46 (a)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA ABORDAR EL CONCEPTO DE FUNCION CUADRATICA CON EL USO DE LA CALCULADORA GRAFICA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

FIORELLA HERNANDEZ RUIZ

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. PATRICIA E. BALDERAS CAÑAS

1 9 9 8

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Actividades propuestas para abordar el concepto de Función Cuadrática con el uso de la Calculadora Gráfica"

realizado por Hernández Ruiz Fiorella

con número de cuenta 7865103-8 , pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. PATRICIA ESPERANZA BALDERAS CAÑAS	Patricia B.
Propietario	M. en C. JORGE ORTIZ ESPEJEL	Jorge Ortiz Espejel.
Propietario	Act. MARIA AURORA VALDES MICHEL	
Suplente	Act. YOLANDA SILVIA CALIXTO GARCIA	
Suplente	M. en C. JOSE WILLIAMS GALLARDO	José Gallardo

Consejo Departamental de Matemáticas
M. en A.P. MA. DEL PILAR ALONSO REYES

DEDICADO A

LA PERSONA MÁS IMPORTANTE

MI HIJO JAVIERCITO QUE HA SIDO EL MOTOR PARA CONTINUAR

A MI ESPOSO JAVIER CIFUENTES POR SU APOYO INCONDICIONAL

GRACIAS A MIS PADRES

FRANCISCO HERNÁNDEZ CAMPOS
IDOLINA RUIZ CORZO

POR SU EJEMPLO Y SU APOYO

GRACIAS A MIS HERMANOS

CLARITA

FRANCISCO

POR SU AMOR Y SU COMPRENSIÓN

GRACIAS A LA **SRA. MA. FLORENTINA NAJERA ORTIZ**
Y A LA SRA. LUZ ORTIZ

POR EL INTERES Y TIEMPO QUE OCUPARON PARA APOYARME

GRACIAS AL **DOCTOR EDUARDO MANCERA**

POR SUS SUGERENCIAS Y COMENTARIOS

GRACIAS A CADA UNA DE LAS PERSONAS
QUE ALGUNA VEZ SE INTERESARON PORQUE
ESTE TRABAJO LLEGARA A TERMINARSE

INDICE

ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA ABORDAR EL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA CON EL USO DE LA CALCULADORA GRÁFICA.

INTRODUCCIÓN

Durante nuestra práctica docente hemos comprobado que el desgaste físico e intelectual de la mayoría de los profesores es alto y poco gratificante. La mayoría de los profesores pretenden explicar de la mejor manera el curso que les fue asignado, para lograr con esto que los alumnos aprendan los contenidos requeridos. Desafortunadamente, esto casi nunca sucede de manera satisfactoria y completa. Para que el alumno aprenda, se necesita algo más que explicar bien un tema. El profesor, adicional a la buena preparación de su clase, debe luchar contra factores que están afectando el proceso de enseñanza-aprendizaje. Algunos de ellos son:

a) La creencia, por parte de alumnos y maestros que las matemáticas son sólo para algunos; entonces, la mayoría de los alumnos no pueden acceder a comprenderlas, y lo único que les queda por hacer es tratar de ir pasando los cursos como puedan. Esta creencia se reafirma cuando se sabe el alto índice de reprobación que existe en esta materia.

b) El olvido de los temas a largo plazo, aún en alumnos que han aprobado la materia.

c) La falta de comprensión de conceptos básicos por parte de los alumnos para abordar el nuevo curso.

d) El desconocimiento por parte del profesor de los recursos didácticos que ayudan al maestro a motivar el aprendizaje en los alumnos.

Esta situación no es exclusiva de México. Wenselburguer (1990) y Marmolejo (1989) señalan que la mayoría de los profesores de matemáticas han vivido durante su práctica con estos problemas. Es por eso, que investigadores de todo el mundo se han dedicado a indagar estos y otros factores, con el objeto de aportar ideas para que el proceso de enseñanza-aprendizaje se pueda dar de mejor manera y con resultados más satisfactorios. Las respuestas no son definitivas. Lo que resulta evidente, es que si el profesor conoce los resultados de estas investigaciones y sus sustentos teóricos tiene más elementos con los cuales puede intentar otros caminos para abordar esta problemática.

Una parte de estas investigaciones se han dedicado a trabajar acerca de propuestas específicas de tipo metodológico para llevarlas al salón de clase, donde su principal propósito es que el alumno entienda conceptos matemáticos específicos en diferentes áreas, pues se cree que así lograran una mayor comprensión en procesos posteriores. Fey, Heid (1989) y la NCTM (1989), por ejemplo, han elaborado propuestas (la mayoría de álgebra) con este fin.

Un concepto que creemos importante es el de función cuadrática, la mayoría de los programas de estudio proponen el análisis de las funciones cuadraticas debido a la gran aplicación a problemas de la vida real que tienen.

La función cuadrática nos ayuda a modelar problemas algunos de ellos son: a) los saltos de un delfín, gato ó pulga, pues su centro de gravedad describe una parábola independientemente de los actos durante el movimiento del salto. b) en biofísica el área de un ser unicelular de forma esférica se puede representar con una función cuadrática. c) el resultado "La superficie de un cuerpo de cualquier forma es proporcional al cuadrado de cualquiera de sus dimensiones lineales me representa una función cuadrática. d) la optimización al buscar terrenos para construir centros vacacionales e) el número de metros que se necesitan para que un coche frene en un piso seco f) la función que me representa el ingreso de la venta de un artículo g) la ruta que lleva una pelota de béisbol al ser bateada h) el número de insectos que se reproducen en una alberca i) la precipitación pluvial dentro de una tormenta j) la maduración de fresas en un día soleado k)niveles de ruido en una conferencia l) el porcentaje de eficiencia en una bujía m) el disparo de una pistola n) la tensión al jalar una cuerda que tiene un extremo fijo. o) la distancia que recorre un objeto en un tiempo t con aceleración uniforme p) movimiento de proyectiles q) problemas sobre energía cinética r) conservación de la energía.

Uniéndonos a esta línea de investigadores, en el siguiente trabajo se presenta unas serie de actividades para abordar el concepto de función cuadrática teniendo como fin dar mayores elementos al maestro y al alumno para que amplien su comprensión del concepto de función cuadrática.

Ademas, consideramos que un requisito para que nuestros alumnos puedan lograr una vida profesional competente es el de crear en ellos un pensamiento donde el uso de la tecnología este incluída pues está va siendo cada ves mas necesaria en todos los ámbitos, tanto sociales como profesionales, es por eso, que hemos elegido como herramienta didáctica el uso de la calculadora gráfica, pues así lograremos dos objetivos importantes: a) que el alumno adquiera habilidades en el uso de las calculadoras gráficas y b) que el alumno maneje la parte gráfica de las funciones cuadráticas.

Para lograr esto presentamos los siguientes capítulos:

CAPÍTULO UNO. La mayoría de los profesores de matemáticas no conocen las corrientes filosóficas, pedagógicas y psicológicas que les pueden ayudar en su actividad docente. En este capítulo se pretende dar elementos filosóficos (epistemología), pedagógicos (la preparación didáctica dentro del proceso de aprendizaje) y psicológicos (se exponen las diferentes corrientes en torno al aprendizaje) para introducir al docente en está área.

CAPÍTULO DOS. Se describe la metodología de la propuesta, así como, el tipo de herramientas que se van a utilizar para su aplicación. Se dará una breve justificación de cada uno de los elementos que forman la propuesta, para así lograr que los profesores comprendan: el porque se ofrece esa metodología, el porque se usa la tecnología como herramienta principal, el porque se sugiere el trabajo en pequeños grupos dentro del salón de clase y el porque se recomiendan una serie de actividades escritas para llevarla a cabo.

CAPÍTULO TRES. Se presentan las actividades y su secuencia.

CAPÍTULO CUATRO. Se describen los resultados obtenidos después de llevar a cabo la propuesta en un salón de clase.

CONCLUSIONES. Se muestran las coclusiones del trabajo así como algunas posibles investigaciones que surgieron a partir de ellas.

BIBLIOGRAFÍA.

ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA ABORDAR EL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA CON EL USO DE LA CALCULADORA GRÁFICA.

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS FILOSÓFICOS, PEDAGÓGICOS Y PSICOLÓGICOS .

Introducción

El presente capítulo tiene como objetivo explicar de manera general la información filosófica, pedagógica y psicológica en la cual se basó el diseño de las actividades.

El capítulo se dividide en tres temas:

1.1 Teorías del conocimiento. Concepciones matemáticas.

La tarea de transmitir conocimientos no es fácil y además lograr que estos sean entendidos es una tarea que la mayoría de los maestros no llega a alcanzar. Si acudimos a los alumnos y se les pregunta: ¿Porqué no entienden los conceptos en la clase de matemáticas?, ellos contestan que el problema es que no comprenden las explicaciones de los maestros; si vamos a preguntar a los maestros estos dicen que el problema es el nivel académico con que reciben a los alumnos, quizás las dos partes tengan razón pero lo que sí es evidente es que el estudio de la matemática se ha convertido en una instrucción mecánica, debido a que los maestros prefieren entrenarlos en el uso de algoritmo. Marmolejo (1989) describe la manera que los maestros se dedican sólo a la mecanización de algoritmos olvidando la comprensión y el entendimiento de conceptos.

¿Qué es el conocimiento?, ¿Cómo una persona puede acceder a él?, ¿Cuáles son las diferentes concepciones que existen acerca de como una persona conoce?, ¿Qué es la epistemología? y ¿Porqué es importante que el maestro adopte una postura en esta área? . Estas preguntas serán discutidas en este capítulo.

1.2 Teorías de aprendizaje.

Se explican algunas teorías de aprendizaje, cuales son los inconvenientes de cada una y los aciertos que se han encontrado al llevarlas al salón de clase. También se analizan las implicaciones educativas que esto conlleva.

1.3 El constructivismo en la educación.

Una de las teorías más importantes en la actualidad (en la que estamos de acuerdo) es el constructivismo, que esta basada en la posición de Piaget y su concepto de aprendizaje.

Se explica de manera más particular las características del constructivismo dentro del área que nos interesa y como se puede lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje bajo esta teoría.

Se finaliza el capítulo dando algunas conclusiones.

1.1 Teorías del conocimiento. Concepciones matemáticas

Para que podamos lograr que otra persona conozca, sería conveniente empezar por saber contestar: ¿Qué es conocer? y ¿cómo podemos hacer que alguien conozca?, ademas ver cuáles son los elementos y recursos con los que contamos para lograrlo. Si centramos nuestra atención especialmente en matemáticas, una de las cosas que cualquier maestro debería de saber es ¿Cómo y cuándo un alumno comprende un concepto? (por ejemplo) y en base a esto, como puede conocer uno nuevo para aplicarlo en una situación determinada. Pero ¿Qué opinan los maestros de esto?.

Marmolejo (1989) hizo un estudio sobre la importancia que le daban los maestros a este tipo de planteamiento y comprobó que esta información no la conocen, no la encuentran importante, interesante, ni útil. Como que queda claro para cualquier maestro la importancia de saber ¿Cuáles son los objetos de estudio de la matemática?, ¿Cómo se relacionan con el mundo real?, ¿Cuáles son los fundamentos principales y métodos y su lugar dentro de las ciencias? pero no entienden porqué es necesario que tengan información de tipo epistemológico, pedagógico y didáctico y menos que importancia tiene esto a la hora de dar su clase.

La educación tiene como uno de sus principales propósitos el desarrollo y la transmisión del conocimiento aunque excluye el análisis y justificación de este, es la epistemología la encargada de estudiarlo.

Si comenzamos con el concepto de conocer, Scheffler (1987) nos dice que en los contextos educativos el término conocer tiene dos significados diferentes: a) tener la habilidad y el saber acumulado en cierta área y b) aquellas artes y experiencias intelectuales cuyo valor es intrínseco a ellas mismas. El describir a alguien como conocedor equivale a decir que es capaz de apreciar, probar e informar sobre un tema.

En relación a la educación dice que se debe transmitir tanto lo que conocemos como nuestra manera de conocer.

A lo largo de la historia han existido tres grandes interpretaciones filosóficas del conocimiento la racionalista, la empirista y la pragmática, cuyas características principales son:

Racionalista. Para esta escuela, la matemática es la ciencia modelo, porqué sus proposiciones se pueden validar con cadenas deductivas que se conectan con verdades básicas evidentes. La demostración forja la cadena, la intuición descubre las verdades básicas. Es así que las verdades matemáticas no dependen de la experiencia. Platón decía que el origen del verdadero conocimiento esta en el interior de uno mismo, es decir, el conocimiento se origina en el sujeto y sólo tiene que ser descubierto. La educación ideal es la matemática formal.

Empirista. Para esta escuela la ciencia natural es el modelo básico: El conocimiento se deriva de la experiencia. Según Locke, somos una tabla en blanco cuando nacemos y depende de las experiencias que tengamos, el contenido que leamos y sus interrelaciones lo que vamos a escribir en la tabla. La educación ideal es la que proporciona experiencias fenoménicas abundantes y perfectamente ordenadas, lo importante es lo que puedo percibir por los sentidos.

Pragmática. En está escuela se acentúa el carácter experimental de la ciencia empírica destacando las fases activas de la experimentación. El proceso de aprender de la experiencia es pues un proceso activo. La mente se concibe con una capacidad de generación activa de ideas cuya función es resolver problemas, la educación ideal es aquella que relaciona ideas generales con problemas reales y que acentúa sus aspectos prácticos. Los objetos de estudio de la matemática deben ser abstracciones del mundo cotidiano.

Nosotros como profesores debemos de estar de acuerdo con alguna de estas teorías para así tomar una posición que repercutirá al momento de dar clase. Pues si creemos que la mejor forma para conocer es la teoría racionalista nos enfocamos a enseñar cadenas deductivas que se conecten con axiomas, pero si creemos que las experiencias son las vitales, entonces nos dedicaremos a exponer a nuestros estudiantes a un sin fin de fenómenos y si estamos de acuerdo con la forma pragmática entonces expondremos fases activas de experimentación, es decir, debemos propiciar un proceso activo en la transmisión de conocimientos.

En lo personal estamos de acuerdo con la escuela pragmática y nos enfocaremos a ella.

Durante la historia han existido personas que están de acuerdo con las diferentes escuelas, en la pragmática destacan:

1. Leibnitz y Descartes: Creyeron que los problemas matemáticos podían aplicarse no solamente a los temas espaciales del mundo real, a las magnitudes y a sus relaciones cuantitativas, sino también al proceso de razonamiento, es decir, el método de trabajo en la matemática es capaz de influir en el proceso de razonamiento. Si queremos aprender "produciendo conocimiento" debemos enfatizar en los fundamentos.

2. Pólya: Expresa que la matemática no debe ser solo una ciencia demostrativa pues antes de abordarla como tal podemos intuirla y tratar de entenderla, las actividades que él sugiere para lograrlo es combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez.

3. Marmolejo (1989): Propone que el maestro debe incluir un trabajo heurístico en su enseñanza, es decir, la elaboración de principios, estrategias, reglas y programas que faciliten la búsqueda de vías de solución a trabajos no algorítmicos.

Propone una matemática razonada por medio de actividades las cuales debemos de diseñarlas y a través de ellas lograr:

a) La búsqueda (donde el pensamiento debe ser espontáneo)

b) El arreglo (donde de presenta la solución una vez que se le ha dado un razonamiento formalizado)

c) La comprobación (volver a razonar el problema en conjunto con su solución y reafirmar su veracidad o no)

4. El Dr. Müller (1993): Propone abordar la enseñanza con una preparación heurística por parte del profesor, separando en dos grandes áreas la preparación de nuestra clase: a) la propiamente heurística como los principios, reglas y estrategias (las llama procedimientos) y b) el uso de figuras informativas, tablas y el uso de grupos de solución (las llama auxiliares).

5. Popper: Sugiere un método para dar un carácter veritativo a las matemáticas y lo llama método de contraste, el cual lo define como: "una vez presentada una idea aún no justificada se extraen conclusiones por medio de deducciones lógicas las cuales se deben comparar entre sí y tomar otros enunciados con el objeto de hallar relaciones lógicas que existan entre ellas.

Como podemos ver las estructuras formales en matemáticas no constituyen ni la forma ni el orden sistémico de su enseñanza, según los puntos de vista anteriores, la manera didáctica en que se muestre la matemática es lo que le va a dar estructura para ser enseñada, el fracaso de la enseñanza desde el punto de vista pragmático es en realidad el fracaso de los matemáticos fungiendo como docentes de las matemáticas.

Marmolejo (1982) sugiere las siguientes ideas para ser reflexionadas por el profesor:

1. Es responsabilidad del docente los resultados de la enseñanza.

2. Los aspectos epistemológicos de la matemática y el dominio de conocimiento de los docentes pueden considerarse factores decisivos sobre los cambios cualitativos en los resultados de la enseñanza de la matemática.

3. Un objetivo para la formación de docentes es el conocimiento de la naturaleza de la matemática para así crear estrategias diferentes.

Si estamos de acuerdo con la postura pragmática ahora la pregunta que viene como consecuencia es ¿Cómo puedo lograr que los alumnos aprendan de una mejor manera? y ¿Cómo lograr la participación activa en el alumno? es difícil contestar esta pregunta y más llevarla acabo, los docentes debemos de luchar contra nuestra propia formación y la de los alumnos, enseñamos como nos enseñaron y no sabemos hacerlo de otra forma.

Bruner (1982) describe dos maneras de enseñar y aprender matemáticas siguiendo la idea de que un alumno se relacione con el conocimiento, una de ellas la define como la generalización empírica (descubrir ciertas propiedades abstractas que caracterizan a las soluciones de problemas prácticos) y la segunda es trabajar directamente con los enigmas (Weldon (citado en Bruner(1982) define un enigma como: un juego donde hay un conjunto de datos conocidos y otro de restricciones al modo de proceder y ambos se expresan con precisión, la solución de ellos esta sujeta a reglas que no deben de ser alteradas).

Para poder resolver los enigmas sugiere cubrir 4 fases:

1. La fase del **descubrimiento** (que va a ser el resultado de una sucesión de representaciones constructivas de las cosas) existen dos métodos para descubrir a) el activo b) el pasivo. El buen maestro es el que construye ejercicios que clamen ser representados, el mal maestro permite que ocurran tantas acciones inconexas en secuencias confusas por sí mismas que solo un genio daría una explicación coherente.

Para lograr el método activo debemos de recordar que la manipulación con el objeto de estudio y representaciones de estos en ciclos continuos son condiciones necesarias, la labor del maestro es explicar conceptos a partir de objetos que den sentido a las operaciones que se están realizando.

Es importante que el estudiante tenga la conciencia de un concepto, antes de que a este se le asigne un nombre", es decir, solo así se logra el descubrimiento.

2. La fase dos es la **intuición,** esta se logra cuando se comprende el sentido de la significación del objeto de estudio, debemos tratar de que el alumno plantee hipótesis rápidamente y llevarlo a producir ideas interesantes acerca de ellos, debemos crear procesos en el aula para razonar de manera matemática y no obtener respuestas concretas y exactas.

Si logramos que el alumno ejercite la intuición lo estamos preparando para que entienda con claridad los conceptos más complicados. Si como maestros sólo damos reglas lógicas no lograremos desarrollar ni la intuición ni el descubrimiento creando desconfianza en los alumnos e inhibiendo el pensamiento intuitivo.

3. La fase de **traducción**, se sugiere lograrla a través de un plan en espiral de conceptos que consiste en dar el conocimiento de manera ordenada y graduada, en presentar primero las ideas de una forma y lenguaje trivial aunque imprecisos para que después estas ideas se lleguen a describir con mayor precisión y fuerza, el alumno a través de la traducción encontrará la recompensa en el dominio del concepto.

4. La fase de **preparación**, consiste en dar más importancia a la profundidad que a la extensión, sin restarle importancia a está última ya que la extensión nos dará información acerca de la variedad de cosas que pueden relacionarse con el tema en particular que ya conocemos a profundidad.

En la siguiente sección veremos que dicen las investigaciones acerca de como se aprende, y que repercusiones tiene cada una de las posturas.

1.2 Teorías de aprendizaje

Ruiz (1987) da algunas definiciones de aprendizaje:

1. Es un proceso psicológico básico por medio del cual se explica el resto de los procesos psicológicos y el comportamiento en general.

2. Es una manifestación de la organización estructurada de varios elementos cognoscitivos relacionados con una información proveniente del exterior.

3. Es un proceso colateral a otros procesos que se desarrollan acorde con la evolución del sujeto y en su interacción con el medio ambiente.

4.- Adquirir el conocimiento de una cosa.

Los conceptos también varian en relación a cada una de las escuelas que lo han concebido siendo las más importantes para nuestros fines la neo-conductista y la cognoscitivista, sus principales características y enfoques hacia el aprendizaje son:

Conductismo clásico

En 1913 Watson lo inicia, él esta en contra de los conceptos mentalistas (conciencia, sensación, imagen) sustituyéndolos por los de estímulos-respuestas, lo cual implica trabajar solo con eventos observables y por lo tanto objetivos, su problema central es predecir y controlar la conducta, su método de estudio es el experimental. Respecto al aprendizaje sostiene que la relación estímulo-respuesta esta reforzado por la ley de la frecuencia (la relación se fortalece si es frecuente el estímulo) y la ley de la recencia (dada la aparición de relaciones estímulo-respuesta sucesivas, la conexión entre el último estímulo y la última respuesta fortalecen la conexión).

Conductismo metodológico

El hecho que Watson no incluyera en su teoría ningún concepto interno como motivación, impulso, etc. provocó que algunos de sus seguidores crearan el neo-conductismoo cuyos representantes son: Gutheere, Tolman, Hull, Spence y Skinner.

Skinner fue el representante más importante. Presentó su teoría como conductismo metodológico, donde apoya que no se pueden medir los eventos mentales pues no son observables pero si la discriminación de estímulos que se le presentan al individuo, para él la teoría debe venir después de la experimentación. Considera el medio ambiente como los estímulos y la conducta como la repuesta, introduce una relación funcional entre el estímulo y la respuesta.

Para él, el aprendizaje es un cambio de conducta, es una teoría mecanicista, las respuestas recibidas a partir de estímulos son la base de conceptos teóricos que se utilizan para la descripción de las manipulaciones de la variable independiente y sus respectivos efectos conductuales. Skinner deja a un lado los factores biológicos y sociales del reforzamiento y esto es su principal debilidad.

Teorías Cognoscitivistas del aprendizaje

Explican el aprendizaje como la adquisición de estructuras cognoscitivas (estructuras mentales), basándose en la escuela estructural funcionalistas y en el método de investigación experimental (que sugiere los procesos activos para adquirir el conocimiento), erradican los conceptos mentalistas estableciendo constructos tales como pensamiento y memoria, no ignoran la influencia del medio ambiente, ni la difusión de conductas como factores esenciales del comportamiento, señalan que la conducta es una expresión motora de ciertos integrantes de procesos mediadores como la percepción, los sentimientos y la motivación y se presentan según la experiencia del individuo, se enfocan en el estudio de procesos cognoscitivos que permiten al individuo el manejo y asimilación de información.

Las diferentes teorías cognoscitivistas son:

Modelo asociacionista. Thornodike fue su representante. En 1922 apoyaba la idea de que el aprendizaje es un producto de las asociaciones hechas por el individuo entre sensaciones, copias de la realidad y experiencias previas, la retención de información (la memoria) consiste en el almacenamiento de estas copias, es decir, el conocimiento se adquiere por los lazos asociativos entre las ideas.

Modelo cibernético. Compara al individuo con una computadora donde los procesos de información vienen siendo en el hombre la entrada de información, la memoria es la estructura central del proceso, el almacenamiento de información, recuerdo y recuperación son las funciones básicas de la memoria, pero no es un proceso pasivo sino activo, una de las formas que lo hace activo es pensar, el aprendizaje es el producto del procesamiento de información.

Teoría de la organización. Tiene su origen en la Gestal, considera a las estructuras cognoscitivas como una totalidad que no puede ser reducida a sus elementos, la estructura cognoscitiva es conocida como esquema y se define como una representación inespecífica pero organizada de las experiencias previas.

El grado en que un conocimiento nuevo puede ser adquirido por el sujeto dependerá de cómo se encuentre organizados y estructurados sus conocimientos y experiencias en sus esquemas esto da lugar a la comprensión y aprendizaje de conocimientos. El aprendizaje es la transformación de esquemas gracias a la incorporación de nueva información.

La perspectiva de Vygotsky. Para él el cambio en el desarrollo del individuo esta fundamentado en la sociedad y en la cultura, las funciones mentales superiores se desarrollan a partir de la interacción social, así a través de la participación en actividades que requieran funciones cognoscitivas se logrará el desarrollo, la interacción con los expertos en herramientas, conocimientos y conceptos ayuda al individuo a adquirir experiencias y lograr los cambios que el necesita para lograr el desarrollo con mayor facilidad.

Su primera aportación que la **internalización** (que consiste en la reconstrucción interna de una operación externa) que lleva consigo las siguientes transformaciones:

- Una operación que inicialmente es una actividad externa se reconstruye y transforma para que comience a suceder internamente.

- Un proceso interpersonal se transforma en uno intrapersonal y a medida que se logra se produce un proceso evolutivo.

- El proceso aún siendo transformado, continua existiendo y cambia como una forma de actividad durante cierto tiempo antes de internalizarse definitivamente.

Su segunda gran contribución consiste en señalar que las funciones psíquicas superiores son procesos mediados por **instrumentos y signos** entonces los procesos psicológicos superiores únicos en los humanos pueden ser adquiridos solamente a través de la interacción con otros.

Su tercera aportación es que existe **dos niveles para el aprendizaje entre los niños** a) el del niño según su evolución y b) el que obtiene con ayuda de su zona de desarrollo próximo.

Bruner (1982) comenta " Para Vygotsky la mente humana ni crece naturalmente, por muy bien alimentado que este, ni se encuentra libre de las trabas de las limitaciones históricas". Vygotsky desenfoca la atención del niño como individuo solo y lo estudia dentro de un ámbito social en colaboración con otros.

1.3 El constructivismo en la educación

El constructivismo de Jean Piaget se fundamenta en el estudio simultáneo entre los fundamentos de la lógica y la formación de la inteligencia en el niño abordando la psicología genética de una manera nueva.

Piaget conserva las ideas estructuralistas, él define una estructura como "un sistema de transformaciones que se enriquecen por las mismas transformaciones, ellas cumplen el carácter de totalidad y autorregulación".

Gómez (1990) menciona las ideas estructuralistas más importantes que maneja Piaget:

- Una estructura no necesita recurrir a elementos ajenos a ella para ser transformada.

- Las estructuras no son innatas, se van construyendo poco a poco, se remontan a estructuras anteriores las cuales fueron adquiridas durante un proceso biológico, no existen subestructuras, no se pueden anexar una estructuras a otras, no se incluyen sino se transforman.

- No heredamos estructuras cognoscitivas como tales sino se adquieren y transforman existen durante el curso del desarrollo.

Junto con estas ideas Piaget propone la de equilibrio la cual la explica dando el siguiente razonamiento:
El individuo busca el conocimiento, cuando al acceder a él encuentra una perturbación exterior, es decir algo que no se puede explicar internamente entonces se producen en sus esquemas conceptuales un desequilibrio el cual él tiene que volver a equilibrar por medio de un proceso de asimilación de ideas exteriores (adecuándolas a niveles internos), entonces se produce la acomodación de estas ideas provocando un nuevo equilibrio. Lo importante no es el estado sino el proceso para lograr el equilibrio. Este existe cuando las perturbaciones exteriores están compensadas por las acciones del sujeto.

En resumen el sujeto busca el conocimiento y quiere resolver las interrogantes que le surgen a través de sus propias acciones sobre los objetos que los rodean construyendo así sus propias categorías de análisis y pensamiento. Conocer un objeto es por lo tanto operar con él, al transformarlo se captan los mecanismos de estas transformación y la relación de las acciones que se usaron.

Debemos enfatizar que la experiencia es necesaria en el desarrollo de la inteligencia pero no solo eso pues existen dos clases de experiencias la física y la lógica matemática. La primera se logra interactuando sobre los objetos, descubriendo propiedades a partir de la observación y análisis de los mismos y la segunda es el descubrimiento de propiedades, pero a partir de las acciones efectuadas sobre los objetos.

Para Piaget el sujeto da una interpretación al estímulo que recibe del exterior por lo tanto este no actúa directamente sino es transformado por los sistemas de asimilación y acomodación de un sujeto en particular, y este es el centro del proceso de aprendizaje.

El sujeto intelectualmente activo no es aquel que realiza muchas cosas sino quien es capaz de comparar, comprobar, categorizar, formular hipótesis de acuerdo a su nivel de desarrollo. El conocimiento aparece como un logro que se llega a él con reestructuraciones globales que al inicio pueden ser erróneas pero necesarias para poder llegar a él. Aquí los errores son imprescindibles como prerrequisitos para obtener la respuesta correcta. No se le debe temer al error ni al olvido pues forman parte del aprendizaje.

Para ahondar en las ideas de Piaget se resaltaran ciertas ideas:

- El conocimiento se construye desde dentro del individuo y en interacción con el medio.

- Todo conocimiento se instruye por la actividad del sujeto.

- La construcción del conocimiento se realiza por la interacción de la experiencia física y el razonamiento.

- El centro de los procesos de aprendizaje está en el sujeto único capaz de crear el conocimiento.

- Ningún aprendizaje supone un punto de partida absoluto pues depende del individuo al que se le va a dar la instrucción.

- El aprendizaje es un proceso dialéctico.

- Lo que el sujeto lee de la realidad no depende tanto del estímulo como de la estructura previa en que ha sido asimilado, de ahí la importancia de la planeación correcta de la secuencia de los contenidos de acuerdo a su nivel de complejidad.

- Se debe enseñar tanto contenidos como procesos.

- Se deben de promover sujetos creadores, motivados, descubridores, críticos y autocríticos.

- El punto de partida es la práctica pues el sujeto está inmerso en una realidad y posee prácticas anteriores que interfieren enriquecen, modifican e interrelaciona la nueva situación.

Cesar Coll (1986) da lineamientos sobre los cuales debemos de actuar y buscar lograr en los alumnos comentando que mediante el aprendizaje significativo, el alumno construye, modifica, diversifica y coordina esquema estableciendo redes de significados. El aprendizaje significativo, memorización comprensiva y funcionalidad de lo aprendido se logra exponiendo al alumno a una serie de situaciones y circunstancias para que él alumno aprenda a aprender. La ejercitación de una serie de acciones ante un objeto o situación desde en forma regular indica la presencia de un esquema y este exhibe un estado de conocimiento. Conocer algo es asimilarlo, pero en forma general se puede decir que la asimilación es la modificación de las observaciones para ajustarlas a modelos internos y la acomodación permite la modificación de los modelos internos, las combinaciones de estos provocan la transformación de modelos internos.

Conclusiones

Después de leer lo anterior esperamos haber logrado (aunque de manera muy general), sembrar ciertas ideas que consideramos importantes para que al llegar al salón de clases obtengas mejores resultados. A manera de resumen lo que quisimos transmitirte fue el hecho de que no es suficiente que sepas matemáticas para que las puedas enseñar, se necesita que conozcas técnicas didácticas, herramientas y sugerencias pedagógicas para lograrlo. Antes de que te demos información al respecto queremos explicarte que en el aprendizaje actual lo importante es que el alumno haga cosas, que interactue con los conocimientos matemáticos, que sea él el que se relacione con los conocimientos y fracase, se equivoque, lo vuelva a intentar y lo discuta con sus maestros y compañeros pues en la medida en que lo realice el conocimiento irá formando parte de él, el aprendizaje de las matemáticas es como nadar (la única manera de aprender a nadar es nadando), entonces la única manera de aprender matemáticas es interactuando con ella, una de las principales funciones del maestro debe ser dar las condiciones para que esto se logre.

El maestro no se debe de enfocar en preparar una clase que él va a repetir en el salón de clase pues así el único que aprende más es él, el maestro debe crear condiciones para que el alumno se relacione con sus iguales y con el conocimiento para que así logre acceder a él.

Si tu recuerdas como aprendiste matemáticas seguramente te acordarás que lo hiciste en la medida en que ibas a clase y no entendías (ó entendías poco), leías un libro y no lo entendías entonces ibas a preguntarle a un profesor ó a un compañero que sabía más para luego regresar al problema, querías resolver un problema y no podías, volvías a intentarlo y aunque fracasabas lo volvías a intentar y te aseguro que nunca aprendiste matemáticas sentado viendo como el maestro resolvía problemas en el pizarrón.

En el capítulo siguiente veremos algunas técnicas y herramientas que te podrán ayudar en el salón de clases para lograr que el aprendizaje se logre de esta manera.

Bibliografía.

AMIRANTE, MARIGNAC, NORMA. (1990) "El constructivismo de Jean Piaget". México, Escuela Herminio Almendro.

BRUNER, (1982). " Sobre el aprendizaje de las matemáticas", México.

COLL, CESAR. (1986). "La construcción del conocimiento en el marco de las relaciones interpersonales y sus implicaciones para el curriculum escolar". Ponencia en la segunda conferencia europea sobre psicología del desarrollo en Roma Italia. Italia.

GÓMEZ, FELIPE, MEJÍA REBECA. (1990). "La perspectiva Vygotskyana" ITESO, México.
MARMLEJO V., EFREN . (1989), op cit, (introducción)

MÜLLER, HOYST. (1993). "El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la matemática en la enseñanza laboral". Instituto superior pedagógico. Cuba.

SCHEFFLER, I, (1987). "Epistemología y educación" en: Las condiciones del conocimiento, Instituto de investigación filosóficas, UNAM, México, pp.9-17

RUIZ, L, ESTELA, (1983). "Reflexiones entorno a las teorías de aprendizaje" en: Perfiles educativos, Núm.2 (NE), CISE, UNAM, México, pp.49 y sig.

ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA ABORDAR EL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA CON EL USO DE LA CALCULADORA GRÁFICA.

CAPÍTULO 2

UNIDADES TEMÁTICAS

2.1 Criterios de diseño de las unidades didácticas

A continuación presentamos la secuencia de 14 unidades didácticas (actividades), que constituyen el currículo para apoyar al alumno de bachillerato para que comprenda el concepto de función cuadrática, estas unidades contienen los siguientes elementos:

1.- Situaciones problemáticas que cubren los distintos tipos de representaciones por niveles de complejidad. Tomamos en cuenta el mostrar a los alumnos las diferentes aplicaciones donde se pueden incluir las funciones cuadráticas y sus relaciones con otras nociones de matemáticas y otras materias. A continuación se muestran tres tablas, la primera consta de un mapa sobre el concepto de función, la tabla dos muestra la manera en que creo que se debería dar el aprendizaje de la función cuadrática y la tercera muestra la secuencia de las actividades y sus contenidos.

2.- Diferentes representaciones y el paso de una representación a otra. Las representaciones que se manejan son la verbal, algebraica, tabular y grafica, enfatizando en la parte grafica debido a la importancia que tiene la visualización, y el uso de tecnología en el aprendizaje de las matemáticas.

3.- Se pide que en la mayoría de las actividades se describa y se explique por que se hicieron cada una de las cosas, esto es para que el alumno en todo momento se cuestione el porque hace cada cosa y no repita mecanizacones algoritmicas.

4.- En las actividades el enfoque es práctico sin olvidar la parte algoritmica. Se ha querido que la falta de manipulación algebraica no sea un impedimento para la comprensión del concepto de función cuadratica. Y es por eso que toda la parte de manipulación algebraica se logra a través de la calculadora grafica.

5.- Se sugieren tareas y 2 examenes solo como una guía, para que el maestro se de cuenta que las evaluaciones deben ser diferentes y enfocadas al entendimiento y no a la mecanización.

2.2 Estructuración de cada unidad didáctica

Cada unidad se ha organizado alrededor del estudio de una representacón específica ó la relación entre dos ó más de ellas. Las actividades anteriores se usan como apoyo para las unidades posteriores y conforme se van desarrollando las unidades se van relacionando entre si.

Cada actividad se divide en las siguientes partes:

a) **Hoja de presentación.** Aquí se describen el tema, el subtema, el nivel, a quien va dirigido, los objetivos, los procedimientos para lograrlos, los contenidos que incluye la unidad, los requisitos previos que en cuanto a conocimientos se requieren, la metodología que se usa y la forma de evaluar la unidad.

b) **Situaciones problemáticas, ejercicios y ejemplos.** Se da una colección de situaciones problemáticas, ejercicios y ejemplos en los cuales se hace una breve explicación cuando se cree necesario y luego una serie de preguntas con respuesta ó no para que el alumno note los puntos que debe enfatizar.

c) **Conclusiones** se describe en breves palabras la conclusión de la actividad.

d) No se pretende que el profesor cubra todas las actividades ni que lleve el orden que se sugiere, esta es una manera la cual me ha dado resultados a mi, pero como cada profesor y cada grupo es diferente aquí se proponen estas actividades como ideas que el profesor puede usar para obtener mejores resultados en sus alumnos pero no son las únicas.

2.3 Puntos que el profesor debe tomar en cuenta al implementar estas actividades.

En las actividades se ven las funciones cuadráticas y sus propiedades, el objetivo principa es lograr que el alumno reconozca las funciones cuadráticas por medio del análisis de tablas, gráficas y modelos algebraicos, además que reconozca los efectos que causan los cambios en los valores de los parametros de x^2 y x así como en el término independiente. Qué comprenda cuando una función cuadrática tiene soluciones reales y cuando soluciones imaginarias. El tipo de parábolas que me pueden representar y el tipo de análisis que se puede lograr.

2.4 Las ideas básicas que se manejan son:

a) Existe una familia de funciones llamadas cuadráticas que tienen como gráficas parábolas (con eje de simetría paralelo al eje y, que tienen un punto máximo ó uno mínimo.

b) Cuando una situación se modela con una función cuadrática la razón de cambio no es constante en las primeras diferencias (donde por razón de cambio entenderemos el cociente de incrementos correspondientes a dos puntos cualesquiera sobre la gráfica de la función).

c) Una función real en una variable cuadrática se expresa mediante un polinomio de la forma $f(x)= ax^2+bx+c$ donde $a \neq 0$ y $b,c \in R$.

Esta función se puede representar de manera gráfica y al variar sus coeficientes obtengo gráficas diferentes.

d) La gráfica de la función cuadrática $f(x)= ax^2+bx+c$ en el caso de que intersecte al eje x en dos puntos, esos valores de entrada satisfacen la ecuación $ax^2+bx+c = 0$

f) La gráfica de la función cuadrática $f(x)= ax^2+bx+c$ en el caso de que intersecte al eje x en un punto, este valor de entrada satisface la ecuación $ax^2+bx+c = 0$

La gráfica de la función cuadrática $f(x)= ax^2+bx+c$ en el caso de que no intersecte al eje x en ningún punto, significa que ningún valores de entrada real satisface la ecuación $ax^2+bx+c = 0$

g) A través del análisis de los coeficientes de la función podemos saber el número de valores de entrada que satisfacen la ecuación $ax^2+bx+c = 0$

Es decir si $b^2-4ac >0$ tiene dos valores de entrada que satisfacen la ecuación, si $b^2-4ac < 0$ no tiene valores de entrada reales que satisfacen la ecuación $ax^2+bx+c = 0$ y si $b^2-4ac = 0$ significa que solo existe un valor de entrada que satisface la ecuación $ax^2+bx+c = 0$

h) Se proponen problemas que traen como consecuencia modelos algebraicos que a través de sus gráficas y tablas podemos analizarlos.

i) Se describen similitudes y diferencias dentro de familias de curvas.

j) Se busca mostrar varias formas de obtener la solución de un problema.

k) Cuando dos funciones cuadráticas son equivalentes.

l) Como encontrar las factorizacion de una funcion cuadrática y en base a esto encontrar sus raices.

m) Como usar la fórmula general para encontrar los valores de las raices.

n) Como interpretar las desigualdades.

o) Se explica el significado de $f(x)= p$ y el significado de su solución,

FALTA PAGINA

No. 21, 22.

TABLA 3

Descripción de cada una de las actividades y el tipo de conceptos que se desean adquirir.

1.- Actividad 1. Conocer algunas representaciones de la función cuadrática.

A partir de una situación problemática y la expresión matemática que la representa analizar la representación tabular llenando una tabla y comprendiendo los resultados y la representación gráfica elaborando una gráfica y cambiando los rangos.

Resolver ecuaciones e inecuaciones.

Tarea 1. Conocer algunas representaciones de la función cuadrática.

Se reafirma lo visto en la actividad 1 y se comprueba que el alumno ha comprendido.

Ideas que se manejan:

- La notación p(x) representa una función cuadrática, recordando que las funciones tienen dos valores uno de entrada (dominio) y uno de salida (rango).

- Al cambiar los rangos dentro de una gráfica esto repercute en la visualización de esta, pero la información que obtengo es la misma.

- La representación algebraica de una función cuadrática es una parábola que tiene un punto máximo ó mínimo y en un intervalo crece y en otro decrece.

- Resolver ecuaciones cuadráticas por el método gráfico, identificando que la intersección de la parábola con el eje de la x es la solución de $f(x)=0$.

2.- Actividad 2. Comparar dos tablas que me representan la misma función cuadrática, así como sus gráficas.

En esta actividad se pretende a través de una tabla obtenida de un experimento compararla con una expresión algebraica que la representa y analizarla por medio de su gráfica. Aquí se pretende relacionar una representación tabular con otra representación tabular y luego con una representación gráfica. El cambio de rango es primordial.

3.- Actividad 3. Encontrar una expresión algebráica para una función cuadrática.

En esta actividad se quiere que el alumno encuentre por algunos métodos la expresion algebraica que represente a la función cuadrática es decir que pase de una representación grafica, tabular ó verbal a la expresión algebraica, aqui no se enfatiza en la mecanización algebriaca ya que se dan opciones dentro de la calculadora para evitar todo el proceso algebraico y que se centre la atención en el anális y no la mecanización.

4.- Actividad 4. Caraccterísticas gráficas que se obtienen al cambiar los parámetros de una función cuadrática.

En esta actividad se centra la atención en la representación grafica y el cambio de parámetros de cada uno de los coeficientes de la funcion cuadrática enfatizando mucho en las conclusiones, los cambios graficos obtenidos por el cambio de parámetros es el centro de atención de esta actividad.

5.- Actividad 5. Encontrando similitudes y diferencias entre las graficas de parábolas.

En esta actividad se centra la atención en la representación grafica y el cambio de parámetros de cada uno de los coeficientes de la funcion cuadrática enfatizando mucho en las conclusiones, los cambios graficos obtenidos por el cambio de parámetros es el centro de atención de esta actividad.

6.- Actividad 6. Trazo de parábola de la forma $f(x) = \pm (x \pm b)^2 \pm c$.

En esta actividad se centra la atención en la representación grafica y el cambio de parámetros de cada uno de los coeficientes de la funcion cuadrática enfatizando mucho en las conclusiones, los cambios graficos obtenidos por el cambio de parámetros es el centro de atención de esta actividad.

TAREA 2. Incluye las actividades 2,3,4,5 y 6.

7.- Actividad 7. Dada la gráfica de una función cuadrática encontrar su expresión algebraica ó su tabla.

En las actividades anteriores se analizó el cambio de parámetros y en esta actividad se aplican los conocimientos anteriores ya que dadas algunas graficas se debe de aplicar las características estudiadas para dar la expresión algebraica, aquí el cambio de representación es de grafico a algebraico.

Examen de las Actividades 1- 7

8.- Actividad 8. Obtener las soluciones de la función cuadratica de la forma f(x)= p y f(x) < p de manera grafica y por medio de tablas.

Se dan unas situaciones problemáticas, tablas y sus graficas se analizan las intersecciones de f(x) y y=p, se analiza que sentido tiene esto en el problema específico que se esta tratando. Se encuentra el conjunto solución de la desigualdad y el sentido de cada resultado dentro de la logica del problemas.

9.- Actividad 9. Dadas las raíces de f(x)=0 encontrar la expresión algebraica de una función cuadrática.

Se comparan dos maneras de resolver $ax^2 \leq c$ la grafica y la algebraica y ver cuando no existe solución real como identificarlo en una grafica y como en un procedimiento algebraico.

Tarea. Actividades 7, 8, 9.

10.- Actividad 10. Comparando la solución gráfica con la solución algebraica de funciones cuadráticas.

Dadas diferentes funciones cuadráticas graficarlas e identificar las soluciones. Identificar cuando las funciones cuadráticas no tienen soluciones reales.

11.- Actividad 11. Funciones cuadráticas equivalentes.

Dadas dos expresiones algebraicas construir la gráfica de las dos y compararlas.

Dadas dos expresiones algebraicas construir la tabla, la gráfica de las dos y compararlas.

12.- Actividad 12. Aplicaciones usando la forma general.

Se muestran varios ejemplos para que el alumno aplique la forma general que se vio en otra actividad. Se quiere que sepa usarla e identificar las soluciones reales e imaginarias. Se pide la parte grafica para que relacone el descriminante y la grafica.

13.- Actividad 13. Conocer raíces complejas.

Se muesttran algunos ejemplos de las funciones cuadráticas que tienen solución en los numeros complejos. Esta actividad es solo una pequeña introducción a los números complejos.

14.- Actividad 14. Dando un vistazo a la historia.

Tarea de las Actividades 11-14

Examen de las Actividades 8-14

<u>Bibliografía de las Situaciones Problemáticas</u>

ACTIVIDAD 1

Situación 1 Algebra Fey, James. Heid, Kathleen (1985). Computer Intensive. Pensylavania.

Situación 2 Fey, James. Heid, Kathleen (1985). Computer Intensive Algebra . Pensylavania.

TAREA 1

Situación 3 Phillips. Butts. Shaughnssy. (1983) Algebra con Aplicaciones Editorial Harla. México.

ACTIVIDAD 2

Situación 4 Swokowski Earl. (1988). Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Segunda Edición. Editorial Iberoamérica México.

ACTIVIDAD 3

Situación 5 Phillips. Butts. Shaughnssy. (1983) Algebra con Aplicaciones Editorial Harla. México.

ACTIVIDAD 8

Situación 6 Gobran Alfonse. (1990). Algebra Elemental Editorial Iberoamérica.México.

ACTIVIDAD 10

Situación 7 Ninguna

ACTIVIDAD 11

Situación 8 Phillips. Butts. Shaughnssy. (1983) Algebra con Aplicaciones Editorial Harla. México.

ACTIVIDAD 12

Situación 9 Foresman. (1993) Advanced Algebra. The University of Chicago School Mathematics Project. Editorial Offices. Glenview Illinois.

ACTIVIDAD 13

Situación 10 Algebra Fey, James. Heid, Kathleen (1985). Computer Intensive. Pensylavania

Situación 11 Swokowski Earl. (1988). Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Segunda Edición. Editorial Iberoamérica México.

BASES EPISTEMOLÓGICAS Y COGNOSCITIVAS

PERSPECTIVAS SOBRE EL APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS.

La propuesta que presentamos está basada en una teoría de aprendizaje constructivista. La idea precisa fue elaborar actividades para que los alumnos de nivel medio superior comprendieran mejor el concepto de función cuadrática a través de la construcción de este concepto, antes de comenzar a diseñarlas teníamos que explicarnos la importancia del Álgebra dentro de las Matemáticas así como lo que queríamos lograr en los alumnos, teníamos que contestarnos preguntas como: ¿qué entendíamos por álgebra?, ¿qué visión de ella iba a regir nuestro trabajo?, ¿qué significaba que un alumno entendiera el concepto de función cuadrática? y ¿cómo proponer ejemplos sobre ecuaciones cuadráticas? pues sólo así podríamos dar un enfoque congruente con lo que decíamos y hacíamos, una vez aclarado esto, teníamos que elegir una metodología para cumplir este objetivo y justificar la elección de ella, después de revisar la literatura nosotros consideramos que la resolución de problemas era una buena opción metodología para lograrlo, además encontramos varias alternativas para implementar esta metodología, la que nosotros elegimos fue el diseño de actividades para trabajarlas en pequeños grupos dentro del salón de clase y sugerimos como herramienta didáctica principal para lograr la comprensión del conocimiento el uso de la tecnología.

ÁLGEBRA Y FUNCIONES CUADRÁTICAS.

Para muchos maestros de matemáticas el conocer quiere decir definir conceptos y memorizar procedimientos básicos, entonces el que un alumno conozca significa que maneje operaciones matemáticas, manipule símbolos algebraicos y memorice algoritmos, se puede decir, que este enfoque es un reflejo de ellos estudiaron matemáticas en la escuela. A través de largo tiempo se ha comprobado que esta forma no es la más adecuada, como todos sabemos el alto índice de reprobación y el olvido de algoritmos es muy común en la mayoría de los alumnos y lo único que se logra con esto es un distanciamiento de la mayoría de los alumnos con la disciplina, teniendo como consecuencia la mecanización de procedimientos, la falta de entendimiento y el olvido a largo plazo en el mejor de los casos.

Dentro del aprendizaje de las matemáticas, el Álgebra es muy importante, especialmente en el nivel medio superior pues lo utilizamos como un lenguaje, y si este no queda entendido será mucha más difícil entender geometría analítica ó cálculo diferencial e integral pues se tendrá adicional al contenido de la materia la dificultad en el entendimiento de los procesos algebraicos, los Estándares (1989), marcan la importancia de no perder los objetivos que estamos buscando al enseñar un lenguaje algebraico, los alumnos deben entender tanto los conceptos como los algoritmos pues solo así serán útiles los conocimientos para usarlos en el futuro, para lograr continúan diciendo es necesario que cambiemos el enfoque tradicional con el que hemos estado enseñando.

Para nosotros el preparar a un alumno en el área de matemáticas tiene como principal propósito el que esto le ayude a su desempeño dentro de una sociedad, enseñar una matemática para que el alumno la utilice fuera de la escuela, creemos que los procesos mecánicos en la mayoría de los casos no van a ser utilizados y que el tipo de habilidades que podemos obtener de ellos no son los requeridos para cuando el alumno salga a desempeñar su labor profesional. Uno de los requisitos que consideramos necesarios para cualquier persona dentro de muy poco tiempo es tener un pensamiento capaz de utilizar resultados y entender procedimientos computacionales, la tecnología se ha ido introduciendo en todas las áreas de trabajo tanto profesional como socialmente entonces es necesario que nuestros alumnos conozcan y se formen en esta área importante para su futuro para lograr esto debe de darse un cambio en la enseñanza de las matemáticas, tanto para el que estudia Ingeniería como para el que va a trabajar saliendo de la preparatoria, la comunicación y el análisis de los procesos de información requieren de habilidades específicas que no se desarrollan en el aula algunas son: Analizar procesos, interpretar resultados, estimar si los resultados obtenidos por las computadoras son razonables. Para cuando nuestros alumnos salgan de la preparatoria ó universidad, el uso de la tecnología habrá avanzado más y el tipo de preparación que ellos requerirán será totalmente diferente a los que nosotros requerimos para ser profesionalmente capacitados. Cedillo (1995) sugiere que la palabra demostración la debemos cambiar por la de razonamiento de situaciones con las que los alumnos realmente se pueden encontrar en su vida profesional, no con esto queremos decir que nunca se deben ver demostraciones ó que no son importantes. Sino que el énfasis primordial de una clase de matemáticas ya no debe girar sobre la mecanización. Antes de que un alumno memorice procesos y algoritmos creemos que el profesor centre su atención en lograr que interprete datos, pruebe diferentes caminos para encontrar una solución maneje varias formas de representaciones.

El maestro debe prepararse para elaborar dinámicas que se orienten a lograr el razonamiento crítico dentro de un proceso, la comunicación, reflexión y la búsqueda de estrategias y dejar a un lado la repetición de un libro.

Para los requerimientos futuros, el fomentar habilidades y crear una actitud nueva hacia las matemáticas, se necesita cambiar el enfoque del Álgebra donde se desenfoque la atención de la memorización y mecanización y se resalte el razonamiento e incremento de habilidades.

Urzini (1994), hace un artículo refiriéndose al estudio de variables y sus obstáculos cognitivos, esta información es muy útil a la hora del diseño de actividades debido a que podemos enfatizar en estos puntos, ella comenta que el

concepto de variable es muy difícil de definir ya que cambia según el contexto en el cual aparece, ella toma la clasificación de Usiskin que destaca 4 concepciones de variable según la concepción de álgebra que se maneje, es decir, si creemos que el álgebra es: a) una aritmética generalizada entonces las variables son generalizadores de patrones, b) si aceptamos que es un medio para resolver problemas entonces son incógnitas, c) si es un estudio de relaciones entonces son argumentos y parámetros y d) si son estructuras entonces son representaciones marcas arbitrarias en papel.
Cuando el alumno no reconoce las diferentes caracterizaciones de las variables se crea un obstáculo que bloquea el aprendizaje Matz, Mutz, Wagner, Van Euger (citados en Urzini (1994)), argumentan que los símbolos comúnmente usados para representar variables no son los más adecuados y que por lo tanto contribuyen a crear confusión en los estudiantes, para poder trabajar de manera exitosa es necesario dar elementos a los alumnos para que puedan interpretar desde diferentes formas a las variables y así poder usar diferentes representaciones y pasar de una a otra.

Kruteski resalta que la habilidad para generalizar en matemáticas no es una habilidad innata sino adquirida. Las variables son un instrumento que se usa en matemáticas para expresar un generalización podemos crear en el alumno la habilidad de entenderlas y usarlas por medio de actividades secuenciales.

Diferentes investigaciones muestran que con apoyo ambientes computacionales y el lenguaje logo los niños comprenden mejor el concepto de variable como una generalización de un número ó como su representación simbólica.

Cuando las variables se usan para expresar una relación funcional entre dos cantidades cuyos valores cambian se maneja la idea de que las variables están en cierto rango y el valor que se les asigna a una de ellas afecta al valor que tiene la otra. Para que esto se comprenda realmente debemos ayudar al alumno a comprender a las variables como entidades cuyos valores cambian bajo ciertas restricciones.

Fey y Heid (1989), encontraron que al trabajar con tablas de valores creadas por computadora sobre ciertos rangos los alumnos pueden percibir como cambian los valores de las expresiones algebraicas dadas, y así lograr un aprendizaje además los niños de bajo rendimiento se sientes seguros trabajando con tablas esta es una buena manera de comenzar a introducir el concepto de variable.

Dreyfus y Einsenberg, (1981), dicen que el trabajo con una representación gráfica ayuda a los estudiantes a obtener una perspectiva global.

Otros investigadores marcan que la enseñanza tradicional que tiende a desarrollar y fortalecer las habilidades manipulativas no parece ser adecuada para ayudar a los niños a superar las dificultades de resolver ecuaciones.

Una vez que el concepto de variable (desde el punto de vista de relación funcional) es adquirido surge el concepto de función, este concepto es importante pues en los nuevos programas como ya dijimos, se utiliza como un concepto unificador. La representación de variables cualitativas nos ayuda a representar muchos fenómenos de la vida real podemos modela funciones y analizaras y así usar la resolución de problemas como metodología.

Vygotsky (1978) considera que el dominio de un concepto se logra de manera más fácil con la interacción de personas más competentes (el maestro) creando así su zona de desarrollo próximo, será entonces uno de los objetivos fundamentales para el profesor tratar de crear condiciones para que el alumno tenga elementos e interacciones con ellos y así logre de una manera más rápida la comprensión de conceptos.

Algunas sugerencias para lograr la construcción del conocimiento dadas por los Estándares curriculares (1989) y Dubynski (1994), son introducir los conceptos de función, función lineal y función cuadrática a través de los siguientes niveles que son:

Nivel 1: A través de la elaboración y análisis de tablas y gráficas identificar funciones y sus raíces.
Nivel 2: Con el análisis gráfico señalar casos extremos, manejar diferentes escalas y modificar diferentes parámetros.
Nivel 3: Encontrar aproximaciones de raíces, explorar intervalos de la función cambiar parámetros y encontrar características generales de manera gráfica con el uso de la tecnología se puede hacer de manera más rápida y exacta.
Nivel 4: Explicar y efectuar el proceso algoritmico para resolver desigualdades y ecuaciones.

Todo esto se debe de contextualizar con modelos de fenómenos del mundo real utilizando diversos tipos de funciones, así como representaciones diferentes. Se sugiere analizar los resultados y ver las implicaciones que tendría el cambiar ciertos datos.

Cedillo (1995), sugiere que una vez que el alumno ha logrado distinguir las variables deben encontrar un modelo algebraico que lo represente, el uso de una calculadora gráfica permite involucrar diferentes parámetros en el modelo algebraico, también marca la importancia de las diferentes representaciones y la utilidad de crear actividades que pasen de una representación a otra.

Como podemos ver los tipos de representaciones (verbal, gráfico, tabular y modelo algebraico) son muy importantes que se manejen y se analicen por separado y después relacionándolos. Moses (1982), dice que diferentes entre representaciones de un concepto tienen diversos efectos y promueven el razonamiento de manera distinta, para ver algunas diferencias entre representaciones menciona que la forma tabular requiere que el alumno haya tenido experiencias diversas con la mayoría de las funciones, el modelo algebraico solicita niveles mayores y comprensión de diferentes conceptos, el gráfico requiere de mayor estructura de conceptos para poder hacer una interpretación correcta.

Balderas (1993b), enfatiza que "la comprensión ó entendimiento de un concepto en una representación no significa que se comprenda en otra representación, entonces, otro de los requisitos que el profesor deberá de cumplir es traducir y establecer vínculos entre las diferentes representaciones de un concepto y en base al manejo adecuado de ellas, se dará un entendimiento más completo, correcto y profundo del concepto"

Nosotros recomendamos dentro de las actividades hacer algunas las cuales validen los resultados sobre las raíces reales de una ecuación cuadrática y sugerimos un análisis del discriminante y finalizar resolviendo ecuaciones por el método gráfico, verificando los resultados analíticamente.

Las ideas que el maestro debe de remarcar a nuestra consideración para que el concepto de función cuadrática se comprenda de mejor manera son:

a) Qué toda representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.
b) Qué toda función cuadrática posee un punto máximo ó un punto mínimo.
c) Qué una tabla me puede dar información acerca del problema que están analizando.
d) Dentro de una situación problemática puedo modelar funciones que me lleven a resolver ecuaciones.
e) Una función cuadrática me da una relación uno a uno.
f) Una función cuadrática tiene un valor de entrada y uno de salida, y uno me determina el otro.
g) Una función cuadrática es continua.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

El objetivo principal del aprendizaje en Matemáticas es dar al alumno las condiciones necesarias para que desarrolle habilidades por medio de una actitud activa dentro del proceso de enseñanza aprendizaje, hemos recalcado el hecho de que un alumno aprende sólo a través de experiencias con el mundo real pues así le encontrará significado a lo que esta aprendiendo, si el profesor propone un problema que sea del mundo real ó por lo menos que tenga significado para el alumno, este actuará de manera más positiva hacia el aprendizaje y después le encontrará sentido a la parte algoritmica, pues la verá como requisito para resolver su problema. Creemos importante el enseñar por medio de resolución de problemas y no dejarlos como un subtema hasta el final de cada capítulo. Una de las cosas que queremos destacar es que enseñar a través de resolución de problemas no es una receta sino una metodología la cual se tiene que aprender y ejercitar para que realmente se lleve a cabo como debe de ser no es aplicar técnicas específicas para resolver distintos tipos de enunciados es decir se trata de un proceso por el que se constituye y se refuerza el contenido matemático.

Para comenzar la resolución de problemas es una metodología cuyo primer componente es que ayuda a desarrollar habilidades en el alumno que van a ser más importantes que los conocimientos en si cuando desarrolle su vida profesional. Las habilidades a la que nos referimos son investigar, entender conceptos, aplicar estrategias, aplicar modelos matemáticos y crearlos, aplicar estrategias, aplicar modelos matemáticos y crearlos, observar, razonar, estimar, usar información comprender y aplicar conceptos saber en que momento usarlos y manejar los procesos.

Los Estándares (1989), dan una justificación para usar como metodología la resolución de problemas, ellos comentan: "El hombre realiza diariamente una serie de actividades donde tiene que resolver un sin fin de problemas no necesariamente matemáticos, pero estos problemas no tienen un proceso o una fórmula específica, sino las situaciones cambian constantemente y no se sabe qué nos espera en el futuro. La vida requiere que las personas tomen a diario un sin fin de decisiones, en el ámbito profesional nos contratan para resolver problemas y depende de la capacidad que tengamos para hacerlo el buen desempeño que tenemos en nuestra vida profesional y social es por eso que debemos enseñar a nuestros alumnos a resolverlos pues así se crearan las habilidades necesarias para que en el futuro las transfieran a su vida productiva y familiar.

Se debe de usar problemas de aplicación para contextualizar y representar contenidos matemáticos nuevos, con la intención de contribuir a que los estudiantes adquieran tanto estructuras conceptuales como habilidades para usar algoritmos.

Podemos definir un problema como una situación nueva para el individuo a quien se pide resolverla. Entonces un problema depende del sujeto al que se le va a dar, ya que un problema para un alumno puede no serlo para otro.

Si la situación no es nueva entonces se convierte en un ejercicio solamente y este ya no cubre las expectativas requeridas pues se les convierte solo en simple repetición de fórmulas ó procesos ya conocidos, no ayuda por lo tanto a desarrollar algún tipo de habilidades,

Polya destaca que la capacidad de resolver problemas es una habilidad como la de nadar, sólo se aprende haciéndola, es decir, la única manera de ser hábiles en la solución de problemas es resolviendo problemas y la única forma de nadar es nadando.

Schoenfeld (1987) justifica la resolución de problemas de la siguiente manera:

1.- Cuando un alumno resuelve problemas implica que conoce y entiende los conceptos.
2.- La resolución de problemas ayuda a la transición de la verbalización a la simbolización.
3.- La resolución de problemas me sirve también para introducir conceptos por medio de aplicaciones.
4.- Se debe de enseñar matemáticas de manera que se vea su aplicación.
5.- Se debe de enseñar modelos heurísticos para resolver problemas.
Existe una clasificación de los diferentes tipos de problemas la que propone Butts es:

1.- **Ejercicios de reconocimiento**, se les pide al resolvedor que reconozca un hecho específico, definición o teorema.
2.- **Ejercicios algoritmicos**, se resuelven por una serie de pasos y a menudo con un algoritmo numérico.
3.- **Problemas de aplicación,** su solución solo requiere la formulación del problema y la manipulación de los símbolos de acuerdo al algoritmo.
4.- **Problemas de búsqueda abierta**, no contiene en su enunciado la estrategia de solución, pruebe que, encuentre que, para cuáles, etc.
5.- **Situaciones problemáticas,** esta estrategia tiene la mejor tipificación en la exhortación que da Pollak(1987) cuando dice "En lugar de decir a los estudiantes aquí hay un problema resuélvelo, podemos comunicarles aquí hay una situación, piensa acerca de ella"

En la siguiente propuesta se usaran el tipo de problemas "Situaciones problemáticas" ya que consideramos que es la mejor opción para nuestro objetivo, ya que por medio de ellas podemos elaborar un mejor análisis de cada una de las representaciones.

En esta propuesta se desea desarrollar habilidades de organizar datos, identificar detalles relevantes de los irrelevantes, hacer patrones de comportamiento para llegar a la generalización, hacer tablas para reconocer patrones de comportamiento para reconocer estructuras e inferir características que queremos resaltar a través de situaciones problemáticas y su análisis.

DISEÑO DE ACTIVIDADES.

En un salón de clases siempre existen actividades que el maestro ó el alumno realizan, casi siempre el profesor expone su clase y los alumnos atienden a las explicaciones, existen otras actividades aunque menos populares: a) el maestro

indica ciertas afirmaciones que el alumno debe de ir ejecutando, b) el profesor da indicaciones generales y el alumno debe elegir la que el quiere hacer y c) el maestro puede marcar solo un objetivo ó meta y el alumno será el que encuentre los caminos e instrumentos para llegar a la meta. La diferencia entre estas actividades y la clase tradicional es que en estas el alumno es activo, es decir, es él el que hace cosas aunque en cada caso son diferentes. Para lograr un aprendizaje significativo se nos sugiere que el alumno sea activo, el hecho de que el profesor no sea el que da la clase no quiere decir que su papel no siga siendo principal y activo, sino simplemente es diferente, él en este caso debe propiciar ideas, corregir a los alumnos si se desvían del objetivo, sugerir materiales, impone orden, coordina, convertiste en un facilitador, esta a cargo de él también el diseño de las actividades. Coll (1991), resalta la importancia del profesor al comentar que el alumno va a aprender en la medida en que el profesor se responsabilice del buen diseño y secuencia de las actividades, nosotros consideramos que para lograr un aprendizaje significativo en la comprensión de un concepto el primer requisito es lograr que el alumno se convierta en un ser activo en lugar de un receptor de información, se debe lograr una relación estrecha entre el alumno y el profesor, y entre los alumnos.
El school council (1965), después de un estudio que hizo declaró:
"....tenemos pruebas irrefutables de que sólo a través de una participación activa es posible lograr un aprendizaje sólido y duradero"

Para lograr un alumno activo necesitamos un maestro que cambie su forma de dar clase, pues lo importante ahora ya no es el diseño de su exposición sino deberá diseñar actividades de tipo interactivo (maestro-alumno-actividad) donde debe tener muy claro que desea lograr en cada sesión y como hacerle para que el alumno sea activo.

El diseño de diferentes actividades para lograr este propósito es un campo completamente inexplorado por el profesor pues el sólo sabe preparar la clase de manera tradicional y el diseño de actividades requiere tomar conciencia acerca de ¿qué es lo que busco lograr a través de la actividad? (conocimientos, hábitos y habilidades) ¿cuál es la secuencia que offrece la mejor opción para lograrlo? y finalizar ¿cómo puedo evaluar de la mejor manera el trabajo de él y de su grupo?.

Existen varias sugerencias para lograr lo anterior Orton (1990), sugiere comenzar con algo muy concreto y simple y conforme se vaya logrando un avance significativo irse desprendiendo cada vez más de lo real para ir retomando lo abstracto, finalizando con la parte algoritmica, también menciona que para planificar un aprendizaje se debe progresar dentro del tema, comenzando con objetos reales luego utilizar diagramas para representar los objetos y en una etapa final en la cual se usen símbolos se manipulen modelos abstractos.

Frey y Heid (1989), proponen el diseño de actividades para ser trabajadas en pequeños grupos creando ambientes interactivos con la computadora como

herramienta principal, este tipo de actividades son diseñadas a partir del uso de diferentes representaciones de conceptos, trabajan actividades con cada una de las representaciones, la tabular, la gráfica, la verbal y el modelo algebraico, así como actividades donde se pase de una representación a otra. El tipo de material que ellos diseñaron es: Por medio de una situación problemática y su análisis se hacen una serie de preguntas donde el alumno tiene que ir analizando la situación para lograr al final conclusiones que lo encaminen a la comprensión de los conceptos.
Wenzelburguer(1992, 1993) y Balderas (1993a, 1993b), sugieren actividades diseñadas con el uso de la calculadora gráfica como herramienta principal, Balderas (1993 a) comenta que una manera de lograr ambientes que promuevan la investigación y exploración son por medio de actividades diseñadas especificamente para ese fin.

Martínez (1993, 1994) adicional a lo anterior enfatiza la importancia de una evaluación formativa durante el diseño de actividades para ver si realmente se va a lograr el objetivo propuesto ya que muchas veces tendremos que corregir nuestro diseño hasta que realmente se logré el objetivo propuesto.

En nuestro trabajo proponemos actividades las cuales se realizan en pequeños grupos cada una consta de 5 partes que son: a) puntos de atención para el profesor, aquí nuestro objetivo es dar al profesor los lineamentos generales sobre los que vamos a enfocarnos, b) actividades para el alumno este es el material que se le dará al alumno el cual consta de las siguiente información, tema, subtema, objetivo, metodología, prerrequisitos, material necesario, evaluación, c) tarea del tema esto se diseño con el propósito de dar más elementos al alumno y al maestro para repasar el tipo de metodología que se usa, reafirmar los conocimientos adquiridos y enfrentar de manera individual a los alumnos con sus dudas y d) la evaluación del tema. Como el tipo de método diferente y los objetivos también aquí se sugiere esta evaluación para que el maestro comparé la diferencia con la evaluación tradicional.

La evaluación que sugerimos es continua y es por eso que un examen tradicional no implicaría ni con los objetivos ni con la metodología que proponemos es por eso que aquí sugerimos una evaluación coherente con las actividades.

En general los contenidos que se manejan son 4 representaciones de las funciones cuadrátcas la tabular, la gráfica, la verbal y el modelo algebraico, se analiza el concepto de función cuadrática a través de situaciones problemáticas, al final se obtienen conclusiones resaltando la información más importante y se sugieren otras actividades donde se requiere que de una representación se pase a otra, las actividades se diseñaron para utilizar la calculadora gráfica y la computadora como herramientas.

Estas actividades también se pueden realizar sin usar la tecnología pero nosotros creemos que se logran mucho mejores resultados como se sugieren.

TRABAJO EN PEQUEÑOS GRUPOS.

Dentro del salón de clases los alumnos tienen varias opciones para realizar las actividades que el profesor cree necesarias para su aprendizaje, Coll (1991) destaca las 3 más importantes y nos da los resultados de un estudio que se hizo acerca de las ventajas y desventajas de cada una. En el salón los alumnos pueden trabajar de manera individual, cooperativa y competitiva, el realizar una actividad en equipo con la opción cooperativa y competitiva para que nos expliquen de mejor manera describiremos cada una de ellas. El realizar una actividad en equipo con la opción cooperativa significa que los objetivos de los participantes están estrechamente vinculados, pero si la opción es competitiva sucede justamente lo contrario pues los objetivos de los participantes están relacionados pero de forma excluyente pues un participante alcanza su meta si y sólo si los otros no logran su objetivo y por último en la situación individualista no existe relación entre los participantes. Johnson hizo un estudio acerca de cual opción era la que reportaba mejores Coll (1991) da los resultados de estas investigaciones concluyendo que las organizaciones cooperativas son netamente superiores en lo que concierne a rendimiento y productividad.

Lo común dentro de los salones tradicionales es la participación activa del profesor y la pasiva del alumno, como que una idea generalizada es que la instrucción tipo conferencia es la mejor donde el contacto con la realidad es ocasional y por lo que hemos visto hasta aquí no es la más adecuada pues el maestro puede hacer preguntas que no necesariamente resultan resolvedoras de inquietudes por parte de los alumnos, cuando el profesor lleva la coordinación ignora que es lo que esta pensando el alumno algunos comentarios que serían de mucha utilidad para el aprendizaje son ignorados recordemos que la participación activa del alumno es lo que le va a dar elementos para que el aprenda.

Coll (1991), recomienda el aprendizaje activo y diice que se obtienen mejores resultados si se logra la interacción entre iguales, y lo justifica de la siguiente manera:

a) La ejecución colectiva da como resultado producciones más elaboradas pues el simple hecho de actuar conjuntamente de manera cooperativa obligada a los miembros del grupo a estructurar mejor sus ideas.
b) El diálogo entre iguales puede ser el punto de partida para una coordinación cognitiva que tendrá como fin efectos individuales.
c) Se debe de tener atención que la interactividad se de con todos los miembros del equipo y que uno no imponga su punto de vista, si se logra la confrontación adecuada no importa que los argumentos sean correctos o no, es una responsabilidad del profesor que la interactividad se lleva bajo patrones útiles.

Orton (1990) resalta otro elemento muy importante para el aprendizaje la verbalización, se ha estudiado que habré procesos mentales logrando una inspección y modificación consistentes gracias a ella podemos recuperar esquemas, manipularlos y cambiarlos.

El trabajo en pequeños grupos fomenta la verbalización originando más hipótesis, más discusión y nuevos enfoques para resolver problemas, una persona aislada le lleva más tiempo abstraer y resolver problemas, el nivel critico es mucho mayor en equipos.

Balderas (1993a) comenta que la actividad de los alumnos al trabajar en pequeños grupos es altamente participativa y se fomenta la discusión, el intercambio de puntos de vista propicia el intercambio de significados y la negociación de estos lo cual es necesario para la construcción de conceptos. El papel del profesor es importante en este proceso pues debe de cambiar su postura de informador a comunicador, algunas de las características que el profesor debe tener las menciona Martínez (1994) diciendo que el papel del profesor es de asesor, permitiendo la autonomía y ayudando al grupo a sintetizar información y fomentando la discusión. El profesor debe elaborar variedad de ejemplos, letras, espacios, disposición en general, al finalizar cada sesión puede dar un resumen apropiado, los ejercicios los ha de desarrollar de lo elemental a lo difícil la secuencia y el ritmo deben ser también los adecuados.
Para lograr que el alumno adicional a lo anterior maneje un lenguaje apropiado.

El lenguaje ayuda al niño a organizar experiencias aportando pensamientos con precisión pero eso solo se logra a través del diálogo y el debate a lo largo de la acción.

Jonhson (1987), comenta que se tiene muy desvirtuado el uso de pequeños grupos para resolver actividades los profesores creen que el uso de equipos, provocan indisciplina y distracción, además dicen que las actividades que se hacen en grupo solo las realizarán unos cuantos y los demás esperaran además, es dificil que el profesor pueda esta en todos los equipos y controlarlos.

El utilizar equipos fomenta la discusión entre iguales y esto sirve para que el alumno en el intento de explicar su idea o explicarle a alguien lo que no entiende él mismo se explique, cuando se le explica a otra persona se definen mejor las ideas, deben aclarar sus conceptos y justificar sus juicios este tipo de habilidades no las encontramos en una clase tradicional, el trabajo en pequeños grupos logra que el maestro se de cuenta del nivel de comprensión que manejan sus alumnos.

El trabajo en equipo debe de ser iniciado por el profesor poco a poco marcando la importancia que tiene el hacerlo y acostumbrarse a supervisar que los alumnos participen en grupo y así motivar a que dialoguen y defiendan sus opiniones.

EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA.

El uso de la tecnologia en la mayoría de los ámbitos social, profesional y económico es un hecho real, la computadora ha servido para dar un crecimiento acelerado dentro de las áreas científicas y sociales es un requisito que nuestros alumnos conozcan, manejen y estén acostumbrados a su uso, la computadora será la herramienta obligatoria en el año 2000. La educación en particular también esta investigando en que medida la tecnología puede facilitar el entendimiento de conceptos las investigaciones arrojan resultados muy positivos en cuanto a la idea de visualización de conceptos, antes de abordarlos de manera teórica.

Freudenthal (1987), Martínez (1993), Balderas (1992, 1993a,b) Wenselburguer (1992), Hitt (1994), Estándares (1989) y otros están a favor del uso de las computadoras y calculadoras gráficas para el aprendizaje de conceptos. Sus principales usos a nivel general serán: gráfica muchas funciones en poco tiempo con gran exactitud, elaboran gráficas en tercera dimensión, intersectar curvas, se varían parámetros de manera inmediata y ver los efectos gráficos que esto produce, explicar de manera gráfica lo que se hace de manera algebraica cuando resolvemos ecuaciones, obtener áreas bajo una curva giramos y trasladamos funciones, obtenemos derivadas y resolvemos ecuaciones de grados superiores a 3 con las computadoras podemos estimar respuestas y crear esta habilidad, puede estimular la curiosidad, además puedo calcular operaciones y planear estrategias para resolver problemas puedo explicar procesos algoritmos.

Wenzellburger (h) destaca que cuando se usa la tecnología se da más atención al análisis de conceptos en lugar del cálculo de operaciones.

En la nueva reforma se sugiere el uso de la tecnología en la clase de matemáticas, se cree que son benéficos para la enseñanza de está. El diseño de software y lenguajes de programación tienen como objetivo ayudar a un mejor desarrollo conceptual.

Hitt (1994) propone el uso de programación para el tratamiento de algunos datos así como el lenguaje Logo para crear ambientes que propicien el aprendizaje de la geometría. Smith (1989), propone plantear problemas y resolverlos con programación BASIC ya que así se logra entender mejor los procesos.

Scott (1990) sugirió otros usos para las computadoras en la enseñanza por medio de software, el alumno podría ir a su velocidad y en enseñanza para alumnos con necesidades especiales también es recomendada ya que las explicaciones pueden darse una y otra vez.

Kaput (1986) sugiere la simulación como una la alternativa para aprender matemática.

Tall (1990), Hedi (1989) nos dan proyector donde se muestran modelos que proyectar donde la versatilidad en la conexión visual y otras representaciones aumentando el entendimiento conceptual.
Cedillo (1995) recomienda el uso de multi-media para la educación. Uno de los impedimentos para la masificar de computadoras es la falta de recursos tanto materiales como económicos también la falta de capacitación de la mayoría de los maestros, en esta área una alternativa que se considera como buena es el uso de la calculadora gráfica ya que al manejarla se crean habilidades semejantes a las necesarias en una computadora, dentro de los usos que se les ha dado a las calculadoras están elaborar gráficas de manera rápida y precisa, analizar las gráficas cambiando los intervalos y parámetros, trazando tangentes.

Algunos de los programas usados en la computadora sólo se deben de adecuar a las calculadoras y lograr los mismos resultados.

Godino (1992), propone el uso de guiones acompañados de la calculadora para una mejor comprensión de conceptos.
Balderas (1993a) apoya el uso de las calculadoras pues impedí que el alumno perciba sólo la parte mecánica del proceso y finaliza diciendo que con está herramienta se pueden diseñar ambientes que promuevan la investigación y exploración por parte de los alumnos y lograr que se responsabilizan de su aprendizaje.
Imaz (1989) sugiere el uso de las calculadoras pues así se entiende mejor las características de las funciones.
Wenzelburguer muestra varios estudios que parten de una idea constructivista donde se exploran el efecto de la visualización dinámica e interactica sobre la representación de grafica-geométrica a simbólica-algebráica y dan conclusiones que reportan es que a través de actividades adecuadas el alumno aprende a trazar curvas, entendimiento intuitivo de procedimientos. Además la utilidad de las calculadoras se pude resumir en que a) el alumno se concentra en el proceso de solución de problemas y no en la aritmética. b) explorar, desarrollar y reforzar conceptos incluyendo estimación, computación y aproximación, c) experimentar con ideas matemáticas y patrones y d) hacer calculo tediosos con datos de la vida real.

Las calculadoras tienen las siguiente ventajas sobre las computadoras:

1. permite ubicarse en un medio totalmente aritmético y no axiomático
2. su manejo es un antecedente natural a la computadora
3. el estudiante esta familiarizado más con calculadoras que con computadoras
4. cálculos complicados se pueden realzar de manera relativamente sencilla
5. la aparición natural de la idea de variable

6. El tipo de habilidades que desarrolla es la estación, reconocimiento de patrones, uso de literales para expresa algebraicamente un patrón de solución.
7. traducción de un enunciado verbal al lenguaje de las expresiones algebraicas

LA METODOLOGÍA QUE PROPONEN LOS ESTÁNDARES.

Antes de comenzar a describe las características de los Estándares queramos definir de manera breve lo que entendemos por estándar, creemos que es un criterio que se usa para juzgar la calidad del curriculum en matemáticas ó los métodos de evaluación entonces que los estándares son afirmaciones acerca de lo que se valoriza.

Los estándares curriculares se elaboraron en 1989 en Estados Unidos es un proyecto global desde preescolar hasta lo que equivale a tercero de preparatoria, el plan es integral ya que se parte de la idea que sólo así se podrá lograr una visón diferente de las matemáticas y un real cambio hacia ellas. Para describir los Estándares se dividen en 3 grandes grupos que son los de primaria a cuarto grado, de 5 a 8 grado y de 7 a 12 grados pues es a lo que nos dedicamos pero las divisiones interiores son sobre la misma linea y bajo las mismas características.

En los tres niveles hay 13 estándares teniendo como concidencia ver a las matemáticas como resolución de problemas, comunicación, razonamiento, se enfatiza en las conexiones matemáticas en la estimación y de aquí en adelante es según el nivel en que se encuentre los estándares que se elaboraron en el nivel de 9-12 se dedican a explicar cada una de las áreas de matemáticas como álgebra, funciones, trigonometría, geometría, cálculo, probabilidad y estadística.

Existen cinco metas principales que son:
1. Ser capaces de resolver problemas.
2. Aprender a comunicarse matemáticamente.
3. Aprender a razonar matemáticamente.
4. Saber valorar las matemáticas.
5. Tener confianza en su capacidad de hacer matemáticas.

Lo importante no esta en el contenido sino en el enfoque, la metodología de trabajo y en exponer al alumno a un gran número de experiencias.

Una de las recomendaciones de los estándares es que el alumno tenga destreza computacional a través de toda su estancia escolar todos tienen acceso a las calculadoras gráficas.

Se sugieren tópicos que reciben más atención y otros menos en este trabajo nos enfocamos exclusivamente a álgebra y funciones:

En álgebra:
Los Estándares cruciales se diseñaron con el fin de establecer un marco donde encuadrar la reforma matemática en la escuela durante los próximos años en Estados Unidos, aquí no se trata de copiar o imitar a los estándares sino mostrar la metodología sugerida por ellos para tomarla de base para el diseño de actividades, el análisis de habilidades y el tipo de evaluación para que en base a esto nosotros propongamos nuevas metodología reales en nuestro país.

Los Estándares manejan dos objetivos principales:

a) Crear una cultura matemática apoyada en calculadoras y computadoras.
b) Dar una nueva visión a la matemática adecuándola a los requerimientos del año 2000.

Los Estándares (1989), Pollak(1987), Lewis(1988) resaltan la importancia de formar profesionistas diferentes, pues en el futuro se requerirá profesionistas capaces de:

a) Plantear problemas y resolverlos con operaciones adecuadas
b) Conocer diferentes caminos para resolver problemas
c) Trabajo en equipo
d) Aplicar ideas matemáticas a problemas comunes y complejos
e) Enfrentar problemas que no tengan una sola solución

Se deben formar personas que tengan gusto por el aprendizaje, convertirlos en resolvedores de problemas dispuestos a explorar y crear conocimientos durante toda su vida.
Los Estándares sugieren la introducción de calculadoras y computadoras para fines ilustrativos, para procesar información y no como una máquina que sirva para hacer cálculos. La calculadora sirve para simplificar tareas y no para resolverlas.
Se sugieren que los estudiantes deben de resolver algoritmos con lápiz y papel contextualizados en situaciones problemáticas. También se sugiere el cálculo de aproximaciones en algunos casos y en otros cálculos precisos. Si existen rutinas se pueden elaborar rutinas con programas en la calculadora o computadora.
El estudiante debe de tener un aprendizaje participativo y no pasivo, todo contextualizado en una situación problemática.

CAPITULO TRES

ACTIVIDAD 1

Conocer algunas representaciones de la función cuadrática

TEMA: Función Cuadrática

SUBTEMA: Por medio de una situación problemática y su representación algebraica encontrar las representaciones tabular y gráfica de una función cuadrática obteniendo información a partir de ellas.

ALUMNOS: 4to de Bachillerato (15-16 años)

OBJETIVO: Capacitar a los alumnos para:

- Comprender que algunas situaciones problemáticas representan funciones cuadráticas.
- Graficar parábolas que se obtienen de representaciones tabulares.
- Relacionar gráficas y tablas de funciones cuadráticas.
- Reconocer las coordenadas de los puntos máximos y mínimos a través del análisis gráfico de funciones cuadráticas.
- Identificar las intersecciones con el eje de las abscisas de la gráfica de una función cuadrática y obtener sus coordenadas.
- Resolver desigualdades por el método gráfico.
- Obtener graficas a partir de su representación algebraica.
- Determinar el conjunto solución de un problema.
- Comprender el tipo de información que se obtiene a través de las representaciones tabular y gráfica de las funciones cuadráticas.
- Obtener la función dado el valor de la variable y viceversa.

PROCEDIMIENTO:

- Elaborar tablas y dibujar sus gráficas teniendo las expresiones algebraicas que las representan.
- Graficar funciones cuadráticas identificando puntos importantes como máximos, mínimos e intersecciones con el eje de las abscisas.
- Resolver desigualdades y dibujar el conjunto solución en un plano cartesiano.
- Identificar los rangos donde es posible la solución de una ecuación cuadrática a partir del enunciado de un problema.
- Proponer preguntas que se resuelven por medio del análisis de tablas, gráficas y expresiones algebraicas de funciones cuadráticas.

REQUISITOS PREVIOS:

Que el alumno maneje las diferentes representaciones de la función lineal, evaluación de expresiones algebraicas para un valor determinado, dibuje gráficas, elabore tablas, maneje la calculadora gráfica, de expresiones algebraicas y resuelva desigualdades.

METODOLOGÍA:

La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar las preguntas anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes. Al finalizar la sesión, el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo de la actividad, pero durante está contestará cualquier duda que surja en los equipos.

EVALUACIÓN:

Al finalizar el tema los alumnos contestarán un material similar a este en equipos de tres personas y un examen individual. La evaluación también incluirá las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante las sesiones.

ooooo

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA[1] 1

Un coche al frenar recorre un cierto número de metros hasta que queda completamente parado. Se obtuvo una expresión algebráica que representa el número de metros, en función de la velocidad, que tarda un Volkswagen en parar totalmente en un piso seco cuando se le aplica el freno y esta es:

$$\mathbf{d(v)=.005\ v^2 + .14v}$$

donde **d(v)** representa los metros que necesita un VW para estar completamente parado si se le aplica el freno en un piso seco y **v** la velocidad en kilómetros por hora a la que viaja el VW cuando se le aplica el freno.

Si el VW viaja a 60 kms/hr y frena, este queda completamente parado después de 26.4 mts; esto se puede calcular utilizando la expresión matemática d(v). (Se sustituye 60 en lugar de v y se obtiene d(v) a partir de esto). En general para calcular los mts requeridos para frenar se tiene que sustituir en $\mathbf{d(v)=.005\ v^2 + .14v}$ la velocidad a la que va el VW haciendo las operaciones necesarias, esto es, si se quiere saber la distancia mínima que necesita para frenar un VW a una velocidad de 60 kms/hr se sustituye en la expresión algebraica $\mathbf{d(v)=.005\ v^2 + .14v}$ el valor de 60 km en la siguiente manera:

$d(60)=.005(60)^2 + .14(60)$
$d(60)=.005(3600)+8.4$
$d(60)=18+8.4$
$d(60)=26.4$

Esta sustitución se puede usar para cualquier velocidad dada, siguiendo el procedimiento anterior contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos metros necesita un VW para frenar y quedar completamente parado si va a una velocidad de 50 kms/hr ?

---

b) ¿Cuántos metros necesita un VW para frenar y quedar completamente parado si viaja a una velocidad de 20, 10, 35 y 70 km/hr?

d(20)=

d(10)=

d(35)=

d(70)=

Continuando el procedimiento anterior completen la tabla siguiente:

Nota: Las velocidades incluídas en la tabla están dadas de 10 kms/hr en 10 kms/hr desde que el coche esta parado v=0 hasta que el coche va a una velocidad de 130 kms/hr v= 130.

Relación entre la velocidad en km/hr (v) a la que va un VW y los metros que necesita para quedar completamente parado d(v) después de aplicar el freno en un piso seco.

velocidad en kms/hr (v)	mts. que tarda en quedar el coche completamente parado d(v)
0	$d(v)= .005\ (0)^2 + .14\ (0) = 0$
10	$d(v)= .005\ (10)^2 + .14\ (10) = 1.9$
20	
30	
40	
50	
60	
70	
	43.2
	53.1
100	
120	88.8

Si d(v) = 1.9 entonces v= 10 esto significa que si un VW va a una velocidad de 10 km/hr necesita 1.9 metros para detenerse en un piso seco.

3.- Con los datos que obtuvieron en la tabla contesten las siguientes preguntas:

a) Si hay un obstáculo a 20 mts ¿Cuál es la velocidad máxima a la que puede ir un VW para no chocar contra él ?

Si d(v) debe ser menor que 20 ¿ Cuánto vale v ?

____

¿ Anoten cómo obtuvieron el resultado ?

____

b) ¿Cuál es la velocidad máxima a la que puede un VW ir para quedar totalmente parado antes de chocar con un camión que se encuentra parado a 50 mts?

____

¿ Cómo obtuvieron la respuesta ?: ______________________________

4.- Calculen d(20) y d(30) y encuentren su diferencia:

d(20)=

d(30)=

Su diferencia d(30)-d(20)=

Anoten el significado de d(30) - d(20) ______________________________

Esta diferencia significa que la distancia adicional que necesita un VW para quedar completamente parado después de que se le aplicó el freno si va a una velocidad de 30 km/hr en lugar de ir a una de 20 km/hr es de ______________________________

Ahora calculen otras diferencias:

d(40) - d(30) =

d(50) - d(40) =

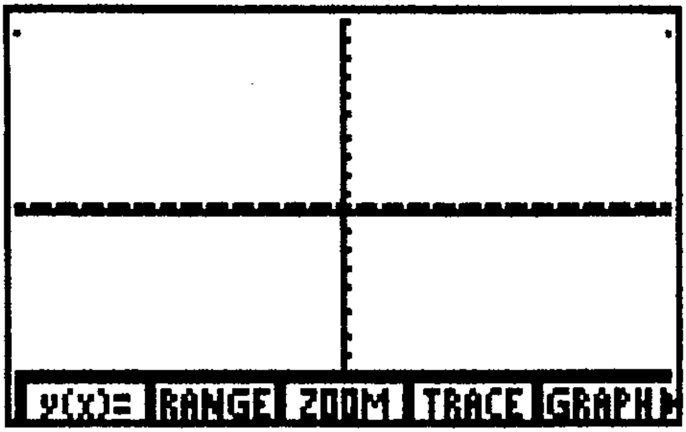
d(120) - d(110) =

d(110) - d(100) =

Como se puede ver al calcular las diferencias estas no son constantes, por lo tanto podemos decir que las distancias adicionales que se requieren para que un VW frene a diferentes velocidades no siempres las mismas.

5.- Grafiquen la función $d(v)=.005\,v^2 + .14v$ en el siguiente plano cartesiano.

Los rangos sugeridos son: **xmin= -100 xmax=100 xscl=10**
ymin= -10 ymax=10 yscl=1



Esta es la grafica de d(v) para cualquier valor de v en el ejercicio que estamos exponiendo d(v) queda restringuido para cierto intervalo esto es debido a que la velocidad (v) debe ser positiva ó cero (porque no existen velocidades negativas) y los metros para frenar deben ser positivos también (porque el coche no puede frenar mts negativos.

6.- Contesten las siguientes preguntas.

a) Señalen con un color azul en la gráfica que parte de está tiene estas características.

b) Marquen en la gráfica con un color rojo los valores que no pueden tomar (v) y d(v) por las caracteríasticas de este problema.

c) ¿ Por qué la gráfica solo tiene sentido para valores positivos o cero de v y de d(v) ? ____
____
____

d) Mientras la velocidad del coche va disminuyendo ¿qué pasa con los metros que se necesitan para frenar? (son mayores ó menores los valores de d(v))
____

¿Por qué ?____

e) Encierren en un cuadro las coordenadas del punto que representa la velocidad y la distancia máxima que pueden tomar v y d(v) y en un triángulo las coordenadas de la velocidad y distancia mínima que necesita un VW para frenar es decir el punto mínimo v y d(v) .

¿Cómo la encontraron? ____

f) ¿Cuáles son las coordenadas de estos puntos? pto máx (   ) pto mín (   )

¿Cómo la encontraron?____

g) ¿Qué significa la distancia máxima ?

Respuesta:____

h) ¿ Qué significa la distancia mínima ?

Respuesta: ____

A las funciones del tipo $d(v)=.005\ v^2 + .14v$ se les llama funciónes cuadráticas ya que tienen la característica que el exponente mayor es dos y tienen una solo variable.

7.- Usando la tecla **TRACE** de la calculadora encuentren en la grafica:

a) d(50)=____

Expliquen con sus propias palabras qué significa d(50) ___________________
____

b) d(3000)=____
Expliquen con sus propias palabras qué significa d(3000) _________________
____

¿ Es esto posible en nuestro ejemplo ? __________ Por qué ______________
____

c) ¿Cuál es el valor mínimo y el valor máximo que puede tener la velocidad de un VW en teoría?
____

¿ Por qué ? ____

d) ¿Cuáles son los valores mínimo y máximo para la distancia (d(v)) que necesita un VW para frenar ? ____
____

e) Si voy a 100kms/hr ¿Cuál es la distancia mínima que necesita un VW para estar totalmente parado después de aplicarle el freno ?

____

8.- Enuncien una pregunta que se pueda contestar usando la tabla de la pregunta 2 .

____
____
____

9.- Enuncien una pregunta que se pueda contestar usando la gráfica de la pregunta 5.

____
____
____

10.- Sabemos que la expresión algebraica $d(v)=.005\ v^2 + .14v$ me representa el número de metros que necesita un VW para quedar completamente parado en un piso seco, a partir de esta expresión contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la distancia que recorre un VW para estar completamente parado si va a una velocidad de 50 kms/hr ?

d(50)=

La distancia que recorre en metros es de _____ , es decir, si un Volkswagen va a 50 km/hr necesita _____ mts para detenerse.

b) Si se necesita una distancia de 35 mts para frenar ¿Cuál es la velocidad máxima a la que debe ir un VW ?

Como d(v) es la distancia y esta es 35 mts se puede escribir como d(v)= 35 que es lo mismo que la ecuación $35=0.005\ (v)^2 +0.14\ (v)$.

Para encontrar v debemos resolver la ecuación anterior, existen varias formas de resolver esta ecuación por ahora veremos dos:

La primera forma se llama solución aproximada y consiste en obtener el resultado consultando una tabla que me muestre los valores de la función. En la tabla de la pregunta 2 pueden ver que la información que requerimos no la tenemos pero se sabe que la respuesta esta entre 70 km/hr y 80 km/hr ya que si v= 70 km/hr entonces d(v)= __________ y si v= 80 km/hr entonces d(v) = __________ y el valor de 35 esta dentro de esos dos valores, entonces podemos decir que aproximadamente debe de ir a una velocidad menor de 80 km/hrs y mayor de 70 km/hr.

La segunda forma es encontrar la solución utilizando la calculadora.

Se introduce en la calculadora la expresión $35=0.005\ (v)^2 + 0.14\ (v)$ y usando la tecla SOLVE el resultado que obtengo es que la solución es 70.8 km/hr.

Es decir, para que un VW pueda frenar dentro de una distancia de 35 mts a lo más debe de ir a 70.8 km/hr.

c) ¿Cuál es la distancia que recorre un VW para estar completamente parado si va a una velocidad de 150 km/hr?

$d(150)= 0.005\ (150)^2 + 0.14\ (150)$
$d(150)= 133.5$

Es decir si van a ____ necesitan 133.5 mts para que un VW quede completamente parado.

d) ¿Cuál es la distancia que necesitan para frenar si va a 0 km/hr?

La distancia para frenar es cero pues el coche esta parado.

La respuesta se puede obtener de la tabla, la calculadora y la gráfica.

e) ¿Cuál es la velocidad máxima a la que pueden ir para que un Volkwagen frene a lo más en 90 mts?

Para contestar esta pregunta debemos de resolver la siguiente desigualdad:

$$d(v) \leq 90 \quad ó \quad 0.005\ (v)^2 + 0.14\ (v) \leq 90$$

para resolver esta desigualdad pueden utilizar sus calculadoras, primero resolver la ecuación para la igualdad y luego fijarse para qué valores a la derecha ó izquierda se cumple la desigualdad.

Otra manera de resolverla es buscar los valores en la tabla, es decir si v= 120 km/hr entonces d(v)= 90 mts la interpretación es: si un VW va a 120 km/hr necesita 90mts para frenar entonces a lo más deben de ir a 120 km/hr.

11.- ¿ Cuál es la distancia mínima que necesita un VW para frenar si va a una velocidad de por lo menos 100 km/hr?

$$d(v) \leq 0.005\ v^2 + 0.14\ v \quad \text{para} \quad v \geq 100$$

Si resuelven esta desigualdad con sus calculadoras o viendo en la gráfica obtienen que d(v)=64 mts entonces si un VW va a una velocidad de 100 km/hr ó más km/hr, necesita un mínimo de 64 mts para detenerse.

Así como esta situación existen otras más, las cuales pueden analizarse de igual manera.

d(v) representa un modelo matemático de la forma $f(x)=ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), donde a,b y c están determinadas por las condiciones del problema, x es una variable y f(x) una función que se llama función cuadrática de una variable.
Las funciones tienen un valor de entrada llamado dominio (v) y una valor de salida llamado rango d(v).

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2[2]

Un jugador de béisbol en promedio batea una pelota a una velocidad de 30mts/seg si está le llega a una altura de 1.50 mts del piso. Bajo estas condiciones la altura que puede alcanzar la pelota una vez bateada en un tiempo determinado esta dada por la expresión algebraica :

$$h(t)= - 4.9\, t^2 +30\, t + 1.5$$

1.- Utilizando sus calculadoras completen la tabla de valores que viene a continuación mostrando la altura en metros que alcanza la pelota después de haber transcurrido 1seg, 2seg, 3seg, 4seg, 5seg, 6seg, 7seg, 8seg, 9seg y 10 seg.

Tabla para obtener la elevación de una pelota a un tiempo determinado bajo las condiciones iniciales

t tiempo	h(t) elevación de la pelota
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

FALTA PAGINA

No. 52.

Pregunta 3:____

Respuesta:____

7) Elaboren 3 preguntas que puedan contestar usando la gráfica

Pregunta 1:____

Respuesta:____

Pregunta 2:____

Respuesta:____

Pregunta 3:____

Respuesta:____

8) Usando la función $h(t) = -4.9\,t^2 + 30t + 1.5$ contesten las siguientes preguntas. Señalando de dónde obtuvieron la respuesta si de una tabla, una gráfica o por medio de la expresión algebraica.

Contesten ¿por qué eligieron esa opción?.
a) ¿ A los 2seg que fue bateada la pelota, qué altura tenía la bola?
Respuesta:____
La información la obtuvieron de:__________________________

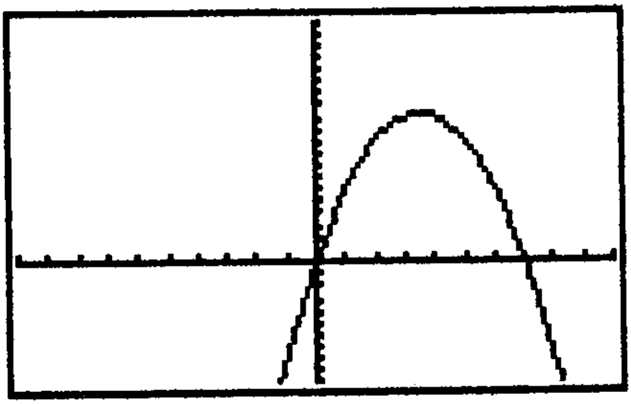
b) ¿A partir de qué momento alcanza la pelota más de 40 mts de altura después de ser bateada?
Respuesta:____
La información la obtuvieron de: __________________________

c) ¿A partir de qué momento la pelota alcanza más de 35 mts de altura después de ser bateada?
Respuesta:____
La información la obtuvieron de:__________________________

d) ¿Cuál es la altura de la pelota cuando han transcurrido cero segundos ?
Respuesta:____
La información la obtuvieron de:__________________________

e) ¿A partir de qué momento la pelota alcanza menos de 50 mts?
Respuesta:____
La información la obtuvieron de:__________________________

9) Usando la siguiente gráfica contesten lo que se les pide:



RANGO DE LA GRÁFICA

Xmin = -10
Xmax = 10
X scl = 1
Y min= -100
Y max = 100
Y scl = 10
X res = 1

Si el eje de las x me representa el tiempo en segundos y el eje de las y la altura en mts.

a) Señala con un color rojo sobre la gráfica ¿Qué punto me representa lo que sucede en el tiempo 2 seg? y llámalo A

b) Las coordenadas del punto A son:______________________________

c) Señala con un color azul. ¿Cuáles puntos determinan una altura de 20mts? y llámalo B

d) Las coordenadas del punto B son:______________________________

e) Tracen en la gráfica con un color amarillo la zona que me representa que la pelota está a una altura a lo más de 30mts.

f) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que me indican que la pelota va hacia arriba?

Justifica tu respuesta:____

g) ¿En que situación se encuentra la pelota entre los puntos A y B?

Justifica tu respuesta:____

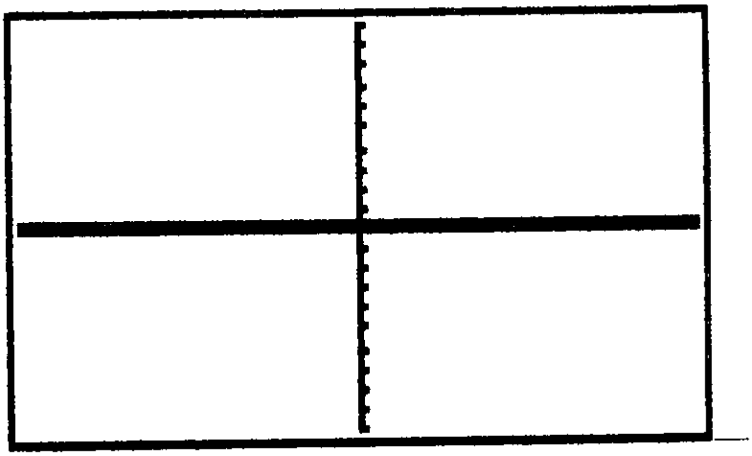
TAREA ACTIVIDAD 1

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 3[3]

El ingreso R(x) (en millones de dólares) que un gran negocio hace al vender x concesiones está dado por la expresión algebraica

$$R(x) = -10 + 10x - x^2$$

1.- Con sus calculadoras grafiquen R(x) y hagan un dibujo eligiendo la escala adecuada.



RANGO SUGERIDO:

xmin= xmax= xscl=

ymin= ymax = yscl=

2.- Completen la tabla del modelo anterior comenzando con 0 concesiones y hasta 10 concesiones.

Tabla que muestra el ingreso en millones de dólares que se obtienen al vender x concesiones.

x	R(x)
número de concesiones	ingreso en millones de dólares
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

3.- Usando el modelo algebraico, la tabla ó gráfica respondan las siguientes preguntas, justifiquen su respuesta:

a) Encuentren R(x) cuando x=6

es decir R(6)=

describan con sus palabras el significado de R(60) ______________________

____

b) Encuentren R(x) cuando x=10

es decir R(10)=

describan con sus palabras el significado de R(10) ______________________

____

c) Encuentren x cuando R(x)= 11

es decir resuelve $11 = -10 + 10x - x^2$

describan con sus palabras el significado de $11 = -10 + 10x - x^2$

____

¿ Cómo lo resolvieron ?

---

d) Encuentren x cuando $R(x)= 0$

es decir resuelvan $0 = -10 + 10x - x^2$

describan con sus palabras el significado de $0 = -10 + 10x - x^2$

¿ Cómo lo resolvieron ?

---

e) ¿Qué valores de x hacen que $R(x) < 15$ es decir resuelvan
$-10 + 10x - x^2 < 15$

Justifiquen su respuesta:________________________________

f) ¿Cómo es R(x) cuando $x > 20$

Justifiquen su respuesta:________________________________

4.- a) Encuentren las diferencias de R(x) para valores consecutivos de x y anotelas. Es decir si:

x=0 R(0) =
x=1 R(1) =

la diferencia es R(1) - R(0) =

Las diferencias de todos son:

---

b) Existe alguna constante en las diferencias ____________________

c) ¿Existe un punto mínimo ó un punto máximo? ____________________

d) ¿Cuáles son las coordenadas de ese punto?

ACTIVIDAD 2

Comparar dos tablas que me representan la misma función cuadrática, así como sus gráficas.

TEMA: Función Cuadrática.

SUBTEMA: Elaboración de gráficas a partir de tablas de funciones cuadráticas.

ALUMNOS: 4to de Bachillerato (15-16 años)

OBJETIVO: Que el alumno grafique los resultados obtenidos en una tabla que se obtuvo de un experimento y la compare con otra tabla encontrada por medio de l la expresión algebraica teórica.

PROCEDIMIENTO:

- Dada una table elaborar una gráfica.
- Dada una expresión algebraica obtener su tabla.
- Comparar la tabla experimental con la tabla obtenida con la expresión algebraica analizando sus similitudes.
- Contestar preguntas relacionadas con los datos de las tablas y contrastar las similitudes.

REQUISITOS PREVIOS:

Que el alumno comprenda las diferentes representaciones de la función lineal, evalúe expresiones algebraicas dado un valor, dibuje gráficas, elabore tablas, maneje la calculadora gráfica, interprete de manera verbal expresiones algebraicas y resuelve desigualdades y haya resuelto la actividad anterior.

METODOLOGÍA:

La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes, al finalizar la sesión el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo pero durante la actividad contestará cualquier duda que surja en los equipos

EVALUACIÓN:

Al finalizar el tema se les dará un material similar a este para que en equipos de tres personas lo realicen. La evaluación dependerá de las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante cada sesión así como un examen individual al finalizar el tema.

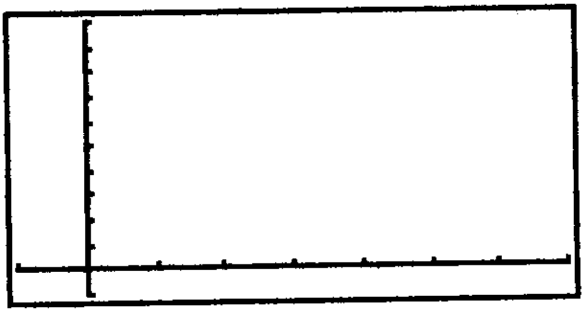
SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 4[4]

Algunos biólogos se pusieron a investigar si existía alguna relación entre el número de insectos y la temperatura del ambiente en cierto lugar, para ello tomaron muestras de insectos y las expusieron a varias temperaturas reportando la siguiente tabla.

VARIACIÓN DEL NÚMERO DE INSECTOS EN RELACIÓN A DIFERENTES TEMPERATURAS

temperatura	número de insectos
0	20
10	620
20	950
30	920
40	670
50	75

1.- Elaboren una gráfica con los datos anteriores, hagan un bosquejo en el siguiente plano cartesiano y uniendo los puntos.



Los rangos sugeridos son:

```
RANGE
 xMin=-10
 xMax=70
 xScl=10
 yMin=-100
 yMax=1000
 yScl=100
Y= RANGE ZOOM TRACE GRAPH
```

d) ¿ Cuáles son las coordenadas del punto que intercepta el eje x ?

____

¿ Qué significa esto ? (Respecto a sus raíces)

____

2.- Con los datos de la gráfica contesten las siguientes preguntas:

a) La gráfica representa una función ____________________
¿Porqué? ____

b) El valor máximo tiene coordenadas __________ y me representa _________
____

c) Los valores que tienen sentido para este problema son _________
¿ Porque? ____

3.- Un modelo matemático que representa la información que viene en la tabla es $m(t) = -1.5\ t^2 + 75t + 20$ donde t es la temperatura y m(t) es el número de insectos.

a) Elaboren una tabla con los mismos valores de temperatura (t) de la tabla anterior usando la expresión algebraica.

VARIACIÓN DEL NÚMERO DE INSECTOS EN RELACIÓN A DIFERENTES TEMPERATURAS

temperatura	m(t)
0	
10	
20	
30	
40	
50	

b) Comparen las dos tablas anteriores, una obtenida de manera experimental y la otra de manera teórica y contesten:

Para tiempo iguales ¿Qué tanto se parecen las tablas?

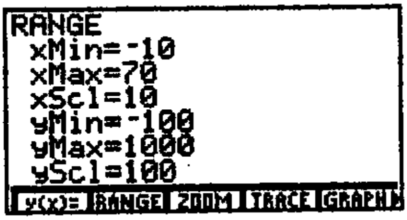
____

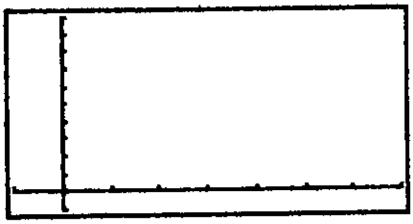
____

____

____

Dibujen la gráfica de m(t) , en el siguiente plano cartesiano.





¿ Qué similitudes ó diferencias pueden notar comparando las dos gráficas ?

____

____

____

____

Describan con sus palabras el significado de $m(0) = 20$

Describan con sus palabras el significado de $m(25)= 957.5$

Describan con sus palabras el significado de $p(35) = 807.5$

Encuentren el valor de t si $m(t) = 800$

Describan el significado de la expresión anterior.

Encuentren el valor de x en $m(x) < 400$

Describan el significado de la expresión.

Encuentren la temperatura para la cual el número de insectos alcanza un valor máximo.

Conclusiones los resultados que te ofrecen las expresiones algebraicas son buenos acercamientos de los que puedes obtener de manera experimental.

ACTIVIDAD 3

Encontrar una expresión algebraica para una función cuadrática

TEMA: Función Cuadrática.

SUBTEMA: Dada una condición encontrar una expresión algebraica que me represente una función cuadrática.

ALUMNOS: 4to de Bachillerato (15-16 años)

OBJETIVO: Qué el alumno a través del análisis de una situación problemática ó dados tres puntos de la función cuadrática, una tabla ó una gráfica sea capaz de ir construyendo una expresión algebraica que represente una función cuadrática.

PROCEDIMIENTO:

- Dada una situación problemática y el área de los cuadrados y rectángulos encontrar la expresión cuadrática que la representa.
- Dados tres puntos que pertenecen a una función cuadrática encontrar su expresión algebraica.
- Dada una tabla encontrar la expresión algebraica que la represente.
- Dada una gráfica encontrar una función cuadrática que la represente.

REQUISITOS PREVIOS:

Cumplir los requisitos de la actividad uno y haber realizado las actividades 1 -2

METODOLOGÍA:

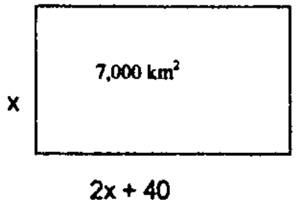
La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes, al finalizar el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo durante la actividad contestará cualquier duda que surja en los equipos.

EVALUACIÓN:

Al finalizar el tema se les dará un material similar a este para que en equipos de tres personas lo realicen y entreguen. La evaluación dependerá de las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante cada sesión así como un examen individual al finalizar el tema

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 5 [5]

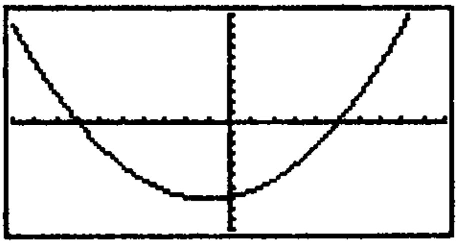
1. - ¿ Cuáles son las dimensiones de un terreno rectángular ? Si su área es de 7, 000 km^2. Y el largo es el doble del ancho más 40 mts. Encuentra su gráfica.



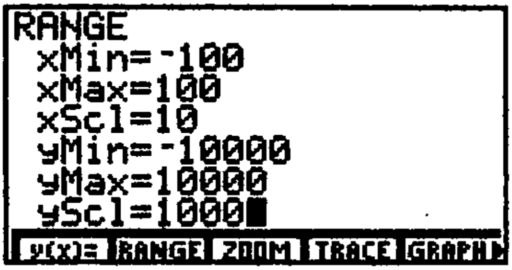
Sabemos que A= b * h y además que la base = 2x + 40 y la altura = x
Y el producto será el área, esto es $(2x + 40)(x) = 7,000$
Resolviendo el producto encontramos que $2x^2 + 40x = 7,000$
Igualando a cero encontramos que $2x^2 + 40x - 7,000 = 0$
Que es la ecuación.

Esta situación la podemos cambiar y en lugar de igualarla a cero para encontrar los valores que me dan la solución de la ecuación la igualamos a f(x) y nos da la representación funcional del problema.

Con la calculadora gráfica que me representa la función cuadrática y al hacer un bosquejo en el siguiente plano cartesiano lo que encontramos es:



Los rangos sugeridos son



Para encontrar las soluciones de f(x) deben encontrar los valores de x que cumplan que f(x)=0 esto es buscar cuando la función cruza el eje x. Usando la tecla de TRACE encontramos que para y=0 x= ____________ y para y = 0 x= _________________ en este problema en particular solo debemos tomar los valores de x positivos, no puedo tomar los valores negativos porque x representa una medida y no tiene sentido los largos y anchos negativos.

2.- A veces resulta difícil encontrar las expresiones algebraicas que me representen situaciones problemáticas, existen algunos algoritmos que me ayudan a encontrar las funciones cuadráticas requeridas.

Un algoritmo es:

Si tengo tres puntos de una parábola puedo encontrar su expresión algebraica siguiendo los pasos dados a continuación:

a) Sean los puntos (1,8) (3,20) (-2, 5) las coordenadas de tres puntos que pertenecen a una parábola. Encuentre la expresión algebraica que los incluya y además representa a la parábola también:

La función cuadrática tiene la forma $f(x)= ax^2 + bx + c$ donde la primera coordenada de los puntos me determina el punto x y el valor de la segunda coordenada nos da el valor de f(x), sustituyendo las tres coordenadas tenemos:

$8 = a(1)^2 + b(1) + c$	si el punto es (1,8)
$20 = a(3)^2 + b(3) + c$	si el punto es (3,20)
$5 = a(-2)^2 + b(-2) + c$	si el punto es (-2,5)

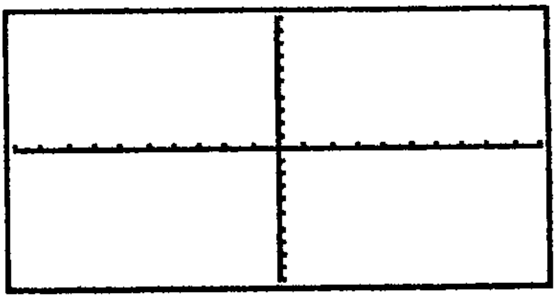
entonces

8 = a+b+c
20 = 9a + 3b + c
5 = 4a - 2b + c

Ahora tengo un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas con sus calculadoras resuelvan el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y los resultados que me dan son a = 1 b= 2 y c= 5 entonces la función que me cumple que los tres puntos anteriores pertenezcan a la función cuadrática es:

$f(x) = x^2 + 2x + 5$

Para corroborar que efectivamente los tres puntos pertenecen a la parábola, gráfiquen f(x) y localicen los puntos, esto es,



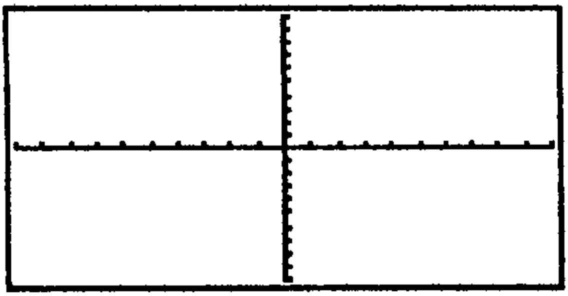
Que rangos sugirieron:

xmin	ymin
xmax	ymax
xscl	yscl

Con un color rojo marca los tres puntos que les dieron al inicio para corroborar que la respuesta esta correcta.

b) Determinen la función cuadrática que me representa las tres coordenadas siguientes:

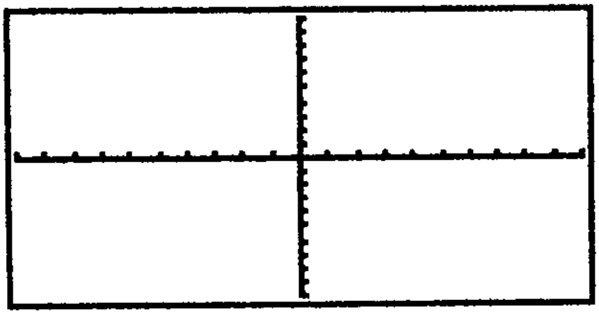
1.- Sean (0, 10) (1, 6) (-2, 24) tres puntos que pertenecen a una parábola. Encuentren la expresión algebraica, dibujen la gráfica y marquen en ella los tres puntos que se indican.



Los rangos sugeridos son:

xmin ymin
xmax ymax
xscl yscl

B) (1, -1) (-3, -33) (2, -8)



Los rangos sugeridos son:

xmin ymin
xmax ymax
xscl yscl

Dada una tabla encontrar la expresión algebraica que la represente

1.- La siguiente tabla muestra los puntos que pertenecen a dos función cuadrática f(x) y g(x).

x	f(x)	g(x)
-10	143	-57
-8	99	-29
-6	63	-9
-4	35	3
-2	15	7
0	3	3
2	-1	-9
4	3	-29
6	15	-57
8	35	-93

Siguiendo el proceso anterior encuentren las expresiones de f(x) y g(x) que las representen. Además elaboren una gráfica de cada una de ellas. Chequen que existan por lo menos tres puntos que están en la tabla.

Puntos que eligieron para f(x)

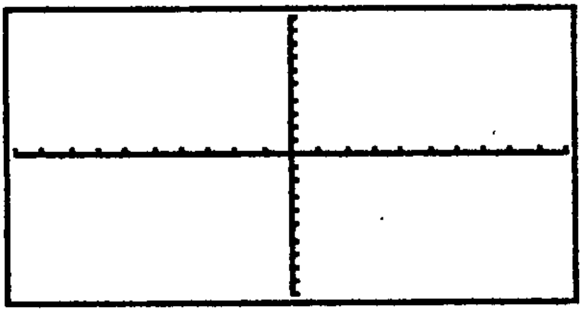
A (   )
B (   )
C (   )

Procedimiento:

El valor de a=   b=   c=

la función f(x) = ______________________________

La gráfica que la representa es:



¿Qué rangos sugieren? ____
____

Los puntos que eligieron para g(x) son

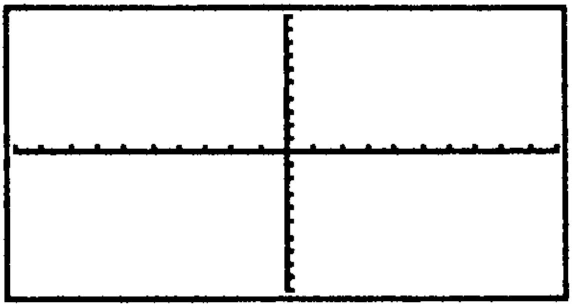
A (   )
B (   )
C (   )

Procedimiento:

El valor de a=   b=   c=

la función g(x) = ____

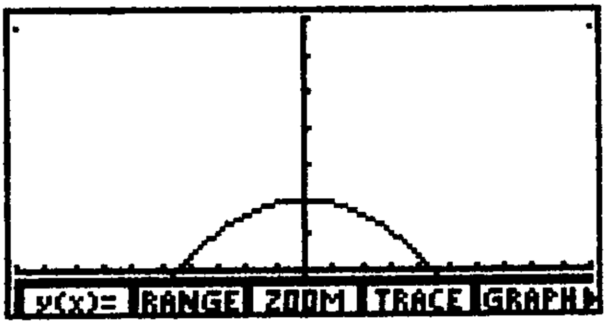
La gráfica que la representa es:

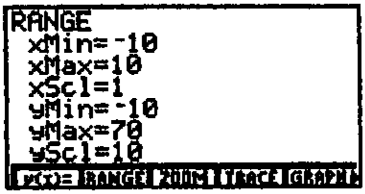


¿Qué rangos sugieren? ____
____

Dada las siguientes gráficas encuentren las expresiones algebraicas que las representen encontrando tres puntos que pertenezcan a ellas.

1.- La siguiente gráfica es una parábola localicen tres puntos que pertenezcan a ella si saben que los rangos son los dados a continuación.



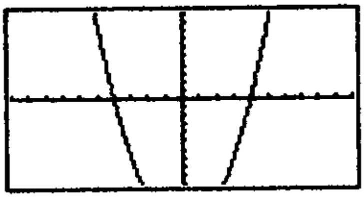


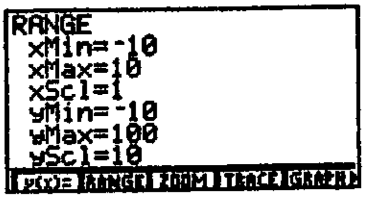
Los puntos que encontraron son:

A= (   )
B= (   )
C= (   )

Utilizando el método anterior encuentren la expresión algebraica que la representa.

2.- La siguiente gráfica es una parábola localicen tres puntos que pertenezcan a ella, si saben que los rangos son los dados a continuación.





Los puntos que encontraron son:

A= (   )
B= (   )
C= (   )

Utilizando el método anterior encuentren la expresión algebraica que la representa.

Conclusión :
Existen varias maneras de encontrar la expresión algebraica de una función cuadrática, si me dan un enunciado planteo el problema y la obtengo, si me dan tres puntos ya sea por medio de una gráfica, una tabla ó simplemente las coordenadas de ellos, el sistema de las ecuaciones simultáneas que me dan como resultado los valores de a, b, c y encuentro la función.

ACTIVIDAD 4

Características gráficas que se obtiene al cambiar los parámetros de una función cuadrática

TEMA: Función Cuadrática

SUBTEMA: Cambio de parámetros y sus representaciones gráficas

ALUMNOS: 4to de Bachillerato (15-16 años)

OBJETIVO: Capacitar a los alumnos para:

- Identificar los parámetros de funciones cuadráticas
- Modificar los parámetros de funciones cuadráticas
- Identificar los cambios gráficos al modificar los parámetros
- Identificar las variaciones que sufren los puntos máximo ó mínimo en una función cuadrática al cambiar sus parámetros.
- Identificar que sucede cuando alguno de los parámetros es cero, positivo y negativo.

PROCEDIMIENTO:

- Dibujar gráficas de funciones cuadráticas cambiando diferentes parámetros.
- Gráficar funciones cuadráticas identificando puntos importantes como máximos, mínimos e intersecciones con el eje de las abscisas, viendo los cambios que ocasionan al cambiar los parámetros.
- Describir las características de las funciones cuadráticas cuando se cambian los parámetros de positivos a negativos.
- Concluir al finalizar cada cambio de parámetros las características más importantes.
- Graficar los parámetros cuando estos valen cero e identificar las consecuencias de esto.

REQUISITOS PREVIOS:
Los solicitados en la Actividad 1 y haber cubierto la actividad 1, 2 y 3

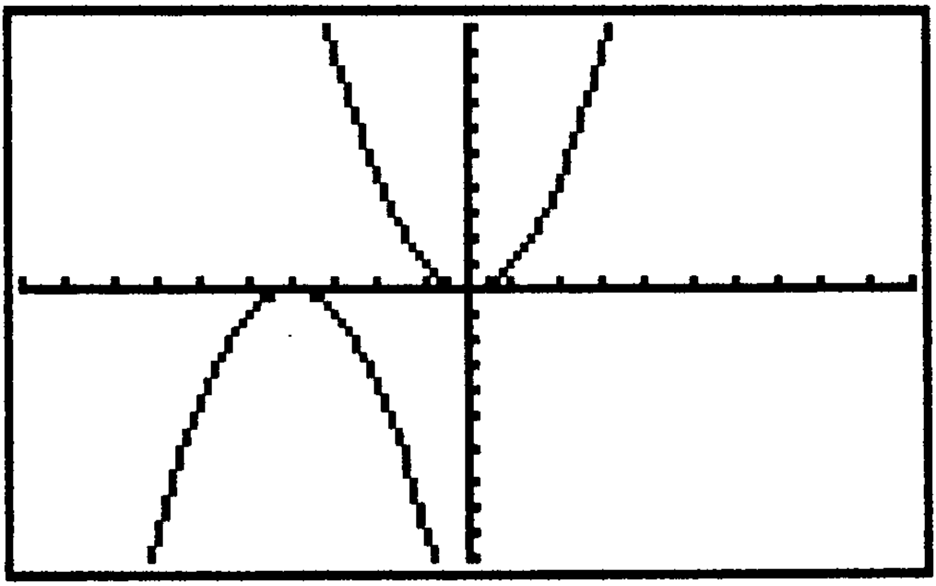
METODOLOGÍA:
La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes, al finalizar el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo pero durante la actividad contestará cualquier duda que surja en los equipos

EVALUACIÓN:

Al finalizar el tema se les dará un material similar a este para que en equipos de tres personas lo realicen y entreguen. La evaluación dependerá de las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante cada sesión así como un examen individual al finalizar el tema.

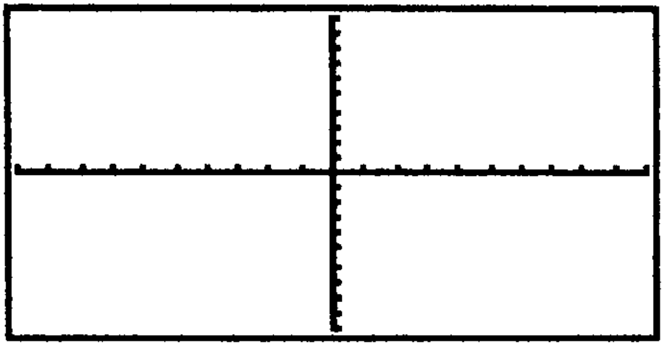
En esta actividad verán cuales son los cambios de las funciones cuadráticas de la forma $f(x)= ax^2 + bx + c$ que se generan al cambiar los valores de los parámetros a, b y c.

Las gráficas de las funciones cuadráticas son curvas simétricas llamadas parábolas y se ven de la siguiente manera:



Eje de simetría es la recta vertical que pasa por el vértice y divide a la curva en dos ramas simétricas.
Cualquier par de puntos de la parábola cuyas abscisas $x1$ y $x2$ son simétricas con respecto al eje de la parábola (equidistantes de él) tienen ordenadas iguales.

Debemos de notar que si doblamos la parábola las dos ramas de ella coinciden y los puntos quedan uno encima del otro.



Vértice: El punto donde la parábola intersecta a su eje de simetría se llama vértice de la parábola, si una parábola se abre hacia arriba su vértice es el punto más bajo de la curva y se dice que es su punto mínimo, si una parábola se abre hacia abajo su vértice es el punto más alto de la curva y se dice que es su punto máximo.

Modificando el coeficiente a de la función $f(x)= ax^2+bx+c$

Para valores de a negativos (a<0)

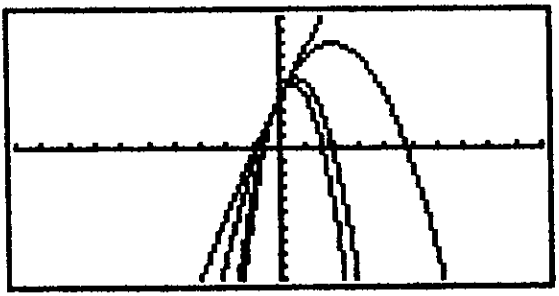
Si en un plano cartesiano graficamos las siguientes parábolas que tienen la característica que todas tienen el parámetro a menor que 0 podremos notar cuales son los cambios que me produce una a negativa.

Esto es, por medio de la variación del parámetro a del término cuadrático ax^2 en la función $f(x)= ax^2 +bx + c$.

Dadas las siguientes funciones

$f(x)= -4 x^2 +4 x + 4$ $g(x)= -3x^2 +4x +4$

$p(x)= -0.2 x^2 +4x+4$ $w(x)= - 1x^2 +4x+4$



Coloca en cada parábola la función a la que pertenece

Los rangos sugeridos son xmin=-10 xmax=10 ymin=-10 ymax=10

Del lado derecho de cada función anoten las características que a su consideración juzguen importantes. Marquen las similitudes y diferencias que vayan encontrando entre las funciones.

EXPRESIONES CARACTERÍSTICAS

$f(x)= -4\,x^2 +4\,x + 4$ ______________________________

$g(x)= -3x^2 +4x +4$ ______________________________

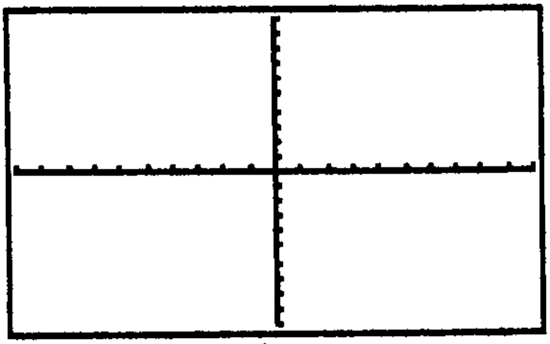
$p(x)= -0.2\,x^2 +4x+4$ ______________________________

$w(x)= -\,1x^2 +4x+4$ ______________________________

Si deciden experimentar con otra función escríbanla ______________

¿ Qué características tiene? ______________________________

Dibujen sobre un mismo plano cartesiano un bosquejo de todas las gráficas con un color diferente en cada una.

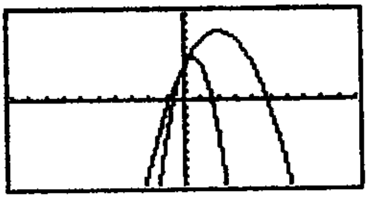


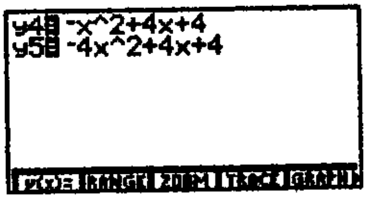
Conclusiones para a < 0

Si a< 0 la parábola

Tiene un punto mínimo ó un máximo ______________________________

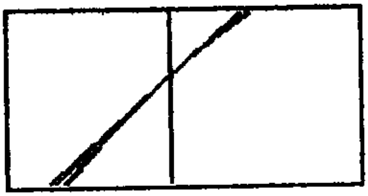
Analicen las dos parábolas siguientes y contesten:





A medida que el coeficiente a disminuye, la parábola se hace más ancha ó más delgada:______________________ Porqué ________________

Haciendo un acercamiento a un punto que parece común encontramos la gráfica siguiente



Las gráficas anteriores, ¿tienen un punto en común? ____ ¿cuál?__________

Si a_1 es un primer valor del coeficiente de x^2 y a_2 es un segundo valor del coeficiente entonces:

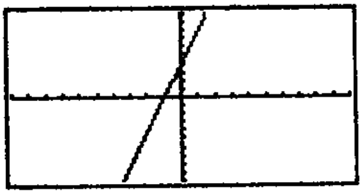
Con respecto a la anchura. ¿Qué pasa cuando $a_1 > a_2$? ____________________

Con respecto a la anchura. ¿Qué pasa cuando $a_1 < a_2$? ____________________

PARA CUANDO a=0

¿ Qué pasa si a= 0 ? la parábola pierde el coeficiente de la x^2

Vamos a graficar la función $f(x) = 0\,x^2 + 4x + 4$ con un rango estándar, esto es



Con la gráfica contesten las siguientes preguntas:

EXPRESIÓN ________________________________ CARACTERÍSTICAS

$f(x) = 0\,x^2 + 4x + 4$ ____

f(x) ¿es una función?____

¿de que tipo ? ____

CONCLUSIONES CUANDO a=0

Qué pasa cuando a=0 ____

Cómo se le llama a este tipo de función______________________________

Para valores positivos de a (a>0)

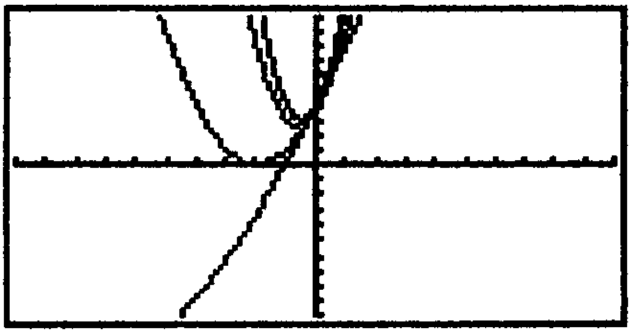
Si en un plano cartesiano graficamos las siguientes parábolas que tienen la característica que todas tienen el parámetro a mayor que 0 podemos notar cuales son los cambios que me produce una a positiva.

Esto es, por medio de la variación del parámetro a del término cuadrático ax^2 en la función $f(x)= ax^2 +bx + c$.

Dadas las siguientes funciones

$f(x)= 4x^2 +4x + 4$ $g(x)=3x^2 +4x +4$
$p(x)=0.2x^2 +4x+4$ $w(x)= 1x^2 +4x+4$

Obtenemos su gráfica para un rango estándar y obtenemos



Por medio de la variación del parámetro a del término cuadrático ax^2 en la función $f(x)= ax^2 +bx + c$, elaboren un bosquejo de las gráficas que obtuvieron en la calculadora.

Del lado derecho de cada función anoten las características que a su consideración juzguen importantes. Marquen las similitudes y diferencias que vayan encontrando entre las funciones.

<u>EXPRESIONES</u> <u>CARACTERÍSTICAS</u>

$f(x)= 4x^2 +4x + 4$ ________________________________

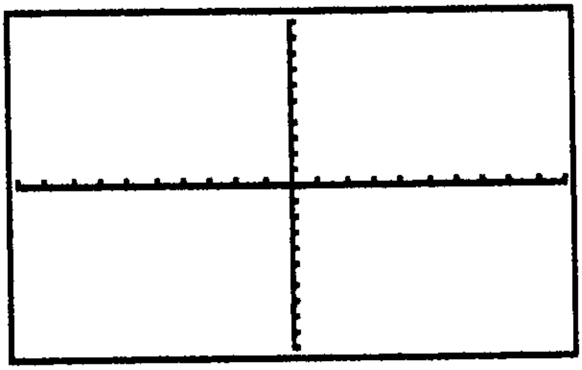
$g(x)=3x^2 +4x +4$ ________________________________

$p(x)=0.2x^2 +4x+4$ ________________________________

$w(x)= 1x^2 +4x+4$ ________________________________

Si deciden experimentar con alguna diferente escríbanla ____________________
¿ Qué características tiene? ______________________________________

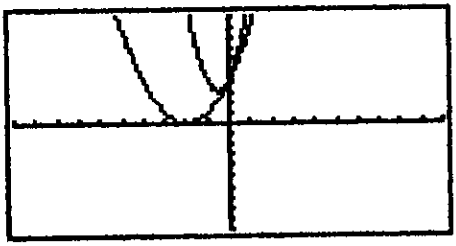
Dibuja sobre un mismo plano cartesiano un bosquejo de todas las gráficas, con un color diferente cada una.

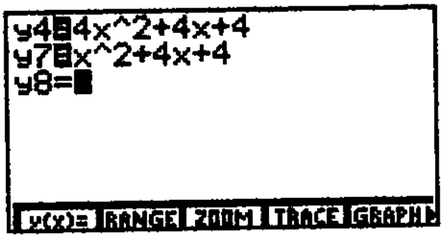


Conclusiones para a > 0

Tiene un punto mínimo ó un máximo ______________________________________

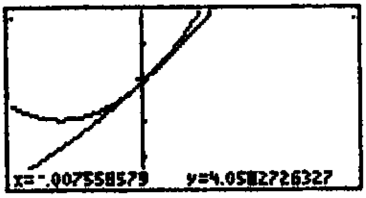
Viendo las siguientes gráficas contesten





A medida que el coeficiente aumenta, la parábola se hace más ancha ó más delgada:_________________________ Porqué ___________________

Analicen la siguiente gráfica y contesten



Las gráficas anteriores, ¿tienen un punto en común? ____ ¿cuál?_________

Si a_1 es un primer valor del coeficiente de x^2 y a_2 es un segundo valor del coeficiente entonces:

¿Qué pasa con la anchura cuando $a_1 > a_2$? ____________________________

¿Qué pasa con la anchura cuando $a_1 < a_2$? ___________________________

RESUMEN DE CONCLUSIONES: SI TENGO LA FUNCIÓN $f(x)= ax^2+bx+c$ entonces: **Cuando a>0 existe un punto**_____________________________________ **Cuando a<0 existe un punto**_____________________________________ **Si a1>a2 la anchura de la parábola de a1 es** _________________**con respecto a a2** **Si a=0 la parábola se convierte en una**______________________________

Modificando el coeficiente b de la función $f(x)= ax^2+bx+c$

Para valores negativos de b (b<0)

Si en un plano cartesiano graficamos las siguientes parábolas que tienen la característica que todas tienen el parámetro b menor que 0 podemos notar cuales son los cambios que me produce una b negativa.

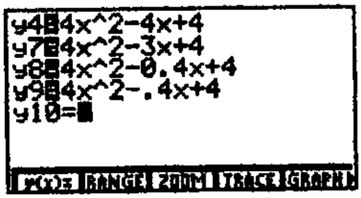
Por medio de la variación del parámetro **b** del término bx en la función $f(x)= ax^2 +bx + c$, encontraremos las diferentes parábolas.

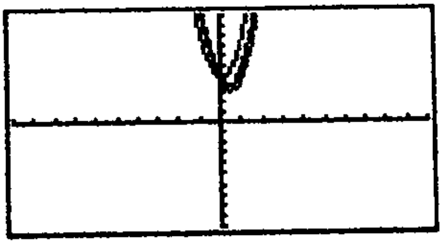
Dadas las siguientes funciones

$f(x)= 4x^2 -4x + 4$ $\quad$ $g(x)= 4x^2 -3x +4$

$p(x)= 4x^2 -1x+4$ $\quad$ $w(x)= 4x^2 -0.4x+4$

Graficamos en un plano cartesiano con los rangos estándar y obtenemos:





Del lado derecho de cada función anoten las características que a su consideración juzguen importantes. Marquen las similitudes y diferencias que vayan encontrando entre las funciones.

EXPRESIONES $\qquad$ CARACTERÍSTICAS

$f(x)= 4x^2 -4x + 4$ ______________________________

$g(x)= 4x^2 -3x +4$ ______________________________

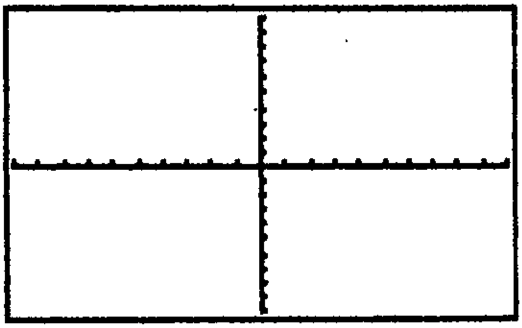
$p(x)= 4x^2 -1x+4$ ______________________________

$w(x)= 4x^2 -0.4x+4$ ______________________________

Si deciden experimentar con alguna otra escríbanla ____________________

¿ Qué características tiene? ______________________________________

Dibujen sobre el mismo plano cartesiano un bosquejo de todas las gráficas, con un color diferente cada una.



Conclusiones para b < 0

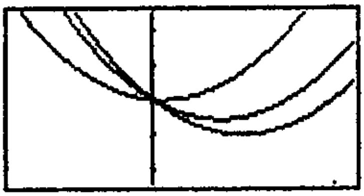
Tiene un punto mínimo ó un máximo ______________________________________

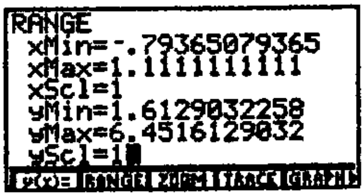
RECUERDEN QUE ESTO SUCEDE YA QUE A ≥ 0

A medida que el coeficiente b disminuye de valor, la parábola se recorre sobre el eje de las x hacia la derecha ó hacia la izquierda:__________________________

Las gráficas anteriores, ¿tienen un punto en común? ____ ¿cuál?__________

Haciendo un acercamiento de con la calculadora y usando los rangos que a continuación se presenta corrobora que tu respuesta sea la correcta.





Si b_1 es un primer valor del coeficiente de x y b_2 es un segundo valor del coeficiente entonces:

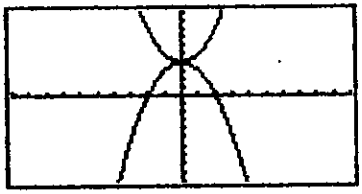
Qué pasa cuando $b_1 > b_2$ ______________________________________

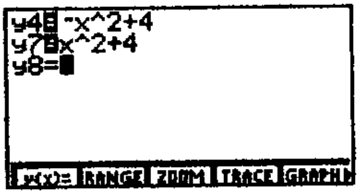
Qué pasa cuando $b_1 < b_2$ ______________________________________

PARA EL VALOR CUANDO b=0

Si en un plano cartesiano graficamos la siguiente parábola que tiene la característica que b=0 podemos notar como es.

La función es $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = -x^2 + 4$ con los rangos estándares:





Ahora contesten lo siguiente:

EXPRESIÓN ______________________________ CARACTERÍSTICAS

$f(x) = -4x^2 + 4$ ______________________________________

f(x) ¿es una función? ______________________________________

¿de que tipo ? ______________________________________

$g(x) = 4x^2 + 4$ ______________________________________

g(x) ¿es una función? ______________________________________

¿de que tipo ? ______________________________________

CONCLUSIONES CUANDO b=0

¿Qué pasa cuando b=0? ____

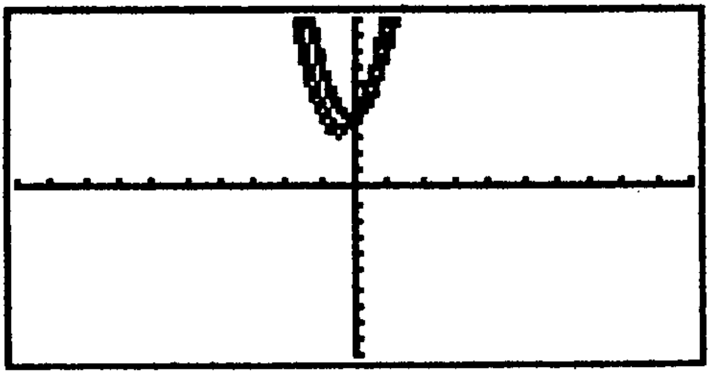
¿Cuál es su eje de simetría? ____

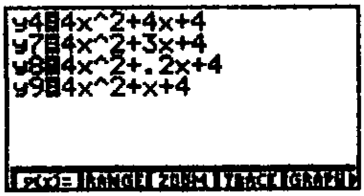
<u>Modificando el coeficiente b de la función f(x)= ax²+bx+c</u>

Para valores cuando b>0

Si en un plano cartesiano graficamos las siguientes parábolas que tienen la característica que todas tienen el parámetro b mayor que 0 podemos notar cuales son los cambios que me produce una b positiva.

Dadas las siguientes funciones y sus gráficas contesten lo que se les pide:





Los rangos sugeridos son xmin=-10 xmax=10 ymin=-10 ymax=10

Del lado derecho de cada función anoten las características que a su consideración juzguen importantes. Marquen las similitudes y diferencias que vayan encontrando entre las funciones.

EXPRESIONES ________________________ CARACTERÍSTICAS

$f(x)= 4x^2 + 4x + 4$ ________________________

$g(x)= 4x^2 + 3x + 4$ ________________________

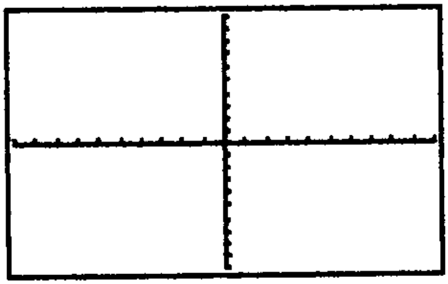
$p(x)= 4x^2 + 0.2x + 4$ ________________________

$w(x)= 4x^2 + 1x + 4$ ________________________

Si deciden experimentar con alguna otra escribanla________________

¿ Qué características tiene? ________________________

Dibujen sobre un mismo plano cartesiano un bosquejo de todas las gráficas, con un color diferente cada una.



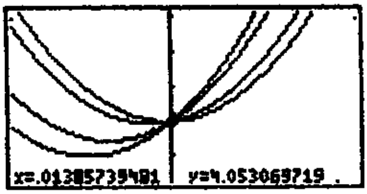
Conclusiones para b > 0

Tiene un punto mínimo ó un máximo ________________________

ESTO SUCEDE PORQUE A ES MAYOR QUE CERO

A medida que el coeficiente b disminuye la parábola se hace a la derecha o a la izquierda:________________________

Las gráficas anteriores, ¿tienen un punto en común? ____ ¿cuál?__________



Si b_1 es un primer valor del coeficiente de x y b_2 es un segundo valor del coeficiente entonces:

Qué pasa cuando $b_1 > b_2$ ________________________________

Qué pasa cuando $b_1 < b_2$ ________________________________

RESUMEN DE CONCLUSIONES SI TENGO LA ECUACIÓN $f(x) = ax^2+bx+c$ entonces:

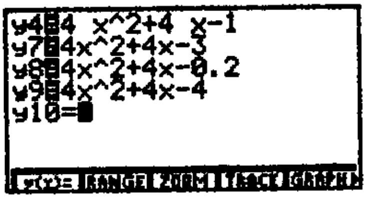
Cuando b>0 la parábola se mueve hacia la ____________________
Cuando b= 0 la parábola es simétrica con respecto a ____________
Cuando b<0 la parábola se mueve hacia la ____________________
Si b1 > b2 la parábola de b1 ¿como es respecto a la parábola de b2?

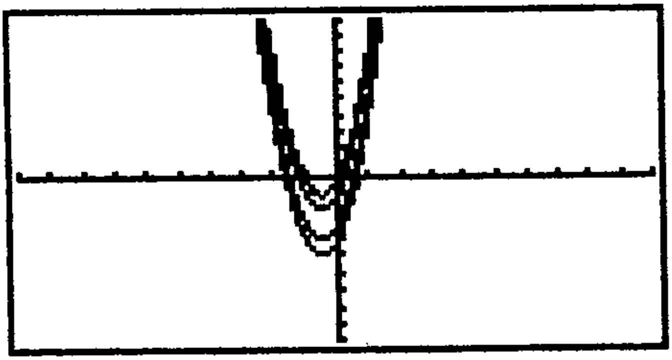
____

El punto máximo o mínimo ¿qué modificación sufre? ____________

Modificando el coeficiente c de la función $f(x)= ax^2+bx+c$

Si en un plano cartesiano graficamos las siguientes parábolas que tienen la característica que todas tienen el parámetro c menor que 0 podemos notar cuales son los cambios que me produce una variable c negativa.





Del lado derecho de cada función anoten las características que a su consideración juzguen importantes. Marquen las similitudes y diferencias que vayan encontrando entre las funciones.

Para valores negativos de c (c<0)

EXPRESIONES CARACTERÍSTICAS

$f(x)= 4x^2 +4x -1$ ______________________________

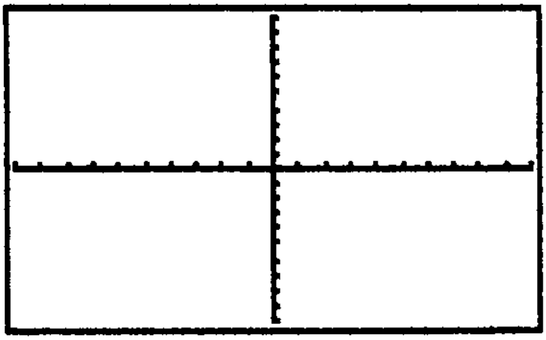
$g(x)= 4x^2 +4x -3$ ______________________________

$p(x)= 4x^2 +4x-0.2$ ______________________________

$w(x)= 4x^2 +4x-4$ ______________________________

Si deciden experimentar con alguna otra, escríbanla ________________
¿ Qué características tiene? ______________________________

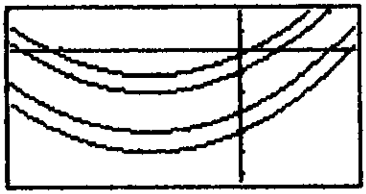
Dibujen sobre un mismo plano cartesiano un bosquejo de las gráficas, cada una con un color diferente.



Conclusiones para $c < 0$

Cambia el punto mínimo ó máximo ______________________________

Haciendo un acercamiento tenemos que



En base a lo anterior contesten:

A medida que el coeficiente c disminuye la parábola se baja o sube ________________________ Porqué ___________________

Las gráficas anteriores, ¿tienen un punto en común? ____ ¿cuál?__________

Si c_1 es un primer valor del coeficiente independiente de la función y c_2 es un segundo valor del coeficiente entonces:

¿Qué pasa cuando $c_1>c_2$?____________________________________

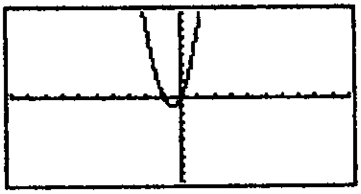
¿Qué pasa cuando $c_1< c_2$?____________________________________

¿ Tienen un punto en común ? __________________________________

PARA EL VALOR CUANDO c=0

Si en un plano cartesiano graficamos las siguientes parábolas que tienen la característica que todas tienen el parámetro c igual a 0 podemos notar cuales son los cambios que me produce una c nula.

La función $f(x) = 4x^2 + 4x + 0$ tiene como gráfica



Del lado derecho de cada función anoten las características que a su consideración juzguen importantes. Marquen las similitudes y diferencias que vayan encontrando entre las funciones.

EXPRESIÓN ____________________________________ CARACTERÍSTICAS

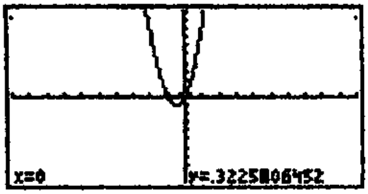
$f(x) = 4x^2 + 4x + 0$ ____________________________________

f(x) ¿es una función?____________________________________

¿de que tipo ? ____________________________________

CONCLUSIONES CUANDO c=0

Qué pasa cuando c=0 ____________________________________
Cómo se le llama a este tipo de función____________________________________

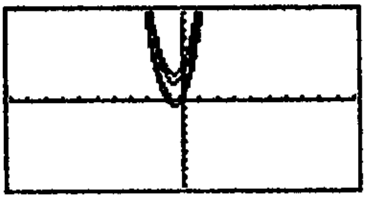


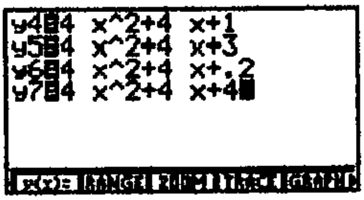
¿ Cuál es un punto por donde siempre pasa ? ______________________

Para valores positivos de c (c>0)

Si en un plano cartesiano graficamos las siguientes parábolas que tienen la característica que todas tienen el parámetro c mayor que 0 podemos notar cuales son los cambios que me produce una c positiva.

En la gráfica siguiente se muestran varias funciones cuya característica es que c es mayor que cero.





Del lado derecho de cada función anoten las características que a su consideración juzguen importantes. Marquen las similitudes y diferencias que vayan encontrando entre las funciones.

EXPRESIONES CARACTERÍSTICAS

$f(x)= 4x^2 +4x +1$ ______________________

$g(x)= 4x^2 +4x +3$ ______________________

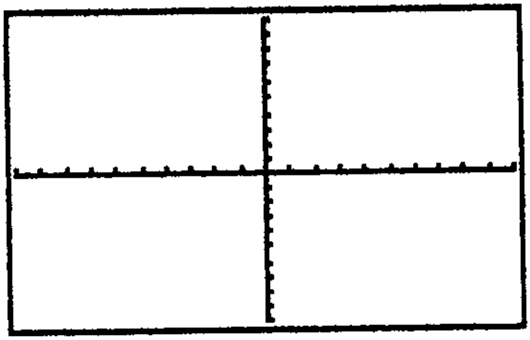
$p(x)= 4x^2 +4x+0.2$ ______________________

$w(x)= -1x^2 +4x+4$ ______________________

Si deciden experimentar con alguna otra, escríbanla ______________

¿ Qué características tiene? ____________________________________

Dibujen sobre un mismo plano cartesiano un bosquejo de cada gráfica, con un color diferente cada una.



Conclusiones para c> 0

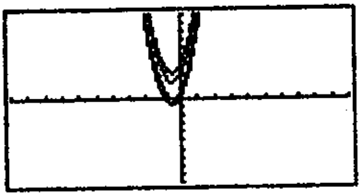
Tiene un punto mínimo ó un máximo ____________________________________

¿ Por qué ? ____

A medida que el coeficiente c aumenta la parábola se hace más ancha ó más delgada:____________________________ Porqué ____________________

¿ Qué les ocurren a las parábolas ? ___________________________________
____

Las gráficas anteriores, ¿tienen un punto en común? ____ ¿cuál?__________



Si c_1 es un primer valor del coeficiente independiente de la función y c_2 es otro valor del coeficiente entonces:

¿Qué pasa cuando $c_1 > c_2$? ____

¿Qué pasa cuando $c_1 < c_2$? ____

RESUMEN DE CONCLUSIONES SI TENGO LA FUNCIÓN $f(x) = ax^2+bx+c$ entonces:
Cuando $c>0$ la parábola se mueve hacia ______________________
Cuando $c= 0$ la parábola se mueve hacia _______ ______________
Cuando $c<0$ la parábola se mueve hacia ______________________
Si $c1 > c2$ las parábolas son ______________________________
El punto en común lo tienen ________________________________

ACTIVIDAD 5
Encontrando similitudes y diferencias Entre las gráficas de parábolas ax^2 , $ax^2+ c$, $ax^2 - c$, $(x-h)^2$, $(x + h)^2$

TEMA: Función Cuadrática

SUBTEMA: Similitudes y diferencias entre las gráficas de las parábolas

ALUMNOS: 4to de Bachillerato (15-16 años)

OBJETIVO: Capacitar a los alumnos para:

- Comprender las diferentes gráficas que existen entre las parábolas ax^2 , $ax^2+ c$, $ax^2 - c$, $(x-h)^2$, $(x + h)^2$.
- Modificar los parámetros de las parábolas de la forma ax^2 , $ax^2+ c$, $ax^2 - c$, $(x-h)^2$, $(x + h)^2$ y encontrar sus diferencias.
- Identificar los cambios al modificar los parámetros de las parábolas
- Identificar las variaciones que sufre el punto máximo ó mínimo en una función cuadrática al cambiar sus parámetros.
- Identificar los cambios que ocurren cuando alguno de los parámetros es cero, positivo y negativo.

PROCEDIMIENTO:

- Dibujar gráficas de funciones cuadráticas cambiando diferentes parámetros.
- Gráficar funciones cuadráticas identificando puntos importantes como máximos, mínimos e intersecciones con el eje de las abscisas, viendo los cambios que ocasionan al cambiar los parámetros.
- Describir las características de las funciones cuadráticas cuando se cambian los parámetros de positivos a negativos.
- Concluir al finalizar cada cambio de parámetros las características más importantes.
- Graficar casos cuando los parámetros valen cero e identificar las consecuencias de esto.

REQUISITOS PREVIOS:
Los solicitados en la Actividad 1 y haber cubierto la Actividad 1 - 4

METODOLOGÍA:
La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes, al finalizarla el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo pero durante la actividad contestará cualquier duda que surja en los equipos

EVALUACIÓN:

Al finalizar el tema se les dará un material similar a este para que en equipos de tres personas lo realicen y entreguen. La evaluación dependerá de las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante cada sesión así como un examen individual al finalizar el tema.

TRAZO DE PARÁBOLAS DE LA FORMA $f(x) = ax^2$

La función $f(x) = x^2$, como ya saben es una parábola

¿Cuál es el valor de a? ________________

La parábola se abre hacia arriba ó hacia abajo ____________________

Esta función cuadrática tiene un punto mínimo ó un máximo ______________

¿Cuales son sus coordenadas? _________________________

A este punto se le llama vértice de la parábola

Su eje de simetría pasa por el punto x= _____. La función lineal que representa el eje de simetría es f(x)= ________________

b) La función $f(x) = -x^2$

¿Cuál es el valor de a? ________________

La parábola se abre hacia arriba ó hacia abajo ____________________

Esta función cuadrática tiene un punto mínimo ó un máximo ______________

¿Cuales son sus coordenadas? _________________________

A este punto se le llama vértice de la parábola

Su eje de simetría pasa por el punto x= _____. La función lineal que representa el eje de simetría es f(x)= ________________

c) La función $f(x) = 4x^2$

¿Cuál es el valor de a? ________________

La parábola se abre hacia arriba ó hacia abajo ____________________

Esta función cuadrática tiene un punto mínimo ó un máximo ______________

¿Cuales son sus coordenadas? _________________________

A este punto se le llama vértice de la parábola

Su eje de simetría pasa por el punto x= _____. La función lineal que representa el eje de simetria es f(x)= __________________

d) La función **$g(x) = -14x^2$**

¿Cuál es el valor de a? __________________

La parábola se abre hacia arriba ó hacia abajo __________________

Esta función cuadrática tiene un punto mínimo ó un máximo ______________

¿Cuales son sus coordenadas? __________________

A este punto se le llama vértice de la parábola

Su eje de simetría pasa por el punto x= _____. La función lineal que representa el eje de simetría es f(x)= __________________

¿ Qué características permanecen constantes en todas parábolas que analizaron ?

____

____

¿ Cuáles son las características que se modificaron ? __________________

____

____

CONCLUSIONES

Si tengo una función de la forma $f(x)=ax^2$ entonces: la función me representa una parábola con vértice en (0,0), eje de simetría igual al eje y y tiene un máximo ó un mínimo según el signo de a, si a es positiva tiene un mínimo y si a es negativa, tiene un máximo.

TRAZO DE PARÁBOLAS DE LA FORMA $f(x) = ax^2+c$ con $c>0$

1.- Con sus calculadoras grafiquen la función **$f(x)= x^2 + 1$** y contesten las siguientes preguntas:

¿ Qué similitud tiene con la función **$g(x)=x^2$** ? __________________

____

¿ En qué punto se intersecta con el eje de las y ? __________________
¿Qué efecto causa el término + 1 en la gráfica de la función ? __________________

____

¿En que punto intersecta la función con el eje x? __________________
¿ La parábola hacia donde se abre? __________________

¿Tiene un máximo ó un mínimo? ____________________
¿Qué coordenadas tiene el vértice? ____________________

2.- Con sus calculadoras, grafiquen la función **$f(x)= 4x^2 + 5$** y contesten las siguientes preguntas:

¿ Qué similitud tiene con la función **$g(x)= 4x^2$** ? ____________________
¿Qué efecto causa el término + 5 en la gráfica de la función ? ____________________
¿ En qué punto se intersecta con el eje de las y ?____________________
¿En que punto intersecta la función con el eje x ? ____________________
¿ La parábola hacia donde se abre? ____________________
¿Tiene un máximo ó un mínimo? ____________________
¿Qué coordenadas tiene el vértice? ____________________

3.- Con sus calculadoras , grafiquen la función **$f(x)= -14x^2 + 4$** y contesten las siguientes preguntas:

¿ Qué similitud tiene con la función **$g(x)= -14x^2$** ? ____________________
¿En que punto se intersecta con el eje de las y ? ____________________
¿Qué efecto causa el término +4 en la gráfica de la función ? ____________________

____

¿En que punto intersecta la función al eje x? ____________________
¿ La parábola hacia donde se abre? ____________________
¿Tiene un máximo ó un mínimo? ____________________
¿Qué coordenadas tiene el vértice? ____________________

4.- Con sus calculadoras , grafiquen la función **$f(x)= 4x^2 + 5$** y contesten las siguientes preguntas:

¿ Qué similitud tiene con la función **$g(x) = 4x^2$** ? ____________________
¿En que punto se intersecta con el eje de las y ? ____________________
¿Qué efecto causa el + 5 en la gráfica de la función ? ____________________
¿En que punto intersecta la función al eje x? ____________________
¿ La parábola hacia donde se abre? ____________________
¿Tiene un máximo ó un mínimo? ____________________
¿Qué coordenadas tiene el vértice? ____________________

TRAZO DE PARÁBOLAS DE LA FORMA $f(x)= ax^2-c$

Situación problemática 7[7]

1.- Las encuestas de mercado administradas a los proveedores de pantalones de mezclilla llegaron a la conclusión de que la fórmula de la función de oferta es una función cuadrática, y está dada por la fórmula

$$q= f(p)=0.5p^2-200$$

donde q=f(p) representa el número de pantalones de mezclilla que me pueden ofrecer al precio p

Con sus calculadoras obtengan la gráfica de la función de oferta, (encuentra el rango adecuado) y contesten las siguientes preguntas:

¿En que puntos se intersecta la función de oferta con el eje horizontal p? ______________________________

¿ La parábola hacia donde se abre? ______________________________
¿Tiene un máximo ó un mínimo? ______________________________
¿Qué coordenadas tiene el vértice? ______________________________
¿Qué efectos causa el valor de - 200 en la gráfica? ______________________________
¿Qué efectos causa el valor de 0.5 en la gráfica? _ ______________________________

2.- Si en lugar de requerir pantalones de mezclilla deseamos vestidos la función sigue siendo cuadrática pero ahora es de la siguiente forma

$$v= f(p) = 0.4\,p^2 - 172$$

donde v=f(p) es el número de vestidos que me pueden ofrecer al precio p

Con sus calculadoras obtengan la gráfica de la función de oferta, (adecuen los rangos) y contesten las siguientes preguntas:

¿En que puntos se intersecta la función con el eje x? ______ ______________
¿En que punto se intersecta la función con el eje de las y ?______________
¿ La parábola hacia donde se abre? ______________________________
¿Tiene un máximo ó un mínimo? ______________________________
¿Qué coordenadas tiene el vértice? ______________________________
¿Qué efectos causa el valor de - 200 en la gráfica? ______________________________
¿Qué efectos causa el valor de 0.5 en la gráfica? _ ______________________________

CONCLUSIONES

Si c>o entonces la intersección con el eje x no existe si el coeficiente de x^2 es mayor que 0, tiene un punto mínimo que es el vértice con coordenadas (0,c)
Si c< 0 entonces la intersección con el eje x no existe si el coeficiente de la x^2 es menor que 0, tiene un punto máximo que es el vértice con coordenadas (0,c)
LA GRÁFICA DE $f(x)=x^2+c$ es una parábola que tiene vértice en el punto (0,c)

TRAZO DE PARÁBOLAS DE LA FORMA $f(x)=(x-h)^2$

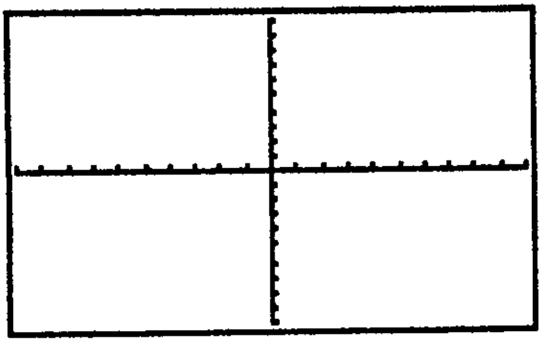
1.- $f(x) = (x-h)^2$

Gráfiquen en sus calculadoras las siguientes funciones y contesten las preguntas en base a las graficas que obtuvieron.

a) $f(x)= (x-3)^2$

$g(x)= (x-0.5)^2$

$h(x)= (x-2.5)^2$



¿ Qué rangos sugieren? ____________________

¿Todas las gráficas muestran un máximo ó un mínimo ? ____________

¿Cuál es el vértice de f(x) ?   (,)

¿Cuál es el vértice de g(x) ? (,)
¿Cuál es el vértice de h(x) ? (,)

¿Tienen un punto en común? _______________¿Cuál?__________________

CONCLUSIONES

Si $f(x) = (x-h)^2$ su gráfica es una parábola que tiene como vértice el punto (h,0), y tiene un punto mínimo

Sin graficar den el valor del vértice de la parábola $f(x) = (x - 4)^2$

Coordenadas del vértice _________________ que tipo de concavidad tiene __

________________________tiene un punto máximo ó mínimo ______________

____en que intervalo crece y

decrece la función____

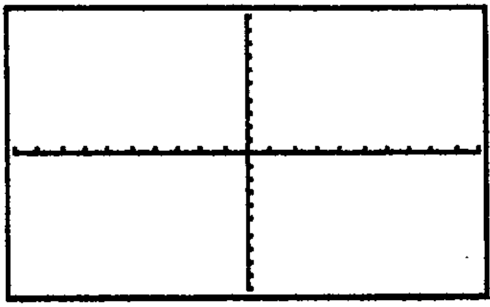
2.- $f(x) = (x+h)^2$

Gráfiquen en sus calculadoras las siguientes funciones y contesten las preguntas en base a las gráficas que obtuvieron.

a) $f(x)= (x+3)^2$

$g(x)= (x+0.5)^2$

$h(x)= (x+2.5)^2$



¿ Qué rangos sugieren ? ____

Contesten las siguientes preguntas tomando en cuenta las gráficas que dibujaron:

¿Todas las gráficas muestran un máximo ó un mínimo ? ________________
¿Cuál es el vértice de f(x) ? (,)
¿Cuál es el vértice de g(x) ? (,)
¿Cuál es el vértice de h(x) ? (,)

¿Tienen un punto en común? ______________¿Cuál?________________

CONCLUSIONES

Si $f(x) = (x+h)^2$ su gráfica es una parábola que tiene como vértice el punto (-h,0), y tiene un punto mínimo

Sin graficar den el valor del vértice de la parábola $f(x) = (x + 4)^2$

Las coordenadas del vértice ________________ que tipo de concavidad tiene

______________________tiene un punto máximo ó mínimo ______________

____en que intervalo crece y

decrece la función____

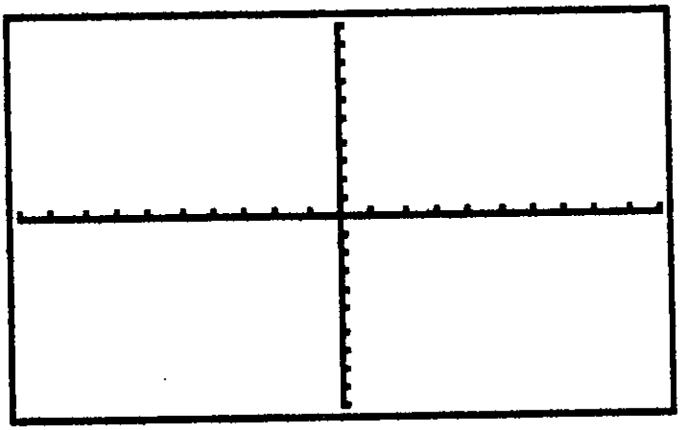
3.- $f(x) = -(x-h)^2$

Gráfiquen en sus calculadoras las siguientes funciones y contesten las preguntas en base a las graficas que obtuvieron.

a) $f(x)= -(x-3)^2$

$g(x)= -(x-0.5)^2$

$h(x)= -(x-2.5)^2$



Contesten las siguientes preguntas tomando en cuenta las gráficas que dibujaron:

¿Todas las gráficas muestran un máximo ó un mínimo ? ________________
¿Cuál es el vértice de f(x) ? (,)
¿Cuál es el vértice de g(x) ? (,)
¿Cuál es el vértice de h(x) ? (,)

¿Tienen un punto en común? ______________¿Cuál?________________

CONCLUSIONES

Si $f(x) = -(x-h)^2$ su gráfica es una parábola que tiene como vértice el punto (h,0), y tiene un punto máximo

Sin graficar den el valor del vértice de la parábola $f(x) = -(x-4)^2$

Coordenadas del vértice ________________ que tipo de concavidad tiene __

______________________tiene un punto máximo ó mínimo _____________

____en que intervalo crece y

decrece la función____

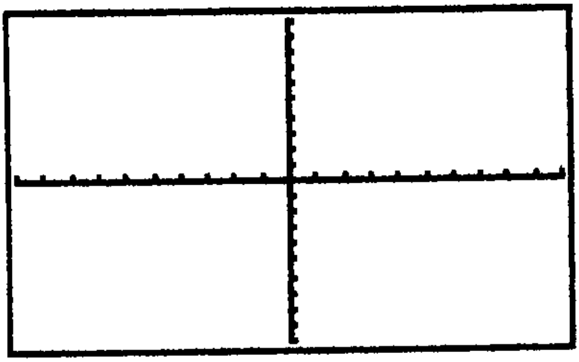
4.- $f(x) = -(x+h)^2$

Gráfiquen en sus calculadoras las siguientes funciones y contesten las preguntas en base a las graficas que obtuvieron.

a) $f(x)= -(x+3)^2$

$g(x)= -(x+0.5)^2$

$h(x)= -(x+2.5)^2$



Contesten las siguientes preguntas tomando en cuenta las gráficas que dibujaron:
¿Todas las gráficas muestran un máximo ó un mínimo ? _______________

¿Cuál es el vértice de f(x) ? (,)
¿Cuál es el vértice de g(x) ? (,)
¿Cuál es el vértice de h(x) ? (,)
¿Tienen un punto en común? ______________¿Cuál?________________

CONCLUSIONES

Si $f(x) = -(x+h)^2$ su gráfica es una parábola que tiene como vértice el punto (-h,0), y tiene un punto máximo.

Sin graficar den el valor del vértice de la parábola $f(x) = -(x+4)^2$

Coordenadas del vértice ______________ que tipo de concavidad tiene ___________________tiene un punto máximo ó mínimo _____________________________________en que intervalo crece y decrece la función_____________________________________

ACTIVIDAD 6

Trazo de parábolas de la forma $f(x)= (x \pm h)^2 \pm k$

TEMA: Función Cuadrática

SUBTEMA: Analizar las funciones cuadráticas de la forma $f(x)= \pm (x \pm h)^2 \pm k$

ALUMNOS: 4to de Bachillerato (15-16 años)

OBJETIVO: Capacitar a los alumnos para:

- Comprender las diferencias gráficas que existen entre las parábolas de la forma $f(x)= \pm (x \pm h)^2 \pm k$

- Modificar los parámetros de las parábolas de la forma $f(x)= \pm (x \pm h)^2 \pm k$

- Identificar los cambios gráficos al modificar los parámetros de las parabólas

- Identificar las variaciones que sufren los puntos máximo ó mínimo en una función cuadrática al cambiar sus parámetros.

- Identificar que sucede cuando alguno de los parámetros es cero, positivo y negativo.

PROCEDIMIENTO:

- Dibujar gráficas de funciones cuadráticas cambiando diferentes parámetros.
- Gráficar funciones cuadráticas identificando puntos importantes como máximos, mínimos e intersecciones con el eje de las abscisas, viendo los cambios que ocasionan al cambiar los parámetros.
- Describir las características de las funciones cuadráticas cuando se cambian los parámetros de positivos a negativos.
- Concluir al finalizar cada cambio de parámetros las caracterísicas más importantes.
- Graficar casos cuando los parámetros valen cero e identificar las consecuencias de esto.

REQUISITOS PREVIOS:
Los solicitados en la Actividad 1 y haber cubierto la Actividad 1-5

METODOLOGÍA:
La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes, al finalizarla el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo pero durante la actividad contestará cualquier duda que surja en los equipos

EVALUACIÓN:

Al finalizar el tema se les dará un material similar a este para que en equipos de tres personas lo realicen y entreguen. La evaluación dependerá de las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante cada sesión así como un examen individual al finalizar el tema.

TRAZO DE PARÁBOLAS DE LA FORMA :

1.- $f(x)= (x-h)^2 - k$

Gráfiquen en sus calculadoras la siguiente funcion y contesten las preguntas en base a la gráfica que obtuvieron

a) $p(x)= (x-3)^2 -2$

¿La parábola tiene un punto mínimo ó un máximo? ______________________

¿Las coordenadas de su vértice es?______________________________

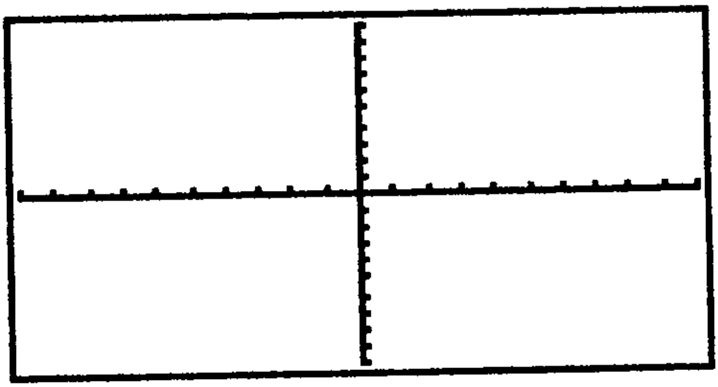
¿Existe coincidencia entre el punto máximo ó mínimo y el vértice? ____________

El número $k = -2$ es la segunda coordenda del vértice. El número $h = 3$ es la primera coordena del vértice.

b) Obtengan las coordenadas del vértice de las siguientes parábolas y grafiquenlas para corroborar que estan bien

$w(x)= (x-1)^2 -1$ su vértice tiene coordenadas __________________
$a(x) = (x-1/2)^2-4$ su vértice tiene coordenadas __________________

Dibujen las parábolas marcando el vértice:



CONCLUSIONES

La función $f(x)= (x-h)^2-k$ es una parábola que tiene un punto mínimo que coincide con el vértice y su coordenadas son (h,-k)

2.- $f(x)= (x-h)^2 + k$

Gráfiquen con sus calculadoras la siguiente funcion y contesten las preguntas en base a la gráfica que obtuvieron

a) $k(x)= (x-3)^2 + 2$

¿La parábola tiene un punto mínimo ó un máximo? ______________________

¿Las coordenadas de sus vértices son?______________________________

¿Existe coincidencia entre el punto máximo ó mínimo y el vértice? ____________

El número k se encuentra en algún punto de la parábola ¿Cuál? ____________

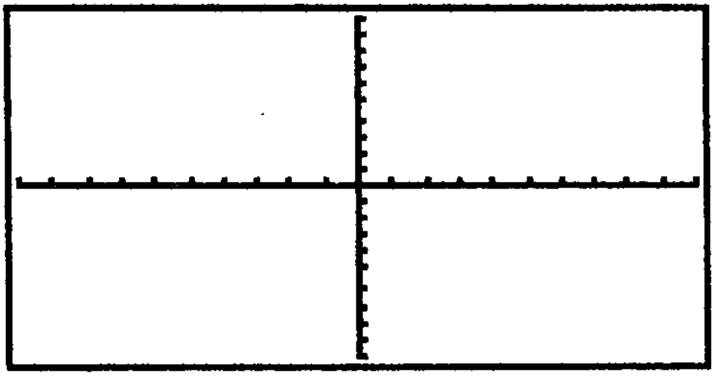
El número h se encuentra en algún punto de la parábola ¿ Cuál? ____________

Ahora dibujen las siguientes parábolas y marquen el punto del vértice corroborando lo que contestaron antes.

b) $w(x)= (x-1)^2 + 1$ las coordenadas de su vértice son ___________________

$a(x) = (x-1/2)^2 + 4$ las coordenadas de su vértice son ___________________

Dibujen las parábolas marcando el vértice:



CONCLUSIONES

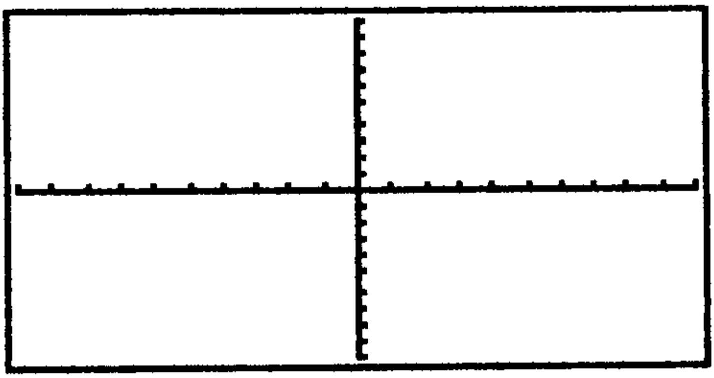
La función $f(x)= (x-h)^2 + k$ es una parábola que tiene un punto mínimo que coinciden con su vértice y sus coordenadas son (h, + k)

3.- $f(x)= (x+h)^2 - k$

Gráfiquen las siguientes funciones y contesten las preguntas en base a las gráficas que obtengan

a) $k(x)= (x+3)^2 -2$
$w(x)= (x+1)^2 -1$
$a(x) = (x+1/2)^2-4$

Dibujen las parábolas marcando el vértice:



¿Las parábolas tiene un punto mínimo ó un máximo? ____________________

¿Las coordenadas de sus vértices son?____________________________

¿Existe coincidencia entre el punto máximo ó mínimo y el vértice? __________

El número k se encuentra en algún punto de la parábola ¿Cuál? ___________

El número h se encuentra en algún punto de la parábola ¿ Cuál? ___________

CONCLUSIONES

La función $f(x)= (x+h)^2-k$ es una parábola que tiene un punto mínimo que coinciden con su vértice y sus coordenadas son (- h,-k)

4.- $f(x)= (x+h)^2 + k$

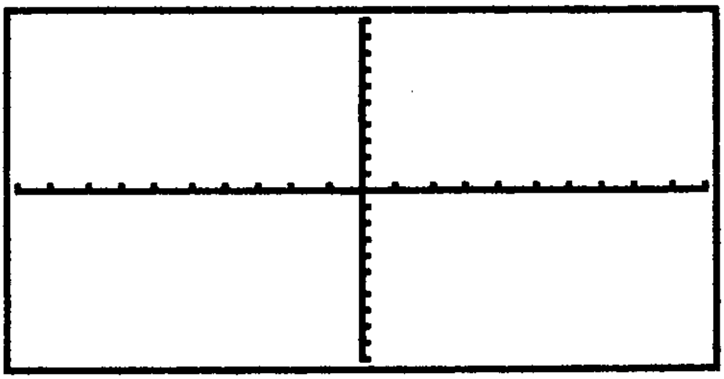
Gráfiquen las siguientes funciones y contesten las preguntas en base a las gráficas que obtuvieron

a) $k(x)= (x+3)^2 + 2$

$w(x)= (x+1)^2 +1$

$a(x) = (x+1/2)^2+4$

Dibujen las parábolas marcando el vértice:



¿Las parábolas tiene un punto mínimo ó un máximo? ____________________

¿Las coordenadas de sus vértices son?__________________________

¿Existe coincidencia entre el punto máximo ó mínimo y el vértice? __________

El número k se encuentra en algún punto de la parábola ¿Cuál? ___________

El número h se encuentra en algún punto de la parábola ¿ Cuál? ___________

CONCLUSIONES

La función $f(x)= (x+h)^2+ k$ es una parábola que tiene un punto mínimo que coincide con su vértice y las coordenadas son $(- h,+ k)$

5.- $f(x)= - (x-h)^2 - k$

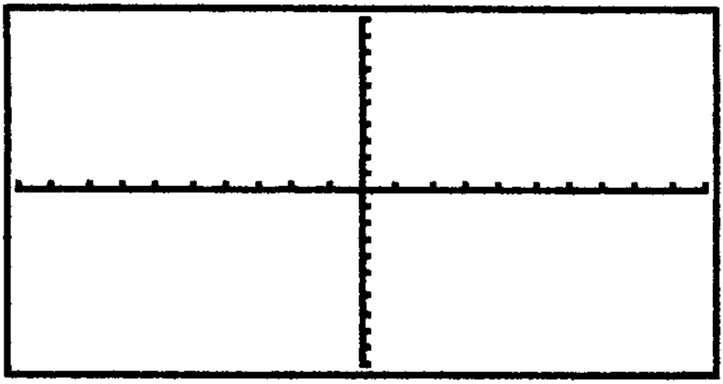
Gráfiquen las siguientes funciones y contesta las preguntas en base a las gráficas que obtuvieron

a) $k(x)= - (x-3)^2 -2$

$w(x)= - (x-1)^2 -1$

$a(x) = - (x-1/2)^2-4$

Dibujen las parábolas marcando el vértice:



¿Las parábolas tiene un punto mínimo ó un máximo? ____________________

¿Las coordenadas de sus vértices son?____________________________

¿Existe coincidencia entre el punto máximo ó mínimo y el vértice? __________

El número k se encuentra en algún punto de la parábola ¿Cuál? __________

El número h se encuentra en algún punto de la parábola ¿ Cuál? __________

CONCLUSIONES

La función $f(x)= -(x-h)^2-k$ es una parábola que tiene un punto máximo que coincide con su vértice y su vértice es $(h,-k)$

6.- $f(x)= -(x-h)^2 + k$

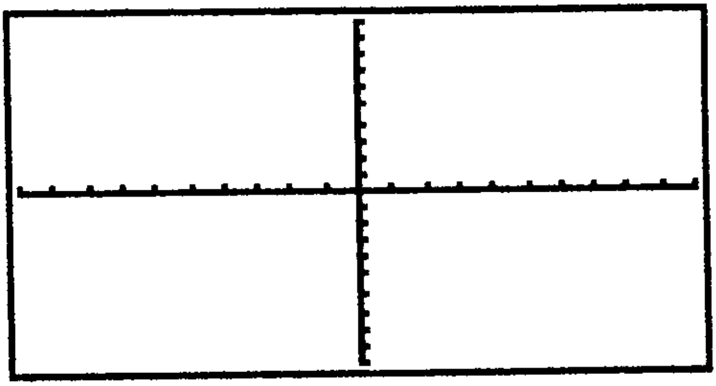
Gráfiquen las siguientes funciones y contesten las preguntas en base a las gráficas que obtuviste

a) $k(x)= -(x-3)^2 +2$

$w(x)= -(x-1)^2 +1$

$a(x) = -(x-1/2)^2+4$

Dibujen las parábolas marcando el vértice:



¿Las parábolas tiene un punto mínimo ó un máximo? ____________________

¿Las coordenadas de sus vértices son?____________________________

¿Existe coincidencia entre el punto máximo ó mínimo y el vértice? __________

El número k se encuentra en algún punto de la parábola ¿Cuál? __________

El número h se encuentra en algún punto de la parábola ¿ Cuál? __________

CONCLUSIONES

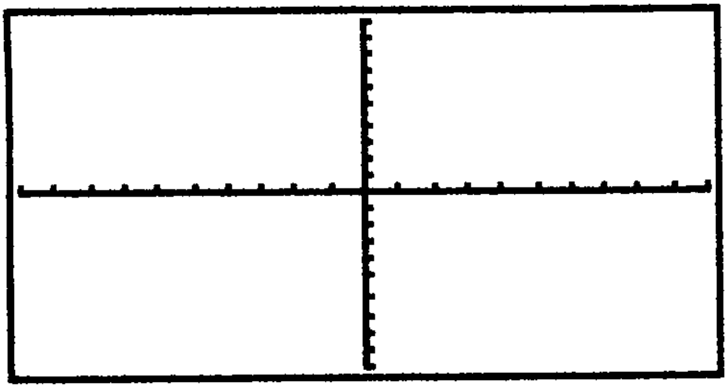
La función $f(x) = -(x-h)^2 + k$ es una parábola que tiene un punto máximo que coincide con su vértice y las coordenadas son (+h,+k)

7.- $f(x) = -(x+h)^2 - k$

Gráfiquen las siguientes funciones y contesten las preguntas en base a las gráficas que obtuviste

a) $k(x) = -(x+3)^2 - 2$
$w(x) = -(x+1)^2 - 1$
$a(x) = -(x+1/2)^2 - 4$

Dibujen las parábolas marcando el vértice:



¿Las parábolas tiene un punto mínimo ó un máximo? ____________________

¿Las coordenadas de sus vértices son?____________________________

¿Existe coincidencia entre el punto máximo ó mínimo y el vértice? __________

El número k se encuentra en algún punto de la parábola ¿Cuál? ___________

El número h se encuentra en algún punto de la parábola ¿ Cuál? ___________

CONCLUSIONES

La función $f(x) = -(x+h)^2 - k$ es una parábola que tiene un punto máximo que coincide con su vértice y sus coordenadas son $(-h, -k)$

8.- $f(x) = -(x+h)^2 + k$

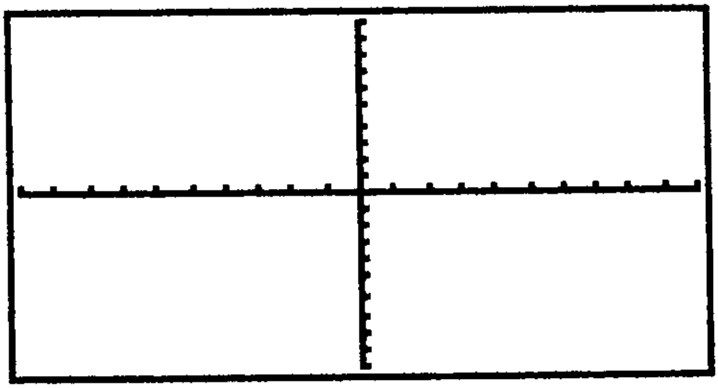
Gráfiquen las siguientes funciones y contesten las preguntas en base a las gráficas que obtuviste

a) $k(x) = -(x+3)^2 + 2$

$w(x) = -(x+1)^2 + 1$

$a(x) = -(x+1/2)^2 + 4$

Dibujen las parábolas marcando el vértice:



¿Las parábolas tiene un punto mínimo ó un máximo? ____________________

¿Las coordenadas de sus vértices son?____________________________

¿Existe coincidencia entre el punto máximo ó mínimo y el vértice? __________

El número k se encuentra en algún punto de la parábola ¿Cuál? __________

El número h se encuentra en algún punto de la parábola ¿ Cuál? __________

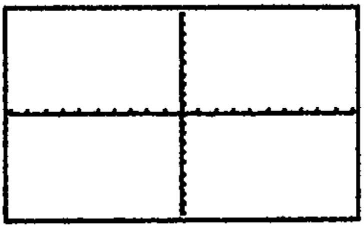
CONCLUSIONES

La función $f(x)= -(x+h)^2+k$ es una parábola que tiene un punto máximo que coincide con su vértice y sus coordenadas son (- h,+k)

TAREA ACTIVIDADES 2,3, 4,5 y 6

1.- Con sus calculadora grafiquen cada una de las siguientes funciones y contesten lo que se les pregunta:

$f(x) = -2x^2$
$g(x) = 2x^2$
$t(x) = .5\ x^2$
$p(x) = -\ .1\ x^2$

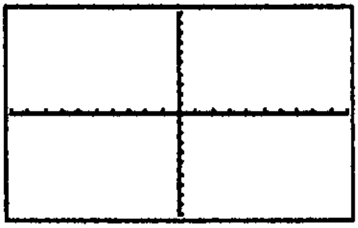


¿ Cuáles son los rangos que eligieron ?

¿Qué pueden concluir al variar el parámetro a de x^2

2.- Con sus calculadoras grafiquen en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 + 2$
$g(x) = x^2 + 5$
$h(x) = x^2 + 3$
$w(x) = x^2 + .01$



¿ Cuáles son los rangos que eligieron ?

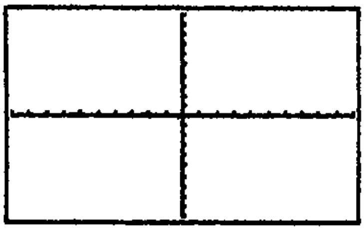
Pueden crear una función entre f(x) y g(x) ____________

¿ Cuál ?____________

Anoten sus conclusiones acerca de la similitud y diferencia entre las parábolas

3.- Con sus calculadoras grafiquen en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones:

$f(x)= x^2 - 2$
$g(x)= x^2 -5$
$h(x)= x^2 -3$
$w(x)= x^2 -.01$



¿ Cuáles son los rangos que eligieron ?

____

____

Pueden crear una función entre f(x) y g(x) ____________________

¿ Cuál ?______________________________________

Anoten sus conclusiones acerca de las similitudes y diferencias entre las parábolas anteriores.

____

____

____

4.- Con sus calculadoras grafiquen las siguientes funciones y llenen la tabla que se presenta a continuación, justifiquen cada una de sus respuestas.

$f(x) = (x-3)^2 + 4$
$f(x) = (x-3)^2 - 4$
$f(x) = (x-3)^2$

$f(x) = (x-1)^2 + 4$
$f(x) = (x-1)^2 - 4$
$f(x) = (x-1)^2$

$f(x) = (x+3)^2 + 4$
$f(x) = (x+3)^2 - 4$
$f(x) = (x+3)^2$

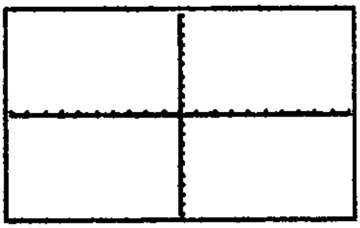
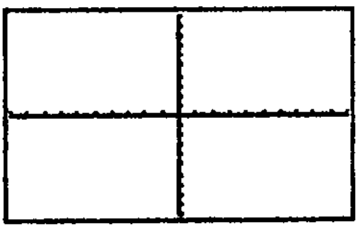
$f(x) = -(x+1)^2 - 4$
$f(x) = -(x+1)^2$
$f(x) = -(x+1)^2 + 4$

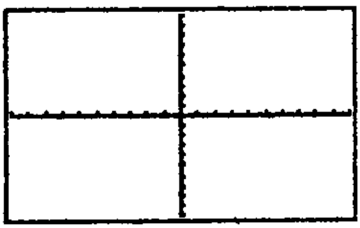
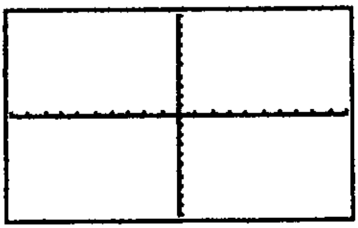
función cuadrática	valores de b y c	coordenadas del vértice	punto máximo ó mínimo

En los dos renglones que sobran sugieran ustedes dos funciones y contesten las mismas preguntas.

En breves palabras escriban como obtuvieron las respuestas.

5.- En los siguientes planos cartesianos dibujen las funciones anteriores de tres en tres mostrando los vértices.

ACTIVIDAD 7
Dada una gráfica encontrar su expresión algebraica o su tabla

TEMA: Función cuadrática

SUBTEMA: Dada una grafica encontrar su expresion algebraica que la represente.

OBJETIVO: Al finalizar la actividad el alumno será capaz de distinguir las características que los parámetros tienen en una función cuadrática y a partir de esto obtendrán su expresión algebraica.

PROCEDIMIENTO:

- Dadas graficas de las formas estudiadas en las actividades 3-6 obtener sus expresiones algebraicas.
- Dadas graficas reconocer los parámetros y en base a esto encontrar las expresiones algebraicas.
- Dadas las graficas reconocer los parámetros proponer su expresion algebraica y las expresiones algebraicas obtenidas al modificar los parámetros.

REQUISITOS PREVIOS:

Las pedidas en la actividad 1 y realizar las actividades de la 1-6

METODOLOGÍA:

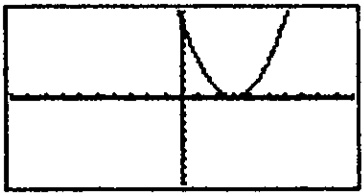
La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes, al finalizarla el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo pero durante la actividad contestará cualquier duda que surja en los equipos

EVALUACIÓN:

Al finalizar el tema se les dará un material similar a este para que en equipos de tres personas lo realicen y entreguen. La evaluación dependerá de las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante cada sesión así como un examen individual al finalizar el tema

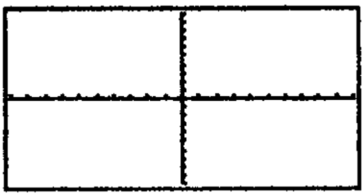
1.- Dadas las siguientes graficas identifiquen los rangos y los parámetros de cada uno. Sugieran una expresión algebraica.

a)



Rango estándar
Intersección con el eje x ________________
Máximo ó Mínimo ______________________
Expresion algebraica ____________________

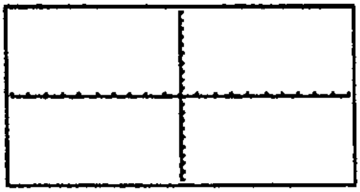
En el plano cartesiano siguiente grafiquen la función cuadrática que encontraron para ver si es igual a la propuesta.



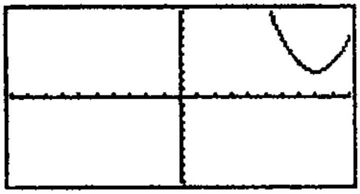
Cambien un parámetro. ¿ Cuál ? y ¿ Qué cambios ocurrieron?

____
____
____

Gráfiquen las dos y muestren la diferencia

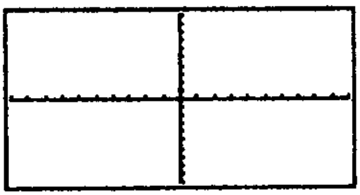


b)



Rango es el estandar
Intersección con el eje x ______________
Máximo ó Mínimo ____________________
Expresion algebraica _________________

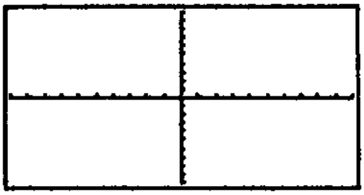
En el plano cartesiano siguiente grafiquen la función cuadrática que encontraron para ver si es igual a la propuesta.



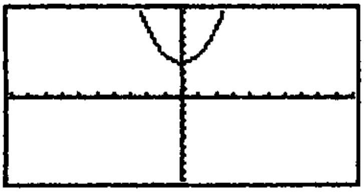
Cambien un parámetro ¿Cuál? ¿ Qué cambios se provocaron ?

____
____
____

Grafiquen las dos para ver la diferencia

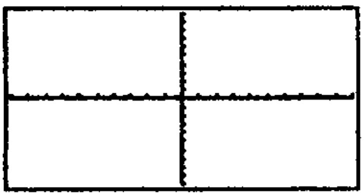


c)



Rango estandar
Intersección con el eje de las x ______________
Máximo ó Mínimo ______________________
Expresion algebraica ___________________

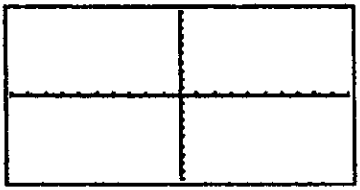
En el plano cartesiano siguiente grafiquen la función cuadrática que encontraron para ver si es igual a la propuesta.



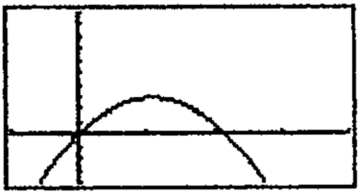
Cambien un parámetro ¿Cuál? ¿ Qué cambios se obtuvieron ?

____
____
____

¿Cómo quedaría la gráfica con este cambio de parámetro ?

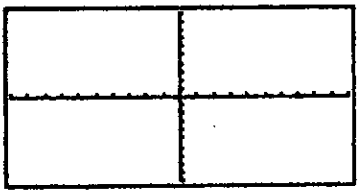


d)



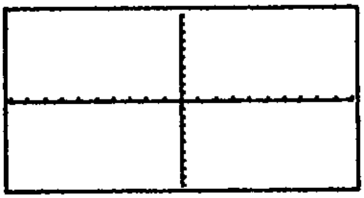
Rango sugerido xmin= - 1 xmax = 4 ymin=- 5 ymax = 10
Intersección con el eje x ______________
Máximo ó Mínimo ______________________
Expresion algebraica ___________________

En el plano cartesiano siguiente grafiquen la función cuadrática que encontraron para ver si es igual a la propuesta.

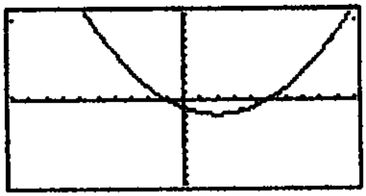


Cambien un parámetro ¿Cuál? ¿ Qué cambios se producen ?

¿Cómo quedaría la gráfica con este cambio de parámetro ?

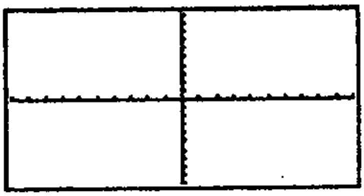


e)



Rango estandar
Intersección con el eje x ________________
Máximo ó Mínimo ____________________
Expresion algebraica __________________

En el plano cartesiano siguiente grafiquen la función cuadrática que encontraron para ver si es igual a la propuesta.



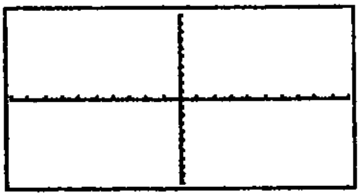
¿Cómo quedaría la gráfica con este cambio de parámetro ?

Cambien un parámetro ¿Cuál? ¿ Qué cambios ocasiona ?

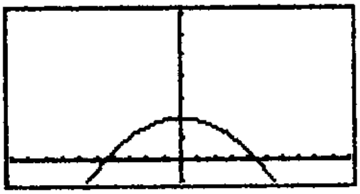
____

____

____

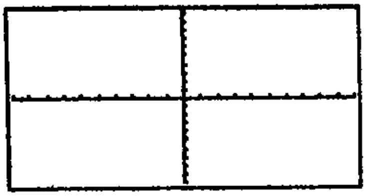


f)



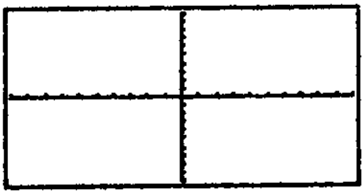
Rango sugerido ______________________
Intersección ______________________
Máximo ó Mínimo ______________________
Expresion algebraica ______________________

En el plano cartesiano siguiente grafiquen la función cuadrática que encontraron para ver si es igual a la propuesta.



¿Qué parámetro pueden cambiar?

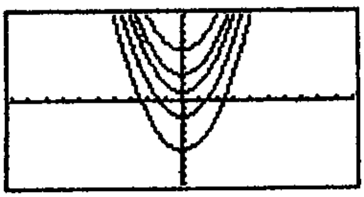
¿Cómo quedaría la gráfica con este cambio de parámetro ?



2.- En las siguientes gráficas se muestran familias de parábolas encuentren la expresion que las represente y el cambio de parámetro que se le debe hacer para formar la familia.

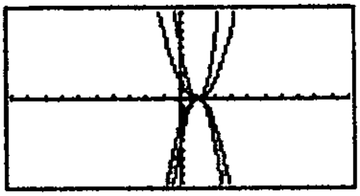
Los rangos son los estandares

a)



Expresión que las represente ____________________________________
Cambio de parámetro ____________________________________

b)



Expresión que las represente ____________________________________
Cambio de parámetro ____________________________________

ACTIVIDAD 8

Obtener las soluciones de la función cuadrática de la forma f(x)=p y f(x) < p de manera gráfica y por medio de tablas.

TEMA: Función Cuadrática

SUBTEMA: Analizar una Situación Problemática de manera tabular y gráfica cuya representación algebraica es conocida, para obtener las soluciones de f(x)=p , o f(x) < p donde p puede tomar cualquier valor real.

OBJETIVO: Capacitar a los alumnos para:

- Elaborar una tabla y una gráfica dada una Situación Problemática que me origine una función cuadrática conociendo su expresión algebraica y con ella encuentre las soluciones de f(x)= p o f(x) < p donde p puede tomar cualquier valor real.

PROCEDIMIENTO:

- Dada una Situación Problemática y su representación algebraica elabore una tabla de valores.
- Dada una tabla de valores elabore una gráfica.
- Reconocer las soluciones de f(x)=0 como las intersecciones con el eje x
- Encontrar las soluciones de f(x)=p y darle significado en la situación problemática.
- Dar ejemplos de f(x)=p cuando esto no tiene solución y explicar el significado de esto.
- Analizar intervalos de solución, es decir, resolver la expresión a<f(x)<b y encontrarle significado en la situación problemática dada.

REQUISITOS PREVIOS:

Todos los requisitos de la actividad 1 y haber realizado las actividades de la 1-7

METODOLOGÍA:

La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes, al finalizarla el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo pero durante la actividad contestará cualquier duda que surja en los equipos.

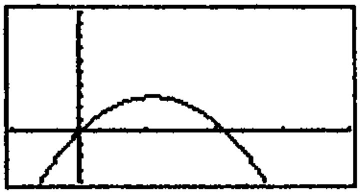
EVALUACIÓN:

Al finalizar el tema se les dará un material similar a este para que en equipos de tres personas lo realicen y entreguen. La evaluación dependerá de las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante cada sesión así como un examen individual al finalizar el tema.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 6

La trayectoria de una pelota de béisbol después de ser bateada puede describirse por la función $h(x) = -0.05x^2 + 5.4x$ donde h(x) es la altura de la pelota cuando está ha avanzado x yardas desde el home.

En la siguiente gráfica se muestra la función cuadrática $h(x) = -0.05x^2 + 5.4x$



1.- Construyan una tabla de valores para h(x) que muestre algunos puntos de la trayectoria de la pelota.

Tabla de valores de la trayectoria de la pelota
$h(x)= -0.05\ x^2 + 5.4\ x$

x	h(x)	coordenadas
yardas que ha avanzado	trayectoria de la pelota	(x, h(x))
0		A
10		B
20		C
30		D
40		E
50		F
60		G
70		H
80		I
90		J
100		K
108		M

2.- Localicen los valores para los cuales h(x)= 0, es decir, los valores que hagan verdadera la siguiente ecuación $-0.05\ x^2 + 5.4\ x=0$.

Las coordenadas son A (, 0) y M (, 0)

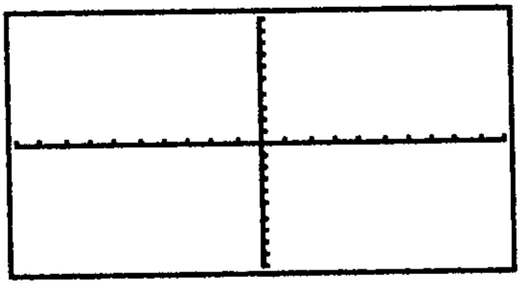
Esto significa que si x= y x= h(x)=0 ó que si x= y x= son solución de h(x)=0

3.- Con un color marquen los puntos A y M en la gráfica de h(x). Escriban con sus palabras. ¿Qué significa en el problema que h(x)=0 ?

____
____
____
____

4.- Busquen en la gráfica los puntos que satisfacen que h(x)=80, es decir, los puntos que resuelvan la ecuación $-0.05\ x^2 + 5.4\ x=80$. Para localizar este punto tracen con otro color la recta y=80 en la misma gráfica y observen ¿Cuáles son los puntos donde se intersecta h(x) y la recta y=80. Cambien los rangos.
Las coordenadas de esos puntos son O (,)
P (,)

5.- Busquen en la gráfica los puntos que satisfacen que h(x)= -1.8, es decir, los puntos que resuelvan la ecuación $-0.05\,x^2 + 5.4\,x=-1.8$. Para localizar este punto tracen con otro color la recta y= -1.8 en otra gráfica y cambien los rangos. Observen ¿Cuáles son los puntos donde se intersecta h(x) y la recta y= -1.8.
Gráfica



Rangos sugeridos : ____
____

Las coordenadas de esos puntos son Y (,)
Z (,)

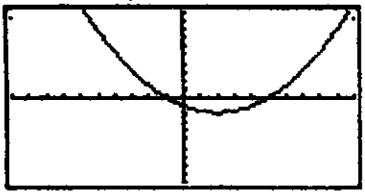
6.- Busquen en la gráfica los puntos que satisfacen que h(x)= - 3, es decir, los puntos que resuelvan la ecuación $-0.05\,x^2 + 5.4\,x= - 3$. Para localizar este punto tracen con otro color la recta y= - 3 en la misma gráfica y observen ¿Cuáles son los puntos donde se intersecta h(x) y la recta y= - 3.

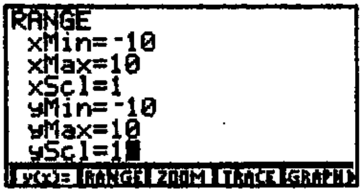
Las coordenadas de esos puntos son L (,)
O (,)

Al trazar la recta y= -3 encontraron que no se intersecta con h(x)= - 3 esto significa que no existe un punto de intersección.

7.- Busquen en la gráfica los puntos que cumplen que h(x) < 0, es decir, los puntos que satisfagan la ecuación $0.2\,x^2-0.8x-1 < 0$

a) Para localizar estos puntos tracen una recta con un color en y= 0 y localicen la intersección con h(x) en el siguiente plano cartesiano.





b) Marquen con otro color todos los valores de x que cumplan que h(x) < 0

¿Cuáles son los valores de x ? x= ______________________________

¿Cuál es el intervalo de x que lo cumple? ________________________

c) Marquen este intervalo con un color

d) ¿ Describan con sus palabras, cuál es el significado de h(x) < 0 ?

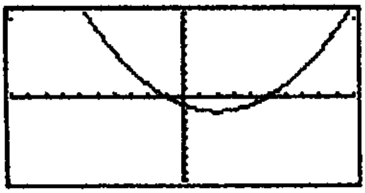
____

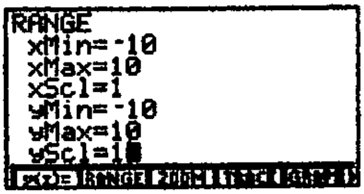
____

____

8.- Busquen en la gráfica los puntos que cumplen que h(x) < -3, es decir, los puntos que satisfagan la ecuación $0.2x^2-0.8x-1 < -3$

a) Para localizar estos puntos tracen una recta con un color en y= -3 y localicen la intersección con h(x) en el siguiente plano cartesiano.





b) Marquen con otro color todos los valores de x que cumplan que h(x) < 0

¿Cuáles son los valores de x ? x= ______________________________

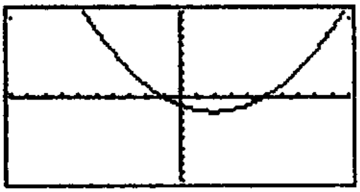
¿Cuál es el intervalo de x que lo cumple? ________________________

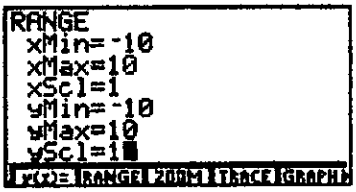
c) Marquen este intervalo con cualquier color.

d) ¿ Describan con sus palabras, cuál es el significado de $h(x) < -3$?

9.- Busquen en la gráfica los puntos que cumplen que $h(x) < 0$, es decir, los puntos que satisfagan la ecuación $0.2x^2 - 0.8x - 1 < 0$

a) Para localizar estos puntos tracen una recta con un color en $y = 0$ y localicen la intersección con $h(x)$ en el siguiente plano cartesiano.





b) Marquen con otro color todos los valores de x que cumplan que $h(x) < 0$

¿Cuáles son los valores de x ? x= ______________________

¿Cuál es el intervalo de x que lo cumple? ______________________

c) Marquen este intervalo con cualquier color

d) ¿ Describan con sus palabras, cuál es el significado de $h(x) < 0$?

Resolver $f(x) = p$ es equivalente a intersectar la función $f(x)$ y la recta $y = p$. Resolver $f(x) < p$ es encontrar los valores de x para los cuales $f(x) < p$

ACTIVIDAD 9

Dadas las raíces de f(x)=0 encontrar la expresión algebraica de una función cuadrática

TEMA: Función cuadrática

SUBTEMA: Dada una función cuadrática encontrar su factorización para encontrar sus raíces, dada su gráfica encontrar sus raíces, su factorización y su expresión algebraica. Identificar el punto máximo ó mínimo.

OBJETIVO: Que el alumno sea capaz de:

- factorizar una función cuadrática identificando las raíces de manera gráfica y algebraica.
- reconocer las raíces en un plano cartesiano e identificar el punto máximo ó mínimo. Cuando la función es representada en factores.
- dada una gráfica encontrar los factores adecuados y la expresión algebraica que se le asocie.

PROCEDIMIENTO:

- dada una función cuadratica su representación $f(x)= ax^2 +bx+c$ dar la factorización correcta.
- dada la función cuadrática en factores encontrar una expresión algebraica de la forma $f(x)= ax^2 +bx+c$.
- dada la factorización ser capaz de elaborar una grafica e identificar el punto máximo ó mínimo .
- dada una tabla graficar y encontrar la factorización y luego la expresión algebraica da la forma $f(x)= ax^2 +bx+c$

REQUISITOS PREVIOS:
Los requeridos en la actividad 1 y realizar las actividades 1-8

METODOLOGÍA:

La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes, al finalizarla el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo pero durante la actividad contestará cualquier duda que surja en los equipos

EVALUACIÓN:

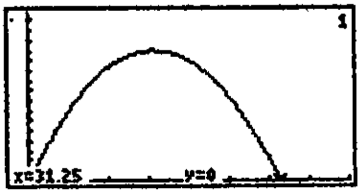
Al finalizar el tema se les dará un material similar a este para que en equipos de tres personas lo realicen y entreguen. La evaluación dependerá de las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante cada sesión así como un examen individual al finalizar el tema.

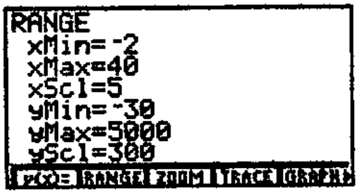
SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 8

Una luz de bengala es lanzada verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo. Su altura h(t) en cm sobre el suelo en un tiempo t segundos esta dado por

$h(t)= 500t - 16\, t^2$

la función h(t) me representa una parábola, de manera grafica podemos encontrar las raíces de h(t) es decir saber en que momento h(t)=0 un bosquejo de la gráfica se presenta a continuación





Los puntos que marcan la intersección con el eje x, es decir los que hacen que h(t)= 0 son (0,0) y (31.25, 0) entonces las raíces de h(t) son 0 y 31.25.

La expresión $h(t) = (t- r1\ )\ (\ t - r2\ )$ donde r1 y r2 son raíces me representa una manera de expresar las funciones cuadráticas cuando el coeficiente de la x^2 vale 1 es decir a= 1, si el coeficiente de la x^2 no es 1 entonces la representación quedaría de la forma $p(t) = a\ (t- r1\ )\ (\ t - r2\ )$ y $h(t) = \dfrac{p(t)}{a}$, para volver a obtener la expresión algebraica conociendo las raíces tengo que sustituirlas en h(t) y efectuar las operaciónes necesarias para despues encontrar p(t) con una a específica.

Esto es $h(t)= (t-0\ )\ (\ t- 31.25\ )$ desarrollando los factores tenemos

$h(t)= t^2 - 0\ (\ t) + t\ (\ -31.25) - 0\ (\ -31.25)$

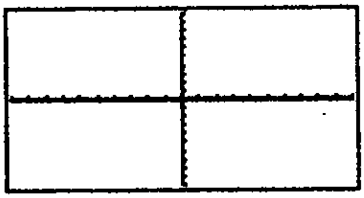
$h(t) = t^2\ - 31.25$

en este caso a= -16 para encontrar p(t) que es la que buscamos multiplicamos por - 16 y obtenemos que

$p(t) = (-16)\ h(t) = -16\, t^2\ + 500$ que era la función original

Marcamos también el punto máximo, con la tecla trece buscamos el punto máximo que es (16, 3, 904)

1.- Si tienen la función $g(x) = x^2 - 7x - 30$ hagan en el plano cartesiano una gráfica que la represente



con la tecla TRACE busquen las soluciones de g(x)= 0 entonces las raíces que son los puntos de intersección con el eje x son (, 0) y (, 0) por lo tanto r1= r2=

Una manera de obtener p(x) conociendo las raíces es obtener

$p(x)= \frac{g(x)}{a} = (x - r1 \ ) (x - r2)$

Desarrollandola tenemos que $g(x) = x^2 - xr1 - xr2 + r1r2$

Entonces p(x) será $a x^2 - axr1 - axr2 +a\, r1r2$

2.- Sea $w(x)= -3x^2 +4x + 17$

Otra manera de encontrar las raíces de la función es usando la calculadora y la tecla POLY , es decir encontramos que la solución de w(x) es r1= 3.14 y r2 = -1.81

Si queremos volver a encontrar la función subtituímos en w(x) = (x - r1) (x - r2) sabiendo que $p(x) = \frac{w(x)}{a}$ entonces

$w(x)= (x-3.14) (x-(-1.81))$

$w(x)= x^2 -3.14 x+ 1.81x -3.14(+1.81)$

$w(x)= x^2 - 1.33 x - 5.68$

en este caso a= -3 y $p(x) = \frac{w(x)}{a}$ para obtener p(x) multiplico por -3 si multiplicamos por -3 tenemos

$p(x) = -3x^2 + 4x + 17$

3.- Usen la tecla POLY para encontrar las raíces $k(x) = 5x^2 + 9x - 17$, luego hagan la factorización y encuentren la expresión otra vez.

4.- Vamos a suponer que tenemos las raíces de una función cuadrática y queremos encontrar ahora la expresión algebraica, lo que debemos hacer es utilizar la factorización que ya sabemos, es decir, si las raíces son r1= ½ y r2= 4 entonces $f(x)= (x- 1/2) (x- 4)$

$f(x)= x^2 - ½ x - 4x + 4(1/2)$

$f(x) = x^2 - ½ x - 4x + 4(1/2)$

$f(x) = x^2 - 9/2 x + 2$ que es la expresión pedida.

5.- Sea $w(x)= (2x-1) (x+5)$

Lo que quiero es encontrar los valores de las raíces, es decir cuando $w(x)= 0$, sabemos que para que sean raíces se necesita que $w(x)= 0$ pero esto solo sucede si

$(2x-1) = 0$ ó $(x+5) = 0$ para que el producto sea cero

Si $2x-1= 0$ entonces $2x= 1$ y $x = 1/ 2$

Pero si $x + 5 = 0$ entonces $x = - 5$

entonces r1 = ½ y r2 = -5

Su representación de la forma $f(x)= ax^2 +bx+c$ la obtenemos efectuando las siguientes operaciones

$w(x)= (2x-1) (x+5) = 2x^2 -x + 10x -5$

$w(x)= 2x^2 + 9x -5$

6.- Encuentren las raíces de las siguientes funciones para $f(x)=0$ y luego conviértanlas a la forma $f(x)= ax^2 +bx+c$

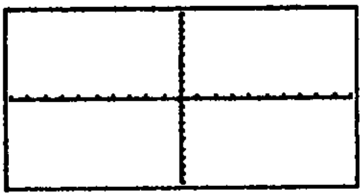
a) $f(x)= (8- 3x) (x+4)$

b) $p(x) = (7x-1) (x+9)$

c) $t(x) = (8x+ 1/7) (x - 1/3)$

7.- Con sus calculadoras elaboren las gráficas de las funciones siguientes marcando las raíces con un color, es decir cuando $f(x)=0$. Marquen el punto máximo ó mínimo.

a) $f(x)=3x^2-18x$, sugieran los rangos adecuados.



las raíces son

r1=
r2=

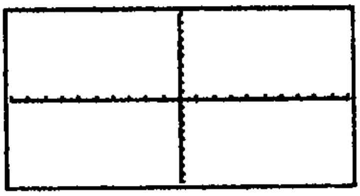
Los rangos que eligieron ______________________________

la representación en factores es :

¿Tiene un punto máximo ó uno mínimo?

las coordenadas son (   )

b) $f(x)= x^2+x-6$ Sugieran los rangos adecuados.



las raíces son
r1=
r2=

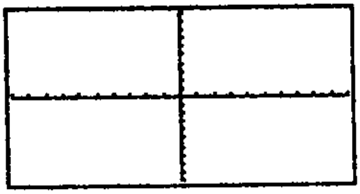
Los rangos que eligieron ______________________________

la representación en factores es :

¿Tiene un punto máximo ó uno mínimo?

las coordenadas son (   )

c) $f(x)=x^2-6x+9$ Sugieran los rangos adecuados.



las raíces son

r1=

r2=

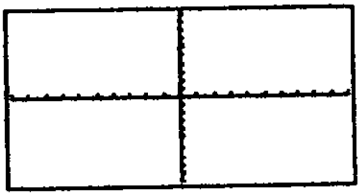
Los rangos que eligieron ______________________________

la representación en factores es :

¿Tiene un punto máximo ó uno mínimo?

las coordenadas son (   )

d) $f(x)= -x^2 - 4x +12$ Sugieran los rangos adecuados.



las raíces son:

r1=   r2=

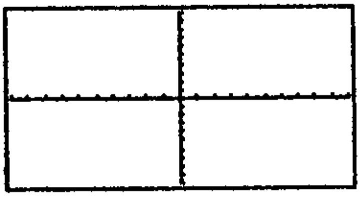
Los rangos que eligieron ______________________________

la representación en factores es :

¿Tiene un punto máximo ó uno mínimo?

las coordenadas son (   )

e) $f(x)=x^2+x+4$ Sugieran los rangos adecuados.



las raíces son

r1=
r2=

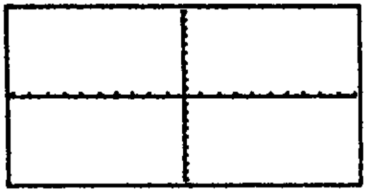
Los rangos que eligieron ____

la representación en factores es :

¿Tiene un punto máximo ó uno mínimo?

las coordenadas son (   )

f) $f(x)=5x^2+15x$ Sugieran los rangos adecuados.



las raíces son

r1=
r2=

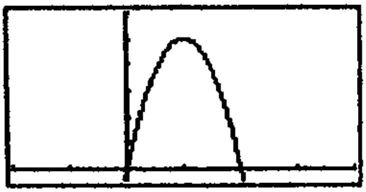
Los rangos que eligieron ____________________________________

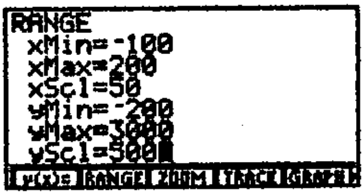
la representación en factores es :

¿Tiene un punto máximo ó uno mínimo?

las coordenadas son (   )

8.- Si tengo la gráfica de una función cuadrática puedo encontrar las raíces con la calculadora y la tecla TRACE y formar su expresión algebraica es decir la gráfica de una función cuadrática.





la intersección con el eje x se encuentran en r1= 0 y r2= 100, como se habré la parábola, hacia abajo necesito que x^2 tenga signo negativo y la expresión me queda

$f(x)= (x-0)\ (x-100)$
$f(x) = x^2 - 0 - 100x + 0$

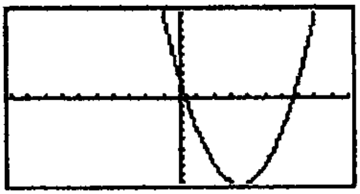
$f(x) = x^2 - 100x$

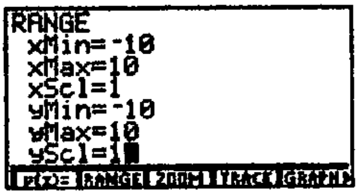
$f(x) = x^2 - 100x$

Tiene un punto máximo (50, 2500)

9.- Hagan lo mismo con las siguientes gráficas (Todas tienen el mismo rango)

a)





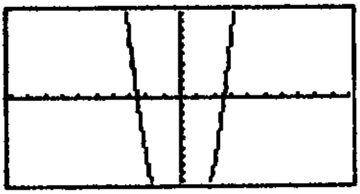
sus raíces son ______________________________

su factorización es __________________________

su representación de la forma $ax^2 + bx + c$ es ____________________________

su punto máximo ó mínimo es ______________________________________.

b) Hagan lo mismo con la siguiente gráfica. Los rangos son estandar.

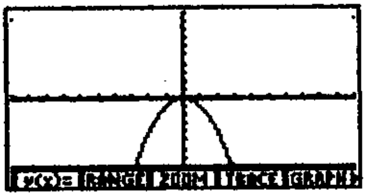


sus raíces son______________________________

su factorización es __________________________ su representación de la forma $ax^2 + bx + c$ es ______________________________

su punto máximo ó mínimo es ____

c) Hagan lo mismo con la siguiente gráfica. Los rangos son estandar



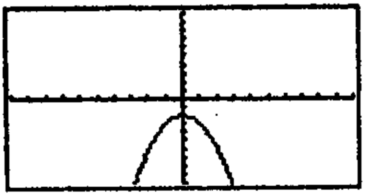
sus raíces son_______________________________

su factorización es ___________________________

su representación de la forma $ax^2 + bx + c$ es ______________________________

su punto máximo ó mínimo es ____

d) Hagan lo mismo con la siguiente gráfica. Los rangos son estandar



sus raíces son_______________________________

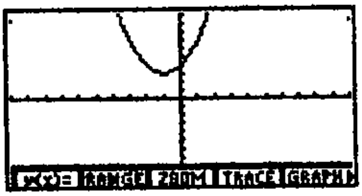
su factorización es ___________________________

su representación de la forma $ax^2 + bx + c$ es ______________________________

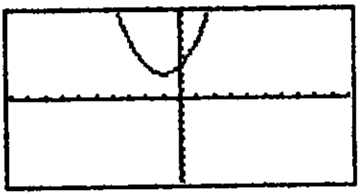
su punto máximo y mínimo es ____

TAREA
ACTIVIDAD 7, 8 y 9

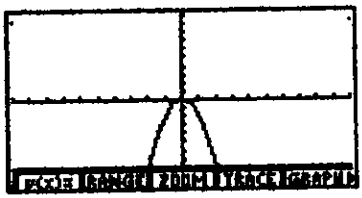
1.- Dadas las siguientes gráficas encuentre la expresión algebraica que la representa.
Los rangos son los estándares.



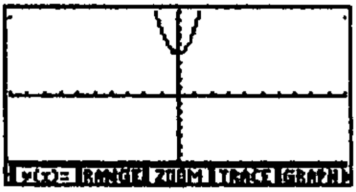
f(x)= ____________________________________



f(x)= ____________________________________



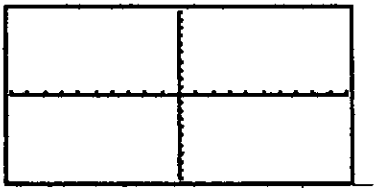
f(x)=



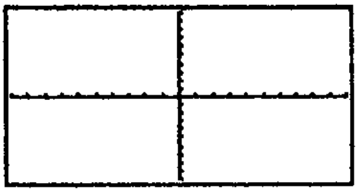
f(x)= ____

2.- Resuelvan las siguientes ecuaciones, de manera algebraica y gráfica:

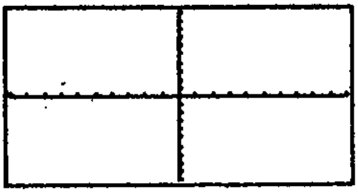
a) $f(x) = x^2 - 44$ si $f(x) = 0$ Rangos sugeridos ____________________



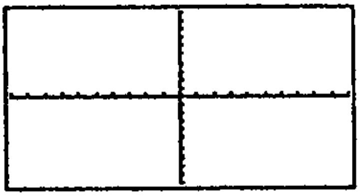
b) $x^2 - 8 = 41$ Rangos sugeridos ____________________



c) $x^2 = 6.25$ Rangos sugeridos ____________________

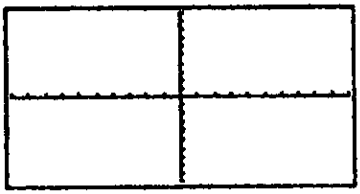


d) $x^2 = -9$ Rangos sugeridos ______________________

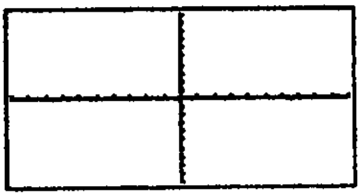


3.- Resuelvan las siguientes ecuación de manera gráfica:

a) $8x^2 + 28x = -28$



b) $3x^2+27x= 12$



4.- Encuentra las raíces de la función f(x) = 0 y luego conviértela a la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$?

5.- ¿ Cuál es la representación factorial de $3x^2 + 9x$?

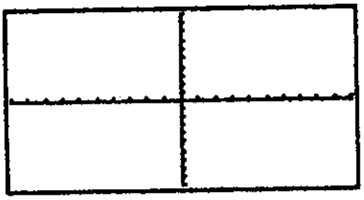
6.- ¿ Cuál es la representación factorial de la función $f(x) = x^2 + 10x + 25$?

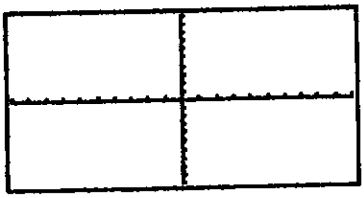
7.- Sea $f(x)= x^2$ y $g(x) = x^2 + 3$ dos funciones cuadráticas.

a) Elaboren una tabla de valores cuyos valores de entrada estén entre -2 y 1 con intervalos de 0.5 en 0.5.

valores de x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 3$
-2		
-1.5		
-1		
-.5		
0		
.5		
1		

b) Grafiquen f(x) y g(x) y propongan los rangos adecuados, resuelvan las ecuaciones para $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$





ACTIVIDAD 10

Comparando la solución gráfica con la solución algebraica de funciones cuadráticas.

TEMA: Función cuadrática.

SUBTEMA: Encontrar la solución de una función cuadrática de la forma $ax^2=c$, $ax^2< c$ y $ax^2 > c$ de manera gráfica y luego comprobar la respuesta de manera algebraica.

OBJETIVO: Capacitar a los alumnos para:

- La solución de las funciones cuadráticas de la forma $ax^2=c$, $ax^2< c$ y $ax^2 > c$ de manera gráfica para luego comprobar la solución de manera algebraica.

PROCEDIMIENTO:

- Dada una función cuadrática de la forma $ax^2= c$ graficarla e identificar las soluciones.
- Dada una función cuadrática de la forma $ax^2 < c$ graficarla e identificar las soluciones.
- Dada una función cuadrática de la forma $ax^2 > c$ graficarla e identificar las soluciones.
- Dada una función $ax^2+ c = d$ convertirla a una de la forma $ax^2= c$ y encontrar su solución.
- Dada una función $ax^2+ c = d$ convertirla a una de la forma $ax^2= c$ y encontrar que sus soluciones son equivalentes.
- Encontrar cuando una función cuadrática no tiene una solución real.
- Encontrar las raíces aproximadas de una función cuadrática que no tienen solución exacta.
- Resolver funciones cuadráticas en Situaciones Problemáticas dadas.

REQUISITOS PREVIOS:

Los solicitados en la actividad 1 , además resolver las actividades de la 1-8

METODOLOGÍA:

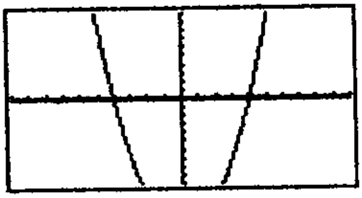
La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes, al finalizarla el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo pero durante la actividad contestará cualquier duda que surja en los equipos.

EVALUACIÓN:

Al finalizar el tema se les dará un material similar a este para que en equipos de tres personas lo realicen y entreguen. La evaluación dependerá de las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante cada sesión así como un examen individual al finalizar el tema.

Dada la función $f(x) = x^2 - 16$ y su gráfica podemos encontrar cuando $f(x)= 0$ encontrando los puntos donde se intersectan con el eje x esto es con un rango estandar.

Si $f(x) = x^2 - 16$ la gráfica es



Solución (-4,0) y (4,0)

La solución $f(x)= 0$ esta representada en la gráfica por los puntos de intersección con el eje x, es decir encontramos el valor de x cuando $y=0$

Otra manera de encontrar esta solución es de manera algebraica, resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 - 16 = 0$ podemos despejarla y obtenemos que $x^2 = 16$ donde

$x= \pm \sqrt{16}$

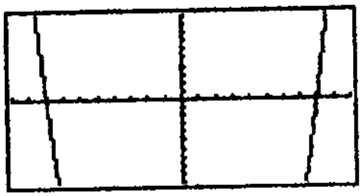
$x1= 4$

$x2= - 4$

Si $y= 0$ $x1= 4$ y $x2 = - 4$ la solución es $(- 4 , 0)$ y $(4 , 0)$

Como pueden notar son las mismas soluciones que encontramos de manera gráfica.

2.- Ahora hagamos lo mismo con la siguiente función $f(x)= x^2 - 64$ la solución para $f(x)= 0$ esta dada de manera gráfica por



Entonces su solución gráfica es (-8,0) y (8,0)

La solución f(x)= 0 esta representada en la gráfica por los puntos de intersección con el eje x, es decir encontramos el valor de x cuando y=0

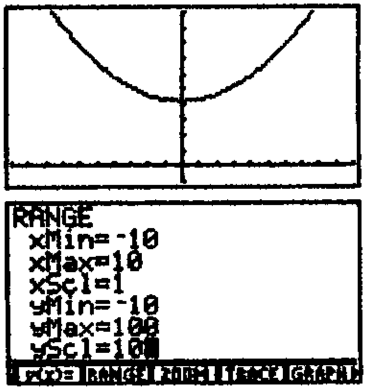
Otra manera de encontrar esta solución es de manera algebraica, resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 - 64 = 0$ al despejarla obtenemos que $x^2 = 64$ donde $x= \pm \sqrt{64}$

x1= 8
x2=-8

Como pueden notar son las mismas soluciones que encontramos de manera gráfica.

3.- ¿Pero que pasa si $f(x)= x^2 + 42.25$?

Su gráfica es



Como ven no se intersecta con el eje de las x, esto indica que no existe un valor x que cumpla con que f(x) = 0

Esta parábola no se intersecta con el eje x, eso significa que no existe ningún número real para el cual f(x)=0

De manera algebraica encontramos un resultado similar

Resolviendo $x^2 + 42.25 = 0$

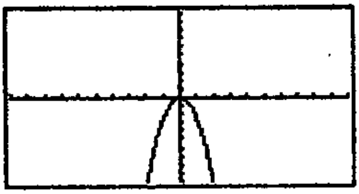
$x^2 = - 42.25$

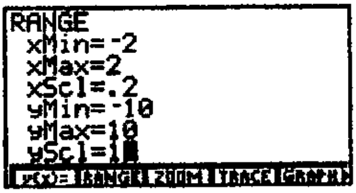
$x = \pm\sqrt{-45.25}$

pero esto no tiene solución en los reales pues no existe ningún numero real que tenga una raíz negativa esta solución es imaginaria. y su solución se verá después.

Podemos concluir que esta parábola no tiene una solución real.

4.- Si $f(x) = -6.5x^2$ su gráfica es





Si buscamos para que valores x intersecta con el eje x obtenemos que x = 0 de manera algebráica tenemos

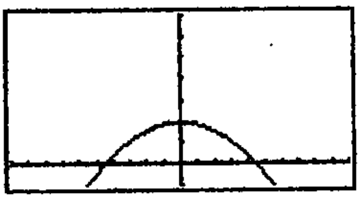
$-6.5x^2 = 0$ entonces $x^2 = 0$

Y la solución es única , cuando $x= 0$

Esta parábola solo tiene una solución.

De manera algebraica tenemos $-6.5x^2 = 0$ entonces $x^2 = \frac{0}{-6.5} = 0$ entonces $x= 0$

5.- Si $f(x) = -x^2 + 20$ la gráfica que obtenemos



y sus solución es $(-\sqrt{20}, 0)$ y $(\sqrt{20}, 0)$

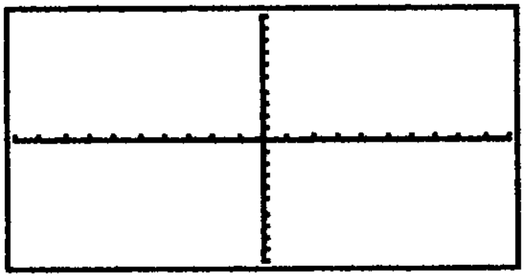
De manera algebraica obtenemos el mismo resultado ya que

Si $f(x) = -x^2 + 20$ entonces $-x^2 + 20 = 0$ $-x^2 = -20$

$x^2 = 20$ y por lo tanto $x1 = \sqrt{20}$ $x2 = -\sqrt{20}$

DESIGUALDADES DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

6.- Si $0 < f(x) = x^2 - 49$ existe una forma gráfica de resolver la desigualdad con la calculadora encuentren la gráfica de f(x)



escriban los rangos que usaron.____

para encontrar la solución de manera algebraica puedo descomponer f(x) en producto de factores esto es $f(x) = (x + 7)(x - 7)$ y me piden los valores que cumplen con que $0 < f(x) = x^2 - 49$ que es equivalente a decir que $0 < f(x) = (x + 7)(x - 7)$

la solución para x son todos los valores que cumplan que el producto sea mayor que cero para que esto suceda se requiere encontrar los valores de x que hagan cierto

$0 < (x + 7)(x - 7)$ para que esto ocurra se necesita que los dos factores sean mayor que cero o que los dos sean menor que cero pues al multiplicar (-) por (-) será positivo.

es decir para que $0 < (x+7)$ y $0 < (x-7)$ se tiene que $-7 < x$ y $7 < x$ poniendo esto en una linea recta tenemos que

__________-7______________0______________7_________ **la solución es 7 x**

Otra opción será que $x+7 < 0$ y $x - 7 < 0$

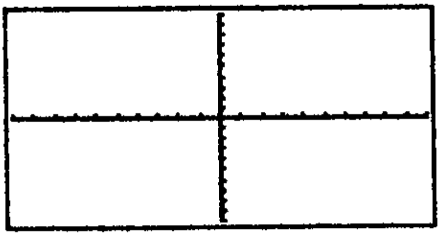
para que esto se cumpla se necesita que $x < -7$ y $x < 7$ esto es

____________-7 ___________0___________7___________ **solución x -7**

Entonces la solución son todos los valores que cumplen con que $7 < x$ y $x < -7$

señala en la gráfica el conjunto solución.

7 .- Si $0 < x^2 + 16$ podemos graficarla en el siguiente plano cartesiano y tenemos que



De manera algebráica obtenemos que:

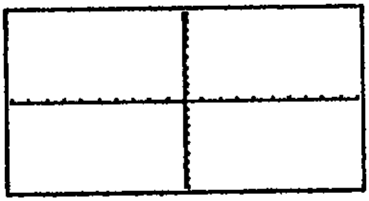
$0 \leq x^2 + 16$,

$-16 \leq x^2$

pero esto siempre ocurre ya que cualquier número elevado al cuadrado siempre es positivo y siempre es mayor a 16, la única x que no cumple con esto es cuando me piden que $-16 = x^2$

Señalen en el eje cartesiano de arriba el conjunto solución.

8 .- Si $0 < x^2 - 0.25$



la solución para x son todos los valores de x que cumplen que 0 $(x + 5)(x-5)$ se necesita que $(x+5)$ 0 y $(x - 5)$ 0 es decir x -.5 y x .5 entonces
__________________________ solución x .5

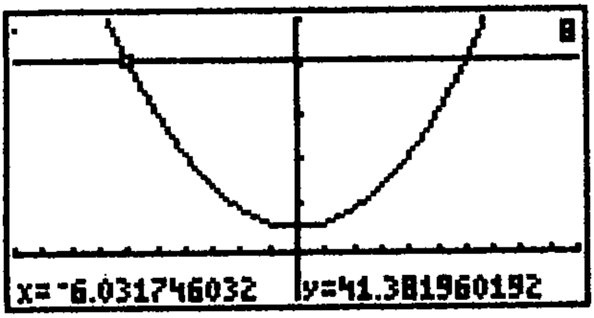
ó (x-.5) 0 (x-.5) 0 entonces x -.5 x .5 ___________________

la solución es x -.5 y x .5

señále en la gráfica el conjunto solución al que llegaron.

9.- Existen dos maneras de resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 5 = 41$

La primera es graficar la función cuadrática $f(x)= x^2 + 5$ y la recta $f(x)= 41$, y los puntos donde se intersectan esos son los puntos que cumplen con la ecuación. Usando la calculadora gráfica y la tecla trace podemos encontrarla de manera inmediata



Entonces la solución es M (,) y N (,)

Otra manera de resolverlo es convertir la función cuadrática $x^2 + 5 = 41$ a la forma $ax^2 = c$ obtener el valor de x, esto es:

$x^2 + 5 = 41$

esta ecuación es equivalente a la ecuación

$x^2 = 41 - 5$

efectuando la operación tenemos

$x^2 = 36$

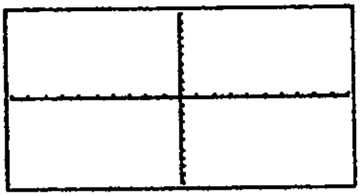
$x1,2 = \pm\sqrt{36}$

obteniendo la raíz tenemos

x1 = 6 x2= -6

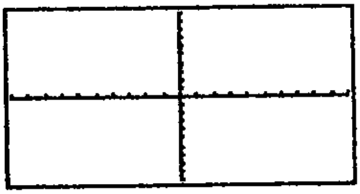
10.- Resuelve de dos manera distintas las siguientes ecuaciones encontrando los valores de x que cumplen con la ecuación.

a) $x^2 + 8 = 44$



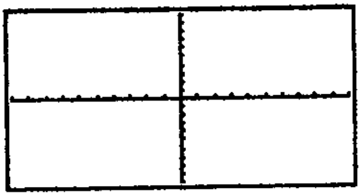
Rangos sugeridos ____________________

b) $x^2 + 25 = 16$



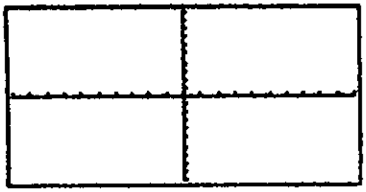
Rangos sugeridos ____________________

c) $x^2 - 23 = 77$



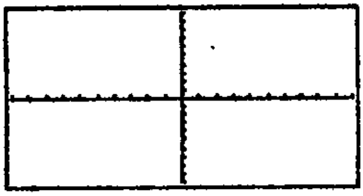
Rangos sugeridos ____________________

d) $f(x) = x^2 - 45$ cuando $f(x)=0$



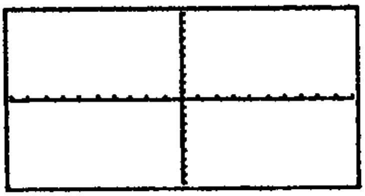
Rangos sugeridos ____________________

e) $f(x)= 3x^2 + 48$ si $f(x) = 4$



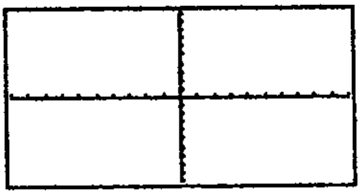
Rangos sugeridos ____________________

f) $f(x) = 7x^2 - 63$ si $f(x) = - 4$



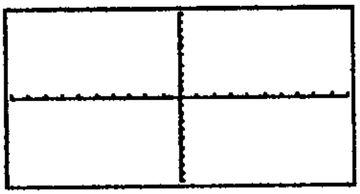
Rangos sugeridos ____________________

g) $f(x) < 3x^2$ si $f(x) = 0$



Rangos sugeridos ____________________

h) $f(x) < -8x^2$ si $f(x) = -2$



Rangos sugeridos ____________________

ACTIVIDAD 11

Funciones cuadráticas equivalentes

TEMA: Función cuadrática

SUBTEMA: Equivalencia de funciones cuadráticas

OBJETIVO: Que el alumno sea capaz de:

- reconocer funciones cuadráticas equivalentes por medio de dos expresiones algebraicas y una tabla ó gráfica.
- reconocer las diferentes formas algebraicas con los que se representa una función cuadrática.

PROCEDIMIENTO:

- dadas dos expresiones algebraicas construir la gráfica de las dos y compararlas.
- dadas dos expresiones algebraicas construir la tabla de las dos y compararlas.
- dadas dos expresiones algebraicas construir la tabla, la gráfica de las dos y compararlas.
- describir cada una de las formas en las que se puede escribir la función cuadrática.
- pasar de una forma a otra e identificar que son las mismas.

REQUISITOS PREVIOS:

Las requeridas en la actividad 1 y realizar las actividades 1-10

METODOLOGÍA:

La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes, al finalizarla el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo pero durante la actividad contestará cualquier duda que surja en los equipos

EVALUACIÓN:

Al finalizar el tema se les dará un material similar a este para que en equipos de tres personas lo realicen y entreguen. La evaluación dependerá de las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante cada sesión así como un examen individual al finalizar el tema

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 9

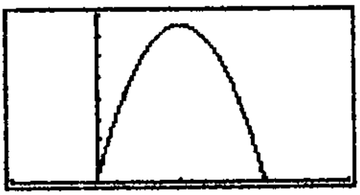
Los estudiantes de la Preparatoria quieren hacer un negocio para su fiesta de graduación, uno de ellos tiene un conjunto de rock y lo ofrece a su grupo para ir a tocar en la fiesta. El jefe de grupo pidió el gimnasio de la escuela para hacer la fiesta ahí y se lo prestaron. Ahora deben determinar el precio al que van a vender los boletos pues quieren que asistan el mayor número de personas.

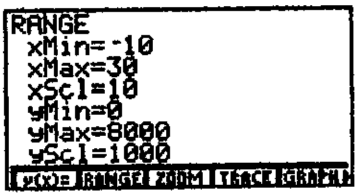
Algunas investigaciones del comité que se dedica a alquilar el gimnasio para eventos encontró que existe una relación entre el precio del boleto y el número de boletos que se venden y esta dada por $s(x) = 1500 - 75x$ donde x es el costo del boleto y s(x) el número de boletos que puedo vender.

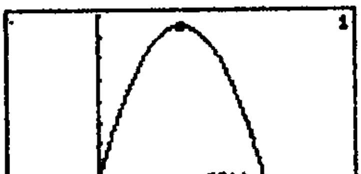
Ya sabiendo cuantos boletos pueden vender se puede obtener una nueva función que representa el ingreso que se va a obtener de la fiesta, esto lo hacen multiplicando s(x) por x , es decir el número de boletos que voy a vender por el precio de ellos, esto se representa como $r(x)= (1500-75x)\ x$

Donde x es el costo del boleto y r(x) el ingreso que obtengo al vender x boletos.

Para poder analizar esta función que me relaciona precio del boleto con ingreso elaboraron una gráfica y obtuvieron lo siguiente







Analizando esta grafica encontraron varias cosas:

1.- el valor máximo de ingreso es 7,500 pesos si el precio del boleto es 10 pesos.

2.- si vendemos el boleto a 0 pesos ó 20 pesos no habrá ningún ingreso, pues si no se cobra no podemos tener dinero y si lo venden a 20 nadie pagaría ese precio.

3.- Uno de los estudiantes no comprendía por que ocurre esto y otro compañero le explico:

El ingreso es cero si x=0 ó si x=20 porque al sustituir alguno de esos valores de x en la función nos da como resultado r(x) = 0 esto es

para x= 0 tenemos r(0)= (1500-75(0))=1500(0)=0
para x = 20 tenemos r(20)= (1500-75(20))20 = (1500-1500)(20)=0

La función de ingresos es una función cuadrática pero esta escrita como el producto de dos factores, si desarrollamos este factor obtenemos la función de la forma acostumbrada, es decir, r(x) = (1500-75x)x es equivalente a r(x) =1500x-$75x^2$ que es equivalente a r(x) = $-75x^2 + 1500$ x

Es importante que nosotros reconozcamos diferentes formas para representar las funciones cuadraticas, pues cada una de ellas nos puede dar diferente información. Otra manera de representar las funciones cuadráticas ademas de $f(x)=ax^2+bx+c$ es verla como el producto de dos funciones lineales, y los ceros de la función los encuentro encontrando la solución de cada uno de los factores. Esto se hace buscando cuando los factores lineales valen cero. Una vez que localizamos los ceros de la función cuadrática podemos localizar el punto mínimo ó máximo de la función. Como lo hicimos en la actividad 10. Ahora vamos a ver diferentes funciones y diferentes maneras de representarlas.

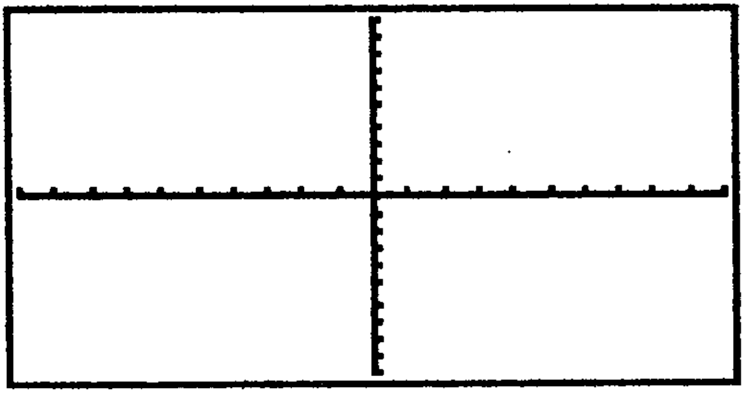
Elaboren una tabla para cada una de las dos funciones cuadráticas siguientes:

a) $f(r) = 0.5r^2 - r$ g(r) = 0.5 r (r - 2)

r	$f(r) = 0.5r^2-r$	g(r) = 0.5r (r - 2)
0		
-1		
1		
-2		
2		

¿ En que se parecen las dos tablas? ____________________
¿En que se parecen las coordenadas de f(r) y g (r) ? ____________________

Construyan las gráficas de f(r) y g(r) en el mismo plano cartesiano



Sugieran los rangos adecuados
RANGOS
XMIN XMAX XSCL YMAX YMIN YSCL

¿Cuáles son las raíces de f(r) ? ________________________
¿Cuáles son las raíces de g(r) ? ________________________

b) Si $f(e) = (e+2)(3-e)$
$g(e) = (3-e)(e+2)$

¿Son funciones equivalentes? ________________________
¿ Porqué? ____________________________________

Encuentren la tabla

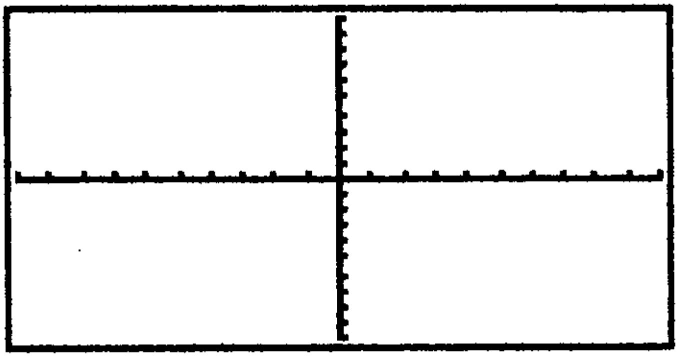
e	f(e) = (e+2)(3-e)	g(e) = (3-e)(e+2)
0		
-1		
1		
-2		
2		

¿ En que se parecen las dos tablas? ________________________

¿En que se parecen las coordenadas de f(e) y g (e) ? ______________________

¿Cómo son las gráficas de f(e) y g(e) ? ____________________________________

Dibujen las gráficas de f(e) y g(e)



Sugieran los rangos adecuados

RANGOS XMIN XMAX XSCL YMAX YMIN YSCL

¿Cuáles son las raíces de f(e) ? ____________________________________
¿Cuáles son las raíces de g(e) ? ____________________________________

c) f (v)= 4(v+8)

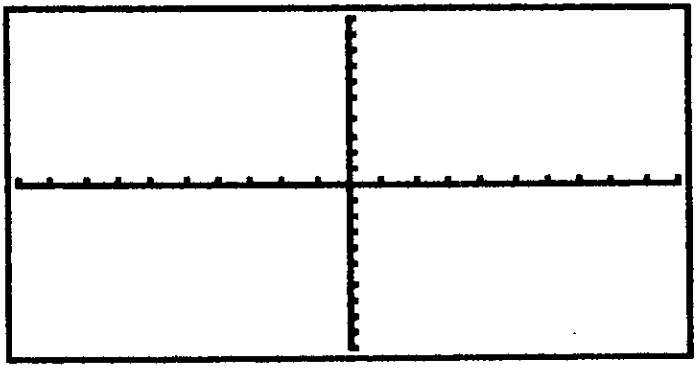
g (v) = (32+4v)

Encuentren los valores de la tabla

v	f(v) = 4(v+8)	g(v)= (32+4v)
0		
-1		
1		
-2		
2		

¿ En que se parecen las dos tablas? ______________________
¿En que se parecen las coordenadas de f(v) y g (v) ? ______________
¿Cómo son las gráficas de f(v) y g(v) ? ______________________

Construyan un bosquejo de las gráficas de f(v) y g(v)



Sugieran los rangos adecuados

RANGOS	XMIN	XMAX	XSCL	YMAX	YMIN	YSCL

¿Cuáles son las raíces de f(v) ? ______________________
¿Cuáles son las raíces de g(v) ? ______________________

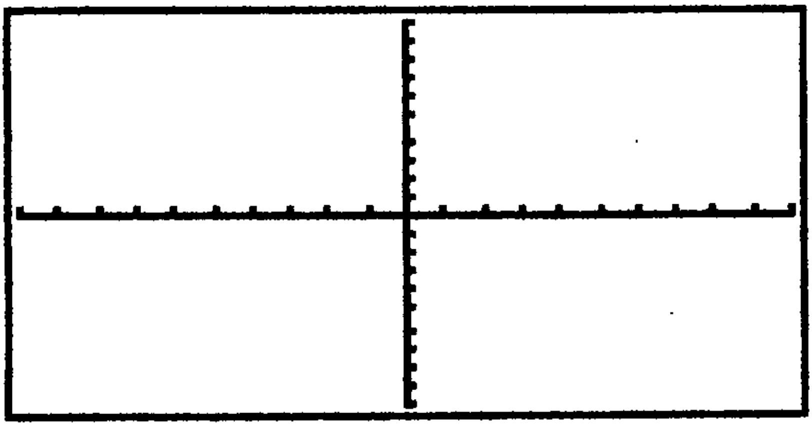
d) $f(j) = 3j^2+2j$
$g(j) = 5j^2$

Encuentren la siguiente tabla

j	$f(j) = 3j^2+2j$	$g(j) = 5j^2$
0		
-1		
1		
-2		
2		

¿ En que se parecen las dos tablas? ______________________
¿En que se parecen las coordenadas de f(j) y g (j) ? ______________
¿Cómo son las gráficas de f(j) y g(j) ? ______________________

Dibujen las gráficas de f(j) y g(j)



Sugieran los rangos adecuados

RANGOS XMIN XMAX XSCL YMAX YMIN YSCL

¿Cuáles son las raíces de f(j) ? ____________________

¿Cuáles son las raíces de g(j) ? ____________________

e) $f(x) = (3x^2+x)$

$g(x)= (3x^2/ 10)$

Elaboren la siguiente grafica

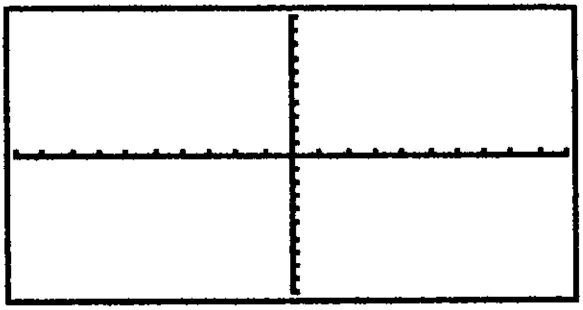
x	$f(x)= 3x^2-x$	$g(x)= 3x^2/10$
0		
-1		
1		
-2		
2		

¿ En que se parecen las dos tablas? ____________________

¿En que se parecen las coordenadas de f(x) y g (x) ? ____________________

¿Cómo son las gráficas de f(x) y g(x) ? ______________________________

Dibujen las gráficas de f(x) y g(x)



Sugieran los rangos adecuados

RANGOS XMIN XMAX XSCL YMAX YMIN YSCL

¿Cuáles son las raíces de f(x) ? ______________________________
¿Cuáles son las raíces de g(x) ? ______________________________

Cualquier función cuadrática se puede expresar de diferentes maneras:

a) Si $f(x)= ax^2+bx+c$ se le denomina la forma general de representar una función cuadrática ejemplo $f(x)= 2x^2+5x+9$

b) Si $f(x)= a(x-h)^2 + k$ es otra forma de expresar una función cuadratica donde el punto máximo ó mínimo esta dado por (h,k). ejemplo $f(x)= (x-3)^2 - 0.5$ el punto mínimo de la parábola es (3,0.5)

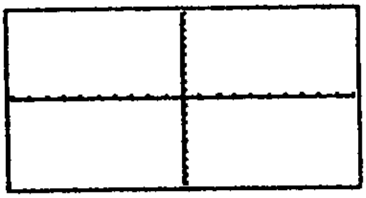
c) Si $f(x)= a\,(x-r1)\,(x-r2)$ es la representación es su forma factorial, donde r1 y r2 me determinan las raíces de la parábola. ejemplo $(x-4)(x+1)$ donde r1= 4 y r2= -1 aquí a= 1

a) Si $f(x)= (x-2)^2+ 3$ desarrollando el binomio tenemos

$f(x)= x^2-4x+4+3$

$f(x)= x^2-4x +7$ que nos queda en forma general

Un dibujo de la gráfica será Los rangos son los estandar



el punto mínimo ó máximo es ( )

las raíces de la función son:

r1= r2=

b) Si $f(x)= -0.5\ (x+1)^2 + 4$

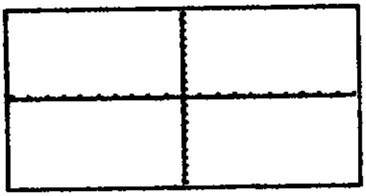
la desarrollo y me queda

$f(x)= -0.5\ (x^2+2x+ 1)+4$

$f(x)= -0.5\ x^2-1x -0.5 + 4$

$f(x)= -0.5\ x^2-x + 3.5$ que me queda en su forma general

La gráfica queda como:



las raíces de la función son:

el punto mínimo ó máximo es ( )

r1= r2=

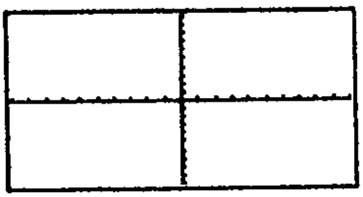
c) Si $f(x)= 1.5 (x-2)^2 -3$

$f(x)= 1.5 (x^2-4x+4)+3$

$f(x)= 1.5 x^2- 6x + 6 +3$

$f(x)= 1.5 x^2-6x + 9$

El bosquejo de la gráfica será



el punto mínimo ó máximo es (   )

las raíces de la función son:

r1=   r2=

2.- Si tengo una parábola cuyo vértice es el punto (0,0) y $f(x) = x^2$ ¿Cuál será la función cuadratica expresada en forma de vértice la quiero recorrer dos unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba?

Respuesta: $(x-2)^2+3$

Si tengo una parábola en el punto (0,0) ¿Cuál será la función cuadratica expresada en la forma $f(x)= a(x-h)^2 + k$ si la quiero recorrer tres unidades a la izquierda y corre 2 unidades hacia abajo?

Respuesta: $(x+3)^2-2$

3.- Dada la forma general de la función cuadrática podemos identificar los parámetros a,b y c. Si tengo $f(x)= 3x^2+ 4x+6$, el coeficiente de la x^2 es a, el coeficiente de x es b y el coeficiente independiente es c.

Entonces   a= 3   b=4   c=6

La función $f(x)= x^2-6x+9$ se puede escribir de la forma $f(x)=(x-3)^2$ si ahora yo quiero encontrar la solución de la ecuación $0= x^2-6x+9$ esto significa que quiero que $(x-3)^2 = 0$ entonces $x-3 = \sqrt{0}$ entonces $x-3=0$ $x=3$

Soluciones por la formula general

Si quiero obtener en forma general una expresión que me diga cuanto vale x si la función es de la forma

$a(x-h)^2+k = 0$

despejando

$a(x-h)^2= -k$

$(x-h)^2 = -k / a$

$x-h = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}}$

$x = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}} + h$

$x1= \pm\sqrt{\frac{-k}{a}} + h$

$x2= \pm\sqrt{\frac{-k}{a}} + h$

Veamos un ejemplo

Si tengo la ecuación $-3(x-2)^2+5= 0$

$a= -3$ $h= 2$ $k= 5$

$x1= +\sqrt{\frac{-5}{-3}} - 2 = \sqrt{\frac{5}{3}} - 2$

$x2= -\sqrt{\frac{-5}{-3}} - 2 = -\sqrt{\frac{5}{3}} - 2$

Si tengo una función de la forma f(x)= ax^2+bx+c y quiero encontrar cuando $ax^2+bx+c = 0$

Sabemos que a=a h= -b/2a k=(c-b^2) / a

entonces x1,2 = h $\pm\sqrt{\frac{-k}{a}}$

entonces x 1,2 $=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{-(c-b^2)}{a}*\frac{1}{2a}}$

entonces x 1, 2 = $\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{\frac{b}{4ac}^2}{a}}$

entonces x 1, 2 = $\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{\frac{b^2}{4a}}{a}-\frac{\frac{4ac}{4a}}{a}}$

entonces x 1, 2 = $\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

entonces x 1, 2 = $\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

entonces x 1, 2 = $\frac{-b^2\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

a esta fórmula se le llama fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado.

Usando la fórmula general resuelve las siguientes funciones dibujando su gráfica para corroborar que las raíces están correctas.

a) f(x)= x^2 -14x -26 dar el valor de x para f(x)= 0

sabemos que

a=1 b=-14 c=-26

$$\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4(1)(-26)}}{2a}$$

$$\frac{14\pm\sqrt{196+104}}{2}$$

$$\frac{14\pm\sqrt{300}}{2}$$

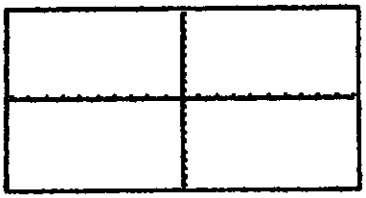
$$\frac{14+\sqrt{300}}{2}$$

$$\frac{14-\sqrt{300}}{2}$$

entonces $x1=\frac{14+\sqrt{3\times100}}{2}=\frac{14+10\sqrt{3}}{2}7+5\sqrt{3}$

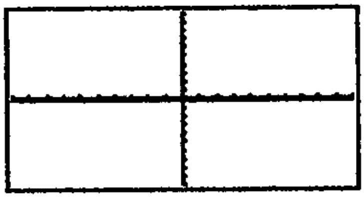
$x2=\frac{14-\sqrt{3\times100}}{2}=\frac{14-10\sqrt{3}}{2}=7-5\sqrt{3}$

En la siguiente gráfica señalen las raíces que otuvieron dibujando la gráfica



b) $3x^2-13=5x$ primero la convertimos a la forma $f(x)=ax^2+bx+c$
entonces $3x^2-5x-13=0$ $a=3$ $b=-5$ $c=-13$

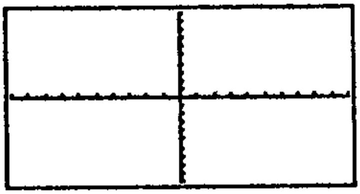
Resuelvanla con la formula general y luego grafiquen señalando la solución



c) $x^2 + 5x = -1$

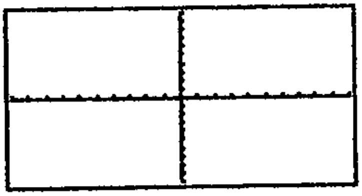
$x^2 + 5x - 1 = 0$ donde $a = 1$ $b = 5$ y $c = -1$

Resuelvanla con la formula general para despues graficarla y señalar las raíces en la gráfica.



d) $3x^2 - 3x - 2 = 0$

Resuelvanla por formula general y dibujen la gráfica resaltando las raíces.

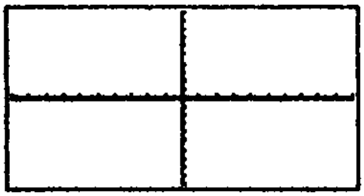


SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 10

Cuando un golfista golpea una pelota de golf, la altura de la pelota varia conforme esta se aproxima al pasto. Para un golpe que produce una distancia de 100 metros, su función esta expresada por f(t)= $-5t^2 + 22.5\,t$ donde t es el tiempo que la pelota esta en el aire y f(t) la altura.

Escriban la función como el producto de dos factores : ____________________

Dibujen la gráfica



El tiempo en que la pelota toca el piso es:______________________________

La altura máxima es ______________________en el tiempo _____________

¿Cuáles son los valores que puede tomar t? ___________________________
¿Por que t no puede ser negativo? ___________________________________

Si quiero saber las raíces de la función por medio de la formula general la aplico de la siguiente manera:

f(t)= $-5t^2 + 22.5\,t$

a= -5   b= 22.5   c= 0

entonces

$$x1,2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x1,2 = (-22.5 \pm \sqrt{(22.5)^2 - 4(-5)(0)}\ )\ /\ (2(-5))$$

$$x1,2 = (-22.5 \pm 22.5)\ /\ -10$$

$x1 = 0\ /\ -10 = 0$
$x2 = -4\,5\ /\ -10 = 4.5$

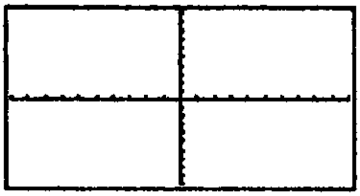
¿Dentro de este problema que significa que las raíces sean 0 y 4.5 ?

____
____
____

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 11

Cada semana, una compañía recolectora de basura obtiene ingresos por cada camión cargado de basura que lleva al tiradero. El ingreso f(r) en dólares por r camiones esta dado por la siguiente función $f(r)= r^2+37r-120$

Con los siguientes rangos grafiquen la función f(r)



Rangos xmin= -50 xmax= 50 xscl= 10 ymin= -500 ymax= 300 yscl= 50

1.- Si son 10 camiones ¿le produce dinero o lo hace perder? ¿Cuanto gana ó pierde? Y si tiene 2 camiones ¿qué pasa? localicen los puntos en la grafica.

2.- ¿Cuántos camiones deben tener para no perder?

3.- ¿Si la ruta de camiones se pone en huelga ¿Cuanto pierde?

4.- Encuentren las raíces de la función con la formula general.

5.- Para que valores de r tiene sentido el problema_______________________
¿Porqué? ____

ACTIVIDAD 13

Conocer raíces complejas

TEMA: Función cuadrática

SUBTEMA: Conocer raíces complejas de una función cuadrática

OBJETIVO: Qué el alumno se familiarize con la notación de números complejos y encuentre por medio de la fórmula general las raíces complejas.

PROCEDIMIENTO:

- Dada una función cuadrática encontrar sus soluciones complejas.
- Dadas las raíces complejas encontrar una expresión algebraica que la represente.
- Dada una función con coeficiente complejos encontrar las raíces reales.

REQUISITOS PREVIOS:

Las requeridas en la actividad 1 y realizar las actividades 1-13

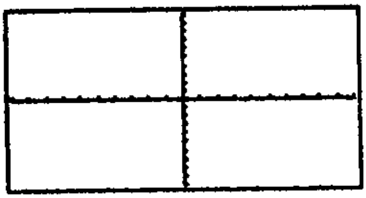
METODOLOGÍA:

La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes, al finalizarla el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo pero durante la actividad contestará cualquier duda que surja en los equipos.

EVALUACIÓN:

Al finalizar el tema se les dará un material similar a este para que en equipos de tres personas lo realicen y entreguen. La evaluación dependerá de las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante cada sesión así como un examen individual al finalizar el tema.

Encuentren la gráfica de la función $f(x)= x^2-6x+10$ y hagan el dibujo en el siguiente plano cartesiano



Como pueden ver esta gráfica no se intersecta con el eje x, es decir, que no existe ningún número real que cumpla con que $x^2-6x+10=0$.

Ahora si resolvemos esta ecuación por medio de la fórmula general tenemos que:

a=1 b=-6 c=10 y podemos sustituir los valores en la fórmula y encontramos que:

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{6\pm i\sqrt{4}}{2}$$

Como $\sqrt{-4}$ no es un número real , pues no existe ningún número que elevado al cuadrado me de -4 entonces esta raíz yo la puedo separar de la siguiente forma

$$\sqrt{-4}=\sqrt{-1}\sqrt{4}=2\sqrt{-1}=2i$$

Si nosotros definimos como $\sqrt{-1}=i$. Entonces la solución quedaría

$$x1=\frac{6+2i}{2}=3+i$$

$$x2=\frac{6-2i}{2}=3-i$$

A los números que tienen la letra y se les llaman números complejos y se define a $i^2 = -1$

Vamos a resolver algunas expresiones que incluyan a los números complejos, estos solo lo haremos para que esto número nos sean más familiares.

Simplifica las siguientes expresiones usando los números complejos:

a) $3(2-4i) = 6-12i$

Aquí lo que hicimos fue quitar el paréntesis multiplicando el 3 por cada uno delos sumandos.

b) $2-4i+3+5i= 5+ i$

Aquí lo que hicimos fué reducir términos semejantes es decir los número solos con los números solos y los número con parte imaginaria con los números con parte imaginaria.

c) $3 (2-4i) - (3-5i) = 6-12 i -3 + 5i = 3 - 7i$

d) $(2-4i)^2 = 2^2 - 2 (2) (4i) + (-4i)^2$
$= 4 - 16i -16$ recuerda que $(-4i)^2 = (-4)^2 (i)^2 = 16 (-1) = -16$

$= -12 - 16 i$

e) $(2-4i) (3+5i) = 6+10 i - 12 i - 20 (-1)$
$= 26 - 2 i$

A los números que se pueden escribir de la forma a+bi se les llama números complejos.

En el siguiente ejercicio resolveremos por medio de la fórmula general ecuaciones cuadráticas cuya solución es un número complejo, esto es

a) Si $x^2 + 1=0$

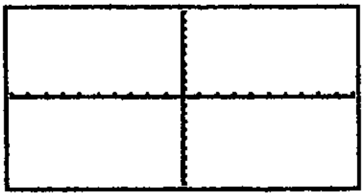
a=1 b=0 c=1

$$x= \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm i\sqrt{4}}{2} = \pm 2i$$

x1= +2i

x2= -2i

La gráfica que la representa es



b) $x^2+x+1=0$

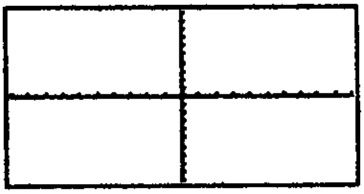
a=1   b=1   c=1

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$x1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$x2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

La gráfica que la representa es



Como pueden ver ninguna parábola se intersecta con el eje de las x.

Supongamos ahora que tengo las raíces de una función cuadrática y lo que quiero es encontrar la expresión algebraica que la representa

1.- Si r1= 5i y r2= -5 i son las raíces de una función cuadrática vamos a encontrar la expresión algebraica que la representa.

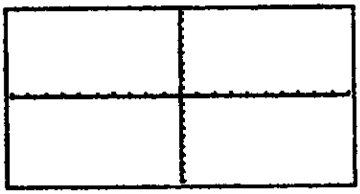
$(x - 5 i) (x - (-5i)) = x^2 - 5 i x - 5 i x + 2 5 (i)^2$

$x^2 - 10 i x -25 = f(x)$

entonces la función cuadrática será

$x^2 - 10 i x -25 = f(x)$

Su gráfica es



2.- Si x1= 2+i y x2= 2-i

$(x+2+i) (x- (2-i) = x^2 + (2+i) x - (2 - i) x - (2+i) (2 - i)$

$= x^2 + 2x + x i - 2x + x i - (4 + 2i - 2i - (-1))$

$= x^2 + 2 x i - 5$

$f(x)= = x^2 + 2 x i - 5$

3.- $x^2 - 10ix-9i^2 = 0$

a=1 b=-10i $c= -9i^2 = -9 (-1) = + 9$

$$x= \frac{10i \pm \sqrt{(-10i)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$x= \frac{10i \pm \sqrt{-100-36}}{2} = \frac{10i \pm \sqrt{-136}}{2} = \frac{10i \pm i\sqrt{136}}{2}$$

$$x1= \frac{(10+\sqrt{136})i}{2}$$

$$x2= \frac{(10-\sqrt{136})i}{2}$$

ACTIVIDAD 14

Dando un vistazo a la historia

TEMA: Función Cuadrática.

SUBTEMA: Resolver problemas de la antiguedad y ver de manera paralela la solución actual.

ALUMNOS: 4to de Bachillerato (15-16 años)

OBJETIVO: Que el alumno comprenda el método que se usaba en la antiguedad para resolver ecuaciones de segundo grado y resuelva de manera paralela como se resuelve en la actualidad.

PROCEDIMIENTO:

- Mostrar enunciados de ecuaciones cuadráticas que se resolvían en la antiguedad.

- Mostrar la forma de resolver ecuaciones de segundo grado en cada una de las culturas antiguas, tomando en cuenta las bases en que lo resolvían.

- Comparar las diferentes culturas.

REQUISITOS PREVIOS:

Manejar las diferentes bases y saber operar con ellas.

METODOLOGÍA:

La actividad se discutirá en equipos de tres personas, los alumnos deben de contestar anotando todas sus dudas, comentarios, procedimientos e inquietudes, al finalizarla el profesor dará una breve conclusión a todo el grupo pero durante la actividad contestará cualquier duda que surja en los equipos.

EVALUACIÓN:

Al finalizar el tema se les dará un material similar a este para que en equipos de tres personas lo realicen y entreguen. La evaluación dependerá de las aportaciones, comunicación y trabajo demostrado durante cada sesión así como un examen individual al finalizar el tema

En la época antigua ya se resolvían ecuaciones cuadráticas aunque de diferente manera a la que estamos ahora acostumbrados.

En la siguiente lección se trata de que comprendan los métodos usados en diferentes culturas para resolver las ecuaciones cuadráticas y la similitud que tienen los métodos con los actuales.

La primera etapa que existio es la verbal que data de 1700 años antes de Cristo, como pueden ver hace 4,000 años ya se resolvían las ecuaciones de segundo grado pero vamos a ver de que manera.

ETAPA RETÓRICA O VERBAL (1700 a.c.-250 d.c.)

En términos muy generales en esta etapa los problemas, ecuaciones y resolución de ellas era de manera verbal y particular. En la antiguedad los problemas no se resolvían en un cuaderno como ahora puesto que los Babilonicos resolvían los problemas hablandolos, tampoco habían fórmulas como ahora ni métodos generales para resolverlos, solo comenzaban a resolver problemas particulares concernientes a un problema en particular. Ya que lo resolvían se olvidaban del método que habían ocupado y cuando tenían otro problema volvían a empezar. Cada problemas se resolvia cuando se presentaba, su solución era particular, es decir, que aunque dos problemas fueran similares los dos se resolvían de manera particular, no existen algoritmos para resolverlos, pero si formas semigenerales, todos los problemas eran de la vida real, no existían teorías matemáticas. Las culturas que forman parte de esta etapa eran:

A.- Babilonia (2000a.c.-300a.c.)

B.- Egipto (4000a.c.-300a.c.)

C.- Grecia (600a.c.-500a.c.)

A. BABILONIA (2000a.c.-300a.c.)

Los métodos de resolución que manejaban se aproximan a lo que ahora conocemos como método de completando el cuadrado. Los babilonios no

manejan las soluciones negativas, pues para ellos no tenían significado esas soluciones, las incógnitas las relacionaban con medidas de segmentos. Las soluciones eran particulares.

Las formas básicas que ellos manejaban para resolver cualquier tipo de problemas eran:

$x^2+b=ax$ $\quad$ $x^2+ax=b$ $\quad$ $x^2=ax+b$

Comprobaron que cualquier ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ se reducen a las tres formas anteriores, pero creían que no tenían relación entre ellas.

En Babilonia usan las ecuaciones cuadráticas para resolver problemas sobre rectángulos de áreas unitarias y encuentran áreas con un semiperímetro dado (este planteamiento se encuentra en la tabletas de Louvre)

En el siguiente problema se muestra un ejemplo donde se resuelve implícitamente una ecuación cuadrática, se copio de la línea sexta y séptima de una tablilla que consta de 24 secciones, se resuelve por el método de " la regla de falsa posición" se dice que este es un método de ensayo y error.

El enunciado de manera verbal se expresaría así:
" Al sumar el área y dos tercios de un lado de un cuadrado el resultado nos da 0:35 "

La resolución de este problema se hace por el método de falsa posición cuyos pasos son:

Se sabe que el área de un cuadrado es un lado al cuadrado, entonces si se denomina "x" como el lado del cuadrado, el área de este cuadrado será "x^2" y dos tercios de un lado se puede representar como (2/3)x, y como su suma es igual a 0.35 este enunciado quedaría expresado de manera algebraica de la siguiente manera:

$$x^2+(2/3)x=0:35$$

Vamos a resolver esta ecuación de manera antigua, con la resolución actual, tenemos:

SOLUCIÓN ANTIGUA:

La explicación la daremos después de dar la solución

a) Tomamos a 1 como valor de x, dos tercios de 1 nos dan 0;40
b) Obtenemos su mitad que es 0;20
c) 0;20 veces 0;20 nos da 0;0,400

d) Sumamos 0;35 y obtenemos 0;0,2500
e) Lo que nos da 0;50 como una raíz cuadrada
f) Restamos 0;20 y obtenemos 0;30 que es el lado del cuadrado

Solución actual:

a) Recordemos que los babilonios manejaban el sistema sexagésima, es decir, sus números los manejan en base 60, y la representación que usan es el punto y coma como equivalente al punto decimal actual, si tomamos uno como coeficiente de x esto en base 60 equivale a 60/60 y 2/3 de 1 en sistema 60 será 0;40, que significa 40/60=2/3(1) en su representación sexagésima. El 2/3 se toma como el coeficiente de la x.

Sea p=0;40

b) Se pide sacar la mitad de p entonces

p/2=0;40 =(40/60)/2 = 40/120 =20/60 =0;20

la mitad de 2/3= (2/3)/2=2/6

c) Nos piden que elevemos al cuadrado p/2 y tenemos:

$(p/2)^2= (p/2)(p/2)=(0;20)(0;20)=(20/60)(20/60)=(400/3600)=400/60^2=0;0,400$

d) Le aumentamos 0;35 y obtenemos

$(p/2)^2+q= 0;0,400 + 0;35$
$= 35/60 + 400/60^2 =2500/3600=2500/60^2$
$= 0;0,2500$

e) Nos piden encontrar la raíz cuadrada de

d) $(p/2)^2 + q = 0;0,2500 = 2500/3600 = 25/36 =5/6 =50/60 =0;50$

f) Restamos p/2 entonces tenemos:
$(p/2)^2+q -p/2 = -p/2 + (p^2 + 4q) / 2 = (-p + p^2 + 4q) / 2$
0;50 - 0;20 = 0;30 que es el resultado que se obtuvo en la antigüedad.

Se puede observar que el resultado obtenido es simplemente la sustitución de la formula general de segundo grado que actualmente usamos.

Los babilonios tuvieron un sistema numérico posicional y gracias a esto su desarrollo fue extraordinario, su influencia llegó a Grecia antigua con Pitagoras y Euclides, que básicamente hacen una traducción geométrica de sus resultados.

Lo importante de esta etapa consiste en que ubican el tipo de ecuación que tenia sentido dentro de los problemas que resolvían, a pesar de que existe un algoritmo implícito no lo ubican como tal. No eran conscientes de un método más eficiente, carecían de notación tanto para las ecuaciones como para la fórmula para resolverlas, las ecuaciones no eran el objeto de estudio, sino los problemas que requerían resolver.

B.- EGIPTO (4000 a.c.-300a.c.)

Los cálculos "Aha" están asociados a la resolución de problemas que se plantean por medio de ecuaciones. En el papiro de Rhind se encuentran varios de estos cálculos.

El grupo de cálculos "Aha" incluye el primer problema del papiro de Berlín cuya solución requiere una ecuación cuadrática y dice así:

Una superficie de 100 unidades de área debe representarse como la suma de dos cuadrados, cuyos lados van entre sí, como 1: 3/4

"Muéstrame como calculas sus lados"

Hágase un cuadrado de lado 1, y otro de lado 3/4, elevemos 3/4 al cuadrado y obtenemos $(3/4)^2= 9/16$ y sumando ambos cuadros obtengo 26/16 cuya raíz cuadrada es 5/4 (y no 10 que es la raíz cuadrada de 100) es necesario que yo multiplique por 8 (5/4) para obtener 40/4=10, entonces basta que el primer lado lo multiplique por 8 y no por 1 y el segundo será 3/4 (8)= 24/4= 6, entonces un lado es de 8 y el otro de 6.

Si quisiéramos resolverlo con técnicas actuales el planteamiento quedaría de la siguiente manera:

Sean x y y los lados de los cuadrados

entonces $x^2 + y^2 = 100$ será la suma de los dos cuadrados

$y= 3x/4$ será la relación que existe entre los lados, sustituyendo tenemos

$x^2 +(3x/4)^2= x^2+ (9x^2 /16) = (16 x^2 + 9 x^2) / 16 = 25 x^2 / 16 = 100$

despejando x tenemos

$25 x^2 = 1600$ obtenemos raíz cuadrada
$5 x = 40$
$x= 8$
para obtener el valor de y tenemos que

$y= (3x)/ 4$ $y=3(8)/4= 24/ 4 = 6$ $y= 6$

C.- GRECIA ANTIGUA (600a.c.-500a.c.)

Los griegos se enfocan principalmente en métodos geométricos pues tienen dificultades lógicas respecto a los números irracionales y las raíces de números negativos.

La solución geométrica de ecuaciones cuadráticas son dadas por dos métodos que crean los pitagóricos; el método de proporciones y el método de aplicaciones de áreas.

El método de proporciones permite construir un segmento dado ya sea por la proporción $a:b = c:x$ o por $a:x = x:b$ donde a,b,c son segmentos e líneas dados, con este método puedo resolver ecuaciones de la forma $x^2 = ab$.

El método de aplicación de áreas considera un segmento AB y un paralelogramo AQRS con el lado AQ sobre el rayo AB si Q es diferente de B tomamos C tal que QBCR sea un paralelogramo y vemos si se excedió o no.

Consideraban las ecuaciones como relaciones entre números, buscando números que satisfacen las relaciones entre números, buscando números que satisfacen las relaciones con tanta precisión como fuera posible, y así resolvían las ecuaciones.

Euclides no reconoce raíces negativas, en su libro dos, tiene transformaciones algebraicas como el cálculo de $a(b+c)$, $(a+b)^2$ mediante métodos geométricos. En el libro 6, se encuentra la ecuación cuadrática de la forma $x^2= a(a-x)$ resuelta por un método pitagórico que ya había introducido Apolonio, dándole un nuevo sentido.

3. 2 ETAPA SINCOPADA (250 d.c.-1500d.c.)

Es una mezcla de tratamiento verbal con la introducción de abreviaturas y símbolos. Esta etapa empieza en Grecia con el griego Diofanto de Alejandría (250 a.c.) y termina en el siglo XVI, las principales culturas que intervinieron fueron:

A. GRECIA
B. INDIA
C. ARABIA
D. Parte de Europa principalmente Italia (1200 d.c.-1500 d.c.) Época en que se introduce el sistema de numeración indoarábigo.

A. GRECIA

Diofanto de Alejandría (250d.c.) reconoce que hay dos soluciones en las ecuaciones, y cuando las dos son positivas toma la mayor. Resuelve las ecuaciones por el método de la falsa suposición, donde supone ciertos valores para números desconocidos y al llegar a un punto donde aparecen dificultades modifica estos valores para poder resolver el problema; y así hasta que encuentra los números requeridos.

B. INDIA

Se crea el sistema de numeración indo-arábigo, los métodos alcanzan un carácter seudo-general, se reconoce la posibilidad de dos raíces para una ecuación cuadrática.

Usan reglas particulares para resolver ecuaciones particulares, resuelven por el método de completando un binomio; Salbasutra (8 a.c.) propone algunos problemas de semejanza que dan como consecuencias ecuaciones de segundo grado, ya manejan número irracionales, reconocen la duplicidad de las soluciones admitiendo ya los valores negativos, también ya se sabe que no podemos obtener raíces de números negativos, describen la solución de $x^2+q=px$ $x^2-px=q$ que las consideran diferentes, donde p y q son positivos.

En el libro de Lilabati, se muestran las soluciones de algunas ecuaciones cuadráticas; con Arybhata se observa que deberían de haber conocido este tipo de ecuaciones en el siglo VII cuando aparece la regla de Brahmagupta.

La regla dice: "Multiplíquense ambos lados de la ecuación por un número igual a cuatro veces el coeficiente de la cantidad original entonces se extrae la raíz cuadrada"

Establece la manera de completar el cuadrado $(ax+b)^2$ suponiendo familiar la manera de proseguir la solución después de esto lo más seguro es que se continuará la solución por falsa posición.

C. ARABES

Desarrollan ecuaciones cuadráticas de forma aritmética y geométrica Al-khwarizmi introduce el sistema indo-arábigo a Europa. Sobresalen que cualquier magnitud se puede sumar o restar a ambos miembros de u una ecuación.

En el libro Almukabala divide las ecuaciones de segundo grado en cinco clases $ax^2+bx=c$ q $ax^2=bx$ $ax^2=c$ $ax^2+c=bx$ $ax^2=bx+c$ donde a,b,c, son positivas y a=1, solo se consideran raíces reales positivas, pero ya saben que existen dos soluciones.

Para resolver $x^2+px=q$ dan dos métodos, uno geométrico y el otro algebraico.

D. EUROPA (150 a.c.-1500d.c.)

Hiparco de Nicaria (180-125 a.c.) hace un tratado de la ecuación de segundo grado.

Herón (100 d.c.) menciona por primera vez, con la influencia de Hiparco, la existencia de soluciones dobles, admitiendo solo las positivas, propone métodos analíticos para la resolución de ecuaciones.

Fibbonacci (S.XIII), en su trabajo llamado Liber Abaci muestra la gran influencia de los árabes e hindúes. Muestra soluciones de ecuaciones cuadráticas por falsa posición y por procesos algebraicos, no reconoce raíces negativas ni imaginarias.

Es en esta época donde se reconoce el carácter diferenciado de los elementos que intervienen en los términos de la ecuación como son: la incógnita, los coeficientes, la potencia, etc. y se emplean abreviaturas.

Se reconoce la existencia de dos soluciones para las ecuaciones, a pesar de que una de ellas puede carecer de sentido en el problema.

Aunque las tres expresiones para ecuaciones tenían similitudes, ellos usaban algoritmos diferentes para resolverlos, no pudieron generalizar.

3. 3 ETAPA SIMBÓLICA (1500d.c.-época actual)

Se caracteriza por una introducción de símbolos para representar y manipular

ecuaciones con un sentido de generalidad.

Durante los siglos XVI-XVII se forma una teoría de las ecuaciones.

Siglo XVI, Francies Viette cree métodos analíticos para reemplazar los métodos geométricos, encuentra la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado.

Siglo XVII, se introduce los complejos en las ecuaciones de segundo grado

La sismología actual proviene del siglo XVI y las raíces negativas y complejas provienen de Cardano y Gerald.

Wessell aneja las soluciones de las ecuaciones con números complejos.

Descartes resuelven las ecuaciones dando soluciones con números negativos.

Cardano en su álgebra considera raíces negativas y presta atención al cálculo con números imaginarios.

A continuación se muestra dos métodos usados en esta época:

1.- Vietta da un método de aproximación de las raíces; sustituyendo en la fórmula original tiene.

$(x_1+x_2)^2 + m(x_1+x_2) = n$

resolviendo obtiene
$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + mx_1 + mx_2 = n$
Suponga x_2 muy pequeña y por tanto se puede despreciar x_2^2, entonces le queda
$x_2 = (n - x_1^2 - mx_1) / 2x_1 + m$
Ahora con esta nueva aproximación $x_1 + x_2$ calcula una mejor aproximación a saber $x_1 + x_2 + x_3$ y así sucesivamente.

2.- Otro método lo presenta Harriot (1560-1621)

Factorización

Considera x_1, x_2 dos raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, con a diferente de cero, entonces se cumple que:

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$

o bien $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$

por otro lado sabe que
$x^2 + (b/a)x + (c/a) = 0$ así

$b/a = -(x_1+x_2)$ y $c/a = x_1x_2$ pero

sabemos que $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

entonces

$x_1 x_2 = + b^2 - 4ac$

LA CULTURA CHINA

Samuran Seki (1683 a.c) halla la solución menor de una ecuación de segundo grado con dos raíces.

Timeredes de Pasos (siglo V) resuelve las ecuaciones con el método de falsa posición se cree que tienen influencia babilónica.

K´m-ch´ang Suan-Shu (aprox.250a.c.) ya maneja ecuaciones de segundo grado.

En el libro de las nueve secciones se presentan las raíces positivas de las ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + (x\ 1)^2 = d^2$

Otro método que usaban los chinos era la extracción de raíz cuadrada (método de Honer)

En esta etapa se nota la introducción de la simbología adecuada para las ecuaciones. El interés se centra en la resolución de ecuaciones por sí mismas.

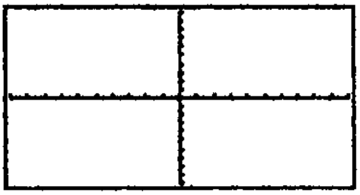
Se introducen las literales para simbolizar coeficientes y con ello se logra una representación general para todas las ecuaciones de segundo grado y una fórmula única para resolverlas.

Se estudian y obtienen relaciones entre los coeficientes y las raíces, de las cuales se desprende el método de factorización.

TAREA
ACTIVIDADES 11, 12, 13 Y 14

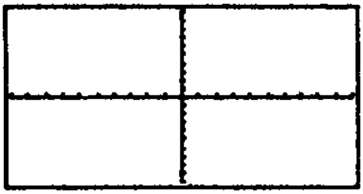
1.- Digan si los siguientes pares de funciones son equivalentes: Den sus raíces, muestren sus gráficas y hagan una tabla.

a) Si $f(x)= x^2 - 3x$ $\qquad$ $y(x)= x(x-3)$



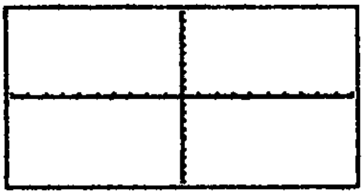
Rangos sugeridos____

b) $g(x)= x^2 - 21x +98$ $\qquad$ $p(x)= (x-7)(x+14)$



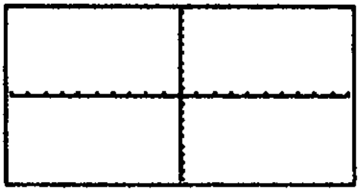
Rangos sugeridos____

c) $l(x)= 7x^2 +6x$ $\qquad$ $m(x)= x^2 +36$



Rangos sugeridos____

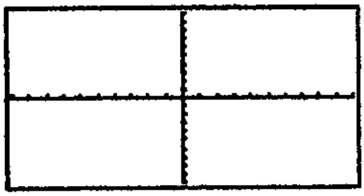
d) $m(x) = x^2 + 4x + 4$ $\qquad$ $b(x) = (x+2)^2$



Rangos sugeridos____

2.- Resolver por fórmula general las siguientes ecuaciones y dar un bosquejo de la gráfica mostrando sus raíces.

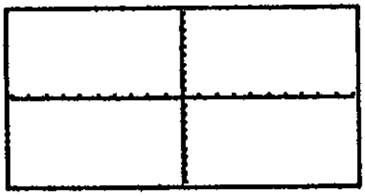
a) $x^2 - 3x = 0$



a=　　　　b=　　　　c=

Rangos sugeridos ______________________________

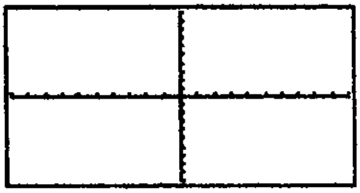
b) $x^2 - 9 = 0$



a=　　　　b=　　　　c=

Rangos sugeridos ______________________________

c) $3x^2 - 7x + 8 = 0$

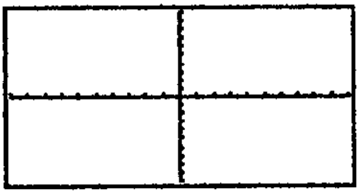


a=　　　　　　b=　　　　　　c=

Rangos sugeridos ______________________________

3.- Encuentra las raíces de las siguientes funciones, dibuja la gráfica marcando las raíces y el máximo ó mínimo.

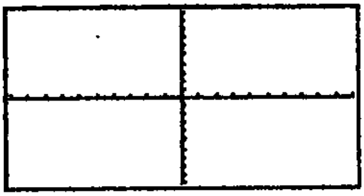
a) f(x)= (x+4)(x-3)



r1=　　　　　　　　　r2 =

Coordenadas del vértice ____________________

b) $f(x)= (x-5)(x-2)$

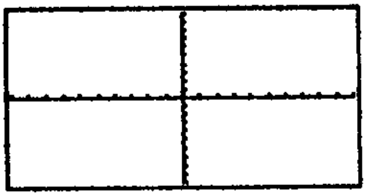


r1=

r2 =

Coordenadas del vértice ______________________

c) $f(x) = x(x+4)$

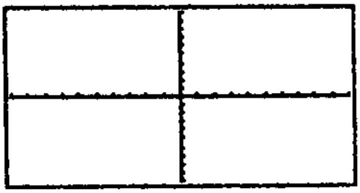


r1=

r2 =

Coordenadas del vértice ______________________

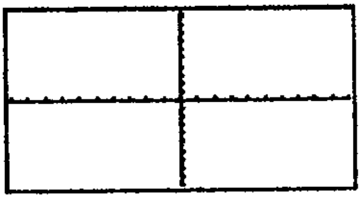
d) $f(x) = (3x-5)(2x+4)$



$r1=$ $r2 =$

Coordenadas del vértice ______________________________

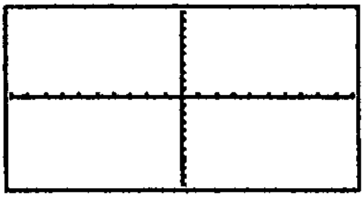
e) $f(x)= (4-2x)(8-x)$



$r1=$ $r2 =$

Coordenadas del vértice ______________________________

f) f(x)= (4-2x)(x-2)



r1= r2 =

Coordenadas del vértice ____________________________

PROPUESTA PARA EXAMEN

Actividad 1- 7

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA A

En Nueva York en algunas zonas las estufas son eléctricas, el costo del consumo de electricidad esta en función de la temperatura ambiente que existe en ese momento, una expresión algebraica que me determina el comportamiento del consumo de electricidad, esta dada por la expresión:

$$c(t)=0.007\,t^2 - 0.3\,t + 3.5$$

donde t es la temperatura ambiente en determinado momento y c(t) es el costo del consumo de electricidad en el momento t.

En base a la información anterior contesta las siguientes preguntas:

1.- De las siguientes gráficas ¿cuál es la que puede representar el problema? ______________________ ¿porqué? ____________________________________

____

____

____

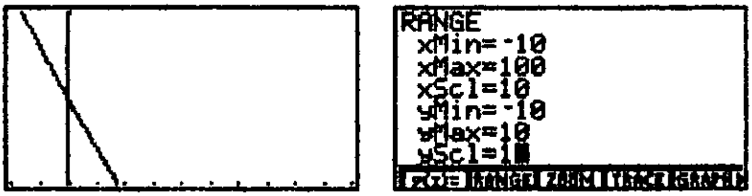
____

____

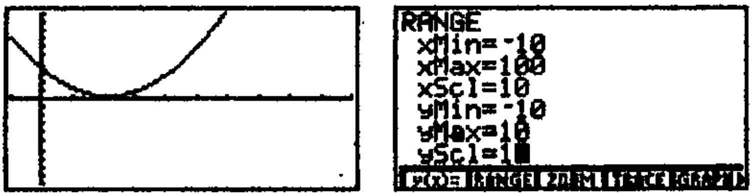
____

GRÁFICAS

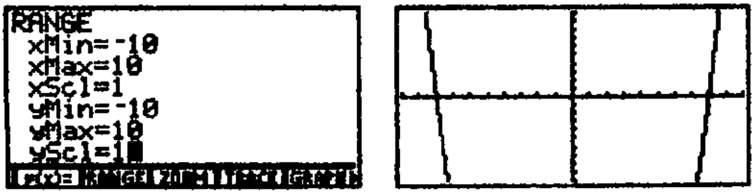
a)



b)



c)



2.- ¿ Explica en breves palabras por qué el inciso a) se ve gráficamente casi como una recta siendo una parábola?

3.- ¿Cuáles son los rangos usados en las gráficas anteriores?

4.- Elabora una tabla para cada una de las gráficas anteriores? Usando los rangos que cada una propone.

5.- Usa la gráfica o tabla para determinar la temperatura ambiente aproximada del día que hubo más consumo.

____

Explica que usaste y como lo encontraste:

____

6.- ¿ Para qué temperatura el costo es de .80 dólares ? y ¿Cómo lo expresas en función de c(t) ?

____

____

____

Explica que usaste y como lo encontraste:

____

7.- ¿ Para qué temperatura el costo es menor de .50 dólares? y ¿Cómo lo expresas en función de c(t) ? ______________________

Explica que usaste y como lo encontraste:

8.-¿ Cuánto debes pagar en un día si la temperatura fue de 5 grados?

9.- Explica que se te pide en c(28)=

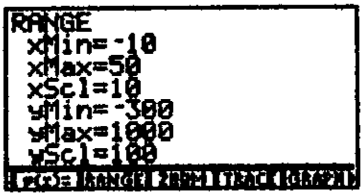
10.- Explica que se te pide en c(t)=6

11.- Explica lo que se te pide cuando c(t)< 4

12.- ¿ Cuáles son las características que debe cumplir una parábola para que tenga un punto máximo?

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA B

Las encuestas de mercado administradas a los proveedores de un producto en particular llevaron a la conclusión que la función de oferta es una función cuadrática. La siguiente gráfica muestra la función de oferta al comprar playeras, el precio esta en dólares y el número de playeras en miles.



Con la información anterior contesta las siguientes preguntas:

1.- Encuentra las coordenadas del punto A y explica lo que representa:

las coordenadas de A son__________________ y me representa ____________

____

2.- Encuentra las coordenadas del punto B y explica lo que representa

las coordenadas de B son__________________ y me representa ____________

____

3.- Encuentra las coordenadas del punto C y explica lo que representa

las coordenadas de C son__________________ y me representa ____________

____

4.- ¿Cuántas playeras me pueden fabricar si se las compró a $ 25?

____

5.- ¿ Explique por qué el número de playeras es mayor conforme pago más por ellas?

____

____

6.- Elabora una tabla donde represente la función anterior.

3.- Encuentre el valor de la ecuación:

a) $x^2 + 100x - 44 = 0$

b) $0 = -4.9\,t^2 + 140.60\,t - 9.98$

c) $3 = t^2 - 2t - 48$

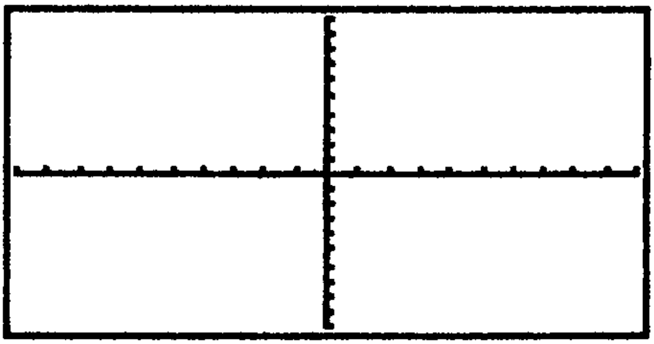
4.- Gráfica y marca las soluciones cuando $f(x) = 0$ de las siguientes funciones, elabora su tabla

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = (x-6)^2$

5.- ¿Qué cambios suceden al variar el parámetro a en la función cuadrática $f(x) = a(x-4)^2$

Elabora la gráfica y encuentra por lo menos 5 coordenadas que pertenezcan a ella.

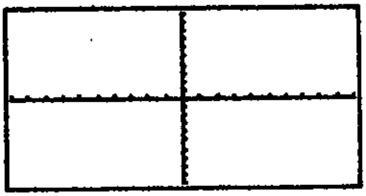


6.- Con las coordenadas de los puntos A (0,3) ,B(1,11) y C (-1,-4) encuentra la expresión algebraica que representa a la función cuadrática que contiene a A,B y C.

Propuesta para examen
Actividades de la 8-14

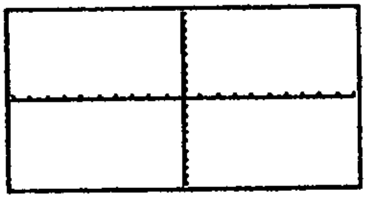
1.- Dada las siguientes funciones encontrar su gráfica, su solución utilizando un procedimiento algebraico y uno gráfico.

a) Si $f(x)= x^2$ resolverla si $f(x)= 5$ y $f(x)= 0$



RANGOS

XMIN
XMAX
XSCL
YMIN
YMAX
YSCL



RANGOS

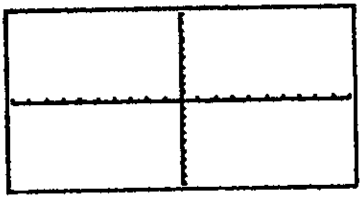
XMIN
XMAX
XSCL
YMIN

YMAX
YSCL

PROCEDIMIENTO GRÁFICO

PROCEDIMIENTO ALGEBRAICO

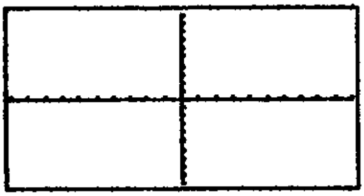
b) $f(x)= 3x^2 + 2x-7$ resolverla para $f(x)= -3$ y $f(x)= 0$



RANGOS

XMIN

XMAX
XSCL
YMIN
YMAX
YSCL



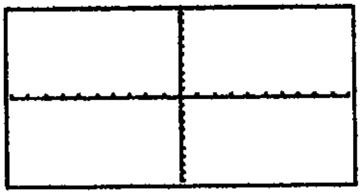
RANGOS

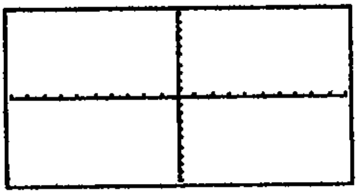
XMIN
XMAX
XSCL
YMIN
YMAX
YSCL

PROCEDIMIENTO GRÁFICO

PROCEDIMIENTO ALGEBRAICO

c) Si $f(x)= (x-1)^2 + 3$ para $f(x)= 1$ y $f(x) = 0$





RANGOS

XMIN
XMAX
XSCL
YMIN
YMAX
YSCL

RANGOS

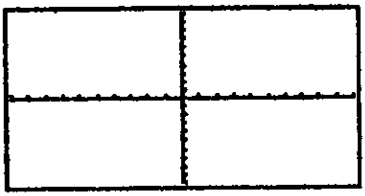
XMIN
XMAX
XSCL
YMIN
YMAX
YSCL

PROCEDIMIENTO GRÁFICO

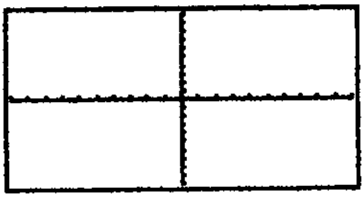
PROCEDIMIENTO ALGEBRAICO

2.- Dadas las siguientes raíces de las funciones cuadráticas encontrar la función que la represente. Hacer una gráfica.

a) r1=2 y r2= 3



b) r1= 2 i
r2 = 3 i



CAPÍTULO CUATRO

Se describe a continuación los resultados obtenidos después de llevar a cabo la propuesta en un salón de clase.

A) FORMAS DE OBTENCIÓN Y SISTEMATIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN OBTENIDA DE LOS ALUMNOS.

La información que se obtuvo fue encaminada para saber si se habían logrado los objetivos en dos sentidos:

El primero consistía en saber como se había modificado el conocimiento matemático de los siguientes conceptos, (que a través de mapas conceptuales y una entrevista con 10 alumnas se habían detectado que o se habían olvidado ó no se habían logrado) y son:

1.- Saber que es un parámetro y como se interpreta de manera grafica.

2.- Concepto de función como la relación entre cantidades una dependiendo de la otra.

3.- Conocer las representaciones en tablas, graficas y de manera algebraica de las funciones cuadráticas.

4.- El concepto de rango y como varía en base a las características de cada problema.

5.- El concepto de variable como algo que puede tener varios valores y el significado de dependencia entre dos de ellas.

6.- Manejar el concepto de máximo, mínimo, concavidad, crecimiento y decrecimiento en una parábola.

7.- Cuando dos funciones son equivalentes.

8.- Comprender que significa resolver funciones de la forma f(x) = 0 y f(x) = a de manera grafica y algebraica.

9.- Saber interpretar que se obtiene al resolver una desigualdad.

10.- Resolver por fórmula general y factorización ecuaciones de segundo grado.

11.- Encontrar intervalos de solución en desigualdades.

CAPÍTULO CUATRO

Se describe a continuación los resultados obtenidos después de llevar a cabo la propuesta en un salón de clase.

A) FORMAS DE OBTENCIÓN Y SISTEMATIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN OBTENIDA DE LOS ALUMNOS.

La información que se obtuvo fue encaminada para saber si se habían logrado los objetivos en dos sentidos:

El primero consistía en saber como se habia modificado el conocimiento matemático de los siguientes conceptos, (que a través de mapas conceptuales y una entrevista con 10 alumnas se habían detectado que o se habían olvidado ó no se habían logrado) y son:

1.- Saber que es un parámetro y como se interpreta de manera grafica.

2.- Concepto de función como la relación entre cantidades una dependiendo de la otra.

3.- Conocer las representaciones en tablas, graficas y de manera algebraica de las funciones cuadráticas.

4.- El concepto de rango y como varía en base a las características de cada problema.

5.- El concepto de variable como algo que puede tener varios valores y el significado de dependencia entre dos de ellas.

6.- Manejar el concepto de máximo, mínimo, concavidad, crecimiento y decrecimiento en una parábola.

7.- Cuando dos funciones son equivalentes.

8.- Comprender que significa resolver funciones de la forma $f(x) = 0$ y $f(x) = a$ de manera grafica y algebraica.

9.- Saber interpretar que se obtiene al resolver una desigualdad.

10.- Resolver por fórmula general y factorización ecuaciones de segundo grado.

11.- Encontrar intervalos de solución en desigualdades.

12.- Comprender que una posible solución es obtener raíces complejas.

13.- Resolver problemas de la vida real y analizar soluciones a ellos.

14.- Pasar de una tabla a una grafica y de esta a una expresión algebraica obteniendo diferentes informaciones de cada una.

El segundo punto de vista se enfoca a analizar que tanto se pudo mejorar a través de las siguiente habilidades cognitivas: razonamiento, observación, transferencia, abstracción y crear un pensamiento algebraico esto se evalúo con las siguientes actividades:

1.- Analizar el concepto de raíz.

2.- Comparar resultados obtenidos por medio de un experimento teórico y un experimento práctico.

3.- Comparar procedimientos históricos y actuales para resolver ecuaciones cuadráticas.

4.- El alumno debe proponer preguntas relacionadas con el tema en las diferentes representaciones.
5.- Analizar el significado de que tres puntos pertenezcan a una parábola y encontrar la función que la represente.

6.- Encontrar expresiones algebraicas dadas ciertas condiciones en un problema.

7.- Poder pasar de una representación a otro.

Lo anterior se evaluó de tres maneras diferentes:

1.- En cada sección a través de las actividades.

Se anotaron las dudas y el progreso que tenían después de ver la otra sesión, después de dialogar entre las alumnas y después que la maestra contestará las dudas.

2.- Por medio de tareas.

Dentro de la tarea se hicieron preguntas específicas relacionadas con cada concepto descrito anteriormente y se evaluó los avances entre una tarea y otra.

3.- Por medio de exámenes.

Se tomó cada una de las preguntas y se evaluó analizando cada rubro descrito anteriormente.

B) PRESENTACIÓN DE RESULTADOS.

LA SIGUIENTE TABLA MUESTRA LOS RESULTADOS OBTENIDOS POR LAS ALUMNAS DEL INSTITUTO GODWIN DE CUARTO AÑO DE PREPARATORIA.

SE MUESTRA EL NÚMERO DE ALUMNAS QUE LOGRARON ALCANZAR CADA UNO DE LOS NIVELES PROPUESTOS.

LOS CONCEPTOS QUE SE PRESENTAN SON RELACIONADOS A LA PARTE MATEMÁTICA DE LOS CONCEPTOS DE FUNCIÓN CUADRÁTICA DESCRITOS ANTERIORMENTE.

CONCEPTO	NO SE LOGRO	SE IDENTIFICA	SE COMPRENDE	SE APLICA	SE PUEDE USAR DENTRO DE OTRO CONTEXTO	TOTAL DE ALUMNAS
1	X	X	5	15	5	25
2	X	1	3	8	13	25
3	X	X	X	5	20	25
4	X	X	10	5	10	25
5	X	X	X	10	15	25
6	X	X	X	X	25	25
7	X	X	2	8	15	25
8	X	2	5	9	9	25
9	X	5	9	7	4	25
10	X	X	X	23	2	25
11	X	8	8	9	X	25
12	X	2	X	15	8	25
13	X	X	X	5	20	25
14	X	3	5	15	2	25

EN LA SIGUIENTE TABLA SE MUESTRAN LOS MISMOS CONCEPTOS QUE EN LA ANTERIOR PERO MOSTRANDO LOS PORCENTAJES OBTENIDOS

CONCEPT	NO SE	SE	SE	SE APLICA	SE PUEDE	TOTAL DE

O	LOGRO	IDENTIFICA	COMPRENDE		USAR DENTRO DE OTRO CONTEXTO	ALUMNAS
1	X	X	20%	60%	20%	25
2	X	4%	12%	32%	52%	25
3	X	X	X	20%	80%	25
4	X	X	40%	20%	40%	25
5	X	X	X	40%	60%	25
6	X	X	X	X	100%	25
7	X	X	8%	32%	60%	25
8	X	8%	20%	36%	36%	25
9	X	20%	36%	28%	16%	25
10	X	X	X	92%	8%	25
11	X	32%	32%	36%	X	25
12	X	8%	X	60%	32%	25
13	X	X	X	20%	80%	25
14	X	12%	20%	60%	8%	25

Aquí se puede notar que la media, moda y mediana se encuentra en la columna de aplicación pero también es alto el porcentaje de las que alcanzaron la aplicación a otros contextos.

Otra de las cosas que se puede notar es que realmente es mínimo el número de alumnas que no lograron el mínimo requerido que sería la comprensión de los conceptos se puede decir que la mayoría alcanzaron lo mínimo que requieren para el próximo año y el mínimo requerido por los programas.

Una cosa muy significativa es que ninguna alumna esta en la última fila es decir no hubo ninguna alumna que no entendiera algo lo cual es muy frecuente en una clase tradicional.

El comportamiento de los resultados son graficas con distribuciones normales en la cual en los extremos están los mínimos aunque en este caso esta más cargados del lado derecho.

CONFORME AL SEGUNDO RUBRO LOS RESULTADOS SON LOS SIGUIENTES:

LA SIGUIENTE TABLA ES EL RESULTADO DE LA PARTE DE AUMENTAR LAS HABILIDADES COGNITIVAS EN LAS ALUMNAS LAS HABILIDADES QUE SE CLASIFICARON FUERON RAZONAMIENTO MATEMÁTICO, OBSERVACIÓN DE DETALLES Y GENERALIDADES, TRANSFERENCIA DE LO PARTICULAR A LO GENERAL, ABSTRACCIÓN DEL PROBLEMA ESPECÍFICO A LA PARTE TEÓRICA MATEMÁTICA Y LA CREACIÓN DE UN PENSAMIENTO ALGEBRAICO.

con-cepto	razona	mi	ento	obser	va	ción	trans	feren	cia	abs	trac	ción	pensa	miento	algebraico	total
	bajo	bien	superior	bajo	bien	superior	bajo	bien	superior	bajo	bien	superior	bajo	bien	superior	26
1	20	3	2	20	3	2	18	5	2	20	3	2	2	3	20	25
2	10	10	5	8	7	10	10	10	5	10	4	11	5	9	11	25
3	15	5	5	12	12	1	20	3	2	17	8	X	7	12	6	25
4	8	10	7	7	11	7	6	12	7	9	15	1	9	10	6	25
5	5	12	8	6	18	2	7	15	3	7	12	6	12	10	3	25
6	4	10	11	7	12	7	3	12	10	4	10	11	5	13	7	25
7	2	8	15	4	15	6	5	13	7	3	12	10	3	12	10	25

EN LA SIGUIENTE TABLA SE INDICAN LOS PORCENTAJES DE LA TABLA ANTERIOR PARA QUE SE PUEDA APRECIAR LA INFORMACIÓN DE MANERA MÁS CLARA.

con-cepto	razona	mi	ento	ob ser	va	ción	tran s	fere n	cia	abs	trac	ción	pens a	miento	algeb raico	total
	bajo	bien	superior	bajo	bien	superior	bajo	bien	superior	bajo	bien	superior	bajo	bien	superior	25
1	80 %	12 %	8%	80 %	12 %	8%	18	20 %	8%	80 %	12 %	8%	8%	12%	80 %	25
2	40 %	40 %	20 %	32 %	28 %	40 %	40 %	40 %	20 %	40 %	16 %	11	20 %	36%	44 %	25
3	60 %	20 %	20 %	48 %	48 %	4%	80 %	12 %	8%	68 %	32 %	X	28 %	48%	24 %	25
4	32 %	40 %	28 %	28 %	44 %	28 %	24 %	48 %	28 %	36 %	60 %	4%	36 %	40%	24 %	25
5	20 %	48 %	32 %	24 %	72 %	8%	28 %	60 %	12 %	28 %	48 %	24 %	48 %	40%	12 %	25
6	16 %	40 %	44 %	28 %	48 %	28 %	12 %	48 %	40 %	16 %	40 %	44 %	20 %	52%	28 %	25
7	8%	32 %	60 %	16 %	60 %	24 %	20 %	15 %	28 %	12 %	48 %	40 %	12 %	48%	40 %	25

A continuación describiremos cada uno de los criterios que tomamos en cuenta para evaluar las habilidades de pensamiento.

1.- Analizar el concepto de raíz.

RAZONAMIENTO

Que una función cuadrática es una parábola la cual puede pasar una, dos o ninguna vez por el eje cartesiano x, debe reconocer las intersecciones con el eje y saber que significan.

TRANSFERENCIA

Tiene que entender el concepto de raíz $f(x) = 0$ y transferirlo a $f(x) = a$

ABSTRACCIÓN

Tienen que separar el concepto de raíz de un problema particular y comprender la parte teórica

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Elaborar una grafica y con la tecla TRACE reconocer los valores encontrados y particularizar en una ecuación específica.

OBSERVACIÓN

Distinguir los cambios de la parábola en base a las raíces que tiene.

2.- Comparar resultados obtenidos por medio de un experimento teórico y un experimento práctico.

RAZONAMIENTO

Comprender que un modelo teórico es mas teórico que un experimento práctico pero que este resulta una buena aproximación cuando hacer los experimentos no resultan fácil.

TRANSFERENCIA

La teoría puede modelar fenómenos para repetir ó predecir experimentos.

ABSTRACCIÓN

Manejar las fórmulas obtenidas de los modelos teóricos dejando a tras la parte práctica.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Manejar representaciones diferentes en tablas, graficas y pasar de una a la otra.

OBSERVACIÓN

El modelo algebraico es una buena propuesta para modelar experimentos

3.- Comparar procedimientos históricos y actuales para resolver ecuaciones cuadráticas.

RAZONAMIENTO

Entender como pensaban las culturas en la antigüedad.

TRANSFERENCIA

Poder utilizar procesos antiguos en los procesos actuales.

ABSTRACCIÓN

Abstraer las métodos antiguos y aplicarlos con los nuevos.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Situar a las alumnas en un tipo de pensamiento.

OBSERVACIÓN

Aprender la diferencia de los cálculos en diferentes bases.

4.- El alumno debe proponer preguntas relacionadas con el tema en las diferentes representaciones.

RAZONAMIENTO

En base a la información que tengo proponer preguntas novedosas.

TRANSFERENCIA

En base a las preguntas anteriores formular nuevas.

ABSTRACCIÓN

Con los conocimientos prácticos anteriores proponer teoría relacionada con el tema.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Si la alumna logro lo anterior significa que ya se logra el pensamiento algebraico.

OBSERVACIÓN

Como pueden formular nuevas preguntas en base a las que la guía ha formulado

5.- Analizar el significado de que tres puntos pertenezcan a una parábola y encontrar la función que la represente.

RAZONAMIENTO

Con la información que tengo como puedo lograr la ecuación original

TRANSFERENCIA

Teniendo el significado grafico lograr la transferencia al significado algebraico.

ABSTRACCIÓN

Con los conocimientos prácticos anteriores proponer teoría relacionada con el tema.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Poder comprobar dada la ecuación que los tres puntos si pertenecen a esta.

OBSERVACIÓN

Señalar los puntos que pertenecen a la parábola y sustituirlos en la ecuación distinguiendo que el resultado de estos siempre es el mismo.

6.- Encontrar expresiones algebraicas dadas ciertas condiciones en un problema.

RAZONAMIENTO

Con la información que tengo como puedo lograr la ecuación original

TRANSFERENCIA

Teniendo el significado verbal lograr la transferencia al significado algebraico.

ABSTRACCIÓN

Con los conocimientos prácticos anteriores proponer teoría relacionada con el tema.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Si las alumnas logran hacer esto significa que han logrado un pensamiento algebraico.

OBSERVACIÓN

Poder distinguir los elementos que me proporcionan la información y lograr la ecuación.

7.- Poder pasar de una representación a otra.

RAZONAMIENTO

Con la información que tengo como puedo lograr pasar a otras representaciones.

TRANSFERENCIA

Teniendo el significado de una representación lograr la transferencia a otra representación.

ABSTRACCIÓN

Con los conocimientos prácticos anteriores proponer teoría relacionada con el tema.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Las alumnas que logren poder hacer esto han logrado tener un pensamiento algebraico.

OBSERVACIÓN

El tipo de información que me da cada representación, y como pasar de una a otra.

C) ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Como podemos ver en los resultados obtenidos podemos notar los siguientes características:

***** Con este tipo de propuesta basada en el constructivismo no hubo alguien que no aprendiera nada.

***** El 80% entendió y sabe aplicar de manera grafica. esto se logró en 3 clases.

***** El 84% comprendió el concepto de función y solo el 4% solo lo saben repetir. se vio en todas las sesiones.

***** Las diferentes representaciones las aplicaran y se logro por completo el 100% esto se logró en 6 sesiones.

***** Los cambios de rango se lograron en un 60% aunque el otro 40% lo sabe hacer pero no aplicar en un nuevo ejercicio esto se logró en 3 sesiones.

***** El 100% comprendió el concepto de máximo, mínimo, concavidad, crecimiento y decrecimiento de una parábola esto se logró en 2 sesiones.

***** El 36% sabe hacer los ejercicios de equivalencia pero solo el 44% lo sabe aplicar esto se logró en 2 sesiones.

***** El 72 % pudo resolver y comprender las diferencias entre $f(x) = 0$ y $f(x) = a$ y el 28% solo logro resolver para $f(x) = 0$ esto se logró en 4 sesiones.

***** Con respecto a las desigualdades el 44% pueden aplicar las desigualdades y el 56% aunque no manejan todos los ejemplos so aplican los conceptos básicos esto se logró en 3 hrs.

***** La parte algebraica el 100 % la aprendió a aplicar y la maneja, esta parte ya se vio en tercero de secundaria.

***** El 8% no comprendieron las raíces complejas pues la parte algebraica les costaba mucho trabajo manipularla.

***** Después de analizar todos los problemas las alumnas comprender y aplican de manera adecuada la resolución de problemas entendiendo que se quiera y contestando todas las preguntas.

***** El objetivo final lo lograron un 68% de manera significativa y el resto se necesitaría reforzar a través de otros temas.

Conforme a la parte de habilidades relacionadas con el razonamientos, abstracción, observación, transferencia y obtener un pensamiento algebraico se tuvieron también resultados positivos como:

Al inicio les costo mucho trabajo desarrollar la observación, razonamiento, la transferencia se logro de manera mas fácil porque la parte algebraica si la manejan bien, al final se las sesiones en la mayoría de las alumnas se logro un avance respecto a lograr un pensamiento algebraico.

A continuación se presenta un análisis de resultados:

1.- Obtener el concepto de raíz es muy difícil ya que ellas manejaban el concepto de raíz como la raíz cuadrada de un número y no entendían como se podía obtener esto en una grafica y para una parábola, otro contratiempo fue que el concepto no se entendía de manera tabular ó verbal. A través de las lecciones se logró que esta idea fuera comprendida e interiorizada al grado que ya sabían reconocer en una grafica y obtener la ecuación algebraica también se logro que ella pudieran contestar preguntas relacionadas con la raíz dentro de un contexto real.

2.- El compará experimentos teóricos con prácticos les costo trabajo al inicio pues no eran capaces de llevar de manera paralela la teoría y la práctica y luego compararla pero esto creo que se debe a que no están acostumbradas a este tipo de comparación.

3.- Esto fue lo mas difícil de comprender aunque el problema fundamental no era la comprensión del método sino la parte aritmética del cambio de bases.

4.- La falta de práctica nos llevo a que no se lograra en su totalidad pero en cada clase se mostraban mas accesibles a este tipo de procesos.

5.- La parte de la calculadora se entendió muy rápido a además saben aplicar la parte grafica la parte algebraica se ve hasta 5to de preparatoria.

6.- Los problemas que se vieron son sencillos y esto es un trabajo que requiere tiempo y un proceso de adaptación pero aun así a nivel de razonamiento y creación de pensamiento si se cumplieron los objetivos.

7.- Por último las diferentes representaciones que era el último tema se avanza mucho pues en 15 clases se noto un aumento de manera significativa.

En general los resultados obtenidos son muy favorables el aprendizaje si fue significativo y con respecto a las habilidades también se logró un gran avance.

CONCLUSIONES

El trabajo que se expuso muestra que el uso de la tecnología tiene resultados positivos dentro del aprendizaje de las alumnas en el tema de función cuadrática esto se pudo notar durante el tema pero no solo eso luego se noto en las evaluaciones posteriores que se hicieron como exámenes mensuales, semestrales y finales también se noto en los temas posteriores relacionados con las funciones cuadrática sobre todo en el entendimiento de los conceptos involucrados en la parte gráfica, en los conceptos destacados en la visualización de las funciones cuadráticas y en el tipo de análisis que se manejo a través de la implementación metodológica poniendo un interés especial a la parte de visualización.

Creo que los factores que produjeron esto son varios, claro esta el principal factor fue el uso de la tecnología a través de las calculadoras gráficas, la visualización que ella nos proporciono y el tipo de análisis gráfico que se logra con la pantalla, pero también creo que influyeron otros entre ellos se pueden destacar los siguientes:

1.- La relación del profesor con el grupo era muy buena y esto favoreció de manera significativa para que ellas aceptaran la nueva metodología, esto es muy importante pues las alumnas siempre habían llevado una educación tradicional y estaban muy acostumbradas a esto, como consecuencia creían que esa metodología era la única que servía para aprender, quizás si el profesor no hubiera tenido esa buena relación con ellas el resultado podría ser diferente ya que ellas hubieran dificultado la metodología, mostrándose reunentes a obedecer las indicaciones del profesor, cosa que no ocurrió pues confiaban en el profesor, todo lo que el les indicaba lo tomaron de buena manera, no hubo prejuicios para la nueva metodología.

2.- El trabajo en equipo logro el intercambio de opiniones y así se pudo lograr la retroalimentación. Esto también es importante ya que el grupo se conocía desde hace 10 años, todas se llevaban bien y sabían a quien le gustaban las matemáticas y a quien no, quien sabía y quien no entonces la formación de equipos se pudo hacer de manera homogénea pudiendo distribuir entre los equipos de manera equitativa las alumnas que les gustaban las matemáticas con las alumnas que no les gustaba y al trabajar en equipo ya no tenían el temor de decir que no sabían o entendían pues se conocen desde hace mucho y no les daba pena discutir sus opiniones.

3.- El uso de actividades también produjo una guía de hacia adonde iban. El uso de actividades fue importantísimo ya que las alumnas podían ir al paso que cada equipo marcaba.

4.- El buen manejo de la calculadora gráfica por parte del profesor también dio una buena imagen de seguridad para que las alumnas se sintieran motivadas para aceptar el uso de tecnología pues todas sus dudas eran contestadas.

Si el profesor no conoce la calculadora gráfica es muy peligroso ya que las alumnas empiezan a dudar de la efectividad de la calculadora para entender conceptos pues el profesor no contesta sus dudas de tipo técnico.

5.- El que solo fuera un tema el tratado con calculadora gráfica también ayudo pues causo una gran novedad y las distraía de lo que veían en las demás clases ya que todas y durante toda su educación solo han tenido clases de manera tradicional.

6.- La visualización que proporcionan las calculadoras gráficas representó una ayuda para motivarlas muy importante.

Lo que podemos destacar aquí es que las calculadoras por si solas no pueden tener resultados positivos sino que es la unión de muchas cosas lo que logra el éxito del aprendizaje del tema de funciones cuadráticas.

Las calculadoras graficadoras se han usado para enseñar otros temas pero creo que aun falta describir y diseñar otros usos en los que la calculadora gráfica también nos puede apoyar, como por ejemplo el uso de la parte no gráfica pero siempre apoyadas con actividades, intercambio de ideas y el conocimiento amplio de la calculadora que se usa.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

ALANÍS SOLÍS, LORENZO; MENCHACA, VICTOR MANUEL (1990)
Historia del Algebra parte II
Lecturas en Educación Matemática núm.10
UACPyP UNAM, México, p.p.115

AMIRANTE, MARIGNAC, NORMA. (1990) "El constructivismo de Jean Piaget". México, Escuela Herminio Almendro.

ALONSO, FERNANDEZ Y OTROS (1990)
Ideas y actividades para enseñar Algebra
Grupo Azarquiel, ed. Síntesis, México, p.p.10

AZCÁRATE CARMEN, Funciones. (1991), edit.Thales, España. pp.40-53

BALDERAS, PATRICIA (1993)
"Un enfoque diferente en la enseñanza del Algebra"
Seminario taller de Algebra Ciclo de talleres en Guatemala, San Salvador, San Pedro Sula y San José de Costa Rica.
México, p.p.13

______________(1992)
"Aprendizaje de conceptos de Cálculo mediante graficación en microcomputadoras"
Memorias de la sexta reunión Centroamericana y del Caribe

BEEKMAN, SUNDSTROM (1993)
EXPLORING
Algebra with a graphing calculator

BROMERGER, SHILEY, (1984)
Polinomios y sus gráficas
México, ed.Limusa
p.p.33-52

BRUNER, JEROME. (1982). " Sobre el aprendizaje de las matemáticas", México.

COLL, CESAR. (1986). "La construcción del conocimiento en el marco de las relaciones interpersonales y sus implicaciones para el curriculum escolar". Ponencia en la segunda conferencia europea sobre psicología del desarrollo en Roma Italia. Italia.

_________________ (1987)
Hacia la elaboración de un modelo de diseño curricular
Madrid, pp.1-35

COXFORD, ARTHUR, (1988)
The ideas of Algebra K-12
USA Univeesidad de Michigan (NCTM)
pp.119-126

CRISTOBAL, CÉSAR. (1979)
Ecuaciones de Segundo Grado y Sistemas de Ecuaciones Lineales
Lectras en Educación Matemática
UACPyP UNAM
México, pp.40

CHARLES B. VONDER, EMBSE ET. AL.(1992)
Calculators for classrooms
USA pp.43

DEMANA, FRANKLIN, ET.AL. (1992)
College Algebra & Trigonometria a graphing Approach
USA Massachusetts. ed. Addison publishing Company
pp. 91-154 y 159-217

FEY, JAMES. HEID, KATHLEEN. (1989), Computer Intensive Algebra. The Pennsylvania State University and University Maryland, pp.1-30

FIGUEROA OLIMPIA, CRISTOBAL CÉSAR. (1990)
Historia del Algebra
"Lecturas en Educación Matemática"
UACPyP UNAM
México pp.90

GAGNÉ, ROBERTO. (1987).
Análisis de las condiciones del aprendizaje
pp.37

GÓMEZ, FELIPE, MEJÍA REBECA. (1990). "La perspectiva Vygotskyana" ITESO, México.

HARVEY, WAYNE ET. AL. (1988)
Sunburst Comunications The function Analyzer
New York
pp.119

JIMENEZ, JOSÉ, (1991)
"Las calcualdoras: Una defensa necesaria"
Educación Matema'tica, Vol.3 nñum-1
México, ed. iberoamerica

KATHLEEN HEID (1992)
Transformation of the learning of algebra and calculus via computer tools.
Séptimo Congreso Internacional de Educación Matemática
Quebec, Cánada

MARTINEZ ARMANDO, ET. AL. (1991)
"Algunos usos de las calcualdoras gráficas en la matemática de los niveles medio y medio superior"
Segundo seminario Internacional

MARMOLEJO V., EFREN. (1989), " Epistemología y enseñanza de la matemática". En Educación matemática. edit. Iberoamericana, vol.1 núm.2, Agosto México.

MÜLLER, HOYST. (1993). "El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la matemática en la enseñanza laboral". Instituto superior pedagógico. Cuba.

MORENO, LUIS Y WALDEG GUILLERMINA. (1992)
"Constructivismo y Educación Matemática"
Educación Matemática Vol.4 núm.2

MURDOCK, JERALD, (1992)
Graphing calculator enhanced Algebra projet
USA Texas Instrument

NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS (NCTM), [illegible]
Estándares curriculares y de evaluación para las escuelas de matemáticas, edit. Thales, España. pp.[illegible]

______________________________ (1991)
Estandares Curriculares para los niveles 9-12
España, pp.267
Las matemáticas como resolcuión de problemas
Las matemáticas como comunicación
Las matemáticas como razonamiento
Algebra
Funciones
Implementacion de la curricula
Evaluación

PHILLIPS, ELIZABETH (1991)
Aplicaciones con Algebra
México, ed. Harla
pp. 566-547

________________ y Butts, Thomass (1983)
Algebra y Aplicaciones
México, ed. Harla
pp.450-349

PREISSER ROSARIO (1992)
"Etapas de transición en el desarrollo del álgebra"
documento inedito
México, pp.15

------------------------ (1993)
"Una endoscopia de los errores en Algebra"
IV Simposio Internacional en Educación Matemática"
pp.263-253

PULSINELLI, LINDA Y HOOPER, PATRICIA (1989)
Introductory Algebra an interactive approach
USA pp.653

ROJANO TERESA, (1991)
"El Algebra en el curriculum de la secuandaria. La reforma de lso 90"
Educación Matemática Vol.3 núm.3

SCHELLER, ISRAEL. (1987). "Epistemología y educación" Instituto de investigación filosóficas, México, UNAM. pp.9-17

RUIZ, ESTHELA. (1987). "Reflexiones entorno a las teorías de aprendizaje" CISE. UNAM.

SCHEFFLER, I, (1987). "Epistemología y educación" en: Las condiciones del conocimiento, Instituto de investigación filosóficas, UNAM, México, pp.9-17

SHULTE ALBERT (1988)
" The ideas of Algebra"
Theaching elementary Algebra with a word problem focus
Michigan NCTM

SWOKOWSKI, EARLW (1988)
Algebra y Trigonometria
México ed. Iberoamericana
pp.546-540

VONDER ENIBSE, CHARLES B: (1992)
Calculators for classrooms
Virginia USA

WENSELBURGER , ELFRIEDE. (1990), " Como enseñar hoy la matemática para el mañana" En Educación matemática, edit. Iberoamericana, vol.2 núm.2 Agosto. México.

____________________ (1990)
"Ambientes gráficos en microcomputadoras para la cosntrucción del concepto de función matemática"
Educación Matemática
México, ed.Iberoamerica.

____________________ (1990)
"Las computadoras y la enseñanza de las matematicas"
Educación Matemática, vol.2 núm.1
México, ed.iberoamerica.

____________________ (1992)
"Una alternativa para la enseñanza del Älgebra en la escuela preparatoria"
Educación Matemática
México ed. Iberoamerica.