

5
2ojm



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DISPERSION DE LUZ POR UNA BURBUJA SONOLUMINISCENTE

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A

acobo
ALFREDO J. ALEXANDER-KATZ ROMERO

ASESOR: **DR. RUBEN G. BARRERA PEREZ**



MEXICO. D. F. FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

1998

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

262757



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Dispersión de luz por una burbuja Sonoluminiscente"

realizado por ALFREDO J. ALEXANDER-KATZ

con número de cuenta 9450338-6 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. RUBEN GERARDO BARRERA PEREZ

Propietario

DR. RAFAEL SOTO MONTIEL

Propietario

DR. EMMANUEL HARO PONIATOWSKI

Suplente

DR. MARCOS LEY KOO

Suplente

DR. RAUL ESQUIVEL SIRVENT

Ruben Gerardo Barrera Perez
Rafael Soto Montiel
Emmanuel Haro Poniatowski
M. Ley Koo
Raul Esquivel Sirvent

Consejo Departamental de Física



P.A. DR. ROBERTO ALEJANDRO CRUTEDAS MENDOZA
Coordinador de Licenciatura de Física

A LA VIDA,
AL AMOR,
A LA AMISTAD,
Y A LA
IMAGINACIÓN.

AGRADECIMIENTOS

Quiero mostrar mi mas profundo agradecimiento al Dr. Rubén Barrera por la excelente dirección de esta tesis, pero más aún por la gran amistad que me brindó.

Le estoy muy agradecido al Dr. Raúl Esquivel-Sirvent por las valiosas discusiones que llevamos juntos, además de su amistad.

Agradezco al Dr. Marcos Ley Koo y al Dr. Rafael Soto por su colaboración en la revisión de esta tesis y por las magníficas clases que llevé con ellos. También le agradezco al Dr. Emmanuel Haro su participación como sinodal de este trabajo.

Yo sé que estas palabras son poca cosa, pero aún así les agradezco a mis padres, Esperanza Romero y Roberto Alexander-Katz, por todo el apoyo y la motivación que me han dado en mi vida.

Quiero agradecerle a una gran mujer, a Déborah por el gran amor y la paciencia que me ha tenido.

Gabriela Campero, no sabes como te agradezco la amistad que desde hace muchos años llevamos.

Les agradezco a Silvestre, a Canek y a Alejandro su grata amistad que ojalá nunca se pierda.

También le agradezco a todos los demás cuates y cuatas que rondan por la facultad.

A Jorge y Rodrigo les doy las gracias por esa hermandad que llevamos juntos casi desde que los conocí.

A los curtidores les pido perdón por las gritizas que les puse durante los partidos de futbol, y les estoy agradecido por la bonita convivencia que logramos durante las temporadas futboleras.

Quiero agradecerle a los cuates del cubículo los ratos amenos que pasé con ellos, en especial a 'Foco' por la compañía durante algunas de las noches de trabajo y por su amistad.

Agradezco a la UNAM por la excelente preparación que me ofreció. También quisiera agradecer el apoyo económico que me brindó el programa de becas de Fundación UNAM.

Índice General

Introducción	3
1 Sonoluminiscencia	5
1.1 El fenómeno de la Sonoluminiscencia	5
1.2 Teorías sobre los posibles mecanismos de emisión	9
2 La Burbuja Oscilante	12
2.1 El problema de Rayleigh	13
2.1.1 Conceptos básicos de Mecánica de Fluidos	13
2.1.2 Solución del problema de Rayleigh	16
2.2 Ecuación de Rayleigh-Plesset	19
2.3 Sensibilidad de la ecuación R-P a las condiciones iniciales	23
3 Dispersión de luz por una burbuja	34
3.1 Teoría de Mie	35
3.1.1 Formulación general del problema de dispersión	35
3.1.2 Solución a las ecuaciones de onda vectoriales y obtención de los campos dentro y fuera de una partícula esférica.	37
3.1.3 Coeficientes de dispersión	41
3.1.4 Funciones de amplitud y sección eficaz de dispersión	43
3.2 Medición del radio de una burbuja oscilante como función del tiempo	46
4 Dispersión de luz por una burbuja Sonoluminiscente	49
4.1 Óptica Geométrica vs. Teoría Exacta	51
4.2 Sensibilidad del patrón de dispersión al cambio en el índice de refracción	54

4.3	Dispersión por una burbuja rodeada de Hielo	60
	Conclusiones	63
	Bibliografía	65

Introducción

Uno de los problemas dentro de la física actual es el de entender el fenómeno de la Sonoluminiscencia. Hasta el momento se ha hecho un gran esfuerzo, tanto teórico como experimental, para poder explicarlo, sin embargo éste sigue abierto. En la presente tesis no se propone una nueva teoría para explicar tan extraño fenómeno, sino mas bien está enfocada a encontrar una manera de poder detectar, mediante técnicas de dispersión de luz, lo que le sucede a la burbuja en los momentos de la emisión de los fotones.

En nuestros días hay un gran interés en conocer el contenido de la burbuja cuando ésta se encuentra en la región del destello luminoso. En este trabajo se plantea un problema que no se había contemplado antes, y es el de considerar la dispersión de luz por una burbuja cuya función dieléctrica depende del tiempo. Actualmente se considera que la burbuja tiene un índice de refracción constante, sin embargo esta hipótesis puede no resultar ser del todo cierta en los instantes de la emisión del flashazo de luz.

La presente tesis está dividida en cuatro capítulos, los cuales van desde describir el fenómeno hasta como dispersa luz una burbuja sonoluminiscente. En el primer capítulo se presenta una descripción detallada sobre lo que es la Sonoluminiscencia y cuáles han sido hasta el momento las teorías que han intentado explicarla. El segundo capítulo está destinado a entender la dinámica de una burbuja dentro de un fluido sometido a una presión acústica. Primeramente se plantean las ecuaciones que regirán el comportamiento de la burbuja, para finalizar con los resultados de las oscilaciones de ésta bajo distintas condiciones. En el tercer capítulo se presenta de manera breve la teoría de dispersión de luz por una partícula esférica (Teoría de Mie), i.e. una burbuja de aire en agua. También se da una descripción del experimento que se utiliza para medir el radio de una burbuja como función del tiempo, así como del modelo teórico utilizado (Óptica Geométrica) para la medición. En el último capítulo se presentan los resultados obtenidos para la dispersión

de luz por una burbuja esférica de aire en agua. Se comparan los resultados entre el modelo exacto y la aproximación geométrica. Se plantea un problema nuevo en el que el índice de refracción de la burbuja depende de la densidad del gas en el interior de ésta. Se obtienen los resultados utilizando este modelo y se da una propuesta experimental para poder detectar los cambios en el índice de refracción de la burbuja. Al final de este capítulo se presenta una de las aplicaciones de las técnicas de dispersión de luz con mayor potencial en este fenómeno: conocer el mecanismo encargado de la emisión de luz. Para finalizar la tesis, se dan una serie de conclusiones acerca del fenómeno, así como de los resultados obtenidos. También se incorporan propuestas sobre los aspectos mas importantes que se pueden resolver mediante técnicas de dispersión de luz.

Capítulo 1

Sonoluminiscencia

Un proceso sonoluminiscente es aquel en el cual se transforma la energía acústica (sonora) en energía luminosa, es decir en luz. En la naturaleza existen varios fenómenos en los cuales ocurre sonoluminiscencia, sin embargo en este trabajo sólo se está interesado en uno de ellos: Sonoluminiscencia de una burbuja.

A lo largo de este capítulo se expondrá en que consiste el fenómeno de la Sonoluminiscencia de burbujas, así como que propiedades ha mostrado este fenómeno hasta nuestros días. En esta parte también se incorpora una breve reseña histórica del mismo, desde su descubrimiento hasta la época actual. Finalmente se presentan de manera breve las teorías que existen hasta el momento para intentar explicar este fenómeno tan extraño y tan sorprendente.

1.1 El fenómeno de la Sonoluminiscencia

Si se tiene un fluido en el cual existen burbujas de gas, al aplicarle una onda de presión acústica de cierta amplitud las burbujas emitirán un destello de luz durante cada ciclo acústico. A este fenómeno se le conoce con el nombre de Sonoluminiscencia. Sin embargo este término es genérico para cualquier proceso en el cual se convierta energía sonora en luz, como se mencionó en la introducción de este capítulo. Realmente se debería de llamar Sonoluminiscencia de burbujas, sólo que por simplicidad se utilizará el término de Sonoluminiscencia (SL) para referirse a esto último a lo largo de toda la tesis.

El descubrimiento del fenómeno se dá en los 30's por H. Frenzel y H.

Shultes[1]. Ellos encontraron que al exponer una placa fotográfica por varias horas a una tina de agua, la cual se encontraba vibrando mediante cristales de cuarzo, la placa se oscurecía. Este hecho se lo atribuyeron a luminiscencia proveniente del campo sonoro y es por ello que le llamaron Sonoluminiscencia. Con el paso de los años se siguieron desarrollando experimentos en este campo y se fueron descubriendo algunas de las propiedades del fenómeno, las cuales mencionaré mas adelante. Durante casi todo el siglo lo que se produjo es lo que llamamos ahora Sonoluminiscencia de muchas burbujas (MBSL). En ésta uno tiene un líquido con algún gas disuelto en él al cual se le aplica una onda acústica que provoca cavitación (formación de burbujas). Si además la amplitud de la onda acústica es lo suficientemente grande, entoces se observará luminiscencia difusa proveniente de todas las burbujas[2]. Claramente, como se tenían demasiadas burbujas, era muy complicado poder entender o describir el comportamiento de éstas aunque ya existía la teoría sobre la dinámica de una burbuja oscilante en un fluido ideal[3, 4]. Lo único que se podía hacer era observar el espectro de emisión para diferentes líquidos, los cuales también podían estar a diferentes temperaturas. Una revolución en el estudio de este fenómeno se dió cuando un estudiante de doctorado, Felipe Gaitan[5], logró obtener Sonoluminiscencia de una sola burbuja (SBSL)[5]-[9]. A partir de esto, los esfuerzos se han enfocado casi en su totalidad a entender esta última. En la actualidad ya se ha logrado medir el radio de las burbuja como función del tiempo[10], así como el espectro de emisión de estas burbujas solitarias. Lo primero es realmente una aproximación del radio ya que la teoría utilizada sólo funciona para burbujas cuyo tamaño sea mucho mayor que la longitud de onda de la luz incidente que se utiliza en la medición. Por el momento no se hará mucho énfasis en ésto, dejándolo para los capítulos tres y cuatro de esta tesis. También se han propuesto varias teorías para explicar esta emisión pero ninguna de ellas ha podido explicar el fenómeno en su totalidad por lo que el problema aún sigue abierto.

La diferencia básica entre SBSL y MBSL, además de la ya mencionada, es que el espectro de la luz emitida por las burbujas en uno y otro caso difiere. En el caso de SBSL el espectro se asemeja al de un cuerpo negro a temperaturas de decenas de miles de grados Kelvin, mientras que el espectro de la MBSL presenta picos de emisión a ciertas longitudes de onda superpuestos a una curva de emisión de cuerpo negro. Aún no se sabe de manera exacta a que se deben estos picos de emisión, pero justamente coinciden con ciertas longitudes de onda a las que emitirían las moléculas del líquido que rodea a la burbuja[2, 11]. Como se mencionó anteriormente, la emisión de luz sucede

en forma de un flashazo. La duración de este destello de luz es muy corta, aproximadamente de 50 a 200 ps[12] y ocurre en un rango de 500 ps alrededor del radio mínimo¹. A continuación mencionaré los aspectos mas importantes de la SL. Éstos son:

-Para que exista Sonoluminiscencia es necesaria una pequeña cantidad de gas noble disuelto en el fluido. En los últimos años varias personas se han interesado mucho en saber cual es el contenido de una burbuja sonoluminiscente. En estos momentos se cree que el único gas que se encuentra dentro de la burbuja es el gas noble[13, 14].

-El espectro cambia si uno utiliza uno u otro gas noble[15].

-El espectro tampoco se mantiene igual si uno cambia el fluido en el cual se encuentra la burbuja[15, 16].

-El mejor medio para llevar a cabo Sonoluminiscencia es el agua, y el mejor gas es el aire.

-Si uno reduce la temperatura del fluido de 20°C a $\sim 0^\circ\text{C}$, la intensidad de la luz emitida aumenta en un orden de magnitud[15].

-Las moléculas de los líquidos en los que se ha logrado obtener Sonoluminiscencia tienen momentos dipolares permanentes.

-Existen cambios importantes en la intensidad de la luz emitida si se lleva a cabo SL bajo un campo magnético intenso[17].

-La emisión de fotones por la burbuja se dá solamente si el valor de la amplitud de la onda acústica se encuentra en un cierto intervalo[7].

Ya mencionadas las propiedades mas importantes que muestra el fenómeno de la Sonoluminiscencia, simplemente queda por mostrar el experimento para llevar a cabo SBSL.

El dispositivo es bastante sencillo (Fig. 1.1). Consiste en un recipiente de forma cilíndrica el cual está lleno de algún líquido, de preferencia agua. La forma del recipiente también puede ser esférica. Después se degasifica el líquido y se disuelve en él un gas o una mezcla de gases. Es de recalcar que el gas debe de ser un gas noble o si se usa una mezcla de gases, ésta debe de contener al menos una pequeña cantidad de algún gas noble. En una de las tapas del recipiente se encuentra un piezoeléctrico que está conectado a un amplificador y éste a su vez está conectado a un generador de ondas. Finalmente uno produce burbujas en alguna región del recipiente de las cuales una emigrará al centro del frasco. Después de tener a la burbuja atrapada

¹El radio mínimo es el valor mas pequeño del radio de la burbuja durante un ciclo de oscilación. En el capítulo 2 este concepto se hace ver mas claro.

en el centro es necesario dejar de producir las burbujas. Para que la burbuja se quede en el centro, la frecuencia de la onda acústica debe de ser alguna de las frecuencias características del recipiente[5]. Estando la burbuja en el centro, se aumenta la amplitud de la onda acústica hasta que se observa que la burbuja emite luz.

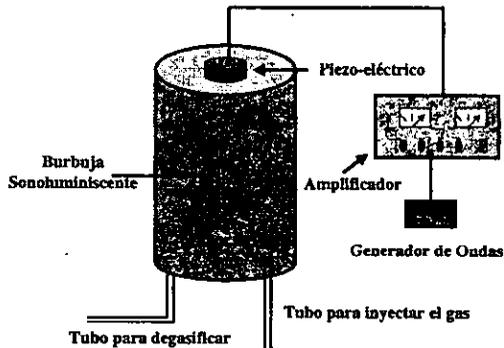


Figura 1.1- Diagrama del dispositivo experimental para producir SBSL.

En el último año han surgido otras formas de luminiscencia de burbujas que no tienen que ver con el sonido. En Alemania se ha obtenido luminiscencia de una sola burbuja colapsándose (SCBL)[18]. En este experimento primeramente enfocan un láser pulsado de alta potencia ($2 \times 10^6 \text{W}$) en un punto de un fluido dentro de un recipiente cuadrado. Al incidir el pulso de luz (8 ns) en la región deseada, ocurre la formación de una sola burbuja cuyo tamaño es de aproximadamente décimas de milímetro. Debido a la presión atmosférica, la burbuja se colapsa emitiendo un destello de luz en la última parte del colapso. Se ha medido la intensidad de este destello y se ha encontrado que es un orden de magnitud mayor que la observada en SBSL. En UCLA, Carlos Cámara, ha encontrado luminiscencia de muchas burbujas colapsándose (MCBL)[19], debido solamente a la presión ambiental. Lo que utiliza es un tubo de Vénturi a través del cual hace pasar un fluido. En el punto en donde se ensancha el tubo se produce una caída de presión que da

origen a la formación de burbujas. Sin embargo conforme las burbujas avanzan la presión aumenta, provocando que éstas se colapsen. Todavía no se ha medido la intensidad de las emisión en este caso, pero parece ser muy alta comparada con MBSL. Después de este pequeño recorrido por el fenómeno de la Sonoluminiscencia, queda por ver las teorías que se han propuesto para explicar la Sonoluminiscencia. Ésto se dá en la siguiente sección.

1.2 Teorías sobre los posibles mecanismos de emisión

Existe una gran variedad de teorías que se han utilizado para explicar el fenómeno de la Sonoluminiscencia. En esta sección sólo daré una breve descripción sobre las que se consideran como las mas importantes. En principio, el orden en que se expondrán es 'histórico', sólo que las últimas se dieron en un lapso de tiempo muy breve por lo que pido disculpas anticipadas si no se preserva el orden.

En un inicio se creyó que la SL provenía de descargas eléctricas[20]. En esa época se pensó que el campo sonoro producía rupturas en el líquido para que de esta forma se generen cavidades no esféricas, y la descarga tomaba lugar debido a la acumulación de carga de diferente signo en diferentes lugares de la superficie de estas cavidades. Esta teoría está desechada por completo ya que para que exista un ruptura en el líquido es necesario que la intensidad de la onda acústica alcance valores de 10,000 atm, mientras que la SL se presenta a unas cuantas atmósferas de presión. Además, el espectro de la luz emitida es casi un continuo, mientras que el de las descargas tiene típicamente líneas de emisión.

En los años 50 se pensó que la SL se debía a cambios químicos en el líquido (disociación y recombinación de moléculas) o quimiluminiscencia. Estos cambios estarían provocados por las altas temperaturas que pueden alcanzar las burbujas en el colapso. Este incremento en la temperatura se debe a la compresión adiabática de las burbujas[21, 22] durante el colapso, ya que los tiempos en los cuales éste ocurre son muy pequeños por lo que la transferencia de calor entre el medio y la burbuja es despreciable. Sin embargo esta descripción no explica el por que al cambiar el gas que uno disuelve en el líquido cambia el espectro de emisión. Por estas mismas fechas surge también la idea de que el gas al ser calentado hasta miles de grados Kelvin

podría radiar como un cuerpo negro[21], solamente que esta teoría tiene el inconveniente que no toma en cuenta el gas que se encuentre en el interior de las burbujas, por lo que tampoco explica porque cambia el espectro de uno a otro gas.

En 1960 P. Jarman[2] propone la existencia de una onda de choque esférica en la última parte del colapso ya que las velocidades que puede alcanzar la pared de la burbuja son inmensas. La onda de choque converge hacia el centro produciendo condiciones extremas dentro de la burbuja (altas presiones y temperaturas) por las cuales se puede ionizar el gas, y después de esto, habrá radiación de tipo Bremsstrahlung proveniente de los electrones libres acelerados. En los últimos años se ha hecho mucho trabajo en esta dirección[23]-[29], pero todavía la teoría no logra explicar porque los gases diatómicos son malas fuentes de SL.

Últimamente han surgido una serie de teorías mas complejas. En 1993 Schwinger[30] propuso que la emisión observada podría ser producto de los cambios en la energía electromagnética del punto cero (el vacío) cuando el agua llena la cavidad gaseosa, efecto Casimir dinámico. También se han hecho intentos en explicar la SL en términos de radiación de Unruh proveniente de la superficie[31]. Sin embargo ninguna de las dos teorías ha tenido repercusión ya que los valores que obtienen para el total de la radiación emitida están alrededor de 30 ordenes de magnitud por debajo de la observado experimentalmente[32]. La propuesta de que la radiación proviene de los dipolos permanentes del agua acelerándose[33] también dió valores muy por debajo de lo observado[32].

Otros mecanismos de emisión son:

-El de la descarga electrónica debida a la separación de las cargas dentro de un plasma[34].

-La fractura de un cascarón de gas sólido que se forma en la pared de la burbuja[35].

-El rompimiento del líquido debido a un jet supersónico que sale de la burbuja[36].

La teoría detrás de los modelos recién mencionados debe de ser un gran reto, sólo que el valor que cada uno de ellos tenga estará basado en las predicciones correctas que puedan tener cada uno de ellos en un futuro.

Hace aproximadamente un mes me enteré de un nuevo mecanismo en el cual se plantea la formación de hielo en una de sus fases sobre la superficie de la burbuja[19]. Es bien sabido que este hielo permite el tuneo de protones y le achacan la radiación a este tunelaje.

Un punto importante es que ninguna de las teorías que se han mencionado, excepto esta última posiblemente, han podido explicar la dependencia con la temperatura (del líquido) de la intensidad de la radiación emitida en la SL, ni tampoco los cambios que se producen al hacer SL bajo un intenso campo magnético.

En este trabajo no se propone un nuevo tipo de emisión, sino mas bien se plantea una forma de poder detectar, mediante técnicas de dispersión de luz, lo que le está sucediendo a la burbuja durante el colapso. Esto puede tener mucho futuro, incluso puede tener utilidad para conocer cual de las teorías es la correcta para el mecanismo de emisión. Por ejemplo si se forma una capa de hielo en la superficie, la dispersión de luz será muy diferente a la de una simple burbuja de aire. Ésto se deja para los capítulos subsecuentes.

Capítulo 2

La Burbuja Oscilante

El interés en los fenómenos relacionados con la dinámica de las burbujas surge seguramente cuando el hombre se da cuenta de la existencia de las mismas, sin embargo no se hizo ninguna formulación precisa de algún problema fundamental referente a éstas hasta el siglo XIX cuando Besant en su *Hydrostatics and Hydrodynamics* (1859) formuló el siguiente problema:

‘Si se tiene un fluido infinito e incompresible, y súbitamente una porción esférica de este mismo desaparece, ¿cuál es el tiempo que tarda en llenarse esta cavidad, así como la presión en cualquier punto del fluido suponiendo que la presión a una distancia infinita se mantiene constante?’

El problema fué resuelto a principios de este siglo por el célebre científico inglés Lord Rayleigh[3], quién además resolvió el problema de una burbuja que contenía una cantidad fija de gas en su interior. En la resolución del segundo problema, Rayleigh supuso que la burbuja estaba en equilibrio térmico con el fluido que la rodea¹, sin embargo como veremos mas adelante esto no es siempre cierto. Conforme transcurrió el siglo, varios científicos abordaron este mismo tema dejando diversas contribuciones, las cuales sumadas, nos presentan un panorama general sobre el comportamiento de cavidades en fluidos.

¹El suponer que la burbuja se encuentra en equilibrio térmico con sus alrededores se reduce a tomar la ecuación de estado isotérmica para el gas que se encuentra en el interior de ésta.

Cuando un fluido es sometido a un campo sonoro lo suficientemente intenso, se presentan una variedad de fenómenos extraños debidos a la existencia de burbujas en él; tal es el caso de la Sonoluminiscencia (Cap.1). Para el estudio de estos fenómenos es necesario primero entender el comportamiento de una burbuja bajo la acción de un campo sonoro así como la repercusión de este comportamiento en el fluido mismo. La formulación completa del problema es muy complicada, por ello en este capítulo me restringiré a fluidos con ciertas propiedades: líquidos incompresibles y gases ideales. Bajo estas suposiciones, la solución está en la ecuación de Rayleigh-Plesset (R-P) [3, 4, 37], misma que presentaré mas adelante. Resolviendo ésta, uno obtiene el tamaño del radio, así como la velocidad y la aceleración de la pared de la burbuja como función del tiempo. Sin embargo en la ecuación R-P intervienen un número considerable de parámetros los cuales afectan de manera directa la solución de la misma. Incluso, es importante el tipo de gas que la burbuja tiene en su interior así como la ecuación de estado que rige a éste. En la última sección del capítulo se presenta un análisis cualitativo sobre la sensibilidad de las soluciones a cada uno de los parámetros que entran en juego en la ecuación R-P.

2.1 El problema de Rayleigh

'Una cavidad esférica de radio a se forma instantáneamente en un fluido incompresible. Determine el tiempo que tarda en llenarse el hueco' [38].

Para resolver este problema es necesario introducir algunos conceptos de mecánica de fluidos, los cuales se dan a continuación.

2.1.1 Conceptos básicos de Mecánica de Fluidos

El estado de un fluido en movimiento cuyas propiedades termodinámicas se conocen puede ser descrito en términos de su campo de velocidades, su densidad y su presión; cada uno de éstos como función del tiempo y del espacio. Estas funciones son a su vez definidas por las ecuaciones diferenciales que describen a las leyes fundamentales de conservación. Las ecuaciones que a continuación se presentan constituyen las tres leyes básicas de la mecánica de fluidos [38]. En este breve repaso se desprecian los efectos gravitatorios, de viscosidad y de conducción térmica.

en donde S es la superficie que rodea al volumen que se escogió anteriormente. En esta última ecuación se observa que el cambio en la i -ésima componente del momento en un volumen es igual al flujo de cantidad de movimiento a través de la superficie que rodea a la porción del espacio considerada anteriormente.

La ley de conservación de la energía

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{dV}{dt} = Q, \quad (2.5)$$

que nos expresa que un cambio en la energía interna ε de una partícula es el resultado del trabajo de compresión hecho por el exterior sobre la misma, así como la potencia generada por fuentes externas Q . En esta ecuación no se han contemplado mecanismos de transferencia de masa ni de transferencia de calor, ni tampoco se toman en cuenta los mecanismos disipativos, i.e. la viscosidad. Utilizando las ecuaciones anteriores uno puede escribir la Ec.(2.5) como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \left[\rho\mathbf{v} \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) + p\mathbf{v} \right] + \rho Q. \quad (2.6)$$

Esta ecuación es general, sin embargo sólo tiene sentido utilizarla cuando el fluido no está en equilibrio termodinámico.

En total, las tres leyes forman un conjunto de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, ρ , v_x , v_y , v_z y p . Para ello se asume que se conocen las fuentes externas de energía Q , y que la energía interna se puede expresar como función de la densidad y la presión, es decir $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$.

Si la energía no está dada por p y ρ , sino por la temperatura T y alguna de estas dos cantidades, entonces es necesario incorporar la ecuación de estado $p = p(T, \rho)$ al conjunto de ecuaciones que se tenían anteriormente. Es importante recalcar que esta ecuación de estado es la que corresponde al comportamiento termodinámico del fluido.

Como conclusión, si se tiene un problema relacionado con la dinámica de un fluido, lo único que se tiene que hacer es resolver este sistema de seis ecuaciones diferenciales parciales acopladas (tarea nada trivial, o mas bien imposible la mayoría de las veces) y encontrar la solución al problema planteado. Sin embargo, si existe alguna simetría o si alguna cantidad es o se supone constante el problema se facilita bastante, como sucede en este caso.

2.1.2 Solución del problema de Rayleigh

El hueco después de su formación es esférico, por lo tanto la fuerza que ejerce el fluido sobre la pared de la cavidad es radial y debido a esto, el flujo será también dirigido hacia el centro. Debido a la simetría esférica del problema, éste se reduce a una sola dimensión, cuya variable r es la coordenada radial medida desde el centro de la esfera. Consideraré además que el fluido se encuentra aislado adiabáticamente, es decir que la entropía $S = cte$. Esto último junto con que el fluido es incompresible nos lleva a que la energía interna $\varepsilon = cte.$, por lo que no tendré que tomar en cuenta la ley de conservación de la energía.

Si se toma la ecuación (2.2) y se escribe en coordenadas esféricas tomando sólo la parte radial se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.7)$$

en donde r es la coordenada radial. Si el fluido es incompresible entonces $\rho = cte$. Si además se supone que el fluido es irrotacional, es decir que $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, entonces se puede expresar a la velocidad como el gradiente de un potencial, $\mathbf{v} = \nabla \varphi$. Con esto la ec.(2.1) se reduce a $\nabla^2 \varphi = 0$; físicamente lo que tenemos es un flujo puramente radial dirigido hacia el centro que cumple con

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0, \quad (2.8)$$

lo que implica que

$$r^2 v = f(t), \quad (2.9)$$

en donde $f(t)$ es una función arbitraria del tiempo. Esta relación nos dice que la cantidad de fluido que pasa por unidad de tiempo a través de una superficie esférica es independiente del tamaño de esta misma. Si se substituye $v = f(t)/r^2$ en la ecuación(2.7) se obtiene

$$\frac{f'(t)}{r^2} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.10)$$

en donde $f'(t) \equiv df(t)/dt$. Ahora integrando (2.10) de R a ∞ en donde $R = R(t) =$ radio de la cavidad y tomando en cuenta que $v = 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, y $p(R)$ es cero ya que la burbuja está vacía en su interior, se obtiene

$$-\frac{F'(t)}{R} + \frac{1}{2} V^2 = \frac{1}{\rho} P_0, \quad (2.11)$$

en donde $V = dR(t)/dt$, P_0 es la presión muy lejos de la cavidad (en infinito) y $F'(t) = dF(t)/dt$ con $F(t) = R^2(t)V(t)$. Introduciendo esta última ecuación en (2.11) para eliminar a $F'(t)$ se llega finalmente a

$$-\frac{3}{2}V^2 - \frac{1}{2}R\frac{dV^2}{dR} = \frac{1}{\rho}P_0, \quad (2.12)$$

la cual es una ecuación diferencial de primer grado. La solución se obtiene a partir de integrar (2.12) con respecto al radio,

$$-\int_a^R \left(\frac{3}{2}V^2 + \frac{1}{2}R\frac{dV^2}{dR} \right) R^2 dR = \int_a^R \frac{P_0}{\rho} R^2 dR.$$

en donde a es el radio inicial de la cavidad. En la integración se utiliza el jacobiano R^2 para poder conocer la solución explícitamente. Si ahora se toma en cuenta que $V = 0$ cuando $R = a$, se llega a que la solución es

$$V = \frac{\partial R}{\partial t} = -\sqrt{\frac{2}{3\rho}P_0 \left(\left(\frac{a}{R}\right)^3 - 1 \right)}. \quad (2.13)$$

En esta ecuación se puede ver que la velocidad tenderá a infinito cuando el radio R tienda a cero. Claramente esto no puede ser ya que la velocidad de la pared no puede ser mayor que la velocidad de la luz. De esto se puede afirmar que esta ecuación no será válida en la última parte del colapso. Deben de intervenir otros mecanismos que frenen el colapso para que no se viole uno de los principios fundamentales de la física.

Para conocer el radio como función del tiempo es necesario volver a integrar (ahora con respecto a t)

$$\int_a^R \left(\sqrt{\frac{2}{3\rho}P_0 \left(\left(\frac{a}{R}\right)^3 - 1 \right)} \right)^{-1} dR = \int_0^t dt.$$

Esta integral se puede realizar y se conoce comúnmente como la función Beta. El resultado explícito es

$$\frac{a}{3}\beta_\xi \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6} \right) = \sqrt{\frac{2}{3\rho}P_0 t},$$

con

$$\xi = 1 - \left(\frac{R}{a} \right)^3. \quad (2.14)$$

La función Beta tiene un desarrollo en serie en potencias de ξ dado por

$$\beta_{\xi} \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6} \right) = \quad (2.15)$$

$$= \xi \left\{ \frac{1}{1/2} + \frac{1-5/6}{1/2+1} \xi + \dots + \frac{(1-5/6)(2-5/6)\dots(n-5/6)}{n!(1/2+n)} \xi^n \right\},$$

y ξ está dado por la Ec.(2.14).

El tiempo que tarda en llenarse una cavidad cuyo radio inicial es a y que se encuentra en un medio con densidad ρ y presión P_0 se puede calcular y es

$$t = 0.914 \sqrt{\frac{\rho}{p_0}} a.$$

En la Figura 2.1 se ilustra una curva del radio como función de tiempo para una burbuja de 3 cm de radio colapsándose. Podemos observar que conforme el radio se vuelve menor, la velocidad de la pared, $V = dR/dt$, aumenta de manera considerable hasta el punto en el cual esta última se vuelve infinita para $R = 0$. Como se había mencionado anteriormente, esto es debido a que se debe cumplir la Ec.(2.13)

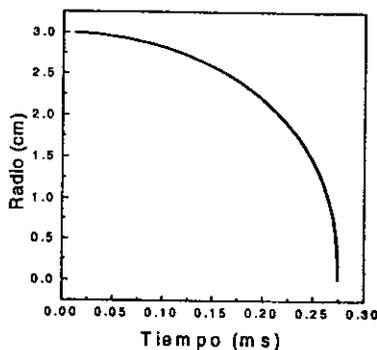


Figura 2.1 - Colapso de una cavidad hueca. El radio inicial es de 3 cm. La presión y la densidad son 1 atm. y 1 gr/cm³ respectivamente.

El resultado al problema de Rayleigh se puede generalizar al de una burbuja con gas en su interior ya que como se puede ver en las ecs.(2.10) y (2.11),

si la presión no fuera cero en la superficie de la burbuja, es decir que ésta contuviera gas, entonces al integrar en vez de tener P_o tendríamos $P_o - P_f$ en donde P_f es la presión del fluido en la pared. En la siguiente sección se desarrollará esta generalización y se incorporarán los términos de viscosidad y de tensión superficial. La primera se puede ver como una reacción en contra del movimiento o una fricción del fluido consigo mismo. La tensión superficial funciona solamente como una membrana la cual tiende a tener la menor area, como por ejemplo un globo tiende a reducir su tamaño al mínimo. También se añadirá una perturbación dependiente del tiempo a la presión en infinito la cual representa físicamente a la presión acústica.

2.2 Ecuación de Rayleigh-Plesset

Generalización del problema de Rayleigh

Esta sección tiene como propósito el de generalizar el problema de Rayleigh (colapso de una cavidad esférica) a un problema en el cual se tome en cuenta la existencia de gas en el interior de la burbuja, así como los efectos de la tensión superficial y de viscosidad. También se incorporará una presión acústica que dependa del tiempo. El retrato final es el de una burbuja de gas que oscila (no necesariamente de manera lineal) en un campo de presiones que se compone de una presión fija P_0 mas una presión acústica P_a que depende del tiempo. Esta generalización es casi inmediata y para ello solo basta tomar la Ec.(2.10) e integrarla como se hizo en la sección anterior, obteniéndose

$$-\frac{F'(t)}{R} + \frac{1}{2}V^2 = \frac{1}{\rho}(P_0 - P_f), \quad (2.16)$$

en donde $F'(t)$, P_o , V , R , y ρ están dados como en la sección anterior y P_f es la presión del fluido sobre la superficie de la burbuja. Ahora, la presión en la superficie de la burbuja P_f no tiene una descripción tan sencilla como la presión P_0 que es la que uno esta aplicando muy lejos. La presión en la superficie consta de dos partes. La primera es la presión del fluido, sin tomar en cuenta la presión acústica, que sólo tiene que ver con el gas en el interior de la burbuja, la viscosidad del fluido y del gas, y la tensión superficial debido a la interface gas-líquido. La segunda es la presión acústica que siente el fluido en el sitio en donde se encuentra la burbuja. Como se supuso un fluido incompresible, la presión acústica que se aplica muy lejos debe de ser igual a la presión acústica que siente la burbuja. Sin embargo, si el fluido es

compresible entonces no se cumplirá esta condición y por lo tanto la presión acústica que la burbuja sentirá será diferente a la que se aplique en infinito. La función que relaciona a las presiones (tanto dentro de la burbuja como fuera de ella) con la viscosidad, la tensión superficial y la presión acústica está dada por

$$P_g(R, t) = P_f(R, t) + P_a(t) + \frac{2\sigma}{R} + 4\eta \frac{R'}{R}, \quad (2.17)$$

en donde $R = R(t)$, P_g es la presión del gas en la pared de la burbuja, P_f es la presión del fluido sobre la superficie de la burbuja, σ y η son la tensión superficial y la viscosidad del fluido respectivamente. P_a es la presión acústica en el sitio donde se encuentra la burbuja. Esta ecuación es una relación de equilibrio entre las fuerzas que actúan normales a la superficie y resulta de igualar los tensores de esfuerzos de uno y otro lado de la pared. En la Ec.(2.17) se desprecia el término de transporte de masa debido a la difusión del gas hacia dentro o hacia afuera de la burbuja. Como es de notarse, en (2.17) tampoco se toma en cuenta el término de viscosidad del gas por ser despreciable.

Substituyendo la Ec.(2.17) en la Ec.(2.16) y desarrollando los términos de V^2 y de $F'(t)$ dados como en la sección anterior se obtiene la buscada ecuación del Rayleigh-Plesset

$$RR'' + \frac{3}{2}R'^2 = \frac{1}{\rho} \left[P_g(R, t) - P_a(t) - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta \frac{R'}{R} - P_0 \right]. \quad (2.18)$$

El lado izquierdo de esta ecuación representa la inercia de la burbuja acelerándose en respuesta a la fuerza neta que actúa sobre su superficie. Esta fuerza resulta de la diferencia neta de presiones entre el interior y el exterior de la pared, es decir el lado derecho de la ecuación 2.18. Esto se ve claro si se toma la Ec.(2.17) y se acomoda de tal manera que la presión en el fluido y la del gas queden de un solo lado. Ahora si se multiplica por R^2 los dos lados se obtiene la siguiente expresión

$$R^2[P_f(R) - P_g(R)] = -R^2P_a(t) - 2R\sigma - 4\eta RR'. \quad (2.19)$$

Visto de esta manera lo que se tiene del lado izquierdo es la fuerza neta que está actuando sobre la pared de la burbuja debida a la diferencia de presiones entre el exterior y el interior de ésta. Del lado derecho se tienen tres términos: el primero que funciona como un forzamiento, el segundo que es equivalente

a una fuerza que sigue la ley de Hooke (cuya constante es 2σ) y el último que sirve como un amortiguamiento cuyo valor depende de la viscosidad. Visto así, lo que nos queda es la ecuación de un oscilador forzado amortiguado en donde el término de amortiguamiento está dado por la viscosidad, el de forzamiento por la presión acústica y la tensión superficial funciona como la constante de Hooke.

En realidad, el fluido no es totalmente incompresible, por lo cual esta ecuación no describe bien la dinámica de una burbuja oscilante. Si se toma en cuenta la compresibilidad del fluido, es decir que la velocidad del sonido en el fluido c es finita, podemos también encontrar una ecuación para describir la dinámica de este sistema. El procedimiento que se sigue es el de teoría de perturbaciones y se utiliza como parámetro perturbativo el cociente R'/c . Para este caso sólo se considera la ecuación de R-P corregida a primer orden la cual tiene la siguiente expresión[37, 22, 15].

$$RR'' \left(1 - 2\frac{R'}{c}\right) + \frac{3}{2}R'^2 \left(1 - \frac{4R'}{3c}\right) = \\ = \frac{1}{\rho} \left[P_g(R, t) - P_a(t) - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta\frac{R'}{R} - P_o \right] + \frac{R}{\rho c} \frac{\partial}{\partial t} (P_g - P_a). \quad (2.20)$$

El último término de esta ecuación es el que contiene el efecto de la radiación de energía acústica de la burbuja al fluido y proviene de la teoría perturbativa. En lo que resta de este trabajo, se utiliza la ecuación de R-P sin correcciones añadiéndole el último término de la Ec.(2.20), para así obtener finalmente la siguiente expresión:

$$RR'' + \frac{3}{2}R'^2 = \\ = \frac{1}{\rho} \left[P_g(R, t) - P_a(t) - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta\frac{R'}{R} - P_o \right] + \frac{R}{\rho c} \frac{\partial}{\partial t} (P_g - P_a). \quad (2.21)$$

Como se puede ver, lo único que se necesita saber para poder resolver esta ecuación es la presión que ejerce el gas en la pared. En primera aproximación para calcular P_g se utilizará la ecuación de estado de Van der Waals[39] desprejiando el término de atracción molecular. Esta ecuación es

$$P_g = P_0 \left(\frac{R_0^3 - \alpha_0^3}{R^3 - \alpha_0^3} \right)^\kappa, \quad (2.22)$$

en donde α_0 es el radio de la esfera mas pequeña con un volumen equivalente a el número inicial de moléculas de gas (que se conserva bajo las suposiciones

hechas anteriormente). La κ es el cociente de calores específicos y toma el valor de 1 para el caso isotérmico y un valor mayor que uno que depende del tipo de gas para el caso adiabático. R_0 es el radio ambiente de la burbuja, es decir el radio en el cual la presión dentro de la burbuja es igual a P_0 . Como veremos mas adelante, en el ciclo de oscilación de una burbuja existe una región en la cual ésta se comporta de manera isotérmica (en la expansión) y en otra de manera adiabática (última parte del colapso). Lo que sucede es que los tiempos en la región de la expansión son grandes comparados con los tiempos característicos de transferencia de calor y por ello la burbuja se encuentra a la misma temperatura que el fluido. Sin embargo, en la parte del colapso no da tiempo a que exista esta transferencia de energía y la burbuja se comportará de manera adiabática, como se mencionó en la segunda sección del primer capítulo.

Una solución típica a la ecuación R-P se presenta en la Figura 2.2. En ésta se ilustra el radio como función del tiempo para una burbuja de aire en agua cuyo radio ambiente R_0 es de 4.5μ sometida a una presión acústica de 1.3 atm oscilando a una frecuencia de 26 khz.

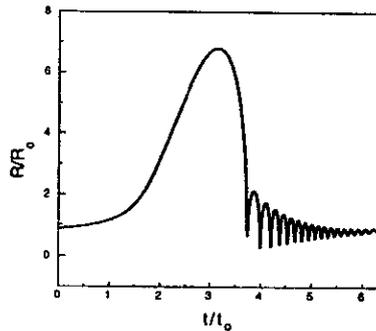


Figura 2.2- Solución de la ecuación R-P para una burbuja de aire en agua cuyo radio ambiente es $R_0 = 4.5\mu$. La presión acústica tiene una amplitud de 1.3 atm. y varía sinusoidalmente a una frecuencia f de 26 khz. El periodo $\tau = 1/f = t_0$.

Se observa que existe una región en la cual la burbuja se expande hasta ~ 7 veces su radio ambiente y después súbitamente se colapsa. En la parte

posterior al colapso existen una serie de oscilaciones alrededor de el radio ambiente R_0 . La escala del tiempo está dada como t/t_0 , en donde t_0 es el periodo de oscilación τ el cual se define como $1/f$. La f^4 es la frecuencia a la que oscila la onda acústica. Una variedad de soluciones se encontrarán en la siguiente sección.

2.3 Sensibilidad de la ecuación R-P a las condiciones iniciales

Como se mencionó al principio del capítulo, las soluciones de la ecuación R-P se comportan diferente según el valor de cada uno de los parámetros. Esto es claro ya que la dinámica está íntimamente relacionada con éstos, *i.e.* la viscosidad. No es de gran importancia realizar una comparación cuantitativa entre las diferentes soluciones ya que éstas representan soluciones teóricas, pero es bueno tener en mente los cambios que suceden en éstas al variar en una cierta cantidad el valor de un parámetro. El objetivo de esta sección es que al final de ella uno obtenga una intuición sobre la variación de las soluciones al variar distintos parámetros y de esta manera poder predecir aunque sea cualitativamente como será la solución dados ciertos parámetros con respecto a una solución digamos 'típica'. Esto es con el fin de que las cantidades importantes (la velocidad y la aceleración de la pared durante el colapso), en las cuales me fijaré al final de la sección, se puedan intuir de manera inmediata. La importancia de esto es que las posibles teorías que pudiesen explicar la Sonoluminiscencia dependen directamente del valor tanto de la velocidad como de la aceleración de la pared.

Para algunos parámetros los valores que se utilizan son arbitrarios, sin embargo en otros se utilizarán valores que corresponden a diferentes sustancias, como es el caso de la viscosidad, la tensión superficial, la velocidad del sonido en el líquido o el tipo de gas que se encuentre en el interior de la burbuja. El orden en el cual se observará la dependencia de las soluciones a cada uno de los distintos parámetros es arbitrario.

La solución de la ecuación R-P se obtiene de manera numérica[40]. Una solución para presiones acústicas mayores que 1.2 atm normalmente se ve como la gráfica que se mostró en la Figura 2.2 en la cual se tiene al radio (R)

⁴La frecuencia f no es la frecuencia angular y por ello en la gráfica aparece el periodo completo de oscilación como 2π .

como función del tiempo.

De aquí en adelante resultará mas conveniente utilizar una ecuación adimensional para comparar soluciones ya que el papel que juega cada uno de los parámetros será mas claro. La ecuación de R-P adimensional tiene la siguiente forma

$$r r'' + \frac{3}{2} r'^2 + \frac{2\alpha}{r} + 4\beta \frac{r'}{r} = \gamma \left[p_g - p_a - 1 + \xi \frac{\partial}{\partial t} (p_g - p_a) \right], \quad (2.23)$$

en donde $r = R/R_0$, $p_g = P_g/P_0$ y $p_a = P_a/P_0$. Las constantes α, β, γ y ξ son adimensionales y las expresiones a las cuales corresponden cada una de ellas está dado por

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sigma}{\rho R_0^3 \omega^2}, & \beta &= \frac{\eta}{\rho R_0^2 \omega}, \\ \gamma &= \frac{P_0}{\rho R_0^2 \omega^2}, & \xi &= \frac{R_0}{c} \omega, \end{aligned} \quad (2.24)$$

en donde $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular, ρ es la densidad del fluido, R_0 es el radio ambiente de la burbuja, c la velocidad del sonido en el fluido y P_0 es la presión ambiente. Podemos ver que la soluciones a la ecuación R-P adimensional tendrán la misma forma que las soluciones de la ecuación R-P dimensional ya que las dos tienen la misma forma analítica, sólo que ahora se tienen unas nuevas constantes las cuales no dependen de un solo parámetro. Por parámetro me refiero a la viscosidad, el radio ambiente, la frecuencia angular, la amplitud de la presión acústica o la tensión superficial.

Es pertinente tomar a estas nuevas constantes como los coeficientes efectivos para la nueva variable r , es decir que α, β y γ sean los nuevos coeficiente de tensión superficial, de viscosidad y de presión ambiente respectivamente. En pocas palabras podemos decir que las nuevas constantes corresponden a las anteriores sólo que esta vez para la variable r . Esto es de gran utilidad ya que la variable real del radio R es directamente proporcional a la nueva variable, y por lo tanto si existen cambios drásticos en la solución adimensional, estos se reflejarán de manera inmediata y drástica en la solución dimensional.

Es importante destacar la dependencia de α, β y γ con respecto al radio ambiente así como a la frecuencia. Es notorio que la constante mas sensible a cambios en R_0 es la nueva tensión superficial α . Por otro lado se ve que

una variación en la frecuencia ω afecta de igual manera tanto al término de presión como al de tensión superficial. De aquí se puede intuir en cierta forma las consecuencias que traerán consigo los cambios de R_0 y ω sobre la dinámica de la burbuja, solo que dejaré esto para mas adelante. Sin tomar en cuenta a la constante ξ se tiene que el término de la viscosidad es el menos afectado con respecto a las variaciones de los dos parámetros antes mencionados, lo que implica una dependencia débil de la viscosidad β con respecto a estos parámetros.

Los valores que se utilizan para todos los cálculos excepto en los que se indique lo contrario son: $R_0 = 5\mu$, $\rho = 1gr/cm^3$, $f = 26\text{ khz}$, $\sigma = 72\text{ dinas/cm}$, $\eta = 1\text{ cP}$, $c = 1400\text{ m/s}$ y $p_a = 1.5\text{ atm}$.

Uno de los parámetros al que es mas sensible la solución es el de la amplitud de la presión acústica p_a . Esto se puede ver en la Figura 2.3 en la cual se muestran las soluciones para cuatro diferentes presiones acústicas. Se observa como el radio máximo r_{\max} que alcanza la burbuja es cada vez mayor conforme aumenta p_a . También se ve que el tiempo que tarda en ir desde r_{\max} hasta el radio mínimo r_{\min} no aumenta tanto como la diferencia $r_{\max} - r_{\min}$. Esto implica que la velocidad del colapso aumenta al incrementar la amplitud de la onda acústica. Una manera fácil de calcular esto es dividiendo la diferencia $r_{\max} - r_{\min}$ entre el tiempo que tarda la burbuja en ir de r_{\max} a r_{\min} .

Otro de los parámetros muy importantes si no es que el mas importante en la estabilidad de la dinámica de la burbuja es el radio ambiente, esto se debe a que la tensión superficial toma mucha importancia cuando los radios de la burbuja son muy pequeños[41],[42]. La tensión superficial actúa en una sola dirección: hacer que la superficie de la burbuja sea mínima. Claramente, como se supone que no hay transporte de gas de la burbuja hacia el fluido ni viceversa, ésta no se destruirá pero quedará confinada en el volumen mas pequeño para el cual se alcance el equilibrio entre la presión externa y la interna tomando en cuenta la fuerza que hace la tensión superficial sobre la cavidad. Como se mencionó, un cambio en el radio ambiente produce grandes cambios en las nuevas constantes excepto en ξ , pero la constante en la cual hay mayor variación es α y ésta corresponde a la tensión superficial para la nueva variable r . Esto se ilustra en la Figura 2.4 en donde la solución cambia de forma drástica al variar en $.5\mu$ el radio inicial. Cambiar R_0 no sólo afecta el término de tensión superficial sino también el de viscosidad y el de presión, pero los cambios en éstos no son tan notorios como en el primero. Se ve que la diferencia entre los radios máximos es de mas de un orden de magnitud.

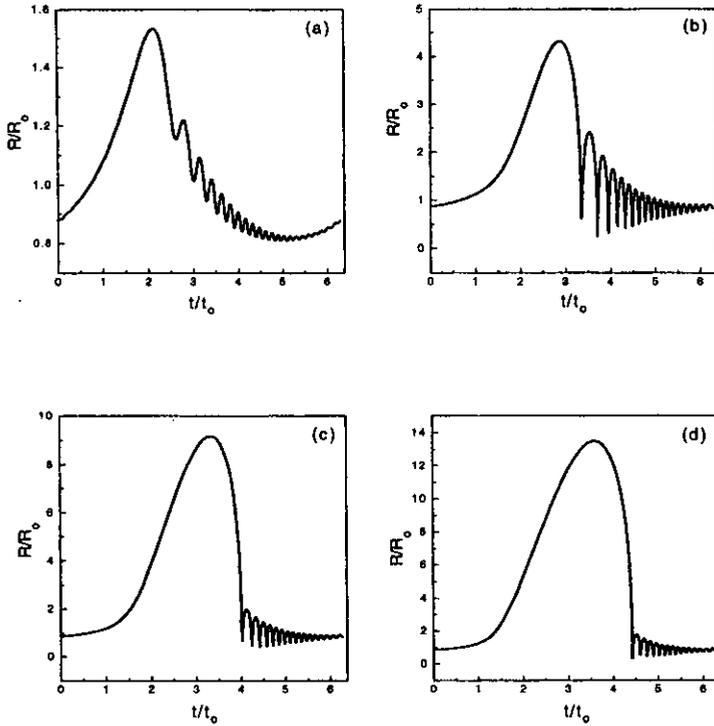


Figura 2.3- Solución a la ecuación $R-P$ a distintas presiones para una burbuja de aire en agua. En (a) $p_a=1$; en (b) $p_a=1.2$; en (c) $p_a=1.4$ y en (d) $p_a=1.6$. $f = 26$ khz.

Además el comportamiento de las dos soluciones es completamente diferente, cuando el radio ambiente es menor la solución es bastante suave mientras que para el otro R_0 la solución tiene cambios extremadamente rápidos en cuanto al tamaño del radio.

La sensibilidad a la frecuencia es menor que a la presión acústica y que a R_0 , sin embargo la forma en que cambian las soluciones es muy parecida pero de manera inversa. Esto lo podemos entender ya que al disminuir la frecuencia, la constante γ aumenta de manera cuadrática y ésta funciona como la presión efectiva para la nueva variable r . Los cambios no serán tan

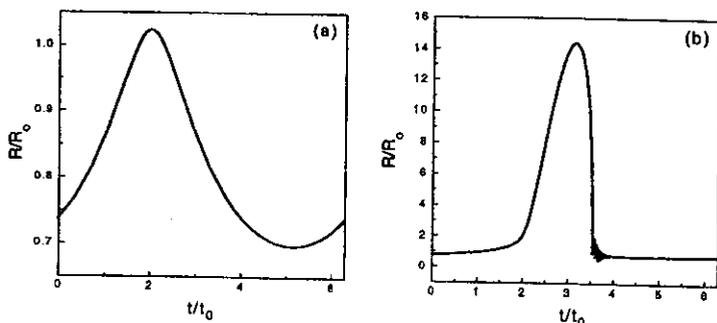


Figura 2.4- Solución de la ecuación de R-P para una burbuja de aire en agua con $p_a=1.5$. El radio R_0 es 1μ en (a) y 1.5μ en (b).

drásticos como los de la presión acústica ya que la frecuencia se encuentra también contenida en los términos α y β que funcionan como la tensión superficial efectiva y la viscosidad efectiva para la nueva variable R/R_0 respectivamente. La función que estas constantes desempeñan es el de una fuerza que se opone a crecimiento de la burbuja en el caso de la tensión superficial y otra fuerza que se opone al movimiento en general para el caso de la viscosidad. De aquí las variaciones que se tendrán serán considerables pero no tanto como las que ocurren al variar la presión acústica. Esto se puede ver en la Figura 2.5 en donde se grafica dos soluciones las cuales tienen todos los parámetros iguales excepto el de la frecuencia. La diferencia de frecuencias es de diez veces y el cambio entre los máximos que alcanzan los radios de las burbujas es de aproximadamente 10 veces; si se compara con el cambio que hace una variación en la presión acústica de 1 a 1.6 vemos que es aproximadamente igual.

Queda todavía por observar la solución para diferentes viscosidades así como diferentes tensiones superficiales. Empezaré por lo segundo. Aparte de la importancia de la tensión superficial en cuanto a como influye en el radio ambiente se tiene también que ésta cambia con cada fluido que se utilice. A continuación se verá que el cambio no es tan importante como para el caso en el cual se cambiaba R_0 pero que de igual manera al aumentar la tensión superficial el colapso se vuelve menos violento ya que ésta se opone al crecimiento de la burbuja. Podría decirse que la tensión superficial haría que el colapso fuera mas violento ya que ésta produce una fuerza que tiende

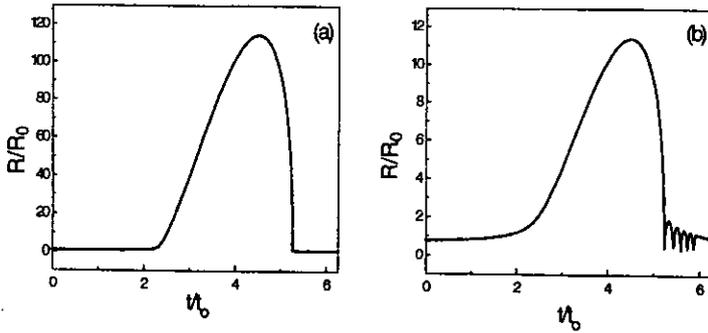


Figura 2.5- Solución para una burbuja de aire en agua a diferentes frecuencias. En (a) la frecuencia es de 2.6 khz. y en (b) es de 26 khz.

a reducir el tamaño de la burbuja, y esto es cierto, pero no influye tanto en el colapso como en el crecimiento de la burbuja. El colapso depende mas que nada en la diferencia de presiones entre el interior y el exterior, y no depende tanto en la tensión superficial ya que éste empieza en radios grandes para los cuales el término de que contiene a α es pequeño. En la Figura 2.6 se tiene la solución para dos medios con viscosidades muy parecidas pero con tensiones superficiales muy distintas como es el caso del agua pesada D_2O y etanol.

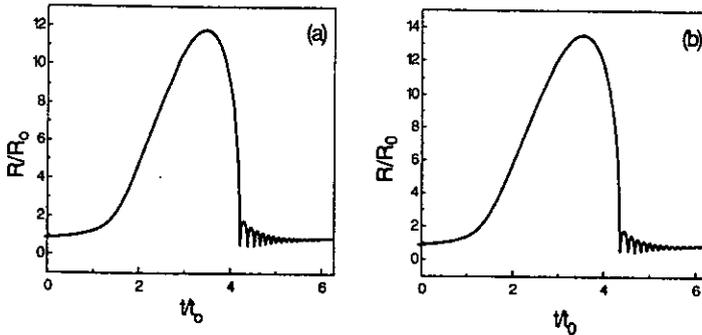


Figura 2.6- Solución para una burbuja de aire en dos diferentes fluidos. En (a) tenemos agua pesada para la cual $\sigma = 72$ dinas/cm, y en (b) tenemos etanol $\sigma = 24$ dinas/cm. La viscosidad difiere en un valor menor al 10%.

En esta figura se ilustra como el radio máximo que alcanza la burbuja que se encuentra en agua es menor que el que alcanza la que se encuentra en etanol cuya tensión superficial es menor que la del agua. Sin embargo el tiempo que les toma a las dos de ir de su radio máximo a su radio mínimo es casi igual por lo que las velocidad que alcanzará en el colapso la burbuja que está en etanol será mayor.

Finalmente se analizará la viscosidad. Para esto, observemos lo que pasa con una burbuja de aire en dos medios que tienen una tensión superficial muy parecida pero con una viscosidad muy diferente como lo es el agua y la glicerina (Figura 2.7).

Se observa que el radio máximo que alcanza en agua la misma burbuja es mayor como se esperaba. Además el tiempo del colapso es casi el mismo y queda por demás decir la conclusión.

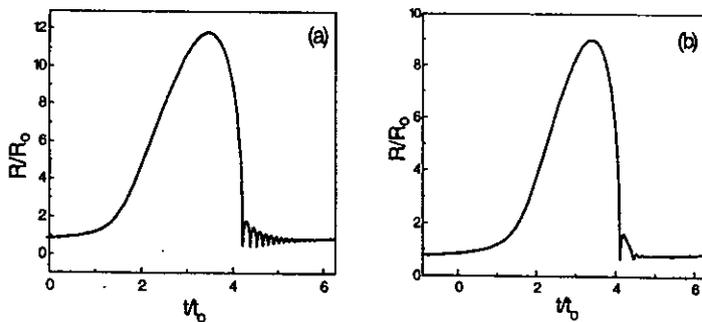


Figura 2.7- Solución para una burbuja de aire en dos diferentes fluidos. En (a) tenemos agua para la cual $\eta = 1$ cP, y en (b) tenemos glicerina para la cual $\eta = 12$ cP. El valor de la tensión superficial difiere en menos de 15%.

Los parámetros que quedan no son tan relevantes como los que recién se analizaron para la dinámica de la burbuja. Sin embargo si importa que gas es el que se encuentra en el interior de la burbuja así como la densidad del fluido en el cual se encuentre ésta inmersa. El primer factor es de suma importancia para propósitos de estabilidad de las oscilaciones (condición necesaria para que exista Sonoluminiscencia) [13, 14, 41, 42].

Por último se verán dos soluciones (Figs. 2.8 y 2.9) en tiempo real y se observará la magnitud de la velocidad y de la aceleración en el colapso.

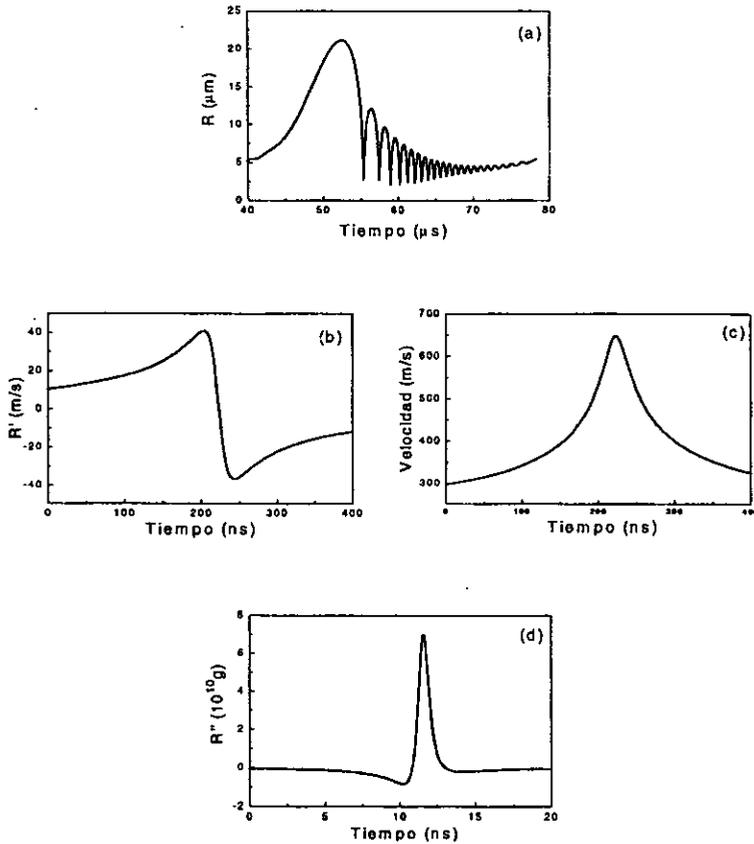


Figura 2.8- Solución de la ecuación R-P para una burbuja de aire en agua a una presión acústica de 1.2 atm y una frecuencia de 26 khz. En la parte (a) se tiene el radio como función del tiempo; en (b) y (c) se tiene la velocidad de la pared y la velocidad del sonido en el gas respectivamente alrededor del radio mínimo. En la parte (d) se grafica la aceleración de la pared de la burbuja en la última parte del colapso.

Como he dicho durante toda la sección se observa que entre mayor sea la razón $(r_{\text{max}} - r_{\text{min}})/\Delta t$, en donde Δt es el tiempo que tarda en pasar del radio máximo al mínimo, mayor será la velocidad y la aceleración que alcance la

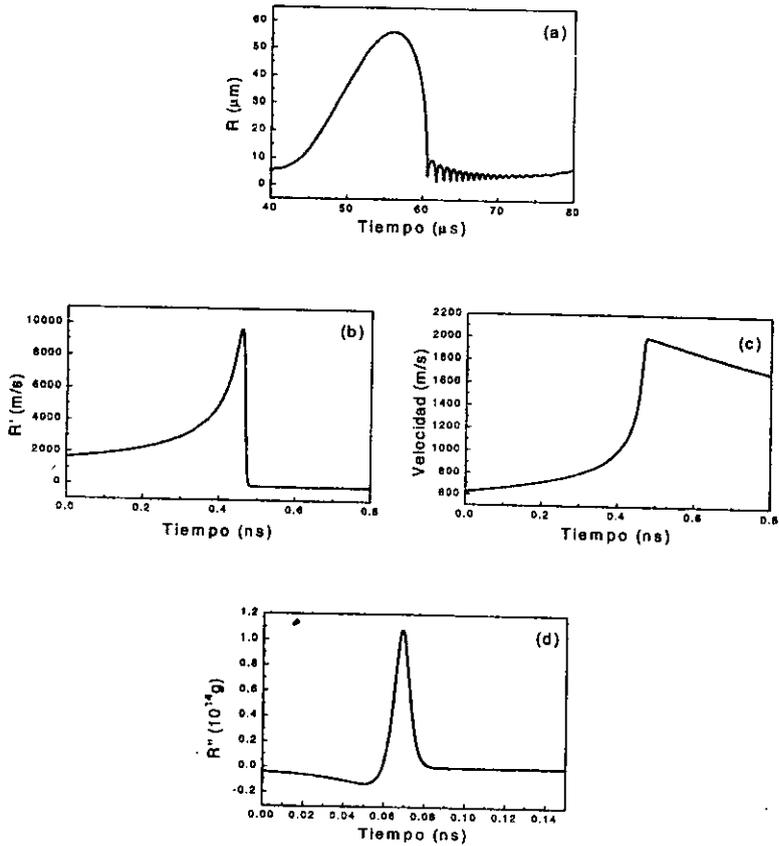


Figura 2.9- Solución de la ecuación R-P para una burbuja de aire en agua a una presión acústica de 1.5 atm y una frecuencia de 26 khz. En la parte (a) tenemos el radio como función del tiempo; en (b) y (c) tenemos la velocidad de la pared y la velocidad del sonido en el gas respectivamente. El intervalo de tiempo es de 800 ps alrededor del radio mínimo. En la parte (d) se grafica la aceleración que alcanza la frontera de la burbuja en la última parte del colapso.

pared de la burbuja. La velocidad del sonido en el gas es proporcional a la raíz de la temperatura, la cual se calcula mediante la ecuación de estado de

Van der Waals. En la Fig. 2.8 se ve que la aceleración llega a alcanzar valores del orden de $7 \times 10^{10} g/s$, en donde $g=10 \text{ m/s}^2$. También es de notarse que el radio mínimo es casi diez veces menor que el radio ambiente.

En la Figura 2.9(d) se observa que la pared llega a alcanzar aceleraciones de $1 \times 10^{14} g/s$. También se ve en (b) y (c) que la velocidad de la pared rebasa la velocidad del sonido en el gas en una cantidad considerable lo que provocaría la formación de una onda de choque dentro de la burbuja. Esto último indica que la ecuación de estado que se está utilizando no es la correcta ya que la presión no será uniforme dentro de ella, pero como primer acercamiento al problema esta suposición es muy razonable. El radio mínimo que alcanza es todavía menor que el que alcanza en la Figura 2.8, sin embargo por la pendiente tan pronunciada esto no se puede apreciar.

A modo de conclusión tenemos que el colapso será mas violento si la razón $(r_{\text{max}} - r_{\text{min}})/\Delta t$ es mayor. También que los radios mínimos que puede alcanzar la burbuja pueden llegar a ser casi del tamaño del radio que ocuparían las moléculas si éstas estuvieran lo mas pegadas posible entre ellas. Esto nos quiere decir que las densidades que se pueden alcanzar dentro de la burbuja son enormes e incluso pueden rebasar a la del fluido.

Finalmente se ilustra este último punto mediante dos gráficas (Fig. 2.10) en las cuales se puede apreciar la densidad y temperatura que alcanza

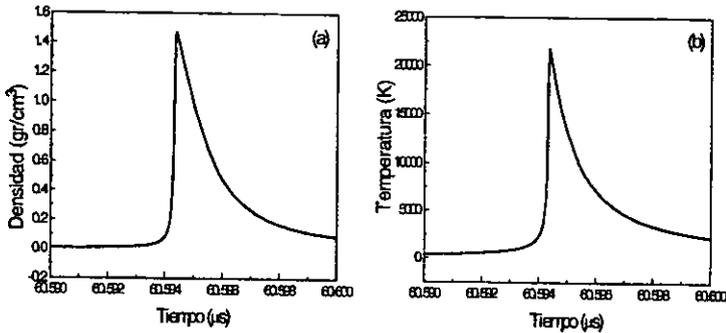


Figura 2.10- En (a) se grafica la densidad así como en (b) la temperatura del gas como función del tiempo para una burbuja de aire en agua con un radio ambiente $R_0 = 5\mu$ a la cual se le aplica una presión acústica de 1.5Atm a una frecuencia de 26Khz .

el gas dentro de la burbuja cuando ésta se encuentra alrededor de r_{\min} . Estas gráficas corresponden a los valores utilizados en la solución que aparece en la Figura 2.9 en la cual se utiliza una ecuación de estado adiabática para el gas. Las temperaturas que se alcanzan rebasan los 20000 K y la densidad es $\sim 40\%$ mayor que la del agua. En el primer capítulo se mencionó que ya se ha calculado que la temperatura alcanza valores del orden de miles de grados Kelvin pero hasta el momento nadie se ha preocupado por la densidad del gas en el interior. Las altas densidades nos impulsa a pensar que están existiendo cambios ópticos de la burbuja, como por ejemplo que el índice de refracción de ella cambie con el tiempo. En lo que resta de la tesis me enfocaré en esta dirección ya que es posible detectar estos cambios mediante técnicas de dispersión de luz.

Capítulo 3

Dispersión de luz por una burbuja

Un reto dentro de la parte experimental del fenómeno de la Sonoluminiscencia en burbujas es el de medir con precisión el radio de éstas como función del tiempo. En los últimos años se han desarrollado métodos para poder llevar a cabo esto y actualmente ya se tienen mediciones serias[10]. El experimento para medir el radio de una burbuja oscilante como función del tiempo se basa en la teoría de dispersión de luz por una esfera que se encuentra suspendida en un medio cuyo índice de refracción es diferente al de ésta (teoría de Mie)[43]-[46]. Básicamente, se mide la cantidad de luz dispersada por la burbuja en un ángulo sólido como función del tiempo. A partir de esto y utilizando una relación teórica entre el radio y la intensidad de la luz dispersada en un cierto ángulo sólido se encuentra al radio como función del tiempo[15, 10].

El capítulo está formado por dos secciones y en su mayoría se enfoca a la teoría que describe la dispersión de luz por una esfera. En él se deducirán de manera breve las ecuaciones que describen al campo electromagnético dentro y fuera de la burbuja para finalmente llegar a las expresiones exactas de la intensidad de luz dispersada como función del ángulo, y de la sección eficaz de dispersión (primera sección). La parte referente al experimento y a la teoría aproximada que se utiliza actualmente en la medición del radio se da en la segunda sección.

3.1 Teoría de Mie

El problema de dispersión de luz por una partícula esférica que se encuentra rodeada por un medio homogéneo es un problema bien conocido y su solución es exacta. Básicamente el procedimiento consiste en desarrollar el campo electromagnético en una serie de esféricos armónicos vectoriales, tanto como para la parte que está dentro así como para el exterior de la esfera. En el desarrollo de la serie se pesan a cada una de estas funciones con los llamados coeficientes de dispersión. Utilizando las condiciones de frontera y algunas propiedades de los esféricos armónicos vectoriales uno puede encontrar ecuaciones explícitas para cada uno de estos coeficientes las cuales solamente dependen de parámetros externos: el radio de la esfera, los índices de refracción del medio y la partícula y la longitud de onda de la luz incidente. A partir de estos coeficientes uno puede calcular las cantidades observables como son la intensidad de la luz en diferentes direcciones o la sección efectiva de dispersión.

A lo largo de esta sección se desarrollará de manera breve la deducción de los resultados de la teoría de Mie para así llegar a las fórmulas prácticas que se utilizarán en éste y el siguiente capítulo. La primera parte de esta sección está destinada a obtener la forma de los campos electromagnéticos dentro y fuera de una partícula dispersora que se encuentra en un medio homogéneo. La segunda parte de esta sección se concentra en los coeficientes de dispersión, en la sección efectiva de dispersión y en la intensidad de la luz dispersada como función del ángulo. También se presenta un resultado a modo de ejemplo.

3.1.1 Formulación general del problema de dispersión

El problema fundamental es el siguiente:

‘Si se ilumina mediante una onda linealmente polarizada monocromática a una partícula de un tamaño, forma y propiedades ópticas dadas, determinar el campo electromagnético en todos los puntos dentro de ésta, así como en todos los puntos del medio homogéneo en el que la partícula se encuentra suspendida.’

La solución no se restringe a una onda plana, ya que cualquier campo electromagnético puede ser descompuesto en sus componentes de Fourier las cuales son exactamente ondas planas. De esta manera, utilizando después el principio de superposición se puede encontrar la solución general a partir de

la solución para el caso de una onda linealmente polarizada monocromática.

Se denotará al campo dentro de la partícula por $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ y al campo en el medio que rodea a ésta por $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$, el cual es la superposición de campo incidente $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ y el campo dispersado $(\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d)$ (Fig. 3.1), es decir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_d \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_d\end{aligned}\quad (3.1)$$

en donde los campo incidentes son ondas monocromáticas linealmente polarizadas en una dirección específica.

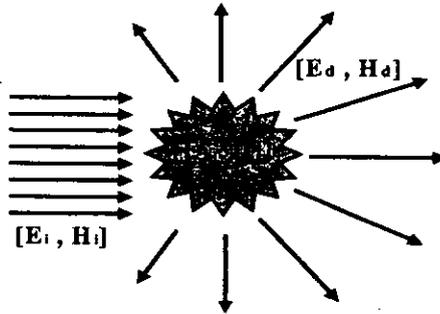


Figura 3.1- El campo incidente $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ da origen al campo dentro de la partícula $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ y a un campo dispersado $(\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d)$ en el medio que rodea a la partícula.

Estos campos deben de satisfacer las ecuaciones de Maxwell en una región en donde no hay cargas libres

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu(\omega)\mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E},\end{aligned}\quad (3.2)$$

para todos los puntos en donde $\varepsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$ sean continuas. La $\mu(\omega)$ y $\varepsilon(\omega)$ son la susceptibilidad magnética y la función dieléctrica respectivamente. La

ω es la frecuencia del campo electromagnético. Mediante algunas identidades vectoriales finalmente se llega a que los campos deben de satisfacer las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} &= 0,\end{aligned}\tag{3.3}$$

en donde $k^2 = \omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega)$. Se ve así que \mathbf{E} y \mathbf{H} deben de satisfacer la ecuación vectorial de onda.

Se tiene que el campo electromagnético debe de satisfacer las ecuaciones de Maxwell en todos los puntos en donde μ y ε sean continuas. Sin embargo cuando uno atraviesa la frontera entre la partícula y el medio hay un cambio repentino de estas dos propiedades, es decir hay una discontinuidad en la frontera. Si los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} son finitos, en dicha frontera se deben de imponer las siguientes condiciones de contorno a los campos

$$\begin{aligned}[\mathbf{E}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_1(\mathbf{x})] \times \hat{\mathbf{n}} &= 0, \\ [\mathbf{H}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{H}_1(\mathbf{x})] \times \hat{\mathbf{n}} &= 0,\end{aligned}\tag{3.4}$$

en donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector normal a la superficie de la partícula y \mathbf{x} está en la superficie. Estas condiciones de frontera aseguran que las componentes tangenciales de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en la superficie sean continuas a través de ésta.

La solución de éstas ecuaciones de onda vectoriales es muy complicada. Hasta el momento no se conocen soluciones exactas excepto para el caso de una partícula esférica, un cilindro infinito y un esferoide. A continuación se presenta la solución del problema para una partícula esférica.

3.1.2 Solución a las ecuaciones de onda vectoriales y obtención de los campos dentro y fuera de una partícula esférica.

Se sabe que cada uno de los campos deben de satisfacer la ecuación vectorial de onda(3.3). Para encontrar la solución se construye la siguiente función vectorial \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \nabla \times (c\psi),$$

en donde c es un vector arbitrario con rotacional igual a cero y ψ es una función escalar. Como \mathbf{M} es el rotacional de un vector entonces se cumple

que $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$. Después de un poco de algebra se llega a que

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} = \nabla \times [\mathbf{c} (\nabla^2 \psi + k^2 \psi)],$$

y se puede ver que \mathbf{M} es solución de la ecuación vectorial de onda si ψ es solución a la ecuación escalar de onda

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0.$$

Ahora se construye otra función \mathbf{N} a partir de \mathbf{M} ,

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k},$$

de la cual su divergencia es también cero. La función \mathbf{N} satisface la ecuación de onda vectorial si \mathbf{M} la satisface, y ésta a su vez es solución si ψ satisface la ecuación escalar de onda. De esta forma ya se encontraron dos funciones vectoriales que cumplen con todos los requisitos para ser campos electromagnéticos, y lo único que resta hacer es encontrar las soluciones a la ecuación escalar de onda. A ψ se le conoce como la función generatriz de los armónicos vectoriales \mathbf{M} y \mathbf{N} ; al vector \mathbf{c} se le conoce como el vector guía o piloto.

En este capítulo se está interesado en la solución para una partícula de forma esférica con índice de refracción N_1 inmersa en un medio homogéneo con índice de refracción N por lo que se debe de resolver la ecuación de onda escalar en coordenadas esféricas r, θ, ϕ (Fig. 3.2). También se debe de elegir al vector guía como el radio vector \mathbf{r} para que $\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi)$ sea una solución de la ecuación vectorial de onda en coordenadas esféricas. La ecuación escalar de onda en coordenadas esféricas se puede escribir como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (3.5)$$

Ahora, si se considera que la función $\psi(r, \theta, \phi)$ se puede descomponer en parte radial y dos partes angulares de la siguiente forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi),$$

entonces al sustituir ψ en la Ec.(3.5) se obtien una ecuación la cual se puede

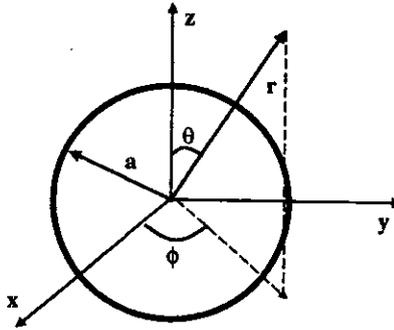


Figura 3.2 - Coordenadas esféricas cuyo origen se encuentra en el centro de una partícula esférica.

descomponer en tres ecuaciones separadas, es decir una para cada una de las variables

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[k^2 r^2 - n(n+1) \right] R = 0 \quad (3.8)$$

en donde las constantes de separación m y n están determinadas por otras condiciones que ψ también debe de satisfacer.

La solución general para las ψ 's (funciones generatrices) en coordenadas esféricas está dada por

$$\psi_{p_a m n} = \cos m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(kr), \quad (3.9)$$

$$\psi_{i_m m n} = \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(kr). \quad (3.10)$$

en donde $z_n(kr)$ es una función de tipo Bessel esférica de grado n , $P_n^m(\cos\theta)$ son los polinomios asociados de Legendre de grado n y orden m . Los subíndices p_a e i_m se refieren a la soluciones pares e impares respectivamente. Además

las constantes de separación m y n deben de ser enteras ya que si se hace una rotación de 2π en ϕ debemos de llegar a las mismas expresiones. Ahora, por la completéz de las funciones que conforman a las ψ 's, cualquier función que satisfaga la ecuación de onda escalar en coordenadas esféricas puede ser desarrollada en una serie infinita de las funciones (3.9) y (3.10). A partir de éstas, ahora se pueden generar los esféricos armónicos vectoriales los cuales quedarían como

$$\mathbf{M}_{p_a mn} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{p_a mn}), \quad \mathbf{M}_{i_m mn} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{i_m mn}), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{N}_{p_a mn} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{p_a mn}}{k}, \quad \mathbf{N}_{i_m mn} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{i_m mn}}{k}, \quad (3.12)$$

y de aquí cualquier campo que cumpla con la ecuación vectorial de onda puede ser desarrollado en una serie infinita de las funciones (3.11) y (3.12).

Para encontrar los campos dentro de la esfera, así como en el medio que la rodea, es necesario desarrollar el campo incidente (onda linealmente polarizada en la dirección x)

$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{ikr \cos \theta} \hat{\mathbf{e}}_x,$$

en donde

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

en esféricos armónicos vectoriales. El desarrollo es algo largo y tedioso, por lo que sólo mostraré el resultado:

$$\mathbf{E}_i = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\mathbf{M}_{i_m 1n}^{(1)} - i \mathbf{N}_{p_a 1n}^{(1)} \right), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{-k}{\omega \mu} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\mathbf{M}_{p_a 1n}^{(1)} - i \mathbf{N}_{i_m 1n}^{(1)} \right), \quad (3.14)$$

en donde E_0 es la amplitud de la onda incidente y μ la susceptibilidad magnética del medio en el que se encuentra la partícula. Las M 's y N 's son los esféricos armónicos vectoriales y dependen de r, θ y ϕ . Es de notarse que el subíndice m se redujo a 1 y esto se debe a las propiedades de ortogonalidad de los esféricos armónicos vectoriales y de las funciones que los integran. El superíndice (1) indica que la funciones que se utilizan en los esféricos armónicos vectoriales son las funciones de Bessel esféricas de primer tipo

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr),$$

en donde las J_n 's son las funciones de Bessel de primer tipo. El uso de éstas se debe a que el campo incidente es finito en el origen y dado que las únicas funciones de Bessel que convergen en el origen a un valor finito son las anteriores, no queda otra elección.

Ahora encontraré los campos dentro de la esfera. En este caso el desarrollo es casi igual sólo que ahora pesaré de diferente manera a los esféricos armonicos vectoriales para llegar a

$$\mathbf{E}_1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(c_n \mathbf{M}_{i_m 1n}^{(1)} - i d_n \mathbf{N}_{p_a 1n}^{(1)} \right), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{-k_1}{\omega \mu_1} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(d_n \mathbf{M}_{p_a 1n}^{(1)} + i c_n \mathbf{N}_{i_m 1n}^{(1)} \right), \quad (3.16)$$

en donde k_1 y μ_1 son el número de onda y la susceptibilidad magnética dentro de la esfera respectivamente.

Para el campo en la región que está fuera de la esfera, en donde todas las funciones de Bessel convergen a cero para kr suficientemente grande (como el campo dispersado), se utilizarán las funciones de Bessel esféricas de tercer tipo: las funciones esféricas de Hankel $h_n(\rho)$. Se han escogido a estas últimas ya que tienen un comportamiento asintótico de la forma de una onda esférica saliente, como se requiere para la onda dispersada. El desarrollo del campo dispersado toma la siguiente forma

$$\mathbf{E}_d = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(-b_n \mathbf{M}_{i_m 1n}^{(3)} + i a_n \mathbf{N}_{p_a 1n}^{(3)} \right), \quad (3.17)$$

$$\mathbf{H}_d = \frac{-k}{\omega \mu} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(a_n \mathbf{M}_{p_a 1n}^{(3)} + i b_n \mathbf{N}_{i_m 1n}^{(3)} \right), \quad (3.18)$$

en donde el superíndice (3) indica el uso de las funciones de Hankel en las z_n 's.

Dadas estas ecuaciones vectoriales para los campos, quedan por determinar los coeficientes de dispersión a_n , b_n , c_n , y d_n , de los cuales no se ha dicho nada hasta el momento.

3.1.3 Coeficientes de dispersión

Ha llegado el punto en el cual para poder palpar de manera terrenal toda la teoría desarrollada anteriormente es necesario encontrar los coeficientes de

dispersión, para después encontrar las cantidades observables que son a fin de cuentas las únicas a las que podemos acceder en este mundo.

Para una n dada existen cuatro incógnitas: a_n , b_n , c_n , y d_n , por lo que se necesitan cuatro ecuaciones independientes: las condiciones de frontera proyectadas en sus componentes tangenciales. Éstas son las siguientes:

$$\mathbf{E}_{1\theta} = \mathbf{E}_{i\theta} + \mathbf{E}_{d\theta}, \quad \mathbf{E}_{1\phi} = \mathbf{E}_{i\phi} + \mathbf{E}_{d\phi}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{H}_{1\theta} = \mathbf{H}_{i\theta} + \mathbf{H}_{d\theta}, \quad \mathbf{H}_{1\phi} = \mathbf{H}_{i\phi} + \mathbf{H}_{d\phi}, \quad (3.20)$$

que se cumplen en $r = a$ en donde a es el radio de la esfera.

Después de una buena cantidad de pasos intermedios, aprovechando ciertas propiedades de las funciones especiales utilizadas y suponiendo que las permitividades de los dos medios son iguales se llega a los buscados coeficientes de dispersión

$$a_n = \frac{m\varphi_n(mx)\varphi'_n(x) - \varphi_n(x)\varphi'_n(mx)}{m\varphi_n(mx)\xi'_n(x) - \xi_n(x)\varphi'_n(mx)}, \quad (3.21)$$

$$b_n = \frac{\varphi_n(mx)\varphi'_n(x) - m\varphi_n(x)\varphi'_n(mx)}{\varphi_n(mx)\xi'_n(x) - m\xi_n(x)\varphi'_n(mx)}, \quad (3.22)$$

en donde m y x están dados por

$$m = N_1/N, \quad x = ka = \frac{2\pi Na}{\lambda}. \quad (3.23)$$

N_1 y N son los índices de refracción de la partícula y el medio respectivamente. Normalmente N_1 es complejo, es decir tiene una parte real y una parte imaginaria. Si tomamos la $\mu = 1$, entonces $N_1 = \sqrt{\varepsilon_1(\omega)}$, en donde $\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$. La parte real de la función dieléctrica sólo tiene que ver con la dispersión de luz mientras que la parte imaginaria está ligada con la energía electromagnética que puede absorber la partícula. También se pide que la N sea real en el medio.

Las funciones φ_n y ξ_n son las llamadas funciones Riccati-Bessel y están definidas como

$$\varphi_n(\nu) = \nu j_n(\nu), \quad \xi_n(\nu) = \nu h_n(\nu). \quad (3.24)$$

3.1.4 Funciones de amplitud y sección eficaz de dispersión

En realidad las cantidades que se pueden medir cuando la luz es dispersada por un obstáculo son la sección eficaz de dispersión C_{dis} (si el medio no absorbe), la sección diferencial de dispersión y la intensidad de la luz dispersada como función del ángulo I_{dis} .

La sección eficaz de dispersión C_{dis} se define como el área sobre la cual incidiría una cantidad de energía del haz incidente que fuera igual a la cantidad de energía dispersada en todas las direcciones. En otras palabras, el total de la energía dispersada en todas las direcciones es igual a la energía de la onda incidente que pasa por una area = C_{dis} . En general existe un proceso de absorción por lo que se tiene una sección eficaz de absorción C_{abs} . Por el principio de conservación de la energía se obtiene que la energía removida del haz original es igual a la energía que incide en una area C_{ext} definida como

$$C_{ext} = C_{dis} + C_{abs}$$

Las dimensiones de estas tres cantidades son las de area. Normalmente la cantidad que uno mide es la sección de extinción C_{ext} , sin embargo si no existe absorción la sección eficaz de dispersión será igual a la sección de extinción. En este caso se supondrá que la burbuja no absorbe energía electromagnética por lo que $C_{ext} = C_{dis}$.

En este trabajo sólo mencionaré los resultados, pero la deducción de estas fórmulas puede encontrarse en cualquier libro de dispersión de luz por partículas esféricas[44, 45, 46]. Las expresiones para la intensidad de la luz dispersada y para C_{dis} se obtienen considerando que uno se encuentra a una distancia de la partícula lo suficientemente grande, es decir que se cumpla que $kr \gg 1$. En esta aproximación tenemos que las expresiones para los campos se reducen por la forma asintótica de las funciones de Hankel. Otra simplificación se dá del hecho de que la componente radial o longitudinal del campo se puede despreciar ya que decae como $1/r^2$ mientras que las componentes transversales decaen como $1/r$. Expresando a los campos usando estas simplificaciones y utilizando el vector de Poynting para obtener la intensidad uno llega finalmente a las expresiones para la intensidad de la luz dispersada como función del ángulo y para la sección transversal las cuales se muestran a continuación.

La intensidad de la luz dispersada depende de la polarización de ésta. Para luz linealmente polarizada tenemos que la intensidad en el plano de

polarización de la onda está dada por

$$i_{\parallel} = \frac{1}{(kr)^2} |S_2|^2 I_i, \quad (3.25)$$

y en el plano perpendicular a la polarización

$$i_{\perp} = \frac{1}{(kr)^2} |S_1|^2 I_i. \quad (3.26)$$

Para luz no polarizada tenemos la superposición de las dos, es decir

$$I_{dis} = \frac{1}{2(kr)^2} [|S_1|^2 + |S_2|^2] I_i. \quad (3.27)$$

Las S 's que aparecen se les conoce como las funciones de amplitud y tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \pi_n + b_n \tau_n) \\ & \quad y \\ S_2 &= \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \tau_n + b_n \pi_n). \end{aligned} \quad (3.28)$$

en donde π_n y τ_n son las funciones dependientes del ángulo θ y sus expresiones están dadas por

$$\pi_n(\cos \theta) = \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad \tau_n(\cos \theta) = \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta}. \quad (3.29)$$

Los coeficientes de dispersión a_n y b_n están dados por (3.21) y (3.22) respectivamente. Es de notarse que la intensidad de la luz dispersada no depende de ϕ debido a que los medios son homogéneos. Para un medio inhomogéneo estas fórmulas no son válidas.

La sección eficaz de dispersión está dada por

$$C_{dis} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_n (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad (3.30)$$

y la sección diferencial de dispersión $dC_{dis}/d\Omega$, definida como la energía dispersada por unidad de tiempo en un ángulo sólido unitario Ω cuya dirección está especificada por los valores de θ y ϕ , viene dada por

$$\frac{dC_{dis}}{d\Omega} = \frac{r^2 I_{dis}}{I_i}, \quad (3.31)$$

en donde r es la distancia al detector, $I_{dis}(r, \theta, \phi)$ es la intensidad de la luz dispersada e I_i es la intensidad de la luz incidente.

Para evaluar de manera práctica estas series infinitas es necesario trun-carlas en un valor de n , por ejemplo n_c , y quedarse con un error. Sin embargo el error puede ser tan pequeño como uno quiera dependiendo de la elección de n_c^1 . Para los cálculos tomaré a n_c como $x + 4$ [46] en donde x esta definida por (3.23).

Como ejemplo se calcula la intensidad de la luz dispersada como función del ángulo θ para una burbuja cuyo radio es de $.7\mu$ con $N_1=1$ que se encuentra dentro de un medio (agua) con $N=1.33$. La longitud de onda de la luz incidente es 4500 \AA y no está polarizada. En el resultado (Fig. 3.3) se observa que la mayoría de la luz dispersada se va hacia el frente (entre 0° - 20°) mientras que la intensidad de la luz dispersada en los ángulos restantes disminuye hasta por 4 ordenes de magnitud, como es el caso de la región entre 120° - 130° .

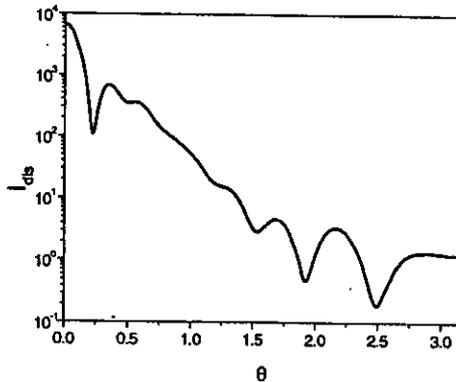


Figura 3.3 - Dispersión de luz por una partícula esférica. En este caso $x = 13$ y $m = 0.75$. El ángulo de dispersión está en radianes.

¹La elección de n_c (cota superior para la n) no es arbitraria. Se puede ver que la magnitud de los términos de la serie después de este valor es mucho mas pequeña que la de los primeros.

3.2 Medición del radio de una burbuja oscilante como función del tiempo

El dispositivo experimental (Fig. 3.4) que se utiliza para medir el radio como función del tiempo consiste básicamente de un sistema de dispersión de luz. Primeramente se produce una burbuja dentro de un frasco sellado y lleno de algún líquido. La burbuja se mantiene levitada en el centro del recipiente mediante la aplicación de un campo sonoro cuya frecuencia es igual a la frecuencia natural de resonancia del recipiente[5]. Después se hace incidir sobre la burbuja luz monocromática que proviene de un láser, el cual manda pulsos de luz con una duración de 200 ps cada 13 ns[10]. La luz dispersada se recolecta en un ángulo sólido por medio de una lente y después pasa al detector. La salida del detector está conectada a un osciloscopio en el cual se lleva a cabo la adquisición de datos en tiempo real[10].

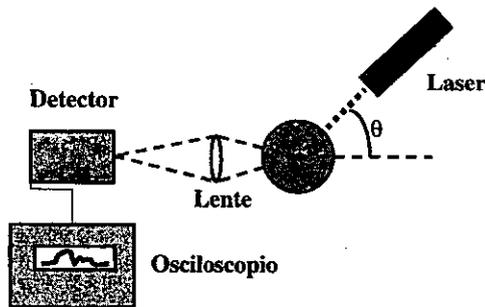


Figura 3.4 - Dispositivo experimental para la medición del radio como función del tiempo.

Para la obtención de las curvas del radio en función del tiempo es necesaria una teoría con la cual uno pueda comparar la intensidad de la luz dispersada en un ángulo sólido contra el radio. La teoría utilizada hasta el momento se basa en la aproximación de óptica geométrica para la dispersión de luz por una partícula esférica.

La aproximación que se usa en esta teoría es que el radio de la burbuja es mucho mayor que la longitud de onda. Suponiendo esto, uno considera que la luz incidente se puede ver como un conjunto de rayos independientes que se reflejan y refractan en la burbuja cumpliendo con la ley de Snell para un plano infinito. A partir de esto y utilizando las ecuaciones para los coeficientes de reflexión de Fresnel de cada una de las componentes de la polarización podemos obtener la intensidad de un rayo en una cierta dirección θ^2 . La ecuación a la que se llega para un solo rayo es la siguiente

$$I_{dis}(p, \tau) = \frac{a^2}{\tau^2} I_i \epsilon^2 D, \quad (3.32)$$

en donde

$$D = \frac{\sin \tau \cos \tau}{\sin \theta |d\theta'/d\tau|}.$$

A D se le conoce como la divergencia. El ángulo τ es el de incidencia con respecto a un plano tangente a la esfera en el punto de incidencia del rayo (Fig. 3.5). La cantidad que se encuentra contenida en valor absoluto depende del cociente de los índices de refracción del agua y el aire, así como de τ . La ϵ^2 es la fracción del rayo incidente que se refleja en una superficie plana y está dada por las ecuaciones de Fresnel.

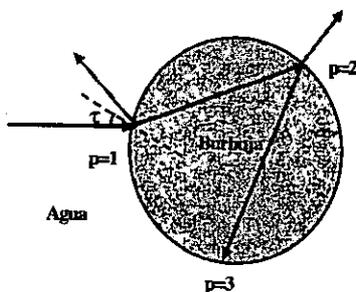


Figura 3.5-Reflexión y refracción geométrica de un rayo de luz por una burbuja.

²El ángulo θ es el mismo que se utilizó en la sección anterior.

Para cada polarización existe una ϵ^2 diferente, pero ambas dependen del cociente de los índices de refracción del agua y el aire, así como del ángulo de incidencia τ . El radio de la burbuja es a y la distancia a la cual se mide la intensidad es r .

De la Ec.(3.32) se observa que la intensidad es proporcional al cuadrado del radio no importa a que ángulo se mida, y por lo tanto si se recolecta la luz en un intervalo de ángulos, la intensidad de ésta también será proporcional a a^2 . La deducción e interpretación completa de (3.32) se puede encontrar en el libro de Van Hulst[44], o en el artículo de Davis[47].

Finalmente para calibrar el experimento se comparan los resultados experimentales con la curva teórica que sale de resolver la ecuación R-P y se ajustan en la región de expansión de la burbuja, ya que se sabe que en esa región esta ecuación es válida y además se cumple que el radio es mucho mayor que la longitud de onda del haz incidente.

Capítulo 4

Dispersión de luz por una burbuja Sonoluminiscente

Desde el descubrimiento de la Sonoluminiscencia ha habido un gran interés en conocer cual es el comportamiento exacto de las burbujas sonoluminiscentes. Esto no había sido posible en un inicio ya que se tenían muchas de ellas. Actualmente ya se tiene SL de una sola burbuja y esto puede ser un punto decisivo para poder encontrar las causas de ésta. Hasta el momento lo único que se ha podido hacer es medir el radio como función del tiempo, la intensidad de la luz emitida, así como el espectro de esta última. Sin embargo, sin despreciar la importancia de las últimas dos mediciones, la clave fundamental para descubrir cual es el proceso involucrado en la emisión de luz está en la dinámica de la burbuja.

En la medición del radio es necesario introducir un modelo teórico que nos muestre como dispersa luz una burbuja esférica[43]-[48]. La necesidad de utilizar un modelo radica en el hecho de que si no existiera ninguno sería imposible poder interpretar los resultados experimentales. De aquí se desprende que los resultados finales van a depender de la modelo utilizado. Desde principios de siglo, Mie[43] construyó la solución exacta al problema de dispersión de luz por una partícula esférica. Mediante esta teoría, expuesta en el capítulo tres, uno puede calcular de manera exacta la dispersión de luz por una burbuja contenida en algún fluido. Lo único que uno necesita es conocer el índice de refracción de la burbuja y del medio que la rodea, así como el radio de la primera. Ahora, el punto interesante es que la solución depende tanto del índice de refracción como del radio de la burbuja y es imposible mediante una sola medición conocer ambos. Es por ello que uno

necesita conocer alguno de estos dos por anticipado para poder medir el otro mediante las técnicas de dispersión de luz. En este caso el interés está en conocer el radio, por lo que es necesario escoger algún valor para el índice de refracción de la burbuja. Para esto último se tiene que crear un modelo de la burbuja en el cual al menos se pueda conocer la densidad del gas en su interior para después conocer el índice de refracción de ésta. Ya que es necesario crear este modelo, las mediciones del radio serán a lo que llamaré 'Mediciones Modelo-Dependientes', es decir que dependerán del modelo que se utilice para la burbuja.

En primera aproximación se puede suponer que el índice de refracción de la burbuja es constante e igual al del aire a presión atmosférica. Suponiendo esto, lo que resta es solamente calcular y medir la intensidad de la luz dispersada en un cierto ángulo sólido para después obtener el valor del radio. Ahora, como en la mayor parte del ciclo acústico el tamaño de la burbuja es varias veces mayor que la longitud de onda del haz incidente ($\sim 4100 \text{ \AA}$) entonces es aplicable la aproximación de óptica geométrica (Cap. 3, Sec.3.2)[47]. Sin embargo, en la parte del colapso los radios que la burbuja alcanza son comparables al valor de la longitud de onda de la luz incidente por lo que se necesita la solución exacta. La importancia de conocer el radio en la última parte del colapso se debe a que la emisión de luz por la burbuja (SL) se lleva a cabo justamente cuando el radio de la burbuja está alrededor del radio mínimo (Cap 1). En este capítulo se hará una comparación entre la teoría exacta y la aproximación geométrica para observar como a radios grandes la segunda funciona bien, mientras que para radios comparables a la longitud de onda esta tiene errores muy grandes.

El problema que se acaba de mencionar es sin duda importante, pero existe otro aún mas importante que es el de si cambia o no el índice de refracción de la burbuja como función del tiempo. Actualmente se considera que la burbuja tiene un índice de refracción constante, sin embargo para obtener la solución de la ecuación R-P (con la cual se ajustan los valores) se ha supuesto hasta ahora que no existe intercambio de masa a través de la pared. Esto último implica que la densidad puede aumentar considerablemente (Fig. 2.10) y por ende el índice de refracción. Que contradicción! La segunda sección de este capítulo está destinada a encontrar la intensidad de la luz dispersada utilizando dos modelos, uno en el cual el índice de refracción se mantenga constante y otro el el cual éste varíe según la densidad del gas en el interior de acuerdo a la relación de Clausius-Mossotti[49, 50]. En esta sección se incluyen un conjunto de propuestas experimentales para poder saber si el

índice de refracción cambia.

Para finalizar se calcula la intensidad de luz dispersada por una burbuja de aire rodeada por una capa de hielo. Como se vió antes, este modelo se hace con la finalidad de observar las consecuencias que traería consigo en la dispersión de luz esta teoría para el mecanismo de emisión (Cap. 1, Sec. 1.2).

4.1 Óptica Geométrica vs. Teoría Exacta

Es importante hacer notar las diferencias entre la aproximación geométrica (AG) y la teoría exacta (TE). Como se vió en el capítulo anterior, la intensidad de la luz dispersada en la teoría geométrica es proporcional al cuadrado del radio de la burbuja. Sin embargo en la solución exacta esto no sucede de la misma forma. La diferencia radica en que la AG es válida únicamente para radios mucho mayores que la longitud de onda; si el radio es 10 veces mayor que la longitud de onda esta última teoría ya es utilizable[44, 45]. En la Figura 4.1 se muestra la intensidad de la luz dispersada para una burbuja de aire de 2μ y otra de 0.8μ . Se observa que la curva basada en la AG es mucho mas cercana a la solución exacta, e incluso se puede decir que promedia la retrodispersión, 'Backscattering' (alrededor de 180°), bastante bien para el caso de 2μ , mientras que para el otro tamaño de burbuja la aproximación es muy mala.

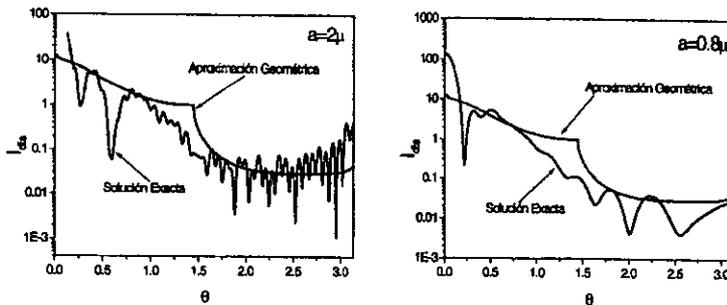


Figura 4.1- Intensidad de la luz dispersada como función del ángulo por una burbuja de radio a , para $a = 2$ y 0.8μ .

La intensidad de la luz dispersada I_{dis} está en unidades de I_0 , en donde I_0 es la intensidad del haz incidente. Se utiliza luz no polarizada y la longitud de onda del haz incidente es de 4100 \AA (será igual para todas las soluciones de esta capítulo excepto cuando se indique lo contrario). El índice de refracción del aire y agua se toman como reales y tienen un valor de 1 y 1.33 respectivamente. El ángulo de dispersión θ está dado en radianes. La intensidad está normalizada de tal forma que si se tuviera una esfera totalmente reflectora la intensidad sería igual a 1.

En el caso de la TE es posible encontrar intervalos en el ángulo de dispersión θ en donde la intensidad total dispersada en este intervalo dependa como una función cuadrática del radio, sin embargo no cualquier intervalo cumple con este requisito. En la Figura 4.2 se tiene la gráfica de la integral de la intensidad dispersada como función del radio en dos distintos ángulos sólidos. Como la intensidad sólo depende en el ángulo azimutal θ , entonces basta con integrar la intensidad con respecto a este ángulo para el intervalo deseado. Se ilustra como la dependencia no es trivial cuando se toma el intervalo de $5^\circ - 30^\circ$ ($0.087\text{rad}-0.523\text{rad}$), lo cual se debe a que la intensidad presenta mínimos relativos en este intervalo que se van desplazando. Esto se puede ver en la figura anterior.

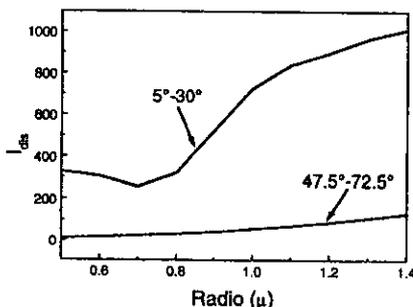


Figura 4.2- Intensidad de la luz dispersada como función del radio para dos intervalos angulares.

La gráfica de la intensidad como función del radio en el caso que se toma el intervalo de $47.5^\circ - 72.5^\circ$ ($0.829\text{rad}-1.265\text{rad}$) puede ser aproximada por una función en potencias del radio de grado 2. La ecuación cuadrática que mejor

se aproxima a la esta curva está dada por

$$I_{dis} = 21 - 82.16a + 114a^2, \quad (4.1)$$

en donde a es el radio de la burbuja en micras. La intensidad está en unidades de I_0 . Esta ecuación funciona bien en la región que comprende desde $.5\mu$ hasta 1.5μ , sin embargo la teoría predice que la intensidad debe de ser igual cero cuando el radio a sea cero. Esto no está contemplado en la Ec.(4.1), pero se tiene que tomar ésta si uno desea el mejor ajuste en esta región.

La elección del intervalo recién mencionado no es arbitraria, coincide con el intervalo en el cual se llevan a cabo las mediciones experimentales del radio como función del tiempo[10]. Es importante ver que el tamaño de la burbuja no será simplemente proporcional a la raíz de la intensidad de la luz dispersada en este intervalo angular, sino que la descripción es un poco mas complicada. Se escoge la región de radios pequeños porque es en la cual se dá la SL. La descripción para radios grandes (aprox. 5μ) puede ser muy buena utilizando la AG, sin embargo se ve que en la región en donde el radio es del orden de la longitud de onda esto no sucede así. La curva geométrica es alcanzada de manera muy lenta por la solución exacta, y en realidad esta última nunca será igual a la geométrica debido a la difracción. Por todo lo anterior, es claro que las mediciones están incorrectas en la región de radios pequeños. Lo que sucede es que el tamaño de la burbuja que corresponde a la intensidad observada es mayor que el que predice la AG para mediciones en este intervalo. Si se toma la integral de la intensidad para la solución exacta y se normaliza de tal forma que el valor de ésta sea igual al que resulta de integrar en el mismo intervalo la intensidad obtenida mediante la óptica geométrica, se obtiene que los radios reales se desplazan hacia arriba. Si se observa la Figura 4.1 se aprecia que el valores de I_{dis} en el caso de la teoría exacta son siempre menores que el valor de la I_{dis} para la aproximación geométrica en el intervalo de la medición. Esto se debe a que la de dispersión de luz no es un fenómeno puramente geométrico. En la Figura 4.3 se encuentra una gráfica de la intensidad como función del radio para dos casos: intensidad exacta e intensidad normalizada a la curva obtenida para la AG. En esta figura se comparan las intensidades y se observa por ejemplo que el radio que en la medición se toma como 0.5μ realmente corresponde aproximadamente a 0.8μ para la curva que se obtiene de la TE. Y de esta misma forma, si se toma cualquier línea horizontal se encontrará que el valor que se mide es siempre mayor que el valor que tiene el radio realmente.

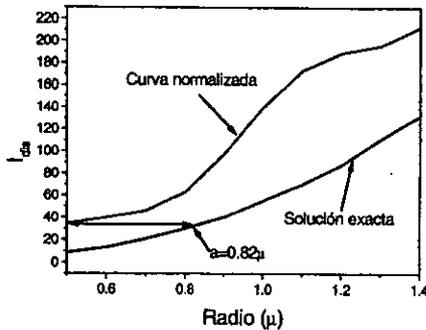


Figura 4.3- Intensidad de la luz dispersada en el intervalo de 47.5° - 72.5° como función del radio.

Las dos curvas convergen aproximadamente al mismo valor para radios mayores que 5μ (no se muestra en la Fig. 4.3) ya que en esta región la solución geométrica y la solución exacta solo difieren por el término de difracción, el cual es muy pequeño si el ángulo de dispersión no es muy cercano a 0° .

Durante toda esta sección he tomado el índice de refracción del aire constante e igual a uno. ¿Qué pasaría si éste no fuera constante? La siguiente sección está destinada para observar cuales son los cambios en el patrón de dispersión si el índice de refracción depende del radio.

4.2 Sensibilidad del patrón de dispersión al cambio en el índice de refracción

En la sección anterior se analizó la dispersión de luz por una burbuja cuyo índice de refracción es igual a uno. Se compararon dos teorías: la aproximación geométrica y la teoría exacta (Teoría de Mie). En esta sección solamente utilizaré la segunda, pero se compararán ahora dos casos relacionados con la naturaleza de la burbuja. En otras palabras, se analizará la dispersión si el índice de refracción depende del radio, y se comparará con el caso en el que no dependiese.

La motivación principal está dada por lo que se vió en la última sección del capítulo dos, y es el hecho de que la densidad puede aumentar hasta

en tres órdenes de magnitud cuando el radio de la burbuja alcanza su radio mínimo. Este incremento en la densidad se verá como un cambio en el índice de refracción de la burbuja. Para obtener el índice de refracción de la burbuja como función de la densidad del aire en su interior se utiliza la ecuación de Clausius-Mossotti (C-M)[49, 50]

$$\varepsilon = \frac{1 + \frac{8}{3}\pi N\alpha}{1 - \frac{4}{3}\pi N\alpha}. \quad (4.2)$$

Esta ecuación es una relación entre la función dieléctrica ε , la densidad de número de moléculas dentro del material N , y la polarizabilidad promedio de éstas α . La ecuación de C-M es una muy buena aproximación para el caso de gases e incluso también para líquidos. En los resultados que a continuación se mostrarán se considera que la polarizabilidad promedio se mantiene constante, por lo que los cambios en el índice de refracción, $n = \sqrt{\varepsilon}$, solamente estarán causados por un cambio en la densidad del gas. El valor de α se ajusta de tal forma que cuando N es igual a la densidad del aire, n sea igual al índice de refracción del aire a presión atmosférica. Para observar como difieren los patrones de dispersión se tienen las Figuras 4.4 y 4.5. En la primera se considera que el índice de refracción de la burbuja es constante e igual a 1.00027 (Aire); para la segunda figura se indica en cada recuadro el valor que toma n para el radio en cuestión. Se observa que conforme el radio aumenta la intensidad lo hace de igual forma, lo cual era de esperarse. También se van creando nuevos mínimos en la región de la retrodispersión los cuales se van desplazando hacia la región del frente, sin embargo lo más notorio es que se forma un mínimo muy grande cerca de $\theta = 0$.

Si se observa la Figura 4.5, la aparición de este mínimo es más tardía. Las curvas tienen una forma más suave en la región que comprende de $\theta = 0$ hasta $\theta = 1$ cuando $a = 0.6\mu$, 0.7μ y 0.8μ . La intensidad es mucho menor para el radio más pequeño comparada con la intensidad para el mismo radio si la burbuja mantiene constante su índice de refracción (Fig. 4.4).

Después de observar estas dos figuras se puede decir que el problema es más complicado de lo esperado. Para medir el radio no es suficiente con normalizar la curva obtenida mediante la TE a la curva geométrica (sección anterior), sino es necesario saber también cuál es el índice de refracción de la burbuja. Entonces lo que se tiene ahora es un problema con dos incógnitas: el radio y el índice de refracción. La importancia de poder determinar ambos radica en el hecho de poder describir que es lo que está sucediendo dentro de la burbuja cuando ésta se encuentra cerca del radio mínimo. En realidad,

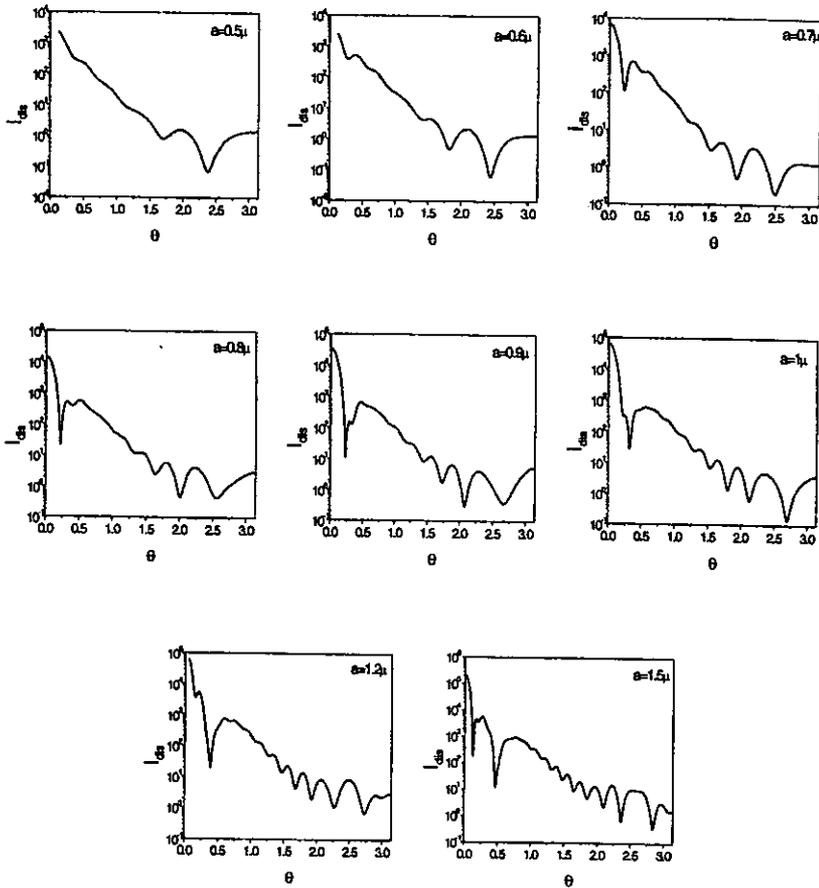


Figura 4.4- *Dispersión de luz por una burbuja de aire con $n = 1.00027$.*

una de las mayores inquietudes actuales es la de poder conocer con precisión el contenido de la burbuja y los mecanismos que rigen su comportamiento dinámico. La siguiente propuesta va encaminada en este sentido, básicamente consiste en encontrar una manera de poder detectar cual es la densidad del gas, así como el radio de la burbuja.

El problema que se tiene es el problema inverso de Mie. Se conoce como dispersa la burbuja en diferentes intervalos, es decir se tienen medidas de la

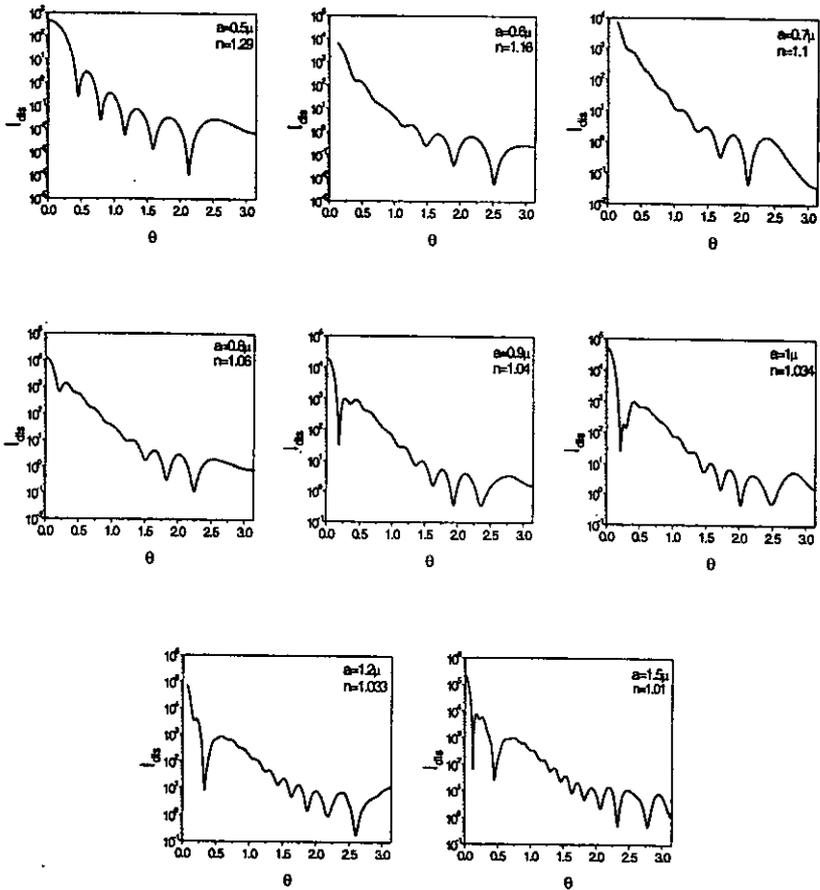


Figura 4.5- Dispersión de luz por una burbuja de aire cuyo índice de refracción depende del radio.

intensidad de la luz dispersada para diferentes ángulos sólidos y lo que se busca es el valor de radio así como del índice de refracción de la burbuja a partir de estas mediciones. Para lograr encontrar éstos son necesarias al menos dos mediciones, ya que se tienen dos variables. ¿Qué pasaría si uno conociese la intensidad para dos intervalos diferentes? La respuesta no es única, es decir no existe una relación que se cumple de la misma forma para

una elección arbitraria de éstos, por lo que es necesario escoger aquellos que ofrezcan una clave dentro del problema.

Como se mencionó anteriormente, si uno se fija en la región cercana a $\theta = 0$, la forma de las curvas difiere mucho entre los dos casos que se han considerado. Entonces escogamos dos intervalos, uno que difiera mucho cuando cambia el índice de refracción, y otro en el cual el comportamiento de la intensidad dispersada sea semejante. Los intervalos que se tomarán son de 0.1rad a 0.5rad y de 0.6rad a 1rad. La motivación para realizar esto está dada por la presencia del enorme mínimo muy cerca de $\theta = 0$ y por la semejanza de las dos soluciones cuando estamos alrededor de los 0.8rad. Si se toma la razón de la intensidad en un intervalo que contenga a este mínimo y otro en el cual éste no se encuentre contenido (el segundo intervalo), se puede hallar una relación entre el radio y este cociente de intensidades. Para ilustrar esto se tiene la Figura 4.6 en donde se grafica el cociente de intensidades como función del radio para estos dos intervalos angulares. I_1 corresponde a la

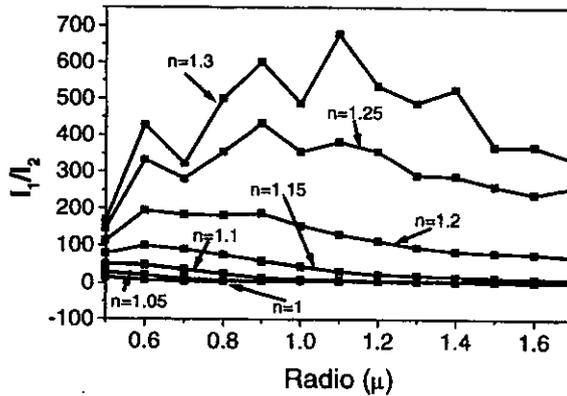


Figura 4.6- Cociente de intensidades como función del radio para dos intervalos. I_1 e I_2 corresponden a la intensidad para $0.1\text{rad} < \theta < 0.5\text{rad}$ y $0.6\text{rad} < \theta < 1\text{rad}$ respectivamente. El índice de refracción n está dado en la gráfica para cada curva.

intensidad de luz dispersada en el primer intervalo (0.1rad a 0.5rad) e I_2 corresponde a la intensidad de la luz dispersada en el segundo intervalo (0.6rad

a 1rad). Como se observa en esta figura la solución no es única, es decir el cociente de I_1/I_2 puede ser igual para diferentes radios e índices de refracción. Sin embargo si se pueden obtener cotas inferiores para el índice de refracción n . Por ejemplo, si se encuentra experimentalmente que el cociente es mayor que 100, entonces el índice de refracción es mayor que 1.15 forzosamente. Ahora, además se tiene que el valor de n no es el mismo para cada radio r por lo que es necesario crear un modelo para conocer el índice de refracción como función de r .

En la gráfica 4.7 se muestra la curva que sigue el índice de refracción n mediante (4.2), suponiendo que no hay transferencia de masa de la burbuja al fluido. También se grafica el cociente de intensidades antes mencionado y se puede ver que la solución sería única si n siguiese esta curva.

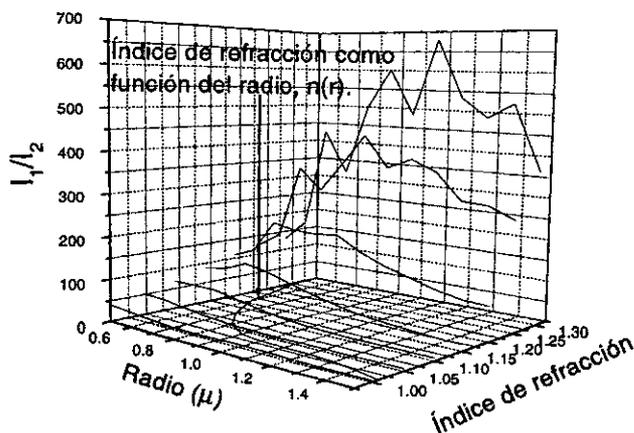


Figura 4.7- Cociente de intensidades para dos diferentes intervalos como función del radio así como del índice de refracción.

Uno de los argumentos que podría salir para derrumbar esta propuesta es que la forma de la burbuja no fuera esférica, sino que tuviera una forma esferoidal muy cercana a la de una esfera por las oscilaciones bruscas que sufre la burbuja durante cada ciclo acústico. Esto traería consigo cambios en el patrón de dispersión, en los cuales el enorme mínimo se podría desplazar

o incluso desaparecer. Por los trabajos de Asano, Yamamoto, Sato, Barber y Yeh[51] se encuentra que las variaciones en el patrón de dispersión son extramadadamente pequeñas, y por lo tanto sería todavía posible detectar los cambios de densidad dentro de la burbuja.

En este trabajo se presenta una manera muy sencilla de poder detectar al menos si están existiendo cambios en la densidad, aunque no se encuentra una manera de medir el radio y el índice de refracción exactamente sin que puedan existir ambigüedades. En el sentido de hacer comparaciones para dos medidas diferentes, es posible también llevar a cabo la comparación de la intensidad de la luz dispersada cuya polarización sea paralela o perpendicular con respecto al haz incidente, sólo que en este trabajo no se hará. Como se puede ver, la forma de resolver el problema está abierta y todavía no se ha encontrado una solución exacta cuando se tienen dos variables como lo son el radio y el índice de refracción.

4.3 Dispersión por una burbuja rodeada de Hielo

Una de las consecuencias mas importantes que podría traer consigo la teoría de dispersión de luz aplicada al fenómeno de la SL es poder comprobar si la teoría utilizada como mecanismo de emisión es la correcta. Hace poco tiempo surgió la idea de que se forma hielo en alguna de sus fases alrededor de la burbuja mientras ésta se colapsa (Cap. 1, Sec. 1.2)[19]. Para ello se plantea un modelo en el cual se tiene una burbuja de aire rodeada por una capa de hielo con cierto espesor. En la Figura 4.8 se tiene el espectro de dispersión para este modelo en donde la burbuja de 0.8μ de radio está rodeada por una capa de hielo de $.2\mu$ de ancho y a su vez todo el sistema está inmerso en agua. El cálculo se hace usando los coeficientes de dispersión para una esfera estratificada[44, 45, 46], y sólo se utilizan dos estratos: el núcleo de aire y la coraza de hielo. El índice de refracción del hielo se toma como 1.76, el del aire como 1 y el del agua como 1.33.

Lo mas sorprendente del resultado es que la intensidad muy cerca del Backscattering es casi igual a la intensidad para ángulos alrededor de los 60° (~ 1 rad). Si se integran las intensidades de 0.5 rad a 1 rad y de 2.5 rad a 3 rad, se obtiene que el cociente de la primera entre la segunda es de apenas 3.93, mientras que cuando sólo se tiene una burbuja de 1μ de aire puro (Fig.

4.4) el cociente es de ~ 312 . Por todo lo anterior, es posible detectar experimentalmente si es cierto que se está formando una capa de hielo alrededor de la burbuja midiendo la dispersión cerca de los 180° y comparándola con aquella alrededor de los 60° .

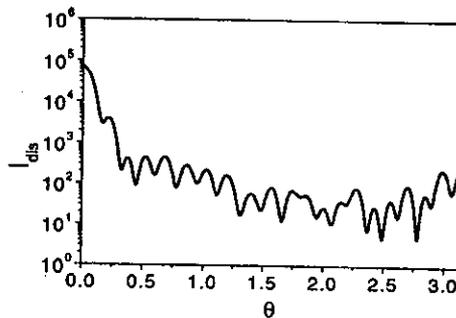


Figura 4.8- Dispersión de luz por una burbuja de aire ($n=1$) de 0.8μ rodeada de una capa de hielo ($n=1.76$) cuyo ancho es de 0.2μ . El medio exterior es agua.

Mas aún, si la teoría es la correcta, al comparar la curva geométrica (para aire) contra la curva exacta (Fig. 4.9) se puede observar que el error que se está haciendo en la medición del radio es enorme. Se ve de entrada como la retrodispersión para el modelo del hielo rebasa por mucho a la de una burbuja con aire solamente¹. También se observa que en la región cercana a los sesenta grados la intensidad está por debajo de la curva geométrica, sin embargo para tamaños del orden de 1μ , la intensidad obtenida por la TE también se encontraba por debajo de la AG. La intensidad está normalizada de tal forma que si se tuviese una esfera totalmente reflectora, el valor de la intensidad sería 1.

La belleza de este método para poder detectar la fuente emisora está en que no depende de esta última para saber si realmente es la encargada de la emisión, sino que mediante una medición externa al fenómeno uno puede

¹La intención de esta sección es mostrar cualitativamente cuales son los cambios en el patrón de dispersión de la burbuja. No presentaré números exactos ya que primero es necesario realizar la mediciones para ver si tiene sentido o no calcular éstos.

descartar una u otra teoría. El cálculo se puede ampliar a ondas de choque dentro de una burbuja sonoluminiscentes y seguramente se podrá dentro de poco tiempo conocer si éstas están o no existiendo en el interior de ella.

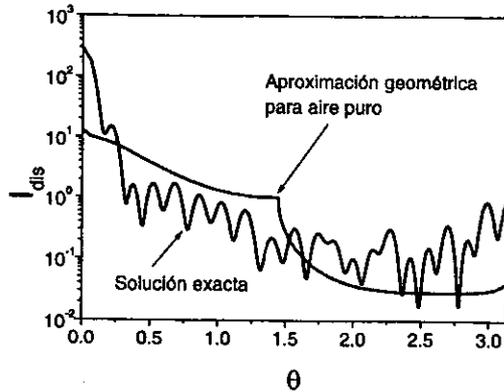


Figura 4.9- Dispersión de luz por una burbuja de aire ($n = 1$) de 0.8μ rodeada de una capa de hielo ($n = 1.76$) cuyo ancho es de 0.2μ .(solución exacta), así como la dispersión geométrica de una burbuja de aire en agua para un radio de 1μ .

Conclusiones

En el presente trabajo se presentó una alternativa al problema de la Sonoluminiscencia, la cual hasta la fecha no se había considerado. Ésta consiste en detectar, mediante técnicas de dispersión de luz, lo que le sucede a una burbuja sonoluminiscente cuando se encuentra en la región del destello luminoso, es decir alrededor de su radio mínimo.

Para resolver el problema de dispersión se utilizó la Teoría de Mie, así como una aproximación geométrica. Se consideraron dos modelos distintos para la burbuja, uno en el que ésta tiene un índice de refracción constante, y otro en el que éste depende de la densidad del gas dentro de ella, densidad que a su vez depende del tiempo. En otras palabras, la función dieléctrica del gas en el interior de la burbuja no es constante, sino que está regida por la dinámica de la burbuja. Para relacionar la función dieléctrica de ésta con la densidad del gas en su interior se utilizó la ecuación de Causius-Mossotti. Se compararon los resultados para ambos modelos y se encontró que la intensidad de la luz dispersada como función del ángulo es muy sensible al cambio en el índice de refracción de la burbuja. También se dió una propuesta experimental para poder conocer éste y el radio midiendo la intensidad para dos ángulos sólidos diferentes. En el resultado se encontró que existe una gran cantidad de parejas (radio, índice de refracción) que no se pueden distinguir mediante este método, sin embargo si es posible encontrar cotas inferiores mediante las cuales se pueden detectar los cambios en el índice de refracción.

Además de considerar los dos casos anteriores, se considera otro en el cual la burbuja está rodeada por una capa de hielo, situación que ha sido propuesta como mecanismo de emisión. El resultado que se obtuvo es sorprendente, ya que se muestra que es posible detectar si realmente se está formando esta capa mediante la comparación de la retrodispersión y la dispersión alrededor de los 60° . A partir de este resultado, se propone utilizar los métodos de dispersión de luz para comprobar que la teoría propuesta como

mecanismo de emisión es la correcta.

Las conclusiones más importantes que se obtuvieron de este trabajo son:

-Las mediciones del radio de la burbuja como función del tiempo no es absoluta, es decir depende del modelo que se utilice para ésta. Las mediciones son 'Mediciones Modelo-Dependientes'.

-Las técnicas de dispersión de luz pueden ser una herramienta muy útil en el fenómeno de la Sonoluminiscencia, ya que pueden utilizarse como el detector del mecanismo de emisión.

-La aproximación geométrica es válida sólo en las regiones en donde el radio es mucho mayor que la longitud de onda.

-Pueden existir cambios importantes en el valor de la densidad y la temperatura del gas para una burbuja sonoluminiscente si se considera que el proceso es adiabático y que no hay transferencia de masa de ésta al fluido.

-Es muy factible que se produzcan ondas de choque dentro de la burbuja cuando ésta se está colapsando, ya que la velocidad de la pared puede rebasar la velocidad del sonido en el gas. Esto provocaría una distribución de densidades y temperaturas dentro de la burbuja que podrían traer consigo cambios muy importantes en la función dieléctrica de la misma.

Como perspectiva de este trabajo, se planean resolver el problema de Mie inverso, es decir que a partir de dos o más mediciones uno pueda conocer el radio y el índice de refracción de la burbuja unívocamente, y el problema de la dispersión de una burbuja cuyo interior es un plasma.

Bibliografía

- [1] H. Frenzel and H. Schultes, 1937, *Z. physik. Chem.* 27B, 421.
- [2] P. Jarman, 1960, *J. Acu. Soc. Am.* 32, 1459. K.J. Taylor and P.D. Jarman, 1970, *Aust. J. Phys.* 23, 319.
- [3] Lord Rayleigh, 1917, *Phil. Mag.* 34, 94.
- [4] M. Plesset, 1949, *J. Appl. Mech.* 16, 277.
- [5] D.F. Gaitan, 1990, Ph.D. Thesis (University of Mississippi).
- [6] B.P. Barber, 1992, Ph.D. Thesis (UCLA)
- [7] L.A. Crum, 1994, *Physics Today*, Sep., 22.
- [8] S.J. Putterman, 1995, *Sci. Am.* 272, 32.
- [9] R. Hiller and B.P. Barber, 1995, *Sci. Am.* 272, 78.
- [10] B.P. Barber and S.J. Putterman, 1992, *Phys. Rev. Lett.* 69, 3839. K.R. Weninger, B.P. Bradley, and S.J. Putterman, 1997, *Phys. Rev. Lett.* 78, 1799
- [11] K.S. Suslick, 1990, *Science* 247, 1439.
- [12] B. Gompf, R. Gunther, G. Nick, R. Pesha, and W. Eisenmenger, 1997, *Phys. Rev. Lett.* 79, 1405.
- [13] D. Lohse, M.P. Brenner, T.F. Dupont, S. Hilgenfeldt, and B. Johnston, 1997, *Phys. Rev. Lett.* 78, 1359.
- [14] L.A. Crum and T.J. Matula, 1998, *Phys. Rev. Lett.* 80, 865.

- [15] B.P. Barber, R.A. Hiller, R. Löfstedt, S.J. Putterman, and K.R. Weninger, 1997, *Phys. Rep.* 281, 65-143.
- [16] R.A. Hiller and S.J. Putterman, 1995, *Phys. Rev. Lett.* 75, 3549. R.A. Hiller, S.J. Putterman, and K. R. Weninger, 1998, *Phys. Rev. Lett.* 80, 1090.
- [17] J.B. Young, T. Schmiedel, and W. Kang, 1996, *Phys. Rev. Lett.* 77, 4816.
- [18] C.D. Ohl, O. Lindau, and W. Lauterborn, 1998, *Phys. Rev. Lett.* 80, 393.
- [19] C. Cámara, comunicación personal.
- [20] J. Frenkel, 1940, *Acta Physiochim. U.R.S.S.* 12, 317.
- [21] E.A. Neppiras and B.E. Noltingk, *Proc. Phys. Soc. (London)* B63, 674 (1950); B64, 1032 (1951).
- [22] R. Löfstedt, B.P. Bradley, and S.J. Putterman, 1993, *Phys. Fluids A* 5, 2911.
- [23] R. Löfstedt, B.P. Barber, and S.J. Putterman, 1992, *J. Acoust. Soc. Am.* 90, 2027.
- [24] H.P. Greenspan and A. Nadim, 1993, *Phys. Fluids A* 5, 1065.
- [25] C.C. Wu and P.H. Roberts, 1993, *Phys. Rev. Lett.* 70, 3424.
- [26] B.P. Barber, C.C. Wu, R. Löfsted, P.H. Roberts, and S.J. Putterman, 1994, *Phys. Rev. Lett.* 72, 1380.
- [27] W.C. Moss, J.W. White, R.A. Day, and D.B. Clarke, 1994, *Phys. Fluids A* 6, 2979.
- [28] L. Kondic, J.I. Gersten, and C. Yuan, 1995, *Phys. Rev. E* 52, 4976.
- [29] A.K. Evans, 1996, *Phys. Rev. E* 54, 5004.
- [30] J. Schwinger, 1993, *Proc. Nac. Acad. Sci. U.S.A.* 90, 2105; 7285.

- [31] C. Eberlein, 1996, *Phys. Rev. Lett.* 76, 3842; P. Knight, 1996, *Nature* 381,736.
- [32] R. Esquivel-Sirvent, R. Jauregui, and C. Villareal, 1997, *Phys. Rev. A* 56, 2463.
- [33] R.G. Barrera, comunicación personal.
- [34] T. Lepoint, D. Pauw, F. Lepoint-Mullie, M. Goldman, and A. Goldman, 1997, *J. Acoust. Soc. Am.* 101, 2012.
- [35] R. Hickling, 1994, *Phys. Rev. Lett.* 73, 2853.
- [36] A. Prosperetti, 1997, *J. Acoust. Soc. Am.* 101, 2003.
- [37] A. Prosperetti, 1984, *Rend. Sc. Int. Fis. XCIII*, 145.
- [38] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. Addison-Wesley 1959.
- [39] M.W. Zemansky, 1957, *Heat and Thermodynamics*, McGraw-Hill (New York).
- [40] *Mathematica 3.0*, Wolfram Research.
- [41] I. Akhatov, N. Gumerov, C.D. Ohl, U. Parlitz, and W. Lauterborn, 1997, *Phys. Rev. Lett.* 78, 227.
- [42] R.G. Holt and D.F. Gaitan, 1996, *Phys. Rev. Lett.* 77, 3791.
- [43] G. Mie, 1908, *Ann. Phys.* 25, 377.
- [44] H.C. van de Hulst, 1957, *Light Scattering by Small Particles*, Dover Publications, New York.
- [45] M. Kerker, 1969, *The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation*, Academic Press, New York.
- [46] C.F. Bohren and D.R. Huffman, 1983, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, John Wiley & Sons (New York).
- [47] G.E. Davis, 1955, *J. Opt. Soc. Am.* 45, 572; J.R. Hodgkinson and I. Greenleaves, 1963, *J. Opt. Soc. Am.* 53, 577; J. McK. Ellison and C.V. Peetz, 1963, *Proc. Phys. Soc. (London)* B74, 105.

- [48] G.M. Hansen, 1985, *Appl. Opt.* 24, 3214; D.S. Langley and P.L. Martson, 1984, *Appl. Opt.* 23, 1044; P.L. Martson, *J. Opt. Soc. Am.* 69, 1205 (1979); 70, 353 (1980); P.L. Martson and D.S. Langley, *J. Opt. Soc. Am.* 71, 192 (1981); 71, 917 (1981).
- [49] J.D. Jackson, 1962, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons (New York).
- [50] L. Eyges, 1972, *The Classical Electromagnetic Field*, Dover (New York).
- [51] S. Asano and G. Yamamoto, 1975, *Appl. Opt.* 14, 29; P. Barber and C. Yeh, 1975, *Appl. Opt.* 14, 2864; S. Asano, 1979, *Appl. Opt.* 18, 712; S. Asano and M. Sato, 1980, *Appl. Opt.* 19, 962.