \times p$  es un plano soporte de

$\Gamma (\Pi_1 \cap \Pi_3 = x)$ . Rotemos el plano  $\Pi$  teniendo como eje la arista de  $G$  en la cual está el punto  $p'_2$  hasta que  $\Pi$  sea paralelo a  $x$ . Llamemos  $\Pi^*$  a  $\Pi$  en ésta posición. Las secciones  $\psi = \Pi^* \cap \Gamma$ ,  $\phi = \Pi^* \cap \Sigma_p$  son una elipse y una figura centralmente simétrica, respectivamente, en virtud del Teorema 4 y de la hipótesis.  $\psi$  y  $\phi$  tienen líneas soportes comunes, en la dirección paralela a  $k_2$ , en los puntos, también comunes a ambas curvas,  $a = p'_2 = \Sigma_p \cap \Pi'_2 \cap \Pi^*$  y  $b = \Sigma_p \cap \Pi'_1 \cap \Pi^*$ . Esto se sigue de que, por un lado,  $\Gamma$  y  $\Sigma_p$  tienen en común las generatrices  $\Sigma_p \cap \Pi'_1$  y  $\Sigma_p \cap \Pi'_2$  y de que, por otra parte,  $\Pi^*$  intersecta a  $\Pi'_1$  y a  $\Pi'_2$  en rectas paralelas. Por lo tanto, la línea  $ab$  es cuerda diámetro tanto de  $\psi$  como de  $\phi$  en la dirección  $l_2$  por lo que el punto medio,  $c$ , de  $ab$  es el centro de simetría de ambas curvas.

Fijemos nuestra atención en las rectas paralelas  $l_{1q} = \Pi_1 \cap \Pi^*$  y  $l_{3q} = \Pi_3 \cap \Pi^*$ . Es claro que  $l_{1q}$  es línea soporte común a  $\psi$  y  $\phi$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  las generatrices de  $\Gamma$  determinadas por  $p$  y los puntos  $p_1$  y  $e$  respectivamente. En virtud de la convexidad estricta de las secciones acotadas de  $\Gamma$ , la única generatriz de  $\Gamma$  contenida en  $\Pi_1$  es  $\alpha$  y la única generatriz de  $\Gamma$  contenida en  $\Pi_3$  es  $\beta$ . Como ni  $\alpha$  puede ser paralela a  $l_{1q}$  ni  $\beta$  puede ser paralela a  $l_{3q}$  pues en caso contrario, puesto que  $l_{1q}$  y  $l_{3q}$  son paralelas a  $x$ , se tendría que  $\alpha$  o  $\beta$  son paralelas a  $x$  lo cual contradice el hecho de que  $p \notin x$  están bien definidos los puntos  $k = l_{1q} \cap \alpha$  y  $k' = l_{3q} \cap \beta$ . Luego,  $k = l_{1q} \cap \alpha \subset l_{1q} \cap \Gamma = \psi \vee k = l_{1q} \cap \alpha \subset l_{1q} \cap \Sigma_p = \phi$ , o i,  $k \in \psi \cap \phi$  además  $l_{1q}$  es línea soporte común de  $\psi$  y  $\phi$ . Ahora como  $\phi$  y  $\psi$  tiene centro común  $\vee k \in \phi \cap \psi$ ,  $k'' \in \psi \cap \phi$ , también donde  $k''$  es la reflexión de  $k$  en  $c$ . Esto equivale a decir que la línea determinada por  $p \vee k'' \in c$  es una generatriz

común de  $\Gamma$  y  $\Sigma_p$ . Para finalizar observemos que  $l_{3g}$  es la línea soporte  $\Psi$  paralela a  $l_{1g}$  y, por lo tanto,  $k' = l_{3g} \cap \beta \subset l_{3g} \cap \Gamma = k''$ , i.e.,  $\beta = \gamma$  de donde  $e \in \Sigma_p$ . ■

### 1.5 El Teorema de Hübinger-Burton-Larman.

Nosotros designamos como *la polar* de un punto relativa a un cuerpo convexo, al lugar geométrico de puntos del cuarto punto armónico de este punto y los dos puntos de intersección del cuerpo y una línea a través del punto. Es bien conocido el resultado que afirma que las polares de los elipsoides son subespacios lineales. En particular, en el caso plano, son rectas. En [4 pag. 151] Bonnesen y Fenchel afirman que T. Kojima [12] prueba lo siguiente: si las polares de todos los puntos de una línea recta fija son ellas mismas rectas entonces la curva es una elipse. También en [4] se dice "...además Kojima encuentra teoremas relacionados en el espacio...". Hasta el momento nosotros no sabemos en que consisten tales teoremas. Por lo tanto, presentamos, en el Teorema 7, una prueba del resultado análogo al de Kojima para el caso tridimensional.

Para propósitos de mejor exposición introduzcamos unas definiciones:

**DEFINICIÓN:** Diremos que una familia  $F$  de cuerdas contenidas en un cuerpo convexo  $K \subset R^3$  tiene la propiedad *K-chipocluda* si existe un plano  $H$  de tal suerte que para cada  $l \in F$  existen planos soportes de  $K$  en los extremos de  $l$  que se intersectan en una línea contenida en  $H$ .

#### *EJEMPLO*

Las cuerdas diametrales de todo cuerpo convexo  $K \subset R^3$  poseen la propiedad *K-chipocluda* donde el plano  $H$  correspondiente es el plano tangente

*DEFINICIÓN:* Sean  $F_1$  y  $F_2$  dos familias de cuerdas contenidas en los cuerpos convexos  $K_1 \subset R^3$  y  $K_2 \subset R^3$  que poseen la propiedad  $K_1$ -chipocluda y  $K_2$ -chipocluda, respectivamente. Diremos que  $F_1$  y  $F_2$  están conectadas si existe una transformación proyectiva  $\Omega$  de tal modo que  $\Omega(F_1)=F_2$  y  $\Omega(K_1)=K_2$ .

*DEFINICIÓN:* Sean  $K \subset R^n$  un cuerpo convexo y  $F$  una familia de cuerdas de  $K$ , concurrentes y con la propiedad  $K$ -chipocluda. Llamaremos al punto de concurso *centro proyectivo*.

La situación descrita en la definición anterior es un caso particular de la primera definición de esta sección. El plano  $H$  de esta última será denotado por  $H_p$  y será llamado *plano armónico* (*línea armónica*, en el caso plano) en aquella.

El nombre de centro proyectivo proviene del hecho de observar que es posible enviar el centro proyectivo, mediante una transformación proyectiva, en el centro de simetría de un cuerpo centralmente simétrico. Efectivamente, después de efectuar la transformación proyectiva  $T$  que envía el plano de las  $H_p$  en el plano al infinito,  $T(p)$  es un punto interior del cuerpo imagen  $T(K)$  para el cual toda cuerda a través de él es una cuerda diametral de  $T(K)$  y de acuerdo con el Teorema 1 en [],  $T(K)$  es centralmente simétrico.

*TEOREMA 7* Sean  $K, H \subset R^3$  un cuerpo convexo y un plano  $\Omega$  el conjunto de centros proyectivos de  $K$ . Si  $\Omega \neq \emptyset$  y  $\Omega \cap H \cap K = K$  es un chipsonde.

*Demostación*

Es fácil ver que  $K$  es estrictamente convexo y tiene frontera regular.

Sea  $l$  una línea  $l \subset H$  tal que  $l \cap K \neq \emptyset$ . Primeramente observemos que

el conjunto de planos  $\{H_p\}$ ,  $p \in l$ , es un haz de planos que pasan por una línea, llamémosla  $L$ , la cual es la intersección de los planos soportes de  $K$  en los extremos de  $l$ . Ahora vamos a probar que todas las curvas de visión finitas  $\zeta_q$  son planas para todo  $q \in L$ . Sea pues  $q$  un punto en la línea  $L$  y  $\zeta_q$  su respectiva curva de visión finita. Consideremos un punto  $r \in \zeta_q$ . Designemos  $H_r$  al plano determinado por la línea  $l$  y el punto  $r$  y sea  $T_r = H_r \cap K$ . Debemos probar que  $T_r = \zeta_q$ . Sea  $s \in \text{Fr}T_r$ ,  $s \neq r$ . Veamos que el planosoporte de  $K$  en  $s$  también pasa por  $q$ . Existen dos posibilidades:

- i)  $r$  y  $s$  están en semiplanos distintos de  $H_r$  de los dos determinados por  $l$ .
- ii) El punto  $s$  está en el mismo semiplano, de los dos determinados por  $l$  en  $H_r$ , que el punto  $r$ .

Veamos el caso i). Consideremos la línea  $t$  determinada por  $r$  y  $s$ . Claramente,  $p' = t \cap l$  es un centro proyectivo. Consideremos la transformación proyectiva  $\omega$  que envía  $H_{p'}$  al plano al infinito de  $R^3$ . Dado que  $q \in L \subset H_{p'}$ ,  $\omega(D_q)$  es un cilindro que contiene  $\omega(K)$  y  $\omega(\zeta_q) = \text{Fr}\omega(K) \cap \text{Fr}\omega(D_q)$  es una curva de visión con la propiedad que  $\omega(r)$  está en ella,  $\omega(p')$  es el centro de simetría de  $\omega(K)$ . De aquí que el segundo punto de intersección,  $h$ , de la línea determinada por  $\omega(r)$  y  $\omega(p')$  con  $\omega(K)$ , pertenece a  $\omega(D_q)$ , i.e.  $h \in \omega(\zeta_q)$  i.e. el plano soporte de  $K$  en  $h$ ,  $\Pi$ , es paralelo al plano soporte en  $\omega(r)$ . Por otro lado sabemos que  $h \in \omega(s)$ . Así, como consecuencia de los dos hechos anteriores  $\omega^{-1}(\Pi)$  que es el plano soporte de  $K$  en  $s$  y pasa por  $q$  es decir  $s$  está en  $\zeta_q$ . Por lo tanto  $\zeta_q$  es plana.

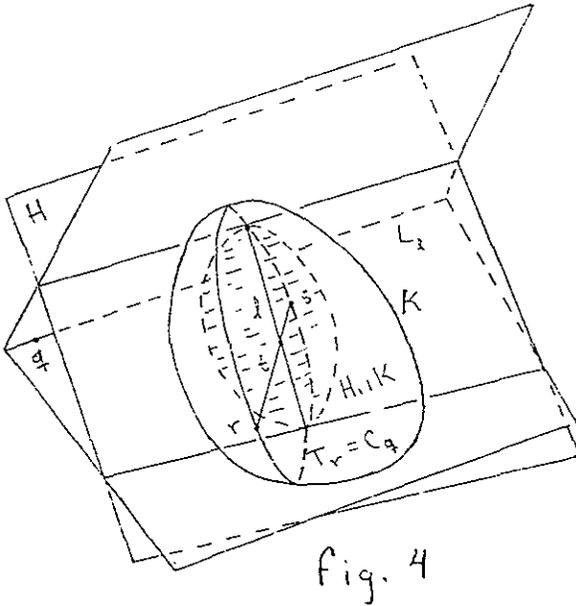


fig. 4

Vemos que el caso ii) se resuelve fácilmente de lo anterior.

Finalmente concluimos variando  $l$  por  $p', l \subset H$ , que todas las secciones transversales de  $K$  por  $p'$  son curvas de visión, ya sea finitas o no. Por lo tanto,  $\omega(K)$  tiene todas sus curvas de visión planas y en virtud de la conocida caracterización de Blaschke  $\omega(K)$  es un elipsoide i.e.,  $K$  es un elipsoide. ■

**DEFINICIÓN** Un bloque en  $R^n$ , en la dirección  $u \in S^{n-1}$  es un conjunto de la forma  $\{x \in R^n : \delta \leq \langle x, u \rangle \leq \alpha\}$

El bloque se dice *degenerado* si  $\alpha = \delta$  y en este caso es precisamente el hiperplano paralelo a el subespacio  $H_u = \{x \in R^n : \langle x, u \rangle = 0\}$

Una interesante aplicación del Teorema 7 fue dada por I. L. Arocha, I. Montenegro y R. Morales en [17] al demostrar el primer resultado en el siguiente lema

la solución de la conjetura de Gruber, el Teorema de Hübinger-Burton-Larman:

**TEOREMA 8.** *Sea  $K \subset R^n$ ,  $n \geq 3$ , un cuerpo convexo que contiene al origen y sean  $S_1, \dots, S_{n-1}$  bloques, donde al menos uno de ellos es no degenerado, en las direcciones linealmente independientes  $u_1, \dots, u_{n-1}$ , respectivamente, tal que  $K \cap S_i$  es vacío. Supongase que para cada punto  $P \in S_i$ , la proyección de  $K$  desde  $P$  sobre  $H_{u_i}$  es centralmente simétrica,  $1 \leq i \leq n-1$ . Entonces  $K$  es un elipsoide.*

### 1.6 Las Sombras de un Elipsoide.

*Demostración de 1)  $\iff$  6) del Teorema 1.*

Sean  $K, \Pi \subset R^n$  un elipsoide y un plano y  $P: R^n \rightarrow \Pi$  la proyección ortogonal sobre  $\Pi$ . Vamos a probar que  $K' = P(K)$  es una elipse. Para tal propósito veremos que cada  $x' \in \text{int}K'$  es centro proyectivo de  $K'$ . En otras palabras, veremos que la polar de cada punto interior de  $K'$  es una recta. En virtud del Teorema Kojima [vease sec. 1.5], se tendrá el resultado deseado. Sea  $x' \in \text{int}K'$  y sean  $l', m', n'$  tres líneas por  $x'$ . Sean  $l_1, l_2, m_1, m_2$  y  $n_1, n_2$  las líneas soportes de  $K'$  por los extremos de  $l' \cap \text{Fr}K', m' \cap \text{Fr}K'$  y  $n' \cap \text{Fr}K'$ , respectivamente. Sea  $t$  la línea determinada por  $\alpha = l_1 \cap l_2$  y  $\beta = m_1 \cap m_2$ . Para obtener nuestro resultado será suficiente probar que  $\gamma = n_1 \cap n_2$  pertenece a  $t$ . En efecto, pues en virtud de la arbitrariedad de  $n$ , tendríamos que  $t$  es la línea armónica de  $x'$ .  $P^{-1}(K')$  es la curva de visión de  $K$  en la dirección  $\Pi^\perp$ . Puesto que  $K$  es un elipsoide en virtud de B) del Teorema 1, existe un plano  $H$  tal que  $H \cap K = P^{-1}(K')$ . Consideremos las rectas  $l = P^{-1}(l') \cap H, m = P^{-1}(m') \cap H, n = P^{-1}(n') \cap H$  y el punto  $x = P^{-1}(x') \in H$ . Claramente  $x \in \text{int}K$ . Luego, como todos los puntos interiores,

de un elipsoide son centros proyectivos,  $x$  es un centro proyectivo de  $K$  y, por lo tanto, existe un plano  $A$  que es el plano armónico de  $K$  con respecto a  $x'$ . Por otro lado, como  $P^{-1}(l_1)$  y  $P^{-1}(l_2)$  son planos soportes de  $K$  en los extremos de  $l$ ,  $P^{-1}(l_1) \cap P^{-1}(l_2) \subset A$ , en base a la definición de centro proyectivo. Análogamente, concluimos que  $P^{-1}(m_1) \cap P^{-1}(m_2)$ ,  $P^{-1}(n_1) \cap P^{-1}(n_2) \subset A$ . De aquí, puesto que  $\alpha \in P^{-1}(l_1) \cap P^{-1}(l_2)$  y  $\beta \in P^{-1}(m_1) \cap P^{-1}(m_2)$ , tenemos que  $\alpha, \beta \in A$  y, por lo tanto,  $t \in A$ , i.e.,  $t = A \cap \Pi$ . Combinando los dos hechos anteriores tenemos  $\gamma = P^{-1}(n_1) \cap P^{-1}(n_2) \cap \Pi \subset A \cap \Pi = t$ .

Ahora probaremos la afirmación recíproca. Para esto necesitamos el siguiente sencillo, pero útil, resultado. La demostración la omitimos por ser trivial.

*LEMA.* Sea  $K \subset R^3$  un cuerpo estrictamente convexo con frontera regular. Entonces, para  $u \in S^2$ , existe una única cuerda diametral.

El cuerpo  $K$  es estrictamente convexo. En efecto, supongamos que no ocurre así, i.e. existe un intervalo  $I \subset \text{Fr}K$ . Sea  $x \in I$ . Puesto que  $K$  es convexo existe un plano soporte de  $K$  en  $x$ . Consideremos la proyección ortogonal  $P_u$  tal que la dirección  $u$  es paralela a el plano soporte de  $K$  en  $x$  y no paralela a la dirección determinada por  $I$ . Entonces,  $P_u(K)$  es una elipse que tiene un intervalo en su frontera lo cual es absurdo. Luego, el cuerpo  $K$  es estrictamente convexo.

De manera similar se prueba que  $K$  tiene frontera regular.

Sea  $l$  una cuerda diametral de  $K$  y  $H_1, H_2$  los planos soportes de  $K$  en los extremos  $p_1, p_2$  de  $l$ . Sea  $H_3$  el plano paralelo a  $H_1$  que pasa por el punto  $p_1$ , el punto medio del segmento determinado por  $p_1$  y  $p_2$ . Vamos a probar que para cada

punto  $x \in \Pi_3 \cap \text{Fr}K$ , el plano soporte de  $K$  en  $x$ ,  $\Pi_x$ , es paralelo a  $l$ . Sea  $x \in \Pi_3 \cap \text{Fr}K$ . El cilindro  $C_u$ , con  $u$  paralela a  $\Pi_x \cap \Pi_1$ , es un cilindro elíptico y, por lo tanto,  $E = \Pi_4 \cap C_u$  es una elipse para todo plano  $\Pi_4$  que contiene a  $l$  y es no paralelo a  $u$  (Teorema 4).  $\Pi_4$  intersecta a los planos  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$  en las líneas  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  respectivamente.  $c = \Pi_x \cap \Pi_4$  es una línea soporte de  $E$  en el punto  $r = (\Pi_x \cap \Pi_3 \cap \Pi_4) \in b_3$  (esto se sigue de que  $\Pi_x$  es plano soporte de  $K$ , luego lo es de  $C_u$  y de aquí que  $\Pi_x \cap \Pi_0$  sea línea soporte de  $\Pi_0 \cap C_u$  para todo  $\Pi_0$  no paralelo a  $u$ . Además lo es en el punto  $r$  por que  $r, x \in P_u^{-1}(x)$ ).

La línea  $b_3$  es diámetro conjugado de la línea  $p_1p_2$  en la elipse  $E$  por lo que la línea  $c$  debe ser paralela a  $l$ . Así que  $\Pi_x$  contiene un línea paralela a  $l$ . Luego  $\Pi_x$  es paralelo a  $l$ . Como  $x$  es arbitrario en el conjunto  $\Pi_3 \cap \text{Fr}K$  podemos concluir que la curva de visión en la dirección determinada por  $l$  es igual  $\Pi_3 \cap \text{Fr}K$  y, por lo tanto, plana.

Finalmente, puesto que hay una cuerda diametral de  $K$  para cada dirección, en virtud de la convexidad estricta de  $K$ , todas las curvas de visión de  $K$  son planas. De aquí (gracias al Teorema 1 inciso 4), tenemos que  $K$  es un elipsoide ■

# Capítulo 2

## Secciones y Proyecciones.

### 2.1 La Prueba del Teorema de Rogers.

En [19] se presentan dos interesantes Teoremas, que a continuación enunciamos, los cuales pueden ser considerados como el inicio del “renacimiento”, en la Teoría de Convexidad, del estudio de las propiedades de los cuerpos convexos mediante la información contenida ya sea en sus secciones transversales o en sus proyecciones ortogonales.

*TEOREMA 9. Sean  $K_1, K_2 \subset R^n$  cuerpos convexos y  $p_1, p_2$  puntos interiores de  $K_1$  y  $K_2$ , respectivamente. Si cada 2-dimensional sección de  $K_2$  a través de  $p_2$  es directamente homotética a la sección paralela de  $K_1$  a través de  $p_1$ , entonces  $K_2$  es directamente homotética a  $K_1$ .*

*TEOREMA 10. Si todas las proyecciones ortogonales sobre 2-dimensional plano de un  $n$ -dimensional cuerpo  $K_2$  son directamente homotéticas a las correspondientes proyecciones de un cuerpo convexo  $K_1$ , entonces  $K_2$  es directamente homotético a  $K_1$ .*

En ésta dirección se han obtenido resultados mas poderosos como el obtenido por el matemático soviético V. P. Golubyatnikov [10]

*TEOREMA 11 Si  $K_1$  y  $K_2$  son cuerpos convexos contenidos en  $R^3$  tales que sus proyecciones sobre todo 2-dimensional plano son propiamente congruentes (esto es ellas pueden superponerse por un movimiento de este plano que no sea*

orientación) y estas proyecciones no poseen simetrías con respecto a rotaciones, entonces  $K_1$  y  $K_2$  pueden ser superpuestas por ya sea desplazamiento paralelo o por simetría central.

Debemos señalar que este teorema [10] tiene una formulación más general que la expuesta por nosotros, no obstante, dicha formulación comprende no solo conjuntos convexos y, por lo tanto, rebasa los intereses del presente trabajo.

## 2.2 Los Cuerpos de Petty-Mckinney

Ahora, como un Corolario del Teorema 9, mostraremos a continuación el Teorema 2.

### *Demostración del Teorema 2.*

Tomemos  $K_1 = K$  y  $K_2 = -K$ , la reflexión de  $K$  en el origen  $o$ . Por la simetría central de las 2-dimensionales secciones de  $K$  por  $p$ , las 2-dimensionales secciones de  $K_1$  y  $K_2$  son directamente homotéticas. Por lo tanto, en virtud del Teorema 9,  $K_1$  y  $K_2$  son directamente homotéticos. Observemos adicionalmente que  $K_1$  y  $K_2$  tienen el mismo diámetro. Luego,  $K = K_1 = -K_2$  tiene un centro de simetría ■

Naturalmente, los anteriores teoremas nos sugieren la siguiente:

### *PROBLEMA .*

*¿Es verdad que si dos cuerpos convexos tienen la propiedad de que sus proyecciones ortogonales en la dirección  $u$ , sobre un 2-dimensional subespacio son directamente homotéticas después de haber sido rotada una de estas un ángulo  $\alpha(u)$  alrededor del origen, y esto es válido para toda  $u$ , deben ser tales cuerpos homotéticos.*

La solución parcial a este problema fue obtenida por C. M. Petty y J. R. Mckimney [17] quienes muestran, al exhibir un contraejemplo, que, contrariamente a los dos primeros resultados, el Problema 1 tiene respuesta negativa cuando  $\alpha(u)$  es constante para toda  $u$  e igual a  $\pi/2$ . De manera más precisa, en [17] es demostrado que hay un par  $K_1, K_2$  de cuerpos convexos centrados (centralmente simétricos con centro en el origen) en  $R^n, n \geq 3$ , tal que para cada subespacio  $S$  de dimensión dos la proyección  $K_1 | S$  de  $K_1$  sobre  $S$  es directamente homotético a una rotación de  $\pi/2$  alrededor del origen de  $K_2 | S$ , sin que  $K_1$  y  $K_2$  sean directamente homotéticos. Más aún, el Teorema 3.1 [17] caracteriza todos los pares  $K_1, K_2$  con esta propiedad.

Aquí es conveniente observar los siguientes dos hechos. Por un lado, ellos caracterizan dichos cuerpos por el hecho de que tienen la propiedad de todas las cajas (paraleleptos rectangulares) que los circunscriben poseen volumen constante (haciendo uso de un poderoso Teorema de R. Schneider relativo a esféricos armónicos). Por otra parte, la interrogante continúa, hoy día, sin respuesta para todos los ángulos diferentes de  $\pi/2$ . esto es . ¿es verdad que el único contraejemplo posible para el Problema 1, bajo la hipótesis de que  $\alpha(u)$  es constante para toda  $u$  en  $S^2$ , es el de Petty-Mckimney?

El ejemplo de Petty-Mckimney demuestra que las hipótesis en los teoremas anteriores de que las proyecciones (o secciones) son directamente homotéticas no pueden ser reemplazadas por la suposición de que las proyecciones sean similares. Hay ciertamente una clara diferencia entre homotecia directa y similitud con

respecto a proyecciones; proyecciones de cuerpos directamente homotéticos son directamente homotética, mientras que un tetrahedro y una rotación de este no van a tener generalmente proyecciones similares. Sin embargo, el ejemplo de Petty-Mckinney es extremadamente sorprendente, y es necesario entendeirse mejor.

Finalmente, R. J. Gardner and A. Volcic [9] muestran que en el ejemplo de Petty-Mckinney hay pares  $K_1, K_2$  similares (pero no directamente homotéticos) y que hay pares que no son afinmente equivalentes. También prueban que tales pares son afinmente equivalentes si y solo si estos son similares, y caracterizan cuando esto ocurre.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] P. W. Aitchison, C. M. Petty and C. A. Rogers: A convex body with a false centre is an ellipsoid, *Mathematika*, 18 (1971), 50-59.
- [2] J. L. Arocha, L. Montejano and E. Morales. A quick proof of Hobinger-Burton-Larman's Theorem. *Geometriae Dedicata*, 63 (1996), 331-335.
- [3] G. Bianchi, P. Gruber: Characterizations of ellipsoids, *Arch. Math.*, Vol. 49, 344-350 (1987).
- [4] T. Bonnesen and W. Fenchel. *Theorie der Konvexen Körper*. Springer. Berlin, 1934.
- [5] G. R. Burton: Section of convex bodies, *J. London Math. Soc.* (2), 12 (1976), 331-336.
- [6] G. R. Burton and D. G. Larman: On a problem of Höbinger. *Geometriae Dedicata* 5 (1976). 31-42.
- [7] H. Busemann. *The geometry of geodesics* (New York, 1955)
- [8] G. D. Chakerian: The affine image of a convex body of constant breadth, *Israel J. of Math.*, 3, No. 1 (1965), 19-22.
- [9] R. J. Gardner and A. Volcic. Convex bodies with similar projections.
- [10] V. P. Golubyatnikov. Unique determination of visible bodies from projections. *Novosibirsk*. Translated from *Sibirskai Matematicheskii Zhurnal*, Vol.29, No. 5, pp 92-96 september-october, 1988.
- [11] P. C. Hammer. Diameter of convex bodies. *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1951) 304-306

- [12] T. Kojima: On characteristic properties of the conic and quadric. *Sci. Rep Tōhoku Univ.* Vol.8 (1919), 67-68.
- [13] T. Kubota: Über die Konvexe geschlossene Fläche. *Sci. Rep Tōhoku Univ.* Vol. 3 (1914), 277-287:
- [14]—: On the theory of closed convex surface. *Proc. London Math. Soc.* (2) Vol.14 (1915), 230-139.
- [15] D. G. Larman. A note
- [16] S. Nakagawa: On some theorems regarding Ellipsoids. *Tōhoku Math. J.* Vol. 8 (1915), 11-13
- [17] C. M. Petty , J. R. Mckinney: Convex bodies with circumscribing boxes of constant volume, *Portugaliae Mathematica* Vol.44 Fasc. 4-1987.
- [18] J. Radon: Über eine besondere Art ebener Konvexen Curve. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig Vol. 68 (1916), 241-258.
- [19] C. A. Rogers: Sections and projections of convex bodies. *Portugaliae Mathematica*, 24 (1965), 99-103.
- [20] R. Schneider Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge Univ Press. 1993.