UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CALCULO ESTOCASTICO Y VALUACION DE OPCIONES CON EL MODELO DE BLACK - SCHOLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

ROSA ISELA GUERRERO VAZQUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MA. ASUNCION BEGOÑA FERNANDEZ FERNANDEZ.

MEXICO, D. F. 1998.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVENMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Cálculo Estocástico y Valuación de Opciones con el Modelo de Black-Sholes"

realizado por Rosa Isela Guerrero Vázquez

con número de cuenta 8939789-7 , pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dra. Ma. Asunción Begoña Fernández Fernández	Begoña Fernández
Propietario	Mat. Luis Alberto Briseño Aguirre	
Propietario	Dr. Manuel Galán Medina	
Suplente	M. en C. Beatriz Eugenia Rodríguez Fernández	Rodríguez Fdz.
Suplente	Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora	

M. en A.P. Ma. del Pilar Alonso Reyes
Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A todos aquellos que de alguna manera han sido mi inspiración,

gracias.

Contenido

Introducción **1**

1 Opciones **3**

1.1 Introducción 3

1.2 Opciones 4

1.3 La Evolución de los Precios 6

1.4 La Noción de Arbitraje 6

1.5 Valuación 9

1.6 El Modelo Discreto de las Opciones Europeas 12

1.7 Estrategias Autofinanciables 14

1.8 Viabilidad del Mercado 15

1.9 Completez del Mercado 17

1.10 Introducción al Modelo Continuo de la Opciones Europeas 21

2 Movimiento Browniano e Integral Estocástica **24**

2.1 Introducción 24

2.2 Procesos Estocásticos Continuos y Movimiento Browniano 25

2.3 Integral Estocástica 30

2.4 Cálculo de Itô 35

2.5 Ejemplos de la utilización de la Fórmula de Itô 37

2.6 Fórmula de Integración por partes 40

3 **Ecuaciones Diferenciales Estocásticas** 45

3.1 Introducción 45

3.2 Ecuaciones Diferenciales Estocásticas 45

3.3 *El proceso de Ornstein - Ulhenbeck* 54

4 **Modelo de Black y Scholes** 58

4.1 Introducción 58

4.2 La Evolución de los Precios 59

4.3 Estrategias Autofinanciables 63

4.4 Arbitraje o Cambio de Probabilidad 66

4.5 Completez 70

4.6 Valuación 79

4.7 Cobertura de calls y puts 86

Conlusiones 90

A **Análisis Matemático** 91

B **Esperanza Condicional** 94

B.1 Definición de la Esperanza Condicional dada una σ-álgebra 94

B.2 Propiedades de Esperanza Condicional dada una σ-álgebra 95

C **Martingalas Continuas** 105

C.1 Tiempos de paro 106

D **Teorema de Girsanov** 108

D.1 Teorema de Girsanov 109

D.2 Teorema de Representación de Martingalas 115

Introducción

El presente trabajo aplica el cálculo estocástico en finanzas, *en el caso particular de un* instrumento llamado opción, este instrumento permite cubrirse ante fluctuaciones en los precios de los activos. Una opción no es más que un contrato que otorga el derecho pero no la obligación de comprar (en el caso de una opción tipo call) o vender (en el caso de una opción tipo put) *un activo o bien subyacente* bajo ciertas condiciones, este bien subyacente bien puede ser una acción, una divisa, una tasa de interés, etc., y existen distintas clasificaciones de opciones de acuerdo a sus características. Por ejemplo, el emisor de una opción de venta (put) se la vende a alguien que puede o no ejercer el derecho de venderle una cantidad fija de divisas a un precio fijo en una fecha fija (opción europea), entonces el tenedor ejercerá la opción cuando le este vendiendo más caro al emisor que en el mercado, obteniendo así una ganancia mientras que el emisor tendrá una pérdida.

Serán analizados ambos puntos de vista, el del emisor y el del tenedor de una opción europea lo cual llevará a los dos problemas básicos: la valuación y la cobertura. La valuación consiste en asignarle precio al instrumento en cualquier momento del tiempo y la cobertura consiste en mostrar como el emisor se puede proteger de tal manera que no pierda, cuando sea posible cubrirse se hablará de que el mercado es completo.

Para resolver estos problemas se requerirá que no exista oportunidad de arbitraje, es decir, que sea imposible obtener dinero sin dinero, dicho de otra manera, que sea imposible obtener dinero sin tomar riesgos, por lo cual, se requerirá un modelo de precios que cumpla con este supuesto. Se considerará entonces un modelo de precios conocido como el Modelo de Black y Scholes, el cual es un modelo de precios continuo y cumple el supuesto de la ausencia de oportunidad de arbitraje.

En particular, este supuesto se traduce de la siguiente manera, el emisor debe ser capaz de construir con el dinero obtenido por la prima un portafolio cuyo valor a la fecha de ejercicio sea igual a el valor esperado de su pérdida (recuérdese que la pérdida del emisor es la ganancia del tenedor), esto es, debe ser capaz de simular con un portafolio su pérdida, de tal manera que se cubra solamente, dicho de otra manera, que con ese portafolio no gane ni pierda, esto porque el comprador de la opción querrá un precio justo. Entonces, este supuesto de ausencia de oportunidad de arbitraje tiene que ver con la equidad del juego, de aquí viene la noción de martingala. Hay que mencionar que ese valor esperado de la pérdida no será calculado respecto a la probabilidad inicial de los precios, sino es respecto a una nueva probabilidad que hace que el valor presente de los precios sea una martingala, con la cual el valor presente del portafolio será martingala.

Fisher Black y Myron Scholes [21] desarrollaron su modelo a principios de los 70's con el fin de resolver los problemas de valuación y cobertura de una opción europea sobre una acción libre de dividendos.

El Modelo de Black y Scholes se desarrollará en el capítulo 4 de este trabajo, pero como preparación para este modelo de precios continuo se hace una breve reseña en el capítulo 1 de lo que pasa cuando la evolución de precios se hace en un mercado discreto. Hay que resaltar que las técnicas utilizadas en el caso continuo son más delicadas que las utilizadas en el caso discreto. Estas técnicas de cálculo estocástico son el tema de los capítulos 2 y 3.

El problema de la cobertura se va a resolver a través de un portafolio de inversión. Un *portafolio de inversión estará compuesto por dos activos*, uno que es un activo de rendimiento certero (una inversión a plazo fijo, un bono, etc.) y otro que es el activo con riesgo donde el rendimiento es aleatorio (una divisa, una acción, una tasa de interés, etc.) y el manejo del portafolio se hará de tal manera que no caiga en posición deudora y que no exista aportación ni retiro de fondos, esto conducirá a la definición de estrategias autofinanciables, pero bajo un modelo de precios continuo esta definición llevará a la noción de integral estocástica (tema del capítulo 2). En el capítulo 3 se abordarán las ecuaciones diferenciales estocásticas, ya que, el mismo modelo de precios de Black y Scholes puede ser visto también como una ecuación diferencial estocástica.

Capítulo 1

Opciones

1.1 Introducción

Las fluctuaciones en los precios de los activos motivan el surgimiento de un instrumento financiero llamado opción.

En este capítulo se definen los diversos tipos de opciones que existen aunque se pondrá la mayor atención en las opciones denominadas como europeas.

Se mostrará como surgen los dos problemas principales, el problema de valuación y el problema de la cobertura de la opción, ambos serán resueltos en este trabajo bajo las suposiciones de continuidad en los precios, pero en este capítulo se presentará como se resuelven estos problemas en el caso discreto con el fin de aclarar ideas y aportar intuición para el caso continuo, por lo cual no se incluirán las demostraciones formales de los teoremas y proposiciones, éstas se pueden consultar en Lamberton [21].

Se hará énfasis en el supuesto de ausencia de oportunidad de arbitraje, es decir, se enfatizará que no es posible obtener dinero sin dinero, esto en la parte de viabilidad del mercado y para afirmar ideas se presentará a través de ejemplos, en uno de ellos se mostrará como aparece la noción de martingala pero no bajo la probabilidad inicial sino bajo una probabilidad equivalente a la inicial. En la parte de completez del mercado se hablará un poco más de esa medida de probabilidad y como con la existencia de ella se pueden resolver ambos problemas.

También se mostrará que pasar del modelo discreto de precios al modelo continuo motiva el surgimiento de una nueva integral que no es como la integral normal de Lebesgue-Stieltjes sino que ésta será respecto a un proceso estocástico y por ello será denominada como integral estocástica.

1.2 Opciones

Es necesario, para entender el problema hacer las siguientes definiciones:

Definición 1.2.1 *Una Opción de Compra (Opción Call) es un contrato, que al que lo posee le da el derecho, más no la obligación, de comprar un activo o bien subyacente a un precio fijo y en un momento determinado.*

Definición 1.2.2 *Una Opción de Venta (Opción Put) es un contrato, que al que lo posee le da el derecho, más no la obligación, de vender un activo o bien subyacente a un precio fijo y en un momento determinado.*

La función principal de las opciones es proteger a su dueño de cambios bruscos en los precios de los activos. Entre los activos o bienes subyacentes se puede mencionar una acción, una tasa de interés, un bono, una divisa, etc..

Definición 1.2.3 *Se dirá que ejercer una opción es el acto de hacer la transacción. Es decir, si el que la posee usa la opción para comprar o en su caso para vender el bien subyacente, entonces se dice que se ejerce la Opción.*

Definición 1.2.4 *El Precio de Ejercicio es el precio del activo subyacente acordado en la Opción.*

Definición 1.2.5 *La Fecha de Ejercicio, es la fecha de vencimiento de la opción, esta fecha es especificada en el contrato.*

Existe una clasificación de las opciones de acuerdo al momento en que se pueden ejercer :

Definición 1.2.6 *Las Opciones Europeas son aquellas opciones que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de ejercicio (fecha de vencimiento).*

Definición 1.2.7 *Las Opciones Americanas son aquellas opciones que pueden ser ejercidas en cualquier momento antes de la fecha de ejercicio (fecha de vencimiento) o bien en esa misma fecha.*

Definición 1.2.8 *La Prima de una opción es el precio del contrato.*

Para afirmar las definiciones anteriores, considérese el caso de un Call Europeo (Opción de Compra Europea) con fecha de ejercicio T y con precio de ejercicio K. Si se denota S_t^1 al precio del activo subyacente al tiempo t, entonces en la fecha de ejercicio, el poseedor ejercerá la opción cuando esté comprando más barato que en el mercado, es decir, se ejercerá la opción si $S_T^1 \geq K$, entonces en este caso el tenedor de la opción tiene una ganancia de $S_T^1 - K$, y el emisor de la opción tiene una pérdida de $S_T^1 - K$.

En el caso de un Put Europeo (Opción de Venta Europea) con fecha de ejercicio T y con precio de ejercicio K, entonces el tenedor de la opción la ejercerá cuando por medio de ella esté vendiendo más caro que en el mercado, es decir, se ejercerá la opción si $S_T^1 \leq K$, entonces en este caso el tenedor de la opción tiene una ganancia de $K - S_T^1$, mientras que el emisor tendrá una pérdida de $K - S_T^1$.

En realidad, lo que se desea es saber cuanto cuesta una opción en cualquier momento t del tiempo, es decir, se desea evaluar en el instante t una riqueza $(S_T^1 - K)_+$ (caso de un call europeo) o bien $(K - S_T^1)_+$ (caso de un put europeo) disponible en el tiempo T. El problema radica en ¿cuál debe ser el precio justo de la opción para que sea justo para el tenedor y que con este dinero el emisor pueda cubrirse de una posible pérdida?. Este problema es conocido como el problema del "pricing" o valuación de la opción. Cabe señalar que en la fecha de ejercicio el precio justo del call europeo es $(S_T^1 - K)_+ = \max(S_T^1 - K, 0)$ y el precio justo del put europeo es $(K - S_T^1)_+ = \max(S_T^1 - K, 0)$.

Otro problema que surge es el de ¿ cómo el emisor de la opción debe cubrirse ante una posible pérdida ?, esto es, ¿ cómo puede producir con la prima una riqueza en el instante T igual a $(S_T^1 - K)_+$ (caso de un call europeo) o bien $(K - S_T^1)_+$ (caso de un put europeo) ?. Este otro problema es conocido como el problema de la cobertura.

1.3 La Evolución de los Precios

Hasta el momento no se ha hablado de como es la evolución de los precios del activo subyacente, lo ideal es *considerar* que el *mercado* es un *mercado continuo*, lo cual tiene sentido ya que los precios de los activos subyacentes más comunes varían casi instantáneamente.

Se denotará como $\{S_t^1\}_{0\leq t\leq T}$ el proceso de los precios del activo subyacente. En este trabajo se considerará que se trata de un mercado continuo, aunque para ir afianzando ideas se comenzará haciendo una reseña de lo que pasa en el caso discreto sin hacer las demostraciones correspondientes, ya que, el objetivo es inferir más claramente lo que pasará en el caso continuo.

Es importante señalar que el primer modelo que existió fue el continuo, del cual se obtuvo el modelo discreto.

1.4 La Noción de Arbitraje

Una de las hipótesis para resolver los dos problemas antes mencionados es la ausencia de oportunidad de arbitraje, es decir, que es imposible obtener ganancias sin tomar riesgos o dicho de otra manera, que es imposible obtener dinero sin dinero. Lo cual tiene sentido ya que en un mercado suficientemente grande cuando aparece la oportunidad de arbitraje desaparece con rapidez, normalmente en fracciones de segundo, debido a que al ser aprovechadas, el mercado reacciona ajustándose para desaparecer la posibilidad.

Ejemplo 1.4.1 *Supóngase un mercado discreto donde existe un solo activo con riesgo, donde S_n^1 denota el precio del activo con riesgo en el instante n (al final del período n), cuyo proceso de precios es tal que*

$$S_{n+1}^1 = \begin{cases} S_n^1(1+a) & \textit{con probabilidad } p \\ S_n^1(1+b) & \textit{con probabilidad } 1-p \end{cases} \qquad -1\leq a<b, \quad p>0, \quad 0\leq n\leq N$$

con S_0^1 (el precio del activo con riesgo al inicio del primer período) dado. Y también existe un solo activo sin riesgo cuyo proceso de precios es tal que

$$S_0^0 = 1, \qquad S_n^0 = (1+r)^n, \qquad \forall\, 0<n\leq N$$

este activo sin riesgo no es más que una inversión que paga una tasa de interés r por período.

Denótese ϕ_n^0 la cantidad de dinero invertida en el activo sin riesgo al inicio del período n y como ϕ_n^1 la cantidad invertida de activo con riesgo en unidad de medida al inicio del período n. Se entenderá que si $\phi_n^0 < 0$ será equivalente a pedir un préstamo de $|\phi_n^0|$ a una tasa de interés r por período y si $\phi_n^1 < 0$ será equivalente a deber $|\phi_n^1|$ unidades de activo con riesgo.

1. Supóngase que $r < a$, se demostrará en este caso que es posible hacer dinero sin dinero.

   Considérese que se utiliza la siguiente estrategia: al inicio del primer período se pide prestada una cantidad $S_0^1 > 0$ con la cual se compra una unidad de activo con riesgo, esto es

$$\phi_1^0 = -S_0^1, \quad \phi_1^1 = 1$$

   y se mantiene así hasta el final del período N, es decir,

$$\phi_n^0 = \phi_1^0 \text{ y } \phi_n^1 = \phi_1^1 \quad \forall\, 1 < n \leq N$$

   A el proceso $\{\phi_n^0, \phi_n^1\}_{n \geq 1}$ se le denominará estrategia de inversión, la cual da la composición de el portafolio en cada momento del tiempo. Y una vez que el portafolio está compuesto en cada momento del tiempo es posible calcular el valor en unidades monetarias de la inversión total del portafolio, este valor se denominará como el valor del portafolio. Más adelante se darán definiciones más formales de estos dos conceptos.

   Entonces, el valor del portafolio de *inversión al instante 0* (al *inicio del* primer período) es

$$\begin{aligned} V_0 &= \phi_1^0 S_0^0 + \phi_1^1 S_0^1 \\ &= -S_0^1 + S_0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Al final del período N se tiene que con una probabilidad positiva

$$S_N^1 \geq S_0^1 (1+a)^N \tag{1.1}$$

y el valor del portafolio es

$$\begin{aligned} V_N &= \phi_N^0 S_N^0 + \phi_N^1 S_N^1 \\ &= \phi_1^0 S_N^0 + \phi_1^1 S_N^1 \\ &\geq -S_0^1 (1+r)^N + S_0^1 (1+a)^N \qquad \text{por la ecuación (1.1)} \\ &> 0 \qquad r < a \end{aligned}$$

2. Supóngase que $r > b$, se demostrará que también en este caso es posible hacer dinero sin dinero.

   Considérese que se utiliza la siguiente estrategia: al inicio del primer período se vende una unidad de activo con riesgo a descubierto, es decir, el dinero que se obtiene de esta venta se invierte en el activo con riesgo, esto es

   $$\phi_1^0 = S_0^1, \quad \phi_1^1 = -1$$

   y se mantiene así hasta el final del período N, es decir,

   $$\phi_n^0 = \phi_1^0 \text{ y } \phi_n^1 = \phi_1^1 \quad \forall\, 1 < n \leq N$$

   Entonces, el valor del portafolio de inversión al instante 0 es

   $$\begin{aligned} V_0 &= \phi_1^0 S_0^0 + \phi_1^1 S_0^1 \\ &= S_0^1 - S_0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Al final del período N se sabe que con una probabilidad positiva

   $$S_N^1 \leq S_0^1 (1+b)^N \tag{1.2}$$

y el valor del portafolio es

$$
\begin{aligned}
V_N &= \phi_N^0 S_N^0 + \phi_N^1 S_N^1 \\
&= \phi_1^0 S_N^0 + \phi_1^1 S_N^1 \\
&\geq S_0^1(1+r)^N - S_0^1(1+b)^N \qquad \text{por la ecuación (1.2)} \\
&> 0 \qquad r > b
\end{aligned}
$$

En los casos 1 y 2 se ve como se puede hacer dinero sin dinero, esto es equivalente a que exista una estrategia tal que

$$V_0 = 0 \text{ y } V_N > 0$$

con probabilidad positiva.

1.5 Valuación

El problema de la valuación como se ha mencionado consiste en asignarle un precio justo a la opción, esto es que con el dinero de esa prima el emisor pueda construir una riqueza al menos igual a su posible perdida, recuérdese que en la fecha de ejercicio N la ganancia del tenedor es la pérdida del emisor ($(S_N^1 - K)_+$ en el caso de un call y por $(K - S_N^1)_+$ en el caso de un put). Por otra parte el comprador de la opción desea un precio justo, entonces lo primero que se ocurre es definir el precio de una opción al instante 0 como el valor esperado del valor presente de la ganancia del comprador en la fecha de ejercicio, esto es,

$$V_0 = \begin{cases} E\left[\frac{(S_N^1 - K)_+}{S_N^0}\right] & \text{caso de un call} \\ E\left[\frac{(K - S_N^1)_+}{S_N^0}\right] & \text{caso de un put} \end{cases} \tag{1.3}$$

A continuación se muestra como esa no es la decisión del todo correcta. El siguiente ejemplo proviene de Föllmer [10].

Ejemplo 1.5.1 *Considérese una opción de compra europea con fecha de ejercicio N el día de mañana ($N = 1$), donde el bien subyacente son 100 dólares. Sean $S_0^1 = 150$ pesos el precio de los 100 dólares al día de hoy y el precio de ejercicio $K = 150$.*

Supóngase que la evolución del precio de los 100 dólares es la siguiente,

$$S_N^1 = \begin{cases} 180, & \textit{con probabilidad } p \\ 90, & \textit{con probabilidad } 1-p \end{cases}, \quad p = \frac{1}{2}$$

Por simplificación supóngase que la tasa del activo sin riesgo en el período en cuestión es igual a cero, esto es $S_0^0 = S_N^0 = 1$.

Entonces,

$$\left(S_N^1 - K\right)_+ = \begin{cases} 30, & \text{con probabilidad } p \\ 0, & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}, \quad p = \frac{1}{2}$$

y de acuerdo con la ecuación (1.3) la prima a pagar sería :

$$\begin{aligned} V_0 &= E\left[\frac{(S_N^1 - K)_+}{S_N^0}\right] \\ &= p \cdot 30 \\ &= 15 \end{aligned} \tag{1.4}$$

En seguida se mostrará que ese no es un precio justo para la opción.

Supóngase que el día de hoy se vende la opción a un precio π, además el vendedor compra 33.33 dólares y pide prestados 30 pesos, esto es, el balance al día de hoy es

$$\pi - 33.33\frac{150}{100} + 30 = \pi - 20$$

El día de mañana hay dos posibilidades.

1. El dólar sube, entonces la opción se ejerce hay una pérdida de 30 pesos, además se venden los 33.33 dólares y se paga el préstamo con lo cual el balance del emisor en la fecha de ejercicio es
$$-30 + 33.33\frac{180}{100} - 30 = 0$$

2. El dólar baja, entonces la opción no se ejerce, además se venden los dólares y se paga el

préstamo con lo cual el balance del emisor en la fecha de ejercicio es

$$0 + 33.33\frac{90}{100} - 30 = 0$$

En ambos casos, el balance en la fecha de ejercicio es igual a cero, entonces para que el precio de la opción sea justo el balance al día de hoy debe ser también igual a cero, es decir

$$\pi - 20 = 0$$

con lo cual $\pi = 20$. Pero no coincide con el valor obtenido en la ecuación (1.4), esto debido a que con $p = \frac{1}{2}$ (S_0, S_1) no es una martingala.

Sea P^* una probabilidad bajo la cual (S_0^1, S_1^1) es una martingala (nótese que los precios actualizados son también martingala), entonces

$$150 = P^* [\text{el dólar suba}] \cdot 180 + (1 - P^* [\text{el dólar suba}]) \cdot 90$$

si y sólo si

$$P^* [\text{el dólar suba}] = \frac{2}{3}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} E^* \left[\frac{(S_N^1 - K)_+}{S_N^0} \right] &= \frac{2}{3} \cdot 30 \\ &= 20 \end{aligned}$$

y entonces este si sería un precio justo. ■

De acuerdo a este ejemplo, el precio estaría calculado como un valor esperado pero bajo una nueva probabilidad P^*, donde esa nueva probabilidad es equivalente a la probabilidad inicial P y los precios actualizados son martingala bajo la nueva probabilidad.

1.6 El Modelo Discreto de las Opciones Europeas

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad con Ω un conjunto finito, donde $\{\mathcal{F}_n\}_{0\leq n\leq N}$ es una filtración en $(\Omega, \mathcal{F})$ y N denotará la fecha de ejercicio de la opción europea, sobre este espacio se construye el modelo discreto.

La σ-álgebra $\mathcal{F}_n$ representará la información disponible hasta el instante n, en realidad es el conjunto de todos los eventos posibles hasta el instante n en términos del precio del activo subyacente. *Se supondrá que* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ *y* $\mathcal{F}_N = \mathcal{P}(\Omega)$ *y* $\forall\, \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) > 0$.

Se denotará como $\{S_n^1\}_{0\leq n\leq N}$ al proceso estocástico que toma valores en R^+ y adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{0\leq n\leq N}$, este es el proceso de los precios del activo con riesgo (activo subyacente), donde, S_n^1 es una variable aleatoria $\mathcal{F}_n$-medible que representará el precio de una unidad de activo con riesgo al instante n, tal que $S_n^1 > 0$ con S_0^1 una cantidad determinista (y $\mathcal{F}_0$-medible). Y se denominará a $S_0^0 = 1,\ S_n^0 = (1+r)^n\ ,\ r > 0,\ 1 \leq n \leq N$ el precio de una unidad de activo sin riesgo al instante n.

Como ya se ha explicado, el problema de la cobertura implica buscar la estrategia a seguir, de tal manera que el emisor se pueda cubrir, por lo tanto, se definirá entonces lo que se entenderá por estrategia.

Definición 1.6.1 *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $\{\mathcal{F}_n\}_{0\leq n\leq N}$ *una filtración, una estrategia de inversión es un proceso estocástico predecible* $\phi = \{\phi_n^0, \phi_n^1\}_{0<n\leq N}$ *con valores en* R^2. *Se dirá que un proceso* ϕ *es predecible si* ϕ_0^0 *y* ϕ_0^1 *son variables aleatorias* $\mathcal{F}_0$*-medibles y* $\forall\, n \geq 1$ ϕ_n^0 *y* ϕ_n^1 *son variables aleatorias* $\mathcal{F}_{n-1}$*-medibles.*

Es decir, una estrategia de inversión no es más que un proceso que representa las cantidades a invertir en cada uno de los activos, esto es ϕ_n^0 y ϕ_n^1 representan las cantidades invertidas en el n-ésimo período de activo sin riesgo y con riesgo respectivamente, es decir son las cantidades que mantiene el inversionista entre el tiempo $n-1$ y el tiempo n. Y la condición de predecibilidad es en el sentido de que el portafolio en el período n se constituye inmediatamente después de que se conoce S_{n-1} y se mantiene hasta observarse S_n.

Entonces,

$$\phi_n^0 S_{n-1}^0 + \phi_n^1 S_{n-1}^1$$

es el valor en unidades monetarias de la inversión total siguiendo la estrategia ϕ inmediatamente después de que ha sido establecido en el tiempo $n-1$ o bien se puede pensar que es el valor en unidades monetarias de la inversión total siguiendo la estrategia ϕ al inicio del período n. De esto surge la siguiente definición.

Definición 1.6.2 *El Valor de Mercado del Portafolio ϕ al instante $n \geq 1$ (al final del período n), está dado por*

$$V_n(\phi) = \phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1$$

Y el Valor de Mercado del Portafolio ϕ al instante 0, (al inicio del período 1) está dado por

$$V_0(\phi) = \phi_1^0 S_0^0 + \phi_1^1 S_0^1$$

De aquí que el Valor Actualizado del Portafolio es

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_n(\phi) &= \frac{1}{S_n^0} V_n, \qquad n \geq 0 \\ &= \frac{1}{S_n^0}\left(\phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1\right) \\ &= \phi_n^0 + \phi_n^1 \widetilde{S}_n^1, \qquad \widetilde{S}_n^1 = \frac{S_n^1}{S_n^0} \end{aligned}$$

el cual no es más que el Valor Presente del Portafolio.

Y se llamará a $\widetilde{S}_n^1$ el Precio Actualizado del activo con riesgo.

Obsérvese que si se denota a $G_n(\phi)$ el proceso de ganancias al tiempo n asociado con ϕ, se tiene que

$$G_n(\phi) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j^0 \left(S_j^0 - S_{j-1}^0\right) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j^1 \left(S_j^1 - S_{j-1}^1\right), \qquad n \geq 1 \quad \text{y} \quad G_0(\phi) = 0$$

el cual es un proceso estocástico adaptado a $\mathcal{F}_n$.

1.7 Estrategias Autofinanciables

Habrá que notar que una estrategia de inversión puede ser tal que después del tiempo 0 se vea incrementada con la adición de nuevos fondos o bien se permita el retiro de fondos para consumo.

El problema de la cobertura implica encontrar una estrategia tal que el emisor con la prima recibida al tiempo 0 se pueda cubrir sin necesidad de aportación o retiro de fondos, por lo cual sólo se considerarán estrategias que satisfagan esta propiedad las cuales se denominan Estrategias Autofinanciables.

Definición 1.7.1 *Una Estrategia $\phi = \{\phi_n^0, \phi_n^1\}_{0 \leq n \leq N}$ es Autofinanciable si*

$$\phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1 = \phi_{n+1}^0 S_n^0 + \phi_{n+1}^1 S_n^1 \qquad \forall\, 1 \leq n \leq N$$

Esto significa que al tiempo n una vez que se conocen los precios S_n^0 y S_n^1 el inversionista reajusta su portafolio y lo hace pasar de la composición (ϕ_n^0, ϕ_n^1) a $(\phi_{n+1}^0, \phi_{n+1}^1)$ reinvirtiendo la totalidad del valor del portafolio y sin utilizar recursos adicionales.

Hay que resaltar que las variaciones en el valor de un portafolio asociado a una estrategia ϕ autofinanciable dependen únicamente de las ganancias de la variación de los precios, esto es

$$V_n(\phi) - V_{n-1}(\phi) = \phi_n^0 \left(S_n^0 - S_{n-1}^0\right) + \phi_n^1 \left(S_n^1 - S_{n-1}^1\right) \quad \forall\, n \geq 1 \tag{1.5}$$

De aquí que con inducción y con un poco de álgebra, se tiene que para $0 \leq n \leq N$

$$\begin{aligned} V_n(\phi) &= V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j^0 \left(S_j^0 - S_{j-1}^0\right) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j^1 \left(S_j^1 - S_{j-1}^1\right) \\ &= V_0(\phi) + G_n(\phi) \end{aligned} \tag{1.6}$$

esto es que una estrategia es autofinanciable si y sólo si todos los cambios en el valor del portafolio se deben a las ganancias netas realizadas en las inversiones.

Por lo tanto,

$$\tilde{V}_n(\phi) = \frac{1}{S_n^0} V_n(\phi)$$

$$= V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j^1 \left(\tilde{S}_j^1 - \tilde{S}_{j-1}^1\right)$$

Esta última igualdad dice que el valor actualizado del portafolio asociado a una estrategia autofinanciable ϕ depende sólo del valor inicial del portafolio y de la inversión en el activo con riesgo.

1.8 Viabilidad del Mercado

Otra de las hipótesis que requiere este modelo discreto es que además de tratar con ϕ estrategia autofinanciable se pedirá que $V_n(\phi) \geq 0 \quad \forall\, 0 \leq n \leq N$. Es decir, se exige que el valor del portafolio en cualquier momento del tiempo no caiga en una posición deudora, aunque sí están permitidas las ventas a descubierto y los préstamos. A continuación se definen esas estrategias.

Definición 1.8.1 *Una Estrategia se dice que es Admisible si es autofinanciable y si* $V_n(\phi) \geq 0 \quad \forall\, 0 \leq n \leq N$.

Obsérvese que

$$\tilde{V}_n(\phi) = \frac{1}{(1+r)^n} V_n(\phi), \qquad r > -1$$

implica que

$$V_n(\phi) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \tilde{V}_n(\phi) \geq 0$$

Por lo tanto, una estrategia es admisible si es autofinanciable y si $\tilde{V}_n(\phi) \geq 0\, \forall\, 0 \leq n \leq N$.

Denótese Φ el conjunto de todas las estrategias admisibles.

Recuérdese que se requiere que no exista oportunidad de arbitraje y esta oportunidad existe cuando para $\phi \in \Phi$ se tenga que con probabilidad positiva

$$V_0(\phi) = 0 \;\Rightarrow\; V_N(\phi) > 0$$

Definición 1.8.2 *Se dirá que el Mercado es Viable si no existen estrategias de arbitraje.*

Entonces, un mercado viable es un mercado con ausencia de oportunidad de arbitraje.

Por el momento supóngase $\phi \in \Phi$ y que el proceso $\left\{\widetilde{S}_n^1\right\}_{0\leq n\leq N}$ de los precios actualizados del activo con riesgo es una martingala, entonces el proceso $\left\{\widetilde{V}_n\left(\phi\right)\right\}_{0\leq n\leq N}$ que es una transformada de martingala es también una martingala, por lo cual

$$\begin{aligned} E\left(\widetilde{V}_N\left(\phi\right)\right) &= E\left(\widetilde{V}_0\left(\phi\right)\right) \\ &= V_0\left(\phi\right) \end{aligned}$$

y como $V_n\left(\phi\right) \geq 0 \quad \forall\, 0 \leq n \leq N$, se tiene que

$$E\left(\widetilde{V}_N\left(\phi\right)\right) \geq 0 \Leftrightarrow E\left(V_N\left(\phi\right)\right) \geq 0$$

Por lo tanto, si $V_0\left(\phi\right) = 0$, entonces

$$E\left(\widetilde{V}_N\left(\phi\right)\right) = 0 \Rightarrow \widetilde{V}_N\left(\phi\right) = 0 \quad P\ c.s.$$

entonces

$$V_N\left(\phi\right) = 0 \quad P\ c.s.$$

pero es poco factible que los precios actualizados del activo con riesgo sean martingala.

Supóngase $\phi \in \Phi$ y supongase que $\exists\ P^*$ una probabilidad equivalente a P, tal que, el proceso $\left\{\widetilde{S}_n^1\right\}_{0\leq n\leq N}$ de los precios actualizados del activo con riesgo es una martingala bajo P^*. Entonces el proceso $\left\{\widetilde{V}_n\left(\phi\right)\right\}_{0\leq n\leq N}$ es una martingala bajo P^*, por lo cual

$$\begin{aligned} E^*\left(\widetilde{V}_N\left(\phi\right)\right) &= E^*\left(\widetilde{V}_0\left(\phi\right)\right) \\ &= V_0\left(\phi\right) \end{aligned}$$

y como $V_n\left(\phi\right) \geq 0 \quad \forall\, 0 \leq n \leq N$, se tiene que

$$E^*\left(\widetilde{V}_N\left(\phi\right)\right) \geq 0 \Leftrightarrow E^*\left(V_N\left(\phi\right)\right) \geq 0$$

Por lo tanto, si $V_0(\phi) = 0$, entonces

$$E^*\left(\tilde{V}_N(\phi)\right) = 0 \Rightarrow \tilde{V}_N(\phi) = 0 \quad P^* \; c.s.$$

entonces

$$V_N(\phi) = 0 \quad P^* \; c.s.$$

y como P^* es equivalente a P entonces

$$V_N(\phi) = 0 \quad P \; c.s.$$

Resumiendo, si $\exists\ P^*$ equivalente a P, bajo la cual los precios actualizados del activo con riesgo son martingala se tiene que

$$V_0(\phi) = 0 \Rightarrow V_N(\phi) = 0 \quad P \; c.s.$$

lo cual no es más que la condición para que no exista oportunidad de arbitraje.

Por lo cual, se buscará una probabilidad P^* equivalente a P bajo la cual los precios actualizados del activo con riesgo sean martingala, con esta probabilidad P^* se cumplirá la ausencia de oportunidad de arbitraje.

Surge entonces el siguiente teorema que asegura que el mercado sea viable:

Teorema 1.8.1 *El mercado es viable si y sólo si existe una probabilidad P^* equivalente a P, tal que, los precios actualizados del activo con riesgo son martingala bajo P^*.*

Este teorema es demostrado por Lamberton y Lapeyre [21].

Hasta el momento no se ha hablado de la unicidad de la probabilidad que hace que no exista oportunidad de arbitraje, aunque más adelante se darán condiciones para ella.

1.9 Completez del Mercado

A continuación se supondrá que en el modelo de precios hay ausencia de oportunidad de arbitraje, es decir, existe P^* equivalente a P bajo la cual los precios actualizados son martingala.

Ahora se resolverá el problema de la cobertura, es decir, se demostrará que existe una estrategia admisible, tal que, al seguirla el emisor se puede cubrir ante un posible pérdida en la fecha de ejercicio. Es decir, se busca $\phi \in \Phi$, tal que,

$$V_N(\phi) = \begin{cases} (S_N^1 - K)_+ & \text{caso de un call} \\ (K - S_N^1)_+ & \text{caso de un put} \end{cases}$$

Claramente $(S_N^1 - K)_+$ y $(K - S_N^1)_+$ son variables aleatorias no negativas y $\mathcal{F}_N$-medibles. Mejor aún, el problema será planteado más generalmente.

Definición 1.9.1 *Un Bien Contingente es una variable aleatoria h que toma valores en $R^+ \cup \{0\}$ y es $\mathcal{F}_N$-medible, donde h depende de los precios del activo con riesgo hasta el tiempo N.*

En el caso particular de las opciones europeas el bien contingente es tal que

$$h = \begin{cases} (S_N^1 - K)_+ & \text{caso de un call} \\ (K - S_N^1)_+ & \text{caso de un put} \end{cases}$$

y cabe recordar que representa la pérdida o ganancia del emisor en la fecha de ejercicio. Por lo tanto, el emisor únicamente con el dinero obtenido de la prima busca seguir una estrategia tal que en la fecha de vencimiento no pierda, es decir, busca seguir una estrategia tal que en la fecha de vencimiento cuente con una riqueza al menos igual a la pérdida, pero el comprador de la opción no querrá pagar de más o permitir que el emisor obtenga una ganancia, entonces considerando ambos intereses surge la siguiente definición.

Definición 1.9.2 *Un bien contingente es simulable si existe $\phi_h \in \Phi$, tal que,*

$$V_N(\phi_h) = h$$

y se dice que ϕ_h simula a h.

En este caso, al seguir la estrategia ϕ_h se genera h al tiempo N y $\pi = V_0(\phi)$ es el precio al tiempo 0 asociado con el bien contingente h.

En la teorías económicas se define lo que se conoce como un mercado completo, estos mercados son de particular interés para el emisor de una opción, pues en este tipo de mercado es posible construir una estrategia con la cual será posible producir una riqueza igual al valor del bien contingente, en general se tiene la siguiente definición.

Definición 1.9.3 *Un Mercado es Completo si todo bien contingente es simulable.*

Por un momento supóngase que el mercado es completo, entonces para cada $h \geq 0$ existe una estrategia $\phi_h \in \Phi$, tal que,

$$V_N(\phi_h) = h$$

esto si y sólo si

$$\widetilde{V}_N(\phi_h) = \frac{h}{S_N^0}$$

y también supóngase que existen Q_1 y Q_2 dos probabilidades equivalentes a P tal que los precios actualizados son una martingala, con lo cual $\widetilde{V}_n(\phi_h)$ es una martingala bajo las probabilidades Q_1 y Q_2, entonces

$$\begin{aligned} E_{Q_1}\left(\widetilde{V}_N(\phi_h)\right) &= E_{Q_1}\left(\widetilde{V}_0(\phi_h)\right) \\ &= V_0(\phi_h) \\ &= E_{Q_1}\left(\frac{h}{S_N^0}\right) \qquad \forall\, h \geq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E_{Q_2}\left(\widetilde{V}_N(\phi_h)\right) &= E_{Q_2}\left(\widetilde{V}_0(\phi_h)\right) \\ &= V_0(\phi_h) \\ &= E_{Q_2}\left(\frac{h}{S_N^0}\right) \qquad \forall\, h \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E_{Q_1}\left(\frac{h}{S_N^0}\right) = E_{Q_2}\left(\frac{h}{S_N^0}\right) \qquad \forall\, h \geq 0$$

si y sólo si

$$E_{Q_1}(h) = E_{Q_2}(h) \qquad \forall\, h \geq 0$$

con lo cual se concluye que $Q_1 = Q_2$.

Surge entonces el siguiente teorema.

Teorema 1.9.1 *Un mercado es completo si y sólo si existe una única probabilidad P^* equivalente a P bajo la cual los precios actualizados $\left\{\tilde{S}_n^1\right\}_{0\leq n\leq N}$ son martingala.*

Para su demostración puede consultarse [21].

Sea h un bien contingente y supóngase que existe una única probabilidad P^* equivalente a P bajo la cual los precios actualizados son martingala, entonces, existe ϕ_h admisible, tal que

$$V_N(\phi_h) = h$$

de aquí que

$$\begin{aligned} E^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right) &= E^*\left(\tilde{V}_N(\phi_h)\right) \\ &= V_0(\phi_h) \end{aligned}$$

esta última expresión nos da idea de la fórmula de valuación de la opción, es decir, la prima a pagar por una opción en el instante 0 será el valor inicial de una estrategia que simula a $(S_N^1 - K)_+$ o bien $(K - S_N^1)_+$ (caso de un call o un put respectivamente).

Entonces, el emisor de la opción con una prima de $E^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$ se puede cubrir perfectamente siguiendo cualquiera de las estrategias admisibles de cobertura.

En cualquier otro momento n del tiempo, es natural definir como la prima a el valor del portafolio asociado con ϕ_h, es decir,

$$\begin{aligned} V_n(\phi_h) &= S_n^0 E^*\left(\frac{h}{S_N^0}\middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &= \frac{1}{S_{N-n}^1} E^*(h|\mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

esto debido a que,

$$\tilde{V}_n(\phi_h) = E^*\left(\tilde{V}_N(\phi_h)\middle| \mathcal{F}_n\right)$$

$$= E^{*}\left(\frac{h}{S_N^0}\middle|\mathcal{F}_n\right)$$

La pregunta que surge entonces es ¿si es única la estrategia de cobertura?.

Obsérvese que la prima sólo depende del Bien Contingente, no de cualquiera de las estrategias admisibles que simulan a h.

1.10 Introducción al Modelo Continuo de la Opciones Europeas

Pasar al caso continuo no es tan sencillo, por lo cual sólo se presentarán los problemas que surgen de la traducción del discreto al continuo.

En el caso del modelo continuo, la evolución de los precios será una trayectoria continua, en *términos de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *será un* espacio de probabilidad con Ω un conjunto no numerable, donde $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ es una filtración en $(\Omega, \mathcal{F})$ y T denotará la fecha de ejercicio de la opción europea.

La σ-álgebra $\mathcal{F}_t$ representará la *información disponible hasta el instante t, en* realidad es el conjunto de todos los eventos posibles hasta el instante t en términos del precio del activo subyacente.

Se denotará como $\{S_t^1\}_{0\leq t\leq T}$ al proceso estocástico que toma valores en R^+ y adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$, este es el proceso de los precios del activo con riesgo (activo subyacente), donde, S_t^1 es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible que representará el precio de una unidad de activo con riesgo al instante t, tal que $S_t^1 > 0$ con S_0^1 una cantidad determinista (y $\mathcal{F}_0$-medible). Se denominará a $S_0^0 = 1$, $S_t^0 = e^{rt}$, $r > 0$, $1 \leq t \leq T$ el precio de una unidad de activo sin riesgo al instante t.

Las estrategias en el caso continuo serán representadas por un proceso estocástico adaptado $\phi = \{H_t^0, H_t^1\}_{0<t\leq T}$ *con valores en* R^2 y seguirán representando lo mismo que en el caso discreto, es decir, es un proceso que representa las cantidades a invertir en cada uno de los activos, esto es H_t^0 y H_t^1 representan las cantidades invertidas en el instante t de activo sin riesgo y con riesgo respectivamente.

Entonces, el valor en unidades monetarias de la inversión total siguiendo la estrategia ϕ al instante t, está dado por

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t^1 S_t^1$$

y se denominará también el valor del portafolio.

Una vez más serán de interés las estrategias autofinanciables, aquellas con las que el emisor con la prima recibida al tiempo 0 se pueda cubrir sin necesidad de aportación o retiros de fondos, recuérdese que en el caso discreto estas se caracterizaban porque el valor del portafolio dependía únicamente de las ganancias por la variación de los precios, es decir

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j^0 \left(S_j^0 - S_{j-1}^0\right) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j^1 \left(S_j^1 - S_{j-1}^1\right)$$

La traducción de esta propiedad en el caso continuo llevará a la siguiente integral

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u^0 \, dS_u^0 + \int_0^t H_u^1 \, dS_u^1$$

donde la primera integral

$$\int_0^t H_u^0 \, dS_u^0 = \int_0^t H_u^0 r e^{rt} dt$$

es una integral en el sentido usual.

Pero a la integral

$$\int_0^t H_u^1 \, dS_u^1$$

habrá que darle algún sentido ya que es respecto a un proceso estocástico, el proceso de los precios del activo con riesgo. Esta integral no será como las de Lebesgue-Stieltjes.

Black y Scholes proponen un modelo de precios en términos de un proceso estocástico $\{B_t\}_{t\geq 0}$ que es un Movimiento Browniano, sin entrar en detalles el modelo de precios de Black y Scholes está dado por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t^1 = S_t^1 \left(\mu dt + \sigma dB_t\right)$$

donde, μ y σ dos constantes. De aquí que la integral que interesa se transforma en

$$\int_0^t H_u^1 \, dS_u^1 = \int_0^t H_u^1 S_u^1 \mu \, du + \int_0^t H_u^1 S_u^1 \sigma \, dB_u$$

Por lo tanto, la integral de interés será una integral respecto a un Movimiento Browniano. Esta integral es diferente a la de Lebesgue-Stieltjes ya que un Movimiento Browniano es un proceso cuyas *trayectorias no son diferenciables* P *c.s.*, por lo cual, habrá que darle algún sentido a estas integrales que se denominarán Integrales Estocásticas.

El Movimiento Browniano y las Integrales Estocásticas serán el tema del siguiente capítulo.

Capítulo 2

Movimiento Browniano e Integral Estocástica

2.1 Introducción

En el presente capítulo se definirá lo que son los procesos estocásticos continuos denominados como Movimiento Browniano, se mostrarán sus propiedades y se presentarán proposiciones que serán de utilidad para los fines de este trabajo.

Se construirá también la integral estocástica respecto a un Movimiento Browniano en principio para procesos estocásticos conocidos como elementales y después se extenderá la definición de integral estocástica respecto a un Movimiento Browniano para procesos estocásticos adaptados y en particular para aquellos cuya integral estocástica es una martingala. Algunas demostraciones por su complejidad no serán presentadas.

Una vez definida la integral estocástica se presentarán sus propiedades y los procesos de Itô los cuales son procesos estocásticos que son en particular función de una integral estocástica. Se verá el manejo de los procesos de Itô, mediante la fórmula de Itô con el fin de aplicarse a el modelo de precios de Black y Scholes.

Se demostrará también la fórmula de integración por partes que se utilizará para el manejo de las estrategias autofinanciables en el modelo de precios de Black y Scholes.

2.2 Procesos Estocásticos Continuos y Movimiento Browniano

Definición 2.2.1 *Un Proceso Estocástico Continuo $\{X_t\}_{t\in R^+}$ es una familia de variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que toma valores en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$, conocido como espacio de estados.*

Se puede pensar que el índice t representa el tiempo y a el proceso pensarlo como una función aleatoria, esto es, para cada $\omega \in \Omega$ fijo, se tiene una función de R^+ en E, es decir, $t \mapsto X_t(\omega)$, conocida como la trayectoria del proceso asociada con ω.

Entonces, un proceso estocástico puede ser visto como una función $\mathcal{F}$-medible de $R^+ \times \Omega$ en E , es decir

$$\begin{aligned} X : \Omega \times R &\longrightarrow E \\ (\omega, t) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

En el caso de que se hable de un proceso estocástico continuo con valores reales se trata de una función $X : R^+ \times \Omega \longrightarrow R$, donde el espacio de estados es $(R, \mathcal{B}(R))$.

Definición 2.2.2 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, se dice que $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es una filtración en $(\Omega, \mathcal{F})$ si es una familia creciente de σ-álgebras en $\mathcal{F}$. Es decir, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \forall\ s \leq t$*

El conjunto $\mathcal{F}_t$ representará la información disponible al instante t.

Es posible construir una filtración a partir de un proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$, si tomamos como $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s,\ s \leq t)$ la σ-álgebra generada por las trayectorias observadas hasta el instante t.

Definición 2.2.3 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, entonces el proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si $\forall\ t \geq 0 \quad X_t$ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible.*

Definición 2.2.4 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y se define a $\mathcal{N}$ como el conjunto de los conjuntos de probabilidad cero de $\mathcal{F}$, es decir,*

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F},\ P(A) = 0\}$$

Definición 2.2.5 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, se dirá que $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es la filtración natural de el proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$, si $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{N}, X_s,\ s \leq t)\ \forall\ t \geq 0$.*

De aquí en adelante se dará por hecho que $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es la filtración natural del proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Esto quiere decir que se dará por hecho que $\forall\, t \geq 0$ $\mathcal{F}_t$ contiene a todos los conjuntos con probabilidad cero de $\mathcal{F}$, es decir, si $A \in \mathcal{N}$, entonces $\forall\, t \geq 0,\ A \in \mathcal{F}_t$. Cabe mencionar que un proceso es adaptado a su filtración natural.

Definición 2.2.6 *Un Movimiento Browniano es un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ que toma valores reales, con trayectorias continuas y cuyos incrementos son independientes y estacionarios. Es decir,*

- Continuidad:

$$P \quad c.s. \quad \textit{la función} \quad s \longmapsto X_s(\omega) \quad \textit{es una función continua}$$

- Independencia de incrementos:

$$\textit{Si } s \leq t, \quad X_t - X_s \quad \textit{es independiente de } \mathcal{F}_s = \sigma(X_u,\ u \leq s)$$

- Incrementos estacionarios:

$$\textit{Si } s \leq t, \ \textit{la distribución de } X_t - X_s \textit{ es la misma que la de } X_{t-s} - X_0$$

Teorema 2.2.1 *Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano, entonces, $X_t - X_0$ es una variable aleatoria normal de media rt y de varianza $\sigma^2 t$, donde $r, \sigma \in R$.*

La demostración de este delicado teorema la da Gihman [11].

Definición 2.2.7 *Un Movimiento Browniano es estándar si se cumple que:*

$$X_0 = 0 \qquad P\ c.s. \qquad , \qquad E(X_0) = 0 \qquad y \qquad E\left(X_t^2\right) = t$$

Teorema 2.2.2 *Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano y si $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, entonces $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ es un vector gaussiano.*

Demostración. P.D. $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ es un vector gaussiano.

P. d. $\forall\ a_i \in R, \quad i = \overline{1,n},$ se tiene que Y es una variable aleatoria normal,

$$\text{donde,} \qquad Y = a_1 X_{t_1} + a_2 X_{t_2} + \cdots + a_n X_{t_n}$$

$$\begin{aligned} Y &= a_1 X_{t_1} + a_2 X_{t_2} + \cdots + a_n X_{t_n} \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) X_{t_1} + (a_2 + a_3 + \cdots + a_n)(X_{t_2} - X_{t_1}) + \cdots + a_n (X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \end{aligned}$$

y se tiene que el vector

$$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

es un vector con entradas independientes y normales, y se sabe que cualquier combinación lineal de variables aleatorias independientes y normales es una variable aleatoria normal. ■

Es posible dar otra definición equivalente de Movimiento Browniano con respecto a su filtración.

Definición 2.2.8 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Se dirá que el proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano si toma valores reales, con trayectorias continuas y además cumple que:*

- $\forall\ t \geq 0, \quad X_t$ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible.

- Si $s \leq t, \quad X_t - X_s$ es una variable independiente de $\mathcal{F}_s$.

- Si $s \leq t, \quad$ la densidad de $X_t - X_s$ es idéntica a la de $X_{t-s} - X_0$.

Es claro que un $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano es un Movimiento Browniano con relación a su filtración natural.

De aquí en adelante cuando se hable de Movimiento Browniano se estará pensando en un Movimiento Browniano estándar.

Proposición 2.2.1 *Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano estándar, entonces X_t es una $\mathcal{F}_t$-martingala.*

Demostración. P.d. X_t es una $\mathcal{F}_t$-martingala, es decir,

$$\text{P.d. } \forall s \leq t,\ E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$$

equivalentemente

$$\text{P.d. } \forall s \leq t,\ E(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = 0$$

Si $s \leq t$, $X_t - X_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, por definición de Movimiento Browniano,

$$\begin{aligned} E(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) &= E(X_t - X_s) \\ &= E(X_{t-s}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \qquad \forall s \leq t \qquad \blacksquare$$

Proposición 2.2.2 *Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano estándar, entonces $X_t^2 - t$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala.*

Demostración. P.d.

$$E\left(X_t^2 - t\middle|\mathcal{F}_s\right) = X_s^2 - s \qquad \forall s \leq t$$

$$\begin{aligned} E\left[X_t^2 - X_s^2\middle|\mathcal{F}_s\right] &= E\left[(X_t - X_s)^2 + 2X_s(X_t - X_s)\middle|\mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[(X_t - X_s)^2\middle|\mathcal{F}_s\right] + 2E\left[X_s(X_t - X_s)|\mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[(X_t - X_s)^2\middle|\mathcal{F}_s\right] + 2X_sE\left[(X_t - X_s)|\mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[(X_t - X_s)^2\middle|\mathcal{F}_s\right] \qquad \text{independencia de } X_t - X_s \text{ con } \mathcal{F}_s \\ &= E\left[X_{t-s}^2\right] \qquad \text{por la estacionalidad del Movimiento Browniano} \\ &= t - s \end{aligned}$$

entonces

$$E\left(X_s^2|\mathcal{F}_s\right) - X_s^2 = t - s$$

$$\therefore \quad E\left(X_t^2 - t|\mathcal{F}_s\right) = X_s^2 - s \quad \forall s \leq t \quad \blacksquare$$

Proposición 2.2.3 *Si* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *es un* $\mathcal{F}_t$*-Movimiento Browniano estándar, entonces* $\exp\left(\sigma X_t - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)$ *es una* $\mathcal{F}_t$*-martingala.*

Demostración. P.D. $\exp\left(\sigma X_t - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala, es decir

$$\text{P.D. } E\left[\exp\left(\sigma X_t - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] = \exp\left(\sigma X_s - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)s\right) \qquad \forall s \leq t$$

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left(\sigma X_t - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] &= E\left[\exp\left(\sigma X_t + \sigma X_s - \sigma X_s - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[\exp\left(\sigma X_s - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\exp\left(\sigma X_t - \sigma X_s\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left(\sigma X_s - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)E\left[\exp\left(\sigma\left(X_t - X_s\right)\right)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left(\sigma X_s - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)E\left[\exp\left(\sigma\left(X_t - X_s\right)\right)\right] \\
&= \exp\left(\sigma X_s - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)E\left[\exp\left(\sigma X_{t-s}\right)\right] \\
&= \exp\left(\sigma X_s - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)E\left[\exp\left(\sigma Y\sqrt{t-s}\right)\right]
\end{aligned}$$

donde,

$$Y = \frac{X_{t-s}}{\sqrt{t-s}} \sim N(0,1)$$

$$\text{ya que} \quad X_{t-s} \sim N\left(0, t-s\right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
E\left(\exp\left(\sigma Y\sqrt{t-s}\right)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\sigma y\sqrt{t-s}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2} + \frac{2\sigma y\sqrt{t-s}}{2} - \frac{\sigma^2(t-s)}{2} + \frac{\sigma^2(t-s)}{2}\right)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(y-\sigma\sqrt{t-s}\right)^2}{2}\right)\exp\left(\frac{\sigma^2(t-s)}{2}\right)\,dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(\frac{\sigma^2(t-s)}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(y-\sigma\sqrt{t-s}\right)^2}{2}\right)\,dy \\
&= \exp\left(\frac{\sigma^2(t-s)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
E\left[\exp\left(\sigma X_t-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\Big|\mathcal{F}_s\right] &= \exp\left(\sigma X_s-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\exp\left(\frac{\sigma^2(t-s)}{2}\right) \\
&= \exp\left(\sigma X_s-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)s\right) \qquad \forall\, s\le t \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

2.3 Integral Estocástica

Sean $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ una filtración, $\{W_t\}_{t\ge0}$ un $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano estándar y $T\in R^+$.

Definición 2.3.1 *Se dice que un proceso estocástico $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ adaptado a $\mathcal{F}_t$ es un proceso elemental si es un proceso con la siguiente forma:*

$$
H_t(\omega)=\sum_{i=1}^{p}\phi_i(\omega)\,1_{(t_{i-1},t_i]}(t)
$$

donde, $0=t_0<t_1<\cdots<t_p=T$ y ϕ_i variable aleatoria $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-medible y acotada, $i\in\overline{1,p}$.

Definición 2.3.2 *Se define la integral estocástica de un proceso elemental $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ como el proceso $\{I(H)\}_{0\le t\le T}=\left\{\int_0^t H_s\,dW_s\right\}_{0\le t\le T}$, donde*

$$
\int_0^{t^*}H_s dW_s=\sum_{i=1}^{k}\phi_i\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)+\phi_{k+1}\left(W_t-W_{t_k}\right) \quad si\ t^*\in(t_k,t_{k+1}]
$$

Se puede ver claramente que la integral estocástica de un proceso elemental es una función continua, esto debido a que $\{W_t\}_{t\ge0}$ es un proceso continuo.

En el caso de que el proceso $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ sea un proceso constante a, de acuerdo a la definición se tiene que,

$$
\int_0^t H_s\,dW_s=a\left(W_t-W_0\right)=aW_t \tag{2.1}
$$

Observación 2.3.1 *Es posible escribir a* $\int_0^t H_s\, dW_s$ *también como* $\sum_{i=1}^{k} \phi_i \left(W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}\right)$.

Proposición 2.3.1 *Si* $\{H_t\}_{0 \le t \le T}$ *es un proceso elemental, entonces la aplicación*

$$t \mapsto \int_0^t H_s\, dW_s$$

es una función continua y además es una $\mathcal{F}_t$*-martingala continua.*

Demostración.

$$P.d. \quad E\left[\int_0^t H_u\, dW_u \middle| \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s H_u\, dW_u \qquad \forall\, t \ge s$$

Sea $t > s$, sin perdida de generalidad, es posible ajustar a s y t a la partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T$.

Denótese $M_n = \int_0^{t_n} H_s\, dW_s$, $X_n = W_{t_n}$ y $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n}$, $\quad 0 \le n \le p$, donde

$$M_n = \int_0^{t_n} H_s\, dW_s = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \left(X_i - X_{i-1}\right)$$

Basta demostrar que

$$E\left(M_{n+1} | \mathcal{G}_n\right) = M_n \quad \forall\, n \in N$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
E\left(M_{n+1} - M_n | \mathcal{G}_n\right) &= E\left[\sum_{i=1}^{n+1} \phi_i \left(X_i - X_{i-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} \phi_i \left(X_i - X_{i-1}\right) \middle| \mathcal{G}_n\right] \\
&= E\left[\phi_{n+1}\left(X_{n+1} - X_n\right) | \mathcal{G}_n\right] \\
&= E\left[\phi_{t_{n+1}}\left(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}\right) | \mathcal{F}_{t_n}\right] \\
&= \phi_{t_{n+1}} E\left(W_{t_{n+1}} - W_{t_n} | \mathcal{F}_{t_n}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ya que $\phi_{t_{n+1}}$ es una v.a. $\mathcal{F}_{t_n}$-medible.

Por lo tanto, M_n es una $\mathcal{G}_n$-martingala. ■

Proposición 2.3.2 *Si* $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ *es un proceso elemental, entonces*

$$E\left[\left(\int_0^t H_s\, dW_s\right)^2\right] = E\left[\left(\int_0^t H_s^2\, ds\right)\right]$$

Demostración. Una vez más, sin pérdida de generalidad se puede ajustar t a la partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T$.

Por lo tanto, hay que demostrar que

$$E\left(M_n^2\right) = E\left[\sum_{i=1}^n \phi_i^2 \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)\right]$$

Sea $X_i = W_{t_i}$, y $\mathcal{G}_i = \mathcal{F}_{t_i}$, entonces

$$\begin{aligned} E\left(M_n^2\right) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n \phi_i \left(X_i - X_{i-1}\right)\right)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i\phi_j \left(X_i - X_{i-1}\right)\left(X_j - X_{j-1}\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n E\left[\sum_{j=1}^n \phi_i\phi_j \left(X_i - X_{i-1}\right)\left(X_j - X_{j-1}\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E\left[\phi_i\phi_j \left(X_i - X_{i-1}\right)\left(X_j - X_{j-1}\right)\right] \end{aligned}$$

Supóngase que $i < j$, es decir, $i \le j-1$

$$\begin{aligned} E\left[\phi_i\phi_j \left(X_i - X_{i-1}\right)\left(X_j - X_{j-1}\right)\right] &= E\left[E\left[\phi_i\phi_j \left(X_i - X_{i-1}\right)\left(X_j - X_{j-1}\right) \middle| \mathcal{G}_{j-1}\right]\right] \\ &= E\left[\phi_i\phi_j \left(X_i - X_{i-1}\right) E\left[\left(X_j - X_{j-1}\right) \middle| \mathcal{G}_{j-1}\right]\right] \end{aligned}$$

ya que ϕ_i, ϕ_j y $(X_i - X_{i-1})$ son variables aleatorias $\mathcal{G}_{j-1}$-medibles.

Entonces

$$\begin{aligned} E\left[\phi_i\phi_j \left(X_i - X_{i-1}\right) E\left[\left(X_j - X_{j-1}\right) \middle| \mathcal{G}_{j-1}\right]\right] &= E\left[\phi_i\phi_j \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) E\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) \middle| \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right] \\ &= E\left[\phi_{t_i}\phi_{t_j} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) 0\right] \end{aligned}$$

$$= \ 0$$

pues $\{W_t\}$ es un Movimiento Browniano y por lo tanto una martingala (proposición 2.2.1).

Analogamente,

$$E\left[\phi_i\phi_j\left(X_i - X_{i-1}\right)\left(X_j - X_{j-1}\right)\right] = 0 \qquad j < i$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
E\left(M_n^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} E\left[\phi_i\phi_i\left(X_i - X_{i-1}\right)\left(X_i - X_{i-1}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[\phi_i^2\left(X_i - X_{i-1}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[E\left[\phi_i^2\left(X_i - X_{i-1}\right)^2 \middle| \mathcal{G}_{i-1}\right]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[\phi_i^2 E\left[\left(X_i - X_{i-1}\right)^2 \middle| \mathcal{G}_{i-1}\right]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[\phi_i^2 E\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[\phi_i^2\left(t_i - t_{i-1}\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{n} \phi_i^2\left(t_i - t_{i-1}\right)\right] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 2.3.3 *Si $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso elemental, entonces*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t H_s\, dW_s\right|^2\right] \leq 4E\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right]$$

Demostración. Como $\int_0^t H_s\, dW_s$ es una función continua respecto a t y es martingala, por la desigualdad de Doob C.0.1 y la proposición 2.3.2

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t H_s\, dW_s\right|^2\right] &\leq 4E\left[\left(\int_0^T H_s^2\, dW_s\right)^2\right] \\
&= 4E\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right]
\end{aligned}$$

Definición 2.3.3 *Sea* $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ *un proceso elemental, se define a*

$$\int_t^T H_s dW_s = \int_0^T H_s dW_s - \int_0^t H_s dW_s$$

Observación 2.3.2 *Si* $0 \leq t \leq T$ *y si* $A \in \mathcal{F}_t$*, entonces*

$$s \mapsto 1_A 1_{\{s\in(t,T]\}} H_s$$

sigue siendo un proceso estocástico elemental, y además se cumple

$$\int_0^T 1_A 1_{\{s\in(t,T]\}} H_s dW_s = 1_A \int_t^T H_s dW_s$$

A continuación se extenderá la definición de integral estocástica de procesos elementales a la siguiente clase de procesos adaptados.

$$\mathcal{H} = \left\{ (H_t)_{0\leq t\leq T} : \text{procesos adaptados a } (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty \right\}$$

La integral estocástica de este tipo de procesos seguirá cumpliendo las mismas propiedades que para los procesos elementales y además la integral de este tipo de procesos tendrá la particularidad que será un martingala.

Proposición 2.3.4 *Sea* $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ *un Movimiento Browniano, entonces existe una única función lineal* J *de* $\mathcal{H}$ *en el espacio de las* $\mathcal{F}_t$*-martingalas continuas definidas en* $[0,T]$ *y esta función cumple:*

1. *Si* $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ *es un proceso elemental* P *c.s.* $\forall\, J(H)_t = I(H)_t$.
2. *Si* $t \leq T$, $E\left(J(H)_t^2\right) = E\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$.

La unicidad es en el sentido siguiente, si existen J *y* J' *dos funciones lineales que cumplen las condiciones anteriores, entonces*

$$\forall\, 0 \leq t \leq T,\ J(H)_t = J'(H)_t \quad P \text{ c.s.}$$

Definición 2.3.4 *Sea $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ un proceso estocástico en $\mathcal{H}$, se define entonces su integral estocástica como*

$$\int_0^t H_s dW_s = J(H)_t$$

Proposición 2.3.5 *Si $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso estocástico en $\mathcal{H}$ entonces*

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t H_s dW_s\right|^2\right) \leq 4E\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$$

Demostración. Para la demostración de 2.3.4 y 2.3.5 puede consultarse Karatzas [19] y Lamberton [21].

Lo relevante es que $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ es una martingala si $E\left(\int_0^t H_s^2 ds\right) < \infty$ o bien por la proposición 2.3.4 basta que $E\left[\left(\int_0^t H_s dW_s\right)^2\right] < \infty$.

La integral estocástica se puede definir para los siguientes procesos estocásticos

$$\overline{\mathcal{H}} = \left\{(H_t)_{0\leq t\leq T} : \text{procesos adaptados a } (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty\right\}$$

Se sabe que $\mathcal{H} \subset \overline{\mathcal{H}}$ aunque no se va a demostrar.

En el caso de un proceso $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ en $\overline{\mathcal{H}}$ se tendrá que $\int_0^t H_s dW_s$ no es necesariamente una martingala.

2.4 Cálculo de Itô

Definición 2.4.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad con relación a un filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano. Un proceso estocástico $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ que toma valores en R es un proceso de Itô si es tal que,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s \qquad \forall\, t \leq T \qquad P\ c.s.$$

(a) X_0 es $\mathcal{F}_0$-medible.

(b) $\{K_t\}_{0\leq t\leq T}$ y $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ son dos procesos adaptados a $\mathcal{F}_t$.

(c) $\int_0^T |K_s|\; ds < +\infty \qquad P$ c.s.

(d) $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty \quad P$ *c.s.*

Y además, la descomposición es única, esto es, si

$$X_t = X_0' + \int_0^t K_s' \, ds + \int_0^t H_s' \, dW_s$$

entonces,

$$X_0 = X_0' \quad P \text{ c.s.} \quad H_s = H_s' \quad P \text{ c.s.} \quad K_s = K_s' \quad P \text{ c.s.}$$

Proposición 2.4.1 *Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala de la forma $X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$, entonces $K_t = 0 \quad P$ c.s.*

Para su demostración consultar Lamberton [21].

Teorema 2.4.1 (Fórmula de Itô) *Sea $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ un proceso de Itô*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

y sea f una función de clase C^2, entonces

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s$$

donde, por definición

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, ds$$

y

$$\int_0^t f'(X_s)\, dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s \, ds + \int_o^t f'(X_s) H_s \, dW_s$$

Equivalentemente, si

$$f : (R, R) \longrightarrow R$$

$$(t, x) \mapsto f(t, x)$$

es una función de clase $C^{1,2}$, es decir, es una función dos veces diferenciable en x, una vez diferenciable en t y donde estas derivadas son continuas en (t, x), se tiene que,

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s)\, ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s$$

Para la demostración de este teorema consultar Karatzas [19].

2.5 Ejemplos de la utilización de la Fórmula de Itô

Ejemplo 2.5.1 *Sea $f(x) = x^2$ y $X_t = W_t\ \forall\ t \geq 0$, donde $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano estándar.*

Entonces

$$\begin{aligned} X_t &= W_t \\ &= \int_0^t 1\, dW_t \end{aligned}$$

por lo tanto, X_t es un proceso de Itô con $K_t = 0$ y $H_t = 1\ \forall\ t \geq 0$. (Claramente se cumplen las condiciones de la definición). Es posible afirmar que un Movimiento Browniano es en particular un proceso de Itô.

Y f es una función de clase C^2, entonces de acuerdo a la fórmula de Itô

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)\ dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\ d\langle W, W\rangle_s$$

donde,

$$\langle W, W\rangle_t = \int_0^t H_s^2\ ds$$

y

$$\int_0^t f'(W_s)\ dW_s = \int_0^t f'(W_s)\, K_s\ ds + \int_0^t f'(W_s)\, H_s\ dW_s$$

donde $f'(x) = 2x$ y $f''(x) = 2$, entonces

$$W_t^2 = W_0^2 + \left(\int_0^t 2W_s(0)ds + \int_0^t 2W_s(1)\, dW_s\right) + \frac{1}{2}\int_0^t 2(1)\ ds$$

$$
\begin{aligned}
&= W_0^2 + \int_0^t 2W_s \, dW_s + t \\
&= 0 + \int_0^t 2W_s \, dW_s + t
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s \, dW_s$$

cabe notar por la proposición 2.2.2 que $W_t^2 - t$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala, entonces $\frac{W_t^2 - t}{2}$ es también una martingala, por lo tanto $\int_0^t W_s \, dW_s$ es una martingala.

Ejemplo 2.5.2 *Si* $f(x) = \ln(x)$ *y si*

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s \, ds + \int_0^t \sigma S_s \, dW_s \qquad \forall \, t \in [0, T]$$

esta última expresión la podemos escribir como

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s \left(\mu ds + \sigma dW_s\right) \qquad \forall \, t \in [0, T]$$

o bien, como

$$dS_t = S_s \left(\mu ds + \sigma dW_s\right), \qquad S_0 = x_0$$

Se aplicará la fórmula de Itô, aunque f no es una función de clase C^2 en R ya que $\frac{1}{x}$ y $-\frac{1}{x^2}$ no son continuas en 0.

Este detalle no será tomado en cuenta, ya que la fórmula funciona aún en este caso, sólo que en lugar de considerar R se considerará en R^+, por lo tanto, se supondrá que $S_t > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \; f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$
\begin{aligned}
\ln(S_t) &= \ln(x_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s}\mu S_s \, ds + \int_0^t \frac{1}{S_s}\sigma S_s \, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}\left(\sigma S_s\right)^2 \, ds \\
&= \ln(x_0) + \int_0^t \mu \, ds + \int_0^t \sigma \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 \, ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln(x_0) + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma\, dW_s \\
&= \ln(x_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t \qquad \text{por ec. (2.1)}
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
S_t &= e^{\ln(x_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} \\
&= x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}
\end{aligned}
$$

es una solución de

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s\, ds + \int_0^t \sigma S_s\, dW_s$$

Surge entonces la siguiente proposición que será de gran utilidad para el modelo de precios de Black y Scholes.

Proposición 2.5.1 *El proceso* $\{S_t\}_{0 \le t \le T}$ *definido como*

$$S_t = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

es una solución de

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s\, ds + \int_0^t \sigma S_s\, dW_s$$

Demostración. Una vez más con la fórmula de Itô y definiendo a

$$
\begin{aligned}
f(t, W_t) &= S_t \\
&= x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}
\end{aligned}
$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
S_t &= f(t, W_t) \\
&= f(0, W_0) + \int_0^t f_s'(s, W_s)\, ds + \int_0^t f_w'(s, W_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{ww}''(s, W_s)\, d\langle W, W\rangle_s
\end{aligned}
$$

donde,

$$f'_s(s,w)=\frac{d}{ds}\left[x_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\sigma w}\right]_{w=W_s}=\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)x_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\sigma w}\right]_{w=W_s}$$

$$f'_w(s,w)=\frac{d}{dw}\left[x_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\sigma w}\right]_{w=W_s}=\left[\sigma x_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\sigma w}\right]_{w=W_s}$$

$$f''_w(s,w)=\frac{d}{dw}\left[x_0\sigma e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\sigma w}\right]_{w=W_s}=\left[\sigma^2 x_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\sigma w}\right]_{w=W_s}$$

Por lo tanto,

$$S_t=x_0+\int_0^t\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)x_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\sigma w}ds+\int_0^t\sigma x_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\sigma w}dW_s+\frac{1}{2}\int_0^t\sigma^2 x_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\sigma w}d\langle W,W\rangle_s$$

donde,

$$\langle W,W\rangle_t=\int_0^t 1\,ds=t$$

entonces, se obtiene

$$\begin{aligned}S_t &= x_0+\int_0^t\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)S_s ds+\int_0^t\sigma S_s dW_s+\int_0^t\frac{\sigma^2}{2}S_s ds\\ &= x_0+\int_0^t\mu S_s ds+\int_0^t\sigma S_s dW_s\end{aligned}$$

■

2.6 Fórmula de Integración por partes

Proposición 2.6.1 *Sean* $\{X_t\}_{t\geq 0},\{Y_t\}_{t\geq 0}$ *dos procesos de Itô,*

$$X_t=X_0+\int_0^t K_s\,ds+\int_0^t H_s\,dW_s$$

$$Y_t=Y_0+\int_0^t K_s^*\,ds+\int_0^t H_s^*\,dW_s$$

entonces,

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H_s^* ds$$

Demostración. Se puede afirmar que,

$$X_t + Y_t = X_0 + Y_0 + \int_0^t (K_s + K_s^*)\, ds + \int_0^t (H_s + H_s^*)\, dW_s$$

es un proceso de Itô, ya que

$$X_0 + Y_0 \quad \text{es } \mathcal{F}_0\text{-medible}$$

$$(K_t + K_t^*) \text{ y } (H_t + H_t^*) \text{ son procesos adaptados}$$

$$\int_0^T |K_s + K_s^*|\, ds \leq \int_0^T |K_s|\, ds + \int_0^T |K_s^*|\, ds < \infty$$

y la condición (d) de la definición de Proceso de Itô se cumple gracias a la desigualdad de Cauchy A.0.2, esto es

$$\begin{aligned}
\int_0^T |H_s + H_s^*|^2\, ds &= \int_0^T H_s^2 ds + \int_0^T H_s^{*2} ds + 2\int_0^T H_s H_s^* ds \\
&\leq \int_0^T H_s^2 ds + \int_0^T H_s^{*2} ds + 2\left(\int_0^T H_s^2 ds \int_0^T H_s^{*2} ds\right)^{\frac{1}{2}} < \infty
\end{aligned}$$

Entonces, aplicando la fórmula de Itô a $X_t + Y_t$ con $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
(X_t + Y_t)^2 &= (X_0 + Y_0)^2 + \int_0^t 2(X_s + Y_s)(K_s + K_s^*)\, ds \\
&\quad + \int_0^t 2(X_s + Y_s)(H_s + H_s^*)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2(H_t + H_t^*)^2\, ds
\end{aligned}$$

Ahora, con la fórmula de Itô, primeramente a X_t con $f(x) = x^2$

$$X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t 2X_s K_s ds + \int_0^t 2X_s H_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2H_s^2 ds$$

Y después aplicando la fórmula a Y_t con $f(x) = x^2$

$$Y_t^2 = Y_0^2 + \int_0^t 2Y_s K_s^* ds + \int_0^t 2Y_s H_s^* dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2H_s^{*2} ds$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
2X_tY_t &= (X_t + Y_t)^2 - \left(X_t^2 + Y_t^2\right) \\
&= (X_0 + Y_0)^2 + \int_0^t 2(X_s + Y_s)(K_s + K_s^*) ds + \int_0^t 2(X_s + Y_s)(H_s + H_s^*) dW_s \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t 2(H_s + H_s^*)^2 ds - \left[\left(X_0^2 + Y_0^2\right) + \int_0^t (2X_sK_s + 2Y_sK_s^*) ds\right. \\
&\quad \left. + \int_0^t (2X_sH_s + 2Y_sH_s^*) dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \left(2H_s^2 + 2H_s^{*2}\right) ds\right] \\
&= (X_0 + Y_0)^2 + \int_0^t (2X_sK_s + 2Y_sK_s^*) ds + \int_0^t (2X_sK_s^* + 2Y_sK_s) ds \\
&\quad + \int_0^t (2X_sH_s + 2Y_sH_s^*) dW_s + \int_0^t (2X_sH_s^* + 2Y_sH_s) dW_s \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \left(2H_s^2 + 4H_sH_s^* + 2H_s^{*2}\right) ds - \left[\left(X_0^2 + Y_0^2\right) + \int_0^t (2X_sK_s + 2Y_sK_s^*) ds\right. \\
&\quad \left. + \int_0^t (2X_sH_s + 2Y_sH_s^*) dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \left(2H_s^2 + 2H_s^{*2}\right) ds\right] \\
&= 2X_0Y_0 + \int_0^t 2(X_sK_s^* + Y_sK_s) ds + \int_0^t 2(X_sH_s^* + Y_sH_s) dW_s + \int_0^t 2H_sH_s^* ds \\
&= 2X_0Y_0 + \int_0^t 2X_sK_s^* ds + \int_0^t 2X_sH_s^* dW_s + \int_0^t 2Y_sK_s ds \\
&\quad + \int_0^t 2Y_sH_s dW_s + \int_0^t 2H_sH_s^* ds \\
&= 2X_0Y_0 + \left[\int_0^t f'(X_s) K_s^* ds + \int_0^t f'(X_s) H_s^* dW_s\right] + \left[\int_0^t f'(Y_s) K_s dW_s\right. \\
&\quad \left. + \int_0^t f'(Y_s) H_s dW_s\right] + 2\int_0^t H_sH_s^* ds \\
&= 2X_0Y_0 + \int_0^t f'(X_s) dY_s + \int_0^t f'(Y_s) dX_s + 2\int_0^t H_sH_s^* ds \\
&= 2X_0Y_0 + 2\int_0^t X_s dY_s + 2\int_0^t Y_s dX_s + 2\int_0^t H_sH_s^* ds
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_sH_s^* ds \quad \blacksquare$$

Teorema 2.6.1 *Sean $\sigma, \mu \in R$, $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano y $T \in R^+$, entonces existe un único proceso de Itô $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$ tal que*

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s \qquad \forall\, t \in [0,T] \tag{2.2}$$

este proceso está dado por

$$S_t = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

Demostración. Supóngase que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ y $\{S_t\}_{t\geq 0}$ son dos procesos estocásticos tales que

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s\left(\mu ds + \sigma dW_s\right)$$

y

$$X_t = x_0 + \int_0^t X_s\left(\mu ds + \sigma dW_s\right)$$

Ya se ha demostrado que una solución de la ecuación (2.2) es

$$S_t = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

Defínase al proceso estocástico $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ como:

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{S_0}{S_t} \\ &= e^{-\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}} \\ &= e^{\left\{\left(\frac{\sigma^2}{2} - \mu\right)t - \sigma W_t\right\}} \end{aligned}$$

Si $\mu' = \sigma^2 - \mu$ y $\sigma' = -\sigma$, se tiene que

$$\begin{aligned} Z_t &= e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma W_t} \\ &= e^{\left(\mu' - \frac{(\sigma')^2}{2}\right)t + \sigma' W_t}, \qquad Z_0 = \frac{S_0}{S_0} = 1 \end{aligned}$$

entonces por la proposición 2.5.1 implica que

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_0 + \int_0^t Z_s\left(\mu' ds + \sigma' dW_s\right) \\ &= 1 + \int_0^t Z_s\left(\mu' ds + \sigma' dW_s\right) \end{aligned}$$

el cual es un proceso de Itô.

Entonces de acuerdo con el teorema de integración por partes, sea $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} X_t Z_t &= X_0 Z_0 + \int_0^t X_s \mu' Z_s\, ds + \int_0^t X_s \sigma' Z_s\, dW_s + \int_0^t Z_s \mu X_s\, ds \\ &\quad + \int_0^t Z_s \sigma X_s\, dW_s + \int_0^t \sigma X_s \sigma' Z_s\, ds \\ &= X_0 Z_0 + \int_0^t \left(\sigma^2 - \mu\right) X_s Z_s\, ds + \int_0^t (-\sigma) X_s Z_s\, dW_s \\ &\quad + \int_0^t \mu X_s Z_s\, ds + \int_0^t \sigma X_s Z_s\, dW_s + \int_0^t \sigma(-\sigma) X_s Z_s\, ds \\ &= X_0 Z_0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad X_t Z_t = X_0 Z_0 \quad \forall\, t \geq 0 \quad P \text{ c.s.}$$

$$X_t Z_t = X_0 \frac{S_0}{S_0} = X_0$$

$$\Rightarrow X_t Z_t = X_0$$

$$\Rightarrow X_t = \frac{X_0}{Z_t} = X_0 \left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

pero,

$$S_0 = X_0 \quad \Rightarrow \quad X_t = S_t \quad \forall\, t \geq 0 \quad P \text{ c.s.} \quad \blacksquare$$

Capítulo 3

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

3.1 Introducción

Se definirá formalmente lo que es una ecuación diferencial estocástica y lo que es una solución a ella, también se presentará el teorema que asegura la unicidad de la solución de una ecuación diferencial estocástica. Todo esta teoría será útil ya que el modelo de Black y Scholes puede ser visto como una ecuación diferencial estocástica. Se presentará también un ejemplo de ecuación diferencial estocástica conocido como el proceso de Ornstein-Ulhenbeck.

3.2 Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Definición 3.2.1 *Se dice que una ecuación es una ecuación diferencial estocástica si tiene la siguiente forma*

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$$

Definición 3.2.2 *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$, $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano. Y sean $b : R^+ \times R \to R$, $\sigma : R^+ \times R \to R$, Z una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$-medible. Se dice que encontrar una solución a la siguiente ecuación*

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$$

significa encontrar un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ continuo y $\mathcal{F}_t$-adaptado, tal que

1. $\forall\, t \geq 0$ *las integrales* $\int_0^t b(s, X_s)\, ds$ *y* $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$ *tienen sentido, es decir:*

$$\int_0^t |b(s, X_s)|\, ds < \infty \ \ y \ \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2\, ds < \infty \quad P \text{ c.s.}$$

2. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *cumple que*

$$\forall\, t \geq 0 \quad X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s \quad P \text{ c.s.}$$

Observación 3.2.1 *Es equivalente expresar la ecuación*

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$$

de forma diferencial como

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t \\ X_0 &= Z \end{aligned}$$

Teorema 3.2.1 *Sean $T \geq 0$ y*

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s \tag{3.1}$$

donde, b y σ son funciones continuas y existe $K < \infty$, tal que

(a) $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\, |x - y|$

(b) $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K\, (1 + |x|)$

(c) $E(Z^2) < +\infty$

Entonces, la ecuación (3.1) tiene una única solución en el intervalo $[0, T]$. Además esta solución $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ cumple que

$$E\left(\sup_{0\leq s\leq T} |X_s|^2\right) < +\infty$$

La unicidad significa que si $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ y $\{Y_t\}_{0\leq t\leq T}$ son dos soluciones de la ecuación (3.1), entonces $\forall\, t \in [0,T]$ $X_t = Y_t \quad P$ *c.s.*

Demostración. Se asumirá que el espacio

$$\mathcal{E} = \left\{ (X_t)_{0\leq t\leq T} : \text{proceso continuo } \mathcal{F}_t\text{-adaptado tal que } E\left(\sup_{0\leq s\leq T} |X_s|^2\right)\right\}$$

con la norma

$$\|X\| = \sqrt{E\left(\sup_{0\leq s\leq T} |X_s|^2\right)}$$

es un espacio vectorial normal completo.

Se denotará

$$\mathcal{G} = \left\{ (X_t)_{0\leq t\leq T} : \text{proceso continuo } \mathcal{F}_t\text{-adaptado}\right\}$$

La demostración estará basada en el Teorema de Punto Fijo.

Se define Φ una función tal que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ (X)_{0\leq s\leq T} &\mapsto \Phi(X)_{0\leq s\leq T} \end{aligned}$$

como

$$\Phi(X)_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$$

De hecho se demostrará enseguida que $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.

Sean $X = \{X_s\}_{0\leq s\leq T}$, $Y = \{Y_s\}_{0\leq s\leq T} \in \mathcal{E}$, entonces

$$\begin{aligned} |\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2 &= \left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\, ds + \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\, dW_s\right|^2 \\ &\leq 2\left|\left(\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\, ds\right)^2 + \left(\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\, dW_s\right)^2\right| \\ &= 2\left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\, ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\, dW_s\right|^2 \end{aligned}$$

esto debido a que $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2 + b^2\right)$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Phi(X)_t-\Phi(Y)_t\right|^2 &\leq 2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\left(b(s,X_s)-b(s,Y_s)\right)ds\right|^2\\
&+2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\left(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)\right)dW_s\right|^2
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Phi(X)_t-\Phi(Y)_t\right|^2\right) &\leq 2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\left(b(s,X_s)-b(s,Y_s)\right)ds\right|^2\right]\\
&+2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\left(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)\right)dW_s\right|^2\right]\\
&= 2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t\left(b(s,X_s)-b(s,Y_s)\right)ds\right)^2\right]\\
&+2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\left(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)\right)dW_s\right|^2\right]\\
&\leq 2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t\left(b(s,X_s)-b(s,Y_s)\right)ds\right)^2\right]\\
&+2\cdot 4E\left[\left(\int_0^T\left(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)\right)^2ds\right)^2\right]\\
&= A
\end{aligned}$$

Por hipótesis se tiene que

(a) $|b(t,x)-b(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq K|x-y|$, entonces

$$|b(t,x)-b(t,y)|\leq K|x-y|$$

y

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq K|x-y|$$

(b) $|b(t,x)|+|\sigma(t,x)|\leq K(1+|x|)$, entonces

$$|b(t,x)|\leq K(1+|x|)$$

y

$$|\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|)$$

(c) $E(Z^2) < \infty$

Entonces,

$$\begin{aligned}
A &\leq 2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t (b(s,X_s)-b(s,Y_s))\,ds\right)^2\right] + 8E\left[\int_0^T K^2|X_s-Y_s|^2\,ds\right] \\
&\leq 2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t K|X_s-Y_s|\,ds\right)^2\right] + 8E\left[\int_0^T K^2|X_s-Y_s|^2\,ds\right] \\
&\leq 2K^2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t |X_s-Y_s|\,ds\right)^2\right] + 8K^2E\left[\int_0^T |X_s-Y_s|^2\,ds\right] \\
&\leq 2K^2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t |X_s-Y_s|\,ds\right)^2\right] + 8K^2E\left[\int_0^T \sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\,ds\right] \\
&= 2K^2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t |X_s-Y_s|\,ds\right)^2\right] + 8K^2E\left[T\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right] \\
&= 2K^2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t |X_s-Y_s|\,ds\right)^2\right] + 8K^2TE\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right] \\
&= 2K^2E\left[\left(\int_0^T |X_s-Y_s|\,ds\right)^2\right] + 8K^2TE\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right] \\
&\leq 2K^2E\left[\left(\int_0^T \sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|\,ds\right)^2\right] + 8K^2TE\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right] \\
&= 2K^2E\left[\left(T\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|\right)^2\right] + 8K^2TE\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right] \\
&= 2K^2T^2E\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|\right)^2\right] + 8K^2TE\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right] \\
&\leq 2K^2T^2E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right] + 8K^2TE\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right] \\
&= 2\left(K^2T^2+4K^2T\right)E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_s-Y_s|^2\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Phi(X)_t-\Phi(Y)_t\right|^2\right) &\leq 2\left(K^2T^2+4K^2T\right)E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t-Y_t\right|^2\right) && (3.2)\\
&< \infty && (3.3)
\end{aligned}
$$

ya que $X,Y\in\mathcal{E}$. Ahora es posible afirmar que si $X,Y\in\mathcal{E}$ entonces $(\Phi(X)-\Phi(Y))\in\mathcal{E}$.

Se denotará como 0 el proceso constante 0, entonces $(\Phi(X)-\Phi(0))\in\mathcal{E}$.

A continuación se demostrará que $\Phi(0)\in\mathcal{E}$,

$$
\begin{aligned}
\left|\Phi(0)_t\right|^2 &= \left|Z+\int_0^t b(s,0)\,ds+\int_0^t\sigma(s,0)\,dW_s\right|^2\\
&\leq 3\left(Z^2+\left(\int_0^t b(s,0)\,ds\right)^2+\left(\int_0^t\sigma(s,0)\,dW_s\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

esto debido a que $(a+b+c)^2\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Phi(0)_t\right|^2 &\leq 3\sup_{0\leq t\leq T}\left(Z^2+\left(\int_0^t b(s,0)\,ds\right)^2+\left(\int_0^t\sigma(s,0)\,dW_s\right)^2\right)\\
&\leq 3\left[Z^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t b(s,0)\,ds\right)^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t\sigma(s,0)\,dW_s\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Phi(0)_t\right|^2\right] &\leq 3\left[E\left(Z^2\right)+\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t b(s,0)\,ds\right)^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t\sigma(s,0)\,dW_s\right)^2\right]\\
&= 3E\left(Z^2\right)+3E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t b(s,0)\,ds\right)^2\right)\\
&\quad +3E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\sigma(s,0)\,dW_s\right|^2\right) && (3.4)\\
&\leq 3E\left(Z^2\right)+3E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t b(s,0)\,ds\right)^2\right)\\
&\quad +3\cdot 4E\left(\int_0^T(\sigma(s,0))^2\,ds\right)\\
&\leq 3E\left(Z^2\right)+3E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t K(1+|0|)\,ds\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +3\cdot 4E\left(\int_0^T (K(1+|0|))^2 ds\right) \\
= \quad & 3E\left(Z^2\right)+3E\left(\left(\int_0^T K ds\right)^2\right)+3\cdot 4E\left(\int_0^T K^2 ds\right) \\
= \quad & 3\left(E\left(Z^2\right)+K^2T^2+4K^2T\right)<\infty
\end{aligned}
$$

Entonces $\Phi(0)\in\mathcal{E}$ y como $(\Phi(X)-\Phi(0))\in\mathcal{E}$, se tiene que

$$(\Phi(X)-\Phi(0))+\Phi(0)\in\mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \Phi(X)\in\mathcal{E}$$

De acuerdo con la ecuación (3.2) se tiene

$$\|\Phi(X)-\Phi(Y)\|\leq\sqrt{2\left(K^2T^2+4K^2T\right)}\,\|X-Y\|$$

y si se supone que T es suficientemente pequeña para que $k(T)=\sqrt{2\left(K^2T^2+4K^2T\right)}<1$, entonces Φ es una contracción y por el teorema de punto fijo existe un único proceso $X\in\mathcal{E}$ tal que X es solución de la ecuación (3.1).

Hasta ahora se ha visto que si T es suficientemente pequeña existe una única solución de la ecuación (3.1) en $\mathcal{E}$, a continuación se comprobará que una solución de (3.1) forzosamente está en $\mathcal{E}$.

Sea X una solución de (3.1), entonces se asume que $\Phi(X)=X$.

Se denotará

$$T_n=inf\{s\geq 0,\ |X_s|>n\}$$

con lo cual se tiene que $\forall t\geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} T_n\wedge t=t$$

Y si se hace un cálculo análogo al de la expresión (3.4) se tendrá que

$$E\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge T_n}|\Phi(X)_u|^2\right] \quad = \quad E\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge T_n}|X_u|^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\le 3E\left(Z^2\right)+3E\left(\sup_{0\le u\le t\wedge T_n}\left(\int_0^u b\left(s,X_s\right)ds\right)^2\right)\\
&\quad +3E\left(\sup_{0\le u\le t\wedge T_n}\left|\int_0^u \sigma\left(s,X_s\right)dW_s\right|^2\right)\\
&\le 3E\left(Z^2\right)+3E\left(\sup_{0\le u\le t\wedge T_n}\left(\int_0^u b\left(s,X_s\right)ds\right)^2\right)\\
&\quad +3\cdot 4E\left(\int_0^{t\wedge T_n}\left(\sigma\left(s,X_s\right)\right)^2 ds\right)\\
&\le 3E\left(Z^2\right)+3E\left(\sup_{0\le u\le t\wedge T_n}\left(\int_0^u K\left(1+|X_s|\right)ds\right)^2\right)\\
&\quad +3\cdot 4E\left(\int_0^{t\wedge T_n} K^2\left(1+|X_s|\right)^2 ds\right)\\
&\le 3E\left(Z^2\right)+3E\left[\left(\int_0^{t\wedge T_n} K\left(1+|X_s|\right)ds\right)^2\right]\\
&\quad +3\cdot 4E\left(\int_0^{t\wedge T_n} K^2\left(1+|X_s|\right)^2 ds\right)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Por otra parte, con la desigualdad de Cauchy-Schwartz A.0.2

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^{t\wedge T_n}\left|K\left(1+|X_s|\right)\right|ds\right)^2 &\le \left(\int_0^{t\wedge T_n}K^2\,ds\right)\left(\int_0^{t\wedge T_n}\left(1+|X_s|\right)^2\,ds\right)\\
&\le \left(\int_0^{T}K^2\,ds\right)\left(\int_0^{t\wedge T_n}\left(1+|X_s|\right)^2\,ds\right)\\
&\le K^2T\left(\int_0^{t\wedge T_n}\left(1+|X_s|\right)^2\,ds\right)\\
&\le 2K^2T\left(\int_0^{t\wedge T_n}\left(1+|X_s|^2\right)\,ds\right)
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^{t\wedge T_n}\left|K\left(1+|X_s|\right)\right|ds\right)^2\right] &\le 2K^2TE\left[\int_0^{t\wedge T_n}\left(1+|X_s|^2\right)\,ds\right]\\
&= 2K^2T\int_0^{t\wedge T_n}\left(1+E\left(|X_s|^2\right)\right)\,ds\\
&\le 2K^2T\int_0^{t\wedge T_n}\left(1+E\left(\sup_{0\le u\le s\wedge T_n}|X_u|^2\right)\right)\,ds
\end{aligned}
$$

$$\leq \quad 2K^2T\int_0^t\left(1+E\left(\sup_{0\leq u\leq s\wedge T_n}|X_u|^2\right)\right)ds \qquad (3.6)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
E\left(\int_0^{t\wedge T_n}K^2\left(1+|X_s|\right)^2ds\right) &= K^2E\left(\int_0^{t\wedge T_n}\left(1+|X_s|\right)^2ds\right)\\
&\leq K^2E\left(\int_0^{t\wedge T_n}2\left(1+|X_s|^2\right)ds\right)\\
&= 2K^2E\left(\int_0^{t\wedge T_n}\left(1+|X_s|^2\right)ds\right)\\
&= 2K^2\int_0^{t\wedge T_n}\left(1+E\left(|X_s|^2\right)\right)ds\\
&\leq 2K^2\int_0^{t\wedge T_n}\left(1+E\left(\sup_{0\leq u\leq s\wedge T_n}|X_u|^2\right)\right)ds\\
&\leq 2K^2\int_0^{t}\left(1+E\left(\sup_{0\leq u\leq s\wedge T_n}|X_u|^2\right)\right)ds \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

y por las expresiones (3.5), (3.6) y (3.7) se tiene que

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge T_n}|X_u|^2\right] &\leq 3E\left(Z^2\right)+3\cdot 2\left(K^2T+4K^2\right)\int_0^t\left(1+E\left(\sup_{0\leq u\leq s\wedge T_n}|X_u|^2\right)\right)ds\\
&= 3E\left(Z^2\right)+6\left(K^2T+4K^2\right)t\\
&\quad +6\left(K^2T+4K^2\right)\int_0^t E\left(\sup_{0\leq u\leq s\wedge T_n}|X_u|^2\right)ds\\
&\leq 3E\left(Z^2\right)+6\left(K^2T+4K^2\right)T\\
&\quad +6\left(K^2T+4K^2\right)\int_0^t E\left(\sup_{0\leq u\leq s\wedge T_n}|X_u|^2\right)ds\\
&= 3E\left(Z^2\right)+6\left(K^2T+4K^2\right)T\\
&\quad +6\left(K^2T+4K^2\right)\int_0^t E\left(\sup_{0\leq u\leq s\wedge T_n}|X_u|^2\right)ds
\end{aligned}$$

Denótese

$$f_n(t)=E\left(\sup_{0\leq u\leq t\wedge T_n}|X_u|^2\right)$$

entonces

$$f_n(t) \leq 3E\left(Z^2\right) + 6\left(K^2T + 4K^2\right)T + 6\left(K^2T + 4K^2\right)\int_0^t f_n(s)\,ds$$

y es posible entonces aplicar el Lema de Gronwall A.0.4.

$$f_n(T) \leq \left(3E\left(Z^2\right) + 6\left(K^2T + 4K^2\right)T\right)\left(1 + e^{6\left(K^2T+4K^2\right)T}\right) = c$$

Entonces se tiene que

$$f_n(T) = E\left(\sup_{0\leq u\leq T\wedge T_n} |X_u|^2\right) \leq c$$

y como

$$\sup_{0\leq u\leq T\wedge T_n} |X_u|^2 \xrightarrow{P\,c.s.} \sup_{0\leq u\leq T} |X_u|^2$$

luego con el Lema de Fatou A.0.3

$$E\left(\sup_{0\leq u\leq T} |X_u|^2\right) \leq c < \infty$$

Por lo tanto, una solución de la ecuación (3.1) está forzosamente en $\mathcal{E}$. Entonces, se ha demostrado que para T suficientemente pequeña $\exists!$ solución y esa solución está en $\mathcal{E}$. En general para $T > 0$ basta encontrar $m \in N$ suficientemente grande tal que $k\left(\frac{T}{m}\right) < 1$ y entonces en cada uno de los intervalos $\left[0, \frac{T}{m}\right], \left[\frac{T}{m}, \frac{2T}{m}\right], \cdots, \left[\frac{(m-1)T}{m}, T\right]$ existe una única solución. ■

3.3 El proceso de Ornstein - Ulhenbeck

Un ejemplo de una ecuación diferencial estocástica es el denominado proceso de Ornstein-Ulhenbeck.

Definición 3.3.1 *El proceso de Ornstein-Ulhenbeck es la única solución de la siguiente ecuación estocástica*

$$X_t = x - \int_0^t cX_s ds + \int_0^t \sigma dW_s$$

o bien escrita en forma diferencial

$$dX_t = -cX_t dt + \sigma dW_t$$
$$X_0 = x$$

Sea $Y_t = e^{ct} X_t$, entonces de acuerdo a la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned}
dY_t &= d\left(e^{ct} X_t\right) \\
&= e^{ct} dX_t + X_t de^{ct} + d\left\langle e^{ct}, X_t\right\rangle \\
&= e^{ct} dX_t + X_t de^{ct} \\
&= e^{ct} dX_t + X_t c e^{ct} dt \\
&= e^{ct}\left(-cX_t dt + \sigma dW_t\right) + X_t c e^{ct} dt \\
&= \sigma e^{ct} dW_t
\end{aligned}$$

es decir,

$$d\left(e^{ct} X_t\right) = \sigma e^{ct} dW_t$$

$$\begin{aligned}
e^{ct} X_t &= x + \int_0^t \sigma e^{cs} dW_s \\
X_t &= x e^{-ct} + e^{-ct} \int_0^t \sigma e^{cs} dW_s \\
&= x e^{-ct} + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dW_s
\end{aligned}$$

De aquí se puede calcular la media y la varianza de X_t.

$$\begin{aligned}
E(X_t) &= E\left(e^{-ct} x + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dW_s\right) \\
&= x e^{-ct} + \sigma e^{-ct} E\left(\int_0^t e^{cs} dW_s\right)
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
E\left(\int_0^t e^{2cs}ds\right) &= E\left(\frac{1}{2c}\int_0^t 2ce^{2cs}ds\right)\\
&= E\left(\frac{1}{2c}\left(e^{2ct}-e^{2c0}\right)\right)\\
&= E\left(\frac{1}{2c}\left(e^{2c}-1\right)\right)\\
&= \frac{e^{2ct}-1}{2c}<\infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_0^t e^{cs}dW_s$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala, tal que

$$\begin{aligned}
E\left(\int_0^t e^{cs}dW_s\right) &= E\left(\int_0^0 e^{cs}dW_s\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E\left(X_t\right)=xe^{-ct}$$

Ahora se calculará la varianza,

$$\begin{aligned}
Var\left(X_t\right) &= Var\left(xe^{-ct}+\sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}dW_s\right)\\
&= E\left[\left(xe^{-ct}+\sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}dW_s-xe^{-ct}\right)^2\right]\\
&= E\left[\left(\sigma e^{-ct}\int_0^t e^{cs}dW_s\right)^2\right]\\
&= E\left[\sigma^2 e^{-2ct}\left(\int_0^t e^{cs}dW_s\right)^2\right]\\
&= \sigma^2 e^{-2ct}E\left[\left(\int_0^t e^{cs}dW_s\right)^2\right]\\
&= \sigma^2 e^{-2ct}E\left[\int_0^t e^{2cs}ds\right]\\
&= \sigma^2 e^{-2ct}\left(\frac{e^{2ct}-1}{2c}\right)\\
&= \frac{\sigma^2\left(1-e^{-2ct}\right)}{2c}
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Modelo de Black y Scholes

4.1 Introducción

En este capítulo se aplicará la teoría de cálculo estocástico presentada en los dos capítulos anteriores.

Se abordará el modelo de precios de Black y Scholes para resolver los problemas de valuación y cobertura de las opciones europeas considerando ahora a los precios en un mercado continuo, este modelo está representado por una ecuación diferencial estocástica. Se mostrará que este modelo de precios cumple el supuesto de ausencia de oportunidad de arbitraje y se analizarán sus propiedades y características.

Las ideas estarán presentadas conforme a el capítulo 1 de este trabajo aunque se enfatizarán las diferencias existentes en la resolución de los problemas de valuación y cobertura con el caso discreto.

Al igual que en un mercado discreto, se supondrá que un portafolio estará determinado por dos activos, uno con riesgo (el activo subyacente) y el otro sin riesgo. Se introducirán *nuevamente las estrategias autofinanciables donde no hay aportaciones ni retiro de fondos pero* ahora en el caso continuo estarán representadas en función de una integral estocástica, también se introducirán las estrategias admisibles aquellas que no caen en una posición deudora. El Teorema de Girsanov dará garantía de que exista una probabilidad equivalente a la inicial bajo la cual los precios actualizados son martingala pero no llevará a las mismas conclusiones que en el caso discreto, aunque el supuesto de ausencia de oportunidad de arbitraje si se cumple, la diferencia con el caso discreto es que el valor actualizado del portafolio de las estrategias admisibles no siempre será martingala bajo esa nueva probabilidad sino una supermartingala, por lo cual la solución de los problemas de valuación y cobertura será distinto que en el caso discreto.

Finalmente se presentará en este capítulo el cálculo del precio de la opción y la obtención de la estrategia que cubre al emisor.

4.2 La Evolución de los Precios

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, donde $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ es una filtración en $(\Omega, \mathcal{F})$ y T denotará la fecha de ejercicio de la opción europea, sobre este espacio se construye el modelo continuo.

El precio del activo sin riesgo al tiempo t será tal que

$$S_t^0 = e^{rt}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad r > 0$$

donde, r será una tasa instantánea. Es conveniente pensarlo como una inversión con rendimientos instantáneos.

Cabe destacar, que el proceso $\{S_t^0\}_{0\leq t\leq T}$ puede ser escrito también en forma diferencial como

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \qquad S_0^0 = 1$$

pues la única solución de esa ecuación diferencial es

$$S_t^0 = e^{rt}$$

Se seguirá denotando como $\{S_t^1\}_{0\leq t\leq T}$ al proceso de los precios del activo con riesgo, el cual es un proceso estocástico que toma valores en R^+ y adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$, esto es, S_t^1 es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible que representará el precio de una unidad de activo con riesgo al instante t, tal que $S_t^1 > 0$ con S_0^1 una cantidad determinista (y $\mathcal{F}_0$-medible).

En la realidad los precios en los activos toman valores discretos y los cambios en el los precios se observan cuando el mercado está abierto, pero considerar a los precios de los activos con riesgo como un proceso continuo da como resultado un buen modelo de precios.

En el modelo de Black y Scholes se supondrá que el comportamiento de los precios está regido por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t^1 = S_t^1 \left(\mu dt + \sigma dB_t\right), \qquad S_0^1 = x, \qquad \mu, \sigma, x \in R^+ \tag{4.1}$$

donde, $\{B_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un Movimiento Browniano adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ y la única solución a la ecuación es

$$S_t^1 = S_0^1 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}$$

la cual se obtiene aplicando la Fórmula de Itô.

Para comprender el sentido de la ecuación (4.1) conviene dividirla en dos partes, la primer parte

$$dS_t^1 = \mu S_t^1 dt$$

que da idea de que se espera que la evolución del precio sea del tipo $S_t^1 = e^{\mu t}$.

Y al sumarle el factor $\sigma S_t^1 dB_t$ se está incorporando un ruido estocástico. Este factor es una función de un Movimiento Browniano, el cual supone que para predecir el futuro de los precios en un instante t no importa su comportamiento histórico, es decir, sólo interesa el precio en ese instante, ya que éste incorpora toda la información de su evolución pasada.

Si se ve la otra parte de la ecuación (4.1)

$$dS_t^1 = \sigma S_t^1 dB_t$$

visto de otra forma,

$$\frac{dS_t^1}{S_t^1} = \sigma dB_t$$

nos habla de la volatilidad del cambio porcentual de los precios.

Además si los precios del activo con riesgo están definidos por la expresión (4.1) tendrán una propiedad más, la propiedad lognormal que se demuestra en seguida.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{B_t\}_{0\leq t\leq T}$ un Movimiento Browniano adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$.

Teorema 4.2.1 *Sean $\mu, \sigma \in R$ y $\{S_t^1\}_{0 \leq t \leq T}$ un proceso estocástico tal que*

$$dS_t^1 = S_t^1 (\mu dt + \sigma dB_t) \qquad S_0^1 = x$$

entonces S_t^1 es una variable aleatoria lognormal.

Demostración. La única solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t^1 = S_t^1 (\mu dt + \sigma dB_t)$$

es

$$S_t^1 = S_0^1 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}$$

si y sólo si

$$\ln \left(S_t^1\right) = \ln \left(S_0^1\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t$$

donde,

$$B_t \sim N(0, t)$$

Se afirma entonces que

$$\ln \left(S_t^1\right) \sim N \left(\ln \left(S_0^1\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t, \sigma^2 t\right)$$

es decir,

$$S_t^1 \sim \log normal \left(\ln \left(S_0^1\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t, \sigma^2 t\right) \quad \blacksquare$$

Entonces, con las propiedades de la Distribución Lognormal se concluye que

$$E\left(S_t^1\right) = S_0^1 e^{\mu t}$$

y que

$$Var\left(S_t^1\right) = \left(S_0^1\right)^2 e^{2\mu t} \left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$$

La siguiente proposición es aún más fuerte.

Proposición 4.2.1 *Sean* $\mu, \sigma \in R$ *y* $\{S_t^1\}_{0 \leq t \leq T}$ *un proceso estocástico tal que*

$$dS_t^1 = S_t^1 \left(\mu dt + \sigma dB_t\right) \qquad S_0^1 = x$$

entonces $\ln\left(S_t^1\right)$ *es un Movimiento Browniano.*

Demostración. Basta demostrar que el proceso $\{\ln\left(S_t^1\right)\}_{0 \leq t \leq T}$ cumple:

(a) Continuidad de trayectorias.

La continuidad es clara ya que $\{B_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es continuo respecto a t lo cual implica que $\ln\left(S_t^1\right) = \ln\left(S_0^1\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t$ es continuo también respecto a t.

(b) Independencia de incrementos.

P.d. si $u \leq t$, entonces $\ln\left(S_t^1\right) - \ln\left(S_u^1\right) = \ln\left(\frac{S_t^1}{S_u^1}\right)$ es independiente de la σ-álgebra $\sigma\left(\ln\left(S_v^1\right),\ v \leq u\right)$.

Esto es equivalentemente a demostrar la independencia de incrementos relativos del proceso $\{S_t^1\}_{0 \leq t \leq T}$. Es decir, hay que probar que si $u \leq t$, entonces $\frac{S_t^1}{S_u^1}$ o (lo que es lo mismo) el incremento relativo $\frac{\left(S_t^1 - S_u^1\right)}{S_u^1}$ es independiente de la σ-álgebra $\sigma\left(S_v^1,\ v \leq u\right)$.

Como

$$\frac{S_t^1}{S_u^1} = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u) + \sigma(B_t - B_u)}$$

y como $(B_t - B_u)$ es independiente de $\sigma\left(B_v,\ v \leq u\right)$, entonces $\frac{S_t^1}{S_u^1}$ es independiente de $\sigma\left(S_v^1,\ v \leq u\right)$.

(c) Incrementos estacionarios.

P.d. si $u \leq t$, entonces la distribución de $\ln\left(\frac{S_t^1}{S_u^1}\right)$ es la misma que la de $\ln\left(\frac{S_{t-u}^1}{S_0^1}\right)$.

O bien equivalentemente demostrar que los incrementos relativos del proceso $\{S_t^1\}_{0 \leq t \leq T}$ son estacionarios. Es decir, si $u \leq t$, entonces la distribución de $\frac{\left(S_t^1 - S_u^1\right)}{S_u^1}$ es idéntica a la de $\frac{\left(S_{t-u}^1 - S_0^1\right)}{S_0^1}$.

Sea $z \in R^+$,

$$P\left[\frac{S_t^1}{S_u^1} < z\right] \quad = \quad P\left[e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u) + \sigma(B_t - B_u)} < z\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left[e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u)+\sigma(B_{t-u})} < z\right] \\
&= P\left[\frac{S^1_{t-u}}{S^1_0} < z\right]
\end{aligned}
$$

por lo tanto, la distribución de $\frac{S^1_{t-u}}{S^1_0}$ es la misma que la de $\frac{S^1_t}{S^1_u}$.

Una vez más como el problema de la cobertura implica buscar la estrategia de inversión a seguir, se definirá para un mercado continuo lo que es una estrategia.

4.3 Estrategias Autofinanciables

Definición 4.3.1 *Una estrategia es un proceso $\phi = \{\phi_t\}_{0\leq t\leq T} = \{(H^0_t, H^1_t)\}_{0\leq t\leq T}$ que toma valores en R^2 y predecible a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ del Movimiento Brouwniano.*

Donde, H^0_t representa la cantidad de activo sin riesgo invertida en el instante t y H^1_t representa la cantidad de activo con riesgo invertida en el instante t.

Definición 4.3.2 *El Valor del Portafolio al tiempo t siguiendo la estrategia ϕ está dado por*

$$V_t(\phi) = H^0_t S^0_t + H^1_t S^1_t \qquad 0 \leq t \leq T$$

Al igual que en el caso discreto, serán de interés las estrategias autofinanciables, aquellas en las que no hay aportación o retiro de fondos, es decir, las que satisfacen que las variaciones en el valor del portafolio se deben sólo a las ganancias de la variación de los precios. Esto es, para el caso discreto las estrategias autofinanciables cumplían la siguiente ecuación (1.5)

$$V_n(\phi) - V_{n-1}(\phi) = \phi^0_n\left(S^0_n - S^0_{n-1}\right) + \phi^1_n\left(S^1_n - S^1_{n-1}\right) \quad \forall\, n \geq 1$$

que se transformaba en la expresión (1.6)

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi^0_j\left(S^0_j - S^0_{j-1}\right) + \sum_{j=1}^{n} \phi^1_j\left(S^1_j - S^1_{j-1}\right) \tag{4.2}$$

Para el caso continuo la traducción es casi inmediata.

Definición 4.3.3 *Una estrategia autofinanciable es una pareja ϕ de procesos predecibles $\{H_t^0\}_{0\leq t\leq T}$ y $\{H_t^1\}_{0\leq t\leq T}$, tales que*

1. $\int_0^T |H_t^0|\, dt + \int_0^T (H_t^1)^2\, dt < \infty$

2. $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u^0\, dS_u^0 + \int_0^t H_u^1\, dS_u^1$

La condición 1 asegura que las integrales de la condición 2 estén bien definidas. Esto es,

$$\int_0^T \left|H_u^0\right| du < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_0^T H_u^0\, dS_u^0 = \int_0^T H_u^0 re^{ru} du < \infty$$

y

$$\int_0^T \left(H_u^1\right)^2 du < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_0^T H_u^1\, dS_u^1 = \int_0^T H_u^1 \mu S_u^1\, du + \int_0^T H_u^1 \sigma S_u^1\, dB_u < \infty$$

Cabe resaltar que la condición 2 puede ser escrita en forma diferencial como

$$dV_t(\phi) = H_t^0\, dS_t^0 + H_t^1\, dS_t^1$$

lo cual no es más que en análogo a la expresión (1.5)

$$V_n(\phi) - V_{n-1}(\phi) = \phi_n^0 \left(S_n^0 - S_{n-1}^0\right) + \phi_n^1 \left(S_n^1 - S_{n-1}^1\right) \quad \forall\, n \geq 1$$

En el caso particular del Modelo de Black y Scholes, se tiene que

$$dV_t(\phi) = H_t^0\, dS_t^0 + H_t^1\, S_t^1 (\mu dt + \sigma dB_t)$$

Dentro de la siguiente proposición se definirá el precio actualizado y el valor actualizado del portafolio.

Proposición 4.3.1 *Sea $\phi = \{(H_t^0, H_t^1)\}_{0\leq t\leq T}$ un proceso estocástico predecible con valores en R^2, tal que*

$$\int_0^T \left|H_t^0\right|\, dt + \int_0^T \left(H_t^1\right)^2\, dt < +\infty$$

Sean

$$\widetilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi) \quad y \quad \widetilde{S}_t^1 = \frac{S_t^1}{S_t^0}$$

el valor actualizado del portafolio y el valor actualizado de el precio del activo con riesgo respectivamente.

Entonces ϕ es una estrategia autofinanciable si y sólo si

$$\widetilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u^1 \, d\widetilde{S}_u^1 \quad P \text{ c.s.} \quad \forall\, t \in [0,T]$$

Demostración. $\Leftrightarrow$) ϕ es autofinanciable por definición si y sólo si

$$\begin{aligned} V_t(\phi) &= V_0(\phi) + \int_0^t H_u^0 \, dS_u^0 + \int_0^t H_u^1 \, dS_u^1 \\ &= V_0(\phi) + \int_0^t rH_u^0 S_u^0 \, du + \int_0^t H_u^1 \, dS_u^1 \end{aligned}$$

donde las integrales tienen sentido gracias a que $\int_0^T |H_t^0| \, dt < \infty$ y $\int_0^T (H_t^1)^2 \, dt < \infty$, entonces $V_t(\phi)$ es un proceso de Itô.

Se sabe que,

$$\widetilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$$

entonces utilizando la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned} e^{-rt} V_t(\phi) &= V_0(\phi) + \int_0^t e^{-ru} dV_u(\phi) + \int_0^t V_u(\phi) \, de^{-ru}, \qquad \left\langle e^{-rt}, V_t \right\rangle = 0 \\ &= V_0(\phi) + \int_0^t e^{-ru} dV_u(\phi) + \int_0^t V_u(\phi)(-r) e^{-ru} du \end{aligned}$$

equivalentemente en forma diferencial

$$\begin{aligned} d\left(\widetilde{V}_t(\phi)\right) &= d\left(e^{-rt} V_t(\phi)\right) \\ &= e^{-rt} dV_t(\phi) - re^{-rt} V_t(\phi) \, dt \\ &= e^{-rt}\left(H_t^0 dS_t^0 + H_t^1 dS_t^1\right) - re^{-rt}\left(H_t^0 S_t^0 + H_t^1 S_t^1\right) dt \\ &= e^{-rt}\left(H_t^0 r e^{rt} dt + H_t^1 dS_t^1\right) - re^{-rt}\left(H_t^0 e^{rt} + H_t^1 S_t^1\right) dt \\ &= rH_t^0 dt + e^{-rt} H_t^1 dS_t^1 - rH_t^0 dt - re^{-rt} H_t^1 S_t^1 dt \\ &= e^{-rt} H_t^1 dS_t^1 - rH_t^1 \widetilde{S}_t^1 dt \\ &= H_t^1 \left(e^{-rt} dS_t^1 - r\widetilde{S}_t^1 dt\right) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\widetilde{S}_t^1 = e^{-rt} S_t^1$$

donde, S_t^1 es un proceso de Itô.

Con la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_t^1 &= e^{-rt} S_t^1 \\
&= e^{-r0} S_0^1 + \int_0^t e^{-ru} dS_u^1 + \int_0^t S_u^1 de^{-ru}, \qquad \left\langle e^{-rt}, S_t^1 \right\rangle = 0 \\
&= S_0 + \int_0^t e^{-ru} dS_u^1 + \int_0^t S_u^1 (-r) e^{-ru} du
\end{aligned}$$

escrito en forma diferencial,

$$\begin{aligned}
d\widetilde{S}_t^1 &= e^{-rt}\, dS_t^1 - re^{-rt} S_t^1\, dt \\
&= e^{-rt}\, dS_t^1 - r\widetilde{S}_t^1\, dt
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad d\left(\widetilde{V}_t(\phi)\right) = H_t^1\, d\widetilde{S}_t^1$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_t(\phi) &= \widetilde{V}_0(\phi) + \int_0^t H_u^1\, d\widetilde{S}_u^1 \\
&= V_0(\phi) + \int_0^t H_u^1\, d\widetilde{S}_u^1 \quad P\ c.s. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

La importancia de esta proposición radica en que el valor actualizado del portafolio asociado con una estrategia autofinanciable depende sólo del valor inicial del portafolio y de la inversión en el activo con riesgo.

4.4 Arbitraje o Cambio de Probabilidad

Al igual que en el caso discreto se requerirá que sea imposible obtener ganancias sin tomar riesgos o bien dicho de otra manera, que sea imposible obtener dinero sin dinero, es decir, se requiere que no haya oportunidad de arbitraje.

En el caso continuo también interesan aquellas estrategias cuyo valor de portafolio asociado en cualquier momento no caiga en una posición deudora, aunque también estarán permitidas las ventas a descubierto y los préstamos. Al igual que en el caso discreto se definirán entonces las estrategias admisibles.

Definición 4.4.1 *Una estrategia $\phi = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ es admisible si es autofinanciable y si el valor actualizado $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t$ del portafolio correspondiente es positivo para toda t.*

Pero desafortunadamente éstas no llevarán a las mismas conclusiones que en el caso discreto. Recuérdese que en caso discreto el valor actualizado del portafolio asociado a una estrategia admisible era también una martingala, ahora será distinto.

Una de las diferencias con el modelo discreto es que no se va a tener una proposición análoga a 1.8.1, hay que conformarse con que exista una probabilidad P^* equivalente a P bajo la cual los precios actualizados son martingala y entonces así no habrá oportunidad de arbitraje.

Teorema 4.4.1 *Supóngase que existe P^* una probabilidad equivalente a P bajo la cual los precios actualizados $\left\{\tilde{S}_t\right\}_{0 \leq t \leq T}$ son martingala y sea $\phi = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ una estrategia admisible, entonces $\tilde{V}_t(\phi)$ es una supermartingala bajo P^* y no existirá oportunidad de arbitraje.*

Demostración. Gracias a la *proposición 4.3.1*, al *teorema D.1.2* y al colorario D.1.1 se tiene que $\tilde{V}_t(\phi)$ es una supermartingala bajo P^*.

Entonces, si ϕ es una estrategia admisible entonces $E^*\left(\tilde{V}_T(\phi)\right) \leq E^*\left(\tilde{V}_0(\phi)\right) \quad P^*$ c.s., con lo cual

(a) $V_0(\phi) = 0$ y $V_T(\phi) = 0 \quad P^*$ *c.s.* o bien

(b) $V_0(\phi) > 0$ y $V_T(\phi) = 0 \quad P^*$ *c.s.*

Como P^* es equivalente a P por (a) se tiene que no existe oportunidad de arbitraje P *c.s.*

A las estrategias del tipo (b) se les denomina estrategias suicidas, ya que con estas, una inversión inicial positiva es llevada a cero, más adelante se dará un ejemplo de ellas. ■

En el Modelo de Black y Scholes la ausencia de oportunidad de arbitraje está garantizada por el Teorema de Girsanov.

A continuación se aplicará el Teorema de Girsanov para mostrar que existe una probabilidad bajo la cual los precios actualizados según el modelo de Black y Scholes son martingala, con lo cual no existirá oportunidad de arbitraje.

Proposición 4.4.1 *En el modelo de Black y Scholes existe una probabilidad equivalente a la probabilidad inicial P, bajo la cual el precio actualizado del activo con riesgo $\widetilde{S}_t^1 = e^{-rt}S_t^1$ de la acción es una martingala.*

Demostración. Se tiene,

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{S}_t^1 &= -re^{-rt}S_t^1\,dt + e^{-rt}\,dS_t^1 \\
&= -r\widetilde{S}_t^1\,dt + e^{-rt}\left(S_t^1\,(\mu\,dt + \sigma\,dB_t)\right) \\
&= -r\widetilde{S}_t^1\,dt + \mu e^{-rt}S_t^1\,dt + \sigma e^{-rt}S_t^1\,dB_t \\
&= -r\widetilde{S}_t^1\,dt + \mu\widetilde{S}_t^1\,dt + \sigma\widetilde{S}_t^1\,dB_t \\
&= \widetilde{S}_t^1\,((\mu - r)\;dt + \sigma\,dB_t) \\
&= \sigma\widetilde{S}_t^1\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\,dt + dB_t\right)
\end{aligned}
$$

Sea

$$W_t = B_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma}\,dt$$

$$\Rightarrow dW_t = dB_t + \frac{\mu - r}{\sigma}\,dt$$

$$\therefore \quad d\widetilde{S}_t^1 = \sigma\widetilde{S}_t^1\,dW_t \tag{4.3}$$

Se utilizará el Teorema de Girsanov para demostrar que bajo una probabilidad P^*, el proceso estocástico $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un Movimiento Browniano estándar.

Sea $\theta_s = \frac{\mu - r}{\sigma}$, es decir, $\{\theta_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso constante, entonces

$$\int_0^T \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 ds < \infty$$

y definimos

$$
\begin{aligned}
L_t &= e^{-\int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma}\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 ds} \\
&= e^{-\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)B_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 t}
\end{aligned}
$$

y por la proposición 2.2.3 es una martingala bajo P.

Por el Teorema de Girsanov D.1.1, se tiene que bajo la probabilidad $P^{(L_T)}$ el proceso $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un Movimiento Browniano estándar.

Entonces se sabe por el teorema 2.6.1 que la ecuación diferencia estocástica

$$d\widetilde{S}_t^1 = \sigma \widetilde{S}_t^1 dW_t$$

tiene una única solución dada por

$$\widetilde{S}_t^1 = \widetilde{S}_0^1 e^{\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)} \tag{4.4}$$

Y de acuerdo a la proposición 2.2.3 $\widetilde{S}_t^1$ es una martingala bajo $P^{(L_T)}$.

La equivalencia de las dos probabilidades será demostrada en la siguiente proposición. ■

Proposición 4.4.2 *P es equivalente a $P^{(L_T)}$*

Demostración.

1. P.d. $P^{(L_T)} << P$

   Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $P(A) = 0$,

$$P^{(L_T)}(A) = \int_A L_T \, dP = 0$$

2. P.d. $P << P^{(L_T)}$

   Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $P^{(L_T)}(A) = 0$,

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_A dP \\ &= \int_A \frac{L_T}{L_T} \, dP \\ &= \int_A \frac{1}{L_T} L_T \, dP, \qquad L_T > 0 \\ &= \int_A \frac{1}{L_T} \, dP^{(L_T)} \\ &= 0 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

De aquí en adelante P^* representará la probabilidad equivalente a P bajo la cual $\left\{\tilde{S}_t^1\right\}_{0\leq t\leq T}$ es una martingala.

4.5 Completez

Una vez que se tiene que existe P^* una probabilidad equivalente a P bajo la cual los precios actualizados son martingala, esto es, una vez que hay ausencia de oportunidad de arbitraje, es posible pasar a resolver el problema de la cobertura del emisor.

Definición 4.5.1 *Una opción es simulable si su valor a la fecha de ejercicio es igual a el valor final de una estrategia admisible. Se denotará T como la fecha de ejercicio.*

Es decir, sea h =valor de la opción al instante T, (h es una variable aleatoria $\mathcal{F}_T$-medible), entonces una opción de valor h al instante T es simulable si y sólo si $\exists\ \phi$ una estrategia admisible tal que $h = V_T(\phi)$.

El problema se tratará de manera más general, se pensará que h es el valor al tiempo T de un activo simulable contingente, en particular puede ser un call o un put europeo.

Una de las diferencias importantes con el modelo discreto es que si todas las estrategias admisibles fueran permitidas entonces los precios de los activos simulables contingentes podrían no ser únicos. Supóngase que h es simulable por una estrategia cuyo valor inicial es π entonces sería posible añadir una estrategia suicida tal que se simulara a h pero ahora comenzando con un valor de $\pi + 1$.

Ahora se presenta un ejemplo de estrategias suicidas, aquellas cuyo valor inicial asociado es positivo y es llevado a cero al final del período, ver Harrison [13].

Ejemplo 4.5.1 *Considérese por facilidad un horizonte de tiempo $T = 1$, que el capital inicial es de 1 unidad monetaria, esto es $V_0 = 1$, que $S_t^0 = S_0^0 e^{rt}$ con $r = 0$ y con $S_0^0 = 1$. En base a estas hipótesis es posible construir una estrategia tal que $V_T = 0$.*

Denótese τ el tiempo en que se llega a la ruina.

Utilícese la siguiente estrategia.

Sea $b = 1$

$$\phi_t^0 = 1 + b = 2 \qquad \text{y} \qquad \phi_t^1 = -b = -1 \quad \forall\, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

claramente se tiene que

$$\begin{aligned} V_0 &= \phi_0^0 S_0^0 + \phi_0^1 S_0^1 \\ &= (1+b) - b \\ &= 1 \end{aligned}$$

y si hasta el tiempo $\frac{1}{2}$ se tiene que $V_{\frac{1}{2}} \geq 1$, entonces se buscará b_1 tal que

$$\phi_t^1 = -b_1 \quad \forall\, t \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$$

y que

$$P\left[\frac{1}{2} < \tau \leq \frac{3}{4} \middle| \tau > \frac{1}{2}\right] = P\left[0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\right]$$

manteniendo una estrategia autofinanciable

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{1}{2}}^0 &= V_{\frac{1}{2}} - \phi_{\frac{1}{2}}^1 S_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= V_{\frac{1}{2}} + b_1 S_{\frac{1}{2}}^1 \end{aligned}$$

En caso de que se llegue al tiempo $\frac{3}{4}$ y $V_{\frac{3}{4}} \geq 1$ una vez más se buscará b_2 tal que

$$\phi_t^1 = -b_2 \quad \forall\, t \in \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$$

y que

$$P\left[\frac{3}{4} < \tau \leq \frac{7}{8} \middle| \tau > \frac{3}{4}\right] = P\left[0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\right]$$

manteniendo una estrategia autofinanciable

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{3}{4}}^0 &= V_{\frac{3}{4}} - \phi_{\frac{3}{4}}^1 S_{\frac{3}{4}}^1 \\ &= V_{\frac{3}{4}} + b_2 S_{\frac{3}{4}}^1 \end{aligned}$$

En general, en caso de que se llegué al tiempo $t_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ y $V_{1-\frac{1}{2^n}} \geq 1$ se buscará b_n tal que

$$\phi_t^1 = -b_n \quad \forall\, t \in (t_n, t_{n+1}]$$

y que

$$P\left[t_n < \tau \leq t_{n+1} \,|\tau > t_n\right] = P\left[0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\right]$$

manteniendo una estrategia autofinanciable

$$\begin{aligned} \phi_{t_n}^0 &= V_{t_n} - \phi_{t_n}^1 S_{t_n}^1 \\ &= V_{t_n} + b_n S_{t_n}^1 \end{aligned}$$

Entonces,

$$P\left[\tau > \frac{1}{2}\right] = 1 - P\left[0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} P\left[\tau > \frac{3}{4}\right] &= P\left[\tau \notin \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \middle| \tau > \frac{1}{2}\right] P\left[\tau > \frac{1}{2}\right] \\ &= \left(1 - P\left[0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\right]\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left[\tau > \frac{7}{8}\right] &= P\left[\tau \notin \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right] \middle| \tau > \frac{3}{4}\right] P\left[\tau > \frac{3}{4}\right] \\ &= \left(1 - P\left[0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\right]\right)^3 \end{aligned}$$

es decir, la probabilidad de no arruinarse hasta el tiempo t_n $n \in N^+$ está dada por

$$\begin{aligned} P\left[\tau > t_n\right] &= P\left[\tau \notin (t_{n-1}, t_n] \,|\tau > t_n\right] P\left[\tau > t_{n-1}\right] \\ &= \left(1 - P\left[0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\right]\right)^n \end{aligned}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\tau > t_n\right] = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = 1$$

por lo tanto se ha encontrado una estrategia autofinanciable ϕ tal que $V_0(\phi) = 1$, $V_1(\phi) = 0$ y $V_t(\phi) \geq 0 \; \forall \, t \in [0, 1]$.

■

Surge ahora la siguiente definición.

Definición 4.5.2 *Sea Φ el conjunto de las estrategias admisibles que simulan a h, entonces se define a el precio justo del activo simulable h en el tiempo 0 como*

$$x_0 = \inf_{\phi \in \Phi} V_0(\phi)$$

Sí se recuerda en el caso discreto, era natural definir como el precio de la opción al tiempo 0 a $E^*\left(e^{-rT}h\right)$, en el caso discreto no es tan natural, por lo cual conviene plantear las siguientes dos proposiciones.

Proposición 4.5.1 *Sea h un activo simulable y cuadrado integrable y x_0 su precio justo en el tiempo 0, entonces*

$$E^*\left(e^{-rT}h\right) < \infty \qquad y \qquad E^*\left(e^{-rT}h\right) \leq x_0$$

Demostración. Primero se demostrará que $E^*\left(e^{-rT}h\right) < \infty$.

Se sabe por la ecuación (4.4) que

$$\tilde{S}_T^1 = S_0^1 e^{\left(\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2} T\right)}$$

entonces

$$\begin{aligned}
E^*\left(e^{-rT}h\right) &= e^{-rT} E^*(h) \\
&= e^{-rT} \frac{E\left(\tilde{S}_T^1 h\right)}{\tilde{S}_0^1} \qquad \text{por D.1.3} \\
&\leq \frac{e^{-rT}}{S_0^1} \left(E\left[\left(\tilde{S}_T^1\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \left(E\left(h^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \text{por A.0.2}
\end{aligned}$$

pero,

$$E\left[\left(\tilde{S}_T^1\right)^2\right] = E\left[S_0^1 e^{\left(2\sigma W_T - 2\frac{\sigma^2}{2} T\right)}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left[S_0^1 e^{\left(2\sigma\left(B_T+\frac{\mu-r}{\sigma}T\right)-2\frac{\sigma^2}{2}T\right)}\right] \\
&= E\left[S_0^1 e^{\left(2\sigma B_T+2\mu T-2rT-2\frac{\sigma^2}{2}T+\frac{(2\sigma)^2}{2}T-\frac{(2\sigma)^2}{2}T\right)}\right] \\
&= E\left[S_0^1 e^{\left(2\sigma B_T-\frac{(2\sigma)^2}{2}T\right)} e^{2\mu T-2rT-2\frac{\sigma^2}{2}T+\frac{(2\sigma)^2}{2}T}\right] \\
&= E\left[S_0^1 e^{\left(2\sigma B_T-\frac{(2\sigma)^2}{2}T\right)}\right] E\left[e^{2\mu T-2rT-2\frac{\sigma^2}{2}T+\frac{(2\sigma)^2}{2}T}\right] \\
&= S_0^1 E\left[e^{2\mu T-2rT-2\frac{\sigma^2}{2}T+\frac{(2\sigma)^2}{2}T}\right] < \infty
\end{aligned}
$$

entonces

$$E^*\left(e^{-rT}h\right) < \infty$$

Por otra parte, se sabe que para toda ϕ estrategia admisible que simula a h $(\phi \in \Phi)$,

$$E^*\left(\widetilde{V}_T(\phi)\right) \leq V_0(\phi)$$

ya que $\left\{\widetilde{V}_t(\phi)\right\}_{0\leq t\leq T}$ es una supermartingala bajo P^*, y como $x_0 = \inf_{\phi\in\Phi} V_0(\phi)$, entonces

$$E^*\left(\widetilde{V}_T(\phi)\right) \leq x_0$$

pero $h = V_T(\phi)$, por lo tanto

$$E^*\left(e^{-rT}h\right) \leq x_0 \quad \blacksquare$$

Teorema 4.5.1 *Sea h un activo simulable cuadrado integrable y x_0 su precio justo en el tiempo 0, entonces en el modelo de Black y Scholes*

$$E^*\left(e^{-rT}h\right) = x_0$$

y más aún, existe una estrategia $\overline{\phi}$ admisible que simula a h tal que

$$x_0 = V_0\left(\overline{\phi}\right)$$

Demostración. Por ahora, se supondrá que toda variable aleatoria h $\mathcal{F}_T$-medible y de cuadrado integrable bajo P^* es simulable, es decir, $\exists$ $\{\phi_t\}_{0\leq t\leq T} = \{(H_t^0, H_t^1)\}_{0\leq t\leq T}$ una estrategia admisible que simula a h, es decir, que es autofinanciable y tal que $h = V_T(\phi)$ y $V_t(\phi) > 0 \, \forall \, 0 \leq t \leq T$.

Por otra parte con las proposiciones 4.3.1 y 4.4.1 se tiene que

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_t(\phi) &= V_0(\phi) + \int_0^t H_u^1 \, d\widetilde{S}_u^1 \quad P \text{ c.s.} \\ &= V_0(\phi) + \int_0^t H_u^1 \sigma \widetilde{S}_u^1 \, dW_u \end{aligned} \tag{4.5}$$

Y como h es cuadrado integrable,

$$\begin{aligned} E^*\left[\left(\widetilde{V}_T(\phi)\right)^2\right] &= E^*\left[\left(V_0(\phi) + \int_0^T H_u^1 \sigma \widetilde{S}_u^1 \, dW_u\right)^2\right] \\ &= E^*\left[(V_0(\phi))^2\right] + 2E^*\left[V_0(\phi)\int_0^T H_u^1 \sigma \widetilde{S}_u^1 \, dW_u\right] + E^*\left[\left(\int_0^T H_u \sigma \widetilde{S}_u^1 \, dW_u\right)^2\right] \\ &< \infty \end{aligned}$$

si y sólo si

$$E^*\left[\left(\int_0^T H_u^1 \sigma \widetilde{S}_u^1 \, dW_u\right)^2\right] < \infty \quad \forall \, t \in [0,T]$$

Entonces por la propiedad 2 de la proposición 2.3.4 de la integral estocástica, se obtiene que

$$E^*\left[\int_0^T \left(H_u^1 \sigma \widetilde{S}_u^1\right)^2 dW_u\right] < \infty \quad \forall \, t \in [0,T]$$

entonces

$$\left\{\int_0^t H_u^1 \sigma \widetilde{S}_u^1 \, dW_u\right\}_{0\leq t\leq T} \text{ es una martingala bajo } P^*$$

y

$$\left\{\widetilde{V}_t(\phi)\right\}_{0\leq t\leq T} = \left\{V_0(\phi) + \int_0^t H_u^1 \sigma \widetilde{S}_u^1 dW_u\right\}_{0\leq t\leq T} \quad \text{es una } \mathcal{F}_t\text{-martingala bajo } P^* \tag{4.6}$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{V}_t(\phi) = E^*\left[\widetilde{V}_T(\phi)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \widetilde{V}_t(\phi) = E^*\left[e^{-rT}V_T(\phi)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \widetilde{V}_t(\phi) = E^*\left[e^{-rT}h\middle|\mathcal{F}_t\right], \quad \phi \text{ simula a } h$$

entonces

$$V_t(\phi) = E^*\left[e^{-r(T-t)}h\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

y claramente se tiene $E^*\left[e^{-rT}h\right] = V_0(\phi)$.

Ahora el problema se reduce a demostrar que $\exists\ \{\phi_t\}_{0\le t\le T} = \{(H_t^0, H_t^1)\}_{0\le t\le T}$, tal que

$$V_t(\phi) = E^*\left(e^{-r(T-t)}h\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

Claramente esta condición implica que $V_T(\phi) = h$, es decir, ϕ simula a la opción definida al tiempo T como h y también es visible que $V_t(\phi) > 0\ \forall\ t \in [0,T]$.

Como $\left\{\widetilde{V}_t(\phi)\right\}_{0\le t\le T}$ es una martingala bajo P^*, entonces

$$\{M_t\}_{0\le t\le T} = \left\{E^*\left(e^{-rT}h\middle|\mathcal{F}_t\right)\right\}_{0\le t\le T} \text{ es una martingala bajo } P^*$$

por el momento supóngase que es cuadrado integrable.

Por el Teorema de Representación de Martingalas D.2.1 existe $\{K_t\}_{0\le t\le T}$ un proceso adaptado tal que

$$E^*\left(\int_0^t K_u^2\,du\right) < \infty$$

y

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_u\,dW_u$$

Pero se sabe que

$$\widetilde{V}_t(\phi) = \widetilde{V}_0(\phi) + \int_0^t H_u^1\sigma\widetilde{S}_u^1\,dW_u$$

entonces una manera natural de definir a $\{\phi_t\}_{0\le t\le T} = \{(H_t^0, H_t^1)\}_{0\le t\le T}$ es

$$K_u = H_u^1\sigma\widetilde{S}_u^1$$

si y sólo si

$$H_u^1 = \frac{K_u}{\sigma \tilde{S}_u^1}$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} V_u(\phi) &= H_u^0 S_u^0 + H_u^1 S_u^1 \\ &= e^{ru} M_u \end{aligned}$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} H_u^0 &= \frac{e^{ru} M_u - H_u^1 S_u^1}{S_u^0} \\ &= \frac{e^{ru} M_u - H_u^1 S_u^1}{e^{ru}} \\ &= M_u - H_u^1 S_u^1 \\ &= E^* \left(e^{-rT} h \middle| \mathcal{F}_u \right) - \frac{K_u}{\sigma \tilde{S}_u^1} S_u^1 \\ &= E^* \left(e^{-rT} h \middle| \mathcal{F}_u \right) - e^{ru} \frac{K_u}{\sigma} \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que existe una estrategia $\left\{ \overline{\phi}_t \right\}_{0 \le t \le T} = \left\{ \left(E^* \left(e^{-rT} h \middle| \mathcal{F}_u \right) - e^{ru} \frac{K_u}{\sigma}, \frac{K_u}{\sigma \tilde{S}_u^1} \right) \right\}$ tal que, simula a h cuadrado integrable y como

$$E^* \left[e^{-rT} h \right] = V_0 \left(\overline{\phi} \right)$$

por la proposición 4.5.1 se tiene que

$$E^* \left[e^{-rT} h \right] = x_0$$

■

Naturalmente se ocurre definir la prima del activo contingente cuadrado integrable a el valor del portafolio de la estrategia de valor mínimo, es decir

$$V_t \left(\overline{\phi} \right) = E^* \left(e^{-r(T-t)} h \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

En el caso particular de un call o un put europeo se tiene que el valor en la fecha de ejercicio es una variable aleatoria cuadrado integrable. A continuación se demostrará esa propiedad.

Proposición 4.5.2 *El precio de un call al instante T es una variable aleatoria cuadrado integrable bajo la probabilidad P^*.*

Demostración. P.d. $h = (S_T - K)_+$ es una variable aleatoria cuadrado integrable bajo P^*.

$$
\begin{aligned}
E^*\left(h^2\right) &= E^*\left[(S_T - K)_+^2\right] \\
&\leq E^*\left[(S_T)^2\right] \qquad (S_T - K)_+ \leq S_T \\
&= E^*\left[e^{2rT}\left(\tilde{S}_T\right)^2\right] \\
&= e^{2rT}E^*\left[\tilde{S}_T^2\right] \\
&= e^{2rT}E^*\left[\left(\tilde{S}_0 e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}\right)^2\right] \\
&= \tilde{S}_0 e^{2rT}E^*\left[e^{2\sigma W_T - \sigma^2 T}\right] \\
&= \tilde{S}_0 e^{2rT}E^*\left[e^{\beta W_T - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 T}\right], \qquad \beta = 2\sigma \\
&= \tilde{S}_0 e^{2rT}E^*\left[e^{\beta W_T - \frac{\beta^2}{2}T + \frac{\beta^2}{2}T - \frac{\beta^2}{4}T}\right] \\
&= \tilde{S}_0 e^{2rT - \frac{\beta^2}{4}T}E^*\left[e^{\beta W_T - \frac{\beta^2}{2}T}\right] \\
&= \tilde{S}_0 e^{2rT - \frac{\beta^2}{4}T}E^*\left[e^{\beta W_0 - \frac{\beta^2}{2}0}\right] \\
&= \tilde{S}_0 e^{2rT - \frac{\beta^2}{4}T}E^*\left[e^0\right] \\
&= \tilde{S}_0 e^{2rT - \frac{(2\sigma)^2}{4}T} < \infty \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Proposición 4.5.3 *El precio de un put al instante T es una variable aleatoria cuadrado integrable bajo la probabilidad P^*.*

Demostración. P.d. $h = (K - S_T)_+$ es cuadrado integrable bajo P^*.

$$
E^*\left(h^2\right) = E^*\left[(K - S_T)_+^2\right] \quad K \geq 0,\ K \in R
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq E^*\left(K^2\right)\\
&= K^2 < \infty \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

En conclusión el valor de la opción europea al instante t está definido de forma natural por la expresión

$$E^*\left(e^{-r(T-t)}h\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

4.6 Valuación

El problema de la valuación de opciones consiste en ponerle precio a la opción en cualquier momento del tiempo. Se utilizará el Modelo de Precios de Black y Scholes para resolver este problema.

La siguiente proposición será necesaria para resolverlo.

Proposición 4.6.1 *Sean*

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B_t} \qquad \forall t \in [0,T]$$

y

$$W_t = B_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)t$$

entonces

$$S_T = S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
S_T &= S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma B_T}\\
&= S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\left(W_T-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)T\right)}\\
&= S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T}\\
&= S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T} e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t} e^{-\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t\right\}} \qquad t \in [0,T]\\
&= S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t} e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\left(B_t+\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)t\right)} e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \\
&= S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B_t} e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \\
&= S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

En las siguientes dos proposiciones se obtendrá el precio del call y el put europeo.

Proposición 4.6.2 *El precio de una opción call europea en el instante t está dado por*

$$
F(t, S_t) = S_t G(d_1) - K e^{-r(T-t)} G(d_2)
$$

donde, $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$, $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right)+(T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ *y G es la función de distribución de una variable aleatoria $N(0,1)$.*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
E^*\left[e^{-r(T-t)}h\middle|\mathcal{F}_t\right] &= E^*\left[e^{-r(T-t)}f(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right], \qquad f(S_T) = (S_T-K)_+ \\
&= E^*\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] \quad \text{(proposición 4.6.1)} \\
&= E^*\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

ya que S_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $W_T - W_t$ es independiente de $\mathcal{F}_t$.

Es posible ver el precio del call en el instante t como una función del precio en ese mismo instante.

$$
F(t, S_t) = E^*\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\right] \tag{4.7}
$$

De acuerdo a la proposición B.2.12 para calcular $F(t, S_t)$ se calculará $F(t,x)$ y después se evaluará en S_t.

$$
\begin{aligned}
F(t,x) &= E^*\left[e^{-r(T-t)}f\left(x e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\right] \\
&= E^*\left[e^{-r(T-t)}f\left(x e^{r(T-t)} e^{\sigma W_{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

donde $W_{T-t} \sim N(0, T-t)$ bajo P^*.

Entonces,

$$F(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} f\left(xe^{r(T-t)} e^{\sigma w - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right) \frac{e^{-\frac{w^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dw$$

Sea $Z = \frac{W_{T-t}}{\sqrt{T-t}}$, entonces $Z \sim N(0,1)$ y

$$dz = \frac{1}{\sqrt{T-t}} dw$$

se tiene

$$\begin{aligned}
F(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} f\left(xe^{r(T-t)} e^{\sigma z\sqrt{T-t} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}\right) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} \left(xe^{r(T-t)} e^{\sigma z\sqrt{T-t} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} - K\right)_+ \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(xe^{\sigma z\sqrt{T-t} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}\right)_+ \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(xe^{\sigma z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} - Ke^{-r\theta}\right)_+ \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz, \quad \theta = T-t \\
&= E^*\left[\left(xe^{\sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} - Ke^{-r\theta}\right)_+\right], \quad Z \sim N(0,1) \text{ bajo } P^* \\
&= E^*\left[\left(xe^{\sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} - Ke^{-r\theta}\right)_+ 1_A\right] + E^*\left[\left(xe^{\sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} - Ke^{-r\theta}\right)_+ 1_{A^C}\right]
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
A &= \left\{\omega \in \Omega : xe^{\sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} - Ke^{-r\theta} > 0\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : xe^{\sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} > Ke^{-r\theta}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : \frac{x}{K} e^{\sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} > e^{-r\theta}\right\}, \quad K > 0 \\
&= \left\{\omega \in \Omega : \ln\left(\frac{x}{K}\right) - \theta\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma\sqrt{\theta} Z > -r\theta\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{\omega \in \Omega : \ln\left(\frac{x}{K}\right) + \theta\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) > -\sigma\sqrt{\theta}Z\right\}, \quad \sigma, \theta > 0 \\
&= \left\{\omega \in \Omega : -Z < \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \theta\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\theta}}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : -Z < d_2\right\}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \theta\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\theta}} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : Z > -d_2\right\}
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
F(t,x) &= E^*\left[\left(xe^{\sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} - Ke^{-r\theta}\right)_+ 1_{\{\omega\in\Omega: Z > -d_2\}}\right] \\
&\quad + E^*\left[\left(xe^{\sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} - Ke^{-r\theta}\right)_+ 1_{\{\omega\in\Omega: Z \leq -d_2\}}\right] \\
&= E^*\left[\left(xe^{\sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} - Ke^{-r\theta}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: Z > -d_2\}}\right] + E^*\left[(0)\, 1_{\{\omega\in\Omega: Z \leq -d_2\}}\right] \\
&= E^*\left[\left(xe^{\sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} - Ke^{-r\theta}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: Z > -d_2\}}\right], \quad Z \sim N(0,1) \text{ bajo } P^* \\
&= E^*\left[\left(xe^{-\sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} - Ke^{-r\theta}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: -Z > -d_2\}}\right], \quad -Z \sim N(0,1) \text{ bajo } P^* \\
&= E^*\left[\left(xe^{-\sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} - Ke^{-r\theta}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: Z < d_2\}}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{d_2} \left(xe^{-\sigma z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} - Ke^{-r\theta}\right) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \int_{-\infty}^{d_2} \frac{xe^{-\sigma z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta - \frac{z^2}{2}} - Ke^{-r\theta - \frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \int_{-\infty}^{d_2} \frac{xe^{-\frac{1}{2}\left(\sigma^2\theta + 2\sigma\sqrt{\theta}z + z^2\right)}}{\sqrt{2\pi}} dz + \int_{-\infty}^{d_2} \frac{-Ke^{-r\theta - \frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \int_{-\infty}^{d_2} \frac{xe^{-\frac{1}{2}\left(z + \sigma\sqrt{\theta}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} dz + \int_{-\infty}^{d_2} \frac{-Ke^{-r\theta - \frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= x\int_{-\infty}^{d_2} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(z + \sigma\sqrt{\theta}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} dz + -Ke^{-r\theta} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz
\end{aligned}
$$

Sea $G(x)$ la función de distribución de una variable aleatoria $N(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} F(t,x) &= x\int_{-\infty}^{d_2} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(z+\sigma\sqrt{\theta}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}}dz - Ke^{-r\theta}\int_{-\infty}^{d_2} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz \\ &= x\int_{-\infty}^{d_2} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(z+\sigma\sqrt{\theta}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}}dz - Ke^{-r\theta}G(d_2) \end{aligned}$$

si se hace el siguiente cambio de variable

$$y = z + \sigma\sqrt{\theta}$$

$$\Rightarrow dy = dz$$

$$z \leq d_2 \Rightarrow y \leq d_2 + \sigma\sqrt{\theta}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F(t,x) &= x\int_{-\infty}^{d_2+\sigma\sqrt{\theta}} \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}}dz - Ke^{-r\theta}G(d_2) \\ &= xG\left(d_2+\sigma\sqrt{\theta}\right) - Ke^{-r\theta}G(d_2) \end{aligned}$$

Y si se define $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\theta}$, se tendrá

$$F(t,x) = xG(d_1) - K\mathrm{e}^{-r\theta}G(d_2)$$

$$\therefore \quad F(t,S_t) = S_tG(d_1) - Ke^{-r\theta}G(d_2) \quad \blacksquare$$

Proposición 4.6.3 *El precio de una opción put europea al instante t está dado por*

$$F(t,x) = Ke^{-r(T-t)}G(-d_2) - xG(-d_1)$$

donde, $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$, $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right)+(T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ *y G es la función de distribución de una variable aleatoria* $N(0,1)$.

Demostración. Para el caso del put, también se tiene como una función de t y S_t.

$$F(t,S_t) = E^*\left[e^{-r(T-t)} f\left(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\right], \quad f(S_T) = (K-S_T)_+$$

De acuerdo con la proposición B.2.12 para calcular $F(t,S_t)$, se calculará $F(t,x)$ y después se evaluará en S_t.

$$\begin{aligned} F(t,x) &= E^*\left[e^{-r(T-t)} f\left(x e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\right] \\ &= E^*\left[e^{-r(T-t)} f\left(x e^{r(T-t)} e^{\sigma W_{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\right] \end{aligned}$$

Esto debido a que $W_T - W_t$ bajo P^* se distribuye igual que W_{T-t},

$$W_{T-t} \sim N(0, T-t)$$

$$\Rightarrow F(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} f\left(x e^{r(T-t)} e^{\sigma w-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right) \frac{e^{-\frac{w^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dw$$

Sea $Z = \frac{W_{T-t}}{\sqrt{T-t}} \Rightarrow Z \sim N(0,1)$ bajo P^*,

$$dz = \frac{1}{\sqrt{T-t}} dw$$

entonces,

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} f\left(x e^{r(T-t)} e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} \left(K - x e^{r(T-t)} e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)_+ \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(K e^{-r(T-t)} - x e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)_+ \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz, \qquad e^{-r(T-t)} > 0 \\ &= E^*\left[\left(K e^{-r(T-t)} - x e^{\sigma Z\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)_+\right], \quad Z \sim N(0,1) \text{ bajo } P^* \\ &= E^*\left[\left(K e^{-r\theta} - x e^{\sigma Z\sqrt{\theta}-\frac{\sigma^2}{2}\theta}\right)_+\right], \quad \theta = T-t \end{aligned}$$

$$= E^*\left[\left(Ke^{-r\theta} - xe^{\sigma Z\sqrt{\theta}-\frac{\sigma^2}{2}\theta}\right)_+ 1_B\right] + E^*\left[\left(Ke^{-r\theta} - xe^{\sigma Z\sqrt{\theta}-\frac{\sigma^2}{2}\theta}\right)_+ 1_{B^C}\right]$$

donde,

$$\begin{aligned}
B &= \left\{\omega \in \Omega : Ke^{-r\theta} - xe^{\sigma Z\sqrt{\theta}-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta} > 0\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : Ke^{-r\theta} > xe^{\sigma Z\sqrt{\theta}-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : e^{-r\theta} > \frac{x}{K}e^{\sigma Z\sqrt{\theta}-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}\right\}, \quad K > 0 \\
&= \left\{\omega \in \Omega : -r\theta > \ln\left(\frac{x}{K}\right) + \sigma Z\sqrt{\theta} - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : -\sigma Z\sqrt{\theta} > \ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : Z < -\frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \theta\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\theta}}\right\}, \quad \sigma, \theta > 0 \\
&= \left\{\omega \in \Omega : -Z > \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \theta\left(r - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}{\sigma\sqrt{\theta}}\right\} \\
&= \{\omega \in \Omega : Z < -d_2\}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
F(t,x) &= E^*\left[\left(Ke^{-r\theta} - xe^{\sigma Z\sqrt{\theta}-\frac{\sigma^2}{2}\theta}\right)_+ 1_{\{\omega\in\Omega:Z<-d_2\}}\right] \\
&\quad + E^*\left[\left(Ke^{-r\theta} - xe^{\sigma Z\sqrt{\theta}-\frac{\sigma^2}{2}\theta}\right)_+ 1_{\{\omega\in\Omega:Z\geq-d_2\}}\right] \\
&= E^*\left[\left(Ke^{-r\theta} - xe^{\sigma Z\sqrt{\theta}-\frac{\sigma^2}{2}\theta}\right) 1_{\{\omega\in\Omega:Z<-d_2\}}\right] \\
&= \int_{\infty}^{-d_2} \left(Ke^{-r\theta} - xe^{\sigma z\sqrt{\theta}-\frac{\sigma^2}{2}\theta}\right) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \int_{\infty}^{-d_2} Ke^{-r\theta}\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz - \int_{\infty}^{-d_2} xe^{\sigma z\sqrt{\theta}-\frac{\sigma^2}{2}\theta}\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= Ke^{-r\theta}\int_{\infty}^{-d_2} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz - x\int_{\infty}^{-d_2} \frac{e^{\sigma z\sqrt{\theta}-\frac{\sigma^2}{2}\theta-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Ke^{-r\theta}G(-d_2) - x\int_{\infty}^{-d_2} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(-2\sigma z\sqrt{\theta}+\sigma^2\theta+z^2\right)}}{\sqrt{2\pi}}dz \\
&= Ke^{-r\theta}G(-d_2) - x\int_{\infty}^{-d_2} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(z-\sigma\sqrt{\theta}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}}dz
\end{aligned}
$$

Ahora un cambio de variable

$$y = z - \sigma\sqrt{\theta}$$

$$\Rightarrow dy = dz$$

$$z < -d_2 \Rightarrow z - \sigma\sqrt{\theta} = y < -d_2 - \sigma\sqrt{\theta}$$

pero

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\theta} \Rightarrow y < -d_1$$

entonces

$$
\begin{aligned}
F(t,x) &= Ke^{-r\theta}G(-d_2) - x\int_{-\infty}^{-d_1} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy \\
&= Ke^{-r\theta}G(-d_2) - xG(-d_1) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

4.7 Cobertura de calls y puts

Hasta el momento sólo se ha demostrado la existencia de la estrategia que cubrirá al emisor de la opción. Ahora se mostrará cual debe ser esa estrategia.

Se debe encontrar una estrategia ϕ autofinanciable, tal que

$$\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt}F(t,S_t) \qquad \forall\, t \geq 0$$

donde, F es una función

$$
F(t,y) = \begin{cases} yG(d_1) - Ke^{-r(T-t)}G(d_2) & \text{en el caso de un call} \\ Ke^{-r(T-t)}G(-d_2) - yG(-d_1) & \text{en el caso de un put} \end{cases}
$$

Es claro, entonces que $F(t,y)$ es una función de clase C^∞ en $[0,T] \times R$.

Defínase

$$\widetilde{F}(t,x) = e^{-rt}F\left(t, xe^{rt}\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}\left(t,\widetilde{S}_t\right) &= e^{-rt}F\left(t,\widetilde{S}_te^{rt}\right)\\
&= e^{-rt}F\left(t,S_t\right)\\
&= \widetilde{V}_t
\end{aligned}$$

es decir, se tiene expresado al valor del portafolio actualizado como una función del precio actualizado.

Como $\widetilde{S}_t$ es un proceso de Itô y $\widetilde{F}$ es una función de clase C^∞ en $[0,T]\times T$ se puede aplicar la formula de Itô.

$$\widetilde{F}\left(t,\widetilde{S}_t\right) = \widetilde{F}\left(0,\widetilde{S}_0\right)+\int_0^t \frac{\partial}{\partial u}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)du+\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)d\widetilde{S}_u+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)\right)d\left\langle \widetilde{S},\widetilde{S}\right\rangle_t$$

Por otra parte, $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ y de acuerdo a la fórmula de integración por partes 2.6.1 y por la ecuación (4.3)

$$d\widetilde{S}_t = \sigma\widetilde{S}_t dW_t$$

entonces

$$\left\langle \widetilde{S},\widetilde{S}\right\rangle_t = \int_0^t \left(\sigma\widetilde{S}_t\right)^2 du$$

entonces

$$d\left\langle \widetilde{S},\widetilde{S}\right\rangle_t = \sigma^2\widetilde{S}_t^2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}\left(t,\widetilde{S}_t\right) &= \widetilde{F}\left(0,\widetilde{S}_0\right)+\int_0^t \frac{\partial}{\partial u}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)du+\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)d\widetilde{S}_u\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)\right)\sigma^2\widetilde{S}_t^2\,du\\
&= \widetilde{F}\left(0,\widetilde{S}_0\right)+\int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial u}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)+\frac{\sigma^2\widetilde{S}_t^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)\right)\right)du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right) d\widetilde{S}_u \\
= \;& \widetilde{F}\left(0,\widetilde{S}_0\right)+\int_0^t\left(\frac{\partial}{\partial u}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)+\frac{\sigma^2\widetilde{S}_t^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)\right)\right)du \\
&+\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)\sigma\widetilde{S}_u\, dW_u
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$\widetilde{F}\left(t,\widetilde{S}_t\right)=\widetilde{F}\left(0,\widetilde{S}_0\right)+\int_0^t K_u\, du+\int_0^t H_u\, dW_u$$

donde,

$$K_u=\frac{\partial}{\partial u}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)+\frac{\sigma^2\widetilde{S}_t^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)\right)$$

y

$$H_u=\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{F}\left(u,\widetilde{S}_u\right)\sigma\widetilde{S}_u$$

Pero por la proposición 2.4.1 $K_u=0$, ya que $\widetilde{V}_t$ es una martingala bajo P^*.

Entonces de acuerdo con la expresión (4.6) se propone como proceso de cobertura a

$$H_t^1=\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{F}\left(t,\widetilde{S}_t\right)$$

desarrollando, la derivada

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{F}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-rt}F(t,y)\right), \qquad y=g(x)=xe^{rt} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-rt}F(t,g(x))\right) \\
&= e^{-rt}\left(\frac{\partial}{\partial x}F(t,g(x))\right) \\
&= e^{-rt}\left(\frac{\partial}{\partial y}F(t,y)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}g(x)\right) \\
&= e^{-rt}\left(\frac{\partial}{\partial y}F(t,y)\right)e^{rt} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}F(t,y)
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$H_t^1=\frac{\partial}{\partial y}F(t,S_t)$$

Por lo tanto, un portafolio definido con una estrategia como

$$\begin{aligned}
H_t^0 &= \tilde{F}(t,\tilde{S}_t) - \left(\frac{\partial}{\partial y}F(t,S_t)\right)\tilde{S}_t \\
H_t^1 &= \frac{\partial}{\partial y}F(t,S_t)
\end{aligned}$$

cubrirá perfectamente a el emisor de la opción.

Cabe notar que

$$\frac{\partial}{\partial y}F(t,y) = \begin{cases} G(d_1) & \text{en el caso de un call} \\ -G(-d_1) & \text{en el caso de un put} \end{cases}$$

Conclusiones

El presente trabajo *tuvo como objetivo* mostrar la utilidad de la probabilidad y el cálculo estocástico en la resolución de problemas en el campo de las finanzas, en particular para el problema de valuación y cobertura de opciones europeas utilizando el modelo de precios de Black-Scholes.

La teoría de *valuación presentada sirve como motivación* para el uso del cálculo estocástico en la valuación de diversos instrumentos financieros.

Cabe resaltar, que aunque la teoría de la herramienta probabilista usada fue complicada bastaba tener buenas nociones de ella y sobre todo saber cuando aplicarla.

Desde un punto de vista *práctico*, queda *entonces* el *reto* de proponer otros modelos de precios continuos que se ajusten a las fluctuaciones observadas en los precios de ciertos subyacentes, estos modelos deben ser tales que la integral estocástica asociada a los portafolios autofinanciables tenga sentido.

No hay que olvidar que la *implementación misma* de la teoría desarrollada en este trabajo requiere de muchos cuidados, desde el aspecto estadístico hasta los enfoques financiero y económico, sería interesante entonces desarrollar un trabajo donde se conjunten todos estos aspectos.

Apéndice A

Análisis Matemático

Definición A.0.1 *Sea f un mapeo de un espacio métrico R en si mismo. Entonces, x es llamado un punto fijo de f si $f(x) = x$, es decir, si f lleva a x en si mismo.*

Definición A.0.2 *Sea un espacio métrico R con la métrica ρ y sea $f : R \to R$, si existe un número $\alpha < 1$ tal que*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha\rho(x,y) \quad \forall x, y \in R$$

entonces se dice que f es una contracción.

Una contracción es entonces continua.

Teorema A.0.1 (Teorema de Punto Fijo) *Cada función f contracción definida en un espacio métrico completo en R tiene un único punto fijo.*

Teorema A.0.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Si $f, g \in \mathcal{L}_2$, entonces fg es integrable y*

$$\left|\int fg\, d\mu\right| \leq \left(\int |f|^2\, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2\, d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

Teorema A.0.3 (Lema de Fatou) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones no negativas e integrables sobre un conjunto A, tal que*

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \leq M \qquad n \in \mathbb{N}$$

Supóngase que $\{f_n\} \to f$ μ*c.d. Entonces* f *es integrable en* A *y*

$$\int_A f(x)\, d\mu \leq M$$

Teorema A.0.4 (Lema de Gronwall) *Si* f *es una función continua, tal que*

$$\forall 0 \leq t \leq T, \quad f(t) \leq a + b\int_0^t f(s)\, ds, \quad a \geq 0, b > 0$$

entonces,

$$f(T) \leq a\left(1 + e^{bT}\right)$$

Demostración. Sea $u(t) = e^{-bt}\int_0^t f(s)\, ds$, entonces

$$\begin{aligned} u'(t) &= e^{-bt} f(t) - be^{-bt}\int_0^t f(s)\, ds \\ &= e^{-bt}\left(f(t) - b\int_0^t f(s)\, ds\right) \\ &\leq ae^{-bt} \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} u(T) &= \int_0^T u'(s)\, ds \\ &\leq \int_0^T ae^{-bs}\, ds \\ &= -\frac{a}{b}\int_0^T (-b)\, e^{-bs}\, ds \\ &= -\frac{a}{b}\left(e^{-bT} - 1\right) \\ &= -\frac{a}{b}e^{-bT} + \frac{a}{b} \\ &\leq \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{-bT}\int_0^T f(s)\, ds \leq \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow b\int_0^T f(s)\, ds \leq ae^{bT}$$

Luego por hipótesis

$$\begin{aligned}
f(T) &\leq a + b\int_0^T f(s)\,ds \\
&\leq a + ae^{bT} \\
&= a\left(1 + e^{bT}\right)
\end{aligned}$$

El caso $b = 0$, $a \geq 0$ es trivial ya que $f(t) \leq a \quad \forall t$, entonces $f(T) \leq a \leq 2a$.

■

Apéndice B

Esperanza Condicional

Definición B.0.3 *Sean λ y μ dos medidas o cargas en $(\Omega, \mathcal{F})$, λ es absolutamente continua respecto a μ ($\lambda << \mu$) si $\forall\ A \in \mathcal{F}$ tal que,*

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(A) = 0$$

En particular, la carga λ definida como

$$\lambda(A) = \int_A X\ dP, \quad A \in \mathcal{F}, \quad X \text{ una v.a. } \mathcal{F}\text{-medible}$$

es absolutamente continua respecto a P, ya que $\forall\ A \in \mathcal{F}$ tal que $P(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$.

Teorema B.0.5 (Teorema de Radon-Nikodym) *Sea μ una medida σ-finita y λ una carga en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, si $\lambda << \mu$, entonces existe una función $\mathcal{F}$-medible $g : \Omega \longrightarrow \overline{R}$, tal que,*

$$\lambda(A) = \int_A g\ d\mu \quad \forall\ A \in \mathcal{F}$$

y si existe otra función h que cumple lo mismo, entonces $g = h \quad P$ c.s.

B.1 Definición de la Esperanza Condicional dada una σ-álgebra

Teorema B.1.1 *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible que toma valores en $\overline{R}$ y tal que $E(|X|) < +\infty$, y sea $\mathcal{G}$ una σ-álgebra , $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Entonces existe* *una función* $g : (\Omega, \mathcal{G}) \longrightarrow \left(\overline{R}, \mathcal{B}\right)$, *tal que*

$$\int_A X \, dP = \int_A g(\omega) \, dP \quad \forall \, A \in \mathcal{G}$$

y si existe otra función h, *tal que*

$$\int_A X \, dP = \int_A h(\omega) \, dP \quad \forall \, A \in \mathcal{G} \qquad ,$$

entonces $g = h \quad P$ *c.s.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{G}$, y si se define a $\lambda(A) = \int_A X \, dP$, entonces $P(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$, por lo tanto, $P << \lambda$.

Por el teorema de Radon Nikodym $\exists \; g : (\Omega, \mathcal{G}) \longrightarrow \left(\overline{R}, \mathcal{B}\right)$, tal que

$$\int_A X \, dP = \int_A g(\omega) \, dP \quad \forall \, A \in \mathcal{G}$$

y si existe otra función h, tal que

$$\int_A X \, dP = \int_A h(\omega) \, dP \quad \forall \, A \in \mathcal{G}$$

entonces $g = h \; P$ *c.s.* ■

Definición B.1.1 *La Esperanza Condicional de* X *dado* $\mathcal{G}$, *será la función* g *del teorema anterior y será denotada como* $E(X|\mathcal{G})$.

B.2 Propiedades de Esperanza Condicional dada una σ-álgebra

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{G}$ una σ-álgebra tal que, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Proposición B.2.1 *Sea* X *una variable aleatoria constante,* $X = c \; P$ *c.s., entonces*

$$E(X|\mathcal{G}) = c \quad P \text{ c.s.}$$

Demostración. De acuerdo a la definición de esperanza condicional y ya que $X = c$ una variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible, se tiene que,

$$\int_A X \, dP = \int_A E(X|\mathcal{G}) \, dP \quad \forall A \in \mathcal{G} \quad P \text{ c.s.}$$

si y solo si

$$\int_A c \, dP = \int_A E(X|\mathcal{G}) \, dP \quad \forall A \in \mathcal{G} \quad P \text{ c.s.}$$

Claramente $X = c$ es una variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible, por lo tanto,

$$E(X|\mathcal{G}) = c \quad P \text{ c.s.} \blacksquare$$

Proposición B.2.2 *Sean X, Y dos variables aleatorias $\mathcal{F}$-medibles, tales que $E(|Y|) < \infty$ y $X \leq Y$ P c.s., entonces*

$$E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G}) \quad P \text{ c.s.}$$

Demostración. Como $X \leq Y \quad P$ c.s, por las propiedades de la integral se tiene que,

$$\int_A X \, dP \leq \int_A Y \, dP \quad \forall A \in \mathcal{G} \quad P \text{ c.s.}$$

y entonces de acuerdo con la definición de esperanza condicional dada una σ-álgebra,

$$\int_A E(X|\mathcal{G}) \, dP \leq \int_A E(Y|\mathcal{G}) \, dP \quad \forall A \in \mathcal{G} \quad P \text{ c.s.}$$

entonces,

$$E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G}) \quad P \text{ c.s.} \blacksquare$$

Proposición B.2.3 *Sean $a, b \in R$ y X, Y dos variables aleatorias $\mathcal{F}$-medibles, tales que $E(|X|) < \infty$ y $E(|Y|) < \infty$ entonces*

$$E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G}) \quad P \text{ c.s.}$$

Demostración. Con las propiedades de integral y la definición de esperanza condicional dada una σ-álgebra se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_A (aX+bY)\ dP &= a\int_A X\ dP + b\int_A Y\ dP \qquad \forall\, A\in\mathcal{G} \quad P \text{ c.s.} \\
&= a\int_A E(X|\mathcal{G})\ dP + b\int_A E(Y|\mathcal{G})\ dP. \qquad \forall\, A\in\mathcal{G} \quad P \text{ c.s.} \\
&= \int_A (aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G}))\ dP. \qquad \forall\, A\in\mathcal{G} \quad P \text{ c.s.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E(aX+bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G}) \quad P \text{ c.s.} \blacksquare$$

Proposición B.2.4 *Sea X una variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible, tal que $E(|X|)<\infty$, entonces*

$$|E(X|\mathcal{G})| \leq E(|X||\mathcal{G}) \quad P \text{ c.s.}$$

Demostración. Es cierto que $-|X|\leq X\leq |X|$, y utilizando las proposiciones B.2.2 y B.2.3 *se tiene que*

$$-E(|X||\mathcal{G}) \leq E(X|\mathcal{G}) \leq E(|X||\mathcal{G}) \quad P \text{ c.s.}$$

Es decir,

$$|E(X|\mathcal{G})| \leq E(|X||\mathcal{G}) \quad P \text{ c.s.} \blacksquare$$

Proposición B.2.5 *Sea X una variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible, tal que $E(|X|)<+\infty$. Entonces*

$$E[E(X|\mathcal{G})] = E(X)$$

Demostración. Por la definición de esperanza condicional dado una σ-álgebra y como X es una variable aleatoria integrable,

$$\int_\Omega X\ dP = \int_\Omega E(X|\mathcal{G})\ dP$$

o equivalentemente,

$$E(X) = E[E(X|\mathcal{G})] \blacksquare$$

Proposición B.2.6 *Sean $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ dos σ-álgebras en $\mathcal{F}$, tales que $\mathcal{G}_1 \subsetneq \mathcal{G}_2$, y X una variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible, tal que $E(|X|) < \infty$, entonces*

$$E[E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1] = E(X|\mathcal{G}_1) \quad P \text{ c.s.}$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{G}_1$, por definición de esperanza condicional dada una σ-álgebra, se tiene,

$$\int_A X\, dP = \int_A E(X|\mathcal{G}_1)\, dP \quad P \text{ c.s.}$$

En particular $A \in \mathcal{G}_2$, por lo tanto,

$$\int_A X\, dP = \int_A E(X|\mathcal{G}_2)\, dP \quad P \text{ c.s.}$$

entonces,

$$\int_A E(X|\mathcal{G}_2)\, dP = \int_A E(X|\mathcal{G}_1)\, dP \quad \forall\, A \in \mathcal{G}_1 \quad P \text{ c.s.}$$

una vez más por la definición de esperanza condicional,

$$E[E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1] = E(X|\mathcal{G}_1) \quad P \text{ c.s.} \blacksquare$$

Proposición B.2.7 *Sean $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ dos σ-álgebras en $\mathcal{F}$, tales que $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ y sea X una variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible, entonces*

$$E[E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2] = E(X|\mathcal{G}_1) \quad P \text{ c.s.}$$

Demostración. Se sabe que $E(X|\mathcal{G}_1)$ es una función $\mathcal{G}_1$-medible, y como $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, entonces también es una función $\mathcal{G}_2$-medible. Por lo tanto,

$$\int_A E(X|\mathcal{G}_1)\, dP = \int_A E[E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2]\, dP \quad \forall\, A \in \mathcal{G}_2 \quad P \text{ c.s.}$$

Por lo tanto,

$$E[E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2] = E(X|\mathcal{G}_1) \quad P \text{ c.s.} \blacksquare$$

Proposición B.2.8 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias $\mathcal{F}$-medibles tales que, $X_n \to X \quad P$ c.s.. Si $|X_n| \leq Y \ \forall\ n \in N$, con Y una variable aleatoria tal que, $E(|Y|) < \infty$ entonces,*

$$E(X_n|\mathcal{F}) \to E(X|\mathcal{F}) \quad P \text{ c.s.}$$

Demostración. P.d.

$$\lim_{n\to\infty} |E(X_n|\mathcal{F}) - E(X|\mathcal{F})| = 0 \quad P \text{ c.s.}$$

Sea $Z_n = \sup_{m\geq n} |X_m - X|$, entonces $Z_{n+1} \leq Z_n$ y $Z_n \downarrow 0$.

Por otro lado, sea $n \in N$

$$\begin{aligned} 0 &\leq |E(X_n|\mathcal{F}) - E(X|\mathcal{F})| \\ &\leq |E(X_n - X|\mathcal{F})| \\ &\leq E(|X_n - X||\mathcal{F}) \\ &\leq E(Z_n|\mathcal{F}) \end{aligned}$$

entonces sólo basta con demostrar que $E(Z_n|\mathcal{F}) \to 0$

Se tiene que,

$$E(Z_n|\mathcal{F}) \geq E(Z_{n+1}|\mathcal{F}),$$

por lo cual $\exists\ h \geq 0$ una función $\mathcal{F}$-medible, tal que

$$E(Z_n|\mathcal{F}) \downarrow h$$

Entonces, como $h \leq E(Z_n|\mathcal{F}) \quad \forall\, n \in N$

$$0 \leq \int_\Omega h\, dP \leq \int_\Omega E(Z_n|\mathcal{F})\, dP$$

y por la definición de esperanza condicional

$$\int_\Omega E(Z_n|\mathcal{F})\, dP = \int_\Omega Z_n\, dP$$

Y además se tiene que $0 \leq Z_n \leq 2Y$, entonces por medio del teorema de convergencia dominada se obtiene lo deseado.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} Z_n \, dP = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} |E(X_n|\mathcal{F}) - E(X|\mathcal{F})| = 0 \quad P \text{ c.s.}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{F}) = E(X|\mathcal{F}) \quad P \text{ c.s.} \blacksquare$$

Proposición B.2.9 *Si X es una variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible, tal que $E(|X|) < +\infty$ y sea Y una variable aleatoria tal que $E(|XY|) < +\infty$, entonces*

$$E(XY|\mathcal{F}) = XE(Y|\mathcal{F}) \quad P \text{ c.s.}$$

Demostración. Primero se demostrará la proposición para X una indicadora.

Sea $B \in \mathcal{F}$ y $X = 1_B$, por la definición de esperanza condicional

$$\int_A XY \, dP = \int_A E(XY|\mathcal{F}) \, dP \quad \forall\, A \in \mathcal{F} \quad P \text{ c.s.}$$

si y sólo si

$$\int_A 1_B Y \, dP = \int_A E(1_B Y|\mathcal{F}) \, dP \quad \forall\, A \in \mathcal{F} \quad P \text{ c.s.}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_A 1_B Y \, dP &= \int_{A\cap B} Y \, dP \qquad A \cap B \in \mathcal{F} \\
&= \int_{A\cap B} E(Y|\mathcal{F}) \, dP \qquad A \cap B \in \mathcal{F} \quad P \text{ c.s.} \\
&= \int_A 1_B E(Y|\mathcal{F}) \, dP \quad \forall\, A \in \mathcal{F} \quad P \text{ c.s.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_A E(1_B Y|\mathcal{F}) \, dP = \int_A 1_B E(Y|\mathcal{F}) \, dP \quad \forall\, A \in \mathcal{F} \quad P \text{ c.s.}$$

$$\therefore \quad E(1_B Y|\mathcal{F}) = 1_B E(X|\mathcal{F}) \quad P\ c.s.$$

Ahora se demostrará para X una variable aleatoria, tal que $X = \sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i}$, con $A_i \in \mathcal{F}$ y $a_i \in R^+$

Entonces,

$$\begin{aligned} E(XY|\mathcal{F}) &= E\left(\sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i} Y \middle| \mathcal{F}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i E(1_{A_i} Y|\mathcal{F}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i} E(Y|\mathcal{F}) \\ &= XE(Y|\mathcal{F}) \end{aligned}$$

con lo cual ya está demostrado para X una variable aleatoria simple y positiva.

Sea X una variable aleatoria positiva, entonces existe una sucesión $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de variables aleatorias simples y positivas tal que,

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X$$

donde $X_n \leq X$ y $X_n \leq X_{n+1}$.

Además, $|X_n Y| \leq |XY|$ implica que

$$E(|X_n Y|) \leq E(|XY|) < \infty$$

y se sabe que $|X_n Y| \leq |X_{n+1} Y|$ y que $|X_n Y| \uparrow |XY|$. Entonces aplicando la proposición anterior se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n Y|\mathcal{F}) = E(XY|\mathcal{F})$$

pero, como X_n es una variable aleatoria simple y positiva

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E(X_n Y|\mathcal{F}) &= \lim_{n\to\infty} X_n E(Y|\mathcal{F}) \\ &= XE(Y|\mathcal{F}) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E(XY|\mathcal{F}) = XE(Y|\mathcal{F})$$

Para que la proposición sea válida para cualquier variable aleatoria X basta tomar

$$X = X^+ - X^- \quad \blacksquare$$

Corolario B.2.1 *Si X es una variable $\mathcal{F}$-medible, tal que $E(|X|) < \infty$, entonces*

$$E(X|\mathcal{F}) = X \quad P \text{ c.s.}$$

Demostración. De las proposiciones B.2.9 y B.2.1

$$\begin{aligned} E(X|\mathcal{F}) &= XE(1|\mathcal{F}) \\ &= X \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición B.2.10 *Si X es una variable aleatoria independiente de $\mathcal{F}$ entonces,*

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X) \quad P \text{ c.s.}$$

Demostración. Que X sea independiente de $\mathcal{F}$ quiere decir que la σ-álgebra $\sigma(X)$ es independiente de $\mathcal{F}$.

Sea $A \in \mathcal{F}$, entonces por la definición de esperanza condicional, se tiene,

$$\begin{aligned} \int_A E(X|\mathcal{F})\, dP &= \int_A X\, dP \quad P \text{ c.s.} \\ &= \int_\Omega 1_A X\, dP \quad P \text{ c.s.} \\ &= E(1_A X) \quad P \text{ c.s.} \\ &= E(X|A)\, P(A) \quad P \text{ c.s.} \\ &= E(X)\, P(A) \quad P \text{ c.s.} \\ &= E(X) \left(\int_\Omega 1_A\, dP \right) \quad P \text{ c.s.} \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} 1_A E(X)\ dP \quad P\ c.s.$$
$$= \int_{A} E(X)\ dP \quad P\ c.s.$$

Por lo tanto,

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X) \quad P\ c.s. \blacksquare$$

Proposición B.2.11 *Sea X una variable aleatoria que toma valores en R. Entonces, X es independiente de $\mathcal{F}$ si y sólo si*

$$E\left(e^{itX}\middle|\mathcal{F}\right) = E\left(e^{itX}\right) \quad \forall\, t \in R \quad P\ c.s.$$

Demostración. $\Rightarrow$) La demostración en este sentido está dada por la proposición B.2.10.

$\Leftarrow$) Sea $A \in \mathcal{F}$, tal que $P(A) > 0$

$$E\left(1_A e^{itX}\right) = E\left(e^{itX}\middle| A\right) P(A), \quad \forall t \in R$$

$$\Rightarrow E\left(1_A e^{itX}\right) = E\left(e^{itX}\right) P(A)$$
$$\Rightarrow E\left(e^{itX}\frac{1_A}{P(A)}\right) = E\left(e^{itX}\right)$$

Esto quiere decir, que la función característica de X bajo la probabilidad P es igual a la función característica de X con función de densidad $\frac{1_A}{P(A)}$ y bajo la probabilidad P.

Con lo cual

$$E\left(g(X)\frac{1_A}{P(A)}\right) = E(g(X)) \qquad \forall\, g \text{ función boreliana y acotada}$$

por lo tanto se tiene independencia. $\blacksquare$

Proposición B.2.12 *Sea X una variable aleatoria $\mathcal{B}$-medible que toma valores en $(E,\mathcal{E})$ y sea Y una variable aleatoria independiente de $\mathcal{B}$, con valores en $(F,\mathcal{F})$. Para toda función f boreliana, positiva (o acotada) sobre $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$, la función g definida por*

$$\forall\, x \in E \quad g(x) = E(f(x,Y))$$

es boreliana sobre $(E, \mathcal{E})$ *y se tiene que*

$$E(f(X,Y)|\mathcal{B}) = g(X) \quad c.s.$$

Demostración. Sea P_Y la distribución de Y.

Se sabe que,

$$g(x) = \int_F f(x,y)\, dP_Y(y)$$

Sea Z una variable aleatoria positiva $\mathcal{B}$-medible, (por ejemplo $Z = 1_B$, con $B \in \mathcal{B}$).

Denótese $P_{X,Z}$ la distribución conjunta de (X, Z).

Como Y es independiente de (X, Z), entonces

$$\begin{aligned}
E(f(X,Y)Z) &= \int\int f(x,y)\, z\, dP_{X,Z}(x,z)\, dP_Y(y) \\
&= \int\left(\int f(x,y)\, dP_Y(y)\right) z\, dP_{X,Z}(x,z) \\
&= \int E(f(x,Y))\, z\, dP_{X,Z}(x,z) \\
&= \int g(x)\, z\, dP_{X,Z}(x,z) \\
&= E(g(X)Z)
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$E(f(X,Y)|\mathcal{B}) = g(X) \quad \blacksquare$$

Apéndice C

Martingalas Continuas

Definición C.0.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración de este espacio, entonces una familia adaptada $\{M_t\}_{t\geq 0}$ de variables aleatorias en $\mathcal{L}_1$ (es decir, que cumplen que $E(|M_t|) < +\infty \; \forall \; t$) es una :*

- *Martingala si $\forall \; s \leq t$,* $\quad E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$
- *Supermartingala si $\forall \; s \leq t$,* $\quad E(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$
- *Submartingala si $\forall \; s \leq t$,* $\quad E(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s$

Corolario C.0.2 *Si $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala, entonces $E(M_t) = E(M_0) \quad \forall \; t$*

Demostración. Según la proposición B.2.5 se tiene

$$\begin{aligned} E(M_t) &= E(E(M_t | \mathcal{F}_0)) \\ &= E(M_0) \qquad \forall t \geq 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición C.0.13 *Sea $\{M_t\}_{t\geq 0}$ una martingala, tal que $\forall \; t \quad E(M_t^2) < \infty$, entonces si $s \leq t$*

$$E\left[(M_t - M_s)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] = E\left[M_t^2 - M_s^2 \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

Demostración. Se sabe que $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala, es decir,

$$E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s \qquad \forall \; s \leq t$$

entonces,

$$E(M_t - M_s | \mathcal{F}_s) = 0$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
E\left[M_t^2 - M_s^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] &= E\left[(M_t - M_s)^2 + 2M_sM_t - 2M_s^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[(M_t - M_s)^2 + 2M_s(M_t - M_s) \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[(M_t - M_s)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] + 2E\left[M_s(M_t - M_s) | \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[(M_t - M_s)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] + 2M_sE\left[(M_t - M_s) | \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[(M_t - M_s)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema C.0.1 (Desigualdad de Doob) *Si $\{M_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala continua, entonces*

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2\right) \leq 4E\left(|M_T|^2\right)$$

Para su demostración consultar Karatzas [19].

C.1 Tiempos de paro

Definición C.1.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, se llama tiempo de paro con relación a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ a una variable aleatoria τ que toma valores en $R^+ \cup \{+\infty\}$, tal que, $\forall\ t \geq 0$, se tiene que $\{\omega \in \Omega : \tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

La condición de que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ significa que se puede inferir a cerca de la ocurrencia del momento aleatorio τ antes del tiempo t observando la trayectoria antes del instante t.

Proposición C.1.1 *Si S y T son dos tiempos de paro, entonces $S \wedge T = \inf(S, T)$ es un tiempo de paro.*

Demostración. P.d. $\{S \wedge T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0$

Sea $t \geq 0$, entonces

$$\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\}$$

Ya que,

$$\begin{aligned}
\omega \in \{S \wedge T \leq t\} &\Leftrightarrow (S \wedge T)(\omega) \leq t \\
&\Leftrightarrow S(\omega) \leq t \quad \text{o bien que} \quad T(\omega) \leq t \\
&\Leftrightarrow \omega \in \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\}
\end{aligned}$$

donde,

$$\{S \leq t\}, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

$$\therefore \quad \{S \wedge T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \qquad \forall t \geq 0 \qquad \blacksquare$$

Corolario C.1.1 *Si S es un tiempo de paro y t es un tiempo determinista, entonces $S \wedge t$ es un tiempo de paro.*

Definición C.1.2 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, se dice que un proceso estocástico $\{H_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es un localmente acotado si existe una sucesión de tiempos de paro $\{T_n\}_{n \geq 1}$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} P(T_n = T) = 1$$

y si existen una sucesión $\{C_n\}_{n \geq 1}$ tal que

$$|H_t| \leq C_n \quad \forall\, 0 \leq t \leq T_n, \quad n \in N$$

Definición C.1.3 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, se dice que un proceso estocástico $\{M_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala local si existe una sucesión de tiempos de paro $\{T_n\}_{n \geq 1}$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} P(T_n = T) = 1$$

y el proceso $\{M_{t \wedge T_n}\}_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala $\forall\, n \in N$.

Apéndice D

Teorema de Girsanov

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad.

Definición D.0.4 *Se dice que una probabilidad Q sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ es absolutamente continua respecto a P ($Q << P$) si*

$$\forall\, A \in \mathcal{F} \quad P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$$

Definición D.0.5 *Se dice que dos probabilidades P y Q son equivalentes si cada una de ellas es absolutamente continua respecto a la otra.*

Existe una versión más del Teorema de Radon Nikodym:

Teorema D.0.1 *Sea Q una probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$, entonces $Q << P$ si y sólo si $\exists\, Z$ variable aleatoria que toma valores en R^+ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que*

$$\forall\, A \in \mathcal{F} \quad Q(A) = \int_A Z\, dP$$

Definición D.0.6 *La variable aleatoria Z de la proposición anterior será llamada la densidad de Q con respecto a la probabilidad P y algunas veces será denotada como $\frac{dQ}{dP}$.*

Es conveniente observar que si $Q << P$ y Z es la densidad de Q con respecto a P, entonces $P << Q$ (son equivalentes) si y sólo si $P(Z > 0) = 1$, lo que se probará a continuación.

Proposición D.0.2 *Si $Q << P$ de densidad Z, entonces*

$$P << Q \Leftrightarrow P(Z > 0) = 1$$

Demostración. $\Rightarrow$)Por el teorema D.0.1

$\Leftarrow$)Si $Q << P$ y $P(Z > 0) = 1$

Basta demostrar que

$$\forall\ A \in \mathcal{F} \quad Q(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$$

Sea $A \in \mathcal{F}$,

$$Q(A) = \int_A Z\ dP$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_A 1\ dP \\ &= \int_A \frac{Z}{Z}\ dP \\ &= \int_A \frac{1}{Z} Z\ dP \\ &= \int_A \frac{1}{Z}\ dQ \\ &= 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

D.1 Teorema de Girsanov

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $T \in R^+$ y $\{B_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un Movimiento Browniano estándar adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$.

Teorema D.1.1 (Teorema de Girsanov) *Sea $\{\theta_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un proceso estocástico adaptado, tal que $\int_0^T \theta_s^2\ ds < \infty \quad P$ c.s. y tal que el proceso $\{L_t\}_{0 \leq t \leq T}$, definido por*

$$L_t = e^{-\int_0^t \theta_s\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\ ds}$$

sea una martingala. Entonces, bajo la probabilidad $P^{(L_T)}$ de densidad L_T con relación a P, el proceso $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ definido por

$$W_t = B_t + \int_0^t \theta_s \, ds$$

es un Movimiento Browniano estándar.

Demostración. La demostración se realizará sólo para el caso en que $\{\theta_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso constante μ, esto es se demostrará que

$$W_t = B_t + \mu t$$

es un Movimiento Browniano estándar bajo $P^{(L_T)}$.

La continuidad de la función

$$t \mapsto W_t(\omega)$$

es clara del hecho que un Movimiento Browniano y la función μt son funciones continuas respecto a t.

La independencia de incrementos también es clara, ya que $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y

$$W_t - W_s = (B_t - B_s) + \mu(t-s), \qquad s \leq t$$

Para demostrar la estacionalidad del proceso será necesario probar las proposiciones D.1.1, D.1.2, D.1.3 y D.1.4.

Proposición D.1.1 *Si*

$$L_t = e^{-\mu B_t - \left(\frac{\mu^2}{2}\right)t} \qquad \forall t \in [0,T]$$

entonces $\{L_t\}_{0\leq t\leq T}$ es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ y $E(L_t) = 1 \quad \forall\, 0 \leq t \leq T$.

Demostración. La proposición 2.2.3 demuestra que L_t es una $\mathcal{F}_t$-martingala.

Sólo falta demostrar que $E(L_t) = 1$, sea $t \in [0,T]$

$$E(L_t) \;=\; E\left(e^{-\mu B_t - \left(\frac{\mu^2}{2}\right)t}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)t} E\left(e^{-\mu B_t}\right) \\
&= e^{-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)t} e^{\left(\frac{\mu^2}{2}\right)t} \qquad \text{por } 2.1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Es de observarse que

$$E(L_t) = \int_\Omega L_t \, dP = 1 \tag{D.1}$$

Proposición D.1.2 *Sea $P^{(L_t)}$ la probabilidad de densidad L_t con relación a la probabilidad inicial P, entonces las probabilades $P^{(L_T)}$ y $P^{(L_t)}$ coinciden sobre $\mathcal{F}_t$.*

Demostración.

$$\text{P.d.} \qquad P^{(L_T)}(A) = P^{(L_t)}(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{F}_t$$

Sea $A \in \mathcal{F}_t$, entonces

$$
\begin{aligned}
P^{(L_T)}(A) &= \int_A L_T \, dP \\
&= E(1_A L_T) \\
&= E(E(1_A L_T | \mathcal{F}_t)) \quad L_T \text{ es } \mathcal{F}_t\text{-medible} \\
&= E(1_A E(L_T | \mathcal{F}_t)) \\
&= \int_A E(L_T | \mathcal{F}_t) \, dP \\
&= \int_A L_t \, dP \\
&= P^{(L_t)}(A) \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Efectivamente $P^{(L_t)}(A)$ es una probabilidad, ya que si $A \in \mathcal{F}_t$

$$
\begin{aligned}
P^{(L_t)}(A) &= \int_A L_t \, dP \qquad L_t > 0 \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

y por la expresión (D.1)

$$P^{(L_t)}(\Omega) = 1$$

Proposición D.1.3 *Sea Z una variable aleatoria acotada $\mathcal{F}_T$-medible, entonces la esperanza condicional de Z, bajo la probabilidad $P^{(L_T)}$ con respecto a $\mathcal{F}_t$ está dada por*

$$E^{(L_T)}(Z|\mathcal{F}_t) = \frac{E(ZL_T|\mathcal{F}_t)}{L_t}$$

Demostración. Como $W = E^{(L_T)}(Z|\mathcal{F}_t)$ y $Y = \frac{E(ZL_T|\mathcal{F}_t)}{L_t}$ son dos variables aleatorias $\mathcal{F}_t$-medibles. Basta demostrar que

$$\forall\, A \in \mathcal{F}_t, \quad E^{(L_T)}(1_A W) = E^{(L_T)}(1_A Y)$$

Sea $A \in \mathcal{F}_t$, entonces

$$\begin{aligned}
E^{(L_T)}(1_A W) &= E^{(L_T)}\left(1_A E^{(L_T)}(Z|\mathcal{F}_t)\right) \\
&= E^{(L_T)}(1_A Z) \\
&= \int_A Z \, dP^{(L_T)} \\
&= \int_A Z L_T \, dP \\
&= E[1_A Z L_T] \\
&= E[1_A E(ZL_T|\mathcal{F}_t)] \\
&= \int_A E(ZL_T|\mathcal{F}_t) \, dP \\
&= \int_A \frac{E(ZL_T|\mathcal{F}_t)}{L_t} L_t \, dP \\
&= \int_A \frac{E(ZL_T|\mathcal{F}_t)}{L_t} \, dP^{(L_T)} \\
&= E^{(L_T)}\left[1_A \frac{E(ZL_T|\mathcal{F}_t)}{L_t}\right] \\
&= E^{(L_T)}[1_A Y] \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición D.1.4 *Sea* $W_t = \mu t + B_t \quad \forall\, t \in [0,T]$, *entonces* $\forall\, u \in R$ *y* $\forall\, s,t \in [0,T]$, *tales que* $s \leq t$, *entonces*

$$E^{(L_T)}\left[e^{iu(W_t - W_s)}\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{u^2(t-s)}{2}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
E^{(L_T)}\left[e^{iu(W_t-W_s)}\middle|\,\mathcal{F}_s\right] &= E^{(L_T)}\left[e^{iu(\mu(t-s)+(B_t-B_s))}\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&= \frac{E\left[e^{iu(\mu(t-s)+(B_t-B_s))}L_T\middle|\,\mathcal{F}_s\right]}{L_s}, \quad \text{por D.1.3} \\
&= E\left[e^{iu(\mu(t-s)+(B_t-B_s))}\frac{L_T}{L_s}\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[e^{iu(\mu(t-s)+(B_t-B_s))}e^{-\mu(B_T-B_s)-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)(T-s)}\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[e^{iu(\mu(t-s)+(B_t-B_s))}e^{-\mu(B_T-B_t)-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)(T-t)-\mu(B_t-B_s)-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)(t-s)}\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[e^{iu(\mu(t-s)+(B_t-B_s))}e^{-\mu(B_T-B_t)-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)(T-t)}e^{-\mu(B_t-B_s)-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)(t-s)}\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[e^{iu(\mu(t-s)+(B_t-B_s))-\mu(B_t-B_s)-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)(t-s)}\middle|\,\mathcal{F}_s\right]E\left[e^{-\mu(B_T-B_t)-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)(T-t)}\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[e^{iu(\mu(t-s)+(B_t-B_s))-\mu(B_t-B_s)-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)(t-s)}\middle|\,\mathcal{F}_s\right]E\left[e^{-\mu(B_T-B_t)-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)(T-t)}\right] \\
&= E\left[e^{iu(\mu(t-s)+(B_t-B_s))-\mu(B_t-B_s)-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)(t-s)}\middle|\,\mathcal{F}_s\right]E\left[e^{-\mu B_{T-t}-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)(T-t)}\right] \\
&= E\left[e^{iu(\mu(t-s)+(B_t-B_s))-\mu(B_t-B_s)-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)(t-s)}\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[e^{iu(\mu(t-s)+(B_t-B_s))}\frac{L_t}{L_s}\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&= \frac{1}{L_s}E\left[e^{iu(\mu(t-s)+(B_t-B_s))}L_t\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&= \frac{e^{-iu(\mu s+B_s)}}{e^{-\mu B_s-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)s}}E\left[e^{iu(\mu t+B_t)-\mu B_t-\left(\frac{\mu^2}{2}\right)t}\middle|\,\mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

Desarrollando la potencia

$$iu\left(\mu t + B_t\right) - \mu B_t - \left(\frac{\mu^2}{2}\right)t = \left(iu - \mu\right)B_t - \left(\frac{\mu^2}{2} - iu\mu\right)t$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{(iu-\mu)^2}{2} &= \frac{-u^2-2iu\mu+\mu^2}{2} \\
&= -\frac{u^2}{2} - iu\mu + \frac{\mu^2}{2} \\
&= -\frac{u^2}{2} + \left(\frac{\mu^2}{2} - iu\mu\right)
\end{aligned}$$

entonces,

$$-\left(\frac{\mu^2}{2} - iu\mu\right)t = -\frac{(iu-\mu)^2}{2}t - \frac{u^2}{2}t$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-iu(\mu s+B_s)}}{e^{-\mu B_s - \left(\frac{\mu^2}{2}\right)s}} E\left[e^{iu(\mu t+B_t)-\mu B_t - \left(\frac{\mu^2}{2}\right)t} \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \frac{e^{-iu(\mu s+B_s)}}{e^{-\mu B_s - \left(\frac{\mu^2}{2}\right)s}} E\left[e^{(iu-\mu)B_t - \left(\frac{\mu^2}{2} - iu\mu\right)t} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \frac{e^{-iu(\mu s+B_s)}}{e^{-\mu B_s - \left(\frac{\mu^2}{2}\right)s}} E\left[e^{(iu-\mu)B_t - \frac{(iu-\mu)^2}{2}t - \frac{u^2}{2}t} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \frac{e^{-iu(\mu s+B_s)}}{e^{-\mu B_s - \left(\frac{\mu^2}{2}\right)s}} e^{-\frac{u^2}{2}t} E\left[e^{(iu-\mu)B_t - \frac{(iu-\mu)^2}{2}t} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \frac{e^{-iu(\mu s+B_s)}}{e^{-\mu B_s - \left(\frac{\mu^2}{2}\right)s}} e^{-\frac{u^2}{2}t} e^{(iu-\mu)B_s - \frac{(iu-\mu)^2}{2}s} \\
&= e^{-iu(\mu s+B_s)+\mu B_s + \left(\frac{\mu^2}{2}\right)s - \frac{u^2}{2}t + (iu-\mu)B_s - \frac{(iu-\mu)^2}{2}s} \\
&= e^{-iu\mu s - iuB_s + \mu B_s + \frac{\mu^2}{2}s - \frac{u^2}{2}t + iuB_s - \mu B_s - \frac{\left(-u^2-2iu\mu+\mu^2\right)}{2}s} \\
&= e^{-iu\mu s - iuB_s + \mu B_s + \frac{\mu^2}{2}s - \frac{u^2}{2}t + iuB_s - \mu B_s + \frac{u^2}{2}s + iu\mu s - \frac{\mu^2}{2}s} \\
&= e^{-\frac{u^2}{2}t + \frac{u^2}{2}s} \\
&= e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función característica de $W_t - W_s$

$$E^{(L_T)}\left[e^{iu(W_t - W_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}$$

es la función característica de una variable aleatoria $N(0, t-s)$ $\forall\, 0 \le s \le t$, con lo cual queda demostrada la estacionalidad y la propiedad de estándar del Movimiento Browniano. ■

Teorema D.1.2 *Si $\{H_t\}_{0\le t\le T}$ es un proceso localmente acotado y predecible y $\{M_t\}_{0\le t\le T}$ es una martingala local entonces $\int_0^t H_s\, dM_s$ es una martingala local.*

En particular si $\{M_t\}_{0\le t\le T}$ es un Movimiento Browniano $\int_0^t H_s\, dM_s$ es una martingala local.

Por el Lema de Fatou se tiene el siguiente corolario.

Corolario D.1.1 *Toda martingala local positiva es también una supermartingala.*

D.2 Teorema de Representación de Martingalas

Sean $\{B_t\}_{0\le t\le T}$ un Movimiento Browniano Estándar construido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ su filtración natural.

Definición D.2.1 *Se dice que X una variable aleatoria es cuadrado integrable si*

$$E\left(X^2\right) < \infty$$

Teorema D.2.1 (Teorema de Representación de Martingalas) *Sea $\{M_t\}_{0\le t\le T}$ una martingala cuadrado integrable con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$. Entonces existe un proceso adaptado $\{H_t\}_{0\le t\le T}$, tal que*

$$E\left[\int_0^T H_u^2\, du\right] < +\infty$$

y que

$$\forall\, t \in [0,T] \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_u\, dB_u \quad P \text{ c.s.}$$

Este resultado es demostrado por Karatzas [19].

Cabe mencionar que la condición $\int_0^T H_u^2\, du$ implica que el proceso $\left\{\int_0^t H_u\, dB_u\right\}_{0\le t\le T}$ es una martingala cuadrado integrable ya que

$$E\left[\left(\int_0^t H_u\, dB_u\right)^2\right] = E\left[\int_0^t H_u^2\, du\right] < \infty$$

Bibliografía

[1] R. B. Ash, Real Analysis and Probability, Academic Press, 1972.

[2] R. G. Bartle, The Elements of Integration, John Wiley & Sons, 1966.

[3] T. Bojdecki, Teoría General de Procesos e Integración Estocástica, Monografías del Instituto de Matemáticas, UNAM, 1984.

[4] F. Black, M Scholes, The Pricing of Options and Coorporate Liabilities, Journal of Political Economy 81, 1973.

[5] L.E. Clarke, Random Variables, Longman, New York, 1975.

[6] R. Courant, F. John, Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático, Vols. 1 y 2, Limusa, 1990.

[7] J. Cox, M. Rubinstein, Option Markets, Prentice Hall, London, 1985.

[8] R. Durret, Brownian Motion and Martingales in Analysis, The Wadsworth mathematics series, 1984.

[9] W. Feller, Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones, Vol. 1, Limusa, 1993.

[10] H. Föllmer, Probabilistic Aspects of Options. Discussion Papper No. B-202. Rheinische Friedrich-Wilhems-Universität. (1991)

[11] I. I. Gihman, A. V. Skorohod, The Theory of Stochastic Processes, Vols. I y III, Spring-Verlag, 1979.

[12] B. Harris, Theory of Probability, Addison-Wesley, 1966.

[13] J. M. Harrison, S.R. Pliska, *Stochastic Processes and their Applications 11:* Martingales and Stochastic Interals in the Theory of Continuos Trading, North-Holland, 1981.

[14] P. G. Hoel, S. C. Port, C. J. Stone, Introduction to Probability Theory, Houghton Mifflin, 1971.

[15] P. G. Hoel, S. C. Port, C. J. Stone, *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin, 1972.

[16] J. C. Hull, Introduction to Futures and Options Markets, Prentice Hall, 1995.

[17] J. C. Hull, Options, Futures and other derivatives, Prentice Hall, 1997.

[18] D. A. Kappos, Probability Algebras and Stochastic Spaces, Academic Press, 1969.

[19] I. Karatzas, S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, New York, 1988.

[20] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Introductory Real Analysis, Dover, 1970.

[21] D. Lamberton, B. Lapeyre, Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance, Ellipse.

[22] A. Ludwig, Stochastic Differential Equations, Wiley, 1974.

[23] C. Mansell, Las Nuevas Finanzas en México, Milenio, 1996.

[24] A. M. Mood, F. A. Graybill, D. C. Boes, Introduction to the Theory of Statistics, McGraw-Hill, 1974.

[25] B. Oksendal, Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer-Verlag, 1992.

[26] Protter, A new approach to Stochastic Integration, Lectures in Mathematics #21, Springer-Verlag, 1990.

[27] W. Ranquan, *Stochastic Differential Equations*, Pitman, 1985.

[28] S. I. Resnick, Adventures in Stochastic Processes, Birkhäuse, 1992.

[29] S. Ross, A First Course in Probability, Macmillan Publishing, 1988.

[30] H. Takeyuki, Brownian Motion, Springer-Verlag, 1980.

[31] H. M. Taylor, S. Karlin, An Introduction to Stochastic Modeling, Academic Press, 1994.