

01163  
3  
24.



DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“UN MODELO APROXIMADO PARA LA SIMULACIÓN DE LA  
RESPUESTA DINÁMICA DE PILOTES ANTE ONDAS SH  
PROPAGÁNDOSE VERTICALMENTE”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA  
(MECÁNICA DE SUELOS)

P R E S E N T A:

JUAN MANUEL MAYORAL VILLA



26/6/91

MÉXICO, D.F.

1998

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres por que les debo todo...

A Margo y Estela, Teresa y Alberto por compartir conmigo la felicidad de tener una gran familia...

A mi otra familia, hermanos, hermanas, primos, tíos, abuelos, sobrinos...

A mis amigos y compañeros del Instituto de Ingeniería por haber estado presentes durante tres años de mi vida

A mis amigos del Posgrado por compartir tantas experiencias

A todos los que faltan...

## Agradecimientos

Agradezco al Instituto de Ingeniería por haberme apoyado con su ayuda económica durante tres años y sin la cual mis estudios de Maestría y este trabajo no hubieran existido. El relevante papel que tiene el Instituto en la formación de profesionistas de alto nivel es uno de los engranes que mueven el desarrollo intelectual del país.

Igualmente, reitero mi agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México, centro de estudios, investigación y difusión cultural en donde he tenido la oportunidad de estar inmerso desde hace 10 años y que tiene en mi corazón un lugar especial por los grandes momentos que he vivido en de ella.

Agradezco de forma muy especial al Dr. Romo, por la ayuda continua que me ha brindado desde los primeros días en que tuve la oportunidad de colaborar en sus proyectos de investigación

Su ejemplo de entrega al trabajo y su disponibilidad para intercambiar opiniones con los alumnos, dejan entrever su gran calidad humana

Sus acertados consejos me han dejado enseñanzas que prevalecerán siempre en mis planes futuros

Gracias

Por supuesto que doy las gracias al Dr. Ovando, que nunca me ha negado su desinteresada ayuda y ha fomentado mi desarrollo con sus claras opiniones, al Dr. Rigoberto Ribera, que despertó en mí el interés por la Mecánica de Suelos y al Dr. Sánchez Sesma por sus valiosas recomendaciones para mejorar este trabajo

Asimismo hago patente mi gratitud al M. en I. Carlos Javier Mendoza por haberme invitado a participar como becario en el Instituto de Ingeniería, y por todo el apoyo con que siempre me ha distinguido

No puedo olvidar al Dr. Juárez Badillo por compartir con sus alumnos su enfoque muy particular de ver la vida y del cual se puede obtener grandes cosas, ni tampoco al Maestro Moreno Pecero, otro gran pilar en mi formación

## Resumen

Se presenta un modelo analítico aproximado para simular la respuesta de hileras de pilotes sometidos a movimientos armónicos. El modelo incluye el campo cercano, el campo lejano, los pilotes y la superestructura. El suelo de campo cercano es simulado por resortes histéricos y amortiguadores dependientes de la frecuencia. El pilote por elementos finitos tridimensionales tipo viga. La superestructura con un oscilador simple. La respuesta del suelo de campo lejano es resuelta suponiendo propagación unidimensional de ondas SH en la dirección vertical. La ecuación constitutiva del suelo involucra parámetros geotécnicos comunes obtenidos de pruebas dinámicas. Esta puede tomar en cuenta las características principales del sistema suelo-pilote como son: la dependencia de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento con la frecuencia, la no-linealidad en el comportamiento del suelo de campo cercano y lejano, causados por sismos severos, y el efecto de la pérdida de rigidez debido a la carga dinámica. La ecuación diferencial del movimiento del sistema suelo-pilote se resuelve en el dominio del tiempo, esto permite obtener la variación espacial y temporal de los movimientos del pilote. Los diagramas de momentos y fuerzas cortantes son calculados para cada incremento de tiempo. El modelo es validado comparando sus resultados con aquellos obtenidos con el programa SAP90. Posteriormente se realiza un análisis paramétrico y se propone un modelo matemático simplificado. Finalmente se plantea una metodología de análisis simple y se hacen algunas conclusiones.

	Pág
1 INTRODUCCION	1
2 ANTECEDENTES	
2.1 Definición del problema	4
2.2 Alcances	5
2.3 Modelos comunes para analizar la respuesta de pilotes aislados	5
2.4 Modelos comunes para realizar el análisis de interacción dinámica de grupos de pilotes	12
2.4.1 Modelos de primer orden	12
2.4.2 Modelos de segundo orden	13
3 PLANTEAMIENTO DEL METODO PROPUESTO	
3.1 Desarrollo del modelo	15
3.2 Análisis del modelo	16
3.3 Planteamiento del modelo	17
3.4 Análisis de los subsistemas	
3.4.1 Subsistema suelo-pilote	19
3.4.2 Subsistema pilote-suelo-pilote	21
3.4.3 Subsistema subestructura-estructura	22
3.5 Efectos de campo cercano	
3.5.1 Funciones de impedancia.	23
3.5.2 Ciclo de histéresis	26

4 EVALUACION DEL MODELO	
4.1 Aplicación del método	29
4.2 Evaluación del subsistema suelo-pilote	29
4.3 Evaluación del subsistema pilote-suelo-pilote	37
4.4 Evaluación del subsistema subestructura-estructura	38
4.5 Verificación del sistema completo	39
4.6 Análisis no lineal	47
4.7 Comentarios	54
5 ANALISIS PARAMETRICO	
5.1 Descripción de la metodología	55
5.2 Análisis de parámetros	63
5.2.1 Pilote aislado	63
5.2.2 Pilotes dispuestos en línea	69
5.3 Modelo simplificado	71
5.3.1 Pilote aislado	71
5.3.2 Pilotes dispuestos en línea	83
6 CONCLUSIONES	90
Anexo	
Referencias	

# 1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se propone un modelo matemático aproximado para simular la respuesta dinámica de pilotes ante ondas SH propagándose verticalmente. Se considera que los pilotes están dispuestos en fila. Se toman en cuenta las características más importantes del fenómeno, a saber:

- 1) La dependencia de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de una cimentación a la frecuencia.
- 2) La no-linealidad del comportamiento del suelo cuando es sometido a movimientos intensos, como pueden ser los generados por un sismo severo.
- 3) El efecto de degradación o pérdida de la rigidez y resistencia del suelo por la carga dinámica.
- 4) Los efectos inerciales de la masa de suelo sobre los pilotes durante el evento dinámico.

El sistema completo se divide en tres subsistemas, ver figura 1.1, y el campo libre. Primero el sistema suelo-pilote cuyo análisis se presenta en la referencia 1, el cual consiste en un pilote y el campo cercano, segundo el sistema pilote-suelo-pilote, el cual trata de simular al suelo que se encuentra entre pilotes y está compuesto básicamente por elementos inerciales para poder tomar en cuenta los efectos de los movimientos de la masa de suelo durante el evento y de impedancias dinámicas tipo Voigt las cuales nos permiten hacer una análisis tanto lineal como no lineal, el tercero es el subsistema subestructura-estructura el cual toma en cuenta de manera aproximada el efecto de los movimientos de la superestructura mediante un oscilador simple y el cuarto es el campo libre.

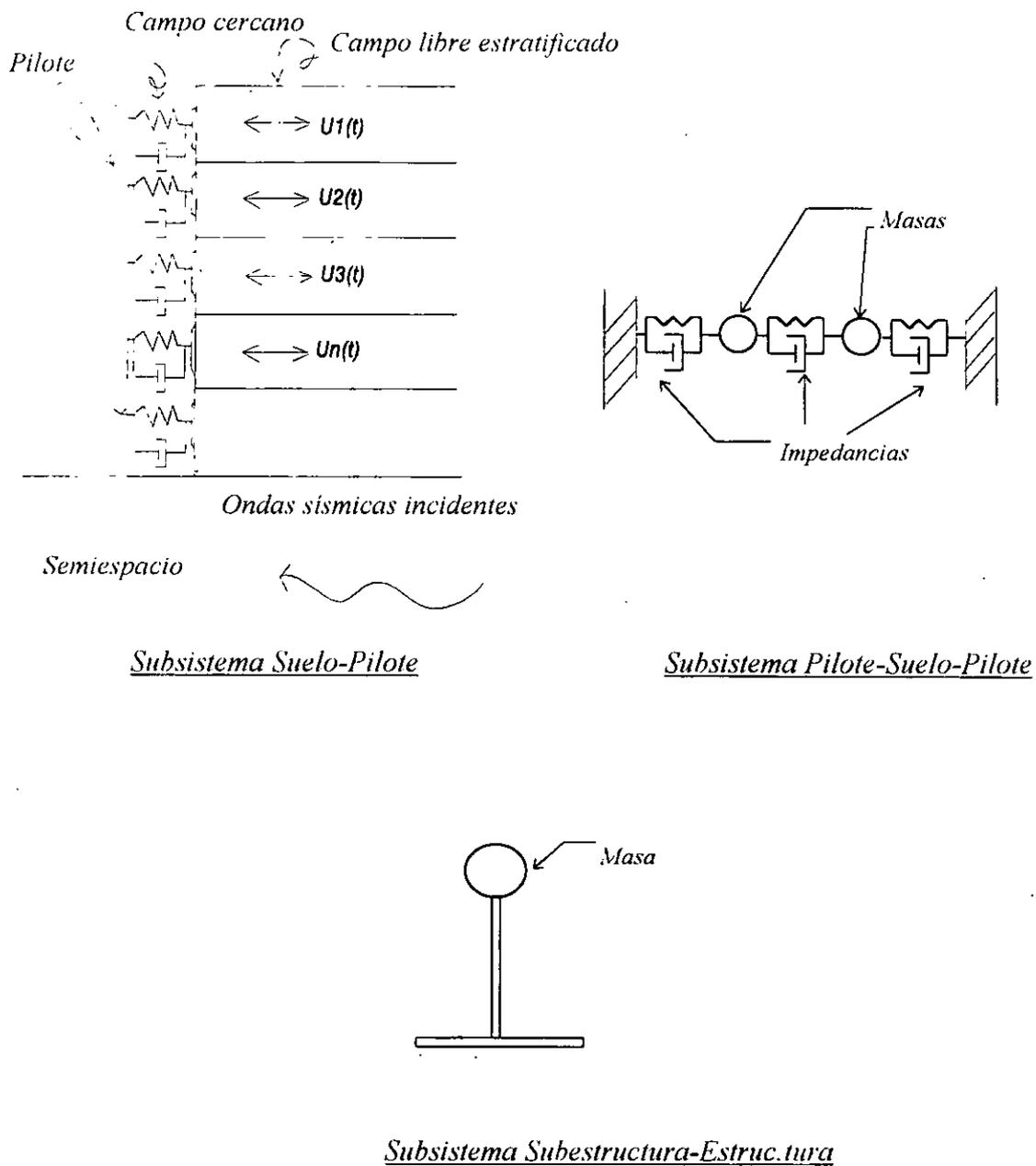


Fig 1.1 Subsistemas en que se divide el subsistema completo

Los modelos que comúnmente se utilizan para analizar la respuesta dinámica de pilotes se basan generalmente en el de Winkler. Sin embargo, para algunos rangos de frecuencia no es aplicable y se requiere hacer correcciones mediante la incorporación de dispositivos que acoplen los movimientos, como vigas de cortante, placas, etc. En el capítulo dos se mencionan las características de este tipo de modelos, asimismo, como el método planteado se basa en la ampliación para un hilera de pilotes del descrito en la referencia 1, se citan sus hipótesis además se plantea y delimita la metodología propuesta.

Para analizar el sistema completo se hace la integración de las ecuaciones diferenciales obtenidas del planteamiento dinámico de cada subsistema resolviéndolos simultáneamente paso a paso con el método de Newmark. Esto permite corregir la rigidez tanto del suelo de campo cercano como del que se encuentra entre pilotes, de acuerdo al nivel de deformaciones angulares, esta metodología es descrita en el capítulo tres, donde previamente se hace el planteamiento del modelo propuesto, analizando cada subsistema.

Para poder delimitar la influencia de cada parámetro que interviene en el comportamiento dinámico de cimentaciones piloteadas es necesario efectuar una cantidad importante de simulaciones en donde se varía selectivamente su magnitud, lo cual hace indispensable sistematizar el proceso de solución, lo que se logró programando la metodología en lenguaje FORTRAN, obteniendo el programa SISTEMA.for el cual se subdivide en tres subprogramas, el RSSSPNL.for, que hace el análisis del sistema suelo-pilote, el SUELO.for, que hace el análisis del sistema pilote-suelo-pilote y el TORRE.for, que hace el análisis del sistema subestructura-estructura. El análisis del campo libre se efectúa con el programa SHAKE (referencia 2). Para estar seguros de la confiabilidad de los resultados arrojados por el software creado se procedió a hacer una serie de verificaciones con el programa SAP90 las cuales se presentan el capítulo cuatro.

Para apreciar las relaciones existentes entre variables cuando se tienen grandes cantidades de resultados, se requiere la elaboración de gráficas y nomogramas adimensionales que permitan su generalización para cualquier caso, esto se logró mediante un análisis paramétrico selectivo presentado en el capítulo cinco.

Una serie de conclusiones y comentarios del trabajo realizado se presentan en el capítulo seis, así como una síntesis de la metodología de análisis simplificado

Finalmente se presentan las referencias bibliográficas que se consultaron para la elaboración de este trabajo.

## 2 ANTECEDENTES

### 2.1 Definición del Problema

Uno de los fenómenos más interesantes de la ingeniería de cimentaciones es el que atañe a la definición de los movimientos de estructuras soportadas por pilotes sujetas a solicitaciones cinámicas, sobre todo cuando se toman en cuenta explícitamente en el modelo los efectos de interacción suelo-pilote y pilote-suelo-pilote con la superestructura. Dentro de este genero se encuentran desde edificios de dimensiones importantes desplantados sobre depósitos superficiales blandos o potencialmente licuables hasta estructuras fuera de costa , como las plataformas marinas en donde el ambiente dinámico es aún más agresivo debido al continuo fenómeno de oleaje, movimiento de grúas , etc.

Como sabemos, es común determinar la respuesta dinámica de cimentaciones piloteadas incorporando las impedancias dinámicas al modelo de la superestructura (que generalmente se hace a través de resortes y amortiguadores), aplicando a ésta los movimientos del terreno al nivel de la superficie como un espectro de respuesta. Sin embargo, en este planteamiento se asume que los movimientos no son afectados por la cimentación, o que cuando menos sus efectos en dichos movimientos son despreciables, lo que en muchos casos no se verifica en la realidad (referencia 2) .

En este trabajo se propone un modelo a base de impedancias dinámicas tipo Voigt, compuestas por resortes y amortiguadores, dispuestas en serie con elementos inerciales y a su vez acopladas en paralelo con el pilote para simular el comportamiento dinámico entre sistemas de pilotes colocados en fila, con el fin de contar con una metodología para evaluar la respuesta dinámica de cimentaciones resueltas a base de pilotes ante ondas SH propagándose verticalmente, que considere la dependencia entre el movimiento de los pilotes, del suelo, de la subestructura y de la superestructura, de manera que se tomen en cuenta la influencia de cada parte del sistema en la respuesta.

## 2.2 Alcances

El método planteado se basa en la ampliación a pilotes dispuestos en línea, del descrito en la referencia 1, el cual tiene las siguientes hipótesis: Se considera que el pilote transmite las cargas a las que está sometido mediante su punta y su fuste, pudiendo estar ligado al estrato de apoyo trabajando como empotramiento o articulación. Los efectos de segundo orden en cuanto a pandeo del pilote por carga axial se desprecian. No se toma en cuenta explícitamente en el modelo la posibilidad de separación entre el pilote y el suelo durante el evento dinámico ni comportamientos inelásticos del pilote.

## 2.3 Modelos comunes para analizar la respuesta de pilotes aislados

A continuación expondremos los modelos típicos para el análisis de respuesta sísmica de pilotes aislados, destacando sus características, confiabilidad y su rango de aplicabilidad desde el punto de vista práctico en cuanto a su conceptualización simple y a su conveniencia computacional.

### Propuesta de Gazetas (referencia 4)

Gazetas y sus colaboradores proponen la siguiente metodología

#### Determinación de la cinemática de la respuesta sísmica

Para determinar la excitación de la cimentación se utiliza el modelo propuesto por Winkler (BDWF), consistente en considerar a la cimentación como una viga sujeta a condiciones dinámicas de carga, pero aplicado a un pilote aislado. De esta forma, el comportamiento del suelo cercano al pilote se modela por resortes ( $k_x$ ) y amortiguadores ( $c_x$ ) distribuidos uniformemente a lo largo del fuste de éste y cuyas características varían en función de la frecuencia. Como paso inicial se deberán determinar los movimientos del campo libre,  $U_{gs}$ , para posteriormente aplicar estos a los extremos de los resortes y amortiguadores como desplazamientos laterales ( $U_g$ ), de manera que se transmitan los efectos de la excitación al pilote aislado. De esta forma, la respuesta del pilote aislado  $U_{11}$  puede ser obtenida por la solución de la siguiente ecuación de equilibrio dinámico con la correspondiente definición de condiciones de frontera imperantes en sus extremos.

$$\frac{d^4 U_{11}(z)}{dz^4} + \lambda^4 U_{11}(z) = \alpha U_g(z) \quad (1)$$

Donde:

$$\lambda = \left( \frac{k_x + i\omega c_x - m_p \omega^2}{E_p I_p} \right)^{1/4} \quad y \quad \alpha = \frac{k_x + i\omega c_x}{E_p I_p} \quad (2)$$

La ecuación (1) se resuelve numéricamente para un perfil estratigráfico de suelo dado, discretizando el pilote en elementos finitos. La solución exacta se tiene para el problema hipotético de un estrato homogéneo y elástico. Si éste es el caso, para  $z = 0$ , la deflexión de la cabeza del

pilote  $U_{11} = U_{11}(0)$  está relacionada con el desplazamiento del campo libre del suelo superficial  $U_{ff} = U_{ff}(0)$  como sigue:

$$U_{11} = \Gamma U_{ff} \quad (3)$$

donde:

$$\Gamma = \frac{k_x + i\omega c_x}{E_p I_p \delta^4 + k_x + i\omega c_x} \quad (4)$$

y:

$$\delta = \frac{\omega}{V_s}, \quad y \quad m_p = \rho_p A_p \quad (5)$$

Además:

$\omega$ , es la frecuencia de la excitación

$E_p$ , módulo de rigidez del pilote

$I_p$ , momento de inercia de la sección transversal del pilote

$A_p$ , el área de la sección transversal del pilote

$\rho_p$ , es la densidad del pilote

$U_{ff}$  se determina usando la teoría elástica unidimensional para propagación de ondas

Los resortes y amortiguadores son aproximados, y puedan evaluarse mediante las siguientes expresiones.

$$k_x \approx 1.2 E_s \quad (6)$$

y también

$$c_x \approx 1.6 \rho_s V_s d \left( \frac{\omega d}{V_s} \right)^{-1/4} + 2 \beta_s \frac{k_x}{\omega} \quad (7)$$

Donde:

$E_s$ , módulo de rigidez del suelo

$V_s$ , velocidad de onda de cortante del suelo

$\beta_s$ , el amortiguamiento del suelo

### Impedancias dinámicas en la cabeza del pilote

El comportamiento dinámico de pilotes aislados con carga en la cabeza ha sido investigado mucho más extensamente que su respuesta a una excitación sísmica, de modo que actualmente existen numerosos procedimientos para la determinación de las impedancias dinámicas de pilotes. Basados en los resultados de análisis numéricos, diferentes investigadores han encontrado expresiones simples para estimar las impedancias dinámicas de pilotes aislados. Actualmente se dispone de un conjunto completo de estas expresiones para al menos los tres diferentes casos de depósitos de suelo de comportamiento histerético lineal: (a) Estrato homogéneo, (b) estrato no homogéneo con módulos incrementándose linealmente con la profundidad y (c) estrato no homogéneo con módulos incrementándose parabólicamente con la profundidad. Las impedancias dinámicas se expresan como:

$$K = \bar{K} + i\omega C_x \quad (8)$$

donde:

$\bar{K}$  denota la rigidez dinámica  
y  $C_x$  el parámetro del amortiguador.

### Respuesta sísmica de la superestructura

Habiendo evaluado el movimiento de excitación,  $U_0$ , y las funciones de impedancia,  $K_y$  anteriormente, el desplazamiento total de la cimentación (movimiento),  $U_a$ , y la distorsión (desplazamientos relativos) de la superestructura  $U_1$ , pueden ser derivados como ya se explicó en el apartado anterior

De esta forma tendremos:

$$U_a = \begin{Bmatrix} U_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = [K - \omega^2(M_0 + M_b)]^{-1} K U_0^* \quad (9)$$

Donde:

$U_0^*$  es la excitación de entrada a la cimentación

y también:

$$U_1 = A(U_0 + h_1 \theta_0) \quad (10)$$

En las cuales:

$$K = \begin{bmatrix} K_x & K_{xy} \\ K_{yx} & K_y \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix}$$

$$M_b = M + m_1 \begin{bmatrix} 1 & h_1 \\ h_1 & h_1^2 \end{bmatrix} A, \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & m_1 h_1 \\ m_1 h_1 & m_1 h_1^2 + I_1 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{(\omega/\omega_1)^2}{1 - (\omega/\omega_1)^2 + 2i\beta_{st}(\omega/\omega_1)^2}$$

Donde:

$\omega_1$  es la frecuencia natural  
 $\beta_{st}$  es la relación de amortiguamiento de la estructura

### Propuesta de Finn (referencia 5)

En seguida se presenta la metodología propuesta por W. D. Liam Finn y sus colegas, los cuales en la referencia citada, comparan los resultados del modelado matemático con los del modelado físico de pilotes a escala. Aquí exclusivamente se presentará el matemático por ser el relacionado con este trabajo.

Inicialmente se calcularon los desplazamientos del campo libre con la ayuda del programa SHAKE (referencia 2). Igualmente mediante el análisis del SHAKE se calculó, el modulo de cortante elástico equivalente,  $G_{ff}$ , y a partir de éste las velocidades de la onda de cortante.

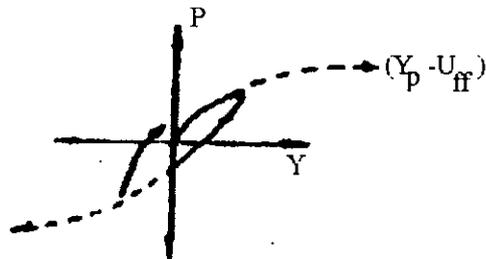


Fig 2.1 Simulación del comportamiento no-lineal del suelo de campo cercano

A continuación se procedió a un análisis no lineal con el programa SPASM8 (Matlock et al., 1978 a,b), donde el pilote es modelado como una viga-columna elástica lineal a la que se incorporan la rigidez a flexión del pilote,  $EI$ , y los efectos de la variación espacial de la carga axial,  $P(z)$ , en las flexiones del pilote (efectos p-y, ver figura 2.1) durante la carga sísmica lateral. En este programa, la interacción entre el suelo de campo cercano y el pilote durante el movimiento es representada usando resortes laterales no lineales  $k$ , colocados a lo largo de la longitud del pilote, de manera similar a como lo efectuó Gazetas. La rigidez de los resortes  $k$ , para un nivel de deflexión particular del pilote está definido a partir de la pendiente de la tangente de las curvas p-y no lineales. El esqueleto de la curva p-y,  $f(y)$ , lo define el usuario del programa en los cuadrantes (+p,+y) y (-p,-y). Para la respuesta en descarga de las curvas p-y en los puntos máximos de carga  $(P_{max}, y_{max})$  durante el movimiento, se realiza la simulación siguiendo la ruta en el espacio p-y que crea la forma del esqueleto inicial especificado, usando una función  $f(y - y_{max})$ . Esto difiere de la respuesta pura de Masing donde se maneja una función de descarga de la forma  $f(y - y_{max,2})$  (Finn et al., 1979).

El criterio de descarga usado en SPASM8 provoca una estimación más pequeña del amortiguamiento histerético del campo cercano que usando el criterio de Masing. Por otro lado, este modelo también tiene colocados amortiguadores viscosos equivalentes  $c_r$ , en paralelo con los resortes de campo cercano para simular la radiación de las ondas P y S a partir del fuste del pilote.

Así, como en el caso de Gazetas, la variación en el tiempo de los desplazamientos del campo libre, que también varían a lo largo de la longitud del pilote, se aplicaron a las terminaciones del sistema resorte-amortiguador y representan la excitación sísmica de entrada aplicada al pilote, con la diferencia de que en el caso de Gazetas el análisis es lineal, lo que se refleja en la caracterización de las impedancias dinámicas. Los coeficiente del amortiguamiento por radiación son calculados a partir de la distribución de velocidades de onda de corte usando las ecuaciones que para tal efecto propone Gazetas y Dobry (1984) y Lysmer y Richart (1966). El análisis dinámico de la pila supone que los coeficientes de amortiguamiento por radiación permanecen constantes durante el sacudimiento.

Para cada análisis con SPASM8, se calcula las historias de momentos flexionantes y fuerza cortante en la superficie del suelo, y los desplazamientos en la masa superior de la cabeza del pilote relativos al movimiento de la base del pilote.

### **Propuesta de Nogami (referencia 6)**

Toyoaki Nogami y sus colaboradores en su afán de mejorar la aproximación que ofrecen los métodos basados en el modelo de Winkler, en cuanto a reproducir mejor las características del medio continuo (p.e. Nogami 1987, Nogami y Leung 1990), han propuesto un modelo de segundo orden. A los métodos basados en el modelo de Winkler algunos autores les llaman de primer orden, cuando el modelo se forma a partir de la adición de algunos dispositivos en la parte superior del modelo de Winkler, como pueden ser una membrana elástica horizontal (Filonenko-Borodich 1940), una placa horizontal elástica y una viga de cortante horizontal (Pasternak 1954), etc., para

lograr el acoplamiento entre los resortes distribuidos que lo integran, se les llama modelos de segundo orden. Los modelos de segundo orden están definidos por la rigidez de los resortes y un parámetro adicional asociado con el dispositivo adherido. Se han desarrollado modelos más complejos (Kerr y Rheines 1967, Levinson 1979, Bharata y Levinson 1980) mediante la combinación de estratos de resortes y esos dispositivos en varias maneras. El número de parámetros de esos modelos es igual al número de estratos de resortes y estratos de dispositivos.

El modelo de Nogami se forma a partir de un número de estratos horizontales (definidos por la estratigrafía), construidos con vigas unidimensionales verticales, distribuidas uniformemente e interconectadas por resortes horizontales distribuidos a lo largo de la cara vertical, como un modelo de primer orden.

A continuación, para solucionar el problema de la falta de aproximación del modelo de primer orden, para bajas frecuencias, en comparación con la frecuencia natural del terreno, (que se debe en mucho al desacoplamiento entre los resortes), optaron por la introducción de elementos de acoplamiento de cortante para formar un modelo de segundo orden, cuyo comportamiento está gobernado por (Pasternak 1954, Kerr 1964):

$$p = -N \frac{d^2 u}{dz^2} + Ku \quad (11)$$

donde:

K y N, son los parámetros que definen los resortes y los elementos de cortante, respectivamente.

La fuerza cortante inducida en los elementos de cortante, T es:

$$T = N \frac{du}{dz} \quad (12)$$

La respuesta dinámica del pilote cuando se usa el modelo propuesto, es calculada en el dominio de frecuencias.

### **Propuesta de Flores-Berrones y Whitman (referencia 7)**

Flores-Berrones y Whitman sugieren resolver el problema de la respuesta sísmica de sistemas suelo-pilote, planteando las ecuaciones básicas de equilibrio para un modelo de resortes Winkler, obteniendo la respuesta para una carga armónica, dada en términos de la frecuencia de la excitación. Se toma también en cuenta el efecto de una masa concentrada en la cabeza del pilote.

Las ecuaciones de equilibrio del sistema suelo-pilote dependen tanto de las idealizaciones del suelo, (puede considerarse al suelo como un medio homogéneo y elástico, o puede ser considerado como un material estratificado con características no lineales), como de las condiciones de frontera entre el pilote, la masa concentrada y el suelo mismo. El suelo rodeando al pilote se modela mediante modelos de resorte tipo Winkler, tomando en cuenta la suposición básica de un modelo Winkler, que especifica que para cualquier fuerza aplicada en una barra (o pilote), existe un desplazamiento proporcional a la fuerza en su punto de aplicación. Se considera en esta propuesta

el caso particular de un pilote empotrado en el estrato resistente y la excitación actuando en la cabeza del pilote.

El análisis de la respuesta dinámica se lleva a cabo analizando primero el comportamiento del suelo que rodea al pilote, sin tomar en cuenta a la masa concentrada, para después superponer este efecto. De esta manera se encuentra la solución exacta para un sistema suelo-pilote exclusivamente (sin considerar el efecto de la masa) a una excitación del tipo  $u_g = u_0 e^{i\omega t}$ . El movimiento del estrato de suelo se calcula de manera exacta para el primer modo de vibrar del suelo y del pilote.

### **Propuesta de Romo y Ovando (referencia 10)**

Romo y Ovando proponen que el análisis de respuesta dinámica del sistema suelo-pilote se efectúe mediante el uso de las curvas p-y dinámicas, las cuales basan su construcción en el uso de un modelo reológico viscoelástico tipo Voight para representar la interacción dinámica pilote suelo (ver figura 3.5), estas tienen la ventaja de poder incorporar efectos tales como el envejecimiento, fatiga, etc.

Las funciones de impedancia manejan un componente elástico no lineal que permite incorporar los aspectos de comportamiento rigidez-deformación del suelo, incluyendo efectos de esfuerzos y características del material.

Los valores del módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo  $G$  y el valor del amortiguamiento histerético  $\lambda$  se corregirán de acuerdo al nivel de deformación alcanzado en cada incremento de tiempo. La disipación de energía por radiación de ondas sísmicas se toma en cuenta por el parámetro  $C_r$ , que como se verá en el siguiente capítulo es exclusivamente función de las propiedades del suelo de campo-libre.

Así la componente viscosa, incluye los efectos de amortiguamiento interno o histerético, y el de radiación o geométrico. Tanto las características dinámicas como las de amortiguamiento se obtienen haciendo ensayos dinámicos de laboratorio.

Para definir el movimiento horizontal  $Y_r$ , del pilote es necesario conocer los movimientos dinámicos relativos entre el sistema suelo-pilote y el campo libre.

Para lograr lo anterior, el análisis debe efectuarse en dos etapas, inicialmente se calcularán los movimientos sísmicos de campo libre para obtener las historias de velocidades y desplazamientos.

A continuación se realiza el análisis del sistema suelo-pilote paso a paso en el dominio del tiempo, así para cada incremento de tiempo se calcula el desplazamiento  $Y_r$ , restándole al desplazamiento calculado considerando el sistema suelo-pilote, el calculado para el campo libre, de manera que:

$$Y_r = y - U_s \quad (13)$$

Donde:

$Y_r$  es el desplazamiento del pilote  
 $y$  es el desplazamiento del sistema pilote-suelo

$U_s$  es el desplazamiento de la porción de suelo de campo libre

Este método se detalla en la referencia 1, y es la base del trabajo presentado en esta tesis

## **2.4 Modelos comunes para realizar el análisis de interacción dinámica de grupos de pilotes**

En la actualidad, es común que para efectuar el análisis del comportamiento dinámico de cimentaciones piloteadas se recurra a modelos matemáticos que se resuelven en el dominio de la frecuencia o del tiempo, basados en el modelo de Winkler o variantes de éste.

El proceso completo involucra por un lado la determinación de los movimientos del campo lejano, lo que por lo general se lleva a cabo aplicando la teoría de propagación unidimensional de ondas, y por otro lado la determinación de los movimientos del campo cercano, simulado con impedancias dinámicas.

Inicialmente se utilizaron impedancias dinámicas caracterizadas por una rigidez compleja con la cual se toma en cuenta la disipación de energía por radiación. Posteriormente se incorporó una componente viscosa que representa la disipación de energía por vía histerética. A este modelo le suele llamar tipo Voigt. Mediante este planteamiento se puede involucrar explícitamente en el modelo los aspectos más significativos que intervienen en el comportamiento dinámico de sistemas suelo-pilote, como son la no linealidad del suelo de campo cercano, definida por la degradación en la rigidez del suelo, la dependencia del amortiguamiento con la frecuencia, el efecto de la propagación de ondas a partir del fuste del pilote hacia el medio circundante, entre otras. A este tipo de modelo se le llama de primer orden.

En simulaciones experimentales se ha observado que para frecuencias cercanas o inferiores a la natural del sistema estructura-cimentación-suelo (referencia 3), la aproximación que se lograba no era la suficiente por lo efectos inelásticos que se generaban en el suelo de la interfaz, por lo cual se procedió a generar nuevos modelos adicionando elementos al originalmente propuesto por Winkler, como vigas de cortante, placas, etc, llamándolos de segundo orden.

### **2.4.1 Modelos de primer orden**

Los modelos de primer orden tienen su origen en los propuestos para realizar el análisis de la respuesta estática de una viga horizontal en la superficie del terreno. Posteriormente, utilizando el concepto de impedancia dinámica se consideró viable simular un estrato horizontal por medio de resortes uniformemente distribuidos verticalmente mutuamente desacoplados (el llamado modelo de Winkler). En este caso la definición del sistema descansa en la rigidez de los resortes. Debido a su concepción discreta, generalmente no puede representar las características de un medio continuo.

A los modelos de primer orden que se utilizan actualmente para determinar la respuesta dinámica de cimentaciones piloteadas, se les ha incorporado aspectos de comportamiento no lineal en el suelo de campo cercano mediante curvas de degradación del tipo p-y, cuya forma por lo

general se define en función de parámetros obtenidos en pruebas dinámicas, como ejemplos de estos podemos citar a los de Matlock (Matlock et al. 1978) o Novak (Novak 1974). El modelo de Novak se ha reconocido como capaz de reproducir las condiciones dinámicas de una forma muy aproximada a la realidad, aunque aún no se ha dado una base racional para esto. Sin embargo, este sólo se podía resolver en el dominio de la frecuencia y para pilotes aislados. Más recientemente, Nogami y sus colaboradores efectuaron modificaciones a éste para poder resolverlo en el dominio del tiempo (Nogami y Konogai 1988) y hacerlo aplicable a grupos de pilotes (Nogami y Chen 1983, Nogami 1985). Nogami presenta en la referencia 6 un desarrollo teórico de un modelo de primer grado usando soluciones continuas tridimensionales.

Por otro lado, es conocido que un movimiento sísmico está compuesto de varias frecuencias, cuya distribución obedece a factores como el mecanismo de generación, la distancia epicentral, las condiciones geológicas locales y la topografía de los depósitos profundos de roca y de la superficie del terreno, entre otros. También se sabe que, en los casos en los que el depósito de suelo presenta estratos uniformes blandos de espesor importante, amplifica significativamente los componentes de frecuencia de su movimiento alrededor de su frecuencia fundamental. De esta forma, la respuesta sísmica del terreno puede ser calculada asumiendo un viaje unidimensional de ondas SV a partir de la capa de roca. Durante el cálculo se trata al grupo de pilotes como un sistema de pilotes aislados y el suelo es idealizado como un modelo de primer orden o por un medio tridimensional continuo. Debido a que los pilotes son por lo general muy flexibles, no se produce una interacción suelo-pilote significativa (referencia 1), esto es no hay desplazamientos relativos importantes entre el suelo y el pilote excepto para frecuencias alrededor de la resonancia del sistema estructura-cimentación o menores. Todas esas frecuencias se encontrarían por arriba de la fundamental natural del suelo. Un modelo de primer grado sería aplicable para estas condiciones, ya que la frecuencia natural del sistema estructura-cimentación es mayor que las del suelo y además los movimientos del terreno no contienen componentes significativas de frecuencias inferiores a la fundamental del depósito.

En la referencia 1 se presentan algunos modelos de primer orden y la metodología que se sigue para aplicarlos en la resolución de la respuesta dinámica de cimentaciones piloteadas.

#### **2.4.2 Modelos de segundo orden**

Cuando la estructura es muy flexible se pueden presentar tres efectos importantes, primeramente, la frecuencia fundamental de resonancia del sistema cimentación-estructura puede ser inferior a la del suelo; además las componentes de baja frecuencia del movimiento del terreno pueden ser significativamente amplificadas por la estructura. También se pueden desarrollar desplazamientos permanentes en la masa de suelo durante la excitación sísmica, produciendo fuerzas estáticas o casi estáticas en los pilotes además de las debidas a los movimientos sísmicos transitorios, por lo que los modelos de primer orden no serían aplicables para este caso.

Para reproducir las características de un medio continuo, como ya se mencionó, se han desarrollado modelos de segundo orden agregando algunos dispositivos a los de primero, con el fin de lograr un acoplamiento entre los resortes, como por ejemplo membranas elásticas dispuestas horizontalmente (Filonenko-Borodich 1940), una placa horizontal (Hetenyi 1946), y una viga de cortante horizontal (Pasternak 1954). Todos los anteriores son modelos de segundo orden definidos por la rigidez de los resortes y un parámetro asociado con el dispositivo adicionado. Se han

desarrollados modelos más complicados (Kerr y Rheines 1967, Levinson 1979, Bharatha y Levinson 1980) combinando los estratos de resortes con los dispositivos de diferentes maneras. El número de parámetros requeridos para definir esos modelos son iguales al número de resortes y dispositivos. Nogami desarrolló un modelo de segundo orden (e.g. Nogami 1987, Nogami y Leung 1990), construido por vigas unidimensionales distribuidas verticalmente de manera uniforme que se conectan con resortes horizontales distribuidos a lo largo de la cara vertical. Este modelo se define por la rigidez de los resortes, el módulo de Young y la densidad de masa de las vigas.

### **Modelos completos**

En la literatura están reportados algunos modelos que tratan de tomar en cuenta los efectos conjuntos de sistemas suelo-pilote-subestructura-superestructura. Un ejemplo relevante de estos es el propuesto para simular el comportamiento dinámico del puente Painter Street Bridge, en el Río Dell, California, por Makris, Gazetas y Delis (referencia 9) basado en impedancias dinámicas, factores de respuesta sísmica de cimentaciones piloteadas y un modelo estructural simple que puede ser ampliado para tomar en cuenta respuestas más complejas. Sin embargo, en las comparaciones de la aceleración pico del tablero predicha y la observada en registros reales se detectó un 30% de error, presumiblemente debido a que no se llevó a cabo un análisis no lineal para simular el comportamiento del suelo, lo que habría sido sencillo si se hubiera resuelto el problema en el dominio del tiempo en lugar de la frecuencia con un análisis lineal equivalente.

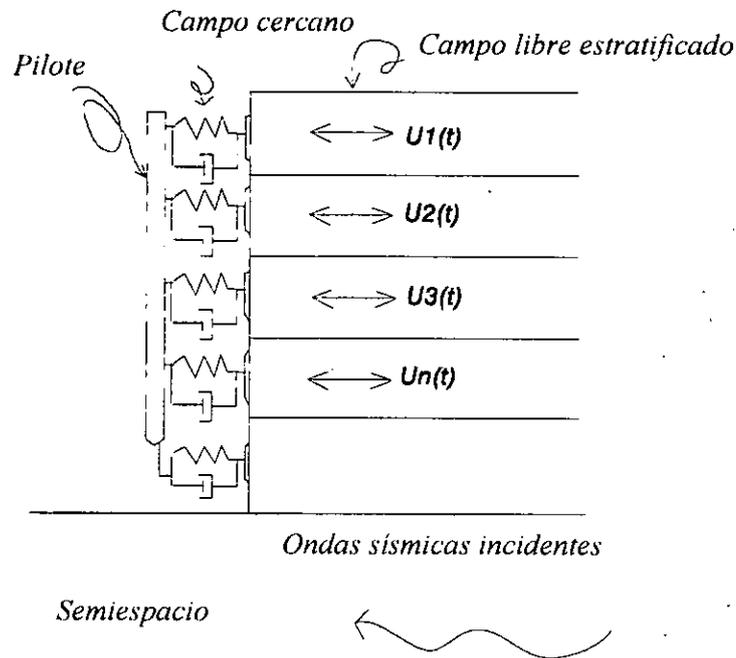
En este trabajo se propone un modelo para tomar en cuenta los efectos de los movimientos de la masa de suelo entre pilotes mediante una modificación del modelo de Winkler, así como la dependencia aproximada entre la respuesta de pilotes dispuestos en fila ante ondas SH propagándose verticalmente. Tiene la ventaja de poder involucrar explícitamente los efectos que a continuación se listan como más relevantes:

- 1) La no-linealidad que suele presentarse en el comportamiento del suelo de campo cercano cuando es sometido a un sismo de gran magnitud.
- 2) La dependencia de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento a la frecuencia
- 3) El efecto de la degradación o pérdida de la rigidez y resistencia del suelo por carga dinámica
- 4) La disipación de energía debida a la propagación de ondas a partir del fuste del pilote.
- 5) Los efectos inerciales de la masa de suelo sobre los pilotes durante el evento dinámico
- 6) La influencia de la subestructura y superestructura en la respuesta del sistema completo, pilote-suelo-subestructura-superestructura, resolviendo las ecuaciones de movimiento en el dominio del tiempo.

## 3 PLANTEAMIENTO DEL METODO PROPUESTO

### 3.1 Desarrollo del modelo

En la figura 3.1 se presenta el modelo propuesto para simular el comportamiento mecánico del sistema suelo-pilote.



*Fig. 3.1 Representación esquemática del subsistema suelo-pilote*

El modelo que se propone para analizar grupos de pilotes dispuestos en líneas, se conforma por cuatro partes, el subsistema pilote-suelo, el subsistema suelo-pilote-suelo, el subsistema subestructura-estructura, y el campo libre, cada uno de los cuales se describe más adelante. El análisis del campo libre se efectúa de manera independiente suponiendo que se tienen ondas de cortante vertical y aplicando la teoría unidimensional de propagación de ondas. Se tiene la opción de realizar análisis lineales o no lineales si se considera que la magnitud de las deformaciones angulares que pueden presentarse así lo ameritan.

### 3.2 Análisis del modelo

El análisis del modelo consiste básicamente en la integración simultánea en el dominio del tiempo de las ecuaciones de equilibrio dinámico obtenidas para cada subsistema. Inicialmente se aplican los movimientos del campo libre a los extremos de impedancias dinámicas que simulan el suelo de campo cercano del primer pilote, se realiza la integración para el correspondiente intervalo de tiempo obteniéndose la demanda del pilote (ver figura 3.1). Posteriormente se excita el subsistema suelo-pilote-suelo (ver figura 3.2), el cual nos representa el suelo que existe entre los pilotes, sus efectos se transmiten en forma de fuerzas al pilote contiguo (ver figura 3.3).

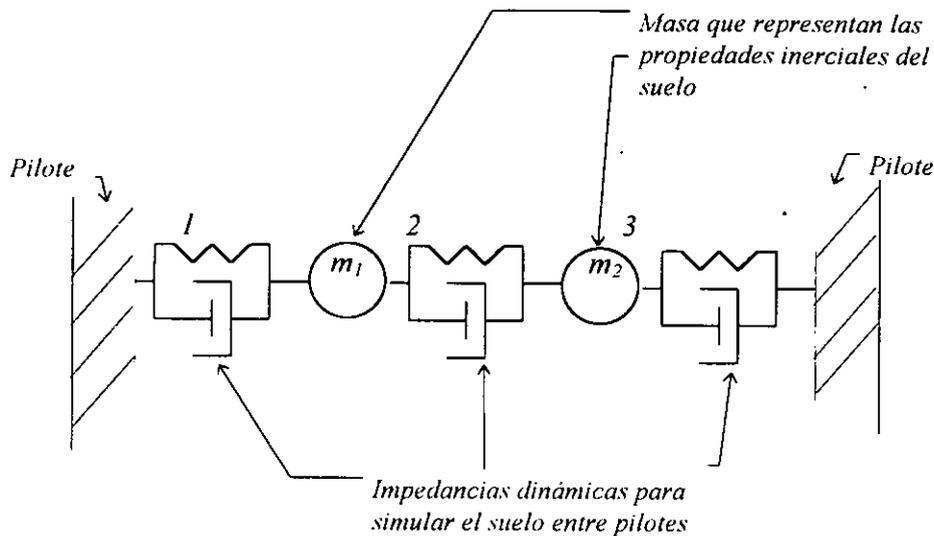
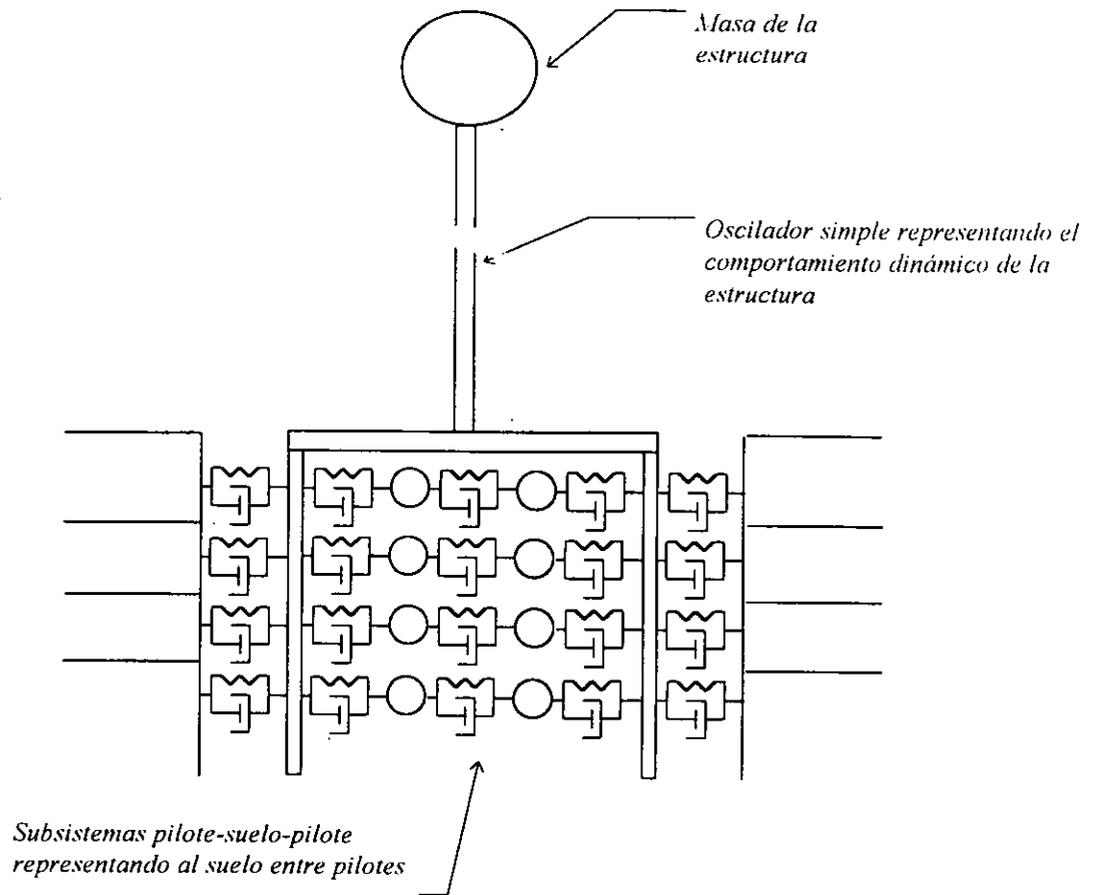


Fig. 3.2 Representación esquemática del subsistema pilote-suelo-pilote

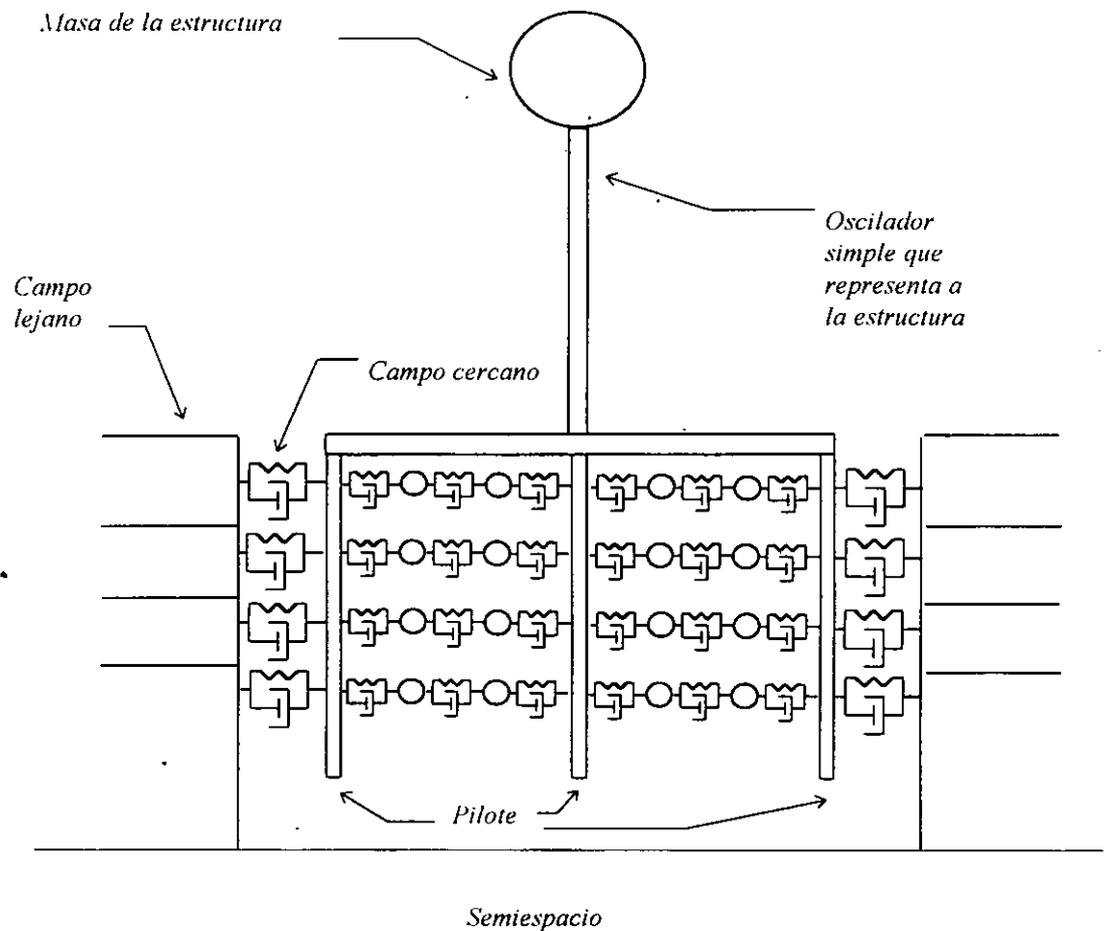
En seguida se hace la integración del pilote contiguo tomando en cuenta tanto los efectos transitorios del evento dinámico como los causados por los desplazamiento de la masa de suelo representados por las fuerzas de tipo estáticas ya calculadas. Los movimientos del pilote antecedente se corrigen para el siguiente intervalo de tiempo transmitiendo los efectos del movimiento del suelo entre pilotes por medio de fuerzas reactivas.



*Fig. 3.3 Representación esquemática del modelo para dos pilotes*

### 3.3 Planteamiento del modelo

Para más de dos pilotes, esto es, el modelo completo, se repite el procedimiento anterior excitando al suelo entre pilotes con los movimientos del antecedente, modificando los movimientos del posterior con los efectos del movimiento de la masa de suelo, representados a través de fuerzas cuasiestáticas y corrigiendo los movimientos del anterior por medio de fuerzas reactivas tomadas en cuenta para el siguiente intervalo de tiempo. (ver figura 3.4)



**Fig. 3.4 Representación esquemática del modelo completo para más de dos pilotes**

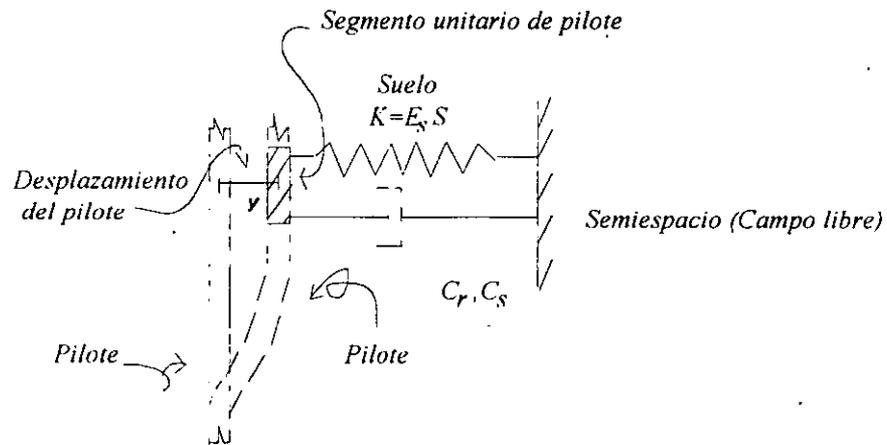
Como se puede ver en las figuras 3.3 y 3.4, el modelo tiene también la opción de tomar en cuenta de manera aproximada los efectos de la superestructura, representándola como un oscilador simple y adicionando los efectos de ésta como fuerzas reactivas actuando en la cabeza de los pilotes para cada intervalo de tiempo. Igualmente los efectos de cabeceo pueden considerarse mediante la aplicación de fuerzas axiales en la cabeza de los pilotes involucrados.

### 3.4 Análisis de los subsistemas

A continuación se presenta el análisis de cada uno de los subsistemas.

#### 3.4.1 Subsistema suelo-pilote

El subsistema suelo-pilote es el que se plantea en la referencia 1, los efectos de campo cercano son tomados en cuenta mediante una serie de subsistemas simples resorte-amortiguador tipo Voight (ver figura 3.5) trabajando en paralelo. La reacción en el pilote por unidad de longitud es la suma de una componente elástica  $p_1$ , y una componente viscosa  $p_2$ . El pilote se discretiza con elemento finito tipo viga.



**Fig. 3.5 Modelación del campo cercano**

Los efectos de la onda excitadora se transmiten al pilote tanto a través del suelo de campo cercano, variando temporal y espacialmente a lo largo del fuste del pilote, como directamente por su punta.

De esta forma el subsistema completo quedaría como se muestra en la figura 3.6.

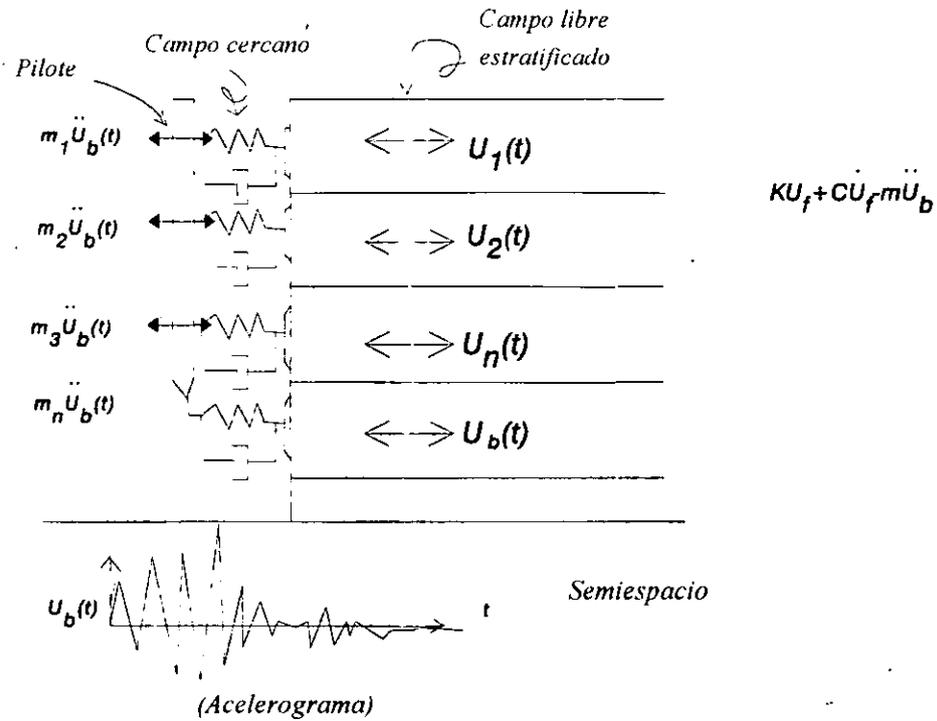


Fig. 3.6 Excitación del campo libre y de la punta del pilote Subsistema Suelo-Pilote

Para tener el modelo matemático que rige el comportamiento del subsistema suelo-pilote, se planteó su equilibrio dinámico como se describe en la referencia 1 y se obtuvo la ecuación diferencial en derivadas parciales de cuarto orden y primer grado que se presenta a continuación:

$$[m] \left\{ \frac{d^2 y}{dt^2} \right\} + [c] \left\{ \frac{dy}{dt} \right\} + [k] \{y\} + EI \left\{ \frac{d^4 y}{dz^2} \right\} = \left\{ ku_f + c \frac{du_f}{dt} \right\} - [m] \left\{ \frac{d^2 u_b}{dt^2} \right\} \quad (14)$$

La ecuación (14) se resuelve en el dominio del tiempo mediante el método de Newmark, para las condiciones estratigráficas y de frontera correspondientes.

Inicialmente deben calcularse los movimientos del campo libre de acuerdo a la definición del ambiente sísmico en cuestión, de donde se obtendrán los histogramas de desplazamientos y velocidades en los puntos nodales con los que se puede caracterizar completamente al vector de cargas, que como se puede observar, es dependiente del tiempo.

Se efectúa la integración del subsistema suelo-pilote paso a paso. Para cada incremento de tiempo, se resuelve para la función de desplazamiento

$\{y\}$ , y sus derivadas con respecto al tiempo,  $\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\}$ ,  $\left\{\frac{dy}{dt}\right\}$ . Previamente ya se había resuelto la ecuación para la variación de la función desplazamiento  $\{y\}$  con la profundidad  $\left\{\frac{d^4 y}{dz^4}\right\}$ ,  $\left\{\frac{d^2 y}{dz^2}\right\}$ , estos desplazamientos se incorporan como iniciales durante la aplicación del método de Newmark.

La matriz de masas del sistema suelo-pilote se obtiene superponiendo linealmente la matriz de masas concentradas, que toma en cuenta los efectos inerciales del suelo de campo cercano, y la consistente, que toma en cuenta los efectos inerciales del pilote.

La integración en el dominio del tiempo permite la corrección de las características de rigidez a lo largo del evento, mediante el uso de las curvas p-y, calculando el desplazamiento relativo entre el pilote y el suelo  $y_r = y - U_s$ , y rectificando las propiedades del suelo en función de la deformación de acuerdo al criterio de Romo y Ovando (Referencia 4). Rigurosamente es necesario seguir un proceso iterativo en cada incremento de tiempo para evaluar correctamente los valores del módulo, G, y el amortiguamiento  $\lambda$ ; sin embargo, con el fin de hacer menos laborioso el proceso de solución puede optarse por hacer la corrección de acuerdo al nivel de deformaciones angulares, de los módulos antes citados para ser usados en el siguiente incremento de tiempo, lo que también se justifica en términos de la aproximación ya que al efectuarse ajustes sucesivos para cada paso en el dominio del tiempo se incrementa implícitamente la convergencia entre los módulos supuestos y los adecuados al nivel de deformaciones finales.

Los elementos mecánicos por cada tiempo se obtienen mediante la teoría de vigas, a lo largo del fuste del pilote en los puntos nodales definidos para el análisis de elemento finito.

### 3.4.2 Subsistema pilote-suelo-pilote

El subsistema pilote-suelo-pilote consiste de tres impedancias dinámicas tipo Voight como la ya descrita, y dos elementos inerciales como se puede apreciar en la figura 3.2, distribuidos horizontalmente con la profundidad como se muestra en las figuras 3.3 y 3.4. Su finalidad es simular el comportamiento del suelo que se encuentra entre pilotes. Por un lado las impedancias dinámicas, igualmente caracterizadas por una componente elástica y una viscosa, nos permiten tomar en cuenta efectos de disipación de energía tanto por vía histerética como por radiación, además el análisis en el dominio del tiempo nos permite corregir los parámetros de rigidez en función del nivel de deformaciones angulares durante el evento dinámico. Por otro lado, los elementos inerciales, toman en cuenta los posibles movimientos en la masa de suelo que como ya se comentó en los antecedentes, pueden inducir fuerzas en los pilotes de tipo estático además de las que ya tienen por los efectos transitorios de la excitación.

Para la obtención de las ecuaciones de movimiento se consideró que la excitación llega por ambos extremos quedando la ecuación de equilibrio dinámico como en seguida se muestra:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 y_1 + c_1 \dot{y}_1 \\ k_3 y_2 + c_2 \dot{y}_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Los subíndices corresponden a una numeración de los elementos de derecha a izquierda, de manera que los resortes y las rigideces impares corresponden a las impedancias extremas (ver figura 3.2). La ecuación diferencial fue planteada en términos de desplazamientos absolutos.

El comportamiento de subsistema pilote-suelo-pilote se obtiene mediante la resolución de la ecuación diferencial (15) obtenida en el dominio del tiempo, simultáneamente con el sistema suelo-pilote.

Como puede observarse de las ecuaciones anteriores, el subsistema pilote-suelo-pilote, queda representado por ocho parámetros, las rigideces  $k_1$  a  $k_3$ , los amortiguamientos  $c_1$  a  $c_3$ , todos definidos con el criterio de Romo y Ovando ya citado, y las masas  $m_1$  y  $m_2$  obtenidas en función de las propiedades de masa del suelo y áreas tributarias, en proporción a la distancia entre pilotes.

### 3.4.3 Subsistema subestructura-superestructura

Para tomar en cuenta de forma aproximada los efectos de la estructura en la respuesta del sistema suelo-cimentación se procedió a representarla por medio de un oscilador simple, como el mostrado en la figuras 3.3 y 3.4.

Puede comprobarse fácilmente que la respuesta del subsistema subestructura-estructura planteado (oscilador simple), cuando se excita por la base queda definida por la siguiente ecuación de movimiento.

$$ky + c\dot{y} + m\ddot{y} = kx + c\dot{x} \quad (16)$$

La ecuación (16) se resuelve en el dominio del tiempo paso a paso con los otros dos subsistemas, los desplazamientos de la masa se transmiten a la base como fuerzas reactivas, las cuales a su vez pasan a las cabezas de los pilotes para cada intervalo de tiempo, en términos de carga axial y lateral.

El efecto de cabeceo se toma en cuenta suponiendo que la losa de cimentación es rígida y transformando los momentos flexionantes en fuerzas axiales aplicadas en la cabeza de los pilotes, para cada intervalo de tiempo.

### 3.5 Efectos de campo cercano

De acuerdo a lo mencionado, el suelo de campo cercano se simuló usando un conjunto de subsistemas simples resorte-amortiguador tipo Winkler. Los resortes involucrados en la modelación tienen la particularidad de ser no lineales, de manera que su rigidez  $k$ , está definida para un nivel particular de deflexión del pilote a partir de curvas p-y dinámicas. Los amortiguadores viscosos equivalentes  $c_r$ , se colocaron en paralelo con los resortes, con el fin de simular la radiación de las ondas P y S a partir del fuste del pilote.

La forma de la curva p-y dinámica para el análisis de interacción sísmica pilote-suelo, se obtiene aplicando el criterio de Romo y Ovando (referencia 2). Se considera al suelo representado por un elemento mecánico de tipo Voight como el mostrado en la figura 3.5, donde la reacción en el pilote por unidad de longitud se obtiene como la suma de una componente elástica (resorte),  $p_1$ , y una componente viscosa (amortiguador) representada por  $p_2$ . Así, tenemos que:

$$P = p_1 + p_2 \quad (17)$$

#### 3.5.1 Funciones de impedancia

##### Componente elástica

La componente elástica se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$P_1 = \left( \frac{2.6}{1 - \nu_s} \right) (G_{max} [1 - H(\gamma)]) \left[ \frac{2(1 + \nu_s)(G_{max} [1 - H(\gamma)]) B^4}{EI} \right]^{\frac{1}{2}} Y \quad (18)$$

donde  $\nu_s$  es la relación de Poisson del suelo,  $EI$  es la flexibilidad del pilote de diámetro  $B$  (o su ancho en la dirección del movimiento),  $G_{max}$  es el módulo máximo de cortante dinámico de suelo.

El desplazamiento horizontal,  $Y$ , del pilote de diámetro  $B$  (ancho) está dado por :

$$Y = 2.5B\varepsilon$$

Donde:

$\varepsilon$  es deformación axial.

Por otro lado, sabemos que la máxima distorsión angular,  $\gamma$ , inducida por la deformación axial,  $\varepsilon$ , y su componente ortogonal,  $-\nu$ , es igual a:

$$\gamma = (1 + \nu)\varepsilon \quad (19)$$

Despejando la deformación axial y sustituyendo en  $Y$ , tenemos:

$$Y = 2.5B \frac{\gamma}{1 + \nu_s}$$

La función de atenuación  $H(\gamma)$  está dada por :

$$H(\gamma) = \left[ \frac{\left( \frac{\gamma}{\gamma_r} \right)^{2B}}{1 + \left( \frac{\gamma}{\gamma_r} \right)^{1B}} \right]^{-A} \quad (20)$$

A, B y  $\gamma_r$  son parámetros del suelo que se determinan experimentalmente con ensayos dinámicos.  $\gamma_r$  es la deformación angular de referencia y varía con la consistencia relativa,  $C_r$ :

$$C_r = \frac{w_L - w_n}{w_L - w_p} = \frac{w_L - w_n}{I_p} \quad (21)$$

en donde  $I_p$ , es el índice de plasticidad y  $w_n$ ,  $w_l$ ,  $w_p$  son las humedades natural y en los límites líquido y plástico respectivamente.

Las características del suelo se reflejan a través de su comportamiento esfuerzo-deformación o rigidez-deformación. Los parámetros A, B y  $\gamma_r$  que definen a la función de atenuación  $H(\gamma)$ , dependen de las características y tipo de material. En el caso del parámetro  $\gamma_r$ , esta dependencia es claramente explícita pues depende de la consistencia relativa.

Esta relación  $p_1 - y$  es no lineal y puede incluir los aspectos importantes del comportamiento dinámico de las arcillas como el efecto de envejecimiento, la degradación por efectos de fatiga, el estado de esfuerzos en la masa de suelo y las características del material, como se explica a continuación:

### Componente Viscosa

Se sabe que la pérdida de energía durante el evento dinámico obedece a dos causas distintas, por una parte existe disipación de la energía por la radiación de ondas sísmicas P y S a partir del pilote, y por la otra existe disipación de energía en el ciclo histerético del material particular.

Considerando que en el método utilizado en este trabajo se emplea un método paso a paso en el dominio del tiempo y suponiendo que la excitación es armónica la fuerza  $P_2$  en la ecuación se calcula como:

$$P_2 = (C_r + C_s) \frac{dY}{dt} \quad (22)$$

Donde la componente debida a radiación  $C_r$  se obtendrá como (referencia 10):

$$C_r = 2B\rho_s V_s \left\{ 1 + \left[ \frac{3.4}{\pi(1-\nu_s)} \right]^{\frac{5}{4}} \right\} \left\{ \frac{4}{\pi} \right\}^{\frac{3}{4}} \left\{ \frac{V_s}{\pi f B} \right\}^{\frac{1}{4}} \quad (23)$$

donde  $\rho_s$  es la densidad de masa del suelo,  $V_s$  es la velocidad de onda de corte del suelo, y  $f$  es la frecuencia (rango de frecuencias) de la excitación (ciclos/s) y puede considerarse como la frecuencia natural del depósito del suelo (campo libre).

Y la componente por el efecto histerético del suelo,  $C_s$  se calculará con la siguiente expresión (referencia 10):

$$C_s = 2\delta E_s \frac{\lambda_s}{\omega}; \quad \omega = 2\pi f$$

Donde:

- $E_s$  es el módulo de Young del suelo a la profundidad deseada
- $\lambda_s$  es el amortiguamiento histerético del suelo a la misma profundidad
- $\delta$  es un coeficiente independiente de la profundidad

Para pilotes largos y flexibles,  $\delta$  es función de las características estratigráficas del depósito de suelo, de la condición de fijación de la cabeza del pilote y de la rigidez relativa del pilote con respecto a la del suelo. Existen gráficas (referencia 4) donde se relacionan los valores de  $\delta$  con el módulo de Young del pilote normalizado por el del suelo, multiplicados por un factor de forma del pilote.

### 3.5.2 Ciclo de histéresis

Como sabemos una manifestación de la capacidad de un material para disipar energía se da por medio de la aparición de ciclos de histéresis (referencia 1).

En esta tesis la modelación de las relaciones no lineales esfuerzo-deformación se rigen por las siguientes hipótesis:

1) El amortiguamiento es de índole exclusivamente histerético, esto implica que es independiente de la tasa de deformación.

2) La rigidez del suelo adopta su valor máximo (el cual corresponde al inicial), cada vez que se presenta un cambio en el sentido de las cargas.

De acuerdo a lo anterior la forma de la curva esfuerzo-deformación angular del suelo puede expresarse como  $\tau = G\gamma$ , donde  $\tau$  es el esfuerzo cortante,  $G$  es el módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo y  $\gamma$  es la deformación angular.

Por otro lado, las ecuaciones de carga y descarga son las siguientes (referencia 10):

Carga:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = G_o [1 - F(\gamma - \gamma_{min})] \quad (24)$$

Descarga:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = G_o [1 - F(\gamma_{max} - \gamma)] \quad (25)$$

Donde la función  $F$ , está definida en el intervalo positivo incluyendo el cero;  $G_o$  es el módulo de rigidez al cortante para deformaciones pequeñas que como ya se comentó será también el correspondiente a cada cambio en el sentido de la carga.

Mediante integración de las ecuaciones anteriores se pueden obtener las relaciones esfuerzo-deformación.

$$\tau - \tau_{min} = \int_{\gamma_{min}}^{\gamma} G_o [1 - F(\varepsilon - \gamma_{min})]$$

Desarrollando

$$\tau - \tau_{min} = G_o [\gamma - \gamma_{min}] - G_o \int_{\gamma_{min}}^{\gamma} F(\varepsilon - \gamma_{min}) \partial \varepsilon$$

Si se propone el siguiente cambio de variable:

$$2\eta = \varepsilon - \gamma_{min}$$

y

$$2\delta\eta = \partial\varepsilon$$

Donde:

$$\eta \in \left[ 0, \frac{\gamma - \gamma_{min}}{2} \right]$$

Podemos reescribir la ecuación como:

$$\tau - \tau_{min} = G_o [\gamma - \gamma_{min}] \left[ 1 - \frac{2}{\gamma - \gamma_{min}} \int_0^{\frac{\gamma - \gamma_{min}}{2}} F(2\eta) \partial\eta \right] \quad (26)$$

Haciendo:

$$H(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\frac{\gamma - \gamma_{min}}{2}} F(2\eta) \partial\eta$$

Finalmente obtenemos las expresiones que regulan el comportamiento esfuerzo-deformación para carga:

$$\tau - \tau_{min} = G_o [\gamma - \gamma_{min}] \left[ 1 - H\left(\frac{\gamma - \gamma_{min}}{2}\right) \right] \quad (27)$$

$$G = G_o \left( 1 - H\left(\frac{\gamma - \gamma_{min}}{2}\right) \right)$$

donde:

$$H\left(\frac{\gamma - \gamma_{mn}}{2}\right) = \frac{\left[ \frac{\left[ \frac{(\gamma - \gamma_{mn})}{2} \right]^{2B}}{\gamma_r} \right]^{A'}}{1 + \left[ \frac{(\gamma - \gamma_{mn})}{2} \right]^{2B}} \quad (28)$$

por un procedimiento análogo, podemos obtener las expresiones para descarga:

$$\tau - \tau_{max} = -G_o \left[ \gamma_{max} - \gamma \right] \left[ 1 - H\left(\frac{\gamma_{max} - \gamma}{2}\right) \right] \quad (29)$$

$$G = G_o \left( 1 - H\left(\frac{\gamma_{max} - \gamma}{2}\right) \right)$$

donde:

$$H\left(\frac{\gamma_{max} - \gamma}{2}\right) = \frac{\left[ \frac{\left[ \frac{(\gamma_{max} - \gamma)}{2} \right]^{2B}}{\gamma_r} \right]^{A'}}{1 + \left[ \frac{(\gamma_{max} - \gamma)}{2} \right]^{2B}} \quad (30)$$

Aquí  $A' = A + C_r$ , donde  $C_r$  como ya se dijo es la consistencia relativa. Los otros parámetros ya fueron comentados.

## 4 EVALUACION DEL MODELO

### 4.1 Aplicación del método

El modelo matemático planteado en el capítulo anterior fue codificado en lenguaje de programación FORTRAN, para contar con una herramienta de fácil aplicación para efectuar el análisis de estructuras resueltas a base de pilotes. Al programa se le llamó SISTEMA.for

El programa está estructurado en tres subprogramas, cada uno asociado a los subsistemas suelo-pilote, pilote-suelo-pilote y subestructura-estructura, llamados RSSSPNL.for, SUELO.for y TORRE.for, respectivamente.

Para corroborar el correcto funcionamiento del software creado, se aplicó a diferentes casos, inicialmente de manera independiente para cada subsistema y finalmente para el sistema completo, y a comparar estos resultados con los obtenidos con el uso del programa SAP90 (referencia 11).

### 4.2 Evaluación del subsistema suelo-pilote

Para efectuar la verificación de los resultados obtenidos para el subsistema suelo-pilote, se procedió a efectuar el análisis de un pilote aislado, cuyas características se detallan adelante, con la subrutina RSSSPNL.for y con el SAP90.

#### a) Características físicas del sistema suelo-pilote.

Se propuso el análisis de un pilote de sección circular de 0.40 m de diámetro y una longitud efectiva de 25.0 m (Profundidad del estrato de apoyo), cuyas propiedades se presentan en la tabla 1.

Tabla 1 Propiedades del pilote

Pilote de concreto					
Radio (m)	Area (m <sup>2</sup> )	Momento de inercia (m <sup>4</sup> )	Densidad $\left(\frac{t \cdot s^2}{m^4}\right)$	Módulo de elasticidad $\left(\frac{t}{m^2}\right)$	Amortiguamiento
0.2	0.12566	En "x" y "y" $1.25664 \times 10^{-3}$ En "z" $2.51327 \times 10^{-3}$	0.24465	$1.585 \times 10^6$	0.03

Dicho pilote se consideró embebido en el depósito de suelo caracterizado por las propiedades que se presentan en la tabla 2, las cuales se escogieron como representativas de un depósito de suelo blando típico de la ciudad de México. Como en este nivel de la verificación no se incluye el comportamiento no lineal del suelo, no se definen los parámetros de las curvas p-y dinámicas.

*Tabla 2 Propiedades del depósito de suelo analizado*

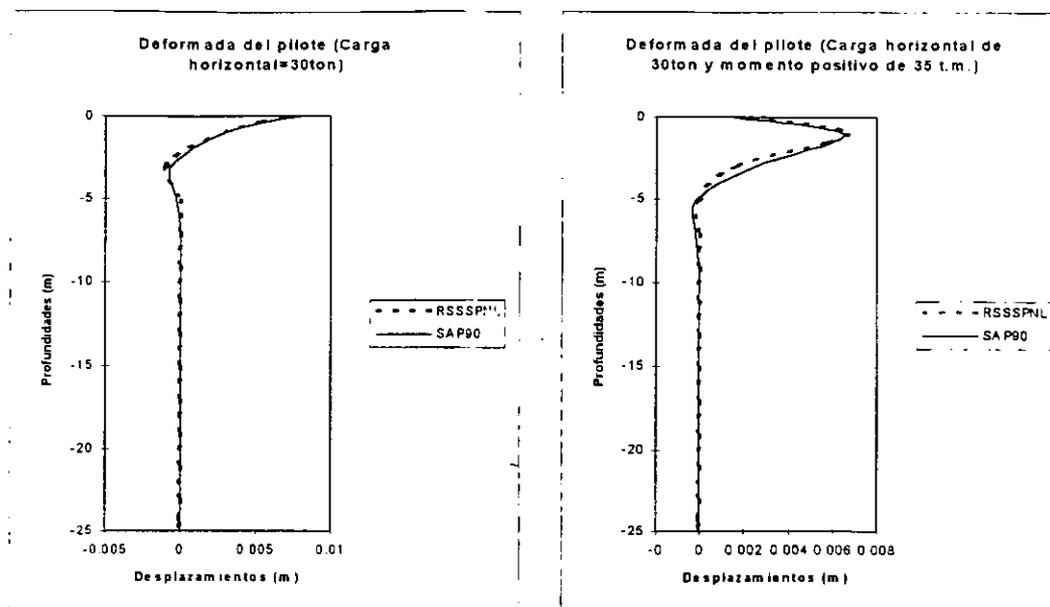
<i>Profundidad (m)</i>	$V_s \left( \frac{m}{s} \right)$	$\gamma \left( \frac{t}{m^3} \right)$	$\nu$
0-2	90	1.2	0.35
2-4	90	1.2	0.35
4-6	90	1.2	0.35
6-8	69	1.12	0.4
8-10	69	1.12	0.4
10-12	69	1.12	0.4
12-14	69	1.12	0.4
14-16	69	1.12	0.4
16-18	69	1.12	0.4
18-20	69	1.12	0.4
20-22	80	1.17	0.35
22-24	80	1.17	0.35
24-25	80	1.17	0.35
<i>Semiespacio.</i>			
$\lambda = 2\%$	800	2.0	----

*b) Definición de cargas actuantes en el sistema*

Con el fin de cubrir todas las posibilidades de carga se propusieron varios casos, partiendo de lo más simple (carga estática) a lo complejo (carga estática en la cabeza del pilote y con variación temporal y espacial de la excitación a lo largo del fuste del pilote).

Caso 1. Inicialmente se procedió a aplicar una condición de carga estática consistente de una fuerza horizontal de 30 ton y una fuerza horizontal y momento de 30ton y 35 t.m., respectivamente.

Se efectuaron los análisis correspondientes con el RSSSPNL y el SAP90, obteniéndose las deformadas del pilote. En la gráfica de la figura 4.1 se muestran los resultados obtenidos.



(a) (b)  
 Fig. 4.1 Comparaciones entre los resultados del RSPSPNL y el SAP90 para diferentes condiciones de carga estática

Como se puede observar en la figura 4.1, la discrepancia aunque no es importante, resulta mayor cuando intervienen momentos concentrados, como es el caso de la figura 4.1.b, esto puede atribuirse al grado de aproximación que maneja cada programa.

Caso 2. En seguida se analizó la respuesta del mismo sistema sujeto exclusivamente a la armónica presentada en la figura 4.2, considerándola como la variación de aceleraciones en el estrato de apoyo, sin considerar transmisión de carga por el suelo de campo cercano.

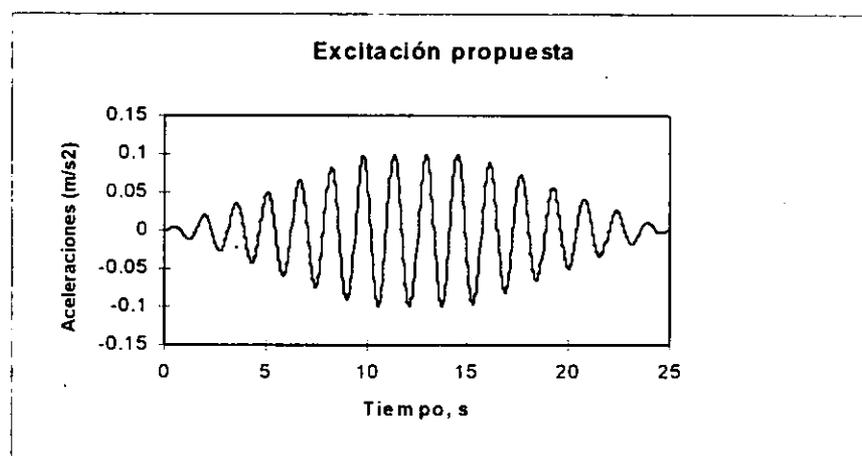


Fig. 4.2. Acelerograma empleado

En las gráficas de las figuras 4.3, 4.4 y 4.5, se presentan las variaciones temporales de desplazamientos obtenidas aplicando ambos programas de cómputo, nuevamente como en el caso estático no se presentan discrepancias importantes.

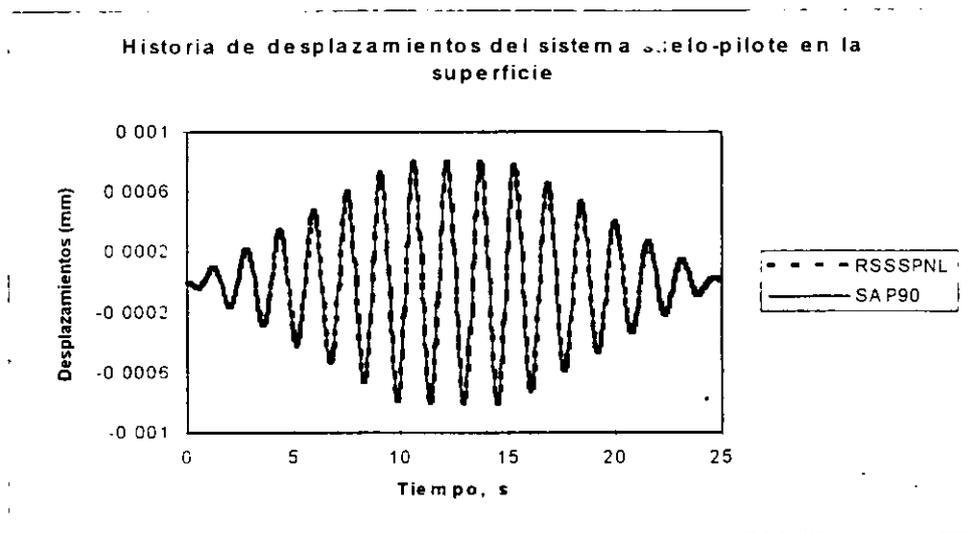


Fig. 4.3 Resultados comparativos de la respuesta en la superficie del sistema suelo-pilote considerando un comportamiento lineal del suelo de campo cercano.

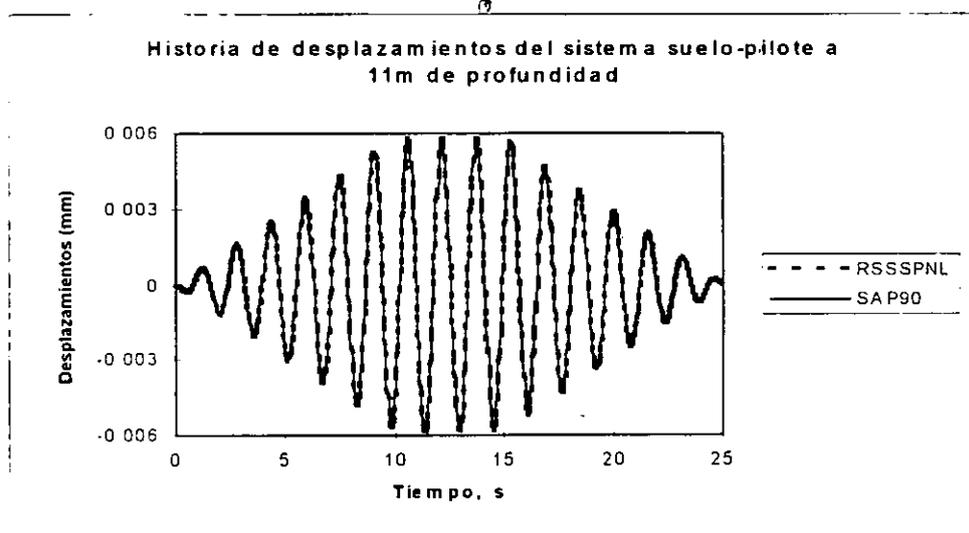
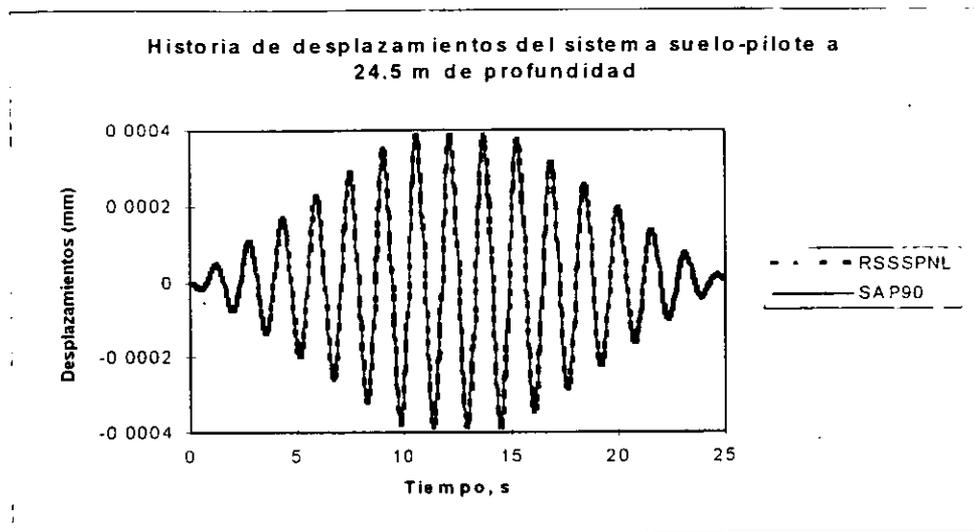
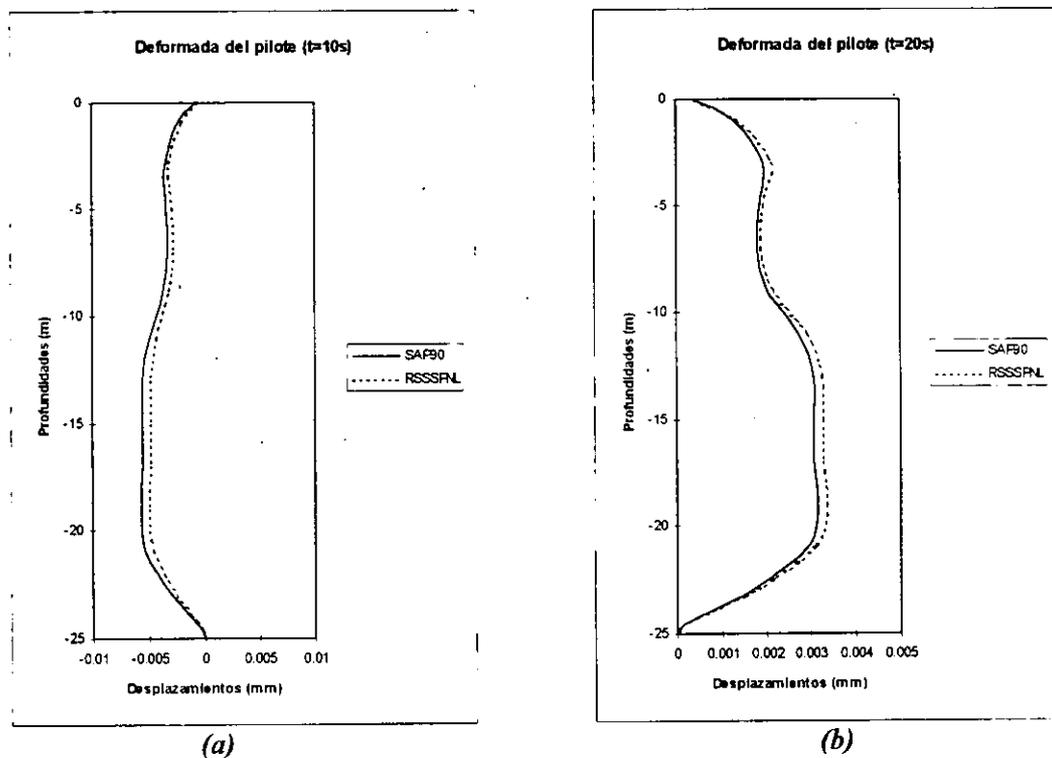


Fig. 4.4 Resultados comparativos de la respuesta a 11.0 m de profundidad del sistema suelo-pilote considerando un comportamiento lineal del suelo de campo cercano.



*Fig. 4.5. Resultados comparativos de la respuesta a 24.5m de profundidad del sistema suelo-pilote considerando un comportamiento lineal del suelo de campo cercano.*

En las gráficas de la figura 4.6 se presenta el perfil de desplazamientos obtenido para los instantes  $t=10$  s y  $t=20$  s, de la respuesta.



*Fig. 4.6 Comparación de las configuraciones deformadas para dos instantes dentro del evento dinámico*

Caso 3. A continuación se consideró al sistema excitado exclusivamente por el suelo de campo cercano, a través de impedancias dinámicas elásticas, considerando a la misma excitación mostrada en la figura 4.2, pero ahora tomándola como historia de desplazamientos. Como la fuerza transmitida al pilote es función tanto de la excitación como de la rigidez del suelo aledaño al pilote, este caso conlleva intrínsecamente una variación temporal y espacial de la carga aplicada.

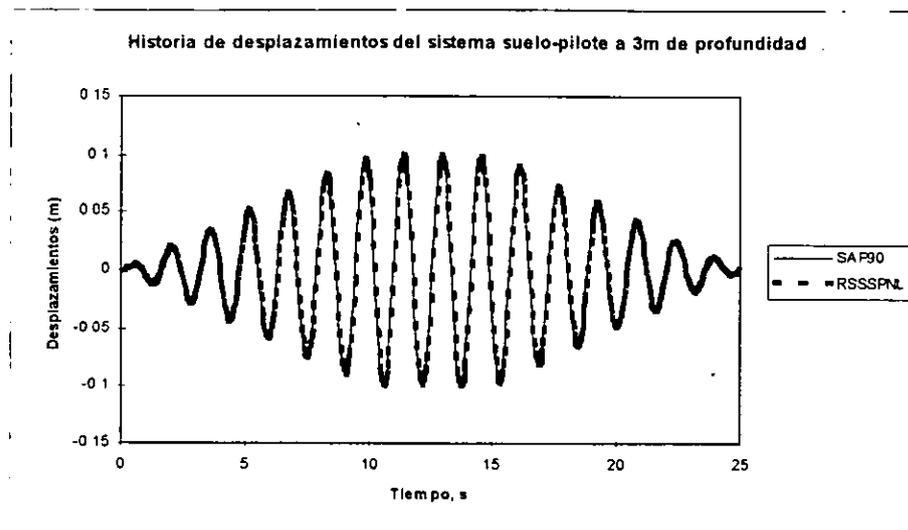


Fig. 4.7. Resultados comparativos de la respuesta a 3.0 m de profundidad del sistema suelo-pilote considerando un comportamiento lineal del suelo de campo cercano.

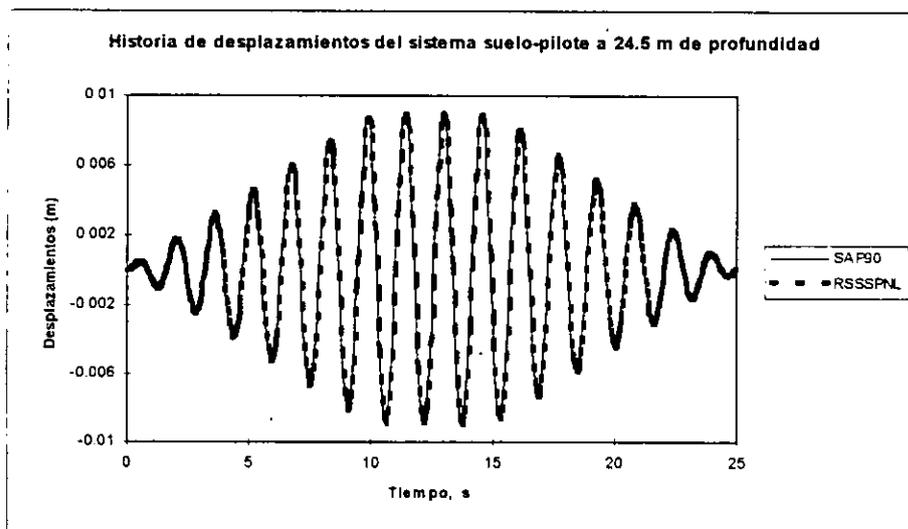
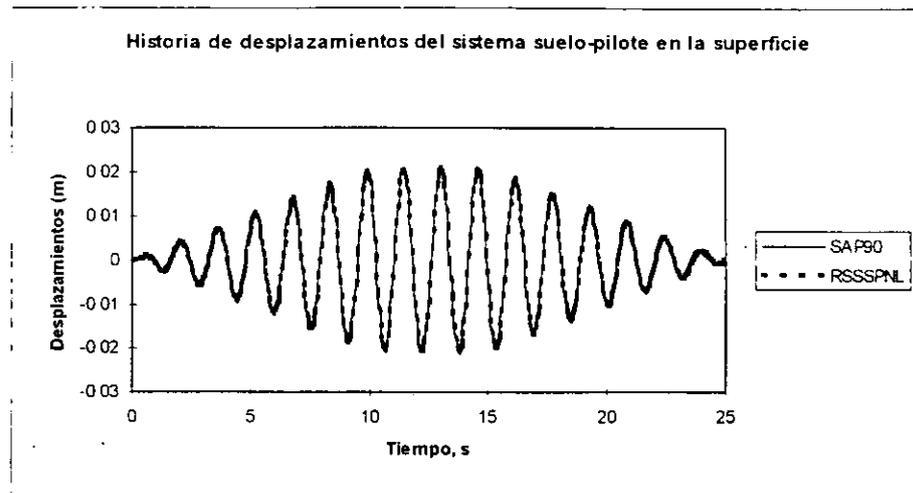


Fig. 4.8. Resultados comparativos de la respuesta a 24.5 m de profundidad del sistema suelo-pilote considerando un comportamiento lineal del suelo de campo cercano.

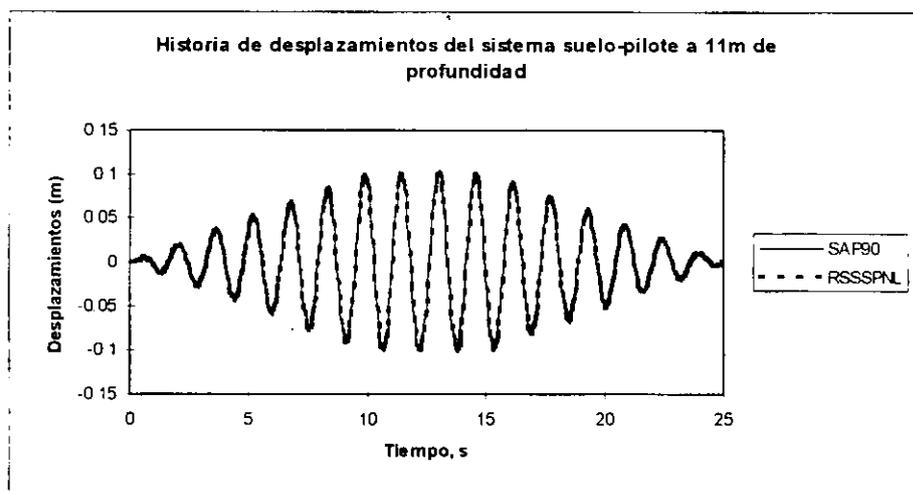
Como puede observarse en las dos gráficas de las figuras 4.7 y 4.8, nuevamente la similitud de resultados es bastante halagüena.

Caso 4. Finalmente se simuló un sistema suelo pilote sujeto a carga estática (para simular las cargas transmitidas por la edificación) y dinámicas de variación temporal y espacial a lo largo de fuste del pilote, aplicando las cargas definidas en los casos 1 y 3 simultáneamente. Los resultados obtenidos se presentan en las gráficas siguientes.



*Fig. 4.9. Resultados comparativos de la respuesta en la superficie, del sistema suelo-pilote considerando un comportamiento lineal del suelo de campo cercano.*

En las figuras 4.9, 4.10 y 4.11 nuevamente podemos observar la variación espacial de los desplazamientos del sistema suelo-pilote a diferentes profundidades, lográndose igualmente percibir una buena semejanza en los resultados.



*Fig. 4.10. Resultados comparativos de la respuesta a 11.0 m de profundidad, del sistema suelo-pilote considerando un comportamiento lineal del suelo de campo cercano.*

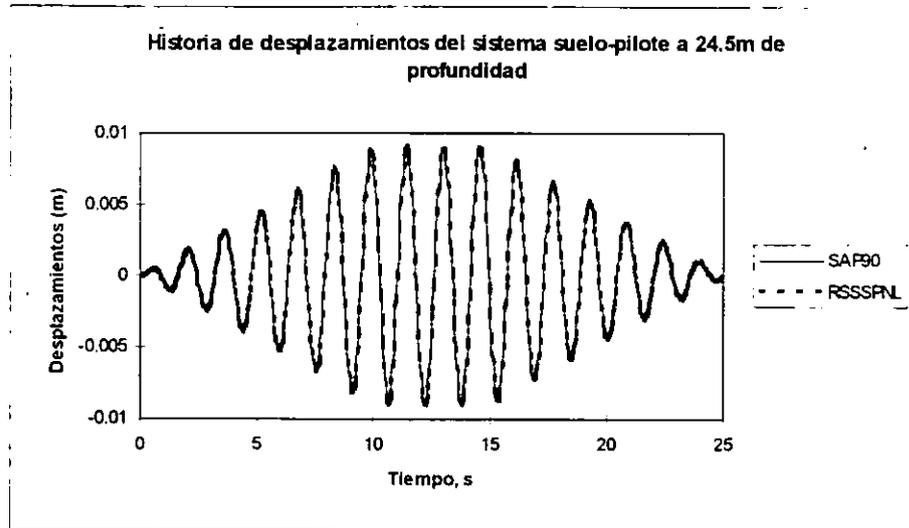


Fig. 4.11 Resultados comparativos de la respuesta a 24.5 m de profundidad, del sistema suelo-pilote considerando un comportamiento lineal del suelo de campo cercano.

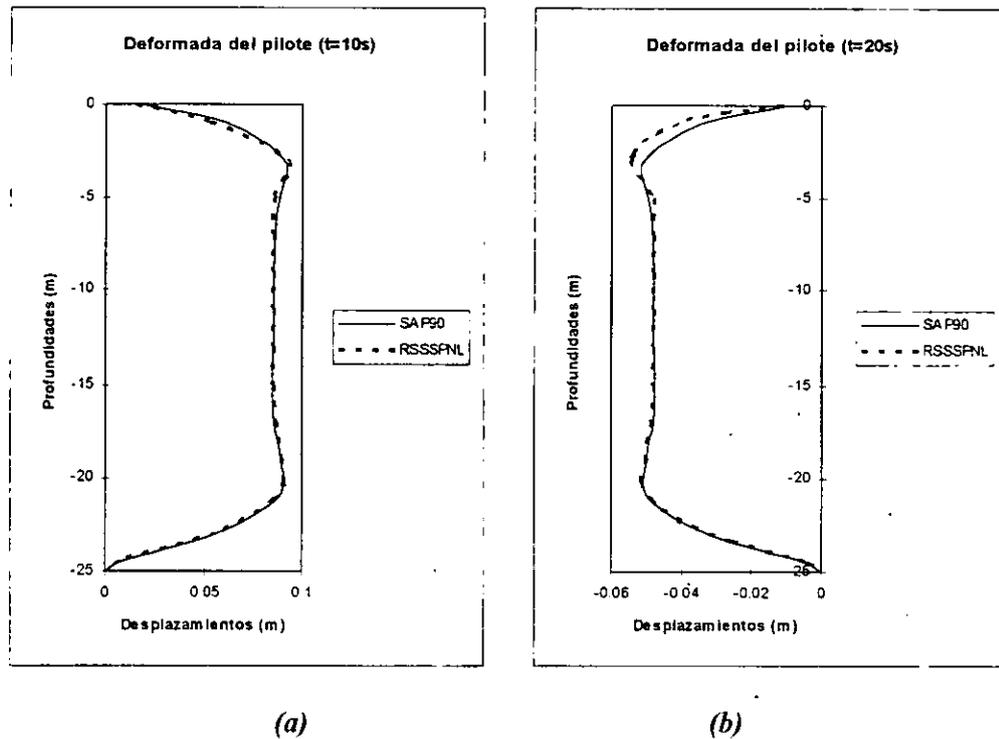


Fig. 4.12 Comparación de las configuraciones deformadas para dos instantes dentro del evento dinámico

En las gráficas de la figura 4.12, se presenta la respuesta del sistema suelo-pilote en términos de las deformadas para diferentes tiempos de la respuesta. Nuevamente, se consideran aceptables los resultados obtenidos.

### 4.3 Evaluación del subsistema pilote-suelo-pilote

De manera similar al caso anterior se procedió a efectuar un análisis del subsistema pilote-suelo-pilote, descrito en el capítulo anterior (ver figura 3.2), con la subrutina SUELO.for y el SAP90 propuesto para las características siguientes:

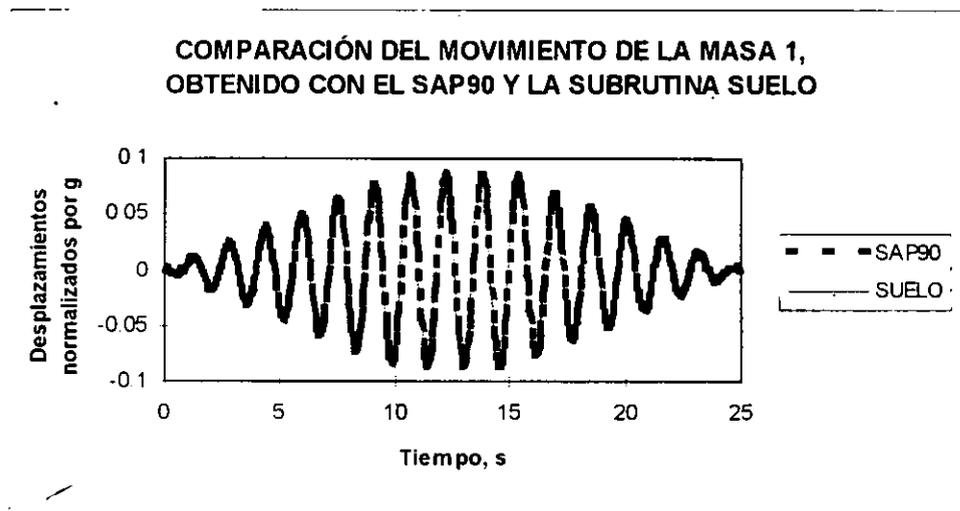
$$k_1 = k_2 = 29993.54 \text{ N/m}$$

$$k_3 = 666.67 \text{ N/m}$$

$$m_1 = m_2 = 5 \text{ Ns.s/m}$$

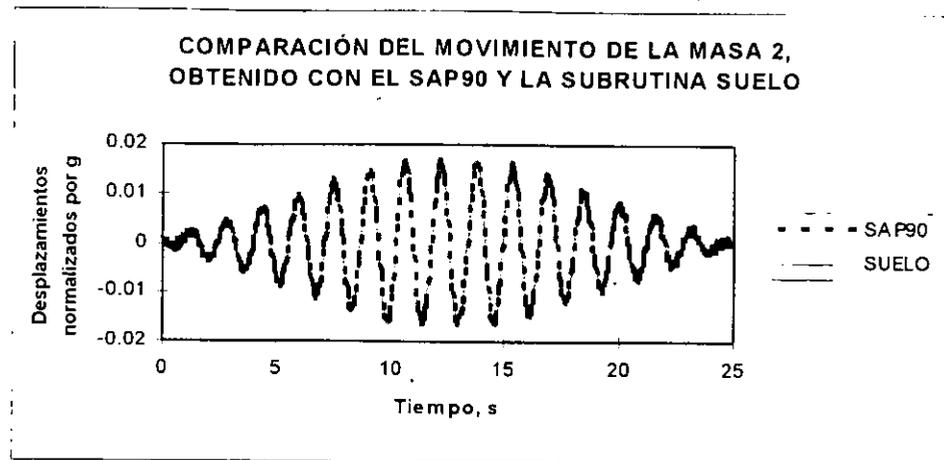
Se consideró a la excitación definida por el acelerograma de la figura 4.2, actuando en los apoyos.

Los resultados se presentan en las figuras 4.13 y 4.14



*Fig. 4.13 Comparación de las historias de desplazamiento de la masa 1 del subsistema pilote-suelo-pilote*

Como puede observarse los resultados obtenidos son prácticamente iguales para los movimientos de la masa 1, aumentando ligeramente el error para la masa 2, debido al orden de magnitud de los desplazamientos que, como se puede observar en la gráfica de la figura 4.14, es menor.



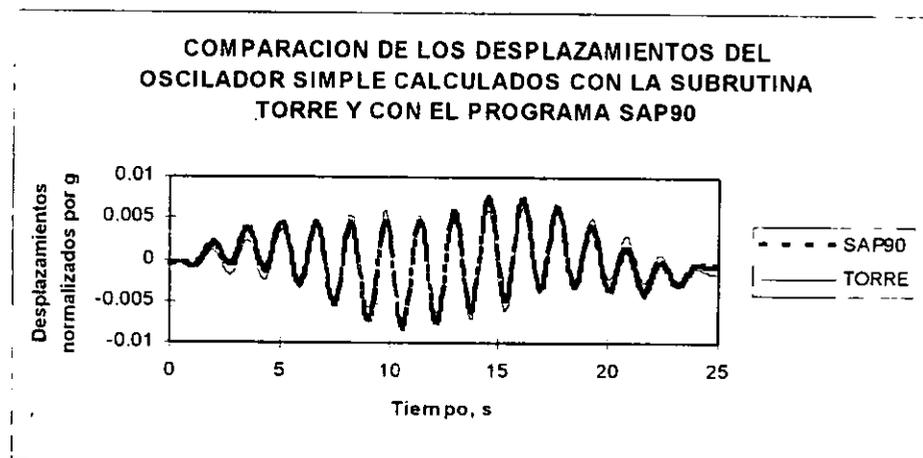
*Fig. 4.14 Comparación de las historias de desplazamientos de la masa 2 del subsistema pilote-suelo-pilote*

#### 4.4 Evaluación del subsistema subestructura-estructura

En seguida se efectuó una verificación similar para la subrutina TORRE.for, se planteó el problema de obtener la respuesta dinámica del oscilador simple con el cual se pretende aproximar el comportamiento de superestructura de acuerdo a los datos siguientes:

$$\begin{aligned} \text{masa} &= m = 5 \text{Ns. s/m} \\ \text{rigidez} &= k = 10000 \text{N/m} \end{aligned}$$

Nuevamente se empleó la excitación que aparece en la figura 4.2, aplicándola a la base del modelo. La respuesta del subsistema subestructura-estructura se obtuvo en término de desplazamientos normalizados por la gravedad, y su variación con respecto al tiempo se presenta en la gráfica de figura 4.15.



*Fig. 4.15 Comparación de las historias de desplazamientos de la masa del subsistema subestructura-estructura*

Nuevamente puede observarse buena similitud en los resultados, ya que aunque para algunos puntos se observan discrepancias generadas por inestabilidades comunes en métodos numéricos, la tendencia que sigue la distribución de los desplazamientos es la misma.

#### 4.5 Verificación del sistema completo

Las tres subrutinas anteriormente descritas y ya verificadas se unieron para crear el programa SISTEMA.FOR. A continuación se presenta la metodología que se siguió, para corroborar que los resultados que arroja el programa citado son correctos.

Inicialmente se procedió a efectuar el análisis de un sistema de dos pilotes colocados en línea, empotrados en una capa dura ubicada a 5m de profundidad. La estratigrafía propuesta se considera constituida por tres estratos, divididos en substratos para fines del análisis numérico, cuyas propiedades se presentan en la tabla 1. Se excitó el sistema mediante la misma onda senoidal de la figura 4.2, en términos de aceleraciones y aplicada en el campo libre. Como los análisis se comprobaron mediante la utilización del SAP90 y este no es capaz de tomar en cuenta los efectos de disipación de energía, se supuso el sistema como no amortiguado. Las cabezas de los pilotes se consideraron libres, esto es no se involucró el efecto de una posible restricción debida a la losa de cimentación. Tampoco se adicionó el efecto del movimiento de la superestructura. Las propiedades de los pilotes son las mismas que las del caso anterior, y aparecen compiladas en la tabla 2.

Debido a que con el SAP90 no pueden tomarse en cuenta los movimientos del suelo directamente, se dividió el sistema en dos partes, una compuesta de un pilote aislado, y la otra compuesta de una serie de vigas horizontales distribuidas verticalmente con la profundidad, definidas por su rigidez y elementos de masa concentradas, similares a los descritos en el capítulo anterior, como se muestra en el siguiente esquema:

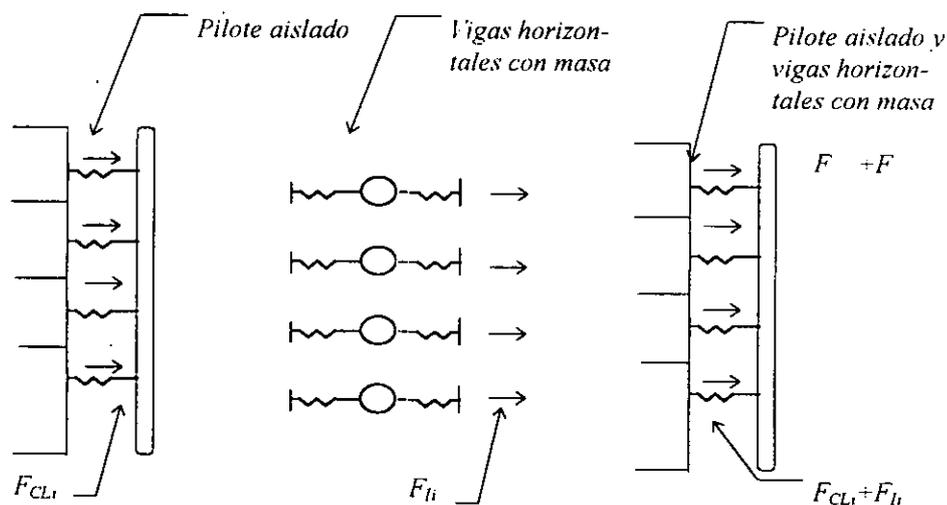
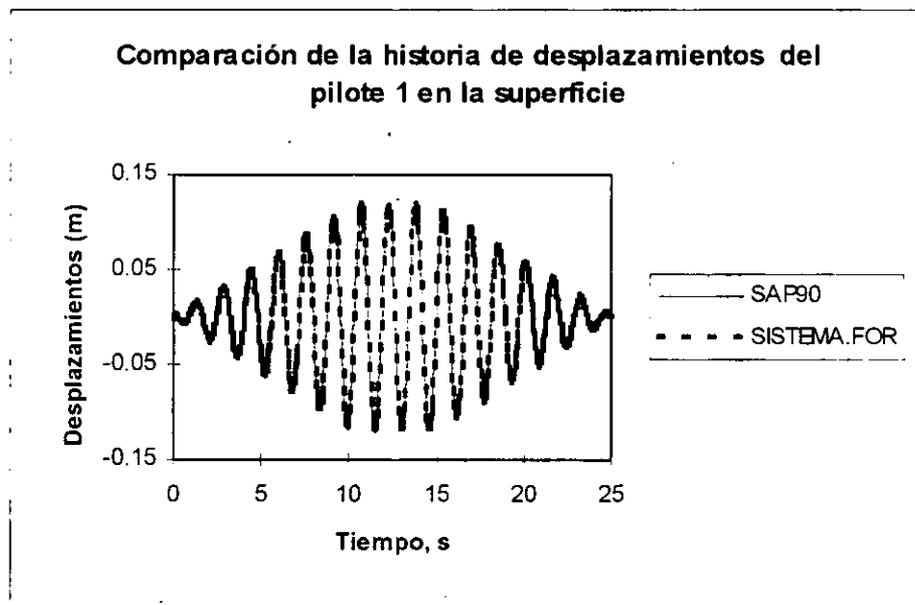


Fig. 4.16 Esquema de la metodología utilizada en el análisis con el SAP90

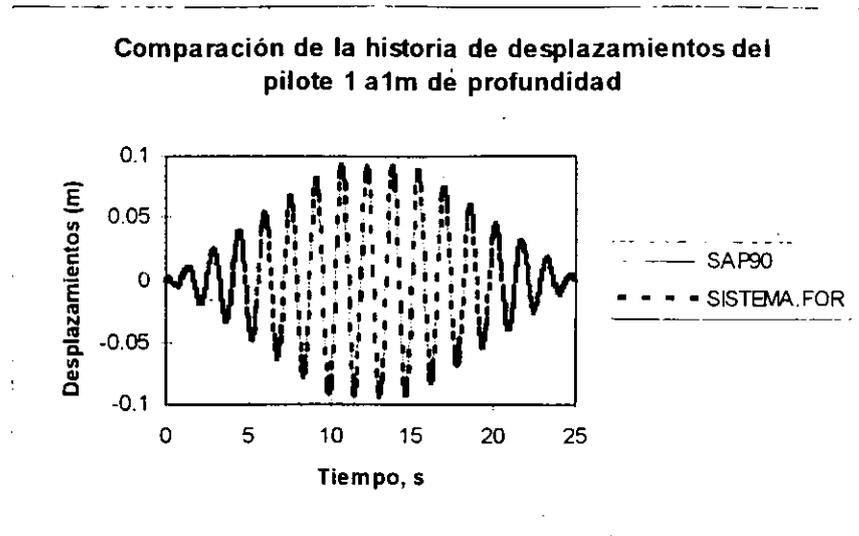
Se analizó el pilote aislado obteniendo los desplazamientos en los puntos nodales (en este caso localizados en la superficie, a 1m y 3m de profundidad), se aplicaron éstos como datos de entrada al modelo de vigas horizontales, obteniendo a su vez los desplazamientos en los elementos masas de cada viga equivalente; con estos y los desplazamientos del pilote se calcularon los desplazamientos relativos, los cuales se aplicaron nuevamente al modelo del pilote aislado en términos de fuerzas variables en el tiempo, esto se hizo para simular el comportamiento de ambos pilotes, modificando la función de la carga de acuerdo a los desplazamientos relativos respectivos, para finalmente obtener la historia de desplazamientos nodales del sistema de pilotes.

Se repitió el análisis con el programa SISTEMA.FOR, de acuerdo a la metodología planteada en el capítulo anterior, pero considerando que no existe losa ni superestructura.

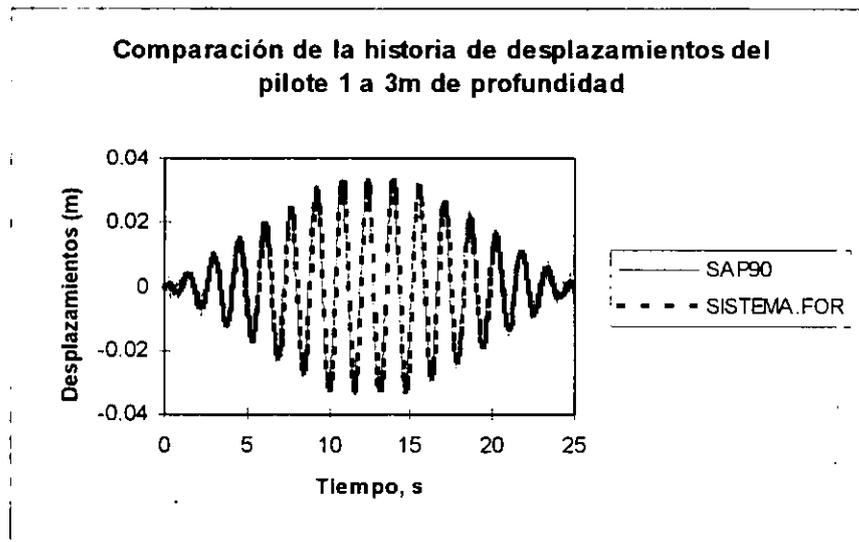
Las comparaciones de los resultados de ambas modelaciones se presentan en las figuras 4.17 a la 4.24



*Fig. 4.17 Comparación de la historia de desplazamientos del pilote 1 en la superficie*



*Fig. 4.18 Comparación de la historia de desplazamientos del pilote 1 a 1m de profundidad*



*Fig. 4.19 Comparación de la historia de desplazamientos del pilote 1 a 3m de profundidad*

Puede observarse en las gráficas que excepto en la de las figuras 4.21 y 4.22, todas las demás presentan una excelente similitud. Lo que era de esperarse porque el método numérico empleado en la integración por el SAP90 es similar al empleado en el programa SISTEMA.FOR. Las discrepancias observadas en la respuesta del pilote 2 a 1m y 3m de profundidad son atribuibles a inestabilidades del método debido a las constantes que maneja el SAP90.

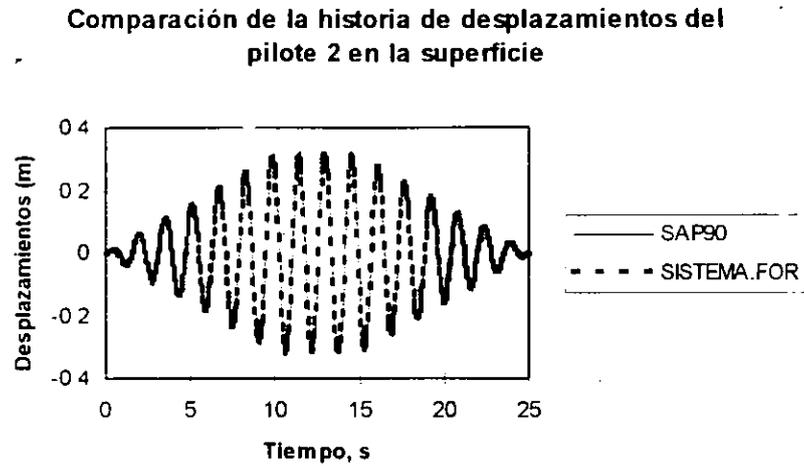


Fig. 4.20 Comparación de la historia de desplazamientos del pilote 2 en la superficie

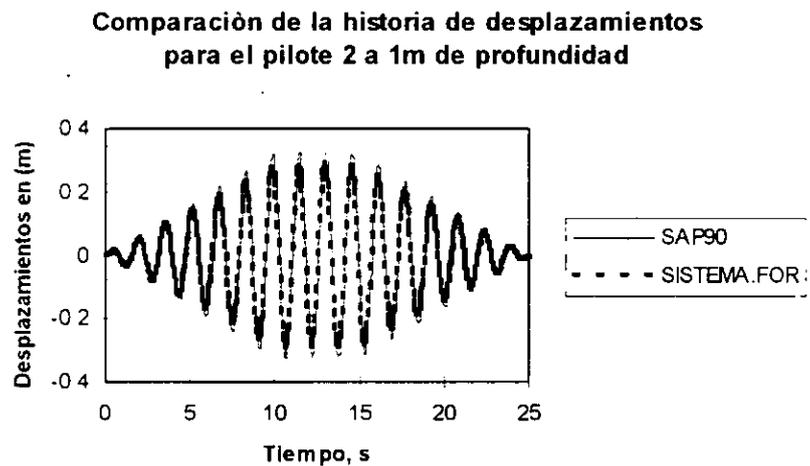
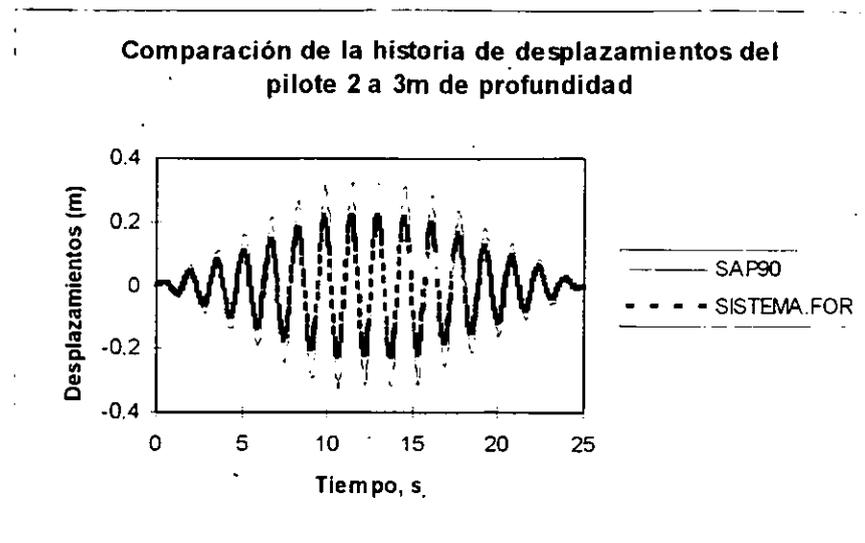
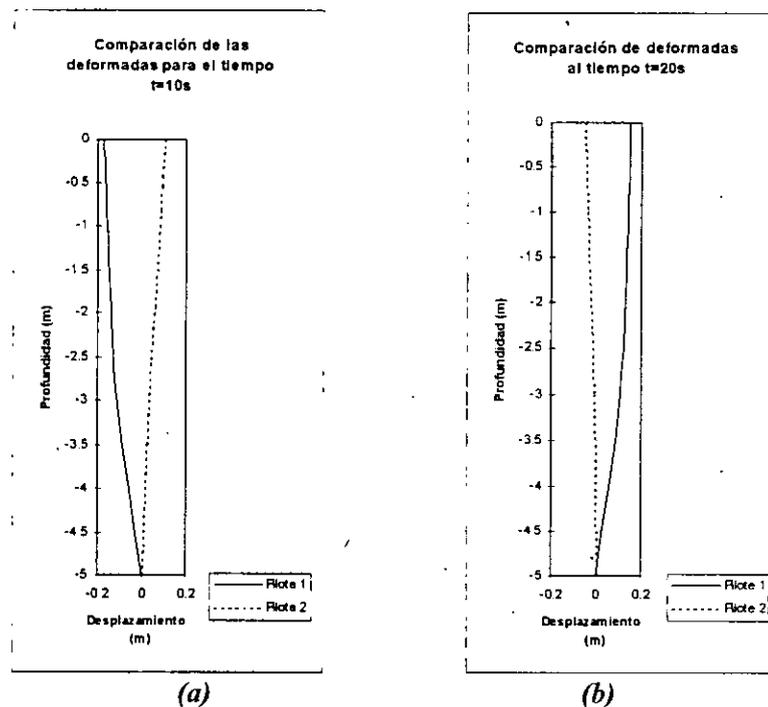


Fig. 4.21 Comparación de la historia de desplazamientos del pilote 2 a 1m de profundidad



*Fig. 4.22 Comparación de la historia de desplazamientos del pilote 2 a 3m de profundidad*



*Fig 4.23 Comparación de las deformadas del pilote para dos tiempos diferentes*

En las gráficas de las figuras 4.23 se muestra la comparación de la deformada de los pilotes para dos diferentes tiempos. Puede observarse que se mueven defasadamente.

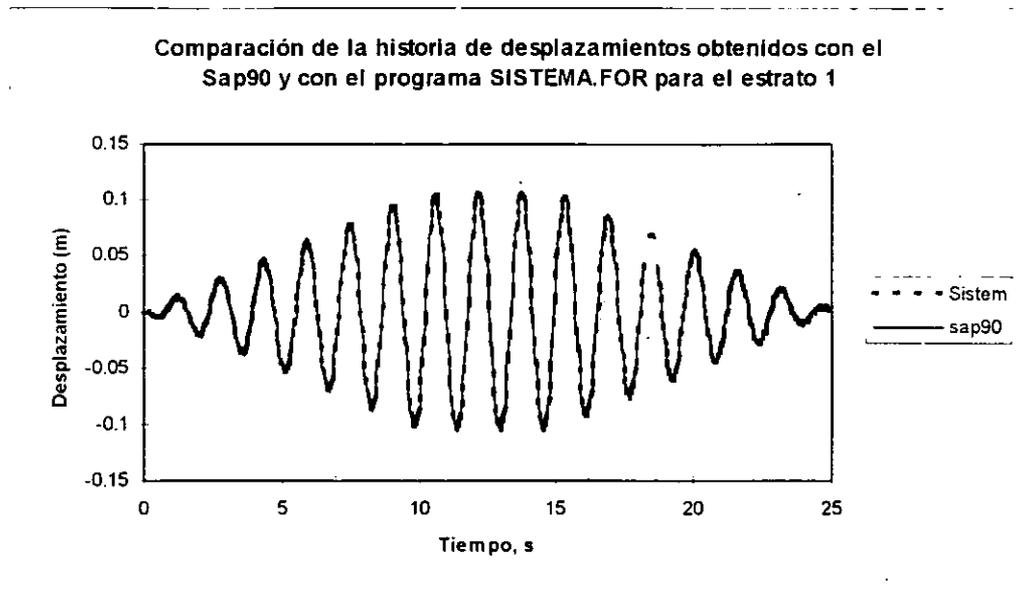


Fig. 4.24 Comparación de la historia de desplazamientos para el estrato 1

Igualmente en las gráficas de las figuras 4.24 a 4.26 se muestran las comparaciones de la historia de desplazamientos obtenidas con el SAP90 y el programa SISTEMA.FOR en cada elemento masa que caracteriza al estrato en cuestión, nuevamente se observa una buena similitud..

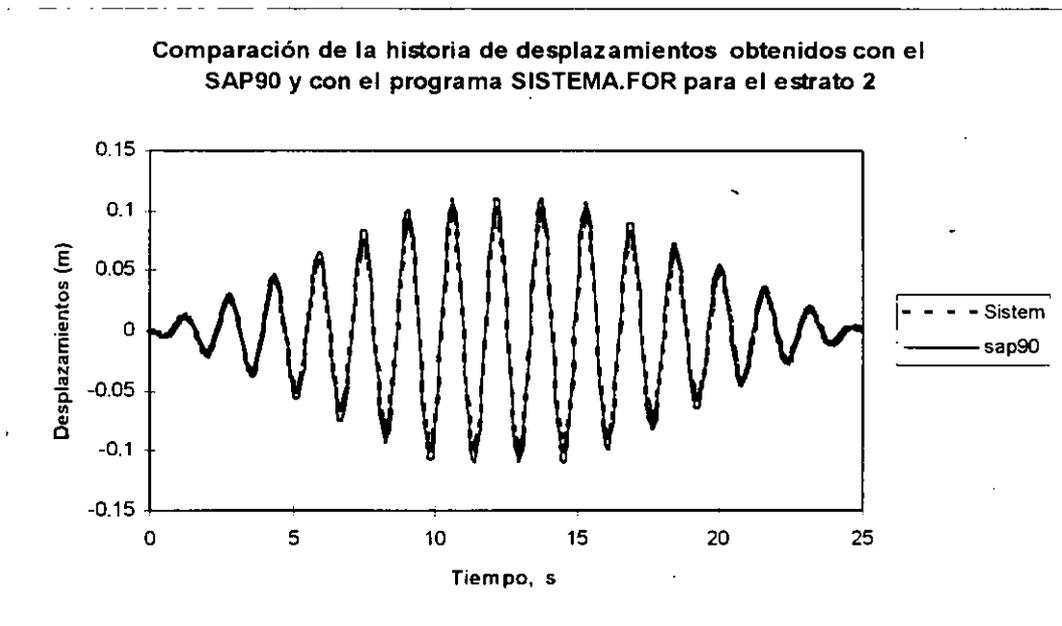
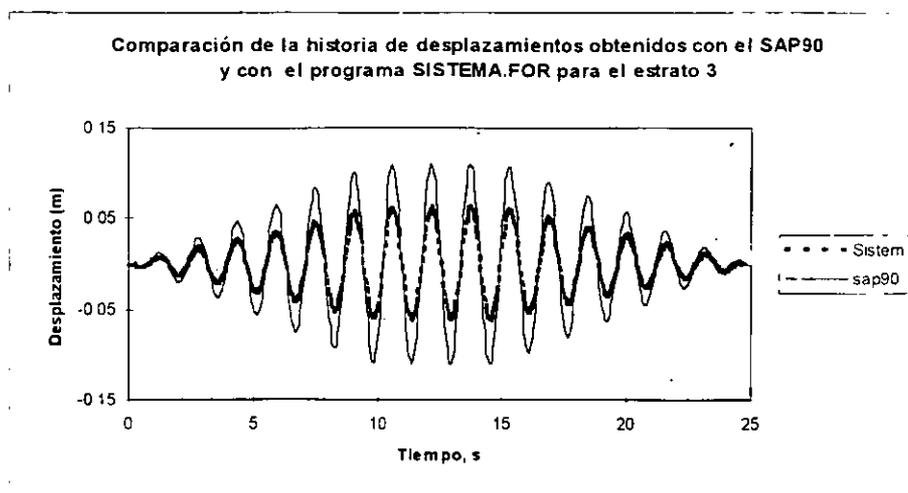
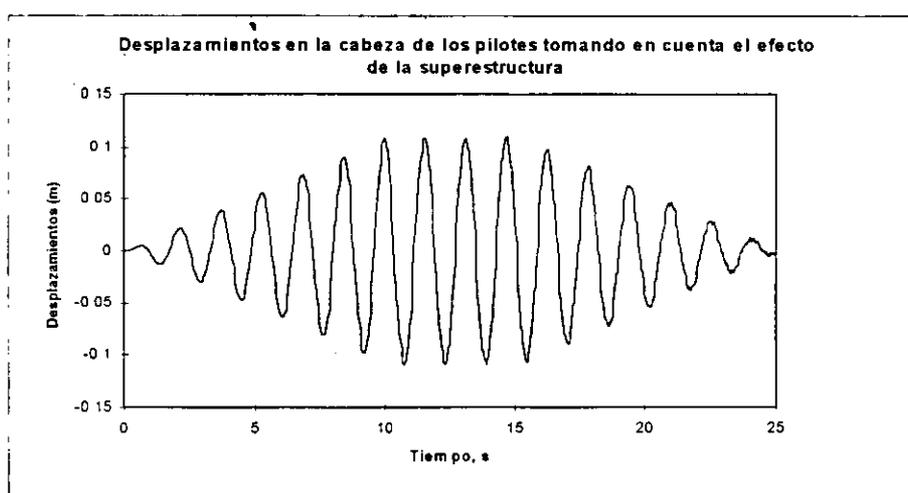


Fig. 4.25 Comparación de la historia de desplazamientos para el estrato 2



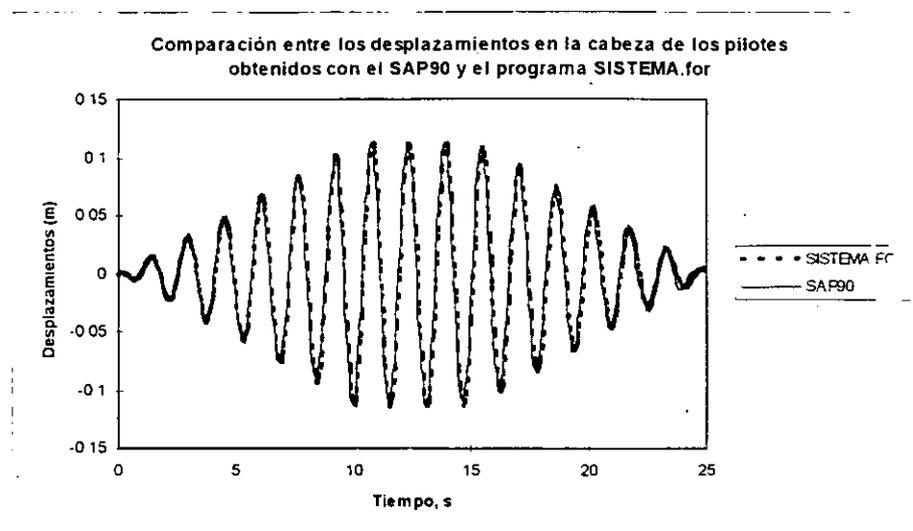
**Fig. 4.26 Comparación de la historia de desplazamientos para el estrato 3**

A continuación, para proseguir con las evaluaciones, se analizó el mismo sistema de pilotes y cargas anteriores, pero incorporando la superestructura, la cual se modeló con un oscilador simple. Como ya se comentó, el efecto de la superestructura se toma en cuenta por medio de la aplicación de fuerzas horizontales al nivel de la cabeza del pilote obtenidas a partir de los desplazamientos relativos de la masa y la base del oscilador, los efectos de cabeceo se involucraron mediante la aplicación de fuerzas axiales aplicadas nuevamente en la cabeza de los pilotes, obtenidas a partir del momento de volteo y la fórmula de la escuadría, suponiendo que la losa de cimentación es infinitamente rígida. En la gráfica de la figura 4.27 se muestra la respuesta en la parte superior de los pilotes cuando ya se involucró la presencia de la superestructura, aquí se despreciaron las deformaciones en la losa por lo que los movimientos en la cabeza de ambos pilotes son los mismos



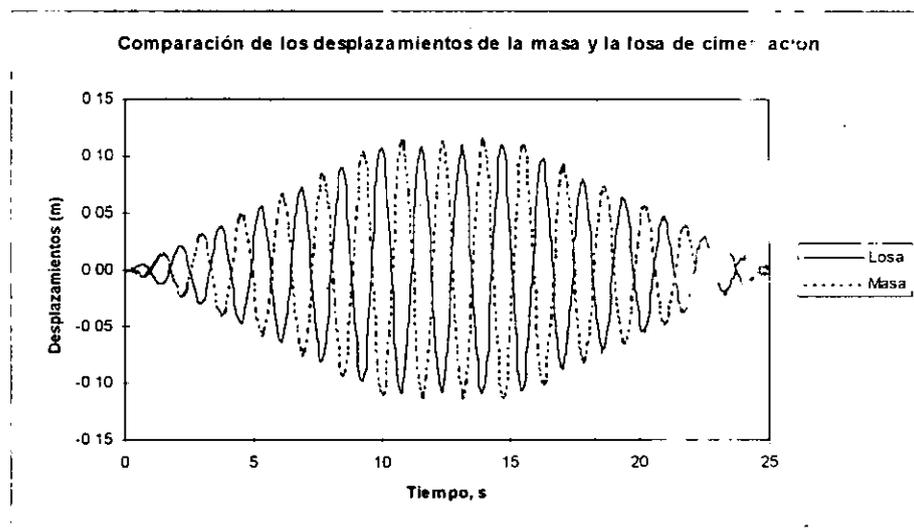
**Fig. 4.27 Historia de desplazamientos en la cabeza del pilote obtenida con el programa SISTEMA**

De manera semejante a las evaluaciones anteriores, se obtuvo la respuesta con el programa SAP90 y con el programa SISTEMA.for, los resultados se presentan en las gráficas de la figuras 4.28, en donde se muestra la historia de desplazamientos en la cabeza de los pilotes. Como puede observarse existe una gran similitud en los resultados.



*Fig. 4.28 Comparación de las historias de desplazamientos en la cabeza del pilote obtenidos con el programa SAP90 y el SISTEMA.FOR*

En la gráfica de la figura 4.29 se muestran los movimientos de la masa que representa a la estructura, y de la base del oscilador, que representa a la losa, pudiéndose apreciar que en este caso existe un desfase importante entre ambos.



*Fig. 4.29 Comparación de las historias de desplazamientos de la masa y la losa de cimentación*

#### 4.5 Análisis no lineal

Para evaluar la correcta ejecución de las subrutinas para el caso no lineal se procedió a efectuar un análisis de corridas parciales con el SAP90 en donde se corrigieron separadamente los módulos de rigidez de los suelos involucrados en función del nivel de deformación angular, por medio de una hoja de cálculo, de acuerdo al modelo propuesto. Lo anterior se efectuó suponiendo un pilote de 6 m de longitud con las mismas propiedades geométricas y material que el usado en las verificaciones anteriores, hincado en un depósito de suelo integrado por tres estratos, cada uno con las propiedades que se compendian en las tablas 3 y 4.

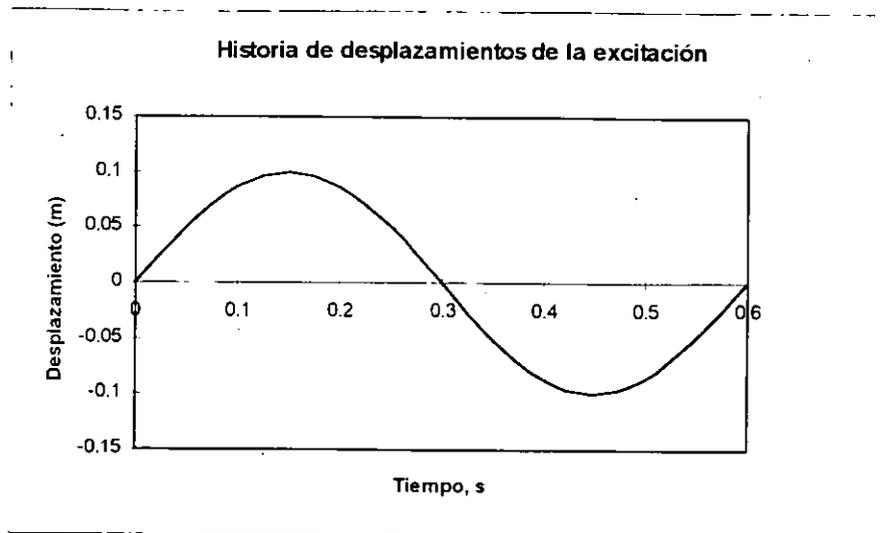
*Tabla 3 Propiedades del depósito de suelo analizado*

Profundidad (m)	$V_s \left( \frac{m}{s} \right)$	$\gamma \left( \frac{t}{m^3} \right)$	$\nu$
0-2	90	1.2	0.35
2-4	69	1.12	0.4
4-6	80	1.17	0.35
<i>Semiespacio</i>			
$\lambda = 2\%$	800	2.0	----

*Tabla 4 Parámetros para definir el comportamiento no-lineal del suelo*

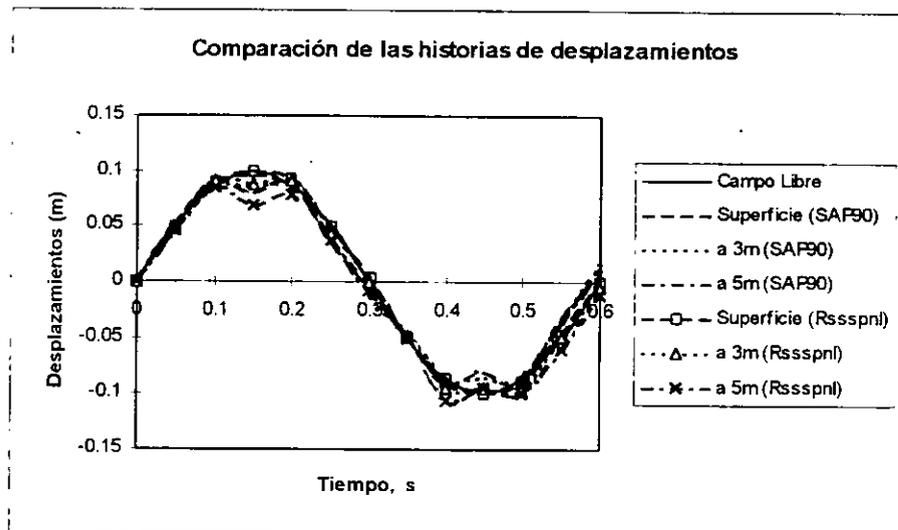
Profundidad (m)	Delta	wl (%)	wp (%)	wn (%)
0-2	2.5	293	73	266
2-4	2.5	245	98	222
4-6	2.5	281	98	272
$\lambda = 0.80$ $B = 0.3 \quad \gamma_r = 2.0\%$				

Se consideró que las componentes de amortiguamiento por radiación eran despreciables, ya que el SAP90 no es capaz de tomar este efecto en cuenta. Se excitó al sistema con la armónica que se muestra en la figura 4.30, la cual se aplicó en todos los estratos como historia de desplazamientos.



*Fig. 4.30 Excitación en términos de una historia de desplazamientos*

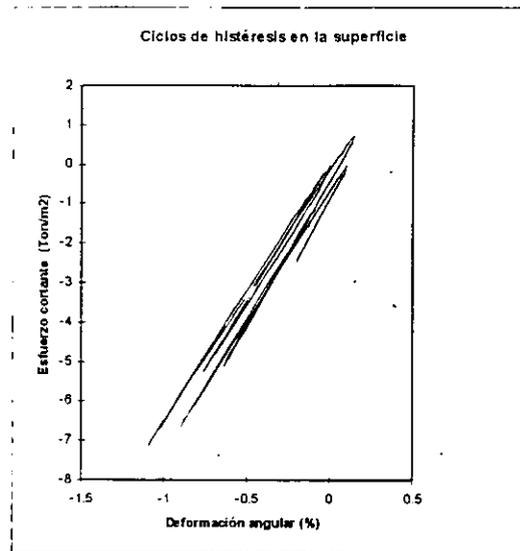
Se obtuvo la historia de desplazamientos del sistema suelo-pilote en la superficie, a 1m y a 3m, con el RSSSPNL y el SAP90 obteniéndose los resultados que se muestran en la figura 4.31



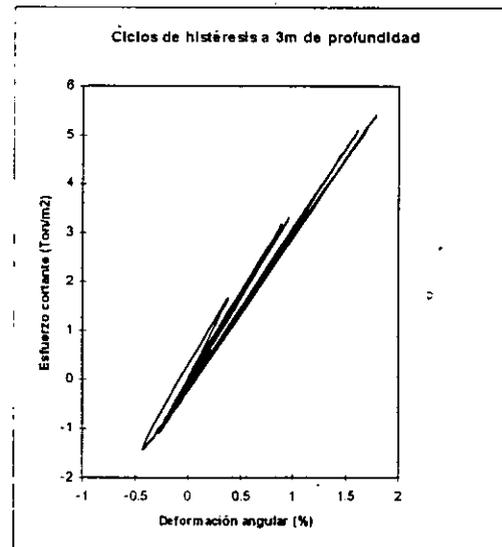
*Fig. 4.31 Comparación de la respuesta en términos de historias de desplazamientos a diferentes profundidades con el SAP90 y el RSSSPNL*

De acuerdo con los resultados, el análisis no-lineal efectuado con el programa RSSSPNL for arroja resultados bastante aproximados a los calculados con la ayuda del SAP90 y una hoja de cálculo, teniéndose un error máximo del 10% aproximadamente, el cual se considera aceptable para fines prácticos.

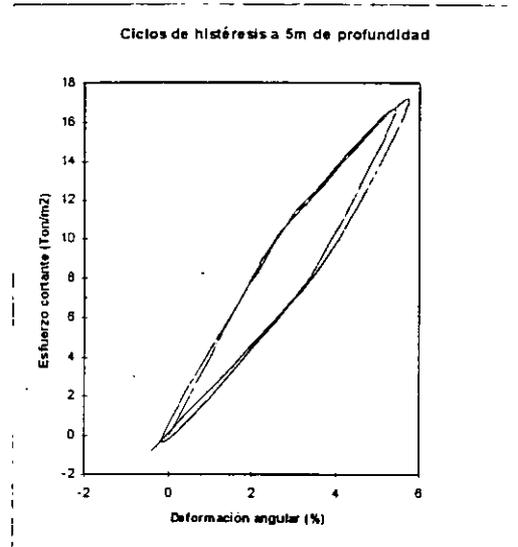
Con el análisis del RSSPNL.for también se obtuvieron los ciclos de histéresis para las mismas profundidades, los cuales se muestran en las gráficas de las figuras 4.32 a 4.35:



*Fig. 4.32 Ciclos de histéresis en la superficie*



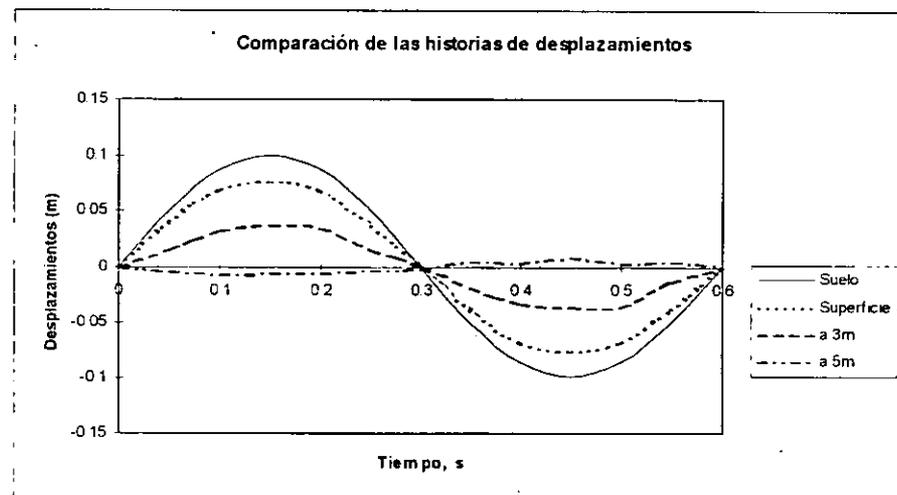
*Fig. 4.33 Ciclos de histéresis a 3m de profundidad*



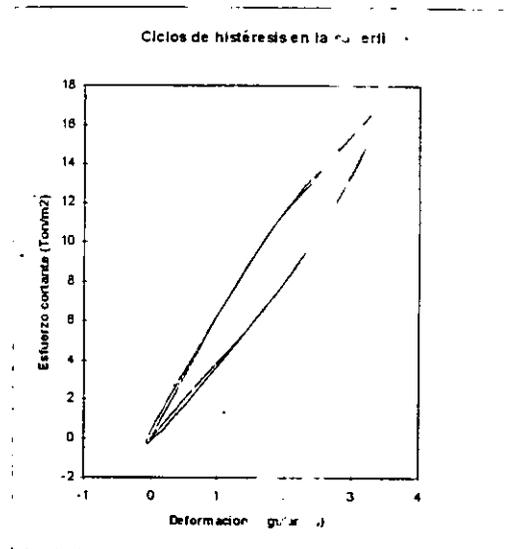
*Fig. 4.34 Ciclos de histéresis a 5m de profundidad*

Como puede observarse, es en el nudo más profundo en donde se aprecia más el comportamiento no lineal entre el suelo y el pilote, lo que es atribuible a la condición de apoyo del pilote que hace que aumente los desplazamientos relativos entre el pilote y el suelo cercano.

En seguida se procedió a analizar el caso en el que la excitación estuviese aplicada en la cabeza del pilote y el depósito de suelo fuese homogéneo con las propiedades del primer estrato de la tabla 2, obteniéndose la historia de desplazamientos nodales y los ciclos de histéresis que se muestra en las figuras 4.35 a 4.38

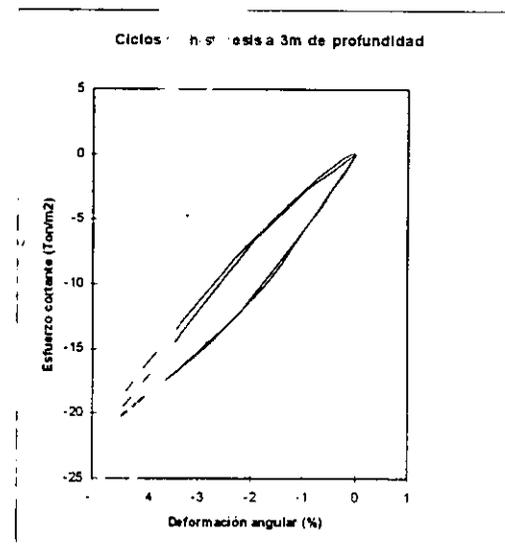


*Fig. 4.35 Historia de desplazamientos del sistema suelo-pilote a diferentes profundidades*



*Fig. 4.36 Ciclos de histéresis en la superficie*

Como era de esperarse las mayores deformaciones relativas se observan ahora en la región cercana a la cabeza del pilote, donde está aplicada la carga, disminuyendo sus amplitudes con la profundidad, de manera que a 5m de profundidad existe un cambio alternado entre carga y descarga por el efecto del empotramiento de la base que hace que no se definan claramente los lazos de histéresis.



*Fig. 4.37 Ciclos de histéresis a 3m de profundidad*

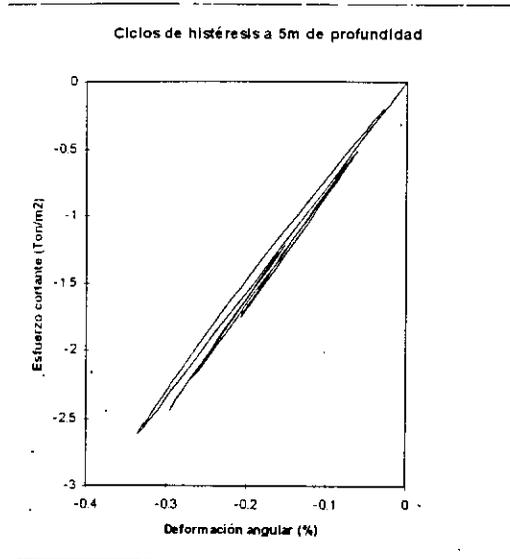


Fig. 4.38 Ciclos de histéresis a 5m de profundidad

Finalmente, para terminar con la verificación del programa, se procedió a analizar el mismo sistema suelo-pilote pero ahora con la misma carga aplicada en ambos extremos. Obteniéndose la historia de desplazamientos y los ciclos de histéresis mostrados en las gráficas de las figuras 4.39 a 4.41

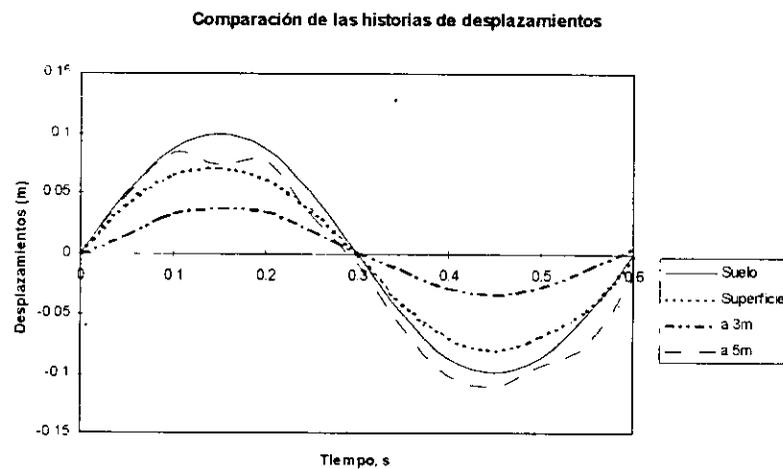
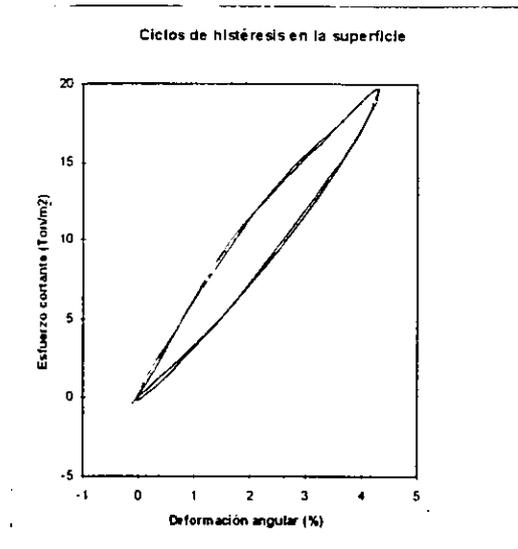
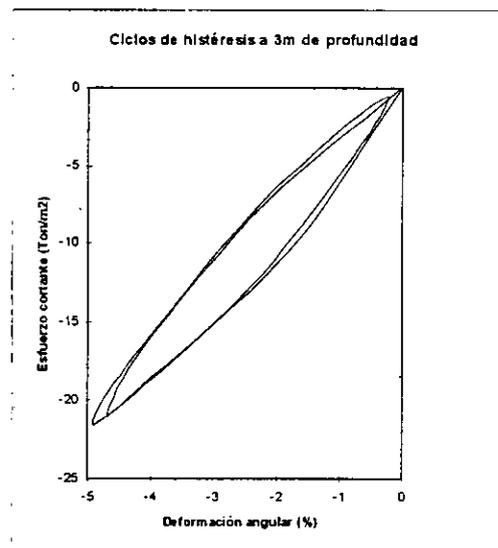


Fig. 4.39 Historia de desplazamientos del sistema suelo-pilote a diferentes profundidades

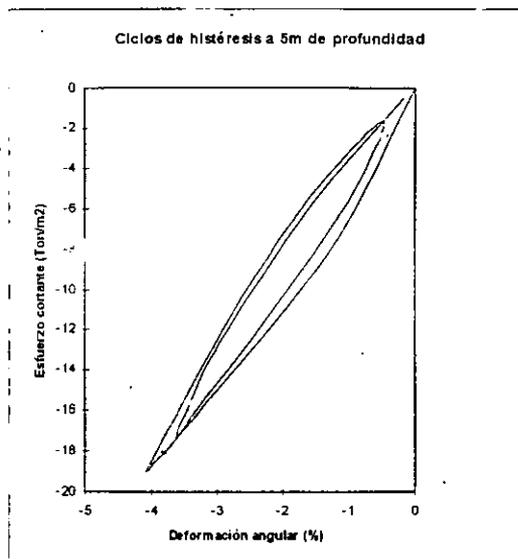


*Fig. 4.40 Ciclos de histéresis en la superficie*

Como puede observarse, en este caso se definen bien los ciclos de histéresis para todas las profundidades observándose que se guarda una proporción clara entre el nivel de deformación angular con la profundidad y las condiciones de carga y frontera analizadas.



*Fig. 4.41 Ciclos de histéresis a 3m de profundidad*



*Fig. 4.42 Ciclos de histéresis a 5m de profundidad*

#### 4.7 Comentarios

Se presentaron las verificaciones del programa RSSSPNL para el caso de comportamiento lineal y no lineal del suelo que rodea al fuste del pilote.

Los resultados obtenidos con el SAP90 fueron prácticamente iguales a los obtenidos con el software en revisión, por lo cual se considera que el programa trabaja sin problemas.

En el caso del análisis no lineal, debe tenerse en cuenta que la verificación se llevó a cabo mediante un análisis parcial equivalente con ayuda del SAP90 y una hoja de cálculo, por lo que los resultados aún deben calibrarse con otros métodos equivalentes y/o experimentalmente.

## 5 ANALISIS PARAMETRICO

Una vez que el que el programa fue verificado se procedió a usarlo para realizar un análisis sistemático de diferentes casos, variando los parámetros de manera que se pudiese reconocer tanto a los más relevantes como las relaciones existentes entre ellos, para finalmente conformar un modelo matemático simplificado que nos permitiese con un cierto grado de aproximación obtener los mismos resultados. Esto, por un lado, hace que se cuente con un análisis exhaustivo del problema y, por el otro, que se prepare un camino sencillo de fácil aplicación práctica para la resolución de problemas relacionados con la respuesta dinámica de cimentaciones piloteadas que pueda tener el ingeniero de diseño.

El marco metodológico que se siguió se muestra a continuación.

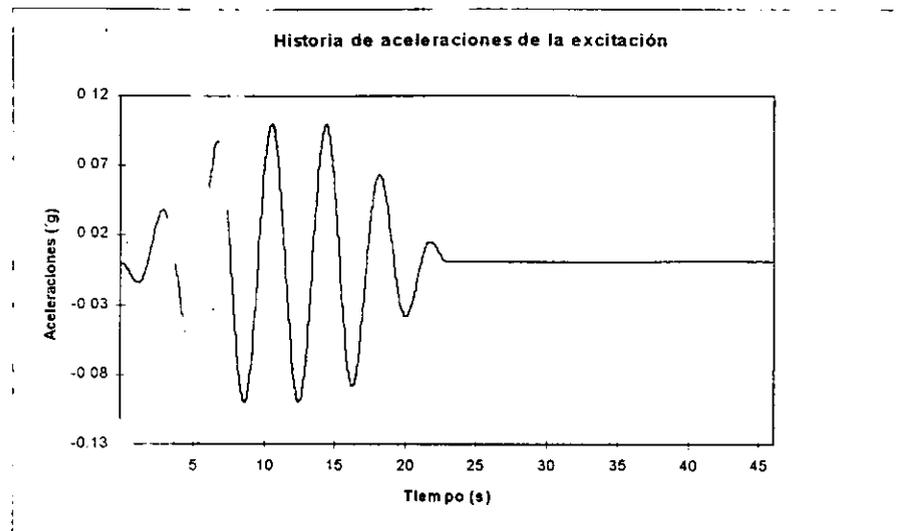
### 5.1 Descripción de la Metodología

#### Planteamiento de la metodología

Con en fin de comenzar el proceso, se planteó el análisis de la respuesta dinámica de un sistema suelo-pilote desplantado en un depósito homogéneo, suponiendo comportamiento lineal del suelo. Las propiedades del pilote en cuanto a geometría y material, son las mismas que se han venido manejando a lo largo de esta tesis, y que se recuerda se compilan en la tabla 1, en el capítulo 4. El peso volumétrico del depósito de suelo se tomó de 1.2 ton/m<sup>3</sup>, la relación de Poisson de 0.35 y las velocidades de onda de cortante de 131.24 m/s, 262.48 m/s y 524.96 m/s para lograr frecuencias naturales de 0.25, 0.5 y 1.0 Hz respectivamente. El espesor para todos los casos se tomó de 40 m y se consideró subyacido por una capa de roca (frontera rígida o semiespacio) con un peso volumétrico de 2t/m<sup>3</sup> y una velocidad de onda de cortante de 800 m/s.

La frecuencia fundamental del depósito de suelo se varió en las frecuencias que se consideraron englobaban los casos más comunes.

En cuanto a la excitación del sistema, se impuso como una historia de aceleraciones con una forma armónica definida por el seno modulado que se presenta en la gráfica de la figura 5.1. Se aplicó en el semiespacio y la respuesta del campo libre se consideró compuesta por ondas SH propagándose verticalmente.



*Fig. 5.1 Historia de aceleraciones empleada*

Como también existe incertidumbre en el valor de la frecuencia fundamental de la excitación esta se varió de manera similar en un rango de frecuencias de 0.1875Hz, a 2.0Hz.

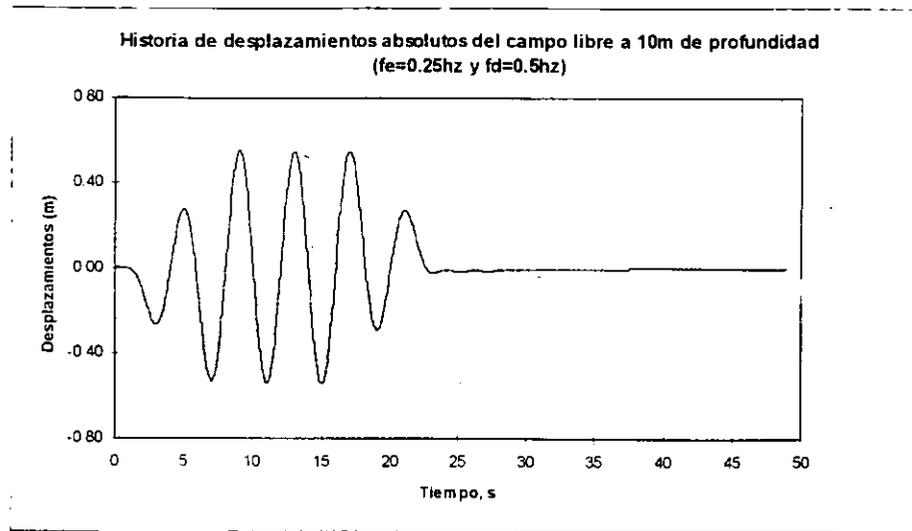
Los pasos seguidos en el análisis se describen a continuación:

### Análisis del campo libre

Se obtuvo la respuesta del depósito de suelo empleando el programa SHAKE, en términos de historia de aceleraciones a diferentes profundidades. Esto se realizó para todas las combinaciones de frecuencia fundamental de la excitación,  $f_e$ , y del depósito de suelo,  $f_d$ , expresado como una relación de frecuencias,  $R=f_e/f_d$ .

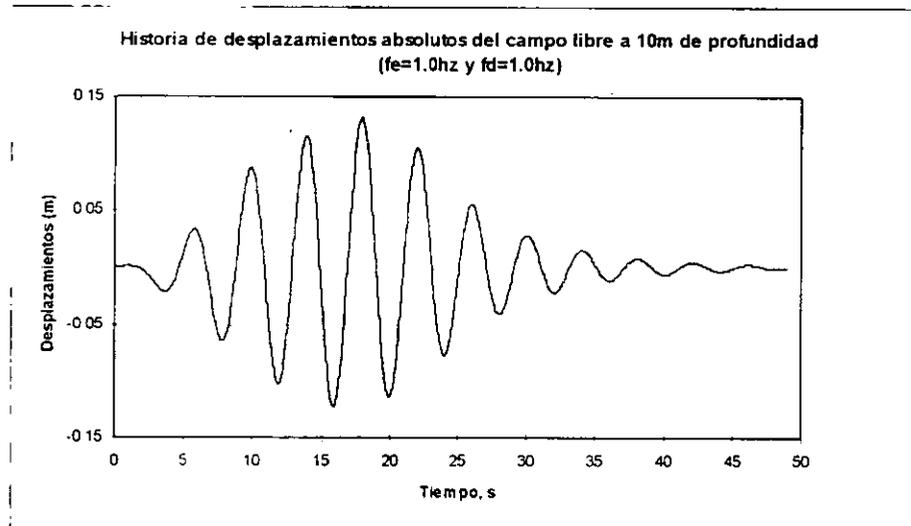
Mediante una integración de las aceleraciones se obtuvo la historia de velocidades y análogamente la de desplazamientos, estas fueron empleadas para caracterizar el vector de cargas de la ecuación diferencial parcial que modela el fenómeno (referencia 1).

En seguida se presenta una muestra de los resultados obtenidos



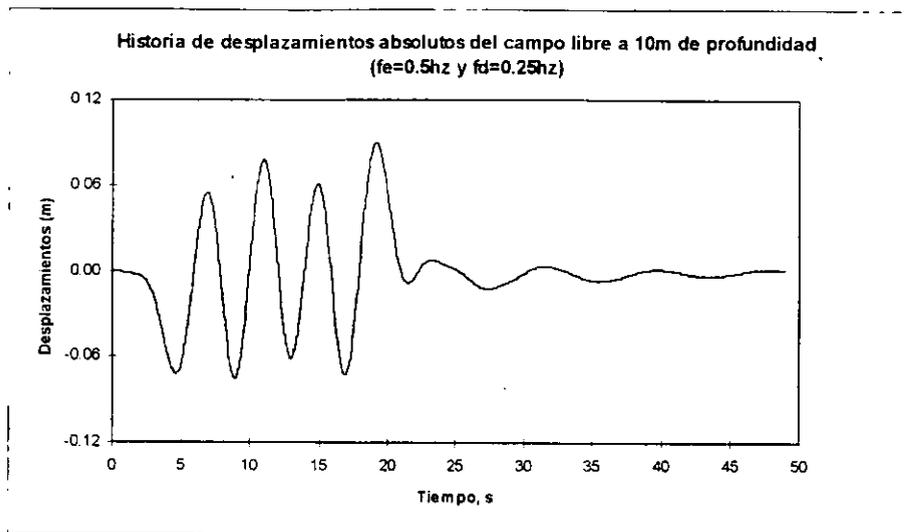
*Fig. 5.2 Respuesta del campo libre en términos de desplazamientos absolutos para una relación de frecuencia "R" de 0.5*

En las figuras 5.2 a 5.4 se puede apreciar los resultados típicos del proceso de integración doble de las historias de aceleraciones obtenidas con el SHAKE, que se traducen en historias de desplazamientos, aunque se encontraron las distribuciones para más profundidades (desde la superficie hasta 40m, con incrementos de 2m) aquí solo se presentan las ubicadas a 10m de espesor, ya que sólo tienen el fin de ilustrar los pasos seguidos en el análisis. Se manejaron desplazamientos, velocidades y aceleraciones absolutas.



*Fig. 5.3 Respuesta del campo libre en términos de desplazamientos absolutos para una relación de frecuencia "R" de 1.0*

Igualmente aunque se barrieron más relaciones de frecuencia sólo se presentan las gráficas para valores de "R" de 0.5, 1 y 2.0, por la razón expuesta en el párrafo anterior

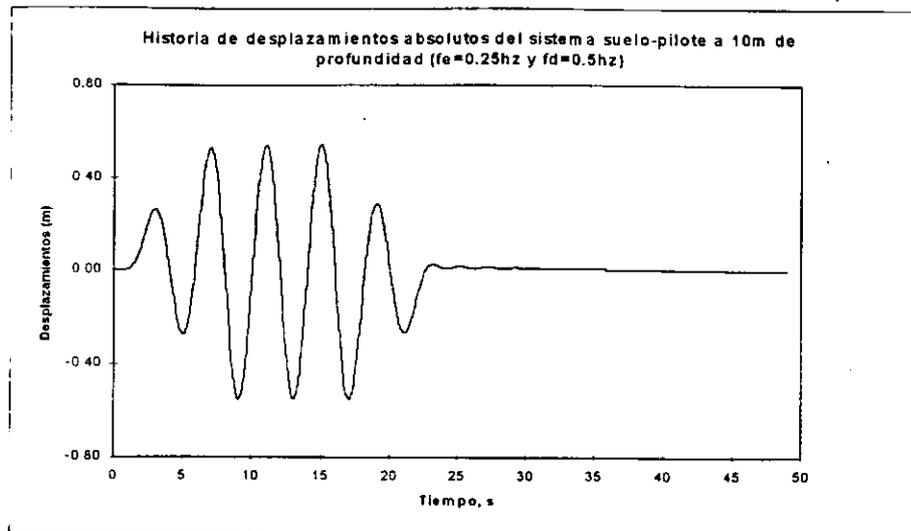


*Fig. 5.4 Respuesta del campo libre en términos de desplazamientos absolutos para una relación de frecuencia "R" de 2.0*

### Análisis del sistema suelo-pilote

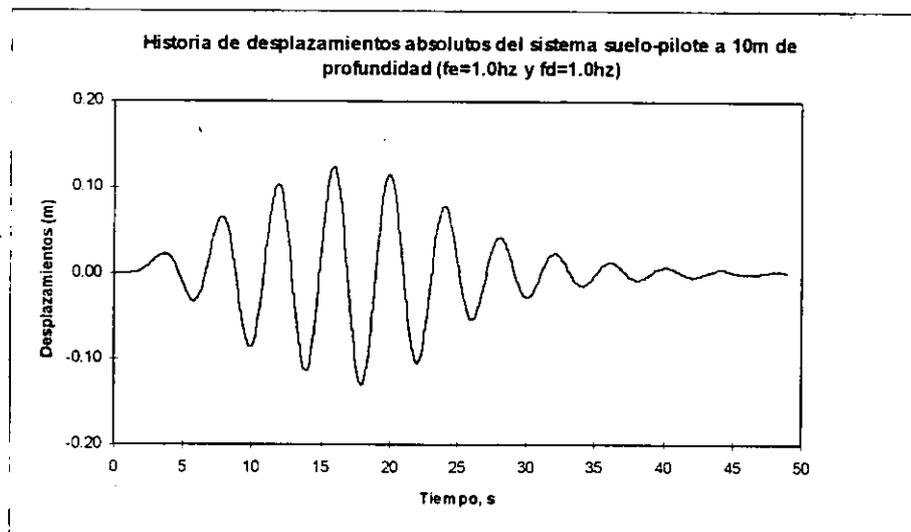
Resolviendo el problema de interacción dinámica suelo-pilote en el dominio del tiempo con la subrutina RSSPNL se obtuvieron las historias de desplazamientos absolutos del pilote a diferentes profundidades, las deformadas críticas en base al criterio de las máximas curvaturas en la deformada del pilote y los diagramas de momentos asociados.

Nuevamente en las gráficas de las figuras 5.5 a 5.9, se presenta una muestra de los resultados.

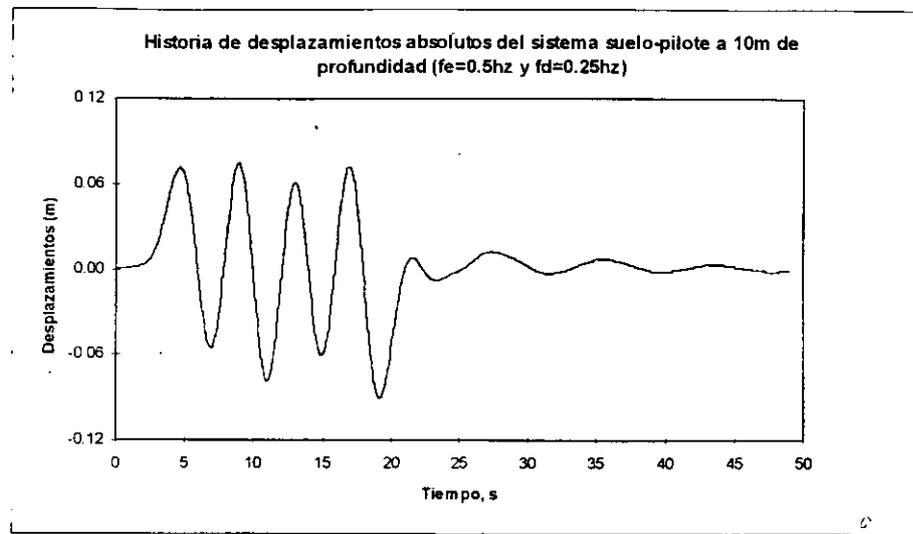


*Fig. 5.5 Respuesta del sistema en términos de desplazamientos absolutos para una relación de frecuencia "R" de 0.5*

En las gráficas de la figuras 5.5 a 5.7 se presenta la respuesta obtenida al aplicar al sistema suelo-pilote los efectos de la excitación propuesta, lo que se hizo mediante el empleo del programa RSSPNL (referencia 1), nuevamente para la misma profundidad de 10 m y las mismas relaciones de frecuencia "R" de 0.5, 1 y 2.



*Fig. 5.6 Respuesta del sistema en términos de desplazamientos absolutos para una relación de frecuencia "R" de 1.0*

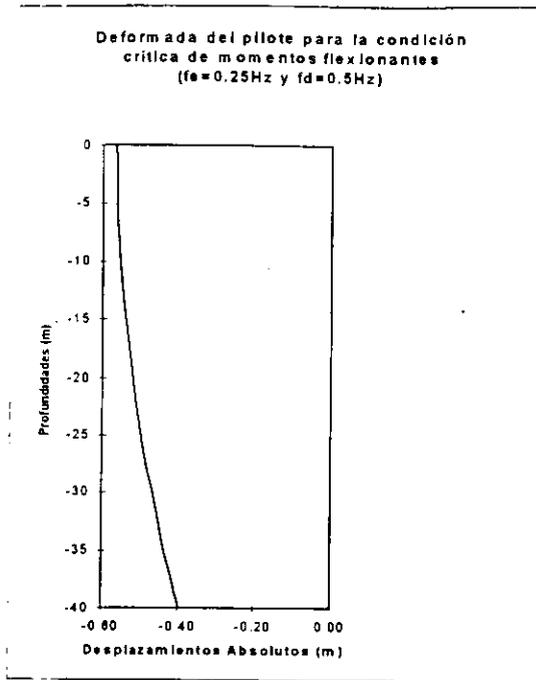


*Fig. 5.7 Respuesta del sistema en términos de desplazamientos absolutos para una relación de frecuencia "R" de 2.0*

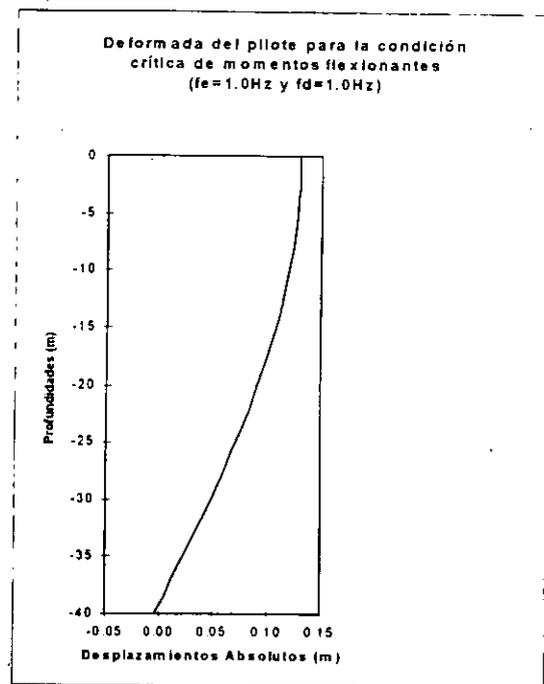
En las gráficas de la figura 5.8 se observa las deformadas del pilote que tienen la curvatura máxima en todo tiempo para una relación de frecuencia dada, ésta se determinó revisando inicialmente la mayor que se presentaba para cada tiempo y posteriormente eligiendo la de aquel en donde se tenía el máximo de ellas (máximo maximorum), esto con el fin de encontrar el instante en el cual en el pilote se desarrolla el máximo momento flexionante.

Nuevamente sólo se manejan los resultados para las relaciones de frecuencia de 0.5, 1 y 2 por no considerar adecuado el saturar con un excesivo número de gráficas la descripción de la metodología que haga que se desvíe la atención del camino seguido.

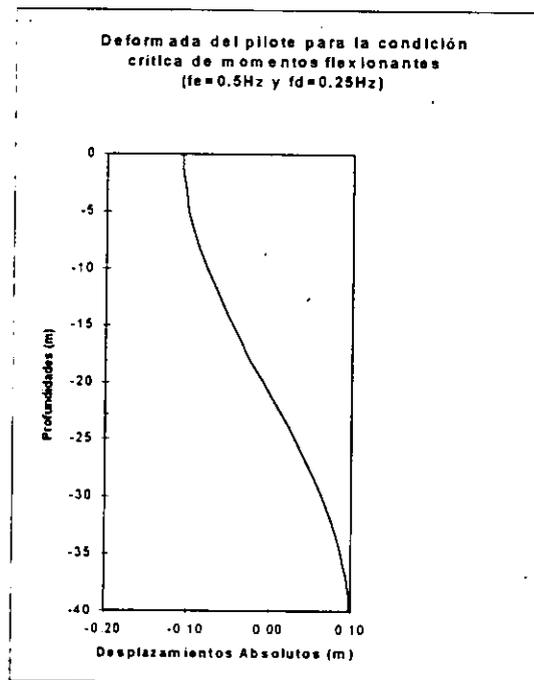
Finalmente en las gráficas de la figuras 5.9 se proporcionan las configuraciones de los diagramas de momentos flexionantes para los tiempos obtenidos en el paso anterior, esto es, el diagrama del momentos en donde se presenta el máximo maximorum.



(a)



(b)



(c)

Fig. 5.8 Deformadas del pilote para relaciones de frecuencias "R" de: (a) 0.5, (b) 1.0 y (c) 2.0

Debe hacerse notar que en las gráficas anteriores los desplazamientos son absolutos por lo que tienen la componente del movimiento del semiespacio, razón por la cual en algunos casos no coincide el cero con la punta del pilote.

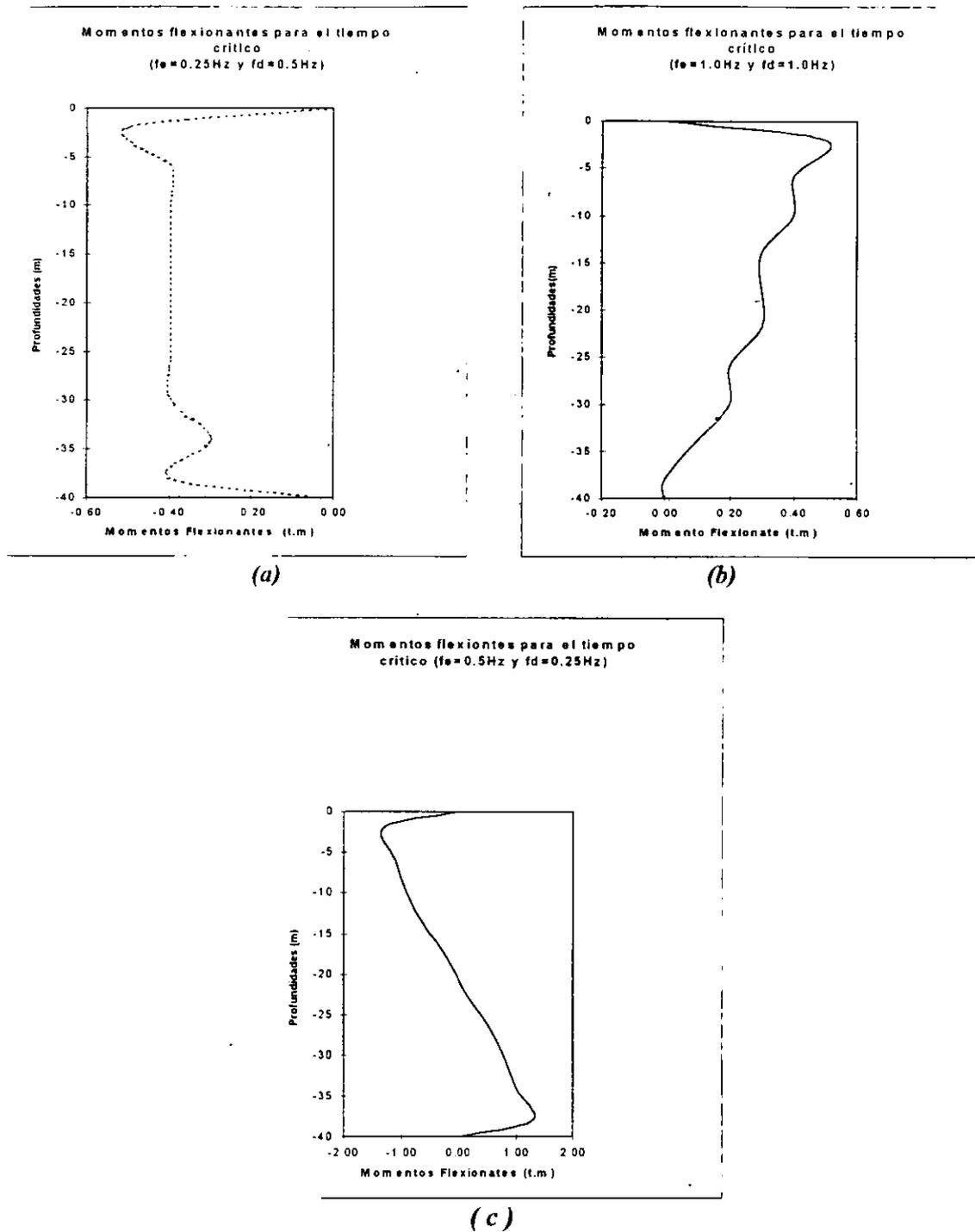


Fig. 5.9 Diagrama de momentos flexionantes del pilote para relaciones de frecuencias "R" de: (a) 0.5, (b) 1.0 (C) 2.0

## 5.2 Análisis de parámetros

### 5.2.1 Pilote aislado

La parametrización consiste en variar una característica del fenómeno mientras que los demás se mantienen constantes y posteriormente normalizar los resultados con respecto a esta o con otra del mismo género, de manera de contar con relaciones adimensionales. Así, se llevó a cabo esto con las deformadas del pilote obtenidas con anterioridad normalizándolas con respecto al desplazamiento que se presentaba en su cabeza, y a los diagramas de momentos flexionantes con respecto al máximo, lo anterior se presenta en las gráficas de las figuras siguientes para varias relaciones de frecuencia.

Para cubrir todo el espacio de resultados se procedió a hacer variar tanto el diámetro del pilote de 0.20 m a 1.40 m y la profundidad de desplante de 10 m a 40 m.

En la siguiente tabla se presentan las variaciones de parámetros efectuadas

Tabla 5. Valores de los parámetros analizados

$f_e$	$f_d$	$R=f_e/f_d$	$D_f$ (m)	$r$ (m)	$I$ ( $t.s^2/m$ )	$N_p$	$N_e$	$L$
2.0	1.0	8	40	0.70	100000	5		1
1.5		6						
		4		0.50				2/3
1.0		3	34			3		
0.75		2		0.40			2	
	0.5	1.5			10000			1.2
0.5		1	22	0.30		2		
0.375		0.75						1/3
		0.5		0.20				
0.25	0.25	0.25	10		100	1		0
0.1875								

Donde:

$f_e$ , es la frecuencia de la excitación

$f_d$ , es la frecuencia del depósito

$R$ , es la relación de frecuencias

$D_f$ , es la profundidad de desplante del pilote

$r$ , es el radio del pilote

$I$ , es el factor de inercia, parámetro que trata de tomar en cuenta los efectos de la masa de suelo que se encuentra entre pilotes, más adelante se profundiza en este concepto.

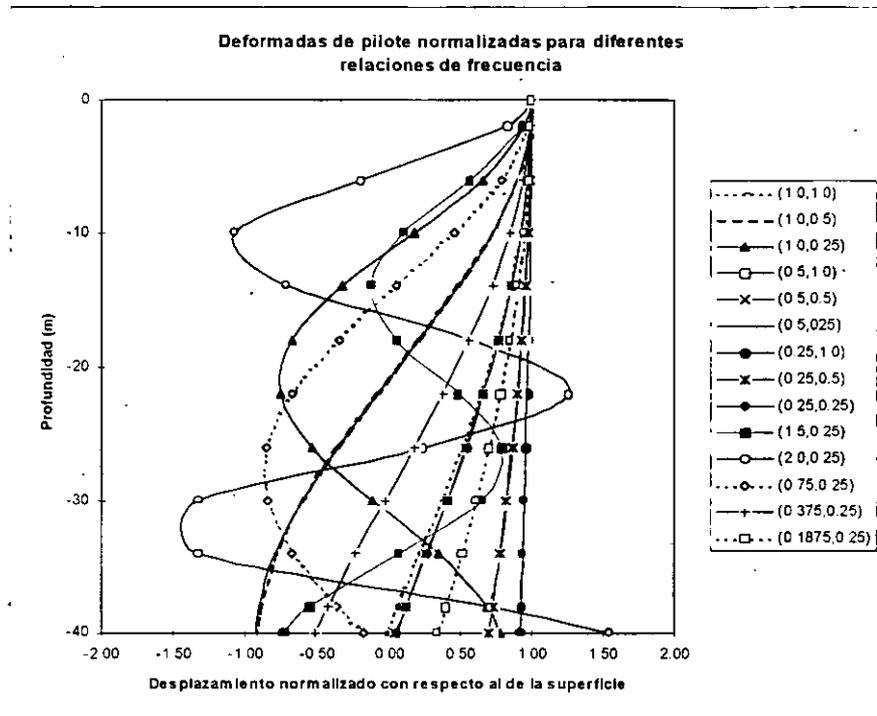
$N_p$ , es el número de pilotes

$N_e$ , es el número de estratos

$L$ , es la relación de espesores, más adelante se detalla este parámetro

### Variación de la relación de frecuencias

Se procedió a analizar la respuesta de sistemas suelo-pilote ante ondas SH propagándose verticalmente generadas por la aplicación de la armónica de la figura 5.1 en el semiespacio. La frecuencia de la excitación y la natural del depósito de suelo se variaron conforme a la tabla 5. En la gráfica de la figura 5.10 se muestran las deformadas del pilote normalizadas con respecto al máximo para las diferentes relaciones de frecuencia obtenidas para diferentes combinaciones de  $f_e$  y  $f_d$ , expresadas en dicha figura en el formato  $(f_e, f_d)$ .



*Fig. 5.10 Normalización de la deformada de los pilotes con respecto al desplazamiento en la cabeza del pilote para diferentes relaciones de frecuencia*

Puede verse en estas curvas que para diferentes combinaciones de  $f_e$  y  $f_d$  que generan el mismo valor de "R", las deformadas presentan la misma forma, lo que es un hecho importante desde el punto de vista de poder generalizar una expresión función de "R" que permita obtener cada configuración.

### Variación de la profundidad de desplante

Se modificó sucesivamente la profundidad de desplante en la forma expresada en la tabla 5 para cubrir los casos más comunes. En las gráficas de la figura 5.11 a 5.12 se muestran las deformadas del pilote obtenidas y sus correspondientes diagramas de momentos. La profundidad de desplante se normalizó con respecto a la longitud del pilote, los desplazamientos nuevamente con respecto al de la cabeza y los momentos flexionantes con respecto al máximo.

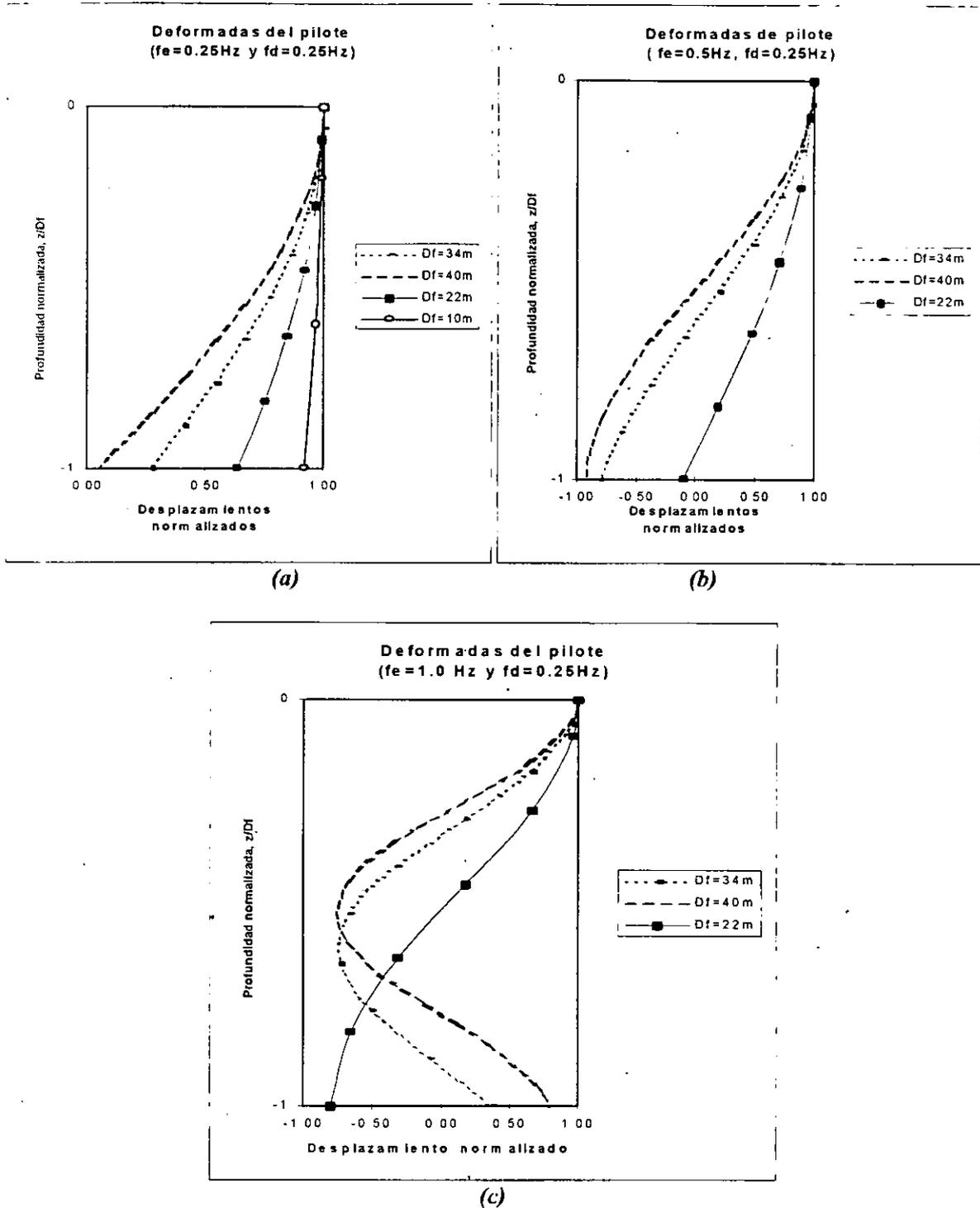


Fig. 5.11 Deformadas de pilote para diferentes profundidades de desplante y relaciones de frecuencia de: (a) 1.0 y (b) 2.0 y (c) 4.0

Como se puede apreciar, las deformadas siguen una cierta tendencia que es función inversa de la profundidad de desplante, esto es cuando se profundizan los pilotes las curvas tienen a ser más pronunciadas. Sin embargo, cabe agregar que la magnitud de los desplazamientos no cambia apreciablemente antes de la normalización.

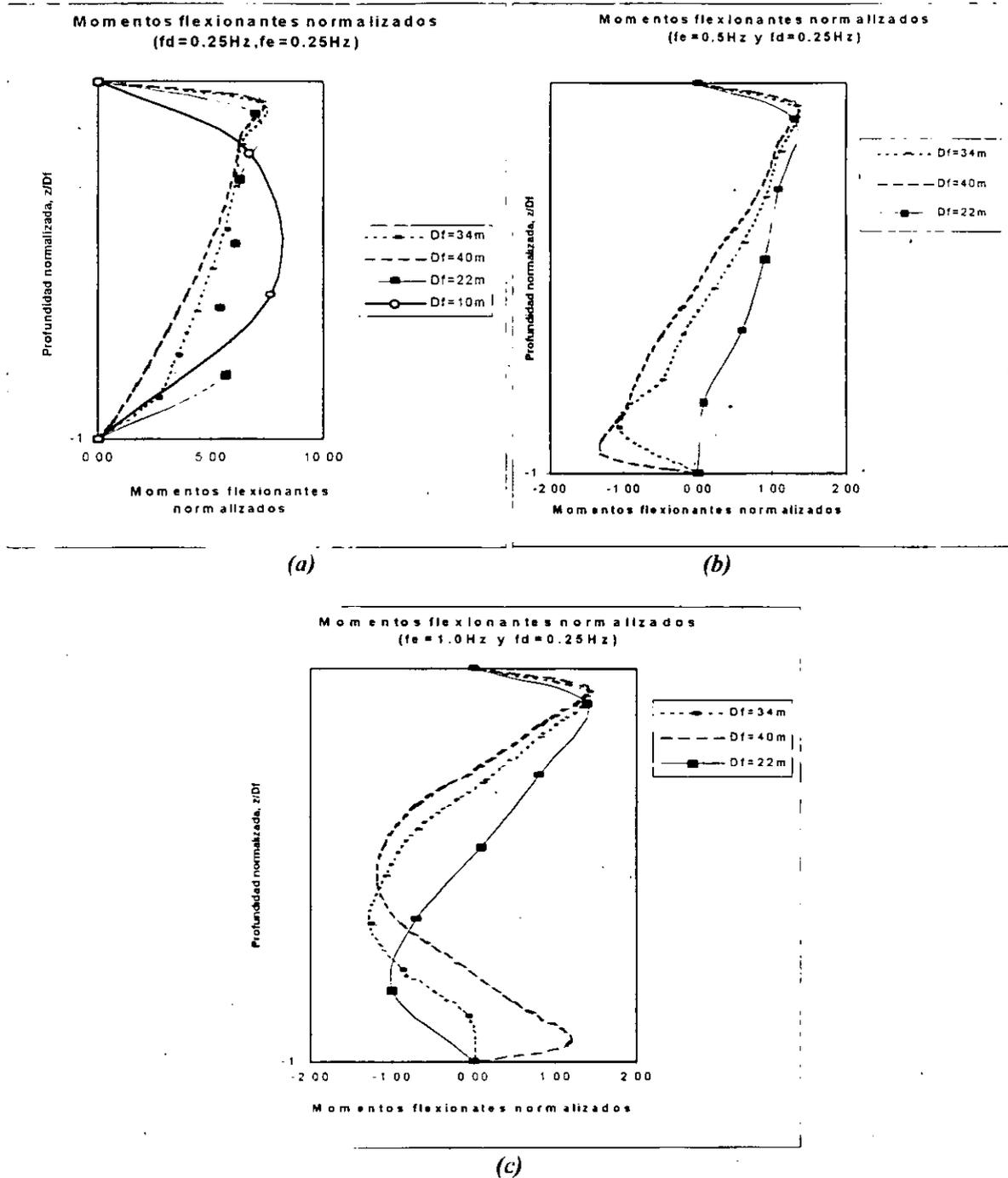


Fig. 5.12 Diagrama de momentos para diferentes profundidades de desplante y relaciones de frecuencia de: (a) 1.0, (b) 2.0 y (c) 4.0

En las gráficas de la figura 5.12, en donde se presentan los diagramas de momentos normalizados, como se puede apreciar la tendencia general es la misma, aunque las magnitudes cambian en proporción directa a la profundidad de desplante.

Se presentan los resultados para relaciones de frecuencia  $R$  de 1, 2 y 4, ya que con esto se cubre el rango más común de casos en la práctica.

### Variación del radio del pilote

Se procedió a efectuar un análisis semejante modificando los valores del radio del pilote como se mostró en la tabla 5, los resultados se presentan en las gráficas de la figura 5.13 a la 5.16

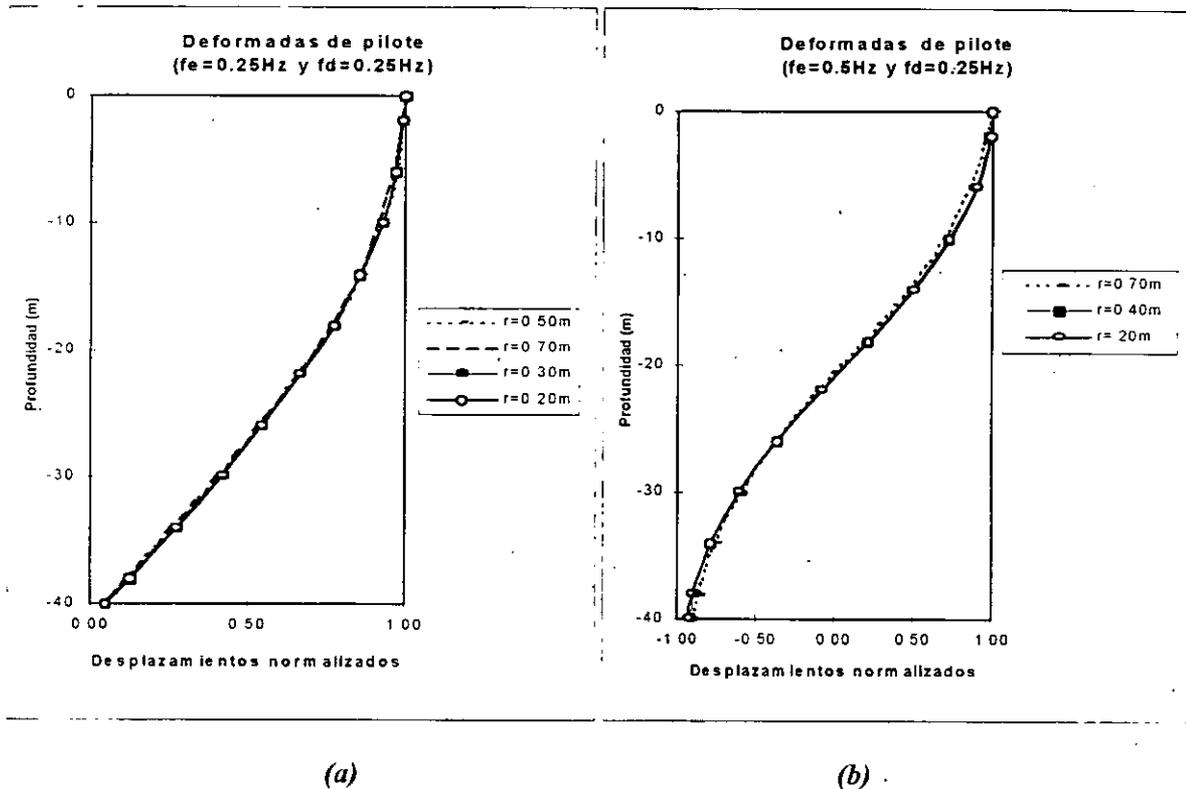


Fig. 5.13 Deformada de pilote para diferentes radios de pilotes y relaciones de frecuencia de : (a) 1.0, (b) 2.0

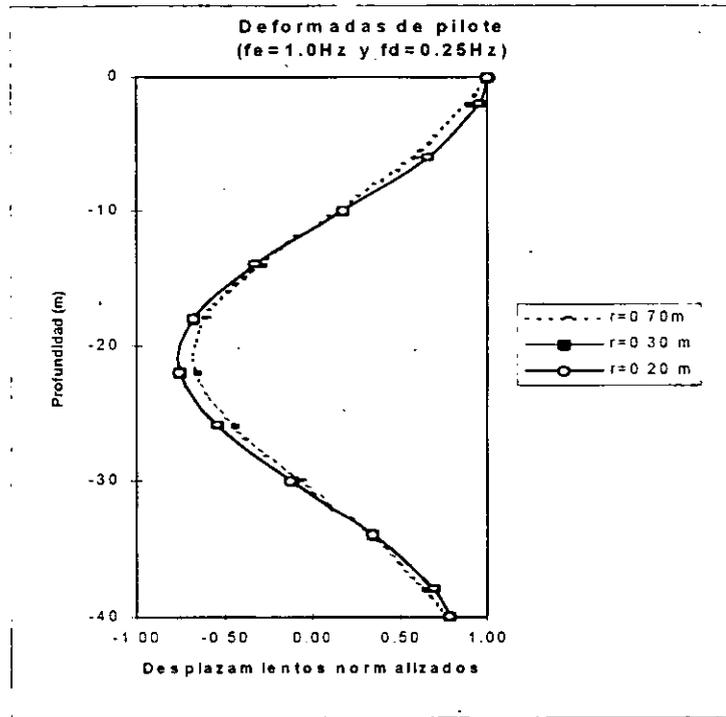


Fig. 5.14 Deformada de pilote para diferentes radios de pilotes y relacion de frecuencia de 4.0

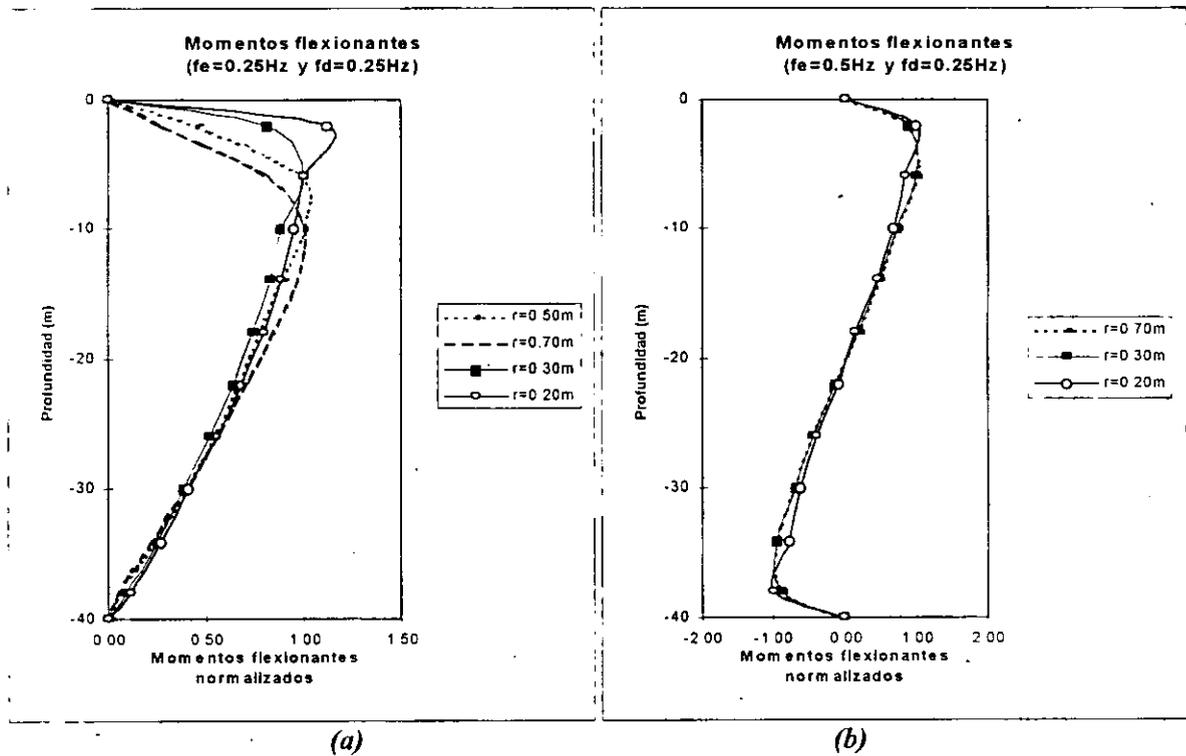
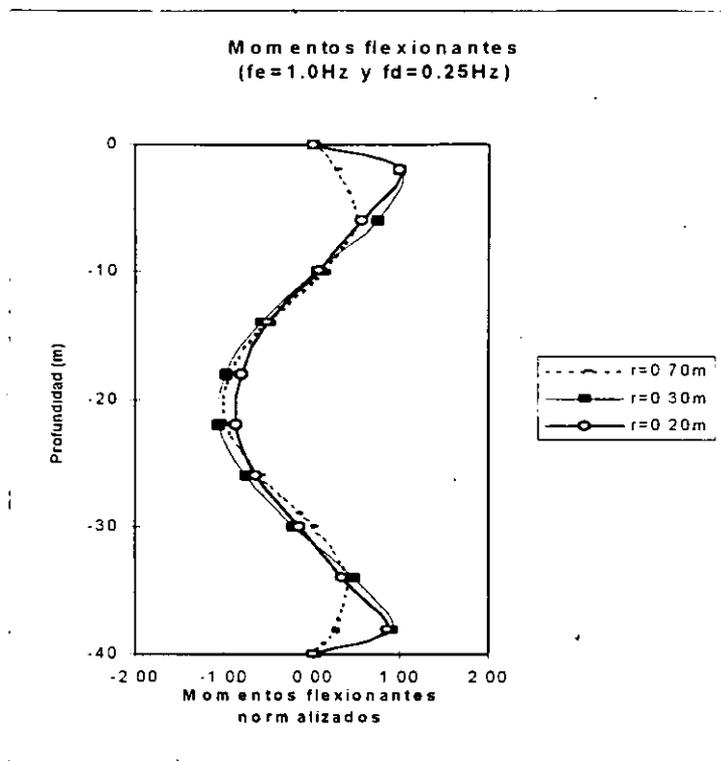


Fig. 5.15 Momentos flexionantes en el pilote para diferentes profundidades de desplante y relaciones de frecuencia de: (a) 1.0, (b) 2.0



*Fig. 5.16 Momentos flexionantes normalizados en el pilote para diferentes profundidades de desplante y relación de frecuencia de 4.0*

Nuevamente las relaciones de frecuencia analizadas son de 1, 2 y 4.

### 5.2.2 Pilotes dispuestos en línea

En seguida se hace la presentación del análisis paramétrico efectuado para los pilotes dispuestos en línea. En los casos analizados se consideró que los pilotes estaban libres en sus extremos, las propiedades geométricas del pilote fueron las mismas entre ellos y corresponden a las utilizadas en el pilote aislado. Igualmente se supusieron desplantados en los depósitos homogéneos manejados en el inciso anterior, y se emplearon las mismas excitaciones.

### Variación de la masa

El primer parámetro que se varió fue el de la masa de las impedancias dinámicas que representan los efectos inerciales del suelo que se encuentra entre pilotes (ver figura 3.2 en el capítulo 3), a estas masas, que se obtienen por áreas tributarias en función de la separación entre pilotes, se les denominó factor de inercia,  $I$ . Dicho factor se consideró de 100, 10000 y 100000  $\frac{t \cdot s^2}{m}$ , valores para los cuales se permitía la observación de diferencias en las deformadas de los pilotes contiguos.

A continuación se procedió a fijar una zona de influencia en donde los movimientos del pilote interactuaran significativamente con el suelo, para lo cual se siguió la recomendación que se presenta en la referencia 13, en donde se manifiesta que la distribución de esfuerzos alrededor de pilotes cargados lateralmente se concentran a una distancia de 2 diámetros a partir del centro del pilote, de esta forma la interacción máxima se presenta en una porción de suelo delimitada por un contorno circular cuyo radio es dos veces el diámetro del pilote.

Para tener relaciones adimensionales se procedió a normalizar los factores de inercia,  $I$ , por una masa de  $0.491 \frac{t \cdot s^2}{m}$ , correspondiente a la región de influencia máxima para un pilote con radio de 0.20 m embebido en un depósito de suelo de  $1.2 \text{ t/m}^2$  de peso volumétrico.

Más adelante se volverá a lo anterior, presentando y comentando los resultados obtenidos.

### Variación del número de pilotes

Para tomar en cuenta el efecto del grupo de pilotes se procedió a variar indirectamente la rigidez del suelo entre pilotes, modificando la fuerza generada por las impedancias dinámicas en función del número de pilotes, dividiendo ésta entre el número de espacios intermedios de acuerdo a la siguiente expresión:

$$K_{se} = k / (N_p - 1)$$

Donde:

$K_{se}$ , es la rigidez del suelo entre pilotes

$k$ , es la rigidez dinámica obtenida de las curvas p-y

$N_p$ , es el número entre pilotes

No se varió el diámetro de los pilotes porque ya había quedado claro en el análisis de un pilote aislado, que sólo generaba un aumento en la rigidez del sistema, ni tampoco la profundidad de desplante porque este parámetro prácticamente no influyó en la respuesta del pilote aislado.

### 5.3 Modelo simplificado

#### 5.3.1 Pilote aislado

Las gráficas ya presentadas, derivadas del análisis paramétrico, nos pusieron en condiciones de entrever las relaciones de las diferentes variables que influyen en el problema.

La respuesta dinámica de un sistema por lo general se puede expresar como una serie de armónicas superpuestas, siendo el caso más simple una suma de senos y cosenos, así que se propuso una expresión de este tipo en dos términos, la cual tras sucesivas calibraciones tomó la forma que se muestra en seguida.

$$y = y_{cp} \left[ \cos\left(\frac{\pi z_e R D_f}{2 H}\right) - \frac{\pi R}{60} \text{Sen}\left(\frac{\pi z_e R D_f}{2 H}\right) \right] \quad (31)$$

Donde :

$y_{cp}$ , es el desplazamiento de la cabeza del pilote

$z_e$ , es una profundidad equivalente

$R$ , es la relación de frecuencias igual a  $f_d/f_e$

$H$ , es el espesor del estrato

Y también:

$$z_e = \frac{z}{D_f}$$

Donde:

$z$ , es la profundidad donde se desea conocer el desplazamiento

$D_f$ , es la profundidad de desplante

Por otro lado, para definir un modelo simplificado de las configuraciones de los diagramas de momentos flexionantes se procedió a hacer uso de la conocida relación que existe entre la ecuación de la deformada de una barra y su momento flexionante, expresada por una segunda derivada del desplazamiento multiplicada por una constante definida en términos del material y la rigidez del elemento, de esta forma derivando dos veces la ecuación (31) tenemos:

$$M(z) = y_{cp} EI \left[ - \left(\frac{\pi R}{2 H}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi z_e R D_f}{2 H}\right) + \frac{(\pi R)^3}{240 H^2} \text{Sen}\left(\frac{\pi z_e R D_f}{2 H}\right) \right] \quad (32)$$

Donde :

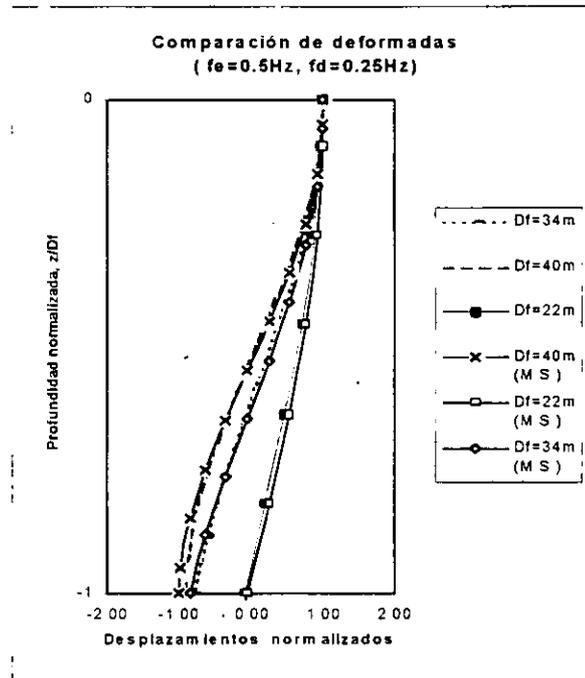
$E$ , es el módulo de Elasticidad del material

$I$ , es el momento de inercia de la sección transversal del pilote

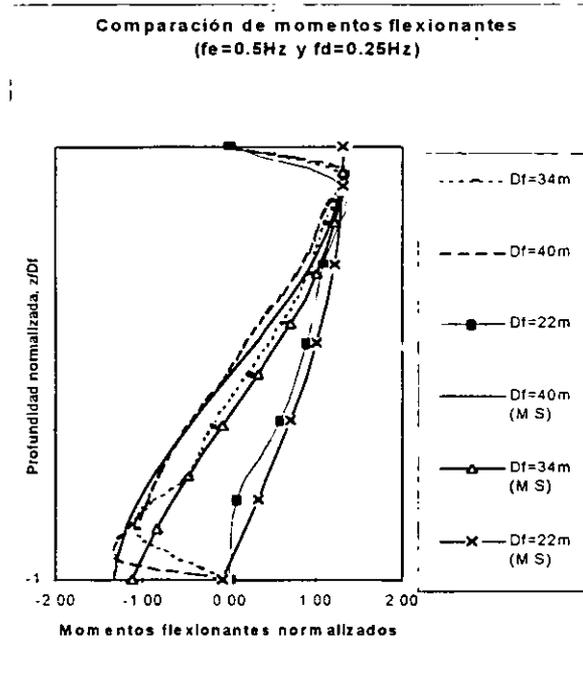
y los otros parámetros tienen los mismos significados ya definidos

Las ecuaciones (31) y (32) nos permite obtener la deformada y el diagrama de momentos crítico del pilote respectivamente.

La fuerza cortante se puede obtener a partir del momento flexionante empleando la teoría de vigas. No se consideró primordial plantear una expresión para cortante porque el efecto que predomina en el diseño de este tipo de elementos estructurales es básicamente la flexión.



(a)



(b)

*Fig. 5.17 Comparaciones entre los desplazamientos (a) y momentos flexionantes (b) obtenidos con el programa RSSPNL y los del modelo simplificado*

En cuanto a la figura 5.17 (a), puede observarse la similitud en las deformadas es bastante buena para esta relación de frecuencia, para mayores, se observa un error apreciable aunque no importante ya que la magnitud de los desplazamientos es muy pequeña (del orden de 1mm), para altos valores de  $R$ , lo cual permite que la ecuación matemática propuesta no pierda validez. De manera que conociendo la profundidad del depósito  $H$  y la relación de frecuencia " $R$ " se puede determinar la configuración de la deformada con una buena aproximación.

Como puede observarse en la figura 5.17 (b), la configuración de momentos flexionantes obtenida con la ecuación anterior resulta ser la envolvente de momentos para cada deformada, inclusive para diferentes profundidades de desplante, lo que es muy útil desde el punto de vista práctico. Cabe comentar que aunque las condiciones de frontera para el pilote analizado deberían presuponer un momento cero en los extremos, el modelo simplificado propuesto no es capaz de tomar esto en cuenta, sin embargo nuevamente carece de importancia ya que el criterio que rige el diseño de este tipo de elementos estructurales es por lo general el del momento máximo.

La influencia en el cambio de las deformadas en función de la profundidad de desplante y el radio del pilote se tomó en cuenta en el modelo propuesto normalizando con respecto a la profundidad de desplante, de manera de hacerla adimensional en profundidades.

Para poder decir que esta ecuación aproxima de manera conveniente las deformadas de pilote y momentos flexionantes obtenidos mediante el uso del programa, se procedió a

compararlos para los casos anteriormente analizados, lo que se presenta en las gráficas de las figuras 5.18 a la 5.19.

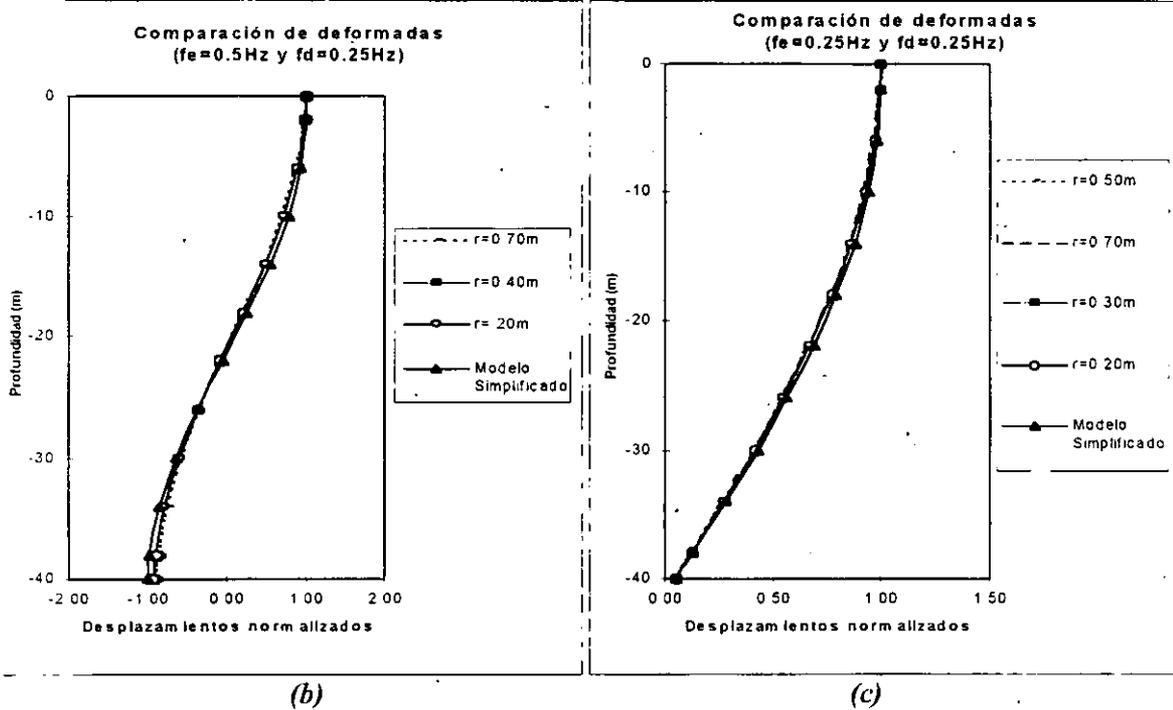
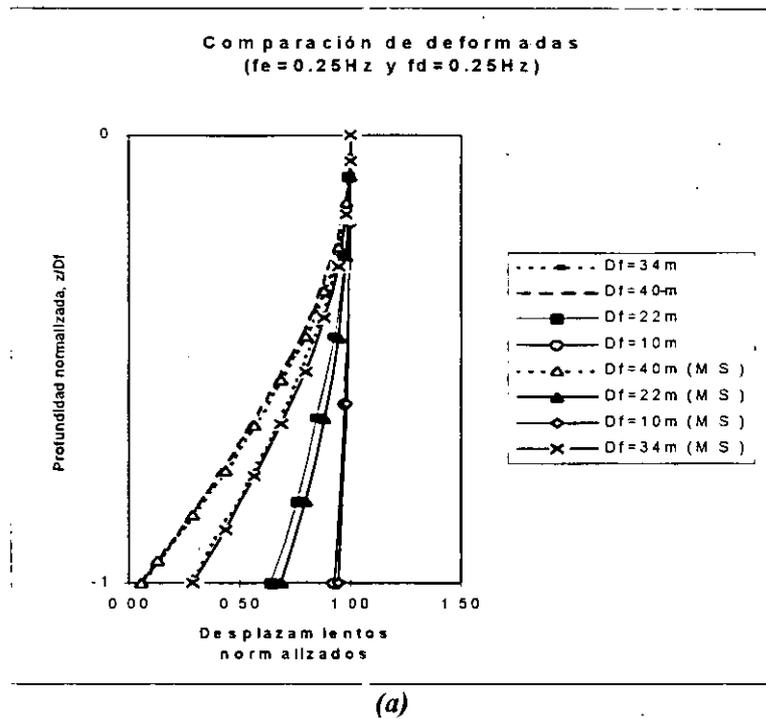
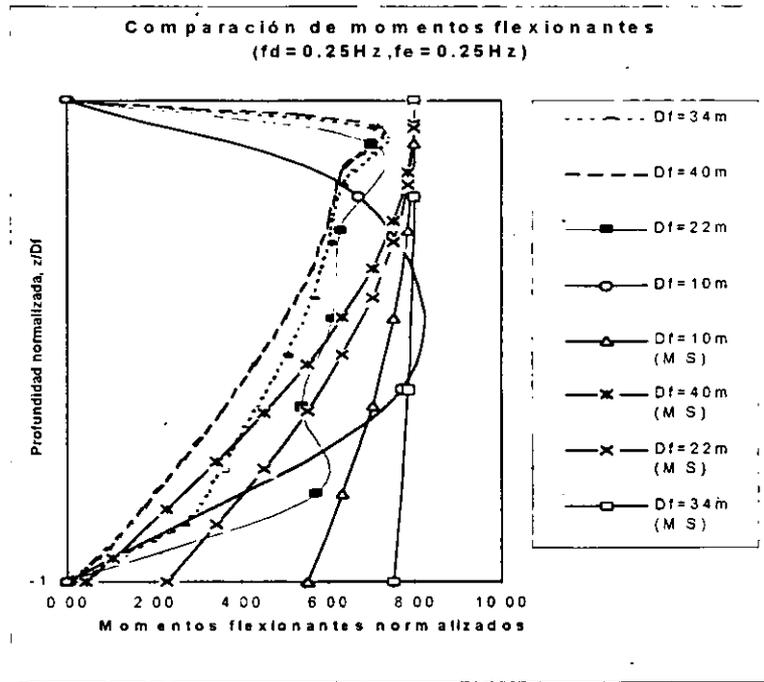
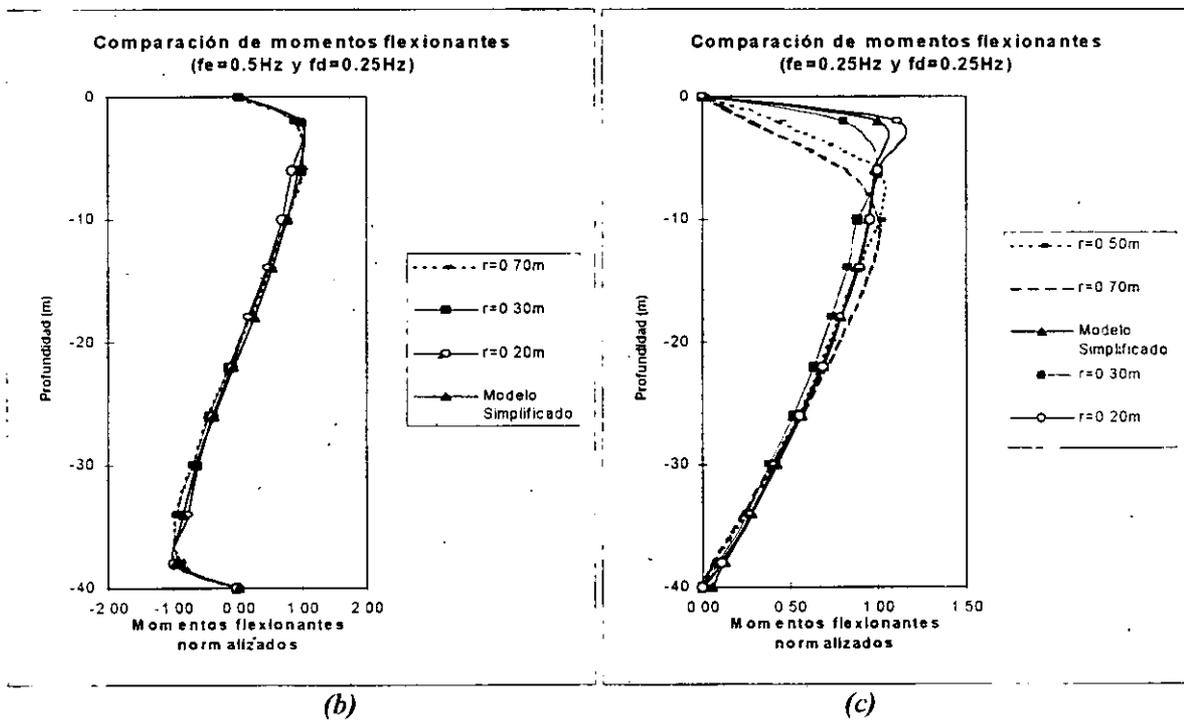


Fig. 5.18 Comparaciones entre los desplazamientos obtenidos con el programa y el modelo simplificado para diferentes profundidades de desplante, (a), y radios de pilotes, (b) y (c)

Enseguida se presentan curvas similares de los diagramas de momentos para diferentes radios de pilote.



(a)



(b)

(c)

Fig. 5.19 Comparaciones entre los diagramas de momentos obtenidos con el RSSSPNL y los del modelo simplificado para diferentes profundidades de desplante, (a), y radios de pilotes, (b) y (c)

En las gráficas de la figura 5.20 se presentan más comparaciones entre los resultados del modelo simplificado propuesto y los obtenidos con el programa RSSSPNL para posibilidades diferentes a las inicialmente analizadas. Esto se efectuó con el fin de verificar la validez del modelo para otros casos. Se analizó un pilote de 0.20m de diámetro desplantado a 40 y 22 m de profundidad en un depósito de suelo homogéneo cuyo frecuencia fundamental se supuso de 0.20 Hz, la frecuencia de la excitación fue de 0.20 Hz y 0.80 Hz, teniéndose dos relaciones de frecuencia, 1 y 4. Enseguida se presentan algunos de las comparaciones efectuadas tanto para deformadas de pilote como para momentos flexionantes.

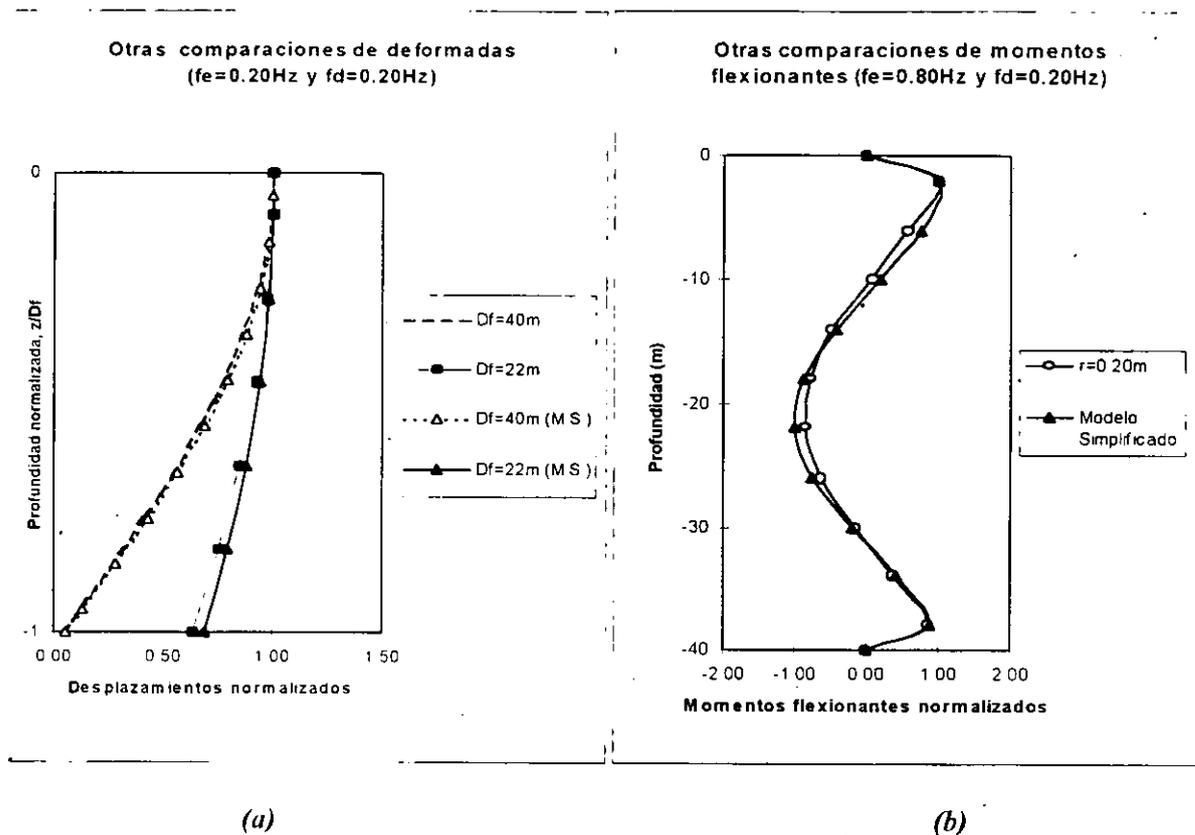


Fig. 5.20 Otras comparaciones de desplazamientos (a) y momentos (b) obtenidos con el programa RSSSPNL

La aproximación lograda por el modelo simplificado para estos casos queda entonces demostrada en las figuras anteriores tanto en términos de desplazamientos como de momentos.

### **Definición de una metodología de análisis simple**

Resta por definir una metodología de análisis simple que tenga aplicaciones prácticas, para lo cual se construyó la serie de gráficas que se presentan en las figuras 5.21 a la 5.26.

En la gráfica de la figura 5.21 se puede observar los desplazamientos en la cabeza del pilote de 12.44t.m. de flexibilidad, expresada como  $f_x=EI/D_f$  (Donde I, E y  $D_f$  ya se definieron, para fines de esta tesis se consideró que la profundidad de desplante coincidía con la longitud del pilote), normalizados con respecto al espesor del estrato, H, para diferentes relaciones de frecuencia, R, y posteriormente se validan estas curvas para distintos valores de  $f_x$  variando por un lado la profundidad de desplante (ver figura 5.22) y por otro el radio (ver figura 5.23) del pilote.

Asimismo, en las curvas de la figura 5.24 se muestra el momento flexionante máximo del pilote de  $f_x=12.44t.m.$ , normalizado con respecto a su flexibilidad nuevamente para diferentes relaciones de frecuencia, R, extendiendo su rango de aplicabilidad para otras profundidades de desplante y radios de pilote con las gráficas de las figuras 5.25 y 5.26 en donde se observa la relación de estos parámetros con respecto a la respuesta en términos de momentos flexionantes normalizados con respecto al máximo de  $f_x=12.44t.m.$

### **Pasos a seguir:**

a) Si se necesita conocer la configuración deformada del pilote:

1. Conociendo la velocidad de cortante promedio en un depósito de suelo, y la frecuencia fundamental dominante de los movimientos que arriban a un sitio dado se procede a calcular la relación de frecuencias respectiva,  $R= f_e/f_d$ .
2. Se elige una de las curvas presentadas en la figura 5.21 o se interpola entre ellas, para que, entrando con la frecuencia de la excitación se determine el desplazamiento de la cabeza del pilote normalizado con respecto al espesor del estrato, H.
3. Se multiplica el valor obtenido en el paso 2, por H y por los factores correctivos para tomar en cuenta la profundidad de desplante y el radio del pilote obtenidos con las gráficas de las figuras 5.22 y 5.23 respectivamente de manera de encontrar finalmente el desplazamiento máximo en la cabeza del sistema suelo-pilote en cuestión, en términos de desplazamientos absolutos.
4. Se ingresa el desplazamiento máximo en la cabeza obtenido en 3) directamente en el modelo de la ecuación (33), para tener la configuración de la deformada del pilote.

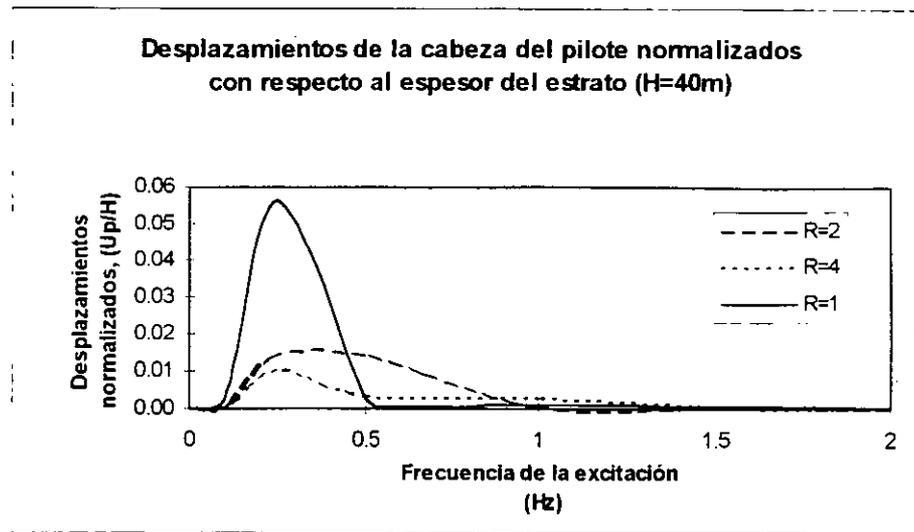


Fig. 5.21 Desplazamientos de la cabeza del pilote de  $f_x=12.44t.m$  normalizados con respecto al espesor del estrato de 40m, para diferentes relaciones de frecuencia, R

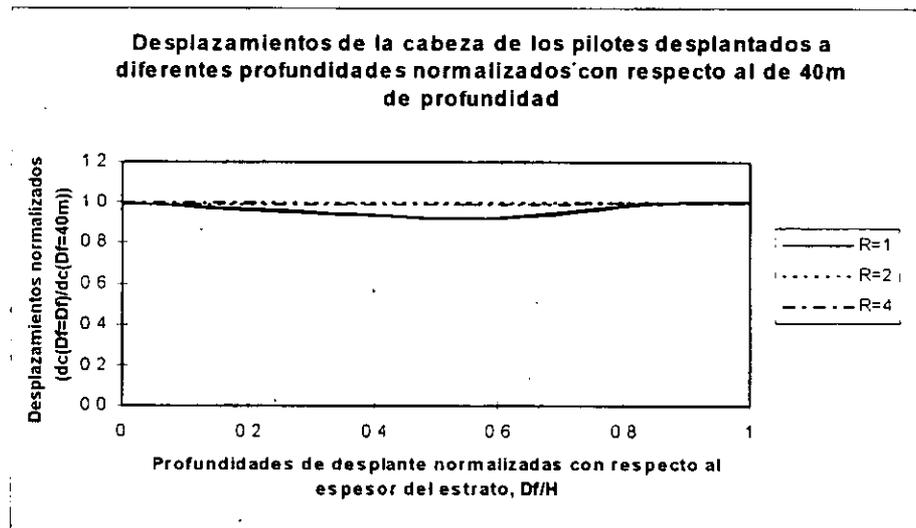


Fig. 5.22 Desplazamientos de la cabeza de los pilotes desplantados a diferentes profundidades normalizados con respecto al de  $f_x=12.44t.m$  para diferentes relaciones de frecuencia, R

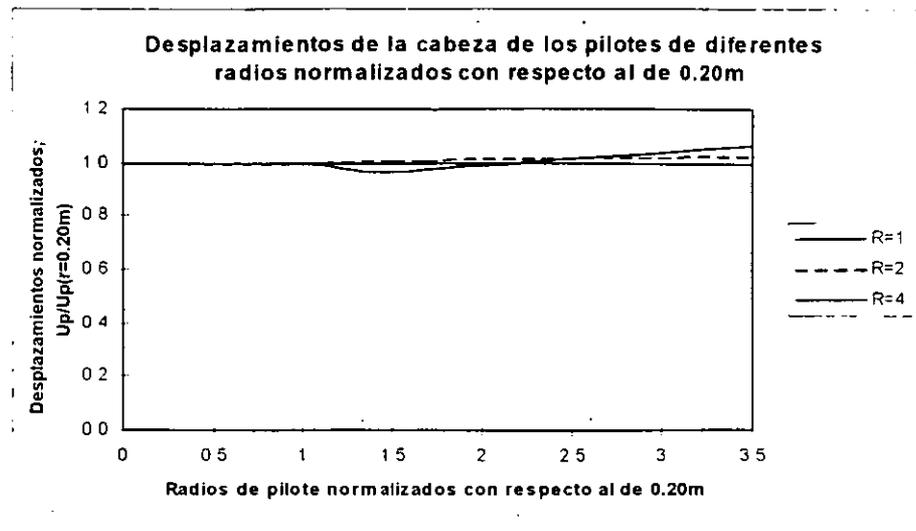


Fig. 5.23 Desplazamientos de la cabeza de los pilotes de diferentes radios normalizados con respecto al de  $f_x=12.44t.m.$  para diferentes relaciones de frecuencia,  $R$

b) Si lo que se requiere es la variación del momento flexionante con la profundidad:

1. Se procede a entrar de forma similar a la gráfica de la figura 5.24 para un valor de  $R$  y  $f_x$  dados, y se obtiene el momento flexionante máximo para un pilote de  $f_x=12.44t.m.$
2. Se ajusta el valor del momento flexionante máximo, obtenido en el paso 1, a la profundidad de desplante y radio del pilote en análisis con las curvas de la figuras 5.25 y 5.26.
3. Finalmente con este valor y la ecuación (34) se determina el diagrama de momentos.

Aquí conviene hacer un paréntesis, para apuntar un hecho interesante que se puede observar también en las gráficas de las figuras 5.21 y 5.24, en donde se presenta la magnitud real de los desplazamientos y momentos normalizados con respecto al espesor del estrato y a la flexibilidad del pilote respectivamente. Los desplazamientos persisten en el mismo orden de magnitud; sin embargo, en los momentos flexionantes sí se observa una influencia importante, como era de esperarse, de su diámetro, de manera que a mayor diámetro la magnitud de los momentos flexionantes se incrementa.

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

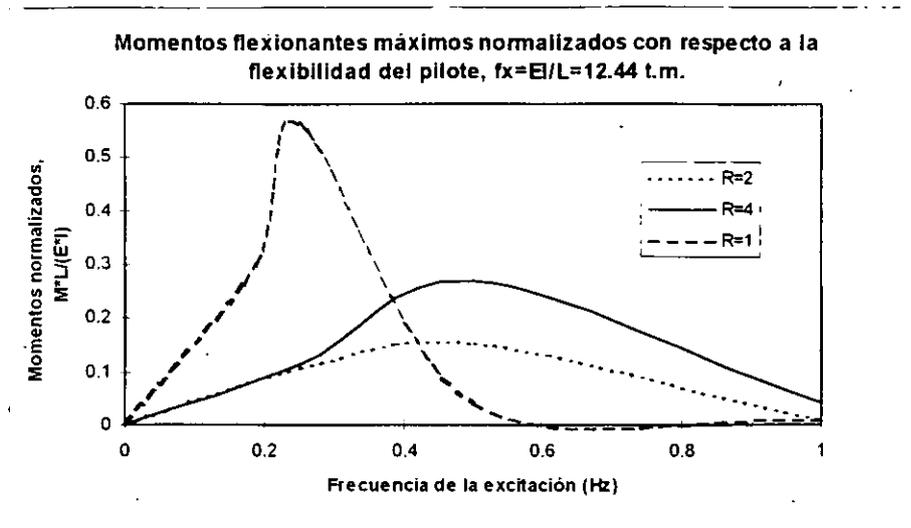


Fig. 5.24 Momentos flexionantes máximos normalizados con respecto al de  $f_x=12.44$ t.m. para diferentes relaciones de frecuencia  $R$

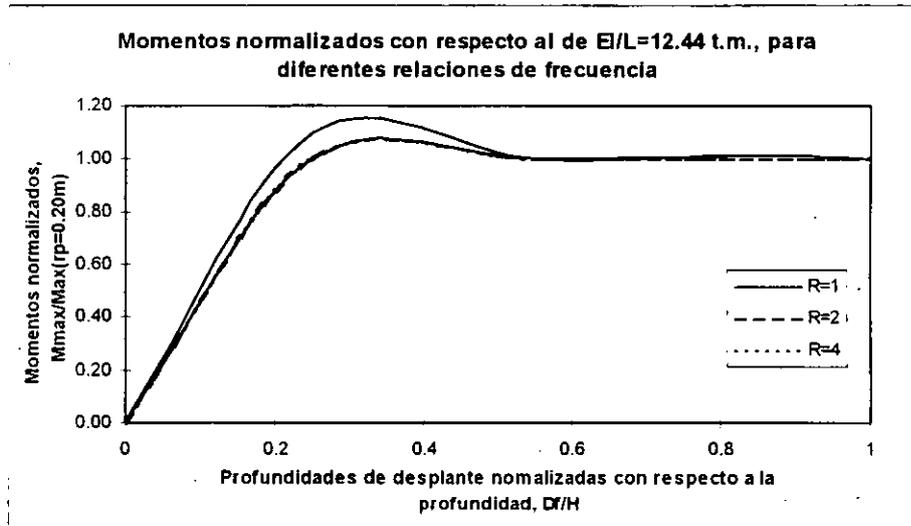


Fig. 5.25 Momentos flexionantes normalizados con respecto al de  $f_x=12.44$ t.m. para diferentes relaciones de frecuencia,  $R$

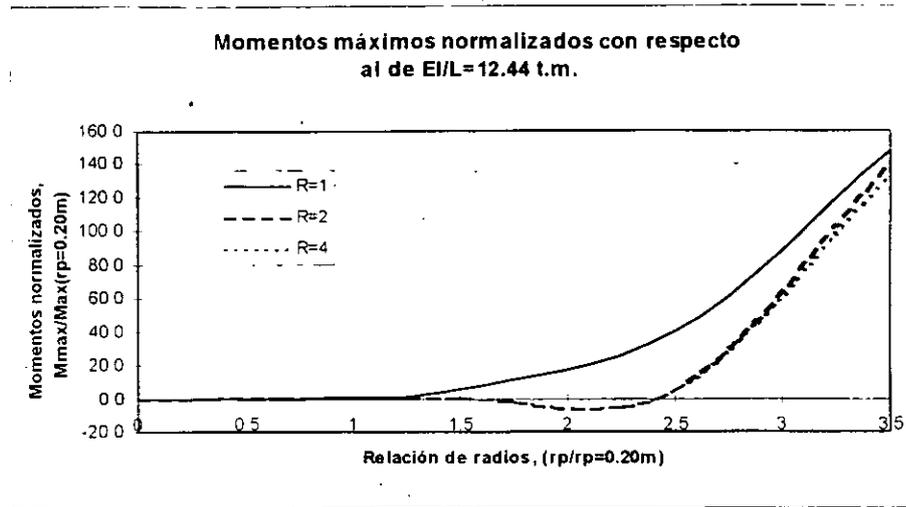


Fig. 5.26 Momentos máximos normalizados con respecto al de  $f_x=12.44$ t.m. para diferentes relaciones de frecuencia,  $R$

**Influencia del espesor del estrato**

Con el fin de denotar la influencia de la estratificación del depósito en la respuesta del sistema suelo-pilote se planteó analizar un sistema compuesto de dos capas en las cuales la sobreyacente se consideró con una velocidad de onda de 524m/s y el de la subyacente de 131.24m/s de manera que el estrato superior fuera 4 veces más rígido que el inferior.

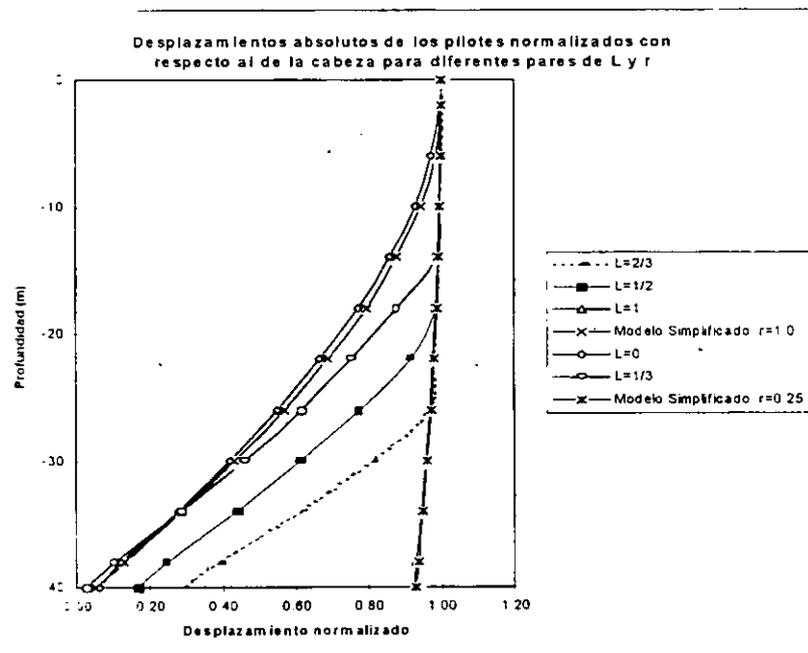


Fig. 5.27 Desplazamientos absolutos normalizados con respecto al de la cabeza para diferentes relaciones de  $L$  y  $r$

Como puede observarse en las curvas de la figura 5.27, en donde se presentan las deformadas críticas según el criterio ya mencionado para diferentes relaciones de  $L$  definida como la razón del espesor de la capa sobreyacente entre la subyacente, se puede observar que el pilote sigue a la capa más rígida para posteriormente tender al comportamiento observado en el estrato homogéneo de menor rigidez presentando un quiebre claramente perceptible en su elástica, esto a partir de la profundidad en donde se presenta el cambio en velocidades de onda. Los desplazamientos anteriores fueron normalizados con respecto al máximo.

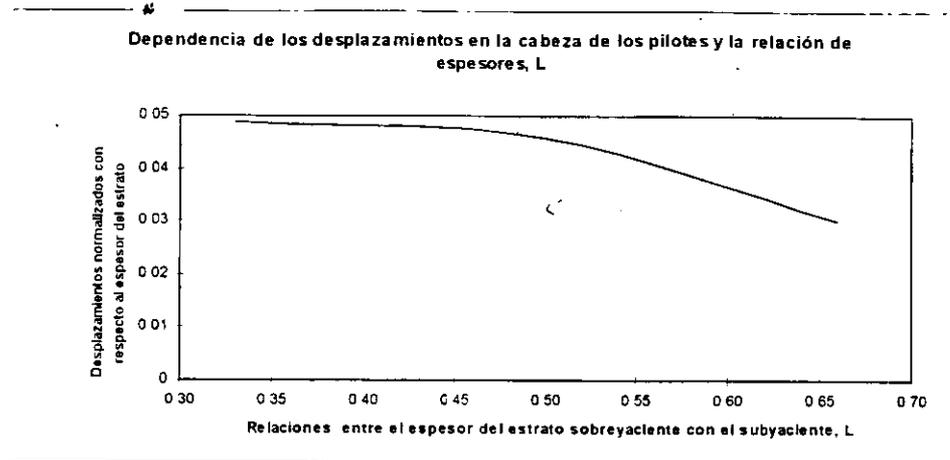


Fig. 5.28 Desplazamientos en la cabeza de los pilotes normalizados con respecto a la profundidad del depósito  $H=40m$

Por otro lado, en la gráfica de la figura 5.28, se constata que los desplazamientos en la cabeza del pilote disminuyen conforme aumenta el espesor de la capa superior, más rígida.

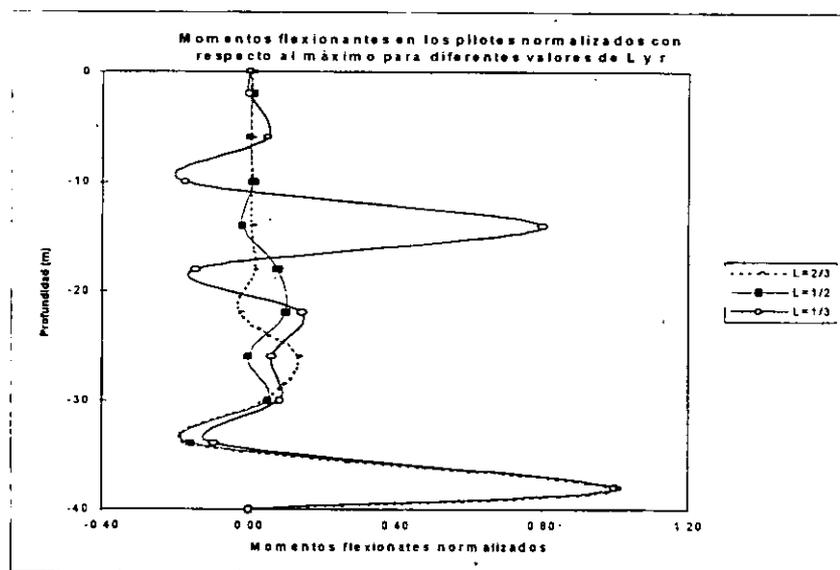
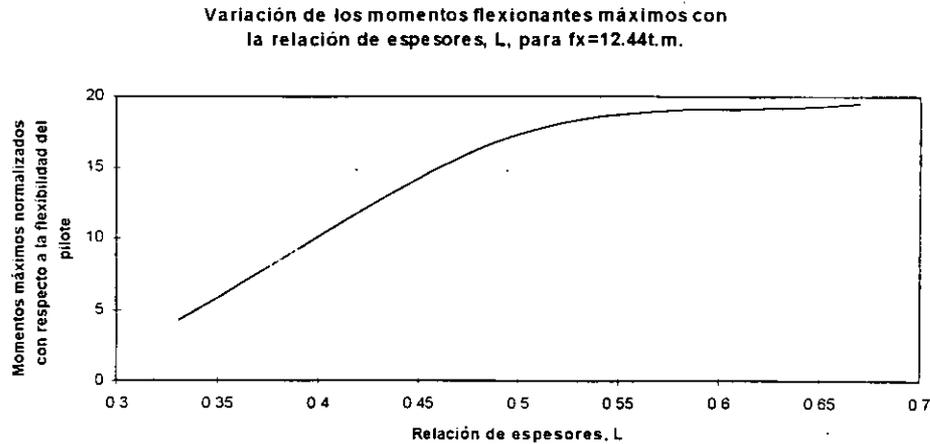


Fig. 5.29 Momentos máximos normalizados con respecto al máximo para una flexibilidad de pilote,  $f_x$ , de  $12.44t.m$ . y diferentes relaciones de espesores,  $L$



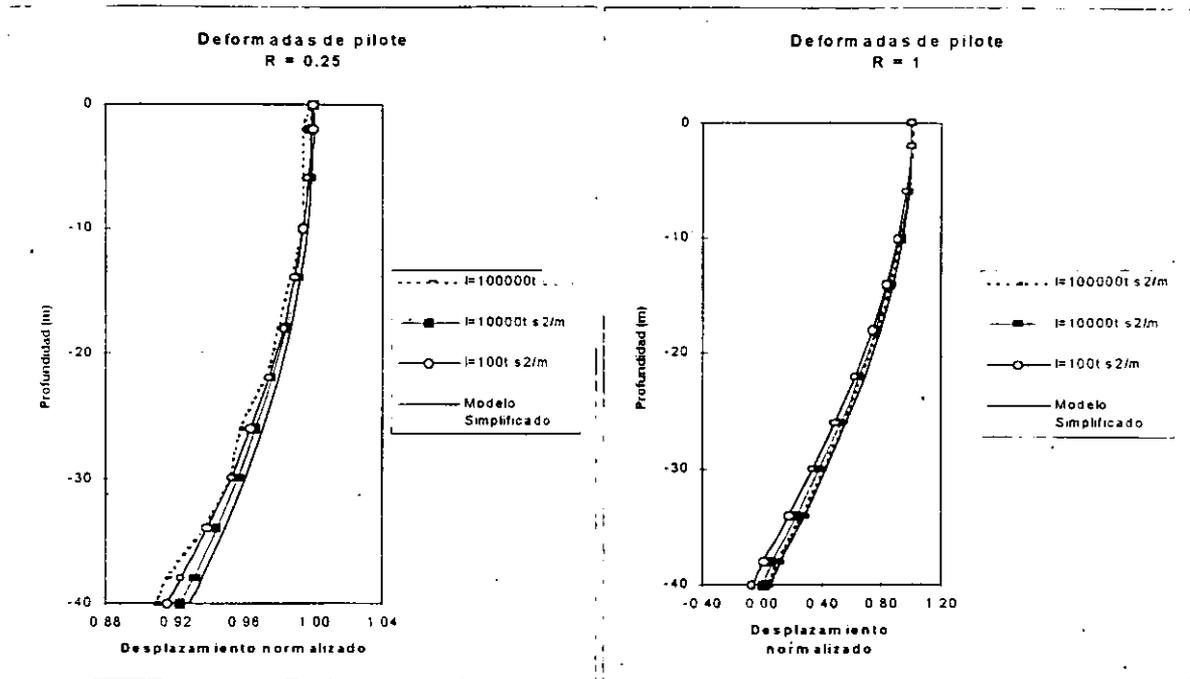
*Fig. 5.30 Momentos máximos normalizados con respecto a la flexibilidad del pilote,  $f_x=12.44t.m.$ , para diferentes relaciones de espesores,  $L$*

En cuanto al efecto en los diagramas de momentos correspondientes puede observarse en las gráficas de la figura 5.29, que el correspondiente a  $L=1/3$  presenta dos zonas donde la magnitud es importante, ambas ubicadas cercanas a los extremos, lo que coincide con lo previsto por la teoría de vigas cuando se somete a una carga uniformemente repartida a un elemento empotrado en sus extremos, lo que se interpreta como una suficiencia de espesor del estrato superior para restringir el giro.

Finalmente como era de esperarse, en la gráfica de la figura 5.30, se corrobora un aumento en la magnitud de los momentos a medida que el estrato se rigidiza, ya que se los cambios de curvatura tienden a hacerse bruscos.

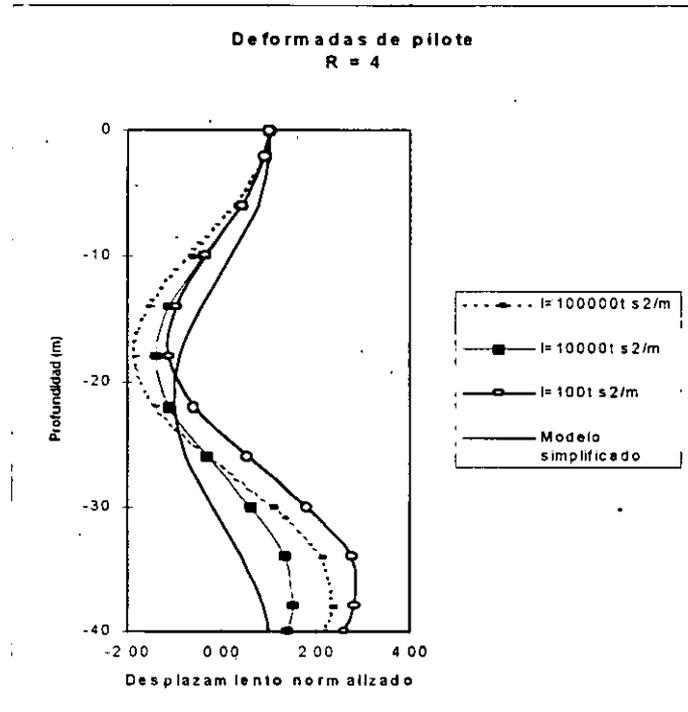
### 5.3.2 Pilotes dispuestos en línea

En las gráficas de la figura 5.31, se muestra la respuesta, en términos de deformadas, de un línea de 2 pilotes los cuales fueron sometidos a la acción de diferentes fuerzas inerciales obtenidas de acuerdo al modelo descrito en el capítulo 3, y resuelto con el programa SISTEMA como ya se vió en el capítulo anterior, para relaciones de frecuencia de 0.25, 1 y 4.



(a)

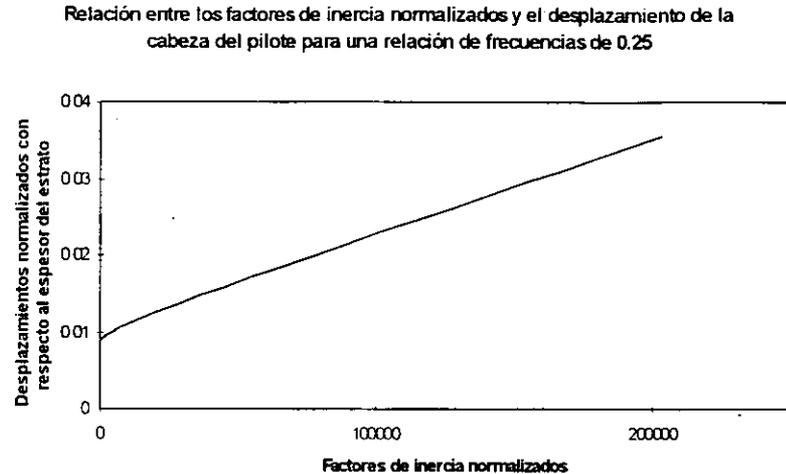
(b)



(c)

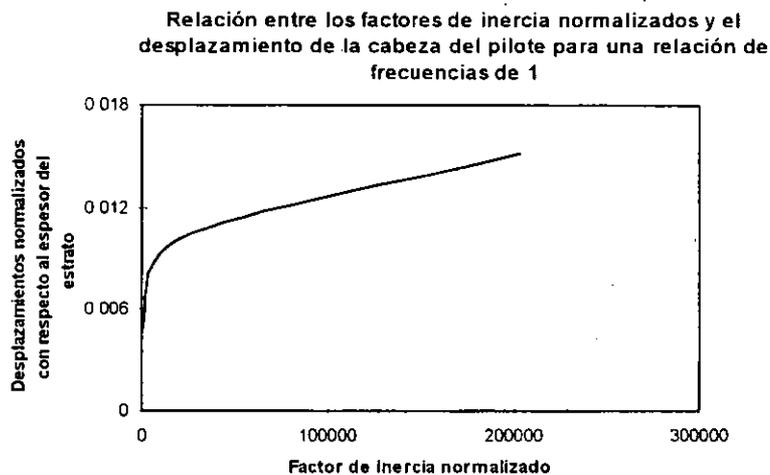
Fig. 5.31 Comparaciones entre las deformadas de los pilotes entre sí para diferentes factores de inercia y el modelo simplificado con relaciones de frecuencias de: (a) 0.25, (b) 1.0 y (c) de 4

La respuesta está normalizada con respecto al desplazamiento de la cabeza del pilote y como se puede observar existe una muy buena similitud con el modelo simplificado propuesto para pilotes aislados, dado por la ecuación (33). Lo anterior fue posible debido a que se están manejando desplazamientos adimensionales los cuales sólo tienen que adecuarse al de la cabeza real para cada factor de inercia obtenido de las curvas de las figuras 5.32 a 5.34.

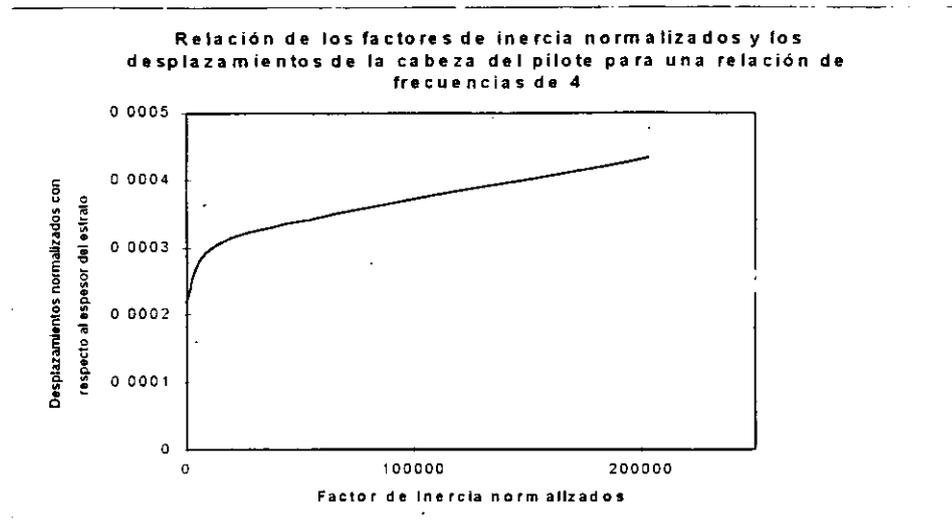


*Fig. 5.32 Variación del desplazamiento normalizado y los factores de inercia para una relación de frecuencias de 0.25*

Para lograr tener factores adimensionales en el eje de las abscisas se dividieron los factores de inercia  $I$ , entre la masa de la región de suelo delimitada por el área de máxima influencia que como ya se comentó se escogió correspondiente al diámetro menor de los pilotes empleados en esta tesis y que da un valor de  $0.491 \frac{t \cdot s^2}{m}$ .



*Fig. 5.33 Variación del desplazamiento normalizado y los factores de inercia para una relación de frecuencias de 1*



*Fig. 5.34 Variación del desplazamiento normalizado y los factores de inercia para una relación de frecuencias de 4*

Puede observarse de las gráficas 5.32 a 5.34, que después de un cierto valor del factor de inercia normalizado su incremento es prácticamente constante, aunque lo más relevante es lo que resulta de la comparación de los factores de inercia analizados, a saber, 100, 10000 y 100000  $\frac{t.s^2}{m}$ , con la masa del área de influencia,  $0.491 \frac{t.s^2}{m}$ , ya que son 203.67, 20366.7 y 203665.99 veces más grandes respectivamente. Esto nos permite concluir que el efecto de la inercia del suelo entre pilotes no afecta significativamente el comportamiento que exhibe el sistema completo durante el evento dinámico, por esta razón no se consideró importante desarrollar los diagramas de momentos.

### Numero de pilotes

Para continuar el análisis se efectuaron corridas del programa SISTEMA variando el número de pilotes de 2 a 3 y 5. Debido a la simetría en geometría y cargas y a la manera en que se conceptualizó el modelo, la respuesta de los pilotes extremos es la misma y la de los pilotes centrales depende de la rigidez que se asigne al suelo entre pilotes. Así, en esta parte se varió indirectamente dicho factor de manera que la fuerza transmitida del pilote inicial al contiguo fuera función del número de espacios entre pilotes, esto es del número de éstos menos uno.

En las gráficas de las figuras 5.35 y 5.36 se presenta la comparación de la respuesta de los pilotes interiores de cada línea entre sí y con el modelo simplificado propuesto.

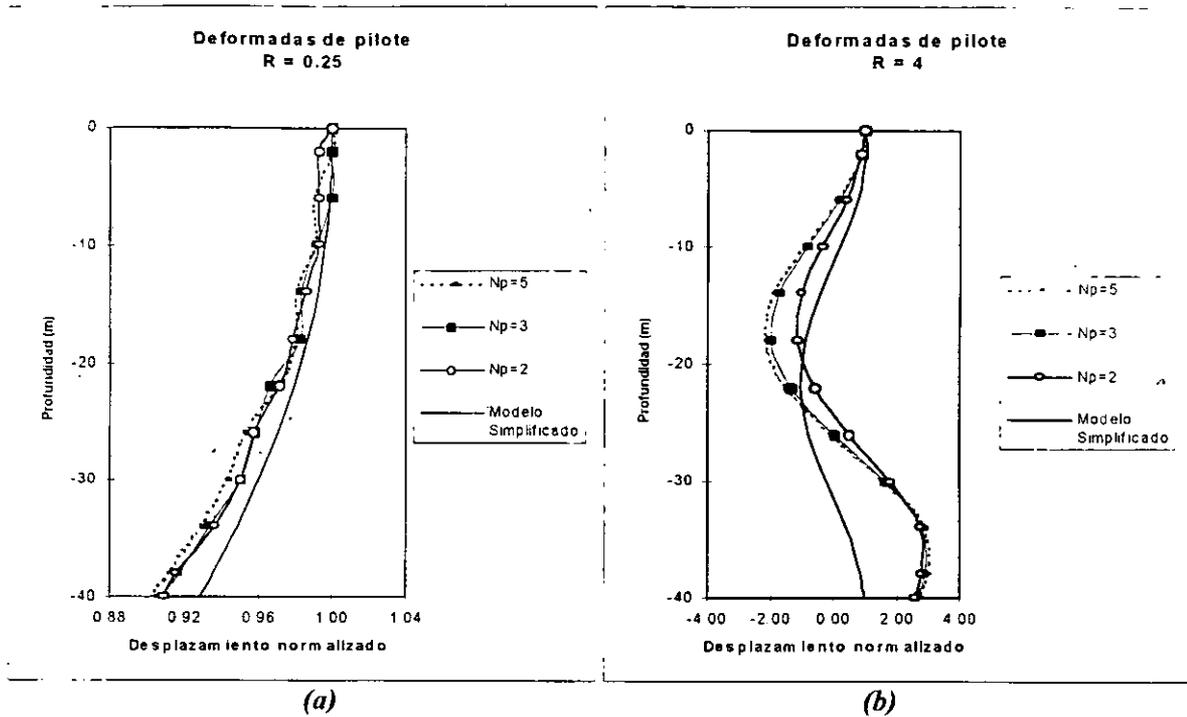


Fig. 5.35 Comparaciones de las deformadas de los pilotes entre sí para diferente número de pilotes y el modelo simplificado con una relación de frecuencias de: (a) 0.25 y (b) 4.0

Las relaciones de frecuencia que se emplearon fueron nuevamente de 0.25, 1 y 4

Otra vez la deformada de los pilotes respectivos se normalizó con respecto al desplazamiento en su cabeza lo que nos permitió modelar ésta con la ecuación (33) para desplazamientos y la (34) para momentos.

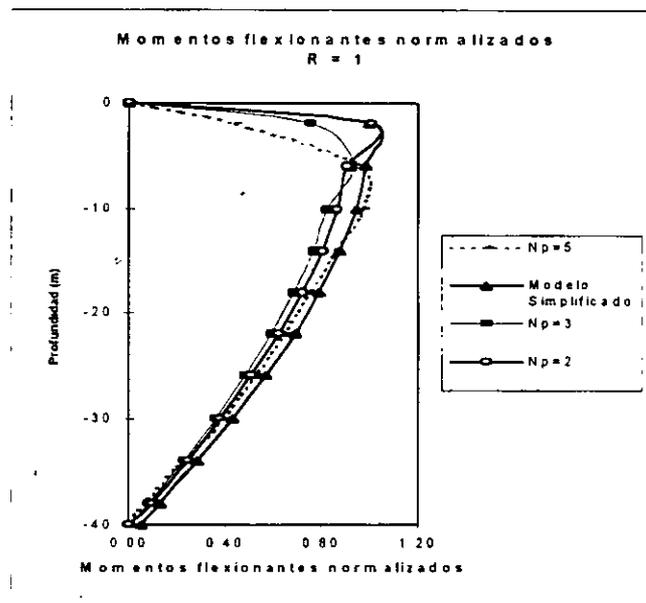
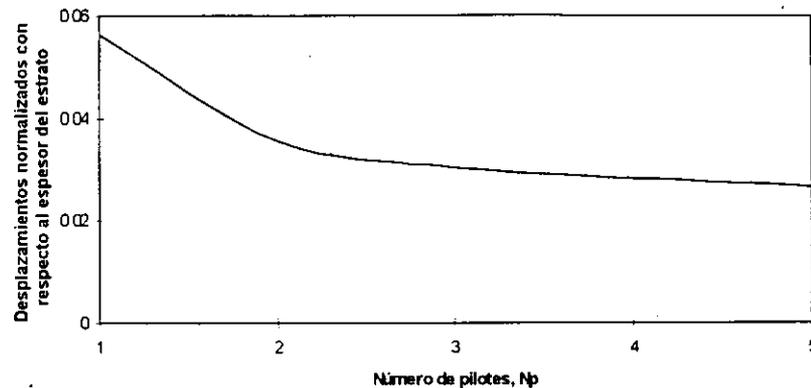


Fig. 5.36 Comparaciones entre los diagramas de momentos obtenidos para varios pilotes y los del modelo simplificado con una relación de frecuencia de 1

De manera parecida a como se llevó a cabo para el caso del pilote aislado, los diagramas de momentos se normalizaron con respecto al máximo, en la gráfica de la figura 5.36 se presenta la comparación de dichos diagramas para una relación de frecuencias de 1 con el obtenido del modelo simplificado, como puede verse existe una muy buena concordancia.

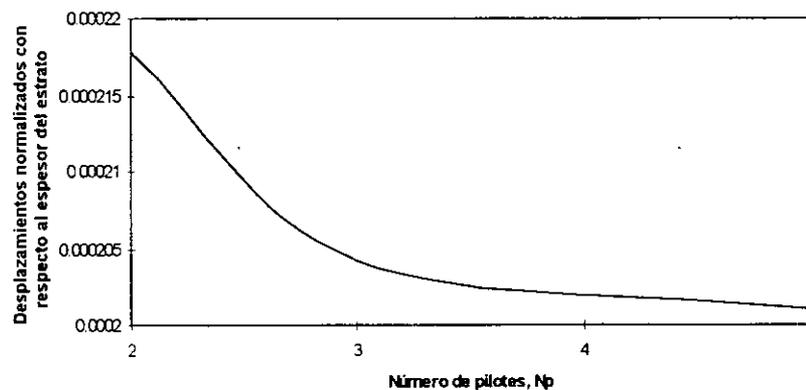
La influencia del número de pilotes y la respuesta en la cabeza, respecto a la cual se normalizaron las curvas anteriores, se presentan en las gráficas de las figuras 5.37 a 5.38, para las relaciones de frecuencia de 0.25 y 4.

Relación entre el número de pilotes,  $N_p$  y el desplazamiento normalizado de la cabeza del pilote para una relación de frecuencias de 0.25



(a)

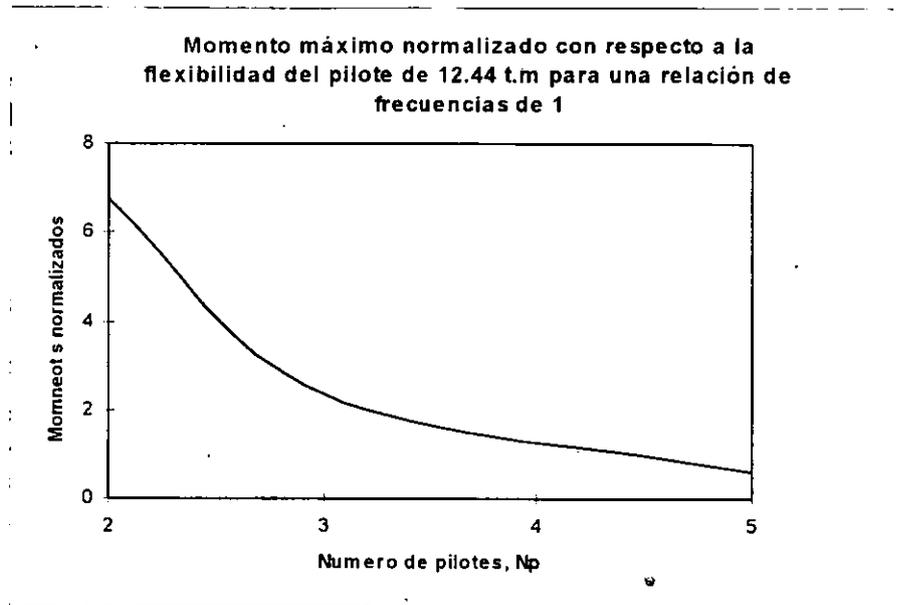
Relación entre el número de pilotes,  $N_p$  y el desplazamiento de la cabeza del pilote normalizado para una relación de frecuencias de 4



(b)

Fig. 5.37 Variación del momento máximo en los pilotes con el número de pilotes para una relación de frecuencias de (a) 0.25, (b) 4

Puede observarse que a medida que se aumenta el número de pilotes el desplazamiento normalizado tiende a disminuir, lo que es entendible del hecho de que la fuerza trasmite a los pilotes interiores disminuye proporcionalmente al número de espacios de suelo entre pilotes. Para los casos anteriores se mantuvo constante el factor de inercia de  $100000 \frac{t \cdot s^2}{m}$ .



*Fig. 5.38 Comparaciones entre los diagramas de momentos obtenidos con el programa RSSSPNL y los del modelo simplificado para diferentes radios de pilote*

El momento adimensional proporcionado por la ecuación (34), se adecua en función del número de pilotes con los valores obtenidos en la gráfica de la figura 5.38, los cuales están normalizados para una flexibilidad de pilote de 12.44t.m que corresponde al valor ya usado en el caso de un pilote aislado.

## 6 CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se planteó un modelo aproximado de análisis de la respuesta dinámica de líneas de pilotes ante ondas SH desplazándose verticalmente.

El procedimiento propuesto se basa en la integración simultánea paso a paso de las ecuaciones diferenciales obtenidas del análisis de cada uno de los cuatro subsistemas que conforman al sistema completo, a saber el sistema suelo-pilote, pilote-suelo-pilote, el subestructura-estructura y el campo libre. El comportamiento del suelo es representado por el de impedancias dinámicas tipo Winkler y elementos de inercia.

La conceptualización anterior nos permitió analizar algunos de los parámetros que influyen en la respuesta dinámica de cimentaciones piloteadas tomados en cuenta explícitamente en el modelo (ver capítulo 3, Planteamiento del modelo propuesto)

De las simulaciones efectuadas en esta tesis se estuvo en condiciones de concluir lo siguiente:

### **a) De los parámetros que influyen en la respuesta de cimentaciones piloteadas:**

La respuesta del sistema suelo-pilote disminuye y los puntos de inflexión aumentan, cuando la relación de frecuencias se incrementa. Esto es entendible porque la frecuencia de la excitación se aleja de la fundamental.

La variación del diámetro del pilote produce solo un cambio directamente proporcional en la rigidez global del sistema e inversamente proporcional a la interacción de pilote a pilote, lo que presumiblemente se deba a una menor generación de ondas cilíndricas a partir del fuste del pilote que interactúan con el contiguo ocasionado por la pérdida de flexibilidad.

La variación de la profundidad de desplante se traduce en una variación en la flexibilidad del pilote, sin embargo, el comportamiento del sistema estuvo marcado significativamente por la

respuesta del campo lejano. Esto es, el pilote siguió al suelo de una manera muy clara para todas las profundidades de desplante propuestas, lo que se debió seguramente a la mayor rigidez relativa del suelo con respecto al pilote.

La influencia de la inercia del suelo sobre la respuesta del pilote sólo es importante cuando se generasen fuertes empujes del suelo durante el evento dinámico, lo que generalmente aparece para bajos valores de la rigidez del estrato en cuestión, o cuando se desarrolla licuación o pérdida súbita de rigidez en arcillas de alta sensibilidad, sin embargo, de los análisis efectuados en éste tesis, se concluye que no es un parámetro significativo ya que en los casos citados sería más relevante el efecto de flexión de segundo orden debido al pandeo generado por el desconfinamiento provocado por el decremento en la rigidez del suelo que rodea al pilote.

En cuanto al número de pilotes se observó que conforme este crecía la respuesta decrecía. No obstante, debido a la forma en que se planteó el modelo para hacerlo soluble en el dominio del tiempo, el efecto de interacción entre líneas de pilotes provocado por la generación de ondas cilíndricas, su reflexión y difracción con el pilote contiguo no pudo ser examinado de forma clara, ya que se consideró que se podía definir simplemente variando la rigidez del suelo entre ellos. Aquí pudiera mejorarse el modelo, planteando funciones de atenuación de pilote a pilote más apropiadas.

El efecto más relevante producido por la estratificación fue el de la aparición de curvaturas importantes en la deformada del pilote a las profundidades en donde se presentaban los cambios en la velocidad de cortante, pudiéndose observar que el pilote tiende a seguir los movimientos del estrato en función de la rigidez de la capa.

#### **b) Del modelo propuesto:**

El comportamiento de los sistemas suelo-pilote puede ser simulado con el modelo propuesto el cual ofrece las ventajas de aceptar comportamiento no-lineal tanto del suelo de campo cercano como lejano, la dependencia de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento a la frecuencia y los efectos de degradación de rigidez y resistencia del suelo por carga dinámica.

El modelo simplificado propuesto no ajusta eficientemente los resultados obtenidos con el programa de computo para relaciones de frecuencia,  $R = f_c/f_d$ , altos. Pero lo anterior carece de importancia ya que a medida que la frecuencia de la excitación crece sobre la natural del depósito, la magnitud de los desplazamientos y momentos disminuye.

Aunque los efectos inerciales del suelo de campo cercano pueden ser tomados en cuenta mediante el modelo propuesto, el efecto de interacción entre pilotes no puede analizarse claramente ya que esta en función de la rigidez asignada al suelo entre pilotes. Sin embargo puede proponerse una ley de atenuación de pilote a pilote para subsanar este problema y mejorar los resultados.

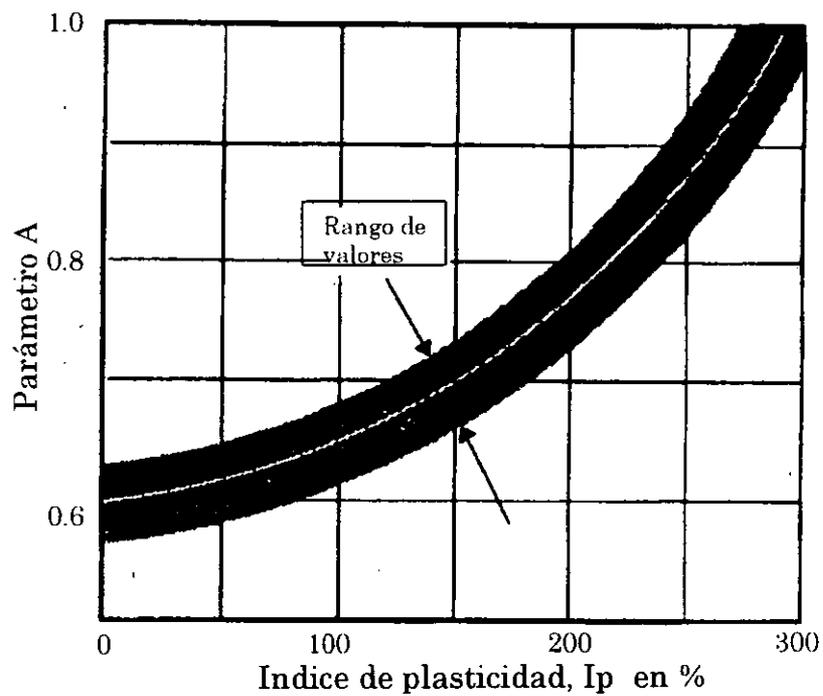
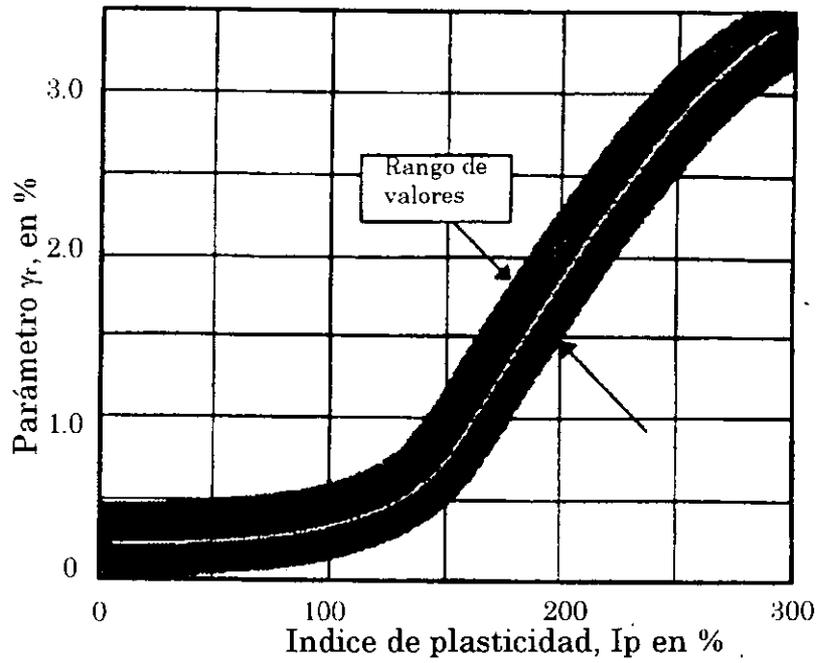
La manera que se propone para simular la interacción entre el suelo, la cimentación y la superestructura permite tomar en cuenta los fenómenos no lineales en el suelo de campo cercano. El modelo es aproximado y deberá calibrarse con datos de registros reales provenientes de estructuras instrumentadas para poder aceptarlo plenamente o descartarlo.

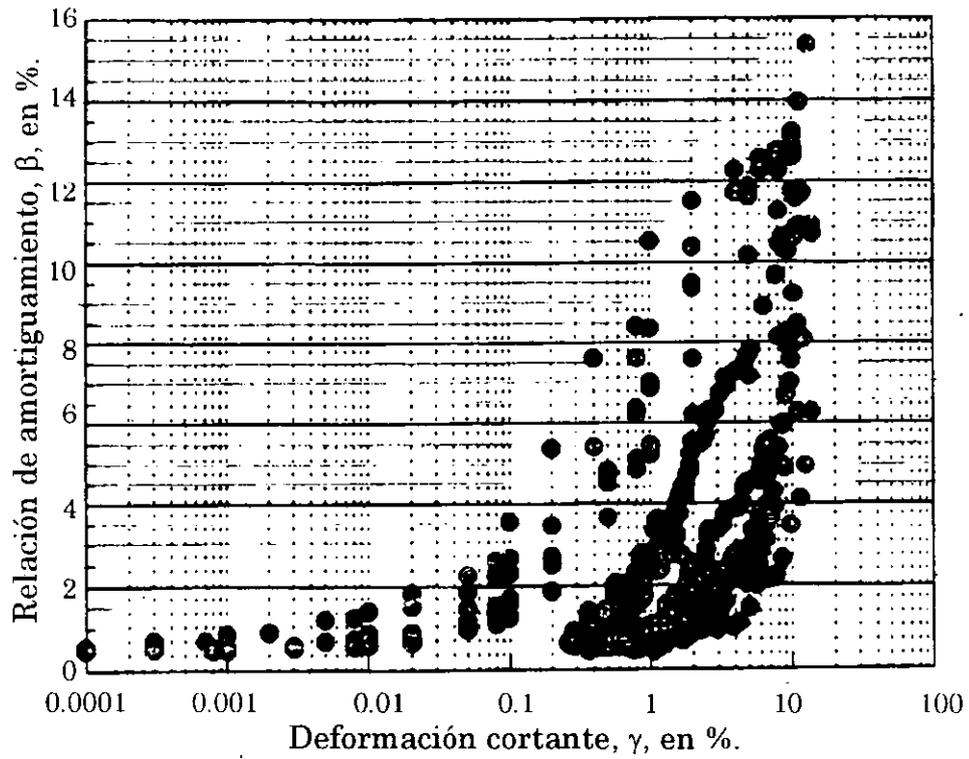
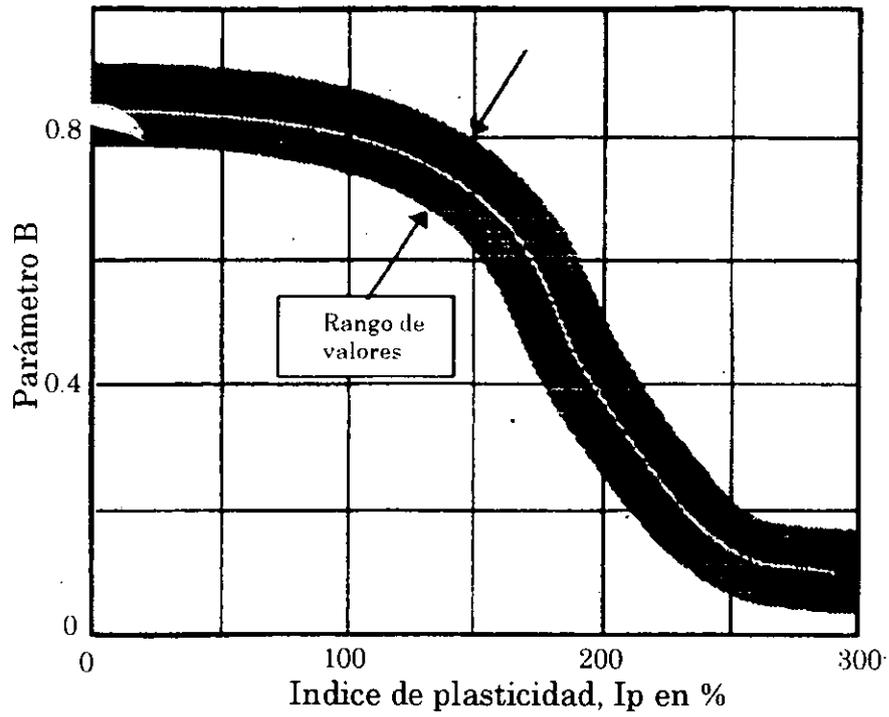
La manera en que se simula el comportamiento no- lineal del suelo que involucra curvas p-y, también debe corroborarse con medición de campo en estructuras reales o en la observación del comportamiento de modelos instrumentados ya que en esta tesis sólo se compararon resultados con otros métodos analíticos.

El modelo fue planteado para analizar líneas de pilotes, pero existen efectos de interacción tridimensional que también deben tomarse en cuenta.

# ANEXO

Curvas para obtener los parámetros del modelo p-y utilizado en los análisis





## Referencias

1. J. M. Mayoral, (1996). "Respuesta Sísmica de Cimentaciones Piloteadas. Un nuevo método de análisis". Tesis de Licenciatura. 1996.
2. B. Schabel, J. Lysmer y B. Seed , (1972). "SHAKE, A Computer Program For Earthquake Analysis of Horizontally Layered Sites" , Earthquake Engineering Research Center, December. College of Engineering University of California at Berkeley.
3. M. P. Romo, (1992). "Efecto de la Interacción Dinámica Suelo-Estructura en el Edificio PCC del Metro", XVI Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, Zacatecas 92, Vol. 1, "Casos Historia en Mecánica de Suelos", SMMS.
4. G. Gazetas, K. Fan y N. Makris, (1992). "Seismic Pile-Group-Structure Interaction", Geotechnical Special Publication No 34, "Piles Under Dynamic Loads" ,ASCE.
5. W. D. Liam Finn y W. Blair Golh, (1992). "Response of Model Pile Groups to Strong Shaking", Geotechnical Special Publication No 34, "Piles Under Dynamic Loads", ASCE.
6. T. Nogami, Z. Jian-Xiong y I. Takayoshi, (1992). "First and Second Order Dynamic Subgrade Models For Soil Pile Interaction Analysis", Geotechnical Special Publication No 34, "Piles Under Dynamic Loads", ASCE.
7. R. Flores-Berrones y R. Whitman, (1982). "Seismic Response of End Bearing Piles", Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 108 (GT4), 554.
8. C. Desai y C. Kuppusamy, (1968). "User's Manual and Background for a Computer Code for Axially and Laterally Retaining Walls", Department of Civil Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University Blacksburg, Virginia 24061.
9. N. Makris, G. Gazetas y E. Delis (1996) "Dynamic Soil-Pile-Foundation-Structure Interaction: Records and Predictions" Geotechnique, Volume XLVI, Number 1, March.

10. M. P. Romo y E. Ovando, (1994). "Curvas p-y Dinámicas para el Análisis de Interacción Sísmica Pilote-Suelo", Informe de trabajo publicación interna del Instituto de Ingeniería de la U.N.A.M.
11. E. Wilson y A. Habibullah (1989), "Structural Analysis Program-SAP90", Berkeley California, 94704 USA
12. W. R. Sullivan, L.C. Reese y W. Fenske, (1979) "Unified Method for Analysis of Laterally Loaded Piles in Clay", Proceedings of a conference organized by The Institution of Civil Engineers and held in London, 22-23 May 1979.
13. F. E. Toolan y M. R. Horsnell, (1979) "Analysis of the Load-Deflection Behavior of Offshore Piles and Pile Groups", Proceedings of a Conference Organized by The Institution of Civil Engineers and held in London, 22-23 May 1979.
14. M. Novak, MASCE y M. Sheta., (1980) "Approximate Approach to Contact Effects of Piles", Proceedings of a sessions sponsored by the Geotechnical Engineering Division at the ASCE National Convention- October 30, 1980, Dynamic Response of Pile Foundations: Analytical Aspects".
15. D. J. Dowrick. (1979). "Diseño de Estructuras Resistentes a Sismos", Editorial LIMUSA.
16. J. E. Luco y R. A. Westmann, (Oct. 1971). "Dynamic Response of Circular Footings; Journal Engineering Mechanics and Foundations Division, ASCE, 97 No, EM, 1381-1391.
17. A. S. Veletsos y Y. T. Wei (Sep. 1971) "Lateral and Rocking Vibration of Footings", Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 97, No. SM9, sept.1971, 1227-1248.
18. J. M. Rosset, (1980) "Stiffness and Damping Coefficients of Foundations", Proceedings of a session sponsored by Geotechnical Engineering Division at the ASCE National Convention October 30, "Dynamic Response of Pile Foundations: Analytical Aspects".
19. B. Klaus-Jorgen y E. L. Wilson, (1973) "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Part III.8. Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey.
20. H. Matlock y I. Lam (1980) "Design of Pile Foundations", International Symposium on Marine Soil Mechanics, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, A. C., Volumen 2, México.

21. A. M. Kaynia y E. Kausel (1982). "Dynamics Stiffness and Seismic Response of Pile Groups", Res. Rep. R82-03, MIT, Cambridge, M A.
22. F. Sanchez-Salinero (1983). "Dynamic Stiffness of Pile Groups; Approximate Solutions", Geotechnical Engineering Report GR8-5, Univ. Texas, Austin.
23. M. Paz., (1977). "Structural Dynamics. Theory and Computation", Part III. Chapter 14. Van Nostrand Reinhold. New York.
24. M. P. Romo (1995), "Clay Behavior, Ground Response and Soil-Structure Interaction: Studies in Mexico City", Third International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, St. Louis Missouri, (USA).
25. J. S. Przemieniecki., (1968) "Theory of Matrix Structural Analysis". Chapter 5. McGraw-hill Book Company.
26. W. Clough y J. Penzien, (1969). "Dynamics of Structures", Second Edition. Part II, Chapter 9, 10 and 11 McGraw-Hill.
27. E. Rosenblueth y N. M. Newmark, (1968). "Fundamentos de Ingeniería Sísmica", Capítulo 5. Editorial Diana. Mexico.
28. J. A. Davies, (1980). "The Finite Element Method, A First Approach", Chapter 3 and 4, Clarendon Press. Oxford.
29. L. Meirovitch, (1975). "Elements of Vibration Analysis"; Chapter 2, 3 and 4 Mc. Graw Hill. Book Company.
30. G. Gazetas y R. Dobry (1984), "Simple Radiation Damping Model for Piles and Footings", Journal of the Eng. Mech. Division, ASCE, Vol. 110, No. EM6.
31. F. Richard, E. Woods y R. Hall (1970), "Vibrations of Soils and Foundations", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
32. L. Zeevaert, (1982), "Foundation Engineering Subsoil Conditions", 2<sup>a</sup>. Edition, Van Nostrand Reinhold Co, New York.
33. R. B. Randall y B. Tech., B. A., "Frequency Analysis", September 1987, Brüel and Kjaer.

34. N. Makris y G. Gazetas, (1993) "Displacement Phase Differences in Harmonically Oscillating Pile", *Geotechnique*, Volume XLIII, Number 1, March.
35. A. M. Kaynia, (1982), "Dynamic Stiffness and Seismic Response of Pile Groups", MIT, Publication No R82-03, Order No 718, sponsored by the National Science Foundation Division. Grant PFR 79-02989.
36. R. Dobry y G. Gazetas (1988), "Simple Method for Dynamic Stiffness and Damping of Floating and Pile Groups", *Geotechnique*, Volume 38, Number 38, Number 4.
37. A. K. Chopra (1995) "Dynamics of Structures", Part 1, Prentice-Hall, Inc.
38. W. C. Hurty y F. R. Moshier (1964) "Dynamics of Structures", Prentice-Hall, Inc.
39. R. L. Sogge, (1981), "Laterally Loaded Pile Design", *M. ASCE, September Journal of the Geotechnical Engineering Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers.*
40. M. Novak, (1980) "Soil-Pile Interaction Under Dynamic Loads", *Numerical Methods in Offshore Piling. ICE, London, 1980, 59-80.*
41. H. G. Poulos, MASCE, (1980), "An Approach for the Analysis of Offshore Pile Groups", *Numerical Methods in Offshore Piling. ICE, London, 1980, 59-80.*