

1  
2e1



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

INCLINOMETRIA PARA DETERMINAR LAS PROPIEDADES MECANICAS DE ESTRATOS ARCILLOSOS SOMEROS EN LA CUENCA DE MEXICO.

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**INGENIERO GEOFISICO**

P R E S E N T A :

**MAGDALENA ALVARADO MANZANO**



MEXICO, D. F.

261063

1998.

**TESIS CON FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

SRITA. MAGDALENA ALVARADO MANZANO  
Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor M. en C. José Luis Rodríguez Zúñiga, y que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Geofísico:

**INCLINOMETRIA PARA DETERMINAR LAS PROPIEDADES MECANICAS  
DE ESTRATOS ARCILLOSOS SOMEROS EN LA CUENCA DE MEXICO**

- I INTRODUCCION
- II CONCEPTOS BASICOS DE ELASTODINAMICA
- III FORMULACION DEL PROBLEMA
- IV INCLINOMETROS COMPACTOS DE SILICIO
- V CAMPAÑAS EXPERIMENTALES
- VI INVERSION CON ALGORITMOS GENETICOS
- VII RESULTADOS Y COMPARACIONES
- VIII OTRAS APLICACIONES DE LA INCLINOMETRIA
- IX DISCUSION Y CONCLUSIONES  
BIBLIOGRAFIA

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Ciudad Universitaria, a 23 de septiembre de 1994  
EL DIRECTOR

  
ING. JOSE MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

**A mis padres, por todo su apoyo y confianza**

**A Adriana, Carlos y Fernando, por estar siempre a mi lado**

**A David, por su cariño**

**A TATIANA, por ser lo mejor en mi vida**

## ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....	1
<b>2. CONCEPTOS BÁSICOS DE ELASTODINÁMICA</b> .....	5
2.1 Leyes de Movimiento .....	8
2.2 Fórmula de Cauchy .....	15
2.3 Análisis de Esfuerzo Infinitesimal .....	17
2.4 Interpretación Geométrica de los Componentes de Deformaciones Infinitesimales.....	23
2.5 Compatibilidad de los Componentes de Deformación .....	26
2.6 Forma Generalizada de la Ley de Hooke. Constantes Elásticas .....	28
<b>3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA</b> .....	35
3.1 Solución de Boussinesq .....	35
3.2 Cargas Estáticas y Dinámicas en un Medio Estratificado .....	38
3.3 Matrices de Rigidez .....	39
<b>4. INCLINÓMETROS COMPACTOS DE SILICIO</b> .....	44
4.1 Descripción detallada del inclinómetro .....	44
4.1.1 La Base .....	46
4.1.2 Parte Mecánica .....	47
4.1.3 Detección .....	47
<b>5. MEDICIONES DE INCLINACIÓN DEL TERRENO EN GRENOBLE, FRANCIA Y EN LA ZONA VIRGEN DEL LAGO DE TEXCOCO, MÉXICO</b> .....	49
5.1 Sincrotrón de Grenoble, Francia .....	49
5.2 Zona Virgen del Lago de Texcoco, México .....	52
<b>6. INVERSIÓN CON ALGORITMOS GENÉTICOS</b> .....	55
6.1 Algoritmos Genéticos .....	56
6.2 Parámetros del Modelo .....	61
6.3 Reproducción .....	61
6.4 Cruza y Mutación .....	61

<b>7. RESULTADOS Y COMPARACIONES</b> .....	65
7.1 Presentación y Procesamiento de la Información .....	65
7.2 Resultados utilizando Algoritmos Genéticos .....	74
<b>8. OTRAS APLICACIONES DE LA INCLINOMETRÍA</b> .....	82
8.1 Descripción del Sistema .....	84
8.2 Funcionamiento del Sistema .....	86
8.3 Registros obtenidos de marzo a diciembre de 1994 .....	87
8.4 Interpretación de Resultados Parciales y Comparaciones .....	91
<b>9. CONCLUSIONES</b> .....	103
<b>REFERENCIAS</b> .....	105
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	107

## 1. INTRODUCCIÓN

En varios problemas de Geotecnia e Ingeniería Sísmica es importante contar con descripciones detalladas de los parámetros dinámicos que caracterizan a las formaciones geológicas más superficiales. Entre otros, el estudio de la respuesta sísmica de configuraciones geológicas locales, es de interés en la determinación de la influencia que presentan los efectos de sitio al movimiento global durante la ocurrencia de sismos fuertes. Esta información podría ser considerada en la definición del riesgo sísmico de grandes ciudades.

Algunas propiedades físicas de los materiales que forman el subsuelo, como la velocidad de propagación de ondas sísmicas, las constantes elásticas y el espesor de los distintos estratos, pueden ser observables o medibles. En la literatura especializada, es frecuente encontrar la aplicación de varios métodos estándar de uso común. Estos podrían dividirse de manera general en métodos directos e indirectos. Entre los primeros se encuentran las diversas pruebas de laboratorio a las que son sometidos los núcleos de roca o suelo extraídos durante la perforación, con ellos pueden estimarse con cierta precisión, los valores de las constantes elásticas que definen las relaciones constitutivas de los materiales.

Los métodos indirectos consideran el análisis de algunos fenómenos físicos medibles, que están relacionados con la distribución espacial de las propiedades físicas de interés. Entre ellos, los tiempos de llegada, amplitudes y tipos de ondas con las que se propaga la energía sísmica en experimentos de refracción o reflexión, pueden ser usados para estimar la velocidad de propagación de las ondas de cuerpo en los estratos del sitio de interés, así como para inferir la profundidad de los contactos entre medios con propiedades contrastantes. La dispersión (variación de la velocidad de propagación con la frecuencia) observada en las ondas superficiales ha sido también motivo para el desarrollo de varios métodos que pretenden extraer la información contenida en esas observaciones,

debido a que son fuertemente sensibles a la distribución de velocidades de ondas de cortante en el medio.

En Ingeniería Geofísica y de Exploración, los métodos indirectos son de uso común. La depuración y optimación de las técnicas de análisis han permitido contar con métodos rápidos y eficientes, cuyo grado de aproximación a la realidad interpretada, depende de las hipótesis en las que se basan, condiciones que presenta el subsuelo y de la resolución deseada para aplicaciones ingenieriles o de exploración.

Los métodos indirectos de la Ingeniería Geofísica son comúnmente tratados como problemas de Inversión en Geofísica. Esta filosofía de trabajo consiste en obtener los conjuntos de datos u observaciones producto de las mediciones indirectas, y plantearse la pregunta de qué distribución de propiedades físicas (o modelo) produjo el conjunto de observaciones. En general, este problema es no lineal y carece de solución única. El desarrollo de varias técnicas de optimación como la inversión estocástica o la inversa generalizada, ha permitido tratar problemas no lineales. La información *a priori* que de los modelos buscados se tenga, permite restringir las posibles soluciones.

Una nueva clase de técnicas de optimación, llamadas métodos de optimación global, entre los que se encuentran el método de Montecarlo, el Templamiento Simulado (Simulated Annealing) y los Algoritmos Genéticos, han resultado ser más atractivos que los llamados métodos locales, debido a que se evitan varias de las limitaciones clásicas que estos últimos presentan.

En este contexto, el presente trabajo comprende el desarrollo y la aplicación de una nueva técnica de medición en Geofísica. Se trata de mediciones muy precisas de la inclinación producida en el terreno, ante la presencia de cargas estáticas colocadas a distancias conocidas. Estas mediciones son realizadas mediante inclinómetros compactos de silicio, desarrollados por el Dr. Pierre Antoine Blum del Instituto de Física del Globo de París.



En el desarrollo de ésta tesis se presentan los principios físicos y la construcción de estos instrumentos, así como la descripción de los dispositivos o arreglos de medición en campo. En particular, se presentan los experimentos de inclinación inducida en el terreno, llevados a cabo en el Sincrotrón de Grenoble, Francia, y en una zona de lago virgen, en Texcoco, al noreste de la Ciudad de México.

El objetivo de estos experimentos y del presente trabajo, es mostrar la aplicabilidad del método de mediciones muy precisas de la inclinación del terreno para estimar un perfil a profundidad de la distribución de parámetros dinámicos del sitio de medición, los cuales están ligados con las propiedades elásticas de los materiales. En efecto, si la carga puntual aplicada en la superficie del terreno y la distancia de aplicación son conocidas, entonces los perfiles de inclinación contra distancia, que registren los instrumentos, dependerán únicamente de la distribución de propiedades elásticas a profundidad.

Son necesarios al menos tres parámetros para describir un medio elástico e isótropo, por ejemplo, la densidad de masa y las constantes de Lamé; o bien la densidad de masa y las velocidades de propagación de ondas  $P$  y  $S$  en el medio. En este trabajo se resuelve para las velocidades de propagación, el espesor y el módulo de rigidez al cortante de cada estrato del modelo.

Así, con los datos obtenidos de los experimentos de Grenoble y Texcoco, se plantea el problema inverso de identificar los modelos del terreno (modelos con estratos planos homogéneos) cuya distribución de propiedades elásticas o dinámicas, produzcan las curvas de inclinación contra distancia observadas durante los experimentos cuando se les aplica la carga utilizada a las distancias establecidas.

El problema inverso anterior se plantea en un esquema de optimización global y se resuelve mediante las técnicas de los Algoritmos Genéticos. En este trabajo se presentan los principios en los cuales se basa esta técnica de inversión; se trata de una imitación de los mecanismos básicos de la evolución de los seres vivos: reproducción sexual,

recombinación genética y mutación, que llevados al contexto de un algoritmo de cómputo permiten un muestreo rápido y eficaz del universo de modelos para llegar al modelo deseado de manera eficiente.

Finalmente, los resultados obtenidos de la inversión con Algoritmos Genéticos, son comparados con aquellos arrojados por la aplicación de varias técnicas establecidas de uso común, con el fin de validar los resultados y establecer la utilidad de la técnica.

## 2. CONCEPTOS BÁSICOS DE ELASTODINÁMICA

En este capítulo se presentan los conceptos básicos de la elastodinámica, como son las nociones de esfuerzo y deformación en un medio continuo, los cuales conducen a la ecuación de Navier o ecuación de movimiento, que expresa las condiciones de equilibrio en función de los componentes del vector desplazamiento (véase p. ej. Fung, 1965 y Faccioli, 1969).

Considérese un cuerpo  $B$  ocupando una cierta posición en el espacio en un tiempo  $t$  y una superficie cerrada  $S$  dentro de  $B$ , se supone conocida la interacción entre el material dentro y fuera de  $S$ . Tomando un pequeño elemento diferencial de área  $\Delta S$  se dibujará la normal a la superficie ( $\mathbf{v}$ ) hacia fuera del volumen de control. Esto permite distinguir las partes del material en los dos lados de  $\Delta S$  de acuerdo al sentido de la normal, (figura 2.1).

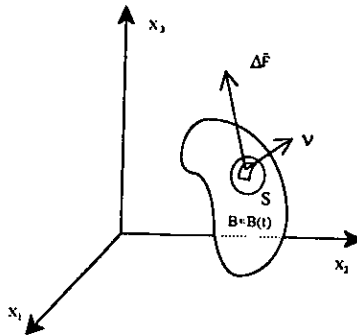


Figura 2.1 Fuerza de Superficie  $\Delta \vec{F}$  actuando sobre el cuerpo  $B$ .

Así,  $\Delta \vec{F}$  es la acción ejercida por el material exterior (lado positivo) sobre la porción interior (lado negativo). Por la suposición anteriormente hecha

$$\Delta \vec{F} = \Delta \vec{F}(v, \Delta S) \quad (2.1)$$

se dice que el limite

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \vec{T}_v \quad (2.2)$$

existe y es finito además que, como  $\Delta S \rightarrow 0$ , el momento de las fuerzas que actúan sobre  $\Delta S$  alrededor de cualquier punto dentro del área, desaparece.

El vector limite  $\vec{T}_v$  llamado **vector de esfuerzo o tracción**, es claramente una función de  $v$  (*i.e.* de la orientación de la superficie) y representa la fuerza por unidad de área actuando sobre la superficie.

Considerando ahora el caso especial donde la superficie  $\Delta S_k$  es paralelo a uno de los planos coordenados, se supone a la normal  $\Delta S_k$  en la dirección positiva del eje  $x_k$  y que el vector de esfuerzo actuando sobre  $\Delta S_k$  es  $\vec{T}_k$ . Se denotan las componentes de  $\vec{T}_k$  a lo largo de la dirección de los ejes coordenados  $x_1, x_2, x_3$  por

$$T_{k1}, T_{k2}, T_{k3}, \text{ es decir } T_{ki}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

El primer subíndice " $k$ " indica la superficie en la cual la fuerza actúa, y el segundo subíndice denota el componente de la fuerza. Para este caso se introducirá una simbología especial

$$T_{k1} = \sigma_{k1} \quad T_{k2} = \sigma_{k2} \quad T_{k3} = \sigma_{k3} \quad (2.4)$$

Podemos arreglar los componentes del vector de esfuerzo que actúan sobre la superficie  $k=1, k=2, y k=3$  en una matriz cuadrada, como sigue:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

donde cada uno de los componentes de esta matriz se ilustran en la figura 2.2

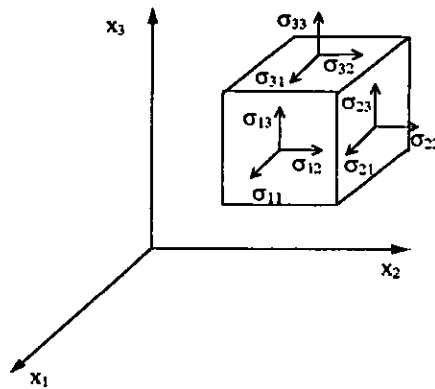


Figura 2.2 Notación para los componentes del tensor de esfuerzos.

Los componentes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  son llamados esfuerzos normales, y en notación ingenieril serán solamente denominados por  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . El resto de los componentes  $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$  etc., se llamarán esfuerzos cortantes y serán denotados por  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ , etc.

Entonces, empleando notación común en ingeniería, el tensor de esfuerzos se resume en

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Nuevamente, se debe enfatizar que *un esfuerzo será siempre representante de una fuerza (por unidad de área) ejercida por el material en el lado positivo de la normal exterior sobre la parte que descansa en el lado negativo.* Esto significa que si la normal exterior de una superficie apunta en la dirección positiva del eje  $x_1$  y  $\sigma_{11}$  es positiva, entonces el vector representado por  $\sigma_{11}$  también apuntará en la dirección positiva. Pero si la normal exterior apunta en la dirección negativa del eje  $x_1$  y  $\sigma_{11}$  es de signo positivo, entonces el vector de esfuerzo representado por  $\sigma_{11}$  también apuntará en la dirección negativa del eje  $x_1$ .

## 2.1 LEYES DE MOVIMIENTO

Se establecerán ahora las leyes fundamentales de movimiento para cuerpos de todo tipo en la forma dada por Euler.

Sea:  $B = B(t)$ , la porción del espacio ocupado por el cuerpo en un tiempo  $t$ .

$\vec{r} = \vec{r}(P)$ , el vector de posición del punto interior del cuerpo  $P$  con respecto al origen del sistema coordenado.

$\vec{v} = \vec{v}(P)$ , el vector de velocidad en el punto  $P$ .

$\rho = \rho(P)$ , la densidad del material en el punto  $P$ .

Definiendo ahora la cantidad **momento lineal** de un cuerpo en la configuración  $B(t)$  como

$$M = \int_{B(t)} \vec{v} \rho dV \quad (2.7)$$

y a la cantidad **momento de momento** como

$$H = \int_{B(t)} \vec{r} \times \vec{v} \rho dV \quad (2.8)$$

donde la integral se realiza sobre el volumen  $B(t)$ .

Se asumirá ahora que la fuerza total externa  $F$  actuando en  $B$  es conocida y también que el momento  $L$  de la fuerza total externa con respecto al origen, es conocido. Entonces la ley fundamental de movimiento establece que

$$\dot{M} = F, \quad (2.9)$$

o el valor del cambio del momento lineal es igual al total de la fuerza aplicada, y

$$\dot{H} = L \quad (2.10)$$

es decir, *la razón de cambio del momento de momento es igual al torque total aplicado.*

En las ecuaciones anteriores  $\dot{M}$  y  $\dot{H}$  representan la derivada temporal del momento lineal y del momento de momento, respectivamente.

En la mecánica del medio continuo, hay dos tipos de fuerzas externas:

- 1.- Fuerzas de cuerpo, actuando sobre elementos de volumen (gravitacional, electromagnético).

- 2.- Fuerzas de superficie o de contacto, actuando sobre los elementos de una superficie (contacto mecánico de dos cuerpos).

Por otro lado, sea una fuerza de cuerpo específica con referencia a un volumen limitado por una superficie arbitraria  $S$  (figura 2.3), suponiendo que el vector resultante de la fuerza de cuerpo puede ser representado como una integral de volumen

$$\int_B \bar{X} dV \quad (2.11)$$

donde  $\bar{X}$  (y sus tres componentes  $X_1, X_2, X_3$ ) son llamadas **fuerzas de cuerpo por unidad de volumen**. En el campo gravitacional tendríamos

$$X_i = \rho g_i \quad (2.12)$$

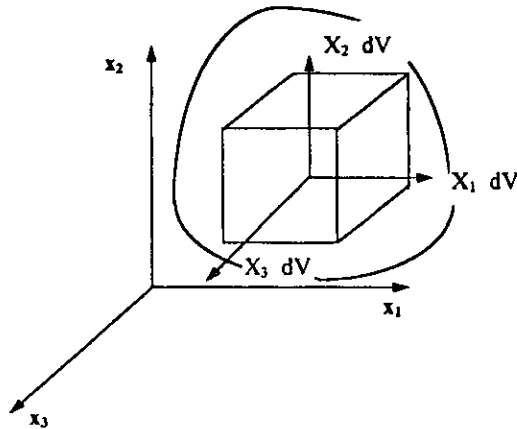


Figura 2.3 Densidad de fuerzas de cuerpo en las direcciones de los ejes coordenados.



Debido a que la fuerza de superficie sobre una superficie en el interior de un cuerpo es el vector de esfuerzo, se puede escribir

$$\mathbf{F} = \int_S \vec{T}_v dS + \int_B \vec{X} dV \quad (2.13)$$

y para el torque total respecto al origen

$$\mathbf{L} = \int_S \vec{r} \times \vec{T} dS + \int_B \vec{r} \times \vec{X} dV. \quad (2.14)$$

La ecuación ( 2.9 ) expresa la ley básica de conservación del momento lineal en una forma global (integral global), esto es una forma conveniente para un cuerpo que ocupa un volumen finito. Con frecuencia sucede, sin embargo, que se esta interesado en la formulación local de la misma ley, esto es de una forma conveniente para una descripción puntual del movimiento. Esto significa que necesitamos una ecuación diferencial.

Tal ecuación puede ser obtenida directamente desde la ecuación ( 2.9 ) usando el teorema de la divergencia de Gauss, pero aqui es preferible analizar un elemento diferencial para asegurar la claridad fisica.

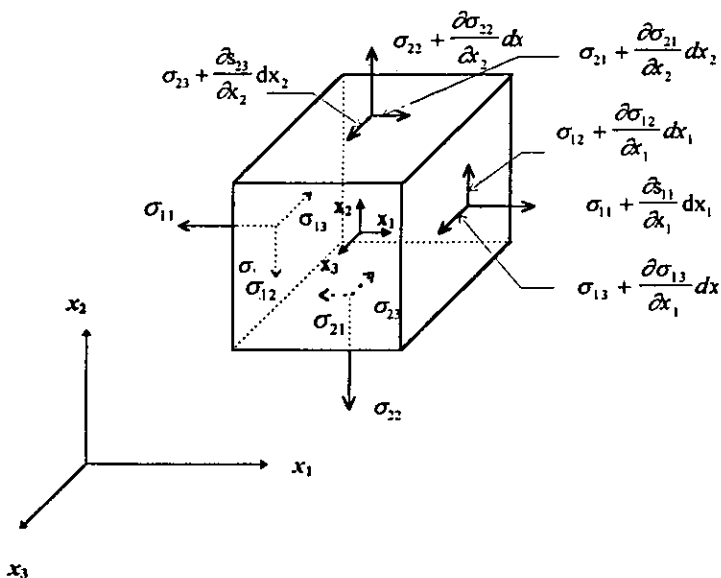


Figura 2.4 Equilibrio de componentes de esfuerzo en un paralelepipedo infinitesimal.

Se considera el equilibrio de un paralelepipedo infinitesimal con superficies paralelas a los planos coordenados. Los esfuerzos están mostrados en la figura 2.4 suponiendo que son continuos. La fuerza de cuerpo es  $X_i dx_1 dx_2 dx_3$ , donde  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  es claramente el volumen del paralelepipedo.

Así que, si  $\sigma_{11}$  es el esfuerzo normal que está actuando sobre el lado izquierdo,  $(\sigma_{11} + \partial\sigma_{11}/\partial x_1) dx_2 dx_3$  será el esfuerzo normal que actúa en el lado derecho, y de forma similar para las otras superficies.

El equilibrio de un paralelepipedo requiere que las fuerzas resultantes actuando en él sean iguales a cero y de manera similar el momento:

$$\vec{R} = 0 \quad \vec{M} = 0 \quad (2.15)$$

Cada una de estas ecuaciones, proyectada en la dirección de los ejes coordenados, generan tres ecuaciones, por ejemplo  $R_x = 0$ . Esto requiere que la suma de las fuerzas en la dirección del eje  $x_1$  sea igual a cero o sea:

$$\left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 - \sigma_{21} dx_1 dx_3 + \left( \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + X_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad (2.16)$$

donde la fuerza de cuerpo total puede ser  $-\rho dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  que es la fuerza de inercia en la dirección el eje  $x_1$ . Dividiendo entre  $dx_1 dx_2 dx_3$  se obtiene

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.17)$$

A partir de las ecuaciones  $R_y = 0$  y  $R_z = 0$  se pueden obtener otras dos ecuaciones de equilibrio que son:

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.19)$$

Aquí  $u, v, w$  son los componentes del vector de desplazamiento en las direcciones de  $x, y, z$  y se supone que  $\rho$  es constante dentro de  $dV$ .

El grupo de ecuaciones ( 2.17, 2.18, 2.19 ) puede escribirse en notación índice como:

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} = 0; \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

Por otra parte, con referencia a las ecuaciones de momento, tomando el origen del marco de referencia coincidiendo con una de las esquinas del paralelepipedo, se requiere que los momentos de todas las fuerzas referidas a los ejes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  sean iguales a cero. Entonces se obtienen las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \sigma_{21} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} \quad \text{ó} \quad \sigma_{kl} = \sigma_{lk} \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} \end{aligned} \quad (2.21)$$

esto muestra que *los componentes de esfuerzo cortante son simétricos.*

## 2.2 FÓRMULA DE CAUCHY

Conociendo los componentes de esfuerzo  $\sigma_{ij}$  en el punto  $P$ , se puede expresar el vector de esfuerzo  $\vec{T}_v = (T_{v1}, T_{v2}, T_{v3})$ , en cualquier superficie a través de  $P$ , con un vector normal unitario  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , dirigido hacia fuera.

Considerando un tetraedro infinitesimal (figura 2.5) limitado por tres superficies paralelas a los planos coordenados e intersectando a  $P$  y la superficie con normal  $\vec{v}$ . Esta superficie tiene área  $dS$ . El área de las otras superficies será:

$$\begin{aligned} dS_1 &= dS \cos(\vec{v}, \vec{x}_1) = v_1 dS \\ dS_2 &= dS \cos(\vec{v}, \vec{x}_2) = v_2 dS \\ dS_3 &= dS \cos(\vec{v}, \vec{x}_3) = v_3 dS \end{aligned} \quad (2.22)$$

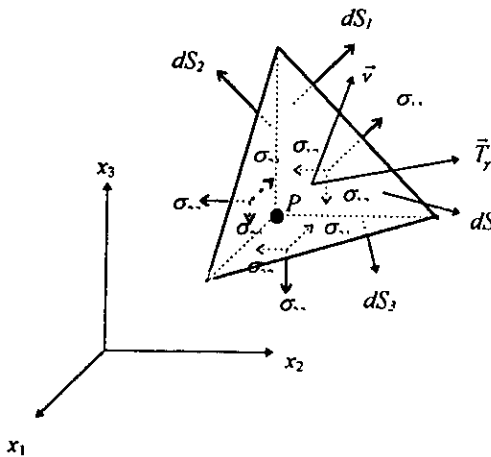


Figura 2.5 Tracciones en la superficie de un tetraedro

donde  $v_1, v_2, v_3$  son componentes de  $\vec{v}$ .

Las fuerzas en la dirección positiva del eje  $x_1$  que actúan en las tres superficies coordenadas son

$$(-\sigma_{11} + \varepsilon_1)dS_1 \quad (-\sigma_{21} + \varepsilon_2)dS_2 \quad (-\sigma_{31} + \varepsilon_3)dS_3 \quad (2.23)$$

donde  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  son esfuerzos actuantes en el punto  $P$ .  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  representan incrementos infinitesimales de esfuerzo que se adicionan debido a que las tracciones se aplican en puntos ligeramente diferentes de  $P$ . Además, la fuerza sobre  $dS$  tiene un componente  $(T_{v_1} + \varepsilon)dS$  en la dirección del eje  $x_1$  y la fuerza de cuerpo de inercia tiene un componente igual a  $(-\rho dV \partial^2 u / \partial t^2)$ . En esta fuerza de inercia  $dV = h dS/3$ , donde  $h$  es la altura de  $P$  desde  $dS$ ,  $T_{v_1}$  se refiere nuevamente al punto  $P$ .

Aplicando equilibrio dinámico en la dirección del eje  $x_1$

$$\begin{aligned} &(-\sigma_{11} + \varepsilon_1)v_1 dS + (-\sigma_{21} + \varepsilon_2)v_2 dS + (-\sigma_{31} + \varepsilon_3)v_3 dS + \\ &+ (T_{v_1} + \varepsilon)dS - \rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) h \frac{dS}{3} = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dividiendo entre  $dS$  y tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$  se tiene

$$T_{v_1} = \sigma_{11}v_1 + \sigma_{21}v_2 + \sigma_{31}v_3 \quad (2.25)$$

De manera análoga, el equilibrio en la dirección de los ejes  $x_2$  y  $x_3$ , se tendrá:

$$T_{v_2} = \sigma_{12}v_1 + \sigma_{22}v_2 + \sigma_{32}v_3 \quad (2.26)$$

$$T_{v_3} = \sigma_{13}v_1 + \sigma_{23}v_2 + \sigma_{33}v_3 \quad (2.27)$$

Concretamente estas ecuaciones pueden ser reescritas como

$$T_{vk} = \sigma_{kl} v_l \quad ; \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (2.28)$$

la cual es conocida como la fórmula de Cauchy.

Esta fórmula muestra que nueve de los componentes de esfuerzo en un punto son necesarios y suficientes para definir la tracción a través de cualquier elemento de superficie por medio de  $P$ , ésto es, el estado de esfuerzo en un cuerpo esta completamente caracterizado por el grupo de valores  $\sigma_{ij}$ .

Suponiendo ahora que  $\sigma_{ij}$  está definido con respecto al sistema cartesiano rectangular  $x_1, x_2, x_3$  y sean  $x'_1, x'_2, x'_3$  un segundo grupo de coordenadas cartesianas rectangulares con el mismo origen. Si se quiere considerar los componentes de esfuerzo  $\sigma'_{ij}$  en el nuevo sistema de referencia, los  $\sigma'_{ij}$  son obtenidos desde  $\sigma_{ij}$  de acuerdo a la regla de transformación, la cual define al tensor cartesiano de transformación.

### 2.3 ANÁLISIS DE ESFUERZO INFINITESIMAL

En esta parte se considerarán los cambios de la configuración de un cuerpo sólido desde un punto de vista geométrico, sin tomar en cuenta las causas físicas, las cuales pueden producir dichos cambios.

Considerando un cuerpo que sufre un cambio de configuración tal que la posición de cualquier partícula  $P$  dentro del cuerpo es descrita por un vector de desplazamiento  $\vec{s}$ .

Si  $\vec{s}$  es conocido para cada punto del cuerpo, entonces la configuración final del cuerpo se puede determinar exactamente. Como en el caso del vector de esfuerzo suponemos explícitamente que  $\vec{s}$  es una función regular de la posición  $P$  y que puede ser

tratado como una cantidad infinitesimal en el sentido de que el desplazamiento relativo entre los puntos del cuerpo es considerado como infinitesimal.

Tomando un marco cartesiano de referencia  $x_1, x_2, x_3$  y considerando en las vecindades de un punto  $P$  dentro del cuerpo tres segmentos infinitesimales  $dx_1, dx_2, dx_3$ , y  $\vec{s} = \vec{s}(P)$  es el vector característico del desplazamiento de  $P$  (figura 2.6).

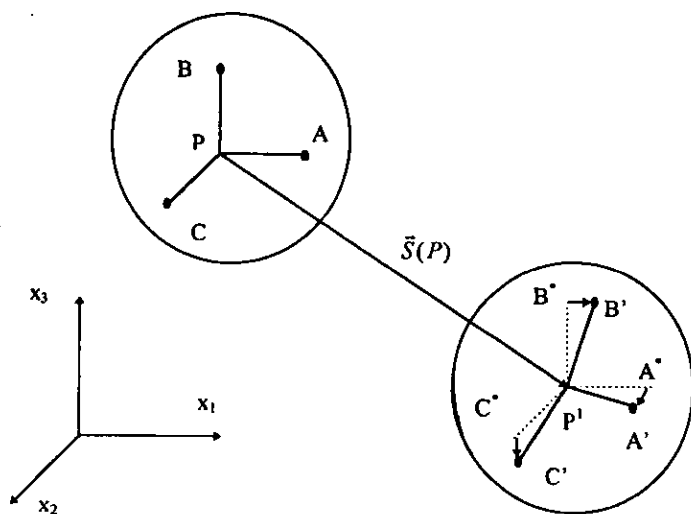


Figura 2.6 Vector de desplazamiento del punto  $P$ .



Los desplazamientos de los puntos A, B, y C infinitamente cercanos a P pueden entonces expresarse como

$$\bar{s}_A = \bar{S}(P) + \frac{\partial \bar{S}(P)}{\partial x_1} dx_1$$

$$\bar{s}_B = \bar{S}(P) + \frac{\partial \bar{S}(P)}{\partial x_2} dx_2 \quad (2.29)$$

$$\bar{s}_C = \bar{S}(P) + \frac{\partial \bar{S}(P)}{\partial x_3} dx_3$$

Las ecuaciones (2.29) muestran que la posición final A' puede ser determinada dando primero a A el mismo desplazamiento  $\bar{s}$  como a P, y luego añadiendo  $\left(\frac{\partial \bar{S}(P)}{\partial x_1}\right) dx$  el cual esta representado por el segmento  $\overline{A^*A'}$  en la figura 2.6.

Puesto que se aplica lo mismo a  $\bar{s}_B$  y  $\bar{s}_C$  se puede decir que los desplazamientos de A, B, y C se consideran como la cantidad de la traslación rígida  $\bar{S}(P) = \overline{PP'}$  y el primer orden infinitesimal de desplazamientos

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial x_1} dx_1 \quad \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_2} dx_2 \quad \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_3} dx_3 \quad (2.30)$$

Si se establece

$$\bar{\Psi}_1 = \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_1} \quad \bar{\Psi}_2 = \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_2} \quad \bar{\Psi}_3 = \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_3} \quad (2.31)$$

esto puede mostrar que los tres vectores  $\bar{\Psi}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) forman un tensor Cartesiano de segundo orden, cuyos componentes escalares son

$$\Psi_{ik} = \frac{\partial \bar{S}_k}{\partial x_i} \quad (2.32)$$

donde  $s_1 = u$   $s_2 = v$   $s_3 = w$  son los componentes de  $\bar{S}$ . Cuando las  $\bar{\Psi}_i$  son conocidas en  $P$  se puede determinar el desplazamiento de cualquier punto  $Q$  en las vecindades de  $P$  teniendo las coordenadas  $dx_1, dx_2, dx_3$ , con respecto a éste.

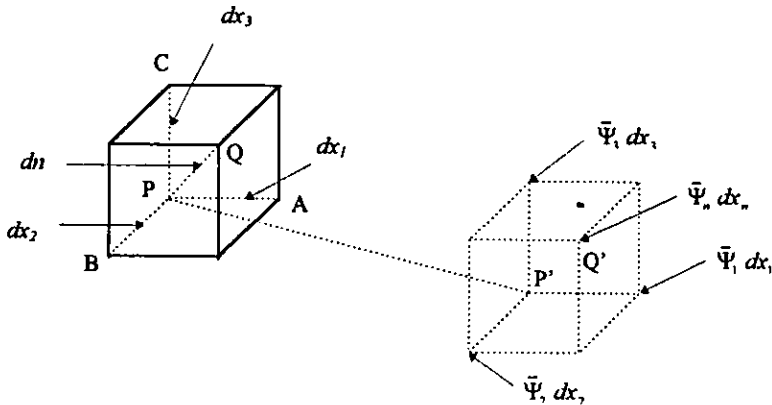


Figura 2.7 Desplazamiento de un punto  $Q$  situado en las vecindades de  $P$ .

De la figura 2.7 se puede ver que

$$\bar{\Psi}_n dn = \bar{\Psi}_1 dx_1 + \bar{\Psi}_2 dx_2 + \bar{\Psi}_3 dx_3 \quad (2.33)$$

Dividiendo entre  $dn$  y observando que  $\cos\left(\frac{dx_k}{dn}\right) = d_k$  son los cosenos directores de  $\overline{PQ}$ , se obtiene

$$\tilde{\Psi}_n = \tilde{\Psi}_i d_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.34)$$

e introduciendo las componentes de  $\tilde{\Psi}_n$  con respecto a los ejes se tiene

$$\Psi_{nk} = \Psi_{ik} d_i \quad (2.35)$$

los cuales son exactamente de la misma forma que la fórmula de Cauchy para esfuerzo.

Ahora, se ve inmediatamente que

$$\Psi_{ik} = \varepsilon_{ik} + \omega_{ik} = \frac{1}{2}(\Psi_{ik} + \Psi_{ki}) + \frac{1}{2}(\Psi_{ik} - \Psi_{ki}) \quad (2.36)$$

donde

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(\Psi_{ik} + \Psi_{ki}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x_k} + \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.37)$$

es lo que se llama "parte simétrica" del tensor  $\Psi_{ik}$  y

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2}(\Psi_{ik} - \Psi_{ki}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x_k} - \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.38)$$

es la "parte antisimétrica".

Se observa claramente que  $\varepsilon_{ik}$  tiene 6 distintas componentes las cuales en notación de ingeniería pueden ser reescritas como sigue

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial w}{\partial z}$$

(2.39)

$$\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \varepsilon_{21} = \frac{\gamma_{yx}}{2}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \varepsilon_{31} = \frac{\gamma_{zx}}{2}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \varepsilon_{32} = \frac{\gamma_{zy}}{2}$$

Las cantidades  $\varepsilon_{ij}$  definidas, son los componentes del tensor de deformaciones infinitesimales. Por otro lado, los únicos componentes no nulos de  $\omega_{ij}$  son

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_2} - \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\omega_{21}$$

$$\omega_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\omega_{31} \quad (2.40)$$

$$\omega_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_2}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\omega_{32}$$

Estas cantidades son los componentes del tensor de rotaciones infinitesimales antisimétrico.

## 2.4 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS COMPONENTES DE DEFORMACIONES INFINITESIMALES

Haciendo referencia a la figura 2.6 se observa que la cantidad  $\epsilon_{11} = \partial s_1 / \partial x_1$  representa el radio de la proyección del segmento  $\overline{A^*A'}$  en la dirección  $x_1$ , de longitud  $dx_1$ , esto es, el radio de variación de la distancia entre  $P$  y  $A$  y el valor inicial de esta distancia. Físicamente, este es el cambio de longitud (extensión) de un segmento en la dirección del eje  $x_1$ . La misma interpretación se aplica a  $\epsilon_{22} = \partial s_2 / \partial x_2$  y  $\epsilon_{33} = \partial s_3 / \partial x_3$  los cuales son las extensiones en las direcciones de los ejes  $x_2$  y  $x_3$ . Una representación gráfica de la extensión para un elemento de volumen se presenta en la figura 2.8, usando notación común de ingeniería

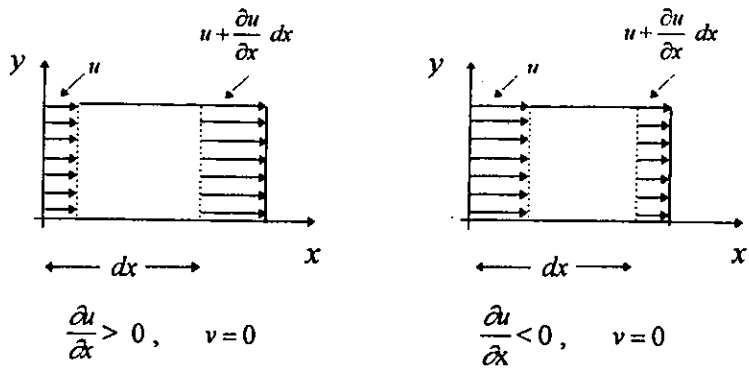


Figura 2.8 Gradiente de deformación e interpretación de los componentes de deformación principal.

Considerando ahora la cantidad  $\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \right)$  con referencia a la figura

2.9

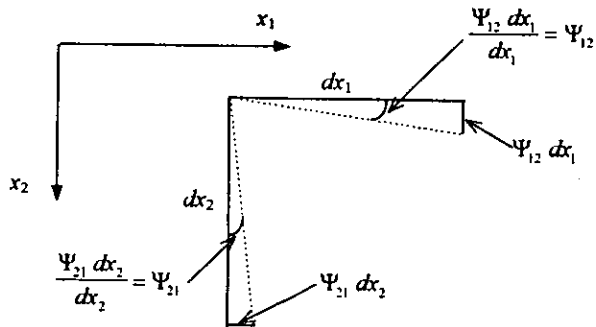


Figura 2.9 Interpretación de los componentes de rotación del Tensor de deformaciones.

Se observa que el total de la variación del esfuerzo inicial del ángulo formado por los segmentos  $dx_1$  y  $dx_2$  esta dada por la suma  $\Psi_{12} + \Psi_{21}$ . Esto es visto fácilmente teniendo en mente que  $\Psi_{12}$  (componente  $x_2$  del vector  $\bar{\Psi}_1$ ) es positivo si tiene la misma dirección que  $x_2$ , y análogamente  $\Psi_{21}$  (componente  $x_1$  del vector  $\bar{\Psi}_2$ ) es positivo si tiene la misma dirección que  $x_1$ . Por consiguiente,  $\Psi_{12}$  es positivo en una rotación en sentido horario, mientras que  $\Psi_{21}$  es positivo para una rotación en sentido antihorario. La misma consideración se aplica a  $\varepsilon_{13}$  y  $\varepsilon_{23}$ .

Entonces se observa que los seis componentes  $\varepsilon_{ij}$  definen completamente el estado de deformación en las vecindades de un punto  $P$  porque, los cambios situados arriba de la referencia son suficientes para dar la dilatación a lo largo de cualquier dirección a través de  $P$ , así como la variación del ángulo entre cualesquiera dos segmentos que intersecten a  $P$ .

Si todos los  $\varepsilon_{ij}$  desaparecen para un paralelepipedo infinitesimal, quiere decir que no hay deformaciones de cortante, lo que significa que sólo habrá un movimiento de cuerpo rígido posible para el paralelepipedo.

El tensor  $\Psi_{ik}$  representa el cambio infinitesimal de la configuración de la traslación rígida del paralelepipedo (esto es, no tiene los componentes de traslación rígida). Además, como se ha visto  $\Psi_{ik}$  ha sido dividido en dos partes, de las cuales  $\varepsilon_{ik}$  representa el estado local de deformación. Entonces, la parte restante de  $\omega_{ik}$  puede representar posiblemente sólo la rotación rígida infinitesimal, esto es, sus componentes describen la rotación de dos segmentos intersectándose del mismo ángulo y en el mismo sentido.

## 2.5 COMPATIBILIDAD DE LOS COMPONENTES DE DEFORMACIÓN

Si se dan los componentes  $\epsilon_{ij}$  del tensor de deformaciones, puede proponerse la pregunta de cómo encontrar los desplazamientos  $s_i$ . Como se tienen que integrar las seis ecuaciones diferenciales

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.41)$$

y hay solamente tres funciones  $s_i$  desconocidas, para determinarlas se puede deducir que asignando arbitrariamente las  $\epsilon_{ij}$ , no se puede en general obtener una solución de valor singular de la ecuación (2.41). Una posible consecuencia de semejanza arbitraria puede ser gráficamente representada como en la figura 2.10.

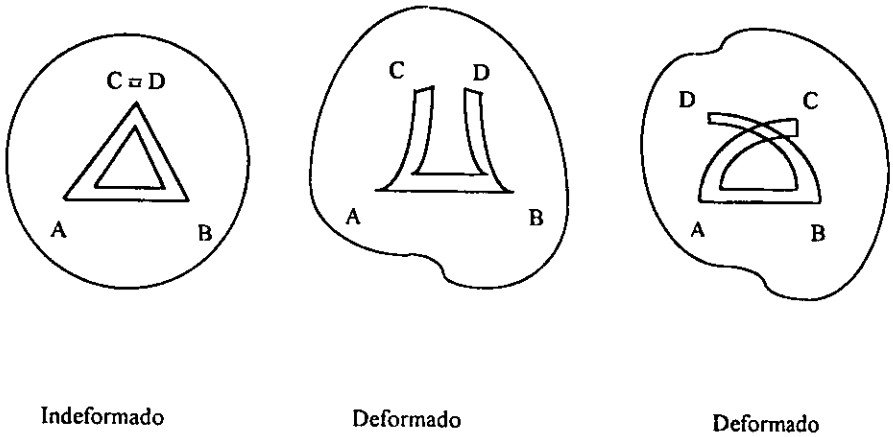


Figura 2.10 Ilustraciones del requerimiento de compatibilidad.



Aquí una porción de material en un cuerpo es representada por un triángulo continuo. Si se deforma este triángulo por el siguiente campo de esfuerzos escogido arbitrariamente comenzando desde A podría finalizarse en el punto C o en D con una abertura entre ellos. Si se quiere que exista una solución continua de valor singular (movimientos de cuerpo rígido), los puntos finales C y D deben encontrarse perfectamente en la configuración deformada. Estos requerimientos no pueden ser encontrados en general, a no ser que el campo de esfuerzos específico obedezca a condiciones de integrabilidad. Semejante a condiciones de integrabilidad son llamadas condiciones de compatibilidad para las deformaciones y se pueden obtener directamente de la ecuación ( 2.41 ) eliminando  $s_i$ .

Empezando desde

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.42)$$

y derivando una vez con respecto a  $x_1$  y también con respecto a  $x_2$ , se tiene

$$\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 s_1}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^3 s_2}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} \right) \quad (2.43)$$

Entonces se toma

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \quad ; \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \quad (2.44)$$

y derivando la primera dos veces con respecto a  $x_2$  y la segunda dos veces con respecto a  $x_1$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 s_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^3 s_2}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_1} \quad (2.45)$$

Comparando la ecuación ( 2.43 ) con las ecuaciones ( 2.45 ) y observando que el orden de la derivación es intercambiable, se obtiene

$$\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} \right). \quad (2.46)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se obtienen otras cinco ecuaciones de compatibilidad, las cuales, usando notación índice, pueden ser escritas como:

$$\epsilon_{ij,k1} + \epsilon_{k1,j} - \epsilon_{ik,j1} - \epsilon_{j1,k} = 0. \quad (2.47)$$

Solamente 6 ecuaciones de 81 son esenciales aquí. A través de ésta derivación se muestra que la ecuación ( 2.47 ) es necesaria para en la ecuación ( 2.42 ) admitir una solución continua de valor simple.

## 2.6 FORMA GENERALIZADA DE LA LEY DE HOOKE. CONSTANTES ELÁSTICAS

Se sabe a partir de experimentos, que para una amplia categoría de sólidos, los esfuerzos observados son proporcionales a la carga aplicada, siempre que no se exceda un cierto valor conocido como **límite elástico**.

Una generalización y una exposición matemática de esta ley experimental puede ser formulada como sigue:

*cada uno de los seis componentes de deformación en cualquier punto es una función lineal homogénea de seis componentes de esfuerzo, o bien*

$$\varepsilon_{11} = H_{1111}\sigma_{11} + H_{1112}\sigma_{12} + H_{1113}\sigma_{13} + H_{1122}\sigma_{22} + H_{1123}\sigma_{23} + H_{1133}\sigma_{33} \quad (2.48)$$

$$\varepsilon_{12} = H_{1211}\sigma_{11} + H_{1212}\sigma_{12} + H_{1213}\sigma_{13} + H_{1222}\sigma_{22} + H_{1223}\sigma_{23} + H_{1233}\sigma_{33} \quad (2.49)$$

Esta es la forma generalizada de la Ley de Hooke y esto puede ser compactado reescribiéndose como

$$\varepsilon_{ij} = H_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (2.50)$$

Suponiendo que la ecuación ( 2.50 ) puede ser siempre resuelta con respecto a los esfuerzos dados

$$\sigma_{ij} = h_{ijkl}\varepsilon_{kl} . \quad (2.51)$$

Un cuerpo, cuyo comportamiento de esfuerzo-deformación se rige por las ecuaciones (2.50 ) y ( 2.51 ) se denomina cuerpo elástico lineal. Debido a que únicamente se consideran los sólidos homogéneos, los coeficientes de elasticidad  $H_{ijkl}$  serán constantes y no dependerán de la posición .

Además, debido a que  $\varepsilon_{ij}$  son por definición los componentes de deformación infinitesimal, las ecuaciones ( 2.50 ) y ( 2.51 ) definen el comportamiento elástico lineal mientras que  $\varepsilon_{ij}$  sean lo suficientemente pequeños. Si los esfuerzos exceden ciertos valores, la relación lineal con los esfuerzos generalmente ya no será válida debido a la irreversible aparición de deformaciones (plásticas) o a otros comportamientos no lineales del material.

Una consecuencia de aceptar la linealidad, además del hecho de que  $\varepsilon_{ij}$  se supone infinitesimal es la validez del principio de superposición .

Esto significa que si se tiene un sistema de fuerzas A, el cual es la suma de dos sistemas B y C, los efectos de la aplicación de A sobre un cuerpo en términos de esfuerzo y deformación pueden ser calculados como la suma de los efectos de B y C, cada uno actuando separadamente.

Este principio puede llevar a resultados incorrectos sólo si la aplicación de B puede producir un cambio de configuración tal que, cuando C es aplicado (y B aún está actuando) las dimensiones de la posición del cuerpo han sido apreciablemente cambiadas y las ecuaciones de equilibrio no son válidas ya para la configuración sin deformar. Sin embargo, la hipótesis del esfuerzo infinitesimal impide esta posibilidad y el principio de superposición las retiene.

En un material completamente alotrópico, donde no existe simetría espacial particular (esto es, un cristal triclinico), 21 coeficientes diferentes son necesarios para definir las propiedades elásticas del medio.

Cuando el material tiene ejes o planos de simetría, las relaciones pueden ser establecidas entre estos coeficientes y los números de las constantes elásticas independientes son consecuentemente reducidos. Así, puede mostrarse que para un cristal cúbico hay solamente tres constantes independientes. Si además el sólido es completamente isotrópico, los valores de los coeficientes pueden ser independientes de este grupo de ejes rectangulares escogido y esta condición puede ser mostrada para reducir a 2 el número de constantes elásticas independientes. Esto puede ser denotado por,

$$h_{1112} = h_{1133} = h_{1233} = h_{3111} = h_{3222} = h_{1211} = \lambda$$

$$h_{1111} = h_{2222} = h_{3333} = \lambda + 2\mu. \quad (2.52)$$

$$h_{2323} = h_{1313} = h_{1212} = 2\mu.$$

y los 24 coeficientes restantes se hacen cero. Como una consecuencia de la ecuación (2.51) se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11} \quad ; \quad \sigma_{22} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{22} \quad ; \quad \sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33} \\ & \hspace{15em} (2.53) \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12} \quad ; \quad \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} \quad ; \quad \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} \end{aligned}$$

donde  $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  representa el cambio de volumen en una unidad cúbica y es llamado la dilatación. Las ecuaciones anteriores pueden ser reducidas como

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.54)$$

Los dos coeficientes elásticos  $\lambda$  y  $\mu$  son conocidos como constantes de Lamé y son necesarios y suficientes para definir el comportamiento de un material isótropo perfectamente elástico. Materiales semejantes pueden ser clasificados dentro de tres tipos de acuerdo al valor de  $\mu$  (el cual es frecuentemente denotado también por  $G$  y es llamado módulo de rigidez ó de cortante). Si  $\lambda$  y  $\mu$  son siempre infinitas entonces, por la ecuación (2.54) los  $\varepsilon_{ij}$  son cero para  $\sigma_{ij}$  finitos, se tiene un cuerpo rígido; si  $\mu$  es finita y diferente de 0, la sustancia es perfectamente sólida; si  $\mu$  es cero, se tiene un fluido perfecto.

Se observa que si  $\mu = 0$  resulta  $\sigma_{ij} = 0$  siempre que  $i \neq j$ . Esto significa que el esfuerzo a través de cualquier área plana pequeña es normal al área, y también que por la ecuación (2.54), hay sólo un componente independiente del tensor de esfuerzo; este componente, contrario en signo, es la presión hidrostática de un fluido ordinario. El término presión hidrostática es usado, sin embargo, para cualquier otra clase de sustancias cuando los esfuerzos toman esta forma; una presión hidrostática  $p$  corresponde al esfuerzo  $-p\delta_{ij}$ . Suponiendo que se tiene un estado de esfuerzos:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p \quad ; \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (2.55)$$

Las ecuaciones ( 2.53 ) dan

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -3p = 3\lambda\theta + 2\mu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = (3\lambda + 2\mu)\theta \quad (2.56)$$

o

$$p = -(\lambda + 2\mu/3)\theta. \quad (2.57)$$

La constante  $k = \lambda + 2\mu/3$  es llamada módulo de compresibilidad y por definición es la relación entre las presiones aplicadas y el cambio fraccional en el volumen cuando el sólido es sujeto a una compresión hidrostática uniforme.

Otras dos constantes elásticas son comúnmente usadas en la práctica: módulo de Young  $E$  y relación de Poisson  $\nu$ .

$E$  puede ser definido como el ratio entre el esfuerzo aplicado y la extensión fraccional para una muestra prismática sujeta a esfuerzo uniforme sobre su plano y teniendo sus superficies laterales libres de compresión. Si el eje  $x_1$  es paralelo a los ejes de la muestra,  $\sigma_{11}$  es el único esfuerzo aplicado y las otras cinco componentes de esfuerzo son cero. Las primeras tres de las ecuaciones ( 2.53 ) dan

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} ; \quad 0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} \quad (2.58)$$

$$0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}$$

y resolviendo para  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  se tiene:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{11} ; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{11} \quad (2.59)$$

Por definición

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (2.60)$$

La relación de Poisson  $\nu$  es definida como el ratio entre la contracción lateral y la extensión longitudinal de la muestra para la misma prueba, esto es

$$\nu = -\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.61)$$

Por simple álgebra se obtiene también

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.62)$$

Esto permite observar que si  $\nu$  fuera mayor a  $1/2$ ,  $k$  podría ser negativa, esto es el material puede expandirse bajo compresión uniforme, lo cual es físicamente absurdo. Si por otro lado,  $\nu$  fuera menor a  $-1$ ,  $\mu$  podría ser negativa y la energía elástica no sería una forma cuadrática positiva, lo cual violaría la hipótesis.

El rango admisible de valores es por consiguiente:

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$$

Sin embargo, solo valores positivos de  $\nu$  han sido encontrados para cualquier material isótropo.

Finalmente, se puede remarcar de la ecuación ( 2.54 )

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu) \theta = 3k\theta \quad (2.63)$$

y entonces

$$2\mu\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \lambda\theta\delta_{ij} = \sigma_{ij} - (\lambda/3k)\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (2.64)$$

por la ecuación ( 2.62 )

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}. \quad (2.65)$$



### 3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Una vez establecidos los conceptos básicos de la elastodinámica y las ecuaciones constitutivas de los medios continuos, el presente capítulo pretende introducir al lector en la formulación del problema central de esta tesis, como una aplicación ingenieril de importancia principalmente en la Geotecnia y la Mecánica de Suelos. Se define y acota el problema a estudiar indicando los alcances del método de solución.

En diversos campos de la Ingeniería es fundamental conocer el comportamiento elástico de los materiales en el subsuelo, el módulo de elasticidad es un parámetro importante para la mecánica de suelos y la geotecnia. Las rocas y algunos suelos, bajo un determinado sistema de esfuerzos, puede decirse que se comportan elásticamente, es decir que sus deformaciones son proporcionales a los esfuerzos a que están sometidas dentro del límite elástico; cuando los esfuerzos ya no son proporcionales a las deformaciones el material se comporta plásticamente.

En este capítulo se presentan las derivaciones teóricas necesarias para estimar las deformaciones elásticas en la superficie de medios homogéneos y estratificados, ante la presencia de cargas estáticas conocidas. Las soluciones presentadas conformarán el problema directo en inclinometría, bajo el esquema de inversión de datos de inclinación usado en este trabajo.

#### PROBLEMA DIRECTO EN INCLINOMETRÍA

##### 3.1 SOLUCIÓN DE BOUSSINESQ

Un semiespacio elástico, lineal, isótropo y homogéneo (figura 3.1) es la más sencilla concepción del medio real en estudio, en este caso, el problema de la representación de los desplazamientos verticales y radiales, debidos a la presencia de una carga puntual en la superficie, está dado por la solución de Boussinesq (Fung, 1965)

$$U_z = \frac{P}{4\pi\mu R} \left[ 2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right], \quad y \quad (3.1)$$

$$U_r = \frac{P}{4\pi\mu R} \left[ \frac{rz}{R^2} - \frac{(1-2\nu)r}{R+z} \right], \quad (3.2)$$

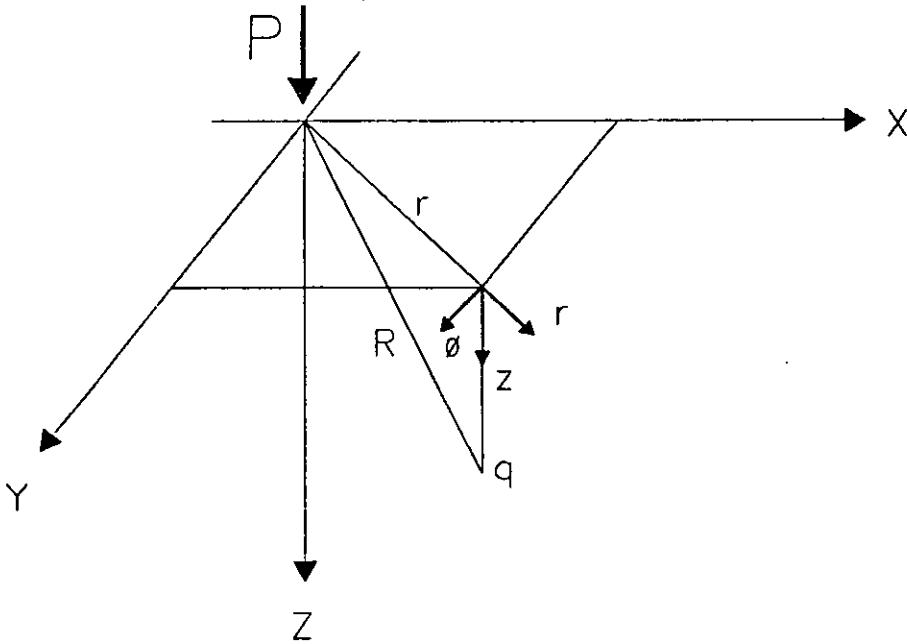


Figura 3.1. Carga puntual en la superficie de un medio homogéneo.

donde  $\mu$  = constante de Lamé,  $\nu$  = relación de Poisson,  $P$  = carga puntual superficial,  $R^2 = r^2 + z^2$  y  $r^2 = x^2 + y^2$ . La correspondiente inclinación en la superficie libre del semiespacio es:

$$I_0 = \frac{\partial U_z}{\partial r} \Big|_{z=0} = \frac{-2P(1-\nu)}{4\pi\mu r} \quad (3.3)$$

Usando la relación  $\mu = E/2(1 + \nu)$ , esta inclinación puede escribirse como

$$I_0 = \frac{P(1 - \nu^2)}{\pi E r^2}. \quad (3.4)$$

Esta solución puede ser empleada como una primera aproximación al valor global o promedio de  $E$ , que pretende ser estimado a partir de las mediciones de inclinación contra distancia obtenidas en Grenoble y Texcoco. En efecto, si obtenemos el valor del cociente entre la inclinación observada y el factor  $I' = P/\pi^2$  (dado que la carga y la distancia de medición son conocidas) el resultado será precisamente la constante  $C = (1 - \nu^2)/E$

$$\frac{I_0}{I'} = \frac{C P/\pi^2}{P/\pi^2} = C. \quad (3.5)$$

Sin embargo, se ha demostrado que las curvas obtenidas distan mucho de ser constantes paralelas al eje de las abscisas (Blum *et al.* 1992). Más aún, muestran una clara dependencia con la distancia. Lo anterior implica, por un lado la necesidad de contemplar una metodología más completa en la formulación del problema directo, que considere un medio con estratos homogéneos de distinto espesor y con distintas propiedades mecánicas entre estos, y por otro, la evidencia del acceso a la información a profundidad con la variación de la distancia sensor-carga. A continuación se presenta el formalismo propuesto por Kausel y Roesset (1981) para resolver el problema del cálculo de desplazamientos ante cargas estáticas o dinámicas mediante el método de matrices de rigidez, en este caso particular, necesitamos aplicar el método para frecuencia cero (problema estático) y número de onda distinto de cero (carga local).

### 3.2 CARGAS ESTÁTICAS Y DINÁMICAS EN UN MEDIO ESTRATIFICADO

Considérese el modelo formado por estratos planos horizontales de la figura 3.2, sujeto a cargas verticales en la superficie. El problema de determinar los desplazamientos radiales y verticales sobre cualquier punto de la superficie, se lleva a cabo resolviendo las cargas en términos de su transformada de Fourier espacial y temporal, lo cual es equivalente a usar el método de separación de variables para encontrar soluciones de las ecuaciones de la elasticidad.

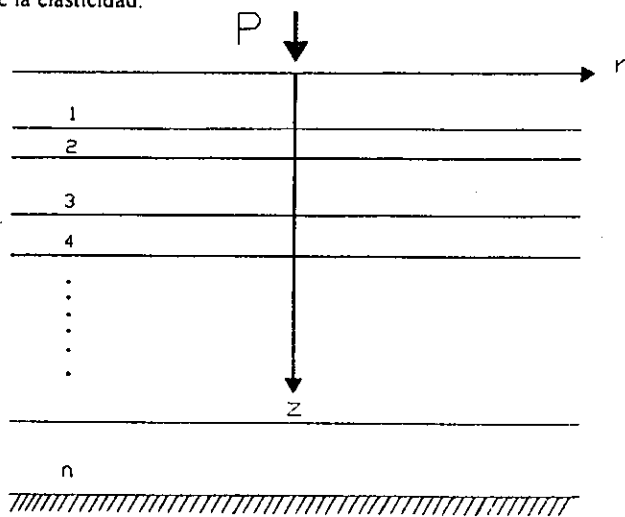


Figura 3.2. Carga puntual en la superficie de un modelo formado por  $(n)$  estratos.

En la aproximación de matriz de transferencia, el desplazamiento armónico y los esfuerzos internos en una interfaz dada definen el vector de estado, o vector desplazamiento-esfuerzo, que en coordenadas polares puede escribirse:

$$\bar{Z} = \{u_r, u_\theta, u_z, \sigma_{re}, \sigma_{\theta e}, \sigma_z\} \quad (3.6)$$

Este vector se relaciona con los vectores de estado de las interfaces vecinas mediante la matriz de transferencia

$$\bar{Z}_{j+1} = \mathbf{H}_j \bar{Z}_j \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{H}_j$  es la matriz de transferencia del  $j$ -ésimo estrato y es función de la frecuencia ( $\omega$ ), el número de onda ( $k$ ) en el caso de ondas planas, las propiedades elásticas y el espesor del estrato ( $h$ ).

### 3.3 MATRICES DE RIGIDEZ

De acuerdo con Kausel y Roesset, (1981) si aislamos un estrato y conservamos el equilibrio mediante la aplicación de cargas  $P_1 = S_1$  en la interfaz superior y  $P_2 = -S_2$  en la interfaz inferior, de la ecuación (3.7) se tiene

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ -P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ P_1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

donde  $H_v$  son las submatrices de la matriz de transferencia  $\mathbf{H}_j$ . Después de una simplificación algebraica se puede escribir

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{12}^{-1} H_{11} & H_{12}^{-1} \\ H_{22} H_{12}^{-1} H_{11} - H_{21} & -H_{22} H_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

o bien

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{U}}, \quad (3.10)$$

donde  $\bar{K}$  es la matriz de rigidez del estrato,  $\bar{P}$  es el "vector de carga" externo y  $\bar{U}$  es el vector de desplazamientos. Esta matriz de rigidez es simétrica. En general es de sexto orden y tiene la misma forma para coordenadas cilíndricas y cartesianas.

Para un medio con varias capas, la matriz de rigidez global se construye con la superposición de la contribución de las matrices de los estratos en cada nodo o interfaz del sistema. El vector de cargas corresponde en este caso a los esfuerzos externos prescritos en las interfaces. La matriz de rigidez se obtiene resolviendo la ecuación de onda en coordenadas cartesianas y cilíndricas. Para el caso particular de una carga puntual estática colocada en el origen (superficie libre del sistema estratificado) se tiene,  $\omega = 0$ ,  $k > 0$ , el desplazamiento en el plano vertical (ondas P-SV) está desacoplado del desplazamiento en un plano horizontal (ondas SH). La matriz de rigidez de cada estrato toma la forma particular

$$\bar{K} = 2k\mu \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

donde:

$$K_{11} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} (1 + \beta^2/\alpha^2)SC - kh(1 - \beta^2/\alpha^2) & (1 + \beta^2/\alpha^2)S^2 - D \\ (1 + \beta^2/\alpha^2)S^2 - D & (1 + \beta^2/\alpha^2)SC + kh(1 - \beta^2/\alpha^2) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$K_{22}$  igual a  $K_{11}$  con los signos fuera de la diagonal cambiados

$$K_{12} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} kh(1 - \beta^2/\alpha^2)C - (1 + \beta^2/\alpha^2)S & -kh(1 - \beta^2/\alpha^2)S \\ kh(1 - \beta^2/\alpha^2)S & -kh(1 - \beta^2/\alpha^2)C - (1 + \beta^2/\alpha^2)S \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$K_{21} = K_{12}^T \quad (3.14)$$

$\alpha$  y  $\beta$  son las velocidades de propagación de las ondas P y S, respectivamente;  $S = \operatorname{senh}(kh)$ ; y  $C = \operatorname{cosh}(kh)$ ,  $D = (1 + \beta^2/\alpha^2)^2 S^2 - (kh)^2 (1 - \beta^2/\alpha^2)^2$ . La matriz para el semiespacio en la base de la formación estratificada es

$$K = \frac{2k\mu}{1 + \beta^2/\alpha^2} \begin{bmatrix} 1 & -\beta^2/\alpha^2 \\ -\beta^2/\alpha^2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$





y expresamos la carga aplicada en  $z=0$  como

$$\sigma_z = -\frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(kr) k dk, \quad (3.20)$$

$$\sigma_r = 0, \quad (3.21)$$

considerando que, para una  $k$  dada, el campo puede escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} U_r &= r_1 J_1(kr) \\ U_z &= r_2 J_0(kr) \\ \sigma_r &= r_3 J_1(kr) \\ \sigma_z &= r_4 J_0(kr) \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde  $r_j, j=1,4$  son funciones de  $z$  y  $k$  (de hecho, para  $j=1,2$  ( $r,z$ ) éstos corresponden a los valores discretos  $U$ , en la cara superior del estrato 1). Entonces los desplazamientos radial y vertical en  $z=0$  se pueden calcular mediante las siguientes expresiones

$$U_r = +\frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} r_1 J_1(kr) k dk, \quad (3.23)$$

$$U_z = -\frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} r_2 J_0(kr) k dk. \quad (3.24)$$

Para cada punto  $r$  sobre la superficie del terreno se calcula el valor de la integral sobre todos los números de onda.

Finalmente el valor teórico para la inclinación en la superficie de un sistema estratificado ante la presencia de una carga conocida a cierta distancia, se obtiene evaluando numéricamente la derivada del desplazamiento  $U_z$  con respecto de  $r$

$$I_T = \frac{\partial U_z}{\partial r}. \quad (3.25)$$

## 4. INCLINÓMETROS COMPACTOS DE SILICIO

Los inclinómetros utilizados son instrumentos monolíticos de silicio de alta sensibilidad que miden las variaciones de inclinación del suelo inducidas por la presencia de cargas estáticas, movimientos tectónicos y dilatación de materiales. Los dominios de aplicación pueden ser muy variados.

En este trabajo serán utilizados para la determinación de algunos parámetros elásticos. Mediante la aplicación de cargas puntuales en puntos localizados en la superficie del terreno, es posible inferir a partir de los datos de inclinación observada las características elásticas del material en cuestión.

De acuerdo con su principio de operación existen diferentes tipos de inclinómetros, de los cuales los principales son los siguientes :

- El que funciona mediante la observación del nivel de un líquido en un tubo, esto es, mediante el principio de vasos comunicantes.
- El que tiene como principio la nivelación de una burbuja.
- El que funciona a través de un péndulo suspendido.

Los instrumentos utilizados en la etapa de campo de este trabajo, poseen un péndulo rígido horizontal de dos hilos el cual es llamado péndulo de Zöllner.

### 4.1 DESCRIPCIÓN DETALLADA DEL INCLINÓMETRO

La tecnología para inclinómetros compactos es una idea original de P. A. Blum, del Instituto de Física del Globo de París, Francia. En la figura 4.1 se muestra una representación esquemática de ese instrumento. El instrumento consta básicamente de un péndulo horizontal, marcado como (a), suspendido de una estructura rectangular de

silicio (c) por dos alambres delgados ( $f_1$ ,  $f_2$ ). La masa del péndulo es una placa semicircular de plata con una apertura estrecha (b). Bajo la masa del péndulo se localiza una celda fotosensible (Ce) alimentada en los extremos con  $\pm 5$  volts. Una pequeña lámpara (L), o un diodo luminoso se localiza en la parte superior de la estructura rectangular. El dispositivo se monta sobre una placa circular de silicio con una base triangular (B) y se protege con una cubierta de vidrio transparente. Las dimensiones del instrumento se ilustran en la figura 4.1.

Las pequeñas inclinaciones de la línea imaginaria vertical (punteada) en el plano de la estructura (c) corresponden a las oscilaciones del péndulo. Por lo que, el haz de luz ilumina diferentes partes de la celda variando el voltaje de salida (Ov). Entonces, la inclinación, en microradianes, se obtiene multiplicando la variación de voltaje (Ov) por el coeficiente del instrumento. Este dispositivo es relativamente insensible a rotaciones en la dirección transversal.

Para su funcionamiento en un experimento de campo, se colocan estaciones con 2 ó 3 inclinómetros con el fin de contar con observaciones redundantes. Cada grupo de inclinómetros es alimentado con una tarjeta electrónica, la cual a su vez se alimenta de una fuente de 12 volts de corriente directa. Esta tarjeta suministra un voltaje de  $\pm 5$  volts para la célula fotosensible del instrumento y de 4 volts para el diodo luminoso; es también la encargada de recibir la señal procedente de la celda fotosensible y de transportarla hasta un equipo portátil de cómputo, donde se analiza y convierte (previa instalación de una tarjeta convertidora analógico-digital) a valores de inclinación en micro-radianes. Los algoritmos instalados a nivel de *software* en la computadora permiten almacenar datos *ASCII* con los valores de inclinación observados en función del tiempo, además de información como fecha y hora de registro, distancia de observación y constantes de los instrumentos registradores.

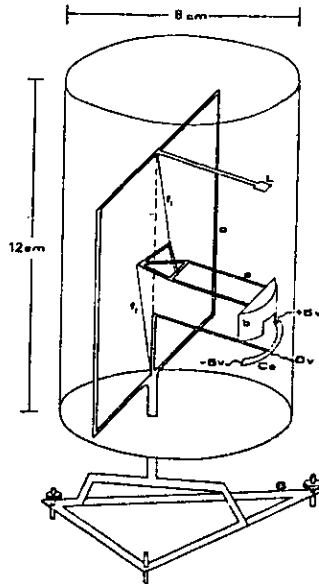


Figura 4.1 Representación esquemática de un inclinómetro.

#### 4.1.1 LA BASE

La base del instrumento está formada por un triángulo rectángulo de tubos cilíndricos de silicio opaco; el lado que soporta al péndulo, tiene una longitud de 250 mm. La calibración del instrumento se logra a través de los pies colocados en los ángulos agudos del triángulo, en los cuales se fijan unos tornillos que permiten la mejor nivelación del instrumento. El pie de apoyo fijado al tercer ángulo está soldado perpendicularmente al triángulo, el cual está constituido de un tubo de silicio cónico en donde el extremo se redondea por fusión. En la parte media de ese pie están soldados dos tubos cortos ortogonales cuya función es solamente de apoyo. En la parte superior de este pie está soldada una placa circular de silicio transparente de un diámetro aproximado de 120 mm el cual sirve para soportar el péndulo.

#### 4.1.2 PARTE MECÁNICA

Consta de un péndulo horizontal suspendido de una estructura de silicio, la forma de la masa del péndulo es semicircular para facilitar su movimiento en el interior de la cubierta cilíndrica de protección. El sistema se encuentra montado en un rectángulo hecho de finas varillas de silicio, el cual se une a la estructura de silicio mediante dos hilos del mismo material .

#### 4.1.3 DETECCIÓN

Este sistema, consiste de una lámpara colocada en la parte superior del cilindro de protección cuya alimentación (de  $\pm 3$  volts) provoca un haz de luz continua que incide sobre una celda doble fotosensible colocada debajo de la placa del péndulo, de tal manera que los giros del péndulo permitirán el paso de un haz de luz en diferentes posiciones de la celda fotosensible fija. La inclinación de la línea vertical imaginaria definida por los puntos en los cuales se une el péndulo al soporte es proporcional a la inclinación observada en la horizontal y por lo tanto al giro del péndulo. Así, la inclinación de una línea horizontal en el suelo es reportada como una diferencia de potencial que va a depender de la posición del haz de luz que permita pasar el péndulo en su movimiento . La diferencia de potencial máxima es de 5 volts de tal manera que una vez establecido el periodo del instrumento en el sitio, ésta puede ser suficiente para reportar inclinaciones de hasta  $10^{-7}$  radianes.

El material empleado (silice) fue seleccionado debido a que su coeficiente de dilatación es muy bajo, cada instrumento fue puesto a prueba en un laboratorio, con el fin de determinar de manera muy precisa el valor de la constante que permitirá traducir las diferencias de potencial en unidades de inclinación (micro-radianes) por medio de una

operación muy simple que involucra al periodo del instrumento. La inclinación se define como  $\Delta V/KT^2$  donde

$\Delta V$  (mV) = diferencia de potencial inducida en el inclinómetro

$K$  ( $\mu\text{rad s}^2/\text{mV}$ ) = constante interna del instrumento

$T$  (s) = periodo de oscilación de la masa del péndulo

## **5. MEDICIONES DE INCLINACIÓN DEL TERRENO EN GRENOBLE, FRANCIA Y EN LA ZONA VIRGEN DEL LAGO DE TEXCOCO, MÉXICO**

Una vez establecida la formulación del problema planteado en este trabajo, y las características de los instrumentos a ser utilizados en las campañas experimentales, se procede ahora a detallar los trabajos de campo llevados a cabo en Francia y México, cuyo objetivo fue el de obtener mediciones muy precisas de la inclinación inducida en el terreno, para su interpretación

### **5.1 SINCROTRÓN DE GRENOBLE, FRANCIA.**

Se efectuaron dos series de mediciones de inclinación inducida en el terreno sobre el sitio del Sincrotrón de Grenoble, Francia. En el exterior se midieron cuatro perfiles de inclinación producidos por un camión cargado, mientras que en el interior se obtuvieron otros cuatro perfiles, en este caso la masa que constituía la carga estática, era desplazada por un puente rodante. Estas mediciones permitieron inferir un valor de módulo de elasticidad estático del sitio, encontrándose un valor promedio de 400 MPa. Este valor es ligeramente superior al reportado para el mismo sitio mediante los métodos dinámicos de uso común. Sin embargo, el experimento ha permitido establecer la factibilidad de obtener información a profundidad, de los parámetros elásticos del subsuelo somero, asociados a las propiedades dinámicas del medio.

Para llevar a cabo los perfiles mencionados, los inclinómetros compactos de silicio fueron instalados en un sitio y la masa fue ubicada a diferentes distancias de dicho sitio. En el caso del interior del Sincrotrón (figura 5.1), los instrumentos se colocaron sobre dos banquetas contiguas, y en el exterior (figura 5.2), se ubicaron sobre una placa de concreto construida para el experimento.

Sobre el sitio interior se instalaron cuatro inclinómetros, tres de ellos con la dirección de sensibilidad en la dirección de desarrollo de los perfiles, y el último en una perpendicular. La distancia entre los instrumentos y la carga fue obtenida con un hectómetro cuya precisión es del orden de un centímetro, la masa era una carga desplazada por un puente rodante, y colocada sucesivamente en diferentes puntos, haciendo variar la distancia carga-instrumento. Después de cada colocación de la carga, el puente era alejado una distancia suficiente para que su peso no influyera en la lectura del instrumento. La carga se constituyó por 8 bloques de concreto ( $0.5 \times 0.5 \times 1.0$  m), con un peso individual de 610 kg. Así, la masa total, incluyendo el peso de la base y las cadenas empleadas, fue de 5700 kg.

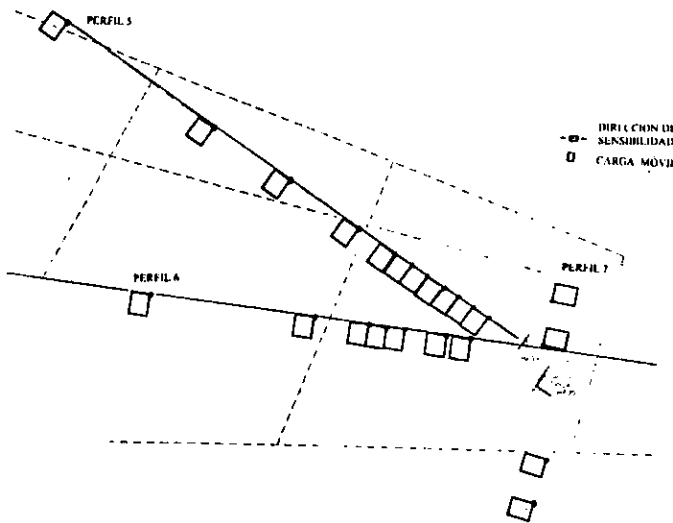


Figura 5.1 *Dispositivo interior de medición en Grenoble, Francia.*



En el exterior del Sincrotrón se instalaron tres inclinómetros, dos de ellos con una orientación NW-SE y el tercero en una dirección perpendicular, uno de los instrumentos paralelos no funcionó durante el experimento, la masa móvil estaba constituida por un vehículo cargado, el peso total era de 27640 kg repartido en 5850 kg sobre el eje delantero y 21790 kg en el eje trasero. Estos experimentos se llevaron a cabo del 13 al 16 de abril de 1992.

Se realizaron cuatro series de mediciones en este sitio, dos en dirección norte a partir de la placa de concreto, es decir a 45° de la dirección de sensibilidad de los instrumentos, en la primera el camión en reversa se acercaba a los instrumentos, y en la segunda el camión en marcha hacia adelante se alejaba de ellos; una en dirección este y una más en dirección sur (en estas últimas el camión se aproximaba a los instrumentos en reversa). Cada estación o parada del camión fue repetida dos veces con el objeto de tener redundancia en las lecturas.

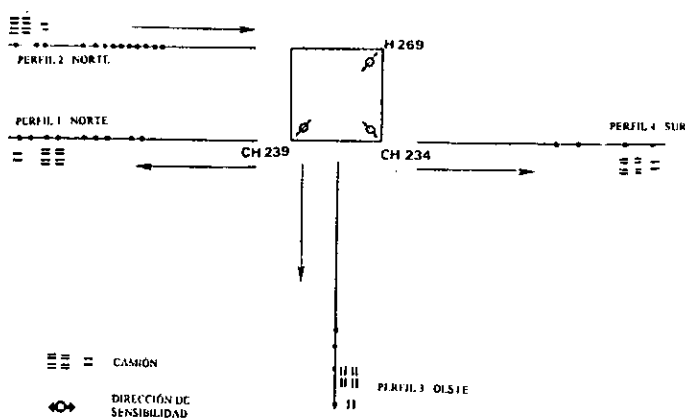


Figura 5.2 Dispositivo exterior de medición en Grenoble, Francia.

Se realizaron tres series de mediciones con direcciones preestablecidas, cada medición fue repetida dos veces como en el caso del exterior, pero en este caso la carga era movida por el puente rodante. En este trabajo se procesan dos perfiles correspondientes al interior del Sincrotrón, cuyo comportamiento es representativo del comportamiento de la zona.

## **5.2 ZONA VIRGEN DEL LAGO DE TEXCOCO**

Se realizaron una serie de mediciones de inclinación en la zona virgen del lago de Texcoco, esta zona se encuentra formada básicamente por sedimentos arcillosos de origen volcánico no consolidados, con un gran contenido de agua (Marsal y Mazari, 1959; Marsal y Graue, 1969). La ubicación del área, así como el dispositivo mediante el cual se llevo a cabo la medición, se muestran en las figuras 5.3 y 5.4 respectivamente. Esta zona es usada por la Comisión Nacional del Agua para investigaciones ambientales y geotécnicas. La elección de este sitio para llevar a cabo los experimentos obedece a dos razones: la estratigrafía aquí presente es probablemente representativa de otras regiones de interés en la Ciudad de México; por otro lado ofrece la posibilidad de realizar los experimentos con un buen control, mientras que el ruido urbano podría considerarse insignificante. Además cumple con las hipótesis que implica el modelado con el problema directo. Por tanto, el objetivo es calibrar la técnica con el fin de que pueda ser usada en diferentes sitios de la ciudad para complementar otras mediciones geofísicas y geotécnicas.

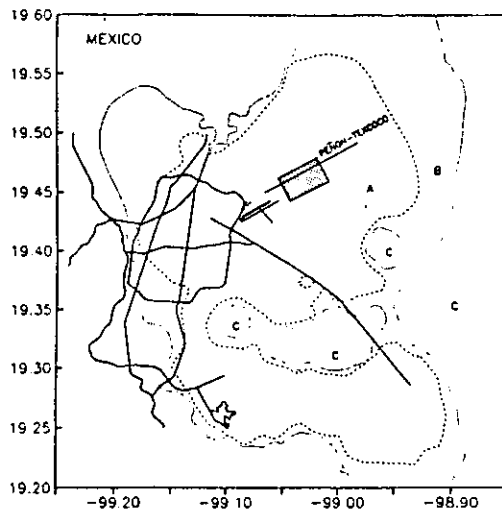


Figura 5.3 Localización de la zona de estudio en el Lago de Texcoco, México.

El dispositivo utilizado es el siguiente (figura 5.4), se realizaron 2 perfiles en una dirección paralela al camino Peñón- Texcoco: LONG 1 (Este) y LONG 2 (Oeste) con 25 puntos de observación cada uno; y dos perfiles en una dirección perpendicular: TRANS 3 (Sur) con 13 puntos de observación y TRANS 4 (Sur) con 19 puntos de observación. Dicho dispositivo de medición consta de dos estaciones inclinométricas (A y B) colocadas cerca del punto inicial de los perfiles, cada estación contiene 3 inclinómetros compactos de silicio de alta precisión (Blum *et al.*, 1992), en dos de los cuales la dirección de sensibilidad es paralela a la dirección de los perfiles LONG 1 y LONG 2, mientras que en el tercero la dirección es perpendicular a estos perfiles. La sensibilidad de los inclinómetros, del orden de  $10^{-7}$  radianes, fue suficiente para detectar la inclinación inducida del terreno, aun cuando la carga fue colocada entre 30 y 35 m de las estaciones A y B.

La carga estática que simula una carga puntual consta de un camión cargado de 13.030 toneladas, repartidas en 9.735 ton en el eje trasero y 3.295 ton en el eje delantero. Para estabilizar la respuesta de los inclinómetros a la inclinación inducida en el terreno, en cada punto de colocación el camión permanece 90 segundos. Una vez terminado un perfil, el camión se coloca suficientemente lejos de las estaciones inclinométricas para registrar, durante unos segundos, el nivel de inclinación del terreno, el cual servirá de referencia para calcular posteriormente la diferencia de inclinación en cada punto de observación.

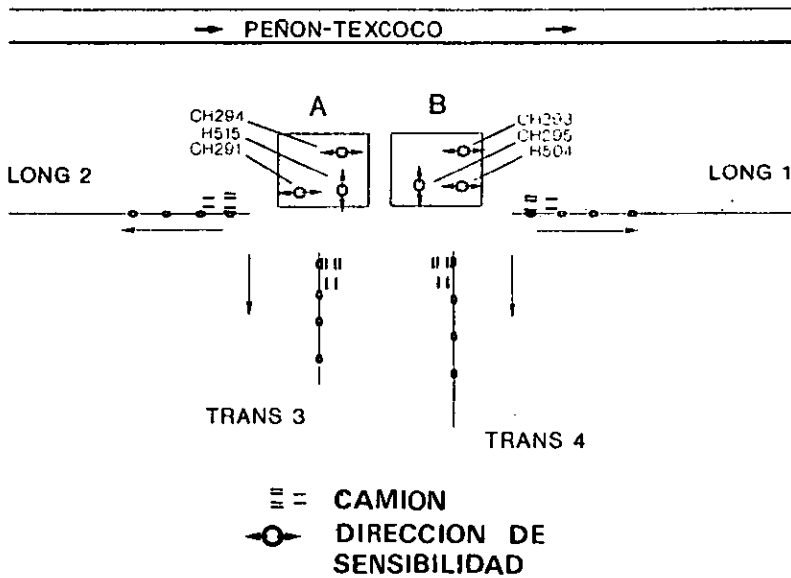


Figura 5.4 *Dispositivo de medición en Texcoco, México.*

## 6. INVERSIÓN CON ALGORITMOS GENÉTICOS

En los capítulos anteriores, se ha presentado un procedimiento basado en la medición de la inclinación inducida en el terreno por cargas estáticas conocidas, para obtener información significativa de la distribución de propiedades elásticas a profundidad. El siguiente paso consiste en proponer un esquema de inversión que genere el modelo que proporcione el mejor ajuste entre los datos, este desarrollo se mostró en capítulos anteriores (cap 3 y 5).

Los métodos de inversión, basados en modelos iterativos, representan una alternativa para muchas situaciones prácticas, así los datos observados pueden ser explicados de una manera adecuada. Por ejemplo, empleando inversión estocástica (Jackson, 1979) se pueden resolver diversos problemas, dados algunos parámetros y datos estadísticos de los errores.

Los problemas inversos que no requieren una labor intensiva en su modelado directo se aproximan mejor usando métodos de optimación global. Estos son más atractivos que los métodos locales debido a que no tienen muchas de las limitaciones clásicas. De hecho, los métodos locales en general dependen del modelo inicial y son susceptibles a caer en mínimos locales. Además se necesita el cálculo de algunas derivadas, en ocasiones difícil y costoso (Gallagher *et al*, 1991).

Con referencia a los métodos globales, tanto el Templamiento Simulado (Simulated Annealing) como los Algoritmos Genéticos fueron concebidos a partir de sistemas naturales de optimación, el Templamiento Simulado usa una analogía con termodinámica, mientras que los Algoritmos Genéticos asemejan la evolución de los seres vivos. De la misma forma que el Templamiento Simulado, los Algoritmos Genéticos se identifican como un método de optimación multiparamétrica no lineal. Comparaciones entre ambas técnicas estocásticas de búsqueda han sido realizadas por Davis (1990) y Scales *et al*. (1991).

La aproximación con Algoritmos Genéticos, introducida por Holland en 1975, se ha aplicado a problemas geofísicos no lineales de optimación con múltiples parámetros (Goldberg, 1989 y Berg, 1990), donde estos algoritmos utilizan una regla de transición de probabilidad para guiar la búsqueda. El proceso se inicia con una población de modelos seleccionados aleatoriamente e interpretados como un conjunto de códigos binarios de cada parámetro, y transformados en arreglos (cromosomas). Estos algoritmos se basan en el principio de “supervivencia del más apto”, en analogía con el mecanismo de selección natural (Stoffa y Sen, 1991). A diferencia de los métodos convencionales, con estos procedimientos se pueden explorar un mayor número de soluciones potenciales.

## 6.1 ALGORITMOS GENÉTICOS

Las computadoras pueden programarse para funcionar como sistemas complejos que se adaptan, aprenden y evolucionan; o bien diseñarse para simular estos procesos. Muchos de estos programas o diseños son imitación de algunos sistemas complejos vivientes adaptados para sobrevivir (Gell-Man, 1994). Un problema típico de inversión en geofísica se resuelve aplicando una combinación de observaciones, una teoría apropiada y cierta información *a priori* acerca de la solución buscada.

Los Algoritmos Genéticos son una herramienta poderosa para encontrar un modelo óptimo mediante una rápida exploración espacial, aplicable a problemas geofísicos de optimación altamente no lineales (Gallagher *et al.*, 1991). Estos algoritmos representan una evolución del método de Monte Carlo, donde se hace uso de una búsqueda estocástica a través del modelo espacial empleando una regla de transición de probabilidad para obtener la solución. Cuando se aplica esta técnica, los modelos largos y complejos se representan como arreglos de códigos binarios. Los mecanismos de selección natural y genéticos se aplican a modelos de población elegidos aleatoriamente. La cruce (crossover) y los procesos de mutación actualizan los modelos, dando una nueva generación de cromosomas; emulando la forma en que los sistemas biológicos

evolucionan para generar mejores organismos. El proceso completo se repite hasta que la media de la función de ajuste se acerca al máximo.

La construcción del código de Algoritmos Genéticos presentada en este trabajo se basa en las ideas de Holland (1975 y 1992) y Sambridge y Drikkoningen (1992). El procedimiento principal se resume en la figura 6.1. Así, el problema de interés se formula en términos de un conjunto de  $M$  incógnitas  $p_i$  para el modelo evolutivo  $m$ , una función objetivo o de ajuste de resultados teóricos y datos  $O(m)$  y un conjunto de observaciones que deben ser función de los parámetros que se desea conocer. Mediante consideraciones prácticas o por alguna información *a priori*, se definen las fronteras de resoluciones mínimas y máximas esperadas de cada parámetro  $a_i$  y  $b_i$ , respectivamente, es decir  $a_i \leq p_i \leq b_i$  definidas en un intervalo de discretización  $d_i$ , dependiente de la resolución esperada del modelo. Esto significa que  $d_i$  es tan pequeño como se necesite para afectar en una forma significativa los resultados del modelo y por lo tanto, la función objetivo. Entonces, todos los posibles vectores del modelo por el conjunto de parámetros  $p_i$  (componentes) se restringen a los valores  $p_i = a_i + j \times d_i$ , donde  $j = 0, \dots, N_i$ . La función objetivo  $O(m)$  representa una estimación del ajuste entre el grupo de datos observados y la predicción correspondiente del modelo  $m$ , calculado por el método.

Resultados de métodos de exploración comunes tales como experimentos de refracción sísmica y perforación de pozos realizados tanto en Texcoco como en el Sincrotrón de Grenoble, dan una información *a priori* de la descripción del suelo en ambas áreas. Para minimizar el total de parámetros en la búsqueda del método de optimización, se mantiene constante el número de estratos reportados por estos métodos. Se varían el espesor, la velocidad de las ondas y el módulo de cortante, con el fin de obtener el mejor ajuste entre observaciones y relaciones inclinación-distancia sintéticas. En las tablas 6.1a y 6.1b se especifican los parámetros mínimos, máximos e incrementos en el espacio de búsqueda para las áreas de Texcoco y Sincrotrón.

**Texcoco**

Parámetros		Capas	
		1	2
ondas-P velocidad $\alpha$ (m/s)	Min.	300	300
	Max	610	920
	$\Delta\alpha$	10	30
	N. Mod	31	31
ondas-S velocidad $\beta$ (m/s)	Min	10	20
	Max	72	113
	$\Delta\beta$	2	3
	N. Mod	31	31
Espesor $h$ (m)	Min.	10	20
	Max	103	82
	$\Delta h$	3	2
	N. Mod	31	31
Módulo de Cortante $\mu$ (MPa)	Min.	0.50	3.00
	Max	2.36	9.20
	$\Delta\mu$	0.06	0.20
	N. Mod	31	31

Tabla 6.1a *Datos en Texcoco.*



Sincrotrón

Parámetros		Capas							
		1	2	3	4	5	6	7	8
ondas-P velocidad $\alpha$ (m/s)	Min.	1200	400	400	1450	1050	700	950	950
	Max	1810	1010	1010	2060	1660	1310	1560	1560
	$\Delta\alpha$	10	10	10	10	10	10	10	10
	N. Mod	61	61	61	61	61	61	61	61
ondas-S velocidad $\beta$ (m/s)	Min	250	70	70	70	70	120	120	120
	Max	555	375	375	375	375	242	242	242
	$\Delta\beta$	5	5	5	5	5	2	2	2
	N. Mod	61	61	61	61	61	61	61	61
Espesor $h$ (m)	Min.	1.5	3	1.5	3	5	6	1.5	2.5
	Max	272	4.22	2.72	4.22	6.22	7.22	2.72	3.72
	$\Delta h$	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
	N. Mod	61	61	61	61	61	61	61	61
Módulo de Cortante $\mu$ (MPa)	Min.	212.00	57.00	62.00	62.00	62.00	32.00	32.00	32.00
	Max	303.50	105.80	110.80	110.80	110.80	80.80	80.80	80.80
	$\Delta\mu$	1.50	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
	N. Mod	61	61	61	61	61	61	61	61

Tabla 6.1b Datos en el Sincrotrón, Francia.

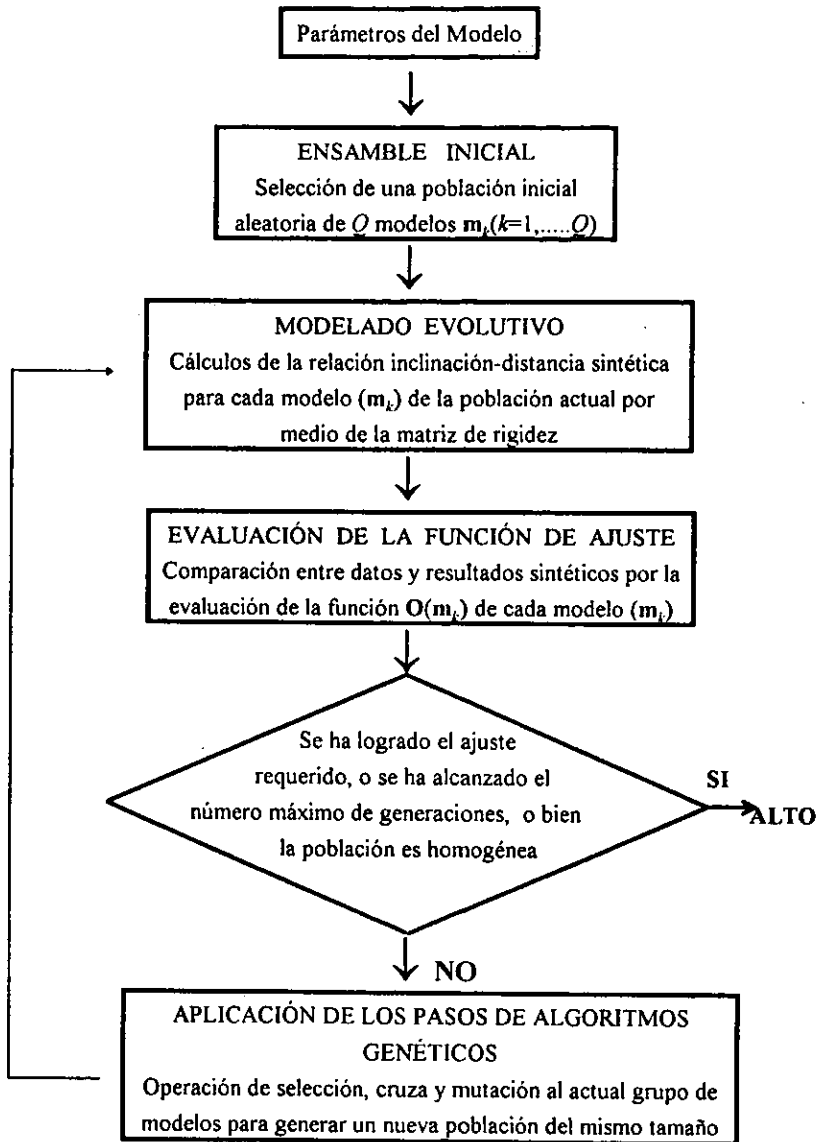


Figura 6.1 Procedimiento básico para la construcción del código de Algoritmos Genéticos.

## 6.2 PARÁMETROS DEL MODELO

Esta etapa consiste en elegir un grupo aleatorio de  $Q$  modelos para trabajar simultáneamente y codificarlos en un arreglo binario. Cada subarreglo es la representación binaria del correspondiente parámetro decimal. De esta forma, cuando todos los bits de cualquier subarreglo son cero, se asume que han tomado el valor mínimo para el parámetro particular del modelo. En concordancia, si el bit de más bajo orden es uno y los demás son cero el parámetro del modelo es el mínimo más una vez la resolución especificada. El valor máximo del parámetro se representa cuando todos los bits son uno. En la figura 6.2 se ilustra un arreglo particular de un modelo y los posibles valores que un parámetro de ese modelo o subarreglo, puede tomar.

## 6.3 REPRODUCCIÓN

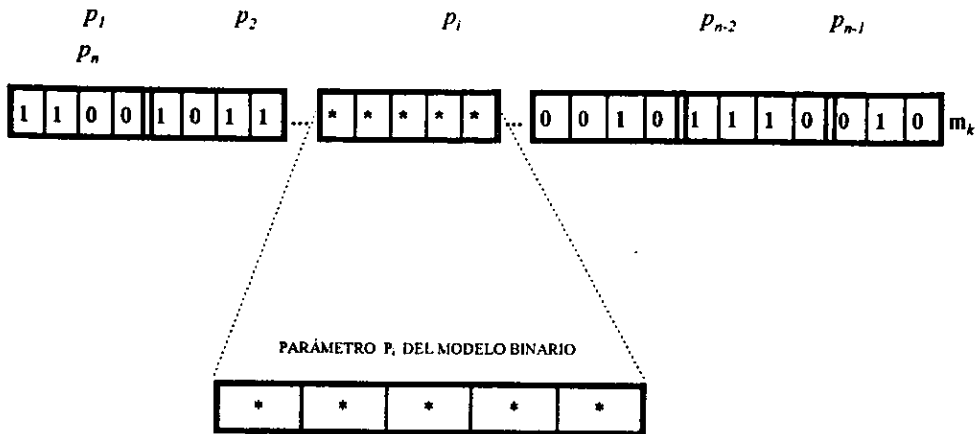
De la población inicial seleccionada aleatoriamente se evalúa su costo o función de ajuste  $O(m_k)$ , donde  $k=1, \dots, Q$ . Son varias las formas que puede tener esta función de ajuste, en nuestro caso particular, la norma cuadrática es una buena estimación del ajuste del modelo en cuestión, entonces se genera una población de parientes seleccionando los modelos de acuerdo a su probabilidad de reproducción  $P_r [O(m_k)]$ . Las formas comunes de  $P_r [O(m_k)]$  involucran el valor particular de  $O(m_k)$  combinado con el máximo, la media y la desviación estándar de la distribución de los valores  $O(m)$  en la población actual.

## 6.4 CRUZA Y MUTACIÓN

La cruce es el mecanismo fundamental para el rearrreglo genético tanto para los organismos reales como para los Algoritmos Genéticos. Los arreglos de rango mayor crean una nueva generación de modelos descendientes (modelos hijos). Dos líneas de

parámetros (modelos) se alinean, entonces un número aleatorio entre 0 y 1 se genera para determinar si el par actual se va a cruzar, si el valor está en el intervalo  $(0, P_c)$  siendo  $P_c$  la probabilidad de cruce, un punto a lo largo del arreglo se selecciona aleatoriamente y los bits a la derecha de la posición seleccionada de los dos modelos se intercambian (figura 6.3). Si el número aleatorio es mayor que  $P_c$  entonces los dos padres no se seleccionan para cruzar y pasan a la población descendiente sin afectarse. Después de este proceso, el tamaño de la población descendiente permanece igual que el original. Para asegurar una buena exploración del modelo espacial en cada generación se requiere una alta probabilidad de cruce. Ésta establece la razón del muestreo en los parámetros del modelo.

La mutación es el proceso final aplicado a la población descendiente de arreglos, el cual consiste en modificar en paridad un bit particular (figura 6.4). Esta paridad, seleccionada aleatoriamente de los parámetros del modelo, cambia dependiendo de una probabilidad de mutación  $P_m$ . La mutación se toma con valores bajos, pero no cero ( $P_m \leq 1/l$ , donde  $l$  es la longitud de bits por arreglo); esto modifica una pequeña fracción de los arreglos (típicamente un bit por arreglo). Sin embargo, el paso anterior generalmente no avanza la búsqueda de la solución; en cambio, provee seguridad contra el desarrollo de una población uniforme incapaz de evolucionar, evitando de esta forma la pérdida de información potencialmente útil.



$p_i =$	0	0	0	0	0	$= p_i \text{ min}$
$p_i =$	0	0	0	0	1	$= p_i \text{ min} + \Delta p_i$
$p_i =$	0	0	0	1	0	$= p_i \text{ min} + 2\Delta p_i$
$p_i =$	0	0	0	1	1	$= p_i \text{ min} + 3\Delta p_i$
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
$p_i =$	1	1	1	1	1	$= p_i \text{ max}$

Figura 6.2 Parámetros del modelo binario, y los posibles valores que un parámetro específico ( $p_i$ ) puede tomar.

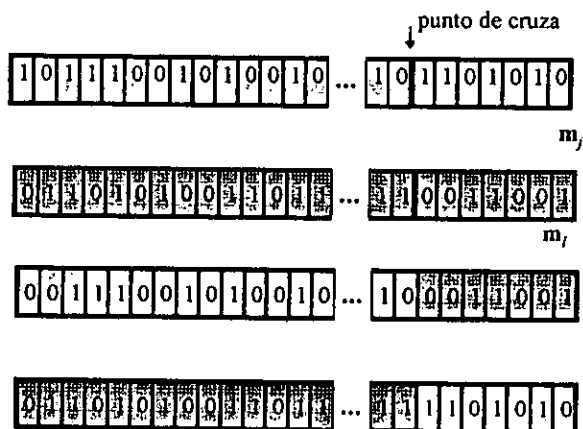


Figura 6.3 *Cruza*

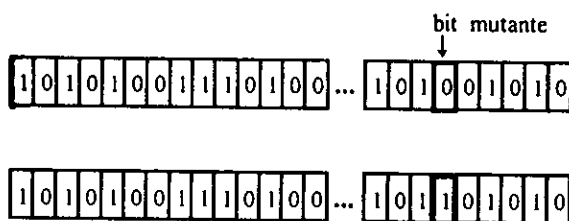


Figura 6.4 *Mutación*

## 7. RESULTADOS Y COMPARACIONES

En capítulos anteriores se presentaron las bases de un método indirecto, que utiliza mediciones de la inclinación inducida en el terreno, para obtener información significativa de la distribución de propiedades elásticas a profundidad en el subsuelo. Se presentaron también las bases teóricas encontradas en la literatura, para la interpretación de la información generada, como producida en un medio elástico homogéneo (Problema de Boussinesq), y en un medio con estratos planos horizontales de diferentes propiedades (Método de matrices de Rigidez).

Se presenta ahora el procesamiento de los datos de inclinación obtenidos en los sitios de Grenoble y Texcoco, y su interpretación en términos de los modelos homogéneo y estratificado. Para este último modelo del medio en estudio, en el capítulo 6 se propone un método de optimización global de reciente desarrollo, para atacar el problema de inversión en geofísica.

Se discute la aplicación de este método para ambos conjuntos de datos y la comparación de los resultados con aquellos obtenidos mediante procedimientos clásicos.

### 7.1 PRESENTACIÓN Y PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Los datos de inclinación del terreno son presentados graficando los valores obtenidos por el instrumento contra el tiempo, esto se debe a que la respuesta del terreno ante una carga que se considera puntual, no es inmediata y se debe esperar a que las lecturas se estabilicen para cambiar de posición la carga o terminar la lectura de los datos.

En la figura 7.1, se muestran los datos de inclinación obtenidos en dos series de mediciones en Grenoble, Francia, para los perfiles 5 y 6, sensores H515 y H504 respectivamente, también se muestran cuatro ejemplos de datos para un mismo perfil tomados con cuatro instrumentos diferentes a una misma distancia, en donde se observa

el mismo comportamiento ante la presencia de la carga en cada una de las gráficas la diferencia de valores de inclinación es debida a la calibración del instrumento lo cual no influye en los valores de inclinación ya que se trabaja con la diferencia en la inclinación entre un tiempo y otro.

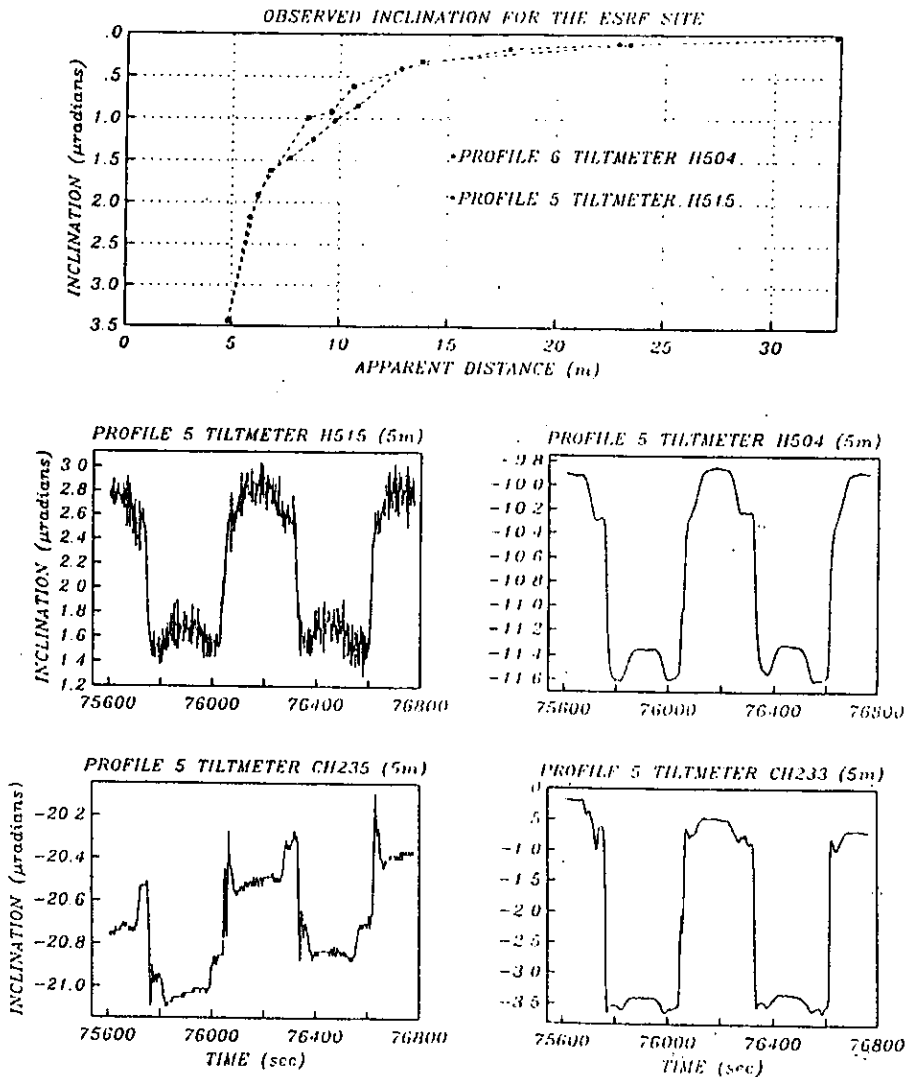


Figura 7.1 Datos obtenidos en Grenoble, Francia para los perfiles 5 y 6, y cuatro ejemplos del comportamiento del lugar con cuatro instrumentos diferentes.



En el caso de los experimentos en Texcoco, México, la figura 7.2 muestra los registros de campo correspondientes a los perfiles LONG 1 (Este) sensor CH293, LONG 2 (Oeste), sensor CH294, TRANS 3 (Norte) sensor CH293 y TRANS 4 (Sur) sensor CH294. En el eje de las abscisas esta representado el tiempo de registro, llevado a cabo de una manera continua para cada perfil, y en las ordenadas la inclinación observada para cada posición de la carga.

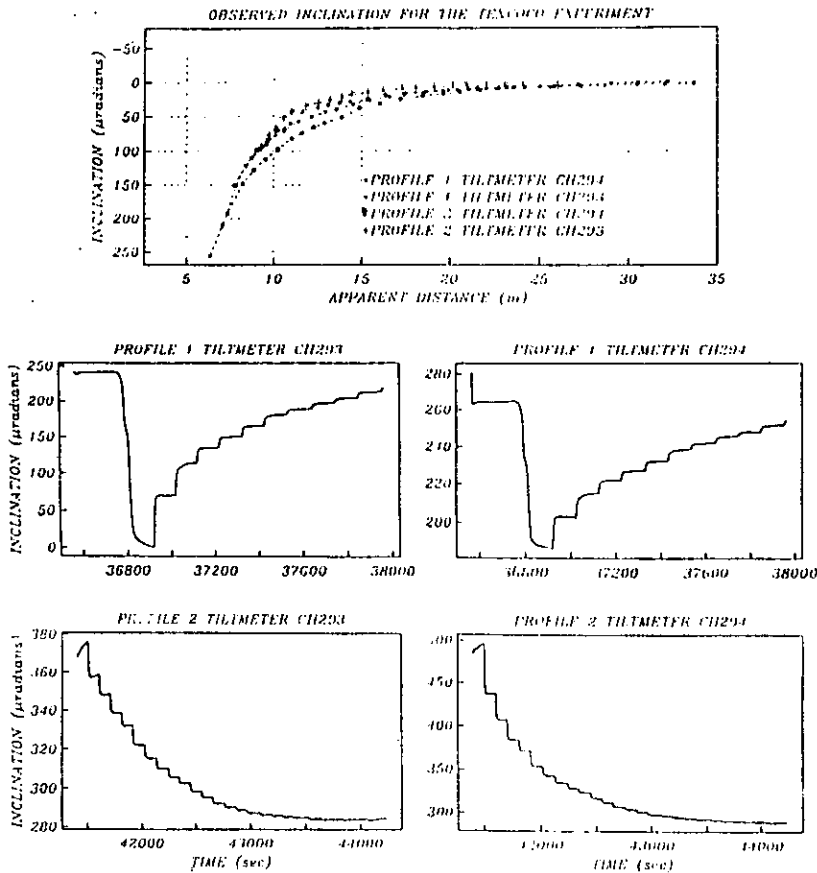


Figura 7.2 Datos obtenidos en Texcoco, México para los perfiles 1 y 2, y cuatro ejemplos del comportamiento del lugar con dos instrumentos diferentes.

El primer nivel plano en las gráficas (figura 7.2) para el perfil 1, indica el nivel base de inclinación del terreno y fue registrado con la carga situada suficientemente lejos de las estaciones inclinométricas de tal forma que la influencia de ésta es nula. Este nivel servirá para conocer la diferencia de inclinación entre el suelo cuando la carga no esté presente y cuando se sitúa a diferentes distancias a partir de un punto de referencia muy cercano a las bases inclinométricas; para las gráficas del perfil 2 el nivel plano se mide cuando el camión se encuentra suficientemente lejos de tal forma que no influya. El hecho de que para las gráficas del perfil 1 aparentemente aumente la inclinación con el tiempo se debe a una diferencia de polaridad en los instrumentos, lo cual no importa ya que lo que interesa en las mediciones es la diferencia entre el nivel plano y el provocado por las posiciones de la carga. En el resto de la figura cada "peldaño" de la gráfica representa el nivel de inclinación del suelo para cada posición del camión sobre el perfil. El camión permaneció 90s en cada punto, tiempo suficiente para estabilizar el sistema de medición y proporcionar un nivel plano de fácil lectura, en la inclinación.

Para calcular los efectos de la carga, se supone un semiespacio elástico sujeto a una carga puntual, como una primera aproximación. Se trata del problema clásico de Boussinesq para el cual la solución analítica presenta una variación de  $1/r$  para el desplazamiento vertical y de  $1/r^2$  para la inclinación observada en la superficie (Fung, 1965). Dado que la carga está constituida por las 6 ruedas del camión, se consideró una distribución pesada de la masa total contenida en las cuatro ruedas del eje trasero (9.735 ton) y en las dos ruedas del eje delantero (3.295 ton). Con estas suposiciones se planteó el problema de 6 cargas puntuales, 4 de 2.42375 ton y 2 de 1.6475 ton. La distancia de aplicación de cada una de estas cargas es conocida al disponer de las dimensiones entre los ejes y cada una de las ruedas del camión.

El efecto global se calcula tomando en cuenta la corrección de cada pequeña masa por el efecto de la dirección de sensibilidad, es decir, dado que la dirección de cada masa

a partir de las estaciones inclinométricas, no necesariamente coincide con la dirección de sensibilidad de los instrumentos, éstas se proyectan sobre la dirección de sensibilidad y se suman para obtener un efecto equivalente, pero ahora provocado por una sola masa puntual. De esta manera, la solución analítica al problema de Boussinesq, permite calcular la distancia aparente ( $r_a$ ), que será la distancia a la cual una masa puntual, igual a la del camión, produciría una inclinación igual a la observada,

$$r_a = \sqrt{\frac{P_T}{\sum_i P_i \cos \phi_i / r_i}} \quad (7.1)$$

donde  $P_T$  = masa total del camión,  $P_i$  = masa de cada una de las ruedas  $\phi_i$  = ángulo formado entre la dirección de sensibilidad de cada instrumento y la posición de la masa  $i$  y  $r_i$  = distancia de la masa  $i$

Se calcularon dos perfiles de distancia aparente de observación contra inclinación para los instrumentos CH293 y CH294. Las figuras 7.3 y 7.4 muestran estos perfiles y las curvas generadas al variar el medio en pequeña y gran proporción, con el fin de calibrar la sensibilidad de la curva y la influencia que dicho medio ejerce.

Hasta ahora los cálculos mostrados se han realizado bajo la fuerte hipótesis de medio homogéneo. Éstos han servido para ilustrar la congruencia de los registros en diferentes perfiles y con diferentes instrumentos, así como para evidenciar la necesidad del uso de una metodología más completa, que considere un medio con estratos de diferente espesor y con diferentes propiedades mecánicas. Con la distancia aparente se calculó un perfil contra la constante  $C$ , esta gráfica debería resultar precisamente una constante si el medio en estudio fuese homogéneo. En la figura 7.5 se muestran, para los

dos perfiles longitudinales, y para los instrumentos CH293 y CH294, las curvas obtenidas. En la figura 7.6 se muestra para los mismos perfiles de la figura 7.5, los cálculos de distancia aparente contra inclinación observada.

El siguiente paso será la aplicación del método de matrices de rigidez para el cálculo de los desplazamientos radiales y verticales, en un medio estratificado, ante una carga estática en la superficie.

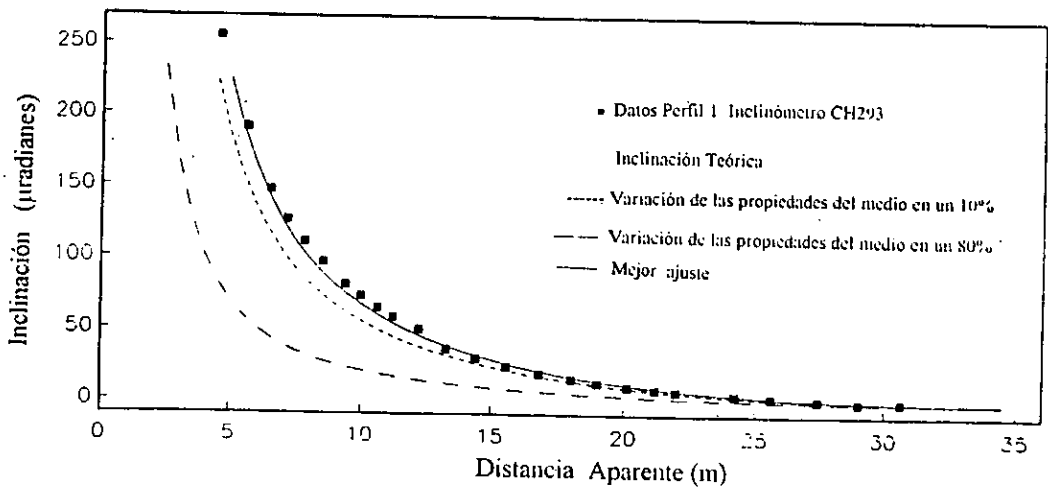


Figura 7.3 Inclinación observada contra distancia aparente para el perfil 1 y sensibilidad de la curva ante la variación de las propiedades del medio.

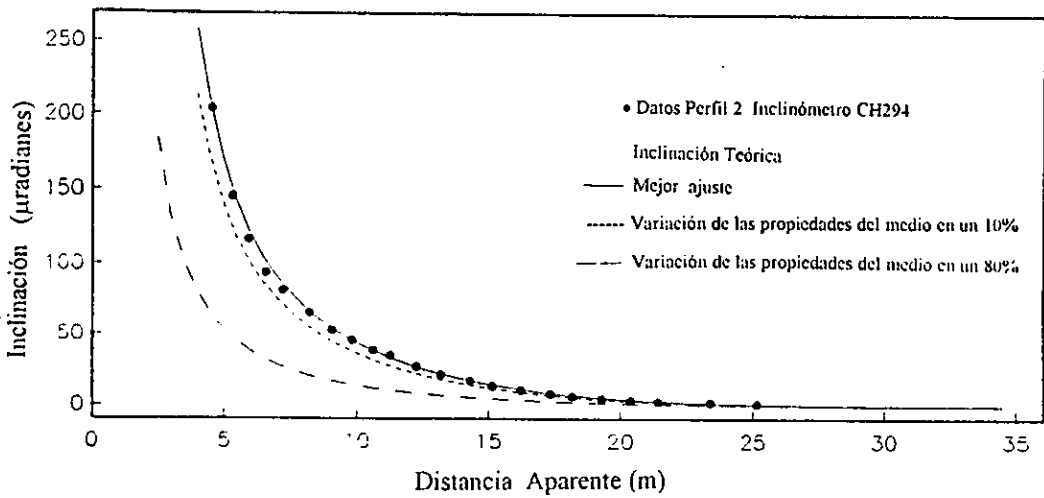


Figura 7.4 Inclinación observada contra distancia aparente para el perfil 2 y sensibilidad de la curva ante la variación de las propiedades del medio.

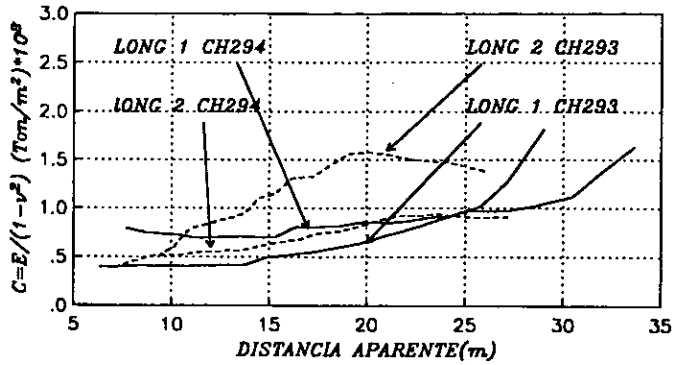


Figura 7.5. Valor de la constante C contra distancia aparente para los perfiles LONG 1 y LONG 2 inclinómetros CH293 (línea discontinua) y CH294 (línea continua).

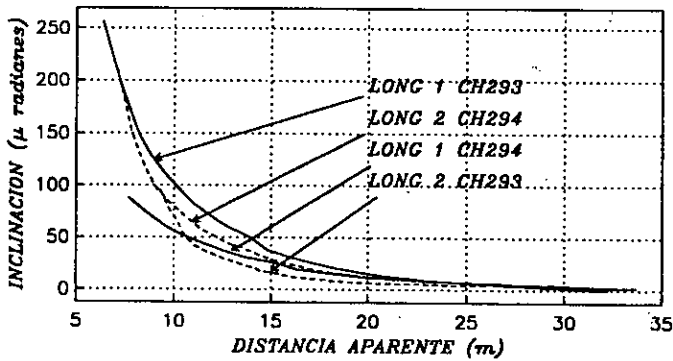


Figura 7.6. Inclinación observada contra distancia aparente para los mismos perfiles y los mismos instrumentos de la figura 7.5.

En la tabla 7.1 se muestran tres modelos obtenidos a partir de un ajuste por ensayo-error realizados para los datos correspondientes a los perfiles LONG 1, instrumento CH294; LONG 2, CH293; y LONG 1, CH293, respectivamente. Estos modelos estan basados en un modelo teórico inicial proporcionado por registros de cono eléctrico y curvas de dispersión, y modificados para lograr un buen ajuste con cada conjunto de datos.

PROP	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_{SE}$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_{SE}$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_{SE}$
	m/s			m/s			ton/m <sup>3</sup>		
Mod 1	35.0	70.0	400.0	525.0	700.0	2000.0	184.0	735.0	98000
Mod 2	30.0	65.0	400.0	450.0	650.0	2000.0	135.0	633.7	98000
Mod 3	33.0	70.0	400.0	495.0	700.0	2000.0	163.3	735.0	98000

PROP	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_{SE}$	$v_1$	$v_2$	$v_{SE}$	$h_1$	$h_2$	$h_{SE}$
	ton/m <sup>3</sup>			adim.			m		
Mod 1	1.5	1.5	2.0	0.498	0.495	0.400	18.0	60.0	***
Mod 2	1.5	1.5	2.0	0.498	0.495	0.400	22.0	60.0	***
Mod 3	1.5	1.5	2.0	0.498	0.495	0.400	18.0	60.0	***

Tabla 7.1. Modelos obtenidos a partir del ajuste entre valores de inclinación teórica y observada, (figuras 7.9, 7.10 y 7.11)  $\rho$  = densidad de masa,  $h$  = espesor del estrato y  $SE$  = semiespacio.

Con los modelos obtenidos por diferentes métodos para este sitio (Texcoco, México), se realizó una gráfica mostrada en la figura 7.7 en la cual se muestra el ajuste de medidas de inclinación, de aquí se observa la concordancia con los otros métodos en la primera capa, variando un poco en las subsecuentes sin que esto sea demasiado como para invalidar el modelo.

## 7.2 RESULTADOS UTILIZANDO ALGORITMOS GENÉTICOS

Para los datos de los perfiles 5 y 6 de Grenoble, Francia se realizó la inversión con algoritmos genéticos obteniéndose el modelo mostrado en la figura 7.8, el cual está en gran acuerdo con el propuesto por Pecker (1992) para la misma zona (misma figura). Estos resultados fueron calculados corriendo un número fijo de iteraciones o hasta conseguir una tolerancia de error preescrita. El modelo proviene de resultados registrados de experimentos realizados sobre una placa rígida de concreto (0.18 m).

La figura 7.9 indica con símbolos los datos observados de distancia-inclinación para los perfiles 5 y 6, mientras que las líneas son las curvas sintéticas distancia-inclinación aplicando la matriz de rigidez.

Para Texcoco, México se realizó la comparación del modelo utilizando algoritmos genéticos con tres técnicas más que proporcionan información del subsuelo. Las figuras 7.11 a 7.13 muestra los registros de estas técnicas para el sitio de Texcoco. En la figura 7.14 se presenta la gráfica comparativa de las técnicas anteriores pero ahora para el modelo invertido con algoritmos genéticos. Se observa un buen ajuste y varía muy poco con el invertido por ensayo-error (figura 7.10).



*Inversión con Algoritmos Genéticos del sitio de Grenoble*

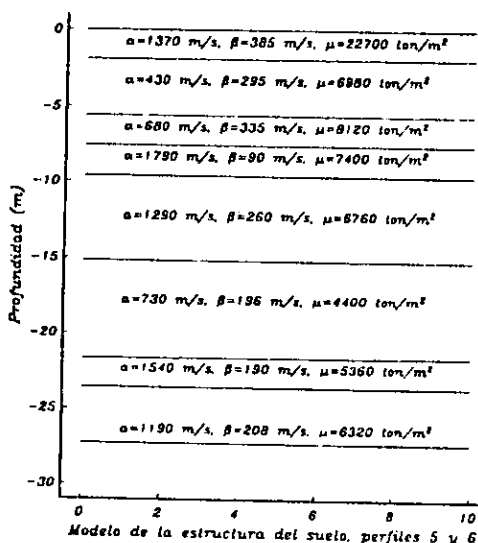
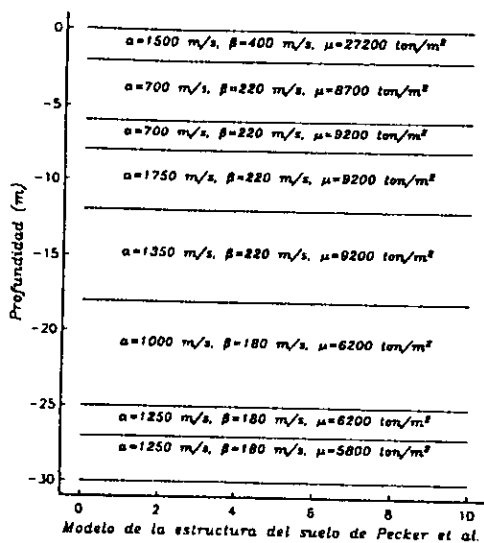


Figura 7.8 Estructura del suelo para Grenoble, Francia reportada por Pecker y la obtenida mediante inversión con algoritmos genéticos para los perfiles 5 y 6.

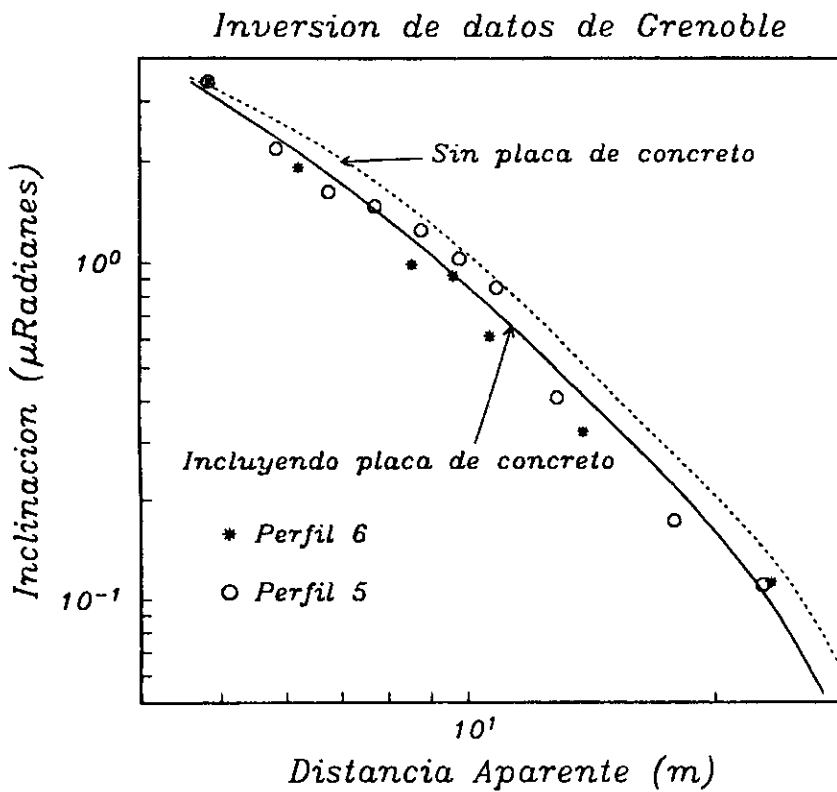


Figura 7.9 Gráfica inclinación-distancia aparente para los perfiles 5 y 6 con el fin de mostrar la sensibilidad de los datos de inclinación ante la rigidez del medio (utilizando una placa de concreto).

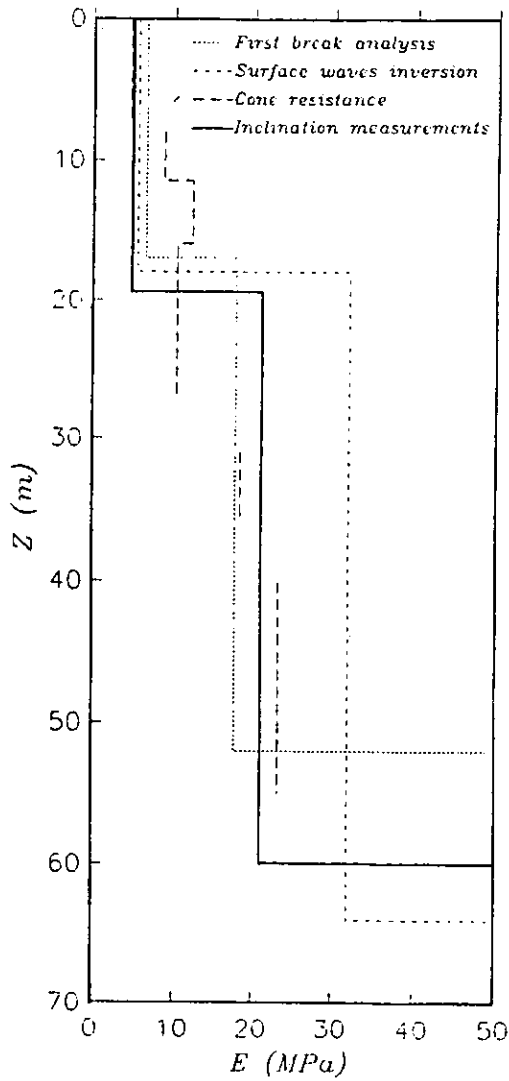


Figura 7.10 Comparación de modelos para texcoco, México, realizados con los diferentes métodos y ajustando los datos de inclinación por ensayo-error.

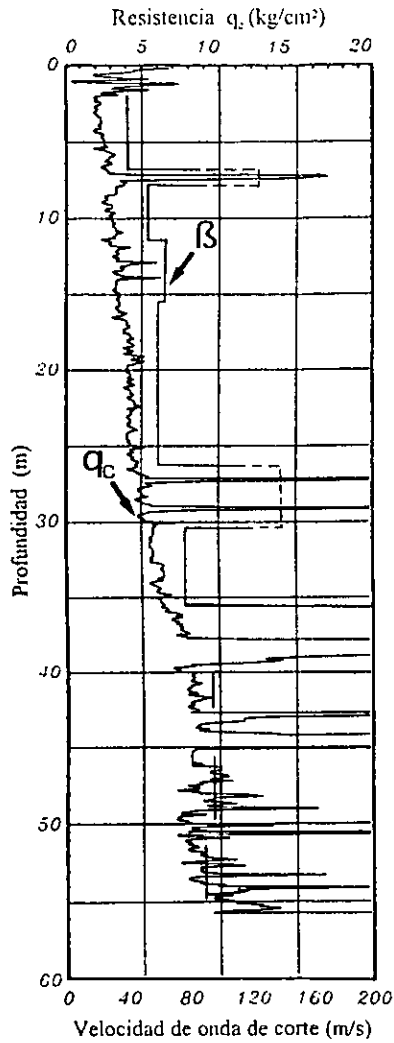


Figura 7.11 Registro de valores de punta de Cono Eléctrico para Texcoco, y su correspondiente velocidad de onda S (cortesía de Mario Trigo de TGC Geotecnia).

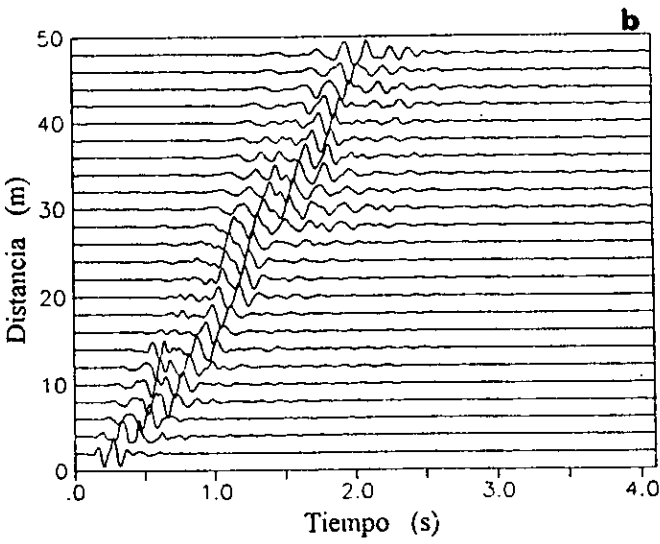
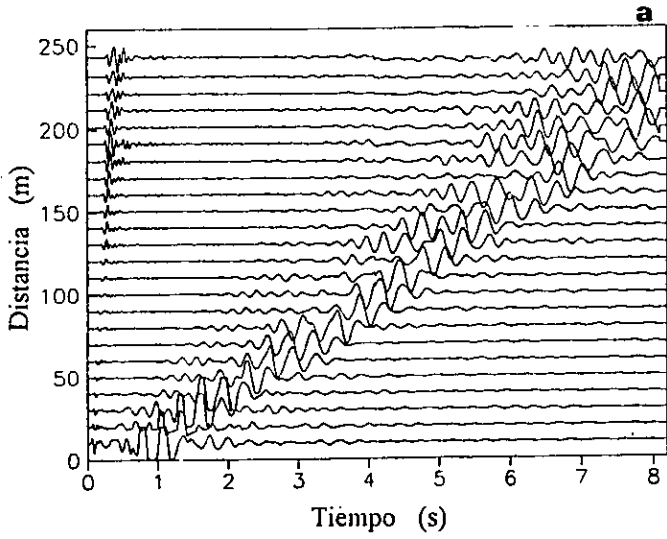


Figura 7.12 Registros de refracción a) ondas-P (8s), b) ondas-S (4s). Distancia fuente-receptor de  $\%m$  y  $\Delta x = 2m$ .

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA 79

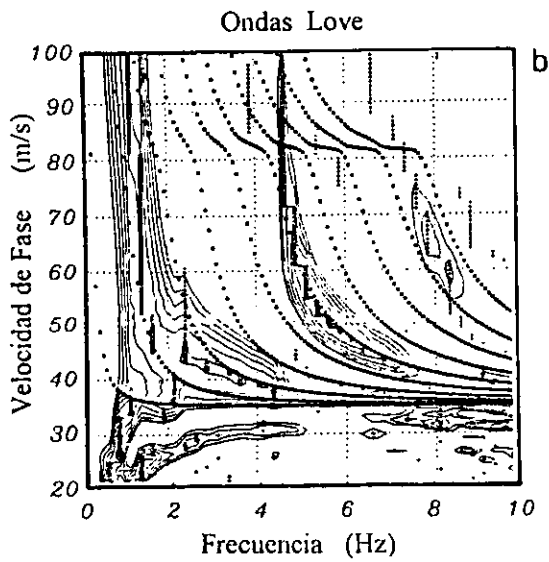
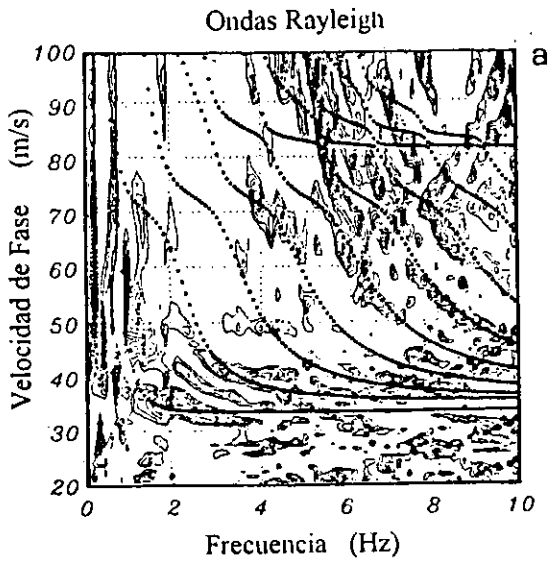


Figura 7.13 Curvas de dispersión de velocidad de fase para a) ondas de Rayleigh y b) ondas de Love.

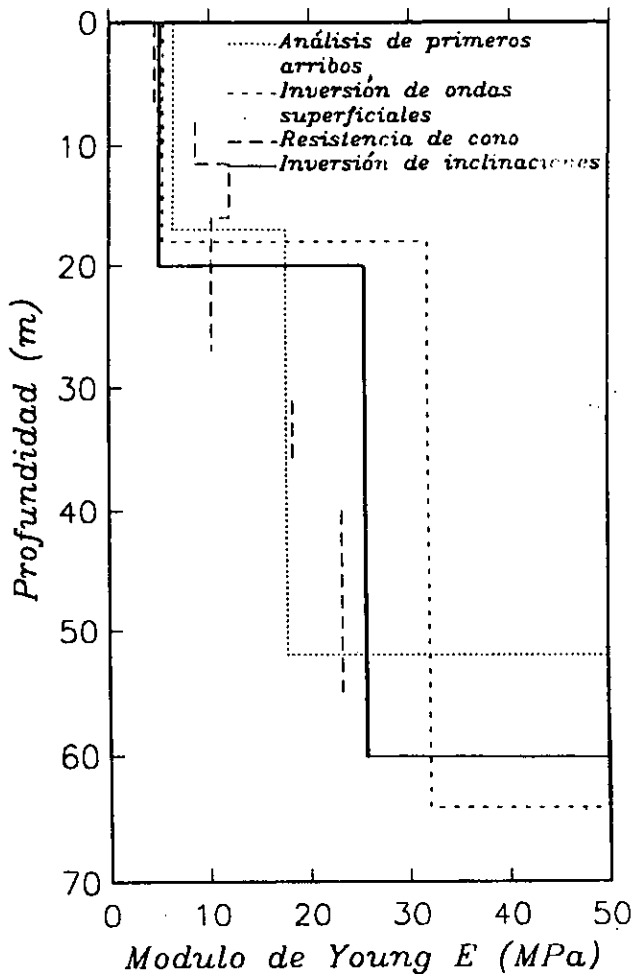


Figura 7.14 Comparación de modelos para Texcoco, México, realizados con los diferentes métodos y ajustando los datos de inclinación mediante algoritmos genéticos.

## 8. OTRAS APLICACIONES DE LA INCLINOMETRÍA

Los inclinómetros compactos de silicio han demostrado su gran resolución, eficiencia y confiabilidad, para determinar algunos parámetros elásticos del subsuelo somero, así se verifica en las mediciones realizadas en este estudio. En efecto, se mostró que los resultados obtenidos del análisis de registros de inclinación llevados a cabo en Texcoco y Grenoble concuerdan muy bien con lo que han reportado los métodos geofísicos tradicionales, comúnmente usados para la inferencia de propiedades mecánicas del terreno. Sin embargo, actualmente se conocen, aunque en etapa experimental, otras aplicaciones de interés práctico y científico que pretenden explorar los alcances de esta tecnología. Como en el caso particular de este trabajo, los procesos de medición en campo, análisis e interpretación de la información están siendo desarrollados de manera paralela y de acuerdo a los objetivos propuestos. A continuación se mencionan brevemente algunas aplicaciones en desarrollo, y se explican con mayor detalle las mediciones del desplome o inclinaciones experimentadas por la Catedral de la Ciudad de México.

**Vulcanología.-** Los movimientos de material fluido bajo presión, provocan dilataciones pequeñas susceptibles de ser medidas con precisión. Las mediciones periódicas de las pendientes en una estructura volcánica constituyen un precursor más de fenómenos eruptivos. Actualmente se encuentran instaladas en funcionamiento redes inclinométricas en los volcanes "La Azufrera" (La Soufriere) de la isla de Guadalupe y "La Hoguera" (La Fournaise) en la isla de La Reunión.

**Producción petrolera.-** En algunas provincia francesas actualmente se llevan a cabo mediciones con inclinómetros compactos, en fracturamiento producido por agua en la vecindad de perforaciones petroleras, destinadas a aumentar la productividad de varios pozos.



**Obras civiles.-** Vigilancia de deformaciones en cortinas de presas, puentes y túneles.

**Mareas gravimétricas e influencias meteorológicas.-** Estudio de sus efectos sobre los suelos.

La Catedral Metropolitana es actualmente objeto de un proceso de restauración encaminado a evitar una situación de inseguridad estructural. Los trabajos consisten básicamente en la extracción de material bajo la cimentación de la estructura, con el fin de inducir movimientos en ella que eviten la concentración de esfuerzos en varios elementos estructurales, producto del asentamiento natural que sufre la zona de lago de la Ciudad de México.

Para llevar a cabo de manera óptima la evaluación de los movimientos naturales e inducidos en la Catedral Metropolitana, se signó un convenio entre el Instituto de Física del Globo de París, el Instituto de Ingeniería de la UNAM, y la compañía TGC, que consiste en la donación de un sistema de monitoreo continuo, que se compone de 14 instrumentos de alta precisión llamados inclinómetros compactos de silicio, los cuales satisfacen los requerimientos demandados. Estos instrumentos se colocan en puntos estratégicos de la estructura, de esta forma detectan y registran de manera continua, las inclinaciones o giros que experimentan los puntos de interés en la estructura, sobre los cuales fueron instalados. Se pretende con ello, contar con una fuente de información complementaria a las nivelaciones diferenciales realizadas periódicamente en varios puntos de las bóvedas y criptas del templo. Con ambos sistemas de monitoreo, se puede dar seguimiento al movimiento (espacio temporal) de algunos puntos específicos, con el fin de detectar oportunamente cualquier desempeño anormal durante los trabajos de rehabilitación, y de ser necesario, adoptar las medidas pertinentes para corregirlo.

Debe hacerse notar que el sistema mencionado se encuentra en etapa de evaluación, por lo que los resultados e interpretación que de éste surjan, deberán ser calibrados y validados con aquellos obtenidos a partir de los métodos convencionales de monitoreo. Sin embargo, los resultados parciales producto del análisis de los registros obtenidos para un periodo dado (marzo a diciembre 1994), comparados con las nivelaciones topográficas, llevadas a cabo a nivel bóvedas, y en las criptas del templo, muestran una buena correlación, lo cual permite presentar al sistema de monitoreo con inclinómetros compactos como una buena opción de bajo costo y muy buena resolución.

## **8.1 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA**

El sistema de medición con inclinómetros compactos instalado en la Catedral, consta de 14 instrumentos distribuidos en 7 estaciones. Debido a que cada instrumento tiene una dirección de sensibilidad preferencial o máxima, siendo relativamente insensible a cambios de inclinación en la dirección perpendicular, en cada estación se instalaron 2 inclinómetros, uno de ellos orientado N-S y el otro E-W. Cuenta también con fuentes de poder que suministran la alimentación requerida (12 volts) por cada estación inclinométrica, y una unidad central de captura (computadora personal) que, mediante un programa de adquisición el cual funciona continuamente, recibe las señales de todos los inclinómetros y las transforma en archivos digitales para su almacenamiento diario.

Las estaciones inclinométricas fueron instaladas en siete puntos sobre la estructura principal de la Catedral, tres de ellos en el nivel de criptas, dos en los contrafuertes centrales del eje 5 y dos mas en la base de la cúpula principal. En la figura 8.1a y 8.1b se muestran dos vistas en planta de los niveles de criptas y bóvedas, respectivamente, con la localización de las siete estaciones inclinométricas. La figura 8.1b muestra también la ubicación en la bóveda principal de la unidad central de captura.

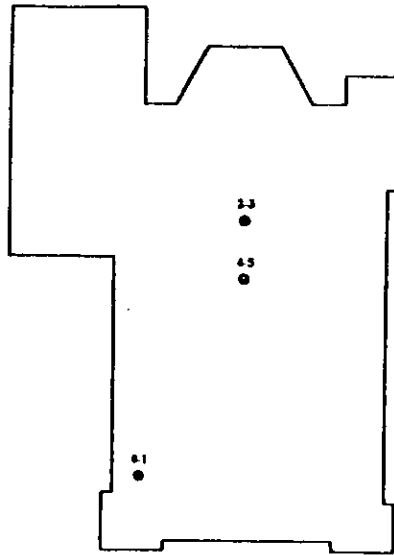


Figura 8.1a Ubicación del dispositivo de detección con inclinómetros en criptas.

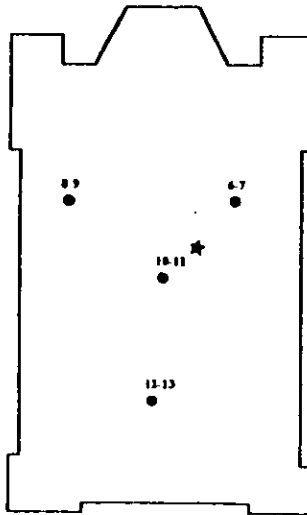


Figura 8.1b Ubicación del dispositivo de detección con inclinómetros en bóvedas. La estrella indica la ubicación de la unidad central de captura.

La tabla 8.1 muestra para cada estación, el número de cada uno de los dos instrumentos allí instalados, así como su orientación, el número de canal por el cual se recibe la señal, el valor de la constante de cada instrumento y el periodo de oscilación al cual se encuentran instalados.

Canal	No de sensor	Orientación	Coefficiente	Periodo (s)
0	CH 271	Norte - Sur	0.195	3.828
1	CH 292	Este - Oeste	0.228	3.863
2	CH 266	Norte - Sur	0.145	1.771
3	CH 293	Este - Oeste	0.178	1.594
4	CH 317	Norte - Sur	0.212	4.003
5	CH 243	Este - Oeste	0.185	6.720
6	CH 301	Norte - Sur	0.234	1.284
7	CH 275	Este - Oeste	0.168	1.594
8	CH 303	Norte - Sur	0.219	1.300
9	CH 274	Este - Oeste	0.168	1.860
10	CH 291	Norte - Sur	0.226	1.330
11	CH 297	Este - Oeste	x.xxx	2.190
12	CH 262	Norte - Sur	0.189	1.947
13	CH 264	Este - Oeste	0.166	1.918

Tabla 8.1 Características del sistema de medición con inclinómetros compactos.

Los instrumentos instalados sobre superficies horizontales fueron simplemente nivelados y colocados en esos puntos, mientras que en las posiciones con superficies verticales (contrafuertes), éstos fueron empotrados en la estructura.

Todas las estaciones inclinométricas fueron protegidas con cajas metálicas aislantes de temperatura y humedad, con el fin de garantizar su funcionamiento óptimo.

## 8.2 FUNCIONAMIENTO DEL SISTEMA

Los giros o inclinaciones que pueda sufrir la estructura de la Catedral en los puntos donde se colocaron las estaciones inclinométricas, son registrados en dos componentes

horizontales perpendiculares, a partir de los cuales se puede obtener el componente del movimiento total proyectado al plano horizontal. Este cambio en la inclinación, lo registra cada inclinómetro como una diferencia de potencial, la cual es transmitida mediante cables blindados hasta la unidad de adquisición. Posteriormente, las señales de los 14 instrumentos son transformadas, mediante una tarjeta convertidora analógico-digital, en valores de inclinación (micro-radianes). El proceso de conversión se lleva a cabo dentro del programa de adquisición, mediante la multiplicación de la diferencia de potencial proveniente de cada inclinómetro, con el coeficiente intrínseco a cada uno de ellos. La captura se realiza automáticamente cada cinco minutos, en ella se lleva la escala de tiempo común y el valor de inclinación reportado por cada instrumento. Lo anterior se registra en un archivo ASCII cuyo nombre se forma con los dos últimos dígitos del año, con el mes y el día actuales en la computadora de adquisición, así, diariamente se almacena un archivo con la historia de las inclinaciones reportadas por cada instrumento. El análisis de la evolución del movimiento en cada punto, aportará evidencias del correcto funcionamiento de este sistema.

### **8.3 REGISTROS OBTENIDOS DE MARZO A DICIEMBRE DE 1994**

Como se mencionó, el sistema de medición consta de 14 instrumentos instalados en 7 estaciones. En cada una de ellas se colocaron 2 inclinómetros, uno orientado NS y el otro EW. En la tabla 8.2 se presenta una relación de las amplitudes máximas registradas para cada una de las estaciones en el periodo mencionado.

Para visualizar el comportamiento tanto del sensor como de los movimientos originados en cada una de las estaciones se generaron gráficas de inclinación contra tiempo, las cuales se muestran en las figuras 8.2 a 8.5.

mes	TORRE ( $\mu rad$ )		NORTE ( $\mu rad$ )		CENTRO ( $\mu rad$ )	
	0	1	2	3	4	5

mar	136	109	90	***	***	121
abr	136	246	90	***	***	184
may	136	327	***	***	44	***
jun	136	424	***	***	43	***
jul	136	448	***	***	43	***
ago	136	552	***	***	43	***
sep	136	600	***	***	43	***
oct	136	579	***	***	43	***
nov	136	612	***	***	43	***
dic	136	815	***	***	43	***

mes	CTF-E ( $\mu rad$ )		CTF-W ( $\mu rad$ )		DOMO-N ( $\mu rad$ )		DOMO-S ( $\mu rad$ )	
	6	7	8	9	10	11	12	13

mar	63	95	***	***	***	***	***	***
abr	161	190	***	***	***	***	***	3711
may	***	905	***	***	***	***	***	566
jun	***	905	***	***	***	***	203	541
jul	***	905	***	***	***	***	254	727
ago	***	***	***	***	349	419	***	***
sep	***	***	***	***	460	525	***	***
oct	***	***	***	***	629	594	***	***
nov	***	***	***	***	787	759	***	***
dic	***	***	***	***	822	809	***	***

Tabla 8.2 Amplitudes máximas registradas para cada una de las estaciones en el periodo mencionado.

Se puede observar que de las estaciones que se encuentran colocadas en las criptas (0-1, 2-3, 4-5), sólo el inclinómetro orientado en la dirección EW (1) (figura 8.2b) correspondiente a la estación *Torre*, es el que mostró la tendencia esperada, es decir, un incremento de la inclinación con respecto al tiempo, observándose un valor de inclinación máximo de 815  $\mu$ radianes (2.8"), mientras que el componente NS (0) (figura 8.2a) sólo registró los últimos días de marzo (a partir del día 19), alcanzando un valor máximo de 136  $\mu$ radianes (0.467") saturándose al llegar a dicho valor. Considerando el sentido de medición de ambos componentes el movimiento se presenta en dirección noreste.

En relación a las estaciones ubicadas en la bóveda, la estación *Contrafuerte-E*, en su componente NS (6) (figura 8.3a), presenta la tendencia esperada durante los meses de marzo a junio y la primera quincena de julio, registrando un valor máximo de inclinación en dicho periodo de 161  $\mu$ radianes (0.553"), en dirección norte. Durante el mes de mayo la dirección de movimiento presenta una ligera tendencia hacia el sur ya que se observan amplitudes muy pequeñas. En la segunda quincena de julio el comportamiento fue muy irregular, se presenta un gran salto y variaciones considerables que no permiten definir un valor de inclinación. Para el componente EW (7) (figura 8.3b), en los dos primeros meses los datos obtenidos muestran la tendencia esperada alcanzando un máximo de 95 (0.326") y 190 (0.653")  $\mu$ radianes, respectivamente. A partir de la segunda quincena de mayo se tiene un gran cambio en la amplitud manteniéndose constante en 905  $\mu$ radianes (3.11"), dichos valores indican un giro al oriente. A partir de la segunda quincena de julio se tiene un giro hacia la dirección poniente, pero el comportamiento es muy inestable, puesto que se presentan oscilaciones considerables de amplitud. Con base en lo anterior la dirección de movimiento en el periodo de marzo a la primera quincena de julio indica que el movimiento es hacia el noreste, cambiando al noroeste para el resto del periodo de registro, sin embargo, el comportamiento en este último periodo no es muy confiable, ya que presenta grandes variaciones de amplitud.

Los datos obtenidos en la estación *Domo-N* en el componente NS (10) (figura 8.4a), indican un movimiento hacia el norte, con un máximo de 822  $\mu$ radianes (2.82"). En este componente el comportamiento del inclinómetro fue muy irregular, principalmente en los meses de marzo y abril. En mayo y junio se siguen presentando oscilaciones considerables en el valor de la amplitud, por lo que no se pudo definir un valor de inclinación para dicho periodo. Al inicio de la segunda quincena de agosto estas variaciones tienden a estabilizarse, con lo que se determinó un valor de inclinación más confiable a partir de esa fecha, salvo para algunos lapsos de inestabilidad que se observan. En cuanto al componente EW (11) (figura 8.4b), se registra un valor máximo de inclinación de 809  $\mu$ radianes (2.78"). Al inicio del registro (marzo) este componente presenta variaciones tanto en dirección como en amplitud, definiéndose en el mes de abril la dirección de movimiento hacia el oriente y, de igual forma que en el componente NS, se pudo determinar un valor de inclinación a partir del mes de agosto. Con base en estos datos el movimiento resultante para la estación mencionada es en la dirección noreste.

Finalmente, para la estación *Domo-S*, en su componente NS (12) (figura 8.5a), los meses de marzo a mayo proporcionan datos poco confiables. Sin embargo, a partir de la segunda quincena de junio se observa el comportamiento esperado, dicho comportamiento se presenta hasta la primera quincena de julio, aproximadamente, alcanzando un valor máximo de 254  $\mu$ radianes (0.873") en dirección norte. Posteriormente se observa un cambio significativo en el valor de amplitud, mostrando para el resto del lapso de estudio un comportamiento muy irregular en amplitud, conservándose la misma dirección. Para el componente EW (13) (figura 8.5b), el periodo de marzo a la primera quincena de julio presenta el comportamiento esperado, aunque en marzo y los primeros días de abril los valores de amplitud presentan grandes oscilaciones. El valor de inclinación alcanzado en dicho periodo es de 727  $\mu$ radianes (2.49"), con dirección oriente. Para la segunda quincena de julio la dirección de movimiento cambia hacia el poniente, sin embargo, su comportamiento es muy inestable, manteniéndose en esta dirección hasta el final del periodo de estudio. Se puede decir entonces que en el periodo de marzo a la primera quincena de julio el movimiento fue en dirección noreste.



Para el resto del periodo de estudio los datos registrados no son de buena calidad, por lo que no se puede definir una dirección de movimiento confiable.

Nótese que en todas las figuras se presentan periodos donde no se tiene registro, esto se debe a interrupciones en el suministro de energía. Otro rasgo que se presenta en todas las figuras son saltos repentinos, dichos cambios pueden ser producto de variación de voltaje o movimientos externos bruscos cercanos al sensor.

#### **8.4 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS PARCIALES Y COMPARACIONES**

A partir de las gráficas mostradas en las figuras 8.2 a 8.5, se definió la variación de la inclinación con el tiempo, trazando líneas que permitieron unir los intervalos de tiempo en los cuales los datos de inclinación presentaron pequeñas oscilaciones, es decir, un comportamiento más estable. Sin embargo, sólo en 8 de las 14 estaciones fue posible determinar dicha variación.

En la figura 8.6 se muestran las estaciones en las que se pudo definir esta variación usando una misma escala temporal para poder comparar. La figura 8.7 muestra estos mismos resultados autoescalados, con el objeto de visualizar de una manera más clara tanto las amplitudes como el periodo de registro para cada una de estas estaciones. Como se observa en las estaciones *Contrafuerte-E* para ambos componentes, solo se contó con pocos puntos para hacer este ajuste. Las líneas continuas indican los diferentes periodos en los que se presentó la tendencia esperada y se consideró que las variaciones de amplitud no eran muy representativas. Las líneas discontinuas representan la tendencia general para el lapso de registro.

Torre (EW)	0.1058 $\mu$ radianes/hora
Contrafuerte-E (NS)	0.1347 $\mu$ radianes/hora
Contrafuerte-E (EW)	0.1336 $\mu$ radianes/hora
Contrafuerte-W (NS)	0.1582 $\mu$ radianes/hora
Domo-N (NS)	0.1578 $\mu$ radianes/hora
Domo-N (EW)	0.1437 $\mu$ radianes/hora
Domo-S (NS)	0.1186 $\mu$ radianes/hora
Domo-S (EW)	0.2062 $\mu$ radianes/hora

Tabla 8.3 *Variaciones con respecto al tiempo para las estaciones mencionadas.*

De la tabla 8.3 se puede observar que las estaciones *Torre (EW)*, *Contrafuerte-W (NS)*, *Domo-N (NS)* y *Domo-N (EW)*, son las que proporcionaron un mayor número de datos, lo que indica que el comportamiento en dichas estaciones fue más estable. Se trató de extraer de las gráficas mostradas en las figuras 8.2 a 8.8 el máximo de información que permitiera mostrar una tendencia de la inclinación, para un periodo en donde los datos registrados presentaran una tendencia más estable, es por ello que se consideraron los datos, aunque son poca información, para las estaciones *Contrafuerte-E (EW)* y *(NS)*, *Domo-S (EW)* y *(NS)*. Para el resto de las estaciones no se pudo definir algún valor aproximado de la variación de la inclinación con el tiempo, por las causas ya descritas.

Con base en los resultados mostrados en las figuras 8.2 a 8.6, se puede decir que en general la dirección de giro registrado por los inclinómetros es hacia el noreste. Este resultado se basa en la calidad de los datos obtenidos para 12 de los 14 inclinómetros. Los inclinómetros 2 y 3 (*Norte*) indican una dirección de giro hacia el sureste, no obstante, el comportamiento de dicha estación puede indicar que la información registrada puede resultar poco confiable o que se debe verificar la polarización.

Por otro lado, en este estudio se busco poder registrar los cambios generados por los hundimientos diferenciales registrados en la Catedral. Dichos cambios producto de varias acciones realizadas, como son, el bombeo, el aflojado de pilotes de control y la subexcavación. Sin embargo, solo una de estas acciones coincide con el lapso de registro

de estudio. Dicha acción es el inicio de la cuarta etapa de subexcavación, realizada el 18 de abril de 1994, no obstante, las gráficas de inclinación contra tiempo mostradas, no registran ningún cambio a partir de esta fecha. Los resultados obtenidos en este análisis coinciden con lo observado por Tamez *et al.* (1995). En dicho documento se presentan resultados de nivelaciones topográficas y medición de velocidades de hundimiento que muestran que el giro generalizado de la Catedral es hacia el noreste. Con base en lo anterior se puede decir que los inclinómetros registraron el movimiento correctivo, no el originado por el hundimiento diferencial producto de la propia estructura.

Con base en la calidad y cantidad de datos empleados para definir algunas características del movimiento en la Catedral, se observó que sólo el 35% de las estaciones registraron un lapso de tiempo considerable con pequeñas variaciones en el registro de los datos de inclinación. Esto es debido principalmente a que no se contó con un mantenimiento constante de los instrumentos. Otro factor importante que afectó los resultados fue el suministro no constante de corriente eléctrica, lo cual se manifiesta en la ausencia de datos en periodos comunes para todos los registros. De igual forma, saltos repentinos que pueden ser producto de cambios bruscos de voltaje o factores externos.

Sin embargo, la información que se logró rescatar muestra que la tendencia de giro registrada con los inclinómetros es en dirección noreste, dato que se corrobora con los resultados mostrados por Tamez *et al.* (1995). También se observó que los inclinómetros registraron el movimiento correctivo, no el originado por el hundimiento diferencial producto de la propia estructura, ya que, en los datos analizados, la tendencia de giro coincide con el movimiento inducido a la Catedral. Por lo tanto, se puede decir que la información obtenida de este estudio es de carácter cualitativo.

Para poder introducir en este tipo de estudios un análisis cuantitativo es preciso contar con datos confiables libres, en la medida de lo posible, de factores instrumentales así como de factores externos, lo que nos lleva al punto del mantenimiento constante de los instrumentos.

TORRE NS (01/marzo-31/diciembre)

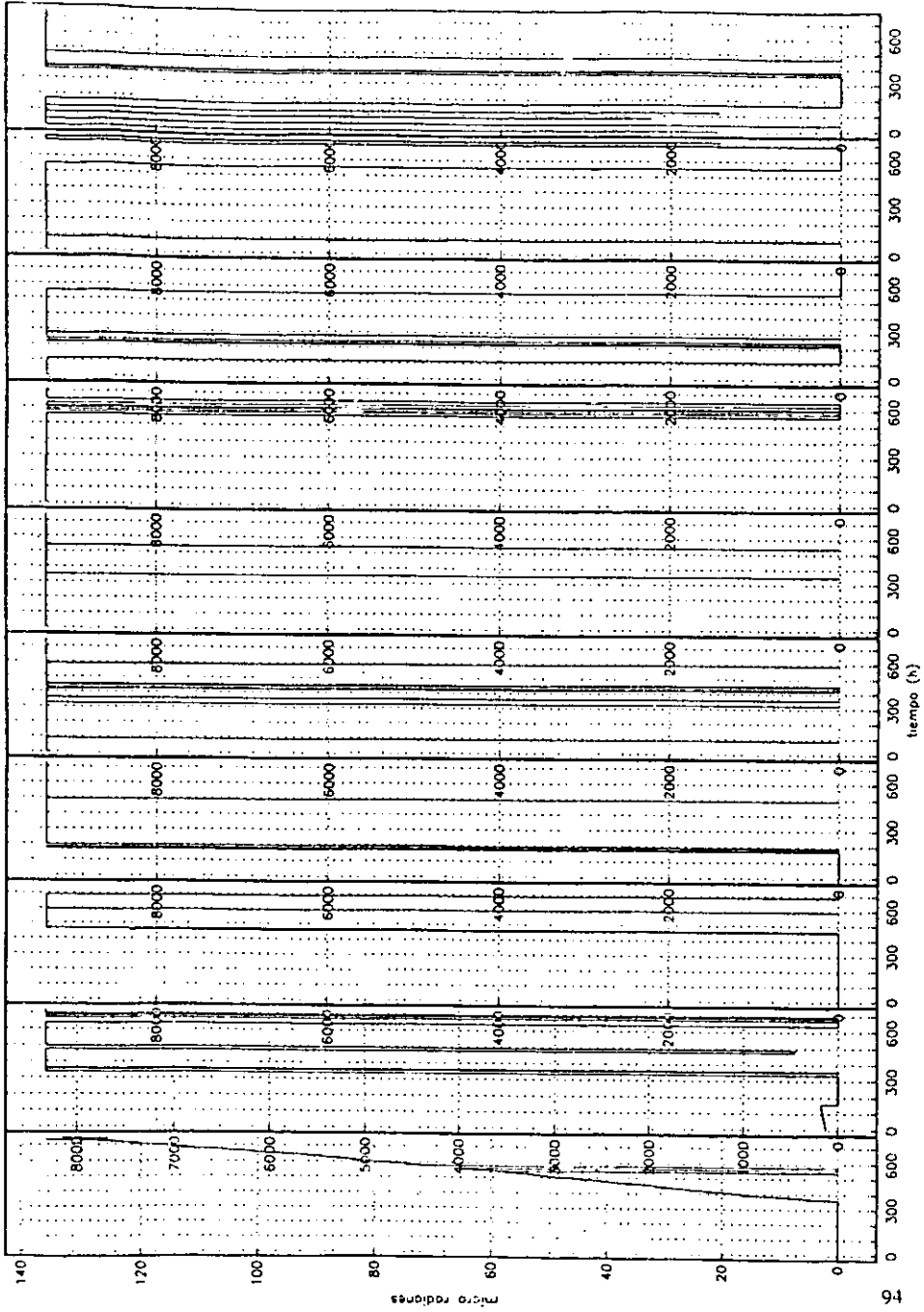


Figura 8 2a Registro continuo de inclinación en función del tiempo. la escala horizontal es el tiempo de registro y corresponde al periodo de marzo a diciembre Estación Torre-NS

CONTRAFUERTE E NS (01/marzo-31/diciembre)

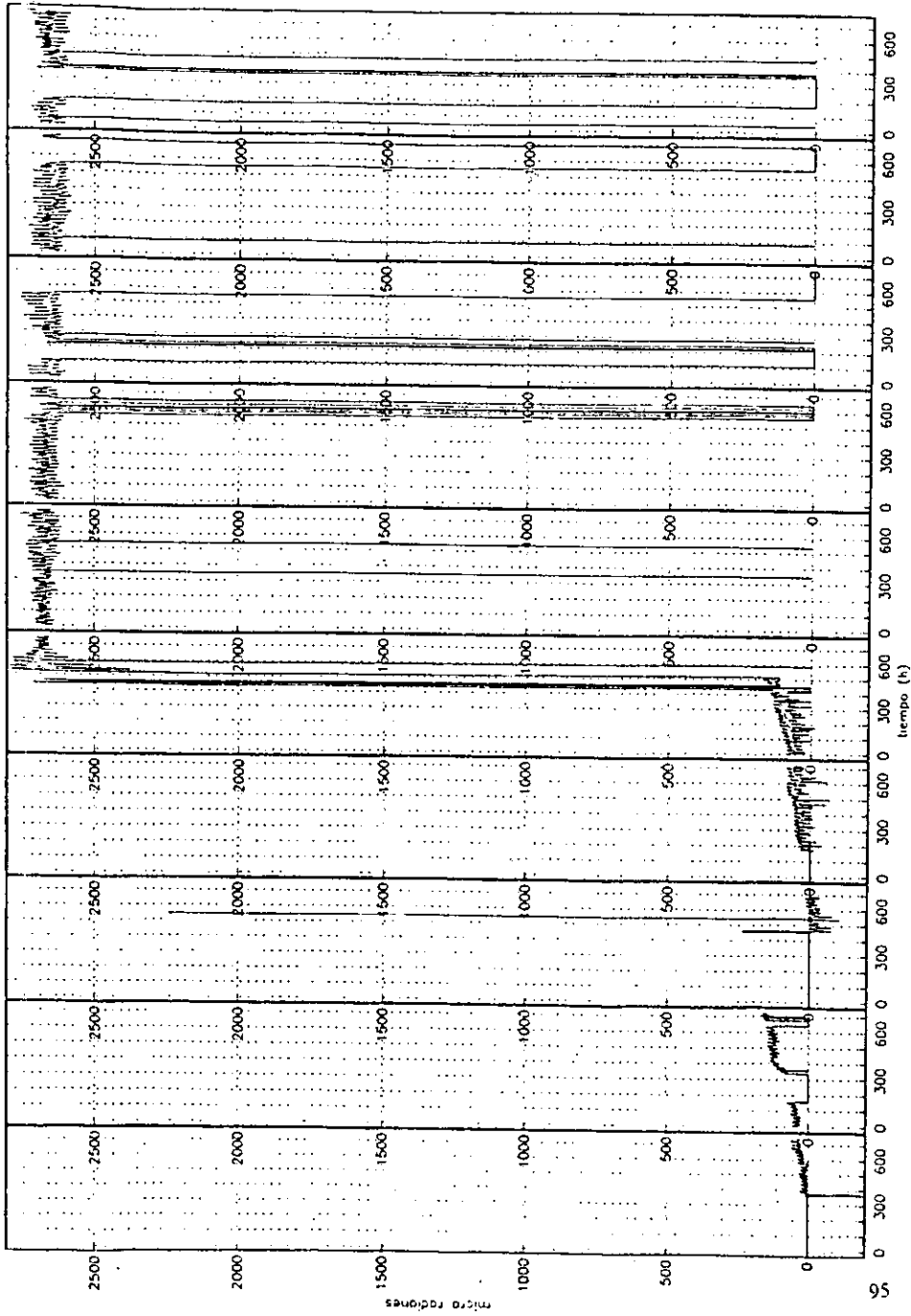


Figura 8.3a Registro continuo de inclinación en función del tiempo. la escala horizontal es el tiempo de registro y corresponde al periodo de marzo a diciembre. Estación Contrafuerte-E-NS

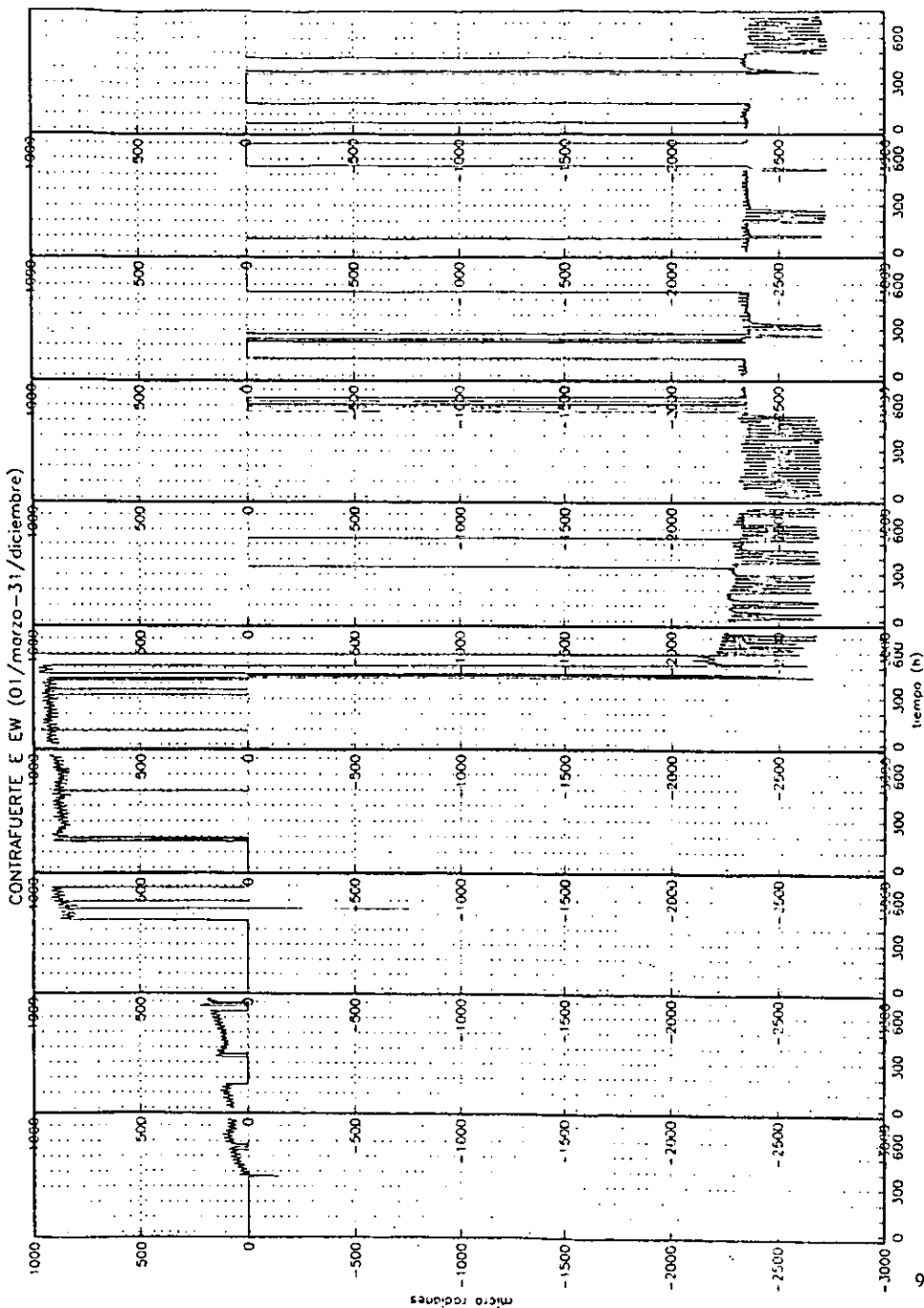


Figura 8.3b Registro continuo de inclinacion en funcion del tiempo. la escala horizontal es el tiempo de registro y corresponde al periodo de marzo a diciembre. Estacion Contrafuerte-E-EW

DOMO N NS (01/marzo-31/diciembre)

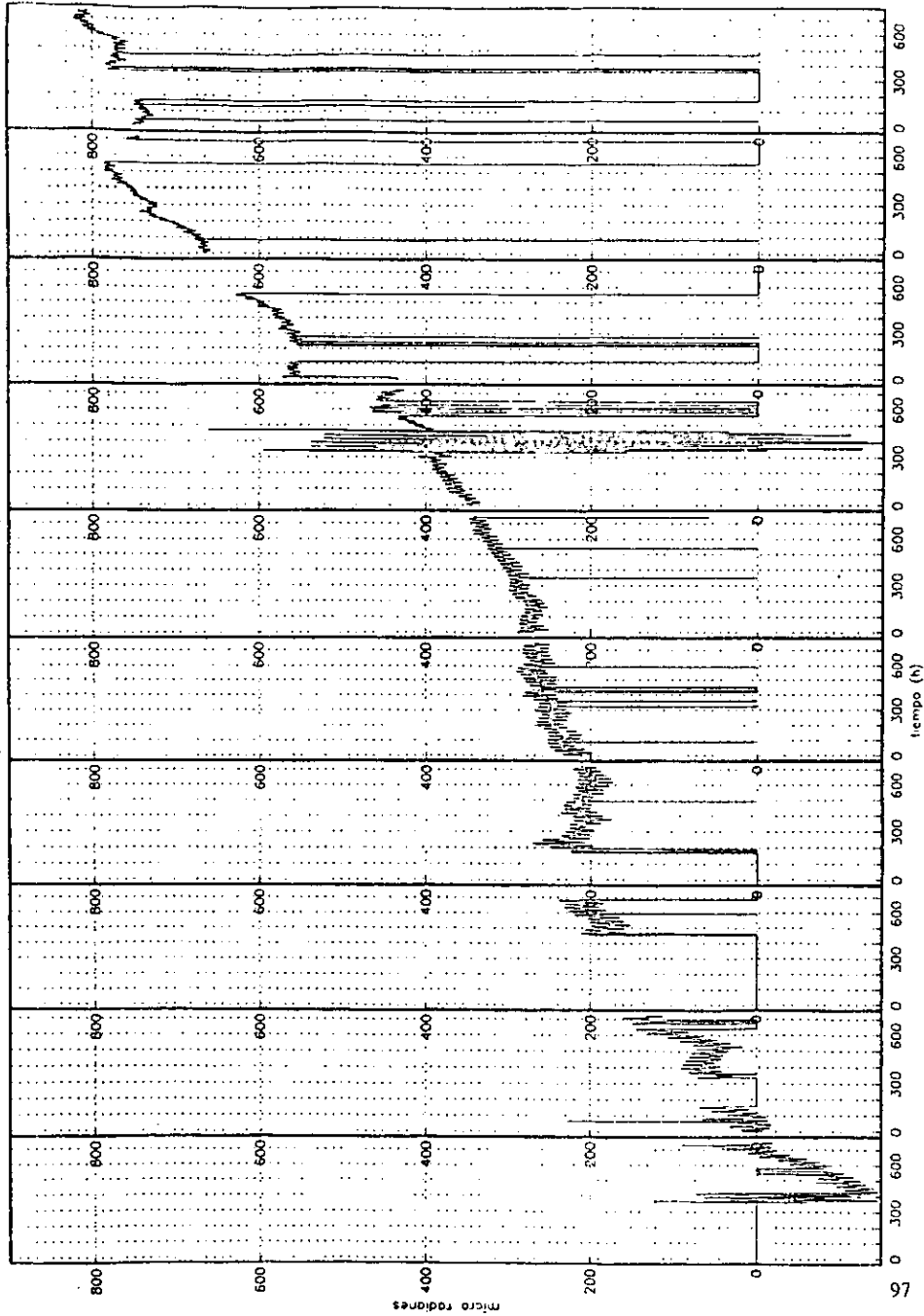


Figura 8-4a Registro continuo de inclinación en función del tiempo. la escala horizontal es el tiempo de registro y corresponde al periodo de marzo a diciembre. Estación Domo-N-NS.

DOMO N EW (01/marzo-31/diciembre)

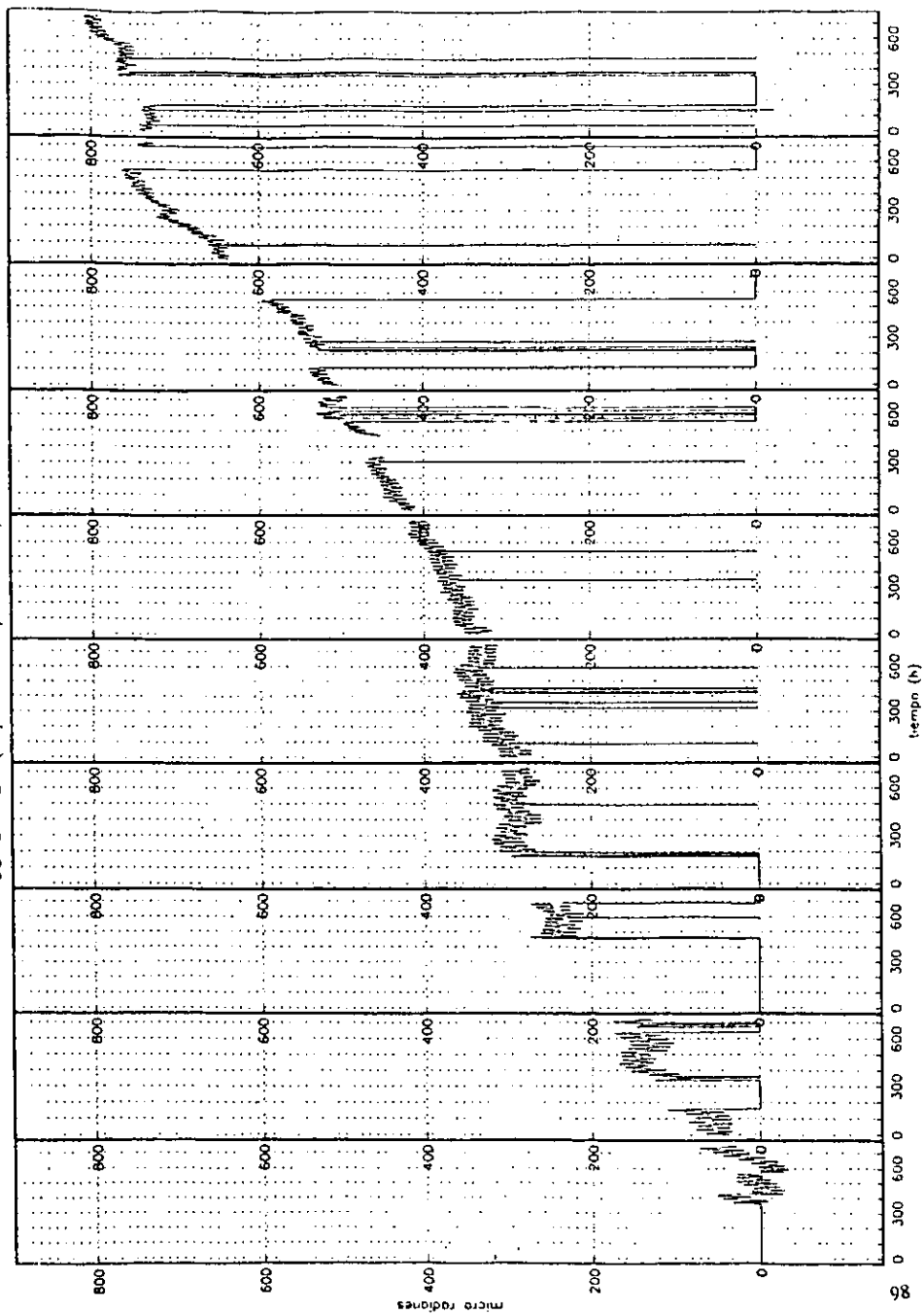


Figura 8.4b Registro continuo de inclinación en función del tiempo. la escala horizontal es el tiempo de registro y corresponde al periodo de marzo a diciembre. Estación Domo-N-EW



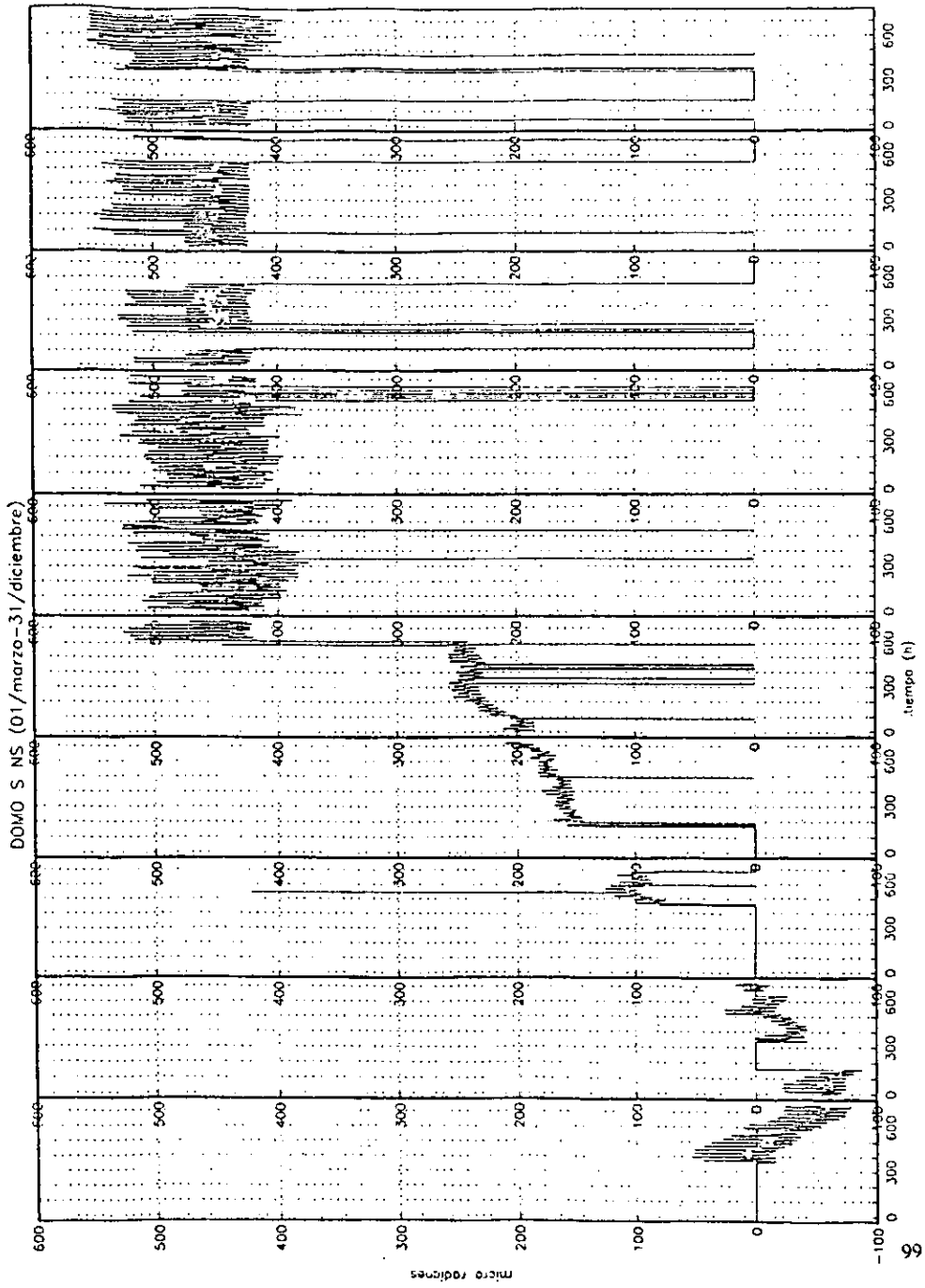


Figura 8.5a Registro continuo de inclinación en función del tiempo. la escala horizontal es el tiempo de registro y corresponde al periodo de marzo a diciembre. Estación Domo-S-NS.

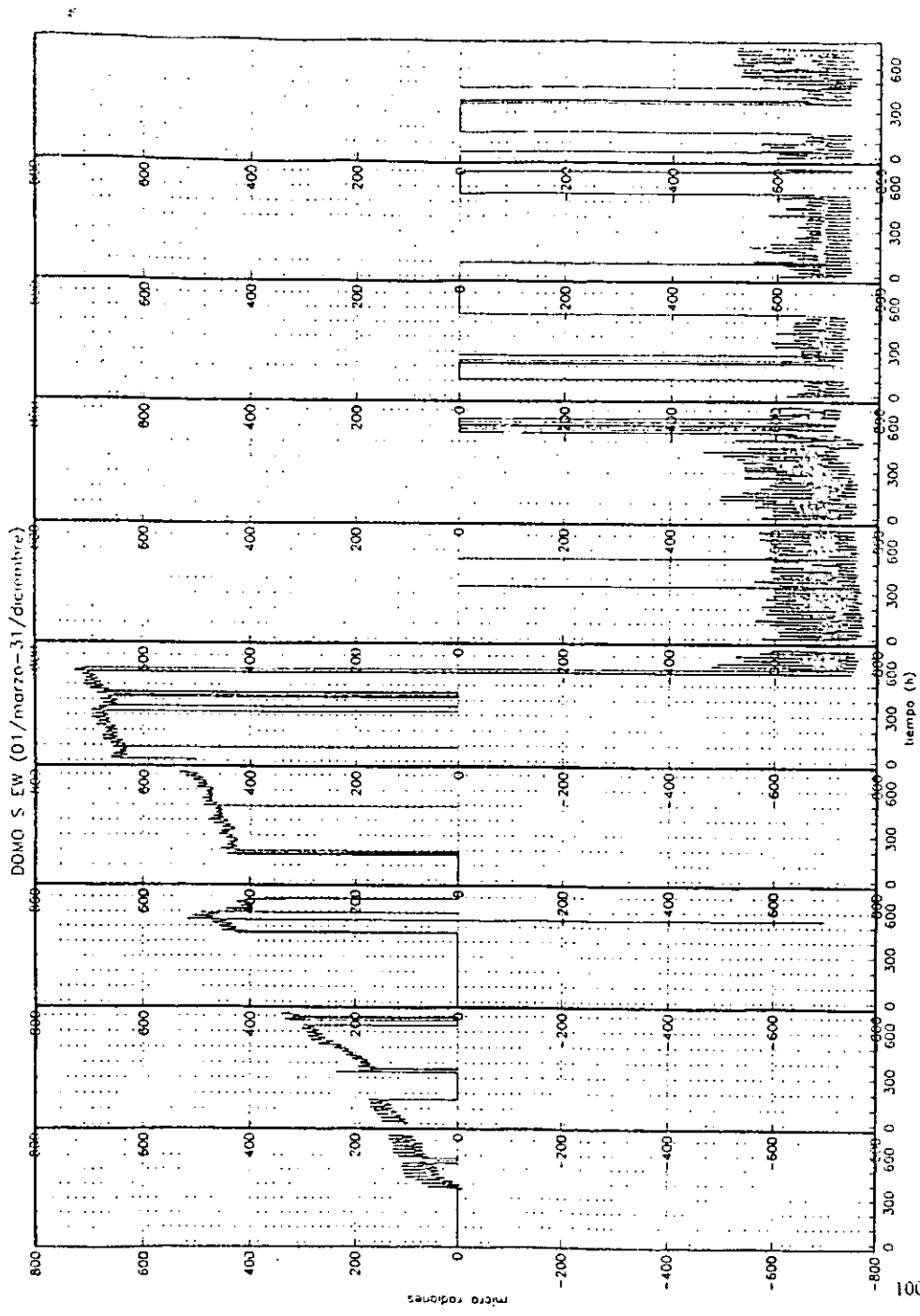


Figura 8.5b Registro continuo de inclinación en función del tiempo. la escala horizontal es el tiempo de registro y corresponde al periodo de marzo a diciembre. Estación Domo-S-EW.

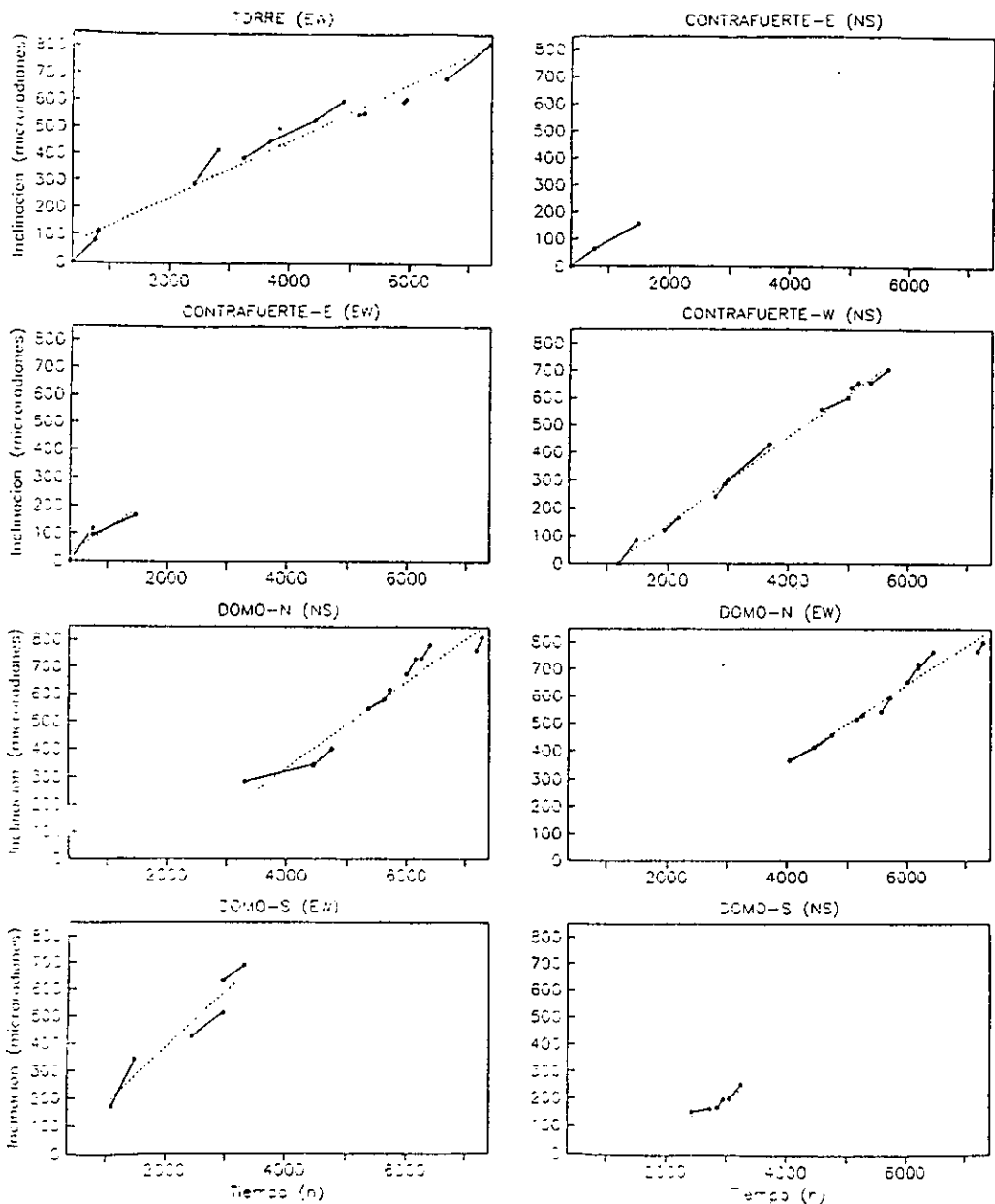


Figura 8.6 Variación de la inclinación con el tiempo. Las rectas continuas sugieren la tendencia registrada por los instrumentos en distintos periodos de información útil. Su pendiente representa la razón de inclinación con el tiempo. La escala horizontal es común a todas las figuras.

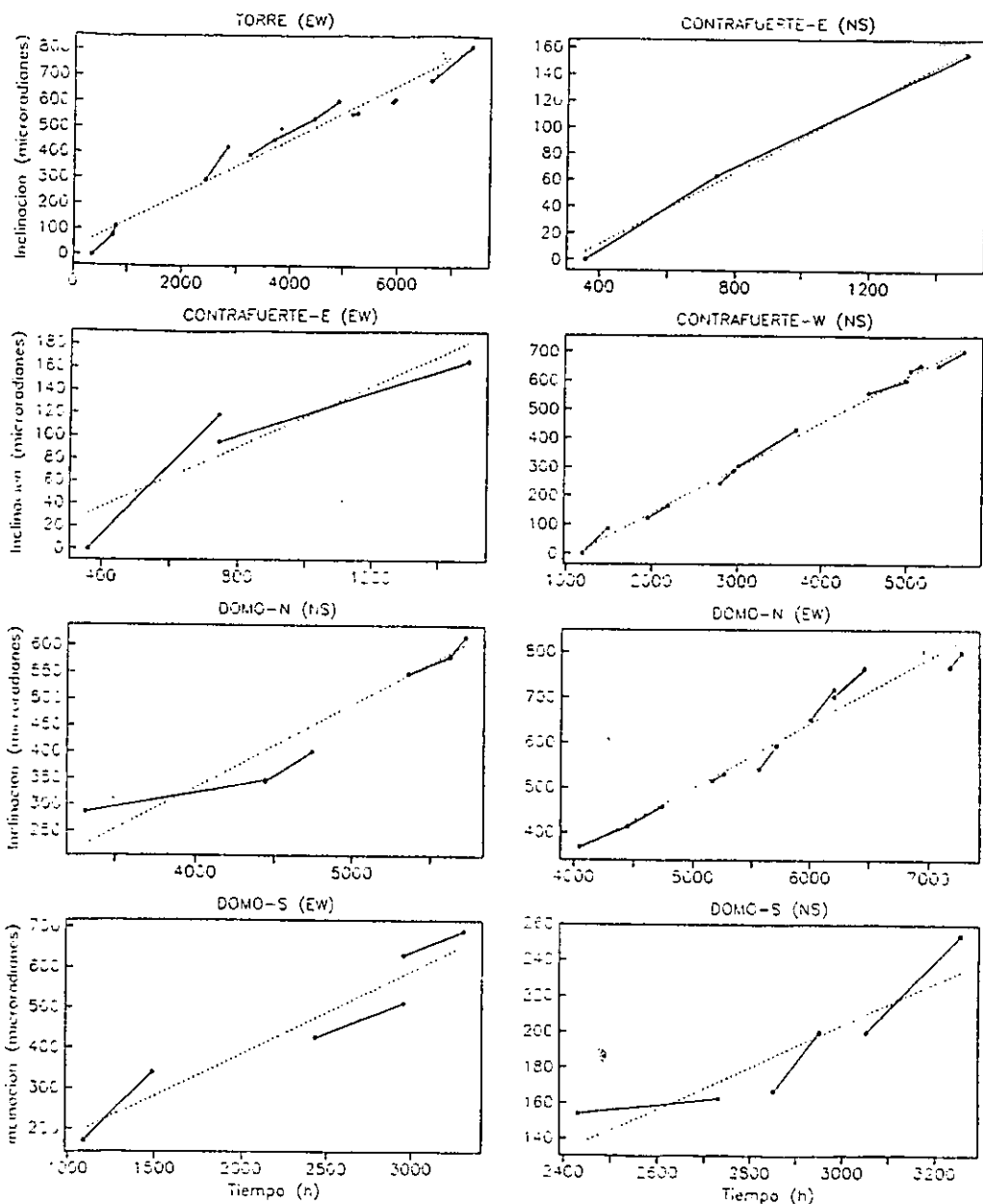


Figura 8.7 Variación de la inclinación con el tiempo. Las rectas continuas sugieren la tendencia registrada por los instrumentos en distintos periodos de información útil. Su pendiente representa la razón de inclinación con el tiempo. En cada caso la escala horizontal cubre solamente los periodos de información útil.

## 9. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un método que permite extraer información confiable de los parámetros elásticos del subsuelo, a partir de datos de inclinación del terreno, obtenidos mediante inclinómetros compactos de silicio. Estos equipos generan datos de alta precisión ante cargas estáticas conocidas colocadas a distancias predefinidas. Este método se complementa con la aplicación de un esquema de optimización global el cual emula el mecanismo de evolución de las especies en la naturaleza. La inversión estocástica utilizando algoritmos genéticos fue aplicada a datos de experimentos *in situ* de inclinación del terreno.

De esta forma, el objetivo de estos experimentos y del presente trabajo, fue mostrar la aplicabilidad del método de mediciones muy precisas de la inclinación del terreno con el fin de estimar un perfil a profundidad de la distribución de parámetros dinámicos del sitio de medición, los cuales están ligados con las propiedades elásticas de los materiales.

El resultado de combinar una aproximación utilizando datos de inclinación del terreno y la recientemente desarrollada técnica de optimización utilizando algoritmos genéticos, son alentadores. La técnica mostró ser eficaz y económica, y el esquema mostró ser robusto. Considerando los resultados de los experimentos en Grenoble, Francia y Texcoco, México, se puede establecer la gran precisión aportada por este esquema de inversión. Las comparaciones con resultados de otras técnicas de uso común, aplicadas a los dos sitios validan el procedimiento. En Grenoble la estructura del suelo obtenida a partir de la inversión de los modelos es muy similar a aquella propuesta por Pecker (1992) utilizando la técnica de cross-hole. Los factores ambientales indeseables, tales como el ruido urbano se eliminan fácilmente aplicando un filtro de alta frecuencia (filtro pasa-bajas) a la señal registrada. La diversidad requerida en el proceso de inversión con algoritmos genéticos está garantizada por una gran población de modelos y una pequeña probabilidad de mutación, la cual evita la pérdida de alguna información potencialmente útil, y la existencia de una población pequeña incapaz de una evolución posterior.

Así, con los datos de los experimentos de Grenoble y Texcoco, se planteó el problema inverso de identificar los modelos del terreno (modelos con estratos planos

homogéneos) la distribución de propiedades elásticas o dinámicas, produjeron las curvas de inclinación contra distancia observadas durante los experimentos cuando se les aplicó la carga a las distancias establecidas.

El problema anterior se planteó en un esquema de optimación global y se resolvió mediante la técnica de los algoritmos genéticos. En este trabajo se presentaron los principios en los cuales se basa esta técnica de inversión; se trata de una imitación de los mecanismos básicos de la evolución de los seres vivos: reproducción sexual, recombinación genética y mutación, que llevados al contexto de un algoritmo de cómputo permiten un muestreo rápido y eficaz del universo de modelos para llegar al modelo deseado de manera eficiente.

La mayor ventaja de los algoritmos genéticos es su habilidad de generar soluciones cercanas a la óptima rápidamente, no obstante algunos problemas señalados por Gallagher *et al.* (1991) tales como la convergencia prematura y la pérdida en el proceso de inversión, ocurrida cuando ningún modelo en la población es particularmente bueno, considerando lo anterior se debe tener especial cuidado para definir parámetros tales como tamaño de la población ( $Q$ ) y las probabilidades de cruza ( $P_c$ ) y las mutaciones ( $P_m$ ). A pesar de esto esta técnica es una herramienta muy útil que esta encontrando muchas aplicaciones a problemas de ingeniería geofísica.

Finalmente, los resultados obtenidos de la inversión con Algoritmos Genéticos, fueron comparados con aquellos arrojados por la aplicación de varias técnicas establecidas de uso común, con el fin de validar los resultados y establecer la utilidad de la técnica.

## REFERENCIAS

- Berg, E, (1990). Simple convergent Genetic Algorithm for inversion of multi-parameter data. 60 th Ann. Internat. Mtg., *Soc. Expl. Geophys.*, Expanded Abstract, 1126-1128.
- Blum, P A, M F Esnoul, R Gaulon, J L Rodríguez y R Verhille, (1992), Mesure in situ des propriétés mécaniques des terrains de surface sur le Synchrotron de Grenoble, Rapport preliminaire, Département de Sismologie, Institut de Phisique du Globe de Paris.
- Davis, L, (1990). *Genetic Algorithms and Simulated Annealing*, (ed) Pitman, London.
- Faccioli, E, (1969), *Introduction to theoretical seismology*, parte uno. International Center of Earthquake Engineering "Arturo Danusso" (ICEE). Milán.
- Fung Y C, (1965) *Foundations of Solid Mechanics*, Englewood Cliffs, N J, Prentice-Hall.
- Gallagher, K, Sambridge, M y Drijkoningen, G, (1991). Genetic Algorithms: an evolution from Monte Carlo Methods for strongly non-linear geophysical optimization problems. *Geophysycal Research Letters*, Vol. 18 No. 12, 2177-2180
- Gell-Mann, M, (1994). *The Quark and the Jaguar. Adventures in the Simple and the Complex*. W H Freeman and Company, New York.
- Goldberg, D E, (1989). Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. *Addison Wesley Publishing Company*.
- Holland, J H, (1975). Adaptation in natural and artificial system, *Univ. Michigan Press*.
- Holland, J H, (1992). Genetic Algorithms. *Scientific American*, 66-72.
- Jackson, D.D., (1979). The use of a priori data to resolve nonuniqueness in linear inversion, *Geophys. J. R. astr. Soc.*,

Kausel E y J M Roesset, (1981). Stiffnes Matrices for Layered Soil, *Bull. Seism. Soc. Am.* 71 No.6, 1743-1761.

Marsal, R J y R Graue (1969). *Volúmen Nabor Carrillo, el hundimiento de la ciudad de México y proyecto Texcoco*, VII congreso internacional de mecánica de suelos e ingeniería de cimentaciones.

Marsal, R J y M Mazari (1959). *El subsuelo de la ciudad de México*, Facultad de Ingeniería, UNAM, D. F..

Pecker, A, (1992). European Synchrotron Radiation Facility. Dynamic Soil Parameters, *Géodynamique et structure*, report 2.

Sambridge, M S y Drijkoningen, G, (1992). Genetic Algorithms in seismic waveform inversion. *Geophys. J. Int.* Vol. 109, 323-342.

Scales, J A, Smith, M L y Fischer, T L, (1991). Global optimization methods for highly nonlinear inverse problems. *J. Comp. Phys.* (submitted).

Stoffa, P L y Sen M K, (1991). Nonlinear multi-parameter optimization using Genetic Algorithms: Inversion of plane-waves seismograms. *Geophysics*, Vol 56 No. 11, 1794-1810.

Tamez, E, Santoyo, E y Ovando E, (1995). Procedimiento de subexcavación, capítulo VI en: *Catedral Metropolitana: corrección geométrica, informe técnico*, Ciudad de México. Asociación de amigos de la catedral Metropolitana de México, A. C., 201-286.



## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo forma parte de los resultados obtenidos del proyecto "Amplificación y atenuación sísmica en la Cuenca de México a partir de datos de Banda Ancha: Análisis Observacional y Modelado Matemático" realizado con el apoyo de Conacyt bajo el contrato No. 1825SP-T9507.

También quisiera agradecer a todas las personas que en alguna forma han tenido que ver con la realización, desarrollo y conclusión tanto de mis estudios como de este trabajo, y en forma especial al Sr. Jorge Manzano Ocaña, de quien en todo momento recibí palabras de aliento y confianza.

A la Universidad Nacional Autónoma de México

Al Centro de Investigación Sísmica, de la Fundación Javier Barros Sierra, así como a mi Director de Tesis M. en I. José Luis Rodríguez Zuñiga.