22
2 ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL HIPERESPACIO DE CONTINUOS CON LA TOPOLOGIA PRODUCTO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

VERONICA MARTINEZ DE LA VEGA Y MANSILLA

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA.

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

1998

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

El hiperespacio de continuos con la topología producto

realizado por Verónica Martínez de la Vega y Mansilla

con número de cuenta 9157088-2, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía	
Propietario	Dra. Isabel Puga Espinosa	Isabel Puga
Propietario	Dr. Sergio Macías Alvarez	S. Macías A.
Suplente	M. en C. Alejandro Bravo Mojica	
Suplente	Dr. Raúl Escobedo Conde	

Consejo Departamental de Matemáticas
Mat. César Guevara Bravo

Tengo que agradecer tanto y a tantas personas por este trabajo que creo que la mejor forma de hacerlo. es por orden alfabético.

Primero que nada quiero agradecer a Alejandro (osea mi asesor. el Dr. Illanes, . el patrón. o como guste usted llamarle) por su apoyo incondicional. por todo el tiempo dedicado a terminar esta tesis. pero sobretodo por haber confiado en mi.

(Quiero mencionar que si su nombre no empezara con A, habría escogido otro tipo de orden para los agradecimientos).

A mis Amigas:

A Carla y Carlita Mendiburu por todo su apoyo y por siempre preguntar, "¿Cómo va la tesis?".

A Elsa y Mónica "Los anillos de Borromeo" que han estado desde el comienzo y se que estarán hasta el final. (Remember the days of the old school yard, we used to laugh a lot...)

A Emily que me abrió la puerta y me invitó a pasar a lo que hoy es una de las partes más importantes de mi vida.

A Ita,... "¿Cómo la estaremos cantando en 6 meses?", y por todas las que hemos cantado juntas.

A Fanny por los momentos que compartimos juntas por los que nunca supimos entender.

A Lore ... (tú ya sabes por qué)

A Margareta por "el cafesito Irlandes", "el cigarrito", "las llamadas desde Cuernavaca" y ... bueno esas excelentes conversaciones que SIEMPRE se le olvidaron hasta que podian ser recordadas sin problema.

A Marisa y Marimer, por todos aquellos buenos ratos en la prepa.

A Mary por preocupona y entre sus preocupaciones estar yo.

A Norma por todo eso y mucho mas.

A Paty por ser tan buena amiga a pesar de ser "mi hermana mayor".

A la Srita Campero, aunque ahorita no encuentro las palabras adecuadas para explicar TODAS las razones.

Y a Vero por todas la noches de insomnio que compartimos para terminar la tesis.

A mis Amigos:

A Adrián por esas pequeñas frases con tanto contenido que cruzamos en los pasillos.

Al Bato por la amistad que algún día compartimos.

A Benjas por sus consejos, por no querer saber nada, por su amistad y por siempre preocuparse por mi.

A Daniel y Jorge ("los únicos, verdaderos y originales Amiguitos del Bosque").

A Daniel por su amistad incondicional en todo momento a pesar de mi "carácter" y a Jorge por esas pláticas interminables en todos y cada uno de mis estados de ánimo y por SIEMPRE preocuparse por que viera TODOS LOS PUNTOS DE VISTA.

A Juancho por escucharme de principio a fin y ser tan divertido..

A Likin por su originalidad, su amistad y ternura.

A Luis Gerardo por haber estado y estar SIEMPRE aunque nunca tengamos tiempo.

A Pancho por ser el mejor de los amigos, de los hermanos y por toda la complicidad compartida cenando quesadillas en el antecomedor.

A Quico por ser un "loco del tercer piso", un pésimo hermano mayor, un excelente no maestro, un maravilloso amigo, por las porras en todo momento, especialmente para el "fatídico 5" y por todas las no invitaciones a comer.

Y a Sergio por estar al pendiente de mi, por preocuparse de mi salud "física, emocional y mental" y por siempre cuidarme.

A mi familia:

Si no hubieran molestado tanto nunca hubiera descubierto que la topología no es la ciencia que estudia a los topos.

A mis hermanas Nena, Paty, Doc, Mery y Mónica, por todo lo que hemos compartido.

A mis hermanos Lalo, Pancho, David (el güero) y Jorge, son los mejores hermanos del mundo.

A mi mamá por su ejemplo de fuerza, entereza, valor y por ser el modelo que me empuja a NUNCA rendirme.

A mi papá por que "aunque no parezca" se todo lo que ha hecho por mi.

A mi ahijado Christopher por toda la ternura y alegria que trajo a mi vida.

A mi cuñada Eva, por ser una gran amiga y también por ayudarme siempre con los dibujos.

A mis sobrinas Raquel y Andrea por los "Lunes de Sobrinas", por adornar la portada del cuaderno en donde se escribió el borrador de esta tesis y por comprender todas las veces que las deje plantadas para terminarla.

A mis maestros:

A Alejandro por ser un excelente maestro (en toda la extensión de la palabra "maestro") e introducirme al mundo de la topología

A Beti Puga y Ema Lamm por su apoyo a lo largo de toda la carrera

A Papá-Paez por no haber sido mi maestro y siempre estar ahí.

A Sergio por todos sus consejos y muy especialmente por revisar minuciosamente toda la tesis, de verdad que se lo agradezco mucho.

Y al Profesor Tapía por ser la primera persona que me mostró el maravilloso mundo de las Matemáticas.

Quiero agradecer muy especialmente al Dr. Carlos Hernández García-Diego por todo el tiempo que se dedicó a ayudarme para la impresión de la Tesis.

Quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México por toda la formación que me dió y al Instituto de Matemáticas por la beca de lugar y todo el apoyo recibido para realizar este trabajo.

And now, Y would also like to thank:

Mom and Dad MacVean for the wonderful year I spent with them in Sandy Creek and for letting me be a part of their family.

Mr. Archibee (sorry, Ron) for being the greatest teacher I've ever had and for the incredible friendship we built.

Sue for the "Manhattans", "Black Russians", "home made red wine", for giving me her incredible crazy fiendship and for opening the door of her house to me (even to make hot chocolate)

Jeff for reminding me, who I was and who I want to be

And to Professors Sam Nadler and Chuck Hagopian for their caring and all the interest they showed on the development of this work.

Bueno creo que sólo me falta mencionar a todas esas personas que no puse explicitamente, pero que no se me olvidan y que se que me han hecho una mejor persona.

Con todo mi cariño:

Verónica Martínez de la Vega y Mansilla.

Comentario: Estoy segura de que estas páginas estan llenas de errores ortograficos, gramáticales y de estilo, pero así es exactamente como quería decir las cosas.

INDICE

INTRODUCCION

Un continuo es un espacio topológico, métrico, compacto y conexo.

en general, un hiperespacio de un continuo X es un espacio cuyos elementos son ciertos subconjuntos de X. En este trabajo vamos a considerar al hiperespacio de subcontinuos de X definido de la siguiente manera:

$$C(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset,\ A \text{ es cerrado y } A \text{ es conexo}\}$$

A $C(X)$ se le puede definir topologías de varias maneras. La más común (y la más natural) es la que se le da usando la métrica de Hausdorff (ver Capítulo I).

En esta tesis consideramos a $C(X)$ con una nueva topología que llamamos la *topología producto* por razones que explicaremos mas adelante (ver Capítulo 1)

Vamos a dar una idea de cómo se comporta esta topología.

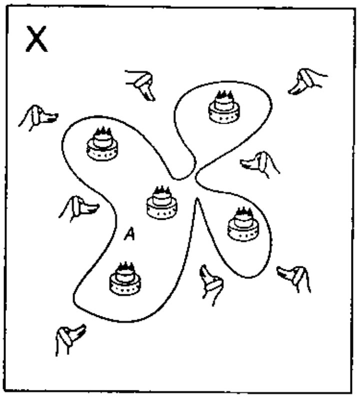
Dado un continuo X y dos subconjuntos finitos P y Q de X definimos

$$\mathcal{U}(P,Q) = \{A \in C(X) : P \subset A \text{ y } Q \cap A = \emptyset\}.$$

En el Capítulo 1 mostramos que la familia de conjuntos de la forma $\mathcal{U}(P,Q)$ constituyen una base para una topología τ_P de $C(X)$ que llamamos topología producto.

Un conjunto de la forma $\mathcal{U}(P,Q)$ lo podemos interpretar de la siguiènte manera:

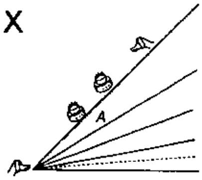
Supongamos que los elementos de P son pasteles en nuestro continuo X y que los elementos de Q son perros guardianes de dichos pasteles. Un subcontinuo A de X pertenece a $\mathcal{U}(P,Q)$, si es capaz de comerse todos los pasteles evadiendo a los perros.

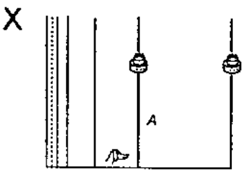


La idea general de este trabajo es obtener propiedades de $C(X)$, con la topología τ_P, sabiendo propiedades de X.

Cuando tomamos continuos X en general, es difícil inferir propiedades para $C(X)$, porque casi siempre hay muchas maneras de evadir a los perros.

Sin embargo cuando restringimos nuestra atención a los dendroides, dado que en los dendroides sólo hay "una forma de ir de un punto a otro", entonces los perros pueden guardar sus posiciones muy celosament





Con los dendroides tuvimos mucho éxito. Pudimos dar relaciones muy cercanas entre las propiedades del dendroide X y las de $(C(X), \tau_P)$.

Los teoremas más importantes que obtuvimos son los siguientes:

Teorema 5.1. Sea X un denroide entonces $(C(X), \tau_P)$ es separable si y sólo si X no continene una cantidad no numerable de arcos ajenos dos a dos.

Teorema 5.6. Sea X un dendroide entonces $(C(X), \tau_P)$ tiene una semibase numerable si y sólo si X contiene a lo más una cantidad numerable de puntos terminales.

Teorema 6.10. Sea X un dendroide entonces X es una dendrita si y sólo si X no contiene ni semiescobas ni semipeines.

Teorema 7.5. Sea X un dendroide entonces X es una dendrita si y sólo si en $C(X)$, $\tau_H \subset \tau_P$

Capítulo 1

Definiciones

Los espacios con los que vamos a trabajar son continuos y se definen de la siguiente manera.

Definición 1.1. Un *continuo* X es un espacio topológico, métrico, compacto, conexo y diferente del vacío.

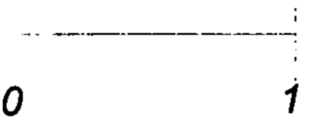
Un *subcontinuo* Y de X es un subconjunto de X que a su vez es un continuo.

Si d es una métrica para X, $r > 0$, $p \in X$ y $A \subset X$, entonces definimos:

$$B_r(p) = \{q \in X : d(p,q) < r\}, \text{ y}$$
$$\mathcal{N}(r, A) = \{q \in X : \text{existe } p \in A \text{ tal que } d(p,q) < r\}.$$

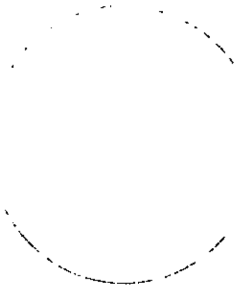
Como ejemplos de continuos tenemos:

El intervalo $[0, 1]$,

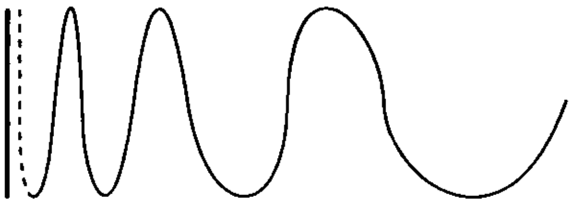


La circunferencia unitaria S^1 en el plano,

S^1



La curva $\overline{\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = sen\left(\frac{1}{x}\right) \text{ y } x \in (0,1]\}}$



Ahora veremos qué es un *hiperespacio*.

Definición 1.2. Sea X un continuo. Definimos 2^X como:

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado}, A \neq \emptyset\}$$

Es decir, 2^X es el conjunto de los subconjuntos cerrados de X

Definición 1.3. Sea X un continuo. Definimos $C(X)$ como:

$$C(X) = \{A \subseteq 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

Es decir, $C(X)$ es es conjunto de los subcontinuos de X.

A estos *hiperespacios* se les da una métrica definida de la siguiente manera:

Definición 1.4 Dadas $\varepsilon > 0$, $A \in 2^X$ y d una métrica para X definimos:

$$H(A,B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B), \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$$

Proposición 1.5 Dado un continuo X, se tiene que H es una métrica para 2^X.

Demostración.

a) H está bien definida.

Sean $A, B \in 2^X$, como $A \neq \emptyset$ podemos elegir $a_0 \in A$. Como B es cerrado en el compacto X, B es compacto, por lo tanto B está acotado, así que existen $x_0 \in X$ y $\delta > 0$ tales que $B \subset B_\delta(x_0)$.

Sea $\varepsilon = d(a_0, x_0) + \delta > 0$. Entonces $B \subset B_\varepsilon(a_0) \subset N(\varepsilon, A)$, porque $b \in B$ implica que:

$$d(a_0,x_0) \leq d(a_0,x_0) + d(x_0,b) < d(a_0, x_0) + \delta = \varepsilon$$

y por lo tanto $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Similarmente, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $A \subset N(\varepsilon_1, B)$.

Sea $\varepsilon_2 = máx\{\varepsilon_1, \varepsilon\}$, entonces $B \subset N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon_2, A)$ y $A \subset N(\varepsilon, B)$. Por tanto el conjunto con el que definimos $H(A, B)$ es no vacío y está acotado inferiormente por el 0.

Esto prueba que H está bien definida.

b) $H(A, B) \geq 0$ puesto que es el ínfimo de números mayores que 0.

c) $H(A,B) = H(B,A)$ y esto es debido a que en la definición A y B juegan papeles simétricos.

d) $H(A,B) = 0$ entonces $A = B$

Para probar esto, supongamos que $H(A,B) = 0$.

Tenemos que demostrar que $B \subset A$ y que $A \subset B$.

Sea $b \in B$, como A es cerrado, basta mostrar que $b \in \overline{A}$.

Sea $\delta > 0$, veamos que $B_\delta(b) \cap A \neq \emptyset$.

Como $0 = H(A,B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon,B), \text{ y } B \subset N(\varepsilon,A)\}$

tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \delta$ y $B \subset N(\varepsilon,A) \subset N(\delta,A)$.

De manera que $b \in N(\delta,A)$. Así que existe $a \in A$ tal que $d(a,b) < \delta$.

Esto muestra que $B_\delta(b) \cap A \neq \emptyset$. Por lo que $b \in \overline{A} = A$.

De modo que $B \subset A$.

El caso $A \subset B$ es análogo. Por tanto $A = B$.

e) $H(A,B) \leq H(A,C) + H(C,B)$

Para probar esta desigualdad necesitamos del siguiente hecho:

Afirmación. Si $A \subset N(\varepsilon,C)$ y $C \subset N(\delta,B)$, entonces $A \subset N(\varepsilon+\delta,B)$

Demostración.

Sea $a \in A \subset N(\varepsilon,C)$. Entonces existe $c \in C$ tal que $d(a,c) < \varepsilon$

Como $c \in C \subset N(\delta,B)$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta$

De aquí que $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) < \varepsilon + \delta$

De manera que $a \in N(\varepsilon+\delta,B)$

Por tanto $A \subset N(\varepsilon+\delta,B)$

Ahora sí podemos probar la desigualdad del triángulo para H.

Por definición

$$H(A,B) + H(C,B) =$$

$$inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon,C) \text{ y } C \subset N(\varepsilon,A)\} + inf\{\delta > 0 : C \subset N(\delta,B) \text{ y } B \subset N(\delta,C)\}$$

Por propiedades de ínfimos tenemos que esto es igual a

$inf\{\varepsilon + \delta > 0 : A \subset N(\varepsilon, C), C \subset N(\varepsilon, A), C \subset N(\delta, B) \text{ y } B \subset N(\delta, C)\}$

Por la afirmación anterior, sabemos que los números $\varepsilon + \delta$ del conjunto anterior satisfacen que $A \subset N(\varepsilon + \delta, B)\}$ y $B \subset N(\varepsilon + \delta, A)\}$. Entonces son miembros del conjunto $\{\lambda > 0 : A \subset N(\lambda, B) \text{ y } B \subset N(\lambda, A)\}$. De manera que

$H(A, B) + H(C, B) \geq inf\{\lambda > 0 : A \subset N(\lambda, B) \text{ y } B \subset N(\lambda, A)\} = H(A, B)$.

Por tanto H es métrica.

■

La métrica H genera una topología en 2^X, a la cual denotaremos como τ_H

Nuestro interés en este trabajo es definir una nueva topología en $C(X)$ a la cual llamaremos ***topología producto*** y denotaremos como τ_P.

Estudiaremos las propiedades topológicas de $C(X)$ con τ_P y veremos de qué manera y bajo qué circunstancias se pueden comparar τ_H con τ_P.

Una base para la topología producto se define en términos de conjuntos finitos como sigue:

Definición 1.6. Sea X un continuo. Dados dos subconjuntos finitos P y Q (no necesariamente distintos del vacío) de X definimos:

$\mathcal{U}(P, Q) = \{A \in C(X) : P \subset A \text{ y } A \cap Q = \emptyset\}$

También definimos

$\mathcal{B} = \{\mathcal{U}(P, Q) \subset C(X) : P \text{ y } Q \text{ son subconjuntos finitos de } X\}$

Proposición 1.7. Si X es un continuo, entonces la familia $\mathcal{B}$ es una base para una topología de $C(X)$ que llamaremos producto y denotaremos como τ_P.

Demostración.

Notemos que:

$$\mathcal{U}(\emptyset, \emptyset) = \{A \in C(X) : \emptyset \subset A \text{ y } A \cap \emptyset = \emptyset\} = C(X).$$

Por tanto $C(X)$ es la unión de elementos de $\mathcal{B}$.

La otra propiedad que tenemos que verificar de $\mathcal{B}$ es que la intersección de cualesquiera dos de sus elementos es unión de elementos de $\mathcal{B}$. Para esto será suficiente con que comprobemos la siguiente propiedad:

$\mathcal{U}(P,Q) \cap \mathcal{U}(R,S) = \mathcal{U}(P \cup R, Q \cup S)$

Efectivamente: Dada $A \in C(X)$,

$A \in \mathcal{U}(P,Q) \cap \mathcal{U}(R,S)$ si y sólo si

$A \in \mathcal{U}(P,Q)$ y $A \in \mathcal{U}(R,S)$, es decir,

$P \subset A \subset X - Q$ y $R \subset A \subset X - S$ lo cual es equivalente a que

$P \cup R \subset A \subset X - (R \cup S)$ o lo que es lo mismo que

$A \in \mathcal{U}(P \cup R, Q \cup S)$.

Esto prueba la igualdad de los dos conjuntos.

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es base para una topología de $C(X)$.

■

Ahora amos a dar una justificación del por qué llamamos a τ_P la topología producto.

Dado un continuo X, denotamos a $\{0,1\}^X = \prod_{x \in X} \{0,1\}_x$.

En esta expresión $\{0,1\}_x$ significa que para cada $x \in X$, tomamos una copia del espacio $\{0,1\}$ con la topología discreta.

Recordemos que los abiertos básicos $\mathcal{V}$ de $\{0,1\}^X$ son de la forma

$\mathcal{V} = \{0\}_{q_1} \times \{0\}_{q_2} \times \{0\}_{q_3} \times ... \times \{0\}_{q_m} \times \{1\}_{p_1} \times \{1\}_{p_2} \times ... \times \{1\}_{p_n} \times \prod_{x \in X - (P \cup Q)} \{0,1\}_x$,
donde $P = \{p_1, ..., p_n\}$ y $Q = \{q_1, ..., q_m\}$.

Sea $g : (C(X), \tau_P) \to \{0,1\}^X$ la función definida por el siguiente procedimiento.

Para cada $A \in C(X)$ definimos $g(A) \in \{0,1\}^X$ como la función característica de A.

Es decir $g(A)$ es el punto $g(A) = \{A_x\}_{x \in X}$ donde

$$A_x = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin A \\ 1 \text{ si } x \in A \end{cases}$$

Teorema 1.8. Para cualquier continuo X se tiene que la función g es un encaje, esto es, g es un homeomorfismo en su imagen

Demostración.

a) g es inyectiva

Supongamos que $A, B \in C(X)$ y que $g(A) = g(B)$.

Esto implica que $A_x = B_x$ para toda $x \in X$.

De aquí que $x \in A$ si y sólo si
$A_x = 1 \Leftrightarrow B_x = 1$ lo cual es equivalente a que
$x \in B$.

Por tanto $A = B$

b) g es un homeomorfismo en su imagen

Sea $\mathcal{V} = \{0\}_{q_1} \times \{0\}_{q_2} \times \{0\}_{q_3} \times ... \times \{0\}_{q_m} \times \{1\}_{p_1} \times \{1\}_{p_2} \times ... \times \{1\}_{p_n} \times \prod_{x \in X-(P \cup Q)} \{0,1\}_x$

un abierto básico de $\{0,1\}^X$, donde $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ y $Q = \{q_1, q_2, .., q_m\}$.

Notemos que $g(A) \in \mathcal{V}$ si y sólo si

$A_{q_j} = 0$ y $A_{p_i} = 1$ para toda $j \in \{1, ..., m\}$ y toda $i \in \{1, ..., n\}$ si y sólo si

$p_i \in A$ y $q_j \notin A$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$ y toda $j \in \{1, ..., m\}$ si y sólo si

$P \subset A$ y $Q \cap A = \emptyset$ si y sólo si

$A \in \mathcal{U}(P, Q)$.

Esto muestra que $\mathcal{U}(P, Q) = g^{-1}(\mathcal{V})$ y que

$g(\mathcal{U}(P, Q)) = g(C(X)) \cap \mathcal{V}$.

La primera igualdad muestra que g es continua y la segunda muestra que la imagen de un abierto básico en $(C(X), \tau_P)$ es un abierto en $g(C(X))$.

Por tanto g es abierta en su imagen.

Por tanto g es un homeomorfismo en su imagen.

■

Ejemplo 1.9 En este momento daremos un modelo geométrico de $C(X)$., cuando X es el intervalo $[0, 1]$.

Primero observemos que un elemento $A \in C(X)$ es un subconjunto conexo, cerrado y no vacío de $[0, 1]$, de manera que A es también un intervalo o un conjunto de un sólo punto. Entonces

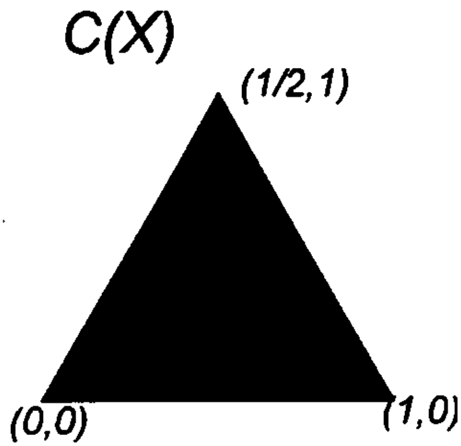
$$C(X) = \{[a, b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

Ahora consideremos la función $g : C(X) \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dada por:

$$g([a, b]) = (\tfrac{a+b}{2}, b - a)$$

.

Por tanto $C(X)$ se puede identificar con el triángulo en $\mathbf{R}^2$ que tiene como vértices a los puntos $(0,0), (1,0)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$



Llamaremos Δ a este modelo de $C(X)$ en $\mathbf{R}^2$.

Observaciones.

a) $X = [0,1]$. está representado en Δ por el punto $(\frac{1}{2}, 1)$.

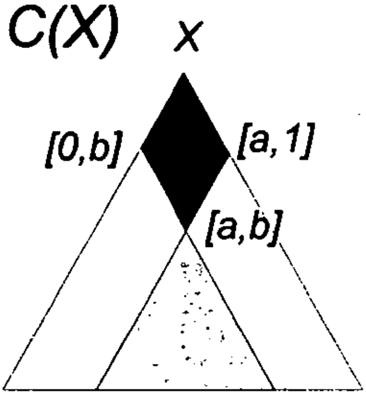
b) Los continuos de un sólo punto, es decir los intervalos $[a,b]$, donde $a = b$, están representados en la base de Δ.

c) Los intervalos de la forma $[0,b]$, están representados en Δ la recta $y = 2x$, donde $x \in [0,1]$.

d) Los intervalos de la forma $[a,1]$, están representados en Δ en la recta $y = 2 - 2x$, donde $x \in [0,1]$.

e) Haciendo las operaciones adecuadas es fácil ver que los subcontinuos que contienen al intervalo $[a,b]$, están representados en Δ por el cuadrilatero limitado por los segmentos $y = 2x$, $y = 2 - 2x$, $y = -2x + 2b$ y $y = 2x - 2a$, donde $x \in [0,1]$.

f) Del mismo modo que en el inciso e), se puede ver fácilmente que los subcontinuos del intervalo $[a,b]$, están representados en Δ por el triángulo limitado por los segmentos $y = -2x + 2b$, $y = 2x - 2a$ y $y = 0$, donde $x \in [0,1]$.



Ahora veremos cómo son los abiertos $\mathcal{U}(P,Q)$ en $(C([0,1]), \tau_P)$. Para ver esto tomemos cualquier abierto no vacío $\mathcal{U}(P,Q)$, recordemos que $\mathcal{U}(P,Q) = \{A \in C(X) : P \subset A \text{ y } Q \cap A = \emptyset\}$. Sea $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ donde $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n$ y sea $Q = \{q_1, q_2, ..., q_m\}$, donde $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_m$.

Tenemos entonces tres casos posibles.

caso a) $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n \leq q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_m$. En cuyo caso es fácil ver que $\mathcal{U}(P,Q) = \mathcal{U}(\{p_1, p_n\}, \{q_1\})$.

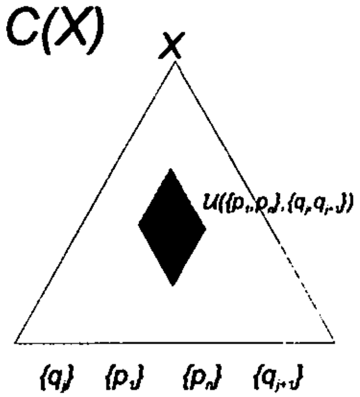
caso b) $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_m \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n$. En cuyo caso $\mathcal{U}(P,Q) = \mathcal{U}(\{p_1, p_n\}, \{q_m\})$.

caso c) $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_j \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n \leq q_{j+1} \leq q_{j+2} \leq ... \leq q_m$. En cuyo caso es fácil ver que $\mathcal{U}(P, Q) = \mathcal{U}(\{p_1, p_n\}, \{q_j, q_{j+1}\})$.

Observemos que no pueden intercalarse de otra manera los puntos p_i y q_j porque $\mathcal{U}(P, Q)$ es no vacío.

En el caso c) tenemos que $\mathcal{U}(P, Q)$ son los subcontinuos que contienen al intervalo $[p_1, p_n]$ y que están contenidos en el intervalo $[qj, q_{j+1}] \setminus \{q_j, q_{j+1}\}$.

Por lo que vimos en los incisos e) y f), este abierto queda representado en Δ de la siguiente manera:



Con esto concluimos el primer capítulo, en el siguiente capítulo veremos algunas propiedades de $(C(X), \tau_P)$.

Capítulo 2

Propiedades

En este capítulo estudiaremos algunas de las propiedades de $(C(X), \tau_P)$, estas propiedades son muy generales, y en realidad se conservan para $(2^X, \tau_P)$, la razón de que nos enfoquemos únicamente en $C(X)$, será mejor explicada en los siguientes capítulos.

Proposición 2.1 Si X es un continuo entonces todo abierto básico $\mathcal{U}(P,Q)$ es abierto y cerrado en $(C(X), \tau_P)$.

Demostración.

Sea $B \in C(X) \setminus \mathcal{U}(P,Q)$,

entonces $P \not\subset B$ ó $Q \cap B \neq \emptyset$.

Consideremos a los conjuntos finitos $Q \cap B$ y $P \setminus B$.

Como $(Q \cap B) \subset B$ y $(P \setminus B) \cap B = \emptyset$ entonces

$B \in \mathcal{U}((Q \cap B), (P \setminus B))$.

Veremos ahora que $\mathcal{U}(P,Q) \cap \mathcal{U}((Q \cap B), (P \setminus B)) = \emptyset$.

Supongamos por el contrario que existe $C \in \mathcal{U}(P,Q) \cap \mathcal{U}((Q \cap B), (P \setminus B))$.

Entonces $P \subset C$ y $(P \setminus B) \cap C = \emptyset$.

Lo cual implica que $\underline{\underline{P \subset B}}$.

Por otro lado tenemos que $Q \cap C = \emptyset$ y $(Q \cap B) \subset C$.

Lo cual implica que $\underline{\underline{Q \cap B = \emptyset}}$.

De las últimas dos observaciones obtenemos entonces que $B \in \mathcal{U}(P,Q)$,

esto es una contradicción, de modo que $\mathcal{U}(P,Q) \cap \mathcal{U}((Q \cap B),(P \setminus B)) = \emptyset$.

Entonces $\mathcal{U}((Q \cap B),(P \setminus B))$ es una vecindad de B que no intersecta a $\mathcal{U}(P,Q)$.

Con lo cual hemos demostrado que cualquier abierto básico $\mathcal{U}(P,Q)$ es cerrado.

$\blacksquare$

Definición 2.2

$$F_1(X) = \{\{p\} \in 2^X : p \in X\}$$

Es decir $F_1(X)$ es el conjunto de los subconjuntos de X que constan de un solo punto.

Proposición 2.3 La topología producto restringida a $F_1(X)$ es la topología discreta (en $F_1(X)$).

Demostración.

Sea τ la topología producto restringida a $F_1(X)$.

Sea $\{x\} \in F_1(X)$. Veremos que $\mathcal{U}(\{x\},\emptyset) \cap F_1(X) = \{\{x\}\}$.

Supongamos que hubiera un elemento $\{r\} \neq \{x\}$ con $\{r\} \in F_1(X)$ tal que

$\{r\} \in \mathcal{U}(\{x\},\emptyset) \cap F_1(X)$ entonces

$\{x\} \subset \{r\}$ lo cual implica que

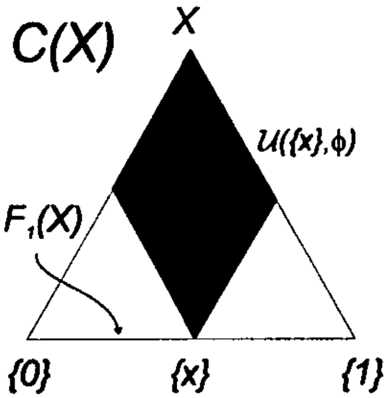
$\{r\} = \{x\}$ y esto es una contradición.

Entonces $\{\{x\}\}$ es un abierto de la topología τ.

Como esto ocurre para todo $\{x\} \in F_1(X)$, dicha topología es la discreta.

$\blacksquare$

Gracias al modelo matemático de $(C([0,1]),\tau_P)$ que vimos en el Capítulo 1, podemos ejemplificar este hecho claramente en el siguiente dibujo.



Proposición 2.4 $F_1(X)$ es cerrado en $(C(X), \tau_P)$

Demostración.

Sea $A \in C(X) \setminus F_1(X)$.

Entonces A consta de más de un punto.

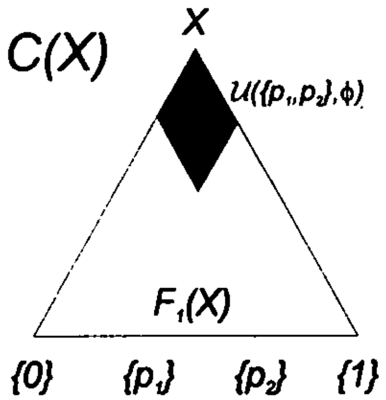
Sean p_1, p_2 dos puntos distintos tales que $p_1, p_2 \in A$.

Consideremos $P = \{p_1, p_2\}$ y $Q = \emptyset$. El abierto básico $\mathcal{U}(P, \emptyset)$ contiene a A, y no tiene a ningún elemento de $F_1(X)$.

Por tanto $C(X) \setminus F_1(X)$ es abierto, de donde se tiene que $F_1(X)$ es cerrado.

■

Cuando X es el intervalo $[0, 1]$, podemos ver claramente en el siguiente dibujo, que $F_1(X)$ es cerrado en $(C(X), \tau_P)$.



Proposición 2.5 $(C(X), \tau_P)$ es un espacio de Hausdorff.

Demostración.

Sean $A, B \in C(X)$ con $A \neq B$.

Entonces podemos suponer que existe $y \in A$ tal que $y \notin B$.

Consideremos los abiertos $\mathcal{U}(\{y\}, \emptyset)$ y $\mathcal{U}(\emptyset, \{y\})$.

Notemos que $A \in \mathcal{U}\ (\{y\}, \emptyset)$ y $B \in \mathcal{U}(\emptyset, \{y\})$

Si existiera $C \in \mathcal{U}(\{y\}, \emptyset) \cap \mathcal{U}(\emptyset, \{y\})$

entonces $\{y\} \subset C$ y $\{y\} \cap C\ = \emptyset$

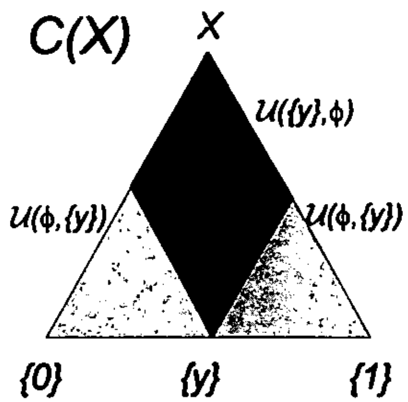
lo cual es una contradicción.

Por tanto $\mathcal{U}(\{y\}, \emptyset)$ y $\mathcal{U}(\emptyset, \{y\})$ son dos abiertos ajenos.

Por tanto $(C(X), \tau_P)$es un espacio de Hausdorff.

■

La siguiente figura nos permite ejemplificar esto, cuando $X = [0, 1]$.



Proposición 2.6 $(C(X), \tau_P)$ no es compacto.

Demostración.

Sabemos que $(C(X), \tau_P)$ es un espacio de Hausdorff.

$F_1(X)$ es cerrado en $(C(X), \tau_P)$, es discreto y tiene una cantidad no numerable de puntos. Por tanto $F_1(X)$ no es compacto en $(C(X), \tau_P)$.

De modo que $(C(X), \tau_P)$ no es compacto.

■

Proposición 2.7 Si Y es un subcontinuo de X, entonces $C(Y)$ es un subconjunto cerrado de $(C(X), \tau_P)$ y la restricción de la topología τ_P en $C(Y)$ es la misma que la topología producto definida en $C(Y)$.

Demostración.

Primero probaremos que dado un subcontinuo Y de X, $C(Y)$ es cerrado en $(C(X), \tau_P)$.

Sea $A \in C(X) \setminus C(Y)$, entonces existe $x \in A \setminus Y$, por tanto x no está en ningún subcontinuo de Y.

Elegimos ahora el abierto básico $\mathcal{U}(\{x\},\emptyset)$, claramente $A \in \mathcal{U}(\{x\},\emptyset)$, como ningún subcontinuo de Y contiene a x, entonces $\mathcal{U}(\{x\},\emptyset) \cap C(Y) = \emptyset$. De modo que hemos mostrado que $C(X) \setminus C(Y)$ es abierto en $(C(X), \tau_P)$, por tanto $C(Y)$ es cerrado en $(C(X), \tau_P)$.

Para probar la segunda parte de la proposición, consideremos ahora la topología producto definida en $C(Y)$, que en este momento llamaremos τ.

A sus básicos los denotaremos por $\mathcal{V}(P,Q) = \{A \in C(Y) : P \subset A \text{ y } Q \cap A = \emptyset\}$, donde P y Q son subconjuntos finitos de Y. Notemos que $\mathcal{V}(P,Q) = \mathcal{U}(P,Q) \cap C(Y)$, cuando $P, Q \subset Y$.

Entonces $\mathcal{B} = \{\mathcal{V}(P,Q) : P \text{ y } Q \text{ son subconjuntos finitos de } Y\}$ es una base para $(C(Y), \tau)$.

Sean P y Q dos subconjuntos finitos de Y y $Y \subset X$, entonces P y Q son subconjuntos finitos de X. Entonces $\mathcal{V}(P,Q) = \mathcal{U}(P,Q) \cap C(Y)$ pertenece a $\tau_P\mid_{C(Y)}$. Por tanto $\tau \subset \tau_P\mid_{C(Y)}$.

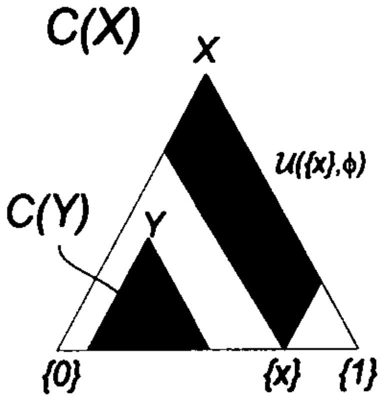
Ahora sea V un abierto no vacío en $\tau_P\mid_{C(Y)}$. Entonces $V = U \cap C(Y)$, donde $U \in \tau_P$.

Dada $A \in V = U \cap C(Y)$, entonces existe un abierto básico $\mathcal{U}(P,Q)$, tal que $A \in \mathcal{U}(P,Q) \cap C(Y) \subset U \cap C(Y)$. Entonces $P \subset A$ y $A \cap Q = \emptyset$, como $A \in C(Y)$, esto implica que P es un subconjunto finito de Y. Ahora $Q \cap Y$ es un subconjunto finito de Y, y como $A \cap Q = \emptyset$, entonces $A \cap (Q \cap Y) = \emptyset$. De modo que $\mathcal{V}(P, Q \cap Y)$ es una abierto básico de τ, y $A \in \mathcal{V}(P, Q \cap Y) \subset \mathcal{U}(P,Q) \cap C(Y) \subset U \cap C(Y)$. De modo que $\tau_P\mid_{C(Y)} \subset \tau$.

Por tanto $\tau = \tau_P\mid_{C(Y)}$, y de esta forma terminamos de demostrar esta proposición.

■

La siguiente figura nos ayuda a observar este hecho cuando $X = [0,1]$



Definición 2.8 Un continuo X es *irreducible con respecto a un conjunto* $A \subset X$ si y sólo si X no contiene ningún subcontinuo propio que contenga a A.

Proposición 2.9 Dado un continuo X se tiene que $\{X\}$ es un punto aislado en $(C(X), \tau_P)$ si y sólo si existe un subconjunto finito $A \subset X$ tal que X es irreducible con respecto a A.

Demostración.

Si $\{X\}$ es un punto aislado de $(C(X), \tau_P)$, entonces existe un abierto básico $\mathcal{U}(P, Q)$ tal que $\mathcal{U}(P, Q) = \{X\}$. Esto implica que $Q = \emptyset$ y el único subcontinuo de X que contiene a P es X.

Por tanto X es irreducible con respecto a P.

Ahora supongamos que X es irreducible con respecto a un conjunto finito P. Entonces $\{X\} = \mathcal{U}(P, \emptyset)$. De modo que X es un punto aislado en $(C(X), \tau_P)$.

■

Observemos que el intervalo $[0, 1]$, es irreducible con respecto al conjunto $\{0, 1\}$, por lo que $\{X\}$ es un punto aislado en $C(X)$.

Con esto concluimos el capítulo 2. En los siguientes capítulos estudiaremos propiedades más específicas de $(C(X), \tau_P)$.

Capítulo 3

Normalidad

Ya hemos visto que $(C(X), \tau_P)$ se puede encajar en el producto $\{0,1\}^X = \prod\limits_{x \in X} \{0,1\}_x$, donde cada espacio $\{0,1\}_x$ se toma con la topología discreta. Por las propiedades de separación de los productos y los subespacios podemos decir ahora que $(C(X), \tau_P)$ es un espacio de Hausdroff, regular y completamete regular ([2, Capítulo VII, Teoremas 2.3 y 7.2]). Sin embargo en este capítulo veremos que con la topología producto en general el hiperespacio de subcontinuos de un continuo no es normal.

El producto de espacios normales no siempre es normal ([2, Capítulo VII, Teorema 3.3]), por lo que no podemos asegurar, con el argumento del párrafo anterior, que los espacios $(C(X), \tau_P)$ sean normales.

Usando el Lema de Jones (Lema 3.2), veremos algunas condiciones para que $(C(X), \tau_P)$ no resulte normal.

Definición 3.1 Un espacio X es *normal* si dados dos subconjunto cerrados y ajenos A y B en X existen conjuntos abiertos y ajenos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Lema 3.2 (Lema de Jones) Si X contiene un conjunto denso D y un subespacio cerrado y discreto S, tal que $| S | \geq 2^{|D|}$ (donde $| S |$ representa la cardinalidad del conjunto S), entonces el espacio X no es normal.

Demostración.

Supongamos que X es normal.

Dado un subconjunto T de S, tenemos que T es cerrado en S (S tiene la topología discreta). Como S es cerrado en X, tenemos que T también es cerrado en X.

Dado un subconjunto T de S, por lo que vimos en el párrafo anterior, T y $S \setminus T$ son cerrados en X, claramente son ajenos y como estamos suponiendo que X es normal entonces existen abiertos ajenos $U(T)$ y $V(T)$ de X, tales que $T \subset U(T)$ y $S \setminus T \subset V(T)$.

Ahora probaremos lo siguiente:

Si $T_1, T_2 \subset S$ y $T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset$, entonces $U(T_1) \cap V(T_2)$ es un abierto no vacío en X.
Para probar esto, notemos que $T_1 \subset U(T_1)$ y $S \setminus T_2 \subset V(T_2)$, así que:
$\emptyset \neq T_1 \setminus T_2 = T_1 \cap (S \setminus T_2) \subset U(T_1) \cap V(T_2)$.
Por tanto $U(T_1) \cap V(T_2) \neq \emptyset$.
Finalmente, veremos que si $T_1, T_2 \subset S$, $T_1 \neq \emptyset \neq T_2$ y $T_1 \neq T_2$,
entonces $U(T_1) \cap D$ y $U(T_2) \cap D$ son abiertos en D, no vacíos y distintos.
Podemos suponer que $T_1 \setminus T_2 \neq \emptyset$. Por lo que vimos antes $U(T_1) \cap V(T_2) \neq \emptyset$.
Por la densidad de D, $\emptyset \neq U(T_1) \cap V(T_2) \cap D \subset U(T_1) \cap D$.
Por otra parte $U(T_1) \cap V(T_2) \cap D$ es ajeno a $U(T_2) \cap D$.
Esto muestra que $U(T_1) \cap D \neq U(T_2) \cap D$.

Entonces la función $T_1 \to U(T_1) \cap D$, que va de el conjunto $P(S)$ (el conjunto de subconjuntos de S) en el conjunto de subconjuntos de D ($P(D)$), es inyectiva.
De modo que $| S | < | P(S) | \leq | P(D) | = 2^{|D|}$.
Lo que contradice la suposición de que $| S | \geq 2^{|D|}$.
Por tanto X no es normal.

■

Definición 3.3 Un espacio X es *separable* si contiene un subconjunto denso numerable.

Corolario 3.4 Dado un continuo X, resulta que si $(C(X), T_P)$ es separable, entonces $(C(X), \tau_P)$ no es normal.

Demostración.

Supongamos que $(C(X), \tau_P)$, es separable, entonces contiene un subconjunto denso numerable D, por la Proposición 2.3 y la Proposición 2.4 tenemos que $F_1(X)$ es un subespacio cerrado y discreto de $(C(X), \tau_P)$. Como todos los continuos son no numerables ([2, Ejercicio 3, Sección 7, Capítulo VII]), $|F_1(X)| \geq 2^D$ entonces, por el Lema 3.2 (Lema de Jones), $(C(X), \tau_P)$ no es normal.

■

Debido al Corolario 3.4 sabemos que en muchos casos $(C(X), \tau_P)$ no es un espacio normal. En realidad siempre que podamos encontrar un conjunto denso numerable en $(C(X), \tau_P)$ sabremos con certeza que $(C(X), \tau_P)$ no es normal.

Proposición 3.5 Sea X el intervalo $[0, 1]$, entonces $(C(X), \tau_P)$ no es normal.

Demostración.

Vimos en el Capítulo 1 que todos los subcontinuos del intervalo son intervalos o conjuntos de un sólo punto, tenemos que proponer un conjunto denso $\mathcal{D}$ en $(C([0,1]), \tau_P)$. Sea

$$. \mathcal{D} = \{A \in C([0,1]) : A = [r, s] \text{ con } r, s \in \mathbf{Q}\}$$

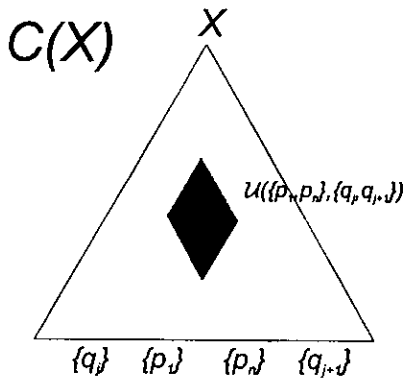
Claramente $\mathcal{D}$ es numerable. Veremos que $\mathcal{D}$ es un conjunto denso. Sea $\mathcal{U}(P,Q)$ un abierto básico no vacío cualquiera, $\mathcal{U}(P,Q) = \{A \in C([0,1]) : P \subset A \text{ y } Q \cap A = \emptyset\}$. Recordemos el Ejemplo 1.9, allí observamos que $\mathcal{U}(P,Q)$ puede ser determinado de tres maneras distintas. Analizaremos sólo el caso en que $\mathcal{U}(P,Q)$ es de la forma $\mathcal{U}(P,Q) = \mathcal{U}(\{p_1, p_2\}, \{q_1, q_2\})$, donde $q_1 < p_1 \leq p_2 < q_2$.

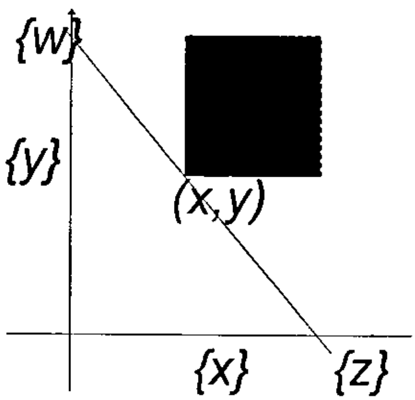
Tomemos $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $q_1 < r_1 < p_1$ y $p_2 < r_2 < q_2$ por lo tanto el intervalo $[r_1, r_2] \in \mathcal{U}(P, Q)$ y por tanto $\mathcal{U}(P, Q) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.

De modo que cuando X es el intervalo $[0, 1]$, $(C(X), \tau_P)$ es separable, y por el Corolario 3.4 tenemos entonces que $(C(X), \tau_P)$ no es normal.

■

El resultado anterior se puede ilustrar en la siguiente figura, la cual nos muestra que $(C(X), \tau_P)$ tiene la misma topología que la *topología de Sorgenfrey* en $\mathbb{R}^2$. [5, Ejemplo e, página 202] y $\mathbb{R}^2$ con la topología de Sorgenfrey no es normal.





El Lema 3.4 (Lema de Jones) junto con el resultado anterior nos permiten probar un resultado más general que nos proporciona un número grande de continuos X para los que $(C(X), \tau_P)$

no es un espacio normal.

Proposición 3.6 Si X es un continuo que contiene un arco A entonces $(C(X), \tau_P)$ no es un espacio normal.

Demostración.

Sabemos que la topología producto de $C(A)$ es igual a $\tau_P \mid_{C(A)}$, donde τ_P es la topología producto para $C(X)$ (véase Proposición 2.7). Supongamos que $(C(X), \tau_P)$ es normal. Sabemos que todo subespacio cerrado normal de un espacio normal, es un espacio normal ([2, Capítulo VII, Teorema 3.3]). Por la Proposición 2.7 $C(A)$ con la topología $\tau_P \mid_{C(A)}$ es normal. Por lo que dijimos antes, $C(A)$ con su topología producto es normal. Esto contradice la Proposición 3.5 y prueba la proposición.

■

Ahora mostraremos algunos ejemplos de continuos X, tales que $(C(X), \tau_P)$ es un espacio separable.

Ejemplo 3.7 Sea $X = \overline{\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = sen\left(\frac{1}{x}\right) \text{ y } x \in (0,1]\}}$ veremos que $(C(X), \tau_P)$ es separable.

Los subcontinuos de X son de tres tipos.

a) Subarcos de la curva $\{(x,y) \in R^2 : y = sen\left(\frac{1}{x}\right) \text{ y } x \in (0,1]\}$

b) Subarcos del intervalo $\{0\} \times [0,1]$.

c) Subcontinuos homeomorfos a X que son de la forma $\{0\} \times [0,1] \cup \{(x,y) : y = sen(\frac{1}{x}) \text{ y } x \in (0,b]\}$

Sean π_1 y $\pi_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ las funciones proyección a la primera y segunda coordenas, respectivamente, y

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = &\{A \in C(X) : \pi_1(A) \text{ es un intervalo con extremos racionales}\} \\ &\cup \{A \in C(X) : \pi_2(A) \text{ es un intervalo con extremos racionales }\}, \end{aligned}$$

De manera análoga a como se hizo en la Proposición 3.5, se prueba que $\mathcal{D}$ es un subconjunto numerable y denso en $(C(X), \tau_P)$.

Hemos visto entonces que X es separable.

Veamos ahora otro ejemplo.

Ejemplo 3.8 Sea $X = [0,1] \times [0,1]$, veremos que $(C(X), \tau_P)$ es separable.

Sea $D = \{\overline{x} = (x,y) : (x,y) \in X \cap \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}\}$

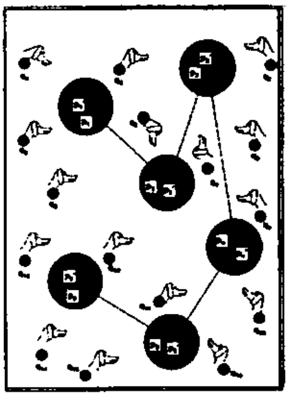
Sea $A = \{ab : ab$ es un segmento de recta (cerrado) con extremos a, b donde $a, b \in D\}$

Sea $B = \{\overline{B_r(\overline{x})} : r \in \mathbf{Q}$ y $\overline{x} \in D\}$

Entonces definimos $\mathcal{D} = \{C \in C(X) : C$ se puede escribir como la unión finita de elementos de $A \cup B\}$. Claramente $\mathcal{D}$ es numerable, para ver que es denso, tomemos un abierto básico no vacío $\mathcal{U}(P,Q)$, Sea $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Como Q es un subconjunto finito de X, existe $r \in \mathbf{Q}$ tal que para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, existe $p_i' \in D$ tal que $p_i \in \overline{B_r(p_i')}$, $\overline{B_r(p_i')} \cap Q = \emptyset$ y los segmentos $p_i'p_{i+1}'$, con $i < n$ son ajenos a Q.

De modo que $\bigcup\{\overline{B_r(p_i')} \cup p_i'p_{i+1}' : i = 1, ..., n\} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{U}(P,Q)$. Por tanto $(C(X), \tau_P)$ es separable.

La siguiente figura ilustra el ejemplo anterior.



Con esto concluimos el capítulo 3, en los siguientes capítulos continuaremos nuestro estudio de continuos X tales que $(C(X), \tau_P)$, es separable.

Capítulo 4

Dendroides

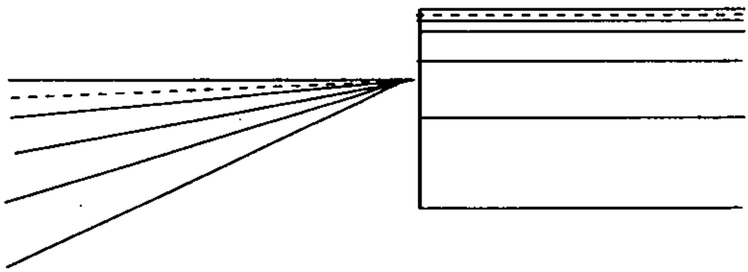
En el capítulo anterior tratamos de ver cómo debe ser un continuo X para que $(C(X), \tau_P)$ sea un espacio separable, en el siguiente capítulo vamos a contestar esta pregunta parcialmente cuando nos enfocamos a un tipo particular de continuos llamados dendroides, antes de seguir con el estudio de los hiperespacios separables con la topología producto dedicaremos este capítulo a ver qué es un dendroide, y algunos teoremas relacionados con ellos, ésto nos servirá para demostrar algunas propiedades de $(C(X), \tau_P)$, en los capitulos, 5, 6 y 7.

Definición 4.1 Un contiuno X es *unicoherente* si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cup B = X$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Definición 4.2 Un continuo X es *hereditariamente unicoherente* si todos sus subcontinuos son unicoherentes.

Definición 4.3 Un continuo X es un *dendroide* si es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente.

Como ejemplos de dendroides tenemos:



Lema 4.4 Si X es un dendroide y $a, b \in X$, con $a \neq b$, entonces existe un único arco en X que los une el cual vamos a denotar por ab (para unificar la notación, denotaremos $aa = \{a\}$).

Demostración.

Supongamos que existen dos arcos diferentes de a a b que llamaremos A_1 y A_2. Entonces $\{a,b\} \subset A_1$ y $\{a,b\} \subset A_2$. Por tanto $\{a,b\} \subset A_1 \cap A_2$. Como X es hereditariamente unicoherente, $A_1 \cap A_2 \in C(X)$. Como $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, entonces $A_1 \cap A_2$ es un subarco de A_1 que contiene a los puntos $\{a,b\}$, de modo que $A_1 \cap A_2 = A_1$. De manera análoga podemos probar que $A_1 \cap A_2 = A_2$. Por tanto $A_1 = A_2$

■

Lema 4.5 Los subcontinuos de los dendroides son arcoconexos

Demostración.

Sea A un subcontinuo de X y sean $a, b \in A$. Tenemos que demostrar que $ab \subset A$. Como $a, b \in A$ y como X es hereditariamente unicoherente, entonces $ab \cap A \in C(X)$. Entonces $ab \cap A$ es un subarco de ab que tiene a a y a b. Por lo que $ab \cap A = ab \subset A$.

De modo que A es arcoconexo.

■

Corolario 4.6 Los subcontinuos de los dendroides son dendroides

Demostración.

Sea X un dendroide y A un subcontinuo de X. Como X es hereditariamente unicoherente, A es hereditariamente unicoherente. Por el Lema 4.5, A es arcoconexo. Por tanto A es un dendroide.

■

Lema 4.7 Sean X un dendroide, $b \in X$ y $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ una familia finita de subcontinuos de X que cumple que $b \in B_i$ para toda $i = \{1, 2, ..., n\}$, entonces $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$ es un subcontinuo de X.

Demostración.

Como X es un dendroide si $A, B \in C(X)$ y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cap B \in C(X)$. Supongamos inductivamente que $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{n-1}$ es un subcontinuo de X. Sea $B = B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{n-1}$, entonces $b \in B$ y $b \in B_n$, entonces $b \in B \cap B_n$. Por tanto $B \cap B_n \in C(X)$. Entonces $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \in C(X)$.

■

El siguiente Teorema, no será demostrado, pero para ver su demostración nos podemos referir a [3,Teorema 3-16]

Teorema 4.8 Los continuos localmente conexos son localmente conexos por trayectorias.

Definición 4.9 Sea X un continuo. Una *función de Whitney* para $C(X)$ es una función $\mu : (C(x), \tau_H) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple que:

a) μ es continua,

b) $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$,

c) si $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

La existencia de las funciones de Whitney se conoce, y no lo vamos a probar en este trabajo, pero para su estudio nos podemos referir a [4,Capítulo IV].

Definición 4.10 Sea X un dendroide, fijemos un punto $x_0 \in X$ y sea μ una función de Whitney. Definimos: $f_{x_0} : X \to \mathbf{R}$ como $f_{x_0}(x) = \mu(xx_0)$

Lema 4.11 Sean X un dendroide, A un suncontinuo localmente conexo de X y $x_0 \in X$. Si f_{x_0} es la función definida en 4.10 entonces $f_{x_0}|_A$ es una función continua. .

Demostración.

Dadas $y \in A$ y $\varepsilon > 0$ consideremos el arco x_0y. Como μ es una función de Whitney, entonces μ es continua, de modo que existe δ' tal que si $H(x_0y, B) < \delta'$, entonces $|\mu(x_0y) - \mu(B)| < \varepsilon$.

Consideremos $B_{\frac{\delta'}{2}}(y)$. Como A es localmente conexo entonces por el Teorema 4.8 A es localmente conexo por trayectorias. Por lo que existe un abierto conexo por trayectorias U de A tal que $y \in U \subset B_{\frac{\delta'}{2}}(y) \cap A$.

Sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y) \cap A \subset U \subset B_{\frac{\delta'}{2}}(y) \cap A$. Para toda $x \in B_\delta(y) \cap A$, se tiene que $x, y \in U$, como U es conexo por trayectorias resulta que $xy \subset U \subset B_{\frac{\delta'}{2}}(y)$.

Observemos que $x_0y \subset x_0x \cup xy$ y que $x_0x \subset x_0y \cup xy$. Como $xy \subset B_{\frac{\delta'}{2}}(y)$ entonces todo punto $z \in xy$ cumple con que $d(z,x) < \delta'$, de modo que $xy \subset N(\delta', xx_0)$ y como $xx_0 \subset N(\delta', xx_0)$ entonces $xy \cup xx_0 \subset N(\delta', xx_0)$.

Como $x_0y \subset x_0x \cup xy$, entonces $\underline{\underline{x_0y \subset N(\delta', xx_0)}}$.

De manera análoga podemos ver que $xy \cup x_0y \subset N(\delta', x_0y)$ y como $x_0x \subset x_0y \cup xy$, entonces $\underline{\underline{x_0x \subset N(\delta', x_0y)}}$.

De esta forma tenemos que $H(x_0x, x_0y) < \delta'$, de donde $|\mu(x_0y) - \mu(x_0x)| < \varepsilon$.

Esto es equivalente a que $|f_{x_0}(y) - f_{x_0}(x)| < \varepsilon$.

De modo que dada $x \in A$, tal que $d(x,y) < \delta$, se tiene que $|f_{x_0}(y) - f_{x_0}(x)| < \varepsilon$. Por tanto $f_{x_0}|_A$ es una función continua.

■

Notación: Dado un subconjunto no vacío A de un dendroide X, definimos:

$$I(A) = \bigcap\{B \in C(X) : A \subset B\},$$

El siguiente Lema nos dice que de hecho $I(A)$ es un subcontinuo de X, y además es irreducible con respecto a A. (Ver Definición 2.8).

Lema 4.12 Sea X un dendroide y sea A un subconjunto no vacío de X. Entonces $I(A)$ es un subcontinuo de X el cual es irreducible con respecto a A.

Demostración.

Observemos primero que $\bigcap\{B \in C(X) : A \subset B\}$ es un conjunto cerrado y por lo tanto compacto (estamos considerando la intersección de una familia que es no vacía pues $A \subset X$), entonces $I(A)$ es compacto.

Probaremos que $I(A)$ es conexo. Supongamos, por el contrario, que $I(A)$ no es conexo. Entonces existen dos cerrados ajenos H y K tales que $I(A) = H \cup K$.

Como X es un espacio normal, existen dos abiertos ajenos U y V de X, tales que $H \subset U$ y $K \subset V$. Por lo que $I(A) \subset U \cup V$.

Esto es equivalente a que $X \setminus (U \cup V) \subset X \setminus I(A) = X \setminus \bigcap\{B \in C(X) : A \subset B\}$, lo cual implica que $X \setminus (U \cup V) \subset \bigcup\{X \setminus B : B \in C(X) \text{ y } A \subset B\}$.

Como $X \setminus (U \cup V)$ es un compacto y $\{X \setminus B : B \in C(X) \text{ y } A \subset B\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus (U \cup V)$, entonces existe un número finito de continuos $B_1, B_2, ..., B_n$ de X tales que $A \subset B_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y

$X \setminus (U \cup V) \subset (X \setminus B_1) \cup (X \setminus B_2) \cup ... \cup (X \setminus B_n)$.

Entonces $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \subset U \cup V$.

Observemos que $I(A) = \bigcap\{B \in C(X) : A \subset B\} \subset B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$. Como $A \subset B_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, y ésta es una intersección finita de subcontinuos de X entonces, por el Lema 4.7, $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$ es un subcontinuo de X, y por tanto es conexo.

Sea $B = B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$. Como $I(A) \subset B \subset U \cup V$ y B es conexo, entonces podemos suponer que $B \subset U$. Esto implica que $K = \emptyset$.

Esto es un absurdo que nace de suponer que $I(A)$ no es conexo. Por tanto $I(A)$ es conexo.

Como $I(A)$ es la intersección de todos los subcontinuos de X que contienen a A, no puede haber un subcontinuo más pequeño que contenga a A. Por tanto $I(A)$ es irreducible con respecto a A. ■

Lema 4.13 Sea X un dendroide, si A y B son subconjuntos de X tales que $A \subset B$, entonces $I(A) \subset I(B)$.

Demostración.

Por el Lema 4.12, $I(B)$ es un continuo que contiene a B y $A \subset B$, entonces $I(B)$ es un continuo que contiene a A y como $I(A) = \bigcap\{C \in C(X) : A \subset C\}$, entonces $I(A) \subset I(B)$.

■

Lema 4.14 Sea X un dendroide y sean P y Q subconjuntos finitos en X tales que $\mathcal{U}(P, Q)$ es no vacío, entonces $I(P) \in \mathcal{U}(P, Q)$.

Demostración.

Como $\mathcal{U}(P, Q) \neq \emptyset$, existe $A \in C(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}(P, Q)$. Entonces $P \subset A$ y $Q \cap A = \emptyset$.
Como $I(P) = \bigcap\{B \in C(X) : P \subset B\}$ entonces $I(P) \subset A$. Por tanto $I(P) \cap Q = \emptyset$.
Ahora también sabemos que $P \subset I(P)$. Por tanto $I(P) \in \mathcal{U}(P, Q)$.

■

Lema 4.15 Sea X un dendroide, y sea P un subconjunto finito de X, entonces $I(P) = \bigcup\{px : p, x \in P\}$.

Demostración.

Por el Lema 4.12, $I(P) = \bigcap\{B \in C(X) : P \subset B\}$ es un continuo y $P \subset I(P)$.

Veamos que $\bigcup\{px : p, x \in P\}$ es un continuo.

Tenemos que $\bigcup\{px : p, x \in P\}$ es una unión finita de arcos y por tanto es un conjunto compacto.

Ahora veremos que $\bigcup\{px : p, x \in P\}$ es conexo por trayectorias.

Sean $y, z \in \bigcup\{px : p, x \in P\}$ entonces existen puntos p_1, p_2, p_3 y $p_4 \in P$ tales que $y \in p_1p_2$ y $z \in p_3p_4$.

Consideremos el arco p_2p_3, este arco está contenido en $\bigcup\{px : p, x \in P\}$.

Por lo que y se puede conectar con z mediante la unión de los arcos p_1p_2, p_2p_3, p_3p_4 que se encuentran contenidos en $\bigcup\{px : p, x \in P\}$.

Por lo que hemos demostrado que $\bigcup\{px : p, x \in P\}$ es conexo por trayectorias y por lo tanto conexo.

De este modo tenemos que $\bigcup\{px : p, x \in P\}$ es un continuo tal que $P \subset \bigcup\{px : p, x \in P\}$.

Por lo que $I(P) \subset \bigcup\{px : p, x \in P\}$.

Para que probemos la otra contención utilizaremos el hecho de que $P \subset I(P)$ y el Lema 4.5.

Dados $p, x \in P$, $p, x \in I(P)$. Como $I(P)$ es arcoconexo (Lema 4.5) $px \subset I(P)$, lo que nos lleva a que $\bigcup\{px : p, x \in P\} \subset I(P)$.

Por tanto $I(P) = \bigcup\{px : p, x \in P\}$.

■

Lema 4.16 Sean X un dendroide, $B \in C(X)$ y a un punto en X, entonces existe un único punto $b \in B$ tal que $ab \cap B = \{b\}$ y además b tiene la propiedad de que $b \in ay$ para todo $y \in B$.

Demostración.

Para cada punto $y \in B$, consideremos el arco ay, como $y \in B$, y X es un dendroide, $ay \cap B$ es un subarco de ay.

De donde tenemos que $ay \cap B = by$, por lo que $ab \cap B = \{b\}$.

Consideremos ahora $y' \in B$, $y' \neq y$, y el arco ay'. Por lo que acabamos de mostrar, existe un punto $b' \in B \cap ay'$ tal que $ab' \cap B = \{b'\}$. Como $B \in C(X)$, entonces B es arcoconexo. Por tanto $b'y \subset B$. De modo que $b' \in ab' \cap b'y \subset ab' \cap B = \{b'\}$. Esto implica que $ab' \cup b'y$ es un arco de a a y. Por el Lema 4.4, tenemos que el arco ay es único, entonces $ab' \cup b'y = ay$.

Por la forma en que se eligió b, tenemos que $b'y \subset by$. De manera análoga podemos ver que $by \subset by'$. Esto nos conduce a que $b' = b$, de donde $b \in ay'$.

De este modo hemos mostrado que $b \in az$ para toda $z \in B$.

■

Definición 4.17 Sea X un dendroide, se dice que un arco α contenido en X es un *arco maximal* si α no está contenido propiamente en ningún otro arco de X.

Teorema 4.18 (Teorema de Reducción de Brouwer). Sea Y un espacio segundo numerable y sea $\mathcal{K}$ una familia no vacía de subconjuntos cerrados de Y con la propiedad de que para cada sucesión creciente $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset ...$ de elementos de $\mathcal{K}$, existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $K_n \subset K$ para toda $n \geq 0$. Entonces $\mathcal{K}$ contiene un elemento maximal en $\mathcal{K}$ (es decir un elemento de $\mathcal{K}$ que no está contenido en ningún otro elemento de $\mathcal{K}$).

Demostración.

Sea $\{U_n : n \geq 1\}$ una base numerable para la topología de Y.

Elegimos $K_0 \in \mathcal{K}$. Elegimos $K_1 \in \mathcal{K}$ con las siguientes propiedades (si existe):

a) $K_0 \subset K$,

b) $K \cap U_1 \neq \emptyset$.

Si estas propiedades no se cumplen para ninguna $K \in \mathcal{K}$ entonces hacemos $K_1 = K_0$.

De manera inductiva, elegimos $K_{n+1} \in \mathcal{K}$ (si existe) tal que:

a) $K_{n+1} \subset K_n$ y

b) $K_{n+1} \cap U_{n+1} \neq \emptyset$.

Si estas propiedades no se cumplen para ninguna $K \in \mathcal{K}$ entonces hacemos $K_{n+1} = K_n$

Con esto terminamos la construcción de la sucesión creciente

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots .$$

Por hipótesis tenemos que existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $K_n \subset \mathcal{K}$ para toda $n \geq 0$.

Veremos que K es un elemento maximal en $\mathcal{K}$.

Supongamos, por el contrario, que existe $K' \in \mathcal{K}$ tal que $K \subsetneq K'$.

Tomemos un elemento x tal que $x \in K' \setminus K$, entonces $x \in Y \setminus K$, que es un abierto de Y. Por tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_m \subset Y \setminus K$.

Como $K_m \subset K$, entonces $K_m \cap U_m = \emptyset$.

Por otra parte, $K_{m-1} \subset K'$ y $K' \cap U_m \neq \emptyset$. De acuerdo a la definición de K_m, teníamos que haber tomado a K_m con la propiedad de que $K_m \cap U_m \neq \emptyset$. Esto es una contradicción que nace de suponer que $K \subsetneq K'$.

Por tanto hemos mostrado que K es un elemento maximal de $\mathcal{K}$.

■

Teorema 4.19 Sea X un dendroide, entonces:

(a) para toda sucesión creciente de arcos $\{a_n b_n\}_{n=0}^{\infty}$ en X, existe un arco ab en X tal que $a_n b_n \subset ab$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y

(b) dado un arco α en X, existe un arco maximal $\gamma \subset X$, tal que $\alpha \subset \gamma$.

Demostración.

Nos concentraremos en probar (b), la demostración de (a) estará claramente implícita en lo que haremos.

Sea $\alpha = a_0 b_0$ un arco en X. Vamos a aplicar el Teorema de Reducción de Brower a la familia $\mathcal{K} = \{\beta : \beta \text{ es un arco y } \alpha \subset \beta\}$. Para esto, tomemos una sucesión creciente

$$a_0 b_0 \subset a_1 c_1 \subset a_2 c_2 \subset \dots .$$

de elementos de $\mathcal{K}$. Tenemos que probar que existe un elemento de $\mathcal{K}$ que contiene a todos estos arcos.

Elegimos una $a \in a_0b_0 \setminus \{a_0, b_0\}$.

Primero veremos que existe un arco ab tal que $ac_k \subset ab$ para toda $k \in \mathbf{N}$.

Como X es compacto, la sucesión $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a un punto $b \in X$.

Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea $B_n = \overline{\bigcup\{b_nb_m : m > n\}}$.

Claramente B_n es conexo y compacto, por tanto B_n es un subcontinuo de X.

Por el Lema 4.5, B_n es arcoconexo, entonces B_n se puede escribir en la forma:

$B_n = A_n \cup C_n$, donde A_n y C_n son subcontinuos propios de B_n ([3,Capítulo 3]). Podemos suponer que $\{m \in \mathbf{N} : b_m \in C_n\}$ es infinito.

Veremos que entonces $b_n \in A_n \setminus C_n$

Supongamos, por el contrario, que $b_n \in C_n$. Dada $x \in \bigcup\{b_nb_m : m > n\}$, entonces $x \in b_nb_m$ para alguna $m \in \mathbf{N}$. Como $\{m \in \mathbf{N} : b_m \in C_n\}$ es infinito, entonces existe $m' > m \in \mathbf{N}$ tal que $b_{m'} \in C_n$. Como C_n es arcoconexo (Lema 4.5), entonces $b_nb_{m'} \subset C_n$, como $b_nb_m \subset b_nb_{m'}$, entonces $x \in b_nb_m \subset C_n$. Hemos probado que $\bigcup\{b_nb_m : m > n\} \subset C_n$ y como C_n es cerrado, concluimos que $C_n = B_n$. Esto es una contradicción que nace de suponer que $b_n \in C_n$. Por tanto $b_n \in A_n \setminus C_n$.

Por el Lema 4.18 existe $p \in C_n$ tal que $b_np \cap C_n = \{p\}$ y $p \in b_ny$ para toda $y \in C_n$.

Veremos ahora que $B_n = b_np \cup C_n$.

Sea $x \in \bigcup\{b_nb_m : m > n\}$. Como $\{m \in \mathbf{N} : b_m \in C_n\}$ es infinito, $x \in b_nb_m$ para alguna $b_m \in C_n$, por la forma en que elegimos a p, $p \in b_nb_m$. Entonces $x \in b_np \cup pb_m$. De manera que $x \in b_np \cup C_n$. Por tanto $\bigcup\{b_nb_m : m > n\} \subset b_np \cup C_n$ y, como este conjunto es cerrado, podemos concluir que $B_n = b_np \cup C_n$.

Como $\{m \in \mathbf{N} : b_m \in C_n\}$ es infinito y C_n es cerrado, entonces $b \in C_n$.

Por el Lemma 4.18 existe $q \in B_n$ tal que $aq \cap B_n = \{q\}$ y $q \in ay$ para toda $y \in B_n$. Aseguramos que $q = b_n$.

Tomemos $m > n$ tal que $b_m \in C_n$. Tomamos el orden natural en el arco ab_m que cumple con que $a < b_m$.

Por hipótesis, $ab_n \subset ab_m$. Así que $b_n \in ab_m$. Como $b_n \in B_n$, $q \in ab_n$. Por la elección de p, tenemos que $p \in b_n b_m$. Por tanto, $a \leq q \leq b_n < p \leq b_m$. Si ocurre que $q \in C_n$, entonces $b_n \in qb_m \subset C_n$. Esto es una contradicción pues ya habíamos probado que $b_n \notin C_n$. Como $q \in B_n = b_n p \cup C_n$, entonces $q \in b_n p$. Esto prueba que $b_n \leq q$. Por tanto, $b_n = q$.

Ya que $b \in B_n$, por la propiedad que define a q, concluimos que $b_n = q \in ab$.

Hemos probado entonces que $b_n \in ab$ para toda $n \in \mathbf{N}$.

Por tanto $ab_n \subset ab$ para toda $n \in \mathbf{N}$.

Dada $k \in \mathbf{N}$, existe una $m \in \mathbf{N}$ tal que $m > k$ y $c_m = b_n$ para alguna $n \in \mathbf{N}$. Entonces $ac_k \subset ac_m = ab_n \subset ab$.

Esto muestra que $ac_k \subset ab$ para toda $k \in \mathbf{N}$.

De manera análoga existe $g \in X$ tal que $a_k a \subset ga$ para toda $k \in \mathbf{N}$.

Queremos ver que el arco gb contiene a todos los arcos $a_k c_k$.

Primero veremos que $a \in gb$ para esto basta mostrar que ver que $ga \cap ab = \{a\}$. Supongamos por el contrario, que existe un punto $x \in ga \cap ab \setminus \{a\}$. Entonces $xa \subset ga \cap ab$. Como $a_0 \in ga - \{a\}$ y $b_0 \in ab \setminus \{a\}$, entonces existe un punto $y \in ax \cap a_0 a \cap ab_0 \setminus \{a\}$. Esto es una contradicción puesto que $a_0 a \cap ab_0 = \{a\}$. Con esto hemos probado que $a \in gb$.

Entonces $ac_k \subset ab \subset gb$ y $a_k a \subset ga \subset gb$. Por tanto $a_k c_k \subset gb$ para toda $k \in \mathbf{N}$.

Como X es un espacio separable, podemos aplicar el Teorema de Reducción de Brouwer (Teorema 4.20), a la familia $\mathcal{K}$, entonces $\mathcal{K}$ contiene un elemento maximal γ.

■

Corolario 4.20 Sea X un dendroide, dados $a, b \in X$, existe un arco maximal γ tal que $a, b \in \gamma$.

Demostración.

Si $a \neq b$, entonces este corolario es consecuencia directa del Teorema 4.19. Si $a = b$, entonces tomemos $c \in X - \{a\}$. De esta manera, el arco deseado se puede encontrar aplicando el Teorema 4.19 al arco ac.

■

Definición 4.21 Sea X un dendroide, un punto $x \in X$ es un *punto terminal*, si para cualquier arco α que contiene a x, x es un extremo de α.

Definición 4.22 Sea X un dendroide, para todo $A \in C(X)$, denotamos por

$$T(A) = \{x \in A : x \text{ es un punto terminal de } A\}.$$

Lema 4.23 Sean X un dendroide y xy un arco maximal de X, entonces x, y son puntos terminales de X.

Demostración.

Veremos que x es un punto terminal.

Supongamos, por el contrario, que x no es un punto terminal.

Entonces existe un arco ab que contiene a x tal que x no es punto extremo de ab.

Entonces $xy \cap ab$ es un subarco (o un punto) de xy, tiene a x y también es subarco de ab. Entonces $xy \cap ab$ es de la forma xz con $z \in xy$. Como $z \in ab$, podemos suponer que $z \in xb$. Entonces $xz \subset xb$. De manera que $ax \cap xy = \{x\}$. De modo que $ax \cup xy$ es un arco que contiene propiamente a xy. Esto es una contradicción, puesto que xy es un arco maximal. Esta contradicción nace de suponer que x no es punto terminal de X. Por tanto $x \in T(X)$.

De manera análoga se muestra que $y \in T(X)$.

■

Lema 4.24 Sea X un dendroide y sea P un subconjunto finito de X. Sea $P^* = \{p \in P : p \in T(I(P))\}$ (éste es el conjunto de los puntos terminales del subcontinuo irreducible de X que contiene a P).

Entonces $I(P^*) = I(P)$.

Demostración.

Como $P^* \subset P$, tenemos que $I(P^*) \subset I(P)$ (Lema 4.13).

Veremos ahora que $I(P) \subset I(P^*)$.

Primero veremos que $T(I(P)) \subset P$

Sea $a \in T(I(P))$. Como $a \in I(P)$, $I(P) = \bigcup\{px : p, x \in P\}$, (véase Lema 4.15), entonces $a \in px$ para algunos $p, x \in P \subset I(P)$. Como $a \in T(I(P))$, por definición de punto terminal, entonces a es un punto extremo del arco px. Entonces tenemos que $a = p$ o $a = x$, por tanto $a \in P$.

Sea $y \in I(P)$ entonces $y \in px$ para algún arco px, tal que $p, x \in P$ (Lema 4.15).

Como $I(P)$ es un dendroide, existe un arco maximal ab en $I(P)$ tal que $px \subset ab$.

Entonces $y \in ab$. Como ab es un arco maximal, entonces por el Lema 4.23 $a, b \in T(I(P)) \subset P$. De manera que $a, b \in P^*$, entonces $a, b \in I(P^*)$. De modo que $ab \subset I(P^*)$ (Lema 4.5).

Por tanto $y \in ab \subset I(P^*)$. De modo que $I(P) \subset I(P^*)$.

Por lo que hemos mostrado que $I(P) = I(P^*)$.

■

Lema 4.25 Sea X un dendroide y sea w_0 un punto cualquiera de X, entonces $X = \bigcup\{w_0t : t \in T(X)\}$.

Demostración.

Claramente $\bigcup\{w_0t : t \in T(X)\} \subset X$. Para ver la otra contención, sea $y \in X$, con $y \neq w_0$. Entonces por el Corolario 4.20, existe un arco maximal ab tal que $w_0y \subset ab$. Démosle al arco

ab el orden natural que satisface $a < b$. Entoces podemos suponer que $a \leq w_0 < y \leq b$, por lo que $y \in w_0b$.

Ahora por el Lema 4.23 , tenemos que b es un punto terminal de X.

Por tanto $y \in \bigcup\{w_0t : t \in T(X)\}$.

De esta forma hemos probado que $X \subset \bigcup\{w_0t : t \in T(X)\}$.

Por tanto $X = \bigcup\{w_0t : t \in T(X)\}$.

■

Con esto terminamos de demostrar algunas de las propiedades básicas de los dendroides, los cuales nos serán muy útiles en los siguientes capítulos.

En el Capítulo 7, nos enfocamos un poco al estudio de $(C(X), \tau_P)$, cuando X es un tipo especial de dendroide llamado dendrita, en esta última parte del capítulo, veremos qué es una dendrita y algunas propiedades de este tipo de dendroides. Empezamos con la definición de dendrita y algunos lemas de topología general.

Definición 4.26 Un continuo X es una *dendrita* si X es un dendroide localmente conexo.

Lema 4.27 Si $U_1, U_2, ..., U_n$, es una colección finita de subconjuntos de X, entonces $Fr(U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n) \subset Fr(U_1) \cup Fr(U_2) \cup ... \cup Fr(U_n)$.

Demostración.

Lo primero que haremos es demostrarlo para dos subconjuntos U y V.

Sea $y \in Fr(U \cup V)$, entonces $y \in \overline{U \cup V} \setminus (U \cup V)^o$,entonces $y \in \overline{U} \setminus (U \cup V)^o$ o $y \in \overline{V} \setminus (U \cup V)^o$. Si $y \in \overline{U} \setminus (U \cup V)^o$ entonces $y \in \overline{U} \setminus U^o \cup V^o$. De modo que $y \in \overline{U} \setminus U^o$ y $y \in \overline{U} \setminus V^o$, entonces $y \in Fr(U)$.

De manera análoga, si $y \in \overline{V} \setminus (U \cup V)^o$, entonces $y \in Fr(V)$. Por tanto $y \in Fr(U) \cup Fr(V)$. De modo que $Fr(U \cup V) \subset Fr(U) \cup Fr(V)$.

Procediendo inductivamente, supongamos que

$$Fr(U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_{n-1}) \subset Fr(U_1) \cup Fr(U_2) \cup ... \cup Fr(U_{n-1}).$$

Sea $U = U_1 \cup U_2 \cup ... U_{n-1}$.

Entonces

$$Fr(U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_{n-1} \cup U_n) = Fr(U \cup U_n) \subset Fr(U) \cup Fr(U_n) =$$
$$Fr(U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_{n-1}) \cup Fr(U_n) \subset Fr(U_1) \cup Fr(U_2) \cup ... \cup Fr(U_{n-1}) \cup Fr(U_n).$$

Esto concluye la inducción y la prueba del lema.

■

Lema 4.28 Si X es un continuo localmente conexo, B es un abierto de X y A es una componente de B, entonces $Fr(A) \subset Fr(B)$

Demostración.

Como X es un continuo localmente conexo y B es abierto en X, entonces A es abierto en X. (Lema 6.5).

Sea $y \in Fr(A)$, veremos que $y \in Fr(B)$.

Como A es abierta entonces $y \notin A$.

Como A es un conexo y $A \subset A \cup \{y\} \subset \overline{A}$, entonces $A \cup \{y\}$ es conexo.

Supongamos que $y \in B$, entonces $A \cup \{y\}$ es un subconjunto conexo de B que intersecta a la componente A de B. De aquí que $A \cup \{y\} \subset A$, lo cual contradice el hecho de que $y \notin A$, por tanto $y \notin B$.

Como $y \in Fr(A) \subset \overline{A} \subset \overline{B}$, tenemos que $y \in \overline{B} \setminus B \subset Fr(B)$.

Por tanto $y \in Fr(B)$.

Así pues tenemos que $Fr(A) \subset Fr(B)$.

■

Lema 4.29 Si X es un continuo localmente conexo, U es un abierto conexo de X y $x, y \in U$, entonces existe $A \in C(X)$ tal que $x, y \in A \subset U$.

Demostración.

Como X es un continuo localmente conexo, entonces para toda $a \in U$, existe un abierto y conexo V_a de X tal que $a \in V_a \subset \overline{V_a} \subset U$.

Para cada $x \in X$, sea

$$Y_x = \{y \in U : \text{existe } A_y \in C(X) \text{ y } x, y \in A_y \subset U\}$$

Notemos que $x \in \{x\} \subset C(X)$ y $\{x\} \subset U$, de manera que $x \in Y_x$, entonces $Y_x \neq \emptyset$.

Veremos que Y_x es abierto.

Sea $z \in Y_x$, entonces existe $A_z \in C(X)$ tal que $x, z \in A_z \subset U$, y también existe V_z tal que $\overline{V_z} \in C(X)$ y $z \in V_z \subset \overline{V_z} \subset U$.

Notemos que $A_z \cup \overline{V_z} \in C(X)$ y $A_z \cup \overline{V_z} \subset U$.

Sea $z' \in V_z$, entonces $x, z' \in A_z \cup \overline{V_z} \subset U$. Por tanto $V_z \subset Y_x$.

De modo que Y_x es abierto.

Veremos ahora que Y_x es cerrado en U. Para esto, mostraremos que $U \setminus Y_x$ es abierto en U.

Sea $w \in U \setminus Y_x$. Aseguramos que $V_w \cap Y_x = \emptyset$. Supongamos, por el contrario, que existe un punto $z \in V_w \cap Y_x$. Entonces existe $A_z \in C(X)$ tal que $x, z \in A_z \subset U$. Entonces $A_z \cup \overline{V_w}$ es un subcontinuo de X que tiene a x y a w, y que está contenido en U. De modo que $w \in Y_x$. Esta contradicción muestra que $V_w \cap Y_x = \emptyset$. Por tanto Y_x es cerrado en U.

Por tanto Y_x, es abierto y cerrado en U, que es un conexo, esto implica que $Y_x = U$, y esto ocurre para toda $x \in U$.

Así pues, para toda $x, y \in U$, $y \in Y_x$ y, entonces, existe $A \in C(X)$ tal que $x, y \in A \subset U$.

■

El siguiente lema es parte de un teorema más general que dice que todos los abiertos conexos de un continuo localmente conexo son también arcoconexos ([3, Teorema 3.16]). La demostración de dicho teorema no es elemental, pero para el caso de dendritas, lo podemos demostrar con las herramientas que hemos desarrollado hasta este momento.

Lema 4.30 Si X es una dendrita y U es un abierto conexo de X, entonces U es arco conexo.

Demostración.

Como X es una dendrita, entonces X es localmente conexo. Por el Lema 4.29, tenemos que para todo $x, y \in U$, existe $A \in C(X)$ tal que $x, y \in A \subset U$.

Como X es una dendrita y $A \in C(X)$, entonces A es arcoconexo (Lema 4.5). Por tanto $xy \subset A \subset U$. Y esto ocurre para toda $x, y \in U$.

Por tanto U es arcoconexo.

■

Definición 4.31 Un continuo X es *regular*, si X tiene una base de vecindades con frontera finita.

Teorema 4.32 Sea X una dendrita, entonces X es regular.

Demostración.

Sean $x \in X$ y U un abierto de X tales que $x \in U$.

Veremos que existe un abierto V en X tal que $x \in V \subset U$ y $Fr(V)$ es finita.

Como X es una dendrita, entonces X es localmente conexo, por tanto para toda $y \in Fr(U)$ existe un abierto conexo V_y de X tal que $y \in V_y \subset \overline{V_y} \subset X \setminus \{x\}$.

Como $Fr(U)$ es compacta, existen puntos $y_1, y_2, ..., y_n$ en $Fr(U)$ tales que $Fr(U) \subset V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup ... \cup V_{y_n}$

Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, consideremos el arco xy_i

Sea $W = U \cap (X \setminus (\overline{V_{y_1}} \cup \overline{V_{y_2}} \cup ... \cup \overline{V_{y_n}}))$, entonces claramente W es abierto en X y tiene al punto x.

Como x no es un punto aislado en el arco xy_i, entonces existe $z_i \in W \cap (xy_i \setminus \{x\})$.

Sea $Z = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$

$X \setminus Z$ es un abierto de X y $Fr(Z) = Fr(X \setminus Z)$.

Sea V la componente de $X \setminus Z$ que contiene a x.

Como $V \subset X \setminus Z$, entonces por el Lema 4.28, tenemos que $Fr(V) \subset Fr(X \setminus Z) \subset Fr(Z) \subset Z$ de este modo tenemos que $Fr(V)$ es finita.

Veremos ahora que $V \subset U$.

Supongamos, por el contrario, que $V \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Sea $w \in V \cap (X \setminus U)$.

Entonces $x, w \in V$ y V es conexo, por el Lema 4.30 tenemos que $xw \subset V$.

Entonces xw es un arco que intersecta a U y a $(X \setminus U)$. Por tanto $xw \cap Fr(U) \neq \emptyset$.

Entonces $xw \cap V_{y_j} \neq \emptyset$, para alguna $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Sea $s \in xw \cap V_{y_j}$. Entonces por el Lema 4.30, tenemos que $sy_j \subset V_{y_j}$.

Como $z_j \notin V$ entonces $z_j \notin xw = xs \cup sw$.

Como $z_j \notin \overline{V_{y_j}}$ entonces $z_j \notin sy_j$

Por tanto $\underline{\underline{z_j \notin xs \cup sy_j}}$.

Por otro lado tenemos que $xy_j \subset xs \cup sy_j$ y $z_j \in xy_j$.

Por tanto $\underline{\underline{z_j \in xs \cup sy_j}}$.

Esto es una contradicción que nace de suponer que existe $w \in V \cap (X \setminus U)$. Por tanto $V \subset U$.

Tenemos entonces que para toda $x \in X$ y todo abierto U de X, existe V tal que $x \in V \subset U$ y $Fr(V)$ es finita.

Por tanto X es regular.

■

Con esto terminamos de estudiar las propiedades de Dendroides y Dendritas que nos interesan para los siguientes temas tratados en este trabajo, y damos por terminado este capítulo.

Capítulo 5

Separabilidad

En el Capítulo 3, nos preguntamos cómo debería ser un continuo X, para que $(C(X), \tau_P)$ fuera normal, gracias al Lema de Jones (Lema 3.2), sabemos que todos los continuos X tales que $(C(X), \tau_P)$ es separable cumplen con que $(C(X), \tau_P)$ no es normal. Esto nos llevó a preguntarnos cómo debería ser X, para que $(C(X), \tau_P)$ fuera separable. Parece difícil encontrar una caracterización de todos los continuos X para los que $(C(X), \tau_P)$ es separable. Sin embargo, en este capítulo veremos que para los dendroides tal caracterización sí es posible.

Teorema 5.1. Sea X un dendroide, entonces $(C(X), \tau_P)$ no es separable si y sólo si X contiene una colección no numerable de arcos ajenos dos a dos.

Demostración.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{A}$ una familia no numerable de arcos ajenos dos a dos. Para cada arco $\alpha \in \mathcal{A}$, elegimos tres puntos a_α, q_α y b_α en α tales que $q_\alpha \in a_\alpha b_\alpha - \{a_\alpha, b_\alpha\}$.

Definimos $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}(\{a_\alpha\}, \{q_\alpha\})$ y $\mathcal{V}_\alpha = \mathcal{U}(\{b_\alpha\}, \{q_\alpha\})$.

Notemos que tanto $\mathcal{U}_\alpha$ como $\mathcal{V}_\alpha$ son abiertos básicos, no vacíos de τ_P ($\{a_\alpha\} \in \mathcal{U}_\alpha$ y $\{b_\alpha\} \in \mathcal{V}_\alpha$).

Para ver que $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\alpha = \emptyset$. Supongamos que existe un $A \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\alpha$. Entonces $a_\alpha, b_\alpha \in A$ y $q_\alpha \notin A$. Por el Lema 4.5, $q_\alpha \in a_\alpha b_\alpha \subset A$ lo cual es una contradicción. Esto prueba que $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\alpha = \emptyset$.

Probaremos una propiedad de los conjuntos $\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha$ que usaremos frecuentemente.

Propiedad 1 Si $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ con $\alpha \neq \beta$ y $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta = \emptyset$.

Supongamos, por el contrario, que existe un elemento $B \in \mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta$. Tomemos $A \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$. Entonces $a_\alpha, a_\beta \in A$, $b_\alpha, b_\beta \in B$, $q_\alpha, q_\beta \notin A$ y $q_\alpha, q_\beta \notin B$. De aquí que $A \cup a_\beta b_\beta \cup B$ es un continuo que tiene a a_α y b_α. Por el Lema 4.5, $q_\alpha \in a_\alpha b_\alpha \subset A \cup a_\beta b_\beta \cup B$. Esto es absurdo pues $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Esto concluye la prueba de la Propiedad 1.

Veremos ahora que $(C(X), \tau_P)$ no es separable.

Ahora tomemos un subconjunto denso $\mathcal{D}$ de $(C(X), \tau_P)$.

Probaremos que $\mathcal{D}$ es no numerable.

Para cada $A \in C(X)$, definimos $\mathcal{C}_A = \{\alpha \in \mathcal{A} : A \in \mathcal{U}_\alpha\}$.

Analizaremos dos casos:

Caso 1 Existe $A \in C(X)$ tal que $\mathcal{C}_A$ es no numerable.

Dadas α y $\beta \in \mathcal{C}_A$, $A \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$. De acuerdo a la Propiedad 1, $\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta = \emptyset$. Entonces hemos hallado una colección no numerable de abiertos no vacíos y ajenos dos a dos, a saber $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha \in \mathcal{C}_A\}$. Como cada uno de ellos debe tener a un punto de $\mathcal{D}$, concluimos que $\mathcal{D}$ es no numerable.

Caso 2 Para toda $A \in C(X)$, $\mathcal{C}_A$ es a lo más numerable.

Si $\mathcal{D}$ es numerable entonces se tiene que, $\bigcup\{\mathcal{C}_D : D \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{A}$ es numerable. Como $\mathcal{A}$ es no numerable, existe $\gamma \in \mathcal{A} - \bigcup\{\mathcal{C}_D : D \in \mathcal{D}\}$. Entonces $\gamma \notin \mathcal{C}_D$ para ninguna $D \in \mathcal{D}$. Es decir, $D \notin \mathcal{U}_\gamma$ para ninguna $D \in \mathcal{D}$. Esto contradice la densidad de $\mathcal{D}$. Por tanto $\mathcal{D}$ es no numerable.

Esto concluye la prueba de que $(C(X), \tau_P)$ no es separable.

$(\Rightarrow)$ Supondremos que X no contiene una colección no numerable de arcos ajenos dos a dos y probaremos que $(C(X), \tau_P)$ es separable.

Tomemos una función de Whitney fija $\mu : C(X) \to [0, 1]$.

Dada $w \in X$, definimos $f_w : X \to [0, 1]$ de la siguiente manera:

$$f_w(x) = \mu(wx).$$

Dada $r > 0$ definimos

$$D(w, r) = \{x \in X : x \text{ es no es un punto terminal de } X \text{ y } f_w(x) = r\}$$

Propiedad 2 $D(w, r)$ es numerable para toda $w \in X$ y toda $r > 0$.

Supongamos, por el contrario, que $D(w, r)$ es no numerable.

Dada $x \in D(w, r)$, notemos que $w \neq x$. Sabemos que $f_w(x) = r$ y que x no es un punto terminal. Entonces existen puntos diferentes $a_x, b_x \in X$ tales que $x \in a_x b_x - \{a_x, b_x\}$. Como $wx \cap a_x b_x$ es un subarco (o un punto) (Lema 4.5) de $a_x b_x$ que tiene como uno de sus puntos extremo a x, podemos suponer que $wx \cap a_x b_x \subset a_x x$. Entonces $wx \cap xb_x = \{x\}$ y $x \neq b_x$.

Definimos $\mathcal{A} = \{xb_x : x \in D(w, r)\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es una colección de arcos no degenerados. Si probamos que los elementos de $\mathcal{A}$ son ajenos dos a dos, entonces tendremos una contradicción con nuestra hipótesis. Para hacer esto, supongamos $x \neq y$ son elementos de $D(w, r)$ y que $xb_x \cap yb_y \neq \emptyset$. Entonces $xb_x \cup yb_y$ es un subcontinuo de X. Por el Lema 4.5, $xy \subset xb_x \cup yb_y$ y también $xy \subset wx \cup wy$. Por tanto

$$xy \subset (xb_x \cup yb_y) \cap (wx \cup wy) = \{x\} \cup \{y\} \cup (xb_x \cap wy) \cup (yb_y \cap wx).$$

Dada $z \in xb_x \cap wy$, entonces $wx \subset wz$ y $wz \subset wy$. Entonces $r = \mu(wx) \leq \mu(wz) \leq \mu(wy) = r$. Así que $x = z = y$. Este absurdo muestra que $xb_x \cap wy = \emptyset$. Similarmente, $yb_y \cap wx = \emptyset$.

De modo que $xy \subset \{x\} \cup \{y\}$. Esta contradicción prueba que $xb_x \cap yb_y = \emptyset$. Por tanto los elementos de $\mathcal{A}$ son ajenos entre sí. Esto contradice nuestra hipótesis y demuestra que $D(w, r)$ es numerable.

Esto concluye la prueba de la Propiedad 2.

Ahora estamos en posición de construir un subconjunto denso numerable de $(C(X), \tau_P)$.

Fijemos $w_0 \in X$. Definimos $D = \bigcup\{D(w_0, r) : r \in \mathbf{Q} \cap (0,1]\}$. Notemos que D es numerable.

Para cada $x \in X$ y cada $r \in \mathbf{Q} \cap (0,1]$, definimos

$$P(x,r) = \{y \in X : f_x(y) \leq r\}.$$

Finalmente, definimos

$$\mathcal{D} = \{I(d_1, ..., d_n) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} P(d_i, r)) : n \in \mathbf{N},\ d_1, ..., d_n \in D \text{ y } r \in \mathbf{Q} \cap (0,1]\}.$$

Claramente, $\mathcal{D}$ es numerable.

Propiedad 3 Si $a, b \in X$ y $a \neq b$ entonces $ab \cap D \neq \emptyset$ (Además, también es cierto que $ab - \{a,b\} \cap D \neq \emptyset$).

Si $w_0 \in ab$, entonces podemos suponer, por ejemplo, que $w_0 \neq a$. Entonces $f_{w_0}(a) > 0$ y $f_{w_0}(w_0) = 0$. Notemos que $aw_0 \subset ab$. Por el Lema 4.11, $f_{w_0}|_{aw_0}$ es continua. Por tanto, existe $d \in aw_0$ tal que $f_{w_0}(d)$ es un número racional y positivo, de donde $d \in D \cap ab$.

Si $w_0 \notin ab$, entonces existe un único punto $w \in ab$ tal que $w_0w \cap ab = \{w\}$. Podemos suponer, por ejemplo que $w \neq a$. Entonces w_0w es un subconjunto propio de w_0a. De manera que $f_{w_0}(w) < f_{w_0}(a)$. Por la continuidad de $f_{w_0}|_{wa}$ (Lema 4.11), existe $d \in wa$ tal que $f_{w_0}(d)$ es un número racional. Por tanto $d \in D \cap ab$.

Esto concluye la prueba de la propiedad 3.

Mostraremos que $\mathcal{D}$ es denso en $(C(X), \tau_P)$.

Sea $\mathcal{U}(P, Q)$ un básico no vacío de τ_P.

Tenemos que construir un elemento $B \in \mathcal{D}$ tal que $B \in \mathcal{U}(P,Q)$.

Si $P = \emptyset$ entonces elegimos un punto $p \in X - Q$. Observemos que $\emptyset \neq \mathcal{U}(\{p\},Q) \subset \mathcal{U}(P,Q)$. Entonces podemos considerar $\mathcal{U}(\{p\},Q)$ en lugar de $\mathcal{U}(P,Q)$. Por tanto, podemos suponer que $P \neq \emptyset$. Si P consta de un sólo punto p, entonces podemos elegir un arco px en X tal que $px \cap Q = \emptyset$. Entonces $\emptyset \neq \mathcal{U}(\{p,x\},Q) \subset \mathcal{U}(P,Q)$. De manera que podemos trabajar con $\mathcal{U}(\{p,x\},Q)$ en vez de $\mathcal{U}(P,Q)$. De esta forma también podemos suponer que P consta de más de un punto.

Sea r un numero racional positivo tal que $r < \frac{1}{2}mín(\{\mu(pq) : p \in P \text{ y } q \in Q\} \cup \{1\})$

Por el Lema 4.15 se tinene que $I(P)$ es una unión finita de arcos, de donde resulta que $I(P)$ es localmente conexo. Por el Lema 4.11 $f_{w_0}|_{I(P)}$ es una función continua.

Dada $p \in P$, elegimos $u \in I(P)$, con $u \neq p$. Como $I(P)$ es arcoconexo (Lema 4.5), entonces $up \subset I(P)$. Como $I(P) \in \mathcal{U}(P,Q)$ (Lema 4.14), entonces $I(P) \cap Q = \emptyset$. Por tanto $up \cap Q = \emptyset$

Para cada $q \in Q$, $f_q|_{up}$ es una función continua (Lema 4.11).

Como $f_q(p) = \mu(pq) > r$, existe $u_q \neq p$ tal que $u_q \in up$ y para toda $a \in u_qp$, $f_q(a) > r$.

Debido a que Q es un conjunto finito, podemos elegir $v_p \in up$ tal que $v_pp \subset u_qp$ para toda $q \in Q$ y $\mu(v_pp) < r$. Entonces para toda $a \in v_pp$ y toda $q \in Q$ tenemos que $\mu(aq) > r$.

Por la Propiedad 3, podemos elegir $a_p \in D \cap (v_pp \setminus \{v_p, p\})$.

Observemos que para toda $q \in Q$ tenemos que $\mu(a_pp) < r < \mu(a_pq)$.

Definimos $A = \{a_p : p \in P)$.

Ya que $A \subset I(P)$, entonces $I(A) \subset I(P)$ (Lema 4.12), por tanto $I(A) \cap Q = \emptyset$.

Por otra parte como $\mu(a_pp) < r$, tenemos que para toda $p \in P$, $p \in P(a_p, r)$ y como $\mu(a_pq) > r$, resulta que para toda $p \in P$, $P(a_p, r) \cap Q = \emptyset$. Sea

$$B = I(A) \cup \{P(a,r) : a \in A\},$$

Ya habíamos notado que $A \subset D$ y que A es un conjunto finito, también escogimos r de tal forma que r fuera un número racional positivo. Por tanto $B \in \mathcal{D}$.

Veremos ahora que $B \in \mathcal{U}(P,Q)$.

$B \in C(X)$, puesto que es la unión finita de continuos que se intersectan.

Podemos observar también que $P \subset B$, pues para toda $p \in P$, $p \in P(a_p, r)$. Por tanto $P \subset B$.

Y como vimos antes $Q \cap I(A) = \emptyset$ y $Q \cap P(a,r) = \emptyset$ para toda $a \in A$, por lo que $Q \cap B = \emptyset$. Así queda demostrado que $B \in \mathcal{U}(P,Q)$.

Así que para todo abierto básico no vacío $\mathcal{U}(P,Q) \in \tau_P$, construimos un elemento $B \in \mathcal{D}$, tal que $B \in \mathcal{U}(P,Q)$. Esto concluye la demostración del teorema.

■

Habiendo estudiado la separabilidad de $(C(X), \tau_P)$, cuando X es un dendroide, nos preguntamos entonces cómo debería ser X para que $(C(X), \tau_P)$, fuera un espacio segundo numerable. Esto nunca se da, sin embargo definimos el concepto de semibase y pudimos caracterizar a cierta familia de dendroides para los que $(C(X), \tau_P)$ tiene una semibase numerable.

Definición 5.2 Un espacio topológico de Hausdorff X es *segundo numerable* si tiene una base numerable

Lema 5.3 Todo subespacio de un espacio segundo numerable, también es segundo numerable.

Demostración

Sea X un espacio segundo numerable y sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X.

Sea Y un subespacio de X, definimos $\mathcal{B}' = \{Y \cap B : B \in \mathcal{B}\}$. Entonces $\mathcal{B}'$ es una base numerable de Y. Por tanto Y es segundo numerable

■

Teorema 5.4 Sea X un continuo, entonces $(C(X), \tau_P)$ no es segundo numerable.

Demostración

Por la Proposición 2.3 tenemos que la topología producto restringida a $F_1(X)$ es la topología discreta. Como $F_1(X)$ es no numerable, entonces $F_1(X)$ no es segundo numerable, como $F_1(X)$ es un subespacio de $(C(X), \tau_P)$, entonces por el Lema 5.3, $(C(X), \tau_P)$ no es segundo numerable.

Definición 5.5 Una familia no vacía $\mathcal{B}$ de abiertos no vacíos de un espacio topológico Y se dice que es una *semibase* si para todo abierto no vacío U de Y existe un elemento V de $\mathcal{B}$ tal que $V \subset U$.

Teorema 5.6 Sea X un dendroide. Entonces $(C(X), \tau_P)$ tiene una semibase numerable $\mathcal{B}$ si y sólo si X tiene a lo más una cantidad numerable de puntos terminales.

Demostración.

($\Rightarrow$) Lo primero que haremos es construir una semibase numerable $\mathcal{B}'$ de abiertos básicos de $(C(X), \tau_P)$.

Para todo abierto V de $\mathcal{B}$ elegimos un elemento $A_V \in V$. Entonces podemos elegir un abierto básico $\mathcal{U}(P_V, Q_V)$ tal que $A_V \in \mathcal{U}(P_V, Q_V) \subset V$. Sea

$$\mathcal{B}' = \{\mathcal{U}(P_V, Q_V) : V \in \mathcal{B}\}$$

Claramente, $\mathcal{B}'$ es numerable y como para todo abierto no vacío U de $(C(X), \tau_P)$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{U}(P_V, Q_V) \subset V \subset U$, entonces $\mathcal{B}'$ es una semibase numerable formada por abiertos básicos. Sea

$$P = \bigcup\{P_V : V \in \mathcal{B}\}$$

Notemos que P es un conjunto a lo más numerable.

Veremos que X tiene a lo más una cantidad numerable de puntos terminales.

Supongamos, por el contrario, que X tiene una cantidad no numerable de puntos terminales. Entonces existe $x_0 \in T(X)$, tal que $x_0 \notin P$.

Consideremos ahora el abierto básico $\mathcal{U}(\{x_0\}, \emptyset\})$.

Notemos que como $X \in \mathcal{U}(\{x_0\}, \emptyset)$, este abierto básico es no vacío.

Como $\mathcal{B}$ es una semibase, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset \mathcal{U}(\{x_0\}, \emptyset)$.

Entonces $\mathcal{U}(P_V, Q_V) \subset V \subset \mathcal{U}(\{\{x_0\}, \emptyset)$.

Dada $A \in \mathcal{U}(P_V, Q_V)$, $A \in \mathcal{U}(\{x_0\}, \emptyset)$. Entonces $x_0 \in A$.

Por el Lema 4.14 sabemos que $I(P_V) \in \mathcal{U}(P_V, Q_V)$, entonces $x_0 \in I(P_V)$.

Por el Lema 4.15 sabemos que $I(P_V) = \bigcup\{px : p, x \in P_V\}$ por lo que $x_0 \in px$ para algún arco px con $p, x \in P_V$. Pero x_0 es un punto terminal por lo que x_0 es uno de los extremos del arco px, por tanto $x_0 = x$ o $x_0 = p$. Esto es un absurdo puesto que $x_0 \notin P$.

De esta forma hemos llegado a una contradicción que provino del hecho de suponer que X tenía una cantidad no numerable de puntos terminales.

Por tanto X tiene a lo más una cantidad numerable de puntos terminales.

($\Leftarrow$) Fijemos $w_0 \in X$ y una función de Whitney μ para $C(X)$.

Recordemos que en el Capítulo 4 definimos $T(X) = \{p \in X : x \text{ es punto terminal de } X\}$. Sea

$$D = \{x \in X : \mu(w_0 x) \in \mathbf{Q}\} \cup T(X)$$

Observación 1 D es un conjunto numerable.

Para ver que esta observación es cierta, para cada $p \in T(X)$, definimos una función $g_p : w_0 p \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $g_p(x) = \mu(w_0 x)$

Veamos algunas propiedades de estas funciones. Sea $p \in T(X)$, entonces:

a) La función g_p es inyectiva.

Sean $x, y \in w_0 p$ con $x \neq y$ entonces podemos suponer que $w_0 x \subsetneq w_0 y$. Por tanto $\mu(w_0 x) < \mu(w_0 y)$ por lo que $g_p(x) \neq g_p(y)$. De modo que g_p es una función inyectiva.

b) La función g_p es continua.

Recordando la definición de f_{w_0} (Definición 4.10), tenemos que $g_p = f_{w_0}|_{w_0p}$, entonces, por el Lema 4.11, g_p es una función continua.

Por a) y b), tenemos que g_p es homeomorfismo en su imagen.

Sea $D_p = g_p^{-1}(\mathbf{Q})$, entonces D_p es numerable.

Como por hipotesis $T(X)$ es un conjunto numerable, entonces $\bigcup\{D_p : p \in T(X)\}$ es un conjunto numerable. Por tanto $(\bigcup\{D_p : p \in T(X)\}) \cup T(X)$ es un conjunto numerable.

Probaremos que $D = \bigcup\{D_p : p \in T(X)\} \cup T(X)$

Sea $x \in D \setminus T(X)$ entonces $\mu(w_0x) \in \mathbf{Q}$. Como $X = \{w_0p : p \in T(X)\}$ (Lema 4.25), entonces $x \in w_0p$ para alguna $p \in T(X)$. Como $\mu(w_0x) \in \mathbf{Q}$, entonces $x \in D_p$. Por tanto $x \in \bigcup\{D_p : p \in T(X)\}$. De modo que $D \subset \bigcup\{D_p : p \in T(X)\} \cup T(X)$. La otra inclusión es clara.

Por tanto D es numerable.

Con esto terminamos de probar la Observación 1

Observación 2 Si $a, b \in X$ y $a \neq b$, entonces $ab \cap D \neq \emptyset$.

Para mostrar que esto es verdadero, sea ab un arco en X.

Sea $w \in ab$ tal que $w_0w \cap ab = \{w\}$ (Lema 4.16 y Definición 6.9)

Podemos suponer entonces que $w \neq a$, entonces $w_0w \cap wa = \{w\}$. Así que w_0w es un subarco propio de w_0a. Entonces $\mu(w_0w) < \mu(w_0a)$. Consideremos la función f_{w_0} definida en 4.10. Entonces $f_{w_0}(w) < f_{w_0}(a)$ y ,por el Lema 4.11, $f_{w_0}|_{w_0a}$ es continua. De manera que existe $y \in wa$ tal que $f_{w_0}(y) \in \mathbf{Q}$. Como $aw \subset ab$, tenemos que $y \in D \cap ab$.

Con esto terminamos la prueba de la Observación 2.

Sea

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{U}(P, Q) : P, Q \subset D \text{ y } \mathcal{U}(P, Q) \neq \emptyset\}$$

Veremos que $\mathcal{B}$ es una semibase de $(C(X), \tau_P)$.

Sea V un abierto no vacío de $(C(X), \tau_P)$, entonces existe un abierto básico $U(P_1, Q_1) \neq \emptyset$ tal que $U(P_1, Q_1) \subset V$. Si $P_1 = \emptyset$, elegimos un punto $p \in X \setminus Q_1$. Entonces $\emptyset \neq \mathcal{U}(\{p\}, Q_1) \subset \mathcal{U}(P_1, Q_1)$. Entonces podemos considerar $\mathcal{U}(\{p\}, Q_1)$ en lugar de $\mathcal{U}(P_1, Q_1)$. Por tanto, podemos suponer que $P_1 \neq \emptyset$. Si P_1 consta de un sólo punto p, entonces podemos elegir un arco px en X tal que $px \cap Q_1 = \emptyset$. Entonces $\emptyset \neq \mathcal{U}(\{p, x\}, Q_1) \subset \mathcal{U}(P_1, Q_1)$. De manera que podemos trabajar con $\mathcal{U}(\{p, x\}, Q_1)$ en vez de $\mathcal{U}(P_1, Q_1)$. Por tanto, también podemos suponer que P_1 consta de más de un punto.

Sea $P^* = T(I(P_1))$, sabemos que $I(P^*) = I(P_1)$. (Lema 4.24).

Para cada $p \in P^*$ elegimos $x_p \in X$ de la siguiente manera.

Caso a) Si $p \in T(X)$ entonces hacemos $x_p = p$

Caso b) Si $p \in P^* \setminus T(X)$ entonces existe un arco ab de X tal que $p \in ab \setminus \{a, b\}$. De aqui que $ab \cap I(P_1)$ es un subarco (o un conjunto de un sólo punto) α de ab que tiene a p y $\alpha \subset I(P_1)$. Como p es terminal de $I(P_1)$, entonces p es un extremo de α. Podemos suponer entonces que $\alpha \subset ap$. Entonces $pb \cap I(P_1) = \{p\}$. Por la Observación 2, existe un punto $x_p \in pb \cap D$ tal que $px_p \cap Q_1 = \emptyset$. Notemos que $px_p \cap I(P_1) = \{p\}$.

El hecho de que P_1 es no degenerado, podemos elegir un punto $p_0 \in I(P_1) \cap D$. Sea $P = \{x_p : p \in P^*\} \cup \{p_0\}$.

Dada $p \in P^*$, como $px_p \cap I(P_1) = \{p\}$, por el Lema 4.5, $p \in x_p p_0 \subset I(P)$. Esto muestra que $P^* \subset I(P)$. Entonces, por el Lema 4.24, $I(P^*) = I(P_1) \subset I(P)$.

Ya que $I(P_1) \cup (\bigcup\{x_p p : p \in P^*\})$ es un subcontinuo de X que contiene a P, tenemos que este subcontinuo contiene a $I(P)$ (ver Lema 4.12). Y como este subcontinuo no intersecta a Q_1, podemos concluir que $I(P) \cap Q_1 = \emptyset$.

Para cada $q \in Q_1$, por el Lema 4.16, existe un único punto $u \in I(P)$ tal que $qu \cap I(P) = \{u\}$ y por la Observación 2, existe $y_q \in D \cap qu \setminus \{u\}$. Entonces $y_q \notin I(P)$ para ninguna $q \in Q_1$, Sea $Q = \{y_q : q \in Q_1\}$.

Notemos que $I(P) \cap Q = \emptyset$.

Sea $A \in \mathcal{U}(P,Q)$. Entonces $P \subset A$. Por el Lema 4.12, $I(P) \subset A$. Por tanto $I(P_1) \subset A$. Entonces $P_1 \subset A$. Por otro lado, tenemos que $qu \cap I(P) = \{u\}$, $y_q u \subset qu$, así que $u \in A$. Como $Q \cap A = \emptyset$, $y_q \notin A$. Si $q \in A$, entonces $qu \in A$ (Lema 4.5). Esto implica que $y_q \in A$. Esta contradicción prueba que $q \notin A$. De manera que $Q_1 \cap A = \emptyset$. Por tanto $I(P) \in \mathcal{U}(P,Q) \subset \mathcal{U}(P_1,Q_1)$.

Esto concluye la prueba de que $\mathcal{B}$ es una semibase.

■

Con esto terminamos el Capítulo 5. En el siguiente capítulo caracterizaremos a las dendritas como aquellos dendroides que no contienen dos tipos de subdendroides prohibidos (semiescobas y semipeines) y, después continuaremos con el estudio de $(C(X), \tau_P)$ cuando X es un dendroide.

Capítulo 6

Propiedades de los dendroides que no son localmente conexos

En este capítulo estudiaremos a los dendroides que no son localmente conexos, es decir los dendroides que no son dendritas y diremos algunas propiedades que cumplen estos dendroides.

Definición 6.1 Sea X un dendroide, un *semipeine* en X es un subcontinuo Y de X que contiene:

a) un arco $A \subset Y$,

b) dos puntos $p, q \in A$ con $p \neq q$,

c) una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y \setminus A$, y

d) una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A

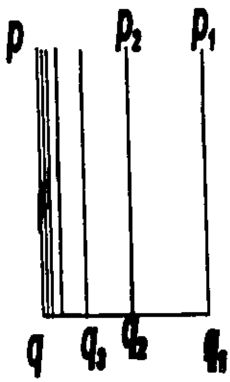
tales que

(i) $Y = A \cup \overline{(\bigcup\{p_n q_n : n \in \mathbb{N}\})}$,

(ii) $p_n \to p$, $q_n \to q$,

(iii) $p_1q_1, p_2q_2, \ldots$ son arcos ajenos dos a dos,

(iv) $p_nq_n \cap A = \{q_n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.



Definición 6.2 Sea X un dendroide, una *semiescoba* en X es un subcontinuo Y de X que contiene:

a) un arco $A \subset Y$,

b) dos puntos $p, q \in A$ con $p \neq q$, y

c) una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y \setminus A$

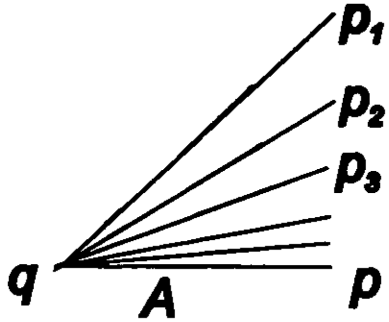
tales que

(i) $Y = A \cup \overline{(\bigcup\{p_nq : n \in \mathbb{N}\})}$,

(ii) $p_n \to p$,

(iii) $p_nq \cap p_mq = \{q\}$ si $m \neq n$,

(iv) $p_nq \cap A = \{q\}$ para toda $n \in \mathbf{N}$.



Definición 6.3 Sea X un continuo, X es *conexo en pequeño* en $x \in X$ si para todo abierto U de X tal que $x \in U$, existe una vecindad conexa (no necesariamente abierta) N de x contenida

en U.

Definición 6.4 Sea X un continuo, X es *localmente conexo* en $x \in X$, si para todo abierto U de X tal que $x \in U$, existe un abierto conexo V que contiene a x y está contenido en U.

Lema 6.5 Sea X un continuo, entonces X es localmente conexo si y sólo si las componentes de los abiertos son abiertas en el continuo.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sean U un abierto de X y C una componente de U. Como X es localmente conexo, tenemos que para toda $p \in C$, existe una abierto conexo V tal que $p \in V \subset U$. Notemos que como V es un abierto conexo, contenido en U y que intersecta a C, entonces $V \subset C$, por lo que C es abierto en X.

$\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y U un abierto en X que contiene a x, sea C la componente de U que tiene a x. Por definición C es conexa, y, por hipótesis, C es abierta. Por lo que ya encontramos un abierto conexo C tal que $x \in C \subset U$.

Por tanto tenemos que X es un espacio localmente conexo.

■

Teorema 6.6 Sea X un continuo, X es localmente conexo en todo punto $x \in X$ si y sólo si X es conexo en pequeño en todo punto $x \in X$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, entonces es claro que X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

$\Leftarrow$) Sea X un continuo conexo en pequeño, veremos que X es localmente conexo. Para demostrar esto usaremos el lema 6.5 y probaremos que las componentes de los abiertos son abiertas.

Sea U un abierto en X, y sea C cualquier componente de U. Tomemos un punto arbitrario $p \in C$. Como X es conexo en pequeño en p, y $p \in C \subset U$, se tiene que existe una vecindad conexa N_p de p tal que $x \in N_p^0 \subset N_p \subset U$.

Dado que C es componente de U, y $N_p \cap C \neq \emptyset$. Entonces $N_p \subset C$. Por tanto $p \in N_p^0 \subset C$, lo que implica que la C es abierta en X. Por tanto X es localmente conexo en todo punto. ■

El siguiente Teorema no lo vamos a demostrar, sin embargo para ver su demostración puede usted referirse a [6,Teorema 5.4].

Teorema 6.7 Sea X un continuo y E un subconjunto propio y no vacío de X. Si K es una componente de E entonces $\overline{K} \cap Fr(E) \neq \emptyset$.

Teorema 6.8 Sea X un dendroide que no es localmente conexo, entonces existen:

(1) dos abiertos U y V en X,

(2) dos puntos diferentes p y $q \in \overline{V}$,

(3) dos sucesiones $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\overline{V}$, y

(4) una sucesión de componentes diferentes $C_0, C_1, C_2, \ldots$ de U

tales que

(A) $\overline{V} \subset U$,

(B) $pq \subset \overline{V} \cap C_0$,

(C) $p_n \to p$, $q_n \to q$, y

(D) $p_n q_n \subset \overline{V} \cap C_n$.

Demostración.

Por el Teorema 6.6 tenemos que como X no es localmente conexo, entonces existen puntos en X en los cuales X no es conexo en pequeño.

Por tanto, existe $p \in X$ tal que X no es conexo en pequeño en p.

De esta forma tenemos que existe U abierto en X tal que para toda vecindad N_p de p contenida en U, N_p no es conexa.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon(p)} \subsetneq U$.

Sea C_0 la componenete de U que tiene a p.

Notemos que, por la forma en que escogimos a U, $p \notin int(C_0)$, entonces $B_\delta(p)$ no está contenida en C_0 para ninguna $\delta > 0$.

Vamos a construir inductivamente lo siguiente:

a) una sucesión de números naturales $\frac{1}{\epsilon} < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$,

b) una sucesión de componentes $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$, de U, y

c) una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$

tales que si $B_i = B_{\frac{1}{n_i}}(p)$, entonces:

i) $p_i \in B_i \cap C_i$, para toda $i \in \mathbf{N}$,

ii) $B_i \cap (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_{i-1}) = \emptyset$ para toda $i \in \mathbf{N}$, y

iii) $C_i \neq C_0$ para toda $i \in \mathbf{N}$.

Para $i = 1$, sea $n_1 \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{\epsilon} < n_1$.

Como B_1 no está contenida en C_0, existe $p_1 \in B_1$ tal que $p_1 \notin C_0$.

Sea C_1 la componente de U que tiene a p_1.

Entonces se cumple que $p_1 \in B_1 \cap C_1$ y también se cumple que $C_1 \cap C_0 = \emptyset$.

Supongamos ahora que ya hemos construido un conjunto finito de números naturales $\{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_j\}$ un conjunto finito de puntos $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_j\}$ y un conjunto finito de componentes $\{C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j\}$ de U con las propiedades mencionadas.

Como C_j es cerrado en U, y como U es abierto de X, $U \setminus C_j$ es un abierto de X tal que $p \in U \setminus C_j$.

Por tanto existe $n_{j+1} \in \mathbf{N}$ tal que $n_{j+1} > n_j$ y que $B_{j+1} \cap C_j = \emptyset$.

Como $B_{j+1} \subseteq B_j$ y $B_j \cap (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_{j-1}) = \emptyset$ tenemos que $B_{j+1} \cap (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_j) = \emptyset$.

Como B_{j+1} no está contenida en C_0 existe $p_{j+1} \in B_{j+1}$ tal que $p_{j+1} \notin C_0$. Sea C_{j+1} la componente de U que tiene a p_{j+1}. De donde tenemos que $C_{j+1} \cap C_0 = \emptyset$.

De esta manera hemos construido inductivamente lo que queríamos y así hemos demostrado que existen abiertos U y $V = B_\epsilon(p)$ en X una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en V, y componentes diferentes $C_0, C_1, C_2, \ldots$ de U tales que $p \in (C_0 \cap \overline{V}) \subset U$, $p_n \in (C_n \cap V)$ para toda $n \in \mathbf{N}$ y $p_n \to p$.

Ahora para toda $n \in \mathbf{N}$, sea D_n la componente de V que contiene a p_n.

Notemos que para toda $n \in \mathbf{N}$, $D_n \subset C_n$ y, como $D_n \subset V$, entonces $\overline{D_n} \subset \overline{V}$. Por tanto $\overline{D_n} \subset (\overline{V} \cap C_n) \subset U$.

Tomemos la sucesión $\{\overline{D_n}\}_{n=1}^{\infty}$ en el compacto $\overline{V}$, entonces existe una subsucesión convergente $\{\overline{D_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\overline{D_{n_k}} \to D_0$ donde D_0 es un subcontinuo de X contenido en $\overline{V}$.

Puesto que para toda $k \in \mathbf{N}$ tenemos que $p_{n_k} \in D_{n_k}$, $\overline{D_{n_k}} \to D_0$ y $p_{n_k} \to p$, entonces $p \in D_0$.

Entonces D_0 es un subcontinuo de U que tiene a p, por tanto $D_0 \subset C_0$.

Por el Teorema 6.6 tenemos que para toda $k \in \mathbf{N}$, $\overline{D_{n_k}} \cap Fr(V) \neq \emptyset$.

Elegimos $q_{n_k} \in \overline{D_{n_k}} \cap Fr(V)$

Podemos suponer que la sucesión $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a un punto q.

Como $\overline{D_{n_k}} \to D_0$ y la sucesión $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ cumple con que $q_{n_k} \to q$ entonces $q \in (D_0 \cap Fr(V))$

Ahora como X es un dendroide y $p_{n_k}, q_{n_k} \in \overline{D_{n_k}}$, entonces $p_{n_k}q_{n_k} \subset \overline{D_{n_k}} \subset (C_{n_k} \cap \overline{V})$.

Notemos también que, como $p \in V$ y $q \in Fr(V)$, entonces $p \neq q$. Del mismo modo para toda $k \in \mathbf{N}$, se cumple que, como $p_{n_k} \in V$ y $q_{n_k} \in Fr(V)$, entonces $p_{n_k} \neq q_{n_k}$.

De esta manera hemos mostrado que existe una sucesión $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ en $\overline{V}$ tal que $q_{n_k} \to q$, $q_{n_k} \in C_{n_k}$ para toda $k \in \mathbf{N}$ y $q \in C_0$.

Notemos que como $p_n \to p$ entonces $p_{n_k} \to p$.

Entonces, ya tenemos dos abiertos U y V en X, dos puntos diferentes p y $q \in \overline{V} \subset U$, dos sucesiones $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ en $\overline{V}$ y componentes diferentes $C_0, C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots$ de U tales que p y $q \in (C_0 \cap \overline{V})$, p_{n_k} y $q_{n_k} \in (C_{n_k} \cap \overline{V})$ para toda $k \in \mathbf{N}$, $p_{n_k} \to p$, $q_{n_k} \to q$ y el arco $p_{n_k}q_{n_k} \subset (\overline{V} \cap C_{n_k})$.

■

Definición 6.9

Sean X un dendroide y L un arco en X, denotamos, para cada $y \in X$, como $\mathcal{P}(y, L)$ al único punto $x \in L$ tal que $yx \cap L = \{x\}$ (tal x existe por el Lema 4.16).

En otras palabras

$$\{\mathcal{P}(y, L)\} = \{x \in L : yx \cap L = \{x\}\}.$$

Notemos que si $y \in L$ entonces $\mathcal{P}(y, L) = \{y\}$.

Teorema 6.10 Sea X un dendroide. Entonces X es una dendrita si y sólo si X no contiene ni semipeines ni semiescobas.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es una dendrita. Vamos a probar que X no contiene semipeines. La demostración de que X no contiene semiescobas es similar.

Supongamos, por el contrario, que X tiene un semipeine Y.

Sean $A \subset Y$, p y $q \in A$, una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y \setminus A$ y una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A que cumplen las condiciones de la definición de semipeine.

Sea W un abierto de X tal que $p \in W$ y $q \notin \overline{W}$. Como X es una dendrita, entonces X es localmente conexo. Así que existe un abierto conexo U de X tal que $p \in U \subset W$. Notemos que $q \in X \setminus \overline{U}$.

Como $p_n \to p$, $q_n \to q$, $p \in U$ y $q \in X \setminus \overline{U}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_N \in U$ y $q_N \in X \setminus \overline{U}$.

Notemos que $A \cup \overline{U}$ es un subcontinuo de X que contiene a p_N y a q_N. Entonces, por el Lema 4.5, $p_N q_N \subset A \cup \overline{U}$. De modo que

$$p_N q_N = p_N q_N \cap (A \cup \overline{U}) = (p_N q_N \cap A) \cup (p_N q_N \cap \overline{U}) = \{q_N\} \cup (p_N q_N \cap \overline{U}).$$

Así que $p_N q_N = \{q_N\} \cup (p_N q_N \cap \overline{U})$. Como $q_N \notin \overline{U}$, $p_N q_N \cap \overline{U}$ es un subarco de $p_N q_N$ que no tiene a q_N. Entonces $\{q_N\} \cup (p_N q_N \cap \overline{U})$ es un conjunto disconexo. Esto contradice la conexidad de $p_N q_N$ y prueba que X no contiene semipeines.

$\Leftarrow$) Para la prueba de esta implicación supondremos que X no es una dendrita y que X no tiene semipeines ni semiescobas. Vamos a dividir la prueba en varios pasos.

Notemos que, como X no es localmente conexo, entonces X cumple con las condiciones del Teorema 6.8, por lo que existen abiertos U y V en X con dos puntos diferentes p y $q \in \overline{V} \subsetneq U$, sucesiones $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\overline{V}$, componentes diferentes $C_0, C_1, C_2, \ldots$ de U tales que $pq \subset C_0 \cap \overline{V}$, $p_n q_n \subset C_n \cap \overline{V}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $p_n \to p$ y $q_n \to q$.

Afirmación 1. Si L y L' son arcos en X tales que $L \cap L' \neq \emptyset$ y $y \in L'$, entonces $\mathcal{P}(y, L) \in L'$.

Aplicando el Lema 4.16 al dendroide L', al subdendroide $L \cap L'$ y al punto $y \in L'$, tenemos que existe un punto $u \in L'$ tal que $yu \cap (L \cap L') = \{u\}$. Entonces $yu \subset L'$. De manera que $yu \cap L = yu \cap L' \cap L = \{u\}$. Por tanto $yu \cap L = \{u\}$. Recordemos que ésta es precisamente la propiedad que define a $\mathcal{P}(y, L)$. Por tanto $\mathcal{P}(y, L) = u \in L'$.

Afirmación 2. Si L es un arco en X entonces los conjuntos $\{n \in \mathbf{N} : p_n \in L\}$ y $\{n \in \mathbf{N} : q_n \in L\}$ son finitos.

Supongamos, por el contrario, que existe un arco L tal que $\{n \in \mathbf{N} : p_n \in L\}$ es infinito.

Sea $J = \{n \in \mathbf{N} : p_n \in L\}$.

Ordenemos los elementos de J de la forma $j_1 < j_2 < j_3 < ...$

Como $p_n \to p$, entonces $p_{j_k} \to p$. Por lo que $p \in L$.

Como $U \cap L$ es un abierto de L que tiene a p y L es localmente conexo, existe un abierto W de L tal que W es conexo y $p \in W \subset (L \cap U)$.

Como C_0 es la componente de U que tiene a p y W es un conexo contenido en U tal que $p \in W$, entonces $W \subset C_0$.

Ahora como $p_{j_k} \in L$ para toda $k \in \mathbf{N}$ y $p_{j_k} \to p$, tenemos entonces que existe $M \in \mathbf{N}$ tal que $p_{j_M} \in W$.

Ahora como $p_{j_M} \in W \subset C_0$ tenemos entonces que $p_{j_M} \in C_0 \cap C_{j_M}$, lo cual contradice el hecho de que cada componente C_i es ajena a C_0.

Por tanto el conjunto $J = \{n \in \mathbf{N} : p_n \in L\}$ es un conjunto finito.

La demostración para ver que el conjunto $\{n \in \mathbf{N} : q_n \in L\}$ es finito, es análoga.

De esta afirmación podemos concluir que para todo arco L en X, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que para toda $n \geq N$ los puntos p_n y $q_n \notin L$.

Afirmación 3. Si L es un arco en X, entonces el conjunto $\{n \in \mathbf{N} : \mathcal{P}(p_n, L) \neq \mathcal{P}(q_n, L)\}$ es finito.

Por la Afirmación 2, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que para toda $n \geq N$, p_n y $q_n \notin L$.

Sea $J = \{n \in \mathbf{N} : n \geq N \text{ y } \mathcal{P}(p_n, L) \neq \mathcal{P}(q_n, L)\}$

Para cada $j \in J$, sean $\mathcal{P}(p_j, L) = r_j$ y $\mathcal{P}(q_j, L) = z_j$.

Vamos a demostrar que, como $r_j \neq z_j$, entonces $r_j \in p_j q_j \setminus \{p_j, q_j\}$.

Sabemos que $p_j q_j \subset \overline{V}$.

Si $p_j q_j \cap L = \emptyset$, entonces como $p_j z_j \subset (p_j q_j \cup z_j q_j)$, tenemos que $p_j z_j \cap L = \{z_j\}$ pero por la forma como definimos r_j, esto quiere decir que $z_j = r_j$. Por tanto $p_j q_j \cap L \neq \emptyset$.

Por la Afirmación 1 aplicada a $L' = p_j q_j$, se tiene que $r_j \in p_j q_j$.

De aquí obtenemos que $r_j \in C_j \cap \overline{V}$.

Supongamos que $J = \{n \in \mathbb{N} : n \geq N \text{ y } \mathcal{P}(p_n, L) \neq \mathcal{P}(q_n, L)\}$ es un conjunto infinito.

Ordenemos los elementos de J en la forma $j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$

La sucesión $\{r_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ está contenida en el conjunto compacto $L \cap \overline{V}$, entonces podemos suponer que $r_{j_k} \to r$ donde $r \in L \cap \overline{V}$.

Como $\overline{V} \subset U$, podemos tomar la componente, C, de U que tiene a r.

Como L es localmente conexo y $U \cap L$ es un abierto en L que tiene a r, existe un abierto W en L tal que, W es conexo y $r \in W \subset L \cap U$.

Como $r \in W$ y W es un conexo contenido en U, tenemos que $W \subset C$.

También, como W es un abierto en L que tiene a r, $r_{j_k} \to r$ y $r_{j_k} \in L$ para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq M$, $r_{j_k} \in W$.

De modo que tenemos que $r_{j_M} \in (C \cap C_{j_M})$, lo que implica que $C = C_{j_M}$.

Pero también ocurre que $r_{j_{M+1}} \in (C \cap C_{j_{M+1}})$, entonces $C = C_{j_{M+1}}$, lo que implica que $C_{j_M} = C_{j_{M+1}}$.

Lo anterior contradice el hecho de que las componentes son diferentes.

Por tanto el conjunto $J = \{n \in \mathbb{N} : n \geq \mathbb{N} \text{ y } \mathcal{P}(p_n, L) \neq \mathcal{P}(q_n, L)\}$ es un conjunto finito.

Notación: Dado un arco, $L \subset X$, por las Afirmaciones 2 y 3, existe $M_L \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M_L$, $\mathcal{P}(q_n, L) = \mathcal{P}(p_n, L)$, $p_n, q_n \notin L$.

Afirmación 4. No existe ningún arco L en X tal que $p \in L$, $R = \{\mathcal{P}(p_n, L) \in L : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito y $L \setminus \{p\}$ tiene un punto r tal que r es un punto de acumulación del conjunto R.

Supongamos que la Afirmación 4 es falsa y que sí existe tal arco L.

Para cada $n \in \mathbf{N}$, Sean $r_n = \mathcal{P}(p_n, L)$ y r un punto de acumulación de la sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$

Como $R = \{\mathcal{P}(p_n, L) \in L : n \in \mathbf{N}\}$ es un conjunto infinito, r es un punto de acumulación de R y, por la Afirmación 2, existe $M \in \mathbf{N}$ tal que para toda $n \geq M$, $p_n \notin L$. Tenemos entonces que existe una subsucesión $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $r_{n_k} \to r$, $r_{n_k} \neq r_{n_j}$ si $k \neq j$ y $n_1 \geq M$. Por tanto $r_{n_k} \neq p_n$ para toda k y para toda $n \in \mathbf{N}$.

Observemos que, como $p_n \to p$, entonces $p_{n_k} \to p$. Sea $Y = \overline{L \cup \bigcup\{p_{n_k} r_{n_k} : k \in \mathbf{N}\}}$. Veremos que Y es un semipeine de X.

El arco que necesitamos es el arco L, los puntos diferentes en L son p y r.

La sucesión que converge a p es $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, la sucesión que converge a r es $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Notemos que $p_{n_k} \to p$, $r_{n_k} \to r$ y para toda $k \in \mathbf{N}$, $p_{n_k} \notin L$, $r_{n_k} \in L$ y $r_{n_k} \neq r_{n_j}$ si $k \neq j$.

Con esto hemos construido un semipeine. Esto es una contradicción porque estamos suponiendo que X no contiene semipeines. De esta manera tenemos que la Afirmación 4 es verdadera.

Afirmación 5. No existe ningún arco L en X tal que $q \in L$, $R' = \{\mathcal{P}(q_n, L) \in L : n \in \mathbf{N}\}$ es un conjunto infinito y $L \setminus \{q\}$ tiene un punto r tal que r es un punto de acumulación del conjunto R'.

La demostración de la Afirmación 5 es análoga a la de la Afirmación 4.

Afirmación 6. Para todo arco L en X, los conjuntos $\{\mathcal{P}(p_n, L) \in L : n \in \mathbf{N}\}$ y $\{\mathcal{P}(q_n, L) \in L : n \in \mathbf{N}\}$ son finitos.

Supongamos, por el contrario, que existe un arco L en X tal que el conjunto $\{\mathcal{P}(p_n, L) \in L : n \in \mathbf{N}\}$ es infinito. Entonces por la Afirmación 3 tenemos que $\{\mathcal{P}(p_n, L) \in L : n \geq M_L\} = \{\mathcal{P}(q_n, L) \in L : n \geq M_L\}$ también es infinito.

Supongamos que $L = ab$.

Si $p \notin L$ entonces sea $c = \mathcal{P}(p, L)$. Por definición $pc \cap L = \{c\}$. Sean $L_1 = pc \cup ca$ y $L_2 = pc \cup cb$. Notemos que L_1 y L_2 son arcos. Como $\{\mathcal{P}(p_n, L) \in L : n \geq M_L\}$ es infinito y $L \subset L_1 \cup L_2$, entonces $\{\mathcal{P}(p_n, L) \in L_1 : n \geq M_L\}$ es infinito o $\{\mathcal{P}(p_n, L) \in L_2 : n \geq M_L\}$ es infinito. Supongamos por ejemplo, que $\{\mathcal{P}(p_n, L) \in L_1 : n \geq M_L\}$ es infinito. Entonces $\{\mathcal{P}(p_n, L) \in L_1 : n \geq M_L\} \setminus \{c\}$ es infinito. Aseguramos que $\{\mathcal{P}(p_n, L) \in L_1 : n \geq M_L\} \setminus \{c\} =$

$\{\mathcal{P}(p_n, L_1) \in L_1 : n \geq M_L\} \setminus \{c\}$. Para probar esta igualdad de conjuntos, primero tomemos un punto x en el conjunto de la izquierda. Entonces $x \in L_1 \setminus \{c\}$ y x es de la forma $x = \mathcal{P}(p_n, L)$ para alguna $n \geq M_L$. Entonces $p_n x \cap L = \{x\}$. Sea $y = \mathcal{P}(p_n, L_1)$. Entonces $y \in L_1 = pc \cap ca$. Analizaremos dos posibilidades:

Si $y \in pc$ entonces $p_n y \cap pc = \{y\}$. De manera que $p_n y \cup yc = p_n c$. Por la Afirmación 1 aplicada al arco $L' = p_n c$, tenemos que $x \in p_n c = p_n y \cup yc$. No es posible que $x \in yc$ pues, de lo contrario, $x \in yc \cap L \subset pc \cap L = \{c\}$. De modo que $x \in p_n y$. Por tanto $p_n x \subset p_n y$. Por otra parte, aplicando la Afirmación 1 al arco $L' = p_n x$ $(x \in L_1)$, tenemos que $y \in p_n x$. Así que $p_n y \subset p_n x$. De esta manera concluimos que $p_n y = p_n x$. Por tanto $x = y$.

Si $y \in ac \subset L$, aplicamos la Afirmación 1 al arco $L' = p_n y$ y obtenemos que $x \in p_n y$. Como $x \in L_1$, aplicando la Afirmación 1 al arco $L' = p_n x$, tenemos que $y \in p_n x$. Esto implica que $y = x$.

Ahora tomemos un punto y en el conjunto de la derecha. Entonces y es de la forma $y = \mathcal{P}(p_n, L_1) \in L_1 \setminus \{c\}$, donde $n \geq M_L$. Sea $x = \mathcal{P}(p_n, L)$. Si $x \in L_1$, entonces x es como el que tomamos en la prueba de la otra contención y haciendo lo mismo, se obtiene que $x = y$. Podemos suponer entonces que $x \in L - L_1$. Entonces $x \in cb \setminus \{c\}$. Entonces $p_n x \cup xc = p_n c$. Por la Afirmación 1 aplicada a $L' = p_n c$, tenemos que $y \in p_n c = p_n x \cup xc$. Pero $y \in L_1 - \{c\}$, de modo que $y \in p_n x$. De manera análoga $x \in p_n y$. Por tanto $x = y$.

Esto termina la prueba de la igualdad de conjuntos.

Por tanto $\{\mathcal{P}(p_n, L) \in L_1 : n \geq M_L\} - \{c\} = \{\mathcal{P}(p_n, L_1) \in L_1 : n \geq M_L\} - \{c\}$ es infinito. Sea r un punto de acumulación de este conjunto. Como $r \in L$ y $p \notin L$, entonces $r \neq p$. Esto contradice la afirmación 4.

Por tanto $p \in L$.

Similarmente, $q \in L$.

Ahora tomamos un punto de acumulación, r, del conjunto $\{\mathcal{P}(p_n, L) \in L : n \geq M_L\} = \{\mathcal{P}(q_n, L) \in L : n \geq M_L\}$. Entonces podemos suponer que $r \neq p$ (el otro caso es que $r \neq q$). Con esto contradecimos la Afirmación 4.

Esto termina la prueba de la Afirmación 6.

Afirmación 7. Es posible construir inductivamente:

a) una sucesión de subconjuntos infinitos de los números naturales $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$, y

b) una sucesión de puntos $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$

que cumplen que

i) $z_0 \in \{p, q\}$, $z_1 \in pq \setminus \{z_0\}$,

ii) si $z_0 = p$ entonces para toda $k \geq 2$ y para toda $j \in J_k$, $z_k = \mathcal{P}(p_j, z_0 p_{n_{k-1}})$,

iii) si $z_0 = q$ entonces para toda $k \geq 2$ y para toda $j \in J_k$, $z_k = \mathcal{P}(q_j, z_0 q_{n_{k-1}})$,

iv) $z_0 z_{k-1} \subset z_0 z_k$ para toda $k \in \mathbf{N}$,

v) $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots$, y

vi) $M_{z_0 z_k} \leq mín J_k < mín J_{k+1}$ para toda $k \in \mathbf{N}$.

Consideremos el arco pq. Por la Afirmación 6, $\{\mathcal{P}(q_n, pq) : n \geq M_{pq}\}$ es un conjunto finito.

De tal modo que existe $z_1 \in pq$ tal que $\mathcal{P}(q_n, pq) = z_1$ para una infinidad de $n \in \mathbf{N}$.

Como $p \neq q$, entonces se cumple que $z_1 \neq p$ o $z_1 \neq q$.

Si $z_1 = p$ entonces tomemos $z_0 = q$.

Si $z_1 \neq p$ entonces hacemos $z_0 = p$.

Sean $J_1 = \{n \geq M_{pq} : \mathcal{P}(q_n, pq) = z_1\}$ y $n_1 = mín J_1$.

Como $n_1 \geq M_{pq}$, entonces $q_{n_1} \notin pq$. Como $z_0 z_1 \subset pq$, tenemos que $q_{n_1} \notin z_0 z_1$. Además tenemos que $\mathcal{P}(q_{n_1}, z_0 z_1) = z_1$. Por tanto $z_0 z_1 \cup z_1 q_{n_1}$ es un arco.

Sea $L_1 = z_0 z_1 \cup z_1 q_{n_1}$.

Como $z_0 z_1 \subset pq$.

Dada $j \in J_1$, $\mathcal{P}(q_j, pq) = z_1$, es decir, $q_j z_1 \cap pq = \{z_1\}$.

Por lo que $q_j z_1 \cap z_0 z_1 = \{z_1\}$, entonces $\mathcal{P}(q_j, z_0 z_1) = \{z_1\}$. De esta manera tenemos que, $\mathcal{P}(q_j, L_1) = \mathcal{P}(q_{nj}, z_0 z_1 \cup z_1 q_{n_1}) = \mathcal{P}(q_j, z_1 q_{n_1})$.

Por lo que podemos concluir que $\mathcal{P}(q_j, L_1) \in z_1 q_{n_1}$.

Entonces hemos construido z_0, z_1 y J_1.

Observemos que z_0, z_1 satisfacen la condición i). Las condiciones ii), iii), iv), v) y vi) se satisfacen por vacuidad.

Supongamos ahora que hemos construido:

a) una familia de subconjuntos infinitos de los números naturales $\{J_1, J_2, J_3, \ldots, J_k\}$.

b) un conjunto de puntos $\{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_k\}$

que cumplen que con las condiciones i), ii), iii), iv), v) y vi).

En este momento suponemos que $z_0 = q$. El caso en que $z_0 = p$ es análogo.

Sea $n_k = mínJ_k \geq M_{z_0z_k}$, entonces $q_{n_k} \notin z_0z_k$ y además $\mathcal{P}(q_{n_k}, z_0z_k) = z_k$. Por tanto $z_0z_k \cup z_kq_{n_k}$ es un arco.

Sea $L_{k+1} = z_0z_k \cup z_kq_{n_k}$.

Por la Afirmación 6, el conjunto $R = \{\mathcal{P}(q_j, L_{k+1}) : j \in J_k\}$ es finito.

De tal manera que existe $z_{k+1} \in z_kq_{n_k}$ tal que $\mathcal{P}(q_j, L_{k+1}) = z_{k+1}$ para una infinidad de índices $j \in J_k$.

Sea $J_{k+1} = \{j \in J_k : \mathcal{P}(q_j, L_{k+1}) = z_{k+1}$ y $j > máx\{n_k, M_{L_{k+1}}\}\}$.

Sea $n_{k+1} = mínJ_{k+1}$.

Entonces tenemos que:

i) $z_0 \in \{p, q\}$, $z_1 \in pq \setminus \{z_0\}$,

ii) $z_{k+1} = \mathcal{P}(q_j, z_0q_{n_k})$ para toda $j \in J_{k+1}$,

iii) $z_0z_k \subset z_0z_{k+1}$,

iv) $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset ... \supset J_k$, y

v) $M_{L_{k+1}} \leq mínJ_k < mínJ_{k+1}$.

De esta forma hemos construido inductivamente lo que queríamos. Por lo que hemos probado la Afirmación 7.

Entonces la sucesión $\{z_0z_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión creciente de arcos en el dendroide X. Por el Teorema 4.19, exite un arco ab de X tal que $z_0z_k \subset ab$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Pensando el arco ab como el intervalo $[0, 1]$, podemos pensar a los puntos z_k como una sucesión creciente en $[0, 1]$. Sea $z = lím z_k$ Entonces $z_0z_k \to z_0z$. Hacemos $L = z_0z$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $n_k = mínJ_k$. Ya que $n_k \to \infty$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > M_L$ para toda $k \geq K$.

Afirmación 8. Para toda $k \geq K$, $p_{n_k} \notin L$, $q_{n_k} \notin L$ y si $y_k = \mathcal{P}(p_{n_k}, L) = \mathcal{P}(q_{n_k}, L)$ entonces $y_k \in z_{k+1}z$.

Por la forma en que definimos M_L, sólo necesitamos probar que $y_k \in z_{k+1}z$.

Sea $k \geq K$. Como $z_{k+1} = \mathcal{P}(q_{n_{k+1}}, z_0q_{n_k})$, por definición tenemos que $z_{k+1} \in z_0q_{n_k}$. Aplicamos la Afirmación 1 a $L' = z_{k+1}q_{n_k}$, observemos que $z_{k+1} \in L$, entonces $y_k \in z_{k+1}q_{n_k}$. De manera que $y_k \notin z_0z_{k+1} - \{z_{k+1}\}$. Pero $y \in L = z_0z$. Entonces $y \in z_{k+1}z$.

Afirmación 9. definimos y_k como en la Afirmación 8 entonces $\{y_k \in L : k \geq K\}$ es finito.

Como $y_k = \mathcal{P}(p_{n_k}, L) = \mathcal{P}(q_{n_k}, L)$, la Afirmación 9 es una consecuencia inmediata de la Afirmación 6.

Afirmación 10. Si k y $m \geq K$ son tales que $y_k = y_m$ entonces $q_{n_k} y_k \cap q_{n_m} y_m = \{y_k\}$.

Supongamos que $k < m$. Como $n_m \in J_m \subset J_{k+1}$, recordando que estamos suponiendo que $z_0 = q$, la Afirmación 7 (iii) nos dice que $z_{k+1} = \mathcal{P}(q_{n_m}, z_0 q_{n_k})$. De donde $z_{k+1} \in q_{n_m} q_{n_k}$. Pero como $z_{k+1} \in L$, aplicando la Afirmación 1 a $L' = q_{n_m} z_{k+1}$, tenemos que $y_m \in q_{n_m} z_{k+1}$. Similarmente, $y_k \in q_{n_k} z_{k+1}$. Como $y_k = y_m$, entonces $y_k \in q_{n_m} z_{k+1} \cap q_{n_k} z_{k+1} = \{z_{k+1}\}$. Entonces $y_k = y_m = z_{k+1}$. Por tanto $q_{n_k} y_k \cap q_{n_m} y_m = \{y_k\}$.

Estamos listos para obtener la contradicción final.

Por la Afirmación 6 $\{y_k : k \geq K\}$ es finito. Entonces existe una sucesión creciente de enteros positivos $K \leq k_1 < k_2 < \ldots$ y existe un punto $y \in L$ tales que $y_{k_j} = y$ para toda $j \in \mathbb{N}$.

Vamos a mostrar ahora que X contiene una semiescoba.

Para esto, consideramos el arco L, los puntos $q = z_0$ y $y \in z_1 z \subset L - \{z_0\}$ (ver Afirmación 8). También consideramos la sucesión $\{q_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ en $X - L$. Entonces el continuo $Y = L \cup (\overline{\bigcup\{q_{n_{k_y}} y : j \in \mathbb{N}\}})$ es claramente una semiescoba (ver Afirmación 10).

Esto nos da una nueva contradicción y termina la prueba del teorema.

■

Con esto concluimos el Capítulo 6, el hecho de que los dendroides que no son localmente conexos contengan un semipeine o una semiescoba, nos va a servir para caracterizar a las dendritas dentro de los dendroides, utilizando τ_P y τ_H en $C(X)$.

Capítulo 7

Comparación de las Topologías

En este capítulo vamos a ver qué relación existe entre la topología τ_H en $C(X)$ dada por la métrica de Hausdorff, que fue definida en el Capítulo 1, y τ_P

Estas dos topologías no son iguales, sin embargo pueden ser comparadas cuando los continuos tienen ciertas características.

Teorema 7.1 Sea X un continuo no degenerado, entonces τ_P no está contenida en τ_H.

Demostración.

Para demostrar esto, mostraremos que existe un abierto básico $\mathcal{U}(P,Q)$ de $(C(X),\tau_P)$ tal que $\mathcal{U}(P,Q)$ no es abierto de $(C(X),\tau_H)$.

Primero observemos que como X es un continuo no degenerado, existen dos puntos diferentes p y q tales que $p,q \in X$.

Consideremos ahora $\mathcal{U}(\{p\},\{q\})$.

Claramente $\{p\} \in \mathcal{U}(\{p\},\{q\})$.

Supongamos que $\tau_P \subset \tau_H$.

Entonces debe existir $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^H(\{p\}) \subset \mathcal{U}(\{p\},\{q\})$.

Notemos ahora que como X es un continuo no degenerado, entonces X no tiene puntos aislados.

De manera que existe un punto $t \in B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$.

Entonces $\{t\} \in B_\varepsilon^H(\{p\})$ y $\{t\} \notin \mathcal{U}(P,Q)$.

Esto contradice la elección de ε y termina la prueba de que $\tau_P \not\subseteq \tau_H$.

■

La siguiente parte del capítulo la dedicaremos a estudiar algunos casos en que $\tau_H \subset \tau_P$, para esta parte también nos enfocamos a estudiar $C(X)$ cuando X es un dendroide y caracterizamos a los dendroides que cumplen con que $\tau_H \subset \tau_P$.

Los siguientes dos lemas nos permiten ver para qué tipo de dendroides se cumple que $\tau_H \subset \tau_P$.

Lema 7.2 Si X es un dendroide que contiene un semipeine Y, entonces τ_H no está contenida en τ_P.

Demostración.

Recordemos que un semipeine en X es un subcontinuo Y de X que contiene:

a) un arco A

b) dos puntos $p, q \in A$ con $p \neq q$,

c) una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y \setminus A$, y

d) una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A

tales que

(i) $Y = A \cup \overline{(\bigcup\{p_nq_n : n \in \mathbb{N}\})}$,

(ii) $p_n \to p$, $q_n \to q$,

(iii) $p_1q_1, p_2q_2, ...$ son arcos ajenos dos à dos,

(iv) $p_nq_n \cap A = \{q_n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, al arco A_n como $A_n = p_nq_n$.

Entonces $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$ y $A_n \cap A = \{q_n\}$ para toda $n \in \mathbf{N}$.

Como por b), tenemos que $p \neq q$. Sea $\varepsilon = \frac{d(p,q)}{2}$, entonces $\varepsilon > 0$.

Consideremos $B_\varepsilon^H(\{q\})$.

Por la manera en que elegimos a ε, se cumple que $B_\varepsilon(p) \cap B_\varepsilon(q) = \emptyset$.

Veremos que τ_H no está contenida en τ_P.

Supongamos, por el contrario, que $\tau_H \subset \tau_P$, entonces $B_\varepsilon^H(\{q\}) \in \tau_P$. Como $\{q\} \in B_\varepsilon^H(\{q\})$, entonces existe un abierto básico $\mathcal{U}(P,Q) \in \tau_P$, tal que $\{q\} \in \mathcal{U}(P,Q) \subset B_\varepsilon^H(\{q\})$.

De esta forma tenemos que $P \subset \{q\}$, por tanto $P = \{q\}$ o $P = \emptyset$. Notemos también que $q \notin Q$.

Como $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

Entonces tenemos una colección númerable de arcos ajenos. Como Q es un subconjunto finito de X, entonces existe $M \in \mathbf{N}$ tal que para toda $m \geq M$, $A_m \cap Q = \emptyset$.

Como por ii) $q_n \to q$ y $q_n \neq q_m$, si $n \neq m$, entonces existe $N \in \mathbf{N}$, tal que para toda $n \geq N$, $qq_n \cap Q = \emptyset$.

Entonces, para toda $n \geq N$, $\{q\} \subset qq_n$ y $qq_n \cap Q = \emptyset$. De manera que $qq_n \in \mathcal{U}(P,Q)$.

Sea $K = máx\{M,N\}$. Como para toda $k \geq K$, $qq_k \in \mathcal{U}(P,Q)$, $A_k \cap Q = \emptyset$ y $A_k \cup qq_k \in C(X)$, entonces para toda $k \geq K$, $A_k \cup qq_k \in \mathcal{U}(P,Q) \subset B_\varepsilon^H(\{q\})$.

Como $A_k \cup qq_k \in B_\varepsilon^H(\{q\})$ y $p_k \in A_k$, entonces $p_k \in B_\varepsilon(q)$ para toda $k \geq K$.

Consideremos ahora $B_\varepsilon(p)$, como por c) $p_n \to p$, entonces existe $K' \in \mathbf{N}$, tal que $K' \geq K$ y para toda $k \geq K'$, $p_k \in B_\varepsilon(p)$.

Entonces tenemos que $p_k \in B_\varepsilon(p) \cap B_\varepsilon(q)$. Esto es una contradicción que nace de suponer que $\tau_H \subset \tau_P$.

De aquí concluimos que τ_H no está contenida en τ_P.

■

Lema 7.3 Si X es un dendroide que contiene una semiescoba Y, entonces, $\tau_H \not\subset \tau_P$.

Demostración.

Recordemos que una semiescoba en X es un subcontinuo Y de X que contiene:

a) un arco A,

b) dos puntos $p, q \in A$ con $p \neq q$, y

c) una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y \setminus A$

tales que

(i) $Y = A \cup \overline{(\bigcup\{p_n q : n \in \mathbf{N}\})}$,

(ii) $p_n \to p$,

(iii) $p_n q \cap p_m q = \{q\}$ si $m \neq n$,

(iv) $p_n q \cap A = \{q\}$ para toda $n \in \mathbf{N}$

Para cada $n \in \mathbf{N}$ definimos al arco A_n como: $A_n = p_n q$.

Notemos que $A_n \cap A_m = \{q\}$ si $n \neq m$.

Como por b), tenemos que $p \neq q$, sea $\varepsilon = \frac{d(p,q)}{2}$, entonces $\varepsilon > 0$.

Consideremos $B_\varepsilon^H(\{q\})$.

Por la manera en que elegimos a ε, se cumple que $B_\varepsilon(p) \cap B_\varepsilon(q) = \emptyset$.

Veremos que τ_H no está contenida en τ_P.

Supongamos, por el contrario, que $\tau_H \subset \tau_P$, entonces $B_\varepsilon^H(\{q\}) \in \tau_P$. Como $\{q\} \in B_\varepsilon^H(\{q\})$, entonces existe un abierto básico $\mathcal{U}(P,Q) \in \tau_P$, tal que $\{q\} \in \mathcal{U}(P,Q) \subset B_\varepsilon^H(\{q\})$.

De esta forma tenemos que $P \subset \{q\}$, por tanto $P = \{q\}$ o $P = \emptyset$. Notemos que $q \notin Q$.

Como tenemos que $A_n \cap A_m = \{q\}$ si $n \neq m$, entonces tenemos una colección númerable de arcos que sólo se intersectan en $\{q\}$. Como Q es un subconjunto finito de X y $q \notin Q$, entonces existe $M \in \mathbf{N}$ tal que para toda $m \geq M$, $A_m \cap Q = \emptyset$.

Entonces para toda $m \geq M$, tenemos que $A_m \cap Q = \emptyset$, $\{q\} \subset A_m$ y $A_m \in C(X)$. Por tanto para toda $m \geq M$, $A_m \in \mathcal{U}(P,Q) \subset B_\varepsilon^H(\{q\})$.

Como $A_m \in B_\varepsilon(\{q\})$ y $p_m \in A_m$, entonces $p_m \in B_\varepsilon(q)$, para toda $m \geq M$.

Consideremos ahora $B_\varepsilon(p)$, como por ii) $p_n \to p$, entonces existe $N \in \mathbf{N}$, tal que $N \geq M$ y para toda $n \geq N$, $p_n \in B_\varepsilon(p)$.

Entonces, $p_N \in B_\varepsilon(q) \cap B_\varepsilon(p)$. Esto es una contradicción, que nace de suponer que $\tau_H \subset \tau_P$.

De aquí concluimos que τ_H no está contenida en τ_P. ■

Recordemos que en el Capítulo 4, dijímos que un dendroide localmente conexo es una dendrita, (Definición 4.26) y probamos que las dendritas son regulares.

El siguiente Teorema nos permite caracterizar a los continuos localmente conexos y regulares comparando las topologías τ_H y τ_P, de hecho nos permite caracterizar a las dendritas dentro de la clase de los dendroides.

Teorema 7.4. Si X es un continuo localmente conexo, entonces X es regular si y sólo si $\tau_H \subset \tau_P$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea A un subcontinuo no vacío de X, mostraremos que para toda $\varepsilon > 0$, existen P y Q subconjuntos finitos de X, tales que $A \in \mathcal{U}(P,Q) \subset B_\varepsilon^H(A)$.

Recordemos que $B_\varepsilon^H(A) = \bigcup\{B_\varepsilon(a) : a \in A\}$.

Dada $a \in A$, $a \in B_\varepsilon(a)$, como X es regular, existe un abierto U_a de X, tal que $a \in U_a \subset B_\varepsilon(a)$, $diám(U_a) < \varepsilon$ y $Fr(U_a)$ es finita.

Por tanto $A \subset \bigcup\{U_a : a \in A\}$

Como A, es compacto, existen puntos $a_1, a_2, ..., a_n$ tales que $a_i \in A$ para toda $i \in \{1, 2, ...n\}$ y tales que $A \subset U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup ... \cup U_{a_n}$.

Sea $U = U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup ... \cup U_{a_n}$.

Definimos $U_i = U_{a_i}$

Veremos que U es un abierto en X que cumple que si $B \in C(X)$ es tal que $B \subset U$ y $B \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $B \in B_\varepsilon^H(A)$.

Sea B que cumple con las condiciones mencionadas, entonces para toda $b \in B$, $b \in U_i$ para alguna $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por tanto $d(b, a_i) < \varepsilon$ de modo que $\underline{\underline{B \subset N(\varepsilon, A)}}$.

Sea $a \in A$, entonces $a \in U_i$ para alguna $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Como $B \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces existe $b_i \in U_i$ y como el $diám(U_i) < \varepsilon$, entonces $d(a, b_i) < \varepsilon$. Por tanto $A \subset N(\varepsilon, B)$.

Entonces $B \in B_\varepsilon^H(A)$.

Ahora como $Fr(U_{a_i})$ es finita para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, y como por el Lema 4.27 $Fr(U) \subset Fr(U_{a_1}) \cup Fr(U_{a_2}) \cup ... \cup Fr(U_{a_n})$. Entonces $Fr(U)$, es finita.

Sean $P = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ y $Q = Fr(U)$.

Es claro que $P \subset A$ y, como $A \subset U$ y U es abierto en X, entonces $A \cap Fr(U) = \emptyset$, por tanto $A \cap Q = \emptyset$, de modo que $A \in \mathcal{U}(P, Q)$.

Sea $C \in \mathcal{U}(P, Q)$, entonces $P \subset C$ y $C \cap Q = \emptyset$.

Veremos que $C \in B_\varepsilon^H(A)$.

Como $P \subset C$, entonces $C \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Supongamos que C no está contenido en U, entonces $C \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$.

Entonces C es un conexo que intersecta a U y a su complemento, por tanto $C \cap Fr(U) \neq \emptyset$. Pero $Fr(U) = Q$, lo cual implica que $C \cap Q \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción que nace de suponer que $C \not\subset U$.

Por tanto $C \subset U$ y $C \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, por tanto $C \in B_\varepsilon^H(A)$.

De modo que para toda $\varepsilon > 0$, existen subconjuntos finitos P y Q de X, tales que $A \in \mathcal{U}(P, Q) \subset B_\varepsilon^H(A)$, lo cual implica que $\tau_H \subset \tau_P$.

$\Leftarrow$) Veremos ahora que X es regular. Mostraremos que para toda $\varepsilon > 0$ existe U abierto en X, tal que $x \in U \subset B_\varepsilon(x)$, y $Fr(U)$ es finita.

Dada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, tenemos por hipótesis que existe $\mathcal{U}(P, Q)$ abierto básico de τ_P, tal que $\{x\} \in \mathcal{U}(P, Q) \subset B_\varepsilon^H(\{x\})$. Como $P \subset \{x\}$, entonces $P = \{x\}$ o $P = \emptyset$.

Como Q es un subconjunto finito de X, entonces Q es cerrado en X, de modo que $X \setminus Q$, es abierto en X y $Fr(X \setminus Q) = Q$.

Sea U la componente de $X \setminus Q$ que contiene a x.

Tenemos que, como X es localmente conexo, $X \setminus Q$ es abierto y U es una componente de $X \setminus Q$, entonces por el Lema 6.5, U es abierto en X. Por el Lema 4.28

$Fr(U) \subset Fr(X \setminus Q)$, de modo que $Fr(U)$ es finita.

Veremos que $U \subset B_\varepsilon(x)$.

Sea $y \in U$, por el Lema 4.29, existe $A \in C(X)$ tal que $x, y \in A \subset U$.

De modo que $A \cap Fr(U) = \emptyset$, esto implica que $A \cap Q = \emptyset$ y como $x \in A$, entonces $\{x\} \subset A$.

Por tanto $A \in \mathcal{U}(P, Q) \subset B_\varepsilon^H(\{x\})$

Notemos que, como $y \in A \subset \mathcal{U}(P, Q) \subset B_\varepsilon^H(\{x\})$, entonces $y \in B_\varepsilon(x)$.

Por tanto para toda $x \in X$, y para toda $\varepsilon > 0$, existe U, abierto en X, tal que $x \in U \subset B_\varepsilon(x)$ y $Fr(U)$ es finita.

Así pues tenemos que X tiene una base de vecindades con frontera finita y, por tanto, X es regular.

■

Corolario 7.5 Si X es un dendroide, entonces X es una dendrita si y sólo si $\tau_H \subset \tau_P$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Como X es una dendrita entonces por el Lema 4.32 X es regular, y por definición X es localmente conexo de modo que por el Teorema 7.4 $\tau_H \subset \tau_P$.

$\Leftarrow$) Sea X un dendroide que no es una dendrita, entonces X no es localmente conexo, por el Teorema 6.10 X contiene un semipeine o una semiescoba.

Si X contiene un semipeine entonces por el Lema 7.2, tenemos que τ_H no está contenida en τ_P.

Si X contiene una semiescoba entonces por el Lema 7.3, tenemos que τ_H no está contenida en τ_P.

De modo que si $\tau_H \subset \tau_P$ y X es un dendroide entonces X es una dendrita.

■

Bibliografía

[1] Castañeda, Enrique, PRODUCTOS NORMALES, *Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1996.*

[2] Dugundji, James,TOPOLOGY, *Allyn and Bacon, Inc., 1966.*

[3] Hocking, John and Young, Gail, TOPOLOGY, *Dover Publications, New York, 1988.*

[4] Illanes, Alejandro, NOTAS DE HIPERESPACIOS, *Notas de clase, Instituto de Matemáticas, UNAM, 1990*

Munkres, James R. TOPOLOGY, A FIRST COURSE, *Prentice Hall, Inc., 1975*

[6] Nadler, Jr. Sam B.,CONTINUUM THEORY: AN INTRODUCTION, *Marcel Dekker, Inc. 1992.*

[7] Whyburn, Gordon, ANALYTIC TOPOLOGY, *AMS Colloquium Publications, Vol XXVIII, 1942.*