0/087 2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO 2 ej

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
DEPARTAMENTO DE PEDAGOGÍA

LA REPRESENTACIÓN Y EL RAZONAMIENTO VISUAL EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN PEDAGOGÍA

P R E S E N T A :

PATRICIA ESPERANZA BALDERAS CAÑAS

FILOSOFIA Y LETRAS FACULTAD DE

DIRECTOR DE TESIS: DR. ARMANDO MOISÉS MARTÍNEZ CRUZ

MÉXICO, D.F. 1998

269499

ÍNDICE

ÍNDICE Pág.

ÍNDICE Pág.

Resumen

Los objetivos principales de esta investigación fueron: estudiar el proceso de representación interna del alumno de bachillerato durante la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas (*derivada)*, respecto a las representaciones generadas en calculadoras avanzadas; y elaborar una propuesta didáctica de cálculo diferencial (nivel medio superior) basada en los hallazgos del estudio. Las cuestiones que guiaron la investigación fueron: ¿cómo es el proceso de representación mental de los conceptos involucrados en el aprendizaje de la derivada cuando el alumno realiza actividades con calculadoras avanzadas?, y ¿cuáles son las relaciones que establece el alumno entre dos o más tipos de representaciones de los conceptos involucrados en el aprendizaje de la derivada?

El estudio se hace desde la perspectiva propuesta por Goldin y Kaput (1992) sobre la integración cognitiva entre dos o más representaciones de los conceptos matemáticos. La investigación requirió condiciones naturales de desarrollo (aprendizaje escolar), de ahí que un paradigma naturalista se consideró pertinente para la construcción holística de esa realidad. El estudio tuvo una duración de tres años e incluye datos de siete alumnos.

Una hipótesis de trabajo consideró que al fomentar que los alumnos posean amplios repertorios de esquemas se promueve la integración entre las imágenes conceptuales de dos o más representaciones. Se estudiaron las representaciones gráficas, numéricas, algebráicas o simbólicas y la representación discursiva o texto. Las variables del estudio fueron las conexiones entre las cinco representaciones mostradas por los alumnos al resolver las actividades de aprendizaje, para las cuales se construyeron dos categorías denominadas *conexión bidimensional* y *conexión tridimensional*. El análisis de los datos se realizó usando el Modelo de Análisis Proposicional (Campos y Gaspar, 1995a), para identificar los conceptos y relaciones contenidos en las respuestas de los alumnos.

Algunos de los resultados mostraron que, en las respuestas, es difícil separar el contenido de la representación, y que la variación de la oscilación entre las representaciones en estudio está determinada por las relaciones entre los conceptos más que por los conceptos mismos. Se hallaron muy pocas conexiones de las representaciones simbólicas con las otras representaciones por lo cual la enseñanza debe poner énfasis y cuidado en el uso del lenguaje algebraico. Los resultados sugieren que para favorecer las conexiones entre las representaciones simbólicas y las demás representaciones, es necesario proporcionar en los materiales de aprendizaje los enlaces entre las representaciones que ayuden al estudiante a incorporar el uso de representaciones simbólicas para expresar ideas. Los datos sugirieron algunas metas de enseñanza, por ejemplo, lograr que el alumno se mueva con facilidad y de manera correcta entre las distintas representaciones de los conceptos, y hacer los esfuerzos necesarios para conducir la enseñanza en esa dirección, tomando en cuenta que es preciso dar tiempo a los alumnos de cálculo para que utilicen varias representaciones de los conceptos antes de trabajar los algoritmos en forma simbólica, a fin de que establezcan relaciones entre distintas representaciones de los conceptos, y tengan así la posibilidad de configurar sistemas de representación más poderosos para resolver problemas de variación.

Abstract

The main objectives of this investigation were to study high school students' processes of internal representation while teaching and learning mathematics (*derivative*), according to representations generated in graphing calculators and to design a didactical propossal for differential calculus (high school level) based on the findings of this research. Research questions of the study were: how is the mental representation process of related concepts to the derivative concept when graphing calculators are readily accesible?, and which relations does the student establish between different representations of concepts related to the derivative concept?

The framework of the study is based on cognitive integration between two or more representations of mathematical concepts (Goldin & Kaput, 1992). A naturalistic paradigm was considered appropriate for the holistic construction of the classroom reality. The study took place over a period of three years and involved seven students.

A working hyphotesis was that fostering a broad repertoire OF schemas in students promotes the integration between concept images of different representations. The study included graphic, numerical, algebraic or symbolic, table and text representations. The study variables were the connections among five representations which are shown by the students when they solve problems. Two categories were used bidimensional and tridimensional connections. The data analysis used the Propositional Analysis Model (Campos & Gaspar, 1995a) to identificate concepts and relations in the answers' students.

Some results showed how difficult is to separate the content from the representation in the answers, and how the behavior of oscilation among representations in the study are determinated by the relations among concepts more than the concepts themselves. Few connections of the symbolic representations with the other representations were found. Hence teaching must emphasize the correct use of algebraic language. Results suggests that in order to promote connections between symbolic representations and other representations, it is necessary to provide the students with materials that foster the use of symbolic representations to express ideas. The data suggested some teaching goals, for example, (1) to achieve that students progress smoothly and in the right direction towards the integration of different representations and (2) to make necessary efforts to lead teaching in that direction considering that calculus students need considerable time working with several representations of the concepts involved before working with symbolic algorithms in order to establish relationships between the concepts. This will help them to develop more powerful representation systems to solve variation problems.

CAPITULO 1 LA INVESTIGACIÓN

1.1 El Problema

El Plan de Estudios[1] del nivel medio superior de la Escuela Nacional Preparatoria, de la Universidad Nacional Autónoma de México, incluye un curso introductorio de cálculo diferencial e integral en la asignatura[2] de Matemáticas VI durante el tercer grado de ese ciclo escolar. Uno de los conceptos centrales de dicho curso es la derivada, misma que se discute con acercamientos formales que enfatizan más los aspectos procedimentales que los conceptuales. Además, tanto profesores como estudiantes realizan constantemente interpretaciones diversas que en algunos casos resultan inesperadas (Janvier, *et.al.*, s.f.).

La problemática que se aborda en este estudio se refiere a la enseñanza de la derivada en ese curso introductorio de cálculo diferencial e integral, y a su relación con los procesos mentales del alumno cuando la enseñanza y el aprendizaje hacen uso de diferentes representaciones de los conceptos matemáticos. Es decir, interesa saber cómo el que aprende utiliza las representaciones y cómo las organiza para producir una respuesta en circunstancias escolares.

Las *representaciones* a que nos referimos son las usuales, aquellas que se generan en medios como el cuaderno, el pizarrón, materiales impresos (libros y guías didácticas), o bien con recursos tecnológicos (calculadoras avanzadas y computadoras personales, etc.), ya sea por el alumno o por el profesor y que dan lugar a procesos cognitivos específicos relacionados fuertemente con el *razonamiento visual* (Zazkis, *et.al.*, 1996).

Con la expresión *razonamiento visual* describimos los aspectos del pensamiento matemático que están basados en, o pueden expresarse en términos de, imágenes visuales (Zimmermann, 1991, p. 127). Asumimos que el *razonamiento visual* involucra aspectos lógicos y que va mas allá de la simple percepción de los objetos (Zazkis, *et.al.*, *op.cit.*, p. 245) del mundo físico. El estudio del *razonamiento visual* se hace desde la perspectiva propuesta por Goldin y Kaput (1992), que se refiere a la integración cognitiva entre dos o mas representaciones de los conceptos (*id.*, p. 3). Se estudia el *razonamiento visual* asociado a las representaciones matemáticas simbólicas, gráficas y tabulares.

El proceso de *visualización* está fuertemente relacionado con el *razonamiento visual* en virtud de que al primero se le considera como el proceso por el cual se

[1] Modificaciones al Plan de Estudios de la Escuela Nacional Preparatoria, UNAM, 1996.
[2] Esta asignatura pertenece al Núcleo Básico de las áreas I, II, III y IV

produce o usa representaciones geométricas o gráficas de los conceptos, principios o problemas matemáticos *generados a mano*, en una computadora (Zazkis, *et.al.*, *op.cit.*) o mentalmente.

Lo anterior nos ubica en el problema de la *representación*, concepto que se discute en el contexto particular del aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Una *representación* se establece para algo, es decir, es un modelo de alguna o algunas cosas para las que representa. De modo sintético, hablaremos de una *representación* como el efecto de un mapeo representacional entre el *mundo real* y el modelo mental (Palmer, 1978, p. 276).

Cuatro aspectos de la problemática consisten en el análisis de la forma en que los recursos electrónicos y la tecnología (calculadoras avanzadas, *view screen* y proyector de acetatos) pueden utilizarse para representar ideas y procesos matemáticos; en determinar cómo se distinguen de la representación estática tradicional; en saber cuáles fuentes específicas de aprendizaje son eficientes (Goldin y Kaput, 1992) y qué tipo de imágenes conceptuales producen las representaciones relacionadas con el concepto de derivada que se consideran en este estudio.

Respecto al *aprendizaje* asumimos que se construye por las acciones del que aprende con los objetos de aprendizaje, es decir, que las representaciones mentales, consideradas como cierta clase de imágenes conceptuales se modelan por las acciones mentales (operaciones) y a su vez las imágenes se constriñen o limitan conforme a las acciones con los objetos (Piaget, citado por Thompson, 1994, p. 230).

1.2 Importancia del Estudio

El desarrollo tecnológico en materia de calculadoras avanzadas ha llegado a tal punto que sus recursos son equiparables con el software gráfico, de cálculo y programación de las computadoras personales. Su disponibilidad y fácil manejo dentro del aula ha planteado la necesidad de desarrollar metodologías de enseñanza derivadas de los resultados de investigación; que tomen en consideración tanto las posibilidades de representación como el potencial de exploración de las calculadoras avanzadas.

Además, del mismo modo en que cualquier modelo teórico científico incluye constructos y relaciones cuyo valor y viabilidad deben confirmarse o descartarse a través de la aplicación y la experimentación (Kuhn, 1971), con este estudio se pretende formular metas educativas en términos de las clases de sistemas de representación interna que se desea promover en el estudiante, en lugar de plantear metas de la educación matemática en términos de las clases de problemas que queremos que los alumnos sean capaces de resolver, relativas a los conceptos citados. Esos sistemas de representación interna se asocian normalmente con los sistemas externos en la manera en que los primeros se desarrollan.

Otro aspecto de la importancia del estudio es buscar elementos teóricos con los cuales se puedan analizar los procesos del *razonamiento visual* que se dan con el uso de *representaciones* durante el aprendizaje de la derivada en el nivel medio superior (bachillerato).

1.3 Limitaciones del Estudio

En esta investigación se reconoce que el estudio de las imágenes conceptuales estuvo sujeto al programa de la asignatura antes citado, no obstante que las representaciones gráficas, numéricas, simbólicas y tabulares del estudio tienen uso generalizado en los cursos de matemáticas. Sin embargo, el estudio no incluyó el análisis de las componentes de cada representación, ni las relaciones entre ellas, debido a que no era el objeto del estudio analizar las representaciones por sí mismas, sino la forma como los alumnos las relacionan en sus respuestas para tener evidencia de la integración cognitiva entre ellas.

La representación discursiva (texto) se estudió también porque en los instrumentos se requirieron explicaciones amplias, de ahí que el estudio de las imágenes mentales por medio del análisis de la correspondencia entre las cinco representaciones mencionadas dependió de los protocolos diseñados para el efecto y es posible que no se hayan documentado todas.

1.4 Cuestiones de Investigación

A partir de la problemática antes expuesta menciono a continuación las preguntas que guiaron el estudio sobre la representación y el razonamiento visual en las condiciones escolares previamente descritas.

> ¿Cómo es el proceso de representación mental de los conceptos involucrados en el aprendizaje de la derivada cuando el alumno realiza actividades de aprendizaje con tecnología?
>
> ¿Cuáles son algunas de las relaciones que el alumno establece entre dos o más tipos de representaciones de los conceptos relacionados con el aprendizaje de la derivada?
>
> ¿Cómo utiliza el alumno, sus representaciones internas de esos conceptos para resolver problemas de cambio?

1.5 Objetivos de la investigación

En primer lugar, la investigación se diseñó para estudiar el proceso de representación interna del alumno, que tiene lugar durante la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, apoyados ambos, en las representaciones generadas en calculadoras avanzadas y en condiciones escolares.

En forma colateral, elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo diferencial en el nivel medio superior, en donde los problemas que un alumno resuelva y las actividades para el salón de clase de matemáticas -en las cuales participa- se examinaron con base en las clases de representaciones con las que se buscó desarrollar el concepto de derivada.

1.6 El Contenido

La tesis está organizada en seis capítulos, este primero es una introducción, el segundo se dedica a la revisión de la literatura sobre *representaciones* y *razonamiento visual* que se consideró relevante a la investigación.

En el capítulo 3 se explican los aspectos metodológicos de la indagación naturalista, con formato de estudio de caso, que se diseñó para la investigación.

El análisis y discusión de los datos del estudio (capítulo 4), se hizo conforme a la organización conceptual (Campos Gaspar, 1995a) y representacional que cada participante provee en sus respuestas escritas y orales, a fin de documentar la integración cognitiva (Goldin y Kaput, 1992) entre las representaciones mentales de los conceptos considerados en este estudio.

En el capítulo 5 se plantea una propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo diferencial basada en las clases de representaciones con las que se quiere desarrollar el concepto *derivada*, producto del estudio.

Finalmente el capítulo 6 se dedica a las conclusiones.

CAPITULO 2 RAZONAMIENTO VISUAL Y REPRESENTACIÓN

INTRODUCCIÓN

Este estudio tiene la finalidad de indagar sobre el razonamiento visual desde el punto de vista de los procesos cognoscitivos que tienen lugar en el estudiante cuando la enseñanza de la matemática se vale de diversas representaciones respecto a un tópico fundamental, la derivada; en este capítulo se hace una revisión de la literatura relevante a la investigación (Lincoln y Guba, 1985).

El presente capítulo contiene cinco secciones, en la primera y segunda secciones se abordan aspectos psicológicos y problemas de representación en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en una situación específica, el aula con recursos computacionales.

En la tercera sección se hace una breve revisión de la génesis del concepto de derivada a la par del surgimiento de las diferentes representaciones empleadas en el desarrollo histórico de dicho concepto.

En la cuarta se revisan los aspectos sobre el aprendizaje de la derivada, en cuanto a los procesos psicológicos y al uso de las representaciones de la derivada, que hoy se utilizan, y que se generan en calculadoras avanzadas; organizados en cinco puntos. En el primero se establece la diferencia entre *conocimiento conceptual* y *conocimiento de procedimiento*; a continuación se discute la formación de algunos conceptos previos en el estudiante; después, el acceso al concepto de la derivada; en un cuarto punto se resumen algunos obstáculos epistemológicos y cognitivos. Y en el quinto se aborda lo relativo a la definición de la derivada.

La quinta sección de este capítulo está dedicada a la exposición de los recursos representacionales de computadoras y calculadoras avanzadas; al análisis de las capacidades gráficas, de cálculo y notación simbólica de dichos recursos. Así como una revisión y evaluación de las potencialidades de representación de las calculadoras avanzadas y finalmente la revisión de la literatura relativa al aprendizaje de la derivada con calculadoras avanzadas.

La estructura del marco teórico que guió este estudio se puede esquematizar como puede verse en la siguiente figura.

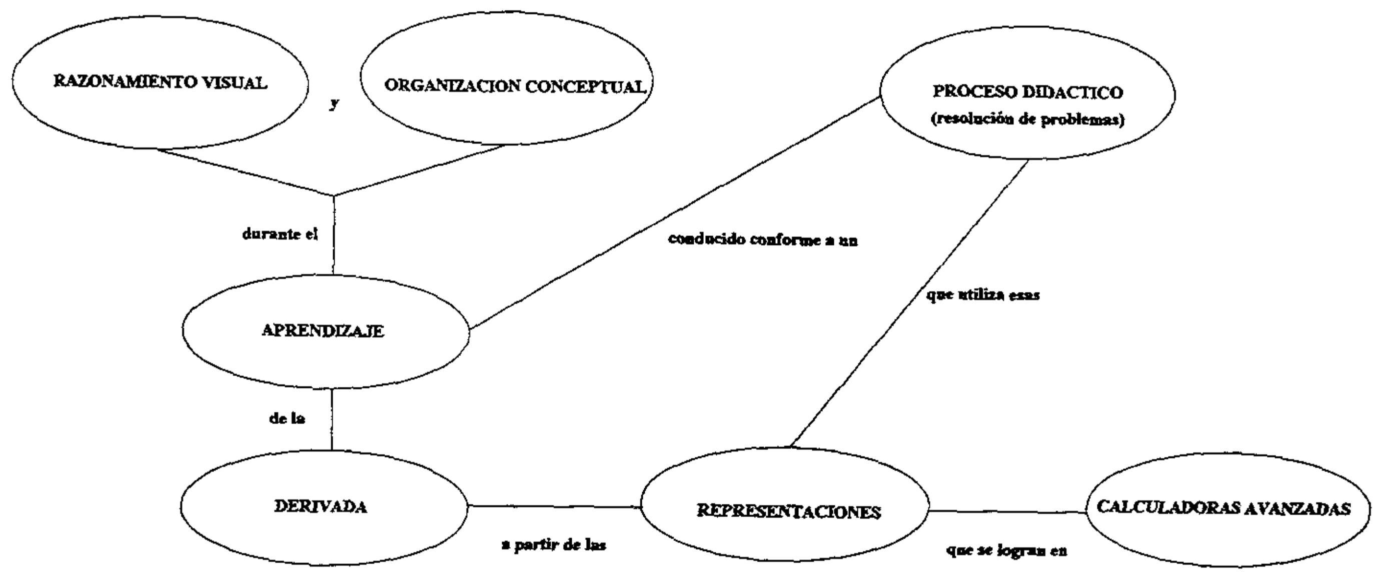


Figura 1.- Estudio del *razonamiento visual* con base en la organización conceptual asociado a un proceso didáctico. El caso del aprendizaje de la derivada mediante representaciones en calculadoras avanzadas

2.1 Cognición, Razonamiento Visual y Visualización en Educación Matemática

Nuestro aparato mental aunque limitado para procesar y trabajar con la capacidad de la memoria es muy efectivo para manejar ideas y procesos extremadamente complejos, tanto concretos como abstractos. Este poder parece que se basa en la interacción entre dos fuentes de organización de la experiencia: las estructuras inherentes a nuestro conocimiento a largo plazo y nuestra habilidad para explotar medios físicos de organizar la experiencia, que en el caso de la matemática, utilizamos los sistemas de notación, principalmente formas heredadas para externalizar la estructura conceptual pero que incluyen marcas personales e idiosincrásicas también (Kaput, 1992, p. 522).

Respecto a las relaciones entre el pensamiento y el lenguaje, nos preguntamos cómo damos sentido a nuestro flujo continuo de la experiencia por medio de las interacciones con ella. Para dar sentido a las interacciones entre los procesos que involucran estructuras mentales y procesos físicos, necesitamos un lenguaje, que contenga "registros" separados para cada experiencia, así como para las interacciones entre ellas. Después de todo, el proceso de dar sentido a nuestra experiencia en este caso la experiencia con nuevos medios y notaciones -requiere un lenguaje para su expresión que debemos adoptar o definir (Kaput, *ib.*).

Kaput destaca dos mundos (ver figura 2), uno para las operaciones mentales, el cual es siempre hipotético, y un segundo, el de las operaciones físicas, que frecuentemente es observable. Dichos mundos interactúan de manera un tanto cíclica. De las operaciones físicas a las mentales se distinguen dos eventos: una interpretación deliberada y activa "lectura" y uno menos activo, menos conscientemente controlado que es el proceso menos serialmente organizado y que consiste en tener fenómenos mentales evocados por el material físico.

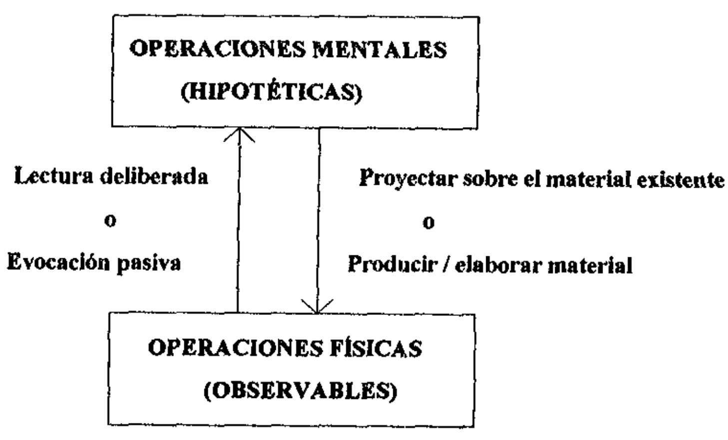


Figura 2.- Traducción de la Figura 21-1. Kaput, 1992, p. 523

En el sentido inverso, se dan dos procesos, el acto de proyectar la estructura mental sobre el material existente y el acto de producir nuevas estructuras, "escribir", el cual incluye la elaboración física de las estructuras existentes (*id.*).

Las proyecciones ocurren al leer y evocar, como parte de los procesos cíclicos subyacentes de emparejar los perceptos y los conceptos. Kaput distingue la proyección orientada hacia abajo de los actos interpretativos orientados hacia arriba sobre la base del objetivo del proceso, en donde toma su mayor ímpetu. En el caso orientado hacia abajo, el individuo posee contenido cognitivo que busca externalizar con el propósito de comunicación o prueba de viabilidad. El proceso orientado hacia arriba está basado en un intento para usar el material físico existente para apoyar nuestro pensamiento (Kaput, 1992, p. 523).

Las operaciones mentales antes referidas producen imágenes mentales o modelos mentales. Piaget distinguió tres tipos generales de imágenes, las distinciones que esbozó estuvieron basadas en cómo, dependiendo de la imagen, las acciones de razonamiento estaban asociadas con ella. Las imágenes iniciales formadas por el niño son un "acto internalizado de imitación... la respuesta motora requerida para hacer que la acción produzca un objeto... un esquema de acción" (Piaget, 1967, citado en Thompson, 1994, p. 231). Nosotros internalizamos las imágenes por la internalización de nuestras acciones. Para el propósito de este estudio haremos referencia a uno de los tres tipos de imágenes que Piaget distingue, a la que se forma por medio de acciones y razonamiento de relaciones cuantitativas (Piaget, 1967; citado por Thompson, *ib.*, p. 230). La categorización de Piaget fue originalmente formulada teniendo en cuenta la permanencia del objeto. Puede también proporcionarse "insight" (internalización) en una creación de una persona de objetos matemáticos (Dubinsky, 1991; Sfard, 1991; Thompson, 1985), cuando el desarrollo de la imaginación de una persona se detiene en este nivel inicial puede conducirse a entendimientos matemáticos que son patrones internalizados de acciones (Boyd, 1992, citado por Thompson, 1994, p. 230).

Una imagen evocada en un momento dado está conformada por las operaciones mentales que uno desempeña al pensar, y las operaciones aplicadas dentro de la imagen son probadas por la consistencia con el esquema al cual la operación forma parte. Al mismo tiempo que la imagen es modelada por las acciones, las operaciones están limitadas por la imagen, la imagen contiene vestigios de lo que ha sido operado, y de ahí que los resultados de operar deben ser consistentes con las transformaciones de la imagen si uno evita confundirse (Thompson, 1994, p. 130). La relación entre las imágenes y las operaciones se ilustra en la figura 3 (p. 9), conforme al esquema relacional basado en Thompson (1994), en el sentido de que las imágenes conceptuales (la *derivada* en este caso) de una persona se forman o modelan a partir de las operaciones mentales.

Reconocemos también que las imágenes mentales provienen de diversas fuentes, razón por la cual tienden a ser altamente idiosincrásicas; es decir, las interpretaciones asociadas a cada representación externa de un mismo concepto (*derivada*) difieren de un individuo a otro, son un rasgo característico de su estilo de pensamiento y de su estructura cognitiva.

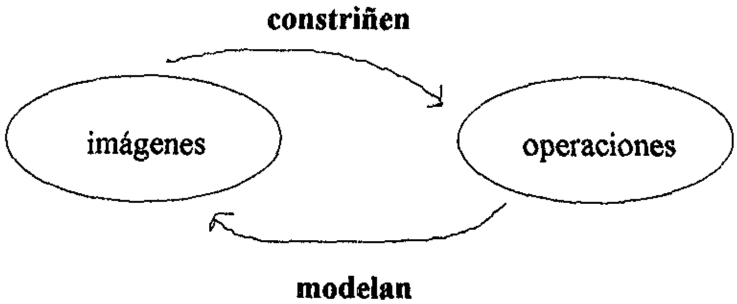


Figura 3.- Esquema relacional basado en Thompson (1994)

En la comparación que Thompson (1994) hace de las teorías de Kosslyn y Piaget de la formación de imágenes, dice que Kosslyn asienta que por medio de imágenes representamos aspectos de una realidad objetiva (teoría de la correspondencia), a diferencia de Piaget quien asume la no correspondencia, porque considera a los objetos como cosas construidas, no como cosas a ser representadas (Thompson, *op.cit.*, p. 231). La noción de Kosslyn de imagen se ve mucho más orientada a la visualización que la de Piaget.

Piaget estuvo más interesado con los conjuntos de acciones por los cuales la gente asimila objetos que con visualizar un objeto en su ausencia. Kosslyn se centra en las imágenes como los *productos* de la acción. En cambio, Piaget considera a las imágenes como residuos de acciones coordinadas, desempeñadas en un contexto con una intención, y sólo las primeras imágenes del niño están relacionadas con los objetos físicos (*id.*).

El tratamiento del problema que nos ocupa demanda una noción de imagen más enfocada a los productos que a las acciones, sin embargo no por ello dejamos de reconocer la construcción presente durante la asimilación de los objetos de aprendizaje y la dinámica de las operaciones mentales (*ib.*).

Por último, cabe mencionar que la idea de imagen conceptual desarrollada por Vinner (citado por Thompson, *op.cit.*, p. 231) se centra en la fusión de pinturas mentales en categorías correspondientes al vocabulario matemático convencional mientras que su noción de imagen se enfoca en las dinámicas de las operaciones mentales.

2.1.1 Procesos cognoscitivos

Pensamiento

Los progresos alcanzados en la década de los cincuentas en el análisis del pensamiento humano reflejan dos concepciones principales, generadas décadas atrás por Vygotsky y Piaget. El primero demostró que el proceso de análisis y generalización que estaba en la base del acto intelectual, dependía de las estructuras lógicas del lenguaje, y que el significado de las palabras formaba la base de las ideas desarrolladas en la niñez, etapa en la que el proceso de análisis y generalización está apoyado en la unificación sincrética de las impresiones que el niño recibe del mundo exterior para después convertirse en la unificación de las claves concretas de toda la situación práctica y finalmente, iniciar la aplicación de todas las categorías abstractas. Dicho análisis hizo posible la descripción de toda la complejidad de las estructuras (matrices) lógicas de las palabras, que son la herramienta fundamental de la formación de las ideas (Luria, p. 325) y que sirven para representar con suficiente claridad el amplio rango de alternativas proporcionado por las estructuras lógicas en las cuales están basadas en las etapas individuales del desarrollo.

El trabajo de Vygotsky hizo posible también el estudio de como los sistemas concretos, que reflejan el carácter situacional del pensamiento son reemplazados por matrices abstractas que incorporan toda una jerarquía en la comunidad de relaciones la cual constituye el aparato fundamental del pensamiento categorial.

La descripción de ese aparato fundamental de pensamiento permitió progresos decisivos en el análisis del pensamiento como un acto integral dinámico. La realización del significado de la palabra que es la herramienta fundamental del pensamiento, fue crucial para enfocar el problema básico, la descripción de la estructura psicológica del pensamiento como un todo. La investigación de este problema tuvo, de hecho, ocupada a toda una generación de psicólogos (*id.*) y recibió un poderoso ímpetu tanto del desarrollo de las computadoras, las cuales necesitaban una descripción más detallada de la estructura del pensamiento real a fin de que posibles y mejores modelos del pensamiento pudieran construirse.

Lohman (1989) señaló que para muchos estudiosos del área el año de 1956 se consideraba como un año pivote en el desarrollo de la ciencia cognitiva y a raíz del reporte de Newell y Simon (Newell, Shaw y Simon, 1958, citados en Luria, 1973, p. 326) sobre el éxito que tuvieron al desarrollar un programa de computadora para demostrar teoremas y del trabajo de Bruner, Goodnow y Austin sobre categorización en la Universidad de Harvard, iniciado en 1951 (Bruner, Goodnow y Austin, 1978), la revolución cognitiva alcanzó un gran momento en los sesentas y adquirió un gran influjo en los setentas.

La contribución más obvia de la computadora fue como una metáfora para la cognición humana y aunque en un principio, quienes la sostenían, señalaban las analogías entre el hardware y el sistema cognitivo humano, o bien la consideraban como la última de las metáforas mecánicas para la mente en la psicología, otros como Norman (1986, citado por Lohman, *op.cit.*) sostenían que la arquitectura de las computadoras digitales estaba fuertemente influenciada por las teorías tácitas de cognición humana de los diseñadores, no obstante que muchos cambiaron después dicha metáfora por un paralelismo entre las estructuras básicas en la computadora y las estructuras psicológicas.

Aún cuando reconocemos el valor limitado de una metáfora para el sistema cognitivo, cabe destacar el papel de la computadora como herramienta para desarrollar y probar teorías de la conexión entre el estímulo y respuesta (*ib..*), por ejemplo; aunque en esta investigación lo que está en estudio es el razonamiento visual asociado al uso de representaciones en la enseñanza de las matemáticas, en particular de la derivada.

El *pensamiento* entendido como actividad mental concreta, se estudia mediante la búsqueda de un sistema del mecanismo cerebral responsable de los componentes del *pensamiento* y de sus etapas. El origen del *pensamiento* es siempre la presencia de una tarea, por la cual el psicólogo entiende el problema que el sujeto debe resolver y que se le da bajo ciertas condiciones, las cuales debe investigar primero para descubrir la trayectoria que lleva a una solución adecuada. La siguiente etapa se sigue inmediatamente del descubrimiento de la tarea, no es un intento para responder arbitrariamente, sino de contener la respuesta impulsiva, investigar las condiciones del problema, analizar sus componentes, reconocer los aspectos más esenciales y sus correlaciones. Esta etapa de investigación preliminar de las condiciones del problema es vital y esencial en cualquier proceso concreto de *pensamiento* sin el cual ningún acto intelectual tendría lugar.

La tercera etapa en el proceso del *pensamiento* es la selección de una alternativa dentro de número de posibles y la creación de un plan general (esquema) para el desempeño de la tarea, hacia la decisión de cuáles alternativas son más probables de ser exitosas y al mismo tiempo el rechazo de todas las alternativas indadecuadas. Muchos psicólogos escriben esta fase del acto intelectual como la estrategia general del *pensamiento*, y la consideran como el componente esencial.

El conglomerado de significados (matrices) que participan en todas las formas de *pensamiento* hace estocástica la estructura del acto intelectual entendible y señala el hecho de que cada tarea origina una múltiple red de alternativas, de las cuales un sistema puede elegirse con base en el predominio de un sistema particular de asociaciones encubierto detrás del significado de las palabras.

El análisis de las condiciones del problema y la selección de un cierto sistema de muchas posibles alternativas, constituye la esencia psicológica del proceso de 'heurísticas', que está más relacionado con las estrategias y no está dentro de los alcances de este estudio.

La formación de un esquema general de solución del problema y la selección de los sistemas de alternativas adecuados lleva al sujeto a la cuarta fase del *pensamiento*, que consiste en escoger los métodos apropiados y la consideración de las operaciones que adecuará para ejecutar el esquema general de la solución. Dichas operaciones generalmente son los algoritmos más disponibles, como los lógicos, lingüísticos y numéricos, los cuales han evolucionado en el curso de la historia social y están bien adaptados para representar a un esquema o hipótesis. El proceso de usar las operaciones apropiadas es una etapa operativa del acto intelectual, más que una etapa creativa.

El proceso del *pensamiento* desde el punto de Vygotsky y Galperin (citados por Luria, 1973, p. 328), pasa a través de varias etapas, iniciando con una serie de acciones externas sucesivas (ensayos y errores), progresando hacia el lenguaje interno, en el cual las búsquedas necesarias se realizan y concluyen con la contracción y condensación de las búsquedas externas y la transición hacia el proceso específico interno. En este último, el sujeto es capaz de obtener la ayuda de los sistemas de lectura de códigos (lingüísticos y lógicos, en el *pensamiento* verbal discursivo; numéricos en la solución de problemas aritméticos) que ha aprendido. La existencia de estos códigos internos bien asimilados, forman la base operativa del acto mental y forman la base para el desempeño de las operaciones intelectuales que se requieran, y en el adulto, que ha dominado el uso de estos algoritmos, le proporcionan una sólida fundamentación para la etapa operativa del *pensamiento.*

El uso de esos algoritmos lleva al sujeto a la siguiente fase del acto intelectual, considerada por décadas como la última, pero que desde el punto de vista moderno, aún no lo es. Esta fase es la de la solución actual al problema o el descubrimiento de la respuesta a la cuestión involucrada en la tarea. Cabe señalar en este punto, que entre dos sujetos y la misma tarea no necesariamente se plantean las mismas cuestiones.

La última etapa (mostrada por los trabajos de Anakhin, 1955; 1963; 1968b; Miller, Pribram y Galanter, 1960; citados por Luria, 1973, p. 329) se sigue por la comparación de los resultados obtenidos con las condiciones originales de la tarea, si los resultados están en acuerdo con las condiciones originales del problema el acto intelectual se completa, si no es el caso, la búsqueda de la estrategia necesaria debe iniciarse y el proceso del *pensamiento* debe continuar hasta obtener una solución adecuada, que esté de acuerdo con las condiciones iniciales.

En resumen, las fases del proceso del *pensamiento* bajo la óptica de Luria se enlistan en el cuadro 1.

1. Presencia de una tarea concebida como un problema que debe resolverse , planteado como descubrir el camino para su solución , bajo las condiciones dadas.
2. Limitar las respuestas impulsivas para dar paso a la investigación de las condiciones del problema.
3. Seleccionar una o más alternativas dentro de las factibles, para crear un plan general (esquema) de solución, decidir cuál es la alternativa más apropiada y rechazar las inadecuadas.
4. Seleccionar los métodos apropiados y considerar cuáles operaciones serán las adecuadas para colocarlas en el esquema general de solución al momento de tener efecto.
5. Encontrar la solución del problema al descubrir la respuesta a la cuestión planteada en la tarea.
6. Comparar la respuesta con las condiciones iniciales dadas, y en caso de no haber coincidencia descubrir el camino a seguir para llegar a la solución que cumpla con las condiciones iniciales.

Cuadro 1.- Proceso del *pensamiento* (tomado de Luria, 1973).

Cognición

De manera general el problema de acceso al conocimiento desde un punto de vista cognoscitivo se puede analizar como un problema de estructuración del conocimiento socialmente adquirido, en nuestro caso, bajo condiciones escolares, y con relación a la estructura lógica disciplinaria, la matemática. Ausubel (1973) señala, refiriéndose a los problemas asociados a la estructura lógica del conocimiento, tanto en lo general como en las distintas materias que:

> ...No debería olvidarse, sin embargo, que además de los cuerpos de conocimiento organizados que representan la sabiduría colectiva y registrada de reconocidos eruditos en campos particulares de investigación, existen estructuras psicológicas de conocimiento correspondientes, que están representadas por la organización de las ideas y la información internalizadas en las mentes de los estudiantes individuales, que poseen grados variables de madurez cognoscitiva y avezamiento en la materia, en estas disciplinas. ...[Ausubel traza] una distinción entre la organización formal del contenido de materia de una disciplina dada, en tanto está expuesta mediante enunciados autorizados en libros de texto y monografías generalmente aceptados, y la representación organizada e internalizada de este conocimiento en la estructura de la memoria de individuos particulares, especialmente estudiantes. (p. 212)

A fin de comprender el acceso al conocimiento nos referimos a la relación entre la estructura psicológica del que aprende y la estructura lógica del conocimiento que es objeto de aprendizaje, mediado por un proceso didáctico, ya sea el discurso docente o la realización de tareas en pequeños grupos coordinadas por materiales didácticos, diseñados estos últimos, para el uso extensivo de los recursos de calculadoras avanzadas: programación, graficación, tabulación, operaciones aritméticas, recorrido a lo largo de una curva (TRACE), acercamiento (ZOOM), etc.

Esa relación permanece oculta para el investigador educativo y el docente común. Además, de que "...[e]l significado fenomenológico efectivo es, ..., una experiencia psicológica idiosincrásica..." (Ausubel, *ib.*, p. 213). De modo que el contenido de una asignatura puede tener en el mejor de los casos un significado lógico o potencial. Pero este

> ...significado potencial se convierte en significado efectivo cuando un individuo en *particular*, empleando un instrumental de aprendizaje significativo, incorpora una proposición o una unidad de información potencialmente significativa a su estructura cognoscitiva. (*id.*)

La manera como se da dicha incorporación resulta por demás interesante para los fines del estudio debido a que provee un modelo que permite explicar la apropiación del conocimiento.

El concepto de aprendizaje subyacente a las consideraciones anteriores estriba en la construcción y organización de categorías en un espacio específico, el aula, como causa y producto de varios procesos, entre otros, el proceso didáctico que

> ...es lo que sucede realmente en el aula, con o sin planeación didáctica de por medio, es la construcción social de relaciones de interacción en el aula, que producen formas y niveles de enseñanza y de aprendizaje. Como proceso real, es un objeto de estudio, mediante el cual pueden estudiarse las condiciones y formas de interacción que conforman los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula: las acciones, las relaciones que las estructuran y los procesos que generan...(Campos y Gaspar, 1995a, 4)

Conocimiento conceptual y de procedimiento

El *conocimiento conceptual* entendido como "...una dimensión de la representación de la realidad... permite a la sociedad y a un individuo en ella, darse cuenta de su medio y de sí mismo." (Campos y Gaspar, 1995a, 3, trad.). Es un proceso de generación de significados y organización de la realidad, construido cognitivamente de la percepción, considerada esta última como "... una componente de la actividad cognitiva que organiza los datos sensoriales provenientes del medio;...el conocimiento nunca es generado directamente de la experiencia sensorial, sino de la interacción entre la actividad cognitiva del individuo y la realidad (Piaget, 1970; citado por Campos y Gaspar, *id.*).

El *conocimiento conceptual* tiene que ver con redes conectadas, en el sentido de que es un conocimiento rico en relaciones , que no se almacena como piezas aisladas de información, que es parte de una red conceptual (Hiebert y Lefevre, 1986; Hiebert y Carpenter, 1992, p. 78).

En virtud de que el *conocimiento conceptual* es rico en relaciones (Even, 1990, 526, trad.), el aprendizaje de un nuevo concepto o relación "...implica la adición de un nodo o enlace a la estructura cognitiva existente, haciendo de ahí el total más estable que antes." (Even, *id.*). El significado que se genera con las relaciones entre las unidades de conocimiento son reconocidas o creadas (Even, *id.*), lo que da un carácter dinámico al proceso de conocer. La construcción de los enlaces en el aprendizaje conceptual puede darse en dos niveles, es decir,

> ...el aprendizaje conceptual involucra construcción de relaciones o conexiones entre dos piezas de información. ...[E]sas conexiones pueden construirse a un nivel primario o a uno reflexivo. A nivel primario, el plano de abstracción es importante para la construcción de una conexión, como la nueva información debe ser de igual o menor nivel de abstracción que la información previa a la cual la nueva se pretende conectar. A nivel reflexivo, el aprendizaje conceptual ocurre cuando registros similares de piezas diferentes de información son reconocidos y la conexión se hace entre esos registros similares. (Bebout, 1987, 368, trad.)

El *conocimiento procedural* (o procedimental) se entiende como secuencia de acciones. Las conexiones mínimas necesarias para crear representaciones internas de un procedimiento son conexiones entre acciones secuenciadas en el procedimiento (*id.*, p. 78), como por ejemplo los algoritmos aritméticos usuales, la regla de los cuatro pasos para obtener la derivada de una función elemental.

Ambos tipos de conocimientos son indispensables para ser expertos en matemáticas. Los procedimientos permiten completar tareas matemáticas de manera eficiente, pero también se requiere *conocimiento conceptual* porque contribuye a una pericia en matemáticas por medio de las relaciones con el *conocimiento procedural.* Para Hiebert y Carpenter las relaciones entre los conocimientos conceptual y procedural dependen de las conexiones construidas por el que aprende entre sus representaciones.

En cuanto al *concepto* coincidimos con Sfard (1991) en que un *concepto matemático* "...(algunas veces reemplazado por 'noción') se mencionará cuando una idea matemática está empleada en su forma 'oficial' - como un constructo teórico dentro 'del universo formal del conocimiento ideal'[nivel disciplinario]..." (Sfard, *ib...*, 3, trad.). Pero en el nivel psicológico, nivel individual, nos referiremos a una *concepción* como "...la agrupación completa de representaciones y asociaciones evocadas por el concepto -la contraparte del concepto en lo interno, subjetivo 'universo del conocimiento humano' ...." (*id.*)

Tendremos presente que los constructos matemáticos a diferencia de los objetos materiales son "...totalmente inaccesibles a nuestros sentidos - ellos sólo pueden ser vistos con los ojos de *nuestras mentes.*" (*id.*). Y a pesar de que dibujamos una recta y anotamos por medio de signos (símbolos) su pendiente, deberemos ser "... muy cuidadosos en enfatizar que el signo en el papel es una entre muchas representaciones posibles de alguna entidad abstracta, *la cual por sí misma* puede no ser vista ni *tocada.*" (*ídem.*)

Respecto a las concepciones distinguiremos entre las estructurales y las operacionales conforme a la clasificación propuesta por Sfard,

> ... el análisis cuidadoso de definiciones en libros de texto mostrará que tratan nociones matemáticas como sí se refirieran a *algunos objetos abstractos* [,] no es a menudo la única posibilidad [de definir]. A pesar de que esta clase de concepción, la cual desde ahora será llamada *estructural*, se ve que prevalece en *las matemáticas modernas*, hay definiciones matemáticas aceptadas que revelan un enfoque algo diferente. [Por ejemplo] [la] [f]unción puede definirse no sólo como un conjunto de pares ordenados, *sino también como un cierto* proceso computacional o como un "método para obtener un sistema de otro" (Skemp, 1971, citado por Sfard, *op.cit.*, 4).

Para ilustrar lo anterior consideremos el concepto *derivada* contenido en la mayoría de los libros de texto de cálculo diferencial, por ejemplo una concepción operacional es:

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a. La **derivada de f en a**, denotada por $f'(a)$ está dada por $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ si este límite existe. (Swokowski, 1987, 94)

Aunque puede encontrarse una concepción más estructural como la siguiente:

Si f es una función, entonces f' (léase "f prima"), la **derivada** de f, es una función con regla de correspondencia $f'(x_0) = \lim_{x_0}\frac{f-f(x_0)}{I-x_0}$ que tiene como dominio el conjunto de todos los números del dominio de f para los que existe tal límite. (Haaser. *et.al.*, 1970, 375)

Una de las principales diferencias entre el aprendizaje de procedimiento o procedural y el conceptual según Hiebert y Lefevre " ... se refiere al tipo o contexto de la información procesada durante el aprendizaje procedural, específicamente la que existe entre símbolos y sintaxis matemáticos y reglas y estrategias matemáticas." (Hiebert y Lefevre, 1986; citado por Bebout, *op.cit.*, trad.)

El *conocimiento conceptual* debe ser aprendido de manera significativa, en cambio el *conocimiento procedural* se hace en base al lenguaje formal de la matemática y los algoritmos para completar tareas matemáticas, de ahí que puede aprenderse con o sin significado (Even, 1990, 526, trad.)

Finalmente, además del *conocimiento procedural* y conceptual tenemos el conocer en matemáticas, es decir "[e]l conocimiento de una pieza específica de matemáticas incluye más que el *conocimiento conceptual* y procedural. Incluye también conocimiento acerca de la naturaleza de las matemáticas. Esto es un conocimiento más general acerca de la disciplina que guía la construcción y uso del *conocimiento conceptual* y procedural. Incluye maneras, significados y procesos por los cuales las verdades son establecidas así como la relativa centralidad de las distintas ideas." (Even, *ib...*, 527, trad.)

Razonamiento visual

La percepción en sí misma es una componente de la actividad cognitiva que organiza la información sensorial proveniente del entorno, de modo que el conocimiento no se genera directamente de la experiencia sensorial, sino de la interacción entre la actividad cognitiva del individuo y la realidad (Piaget, 1970; citado por Campos y Gaspar, 1995a, p. 3).

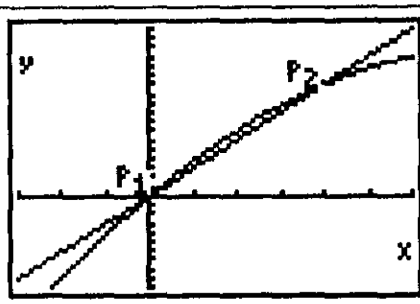
Desde el particular punto de vista del enfoque de los procesos de la información, el procesamiento de información visual se refiere al proceso por el cual los seres humanos reciben información visual y ajustan su conducta sobre la base de esa información. Entre el tiempo en que ingresa la información y la persona responde, de alguna manera la información se interpreta, identifica y compara con la información contenida en la memoria (Spoehr & Lehmkuhle, 1982, p. 2).

El procesamiento de información visual es en sí una percepción a través del sentido de la vista, considerada la percepción como una componente de la actividad cognitiva que organiza los datos sensoriales provenientes del exterior (Campos y Gaspar, 1995a, p.3). El conocimiento correspondiente resulta de la interacción entre la actividad cognitiva del individuo y la realidad (Piaget, 1970, citado por Campos y Gaspar, *id.*).

Con el estudio del procesamiento de información visual queremos responder a cuestiones sobre cómo un estudiante usa la información aprendida para interpretar, identificar y comparar información visual contenida en materiales didácticos o que observa en las pantallas de calculadoras avanzadas, en condiciones escolares usuales a fin de producir respuestas a preguntas que se le plantean.

Los sistemas de procesamiento visual transforman los estímulos visuales iniciales en impulsos neuronales que nos permiten detectar y recordar algunos hechos acerca de la información que se recibe. También nos permiten reducir información, es decir, no recordamos con detalle todas las experiencias provenientes de los sentidos; la reducción es probablemente una función necesaria para el sistema de procesamiento visual. Sin embargo, también produce información cuando completa detalles sobre la base de la información almacenada en la memoria. Además de almacenar información y de recuperarla, el proceso nos permite preservar información, recordar experiencias y cosas, y usar los que sabemos cuando lo necesitemos.

El procesamiento de proposiciones es más complicado, después de identificar segmentos individuales, debemos reconocer letras, pero no sólo con reconocer las letras comprendemos la proposición. Debemos combinar las letras en cierto orden para determinar las palabras y debemos combinar los significados de las palabras, usar las reglas gramaticales almacenadas en la memoria, comprender después lo que significa la proposición. Por ejemplo, consideremos el siguiente pasaje de la guía didáctica utilizada en este estudio, que incluye información proposicional e información gráfica.



Gráfica 5

El cambio $x_2 - x_1$ en la variable independiente es de una unidad, es decir, $x_2 - x_1 = 1$ (una hora), y el valor final x_2 se obtiene del valor inicial x_1 aumentando una unidad, $x_2 = x_1 + 1$.

Cuadro 2.- Extracto de la guía didáctica, anexo 1, p. 14

Es posible que el estudiante proceda en forma secuenciada al reconocimiento de la información contenida en la gráfica y posteriormente a la información proposicional. O bien, en forma simultánea, haciendo la comparación y completando la información previamente aprendida (relaciones entre coordenadas de los puntos y escala en el eje horizontal), para responder al ítem:

1.7.1 Proporciona un ejemplo ... y represéntalo... gráficamente,... (anexo 1, p. 14)

El *razonamiento visual* visto como un proceso cognoscitivo produce de alguna manera una cierta estructura conceptual, cuya organización permite al sujeto expresarse o resolver un problema de una cierta manera. En particular, la respuesta escrita o verbal refleja en sí misma una parte del conocimiento de un sujeto en torno a uno o varios conceptos.

Finalmente, coincidimos con Zimmerman (1991, p. 127) en que el *pensamiento* o *razonamiento visual* (visual thinking) describe los aspectos del *pensamiento* matemático que están basados o pueden expresarse por imágenes visuales, pero creemos que si estas imágenes visuales son el producto del razonamiento geométrico, como entidades mentales idealizadas, entonces están completamente subordinadas a limitaciones axiomáticas (Fischbein, 1994, p. 242). Del mismo modo que una figura geométrica es un objeto mental que no es reducible sólo a conceptos usuales o imágenes, tampoco es sólo un concepto porque es también una representación espacial. Un concepto es una idea que estrictamente hablando, posee cualidades figurales, así una figura geométrica no es sólo una imagen, es al mismo tiempo figura y concepto, la discusión anterior intenta explicar que la presencia de representaciones gráficas y tabulares, ya sea de manera externa o interna son prueba del *razonamiento visual* y conceptual.

2.1.2 Organización conceptual y razonamiento visual

El conocimiento adquiere alguna organización como resultado de la actividad cognitiva (Campos y Gaspar, 1995a, 6), sin importar el nivel, rango o enfoque de la actividad; de modo que las diversas organizaciones se les puede concebir como "...complejas constelaciones de unidades de información (ítems temáticos significativos, o conceptos) junto con una variedad de enlaces lógicos que conectan a los conceptos de un modo particular." (Campos y Gaspar, *ib.*, 6, trad.)

Una organización conceptual, en un momento dado, puede estudiarse conforme al método analítico propuesto por Campos y Gaspar (*id.*, 8, trad.) al que denominan Modelo de Análisis Proposicional. Dicho modelo fue construido para "...identificar las ideas principales en una organización conceptual y la organización misma, de acuerdo a sus contenidos conceptual y lógico." (*id.*, trad.)[3].

En esta investigación interesa analizar la organización conceptual en relación al uso de representaciones generadas en calculadoras avanzadas, para lo cual nos referiremos a un tipo de proceso mental denominado *razonamiento visual*, que Moses (1982) discute en un contexto de resolución de problemas.

En el proceso de resolución de problemas,

> [a]parentemente, tres enlaces o etapas pueden trazarse ... La solución de cualquier problema parece que comienza con la adquisición de los hechos iniciales, información inicial acerca del problema, con reflexión cuidadosa, intentos para entender, y dominio. Entonces viene la solución propia, como una etapa de procesamiento o transformación de los hechos obtenidos con el propósito de obtener el resultado deseado. Y finalmente, ambos el proceso y el resultado de la solución dejan algún rastro en la memoria, algo que enriquece la experiencia de una persona. (Krutetskii, 1976; citado por Moses, *op.cit.*, 61, trad.)

Que en otras palabras significa "...entender el problema, planear un ataque [estrategia] y llevar a cabo ese plan, y finalmente mirar hacia atrás y asimilar el conocimiento ganado." (Moses, *ib.*, 61, trad.)

La conducta del estudiante al resolver problemas es muy individualizada, esto es, "...[c]ada estudiante enfoca una situación problémica dada con su recursos, estructura cognitiva, inclinaciones y estilos cognitivos." (Moses, *id.*), por lo que Moses se pregunta si hay alguna técnica general, una manera de pensar, que induzca un mejor desempeño al resolver problemas, que aliente a los estudiantes a no sentirse frustados y continuar. Propone a la *visualización* como una manera de pensar "...y no solamente como una estrategia de resolución de problemas" (*id.*, 63, trad.), mediante la cual los estudiantes pueden entender mejor un problema una vez que obtengan una imagen de la situación, al dibujar la situación o construir un modelo concreto, en cualquier caso habrán traducido el problema por medio de algún vehículo visual a su propia perspectiva.

En el pensamiento visual se involucran diversas acciones como sentir, imaginar y dibujar; o también "...soñar, trazar diagramas, esculpir, manipular objetos concretos, y cerrando nuestros ojos manipular objetos mentalmente." (*id.*, trad.). Según Moses, cualquier persona realiza pensamiento visual en algún grado por lo que "... el desempeño creativo de resolución de problemas puede mejorarse alentando más el pensamiento visual en las actividades del salón de clases." (*id*, trad.)

---

[3] Para una revisión más amplia del *Modelo de Análisis Proposicional* consúltese Campos y Gaspar (1995a y 1995b).

El papel que juegan los diagramas, esquemas, gráficas o cualquier otra representación durante la resolución de problemas puede explicarse como lo hacen Zimmermann y Cunningham respecto a la visualización matemática.

> ..., en la visualización matemática estamos interesados precisamente en la habilidad del estudiante para dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel, o en algunos casos, con una computadora) para representar un concepto o problema matemático y usar el diagrama para lograr el entendimiento, y como una ayuda en la resolución de problemas. En matemáticas, la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio hacia un fin, el cual es el entendimiento. Nótese que, típicamente, uno no habla acerca de visualizando un *diagrama* sino de visualizando un *concepto* o un *problema*. Visualizar un diagrama significa simplemente formar una imagen mental del diagrama, pero visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o imagen visual. La visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y usar efectivamente tales imágenes para el descubrimiento y entendimiento matemático. (Zimmermann y Cunningham, 1991, 3, trad.)

2.1.3 Visualización

En las matemáticas el proceso de visualizar es muy frecuente porque es una disciplina que se refiere a la objetivación y representación abstracta de hechos de la realidad, y muchos de ellos provienen en mayor o menor medida de experiencias visuales, las cuales van desde las más primitivas como el movimiento de una mano hasta la concepción de una tangente a un círculo o a una curva.

Así por ejemplo, Presmeg (1986) encontró en sus investigaciones cinco tipos de imaginería visual: concreta o pictórica, de patrones, relativa a fórmulas, cinestética y dinámica. La primera se refiere a pinturas mentales; la segunda a relaciones contenidas en un esquema con referencias visuales-espaciales; la tercera a la evocación de relaciones; la cuarta incluye la imaginación de movimientos corporales y la quinta, al movimiento (imaginarse la producción de una sustancia en una reacción química, o imaginarse la trayectoria del agua al salir de una manguera).

El proceso de visualización tiene un importante lugar en el estudio del aprendizaje de los conceptos como la derivada y otros relacionados con ella (cambio, razón de cambio, límite).

Una primera cuestión que se puede plantear en relación al aprendizaje y el proceso de visualización es sobre qué podemos aprender a partir de un proceso de visualización. Presmeg (1986) establece que un método visual de solución es uno que involucra imaginación visual, con o sin la presencia de un diagrama, como una parte esencial del método de solución, aún si también se emplean métodos

algebraicos (o analíticos).
El grado de visualización está en función del número de procedimientos visuales presentes en la solución de un problema (Moses, 1977, citada por Bishop, 1989, 11).

Krutestkii (1976) se refería al estudiante "tipo geométrico" como el que sentía la necesidad de interpretar visualmente una expresión de una relación abstracta matemática, es claro que este enfoque destaca la preferencia de un alumno por una manera de pensar.

Para Suwarsono (1982; citado por Bishop, 1989, p. 10) el grado de visualización es alto si la respuesta correcta se obtiene y se razona basándose en un diagrama, dibujado por el alumno o por alguna imagen visual construida por el mismo.

La cualidad particular de la visualización que nos interesa en este estudio es la habilidad del estudiante para dibujar un diagrama (con papel y lápiz o con una computadora), para representar un concepto matemático o un problema y usarlo para adquirir entendimiento o como ayuda para resolver un problema (Zimmermann, 1991, p. 3). La visualización en matemáticas se convierte así en un medio y un fin hacia el entendimiento o la solución de un problema.

Diremos que visualizamos un problema cuando entendemos el problema en términos de un diagrama o imagen visual presente, ya sea físicamente visible o mentalmente.

Además de los significados antes expuestos para el término visualización, consideraremos que un alumno realiza un acto de visualización cuando por ejemplo etiqueta puntos en el plano cartesiano o localiza puntos en el mismo física o mentalmente; y que el tomar la decisión de escoger puntos y decidir cuales considera, es un acto analítico en el sentido expresado por Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996).

2.2 Representaciones en la Educación Matemática

El uso de representaciones en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática obliga a una reflexión sobre las dificultades para crearlas o interpretarlas tanto para el que aprende como para el docente. Compartimos así la suposición que Janvier y asociados (s.f.) hacen a este respecto "[n]o podemos asumir que los estudiantes puedan estar listos para crear o interpretar representaciones. Ellos necesitan instrucción sobre cómo usarlas."(79, trad.); y el objetivo de "...mostrar como la investigación , con su marco teórico y resultados, pueden ayudar a los profesores a (a) conocer mejor el papel de las representaciones en el razonamiento de sus estudiantes, (b) estar enterados de la dificultades involucradas, y (c) planear y conducir su enseñanza más eficientemente." (ídem., 81, trad.)

Desde el punto de vista cognitivo el problema de definir qué es una representación es algo muy complejo y podemos encontrar desde discusiones enfocadas más a la naturaleza del problema de representación cognitiva (Palmer, 1978) hasta los problemas discutidos por diversos investigadores que se centran en la problemática educativa (Janvier, 1987; Dubinsky, 1991, etc.). Nuestra discusión del concepto de *representación* lo ubicaremos en el contexto específico del aula, es decir, en situaciones de aprendizaje escolar de la matemática.

2.2.1 Representaciones

En primer lugar reconocemos de acuerdo con Palmer (*op.cit.*, p. 262) la existencia de dos mundos relacionados pero separados funcionalmente: el mundo representado (M_1) y el mundo representante (M_2). El papel del mundo representante es reflejar de cierto modo, algunos aspectos del mundo representado. Pero no todos los aspectos del mundo representado necesitan ser modelados y no todos los aspectos del mundo representante necesitan modelar algún aspecto del mundo representado. Dicho de manera funcional, el mundo representante representa algunos aspectos del mundo representado y el mundo representado es modelado por algunos aspectos del mundo representante (ver figura 4).

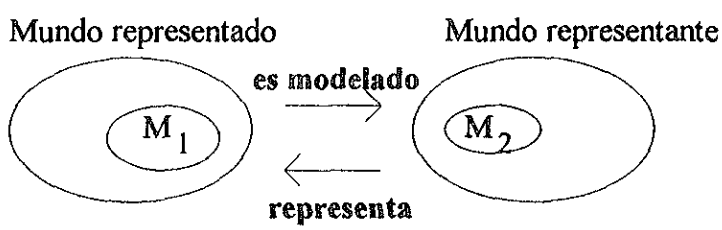


Figura 4.- Mapeo representacional

Si un mundo representa a otro, entonces deben existir algunos aspectos que se *corresponden* en esa relación funcional. Se ha tratado al mundo representante como una "cosa" que se establece por un mundo representado que también es una "cosa", y esto ha sido así debido a las relaciones entre ambos mundos. Esas relaciones reflejan una componente operacional de la representación. Es decir, están definidas de manera operacional. El papel del mundo representante es preservar la información acerca del mundo representado, que interesa en un caso específico, lo que da lugar a la existencia de relaciones correspondientes entre ambos mundos.

La naturaleza de una representación es tal que existe una correspondencia (mapeo) entre los objetos en el mundo representado a los objetos del mundo representante. Es decir, si una relación particular se cumple para dos objetos del mundo representado, entonces existe y se cumple la correspondiente relación entre los correspondientes objetos del mundo representante..

Las formas no cognitivas de representación, externas, ya sean naturales o artificiales, que se emplean comúnmente en la enseñanza y en los textos de matemáticas las denominaremos en forma genérica representaciones externas; en ellas incluimos a objetos físicos, modelos físicos, signos, gráficos, tablas, expresiones matemáticas, etc.

Para caracterizar completamente las representaciones consideradas en este estudio, debemos establecer: (1) ¿cuál es el mundo representado?, (2) ¿cuál es el mundo representante?, (3) ¿qué aspectos del mundo representado son modelados?, 4) ¿qué aspectos del mundo representante están modelando?, y (5) ¿cuáles son las correspondencias entre ambos mundos? (Palmer, 1978, p.262).

Por ejemplo un mundo representado es la cantidad de sustancia química producida en una reacción química y uno de los mundos representantes es una tabla de dos columnas (ver en la siguiente página), la cual modela los aspectos tiempo transcurrido y cantidad de sustancia producida del mundo representado. Para los objetos tiempo y cantidad de sustancia en la tabla (mundo representante) hay una relación entre ellos descrita por el conjunto de pares proporcionados en las dos columnas de la tabla y se corresponden con los objetos tiempo y cantidad de sustancia producida en la reacción química (mundo representado), la relación en este último es preservada en el mundo representante.

tiempo (x) hrs.	cantidad (y) grs.
0	0
0.25	3.75
0.50	7.00
0.75	9.75
1.00	12.00
1.25	13.75
1.50	15.00
1.75	15.75
2.00	16.00
2.25	15.75
2.50	15.00
2.75	13.75
3.00	12.00
3.25	9.75
3.50	7.00
3.75	3.75
4.00	0

Tabla 1 del Anexo 1

No todos los aspectos del mundo representado están representados en la tabla, por ejemplo el tipo y la cantidad de sustancias participantes en la reacción, lo cual si podría estar presente en otro tipo de representación más apropiada para tal efecto (ver cinética química, Castellan, 1987, p. 841). Estos dos últimos aspectos no son esenciales para el análisis del problema que se plantea, sin embargo la tabla contiene la información suficiente para iniciar la discusión de la problemática propuesta. De ese modo la correspondencia entre ambos mundos se basa en las relaciones posibles que se establecen. Pero esta correspondencia se conforma de manera particular de acuerdo al individuo (idiosincrásicamente, Janvier, *et.al.*, s.f.) y a las reglas o procesos permitidos (socialmente) y que se transmiten durante los procesos didácticos anteriores. La tabla es una representación de la reacción química porque algunas de las relaciones para los objetos de la tabla, preservan las relaciones para los correspondientes objetos de la reacción.

La gráfica que aparece la página 27 es una representación que preserva información de la reacción química así como la tabla , es decir, existen relaciones en las dos representaciones correspondientes a relaciones en el mundo representado (la reacción química). Pero ambas representaciones difieren, la gráfica refleja otras relaciones que no contiene la tabla, por ejemplo el comportamiento global de la relación entre los datos *tiempo y cantidad de sustancia producida*; ambas representaciones preservan información, preservan relaciones, pero las mismas relaciones no son modeladas del mismo modo, de ahí que no responden a las mismas cuestiones y por consecuencia no son equivalentes (Palmer, *op.cit.* p. 268). Las dos representaciones son bidimensionales en el sentido de que las relaciones se cumplen solo para pares ordenados de objetos. Y esto es importante porque no se responden las mismas preguntas con cada representación. Así que exponer al que aprende a representaciones no equivalentes redunda en una mayor oportunidad de aprendizajes y de posibilidades de construcción de conocimiento que se esperaría fuese fuertemente relacionado (Ausubel, 1973).

Un ejemplo de lo anterior es la Gráfica 5 del anexo 1, con la que se pueden responder cuestiones sobre el comportamiento cualitativo de las secantes a una parábola, sobre todo si se tiene en cuenta que el alumno las genera en una calculadora avanzada y que el material le proporciona sólo el estado final de tres acciones (correr en tres ocasiones el programa SECANTE), la presentación en esa gráfica ciertamente es estática, pero no así la secuencia del trazo de tres secantes. En cambio, la Tabla 4 del mismo anexo, permite al estudiante comparar cuantitativamente los cambios en la cantidad de sustancia asociados a los cambios (h) en el tiempo.

La dependencia de la representación respecto al proceso de construcción de la misma nos da una forma de diferenciación entre las representaciones producidas por los distintos participantes, lo que significa que sus representaciones utilizadas para responder a un mismo ítem se ven afectadas por las diferencias específicas que cada uno provee en la construcción de las mismas.

Las relaciones y reglas entre los objetos de una representación permiten distinguir los términos claves 'querer decir' o 'significar', usados para expresar el enlace existente entre la representación externa o significante y la representación interna o significado (Janvier, *et.al.*, *op.cit.*, 81).

Para investigadores como Kaput (1992), Goldin (1987), Von Glaserfeld (1987) y Janvier, *et.al.* (s.f.), la diferencia entre los sistemas de representación interna y externa se caracteriza por la distinción entre el *significado* (nivel interno) y el *significante* (nivel externo), figura 5. Resulta pues importante distinguir entre el signo (significante o referente) y la idea -el concepto- (significado o referido).

REPRESENTACIONES MENTALES - INTERNAS

↕

INTERACCIONES

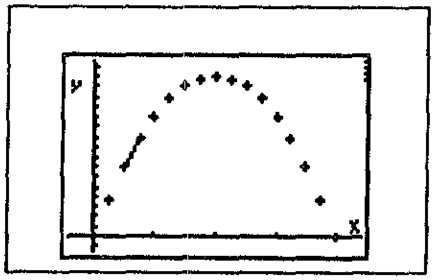
↕

REPRESENTACIONES FÍSICAS - EXTERNAS

Figura 5.- Tomado de Goldin y Kaput (1992)

Distinguiendo lo sintáctico de lo semántico diremos que "...[e]l conjunto de reglas para organizar las representaciones externas está referido como la *sintaxis*, ...el nivel sintáctico para usar las representaciones..."(Janvier, *et.al.*, ídem., trad.)

Para ilustrar lo anterior observemos la tabla de la página 25 y la gráfica siguiente, el símbolo x anotado en el eje horizontal de la gráfica o los valores que contiene la primera columna de la representación tabular, pertenenecen al nivel sintáctico, es decir obedecen reglas convencionales de escritura, por el contrario, la razón de cambio promedio o ritmo promedio de producción de una sustancia respecto al tiempo transcurrido, entre cualquier par de datos (consecutivos o no) tanto de la gráfica como de la tabla corresponden al nivel semántico.



Configuración externa (A)

Decimos entonces que la configuración (A) de la gráfica anterior representa a la configuración (B) $\boxed{y = f(x)}$.

La referencia se hace a las dos configuraciones externas (una relación horizontal, si imaginamos la externa a un nivel y la interna en el otro nivel). Es decir, que la configuración externa (A), la gráfica, representa la configuración externa (B), la expresión simbólica $y = f(x)$, o que esta última representa, interna y físicamente sumergida, a la cantidad de sustancia producida después de cierto tiempo transcurrido.

Lo anterior enfatiza la correspondencia entre una configuración interna y una externa, como la dimensión *vertical* de la representación (figura 6). En el ejemplo, cuando se habla de si o no un estudiante, dada la configuración externa (A) es capaz de visualizarla (internamente) como la relación funcional entre la variable tiempo y la variable cantidad de sustancia.

Interna A ← Integración cognitiva → Interna B

↕ ↕

Externa A ← Correspondencia física → Externa B

Figura 6.- Tomado de Goldin y Kaput (1992)

Una de las dos configuraciones internas *puede representar* la otra (nivel horizontal), como en el caso de que el estudiante relaciona mentalmente su imagen (interna) de un par de datos que representa numéricamente la relación $y = f(x)$ con su codificación simbólica (interna) $(x, f(x))$ en donde x representa el valor de la variable independiente, y y el valor de la variable dependiente.

La distinción entre los sistemas de representación internos y externos es en sí misma un modelo construido y desarrollado por un observador o una comunidad de teóricos para ayudarse a explicar la conducta de los individuos observados. En un sentido es consistente con la experiencia descrita de los seres humanos, en relación a un *interior* y un *exterior* de las experiencias mentales internas, pensamientos, sentimientos, distintos de un modo *real* o *físico*.

Los sistemas de representación se construyen de la experiencia individual y cada individuo construye (a nivel interno) las relaciones entre esos constructos (Goldin y Kaput, 1992). Sin embargo, ni los sistemas internos o externos pretenden explicar, describir o ser el mundo de la experiencia de una persona, sólo intentan explicar y organizar las observaciones de la conducta individual.

En el presente estudio se analizan cinco tipos de representaciones externas denominadas discursiva (D), gráfica (G), numérica (N), simbólica (S) y tabular (T). Las categorías anteriores sirven para analizar las representaciones contenidas en la respuesta del participante a cada uno de los ítems que se le presentan (ver sección 3.1) ya sea que las produzca por escrito o durante una entrevista. Los instrumentos de la investigación (ver sección 3.5) fueron diseñados para estudiar el razonamiento referido a esas representaciones.

En la categoría discursiva (D) nos referimos a todas las formas de texto (Lemke, 1990, citado en Campos y Gaspar, 1995a, p. 9) producido en las respuestas del participante y que no utiliza expresiones simbólicas, las cuales están en la categoría (S). Consideramos como representaciones gráficas (G) a todas las formas figurales o esquemáticas y a las gráficas cartesianas. En la categoría de las representaciones numéricas (N) se encuentran los conceptos presentados en términos de cantidades, ya sea por medio de texto o de notación numérica. La quinta y última categoría que se estudia es la tabular (T), y en ella están comprendidos tanto los arreglos tabulares como las tablas de dos o más entradas.

Podría darse el caso de que dos participantes muestren una misma organización en cuanto al tipo de representaciones que utilizan, pero eso no implica que se valgan de representaciones totalmente equivalentes. El análisis de esto último está fuera del alcance de este estudio, y por ello sólo nos centraremos como ya se dijo, en la organización conceptual como fuente de información entre las relaciones que el participante establece entre las representaciones que se estudian. No analizaremos las diferencias entre dos representaciones particulares que pertenecen a la misma categoría (ver limitaciones del estudio).

2.2.2 Otras clasificaciones para las representaciones matemáticas

Bertin (1967; citado en Janvier, s.f.) clasifica a las representaciones externas en mapas, esquemas y redes. Las representaciones que denomina mapas conservan un grado mayor de similaridad con las propiedades espaciales y de los objetos que representan. Los esquemas exhiben la naturaleza de las relaciones entre dos o más variables mediante dos o más ejes curvos o rectos, presentes o sugeridos, que relacionan a las variables. Las redes o retículas representan relaciones entre eventos, factores o individuos, como jerarquías, secuencias o temporalidad de los eventos.

Ejemplos de los mapas son las representaciones que los alumnos producen en el papel para describir una situación cotidiana, digamos, la salida del agua en una manguera (ver parte 2 del anexo 1). En cambio, las tablas y gráficas, elaboradas en papel o con los recursos de las computadoras, son ejemplos de la categoría de los esquemas.

La clasificación de las representaciones del Cuadro 3 (p. 30), tiene un uso limitado para la educación matemática. Es necesario realizar estudios más profundos de los procesos mentales a través de los cuales las relaciones entre las representaciones internas y externas se adquieren (ídem.), cómo se ubican en la estructura cognitiva del que las adquiere, en especial respecto a conceptos centrales de la matemática, como la *derivada*.

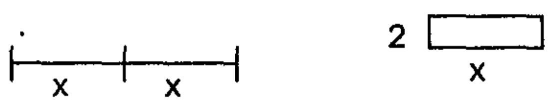
Mapas.- Que incluyen las representaciones que guardan un claro grado de similaridad con las propiedades espaciales de los objetos que representan.

Diagramas.- Representaciones externas que exhiben la naturaleza de las relaciones entre dos o más variables (en el sentido matemático). Las gráficas de pastel, histogramas, registros de barras y gráficas cartesianas pertenecen a esta categoría. La idea esencial en este tipo de representación es reconocer en la representación dos o más ejes curvos o rectos (presentados o sugeridos) que relacionen a las variables.

Retículas.- Como los diagramas o redes de flujo quienes ilustran las relaciones entre los eventos, factores o individuos, algunas veces muestran *orden y nivel jerárquico*; pueden involucrar el tiempo o simplemente los diferentes pasos de un proceso.

Cuadro 3.- Clasificación de las representaciones matemáticas
(Bertin, 1967; citado por Janvier, *et.al*, *op.cit.*, 82, *trad.*)

Por cuanto a las relaciones entre las representaciones externas y las internas Janvier (s.f.) distingue dos la homonimia y la sinonimia. En la primera, a una representación externa están asociadas dos o más representaciones internas. Por ejemplo la representación 2x se corresponde de manera correcta con los dos significados x + x y dos veces x (ídem.), que pueden concebirse a nivel interno como:



La sinonimia está presente cuando varias representaciones externas están asociadas a una interna, en nuestro caso la variación funcional de la cantidad de sustancia producida en una reacción química y el tiempo transcurrido es el significado para la colección de pares de datos de la Tabla 1 y la colección de puntos de la Gráfica 1.

Es difícil aseverar, como reconoce Janvier, la unicidad de la representación interna en el caso de la sinonimia; solo se puede suponer que la representación interna subyacente a la variación funcional es única. Pero esto último permite diferenciar los procesos internos de los estudiantes conforme a las referencias particulares que cada uno hace y que son pistas para la categorización de sus organizaciones conceptuales referidas a las representaciones externas involucradas y a las referencias implícitas a otras representaciones.

Otros términos relacionados con las representaciones son *imagen conceptual*, "... pintura mental del concepto" (Vinner, 1981; citado en Even, 1990), se entiende el conjunto de todas las pinturas asociadas (Even, *ib.*) con el concepto de una persona, junto con las propiedades asociadas a él; por tanto, la imagen de un concepto puede ser diferente para distintas personas.

2.2.3 Problemas de representación

Investigaciones recientes sobre el desarrollo de conceptos (Even, 1990; Janvier, 1987; Kaput, 1989; Thompson, 1994; y otros), han mostrado la complejidad del proceso de representación mental, menciónese como ilustración, que algunas respuestas correctas que los estudiantes proporcionan las hacen por razones equivocadas (Balderas, mientras que algunas respuestas erróneas pueden tener un origen racional. Al respecto y en particular, se ha encontrado que los errores de los estudiantes a menudo son el resultado de errores conceptuales mostrados al usar su conocimiento previo en un nuevo contexto donde dicho conocimiento ya no se cumple del todo bien (Dubinsky y Tall, 1991, p. 234).

Lo anterior se observa en la interacción entre las representaciones externas producidas en una calculadora avanzada y las representaciones mentales correspondientes, donde se presenta un problema complejo que tiene que ver con el papel de la representación en la "explicación generalizada", asociado con las palabras "modelo" , "analogía" y "metáfora" (Kaput, 1985, p. 386). Además, las funciones individual y colectiva están mediadas en parte, por la selección de los sistemas simbólicos (*id.*, p. 387).

Por otra parte, el significado matemático considerado como fundamento del aprendizaje, Kaput (1989) afirma que tiene al menos cuatro fuentes agrupadas en dos categorías:

(a) Extensión referencial

1.- Por medio de traducciones entre sistemas de representación matemático.

2.- Por medio de representaciones matemáticas y sistemas no-matemáticos, que incluyen los sistemas físicos, así como el lenguaje natural, pinturas, etc.

(b) Consolidación

3.- Por medio del aprendizaje de patrones y sintaxis a través de transformaciones entre ellas y operaciones con las notaciones de los sistemas de representación particular.

4.- Por medio de la construcción de una entidad mental a través de la reificación de acciones, procedimientos y conceptos en objetos fenomenológicos los cuales pueden servir como base para nuevas acciones, procedimientos y conceptos a un nivel mayor de organización, a menudo llamada "abstracción reflexiva" (Kaput, 1989, p. 168).

Piaget considera a la abstracción reflexiva responsable del desarrollo de las estructuras cognitivas (Piaget, 1985; citado por Dubinsky, 91, p. 98), es decir, el método por el cual todas las estructuras lógico-matemáticas se derivan (Piaget, 1971; citado por Dubinsky, *ib.*).

La abstracción reflexiva en su forma más avanzada es la que lleva a la clase de pensamiento matemático por el cual la forma o el proceso se separan del contenido y estos procesos mismos son convertidos, en la mente de los matemáticos, a objetos de contenido (Piaget, 1977; citado por Dubinsky, *ib.*.).

Una clase de abstracción reflexiva de primordial importancia para el aprendizaje del cálculo es la encapsulación o conversión de un proceso -dinámico- en un objeto -estático- (Dubinsky, *ib.*, 101).

Como ejemplo utilicemos la palabra "función", para ella no hay un significado absoluto, sino toda una red de significados entretejida sobre las muchas representaciones físicas y mentales de funciones y la correspondencia entre las representaciones, sin embargo los estudiantes muestran algunas veces una falta de relaciones ricas y, por tanto, su conocimiento de ese concepto es procedural (Martínez, 1994, p. 9).

El problema de moverse entre los niveles externo e interno (Figura 6, p. 28), o construir significados personales, son los problemas tradicionales del aprendizaje y el entendimiento (Kaput, 1989, p. 166). Comunicar ideas es parte de la interacción entre los dos niveles; podemos dar cuenta de ella a través de las ideas escritas, de las acciones emprendidas por el individuo para resolver problemas o por la información introducida en una calculadora.

Nos referimos a la abstracción de un concepto matemático a partir de distintas representaciones como el conocimiento de las propiedades comunes a cada una. Sin embargo, cabe señalar que el conocimiento visual y los procesos de inferencia basados en la experiencia diaria, en particular en las experiencias escolares respecto a referentes gráficos, pueden ser engañosos, a pesar de que los novedosos sistemas de despliegue gráfico de las computadoras personales, ayudan a compensar la falta de aspectos del contexto, proporcionando simultáneamente diversas escalas de una gráfica (Kaput, 1989, p. 172).

2.2.4 Investigación sobre las representaciones matemáticas

La investigación reciente sobre el desarrollo de conceptos muestra consistentemente la complejidad de una imaginería mental individual. Como se dijo en la sección anterior (p. 31), los estudiantes pueden dar las respuestas "correctas" por las razones incorrectas, mientras que las respuestas "incorrectas" pueden tener un origen racional (Dubinsky y Tall, 1991, p. 234).

Goldin y Kaput (1992) han desarrollado el concepto de representación en la psicología del aprendizaje de matemáticas y en resolución de problemas. Para ellos, citando a Palmer (1977), una representación es "...una configuración de alguna clase que (total o en parte) corresponde a, está asociada referencialmente con, quiere decir, simboliza o de otro modo representa alguna cosa". La representación en si no ocurre aislada sino que usualmente pertenece a sistemas altamente estructurados, en forma personal, idiosincrásica, cultural y convencionalmente.

Lo anterior se debe inevitablemente al acto de interpretación que se involucra entre la representación y el representado, consideración fundamental que se toma en cuenta para distinguir cuándo las respuestas de un alumno dependen más de la representación que del concepto. Por ejemplo las gráficas de los alumnos producidas en computadoras personales con un graficador influyeron en su identificación de los valores extremos de una función más que del concepto mismo (Balderas, 1992, pp. 22 y 88). O cuando las formas de los recipientes inducen las formas de las gráficas del volumen respecto a la altura del líquido (Hitt, 1995, p. 70), en el caso de profesores de matemáticas del nivel medio superior.

2.2.5 Conexiones entre las representaciones externas

Un supuesto que sostenemos es que las representaciones internas pueden conectarse, pero que las conexiones sólo pueden inferirse, de ahi que, reconozcamos que las representaciones internas pueden ser influenciadas por la actividad externa, es decir, la conexiones entre las representaciones internas pueden estimularse por medio de la construcción de conexiones entre las correspondientes representaciones externas (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 66).

La organización conceptual de un estudiante analizada a través de mapas conceptuales da cuenta de las relaciones entre los conceptos, estas relaciones son elementos claves para la comprensión del razonamiento visual porque, ellas vinculan o conectan las distintas representaciones asociadas a los conceptos presentes en la organización conceptual y que es a su vez producto del razonamiento.

En un estudio previo sobre las representaciones del concepto *cambio* (Balderas, 1996, p. 145) en condiciones escolares similares a las de esta investigación se encontró que 12 de 19 de los participantes establecieron al menos dos conexiones entre las representaciones gráfica, simbólica o tabular; y siete establecieron sólo un conexión, lo que se consideró como una evidencia de los recursos de los participantes para comunicar ideas relativas a dicho concepto.

2.3 Conceptualización de la Derivada como producto del Desarrollo Histórico de sus Representaciones Física, Numérica, Gráfica y Simbólica

En esta sección hacemos un pequeño esbozo del desarrollo histórico del concepto *derivada* por cuanto a las formas de representación que se usaron a lo largo de dicho desarrollo.

Un aspecto distintivo en el surgimiento de diversas notaciones abstractas para los conceptos matemáticos es su uso instrumental, sin que mediara una reflexión sobre el significado y la trascendencia de los mismos, es decir, sin reflexión sobre el significado general o sobre el hecho por el cual se empezaron a usar. Para Piaget y García (1989; citados por Kaput, 1994a, p. 85) un estado de conciencia se da después de un proceso más o menos largo el cual permite a una noción particular, como en el caso de la *derivada*, constituirse en un concepto fundamental

El paso de lo instrumental al estado de conciencia de Piaget referente a la derivada puede analizarse en cuatro periodos, el primero corresponde al uso de la noción para determinar tangentes y cuadraturas, antes del trabajo de Newton y Leibniz; el segundo cuando Newton y Leibniz la construyen; el tercero es un periodo de exploración y desarrollo, en el siglo XVIII, y finalmente, cuando fue definida en el siglo XIX (Kaput, 1994, p. 86).

Para nuestro estudio es de particular importancia los primeros dos periodos, porque durante ellos se dio el surgimiento y evolución de las representaciones que nos interesan.

2.3.1 Paralelismo entre el pensamiento griego y el de los estudiantes de hoy

El problema de fondo para los matemáticos durante los siglos XIII y XIV, y el decisivo siglo XVII, fue lograr la matematización de la variación. En el siglo XVIII, Euler y Lagrange explotaron las construcciones iniciales de manera algebraica. Después siguieron los intentos en el siglo XIX, especialmente de Bolzano, Cauchy y Weierstrass, para darle a toda esa empresa un sentido lógico (*id.*).

Las especulaciones cualitativas logradas por los griegos sobre el movimiento (Boyer, 1959, 71) no les permitieron concebir la idea de variación continua por medio de magnitudes geométricas. Sólo el avance fructífero tanto en las ciencias como en la matemática dio lugar al concepto de la *derivada*. La idea de variación, fue expresada, a menudo, en términos de la dialéctica más que en los métodos matemáticos del cambio cuantitativo, e hizo admitir en las matemáticas el concepto de variación.

Kaput (1994a, p. 87) señala un paralelismo entre los griegos y los estudiantes de hoy, cuando al referirse a Boyer, apunta que el movimiento era más una cualidad que una cantidad, lo que dio por consecuencia el que no se hiciera un estudio sistemático cuantitativo de tales cualidades.

Un aspecto también muy importante para nuestro estudio de las representaciones fue que:

> ...el aprendizaje griego tuvo lugar en la fuerte tradición oral, de modo que cuando los cambios sociales y políticos interrumpieron la transmisión oral basada en la Academia griega, y sus matemáticas estuvieron representadas solamente en libros, el progreso cesó. Las generaciones subsecuentes no pudieron dominar la técnica altamente formal basada en el estudio de solamente texto, especialmente el clave y extremadamente difícil trabajo de Arquímedes (Van der Waerden, 1963; citado por Kaput, 1994a, p. 88),

Kaput se refiere también al paralelo entre ciertos aspectos de los matemáticos griegos y algunos aspectos de las condiciones matemáticas de sus estudiantes que tradicionalmente entran en el estudio del cálculo, cuando dice que "[l]os estudiantes son en primer lugar discretos, criaturas aritméticas, cuyo entendimiento de las literales algebraicas es como 'desconocidas' más que como variables." (*id.*) No obstante que, los estudiantes de hoy, tienen una aritmética de los números mucho más fácil, con la cual aritmetizar su mundo, en comparación con las representaciones geométricas de los griegos, las cuales eran difíciles de manejar (*id.*).

Sin embargo, para Kaput los alumnos usualmente carecen de un concepto de aceleración y los únicos tipos de movimiento que ellos ven representados dentro de las matemáticas son aquellos que se describen enteramente por medios algebraicos (fórmulas simples) a pesar del movimiento irregular que experimentan en sus vidas diarias y ésta es la razón por la que no conectan, a nivel cognitivo, las aplicaciones escolares sobre el movimiento con su experiencia cotidiana (*id.*).

2.3.2 Concepciones escolásticas relacionadas con el movimiento

Para matematizar la variación, en forma discursiva (siglos XIII a XV), se pasó de una concepción peripatética del movimiento, como el resultado de alguna fuerza externa, a una del ímpetu, es decir, como la tendencia de un cuerpo a permanecer en movimiento una vez iniciado el movimiento.

El lenguaje matemático preciso para la expresión del movimiento tardó siglos en llegar, probablemente se inició en el siglo XIII, con el trabajo de Duns Scotus y otros, con "...una discusión de la latitud de las formas, esto es, de la variabilidad de las cualidades... " (Boyer, *op.cit*, 73). Los escolásticos hicieron una distinción básica apoyada en la distinción Aristotélica entre cantidad y calidad. Asumieron que las cantidades varían en extensión (peso, distancia, longitud o volumen), y las cualidades varían en intensidad (brillantez de iluminación, densidad, velocidad).

Respecto al movimiento se distinguió entre cambio uniforme y no-uniforme (siglo XIV) de las formas -*latitudo uniformis* y *latitudo difformis*- Y dos tipos de *latitudo difformis*, denominadas *latitudo uniformiter difformis* y *latitudo difformiter difformis*, es decir, cambio lineal en comparación al cambio no-lineal. De este último distinguieron dos tipos, *latitudo uniformiter difformiter difformis* y *latitudo difformiter difformiter difformis*. Las denominaciones anteriores dan cuenta de la dificultad que experimentaron los que estaban tratando de desarrollar una teoría matemática coherente de la variación antes de que un lenguaje sistemático para las expresiones estuviera disponible. Richard Suiseth (the Calculator) auxiliado por Thomas Bradwardine dieron

> ... la base para un creciente y sofisticado análisis de la variación. [Calculator] se las ingenió para formular y argumentar en el contexto de un fenómeno térmico la base para un teorema del valor medio para una cantidad que cambia linealmente, esto es, la idea de promedio de *latitudo difformis*. Los argumentos fueron largos y discursivos, salpicados con ejemplos numéricos, pero lo más importante, no geométricos -ni un solo diagrama aparece. Aún cuando procediera con intensidades infinitas, [Calculator] recurrió a las intuiciones relacionadas al cambio uniforme (Kaput, 1994a, p. 89)

> ... a Calculator debemos quizás el primer esfuerzo serio para hacer entendibles cuantitativamente esos conceptos de física matemática. Su atrevido estudio del cambio de tales cantidades anticipó no sólo la elaboración científica de ellas, sino también bosquejó la introducción en las matemáticas de las nociones de cantidad variable y derivada. De hecho, cada una de las palabras *fluxus* y *fluens*, que Calculator usó en esta conexión, fueron empleadas después de tres siglos por Newton, cuando en su cálculo, habló de una cantidad variable matemática como un *fluent* y llamó a su razón de cambio un *fluxion*... (Boyer, 1959; citado por Kaput, 1994a, p. 89-90)

Newton hizo referencia tácita a las intuiciones sobre el movimiento en su noción de *fluxion*. Las definiciones de razón de cambio uniforme y no-uniforme, estuvieron numéricamente expresadas y su definición rigurosa solo pudo darse después del desarrollo del concepto de límite, a lo cual Newton contribuyó.

Las nociones iniciales del cálculo se desarrollaron de las intuiciones de la geometría. Pero la dialéctica prolija de Calculator hizo que no recurriera a la intuición geométrica, a pesar de que había actuado como un intermediario entre sus intentos iniciales de estudio del problema de variación y la formulación final dada por el cálculo, "[e]ste vínculo entre el discurso interminable de Suiseth y el simbolismo conciso del álgebra fue reemplazado por otros en el siglo XIV, quienes estudiaron la latitud de las formas. De éstos el más famoso fue Oresme..." (Boyer, 1959, 79).

Oresme reconoció la necesidad de la representación geométrica para la variación (Kaput, 1994a, p. 90), es decir, para las representaciones de la latitudes de las formas. Boyer (1959, 80) dice, que el trabajo de Oresme hizo uso más efectivo de diagramas geométricos y de la intuición, y de un sistema de coordenadas, para dar a sus demostraciones una simplicidad convincente.

> ... Esta representación gráfica dada por Oresme a la latitud de las formas fue un paso hacia el desarrollo del cálculo... Fue el estudio de los problemas geométricos y el intento por expresarlos en términos de números lo que sugirió la derivada y la integral e hizo posible la elaboración de esos conceptos. (Boyer, 1959, 80; citado por Kaput, 1994a)
>
> Otros antes de Oresme, incluyendo a Duns Scotus, habían ayudado a preparar la trayectoria representacional desde Aristóteles. En particular Roger Baçon, en la mitad del siglo XIII, introdujo un enfoque unidimensional para pensar acerca de intensidades variables de cualidades... (Kaput, *ib.*)

Para Baçon, cada forma esencial recibe *intensión* y *remisión*, que se hace comprensible cuando avanza como una línea, llamada línea de intensión y remisión, de modo que tiene un contrario y un medio; la misma línea se la imagina conteniendo a todas las formas contrarias. La relación entre la cualidad, que puede tener intensidad variable, y la cantidad de la cualidad, la ilustra Kaput con lo siguiente:

> ... sea dada agua de dos pesos de calor en el grado sexto con respecto a algùn punto contenido en la misma línea; sea dada otra agua de un peso de calor de 12 grados con respecto al mismo punto; una mezcla de las dos aguas que se ha hecho, lo caluroso de la mezcla será ocasionado en una línea de intensión a través de 8 grados, con respecto al punto referido, puesto que la distancia que está entre seis y ocho es una mitad de la distancia entre 8 y 12, justo como el agua de un peso es la mitad del agua de dos pesos [cargas]. (Clagett, 1968; citado por Kaput, *ib.*, p. 91)

El peso promedio de una intensidad se calcula aritméticamente y se empieza a colocar sobre una misma línea como una ayuda conceptual esencialmente abstracta, la cual no aparece en los manuscritos antes de Oresme, pero sirve como agarradera para que las cantidades tomadas sean linealmente ordenadas (entre los Escolásticos de los siglos XIII y XIV). Ellas están probablemente basadas en las comparaciones de Aristóteles entre las cualidades contrarias tales como calentamiento y enfriamiento, quienes representan los extremos.

> ... El enfoque de Oresme fue representar al "sujeto", el cual posee la cualidad, como una línea horizontal, una *longitudo*. Para cada punto de la *longitudo* fue determinado una *latitudo* [4] una línea recta perpendicular cuya longitud representaba la intensidad de la cualidad del sujeto... el usó este sistema sólo

[4] A cada abscisa una ordenada, Oresme consideró series de puntos los cuales tenían longitudes y latitudes que cambiaban uniformemente. Las primeras son nuestras abscisas y las segundas las ordenadas (Smith, 1958, 319).

> para los "sujetos lineales", o lo que nosotros podríamos llamar *sujetos unidimensionales*. Un ejemplo de un sujeto tal podría ser una varilla cuya temperatura o iluminación varía de un extremo a otro. [Oresme] discutió también la representación de las cualidades de las regiones planas *en una manera* análoga, con perpendiculares a cada punto, con lo cual se genera un sólido. Intentó, aún, discutir cualidades de objetos tridimensionales, mientras trataban de evitar una nueva dimensión. (Kaput, 1994a, p. 91-92)

El carácter global de las representaciones de Oresme para los casos especiales de *latitudo uniformis* y *latitudo difformis* se identifica también en el título de su principal trabajo *De configurationibus,* donde pone énfasis en las formas globales asociadas con diferentes tipos de variación, en particular, la velocidad uniforme sobre un intervalo de tiempo (Kaput, 1994a, p. 92). La velocidad constante está representada por un rectángulo cuyo ancho representa el intervalo y cuya altura representa la velocidad; y una velocidad uniformemente *difforme* (velocidad que cambia linealmente) está representada por un triángulo rectángulo (*id.*).

> ... En un sentido, el objeto geométrico (rectángulo o triángulo) se empezó a usar para representar un evento total, como una representación global, *donde el sujeto era el intervalo de tiempo* sobre el cual el movimiento ocurrió. Esto no es lo mismo como pensar en la curva, ..., la cúspide del rectángulo o el triángulo, como representante del evento. La posterior *conceptualización no fue posible* sino hasta después de Fermat y Descartes. A pesar de eso, Oresme usó la forma de la figura completa (su "configuración") como la base para hablar acerca de intensidades variables. También, *describió* la variación de la cualidad en términos de la "línea cúspide" que expresa la información esencial, puesto que la perpendicularidad de las líneas de intensidad determinaron los lados restantes de la figura. (*id.*)

Oresme caracterizó a la *latitudo uniformiter difformis*, la intensidad cambiando linealmente, en términos de lo que ahora llamamos pendiente (*id.*).

Kaput analiza la relación referencial entre las *configuraciones* de Oresme y las cualidades ahí representadas, conforme a la Figura 7 (p. 39). Para él, "A" es su representación y "B" se usó para modelar. La siguiente proposición clave revela que el intento de escoger una unidad de longitud particular de referencia para las líneas verticales, para representar la cualidad bajo consideración refleja un principio básico de medición:

> A pesar de que alguna cualidad lineal puede ser correctamente imaginada por cualquier otra figura plana como la ya mencionada, todavía no *cualquiera cualidad puede ser* imaginada por cualquier figura. Además, una cualidad no lineal es imaginada o desimaginada por cualquier figura excepto las unas en las cuales la razón de las intensidades en cualesquiera *puntos de la cualidad* es como la razón de las líneas levantadas perpendicularmente en esos mismos puntos y terminando en la cúspide de la figura imaginada. (Clagett, 1968; citado por Kaput, 1994a, p. 94)

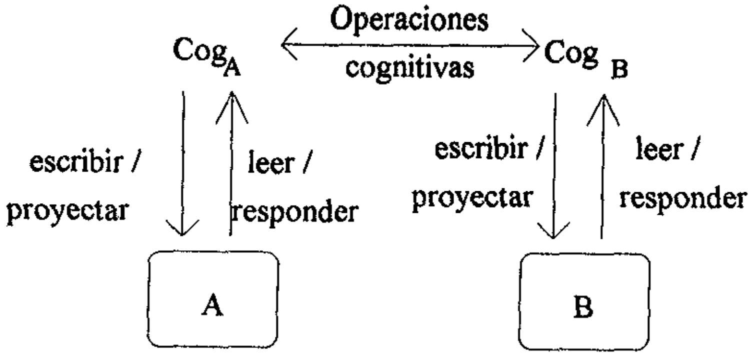


Figura 7.- Referencia "horizontal" entre notaciones
(tomado de Kaput, 1994a, p. 81)

Oresme mantuvo una separación entre la representación y la cosa a ser representada, "A" y "B" en la figura 7. Sin embargo, para Kaput, hay una dificultad con el papel de la línea horizontal, algunas veces representa al sujeto directamente, mientras que las líneas verticales se ven en forma totalmente imaginaria, como apoyos a la imaginación, de ahí que, las notaciones X y Cog_X no siempre están claramente separadas.

Un ejemplo de qué tan lejos Oresme había llegado en su estudio del movimiento está ilustrado en la parte inicial de su libro dedicada a caracterizar la velocidad, donde separa tres aspectos del movimiento que se necesita tomar en cuenta: distancia, tiempo y velocidad.

> Cada movimiento sucesivo de un objeto divisible tiene partes y es divisible en un modo de acuerdo a la división y extensión o continuidad de un móvil, en otro modo de acuerdo a la divisibilidad y a la duración o continuidad del tiempo, y en un tercer modo - al menos en la imaginación- de acuerdo al grado e intensidad de la velocidad. De su primer movimiento continuo se dice que es 'grande' o 'pequeño'; de su segundo, 'corto' o 'largo', y de su tercero, 'rápido' o 'lento'. Y así el movimiento tiene dos extensiones, una que pertenece al sujeto y otra al tiempo, y una intensidad. Ahora las dos extensiones pueden imaginarse en una cierta manera como mutuamente intersectándose en ángulos rectos en la manera de una cruz, así que la extensión de la duración debe decirse que es '*longitude*' y la extensión en el sujeto debe ser '*latitude*', mientras la intensidad debería ser llamada 'altitud' de este movimiento o velocidad. (Clagett, 1968; citado por Kaput, 1994a, p. 96)

Lo anterior denota un intento de crear ejes para el tiempo y para el objeto (lineal) mismo. Oresme debió discrepar con los dos modos de mostrar el movimiento, uno con el tiempo como el eje horizontal y la intensidad de velocidad como vertical (cediendo a una figura bidimensional) mientras que el otro tiene el eje horizontal para el objeto mismo, el cual entonces se mueve, actuando como un objeto substituto, para generar otra figura bidimensional como un rastro del movimiento (la trayectoria), se refiere a esto en términos de la velocidad teniendo una '*double longitude*' (Kaput, 1994a, 96).

Oresme reconoce la diferencia entre velocidad instantánea y velocidad a lo largo del tiempo (velocidad promedio), aunque en su universo, todas las entidades "continuas" tenían algún tamaño de "grano" (medida) mínimo, si bien indefinido (Kaput, 1994a, p. 97).

Para Kaput (*id.*), "... [la] disputa para representar y entender el movimiento variable es importante para la experiencia antes de que uno se mueva a las idealizaciones que son los puntos de partida para la experiencia de los estudiantes contemporáneos de matemáticas con el movimiento..." Cita el estudio de diSessa, et.al, en el que "... los estudiantes ... trabajaron muy duro antes de que ellos fueran capaces de arribar a las representaciones de la velocidad en contraposición con el tiempo más que la posición..." (diSessa, Hammer & Sherin, 1991; citado por Kaput, *ib.*).

Un punto que influyó en el desarrollo del cálculo lo constituye el análisis de Oresme sobre la *latitudo difformiter difformis*, que él representaba como una región plana inferior semicircular, respecto a que "...la razón de cambio de una intensidad es menor en el punto correspondiente a la máxima intensidad" (Boyer, 1959, 85).

Sin embargo, y a pesar de que los filósofos escolásticos se estuvieron esforzando para expresar sus ideas en palabras y diagramas geométricos, no fueron tan exitosos como lo que hoy se hace, debido en parte al uso de la notación matemática y a la economía de pensamiento que produce dicho uso (Kaput, 1994a, p. 98).

Cuando Oresme describe intensidades variables en términos de la variación de las alturas de los rectángulos y considera el área del rectángulo como el representante de la cantidad de la cualidad, sienta las bases para una economía de pensamiento. En el sentido de que el uso posterior de los rectángulos bajo una curva toman en cuenta un intento por recuperar esta representación en un verdadero sistema de coordenadas, donde los objetos son las curvas y los puntos en esas curvas (*id.*).

2.3.3 Los siglos XVII y XVIII

Boyer resalta que los escolásticos estuvieron más cerca del trabajo de Arquímedes que de Aristóteles, y pudieron ser más capaces de construir en sus resultados de manera más fructífera, como sucedió mucho después, en el trabajo de Stevin y otros en el siglo XVII. Galileo, Descartes y Leibniz tuvieron el más grande interés por esos hombres y su trabajo, de lo cual Boyer dice:

> ... el tipo de trabajo que ellos representaron fue no destinado a ser la base de la influencia decisiva en el desarrollo de los métodos del cálculo. Los principios guía fueron reemplazados por la geometría de Arquímedes, a pesar de que fueron

modificados por las nociones de cinemática derivadas de las controversias cuasi-peripatéticas de los filósofos escolásticos en el sujeto de la variación. (Boyer, 1959; citado por Kaput, 1994a, p. 98-99)

Para los fines de este estudio haremos mención del método de Fermat (siglo XVII) para encontrar la ecuación de una recta tangente a una curva. El método consiste esencialmente en expresar la posición de dos puntos sobre la curva, uno conocido y fijo por donde se trazará la tangente y el otro variable que se aproxima a la posición del primero pero permaneciendo en todo momento sobre la curva. Este método presupone en el fondo el carácter continuo y derivable de la relación funcional entre las variables que intervienen en la designación de la posición.

El método utiliza representaciones gráficas y simbólicas para resolver el problema de las tangentes y asume que las secantes de ese modo construidas tienen en la tangente su posición límite. Una sencilla y clara exposición de ese método la encontramos ilustrada con varios ejemplos por Cruse y Lehman (1982, p. 32).

Cabe señalar que el tratamiento independiente de los dos puntos en cuestión, en un principio, redunda en una notación muy simplificada y de fácil comprensión, pero en ella no se hace explícita la relación entre las "latitudes" de los puntos, es decir, no se hace uso del concepto de incremento, así que el problema de las tangentes se resuelve con base en el concepto de pendiente de una recta y se deja en un segundo plano la variación funcional entre las magnitudes que vienen a ser la abscisa y la ordenada (longitud y latitud de Oresme), para sólo reducirla a una sustitución algebraica. Así, el método tiene que ver más con el carácter geométrico del problema y no se discute en relación a fenómenos de variación.

En el siglo XVIII, Bolzano definió la *derivada* de una función $F(x)$ en cualquier valor de x como la cantidad $F'(x)$ a la cual la razón $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ se aproxima indefinidamente cerca, o tan cerca como se quiera, conforme Δx se aproxima a cero, ya sea Δx positivo o negativo. En esa época se concebía al cálculo como la materia consagrada al movimiento y crecimiento de las magnitudes, por lo que la continuidad de una función era razón suficiente para asegurar la existencia de la derivada, sin embargo Bolzano construyó un ejemplo de una función continua no diferenciable, lo que indicó la dirección para la formulación final del cálculo ocurrida en el siglo XIX (Boyer, 1959, p. 271).

En este siglo, la falta de una formulación precisa del concepto de límite se debía a que su definición estaba basada en la intuición geométrica, lo cual no podía haber sido de otro modo porque en ese tiempo las ideas de la aritmética y el álgebra fueron por mucho tiempo establecidas sobre las ideas de magnitudes geométricas, esto es, el cálculo fue interpretado por sus inventores como un instrumento para proceder con las relaciones entre cantidades involucradas en problemas geométricos (*id.*). En cambio Euler y Lagrange, en un sentido, representaron excepciones a esa tendencia porque deseaban establecer el cálculo sobre el formalismo de su concepto analítico de función (*id.*, p. 272). Y a pesar de que la concepción de límite en D'Alembert, L'Huilier y Lacroix permaneció por mucho tiempo de manera geométrica, preparó el campo para el trabajo de Cauchy, cuyo concepto de límite fue clara y definitivamente más aritmético que geométrico, como lo había sido en Bolzano (*id.*).

Por último, subrayamos que la definición de límite de Cauchy apelaba a las nociones de número, variable y función más que a las intuiciones de la geometría y la dinámica. Pero el desarrollo del concepto de función en el siglo XVIII, con énfasis en las relaciones entre las variables, le permitió a Cauchy considerar lo infinitesimal como una variable y de ahí establecer las nociones de límite, infinitesimal e infinito; con lo que Cauchy fue capaz de definir el concepto de *derivada*, y cuya formulación fue precisamente la que había dado Bolzano (*Id.*, p. 273), esto es:

> Sea $y=f(x)$ la función; dar a la variable x un incremento i; y formar la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, el límite de esta razón, cuando éste existe, conforme Δx se aproxima a cero, está representado por $f'(x)$, y se denomina derivada de f con respecto a x. (Boyer, 1959, p. 275)

El contenido de esta sección ilustra el proceso de construcción humano del concepto de *derivada*, la dificultad para hacer dicha construcción, para interpretar y establecer las condiciones y reglas del modelo. Se ilustra también las distintas concepciones y representaciones que dieron lugar a la formulación actual de la derivada (sección 2.4), que por si misma es compleja.

De lo expuesto en esta sección formulamos una hipótesis de trabajo en el sentido de que el desarrollo conceptual humano sobre el concepto *derivada* es similar al desarrollo conceptual del individuo, y ambos están fuertemente vinculados al desarrollo de las representaciones correspondientes.

2.4 Aprendizaje de la Derivada

El concepto de aprendizaje subyacente a las consideraciones que en esta sección se plantean estriba en la construcción y organización de categorías en un espacio específico (el aula) como causa y producto de varios procesos, entre otros, el proceso didáctico

> ...el proceso didáctico es lo que sucede realmente en el aula, con o sin planeación didáctica de por medio, es la construcción social de relaciones de interacción en el aula, que producen formas y niveles de enseñanza y de aprendizaje. Como proceso real, es un objeto de estudio, mediante el cual pueden estudiarse las condiciones y formas de interacción que conforman los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula: las acciones, las relaciones que las estructuran y los procesos que generan... (Campos y Gaspar, 1995a, p. 4)

El crecimiento del conocimiento matemático puede verse como un proceso de construcción de las representaciones internas de la información y como la conexión de las representaciones para formar redes organizadas de conocimiento (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 80), de ahí que, una meta de especial importancia para los educadores de matemáticas es que los aprendices adquieran conocimiento con entendimiento (*id.*).

2.4.1 Aprendizaje y enseñanza con entendimiento

Partimos de la hipótesis de Dubinsky y Tall (1991, p. 234) en cuanto a que el aprendizaje matemático puede mejorarse cuando se ayuda al estudiante a construir conocimiento en sus propias mentes en un contexto que esté diseñado para ayudar y estimular el aprendizaje.

Es decir, que el principal interés de la enseñanza tiene que ver con la construcción de esquemas para el entendimiento de los conceptos (Dubinsky, 1991, p. 119). Los esquemas se consideran como colecciones de objetos y procesos más o menos coherentes, a los que un individuo tiende a evocar para entender, organizar y dar sentido a las situaciones problema percibidas, en relación al conocimiento (de un concepto individual matemático).

La abstracción reflexiva es la construcción de objetos y acciones mentales sobre ellos (*id.*, p. 102). Dubinsky plantea la hipótesis de que "... el aprendizaje implica aplicar la abstracción reflexiva a esquemas ya existentes a fin de construir nuevos esquemas para entender los conceptos... es una observación trivial pero crítica el que un esquema no puede construirse en la ausencia de esquemas que son prerrequisitos..." (*id.*, p. 120). Y apunta, que sin embargo el trabajar con ejemplos puede no ayudar mucho en la construcción de conceptos, además de que "... el entendimiento de ideas matemáticas *proviene* de otras fuentes [además] que el mirar *muchos ejemplos* y 'abstraer sus aspectos comunes', lo cual sucede sólo si hay abstracción empírica." Se necesita algo más, Dubinsky sugiere que es precisamente la construcción de aspectos derivada de la abstracción reflexiva.

Si el que *aprende relaciona* el procedimiento con algunos de los conocimientos conceptuales sobre los que se basa, entonces el procedimiento se convierte en parte de una red conceptual mayor, de modo que queda relacionado más de cerca con el conocimiento conceptual (Hiebert y Carpenter, *op.cit.*, p. 78). Lo cual produce en parte, que se *aumente* la flexibilidad (*id.*).

Hiebert y Lefevre (1986, p. 8) analizan más a fondo sobre cómo los conocimientos conceptual y procedural están relacionados a la comparación entre el *aprendizaje* significativo y el rutinario. Se refieren al "significado" cuando "...las relaciones entre unidades de conocimiento son reconocidas o creadas..." El conocimiento conceptual, según ellos "...debe aprenderse significativamente. Los procedimientos, por otro lado, pueden o no aprenderse significativamente. Proponemos que los procedimientos que son *aprendidos con significado* son procedimientos que *están enlazados* al conocimiento conceptual" (*id.*).

El aprendizaje de rutina, produce conocimiento que carece notablemente de relaciones y está sujeto al contexto donde fue aprendido. El *conocimiento* que resulta del aprendizaje rutinario *no está enlazado a otro* conocimiento y de ahí que no se *generaliza a otras* situaciones. Ese tipo de conocimiento puede accesarse y aplicarse sólo en aquellos contextos que son muy parecidos al contexto donde originalmente fue aprendido. El conocimiento conceptual entonces no puede generarse directamente del aprendizaje *rutinario, porque* los hechos y las *proposiciones aprendidas* de ese modo, son almacenados en la memoria como unidades de información aisladas, no enlazadas con alguna red conceptual. Por supuesto que después de algún tiempo el que aprende puede reconocer o construir relaciones entre piezas aisladas de *información,* pero no necesariamente. En *este caso, el conocimiento* conceptual se crea de la *información* que inicialmente fue aprendida por rutina (*id.*, p. 8).

En cambio, los procedimientos pueden aprenderse rutinariamente; pueden adquirirse y ejecutarse aún *cuando están* enlazados estrechamente a las *características* superficiales del contexto original. Muchos procedimientos, especialmente los que operan sobre patrones simbólicos, son activados por los aspectos superficiales similares al los del contexto original.

La naturaleza *secuencial de los procedimientos* es respetada por el aprendizaje *rutinario, así,* al aprender una secuencia predeterminada de acciones tiende a verse, al igual que la memorización rutinaria, como un método instruccional. De ahí que los procedimientos pueden ser aprendidos por rutina y probablemente a menudo son aprendidos de ese modo, puesto que son susceptibles a esta forma de instrucción (*id.*).

Los procedimientos que están conectados a las redes reditúan en un acceso a toda la información en la red. Se convierten en recursos importantes en la solución de problemas, porque cuando se enfrenta con un problema que difiere de los aprendidos previamente, el conocimiento conceptual relacionado puede ser útil para detectar similitudes y diferencias entre los problemas, y en consecuencia informar sobre el procedimiento y los ajustes apropiados. De ese modo, el conocimiento conceptual amplía el rango de aplicación de un procedimiento. Lo que dará lugar a cambios en las relaciones entre el conocimiento conceptual y procedural. Porque "...los viejos procedimientos tomarán nuevo significado en las nuevas notaciones, los nuevos procedimientos serán posibles en las viejas notaciones, y notaciones y procedimientos totalmente nuevos serán creados". (Kaput, 1989, p. 191), no sólo respecto al conocimiento social de la matemática, también respecto al conocimiento individual.

Para Hiebert y Lefevre resulta "...difícil de imaginar a alguien que posea conocimientos conceptuales y procedurales como sistemas totalmente independientes. Algunas conexiones son inevitables...De hecho, aunque es posible considerar procedimientos sin conceptos, no es fácil imaginar conocimiento conceptual que no esté conectado con algunos procedimientos. Esto se debe en parte, al hecho de que los procedimientos traducen el conocimiento conceptual en algo observable. Sin los procedimientos para acceder y actuar en el conocimiento, no podríamos saber dónde está (1986, p. 9).

2.4.2 Formación de los conceptos de cambio, variación funcional y límite

La trascendencia de las ideas discutidas en la sección 2.3 sobre el desarrollo de las representaciones asociadas al concepto de derivada la podemos ilustrar con los resultados de Vergnaud y Errecalde (1980; citados por Kaput, 1994a, 100) sobre la traducción que hicieron los estudiantes (10 a 13 años) de cantidades dadas aritméticamente a gráficas, usando segmentos de líneas.

> ...descubrieron que el proceso de relacionar números con puntos en una línea ordenada era en gran medida no trivial, y que la mayoría de los estudiantes tendían a expresar números como intervalos más que como puntos. En efecto, los intentos iniciales para graficar intensidades de cualidades fueron similares, excepto que los intervalos usados por Oresme fueron establecidos perpendiculares a los sujetos que ellos estaban describiendo. Los elementos del objeto que poseían la cualidad variante fueron designados por puntos, pero no las intensidades, las cuales fueron designadas por segmentos. (Kaput, 1994a, p. 100)

Cabe señalar que "... el enfoque estándar para enseñar a los niños los inicios de la representación gráfica de cantidades y las relaciones entre ellas no tiene un uso sistemático de las gráficas de barras, a pesar de que tales gráficas frecuentemente se usan para representar datos categoriales o discretos..." (*id.*).

Además, en la literatura sobre el aprendizaje de funciones y graficación, en los niños, Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990; citados por Kaput, 1994a, 100-101) catalogan a la graficación en un amplio rango de dificultades del estudiante, tanto para construir como para interpretar gráficas de coordenadas.

Sin embargo, las gráficas de barras ocasionalmente han sido criticadas porque no parecen apropiadas para dar lugar a la graficación en coordenadas (Kaput, *ib.*, p. 101). Se ve como si, tanto históricamente como psicológicamente, la cantidad se representa más fácilmente por los segmentos de línea que por puntos, o, poniéndolo algo diferente, por las longitudes más que por las localizaciones (*id.*).

Aunado a lo anterior recordemos que el término *imagen conceptual* o *concepto* describe la estructura cognitiva total que está asociada con un concepto, el cual incluye a todas las pinturas mentales o representaciones internas, propiedades y procesos asociados (Tall & Vinner, 1981, p. 152). Conforme se desarrolla el concepto y de acuerdo a la forma del funcionamiento del cerebro, no se da una perfecta coherencia entre las representaciones internas, es decir, respecto a los datos sensoriales ciertas trayectorias neuronales las inhiben o no. Por tanto, diferentes estímulos pueden activar diferentes partes de la imagen conceptual, de modo que su desarrollo no necesariamente es del todo coherente.

El concepto definido (*concept definition*) es una forma de las palabras usadas para especificar ese concepto (*id.*, 152), que un individuo puede aprender rutinariamente o de manera más significativa relacionándola en mayor o menor grado al concepto como un todo. Puede ser también una reconstrucción personal que hace el estudiante de una definición. Es entonces la forma de las palabras que un estudiante usa para su propia explicación de su imagen conceptual evocada. En los dos casos el concepto definido puede variar de una persona a otra.

Una definición personal del concepto *cambio*, por ejemplo, puede diferir de la definición formal del concepto, siendo esta última una definición del concepto aceptada por toda la comunidad matemática (*id.*). De este concepto se encontró (Balderas, 1996) que casi la mitad de los participantes de ese estudio (10 de 19) mostraron una escasa estructura conceptual en torno al concepto de cambio referido a un ítem planteado en términos discursivos, gráficos y simbólicos.

Para el concepto de variación funcional, y en particular el concepto de función, Martínez (1993; 1994, p. 9), encontró que hay una tendencia cuasi-estructural de la concepción de función en el estudiante de precálculo, que no considera el dominio y el rango; así como, una tendencia a reconocer la regularidad y mostrar una separación entre los mundos algebraicos y gráficos. Sus hallazgos confirman que el conocimiento y el uso del estudiante de las funciones sugirieron una falta de relaciones ricas y de ahí que su conocimiento fuera procedural, hecho que está de acuerdo con lo discutido previamente en relación a Hiebert y Lefevre (1986).

De un concepto definido cada individuo genera su propia imagen del concepto. Pero cuando a un estudiante se le da una definición formal del concepto, la imagen del concepto definido que se forma en su estructura cognitiva puede ser muy débil (Tall & Vinner, *op.cit.*, 160).

Por ejemplo, Tall y Vinner (*id.*) se refieren a la introducción de los límites de funciones con una explicación informal en el nivel sexto (secundaria). Dicen que a menudo el proceso de límite se introduce cuando se inicia la discusión sobre la derivada, en tal caso la imagen conceptual de un límite puede incluir una pintura mental de una cuerda que tiende a una tangente. En cambio, otros enfoques de la derivada pueden hacer que la imagen conceptual de la derivada se vea como un factor de aumento (magnificación) o como velocidad instantánea.

2.4.3 Imagen y definición conceptual de *razón*

El desarrollo de las imágenes de *razón* (*rate*) inicia con la formación en los niños de las imágenes de cambio en alguna cantidad. Por ejemplo en el desplazamiento de posición o el incremento en el volumen, progresando hacia una imagen coordinada y desenvuelta de las dos cantidades (desplazamiento de posición y duración del desplazamiento, para el primer ejemplo), la cual progresa hacia una imagen de la covariación de dos cantidades, en la que sus medidas permanecen en razón constante (Thompson, 1994, 233).

Las *razones* que involucran tiempo parecen ser las más intuitivas, pero el tiempo, como una cantidad que puede imaginarse que varíe proporcionalmente con otra cantidad, es una construcción no trivial para los estudiantes (*id*).

Se requiere una mayor abstracción para desarrollar una imagen de *razón* que vincule la covariación de las dos cantidades no-temporales, como en el caso del volumen respecto al área. Y la noción de *razón de cambio promedio* de alguna cantidad sobre algún rango de una cantidad independiente.

Un esquema general de *razón* vincula imágenes coordinadas de las respectivas acumulaciones de los cambios (aumentos) en relación a las acumulaciones totales. La coordinación es de tal suerte que el estudiante viene a poseer un pre-entendimiento de que la parte fraccionaria 1 de cualquier acumulación de aumentos de una cantidad en relación a sus acumulaciones totales 1 es la misma como la parte fraccionaria 2 de su acumulación covariante de aumentos en relación a su acumulación total 2. De manera más formal, Thompson, expresa lo anterior como

$$\frac{\text{aumentos acumulados 1}}{\text{acumulacion total 1}} = \frac{\text{aumentos acumulados 2}}{\text{acumulacion total 2}}$$

La expresión anterior no manifiesta la dinámica de una imagen de covariación en una *razón* constante, pero Thompson intenta capturar dicha imagen por medio de la siguiente figura.

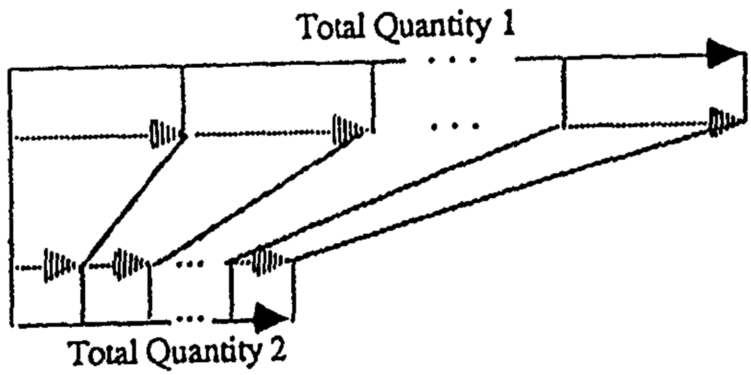


Figura 8.- Proporcionalidad entre las acumulaciones totales y las acumulaciones de aumentos (tomado de Thompson, 1994, p. 233)

Otra forma de interpretar la figura anterior es que es el producto de nuestra coordinación de unidades iterables (Steffe, 1991, citado por Thompson, *op.cit.*, p. 233).

Un aspecto significativo de imágenes maduras de *razón* es que los aumentos y las acumulaciones son dos lados de una misma moneda, es decir, dos cantidades que cambian en medida (acumulada) de modo que ellas permanecen en una razón constante por medio de aumentos simultáneos que se adhieren a la razón. Dos cantidades que cambian a través de aumentos en una razón constante tienen acumulaciones totales que se adhieren ellas mismas a la razón. Por tanto, un registro completo de una imagen madura de *razón* es que el aumento necesariamente implica acumulación y la acumulación necesariamente implica aumento.

2.4.4 Conocimiento de la derivada como resultado de la enseñanza

Para enseñar el concepto de derivada, en condiciones escolares, por medio de fenómenos de variación y de la modelación matemática correspondiente se ve necesario revisar con mayor profundidad los conceptos relacionados con ella, es decir, poner más atención a las dificultades con que se enfrenta el que aprende.

Una manera de proceder es motivar la comprensión de la derivada como *razón* de cambio instantáneo, iniciando con razones de cambio promedio conceptualizadas también como velocidades promedio. Speiser y Walter (1994, p. 137) organizaron a sus estudiantes en grupos de aprendizaje cooperativo y diseñaron sus clases para alentar la discusión crítica y técnica. Centraron sus clases en metas particulares, técnicas o ideas para las que consideraron que sus esfuerzos podrían ayudar más. Los estudiantes de Speiser llevaron a cabo experimentos usando calculadoras gráficas donde se les necesitara y discutieron libremente con sus compañeros.

Speiser y Walter utilizaron una secuencia de fotografías del andar de un gato (Muybridge, 1985; citado por Speiser y Walter, *op.cit.*, p. 138). Pensaron las fotografías como una secuencia de imágenes en movimiento, de manera que lograron una impresión inequívoca de que el gato (la nariz del gato) tenía una velocidad instantánea. Afinaron su concepción anterior preguntándose ¿qué posición tiene una impresión como la de velocidad instantánea?.

Asumieron que las impresiones podrían deberse a sus sistemas nerviosos, a pesar de que comúnmente se les considera como reales. De que en condiciones normales, es factible proceder con seguridad bajo el supuesto de que la construcción del mundo que nos rodea no tiene serias trampas o sitios obscuros. Y que, a pesar de que la impresión de la velocidad instantánea en la secuencia de fotografías del gato, puede ser un lugar importante donde nuestra representación mental de una realidad externa puede descomponerse en pedazos (*id.*, p. 140).

La cuestión a que se enfrentaron Speiser y Walter era saber cómo se formaban las impresiones. Situación que resolvieron haciendo referencia a un experimento conocido en la psicología como el Experimento Phi (Dennett, 1991; citado por Speiser y Walter, 1994, p. 140), el cual sugiere que no podemos imaginar la representación perceptual (o representaciones) para operar en un marco consistente y secuenciado del tiempo. El tiempo secuencial puede ser una construcción del individuo, es decir, "... el tiempo es una abstracción, a la cual arribamos por medio de los cambios en las cosas; que hacemos porque no estamos restringidos a una medida definida, todo está interconectado." (March, E., 1989; citado por Speiser y Walter, *op.cit.*, p. 141).

Del mismo modo se intenta, en este estudio, que el alumno imagine la producción de una sustancia química como el resultado de una reacción química que se desarrolla a lo largo de un período de tiempo.

El movimiento continuo del gato se ve casi indescifrable, en un lugar más allá de la mediciones discretas que Speiser y Walter disponían. Por ello, postularon modelos. Y se enfrentaron a cuestiones fundamentales desde el acto de seleccionar ejes de referencias para representar tiempo hasta el planteamiento de preguntas sobre qué es un gato, o cuál es la percepción que se tiene del gato y cuál es el modelo (*id.*, p. 142).

Un modelo considerado como constructo mental, respecto al tiempo, puede ser "... [u]na noción ... que puede limitarnos innecesariamente... es el punto de vista *lineal del tiempo. Si consideramos como nociones de tiempo* que han sido conectadas a través de las culturas y la historia; podría ser más fácil para nosotros cuestionar este punto restrictivo. En algunas culturas, el tiempo está tratado como un presente universal..." (Langer, E., 1989; citado por Speiser y Walter, *op.cit.*, p. 142).

La noción de modelar y conocer puede ser crítica para los estudiantes en la medida en que *trabajan para entender el* ***significado*** *de la derivada.* Y *una* experiencia como la que estudian Speiser y Walter, ofrece al estudiante, en opinión de ellos, un vocabulario que le permite hacer una descripción detallada de las incertidumbres a las que se enfrenta. Y además, un punto de partida para hablar sobre las manifestaciones mentales (representaciones) y cómo interactúan *con las matemáticas.*

Sobre las consideraciones anteriores, Walter y Speiser tuvieron como meta central, introducir la derivada en forma numérica y gráfica, como una *razón* de cambio antes de relacionarla con tangentes y pendientes.

La presentación que realizaron ganó precisión verbal cuando introdujeron la notación $s=f(t)$ *para indicar la posición de la nariz del gato en términos del* tiempo transcurrido. Hicieron por supuesto la muy común suposición respecto a que esa función estaba definida para todo tiempo t, aunque sólo se conociera un número finito de sus valores (*id.*, 142).

En las condiciones relatadas por los autores se tiene la posibilidad de imaginar la velocidad promedio en cualquier intervalo $[t, t+h]$ *como* $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ y *calcularla entre dos cuadros consecutivos.*

La información anterior no permite contestar sobre la velocidad en un momento determinado, es decir, preguntar acerca de un posible límite para el cociente conforme $h \to 0$. Límite que es la derivada de la función y que en el problema del gato representa la velocidad instantánea en el tiempo t.

Se presupone la existencia de la derivada de la función en cada momento, y se obtiene una nueva función $f'(t)$ que proporciona la velocidad instantánea como una función del tiempo (*id.*, p. 143). La función $f'(t)$ es parte de la presentación que hacen los autores mencionados, de la cual, en un principio, no se tiene una base factual para demostrar su existencia que permita calcular sus valores. Pero posteriormente exploran las consecuencias de tal suposición.

La interpretación de la derivada en relación a la tangente no es útil para la discusión del movimiento del gato, en cambio el centro se encuentra en la velocidad del movimiento, de modo que puedan convencer directamente a los que se inician en el estudio del cálculo.

En esa línea Speiser y Walter ilustran la exploración con las funciones $\operatorname{sen}(t)$ y e^t. Su argumento gráfico se apoya en la graficación secuenciada de $f(t)$; $f(t+h)$; $f(t+h)-f(t)$ y $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$. Y la comparación de los cambios ocurridos entre las gráficas correspondientes. Un punto muy favorable es la explicación de los efectos de las operaciones con las funciones en sus gráficas pues resultan fáciles de explicarse y es un punto de vista muy favorable para la relación entre las gráficas de $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ y $f'(t)$.

Los ejemplos discutidos por Speiser y Walter revelan, como ellos reconocen, la geometría que subyace al cociente de diferencias.

2.4.5 Obstáculos epistemológicos y cognitivos en el aprendizaje de la derivada

Orton (1983) encontró que algunas dificultades experimentadas por los estudiantes de cálculo elemental eran de tipo algebraico, muy comunes, hecho que explica en parte que las dificultades de los alumnos para aprender conceptos de cálculo tienen que ver más con los aspectos procedurales que con la comprensión misma de los conceptos.

Estas dificultades obstruyen el avance en la comprensión y de alguna manera se convierten en obstáculos. Por ejemplo, Orton (*id.*, p. 237) encontró que los estudiantes fueron incapaces de establecer que una secante -al aproximar uno de los puntos de intersección a otro sobre una curva - se convertía eventualmente en una tangente, a pesar de los considerables esfuerzos hechos a través del cuestionamiento en entrevista para que describieran con mayor detalle lo que le sucedía a la secante. Orton encontró mucha confusión respecto a si los estudiantes ignoraban a la secante, puesto que parecía que muchos de ellos sólo enfocaban su atención en la cuerda con los extremos sobre los puntos de intersección con la curva, a pesar de que tanto el diagrama que se les proporcionó como durante la explicación se hizo el esfuerzo para relacionarla con la tangente.

En un enfoque usual de la derivada, los estudiantes, en opinión de Orton (1983) podrían necesitar considerable ayuda para entender a la tangente como un límite del conjunto de secantes.

El cálculo básico del gradiente o *razón* de cambio instantáneo de una gráfica depende de la obtención de una diferencia de los valores de la función con respecto a una diferencia, la mayor de las veces unitaria, de los valores de la variable. En el caso de una línea recta esta *razón* puede obtenerse fácilmente, dado que cualquier triángulo rectángulo con hipotenusa sobre esa recta, proporciona con sus catetos un representación de la diferencia en los valores de la función y en los de la variable. El cociente de ambas diferencias da la rapidez de cambio (promedio), es una regla simple e importante para obtener la *razón* de cambio, por lo que los estudiantes, coincidiendo con Orton (*op.cit.*, p. 238), deberían conocer antes de iniciar el estudio del cálculo.

La recomendación anterior orientó la elaboración de la guía didáctica (ver el capítulo 3 y el anexo 1), porque no sólo se busca ver las regularidades en las respuestas de los estudiantes a preguntas relacionadas con los conceptos de cambio y razón de cambio respecto a sus representaciones, sino indagar de manera más profunda sobre la forma en cómo relacionan los conceptos (imágenes) para explicar las respuestas argumentativas y no solamente selectivas que se les demandan en los instrumentos de este estudio.

Es claro que, en el estudio que reporta Orton (1983), el concepto de proporcionalidad está presente, es decir, el estudiante debe aceptar que la razón entre la función y la variable es la misma para cualquier triángulo rectángulo, siempre y cuando la hipotenusa de ese triángulo rectángulo permanezca sobre la recta en cuestión. En términos generales Orton (*ib.*, p. 238), no encontró que para una gran cantidad de los estudiantes fuera una regla elemental la razón entre las diferencias de la función respecto a las diferencias de la variable, ya se tratara de una recta o de una curva.

Orton utilizó la clasificación propuesta por Donalson (1963, citado por Orton, 1983, 236) de los errores de los estudiantes al responder preguntas sobre razón de cambio promedio e instantáneo de una función y encontró que para el ítem de la figura 9, no obstante de que muchos errores eran ejecutivos, hubo también interpretaciones erróneas que dieron lugar a problemas de tipo estructural (Orton, *op.cit.*, p. 238).

TAREA D1 (Ítem 29)

La gráfica de y para una cierta ecuación, de x=0 a x=6 , se muestra abajo.

¿Cuál es la razón de cambio promedio de y con respecto a x,

(vi) ¿ De A a B?
(vii) ¿De B a E?
(viii) ¿De A a J?

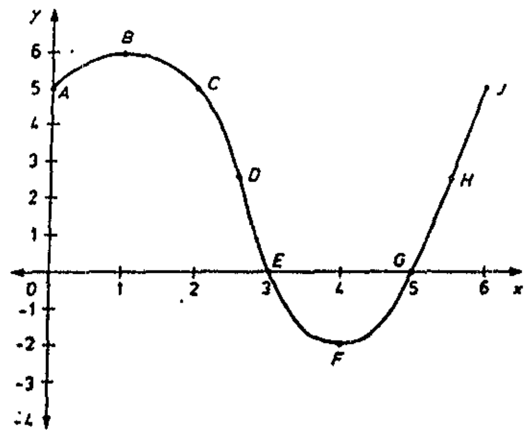


FIGURA 9.- Razón de cambio promedio
(tomado de Orton, 1983, p. 248)

Una manera de explicar algunas de las dificultades que muestran los estudiantes puede apoyarse en la noción de *conflicto cognitivo* (Cornu, 1991, p. 155). Porque cuando el estudiante enfrenta una variedad de concepciones espontáneas[5] con su crecimiento consciente del formalismo fácilmente puede suceder que sostenga ideas contradictorias simultáneamente, llevándolo a una imagen conceptual global que contiene factores de conflicto potencial. Tall y Vinner (1981, p. 153) llaman factor potencial de conflicto a una parte de la imagen conceptual o de la definición conceptual que puede estar en conflicto con otra parte de la misma, respectivamente. Tales factores necesitan no ser evocados en las circunstancias con las que causan un conflicto cognitivo, no obstante, si ellos son evocados los factores concernientes serán entonces llamados factores de conflicto cognitivo.

Los modelos que un estudiante se forma en relación a sus concepciones espontáneas influyen en la manera en que resuelven problemas. Así, en las etapas iniciales del aprendizaje, las concepciones espontáneas entran en conflicto con la definición formal de los conceptos. Los tres tipos de obstáculos cognitivos que Cornu distingue son: *genéticos y psicológicos*, que ocurren como resultado del desarrollo personal del estudiante; *didácticos*, debidos a la naturaleza de la enseñanza y el profesor; y, *epistemológicos*, debidos a la naturaleza de los conceptos matemáticos por sí mismos.

---

[5] Concepciones de una idea que ocurren antes de la enseñanza formal (Cornu, 1991, p. 154).

2.5 Tecnología en la Educación Matemática

El uso de la computadora como medio en la educación obedece a varias líneas principales: juegos, tutoriales, manipuladores simbólicos y simulaciones. En el primer caso, los juegos, la meta curricular es enseñar la conducta de un conjunto de funciones o clases de funciones dadas basada en puntos de vista numéricos o gráficos, o ambos (Kaput, 1992, p. 519). Un ejemplo de este tipo es "Guess my rule" ("encuentra mi regla", Barclay, 1985; citado por Kaput, *ib.*), en el que los estudiantes deben adivinar la regla de correspondencia de una función escogida al azar o de una lista creada por el profesor, de modo que cuando introducen un valor del dominio, la computadora les regresa la imagen, ya sea en forma numérica como un arreglo tabular o en una gráfica cartesiana.

Los tutoriales están relacionados con los intentos iniciales de la instrucción asistida por computadora (CAI, siglas en inglés), para los que se selecciona un contenido educacional, se simula una relación del tipo tutor-tutoreado en la computadora, y su diseño está basado en la estructura de lo que se enseña y en suposiciones acerca del que aprende y sobre la forma apropiada de interacción (*id.*). Los primeros tutoriales de matemáticas tendieron a basarse en la enseñanza de la manipulación sintácticamente generada de sistemas de notación estándares. Los diseñadores de tutoriales adoptaron sin modificación los sistemas tradicionales de enseñanza rutinaria y simplemente transfirieron esas condiciones al nuevo medio proporcionado por la capacidad de interacción de la computadora (*id*).

El enfoque del CAI cambió muy poco los contenidos curriculares y la pedagogía, la única diferencia era la naturaleza impersonal de la retroalimentación a la cual se le reconoce dos aspectos positivos: la privacidad de la interacción y la paciencia de los sistemas de retroalimentación (Bark y Franklin, 1979; citado por Kaput, 1992, p. 520).

Los manipuladores simbólicos son herramientas poderosas pero que como sucede con cualquier herramienta, sólo se pueden usar a toda su capacidad cuando el que las usa sabe cómo hacerlo (Dubinsky y Tall, *ib.*, p. 236). Los manipuladores simbólicos están pensados más para hacer matemática que para aprender matemáticas. De ahí que "...están mejor diseñados para el experto que para el novato..." (*id.*, p. 242).

En las simulaciones Kaput distingue dos tipos, una que se ejecuta a la par del sistema que se modela, en donde puede comprobarse empíricamente por medición y comparar con el sistema modelado. Y un segundo tipo de simulación se usa cuando las escalas espaciales o temporales no permiten la comprobación directa de la simulación que se está modelando, como en el caso de los modelos del sistema planetario y del movimiento molecular. Estas simulaciones son modelos concretos de modelos más abstractos.

Las simulaciones requieren de computadoras mucho más potentes que los programas del tipo CAI, porque se necesita que tanto las cantidades como sus relaciones en los modelos puedan representarse gráficamente. Con el surgimiento de las gráficas (bit-mapped [6]) en las computadoras personales se redujeron las limitaciones para la simulación de manera considerable.

Las herramientas computacionales que se usan en educación son de uso general, varían ampliamente, desde hojas de cálculo, manipuladores simbólicos, utilerías gráficas, programas estadísticos y de modelación de datos, programas de bases de datos, procesadores de palabras y calculadoras avanzadas. Todas ellas son herramientas de propósito general que se crean fuera de la educación, y que se adaptan a propósitos educativos particulares.

Las herramientas de propósito particular o específico tienden a ser más sofisticadas, y se ha llegado a construir una nueva habilidad de los sistemas computacionales en los que se transfieren datos de un sistema a otro. Por ejemplo entre las hojas de cálculo y ambientes de trabajo; entre procesadores de palabras y hojas de cálculo; entre calculadoras avanzadas y procesadores de palabras.

Las computadoras hacen herramientas a su vez, y elaboran medios para construir, como por ejemplo los lenguajes LOGO o BASIC. Los ambientes de trabajo como MAPLE o MATHEMATICA son potentes conjuntos de herramientas matemáticas y al mismo tiempo son herramientas para producir micromundos.

Con todas las ventajas computacionales que se tienen ahora, se plantea la necesidad de "...desarrollar software que ayude al estudiante a conceptualizar ideas matemáticas..." (Dubinsky y Tall, 1991, p. 234). La siguiente metáfora resume lo que está sucediendo con el desarrollo tecnológico en relación a su impacto con la educación matemática:

> Cualquiera que intente describir los roles de la tecnología en la educación matemática se enfrenta a una situación análoga a la de describir un nuevo volcán activo -la montaña matemática está cambiando ante nuestros ojos... (Kaput, 1992, p. 515).

El impacto es en muchas direcciones, en lo que a nosotros respecta, nos afecta en cuanto a saber qué matemáticas son aprendibles y susceptibles de enseñarse, y cómo enseñarlas . El uso de la tecnología no sólo tiene limitaciones técnicas, en buena medida, depende de la imaginación humana para usarla y también de los hábitos y de las estructuras sociales (*id.*). La computadora puede usarse para "...suministrar la correspondencia entre las notaciones inmediatas, explícitas y notorias, donde las contrapartes de las acciones comprendidas en una notación

[6] En una computadora, una gráfica del tipo "bit-mapped" es aquella en la que el despliegue está controlado por un pixel a un tiempo.

pueden exhibirse en otras notaciones, en forma independiente del tiempo." (Kaput, 1989, p. 177).

2.5.1 Recursos representacionales de la tecnología

Una de las preocupaciones de este estudio tiene que ver con identificar las formas del aprendizaje en términos de cognición, de las conexiones internas entre las representaciones mentales de los conceptos, cuando algunas de las representaciones externas correspondientes las genera el alumno en calculadoras avanzadas durante la solución a cuestiones en las que se demanda o no en forma explícita su uso.

Este enfoque es el resultado de examinar detenidamente cómo algunos medios electrónicos pueden usarse para representar ideas y procesos matemáticos (Kaput, 1992, p. 516), y cómo evaluar la eficiencia o ineficiencia de los mismos. Por ejemplo para el concepto de función Goldenberg dice:

> ... Múltiples representaciones conectadas incrementan la redundancia y de ahí que puedan reducirse las ambigüedades que podrían ser inherentes a cualquier representación individual. Las expresiones algebraicas especifican las relaciones exactas, pero no dan ejemplos individuales, ni una visión completa (visual gestalt). Las gráficas proporcionan una gestalt dentro de los límites de la gráfica pero dejan detalles precisos no claros. Las tablas proporcionan ejemplos del mapeo pero no especifican su naturaleza... Decimos de otro modo, que cada representación bien escogida ve a la función desde una perspectiva particular que captura bien algunos aspectos de la función, pero deja otros menos claros... consideradas todas, deberían mejorar la fidelidad de todo el mensaje. (Goldenberg, 1987, p. 197)

Para este estudio interesa destacar algunas de las principales capacidades de representación de las computadoras, de manera especial la producción rápida y secuenciada de gráficas, el despliegue de arreglos tabulares organizados conforme a las escalas de los ejes correspondientes en las gráficas. Las posibilidades de procesar estadísticamente datos asociados a fenómenos de variación y, la capacidad de programación para la reproducción sistemática y productiva de algoritmos.

También es importante señalar la capacidad interactiva[7] de algunos recursos computacionales entre ellos a las calculadoras avanzadas, en el sentido de que difieren de los medios inertes porque producen reacciones físicas a las acciones emprendidas sobre ellas, por ejemplo oprimir las tecla ZOOM o TRACE producen efectos sobre el punto de vista de la gráfica, en el primer caso; exhibición de más información en la pantalla y la presencia del cursor (presencia intermitente de un

[7] Kaput distingue entre un medio inerte y uno interactivo por la capacidad del último para responder físicamente a los "inputs" (1994, p. 380).

asterisco), con el que se puede recorrer la gráfica, de acuerdo a las indicaciones del usuario (acciones del usuario).

Los recursos representacionales de una computadora permiten modelar desde un punto o varios puntos de vista fenómenos de movimiento, como por ejemplo la elongación de un resorte por efecto de diversos pesos, o el movimiento de oscilación del resorte por medio de una función expresada en uno o más sistemas de representación (Kaput, 1994b, p. 381).

Las alternativas denominadas laboratorios basados en microcomputadoras MBL - Microcomputer-Based Laboratory Equipment- facilitan enormemente "... el desarrollo del entendimiento de las relaciones entre los cambios en una situación S y los cambios en el modelo B por el soporte rápido de prueba de hipótesis..." (Kaput, *id.*, p. 389), referido al esquema de la Figura 10.

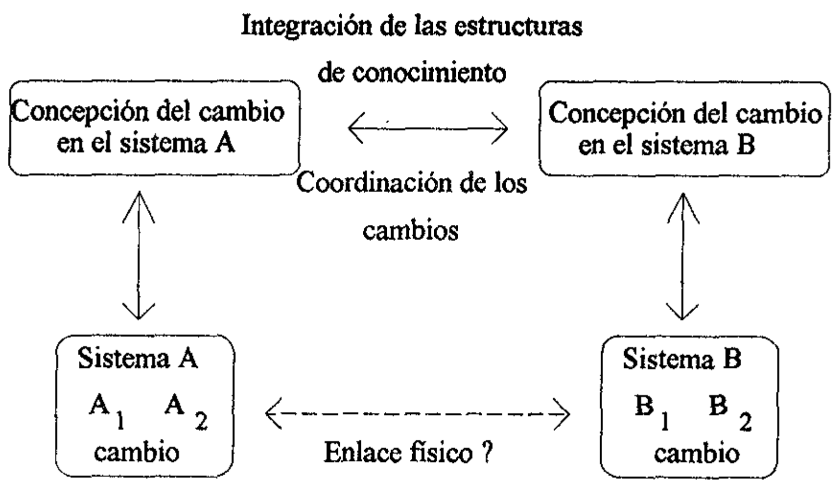


Figura 10.- Enlaces al nivel de acciones (tomado de Kaput, 1994b, p. 389)

Con referencia a la figura 10 , Kaput argumenta:

> ... Por ejemplo, el modelo subyacente podría ser una función lineal representada en una tabla de datos numéricos así como una gráfica de coordenadas. En este caso, el Modelo B se reemplaza por un grupo de representaciones, enlazadas quizás una con otra, como una unidad, que representa a A... Más aún, ... el caso de que la actual situación que va a ser modelada no esté presente , sino más bien, solo el texto está disponible, y el modelador debe conceptualizar la situación, para la cual, el texto es una representación indirecta que combina procesamiento de comprensión con el conocimiento previo de tales situaciones. Conforme el modelo se desarrolla, el texto se vuelve menos que un intermediario, y el modelo mental basado en las representaciones matemáticas viene a relacionarse más directamente a las conceptualizaciones de la situación (la flecha superior en el diagrama). (Kaput, 1994b, p. 390)

Los MBL están pensados para la simulación de fenómenos de movimiento y trabajan conforme a la Figura 11.

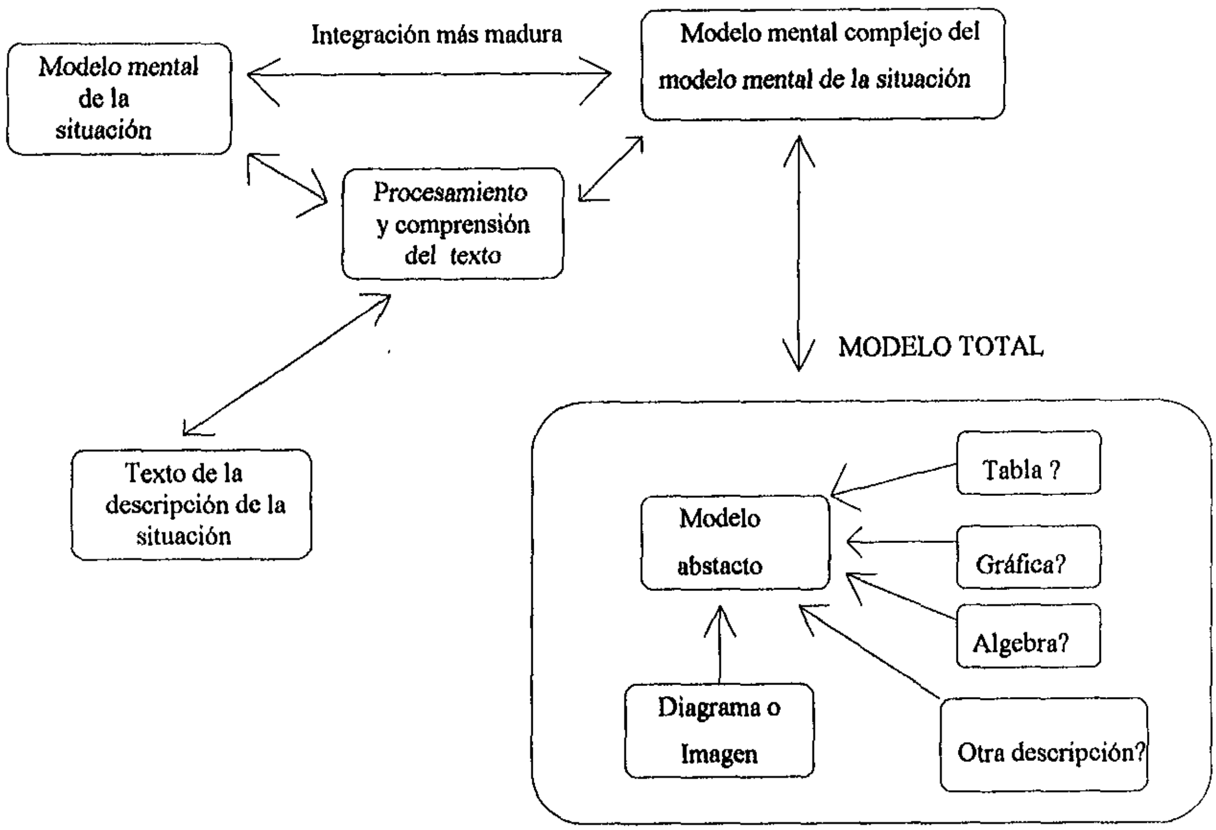


Figura 11.- El "modelo total" de representaciones (tomado de Kaput, 1994b, p. 390)

La simulación en los laboratorios basados en microcomputadoras (MBL) se vale de representaciones figurales, gráficas, tabulares y simbólicas para la exploración sobre fenómenos de movimiento. Las acciones en la computadora están orientadas a favorecer la correspondencia física entre las distintas representaciones, lo cual podría redundar en una ganancia de conocimiento conceptual y procedural de la derivada y la integral, muy relacionados. Pero hay que estar alerta, porque, el considerar soluciones simples y superficiales puede dar lugar a errores conceptuales y conflictos cognitivos (Dubinsky y Tall, *op.cit.*, p. 236).

Si se pretende que el estudiante reconstruya su conocimiento enfrentándose con los radicalmente nuevos conceptos de las matemáticas avanzadas, entre los cuales se encuentran: derivada, integral, límite, continuidad, etc., es preciso que el estudiante gane en experiencia sobre cómo funcionan las ideas y que los educadores reflexionemos activamente sobre los cambios cognitivos requeridos para que integre este nuevo conocimiento en una estructura mental más apropiada (*id.*).

La computadora parece ofrecer muchas potencialidades para el aprendizaje del cálculo, sin embargo en las condiciones de nuestras escuelas de nivel medio superior, no es una alternativa generalizada a corto plazo, en cambio hay más posibilidades para utilizar calculadoras avanzadas en las aulas de matemáticas.

2.5.2 Calculadoras avanzadas y el aprendizaje de la derivada

Tradicionalmente la enseñanza del cálculo diferencial e integral ha estado apoyada en el uso de representaciones estáticas, a pesar de que su objetivo es el estudio de fenómenos dinámicos. Pero, a raíz del desarrollo de los recursos computacionales de hoy día, es posible disponer de software con el que se generen diversos tipos de gráficas, cartesianas en particular. O bien, se elaboren cálculos aritméticos y se ejecuten las operaciones aritméticas que intervienen en los algoritmos conocidos (solución de ecuaciones, aproximación de raíces, evaluación de funciones, evaluación de derivadas e integrales, etc.), por medio de programas.

Las calculadoras avanzadas disponen de utilerías de graficación, programación, cálculo numérico, funciones especiales, recursos estadísticos, posibilidades de comunicación entre calculadoras y computadoras, despliegue en pantallas adecuadas para el aula que facilitan la discusión grupal con un dispositivo denominado *view screen*, el cual es también un valioso instrumento para la observación del trabajo del alumno, por parte de los demás integrantes de la clase o del investigador, pues permite observar las estrategias de solución manteniendo un cierto grado de privacidad para trabajar con ese instrumento (ver diseño de la investigación, sección 3.1, y el proceso didáctico, sección 3.5).

El uso de computadoras y calculadoras avanzadas en la educación matemática requiere discutir una estrategia general que proporcione una visión amplia de los cambios que se están produciendo en las complejas relaciones escolares, desde los efectos en el currículo, las formas de conducir la clase de matemáticas hasta las formas de evaluar el desempeño del alumno en las diversas situaciones que genera el uso de tecnología en el aula. Desde luego se ve la necesidad de indagar dónde es pertinente el uso de los recursos electrónicos dinámicos o el uso de medios estáticos tradicionales, para lo cual es indispensable preguntarse "... qué estamos tratando de enseñar y cómo..." (Dubinsky y Tall, 1991, p. 242).

Una manera de estimular y ayudar al estudiante en la construcción de su conocimiento es proporcionándole software rico que incorpore poderosas ideas matemáticas de modo que el estudiante las pueda manejar y reflexionar en ellas (Dubinsky y Tall, *ib.*, p. 235).

Otra forma que proponen Dubinsky y Tall es haciendo que el alumno construya programas matemáticos en un lenguaje de computación diseñado para que el acto de programar sea simultáneo a la construcción mental de los procesos matemáticos subyacentes (*id.*).

Ambas posiciones pueden adecuarse a las posibilidades de las calculadoras avanzadas. En el primer caso se requiere de guías didácticas y programas bastante simples pero ricos, conceptualmente hablando, que favorezcan la reflexión del alumno. Y en el segundo caso, el alumno elabora o mejora programas que resuelvan problemas concretos, en lenguaje BASIC.

En un sentido muy general coincidimos con Kaput cuando dice que "[l]a estructuración de la experiencia es la esencia de cualquier tipo de educación... En matemáticas, empezamos por estructurar la *acción física...*", *lo cual explica en parte su afirmación* de que "[m]uchas de las dificultades del estudiante pueden atribuirse a los intentos para apoyar bastante su desempeño en los aspectos físicos de los sistemas en ausencia de las estructuras conceptuales necesarias." (Kaput, 1994b, p. 385).

El uso de la calculadora avanzada para promover el aprendizaje de la derivada está pensado para desarrollar el entendimiento y la integración, a la estructura conceptual, de las relaciones entre las representaciones mentales correspondientes a representaciones externas de los conceptos asociados a la *derivada y a la derivada misma.*

En este estudio se utilizaron representaciones discursiva (texto), gráfica, numérica, simbólica (algebraica) y tablas (arreglos tabulares), de los conceptos de cambio, razón de cambio, razón de cambio instantáneo, *velocidad, secante,* tangente, entre otros. Dichas representaciones fueron producidas en materiales impresos -por el investigador y el estudiante-, en calculadoras avanzadas producidas por el estudiante al responder por escrito y en entrevista, cuestiones especialmente diseñadas para indagar sobre las conexiones entre las representaciones mencionadas.

Una hipótesis de trabajo que orientó la investigación se resume por la idea "...[u]no nunca debe olvidar que una acción particular es una personificación o una ilustración de una relación general solo para quien ya tiene cognitivamente [hablando] *esa relación. Para quien no es así, es sólo una acción más.*" (Kaput, 1994b, p. 394).

Otro supuesto del estudio es que la computadora o la calculadora avanzada pueden ayudar a proporcionar experiencias ricas al estudiante para construir *conocimiento conceptual y procedural, en torno a la derivada.*

CAPITULO 3 METODOLOGÍA

Introducción

El presente capítulo se ocupa, en una primera sección, del diseño metodológico del estudio y de su pertinencia de acuerdo a las cuestiones de investigación; en segundo lugar, se enlistan algunos criterios de confiabilidad y del cumplimiento de los mismos. En tercer lugar, se explica la selección de los participantes. En la cuarta sección, se presenta el proceso didáctico que se siguió durante la indagación en el aula . La quinta sección se ocupa de la descripción de los instrumentos del estudio y la forma como se elaboraron. Por último, la sexta sección se refiere al procedimiento de recolección, organización y análisis de los datos, y la presentación de los resultados.

3.1 Diseño Metodológico

Este estudio tiene la finalidad de indagar sobre el razonamiento visual desde el punto de vista de los procesos cognoscitivos que tienen lugar en el estudiante cuando la enseñanza de la matemática se vale de diversas representaciones respecto a un tópico fundamental, la derivada. Al respecto, las cuestiones de investigación se refieren a si existe o no evidencia de la integración cognitiva entre dos o más representaciones de los conceptos relacionados con la derivada y qué relación guarda dicha integración con las actividades de aprendizaje.

La investigación, por tanto, requirió un cierto grado de profundidad y condiciones naturales (aprendizaje escolar) de desarrollo, de ahí que un paradigma naturalista (Lincoln y Guba, 1985) de indagación se consideró pertinente para la construcción holística de esa realidad, y se reconoce que:

- Los valores del investigador y el paradigma seleccionado influyen en el planteamiento de las cuestiones de investigación y las hipótesis de trabajo, y

- La investigación y la interpretación de los hallazgos están influenciadas también por el marco teórico utilizado para realizar la colección y el análisis de los datos.

Otra influencia en el estudio es el contexto, es decir, los alumnos como elementos de un grupo social específico, el programa de estudio, el profesor, los recursos materiales en el aula, etc.

3.2. Confiabilidad

En los estudios cualitativos se ha convenido en ilustrar de manera general las afirmaciones y aseveraciones por medio de muestras de episodios (Atkinson, Delamont y Hammersley, 1988; Taylor y Boydan, 1984; citados por Cobb y Whitenack, 1996, p. 225); sin embargo, las consideraciones siguientes contribuyen a lo razonable y justificable del análisis desarrollado.

- El conjunto de datos se analiza sistemáticamente probando conjeturas provisionales a través del primer nivel analítico de las respuestas escritas (ver sección 3.6) que da lugar a los protocolos de las entrevistas con los cuales se producen interpretaciones y conjeturas iniciales. Este punto da cuenta de la construcción empírica.

- Otra consideración que eleva el nivel de credibilidad del análisis estriba en la prolongada permanencia del investigador con los participantes del estudio (Lincoln y Guba, 1985), es decir, la experiencia de observar e interactuar con los participantes provee una fuente de primera mano y ésta es una interiorización crucial cuando se intenta dar una explicación de su actividad (la correspondencia física entre las representaciones).

- Una tercera consideración consiste de las críticas de investigadores cercanos al estudio (Martínez y Campos) pero que no están familiarizados con los participantes y por eso es que tienen capacidad de ofrecer interpretaciones alternativas a las suposiciones aparentemente autoevidentes y las abrogaciones.

3.3 Los Participantes

El estudio se realizó con alumnos de una clase de matemáticas del bachillerato de la UNAM, ciclo escolar 96, área fisico-matemáticas, pertenecientes a un nivel socioeconómico medio y cuyas edades fluctuaban entre 16 y 18 años. El acceso a esa clase se dió por el hecho de que el investigador era el profesor de la asignatura (p. 1).

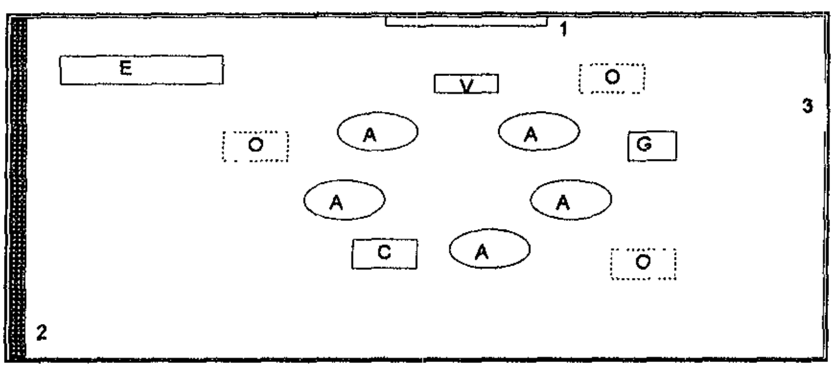
Al inicio de la fase principal del estudio, durante las tres primeras sesiones, se trabajó con todos los miembros de la clase (43 alumnos) durante el horario asignado (jueves 7:00-7:50 y viernes de 7:00-8:40), agrupados en ocho equipos que los alumnos formaron de acuerdo a sus preferencias, respetándose así, en lo posible, condiciones de negociación y decisión naturales (Webb, 1982; Cobb y Wood, 1991; citados por Cobb y Whitenack, 1996, p. 215). Pero después de valorar las tres primeras sesiones y en especial debido a la imposibilidad de obtener registros comprensibles de las audio y videograbaciones, porque los diálogos y discusiones de los alumnos no se podían entender, se decidió estudiar a dos equipos por separado. La elección de los equipos participantes se hizo en función de su disposición para cooperar con el estudio y por su disponibilidad de tiempo para ello. Los integrantes de los dos equipos en estudio fueron Mirelle, Viridiana, Diana y Andrea del primer equipo y Luke, Fernando, Roky, Omega y Rafael del segundo equipo, cuyos nombre sustituyen a los verdaderos y fueron elegidos por cada participante. Andrea y Luke no permanecieron en todo el tratamiento experimental y por ello no se les incluye en los resultados y la discusión.

Cada equipo trabajó en el horario acordado -equipo 1 los jueves 10:20-11:10 y viernes de 7:00-7:50; equipo 2 los jueves 9:30-10:20 y los martes de 7:00-7:50 horas, en las condiciones descritas en el proceso didáctico.

3.4. Proceso Didáctico

El tratamiento experimental se desarrolló en doce sesiones de clase cuya metodología consistió del trabajo en pequeños grupos -cuatro o cinco alumnos- conducido por la primera parte de la guía didáctica (ver instrumentos) durante las primeras diez sesiones. En las restantes dos sesiones los participantes trabajaron en forma individual con la segunda parte de la guía. En una semana se llevaron a cabo dos sesiones; la primera y tercera sesiones duraron cerca de 65 minutos, y las restantes sesiones tuvieron una duración de 40 minutos cada una.

El aula considerada como un contexto de interacción social (Campos y Gaspar, 1995; Bloome, 1992) es un salón de 5.80 por 7.50 metros, con pupitres individuales que se colocan en círculo. El escenario a partir de la cuarta sesión se ilustra en el esquema 1.



Participantes	Recursos movibles	Referencias ambientales
A alumno	C cámara de video	1 pizarrón (pantalla)
O observador (posiciones alternativas)	E escritorio	2 ventana
	G grabadora de audio	3 entrada
	V view-screen	

Esquema 1.- Aula

Para el diseño del proceso didáctico *conducido por la guía didáctica* (véase instrumentos, sección 3.5) se tomó en cuenta que "... [l]a interacción de pares, como contexto de conversación entre los que aprenden, involucra tanto aspectos cooperativos como individuales; co-operativo porque, al definir referencias, los estudiantes se esfuerzan a trabajar juntos para asegurarse de que reconocen el referente correcto, e individual porque, en su turno, cada participante puede desarrollar su propia perspectiva." (Amigues, 1990, p. 29)

Los recursos tecnológicos que se usaron en el aula durante todas las sesiones fueron una calculadora avanzada o graficadora con dispositivo para view-screen, pantalla, vídeo grabadora y grabadora de audio. Las actividades del investigador-profesor consistieron de la colocación del equipo de videograbación momentos antes de iniciar cada sesión; distribución de los materiales didácticos; grabación de las preguntas y respuestas que se le plantearon por su carácter de *conductor del proceso didáctico* y observación de las sesiones.

A partir de la cuarta sesión se observaron únicamente a los dos equipos participantes (véase la sección 3.3) y las actividades del investigador-profesor se centraron más en la observación de la discusión y actividad de los integrantes de cada equipo.

Durante la videograbación de las doce sesiones del proceso didáctico el view-screen de la calculadora resultó ser un instrumento muy valioso para la observación de las acciones de los alumnos con la calculadora, durante la discusión y el trabajo al interior de cada equipo, así como durante las entrevistas, porque cuando los alumnos usaron la calculadora con el dispositivo para el view-screen el investigador podía observar en la pantalla las acciones de los alumnos manteniendo una distancia que favoreció el trabajo independiente y un cierto nivel de privacidad que no es posible tener cuando el investigador permanece junto al alumno observando sus acciones en su calculadora.

3.5. Instrumentos

Los instrumentos del estudio fueron:

- Una guía didáctica: 1. *Reacción química*. 2. *Trayectoria del agua* (anexo 1).
- Observaciones semiestructuradas (formato de observación, anexo 2), y
- Protocolos de entrevistas (basados en los mismos ítems de la guía, anexo 3).

La guía didáctica se diseñó para indagar sobre la integración cognitiva entre dos o más representaciones internas de los conceptos relacionados con el concepto de derivada a partir de las correspondencias que el alumno establece entre las representaciones externas. Y, para conducir el aprendizaje de la derivada basado en representaciones discursivas (D), gráficas (G), numéricas (N), simbólicas o algebraicas (S) y tabulares (T), véase la página 28. Las representaciones gráficas y tabulares se generaron principalmente en calculadoras avanzadas. Los recursos de las calculadoras avanzadas utilizados para la realización de las actividades y la solución a las cuestiones contenidas en la guía didáctica incluyen graficación, cálculo numérico, presentación de tablas de valores y programas especialmente diseñados para algunas actividades. Una primera versión de esa guía didáctica se utilizó en un estudio piloto (Balderas, 1996a) cuyos resultados y los del proceso de validación -con expertos en matemáticas y educación matemática y profesores en enseñanza media superior (Balderas, 1995b,c)- a que fue sometida, dieron lugar al instrumento denominado en lo sucesivo guía didáctica.

La guía didáctica tiene dos partes, en la primera se estudia la cantidad de sustancia producida en una reacción química a partir de una colección de datos presentados en un arreglo tabular. Este fenómeno está planteado en libros de texto básicos de cálculo diferencial que se utilizan en la enseñanza formal de la materia, a partir de una relación funcional dada, entre las variables cantidad de sustancia y tiempo transcurrido. La discusión matemática, usualmente, excluye la referencia al contexto de la reacción química y la construcción de la relación funcional, tema que se trata en cursos de estadística. Esa situación no exige del alumno una interpretación de la covariación entre la cantidad de sustancia producida y el tiempo transcurrido, se ocupa más de los aspectos algorítmicos. Por lo que se diseñó una presentación, que sin ser la usual, resultara apropiada para que el alumno mostrara las correspondencias físicas entre las representaciones de los conceptos involucrados.

La segunda parte de la guía está dedicada al análisis de la trayectoria del agua que sale por una manguera, fenómeno de variación propuesto por el profesor y doctor Rüdiger Schäfer, Universidad de Bremen (Alemania), como un modelo cuadrático de variación más próximo al entorno del alumno. El diseño de las actividades tuvo por objetivo documentar las correspondencias físicas entre las representaciones en estudio de manera individual, sin interacción entre los participantes, para analizar las respuestas individuales. Esta parte se aplicó en condiciones de examen, es decir, no se permitió la interacción entre los participantes. La finalidad de este cambio en el proceso didáctico se justificó por la necesidad de recabar datos que no estuvieran afectados por la interacción.

El contenido de la guía didáctica está organizado como se ilustra en la tabla 1 (p. 76). El análisis de los dos fenómenos dinámicos antes citados se hace a lo largo de doce secciones que contienen 18 actividades. Los ítems de la guía didáctica se agrupan en nueve rubros que se denominan conforme a conceptos organizadores (Ausubel, 1973) los cuales proveen un contexto temático para la correspondencia física entre las representaciones en estudio. En la primera lección se analiza una colección discreta de pares de datos en cuanto a los cambios de las dos variables involucradas, tiempo transcurrido y cantidad de sustancia producida en una reacción química.

La segunda lección contiene una introducción al concepto de velocidad promedio y su relación con la razón de cambio promedio. Se parte de una discusión gráfica para después utilizar el programa MODISCRE diseñado como puente entre el manejo de datos discretos y el comportamiento continuo de la cantidad de sustancia producida, programa que permite hacer una aproximación con segmentos de recta.

La construcción de un modelo continuo que aproxime el comportamiento de la cantidad de sustancia producida se hace en la tercera lección, con herramienta algebraica. En la cuarta lección se invierte el proceso de la lección anterior, es decir, se calculan con el modelo continuo las ordenadas de un par de puntos y la velocidad promedio correspondiente; después se gráfica lo conducente. En esta lección se introducen conceptos de aumento y disminución en la variable independiente así como pendiente de una secante. En la parte final de la lección se insiste en el concepto de velocidad promedio en un intervalo y en la pendiente de la secante a la gráfica en cuestión.

La lección cinco contiene la parte medular de la construcción del proceso de límite involucrado en la derivada. La actividades se hacen en dos direcciones, una que es construir una tabla que refleje el comportamiento del cursor acercándose a un punto por ambos lados en términos de los valores del decremento o incremento h y la otra, organizando los datos generados al ejecutar el programa DERIVADA cuando se seleccionan valores de h cada vez menores. Ambas actividades utilizan representaciones simbólicas, gráficas y tablas.

La sexta lección completa el análisis de las razones de cambio y las pendientes en cuanto a la posición de las secantes en las gráficas, es decir, se estudia el comportamiento de las secantes para los valores de h utilizados en la lección anterior. La parte final de esta lección contiene dos ítems (1.8.15 y 1.8.16) a manera de conclusión.

La séptima y última lección tiene dos propósitos, uno es ver cómo cada participante usa sus recursos representacionales en el contexto de un problema de trayectoria. En segundo lugar plantear la problemática de la dirección de la trayectoria para observar si los participantes la relacionaban o no con la tangente.

Los ítems se presentan en forma discursiva pero con referencia a otra u otras representaciones en estudio; esta situación exige una comprensión de los conceptos referidos y representados de maneras diversas por parte del alumno que redunda en una exigencia o demanda potencial de representaciones (DR) para el alumno. Algunos ítems piden explicaciones sin especificar o condicionar el tipo de representaciones a utilizar, a fin de que el participante decida cuál o cuáles representaciones usar para responder y de qué forma. En otros, se hace explícita la representación a usar en la respuesta. En la figura 12 (p. 78) se aprecia la estructura relacional entre los ítems y la demanda potencial de representaciones (DR) de cada uno.

Cabe señalar, que el hecho de que cada participante mostrase una determinada representación no significa que no posee otras, es más, un supuesto fuerte del estudio es que de cada concepto el estudiante posee una representación mental que expresa, a nivel externo, por una o más de las representaciones socialmente adquiridas, especialmente en condiciones escolares.

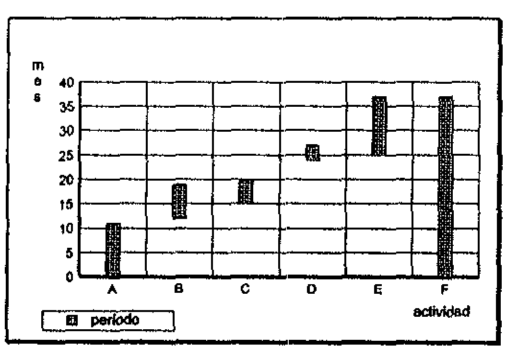
3.6 Colección y Análisis de los Datos

Como se dijo en la sección 3.1, las cuestiones de investigación se refieren a si existe o no evidencia de la integración cognitiva entre dos o más representaciones de los conceptos relacionados con la derivada y qué relación guarda dicha integración con las actividades de aprendizaje. De ahí que las variables del estudio fueron las conexiones entre las representaciones discursivas, gráficas, numéricas, simbólicas y tabulares que muestran los alumnos al realizar actividades de aprendizaje.

A fin de aproximar una respuesta a las cuestiones anteriores se estudió la organización conceptual del estudiante, respecto a los conceptos y relaciones que los conectan, que están presentes en el material de aprendizaje y que se ofrecen al estudiante. Las actividades principales del estudio se desarrollaron conforme al siguiente listado y su evolución se aprecia en forma comparativa en el gráfico.

	ACTIVIDADES	INICIO	TERMINO	DURACIÓN (meses)
A	Diseño de instrumentos	octubre 93	septiembre 94	11
B	Estudio exploratorio	octubre 94	mayo 95	8
C	Adecuación de los instrumentos	enero 95	junio 95	6
D	Colección de datos en: documentos, entrevistas y videograbaciones	octubre 95	enero 96	4
E	Análisis y discusión de datos	noviembre 95	noviembre 96	12
F	Revisión de la literatura	octubre 93	noviembre 96	37

Desarrollo del estudio



Fuentes

Los datos provienen de las respuestas escritas a los ítems de la guía didáctica, recolectadas en las 12 sesiones de clase descritas en el apartado 3.4, que conformaron el tratamiento experimental, y de las transcripciones de las entrevistas realizadas entre cinco o siete días después de las sesiones correspondientes. Para elaborar este reporte, se realizó un muestreo selectivo de los ítems que mostraron mayor relevancia para el análisis de las conexiones entre las representaciones que se estudiaron. Los ítems seleccionados fueron: 1.2.1, 1.2.3, 1.3.1, 1.4.3, 1.5.3, 1.5.4, 1.5.5, 1.7.1, 1.8.2, 1.8.3, 1.8.9, 1.8.10, 1.8.12, 1.8.18, 1.8.14, 1.8.15, 1.8.16, 2.2.p, 2.2.2, 2.2.7, 2.4.1 y 2.4.2, que hacen un total de 22 de los 44 que contiene la guía didáctica.

Se llevó a cabo la triangulación de la interpretación con los participantes a través de entrevistas cuyos protocolos se diseñaron para constatar las interpretaciones que dieron lugar a la construcción de las categorías abajo expuestas.

Análisis

De acuerdo a los fines del estudio y en relación a la organización conceptual se tomó en cuenta que "...para cualquier tópico dado, cualquier persona tiene una idea, alguna descripción y aún, alguna explicación por si misma, obtenida a través de los procesos culturales y la interacción social." (Campos y Gaspar, 1995, p. 8).

En el análisis de los datos se consideró que

> "...los mecanismos de mediación se definen mejor como estructuras cognoscitivas que se codifican en lenguaje sólo de manera parcial y que, a menudo, funcionan en el nivel del conocimiento tácito." . "...es importante destacar que cuando se piensa en una generalización de esta manera, la diversidad de los entornos escolares se convierte en una ganancia, no en una pérdida: cuando la diversidad es drástica, el sujeto enfrenta todo tipo de novedades que estimula su adaptación; en consecuencia, las estructuras cognoscitivas del sujeto se integran más y se vuelven más diferenciadas. Una vez que se enfrenta y adapta la novedad, el sujeto tiene una percepción más rica y, supuestamente, actúa de manera más inteligente." (Donmoyer, 1992, p. 8)

De ahí se estableció una hipótesis de trabajo en el sentido de que al ofrecer y hacer que los alumnos posean amplios repertorios de esquemas se promueve la integración entre las imágenes conceptuales de dos o más representaciones. Lo anterior sugirió un camino para analizar la integración cognitiva (Goldin y Kaput, 1992) entre dos o más representaciones mentales de los conceptos, de constatar su presencia y dar cuenta de ellas de manera más diferencial.

Una concepción enriquecida de la integración cognitiva (IC) permite obtener una comprensión de ese proceso de manera tal que sea posible descubrir aspectos distintos o diferentes ángulos del proceso mismo. Por tanto y coincidiendo con Donmoyer (*op.cit.* , p. 81) se plantearon preguntas acerca de la tipicidad de la IC. Para estudiar el proceso de IC se requirieron datos medianamente naturales, es decir, descripciones con bajo nivel de inferencias, sobre el desempeño del alumno y de síntesis de las transcripciones de entrevistas.

La observación de la correspondencia física entre dos representaciones de los conceptos involucrados en el estudio, en el contexto específico del aula de matemáticas y con el uso de tecnología, que emplearon e interpretaron los alumnos, nos llevó al análisis de la IC mediante respuestas escritas y orales.

Respecto a las respuestas escritas y en el primer nivel de análisis se estudió la organización conceptual. Campos y Gaspar (1995) proponen y utilizan el Modelo de Análisis Proposicional (MAP) para identificar las principales ideas en una organización conceptual, la organización por si misma y su contenido conceptual y lógico (*id*, p. 10). Se detectó la presencia y organización de los conceptos y relaciones contenidos en las respuestas conforme al MAP. En primer lugar, se identificaron los componentes lingüísticos[7] de las respuestas escritas, se conservaron los que correspondían a conceptos y relaciones. Y después de una primera lectura de las respuestas se precisaron los protocolos de las entrevistas, en cuyas transcripciones también se identificaron los conceptos y relaciones.

En un segundo nivel se analizaron las correspondencias físicas (Goldin y Kaput, 1992) entre las representaciones utilizadas por los participantes en sus respuestas a los ítems de los materiales y de los protocolos, con la finalidad de dar cuenta de la integración cognitiva entre las correspondientes imágenes mentales.

El componente gráfico del estudio de las representaciones y los procesos cognoscitivos en el aprendizaje de matemáticas, requirió además del análisis semántico y sintáctico del lenguaje común y simbólico, el análisis del razonamiento visual (Tall y Vinner, 1981; Moses, 1982; Presmeg, 1986; Dubinsky y Tall, 1991; Thompson, 1994). Este último análisis se realizó a través de las manifestaciones escritas (textuales, gráficas, simbólicas y tabulares) que ocurren a nivel externo tanto en las respuestas escritas como en las entrevistas.

En el tercer nivel de análisis se comparó el contenido conceptual de la respuesta con la expectativa conceptual que se tiene para cada ítem a fin de contextualizar la respuesta. Las tablas 2 y 3 (p. 77) resumen los niveles y etapas del análisis.

[7] Conceptos y relaciones, sustantivos y formas verbales principalmente.

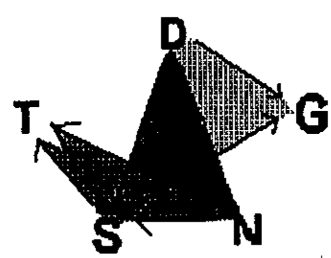
Categorías

Para documentar la correspondencia física entre las representaciones en estudio (p. 28), se codificaron las representaciones de los conceptos que cada participante utilizó en alguna de las categorías D, G, N, S y T.

En esta etapa se dio la construcción de la categoría[8] "concepto representado en la forma X que alude a la representación Y", denotada por $X \rightarrow Y$, a la que se denomina *conexión bidimensional*, en el sentido de que se establece para dos representaciones[9]. Tanto X como Y son alguna de las cinco representaciones D, G, N, S ó T, pero diferentes, así que, teóricamente, hay veinte conexiones bidimensionales posibles.

Se usó la codificación $X \rightarrow Y$ para las representaciones de los conceptos conforme al tipo de representación X utilizada por el alumno en su respuesta al ítem y por la referencia indirecta que hace a otra representación Y. El contexto que permitió determinar el tipo de representación y la referencia a otra fue el material didáctico y las acciones del participante con el mismo y con la calculadora.

Por sí misma la codificación $X \rightarrow Y$ da cuenta de una conexión entre dos representaciones y sirve de base para la codificación de las conexiones. Si pensamos al conjunto de representaciones en estudio $R = \{D,G,N,S,T\}$ como un conjunto de puntos y al conjunto de conexiones bidimensionales como formado por "aristas" o "líneas" que van de un punto a otro, las configuraciones que se obtienen para la respuesta a cada ítem las podemos considerar como digráficas[10] (Harary, F., Norman, R., Cartwrigt, D., 1965, p. 9).



Digráfica que representa la configuración de las conexiones en la respuesta a un ítem

Dicha configuración es una digráfica definida sobre dos conjuntos finitos (las representaciones y las conexiones) para los que se tienen dos funciones en el conjunto de conexiones y con rango contenido en R, que definen el extremo

[8] Las categorías son relaciones entre objetos particulares y modelos cognitivos; asignar un objeto a una categoría es afirmar que una relación tal existe (Neisser, 1987, p. 22, trad.)
[9] Esta acepción del término *dimensional* no se refiere a la connotación matemática.
[10] Término sugerido por G. Pòlya (Harary, et.al., 1965, p. 2).

inicial X y el final Y de la conexión **X $\rightarrow$ Y**. No usamos la notación usual (X,Y) para la *conexión bidimensional* porque **X $\rightarrow$ Y** es una notación más cercana a la referencia empírica.

Los axiomas que satisfacen las digráficas son:

A_1 : El conjunto R es finito y no vacío
A_2 : El conjunto de conexiones bidimensionales es finito
A_5: No hay conexiones bidimensionales distintas con los mismos puntos inicial y final, es decir, no hay líneas paralelas.
A_4 : No hay conexiones entre el mismo punto, es decir, no hay lazos.

El uso de digráficas para estudiar las conexiones abre un campo vasto de investigación que no corresponde al alcance de este estudio, sólo haremos referencia a ciertas características de las digráficas que permiten describir la estructura representacional de los participantes. Algunas características que resultan particularmente interesantes son las configuraciones completas, totalmente disconexas, y transitivas (Harary, *et.al.*, 1965, p. 12). La primera significa que existe al menos una conexión bidimensional entre cualquier par de representaciones. La segunda indica que la respuesta del participante no contiene conexiones bidimensionales. Y la tercera, informa sobre los saltos entre conexiones bidimensionales cuando éstas se analizan en relación a su secuencia en la respuesta.

Una justificación del uso de digráficas para las configuraciones de las conexiones bidimensionales es que con ellas se estudian los patrones de relaciones entre pares de representaciones y en este sentido porque "... pueden servir como modelo matemático de las propiedades estructurales de [un] sistema empírico que consiste de relaciones entre pares de elementos." (*id*, p. 2).

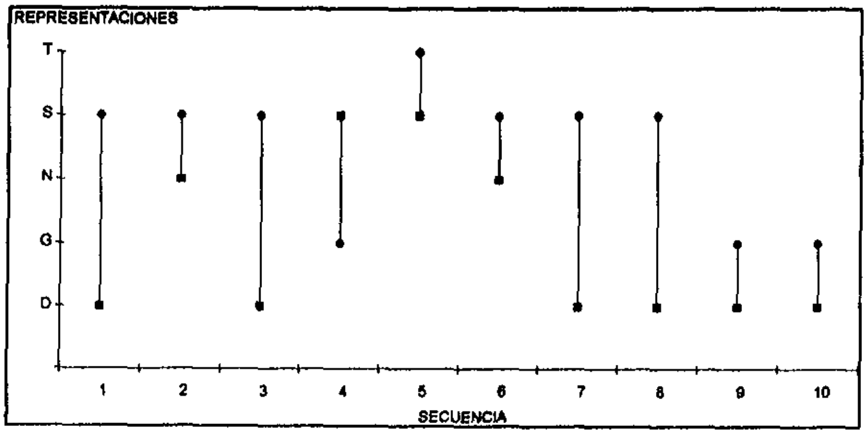
Una interpretación de las digráficas generadas por las configuraciones de conexiones bidimensionales estriba en la coordinación entre los elementos empíricos: "conceptos representados en una forma" y "relaciones o referencias entre dos representaciones" ; y sus puntos D,G,N,S,T y las líneas dirigidas (flechas).

Otra categoría está formada por las conexiones tridimensionales representadas mediante un arreglo de tres letras distintas, de entre D, G, N, S y T (regiones sombreadas), cuyo orden no es significativo y que denotan la presencia de una relación **r** entre dos conceptos representados en cualquiera de las tres siguientes posibilidades: X$\rightarrow$Y r X$\rightarrow$Z ó X$\rightarrow$Y r Y$\rightarrow$Z ó X$\rightarrow$Y r Z$\rightarrow$Y

Las conexiones tridimensionales documentadas fueron diez : DGN, DGS, DGT, DNS, DNT, DST, GNS, GNT, GST, NST.

Las conexiones bidimensionales y tridimensionales permitieron indagar de manera indirecta sobre la integración cognitiva que el participante hizo entre las representaciones estudiadas.

La respuesta escrita a cada ítem tiene una secuencia de conceptos que produce una secuencia de representaciones que informa sobre qué tanto se refleja la demanda potencial de representaciones, en qué proporción se usa cada representación y cuáles tipos de conexiones tridimensionales contiene dicha respuesta. Las gráficas de las secuencias de representaciones y conexiones bidimensionales, por cada ítem y participante facilitaron el análisis de las tres cuestiones anteriores. Véase por ejemplo la siguiente gráfica, que muestra la secuencia de las representaciones bidimensionales presentadas en una respuesta escrita.



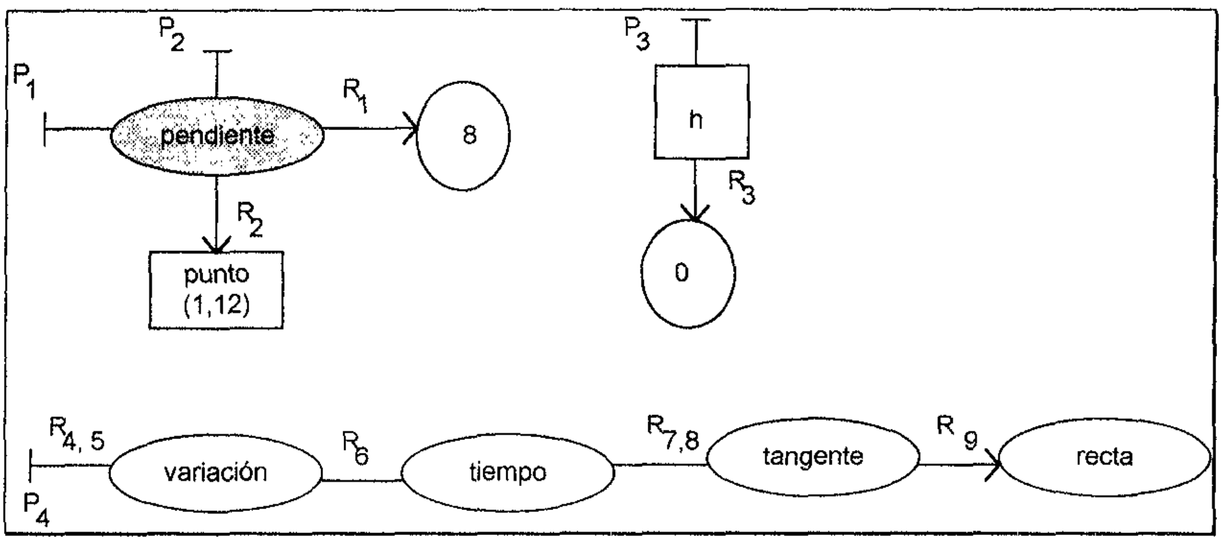
En el eje horizontal se registra la secuencia de los conceptos contenidos en la respuesta escrita conforme a su orden de aparición. En el eje vertical se registran las representaciones en estudio ordenadas alfabéticamente para facilitar la comparación de las secuencias de los participantes. Se denota por un pequeño cuadrado la representación X que usa el alumno para el concepto correspondiente y por un círculo la representación Y que alude, de este modo se logra una presentación secuenciada de las conexiones bidimensionales X→Y encontradas en cada respuesta.

Organización de los datos

La organización de los datos se hizo conforme a las etapas enlistadas en las Tablas 2 y 3 (p. 77). A continuación ilustramos el manejo de los datos de Roky correspondientes al ítem 1.8.9. En primer lugar y al cabo de las primeras cuatro etapas se elaboraron arreglos matriciales y mapas como se muestra en las primeras cuatro columnas de la tabla y en el mapa siguientes.

Respuesta codificada en proposiciones, conceptos relaciones y conexiones de Roky.

Ítem	Prop.	Conceptos	Relaciones	Conexiones bidimensionales	Conexiones tridimensionales
1.8.9	P_1	C_1: pendiente C_2: 8	R_1: se acerca	1. D→S 2. N→S, N→T	DNS
	P_2	C_1: pendiente C_3: punto (1,12)	R_2: es	3. D→S 4. S→G	DGS
	P_3	C_4: h C_5: 0	R_3: =	5. S→T 6. N→S, N→T	NST
	P_4	C_6: variación C_7: tiempo C_8: tangente C_9: recta	R_4: o sea R_5: no hay R_6: de R_6: y R_7: es R_8: toca	7. D→S 8. D→S 9. D→G 10. D→G	DGS



Mapa proposicional de la respuesta escrita de Roky al ítem 1.8.9

En el mapa se denotaron mediante óvalos los conceptos representados discursivamente, con círculos a los conceptos representados en forma numérica y con rectángulos a los que estuvieron representados en forma simbólica. Para las representaciones gráficas y tabulares se utilizaron rombos y triángulos respectivamente. Los conceptos pertenecientes a dos o más proposiciones, llamados conceptos nucleares (Campos y Gaspar, 1995), se identificaron sombreando el área de la figura correspondiente.

Finalmente, el análisis de los datos provenientes de las entrevistas se hizo en ocho etapas y tres niveles (ver tabla 3, p. 77). De la transcripción de las entrevistas se seleccionaron las intervenciones de los alumnos y se analizaron de manera similar a las respuestas escritas. Por ejemplo, el extracto de la entrevista se codificó como se ilustra abajo, y el arreglo matricial correspondiente, que se produjo al seleccionar las participaciones de Roky (*A*), y realizar las primeras cuatro etapas del primer nivel de análisis aparece en la tabla de la página 75. Los datos así obtenidos sirvieron para cotejar las respuestas escritas, convirtiéndose en un marco de interpretación importante para el estudio.

Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.8.9

Cod.	Part	Contenido	Intervención simultánea	Acotaciones
189Ro01	*I*	El 1.8.9, ¿cuál es la respuesta que propones al 1.8.9?		
189Ro02	*A*	La pendiente se acerca al 8...		[lee su respuesta escrita]
189Ro03	*I*	¡Ajá!, aquí está la conclusión, ¿cómo es que te das cuenta de ella?, ¿cómo es que la obtienes ?		
189Ro04	*A*	Mmm		
189Ro05	*I*	Regresas a tu página 19		[de la guía, relato]
189Ro06	*A*	Dice que la pendiente se acerca al 8		
189Ro07	*I*	Si, ¿cómo sabes?, estás mirando tu tabla 4	A al 8	
189Ro08	*A*	Se supone que aquí es el punto 1,12 ¿no?, a no, es acá ¿no?, aquí es cero x es 1 y aquí es 2, entonces en este punto la pendiente va a ser 8	*I* ¡ajá! *I* si	
189Ro09	*I*	¿Cómo te das cuenta que aquí es 8?		
189Ro10	*A*	¡Ah!, porque bueno así de vista vemos que hacia arriba la pendiente es 8.04 y hacia abajo es 7.96	*I* si *I* mmhú *I* mmhú	
189Ro11	*I*	Ajá! y entonces...		
189Ro12	*A*	Entonces estee.. en ese punto entre esos dos está el 8		
189Ro13	*I*	Bueno, el 8 lo propones muy bien, este... en el ítem.., después te dice en el 1.8.10..., ¿tu qué me contestas?		

Respuesta de Roky producida durante la entrevista codificada en proposiciones, conceptos, relaciones y conexiones.

Cod. de Ref.	Prop.	Conceptos	Relaciones	Conexiones bidimensionales	Conexiones tridimensionales
189Ro02	P_1	C_1: pendiente	R_1: se acerca	1. D→S	DNS
		C_2: 8		2. N→T, N→S	
189Ro08	P_2		R_2: se supone		
		C_3: aquí [x2,y2]	R_3: es	3. D→T	DST
		C_4: punto 1,12		4. S→T	
189Ro08	P_3	C_5: aquí [h]	R_4: es	5. S→T	NST
		C_6: cero		6. N→T	
		C_7: x	R_5: es	7. S	
		C_8: 1	R_6: y	8. N→S	DNS
		C_9: aquí [x]	R_7: es	9. D→S	DNS
		C_{10}: 2	R_8: entonces	10. N→T, N→S	
			R_9: en		
		C_4: punto [1,12]		11. D→T	
		C_1: pendiente	R_{10}: va a ser	12. D→S	
		C_2: 8		13. N→T, N→S	DNS
189Ro10	P_4	C_{11}: de vista	R_{11}: vemos	14. D	
		C_{12}: arriba		15. D→T	
		C_1: pendiente	R_{12}: es	16. D→S	DNS
		C_{13}: 8.04	R_{13}: y	17. N→T, N→S	DNT
		C_{14}: abajo	R_{14}: es	18. D→T	
		C_{15}: 7.96	R_{15}: entonces	19. N→T, N→S	DNT
			R_{16}: en		
		C_4: punto [1,12]	R_{17}: entre	20. D→T	DNT
		C_{16}: dos [valores]	R_{18}: está	21. D→S	DST
		C_2: 8		22. N→T, N→S	DNS

Tabla 1.- Estructura de la guía didáctica

	1a parte						2a parte	
LECCIÓN	1 Introducción	2	3	4	5	6	7	
Fenómeno	1 *Reacción* química						2 Trayectoria del agua que sale de una manguera	
Secciones	1.1 La situación*	1.3 Aproximación *al modelo* continuo	1.5 Modelo *continuo*	1.6 Pendiente de la *recta secante**	1.8 Velocidad *instantánea* y razón de cambio instantáneo		2.1 La situación*	2.3 Trayectoria única
Secciones	1.2 Modelo discreto	1.4 Velocidad promedio		1.7 Velocidad promedio y razón de cambio promedio			2.2 *Dirección de la* trayectoria	2.4 Velocidad del agua
Actividades	1, 2, 3, 4	5, 6, 7	8	9	10, 11, 12	13, 14	15, 16, 17, 18	
ítems	1.2.1 1.2.2 1.2.3	1.3.1 1.4.1 1.4.2 1.4.3	1.5.1 1.5.2 1.5.3 1.5.4	1.5.5 1.5.6 1.7.1 1.7.2 1.7.3	1.8.1 1.8.2 1.8.3 1.8.4 1.8.5 1.8.6 1.8.7 1.8.8 1.8.9 1.8.10 1.8.11	1.8.12 1.8.13 1.8.14 1.8.15 1.8.16	2.2.p 2.2.1 2.2.2 2.2.3 2.2.4 2.2.5 2.2.6 2.2.7	2.3.1 2.3.2 2.4.1 2.4.2

* Esta sección no tiene ítems

Tabla 2.- Análisis de los datos provenientes de las respuesta escritas a los ítems contenidos en la guía didáctica

Nivel		Etapas
Organización conceptual	1.	Primera lectura analítica de las respuestas escritas.
	2.	Codificación en conceptos, relaciones, modificadores, conectivos, y otros componentes de la respuesta.
	3.	Categorización en proposiciones, conceptos y relaciones (ver columnas 2, 3 y 4 , p. 73)
	4.	Mapeo proposicional (ver mapa, p. 73).
Representación	5.	Codificación de las representaciones que el participante utiliza para los conceptos y las conexiones entre ellas (ver columnas 5 y 6, p. 73). Configuración de cada respuesta relativa a las representaciones y conexiones que se estudian (digráfica de la página 70).
	6.	Comparación entre la demanda potencial de representaciones del ítem y las representaciones utilizadas por el participante.
Contenido	7.	Contenido conceptual de la respuesta.

Tabla 3.- Análisis de los datos provenientes de la entrevista

Nivel		Etapas
Organización conceptual	1.	Transcripción de las entrevistas (ver cuadro, p. 74).
	2.	Selección de las intervenciones del participante.
	3.	Codificación en conceptos, relaciones, modificadores, conectivos, y otros componentes de la respuesta.
	4.	Categorización en proposiciones, conceptos y relaciones (ver columnas 2, 3 y 4, p. 75).
	5.	Mapeo proposicional
Representación	6.	Codificación de las representaciones que el participante utiliza para los conceptos y las conexiones entre ellas (ver columnas 5 y 6, p. 75). Configuración de la respuesta relativa a las representaciones y conexiones que se estudian (digráfica correspondiente).
	7.	Comparación entre la demanda potencial de representaciones del ítem y las representaciones utilizadas por el participante.
Contenido	8.	Contenido conceptual de la respuesta.

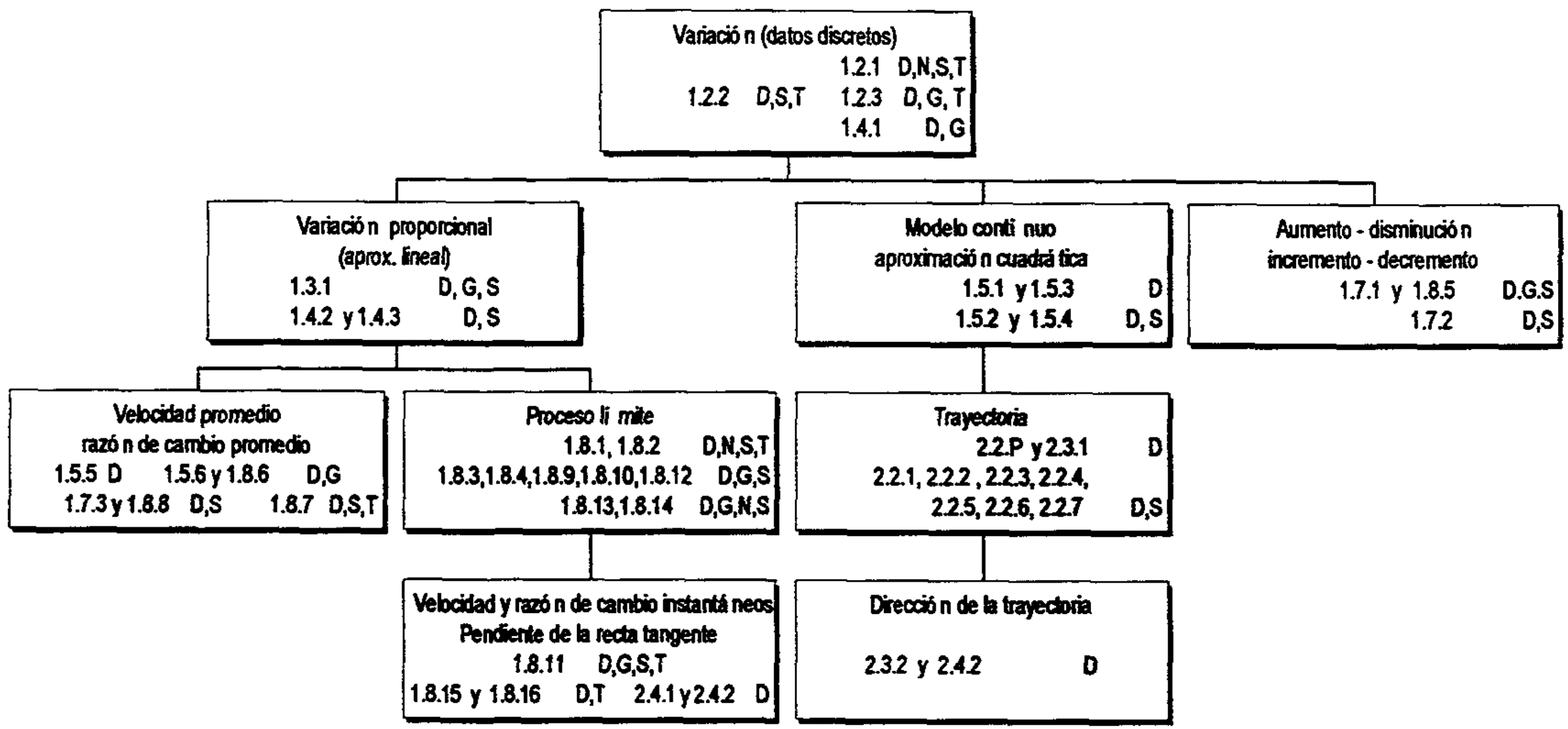


Figura 12.- Estructura temática de los ítems de la guía didáctica y su demanda potencial de representaciones

CAPITULO 4 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Introducción

En este capítulo presentamos los datos del estudio y la discusión de los mismos de acuerdo con las fases del proceso analítico descritas en la sección 3.6 (p. 67). Como ahí se dijo el análisis se hizo con las respuestas escritas a los ítems planteados en la guía didáctica y con las respuestas obtenidas durante las entrevistas.

En la primera sección se ilustra el método de análisis con la discusión de los datos del participante Roky. La presentación está organizada conforme a la estructura temática de la guía didáctica (ver p. 76) y los ítems seleccionados de cada tema (ver p. 68) se discuten a partir del análisis de las respuestas recolectadas durante el trabajo grupal y la entrevista.

Además de presentar el contenido del ítem se transcribe la respuesta escrita. Para cada ítem se hacen seis tipos de registros: tablas de codificación, mapas proposicionales, extractos de las entrevistas, gráficas de secuencias de las representaciones y de las conexiones bidimensionales, y digráficas para las configuraciones de las conexiones bidimensionales y tridimensionales.

Para simplificar la presentación de los datos y la lectura de este capítulo se incluyen al final del capítulo los cuadros, tablas y gráficas provenientes de las respuestas escritas y de las entrevistas; en el análisis de cada ítem se proporciona el mapa o la tabla de codificación de las representaciones según convenga a la discusión.

La segunda sección contiene los resultados por ítem de los siete participantes del estudio y su discusión. En la parte final de esta sección se presentan los resultados conforme al tipo de configuración (p. 70) mostrada.

4.1 Roky, descripción de un caso

A continuación se hace una exposición detallada de los resultados del participante Roky y la discusión correspondiente. Se sugiere consultar la presentación de cada ítem en la guía didáctica contenida en el anexo 1 a fin de conocer el contexto en el que se plantea cada uno.

Antes de iniciar la descripción del caso de Roky conviene recordar las *cuestiones* que guiaron el estudio:

¿Cómo es el proceso de representación mental de los conceptos involucrados en el aprendizaje derivada cuando el alumno explora con tecnología?

¿Qué relaciones establece el alumno entre dos o más tipos de representaciones de los conceptos relacionados con el aprendizaje de la derivada?

¿Cómo utiliza el alumno sus representaciones internas de esos conceptos para resolver problemas de cambio?

¿Cómo, el que aprende, utiliza las representaciones y cómo las organiza para producir una respuesta, en circunstancias escolares usuales?

Variación

El ítem 1.2.1 dice:

¿Cómo es la variación de la cantidad y de sustancia producida? Escribe en la parte posterior de esta hoja un primer acercamiento a la respuesta.

La respuesta de Roky fue:

Aumenta de un punto cero hasta alcanzar su punto máximo en 2 horas después pasan otras 2 horas después pasan otras 2 horas y disminuye a cero de nuevo en un lapso de 4 horas

Este ítem se plantea mediante el uso de las representaciones discursiva (D) y simbólica (S), con referencia a una representación tabular (T) porque se presenta al pie de una tabla de datos numéricos (N) organizados en dos columnas que contienen cantidades de tiempo transcurrido y de sustancia producida respecto a la situación denominada "reacción química" que se plantea en la guía didáctica (ver anexo 1). Los encabezados contienen representaciones simbólicas para el tiempo transcurrido y la cantidad de sustancia. De ahí que este ítem tenga una demanda potencial de representaciones: discursiva, numérica, simbólica y tabular que Roky reflejó en su respuesta porque usó las representaciones D y N y aludió a las representaciones S y T (ver tabla 4, p. 143).

Roky hizo siete conexiones bidimensionales de dos tipos: D→S y N→T (ver columna 5, tabla 4, p. 143); que siguieron la secuencia mostrada en la gráfica 1

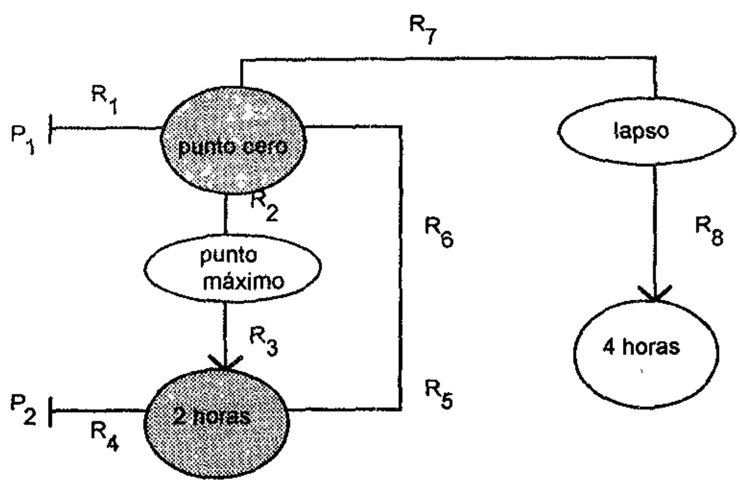
(p. 153), en la que se puede apreciar que la base representacional es N, es decir, Roky se apoyó en ejemplos numéricos para hacer su respuesta.

Este participante dió muestra de una escasa correspondencia física entre las cuatro representaciones citadas, la digráfica de su configuración sólo tiene dos líneas de las seis posibles; no presentó conexiones tridimensionales, así que, la configuración de los tipos de conexiones mostradas en la respuesta escrita resultó ser una digráfica con cuatro puntos y dos líneas (ver configuración 1, tabla 14, p. 163).

Roky no hizo uso de la representación gráfica aunque los conceptos "punto máximo" y "punto cero" parecían sugerir de algún modo un referente gráfico, pero en la entrevista se constató que no fue el caso (cuadro 4, p. 126).

La respuesta desde el punto de vista del contenido conceptual no fue muy amplia, Roky se limitó a señalar la duración de la reacción y el momento correspondiente a la mayor producción de sustancia. Con respecto a la ubicación del ítem en la temática de variación, la respuesta no incluyó los conceptos de "variación" ni "variable", una respuesta más amplia haría referencia a la comparación entre los cambios de ambas variables.

Su respuesta tiene dos conceptos básicos o nucleares[11] "cero" y "dos horas", con los cuales armó su discurso y formaron parte de los fundamentos que disponía (círculos iluminados que aparecen en el mapa 1). La colocación de los óvalos y círculos en el mapa sólo obedece a la presencia de los conceptos y relaciones y a la secuenciación de ambos en la respuesta.



Mapa 1.- Mapa proposicional de la respuesta escrita de Roky al ítem 1.2.1

---

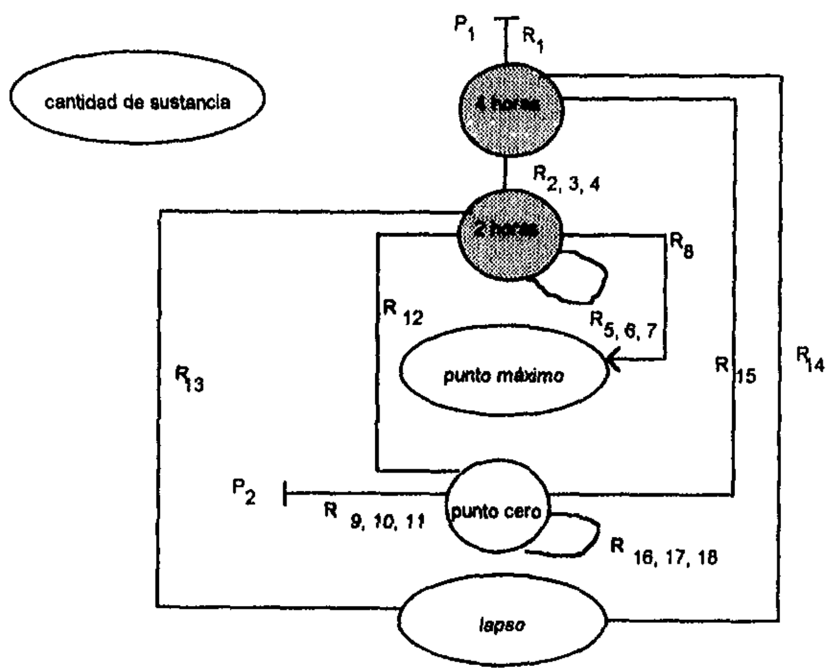
[11] Un concepto pertenece al núcleo de la respuesta cuando está presente en dos o más proposiciones (Campos y Gaspar, 1995).

El extracto de la transcripción de la entrevista para este ítem aparece en el cuadro 4 (p. 126), del cual se seleccionaron las participaciones del alumno Roky señaladas con la letra "*A*" y con ellas se elaboró la tabla 5 (p. 143), que dio lugar al mapa 2.

La entrevista permitió constatar que el participante se refiere a la representación tabular cuando dice "punto cero" y "punto máximo", conforme a *las notas tomadas* durante la entrevista.

Al comparar la respuesta escrita y la que proporciona Roky durante la entrevista encontramos que mostró una organización con un número mayor de relaciones (ver columna 4 de la tabla 5, p. 143). Utilizó los mismos conceptos (columna 3 de la tabla 5) y la base del discurso descansó en los conceptos "cuatro horas " y "dos horas", en comparación con la respuesta escrita en la que coincidió sólo con el concepto "dos horas" (ver mapas 1 y 2).

Durante la entrevista realizó un tipo de conexión bidimensional más que las mostradas en la respuesta escrita (ver configuración 23, p. 164), pero aludió en más de una ocasión a la representación tabular (ver gráficas 1 y 23, pp. 153 y 159).



Mapa 2.- Mapa proposicional de la entrevista a Roky del ítem 1.2.1

El ítem 1.2.3 dice:

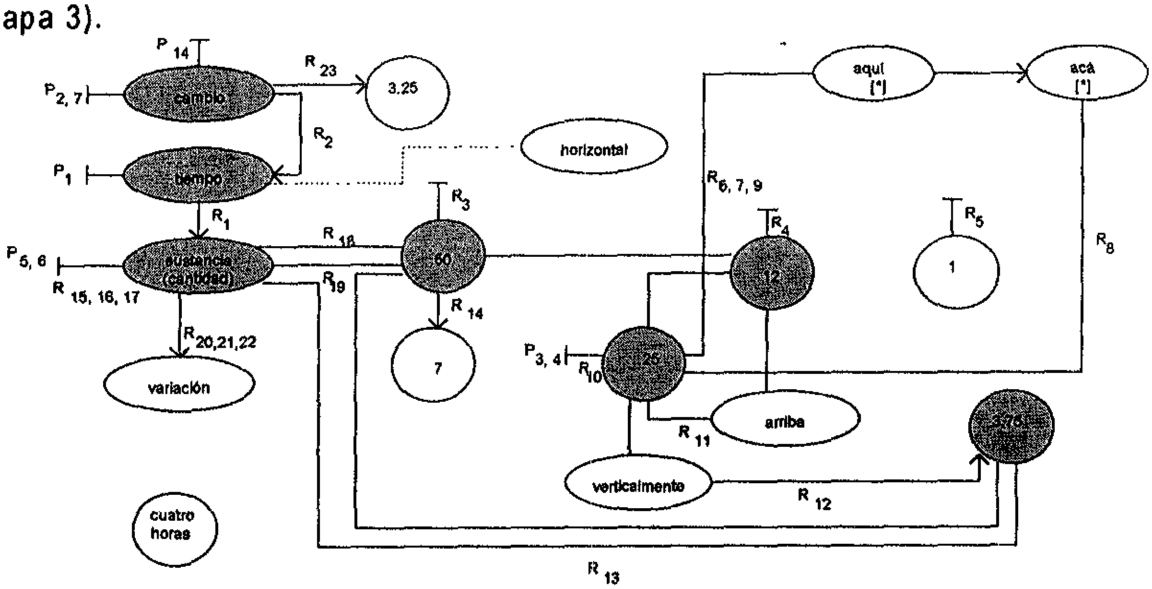
> Algunos cambios registrados en la Tabla 2 se representan en la Gráfica 2 por medio de segmentos horizontales y verticales, señala sobre la gráfica a qué variables corresponden cada uno. Explica tu respuesta al reverso de la hoja.

Roky no lo respondió durante la sesión de clase, así que sólo se dispuso de los datos provenientes de la entrevista, ocasión en la que contestó tanto el ítem como la actividad 4, relacionada esta última con el ítem.

El ítem se plantea de manera discursiva (D) pero con referencia a las representaciones tabular (T) y gráfica (G). Explícitamente, se pide señalar sobre la gráfica, esto es, se le pide al alumno valerse de una representación gráfica para responder al ítem. De ahí que la demanda potencial de representaciones del ítem es discursiva, gráfica y tabular.

De la entrevista a Roky (ver cuadro 5, p. 127) se distinguieron siete proposiciones con 16 conceptos, en las que usó las representaciones discursiva y numérica y presentó 32 conexiones bidimensionales (tabla 6, p. 144), agrupadas en cinco tipos: D$\rightarrow$G, D$\rightarrow$S, N$\rightarrow$G, N$\rightarrow$S y N$\rightarrow$T. No efectuó conexiones tridimensionales (ver configuración 24, p. 164).

Esta respuesta fue parcial porque señaló mediante dos pares de valores la correspondencia entre los valores de las variables y los segmentos trazados en la gráfica, pero no lo explicitó respecto a las variables tiempo y cantidad de sustancia. Siete de los 16 conceptos que Roky empleó durante la entrevista forman el núcleo o la base de su discurso y ellos reflejaron sus fundamentos (ver mapa 3).



Mapa 3.- Mapa proposicional de la entrevista a Roky del ítem 1.2.3
Los conceptos marcados con asterisco están señalados en la tabla 6.

Variación proporcional

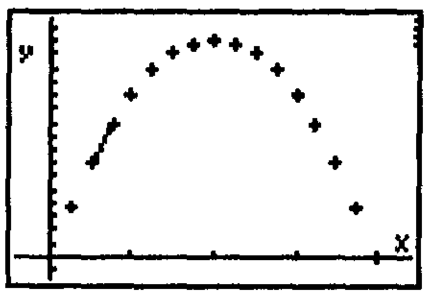
El ítem 1.3.1 dice

¿Por qué la variación proporcional en un intervalo se representa por medio de un segmento de recta?

La respuesta de Roky fue:

El segmento de recta sirve para aproximar la cantidad de sustancia de un intervalo a otro

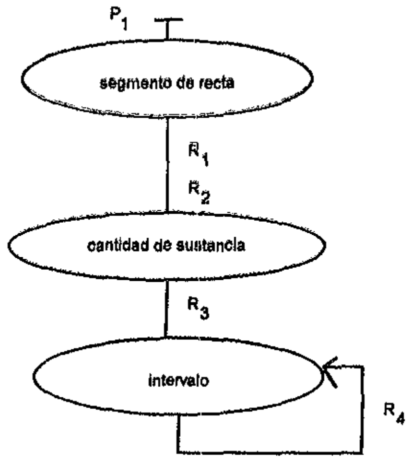
Este ítem es de tipo argumentativo y se plantea discursivamente (D) con referencia a una representación gráfica (Gráfica 3 de la guía didáctica). En dicha gráfica se señala de manera simbólica los nombres de los ejes coordenados, de ahí que la demanda potencial de representaciones es D, G y S.



Gráfica 3 de la guía didáctica

Roky reflejó la demanda potencial de representaciones sólo en forma discursiva y gráfica. Su respuesta, formada por una proposición y tres conceptos, evidenció tres conexiones bidimensionales y un sólo tipo de conexión tridimensional DGT (ver tabla 7, p. 145, y la configuración 3, p. 163).

Esta respuesta no contestó al ítem porque no mencionó la relación entre el cambio en la cantidad de sustancia y el cambio en el tiempo transcurrido. Sin embargo subrayó los aspectos de utilidad cuando dijo "... sirve para aproximar...", aunque, no dice como proceder.



Mapa 4.- Mapa proposicional de la respuesta escrita de Roky al ítem 1.3.1

La respuesta que proporcionó durante la entrevista (ver cuadro 6, p. 129) la hizo con siete proposiciones en las que no logró concretar la relación entre la variación proporcional y el segmento de recta correspondiente.

Utilizó una representación más que en la respuesta escrita y aludió a las representaciones G, S y T, en más de una ocasión (ver quinta columna de la tabla 8, p. 146). Mostró un mayor número de conexiones bidimensionales, de ahí que, la digráfica (p. 164) de la configuración de las conexiones entre las representaciones resultara más completa que en la respuesta escrita. Presentó tres tipos de conexiones tridimensionales DGS, DGT y DST (ver sexta columna, tabla 8).

Sus conceptos básicos fueron: intervalo cerrado, segmento de recta, cantidad de sustancia y forma proporcional. Repitió estos conceptos sin dar una explicación a la afirmación contenida en el ítem. La proposición 6 (tabla 8, p. 146) parece indicar que Roky buscaba dar sentido a los símbolos x y y. Su respuesta se ubicó entre lo discursivo y lo simbólico, con referencia a representaciones gráficas y tabulares. Pero no se consideró que la respuesta de Roky respondiera al ítem porque no dió muestras de que el concepto "variación proporcional" lo relacionara con un cociente constante de diferencias entre las variables o una "razón de cambio constante".

Las representaciones usuales para los fenómenos de variación proporcional son gráficos de tiempo contra velocidad y en el caso de la variación directamente proporcional la gráfica correspondiente es una recta horizontal. Esta representación está más cerca al proceder de Oresme (ver p. 39) y parece que Roky respondió más en el sentido de obtener la "latitude" de una "longitude", sin referencia a la "altitude" o velocidad. Pudiera entonces pensarse que Roky se refirió más a los aspectos puntuales que a los globales del comportamiento de la reacción química, en este sentido, se atiende más a la sintaxis de la representación que a la semántica (p. 27).

El ítem 1.4.3 dice:

Aproxima la cantidad de sustancia producida y en un instante x del intervalo abierto (x_1,x_2) con la expresión: $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k$$ Explica ampliamente el procedimiento y la respuesta a esta cuestión en la parte posterior de esta hoja.

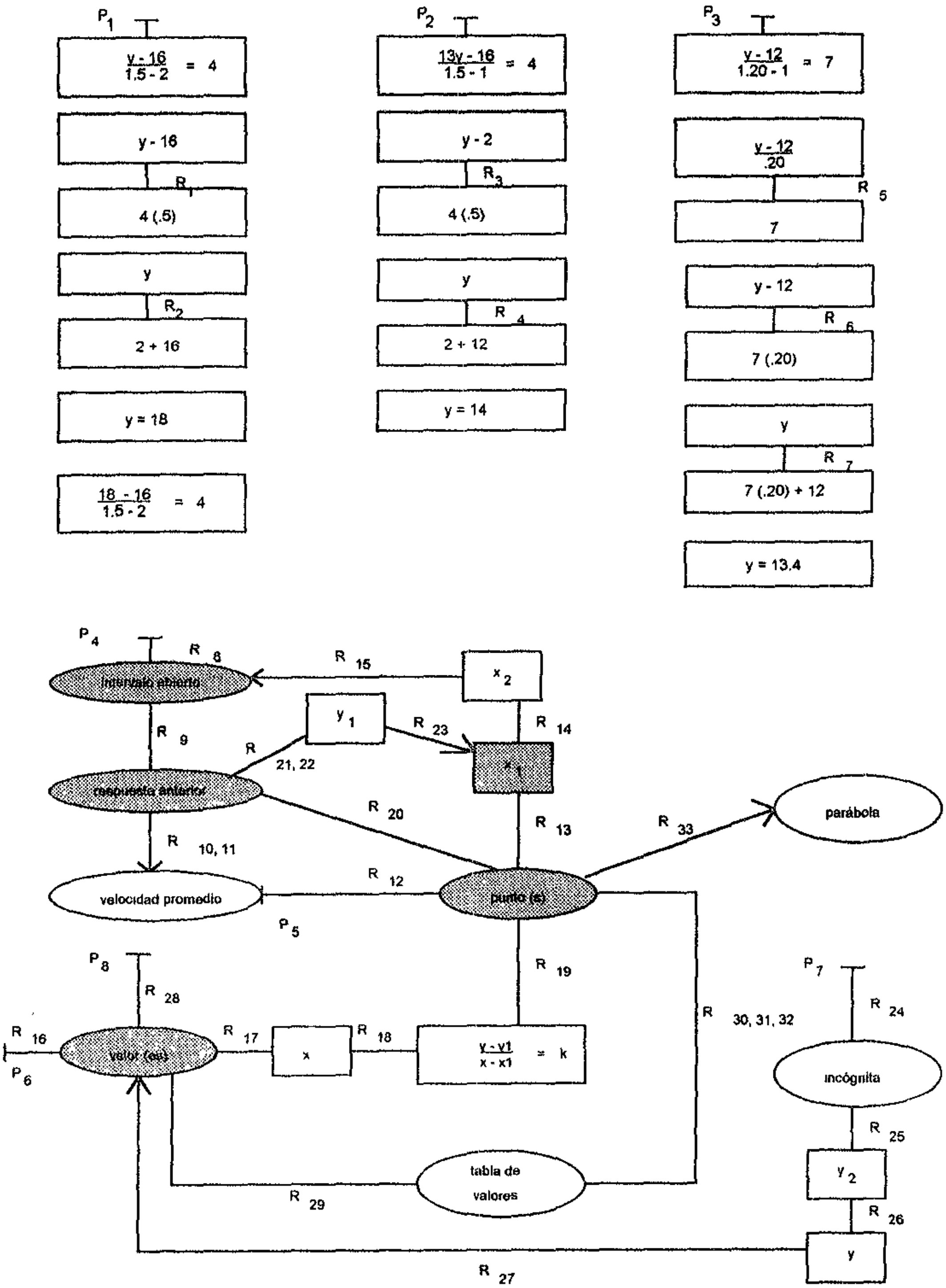
La respuesta de Roky fue:

$\frac{y-16}{1.5-2}=4$	$\frac{13y-12}{1.5-1}=4$	$\frac{18-16}{1.5-2}=4$	$\frac{y-12}{1.20-1}=7$
$y-16=4(.5)$	$y-12=4(.5)$		$\frac{y-12}{.20}=7$
$y=2+16$	$y=2+12$		$y-12=7(.20)$
$y=18$	$y=14$		$y=7(.20)+12$
			$y=13.4$

Se escoge el intervalo abierto con tu respuesta anterior y se toma la velocidad promedio , así se toma también un punto entre x_1 y x_2 que es el intervalo abierto , dando el valor a x en la ecuación $\frac{y-y_1}{x-x_1}=k$, se toman dos puntos x , y de la respuesta 1.4.2 y se sustituyen y_1 y x_1, entonces ya se tiene una sola incógnita que es y_2 se despeja "y" , se obtiene su valor , ya obteniendo estos valores se introducen a la tabla de valores se grafican y aparecerán un punto dentro de la parábola .

La demanda potencial de representaciones D y S se reflejó en la respuesta de Roky porque las usó. Elaboró su respuesta con ocho proposiciones que contienen 42 conexiones bidimensionales (ver tabla 9, p. 148) de cinco tipos (ver configuración 4, p. 163). Casi un 70% de la respuesta la hizo en forma simbólica y de manera correcta (ver gráfica 4, p. 153). Roky empleó dos tipos de conexiones tridimensionales DSG y DGT como puede apreciarse en la configuración 4 (p. 163).

La estructura proposicional de la respuesta puede apreciarse mejor en el mapa 5 siguiente:



Mapa 5.- Mapa proposicional de la entrevista a Roky del ítem 1.4.3

Roky organizó su respuesta en cinco bloques (ver respuesta p. 86), cuatro de ellos en forma simbólica y uno discursivamente. En los primeros cuatro bloques se aprecia un intento de dar sentido a la pregunta y en el bloque discursivo dió una explicación general de la manera como procedió en el cuarto bloque; este último es el procedimiento para dar una respuesta correcta a partir del resultado encontrado en el ítem 1.4.2. Su procedimiento parece sugerir que consideró a la x como variable y como incógnita y a y como incógnita, situación que coincide en parte con Kaput (p. 35).

Los conceptos básicos de su respuesta fueron: "intervalo abierto", "repuesta anterior" (valor de la constante k), "punto", "x_1" y "valor(es)".

En *la entrevista*[12] a Roky sobre el ítem 1.4.3 se distinguieron nueve proposiciones, en las que usó representaciones discursivas, numéricas y simbólicas. Presentó 60 conexiones bidimensionales, de cinco tipos y cuatro conexiones tridimensionales DST, DNT, NST y DNS (ver *la configuración* 26, p. 164). Durante la entrevista utilizó ejemplos numéricos para ampliar y explicar su respuesta escrita dando lugar a la configuración 26.

La diferencia más notoria entre las configuraciones de la respuesta escrita y de la entrevista es el uso de representaciones numéricas en la segunda y de simbólicas en la respuesta escrita.

Comparando las respuestas a los ítem 1.3.1 y 1.4.3 producidas en entrevista y en forma escrita respectivamente, Roky muestra el concepto "intervalo" por medio de las representaciones D y S, ambas con referencia a una gráfica y por tal razón se da una correspondencia física entre las representaciones discursiva y simbólica para el concepto "intervalo".

[12] La mayoría de las transcripciones produjeron tablas de codificación en proposiciones, conceptos y conexiones muy grandes por lo que no se incluyen a fin de simplificar la presentación de los datos provenientes de las entevistas.

Modelo continuo. Aproximación cuadrática

El ítem 1.5.3 dice

Anota el período o intervalo de tiempo durante el cual se inicia, desarrolla y termina la reacción.

La respuesta de Roky fue:

Va aumentando de cero hasta su punto máximo en gramos , después disminuye hasta cero de nuevo de 0 a 2 horas sube a 16 gr. y después de otras 2 horas disminuye a 0.

El ítem se plantea en forma discursiva y por eso la demanda potencial de representaciones (DR) es D, misma que Roky refleja en su respuesta.

La respuesta de Roky contiene tres proposiciones, utilizó las representaciones D y N, con las que formó nueve conexiones bidimensionales (ver tabla 10, p. 150, y gráfica 5, p. 154). Mostró sólo un tipo de conexión tridimensional DGN (ver configuración 5, p. 163).

Roky describió el comportamiento de la cantidad de sustancia producida conforme a tres momentos: inicio, a la mitad del tiempo que dura la reacción y al finalizar la misma; esta respuesta es muy parecida a la del ítem 1.2.1. No anotó el intervalo solicitado en la forma usual. Y el concepto "cero" [sustancia] es el único concepto del núcleo.

Este ítem pertenece a la sección denominada "modelo continuo" en la que se construye el modelo cuadrático $y = 16x - 4x^2$ a partir de tres pares de datos, así que en "...de 0 a 2 horas sube a 16 gr. y después de otras 2 horas..." se consideró implícito el intervalo de variación [0,4].

En la entrevista si hizo explícito el intervalo [0,4] y Roky señaló la duración de la reacción. El extracto de la entrevista contiene siete proposiciones en las que realizó 35 conexiones bidimensionales de cinco tipos (ver gráfica 27, p. 160).

Roky dió cuenta de tres tipos de conexiones tridimensionales DSG, DNG y DNS (ver configuración 27, p. 164).

El ítem 1.5.4 dice:

¿Por qué la expresión $y = 16x - 4x^2$ te permite calcular la cantidad de sustancia producida en cualquier momento x ?

Roky respondió así:

Primero tenemos el valor de "y" ya si se despeja x y ya podemos encontrar la cantidad de sustancia producida en cualquier momento x, porque esta es la ecuación de las tres ecuaciones .

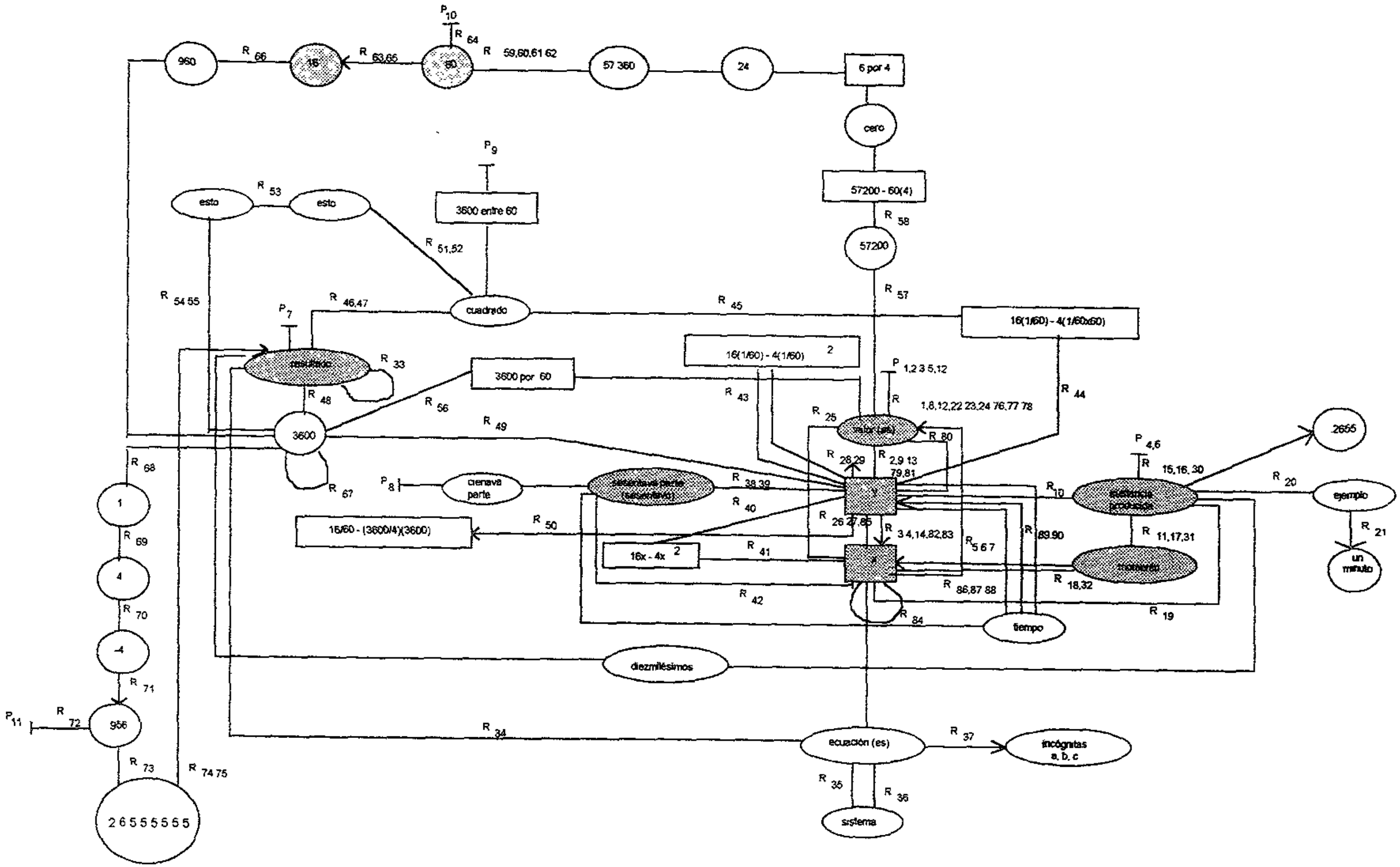
Este ítem se expone mediante representaciones discursivas y simbólicas, por ello la demanda potencial de representaciones es D y S. Roky reflejó la (DR) en su respuesta porque utilizó las representaciones D y S.

En las dos proposiciones (ver tabla 11, p. 150) de la respuesta, se encontraron 4 conexiones bidimensionales del tipo D→S y ninguna conexión tridimensional, de ahí que la configuración de sus representaciones sea una digráfica completa de dos puntos.

Roky interpretó inicialmente la cuestión en forma inversa, cuando dijo, "... tenemos... 'y' y ... se despeja x... ", pero cuando se refirió al fenómeno de la reacción invirtió su primera interpretación "... encontrar la cantidad de sustancia producida en cualquier momento x... ". Estas interpretaciones parecen coincidir con el punto de vista de Kaput (ver p. 35) respecto a que el alumno las maneja como desconocidas más que como variables.

En la entrevista, sin embargo, se precisó el significado (ver cuadro 7, p. 131) porque ilustró con un ejemplo, para un minuto, que expresó como 1/60 de hora, calculó la cantidad de sustancia por medio de la expresión proporcionada en el ítem, tal y como se cuestiona en el ítem. De este modo exhibió un ejemplo para un "... cualquier momento... " como anotó en su respuesta escrita. Con esta acción indicó que su concepción del continuo real, en el caso del intervalo de tiempo, incluye fracciones de horas.

En la quinta proposición reconsideró los intentos anteriores y lo dicho en la respuesta escrita. En la séptima proposición recordó que la expresión $y = 16x - 4x^2$ es el resultado de resolver el sistema de tres ecuaciones planteado en la página 10 de la guía didáctica. En la octava a la décimo segunda proposiciones ilustró, mediante un ejemplo, cómo es que obtuvo la cantidad de sustancia en el momento que eligió. En el mapa 6 (p. 91) se ve claramente los intentos (ciclos) que hace por comprender y recordar, así como para llegar a la respuesta.



Mapa 6.- Mapa proposicional de la entrevista a Roky del ítem 1.5.4

En el ítem 1.5.3 el tiempo está representado de forma numérica y en el ítem 1.5.4 Roky no se refirió a x como la representación simbólica para el tiempo. Así que en la respuesta escrita no establece una correspondencia *física entre* las representaciones N y S para el tiempo.

Sin embargo en la entrevista al ítem 1.5.3 sí estableció una correspondencia física entre las representaciones D y S porque consideró a "x" como representación para el tiempo (proposición 4) y también en la entrevista al ítem 1.5.4 (proposiciones 2, 4 y 6).

En *la entrevista al ítem* 1.5.4, el concepto "cantidad de sustancia" estuvo representado, además de la forma discursiva, en forma simbólica por "y", en forma numérica por los resultados generados con la expresión $y = 16x - 4x^2$, de ahí que, Roky efectuó una correspondencia entre las representaciones D, S y N para la cantidad de sustancia producida en la reacción química en cuestión.

Velocidad promedio. Razón de cambio promedio

El ítem 1.5.5 dice:

> ¿Cuál es la velocidad promedio a la que se produce la sustancia, durante el intervalo de tiempo que seleccionaste?

La respuesta de Roky fue:

	$x_1 = .25$	$x_2 = .50$	
$k = 13$ gr./h	$y_1 = 16x - 4x^2$		velocidad media
	$y_1 = 16(.25) - 4(.25)^2$	$y_2 = 16(.50) - 4(.5)^2$	$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
	$y_1 = 4 - .25$		$k = \dfrac{7 - 3.75}{.50 - .25}$
	$y_1 = 3.75$	$y = 7$	$k = \dfrac{3.25}{.25}$
			$k = 13$

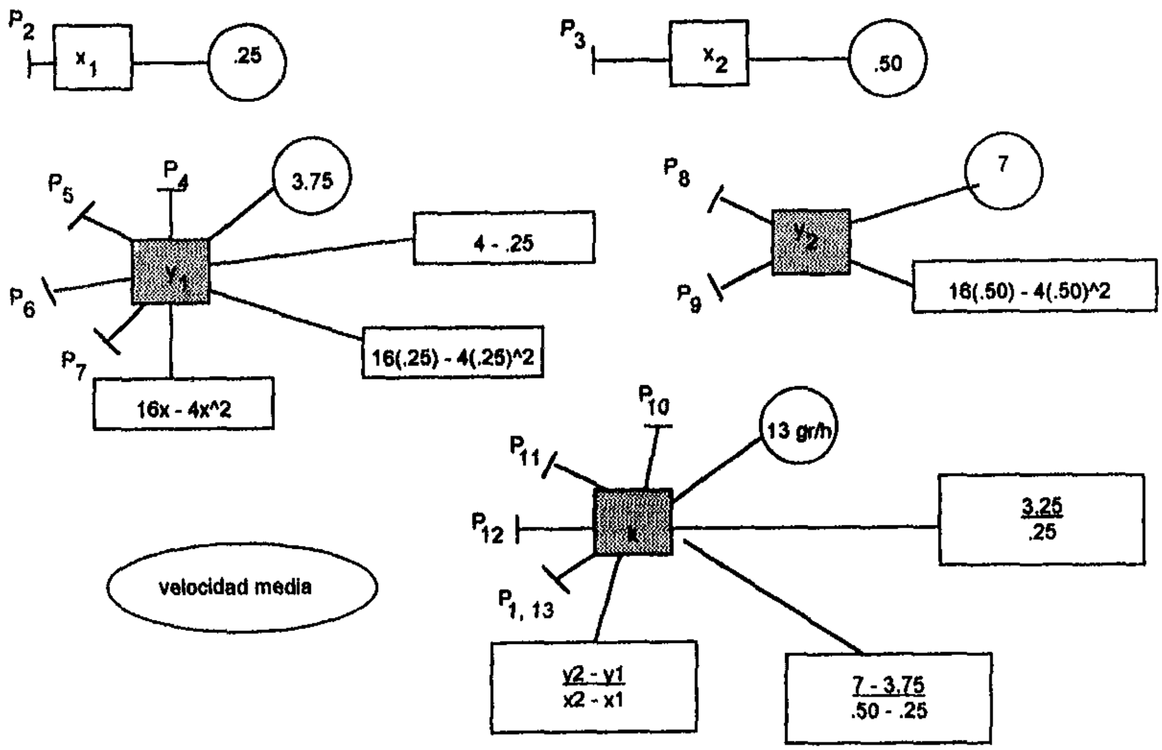
La (DR) es discursiva y Roky respondió en forma simbólica y numérica a excepción del concepto "velocidad media" que presentó discursivamente. Los cuatro bloques de la respuesta se analizaron como cuatro proposiciones, en la primera proporcionó lo que solicitaba el ítem, en la segunda y tercera obtuvo la cantidad de sustancia correspondiente a los extremos del intervalo de tiempo que seleccionó y la cuarta proposición ejecutó el procedimiento para obtener la velocidad promedio. Esta respuesta es clara y directa, muy codificada desde el punto de vista del lenguaje matemático.

Las representaciones que utilizó fueron numéricas y simbólicas. Hizo veinte conexiones bidimensionales de tres tipos N→S, N→T y S→T (ver gráfica 7, p. 154). La configuración de sus conexiones (7, p. 163) es una digráfica de cuatro puntos que no es completa ni transitiva (p. 71).

Desde el punto de vista de la organización conceptual el concepto "velocidad media" lo relacionó de manera implícita con "k" y $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Por eso es que no apareció la conexión bidimensional D→S en la digráfica 7 (p. 163).

Desde el punto de vista conceptual la respuesta fue precisa, correcta y completa. Cumplió con los requerimientos conceptuales del tema, y presentó tres conceptos nucleares (ver mapa 7).

No se solicitó más información sobre la respuesta escrita a este ítem durante la entrevista en virtud de que se le consideró precisa y completa.

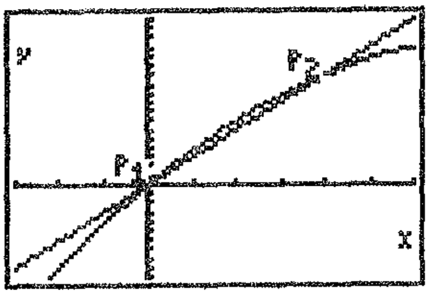


Mapa 7.- Mapa proposicional de la respuesta escrita de Roky al ítem 1.5.5

En esta respuesta Roky estableció una correspondencia entre las representaciones D y S para la velocidad promedio (media) a pesar de que Roky omitió la relación explícita entre "*velocidad media*" y "*k*", probablemente por la forma tan codificada de la respuesta; sin embargo, más adelante, en la respuesta al ítem 1.8.16, expresó que la "velocidad promedio", representada discursivamente, es igual a 12 gr/h, esta última representación numérica para la velocidad fue el resultado que calculó de la expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, pero que no registró en la respuesta escrita al ítem 1.8.16. De ahí que, para el concepto de velocidad promedio, Roky mostró correspondencia física entre las representaciones D, N y S.

Aumento-disminución. Incremento-decremento

El ítem 1.7.1 dice:



Gráfica 5

El cambio $x_2 - x_1$ en la variable independiente es de una unidad, es decir, $x_2 - x_1 = 1$ (una hora), y el valor final x_2 se obtiene del valor inicial x_1 aumentando una unidad, $x_2 = x_1 + 1$.

Pero si $x_2 - x_1 = -1$, entonces el valor final x_2 se obtiene del valor inicial x_1 disminuyendo una unidad, es decir, $x_2 = x_1 - 1$.

1.7.1 Proporciona un ejemplo de cada caso y represéntalos gráficamente al reverso de la hoja.

La respuesta de Roky fue:

$x_2' - x_1' = 1$	$x_2 - x_1 = -1$	gráfica (ver anexo 4)
$x_2 = 1 + x_1$	$x_2 = -1 + x_1$	
$2 = 1 + 1$	$.25 = -1 + 1.25$	
$2 = 2$	$.25 = .25$	

La (DR) es D, G y S porque el ítem se plantea en forma discursiva y se refiere a una gráfica y a representaciones simbólicas. Este ítem pide de manera explícita elaborar una respuesta gráfica.

Roky reflejó la demanda sólo en forma gráfica y simbólica, mediante diez conceptos en los que usó las representaciones gráfica, numérica y simbólica (ver tabla 12, p. 151). Efectuó diecisiete conexiones bidimensionales de cuatro tipos G→S, N→G, S→G y N→T (ver gráfica 8, p. 154).

Sólo mostró una conexión tridimensional NSG, su *configuración* de las conexiones es una digráfica de cuatro puntos que no es completa ni transitiva (p. 163).

La respuesta fue parcialmente correcta porque, aunque no hizo explicaciones e forma discursiva, el manejo de los índices aclaró su procedimiento, pero denotó en forma errónea a los *puntos en la gráfica*, con la letra e índice que utilizó para representar los valores iniciales y finales de la variable tiempo.

Respecto al contenido, mostró un manejo aceptable de los conceptos de cambio, aumento y disminución. El núcleo conceptual de su respuesta consistió de los conceptos x_2 y $x_2 - x_1$, este último cuantifica el cambio entre x_1 y x_2.

Proceso límite

El ítem 1.8.2 dice

¿Cómo se comporta el valor de $\boldsymbol{h}$ cuando $\boldsymbol{P_2}$ se aproxima a $\boldsymbol{P_1}$?

La respuesta fue:

El valor numérico va aumentando , y el numérico va disminuyendo

El ítem se plantea en forma discursiva y simbólica, con referencia a una tabla con datos numéricos organizados en dos filas que previamente el alumno completó, de ahí que la (DR) del ítem es D, N y T, misma que Roky reflejó en su respuesta discursiva con referencia a la tabla.

Para responder, Roky elaboró una proposición con representaciones discursivas; la referencia a la tabla indicó dos conexiones bidimensionales del tipo D→T. No mostró conexiones tridimensionales, por ello la configuración de sus conexiones es una digráfica de dos puntos y una línea (ver configuración 9, p. 163).

Su respuesta describió el comportamiento del valor numérico de h conforme P_2 se acerca a P_1 con referencia al comportamiento de x_2 respecto a x_1.

La entrevista explicó el significado para Roky del hecho de que h va "*...aumentando...*", pero que no esclareció si Roky estableció una relación con el hecho de que los valores x_2 y x_1 se aproximan al mismo tiempo que los puntos P_2

y P_1 lo hacen a su vez. En sus intervenciones, dio a entender que con las descripciones "... va aumentando..." y "... va disminuyendo..." se refería al comportamiento de h a la derecha e izquierda del renglón central de la tabla 3 de la guía didáctica (ver anexo 1). De hecho en la primera proposición de la entrevista (ver tabla 13, p. 152) repitió la respuesta escrita y en la segunda, señaló los valores 1.2 y 1.3 (de x_2) y cuando expresó "... para la izquierda... va disminuyendo..." se refirió de nuevo a los valores de x_2; en ninguna parte mencionó que $h = x_2 - x_1$.

El ítem 1.8.3 dice:

En efecto, cuando $\boldsymbol{P_2}$ se aproxima a $\boldsymbol{P_1}$ el valor absoluto de $\boldsymbol{h}$ disminuye, ya sea que se aproxime por la derecha o por la izquierda. Ilustra gráficamente ambas situaciones y explica ampliamente lo que observas, en el reverso de la hoja.

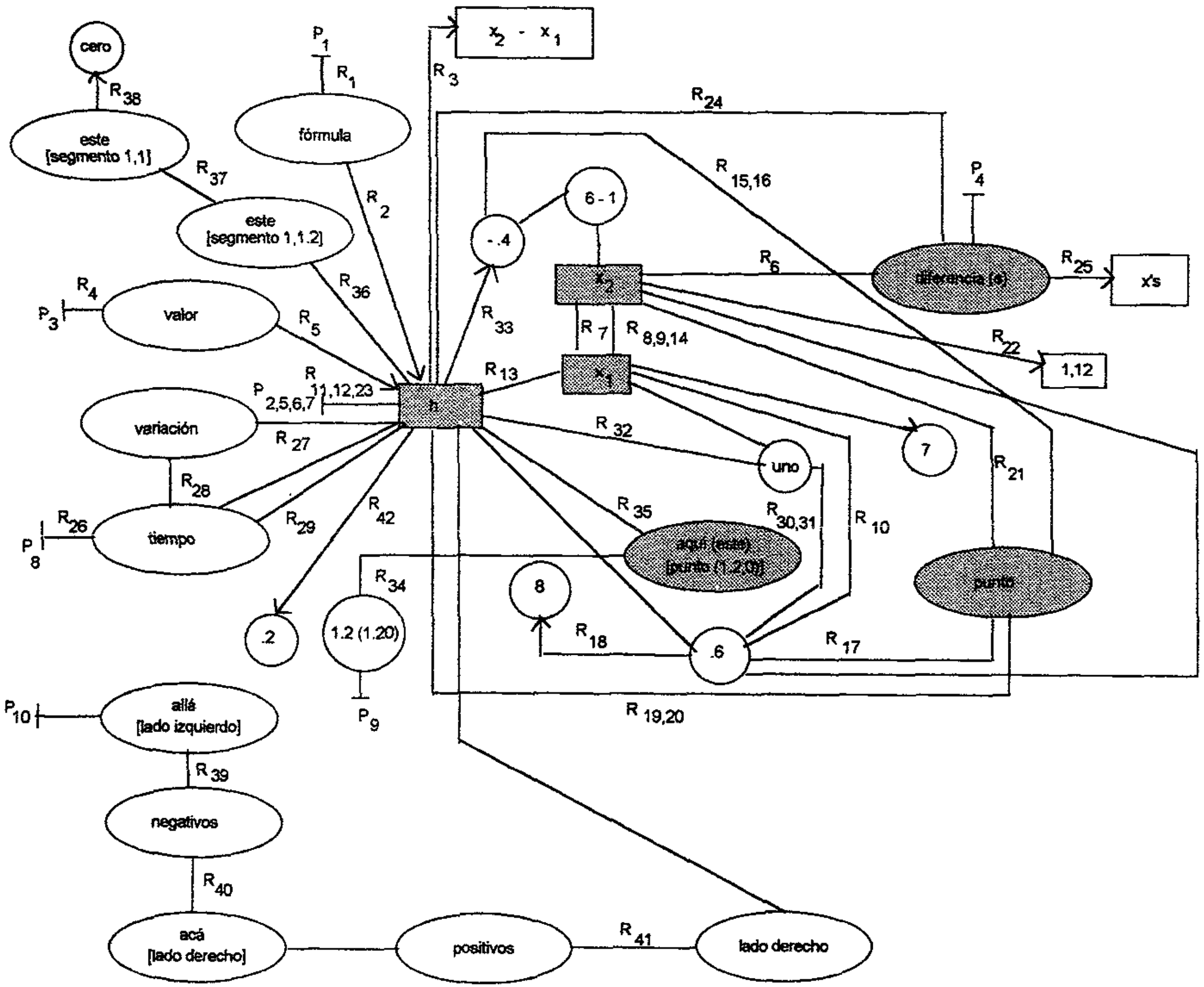
La respuesta de Roky fue:

(Gráfica). Por lo regular los puntos escogidos son equidistantes , nos muestra una parábola cóncava hacia abajo , ya que es la que se tiene en la calculadora . El valor de "h" con respecto al punto (1,12) , del lado izquierdo nos da resultados negativos , pero del lado derecho estos resultados son positivos , mientras que el punto (1,12) es neutro , o se[a] cero .

El ítem está redactado en forma discursiva y simbólica; solicita explícitamente el uso de representaciones gráficas para ilustrar el hecho a que se refiere, de ahí que la (DR) del ítem es D, G y S que Roky reflejó completamente en su respuesta porque usó esas representaciones en las cinco proposiciones de su respuesta. Usó también una representación numérica e hizo referencia a representaciones tabulares. Dio muestra de 14 conexiones bidimensionales (gráfica 10, p. 155) de cinco tipos: D→G, D→N, D→T, S→G y S→T. Exhibió también cuatro tipos de conexiones tridimensionales DST, DGS, DGT y SGT por lo que la configuración de sus conexiones no es una digráfica completa de cinco puntos (configuración 9, p. 163).

El único concepto de su núcleo fue el "punto (1,12)" el cual le permitió apreciar los valores "negativos", "neutro" y "positivos" de h.

En la entrevista se precisó el significado de h en la gráfica, por medio de ejemplos concretos (ver mapa 8, p. 99) y de ese modo la configuración (9) se 'mueve' hacia la configuración (31), página 164. El extracto de la entrevista, organizado en 10 *proposiciones, dio cuenta de 49 conexiones* bidimensionales del tipo: D→G, D→S, S→G, N→S y N→G; y tres tipos de conexiones tridimensionales DGS, DNG y NGS que produjeron una digráfica con cuatro puntos en la que solo faltó la conexión D→N para que fuera una digráfica completa.



Mapa 8.- Mapa proposicional de la entrevista a Roky del ítem 1.8.3

El ítem 1.8.9 dice:

¿Se aproxima el valor de la pendiente ***m***, de cada secante, hacia algún cierto número cuando el valor absoluto de ***h*** se hace cada vez más pequeño y P_2 se acerca a P_1? ¿A cuál ? ¿Por qué?

La respuesta de Roky fue:

La pendiente se acerca a 8 , esta pendiente es el punto (1,12) , ya que aquí h = 0 , o se[a] no hay variación de tiempo y es donde la tangente toca a la recta .

El ítem se expresa mediante las representaciones discursivas y simbólicas, con referencia a una tabla que contiene representaciones numéricas y simbólicas, de ahí que la (DR) del ítem sea D, N, S y T, que Roky reflejó completamente porque empleó las representaciones D, N y S y aludió a una representación tabular.

Roky organizó su respuesta en cuatro proposiciones en las que hizo nueve conexiones bidimensionales (gráfica 11, p. 155) de siete tipos y mostró tres tipos de conexiones tridimensionales DGT, SGT y NSG (ver configuración 11, p. 163). La correspondencia entre las cinco representaciones es bastante buena.

En la entrevista (*cuadro 8, p. 135) abundó en la explicación* sobre su significado del hecho de que las pendientes se aproximan a 8, por medio de los valores 8.04 y 7.96 de la tabla 4 de la guía didáctica; la diferencia con la respuesta escrita fue que se centró más en la información de la tabla que en la gráfica (ver configuración 33, p. 164).

El ítem 1.8.10 dice:

En relación a las secantes, ¿cómo debe ser el valor de ***h*** para que la secante se "parezca" más a una tangente?

Roky respondió así:

El valor de la secante tiene que ser = 0

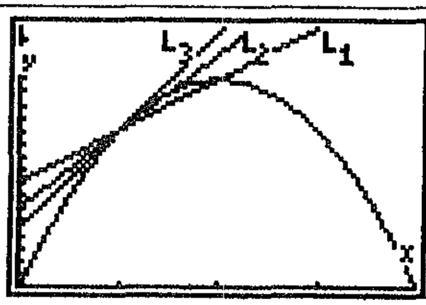
El ítem se plantea en forma discursiva y simbólica por lo que la (DR) es D y S. Roky la reflejó en su respuesta con una proposición y tres conexiones bidimensionales distintas (ver gráfica 12, p. 155). Presentó un solo tipo de conexión tridimensional de ahí que la configuración de sus conexiones es una digráfica de cuatro puntos que no es completa.

Su respuesta no fue precisa porque hizo referencia al "... valor de la secante..." en lugar de el valor de h.

En la entrevista su respuesta fue más elaborada, constó de tres proposiciones en la que efectuó 32 conexiones bidimensionales entre las cinco representaciones en estudio (ver gráfica 34, p. 161). Mostró cinco tipos de conexiones tridimensionales DGS, DGT, DNS, DST y NGS (ver configuración 34, p. 164).

Los conceptos nucleares fueron h, valor, secante, cero, tangente y punto, lo que indicó que poseía los fundamentos para responder y, de hecho, arma la respuesta correcta al final de la última proposición producida durante la entrevista (ver cuadro 9, p. 136).

El ítem 1.8.12 dice:



Gráfica 5

¿Cuál secante crees que se aproxima mejor a la tangente en el punto $P_1(1,12)$? ¿Por qué? ¿Qué valor de h le corresponde?

La respuesta de Roky fue:

L_3 porque su h es de 1 y es la que mas se acerca a (1,12) aunque no lo toca

El ítem se plantea en forma discursiva y simbólica con referencia a una gráfica. La gráfica contiene representaciones simbólicas para los ejes y tres secantes a una parábola, de ahí que la (DR) del ítem es D, G y S, que Roky reflejó en una proposición porque usó las representaciones D y S, y aludió a la representación gráfica.

Realizó cuatro conexiones bidimensionales de tres tipos N→G, N→S y S→G (ver gráfica 13, p. 156) y sólo un tipo de conexión tridimensional NGS, lo que produjo una configuración disconexa de cuatro puntos (p. 163).

Fue una respuesta precisa muy codificada, que por lo mismo, utilizó muy poco las representaciones discursivas. Respecto a la temática de límite, dio cuenta de una buena noción (conocimiento intuitivo) de ese concepto.

Su respuesta, expresada en una sola proposición, por lo mismo, no permitió identificar conceptos nucleares.

La entrevista no aportó mas información que la respuesta escrita, sin embargo menciona las tres secantes en cuestión lo que produce una digráfica más conectada para la configuración de sus conexiones (ver configuración 35, p. 164).

El ítem 1.8.13 dice:

Explica qué sucede cuando el valor absoluto de ***h*** *es menor que 0.1.*

Roky respondió así:

Cuando h es menor a .1 la secante se separa de la gráfica.

El ítem se presenta en forma discursiva, numérica y simbólica con referencia a una gráfica, así, la (DR) es D, G, N y S, misma que Roky reflejó en su respuesta cuando usó las representaciones D, N, S y se refirió a representaciones gráficas.

Mostró cinco conexiones bidimensionales de cuatro tipos D→G, D→S, N→S y S→G (ver gráfica 14, p. 156) y dos tipos de conexiones tridimensionales DSG y DNS (ver configuración 14, p. 163).

En su respuesta interpretó el efecto del acercamiento que produce el programa SECANTE (ver guía didáctica) como "... se separa la gráfica...", en esta parte, al parecer, centró su atención en la relación entre el eje X y la secante , pero esto último pudo precisarse con la entrevista durante la cual dibujó, en el margen derecho de la página 22 de su guía didáctica, la gráfica correspondiente; señaló la separación -comparativamente- por medio de segmentos punteados que proyectó sobre el eje X, desde la secante.
En la parte superior de esa misma página dibujó otra interpretación para la acción "se separa", y en este caso se refirió a la región comprendida entre la secante, la gráfica y el eje X.

Esta respuesta produjo la configuración 36 (p. 164) que se destacó más por la referencia a las representaciones gráficas, a partir de las representaciones discursivas, numéricas y simbólicas, de manera más amplia.

El ítem 1.8.14 dice:

¿Qué puedes decir de las secantes correspondientes a los valores -1, -0.5 y -0.1, es decir, qué sucede cuando el valor absoluto de ***h*** es cada vez menor?

La respuesta de Roky fue:

Los valores con respecto al eje de las Y , donde corta la secante es cada ves mayor , la secante se va inclinando mas .

La (DR) del ítem es D, G, N y S, porque se plantea en forma discursiva, numérica y simbólica con referencia a representaciones gráficas producidas en calculadoras, misma que Roky reflejó parcialmente en su respuesta discursiva porque únicamente se refirió a las representaciones gráficas.

Representó discursivamente a los conceptos contenidos en su respuesta, pero dio muestra de dos tipos de conexiones bidimensionales D→G y D→T, y sólo un tipo de conexión tridimensional DGT, por tanto la configuración de sus conexiones es una digráfica con tres puntos y dos líneas, que no es transitiva ni completa (p. 163).

Su respuesta es ambigua porque cuando anotó "... valores... corta... secante.... es cada vez mayor, la secante se va inclinando", no es clara la referencia de la ordenada del punto de intersección de la secante y el eje Y respecto a la inclinación de la secante.

Las nueve proposiciones producidas durante la entrevista ampliaron el significado que Roky le dio al hecho de que "... se van inclinando...", pero su referente en esa ocasión lo ubicó en el punto de intersección de la secante con el eje X y no con el eje Y. Lo que sugiere una inestabilidad de los referentes en el plano cartesiano.

Durante la entrevista utilizó las representaciones discursiva, numérica y simbólica; hizo 74 conexiones bidimensionales de cuatro tipos: D→G, D→S, N→G y S→G, y mostró tres tipos de conexiones tridimensionales DGS, DNG y NSG.

El núcleo conceptual de la entrevista tiene once conceptos que Roky *relacionó* fuertemente con los conceptos "secante", "valores", "y's" y "menor", persistiendo cierto grado de ambigüedad respecto al ángulo de inclinación de la secante y las intersecciones con los ejes Y ó X, que no fue completamente aclarado.

Resumiendo los resultados encontrados en esta sección dedicada al concepto de *límite, reportamos* tres hallazgos importantes:

El manejo del proceso límite de manera intuitiva y numérica, puesto en evidencia durante la entrevista a Roky (ítem 1.8.9).

El potencial geométrico para adquirir el concepto de tangente *a una curva*, asociado al comportamiento de los puntos en la curva, mostrado cuando Roky eligió correctamente a la secante L_3 *como la que tiene una posición* más parecida a la tangente en el punto (1,12), ítem 1.8.12, selección determinada por el *significado intuitivo que posee* respecto al concepto "tangente".

La inestabilidad de los referentes en el plano cartesiano mostrados en las respuestas, escritas y en entrevista, a los ítems 1.8.13 y 1.8.14.

Velocidad y razón de cambio instantáneos. Pendiente de la recta tangente.

El ítem 1.8.15 dice:

Y si analizas, en la misma tabla, el comportamiento numérico de las pendientes o razones de cambio, ¿cuánto crees que mide la pendiente de la tangente y la razón de cambio instantáneo? ¿Por qué?

La respuesta de Roky fue:

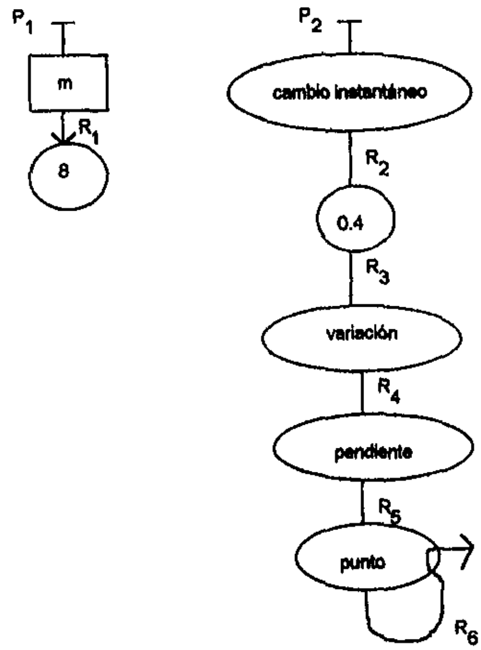
M=8 cambio instantáneo = 0.4 es la variación de la pendiente entre un punto y otro

El ítem está redactado en forma discursiva y se refiere a una tabla, por ello, la (DR) es D y T, misma que Roky reflejó en su respuesta porque usó representaciones discursivas y aludió a la representación tabular en cuestión.

Su respuesta mostró siete conexiones bidimensionales de tres tipos D→G, D→S y N→T (ver gráfica 16, p. 156) y un tipo de conexión tridimensional DSG. Por lo cual, la configuración de sus conexiones resultó ser una digráfica de cinco puntos no completa (ver configuración 16).

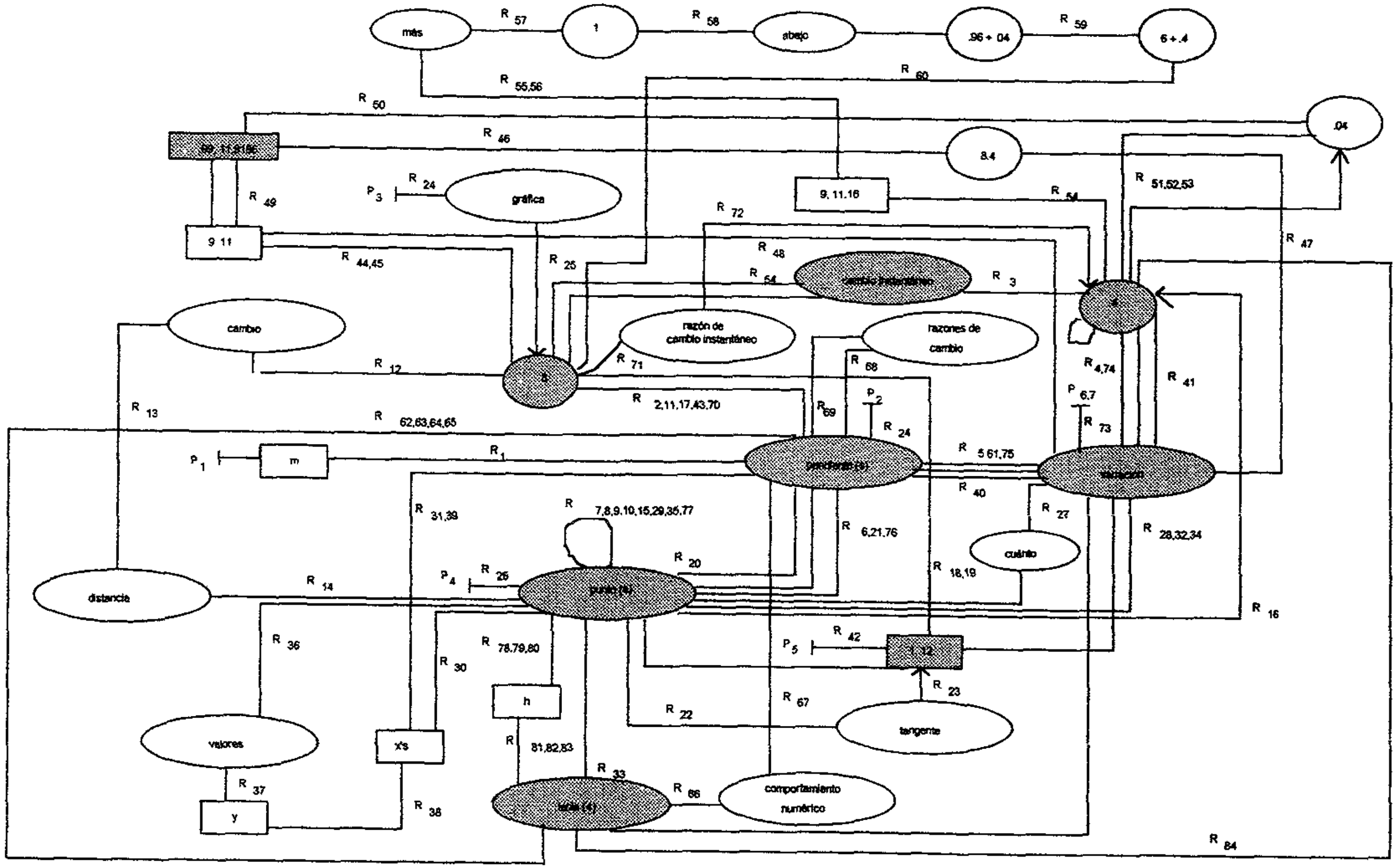
La respuesta fue parcialmente correcta porque proporcionó el valor correcto de la pendiente de la recta tangente, pero para el "... cambio instantáneo" calculó el cambio en las pendientes de las secantes. Esto señaló una diferencia, para el alumno, entre los valores de la pendiente de la recta tangente y la razón de cambio instantáneo.

Roky organizó su respuesta en dos proposiciones que no contienen conceptos nucleares (ver mapa 9, p. 106).



Mapa 9.- Mapa proposicional de la respuesta escrita de Roky al ítem 1.8.15

La entrevista a este ítem produjo siete proposiciones (ver mapa 10, p. 107) en *las* que se constató *la misma información* proporcionada en la respuesta escrita. Roky estableció más tipos de conexiones bidimensionales y tridimensionales para los mismos conceptos y amplió la explicación con ejemplos particulares en los que *mostró dificultad para* verificar su respuesta del valor de la razón de cambio instantáneo.



Mapa 10.- Mapa proposicional de la entrevista a Roky del ítem 1.8.15

El ítem 1.8.16 dice:

Finalmente, ¿a qué ritmo o velocidad se produce la sustancia química al término de la primera hora? ¿Por qué?

La respuesta de Roky fue:

12 gr/h porque al sacar la velocidad promedio entre el punto (0,0) y (1,12) es igual a 12 ya que el intervalo de estos dos puntos es el que corresponde a una hora.

Este ítem está redactado en forma discursiva y la (DR) es D, que Roky reflejó en su respuesta y en la que mostró *seis conexiones bidimensionales de cuatro tipos* D→G, D→S, N→S y S→G. Presentó dos tipos de conexiones tridimensionales DSN y DSG, de ahí que la configuración de sus conexiones fuera una dígráfica de cuatro puntos con cuatro líneas de las seis que la hacen completa.

Roky calculó la velocidad promedio durante la primera hora, al parecer, no captó la pregunta en relación a un instante en "... al termino de la primera hora...", como se dice en el ítem. En la segunda proposición confirmó su referencia a un intervalo de una hora. De ahí que, no se considera correcta la respuesta de Roky.

De éste y los siguientes ítems no se realizaron las entrevistas porque el alumno se ausentó de la escuela.

El ítem 2.4.1 dice:

¿Qué velocidad tiene el agua al llegar a la base del árbol en la trayectoria particular de la cuestión 2.3.1?

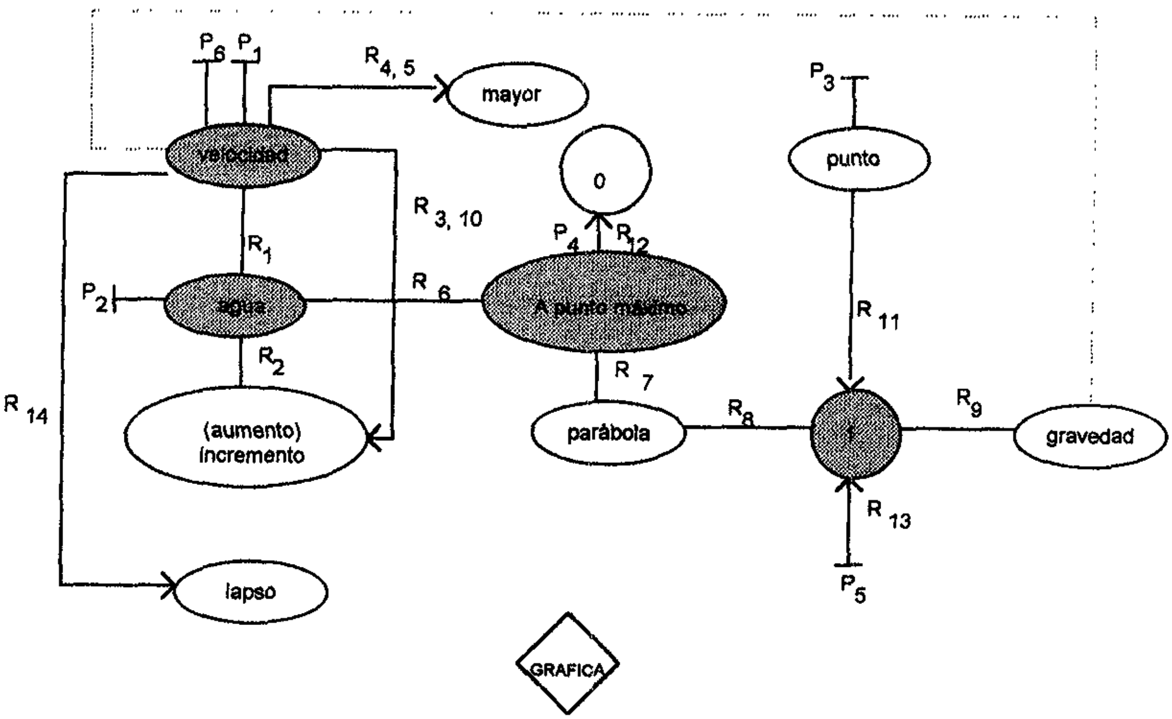
La respuesta de Roky fue:

La velocidad del agua va en incremento , es decir que la velocidad va a ser cada ves mayor , porque cuando el agua llega a A punto máximo . De esa parábola que es 1 al caer , por la gravedad la velocidad va en aumento en este punto es 1 punto máximo es 0 es otra ves 1 la velocidad va incremento en este lapso. (GRÁFICA).

El ítem está redactado en forma discursiva, Roky respondió de igual manera, pero además produjo una representación gráfica, no solicitada.

Su respuesta la organizó en seis proposiciones, en las que mostró 18 conexiones bidimensionales de tres tipos D→G, D→S y N→S y un tipo de conexión tridimensional DSG. Por lo que, la configuración de sus conexiones es una digráfica de cuatro puntos y tres líneas de las seis que tendría la digráfica completa (ver configuración 21, p. 163).

Es una respuesta descriptiva que tiene como base los conceptos "velocidad", "agua", "punto máximo" y "1" (ver mapa 11), que no contestó la cuestión expresada en el ítem.



Mapa 11.- Mapa proposicional de la respuesta escrita de Roky al ítem 2.4.1

Trayectoria

El ítem 2.2.p dice:

¿Qué dirección debe tener el agua al salir de la manguera para que el chorro llegue a la base de un árbol que dista dos metros de la salida del agua (medídos por el piso) y esta última se sostiene a un metro del piso?

La respuesta de Roky fue:

La dirección debe ser hacia el árbol , pero la mang[u]era no debe estar muy inclinada hacia arriba , ya que no salía además de la base , el tronco del árbol , debe de estar un poco hacia abajo , para que el chorro que sale en una forma de una pequeña parábola llegue directo a la base.

El ítem se expresa en forma discursiva y su demanda potencial de representaciones (DR) es D. Roky reflejó la (DR) en su respuesta que organizó en cuatro proposiciones, en ellas mostró 14 conexiones bidimensionales de un tipo D→G, de ahí que, no presentó conexiones tridimensionales. Por tanto, la configuración de sus conexiones resultó ser una digráfica de dos puntos y una línea.

Los conceptos nucleares fueron "árbol" y "base", con los que describió la trayectoria del chorro de agua que sale de una manguera como una parábola, al igual que otros cinco participantes.

El ítem 2.2.2 dice:

¿Cuál es su modelo matemático?

La respuesta de Roky fue:

$$-x^2+x$$
$$-5x^2+x$$
$$-x^2+16x$$
$$4x^2+3x$$
$$-4x^2-3x$$
$$-4x^2+5x$$
$$-9x^2+6x$$
$$-11x^2+6x$$
$$-3x^2+6x$$
$$-5x^2-6x$$
$$-10x\ -4.5x$$
$$-7x^2+10x$$
$$-10x^2+10$$
$$-x^2+1$$
$$-.5x^2+1$$
$$-.25x^2+1$$
$$-x^2+x=0$$

la encontré $-.25x^2+1$

El ítem expresado en forma discursiva, hace referencia a la representación gráfica elaborada por el alumno en el ítem anterior, y solicita explícitamente una representación simbólica que este alumno encontró después de variar los parámetros a, b y c en la expresión ax^2+bx+c. Esa expresión la obtuvo en el ítem 1.5.2, pero no lo mencionó. Además, Roky hizo un pequeño trazo para una parábola cóncava hacia abajo y con vértice sobre el eje Y, y unas notas sobre la forma ordinaria de la ecuación de una parábola -con algunos errores- tópico que forma parte de los temas del curso de geometría analítica[13] y que este alumno recursaba al mismo tiempo que la clase de cálculo.

Roky anotó 17 ensayos para la búsqueda del modelo matemático correspondiente a su gráfica, todos representados en forma simbólica con referencia a las gráficas que Roky generó en la calculadora. En los primeros doce intentos produjo expresiones del tipo ax^2+bx; en los cuatro siguientes ensayó con expresiones de la forma ax^2+c y la penúltima expresión es una ecuación que formuló a partir de su primer modelo. La respuesta de Roky fue una buena aproximación que logró al hacer que las trayectorias pasaran por los puntos (0,1) y (2,0) localizados en la actividad 17. Sin embargo, no usó una tercera condición conforme a lo que hizo en la actividad 8 y el ítem 1.5.2.

[13] En el curso de Matemáticas V se estudia la geometría analítica elemental, el cual es un antecedente de la formación básica, para Matemáticas VI, en el currículo de la Escuela Nacional Preparatoria.

En la última línea de su respuesta Roky exhibió una conexión bidimensional del tipo D$\rightarrow$S con lo cual realiza la conexión tridimensional DGS.

El ítem 2.2.7 dice:

Por lo tanto, ¿cuál es tu respuesta al <u>problema</u> enunciado en la página 23?

La respuesta de Roky fue:

Que la dirección de[b]e de ser en forma de una parábola de ecuación $-.25x^2+1$

Roky reflejó la demanda potencial de representaciones de este ítem porque usó la representación discursiva para responder. Hizo dos tipos de conexiones bidimensionales D$\rightarrow$G y S$\rightarrow$G y una conexión tridimensional DSG, de ahí que la configuración de sus conexiones fuera una digráfica de tres puntos con dos líneas, es decir, una digráfica que no es transitiva ni completa.

No respondió la cuestión planteada en el ítem, proporciona como respuesta la expresión de la trayectoria que encontró en el ítem 2.2.2, por lo que, al parecer consideró como sinónimos los términos "dirección" y "trayectoria".

Dirección de la trayectoria

El ítem 2.4.2 dice:

¿Qué relación tienen la dirección de la trayectoria y la velocidad del agua en el punto A?

La respuesta de Roky fue:

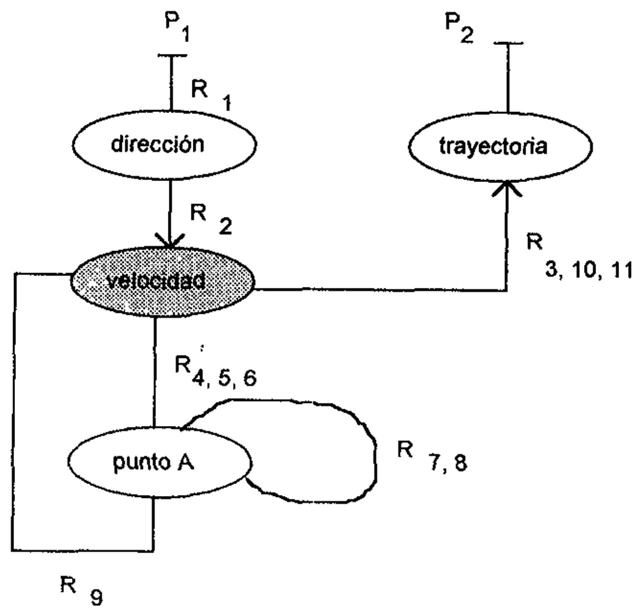
Que dependen una de otra, si la trayectoria cambia, la velocidad cambia y no llega al punto A, o se pasa del punto A, es decir que la velocidad siempre va a depender de la trayectoria .

Este ítem también pertenece a la temática "Dirección de la Trayectoria" , está planteado en forma discursiva y la respuesta de Roky reflejó esa demanda potencial de representaciones.

Roky hizo 8 conexiones bidimensionales de dos tipos D→G y D→S y un tipo de conexión tridimensional DSG, de ahí que la configuración de sus conexiones sea una digráfica de tres puntos y dos lineas.

Su respuesta presentó una secuencia peculiar de sus conexiones bidimensionales, un tanto cíclica (ver gráfica 22, p. 157).

Esta es también una respuesta descriptiva que respondió vagamente al ítem. Mostró un solo concepto en el núcleo conceptual (ver mapa 12).



Mapa 12.- Mapa proposicional de la respuesta escrita de Roky al ítem 2.4.2

En resumen, del hecho de que Roky reflejara la (DR) en la mayoría de sus respuestas se puede decir que los requerimientos representacionales de los ítems estuvieron en correspondencia con sus recursos de representación.

Analizando la variabilidad de representaciones mostradas por Roky en los 22 ítems se apreció el siguiente comportamiento: primero, un movimiento entre lo D y lo N, después permanece en lo S, de ahí se mueve entre lo D y lo S, luego entre lo N y lo S. Posteriormente permanece en lo N, de ahí oscila entre los D y lo N. Luego entre lo N y lo S, con breves estadios en lo S, después en lo D y luego oscila entre lo D y N; después se mantiene en lo D con algunos movimientos hacia lo S y lo N, finalmente se mantiene en lo D.

4.2 Discusión de las representaciones y conexiones mostradas en las repuestas escritas.

Para analizar las representaciones utilizadas por los participantes de este estudio en sus respuestas escritas se tuvo el cuidado de no perder de vista el contenido conceptual, es decir, la comparación se estableció entre las respuestas a un mismo ítem, y de esa manera, fue posible encontrar en las respuestas, conceptos en común, los que permitieron diferenciar el uso de las representaciones.

La primera parte de esta sección se dedica a la discusión de las secuencias de representaciones que cada respuesta genera. Los datos se presentan en forma gráfica y por equipo en las gráficas 39 a 82 (pp. 165-175), para simplificar y facilitar la exposición.

La segunda parte contiene la discusión, por ítem, de las conexiones encontradas, referida a la tabla 16 (p. 176).

Representaciones

Ítem Observaciones

1.2.1 Este primer ítem tiene un rol de diagnóstico por ello el contraste entre las respuestas de los participantes informa sobre los recursos representacionales de entrada de los participantes.

Roky y Fernando hicieron sus respuestas con representaciones D y N, de manera parecida a Viridiana. Rafael y Mirelle, Omega y Diana también mostraron segmentos parecidos en sus secuencias para los conceptos 2 a 8 y 13 a 20; 20 a 23 y 8 a 11, respectivamente (gráficas 39 y 40).

Diana presentó una mayor movilidad entre las representaciones D, N y S, pero a diferencia de Viridiana y Mirelle, el uso entre las representaciones fue más equitativo.

Diana mencionó explícitamente la variación funcional de la cantidad de sustancia en función del tiempo. Mirelle sólo lo expresó como una "dependencia" entre la cantidad y el tiempo, en cambio Viridiana se refirió a una función, sin especificar las variables.

En el equipo 2 (formado por los varones) no utilizaron los conceptos de "función" y "constante" como las integrantes del equipo 1. El concepto "forma creciente" que expresaron en el equipo 1, lo mostraron en forma verbal, "creciendo", en el equipo 2.

1.2.3 Diana, Viridiana, Mirelle y Roky no respondieron al ítem de manera escrita. Mirelle, Omega y Rafael respondieron usando representaciones D y S. Fernando y Rafael mostraron cinco oscilaciones entre las representaciones D y S (gráficas 41 y 42).

1.3.1 Las respuestas a este ítem pusieron en evidencia la interacción grupal en cuanto a que las integrantes del equipo 1 compartieron las representaciones de los conceptos punto, recta y constante. Los conceptos contenidos en sus respuestas los representaron en forma D y S, a diferencia de los miembros del equipo 2, los cuales respondieron sólo en forma discursiva (gráficas 43 y 44) y basaron su respuesta en los conceptos cantidad de sustancia, tiempo, segmento de recta, intervalo, aumento, disminución.

Las respuestas del equipo 2 no contestaron la cuestión que plantea este ítem, sin-embargo, Viridiana esbozó un acercamiento a la respuesta refiriéndose al concepto pendiente, pero no hizo explícita la relación que guarda con "variación proporcional". Relacionó también, los conceptos de distancia, puntos, segmento de recta, (x,y) y proporción, de manera correcta pero poco precisa.

Ninguno de los participantes dio una respuesta completa al ítem 1.3.1 en términos de la comparación del cambio en las variable tiempo y cantidad de sustancia producida, de modo relacionado con la variación proporcional entre dichas variables y con la representación gráfica del segmento que une dos pares de datos.

1.4.3 Todos los participantes, a excepción de Viridiana, hicieron su respuesta con representaciones D, N y S (gráficas 45 y 46). Ella sólo utilizó las representaciones N y S.

Diana explicó, en la primera parte de su respuesta, el procedimiento algebraico contenido en la segunda parte, situación que explicó el porqué del uso de representaciones discursivas al inicio. Todos los participantes del equipo 2 también dieron una explicación discursiva del procedimiento algebraico.

Viridiana y Mirelle no explicaron su procedimiento algebraico, y por eso es que casi no mostraron representaciones discursivas, sus respuestas oscilaron entre N y S. Omega y Roky usaron sólo una vez la representación N, en cambio Fernando y Rafael se refirieron a lo numérico en más de una ocasión, situación que tuvo que ver con una explicación más detallada del algoritmo.

Omega y Roky, mostraron una mayor proporción en el uso de representaciones S, en cambio, Fernando y Rafael utilizaron las representaciones D y S en forma más equitativa.

Todas las respuestas estuvieron basadas en el uso de la expresión algebraica de la velocidad promedio para aproximar la cantidad de sustancia producida.

1.5.3 Rafael y Roky respondieron de manera similar, es decir, describieron la variación de la cantidad de sustancia respecto a la variación en el tiempo. Sin embargo, Omega y Fernando, además de la misma descripción, respondieron simbólica y correctamente el ítem, al igual que Diana y Mirelle, quienes únicamente lo hicieron en forma simbólica (gráficas 47 y 48).

1.5.4 Diana, Viridiana, Rafael y Roky respondieron con representaciones D y S. Mirelle también, pero agregó una referencia a lo numérico (gráficas 49 y 50).

La segunda parte de cada una de las respuestas de Diana y Mirelle, expresada en forma simbólica, correspondió a la sustitución del tiempo transcurrido para obtener la cantidad de sustancia producida, respectiva.

Los conceptos utilizados por las participantes del equipo 1 fueron cantidad de sustancia, tiempo e intervalo, referidos a tiempos particulares, en el caso de Diana y Mirelle; en cambio los integrantes del equipo 2 dieron una descripción general, basada en los conceptos de ecuación, cantidad de sustancia, tiempo y despeje.

Las escasas representaciones simbólicas de Rafael y Roky correspondieron a la representación de las variables.

1.5.5 Fernando, Rafael, Roky y Mirelle se movieron en forma cíclica entre las representaciones N y S, Roky y Rafael utilizaron pocas representaciones discursivas. Omega y Diana se mantuvieron principalmente en lo simbólico y en menor grado usaron las representaciones N. Las representaciones discursivas fueron más frecuentes en Diana que en Omega (gráficas 51 y 52).

Sólo Omega y Fernando utilizaron representaciones T para mostrar y organizar los datos con los que calcularon la velocidad promedio. La primera parte de las respuestas de los varones fue la respuesta en sí, y en la segunda parte explicaron el procedimiento para obtener dicha respuesta.

Omega, Diana y Roky hicieron referencia al intervalo, en términos de la Tabla 1 de la *guía didáctica (anexo 1)*, lo que pareció indicar que el concepto de "intervalo" contenido en el ítem lo tradujeron a "intervalo de valores" en la tabla, significado que no corresponde al concepto de intervalo de tiempo, a diferencia de las mujeres, quienes orientaron más su respuesta a lo gráfico (Diana, Viridiana y Mirelle).

Diana y Mirelle fueron las únicas que mencionaron el concepto "ritmo" en lugar de "velocidad promedio".

1.7.1 Las integrantes del equipo 1 utilizaron representaciones D, N y S, con secuencias muy parecidas en cuanto a que mostraron muchas oscilaciones entre lo N y S y *algunos segmentos con representaciones* discursivas únicamente (gráficas 53 y 54). Las respuestas a este ítem indicaron mejor que en otros la interacción grupal (p. 63, 64 y 168). El uso de la representación D en el equipo 2 fue menos frecuente que en el equipo 1, de hecho, Roky y Rafael no la usaron.

Dos integrantes del equipo 1 utilizaron los conceptos parábola, simetría e intervalo, los dos primeros se refieren a la relación entre la cantidad de sustancia producida y el tiempo transcurrido más que a la relación entre un tiempo y otro, como se demanda en este ítem. Omega si mencionó explícitamente al concepto de cambio, en forma discursiva, cuando se refirió a $x_2 = x_1 + 1$, lo cual indicó una interpretación correcta.

Todos los participantes utilizaron ejemplos numéricos para ilustrar las condiciones $x_2 = x_1 + 1$ y $x_2 = x_1 - 1$ correspondientes a situaciones gráficas particulares, conforme se solicita en el ítem. Omega, Fernando, Viridiana y Mirelle hicieron respuestas muy amplias, con mucho detalle, pero las participantes del equipo 1 construyeron el ejemplo de la segunda condición mediante un giro de la parábola mencionada, de 180°, alrededor del origen. Las explicaciones de Diana y Mirelle sugirieron una translación de la segunda condición a los valores de la cantidad de sustancia cuando mencionaron a dos puntos de la parábola, simétricos a los del primer ejemplo con respecto al origen.

Sin embargo Viridiana, antes de citar el ejemplo compartido con las otras dos integrantes del equipo 1, agregó, respecto a las expresiones equivalentes citadas *previamente* $x_2 - x_1 = 1$ y $x_2 - x_1 = -1$, *que la segunda "...está mal...", porque* los dos miembros izquierdos son iguales "$\ldots x_2 - x_1 = x_2 - x_1 \ldots$" y los dos miembros derechos son diferentes "$\ldots 1 \neq -1 \ldots$", formalmente el argumento es correcto, está basado en la propiedad transitiva de la igualdad, definida en el conjunto de los números reales, sólo que el ítem no se refiere a un par de valores que satisfagan ambas condiciones a la vez, tal y como parece que Viridiana lo interpretó.

Omega fue el único que mencionó al referente de las x's, el tiempo, cuando dice que "... no tiene sentido..." la expresión "... $x_2 = x_1 - 1$...".

1.8.2 Rafael y todas las integrantes del equipo 1 respondieron con representaciones D, N y S, no así Omega y Roky quienes lo hicieron sólo en forma discursiva (gráficas 55 y 56).

Todos los participantes con excepción de Diana y Roky utilizaron el concepto "valor absoluto" en forma discursiva. Omega y Roky usaron el concepto "valor numérico" como sinónimo de "valor absoluto", pero Omega empleó los dos. Estos dos participantes se distinguieron también de los restantes porque no mencionaron explícitamente a "h", ni a su equivalente $x_2 - x_1$.

Rafael es quien dio una mejor respuesta al hacer una referencia explícita a los valores de la Tabla 3 (guía didáctica). Omega y Roky respondieron de manera general describiendo la variación de P_2 hacia P_1 y de P_1 hacia P_2, al parecer, transfirieron el orden en el eje X a los puntos de la gráfica, situación que no corresponde a las condiciones del ítem.

Fernando mezcló el comportamiento de h con el punto P_2. Mirelle responde en sentido inverso porque no se refiere a la variación del cambio sino a la variación de las abscisas de los puntos P_1 y P_2.

1.8.3 Omega y Rafael hicieron su respuesta, principalmente, en forma discursiva, lo que indicó un estilo de comunicar ideas menos simbólico o algebraico, que Diana y Viridiana (gráficas 57 y 58).

Mirelle fue la única que usó la representación numérica para responder. Mirelle y Fernando coincidieron en el uso de las representaciones D, G, y S.

En lugar de los conceptos "aumento" y "disminución" que emplearon Omega, Roky, Diana y Mirelle, Rafael mencionó las relaciones "van ascendiendo" y "van disminuyendo" o "disminuiría", y en esta discusión no se reportan las representaciones involucradas en las formas verbales.

Rafael centró su atención en propiedades de la gráfica (simetría y concavidad). Roky dirigió su respuesta a los puntos "equidistantes" en lugar de la simetría, lo cual es correcto si la referencia fuera a los valores de x_2 de la Tabla 3 (guía didáctica), que son las abscisas de los puntos de la parábola, pero no es correcto si se tratara de los puntos de la parábola, esta ambigüedad se disipó con la entrevista, quedó establecida la referencia a las abscisas.

1.8.9 Roky empleó representaciones D y S, Rafael, D y N, y los participantes restantes utilizaron las representaciones D, N y S (gráficas 59 y 60).

Mirelle mostró una mayor movilidad entre las representaciones que Omega, en el sentido de la duración de los ciclos entre las representaciones. Viridiana , por su parte, presentó mayor movilidad en la segunda parte de su respuesta.

Las integrantes del equipo 1 y Roky contestaron este ítem con relación al valor de h y no respecto al valor de la pendiente, conforme se señala en el ítem.

Mirelle es la única que usó la representación S para la relación entre h y $x_2 - x_1$, y para explicar el comportamiento de h, de modo funcional, en "... el valor absoluto de h de 1 a 0 va disminuyendo de acuerdo a la recta de $x_2 - x_1 = h$..." Parece que Mirelle entendió la expresión "de acuerdo" como una relación entre las variables x_2 y h, en la que consideró a x_1 constante e igual a 1.

1.8.10 Todos excepto Roky usaron las representaciones D, N y S. Todos menos Roky mostraron un apoyo ilustrativo con la representación N (gráficas 61 y 62). En una parte de las respuestas de Diana, Mirelle, Omega, Fernando y Rafael se identificó la secuencia de representaciones S, N y D. Mirelle y Viridiana presentaron la secuencia S, D y G. Diana, Omega y Rafael en gran parte de sus respuestas oscilaron entre S y N.

Omega, Rafael y Diana fueron los únicos que relacionaron el valor de h con la pendiente y la secante para responder. Roky contestó refiriéndose al "valor de la secante" [sic], cuando la pregunta fue sobre el valor de h correspondiente, esta fusión no se deshizo ni en la entrevista.

Fernando y Rafael respondieron en forma correcta y precisa. Todos menos Viridiana y Mirelle contestaron relacionando el comportamiento del valor de h con la secante y la tangente. En cambio, los integrantes del equipo 2 se enfocaron en la ubicación de los puntos, de P_1 respecto a P_2, y no se refirieron a la relación entre la secante y la tangente.

1.8.12 Las representaciones que usaron todos los participantes son D, N y S (gráficas 63 y 64). Las respuestas de Rafael y Viridiana presentaron la secuencia SDSN. Fernando y Viridiana mostraron la secuencia DDDDSNS .

Omega, Fernando, Roky y Diana proporcionaron respuestas cortas, pero correctas. Todos contestaron correctamente a la primera pregunta de este ítem, pero Viridiana, inicialmente se refirió correctamente a la relación entre h y la secante respecto a la tangente, y la parte final de su respuesta fue ambigua, cuando dijo "... es el que se acerca más a la tangente...", por el uso del artículo "el" en lugar de "la" y esto puede entenderse como que la relación entre h y la secante, respecto a la tangente, no es muy diferenciada.

Mirelle fue la única que no proporcionó el valor de h correspondiente a la secante L_3, ni se refirió al concepto "valor", probablemente no leyó la tercera pregunta contenida en este ítem.

1.8.13 A pesar de que Viridiana y Omega emplearon sólo un concepto para responder (gráficas 65 y 66), la apreciación de Omega de que la gráfica "... se despega ..." sugiere una referencia al eje Y, mientras que para Viridiana la referencia fue al punto de intersección de la secante y la curva en relación al punto donde se trazaría la tangente, cuando dice "... se va acercando...". Ambas situaciones fueron constatadas en la entrevista.

Omega explicó el cambio en la gráfica, para $h < 0.1$, más con un referente geométrico de la gráfica, cuando dijo "... se despega...", que con la relación entre el valor de h y la posición de la secante.

La única que comentó el caso $h = 0$ fue Mirelle; interpretó correctamente el hecho de que el programa SECANTE requería que la secante intersectara a la curva en dos puntos distintos y que cuando $h = 0$, la intersección era en un sólo punto.

1.8.14 En el equipo 2 las respuestas fueron predominantemente discursivas. Omega fue el único que utilizó sólo representaciones discursivas. Fernando, Rafael y Diana emplearon representaciones D y S. Viridiana y Mirelle hicieron uso de las representaciones D, N y S (gráficas 67 y 68), y para ellas se identificó la secuencia SDNDSDD.

1.8.15 Todos hicieron parte de la respuesta en términos numéricos. Fernando, Roky y Mirelle mostraron las representaciones D y N. Omega, Rafael, Diana y Viridiana emplearon representaciones D, N y S (gráficas 69 y 70). En Omega y Rafael se identificó la secuencia DNS.

Mirelle mostró la mayor proporción de representaciones simbólicas y utilizó las expresiones algebraicas para la pendiente contenida en la Tabla 4 (guía didáctica).

Se dio una respuesta marcadamente diferente entre los equipos, en especial por la interpretación que dieron al concepto "razón de cambio instantáneo". Viridiana no respondió, Diana y Mirelle sólo contestaron lo relativo a la pendiente. La diferencia más notoria con el equipo 2 fue que todos los integrantes de este último dieron como razón de cambio instantáneo el cambio en los valores de las pendientes o sea la razón de la razón del cambio promedio.

1.8.16 Todos los participantes a excepción de Viridiana utilizaron las representaciones D, N y S (gráficas 71 y 72). La secuencia DNNSSS la presentaron Diana, Mirelle y Rafael. Y en la parte final de la respuesta de Mirelle se notó una oscilación entre N y S que no se dio en las otras dos integrantes del equipo 1.

Rafael, Diana y Mirelle se refirieron a la "... primera hora...", Roky y Viridiana mencionaron "... una hora". En este ítem la frase "... al término de la primera hora..." se interpretó como "... durante la primera hora..." o como "... a lo largo de la primera hora...".

2.2.p Mirelle y Rafael utilizaron representaciones D y N, Omega y Roky respondieron sólo de manera discursiva (gráficas 73 y 74).

Fue muy notoria la ausencia de las representaciones simbólicas en las respuestas de tres integrantes del equipo 2 y uno del equipo 1. Las únicas representaciones simbólicas que Fernando utilizó fueron para el agua, con la expresión H_2O, y para el alcance, "...x distancia...".. Diana usó la representación S para denotar la altura, medida desde el piso, hasta donde se sostiene la manguera y con ello dio cuenta de que la referencia horizontal del piso la identificó, más adelante, con el eje X.
Viridiana trazó la gráfica correspondiente al enunciado del problema planteado en este ítem, localizando las coordenadas en forma simbólica y numérica, mientras que Mirelle, Diana, Rafael, Omega y Roky lo hicieron con representaciones numéricas, solamente. Y Fernando no utilizó coordenadas.

2.2.2 Fernando, Roky, Diana, Viridiana y Mirelle emplearon las representaciones D y S. Diana y Mirelle oscilaron más veces entre esas representaciones. Omega y Rafael utilizaron las representaciones D, N y S, pero Omega mostró más oscilaciones entre ellas (gráficas 75 y 76).

Diana y Viridiana usaron la representación S para modelos matemáticos más generales en comparación a los demás participantes. Mirelle fue la única que no proporcionó expresiones simbólicas para modelar la situación, de hecho, sólo describió las condiciones de variación utilizando representaciones discursivas para los conceptos de intervalo y trayectoria parabólica.

Diana y Viridiana aproximaron el modelo matemático de la salida del agua por una manguera con polinomios de primero, segundo, tercero y cuarto grados; Omega con polinomios de primero, segundo y tercer grados, Fernando y Roky con polinomios de segundo grado. La variable en todos los polinomios fue el desplazamiento horizontal del agua, aunque este hecho probablemente no fue significativo para los participantes.

2.2.7 Diana, Mirelle, Fernando y Roky utilizaron representaciones D y S. Diana las usó con menos frecuencia. Los demás participantes respondieron de manera discursiva (gráficas 77 y 78).

Todas las respuestas a este ítem fueron descriptivas de la trayectoria como sinónimo de la dirección, se refirieron a una trayectoria parabólica, pero en el caso de Viridiana y Mirelle, mencionaron además la concavidad de la parábola.

Omega y Rafael reconocieron la posibilidad de que el chorro de agua que sale por una manguera tuviera diferentes trayectorias, pero no especificaron alguna en particular, de ahí que la respuesta estuvo redactada en términos muy generales.

2.4.1 Todos las participantes del equipo 1 usaron las representaciones D, N y S. Viridiana osciló más entre las representaciones N y S (gráficas 79 y 80).

Este ítem tuvo el objetivo de mostrar si el alumno distinguía el concepto de velocidad del de razón de cambio de la altura del agua, los integrantes del equipo 2, con excepción de Roky, utilizaron erróneamente la razón de cambio de la altura del agua respecto al desplazamiento horizontal para calcular la velocidad promedio del agua. Roky, en cambio, describió el efecto de la gravedad en la velocidad y la relacionó con el punto más alto de la trayectoria, aunque de manera descriptiva, fue en parte correcta. Por lo tanto ninguno de los participantes respondió completa y correctamente el ítem.

2.4.2 Cinco de los siete participantes respondieron únicamente de manera discursiva. Mirelle usó representaciones D y S. Omega respondió discursivamente y mostró una representación numérica nada más (gráficas 81 y 82).

Este ítem también pretendió que el participante mostrara sus concepciones de las relaciones entre velocidad y dirección de la trayectoria. Viridiana y Mirelle consideraron a la velocidad negativa (valor negativo) como consecuencia de que la calcularon como la razón de cambio de la altura. Roky fue el único que mencionó una dependencia entre la dirección y la velocidad del agua.

Conexiones

Haciendo una comparación entre las conexiones tridimensionales[14] presentadas en las respuestas escritas a los 22 ítems en estudio (ver la tabla 16, pp. 176-186) se encontró la presencia de conexiones bidimensionales X→Y compartidas entre dos o mas conexiones tridimensionales, este hecho sugirió que la respuesta que un participante produce la basa o estructura en torno a ellas. Es decir, que las conexiones bidimensionales comunes a dos o más conexiones tridimensionales forman algo así como el núcleo representacional (NR) de la respuesta. El concepto de núcleo representacional pensado de manera análoga al de núcleo conceptual (Campos y Gaspar, 1995) en el sentido de que los conceptos del núcleo conceptual son conceptos presentes en dos o más proposiciones de la respuesta; así el núcleo representacional está formado por las conexiones bidimensionales comunes a dos o más conexiones tridimensionales.

Algunas particularidades que se observaron al comparar las configuraciones representacionales de las respuestas a cada ítem de los siete participantes fueron las siguientes:

Ítem	Observaciones
1.2.1	La demanda representacional (DR) del ítem es D, T y todos los participantes la reflejaron. Fernando, Diana, Rafael y Roky no hicieron uso de la representación gráfica G ni aludieron a ella, no así Omega, Viridiana y Mirelle, quienes tradujeron a una representación gráfica la información contenida en la Tabla 1 (guía didáctica), debido a una lectura anticipada de la página 4 de la misma guía didáctica (anexo 1), en donde aparece la gráfica correspondiente a los datos de la tabla. Este hecho se constató durante la entrevista. Omega, Diana y Viridiana presentaron la conexión D→S como parte de su (NR) y Rafael y Viridiana a D→T.
1.2.3	La conexión D→S forma parte de las configuraciones de Omega, Fernando, Mirelle y Rafael. Rafael fue el único que respondió de manera más completa en cuanto a conexiones tridimensionales, usó cinco.
1.3.1	La (DR) para este ítem es D, G y S, seis de los siete participantes la reflejaron y estructuraron su respuesta con esas tres representaciones. La conexión tridimensional DGS fue la única que usaron los participantes para responder a este ítem, excepto Roky quien utilizó DGT, lo que indicó su referencia a la representación tabular en lugar de la simbólica.
1.4.3	Omega, Fernando y Rafael presentaron la conexión DNS; Diana y Mirelle mostraron la conexión NST. Todos exhibieron S→T y todos menos Viridiana hicieron la

[14] Recordemos que una conexión tridimensional XYZ está representada por un arreglo de tres letras (de entre D, G, N, S, T) cuyo orden no es significativo y que denotan la presencia de una relación R entre dos conceptos representados en cualquiera de las tres siguientes posibilidades: X→Y R X→Z ó X→Y R Y→Z ó X→Y R Y→Z.

conexión D→S.

Rafael dio muestra de un núcleo más amplio y de sus cinco conexiones tridimensionales fue notorio que en tres de ellas aludió a T, es decir, Rafael organizó su respuesta a partir de los datos de una tabla.

1.5.3 Omega, Fernando y Rafael hicieron la conexión tridimensional DNS que indicó el uso de ejemplos para apoyar la respuesta discursiva que aludía a una representación simbólica del tiempo, pero no utilizaron símbolos para responder.

Roky hizo una respuesta discursiva y simbólica con referencia a G, lo que denotó una respuesta con más correspondencias entre otras representaciones externas pero que no fue tan precisa como la de Diana y Mirelle.

Sólo Fernando hizo referencia a la tabla.

1.5.4 Todos los participantes presentaron la conexión bidimensional D→S y Mirelle y Rafael mostraron además S→T. Estas coincidencias se encontraron a pesar de que las mujeres trabajaron independientemente del grupo formado por los hombres.

1.5.5 Todos efectuaron la conexión bidimensional N→S, que explica el uso del intervalo seleccionado para dar una respuesta en relación al concepto de *velocidad promedio.*

El núcleo representacional, para tres de los siete participantes, fue N→S, de ahí que, el ejemplo particular elegido resultó ser la base de su respuesta.

1.7.1 Las respuestas a este ítem presentaron un mayor número de conexiones bidimensionales y tridimensionales que las *anteriores* (p. 179).

El núcleo representacional fue marcadamente más amplio para Diana, Viridiana y Mirelle, quienes trabajaron juntas.

Las configuraciones de Fernando y Diana resultaron ser digráficas de cinco puntos con 6 y 7 *líneas respectivamente, que mostraron mayor grado* de conexión entre las representaciones en estudio.

Omega, Diana, Viridiana y Mirelle presentaron la conexión N→S en su núcleo representacional, de ahí que la base representacional de su respuesta está en los ejemplos que utilizaron para ilustrar los conceptos algebraicos.

1.8.2 Este ítem, como material de aprendizaje potencial (Ausubel, 1973), planteó una cuestión sobre una actividad que involucró representaciones D. G, N, S y T, y respecto a ellas Diana, Viridiana, Mirelle y Rafael exhibieron una configuración de cuatro puntos, no reflejaron la representación G como requiere la demanda representacional del ítem. Omega fue el único que mostró la conexión DGS con lo que refleja la (DR).

1.8.3 Todos mostraron la conexión tridimensional DGS con la que reflejaron la demanda representacional. Mirelle y Roky extendieron sus conexiones a T. Mirelle fue la única que usó la representación numérica para responder.

Roky dispuso de un (NR) mayor por lo que su configuración fue una digráfica más completa.

1.8.9 Roky respondió discursiva y simbólicamente con referencia a las representaciones tabular y gráfica. Todos elaboraron sus respuestas conforme al equipo en que trabajaron, a excepción de Roky, situación que al parecer resultó ser un efecto de la interacción grupal.

Es decir, en cada equipo se observó un cierto acuerdo en la respuesta, pero se destacaron algunas diferencias que pudieran atribuirse a la organización conceptual de cada individuo, más que a la interacción grupal. Por ejemplo Diana hizo la conexión bidimensional D→G a diferencia de Viridiana y Mirelle.

La conexión D→S formó parte del núcleo representacional de todos a excepción de Mirelle y Roky.

1.8.10 Se observó que las conexiones de Omega, Fernando, Diana, Mirelle y Rafael formaron digráficas con vértices D, G, N y S.

El núcleo representacional de Omega, Diana y Mirelle incluyó a la conexión S→G.

1.8.12 Las configuraciones de las respuesta de todos, a excepción de Roky, además de que reflejaron la (DR), incorporaron la información numérica con referencia a la representación simbólica. Todos usaron la representación simbólica. La referencia a lo gráfico fue más frecuente en Omega, Fernando, Diana, Viridiana y Rafael que en Mirelle y Roky.

El núcleo representacional de Omega, Fernando, Diana, Viridiana y Rafael incluyó la conexión S→G, razón por la que respondieron de manera precisa.

1.8.13 Algo característico a las configuraciones de Omega y Viridiana fue que no presentaron conexiones tridimensionales.

Fernando, Diana, Mirelle, Rafael y Roky reflejaron la (DR) de este ítem. Los cuatro últimos utilizaron además la representación N e hicieron la conexión bidimensional N→S. Roky, como se dijo en la sección anterior y a diferencia de los demás, hizo referencia a una "...separación..." respecto al eje Y, pero no a la situación de los puntos por donde traza una secante.

1.8.14 La respuesta de Viridiana produjo una configuración más conectada. Su núcleo representacional constó de cinco conexiones bidimensionales.

Todas las respuestas, a excepción de la de Roky, incluyeron la conexión tridimensional DGS, Roky utilizó la conexión DGT y su referencia a la Tabla 4 de la guía didáctica, pareció darle mayor significado que la referencia a la representaciones gráficas de la calculadora.

1.8.15 La (DR) se reflejó en todos. Un aspecto notorio fue que sólo Diana, Viridiana y Rafael mostraron representaciones simbólicas y los demás participantes hicieron su respuesta con base en la conexión D→S.

Todos, excepto Roky, exhibieron la conexión bidimensional N→S, la cual formó parte del (NR) en las configuraciones de todos menos de Omega y Roky. En el núcleo representacional de todos se dio la conexión D→S, excepto para Omega y Roky.

Rafael y Omega no aludieron a lo gráfico. Sin embargo, todos elaboraron parte de la respuesta en términos numéricos.

1.8.16 El único que reflejó la demanda potencial de la representación, T, fue Omega. Todos *mostraron la conexión bidimensional N→S.*
Cuatro de los siete participantes (Fernando, Mirelle, Rafael y Roky) se refirieronn a lo gráfico y Omega, Fernando , Mirelle y Rafael respondieronn además con representaciones simbólicas; Diana y Viridiana no usaron la representación simbólica sólo hicieron referencia a ella.

El (NR) de Fernando, Rafael y Roky incluyó a la conexión D→S.

2.2.p Todos excepto Roky presentaron la conexión tridimensional DGS. El núcleo representacional de Diana, Mirelle y Rafael abarcó a la conexión D→G.

La conexión tridimensional DGN sólo la mostraron Diana, Mirelle y Rafael.

2.2.2 Todos presentaron la conexión tridimensional DGS. Sólo Rafael agregó una ilustración en forma numérica de modo que su configuración incluyó la conexión N→S.

Todos respondieron en forma simbólica refiriéndose a las representaciones gráficas que construyeron en 2.2.p, 2.2.1 y en la calculadora.

2.2.7 Todos excepto Viridiana mostraron al menos la conexión tridimensional DGS. La (DR) de este ítem fue D, S y sólo Viridiana no reflejó en cuanto a S.

2.4.1 Todos presentaron la conexión N→S. Omega, Diana, Mirelle y Roky hicieron la conexión tridimensional DNS y Diana, Mirelle y Roky además mostraron a DSG.

Los participantes respondieron en términos discursivos y numéricos con referencias a lo gráfico. Fernando, Diana y Mirelle fueron los únicos que utilizaron la representación simbólica.

El (NR) de Diana y Mirelle incluyó a D→S.

2.4.2 *Todos exhibieron la conexión DGS y sólo Omega usó además a* DNG, correspondiéndose esto último con el uso de una ilustración numérica. El núcleo representacional de Omega fue la conexión D→S.

Configuraciones

Para finalizar esta sección presentamos los resultados conforme al tipo de configuración que mostraron los participantes en las respuestas escritas a los 22 ítems de la guía didáctica. Los resultados respecto al número de puntos de la configuración, en forma decreciente, fueron:

Las digráficas con cinco puntos se encontraron en catorce ocasiones: Omega en el ítem 1.2.1; Rafael en el ítem 1.2.3; Fernando y Rafael en el ítem 1.4.3; Fernando, Diana y Mirelle en el ítem 1.7.1, Diana en el ítem 1.8.9; Roky en el ítem 1.8.12 y Rafael, Diana, Viridiana, Mirelle y Roky en el ítem 1.8.15.

Las configuraciones con cuatro puntos y las cuatro conexiones tridimensionales posibles se encontraron sólo en Roky (ítem 1.8.3) y Viridiana (ítem 1.8.14).

Las configuraciones con cuatro puntos y tres conexiones tridimensionales no se mostraron conforme a un patrón reconocible respecto a los ítems. Diana mostró configuraciones de este tipo en los ítems 1.2.1, 1.8.10 y 2.2.p. Viridiana en los ítems 1.7.1 y 1.8.9. Rafael en 1.8.12 y 1.8.15 y Roky en el ítem 1.8.16.

Las configuraciones que tienen cuatro puntos y dos conexiones tridimensionales se mostraron en todos los ítems en al menos un participante. Los ítems que tuvieron un mayor número de participantes con digráficas de cuatro puntos y dos conexiones tridimensionales fueron el 1.8.9 (Omega, Fernando, Mirelle, Rafael y Roky) y el 1.8.12 (Omega, Fernando, Diana y Viridiana).

Las configuraciones de las respuestas que no mostraron saltos entre las conexiones bidimensionales son digráficas transitivas (de tres puntos) y se encontraron en cuatro de los siete participantes en el ítem 1.8.3 (Omega, Fernando, Diana y Rafael) y en ítem 2.2.2 (Omega, Diana, Viridiana y Mirelle). Es curioso que en cada caso hay un participante que no pertenecía al equipo de los tres restantes.

Sólo Diana y Mirelle mostraron configuraciones totalmente disconexas en el ítem 1.5.3. Los demás participantes no mostraron configuraciones de este tipo en absoluto.

En términos generales se encontró que la conexión tridimensional DGS fue la más frecuente, y que se generaba de las conexiones bidimensionales D→S y S→G. Sin embargo la conexión D→G se mostró menos, esto se puede entender como que los participantes casi no mostraron una evidencia de la interpretación (p. 23) de la información gráfica en términos verbales (Janvier, 1987, 28).

Para el concepto *cambio* los participantes mostraron mayor número de conexiones entre las representaciones (véase la página 179, ítem 1.7.1), esto en cierta medida concuerda con el hecho de que las conexiones se establecen en periodos de tiempo más o menos largos, recordemos que este concepto se utiliza en varias disciplinas escolares y desde los primeros años de la formación elemental. En el mismo ítem, cuatro de los siete participantes basaron su respuesta en representaciones numéricas y todos usaron representaciones simbólicas para referirse a dos valores de la variable tiempo, es decir, el cambio en el tiempo está referido a dos momentos de manera numérica y simbólica, pero la cuantificación del cambio sólo se hace de forma numérica.

El núcleo representacional fue marcadamente más amplio en el equipo compuesto por mujeres.

4.3 Extractos de las entrevistas a Roky

Cuadro 4.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.2.1

Cod.	Part.	Contenido	Intervención simultánea	Acotaciones *
121Ro01	I	*Le toca a Iván, bien, en el ítem 1.2.1*		
121Ro02	A	¡Ajá!		
121Ro03	I	Mmmhú, ¿qué te pregunté?		
121Ro04		¿Cómo es la variación de la cantidad Y de sustancia producida...?		[lee el ítem 1.2.1 impreso]
121Ro05	I	Tu respuesta ¿verdad?, bien entonces en la parte posterior escribiste, vamos a ver, tu me dices "aumenta desde un punto cero..."¿no?, ahora ¿quién disminuye a cero?	A ¡ajá! [leo la respuesta escrita] A ¡ajá!	
121Ro06	A	La... la cantidad de sustancia		
121Ro07	I	La cantidad de sustancia, bien y dice "en un lapso de cuatro horas", ¿de cuatro?		
121Ro08	A	Si de cuatro horas		
121Ro09	I	Disminuye otra vez a cero, ¿en cuatro horas?		
121Ro10	A	Exacto, o sea... dice que en dos horas sube... o sea en dos horas sube a su punto máximo		
121Ro11	I	Bien		
121Ro12	A	Y en... para regresar a su punto cero otra vez toma otras dos horas, y en el lapso de cuatro horas de cero sube y otra vez vuelve a cero	I ¡ah!	
121Ro13	I	¡Ah! eso te lo sabías, muy bien, ajá, porque me surgía la pregunta si... cuánto era el tiempo que se tardó en pasar de lo máximo a lo mínimo, al cero, y no, ¡ah! bien, oh key, entonces estamos de acuerdo, bueno de la pregunta 1.2.2		

** Las acotaciones del investigador están comprendidas entre corchetes.*

Cuadro 5.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.2.3

Cod.	Part.	Contenido	Intervención simultánea	Acotaciones *
123Ro01	I	La pregunta... la 1.2.3, dice "algunos cambios están en la..." , antes de que tu pintaras con lápiz, esto es con tinta ¿no?, "... por medio de segmentos horizontales y verticales, entonces con el lapicero marcas cuáles son los horizontales y cuáles son los verticales.		[leo el ítem impreso] [continúo la lectura]
123Ro02	A	¿Los segmentos horizontales?		
123Ro03	I	¡Ajá!		
123Ro04	A	Éste		
123Ro05	I	Y, ¿cuáles son los verticales?		
123Ro06		Pausa		
123Ro07	I	Eso, muy bien, señala sobre... bueno señala sobre la gráfica a qué variable corresponde cada uno, qué variables les tocaría, acuérdate que son cambios, eso dijo al principio... un segmento horizontal corresponde o representa un cambio y tu me dices a ¿qué variable?, ¿al tiempo?, o ¿a la cantidad de sustancia?		
123Ro08	A	Este cambio ¿a qué será?, ¿al tiempo?, ¿a la cantidad de sustancia?		
123Ro09	I	Tu me dices ¿a qué variable?		
123Ro10		Pausa		
123Ro11	A	El tiempo... y este sustancia		
123Ro12	I	Mmmhú, de hecho esa misma gráfica (segmento inentendible), pero he pintado los segmentos		
123Ro13	A	El cambio con respecto al tiempo, la horizontal		
123Ro14	I	La horizontal, y ¿la vertical?		
123Ro15	A	La sustancia		
123Ro16	I	Mmmú, bueno muy bien, ahora una pregunta, ¿cuánto mide este cambio?, te estoy preguntando el primero de los segmentos que yo pinté		[me refiero al segmento impreso en la gráfica 2]
123Ro17	A	¿El horizontal?		
123Ro18	I	El vertical, ¿cuánto mide ese cambio?		
123Ro19	A	Pues nos da... bueno ... .50		
123Ro20	I	¿El cambio mide .50?, a ver ¿por qué?		
123Ro21	A	Si ¿no?... porque.. es el... o sea....		
123Ro22	I	¿Cuánta sustancia hay aquí?, en este primer punto, a esta altura		[sugerí "altura"]
123Ro23	A	¿Aquí ?		
123Ro24	I	Si, ¿qué tanto...? Aquí es cero		
123Ro25	A	¿Cuánta sustancia hay?		
123Ro26	I	Hasta acá... ¿cuánto es?		
123Ro27		Pausa		
123Ro28	A	Sería 12		
123Ro29	I	¿Aquí?, ¿12?		

Continuación del Cuadro 5.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.2.3

123Ro30	A	Sí 12, sí ése es uno, ¿no?, este...		
123Ro31	I	No, esta escala va..., si este fuera uno, dos, tres, cuatro, ya hasta aquí serían las cuatro horas de aquí hasta acá son cuatro horas	A ¡ah! cuatro horas	[me refiero a la escala en el eje horizontal]
123Ro32	A	Entonces... (murmullos), ¡ah! .25 sería de aquí acá y .25 de aquí acá...	I mmhú	
123Ro33	I	Estás marcando los segmentos sobre el eje X de .25 en .25		
123Ro34	A	Mmmhú		
123Ro35	I	Si, luego entonces...		
123Ro36	A	Aquí serían... .25 y hacia arriba 12...., .25 .... verticalmente...		
123Ro37	I	Estás mirando la tabla 1, muy bien		
123Ro38	A	Serían 3.75		
123Ro39	I	La cantidad de sustancia		
123Ro40	A	La cantidad sería 3.75	I 3.75	[repito]
123Ro41	I	Bien y cuando pasas acá al siguiente punto...		
123Ro42	A	Punto 50 y este... ..7	I y, ¿ la cantidad de sustancia?	
123Ro43	I	Siete, ahora dime ¿cuánto cambió la cantidad de sustancia?		
123Ro44	A	Cambió... mmm....		
123Ro45		Pausa		
123Ro46	A	(Murmullos) 3.25		[efectúa sus operaciones]
123Ro47	I	Y tu me habías dicho que en .50		
123Ro48	A	Si, si lo que pasa es que es la cantidad que va... .50 es la cantidad que... que va este... que va disminuyendo pues		[esta explicación manifiesta su consideración al cambio de los cambios]
123Ro49	I	Pero el cambio, el cambio, o sea, entre este segmento y el que sigue hay una diferencia de .50 pero eso yo no te *estaba preguntando*		
123Ro50	A	Si la variación...		
123Ro51	I	Entonces esto hay que quitarlo, ¿verdad?, entonces vuelvo a plantearte la pregunta para ver si estamos de acuerdo, ¿cuánto mide este cambio?		[señalo el primer segmento vertical de la Gráfica 2]
123Ro52	A	Este cambio mide 3.25		
123Ro53	I	Ponlo sobre ahí...		
123Ro54	A	...3.25		
123Ro55	I	Muy bien ahora sí llegamos a un acuerdo, está bien.		

Cuadro 6.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.3.1

Cod.	Part	Contenido	Intervención simultánea	Acotaciones
131Ro01	I	Bien, entonces tu lees, la idea es pues que leas el ítem y yo te leo la respuesta para ver si estoy entendiendo bien lo que tu me contestas, mmhú, entonces ¿la lees en voz alta?		
131Ro02	A	¿Por qué la variación proporcional...?		[lee el ítem 1.3.1 impreso]
131Ro03	I	Muy bien, tu este contestaste "el segmento de recta sirve para aproximar la cantidad de sustancia de un intervalo a otro" o sea tu respuesta es amplia pero no me dices el porqué, ¿por qué sirve?		[leo la respuesta escrita]
131Ro04	A	A ver ¿para qué puse eso? "¿por qué la variación proporcional en un intervalo..." o sea este es un intervalo y este es otro intervalo, "se representa por medio de un segmento de recta...?		[trata de recordar], [vuelve a leer el ítem 1.3.1], [continúa la lectura del ítem 1.3.1]
131Ro05	I	Estamos mira... haciendo referencia a la gráfica 3, mmhú		[p. 6]
131Ro06	A	Entonces		
131Ro07	I	Ahí hay un segmento de recta		
131Ro08	A	Entonces sería éste, éste es el intervalo, ¿por qué se representa?	I mmhú	[señala el segmento en la gráfica 3]
131Ro09	I	Si		
131Ro10	A'	¡Ah!, pues yo puse porque... ese segmento de recta es el que une a ese intervalo, el segmento de recta sirve para indicar la cantidad de sustancia de un intervalo a otro	I ¿une al intervalo?	
131Ro11	I	¿Une al intervalo o une los puntos?		
131Ro12	A	Los puntos, eee cierra ese intervalo pues	I Eso es	[curiosa conceptualización de cerrar]
131Ro13	I	Cierra, tú cuando dices intervalo ¿a quién te refieres?		
131Ro14	A	Me refiero a esto		[traza una llave que abarca un segmento, sobre la gráfica 3]
131Ro15	I	Estás marcando con una llavecita el segmento de recta, este... que une a los puntos, bien, sin embargo a... al intervalo, nosotros nos referimos... a otro, aquí mira, ¿quieres leer esto?, ¿si?		[señalo los últimos dos renglones de la página 6]

Continuación del Cuadro 6.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.3.1

131Ro16	A	Que la cantidad de sustancia varíe en forma proporcional en un intervalo [a, b]		[lee el penúltimo renglón de *la* p. 6]
131Ro17	I	Hasta ahí, [a,b] es un intervalo, ¿si? pero un intervalo de tiempo, ¿si?, o sea a es tiempo y b es tiempo, entonces ¿dónde estaría representado el intervalo de tiempo?	A ¡Ajá! A ¡Ajá!	
131Ro18	A	Es el de las Y's ¿no?		
131Ro19		Pausa (4 segundos)		
131Ro20	I	Puedes constatar viendo tus otros materiales, déjame proporcionártelos		
131Ro21	A	En el uno ¿no?		[se refiere a la lección 1]
131Ro22	I	¿En el uno?, ¿crees?, muy bien aquí lo tienes [le doy su material de la lección 1]		
131Ro23		Pausa (17 segundos)		
131Ro24	I	Estás mirando la tabla 1, mmhú		
131Ro25	A	Tiempo es el X y cantidad es Y		
131Ro26	I	Mmhú		
131Ro27	A	Entonces, dice la cantidad de *sustancia mmm varía en forma* proporcional en un intervalo [a,b], nos dice que a y b es tiempo, entonces en un intervalo... ¡ah! de... del eje de las X's		
131Ro28	I	Eso es, a eso me refería, muy bien.		

Cuadro 7.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.5.4

Cod.	Part.	Contenido	Intervención simultánea	Acotaciones
154Ro01	*I*	¿Quieres leer la pregunta?		lee el ítem 1.5.4]
154Ro02	*A*	¿Por que... [		
154Ro03	*I*	Tu respuesta dice "primero tenemos el valor de y y así despeja a x", ¿qué quieres decir con "despeja a x"?		
154Ro04	*A*	Mmm, en primera tenemos el valor de y y después se despeja x, o sea al parecer ya tenemos un valor, si ya tenemos...		
154Ro05	*I*	Algo inentendible, mmhú		
154Ro06	*A*	Ya tenemos este valor de y (mmhú), ajá, ...permite calcular la cantidad de sustancia producida en cualquier momento x, a ver ya tenemos el valor de y, se despeja x		[repite el ítem 1.5.4],
154Ro07		Pausa		
154Ro08	*A*	Creo la cosa era saber...		
154Ro09	*I*	¿Qué querías decir?, ¿quién está despejado? o, ¿se necesita despejar a alguien?		
154Ro10	*A*	Estee... hay calcular la cantidad de sustancia producida en cualquier momento x... o sea que vamos a encontrar la sustancia ¿no?, por ejemplo en un minuto por decir algo ¿no? , entonces... este mmm... está mal ... entonces lo que debemos de conocer es los valores de x, para ya encontrar y, entonces no hay que despejar nada.	*I* mmhú *I* mmhú *I* mmhú *I* mmhú	
154Ro11	*I*	¡Ah! bien, entonces encontrarías la cantidad de sustancia producida en cualquier momento x ¿si?, porque "...ésta es la ecuación de las tres ecuaciones" [leo parte de su respuesta], ¿cómo está esto?, la ecuación de las tres ecuaciones.	*A* mmhú	[me sonrío]
154Ro12	*A*	Ya encontré la cantidad de sustancia producida en cualquier momento x, porque ésta es la ecuación, el resultado, es el resultado de las tres ecuaciones, o sea la... del...		
154Ro13	*I*	Puedes mirar... en este mismo plano		
154Ro14		Pausa		

Continuación del Cuadro 7.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.5.4

154Ro15	*A*	Del sistema... ¿cómo se llama?, del sistema de ecuaciones con tres incógnitas, ¿no?	
154Ro16	*I*	Ajá, ¿cuáles eran las incógnitas ahí?	
154Ro17	*A*	a, b y c	
154Ro18	*I*	Que las encontraste, ¿no?, y... esta era la respuesta, que fue lo que platicamos el martes, ¿te acuerdas?, bueno, entonces eee, ¿me podrías dar un ejemplo de por qué con esta expresión tu puedes calcular la cantidad de sustancia?, tu mencionaste un minuto ¿si?, un minuto, ¿qué fracción sería de hora?	
154Ro19	*A*	Mmm	
154Ro20		Pausa	
154Ro21	*A*	¿Que fracción sería?	
154Ro22	*I*	Si, porque recuerdas que a la x, la estábamos...	
154Ro23	*A*	Una cienava parte ¿no?	
154Ro24	*I*	Una ¿qué?	
154Ro25	*A*	No, una sesentava parte.	
154Ro26	*I*	Ajá, una sesentava parte, exacto, si el tiempo entonces fuera así de un sesentavo que sería un minuto, ¿cuánto de cantidad de sustancia se habrá producido? ¿cómo procederías?, con pluma eh [le indico que escriba con una pluma, para distinguir la respuesta dada en la lección de la respuesta producida durante la entrevista], ¡ajá!, habla fuerte ¿si?	*A* mmhú *A* mmhú
154Ro27	*A*	Tenemos y igual a 16 x menos 4 x cuadrada, si tenemos que x es igual a un sesentavo, el tiempo, entonces y es igual a 16 por uno entre 60, menos cuatro x al cuadrado, ¡ay! perdón, menos 4 por uno entre 60 al cuadrado.	*I* mmhú *I* mmhú
154Ro28	*I*	¿60?, ¡ajá! bien.	
154Ro29	*A*	Entonces este y nos daría...	
154Ro30		Pausa	
154Ro31	*A*	Mmm, bueno 16 por 60 menos... cuatro por uno entre 60 por 60	*I* mmhú
154Ro32	*I*	Lo que oprimas háblalo en voz alta	

Continuación del Cuadro 7.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.5.4

154Ro33	*A*	Por sesenta, luego lo elevo al cuadrado y luego... ya me da el resultado de 360 no 3600, luego tenemos que y es igual a 16 entre 60 menos 3600 entre 4 por 3600, entonces y nos da...	*I* mmhú
154Ro34		Pausa	
154Ro35	*A*	Este 3600 entre 60	
154Ro36	*I*	[segmento inentendible]	
154Ro37	*A*	Cuadrado	
154Ro38	*I*	¡Ajá!	
154Ro39		Pausa	
154Ro40	*A*	[segmento inentendible], ah si podemos multiplicar por esta a y luego esto por esto y se resta	
154Ro41	*I*	Mmm como tu te acuerdes, como tu quieras proceder.	
154Ro42		Pausa	
154Ro43	*I*	Nada más me dices que haces	
154Ro44	*A*	...3600...	
154Ro45		Pausa	
154Ro46	*A*	...3600 por 16 nos da un valor de 57200	
154Ro47	*I*	A ver déjame ver ¿qué hiciste?, 3600 por 16, mmhú	
154Ro48		Pausa	
154Ro49	*A*	...57200 menos 60 por 4, cero, 6 por 4, 24	
154Ro50		Pausa	
154Ro51	*I*	¿Cuánto da?	
154Ro52	*A*	...57260, a ver, y si hacemos... mmm	*I* mmhú
154Ro53	*I*	¿No te faltó ahí algo?	
154Ro54	*A*	¡Ah!, dividir ¿no?	
154Ro55		Pausa	
154Ro56	*A*	¿Si lo hacemos de otra forma?, entre 60, 60 por 16 , ay apreté la gráfica.	
154Ro57		Pausa	
154Ro58	*A*	Si (segmento inentendible) por 16 me da 960, 960 ammm 3600 entre 3600 nos da 1 por 4, serían...	
154Ro59		Pausa	
154Ro60	*I*	960 menos ¿qué?	
154Ro61	*A*	Menos 4, o sea 956, ¡ah! chihuahua, veamos, 956 entre .26555555556	*I* mmhú
154Ro62		Pausa	
154Ro63	*I*	Mmhú	
154Ro64	*A*	Yo diría que este es el resultado	
154Ro65	*I*	¡Ajá!, estos qué serían, .2655 ¿qué?	
154Ro66	*A*	Mmm, ¿qué son?	

Continuación del Cuadro 7.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.5.4

154Ro67		Pausa		
154Ro68	*A*	Diezmilésimos ¿no?		
154Ro69	*I*	Si, pero en las unidades, dado que y..., ¿qué representaba y?		
154Ro70	*A*	Cantidad de sustancia		
154Ro71	*I*	¡Ajá!, entonces contestamos en cantidad de sustancia, ¿no?, ¿cuánto hay?		
154Ro72	*A*	Mmm punto mmm 2655...		
154Ro73	*I*	¿Qué?		
154Ro74		Pausa		
154Ro75	*A*	Algo inentendible		
154Ro76		Pausa		
154Ro77	*I*	*No tanto el nombre sino el tipo* de unidades		
154Ro78		Pausa		
154Ro79	*I*	Como es la cantidad de sustancia son .2655 ¿qué?		
154Ro80	*A*	Gramos		
154Ro81	*I*	Mmhú, son gramos, entonces ¿te permite o no te permite?		
154Ro82	*A*	Este si		
154Ro83	*I*	¡Ah!, ahora si me diste la respuesta		
154Ro84	*A*	Ahora si ¿qué perdón?		
154Ro85	*I*	Ahora si respondiste, porque te pregunté esto, ¿por qué te permite?, por esta razón ¿si?, ¿te permite por esta razón?	*A* mmhú *A* s i, pero	[señalo el procedimiento explicado arriba]
154Ro86	*A*	Aaa		
154Ro87		Pausa		
154Ro88	*I*	Pero, ¿qué?		
154Ro89	*A*	A ¿Si me permite?, si me permite, no pero estaba... ¿por qué?... o sea yo puse que teníamos que conocer este valor	*I* mmhú	
154Ro90	*I*	¿Quién?		
154Ro91	*A*	El de y, primero teníamos el valor de y y así se despeja x		[lee su repuesta escrita]
154Ro92	*I*	¿Y era eso realmente?		
154Ro93	*A*	No, no porque este... a lo mejor confundí		
154Ro94	*I*	Mmhú		
154Ro95	*A*	Este... x con y, a de ser eso, porque si quisiera encontrar el tiempo, pues también se puede ¿no?, pero pus conociendo y	*I* mmhú	
154Ro96	*I*	Si, si lo entiendes pero no me contestas lo que yo te pregunto *¿verdad?, hasta este momento.* Muy bien.		

Cuadro 8- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.8.9

Cod.	Part	Contenido	Intervención simultánea	Acotaciones
189Ro01	*I*	El 1.8.9, ¿cuál es la respuesta que propones al 1.8.9?		
189Ro02	*A*	La pendiente se acerca al 8...		[lee su respuesta escrita]
189Ro03	*I*	¡Ajá!, aquí está la conclusión, ¿cómo es que te das cuenta de ella?, ¿cómo es que la obtienes ?		
189Ro04	*A*	Mmm		
189Ro05	*I*	Regresas a tu página 19		[de la guía, relato]
189Ro06	*A*	Dice que la pendiente se acerca al 8		
189Ro07	*I*	Si, ¿cómo sabes?, estás mirando tu tabla 4	A al 8	
189Ro08	*A*	Se supone que aquí es el punto 1,12 ¿no?, a no, es acá ¿no?, aquí es cero x es 1 y aquí es 2, entonces en este punto la pendiente va a ser 8	P ¡ajá!. P si	
189Ro09	*I*	¿Cómo te das cuenta que aquí es 8?		
189Ro10	*A*	¡Ah!, porque bueno así de vista vemos que hacia arriba la pendiente es 8.04 y hacia abajo es 7.96	P si P mmhú P mmhú	
189Ro11	*I*	Ajá! y entonces...		
189Ro12	*A*	Entonces estee.. en ese punto entre esos dos está el 8		
189Ro13	*I*	Bueno, el 8 lo propones muy bien, este... en el ítem.., después te dice en el 1.8.10..., ¿tu qué me contestas?		

Cuadro 9.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.8.10

Cod.	Part.	Contenido	Intervención simultánea	Acotaciones
1810Ro01	*I*	En el 1.8.10..., ¿tu qué me contestas?		
1810Ro02	*A*	El valor de la secante...		[lee su respuesta *escrita]*
1810Ro03	*I*	¿De la secante?		
1810Ro04	*A*	El valor de la secante... si		
1810Ro05	*I*	A ver ¿lo quieres leer bien?		
1810R006	*A*	En relación a las secantes, ¿cómo *debe... ?*		[lee el ítem 1.8.10 impreso]
1810Ro07	*I*	¡Ajá!		
1810R008	*A*	Este el valor de la secante tiene que ser cero		
1810Ro09	*I*	¿De la secante?, ¿cómo va a ser un valor de la secante cero?, ¿no te estarás refiriendo a otra cosa?, a ver.... ¿quién es el que sería cero?	*A* bueno cero, a ver veamos	
1810Ro10		Pausa		
1810Ro11	*A*	(Murmura)		
1810Ro12	*I*	Si aquí te preguntamos ¿cómo debe ser el valor de h?, entonces el de h ¿cómo debe de ser?		
1810Ro13	*A*	En cuál?, ¿para la secante?		
1810Ro14	*I*	En el ítem 1.8.10 ¿si?		
1810Ro15	*A*	¡Ajá!, ah cómo debe ser el valor de h ...		[relee parte final del ítem 1.8.10]
1810Ro16	*I*	Mmmhú		
1810Ro17	*A*	¿Cómo debe ser el valor de h?, pues parecido ¿no?, al de la tangente, entonces el valor de una.. de nuestra tangente... a ver ¿qué tenemos?		
1810Ro18	*I*	¿Es el valor de la tangente o algo de la *tangente?*		
1810Ro19	*A*	¿Es el valor de la tangente o algo de la tangente? [repite]		
1810Ro20	*I*	Si, porque.. cómo una tangente va valer 8 ó..		
1810Ro21	*A*	Si la pendiente ¿no?		
1810Ro22	*I*	¡Ah!, bueno la pendiente de la ¿quién?		
1810Ro23	*A*	De la tangente		
1810Ro24	*I*	De la tangente		
1810Ro25	*A*	Vale 8		
1810Ro26	*I*	Eso es		
1810Ro27	*A*	Entonces...		
1810Ro28	*I*	H, ¿cómo es?		
1810Ro29	*A*	H es igual a 8		
1810Ro30	*I*	No, ¿h?		
1810Ro31	*A*	...¿h?		

Continuación del cuadro 9.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.8.10

1810Ro32	*I*	Entonces ¿cómo debe ser el valor de h para que la secante se parezca mas a la tangente?		[leo parte del ítem 1.8.10]
1810Ro33	*A*	Pues cero		
1810Ro34	*I*	O sea, ¿cómo debe de ser?		
1810Ro35	*A*	Igual o parecida al valor de h de la secante...		
1810Ro36	*I*	Piensa en la secante ¿sí?, por cada secante le corresponde un... por cada h le corresponde una secante		
1810Ro37	*A*	Mmhú		
1810Ro38	*I*	¿Esa h cómo va a ser... para que la tangente sea... las secantes se parezcan más a la tangente?		
1810Ro39	*A*	Mmm (inentendible) a una tangente pues...		
1810Ro40	*I*	Las h's ¿cómo van siendo?		
1810Ro41	*A*	Similares a las...		
1810Ro42	*I*	A ver ¿cómo son tus h's?		
1810Ro43	*A*	Aquí puse -0.5 -0.1 -0.01	*I* mmhú	[mira la tabla 4]
1810Ro44	*I*	Entonces ¿cómo es el valor de h?		
1810Ro45	*A*	Este... ¿cómo es?, este... ¿cómo se llama?..., decimal ¿no?		
1810Ro46	*I*	Decimal, ¿está escrito en forma decimal?		
1810Ro47	*A*	¡Ajá!		
1810Ro48	*I*	Pero comparativamente, desde los primeros hacia... la parte central...		
1810Ro49	*A*	¡Ah!, va aumentando		[es correcto, resulta interesante investigar las razones por las cuales da esta respuesta]
1810Ro50	*I*	Y en valor absoluto?		
1810Ro51	*A*	Va disminuyendo		[es interesante investigar las razones por las cuales da esta respuesta]
1810Ro52	*I*	Mmmhú, y ¿de abajo hacia arriba?		
1810Ro53	*A*	Va este... disminuyendo		
1810Ro54	*I*	Mmmhú, bueno entonces ¿qué me puedes decir finalmente?, ¿cómo debe ser el valor de h para que la secante se parezca más... a la tangente?		

Continuación del cuadro 9.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.8.10

1810Ro55	*A*	¿Cómo debe ser el valor de h?	
1810Ro56	*I*	Mmmhú	
1810Ro57	*A*	¿Para que una secante se parezca a una tangente?	
1810Ro58	*I*	Mmmhú	
1810Ro59		Pausa	
1810Ro60	*A*	Pues debe tener esas... similitudes también ¿no?	
1810Ro61	*I*	Las similitudes, me estás señalando la columna... la primera columna, la de h ¿verdad?	
1810Ro62	*A*	¡Ajá!	
1810Ro63	*I*	De la tabla 4, bien...	
1810Ro64	*A*	Porque por ejemplo si queremos una secante por este punto y para que se parezca a la tangente, pues el valor *de h tendría que ser cero también*, por eso yo puse que tiene que ser cero, me estaba refiriendo a este punto...	*I* mmhú *I* mmhú *I* mmhú
1810Ro65	*I*	Me estás señalando al punto 1,12, de coordenadas 1,12, bien, vamos a hablar entonces ahora del 1.8.11, dice que hay que ilustrar ¿no?, ¿si hiciste la ilustración?	
1810Ro66	*A*	No se	
1810Ro67	*I*	Si la hiciste, me puedes explicar..., *¿ésta corresponde?... a esta* respuesta, ¿si?, ¿me puedes explicar tu respuesta?	
1810Ro68		Pausa	
1810Ro69	*I*	Te pido que ilustres las respuestas al ítem 1.8.9 y al 10 [le explico el ítem 1.8.11], este... mediante una gráfica, entonces con lo que estás dibujando en tu gráfica ¿qué estás poniendo?, ¿qué estás diciendo?...	
1810Ro70	*A*	En primer lugar esta es la parábola ¿no?	
1810Ro71	*I*	Mmhú estás señalando la curva	
1810Ro72	*A*	¡Ajá! este es el punto 1,12, donde toca la tangente	*I* mmhú
1810Ro73	*I*	Si	
1810Ro74	*A*	Esta es la tangente, su valor de h es igual a cero, su pendiente es igual a 8, me falta poner igual a 8, entonces este... ¡ah! pues lo que me faltó es la secante ¿verdad?, ¿cómo sería una secante?, anda por aquí ¿no?	*I* mmhú *I* mmhú *I* mmhú *I* mmhú

Continuación del cuadro 9.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.8.10

1810Ro75	*I*	Mmmhú, si h fuera ¿cuánto? ¿para qué h?	[en la representación gráfica intento ver si hay alguna evidencia de que el alumno tiene una relación entre el valor de h y la posición de la secante comparada con la tangente]
1810Ro76	*A*	...1,12	
1810Ro77	*I*	No para h	
1810Ro79	*A*	¡Ah! para h, cero.	
1810Ro80	*I*	¡Ajá!	
1810Ro81	*A*	Pero pues ahí no... no se ¿cómo?	
1810Ro82	*I*	Una secante, como ¿cuál podrías dibujar?	
1810Ro83	*A*	Mmm, una por aquí ¿no?	
1810Ro84	*I*	Que pasa ¿por qué puntos?	[con esto intento ver si relaciona los puntos términos de h]
1810Ro85	*A*	Por el 1,12	
1810Ro86	*I*	Y	
1810Ro87	*A*	Y pues ¡quién sabe! uno por acá	
1810Ro88	*I*	¡Ajá!, bueno uno más conocido ponte uno más fácil	
1810Ro89	*A*	¿Este?	
1810Ro90	*I*	A ver por ejemplo ¿éste qué coordenadas tiene?	
1810Ro91	*A*	El 2,16	
1810Ro92	*I*	Bien, ¿cómo se vería la secante?	
1810Ro93	*A*	Se vería así	[dibuja en su gráfica]
1810Ro94	*I*	Mmmhú, la estás trazando muy bien, ahora ¿qué.. qué me puedes decir de h ahí?, en esa situación de la secante	
1810Ro95	*A*	¡Ah!, pues que es igual a la tangente y a la secante?	[parece que el alumno no le da el significado apropiado a la h]
1810Ro96	*I*	La ¿h?	
1810Ro97	*A*	¡Ajá!,	
1810Ro98	*I*	¿Qué valor tiene h?	

Continuación del cuadro 9.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.8.10

1810Ro99	*A*	Cero		[es decir, el que ambas rectas, tangente y *secante*, pasen por el punto 1,12, da lugar a que le asigne el valor cero a la h, ver cuatro respuestas adelante]
1810Ro100		Pausa		
1810Ro101	*A*	¡Ah!, pero... ¿para la tangente?..., cero		
1810Ro102	*I*	No para la secante		
1810Ro103	*A*	¿Para la secante?, ah.. pues cero ¿no?	*I* mmhú	
1810Ro104	*I*	¿Por qué?		
1810Ro105	*A*	Pues aquí se ve que pasan por el mismo punto?		
1810Ro106	*I*	¡Ajá! ¿esta situación qué información te dice de h?		(ruido de hojas al pasar)
1810Ro107	*A*	¿Esa situación ?		
1810Ro108	*I*	Si el que pase por los dos puntos que me acabas de decir		
1810Ro109	*A*	Pues que por los dos puntos h va a *ser el mismo, tiene el mismo valor.*		
1810Ro110	*I*	¿Qué significaba h para ti, ¿te acuerdas?, pues mirar más material		[me refiero al resto de los hojas]
1810Ro111		Pausa		(ruido de hojas)
1810Ro112	*I*	Estás mirando... ¿qué página?		
1810Ro113	*A*	La 16		
1810Ro114	*I*	¡Ajá! la 16		
1810Ro115		Pausa		
1810Ro116	*A*	*¡Ah...!*		
1810Ro117	*I*	Ahí estás mirando, ¿qué estás mirando?, la tabla 3?	*A* ¡ajá!	
1810Ro118	*A*	La tabla 3		
1810Ro119	*I*	Mmhú		
1810Ro120	*A*	Entonces este... a ver este era... menos punto cuatro ¡ajá!, entonces h es la variación que hay de un punto a otro		[se refiere al valor de h en la segunda columna de la tabla], [esta es *su* conceptualización de h, que parece no estar ligada a la representación gráfica, pero si a la numérica o tabular]

Continuación del cuadro 9.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.8.10

1810Ro121	*I*	¿La variación del punto?, a ver ¿dónde puedes decir la variación del punto?, ¿dónde miramos?		
1810Ro122	*A*	Aquí, bueno yo pongo este punto, x1 y... y x punto 6		[lo señala sobre el primer renglón de la tabla 3], (estás señalando de...)
1810Ro123	*I*	x2, estás señalando x2		
1810Ro124	*A*	Entonces del .6 al punto 1, bueno mejor dicho del punto 1 al .6, es una variación de menos .4	*I* ¡ajá! *I* ¡ajá!	[aquí menciona "punto uno", pero se refiere a uno y la palabra "punto" le da el significado geométrico, en cambio en ".6", se refiere al decimal]
1810Ro125	*I*	Eso es, entonces a ver eso gráficamente ¿qué quiere decir?		
1810Ro126	*A*	Que es la distancia entre estas dos x's	*I* ¡ajá!	[conexión entre "diferencia de valores" y "distancia entre puntos"]
1810Ro127	*I*	A ver ¿dónde las miro, en tu gráfica?		
1810Ro128	*A*	¡Ah!, por aquí ya había hecho una gráfica ¿no?		
1810Ro129	*I*	Ya la habías puesto, muy bien, en la entrevista pasada. Y ahora, de lo que me estás diciendo...		
1810Ro130	*A*	¿Del valor de h?		
1810Ro131	*I*	Mmmhú		
1810Ro132	*A*	Mmm..., si [en] este punto comenzamos con cero...		
1810Ro133	*I*	No, ése punto no es cero, ¿seguro?		
1810Ro134	*A*	No, o sea para hablar del valor de h, ... cero..., aquí es cero, pero acá no		
1810Ro135	*I*	Mmmhú		
1810Ro136	*A*	¡Ah!, ya, acá pues uno el valor de h es igual a uno, entonces para este punto, para el 1,12, el valor de h va a ser cero	*I* mmhú *I* mmhú	[parece que el alumno habla de un h igual a cero tanto para la tangente como para la secante, porque parece que se refiere a la selección del punto 1,12, en ambas rectas]

Continuación del cuadro 9.- Extracto de la entrevista a Roky correspondiente al ítem 1.8.10

1810Ro137	*I*	Pero cuando hablas de ¿quién?		
1810Ro138	*A*	Del punto 1,12		
1810Ro139	*I*	¿Del punto nada más?		
1810Ro140	*A*	¿De la secante?		
1810Ro141	*I*	Que ya no se llama secante en ese punto		
1810Ro142	*A*	¿No?		
1810Ro143	*I*	La otra		[me refiero a la otra recta, la tangente]
1810Ro144	*A*	Y acá en el punto este... mmm 2,16 h va a tener este... el valor de 1	*I* ¡ajá! *I* mmhú	
1810Ro145	*I*	Medido a partir de ¿quién?		
1810Ro146	*A*	De las x's		
1810Ro147	*I*	Mmmhú, pero a partir de ¿cuál? lo ves, ¿desde dónde lo ves?, ¿de dónde a dónde?		
1810Ro149	*A*	De aquí a acá		[señala sobre el eje X]
1810Ro150	*I*	¿Ese es uno?, yo miro 2		
1810Ro151	*A*	¡Ah! no, por eso de aquí a acá pero le restamos este...		[Con esto indica que relaciona h con la resta de segmentos]
1810Ro152	*I*	¿Le restas uno? (*A* ajá), entonces ¿cuál te queda?		
1810Ro153	*A*	Me queda esto		[y que sabe cuál *es el segmento* resultante]
1810Ro154	*I*	Y esto ¿cuánto mide de longitud?		
1810Ro155	*A*	Uno		
1810Ro156	*I*	Uno, entonces tu h ¿es esto? o ¿lo que estás marcando como si fueran puntos?		
1810Ro157	*A*	¿Mi h?, pues es este valor, es uno, que es lo que es la diferencia de este punto a este punto.		[establece la conexión entre la representación numérica -diferencia de dos valores- y la *representación* gráfica -el segmento correspondiente-]
1810Ro158	*I*	¡Ajá!, bueno bien.		

4.4 Tablas de codificación para el caso de Roky

Las columnas de las siguientes tablas contienen la codificación: de los ítems y proposiciones, los conceptos y relaciones de cada una y las conexiones correspondientes.

Tabla 4.- Codificación de la respuesta escrita de Roky al ítem 1.2.1

Item	Prop.	Conceptos	Relaciones	Conexiones bidimensionales	Conexiones tridimensionales
1.2.1	P_1	C_1: punto cero C_2: punto máximo C_3: 2 horas	R_1: Aumenta R_2: alcanzar R_3: en	1. N→T 2. D→S 3. N→T	
	P_2	C_3: 2 horas C_1: cero C_4: lapso C_5: 4 horas	R_4: pasan R_5: y R_6: disminuye R_7: en R_8: de	4. N→T 5. N→T 6. D→S 7. N→T	

Tabla 5.- Respuesta de Roky en entrevista al ítem 1.2.1

Cod. de Ref.	Prop.	Conceptos	Relaciones	Conexiones bidimensionales	Conexiones tridimensionales
121Ro08 121Ro10	P_1	C_1: cuatro horas C_2: dos horas C_2: dos horas C_3: punto máximo	R_1: de R_2: o sea R_3: dice R_4: en R_5: sube R_6: o sea R_7: en R_8: sube	1. N→T 2. N→T 3. N→T 4. D→S	
121Ro12	P_2	C_4: punto cero C_2: dos horas C_5: lapso C_5: cuatro horas C_4: punto cero C_4: punto cero	R_9: y R_{10}: para R_{11}: regresar R_{12}: toma R_{13}: y R_{14}: en R_{15}: de R_{16}: de R_{17}: sube R_{18}: y R_{19}: vuelve	5. N→T 6. N→T 7. D→S 8. N→T 9. N→T 10. N→T	

Tabla 6.- Respuesta en entrevista de Roky al ítem 1.2.3

Cod. de Ref.	Prop.	Conceptos	Relaciones	Conexiones bidimensionales	Conexiones tridimensionales
123Ro11	P_1	C_1: tiempo C_2: sustancia (cantidad)	R_1: y	1. D→S 2. D→S	
123Ro13	P_2	C_3: cambio C_1: tiempo C_4: horizontal	R_2: con respecto al	3. D→S 4. D→S 5. D→G	
123Ro15		C_2: sustancia		6. D→S	
123Ro19		C_5: .50	R_3: da	7. N→T	
123Ro28		C_6: 12	R_4: sería	8. N→T	
123Ro30		C_7: uno	R_5: es	9. N→G	
123Ro31		C_8: cuatro horas		10. N→T	
123Ro32	P_3	C_9: .25 C_{10}: aquí [* origen] C_{11}: acá [* punto (.25,0)] C_9: .25 C_{10}: aquí [* (.25,0)] C_{11}: acá [.* (50,0)]	R_6: sería R_7: de R_8: y R_9: de	11. N→T 12. D→G 13. D→G 14. N→T 15. D→G 16. D→G	
123Ro36 123Ro38	P_4	C_9: .25 C_{10}: arriba C_6: 12 C_9: .25 C_{12}: verticalmente C_{13}: 3.75	R_{10}: serían R_{11}: y R_{12}: serían	17. N→T 18. N→T 19. N→T 20. N→T 21. D→G 22. N→T	

Continuación de la tabla 6.- Respuesta en entrevista de Roky al ítem 1.2.3

123Ro40 123Ro42	P_5	C_2: cantidad (sustancia) C_{13}: 3.75 C_5: .50 C_{14}: 7	R_{13}: sería R_{14}: y	23. D→S 24. N→T 25. N→T 26. N→T	
123Ro46		C_{15}: 3.25		27. N→T	
123Ro48 123Ro50	P_6	C_2: cantidad C_5: .50 C_2: cantidad C_{16}: variación	R_{15}: pasa R_{16}: es R_{17}: es R_{18}: va R_{19}: es R_{20}: va R_{21}: va disminuyendo R_{22}: pues si	28. D→S 29. N→T 30. D→S 31. D→S	[sustancia] [sustancia]
123Ro52	P_7	C_3: cambio C_{15}: 3.25	R_{23}: mide	31. D→S 32. N→T	

Tabla 7.- Respuesta escrita de Roky al ítem 1.3.1

Item	Prop.	Conceptos	Relaciones	Conexiones bidimensionales	Conexiones tridimensionales
1.3.1	P_1	C_1: segmento de recta C_2: cantidad de sustancia C_3: intervalo C_3: intervalo	R_1: sirve R_2: aproximar R_3: de R_4: a	1. D→G 2. D→T 3. D→G	DGT DGT

Tabla 8.- Respuesta en entrevista de Roky al ítem 1.3.1

Cod. Ref.	Prop.	Conceptos	Relaciones	Conexiones bidimensionales	Conexiones tridimensionales
131Ro04	P_1	C_1: intervalo C_1: intervalo	R_1: es R_2: y R_3: es	1. D→G 2. D→G	
131Ro10	P_2	C_2:segmento de recta C_1: intervalo	R_4: es R_5: une	3. D→G 4. D→G	
131Ro10	P_3	C_2:segmento de recta C_3: cantidad de sustancia C_1: intervalo C_1: otro [intervalo]	R_6: sirve R_7: indicar R_8: de R_9: a	5. D→G 6. D→T 7. D→G 8. D→G	DGT
131Ro12	P_4	C_4: puntos C_1: intervalo	R_{10}: cierra	9. D→G 10. D→G	
131Ro16	P_5	C_3: cantidad de sustancia C_5: forma proporcional C_1: intervalo [a,b]	R_{11}: varíe R_{12}: en	11. D→T 12. D→S 13. D→G	DST DSG
131Ro18		C_6: y's	R_{13}: es R_{14}: de	14. S→G	
131Ro25	P_6	C_7: tiempo C_8: x C_3: cantidad [de sustancia] C_6: y	R_{15}: es R_{16}: y R_{17}: es	15. D→T 16. S→G 17. D→T 18. S→G	
131Ro27	P_7	C_3: cantidad de sustancia C_5: forma proporcional C_1: intervalo [a,b] C_9: a C_{10}: b C_7: tiempo C_1: intervalo C_{11}: eje C_8: x's	R_{18}: dice R_{19}: varía R_{20}: en R_{21}: dice R_{22}: y R_{23}: es R_{24}: entonces R_{25}: en R_{26}: de... del R_{27}: de	19. D→T 20. D→S 21. D→G 22. S→G 23. S→G 24. D→T 25. D→G 26. D→G 27. S→G	

Tabla 9.- Respuesta escrita de Roky al ítem 1.4.3

Item	Prop.	Conceptos	Relaciones	Conexiones bidimensionales	Conexiones tridimensionales
1.4.3	P_1	$C_1: \frac{y-16}{1.5-2} = 4$		1. S→T	
		$C_2: y-16$		2. S	
		$C_3: 4(.5)$	R_1: =	3. S→T	
		$C_4: y$	R_2: =	4. S	
		$C_5: 2+16$		5. S	
		$C_5: y = 18$		6. S	
		$C_6: \frac{18-16}{1.5-2} = 4$		7. S	
	P_2	$C_7: \frac{13y-12}{1.5-1} = 4$		8. S→T	
		$C_8: y-2$		9. S	
		$C_3: 4(.5)$	R_3: =	10. S	
		$C_4: y$		11. S	
		$C_9: 2+12$	R_4: =	12. S	
		$C_{10}: y = 14$		13. S	
	P_3	$C_{11}: \frac{y-12}{1.20-1} = 7$		14. S→T	
		$C_{12}: \frac{y-12}{.20}$		15. S	
		$C_{13}: 7$	R_5: =	16. S	
		$C_{14}: y-12$		17. S	
		$C_{15}: 7(.20)$	R_6: =	18. S	
		$C_4: y$		19. S	
		$C_{16}: 7(.20)+12$	R_7: =	20. S	
		$C_{17}: y = 13.4$		21. S	
	P_4		R_8: Se escoge		
		C_{17}: intervalo abierto	R_9: con	22. D→G	
		C_{18}: respuesta anterior	R_{10}: y R_{11}: se toma	23. D	
		C_{19}: velocidad promedio		24. D→S	

Continuación de la tabla 9.- Respuesta escrita de Roky al ítem 1.4.3

	P_5	C_{20}: punto (s) C_{21}: x_1 C_{22}: x_2 C_{17}: intervalo abierto	R_{12}: se toma R_{13}: entre R_{14}: y R_{15}: es	25. D→G 26. S→G 27. S→G 28. D→G	DSG DSG
	P_6	C_{23}: valor(es) C_{24}: x C_{25}: ecuación $\frac{y-y_1}{x-x_1}=k$ C_{20}: punto (s) C_{18}: respuesta 1.4.2 [anterior] C_{26}: y_1 C_{21}: x_1	R_{16}: dando R_{17}: a R_{18}: en R_{19}: se toman R_{20}: de R_{21}: y R_{22}: se sustituyen R_{23}: y	29. D→T 30. S 31. D, S 32. D→G 33. D→S 33. S→G 34. S→G	DSG
	P_7	C_{27}: incógnita C_{28}: y_2 C_{29}: y C_{23}: valor(es)	R_{24}: se tiene R_{25}: es R_{26}: se despeja R_{27}: se obtiene	35. D→S 36. S→G 37. S 38. D→T	DSG
	P_8	C_{23}: valor(es) C_{30}: tabla de valores C_{20}: punto (s) C_{31}: parábola	R_{28}: obteniendo R_{29}: se introducen R_{30}: se grafican R_{31}: y R_{32}: aparecerán R_{33}: de	39. D→T 40. D→T 41. D→G 42. D→G	DGT

Tabla 10.- Respuesta escrita de Roky al ítem 1.5.3

Item	Prop.	Conceptos	Relaciones	Conexiones bidimensionales	Conexiones tridimensionales
1.5.3	P_1	C_1: cero [sustancia] C_2: punto máximo C_3: gramos	R_1: Va aumentando R_2: hasta R_3: en	1. N→G 2. D→G 3. D→S	DNG
	P_2	C_1: cero [sustancia]	R_4: disminuye	4. N→G	
	P_3	C_4: cero [tiempo] C_5: 2 horas C_6: 16 gr C_5: 2 horas C_1: cero [sustancia]	R_5: de R_6: a R_7: sube R_8: y R_9: de R_{10}: disminuye	5. N→G 6. N→G 7. N→G 8. N→G 9. N→G	

Tabla 11.- Respuesta escrita codificada de Roky al ítem 1.5.4

Item	Prop.	Conceptos	Relaciones	*Conexiones bidimensionales*	Conexiones tridimensionales
1.5.4	P_1	C_1: valor C_2: y C_3: x C_4: cantidad de sustancia producida C_3: momento x	R_1: tenemos R_2: de R_3: y R_4: se despeja R_5: y R_6: podemos encontrar R_7: en	1. D→S 2. S 3. S 4. D→S 5. S	
	P_2	C_5: ecuación(es) C_5: tres ecuación(es) (sistema)	R_8: es R_9: de	6. D→S 7. D→S	

Tabla 12.- Respuesta escrita de Roky al Ítem 1.7.1

Ítem	Prop.	Conceptos	Relaciones	Conexiones bidimensionales	Conexiones tridimensionales
1.7.1		GRÁFICA		1. G→S	
	P_1	$C_1: x_2 - x_1$ $C_2: 1$ $C_3: x_2$ $C_4: 1 + x_1$ $C_5: 2$ $C_6: 1 + 1$ $C_5: 2$ $C_5: 2$	R_1: = R_2: = R_3: = R_4: =	2. S→G 3. N→G 4. S→G 5. S→G 6. N→T 7. N→T 8. N→T 9. N→T	NSG
	P_2	$C_1: x_2 - x_1$ $C_6: -1$ $C_3: x_2$ $C_7: -1 + x_1$ $C_8: .25$ $C_9: -1 + 1.25$ $C_8: .25$ $C_8: .25$	R_5: = R_6: = R_7: = R_8: =	10. S→G 11. N→G 12. S→G 13. S→G 14. N→T 15. N→T 16. N→T 17. N→T	NSG

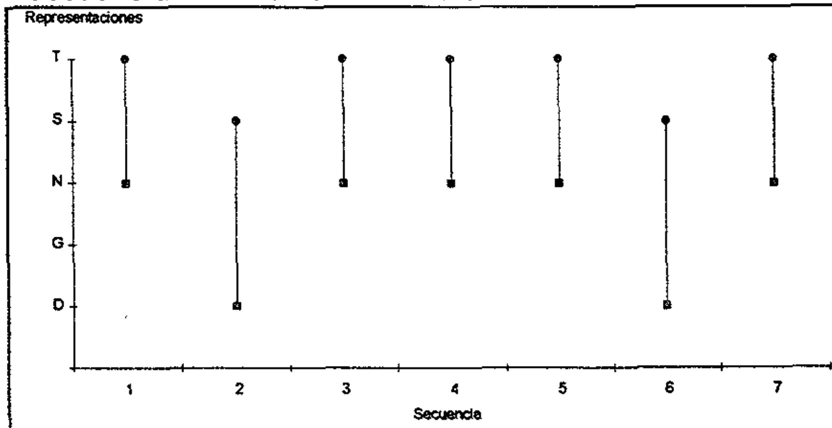
Tabla 13.- Respuesta en entrevista de Roky al ítem 1.8.2

Item	Prop.	Conceptos	Relaciones	Conexiones bidimensionales	Conexiones tridimensionales
1.8.2	P_1	C_1: valor numérico C_2:numérico	R_1: va aumentando R_2: y R_3: va disminuyendo	1. $D \rightarrow T$ 2. $D \rightarrow T$	
	P_2	C_1: valor numérico C_3: 1.2 C_4: 1.3 C_5: h C_6: arriba C_7: derecha C_8: izquierda	R_4: va aumentando R_5: de R_6: para R_7: para R_8: para R_9: va disminuyendo	3. $D \rightarrow T$ 4. $N \rightarrow T$ 5. $N \rightarrow T$ 6. $S \rightarrow T$ 7. $D \rightarrow T$, $D \rightarrow G$ 8. $D \rightarrow T$ 9. $D \rightarrow T$	NST DST

4.5 Gráficas de secuencias de las conexiones bidimensionales de Roky

Nota.- Las conexiones bidimensionales X→Y se grafican como un segmento vertical con extremo inicial en un pequeño cuadrado para X y un círculo para Y.

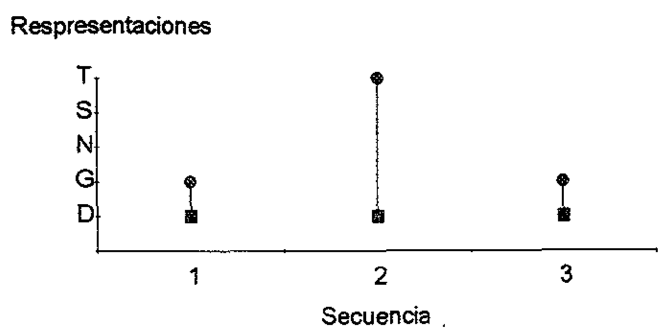
Secuencias de las conexiones bidimensionales mostradas en las respuestas escritas de Roky



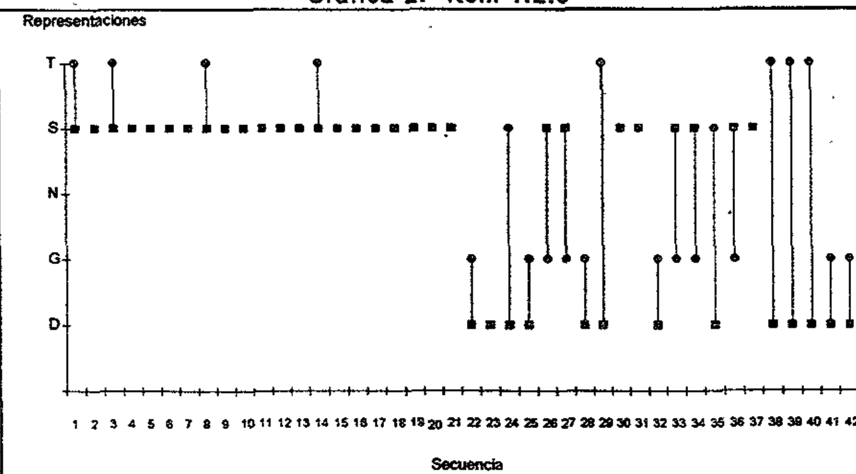
Gráfica 1.- Item 1.2.1

(no lo respondió)

Gráfica 2.- Item 1.2.3

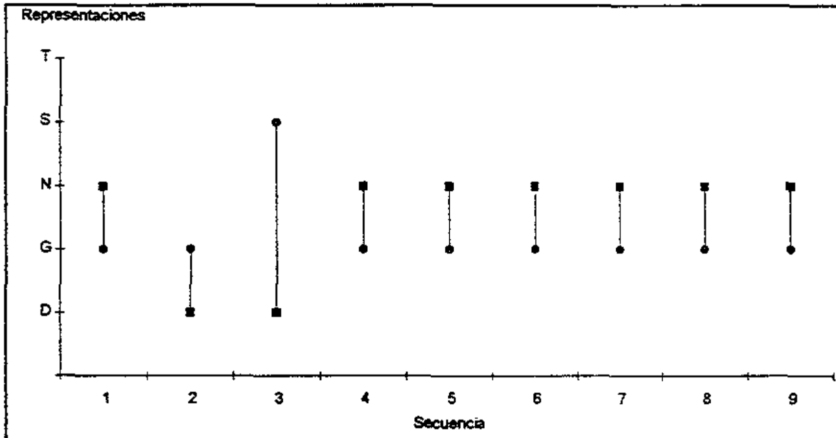


Gráfica 3.- Item 1.3.1

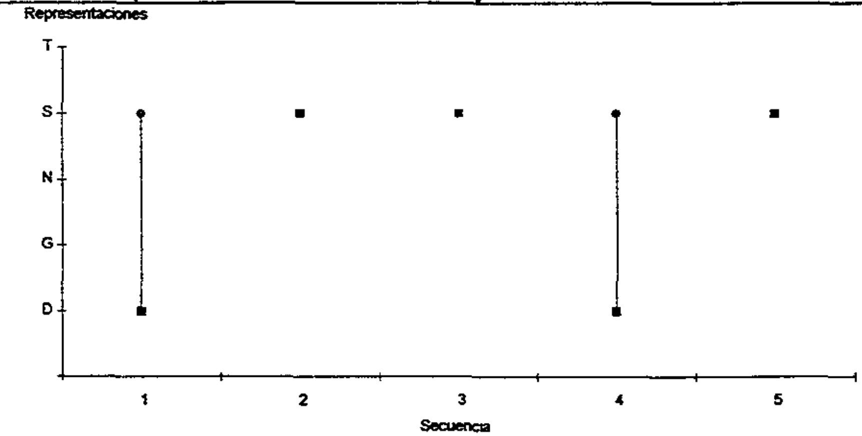


Gráfica 4.- Item 1.4.3

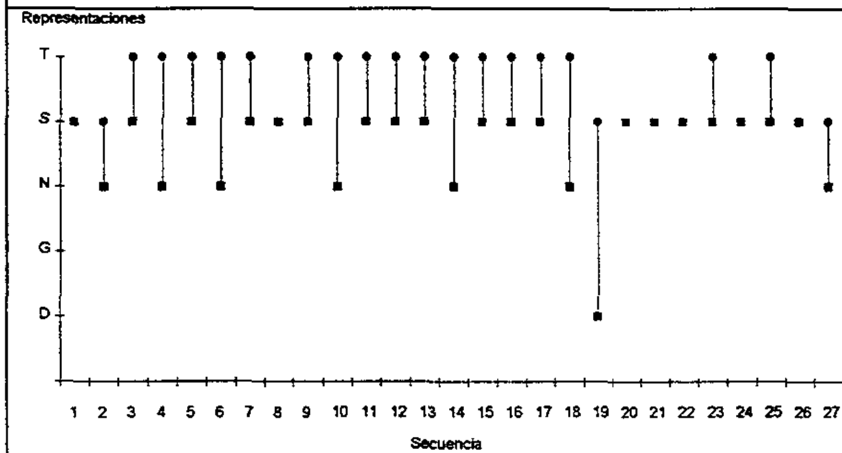
Secuencias de las conexiones bidimensionales mostradas en las respuestas escritas de Roky



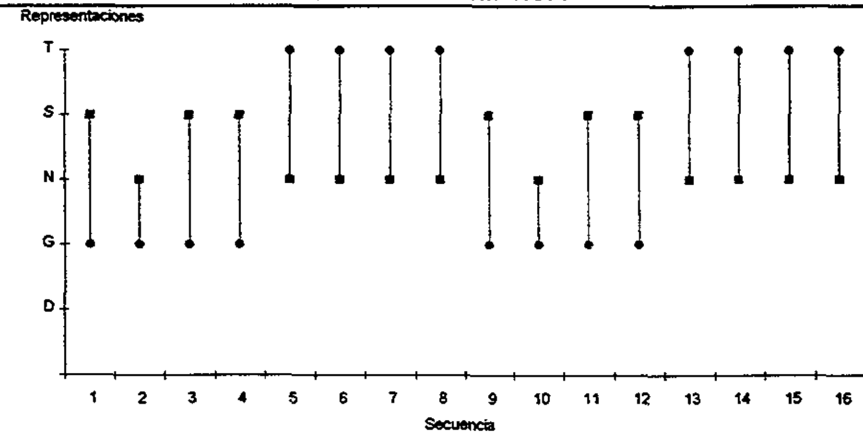
Gráfica 5.- Item 1.5.3



Gráfica 6.- Item 1.5.4

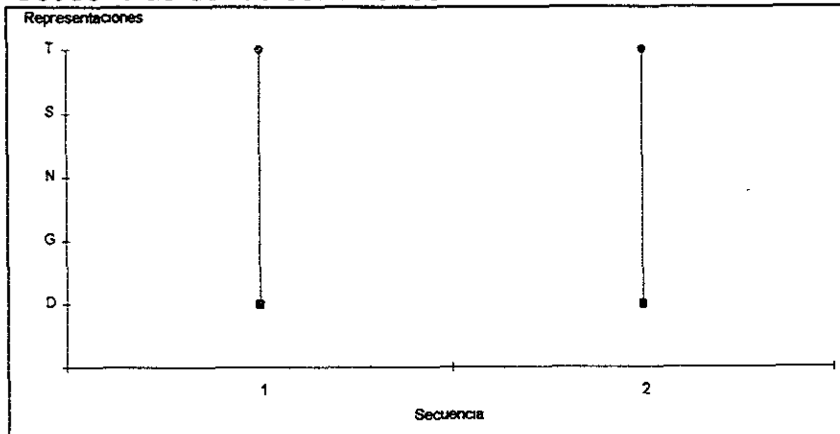


Gráfica 7.- Item 1.5.5

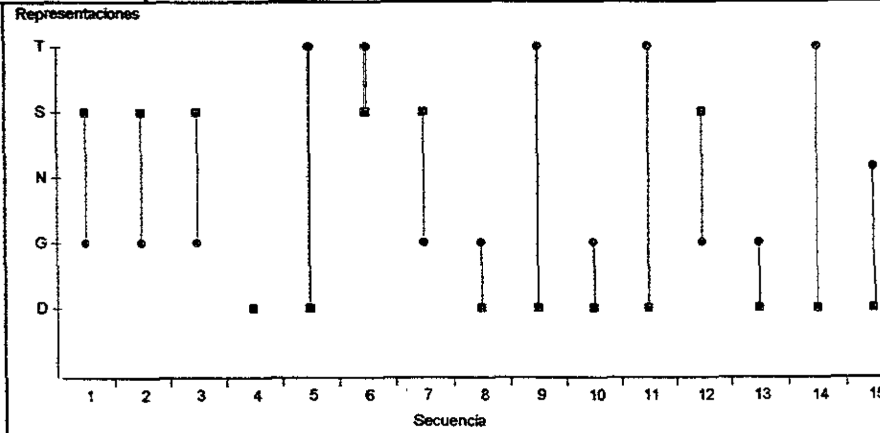


Gráfica 8.- Item 1.7.1

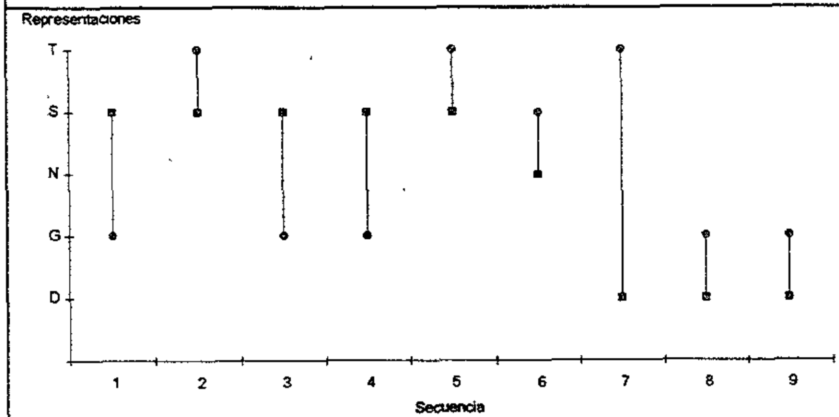
Secuencias de las conexiones bidimensionales mostradas en las respuestas escritas de Roky



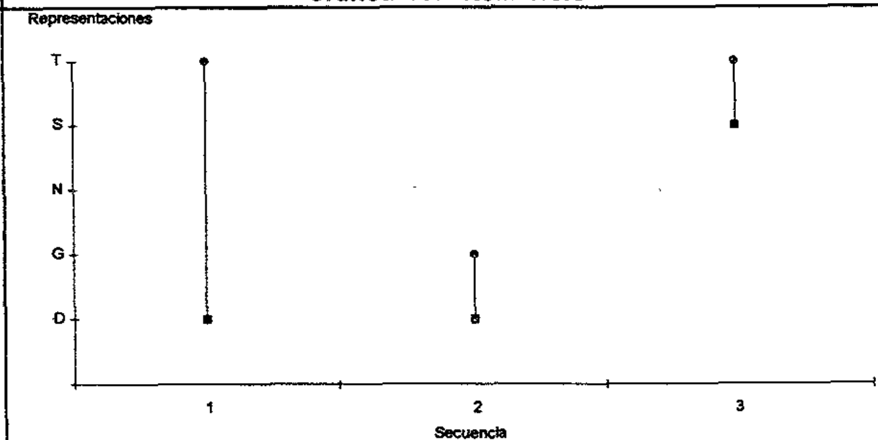
Gráfica 9.- Item 1.8.2



Gráfica 10.- Item 1.8.3

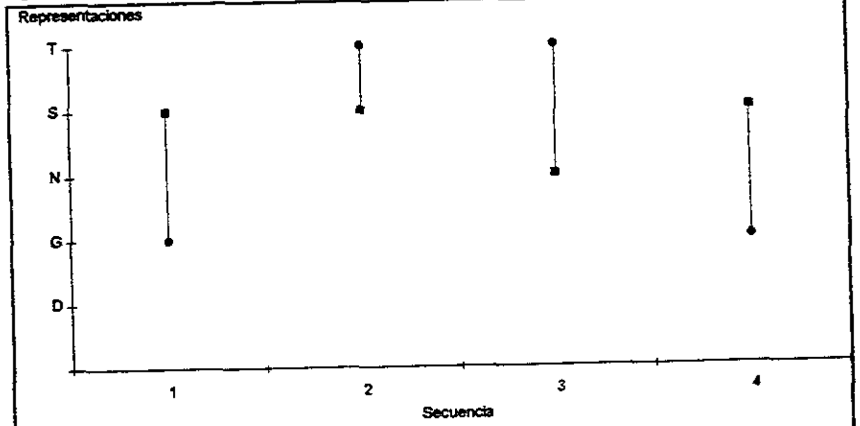


Gráfica 11.- Item 1.8.9

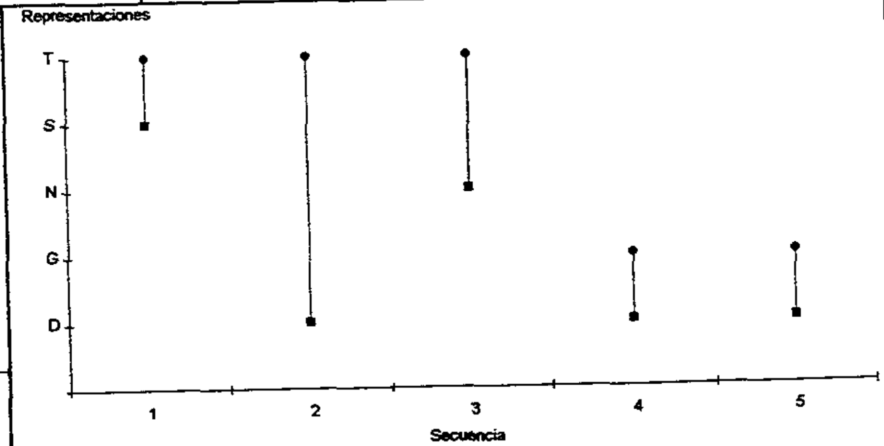


Gráfica 12.- Item 1.8.10

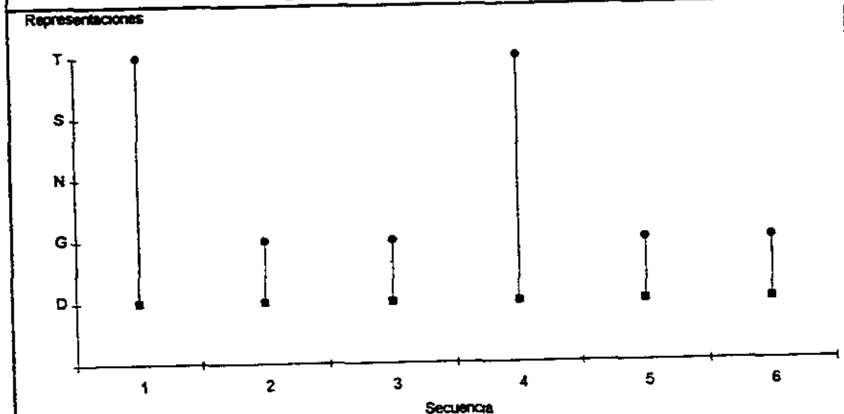
Secuencias de las conexiones bidimensionales mostradas en las respuestas escritas de Roky



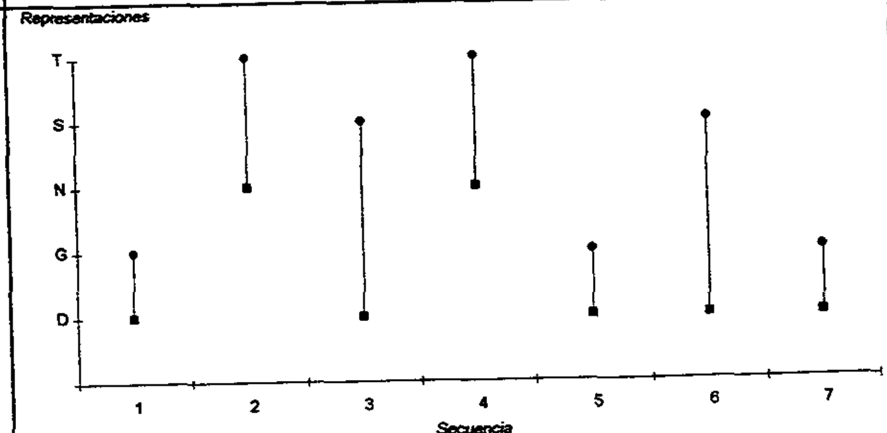
Gráfica 13.- Item 1.8.12



Gráfica 14.- Item 1.8.13

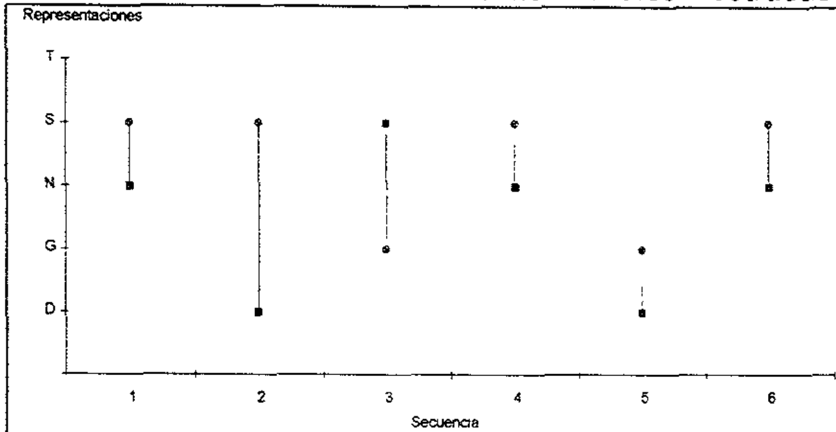


Gráfica 15.- Item 1.8.14

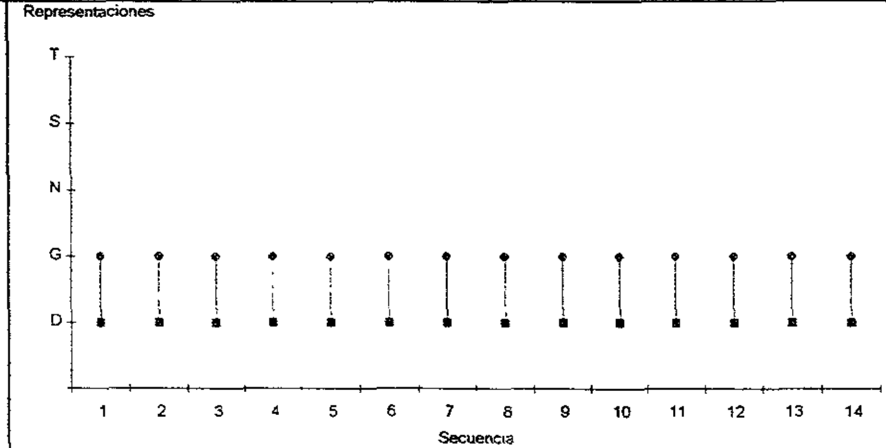


Gráfica 16.- Item 1.8.15

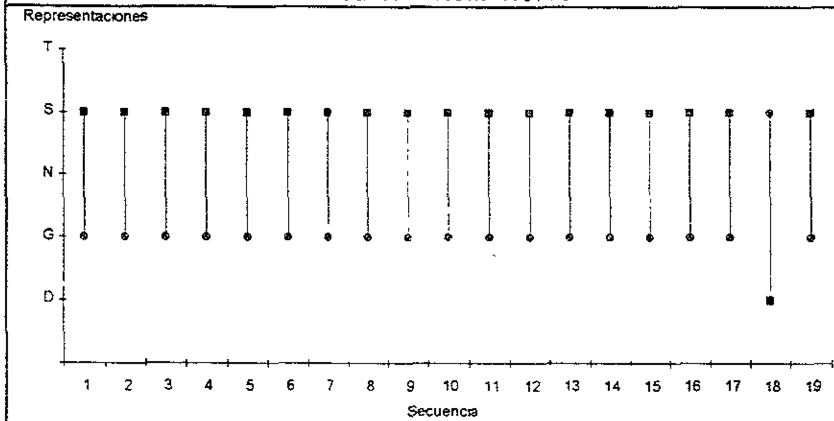
Secuencias de las conexiones bidimensionales mostradas en las respuestas escritas de Roky



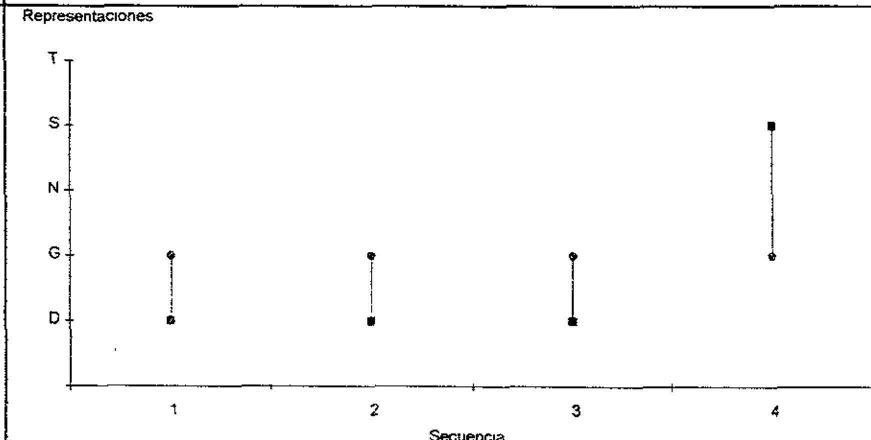
Gráfica 17 - Item 1.8.16



Gráfica 18.- Item 2.2.p

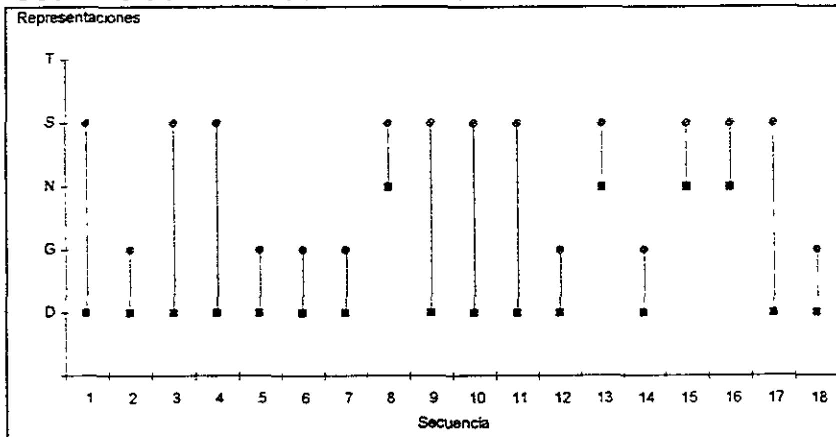


Gráfica 19.- Item 2.2.2

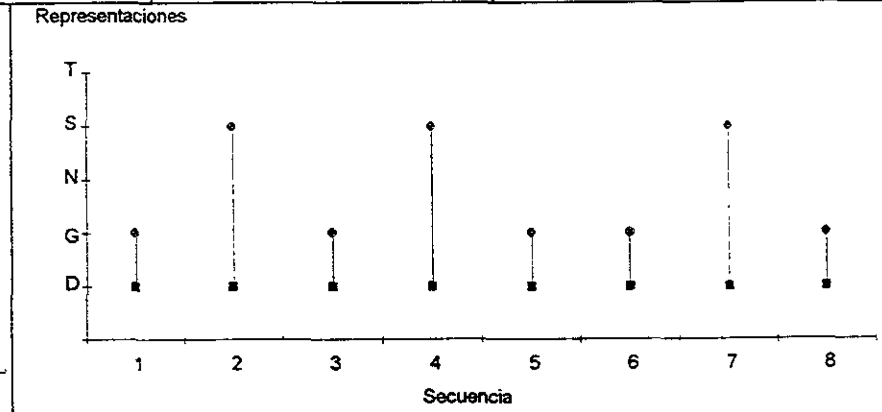


Gráfica 20.- Item 2.2.7

Secuencias de las conexiones bidimensionales mostradas en las respuestas escritas de Roky

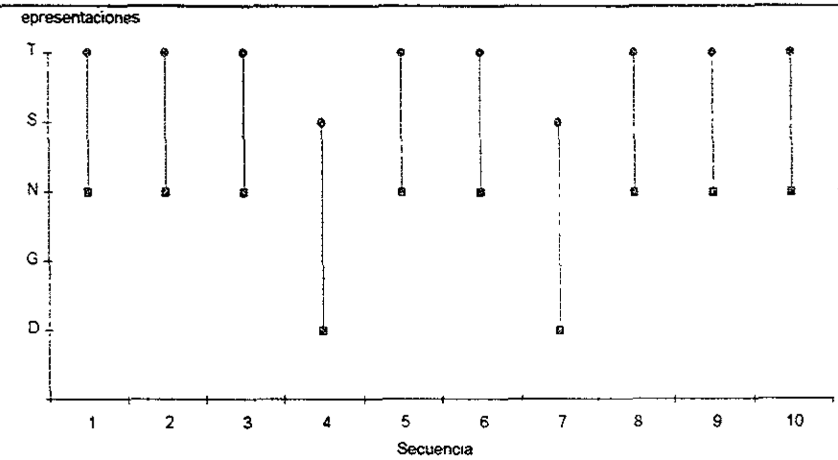


Gráfica 21.- Item 2.4.1

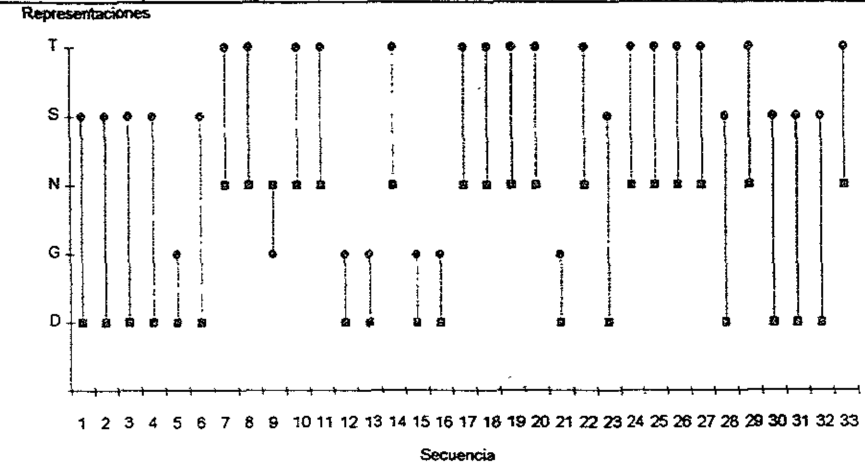


Gráfica 22.- Item 2.4.2

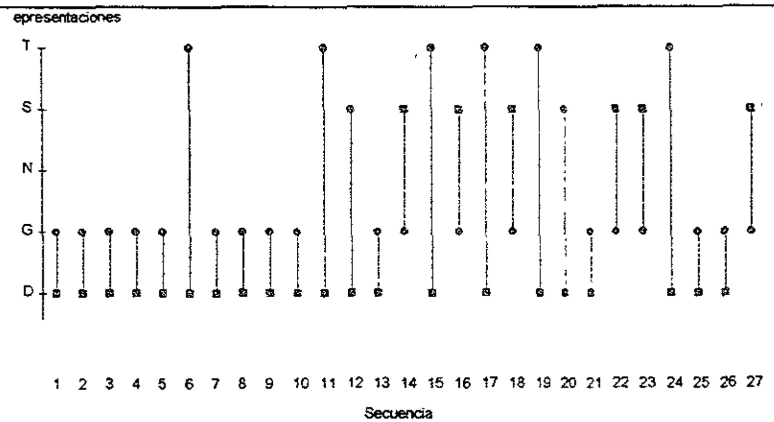
Secuencias de las conexiones bidimensionales mostradas en entrevista por Roky



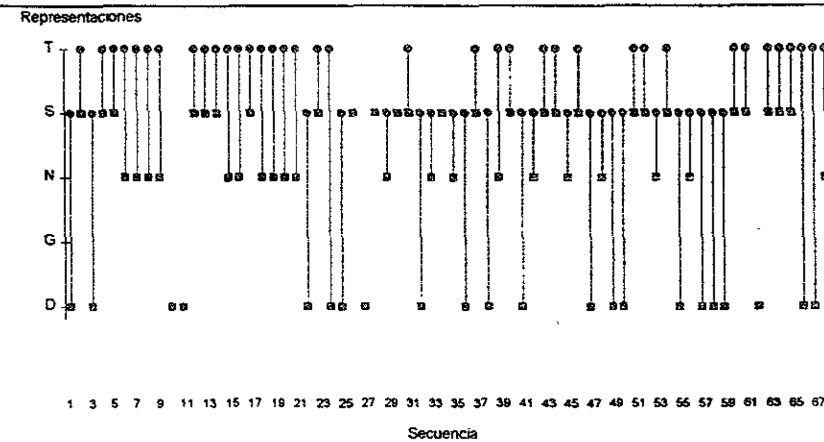
Gráfica 23.- Item 1.2.1



Gráfica 24.- Item 1.2.3

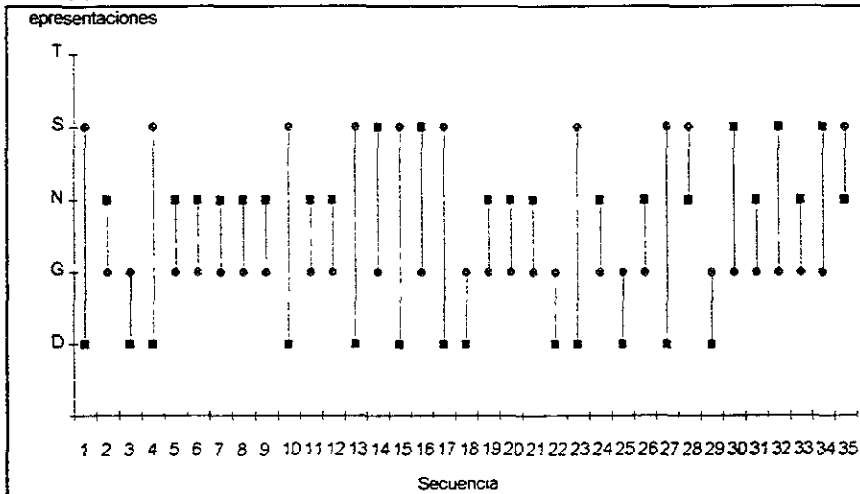


Gráfica 25.- Item 1.3.1

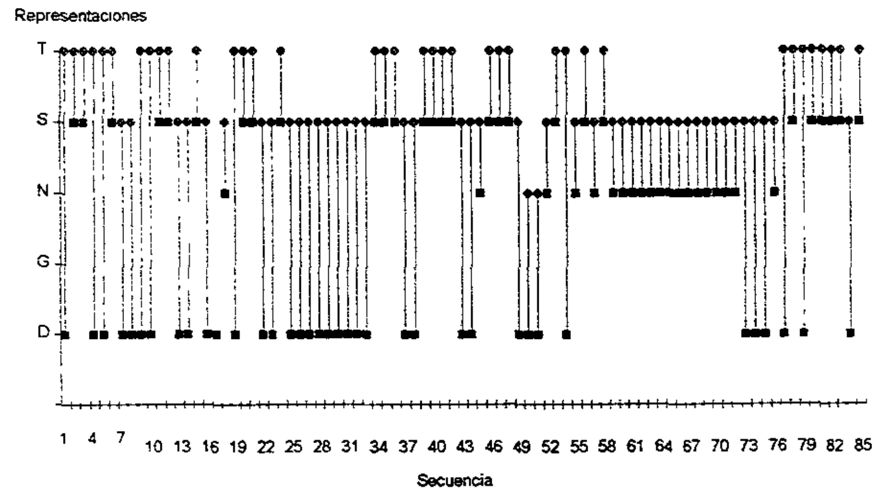


Gráfica 26.- Item 1.4.3

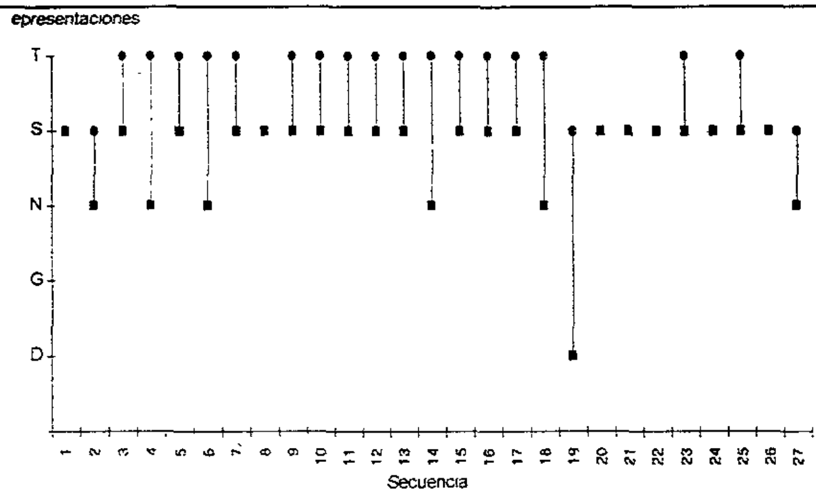
Secuencias de las conexiones bidimensionales mostradas en entrevista por Roky



Gráfica 27.- Item 1.5.3



Gráfica 28.- Item 1.5.4

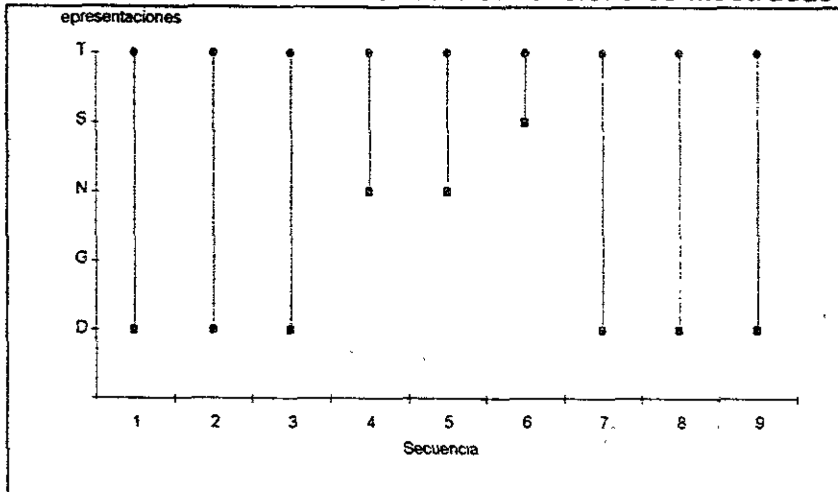


Gráfica 29.- Item 1.5.5

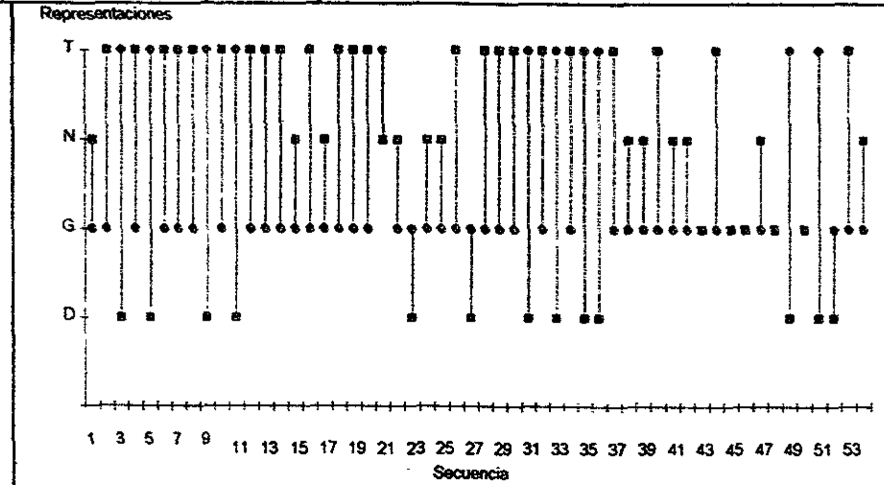
No se dispone

Gráfica 30.- Item 1.7.1

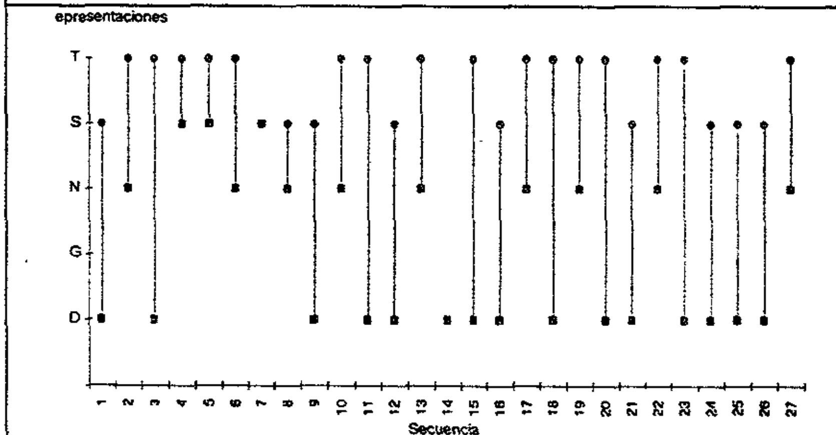
Secuencias de las conexiones bidimensionales mostradas en entrevista por Roky



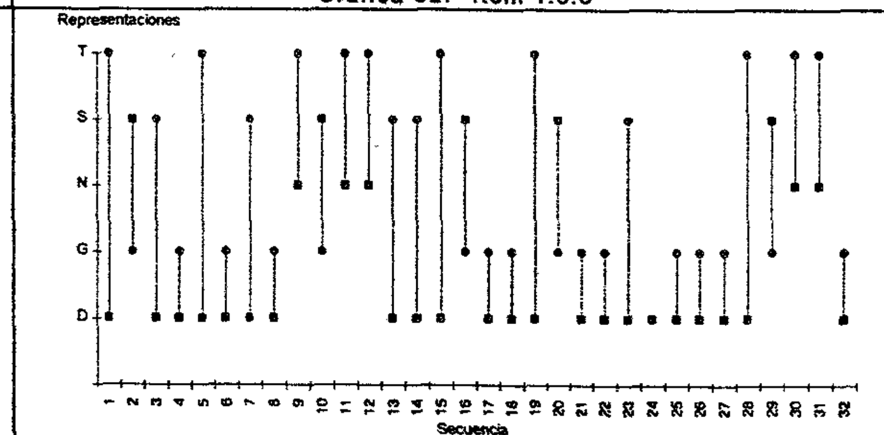
Gráfica 31.- Item 1.8.2



Gráfica 32.- Item 1.8.3

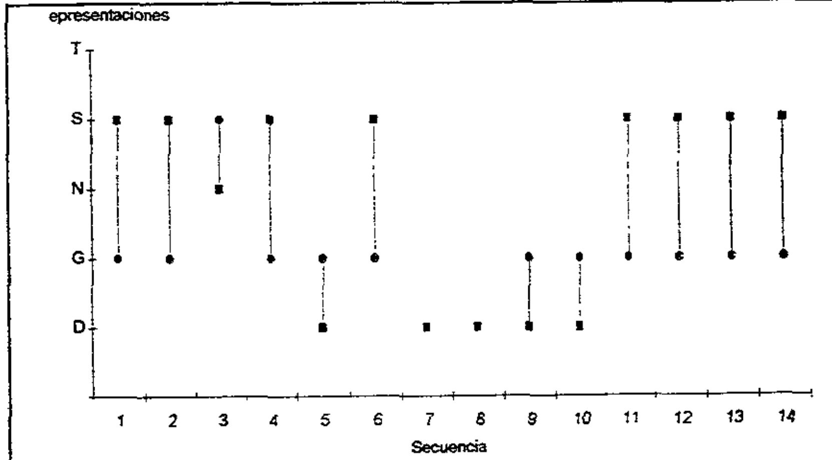


Gráfica 33.- Item 1.8.9

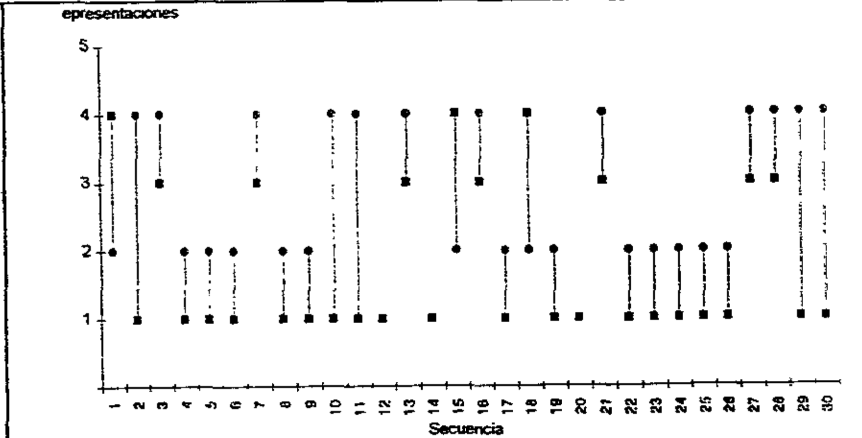


Gráfica 34.- Item 1.8.10

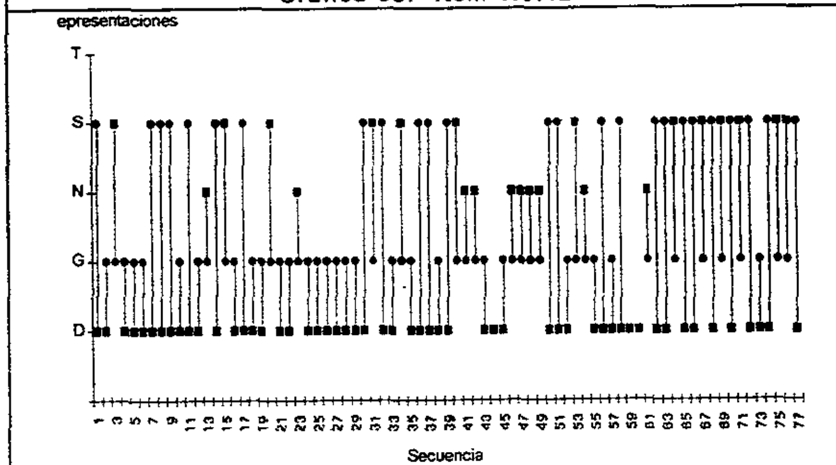
Secuencias de las conexiones bidimensionales mostradas en entrevista por Roky



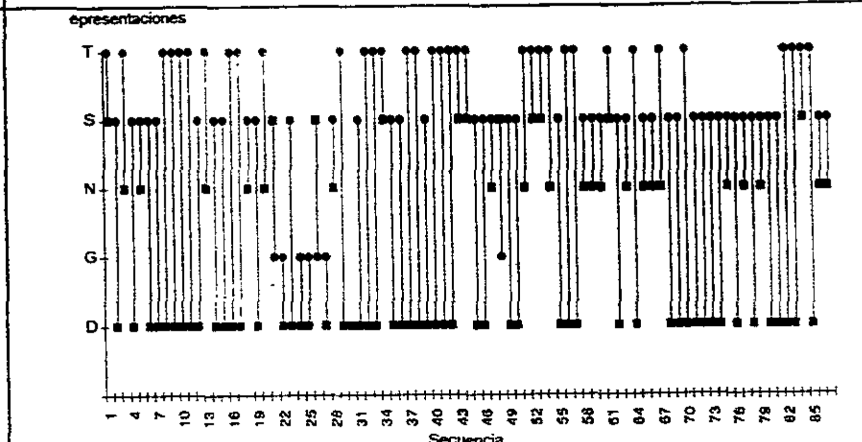
Gráfica 35.- Item 1.8.12



Gráfica 36.- Item 1.8.13



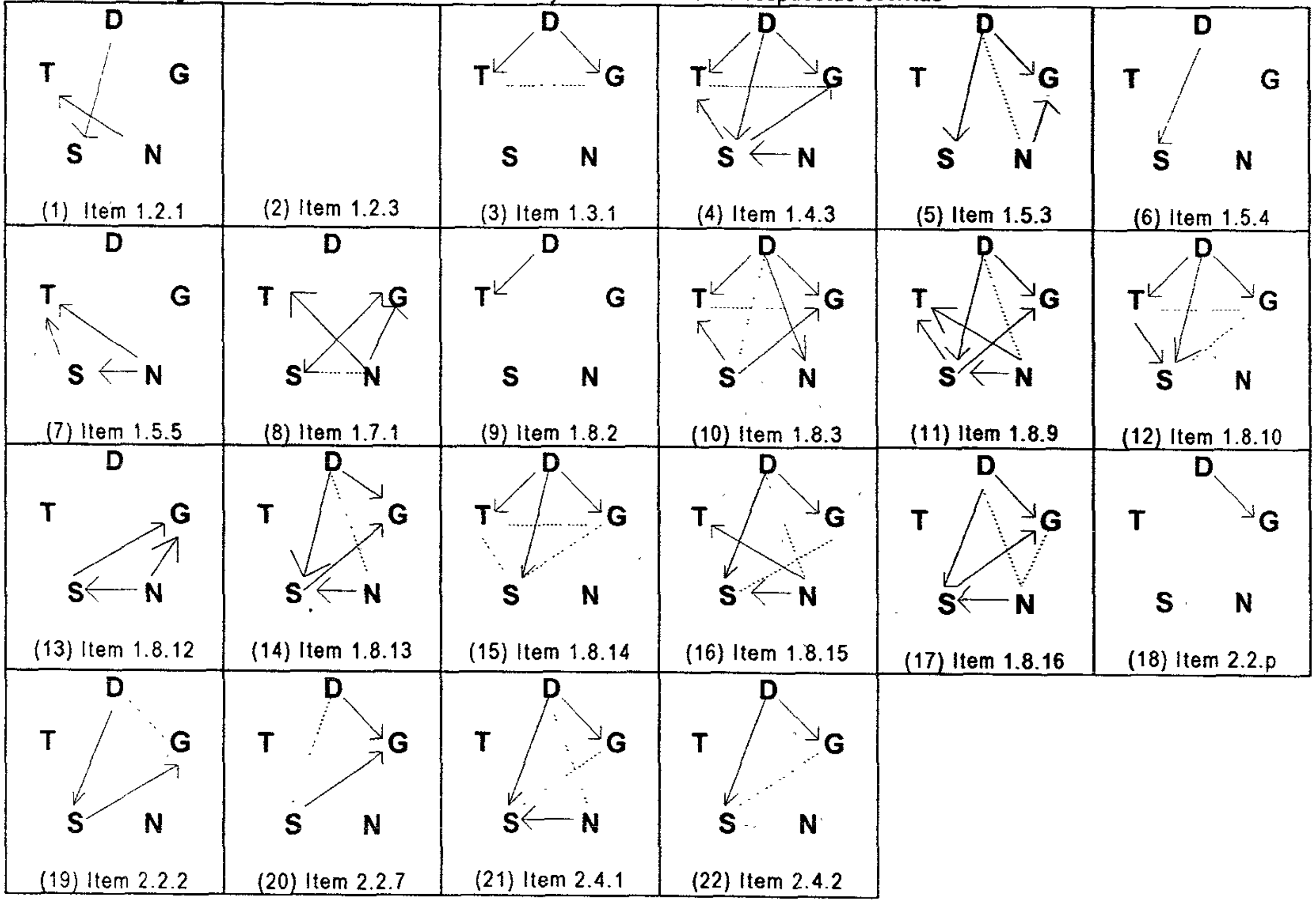
Gráfica 37.- Item 1.8.14



Gráfica 38.- Item 1.8.15

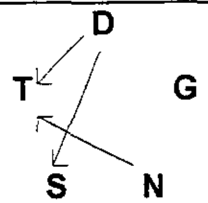
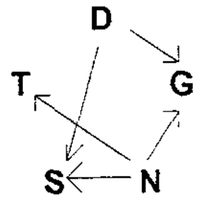
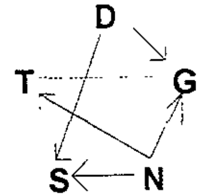
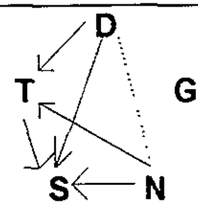
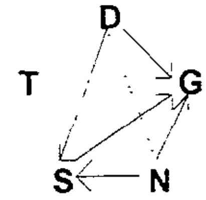
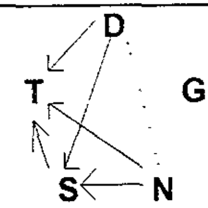
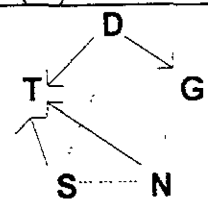
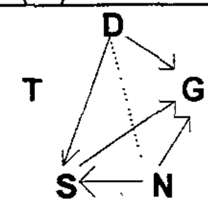
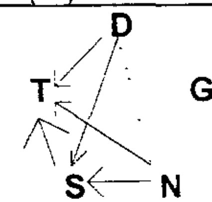
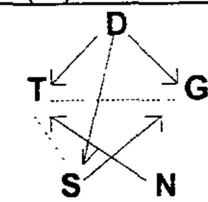
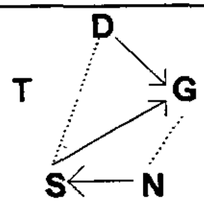
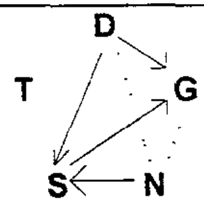
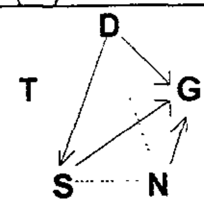
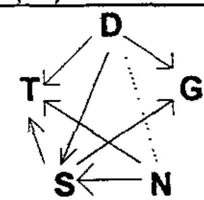
4.6 Configuraciones de las conexiones de Roky

Tabla 14.- Configuraciones de las conexiones de Roky mostradas en las respuestas escritas

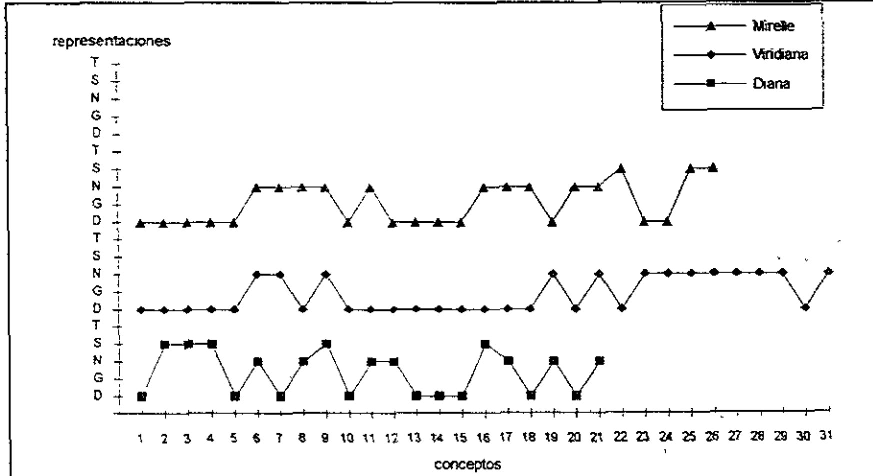


(1) Item 1.2.1
(2) Item 1.2.3
(3) Item 1.3.1
(4) Item 1.4.3
(5) Item 1.5.3
(6) Item 1.5.4
(7) Item 1.5.5
(8) Item 1.7.1
(9) Item 1.8.2
(10) Item 1.8.3
(11) Item 1.8.9
(12) Item 1.8.10
(13) Item 1.8.12
(14) Item 1.8.13
(15) Item 1.8.14
(16) Item 1.8.15
(17) Item 1.8.16
(18) Item 2.2.p
(19) Item 2.2.2
(20) Item 2.2.7
(21) Item 2.4.1
(22) Item 2.4.2

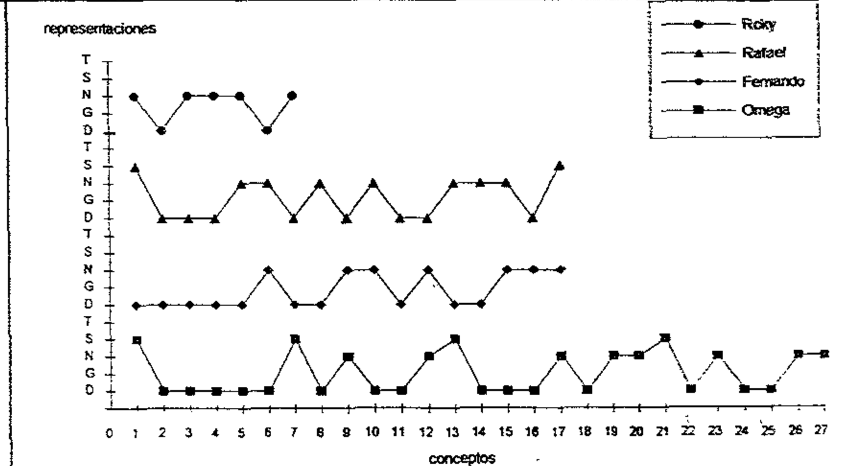
Tabla 15.- Configuraciones de las conexiones de Roky mostradas en entrevista

 (23) Item 1.2.1	 (24) Item 1.2.3	 (25) Item 1.3.1	 (26) Item 1.4.3	 (27) Item 1.5.3	 (28) Item 1.5.4
No se dispone (29) Item 1.5.5	No se dispone (30) Item 1.7.1	 (31) Item 1.8.2	 (32) Item 1.8.3	 (33) Item 1.8.9	 (34) Item 1.8.10
 (35) Item 1.8.12	 (36) Item 1.8.13	 (37) Item 1.8.14	 (38) Item 1.8.15	No se dispone (39) Item 1.8.16	No se dispone (40) Item 2.2.p
No se dispone (41) Item 2.2.2	No se dispone (42) Item 2.2.7	No se dispone (43) Item 2.4.1	No se dispone (44) Item 2.4.2		

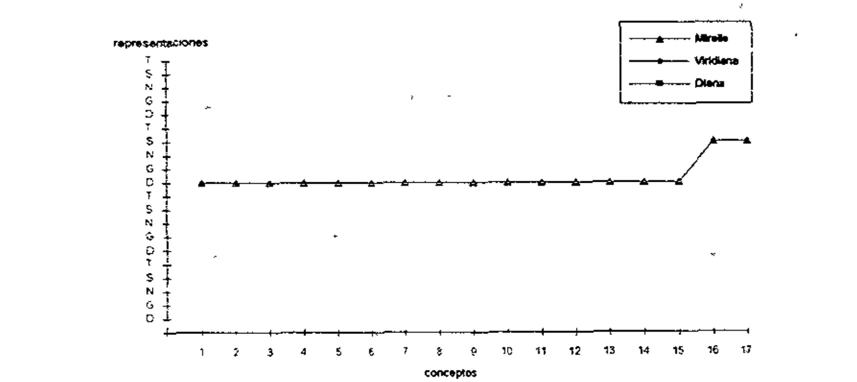
4.7 Gráficas de la secuencias de las representaciones mostradas en las respuestas escritas por equipo[11].



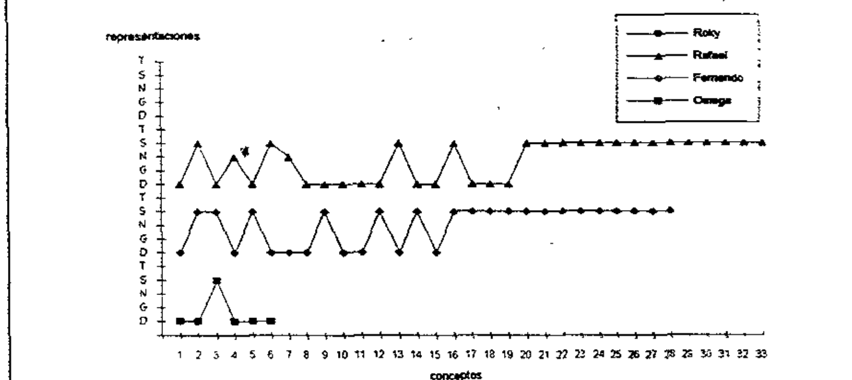
Gráfica 39.- Equipo 1. Item 1.2.1



Gráfica 40.- Equipo 2. Item 1.2.1



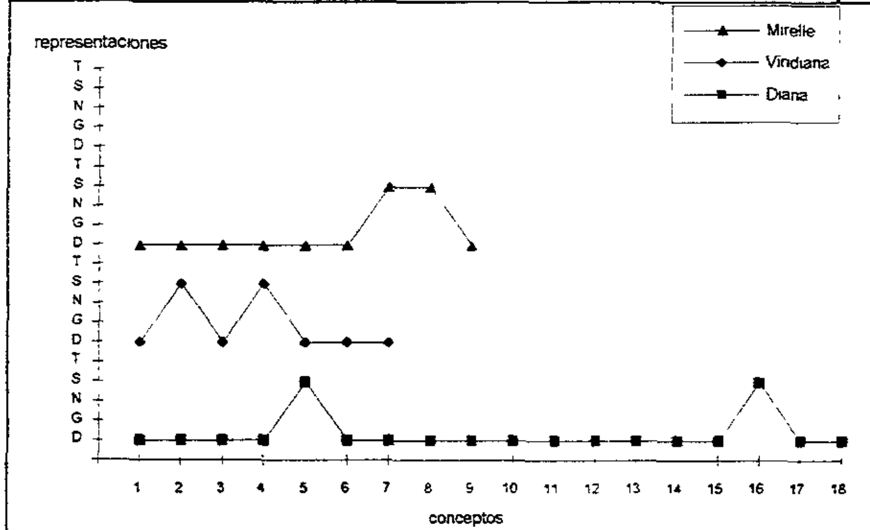
Gráfica 41.- Equipo 1. Item 1.2.3



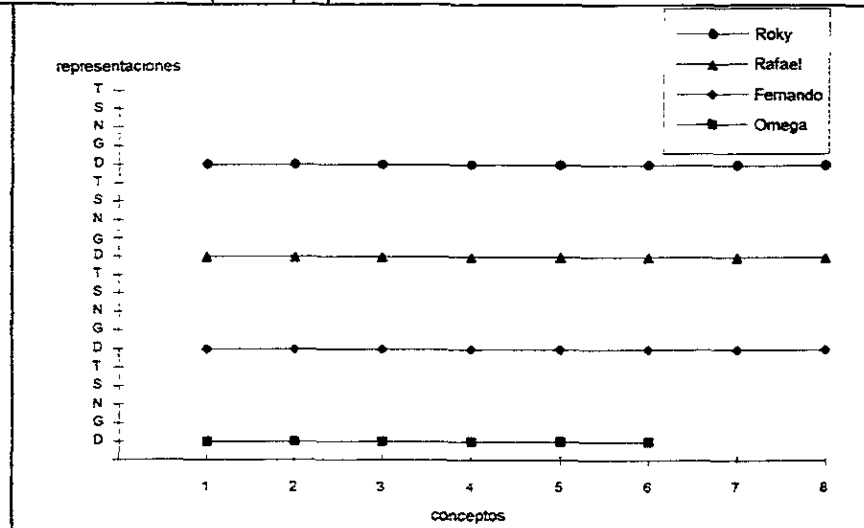
Gráfica 42.- Equipo 2. Item 1.2.3

[11] La secuencias de los participantes están ordenadas de abajo hacia arriba, del equipo 1, Diana, Viridiana y Mirelle, y del equipo 2, Omega, Fernando, Rafael y Roky, respectivamente.

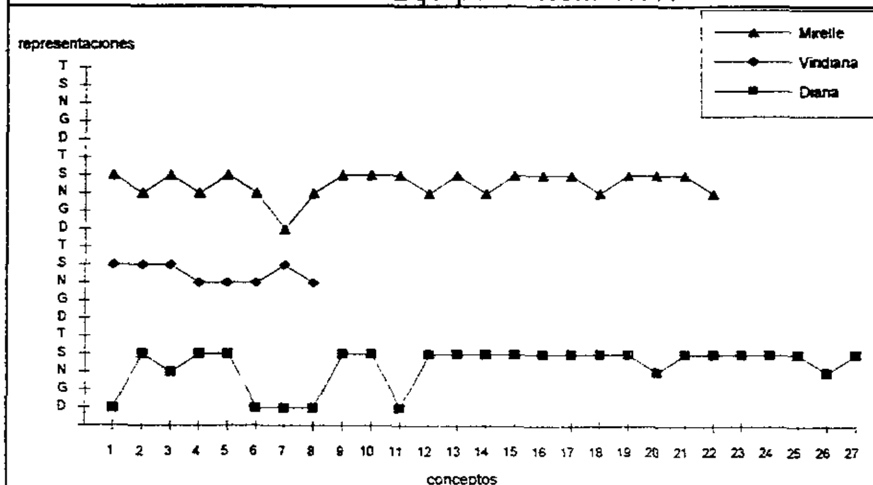
Secuencias de las representaciones mostradas en las respuestas escritas por equipo



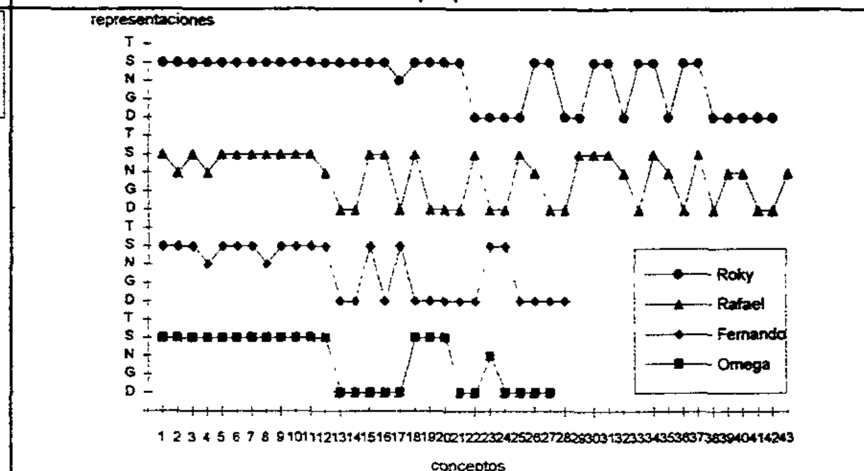
Gráfica 43.- Equipo 1. Item 1.3.1



Gráfica 44.- Equipo 2. Item 1.3.1

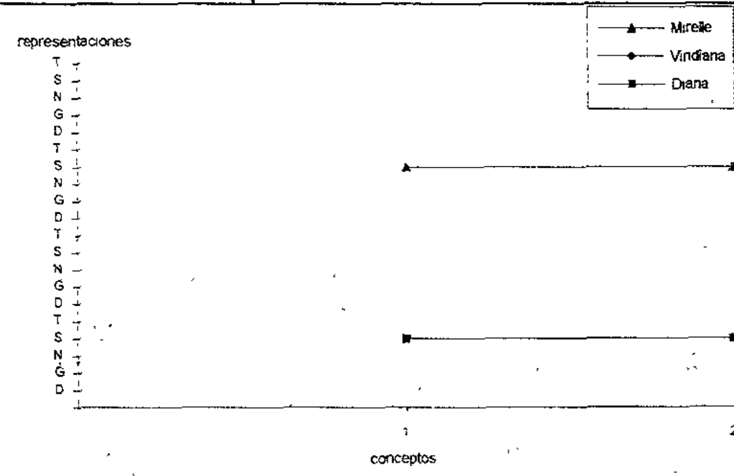


Gráfica 45.- Equipo 1. Item 1.4.3

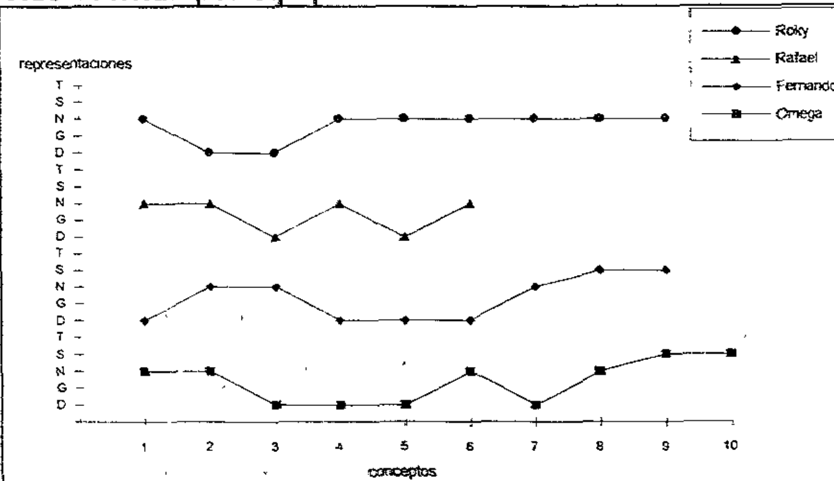


Gráfica 46.- Equipo 2. Item 1.4.3

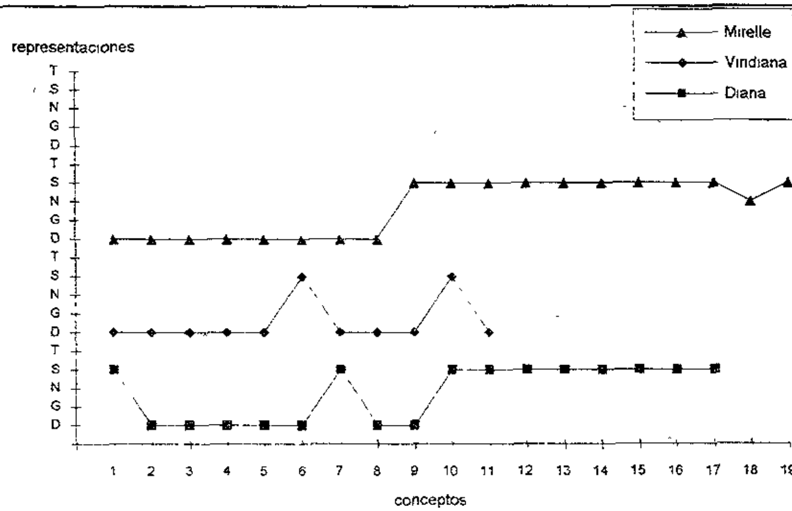
Secuencias de las representaciones mostradas en las respuestas escritas por equipo



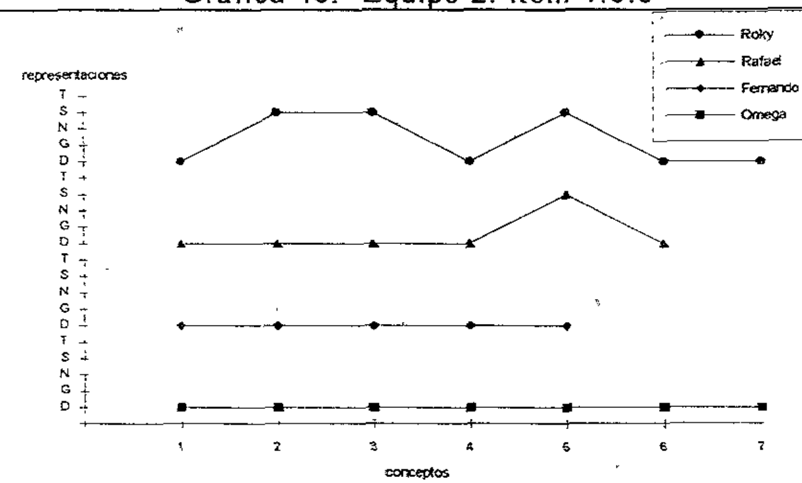
Gráfica 47.- Equipo 1. Item 1.5.3



Gráfica 48.- Equipo 2. Item 1.5.3

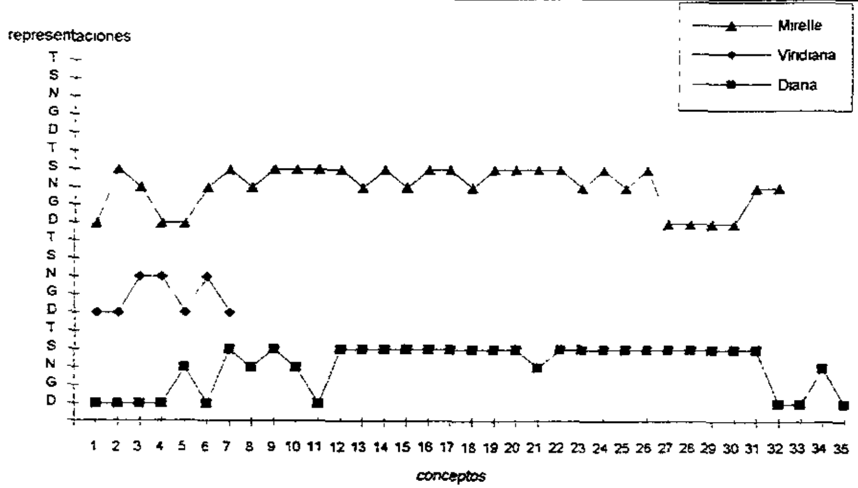


Gráfica 49.- Equipo 1. Item 1.5.4

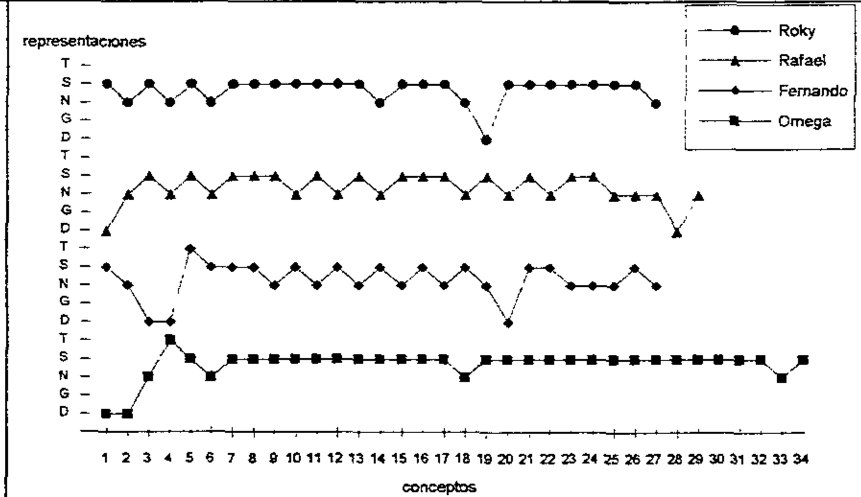


Gráfica 50.- Equipo 2. Item 1.5.4

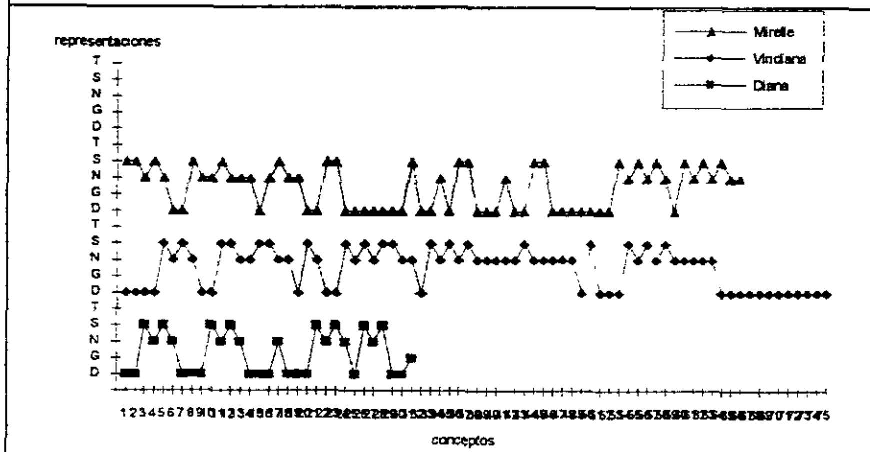
Secuencias de las representaciones mostradas en las respuestas escritas por equipo



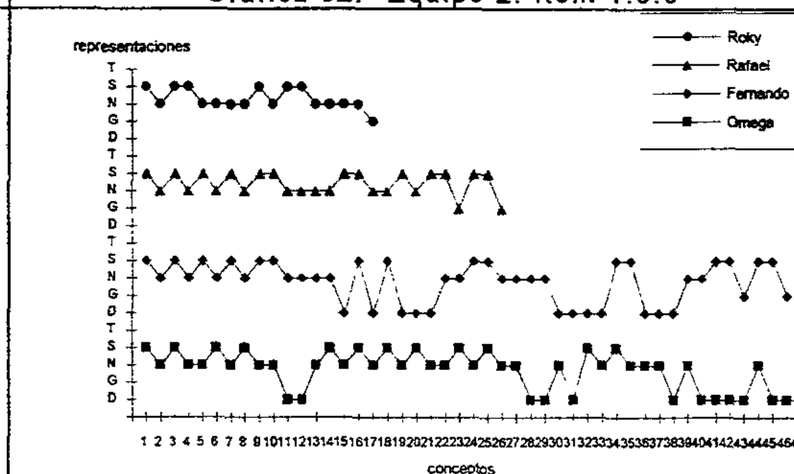
Gráfica 51.- Equipo 1. Item 1.5.5



Gráfica 52.- Equipo 2. Item 1.5.5

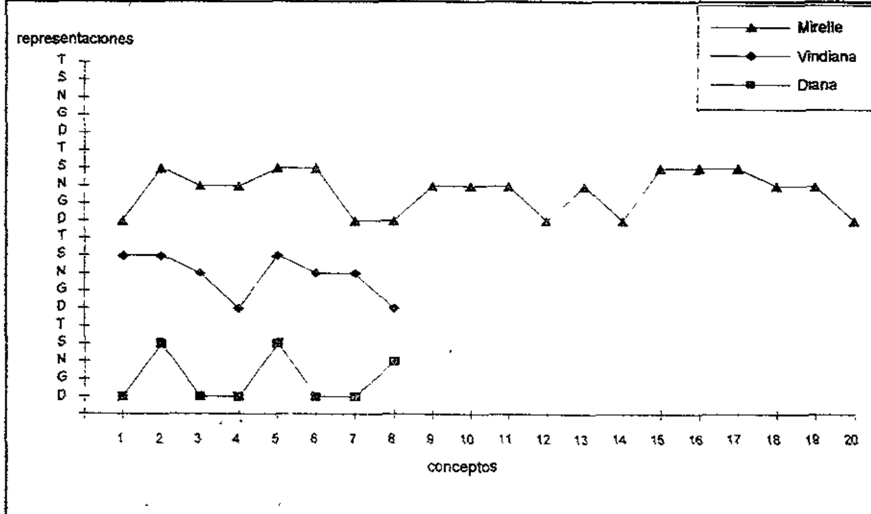


Gráfica 53.- Equipo 1. Item 1.7.1

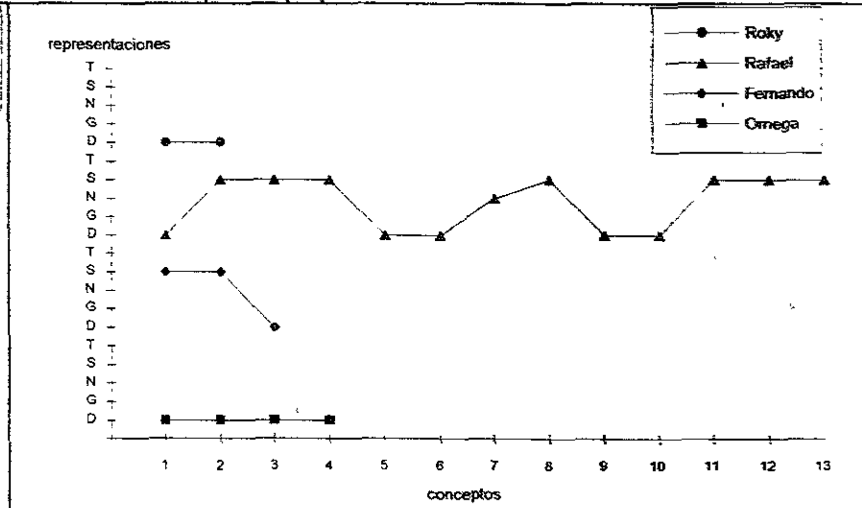


Gráfica 54.- Equipo 2. Item 1.7.1

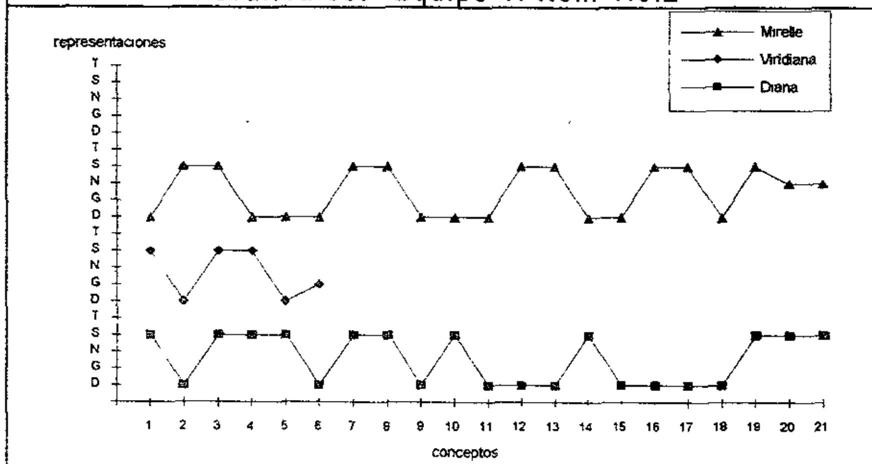
Secuencias de las representaciones mostradas en las respuestas escritas por equipo



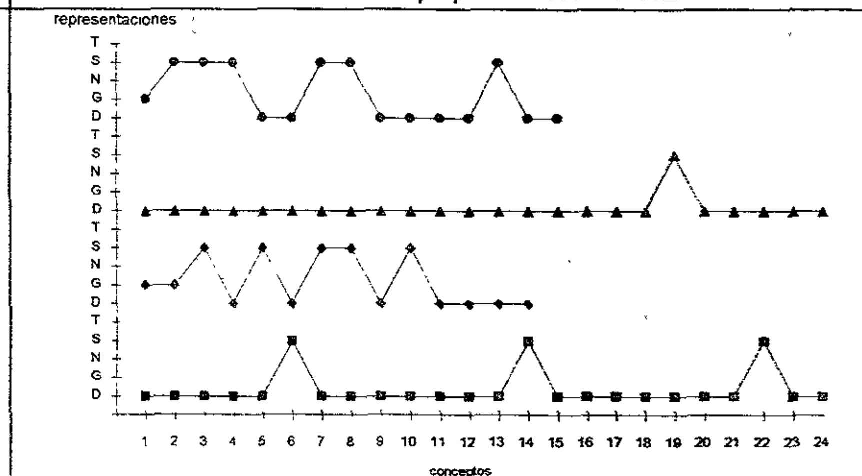
Gráfica 55.- Equipo 1. Item 1.8.2



Gráfica 56.- Equipo 2. Item 1.8.2

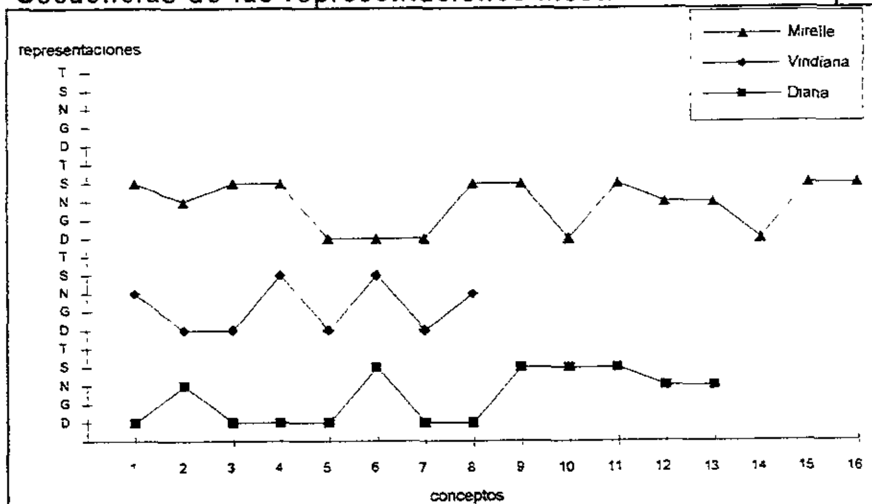


Gráfica 57.- Equipo 1. Item 1.8.3

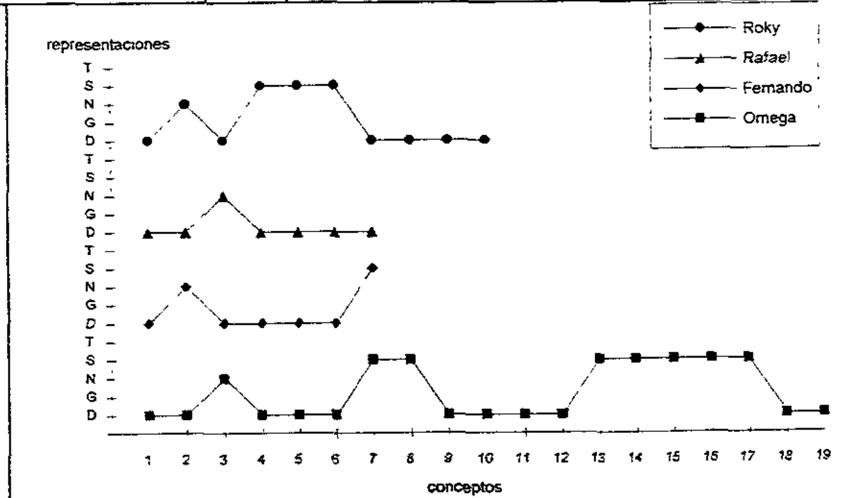


Gráfica 58.- Equipo 2. Item 1.8.3

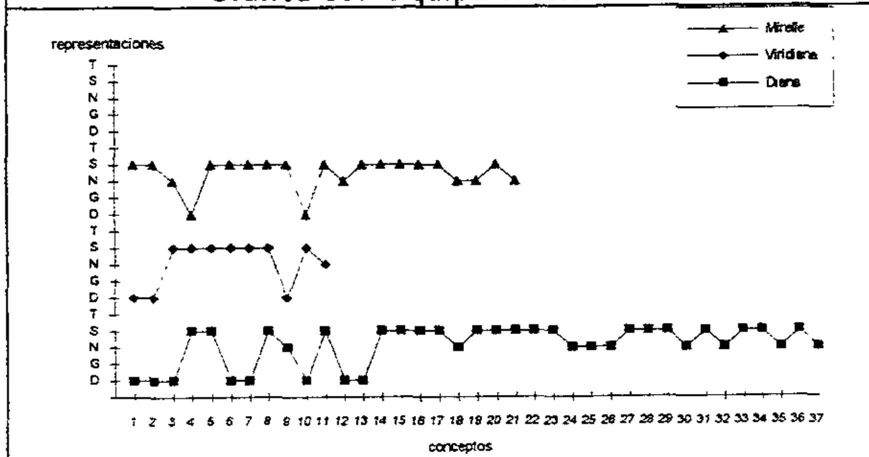
Secuencias de las representaciones mostradas en las respuestas escritas por equipo



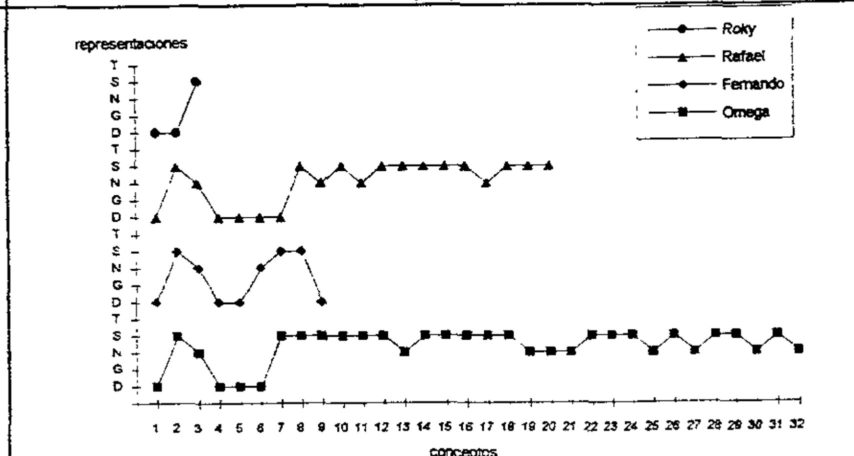
Gráfica 59.- Equipo 1. Item 1.8.9



Gráfica 60.- Equipo 2. Item 1.8.9

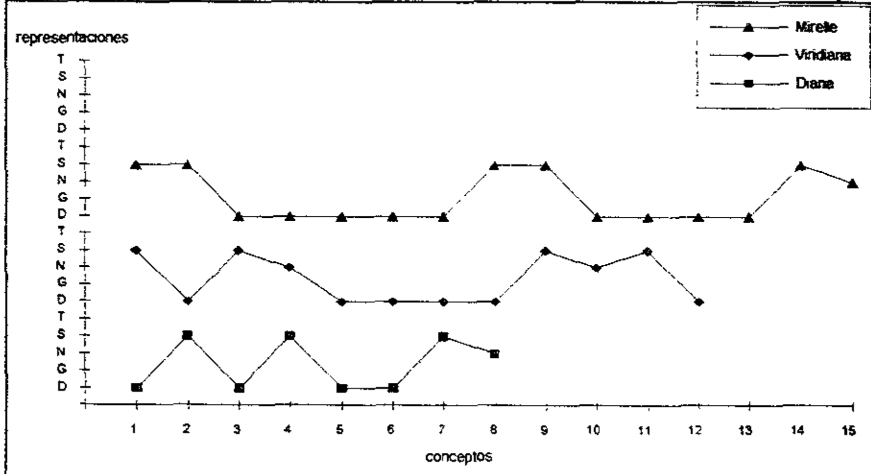


Gráfica 61.- Equipo 1. Item 1.8.10

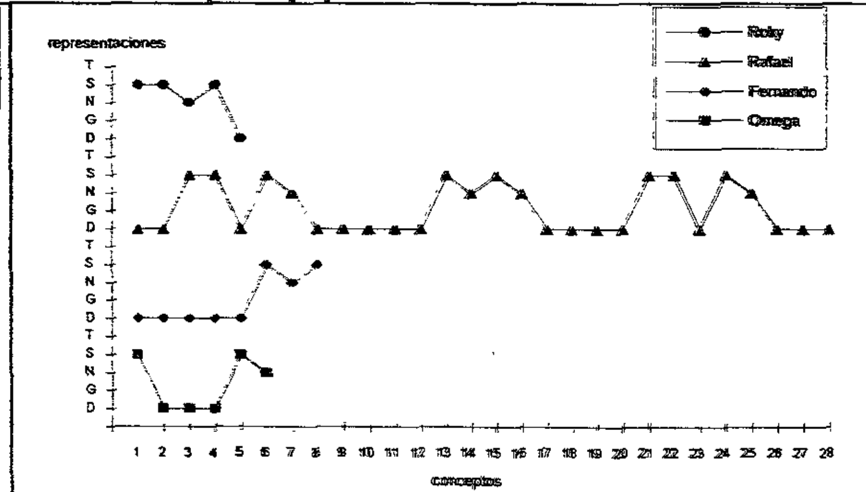


Gráfica 62.- Equipo 2. Item 1.8.10

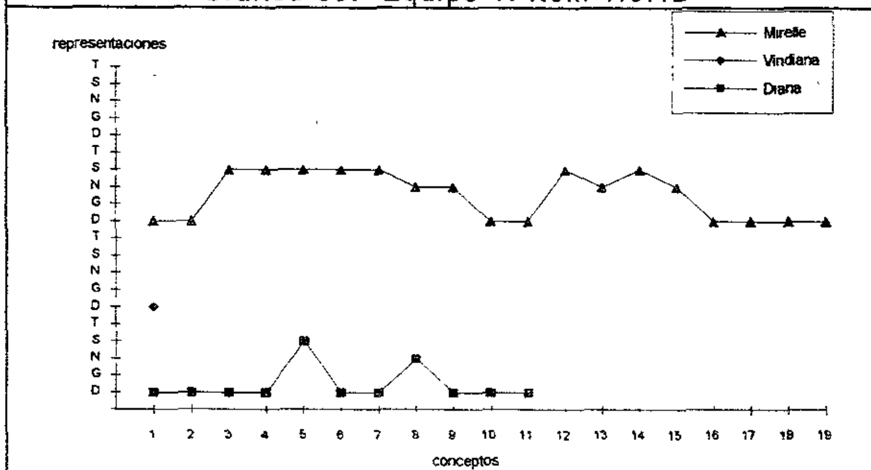
Secuencias de las representaciones mostradas en las respuestas escritas por equipo



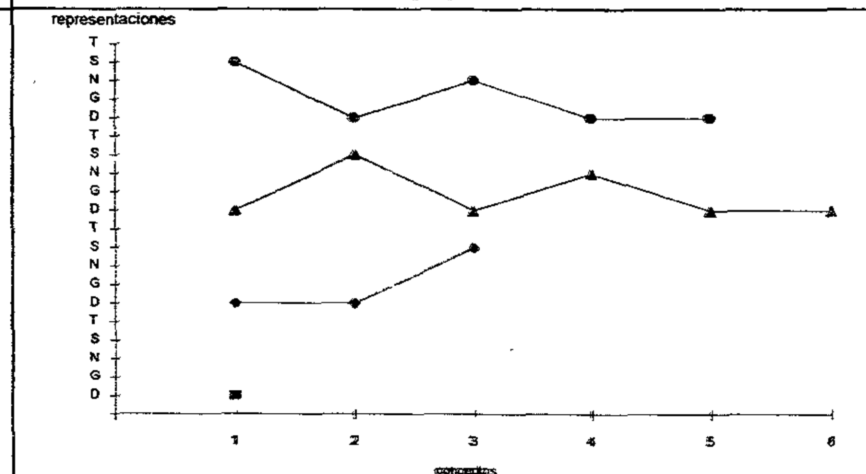
Gráfica 63.- Equipo 1. Item 1.8.12



Gráfica 64.- Equipo 2. Item 1.8.12

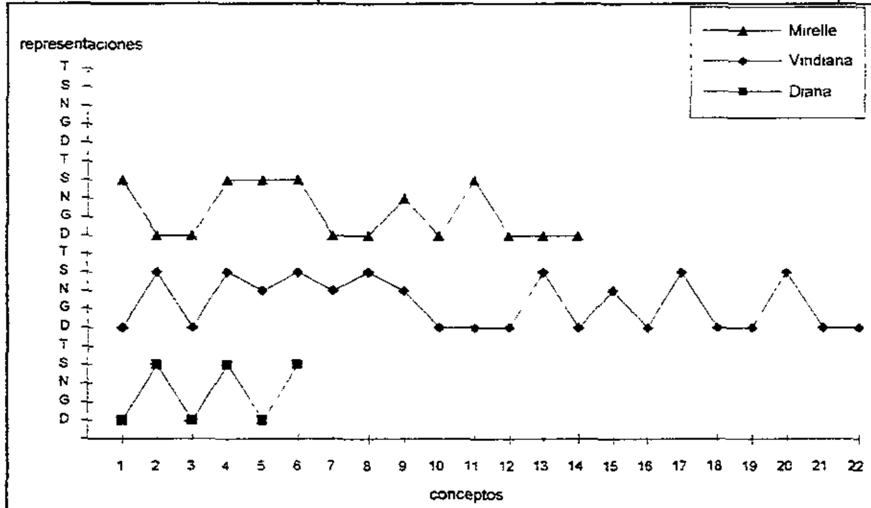


Gráfica 65.- Equipo 1. Item 1.8.13

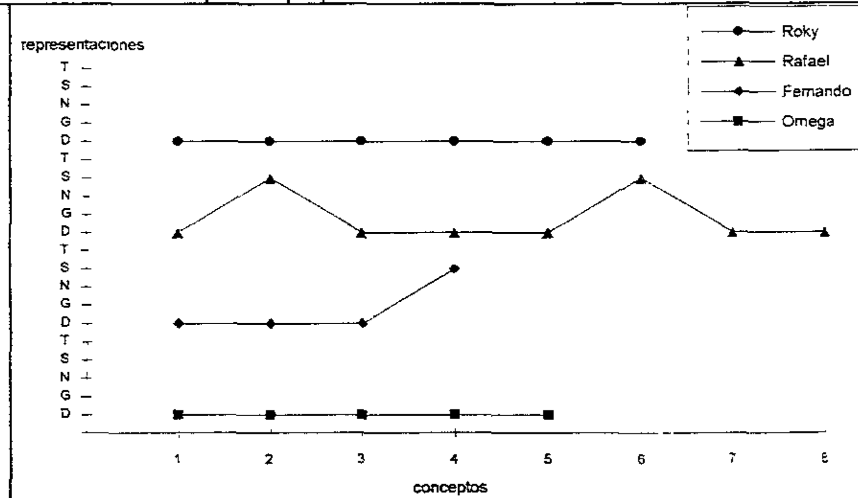


Gráfica 66.- Equipo 2. Item 1.8.13

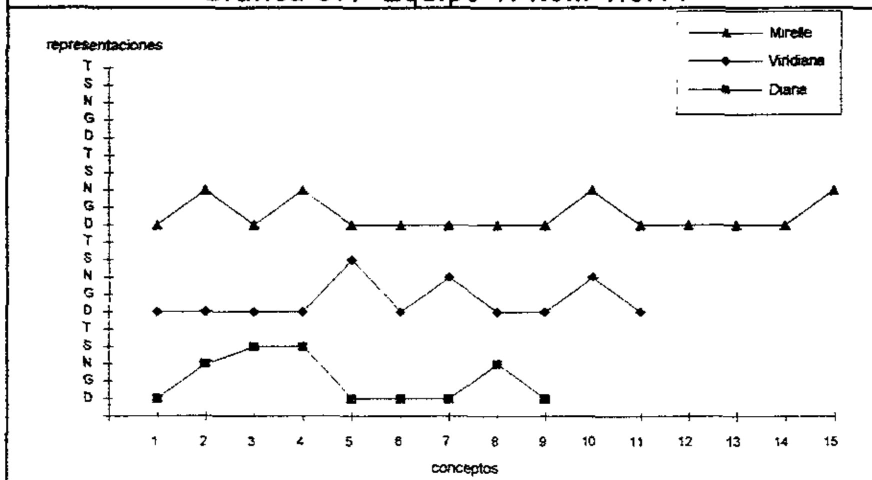
Secuencias de las representaciones mostradas en las respuestas escritas por equipo



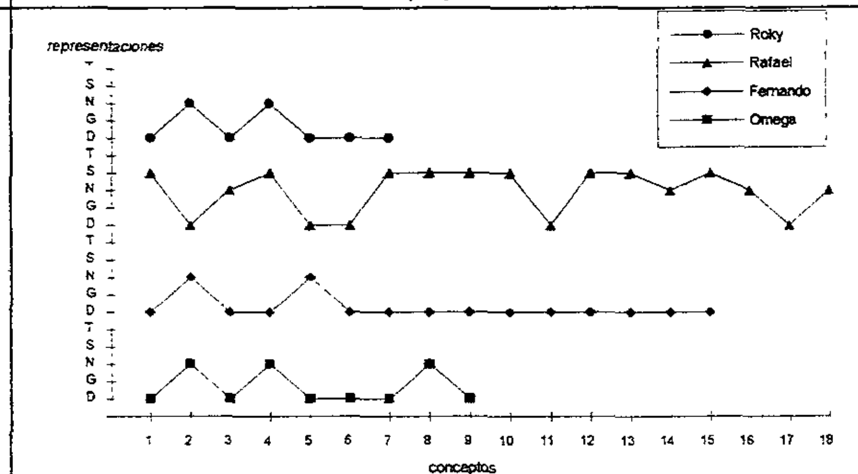
Gráfica 67.- Equipo 1. Item 1.8.14



Gráfica 68.- Equipo 2. Item 1.8.14

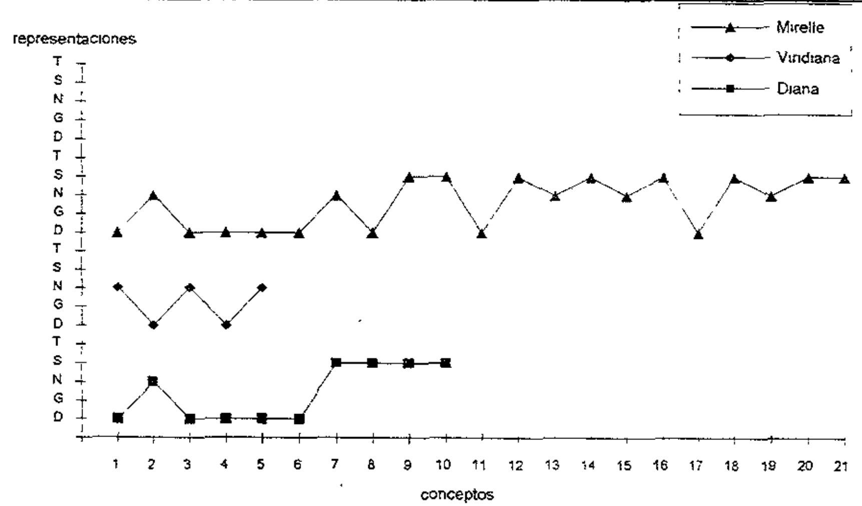


Gráfica 69.- Equipo 1. Item 1.8.15

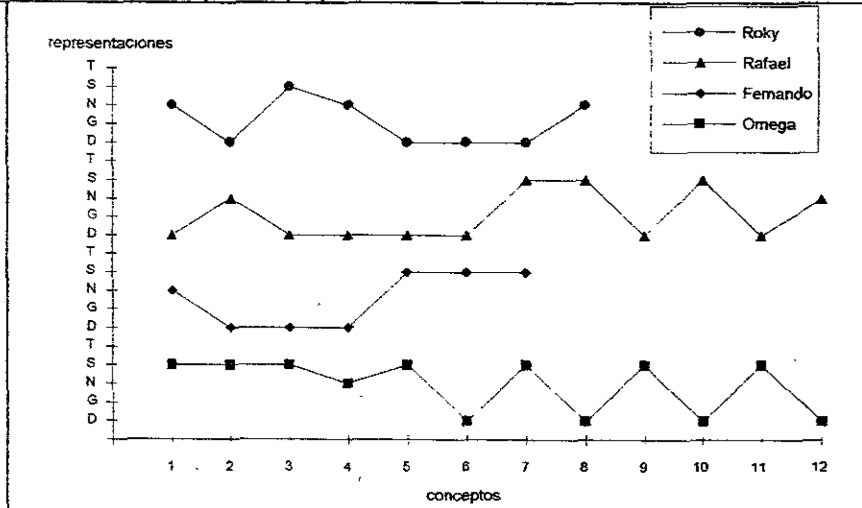


Gráfica 70.- Equipo 2. Item 1.8.15

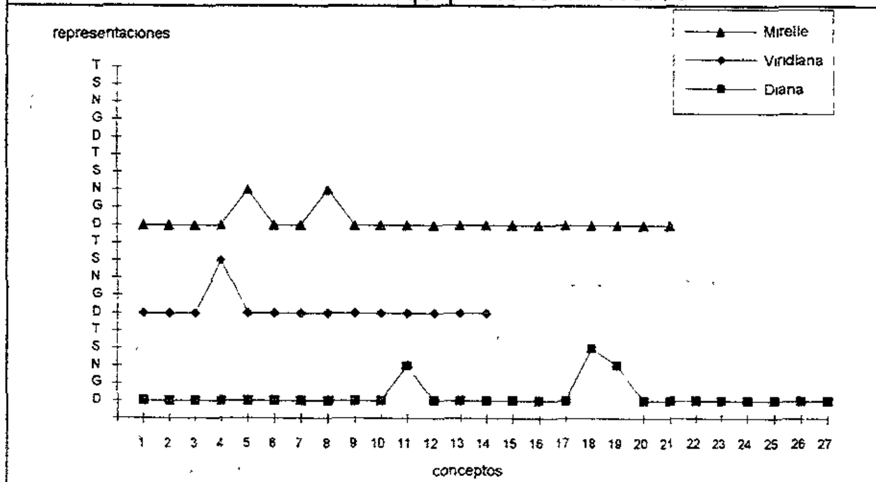
Secuencias de las representaciones mostradas en las respuestas escritas por equipo



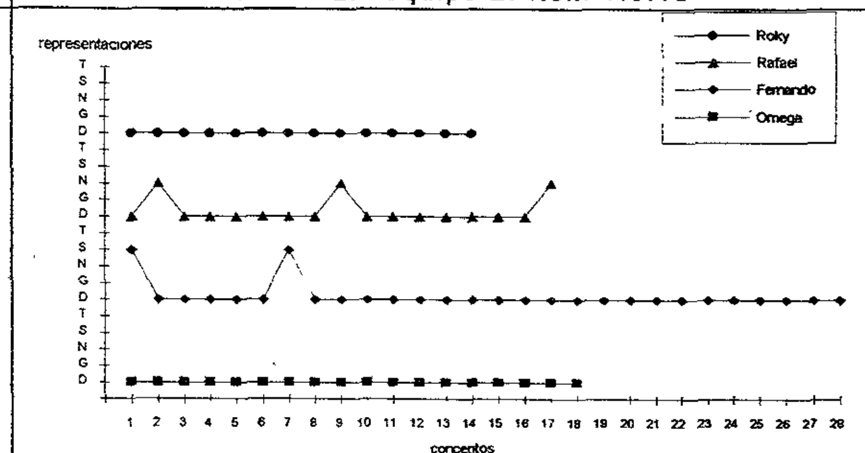
Gráfica 71.- Equipo 1. Item 1.8.16



Gráfica 72.- Equipo 2. Item 1.8.16

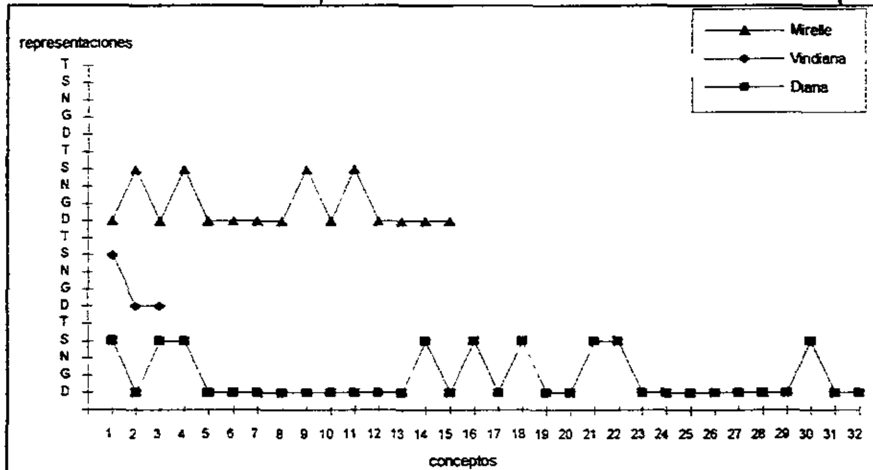


Gráfica 73.- Equipo 1. Item 2.2.p

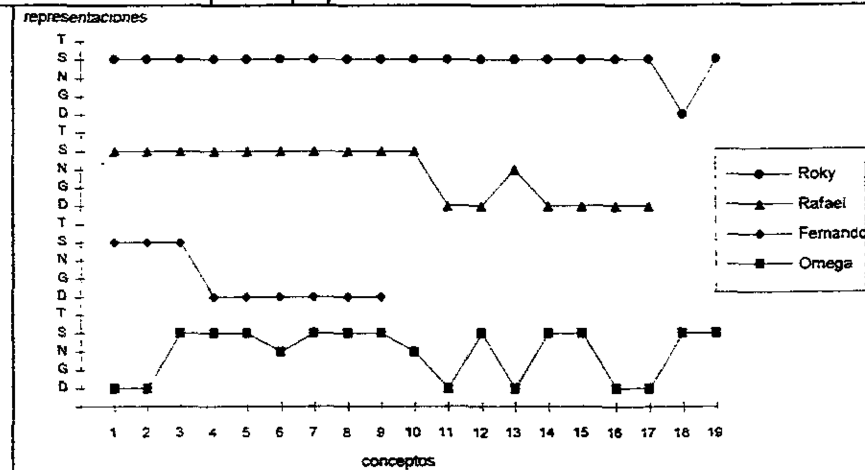


Gráfica 74.- Equipo 2. Item 2.2.p

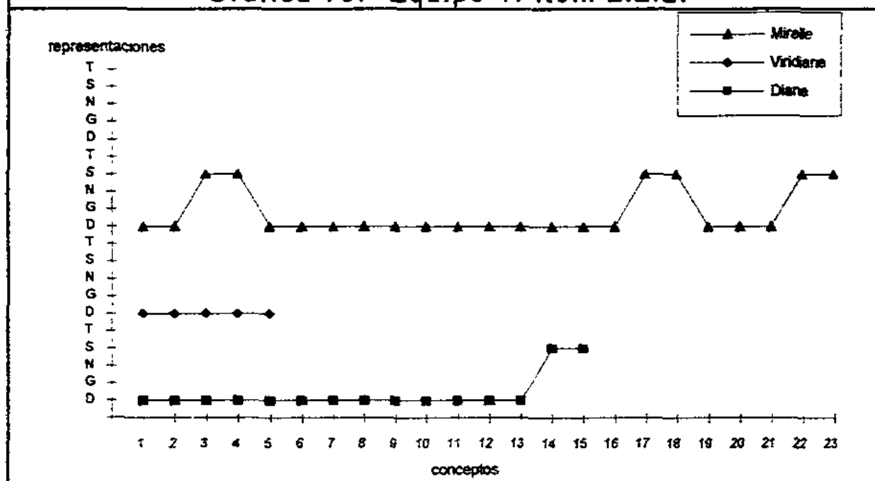
Secuencias de las representaciones mostradas en las respuestas escritas por equipo



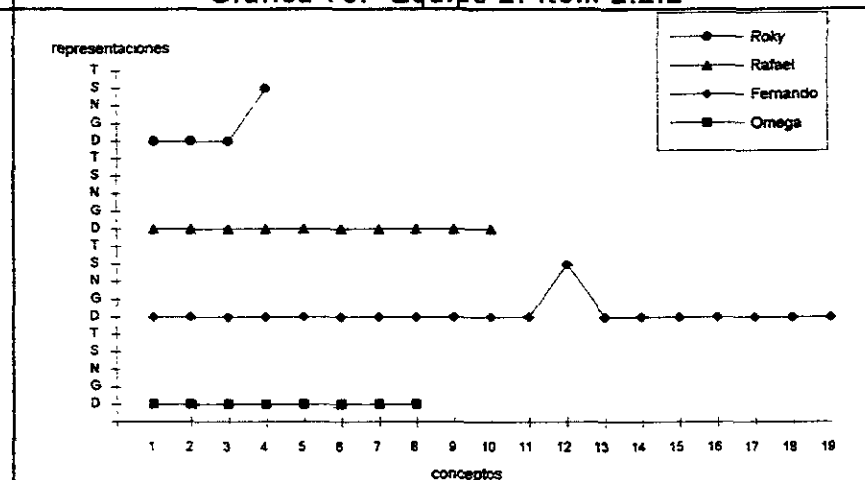
Gráfica 75.- Equipo 1. Item 2.2.2.



Gráfica 76.- Equipo 2. Item 2.2.2

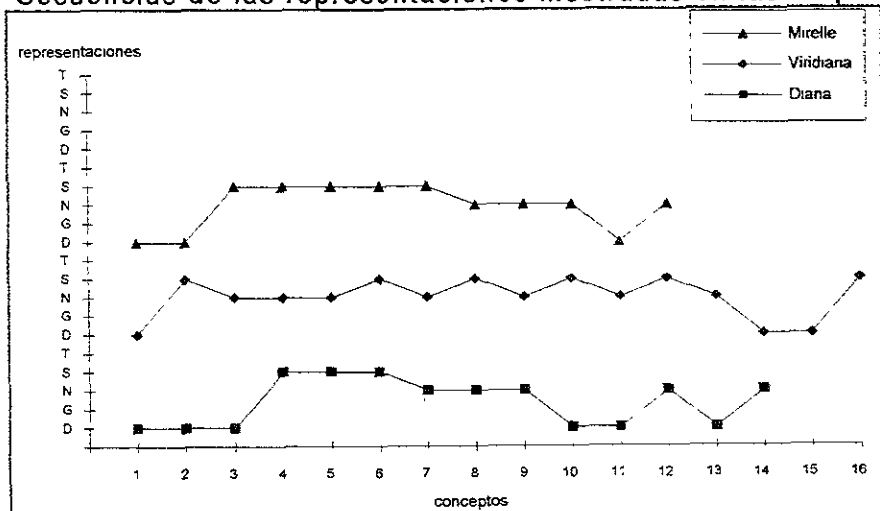


Gráfica 77.- Equipo 1. Item 2.2.7

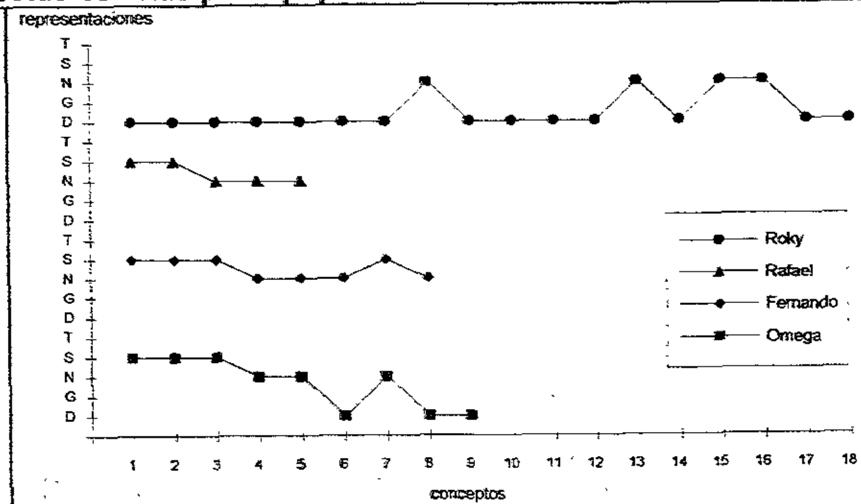


Gráfica 78.- Equipo 2. Item 2.2.7

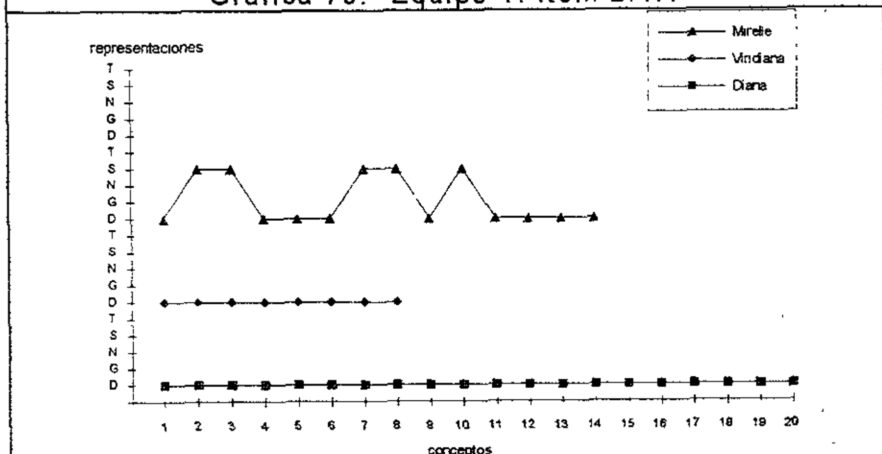
Secuencias de las representaciones mostradas en las respuestas escritas por equipo



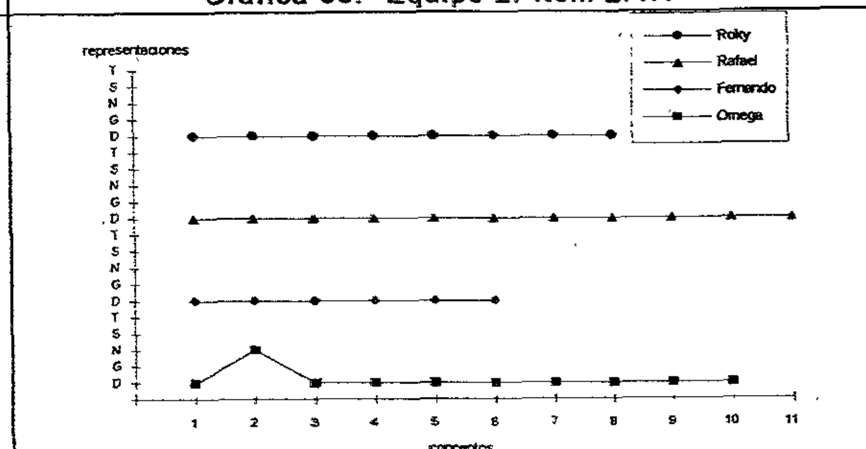
Gráfica 79.- Equipo 1. Item 2.4.1



Gráfica 80.- Equipo 2. Item 2.4.1



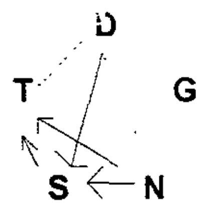
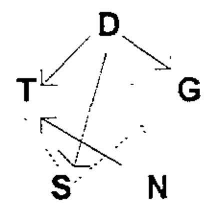
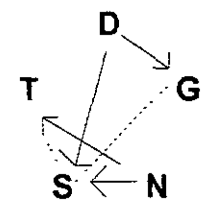
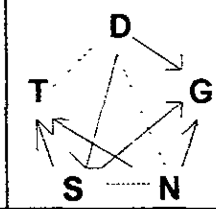
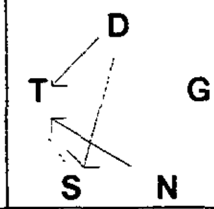
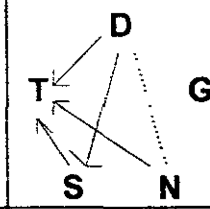
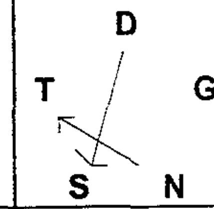
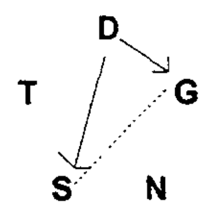
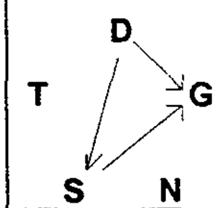
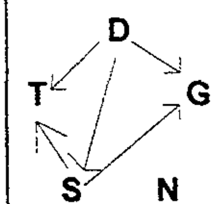
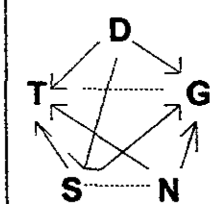
Gráfica 81.- Equipo 1. Item 2.4.2



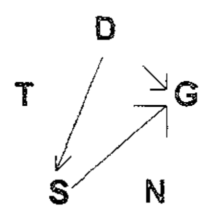
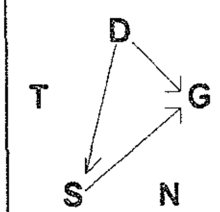
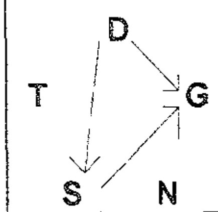
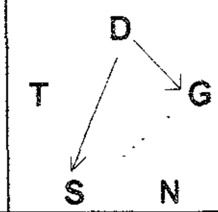
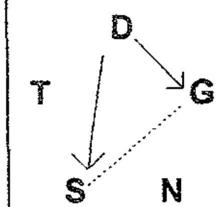
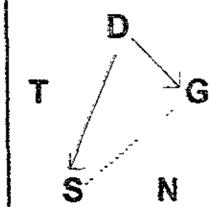
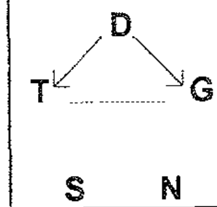
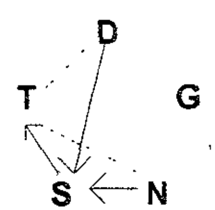
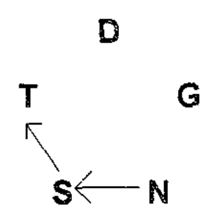
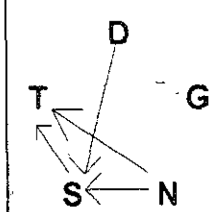
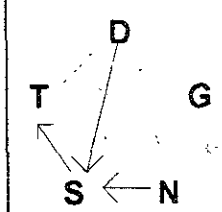
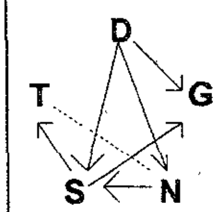
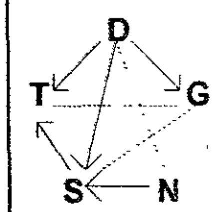
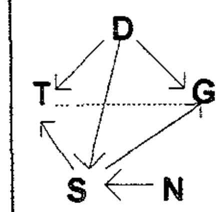
Gráfica 82.- Equipo 2. Item 2.4.2

4.8 Conexiones bidimensionales y tridimensionales encontradas en las respuestas escritas de todos los participantes.

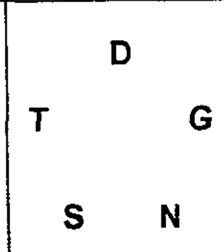
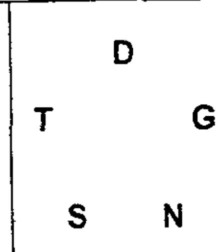
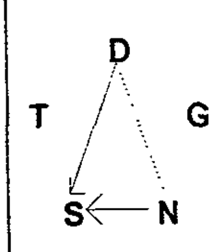
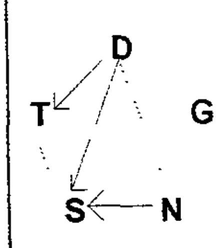
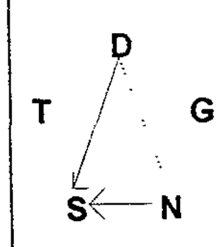
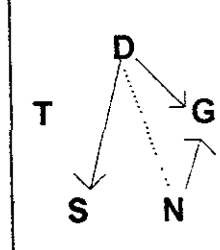
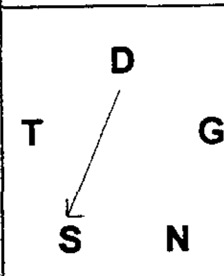
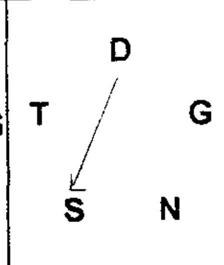
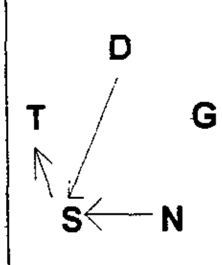
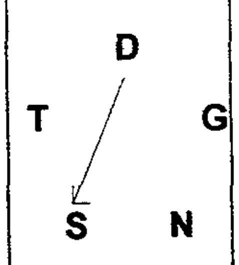
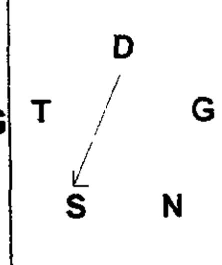
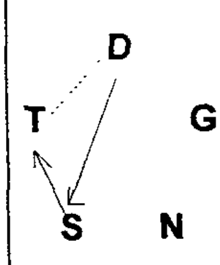
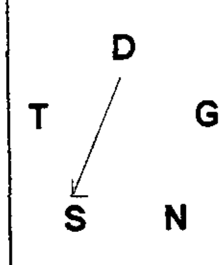
Tabla 16.- Conexiones bidimensionales y tridimensionales encontradas en las respuestas escritas de los participantes

ÍTEM	Diana	Viridiana	Mirelle	Omega	Fernando	Rafael	Roky
1.2.1							
Co. tri.	DSN, DST, NST	DNT, DSG, DST	DSG, NST	DNG, DSG DST, NST	DST	DNT, DST	
(NR)	D→S S→T N→S	D→S D→T		S→T D→S D→G		D→T	
1.2.3							
Co. tri.			DSG	DSG	DSG, DST	DGT, DSG DST, NSG NST	
(NR)					D→S	D→S S→G D→G S→T D→T	

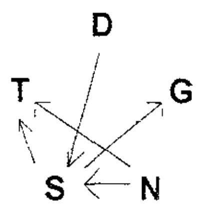
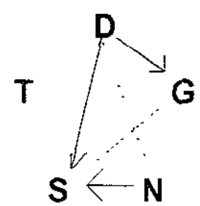
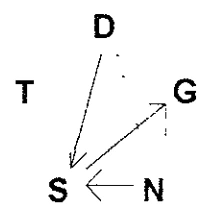
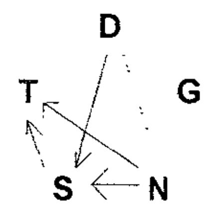
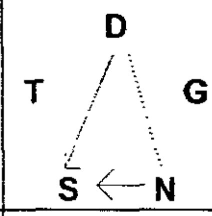
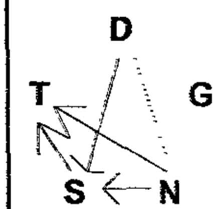
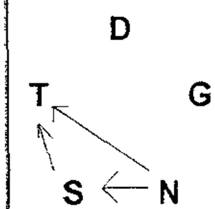
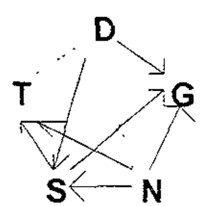
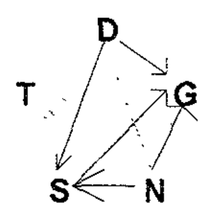
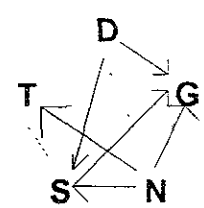
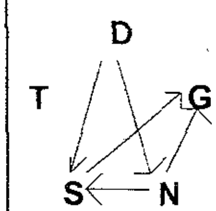
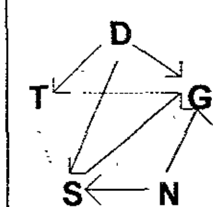
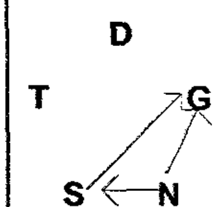
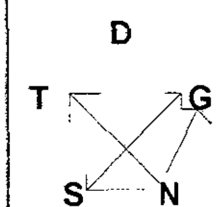
Continuación de la Tabla 16.- Conexiones bidimensionales y tridimensionales encontradas en las respuestas escritas de los participantes

ITEM	Diana	Viridiana	Mirelle	Omega	Fernando	Rafael	Roky
1.3.1							
Co. tri.	DSG	DSG	DSG	DSG	DSG	DSG	DGT
(NR)							
1.4.3							
Co. tri.	DST, NST		NST	DSN, DST	3	DNS, DNT DSG, DST NST	2
(NR)	S→T			D→S	N→S D→S	S→T N→S N→T D→S D→T	D→G

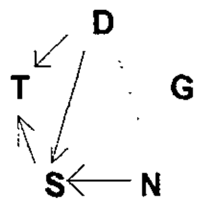
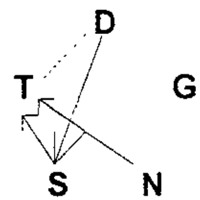
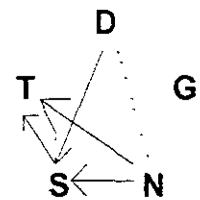
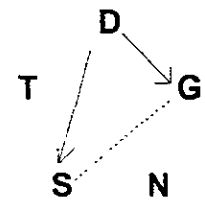
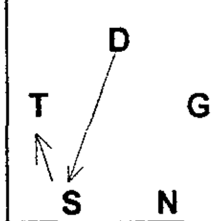
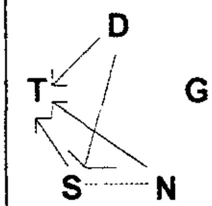
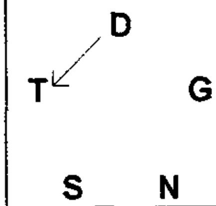
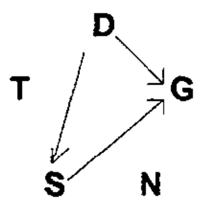
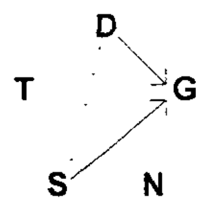
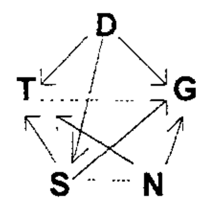
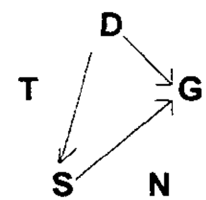
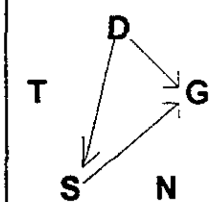
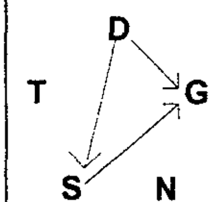
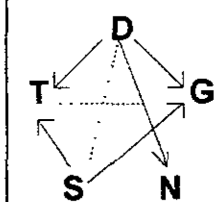
Continuación de la Tabla 16.- Conexiones bidimensionales y tridimensionales encontradas en las respuestas escritas de los participantes

ITEM	Diana	Viridiana	Mirelle	Omega	Fernando	Rafael	Roky
1.5.3							
Co. tri.				DNS	DNS, DST	DNS	DNG
(NR)					D→S		
1.5.4							
Co. tri.						DST	
(NR)							

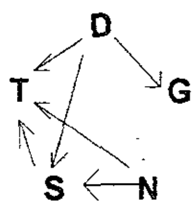
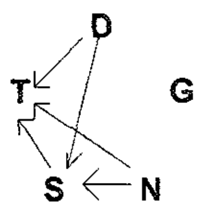
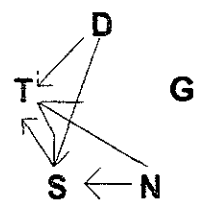
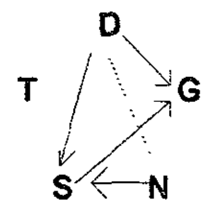
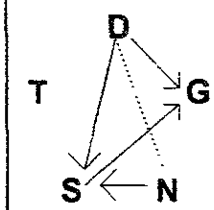
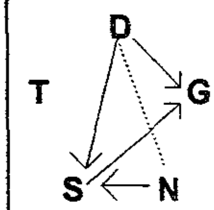
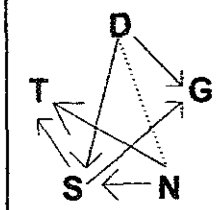
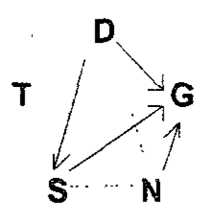
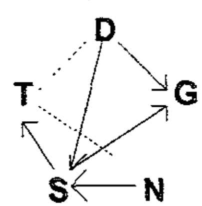
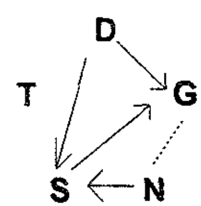
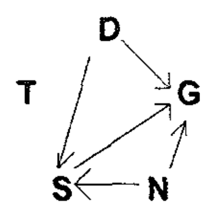
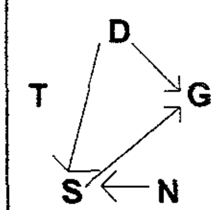
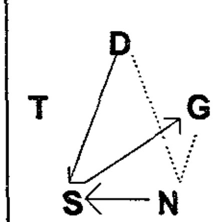
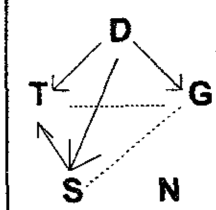
Continuación de la Tabla 16.- Conexiones bidimensionales y tridimensionales encontradas en las respuestas escritas de los participantes

ITEM	Diana	Viridiana	Mirelle	Omega	Fernando	Rafael	Roky
1.5.5							
Co. tri.	DNS, NST	DSG, DNS	DNS, NSG	DNS, NST	DNS	**DNS, NST**	NST
(NR)	N→S	D→S	N→S	N→S		**N→S**	
1.7.1							
Co. tri.	DNS, DSG DST, NSG DST	DNS, DSG NSG	DNS, DNG DSG, NST	DNS, NSG	DGT, DST NSG	**NSG**	NSG
(NR)	S→T D→S N→S S→G	N→S D→S S→G	N→S D→S D→G	N→S	D→T		

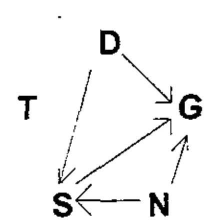
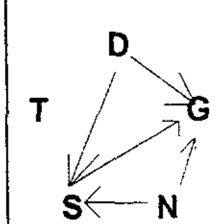
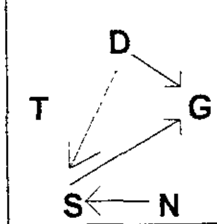
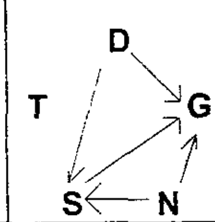
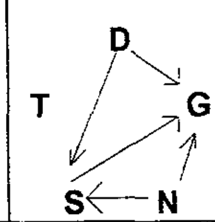
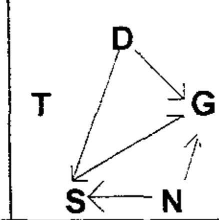
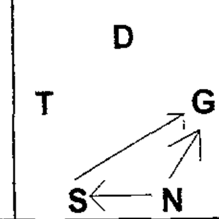
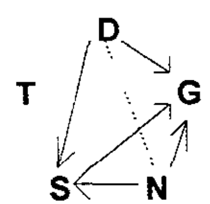
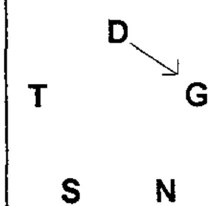
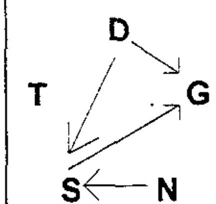
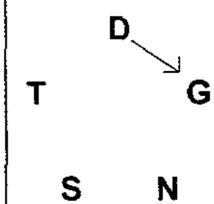
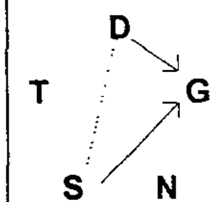
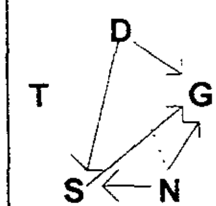
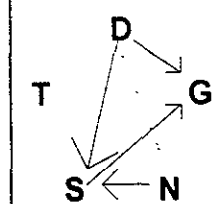
Continuación de la Tabla 16.- Conexiones bidimensionales y tridimensionales encontradas en las respuestas escritas de los participantes

ITEM	Diana	Viridiana	Mirelle	Omega	Fernando	Rafael	Roky
1.8.2							
Co. tri.	DNS, DST	DST	DNS, NST	DSG		DST, NST	
(NR)	D→S		N→S			S→T	
1.8.3							
Co. tri.	DSG	DSG	DGT, DSG NSG, NST	DSG	DSG	DSG	DGT, DSG DST, STG
(NR)			D→G N→S S→G				D→T S→T D→G S→G

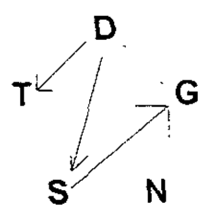
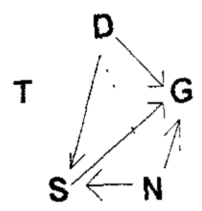
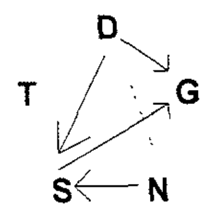
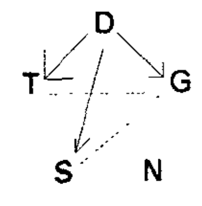
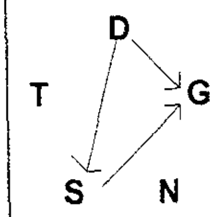
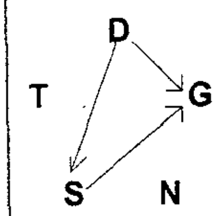
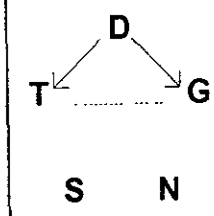
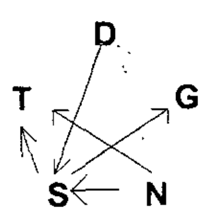
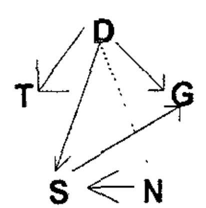
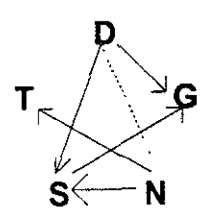
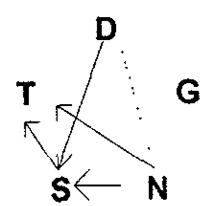
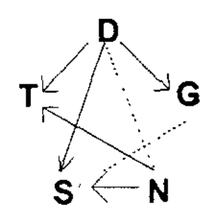
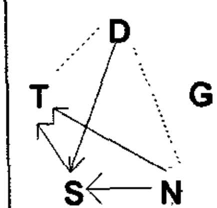
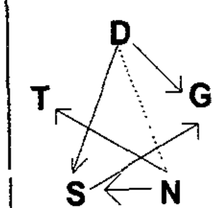
Continuación de la Tabla 16.- Conexiones bidimensionales y tridimensionales encontradas en las respuestas escritas de los participantes

ITEM	Diana	Viridiana	Mirelle	Omega	Fernando	Rafael	Roky
1.8.9							
Co. tri.	DNS, DNT DST	DNS, DST DNT	DST, NST	DSG, DNS	DSG, DNS	DSG, DNS	DSG, DNS NST
(NR)	D→S S→T	D→T D→S	S→T	D→S	D→S	D→S	D→S N→S
1.8.10							
Co. tri.	DSG, DNG DNS	DSG, DST NST	DSG, NSG	DSG, NSG	DSG	DNS, NSG	DGT, DSG
(NR)	S→G D→G N→G	D→S S→T	S→G	S→G		N→S	D→G

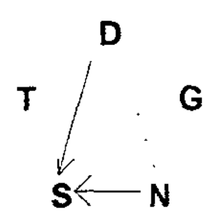
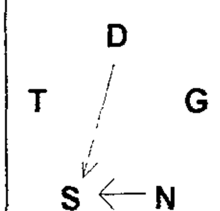
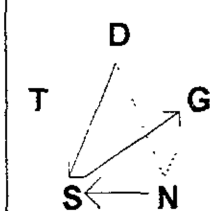
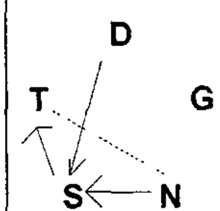
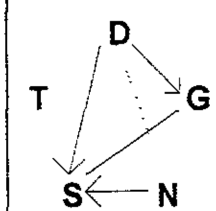
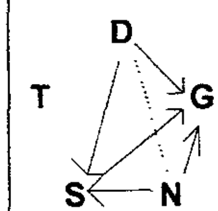
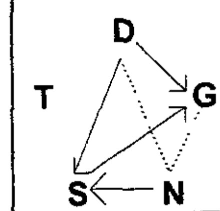
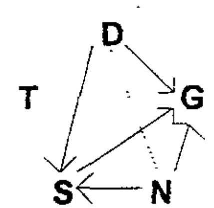
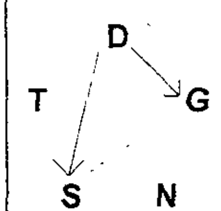
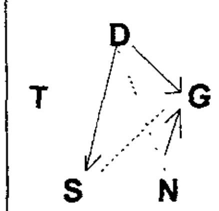
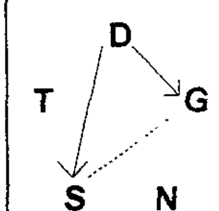
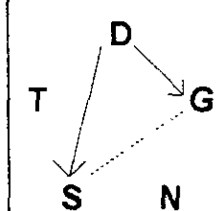
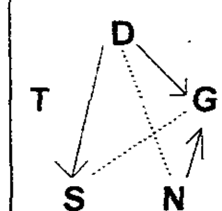
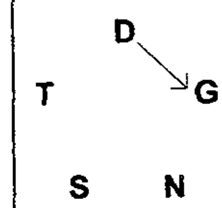
Continuación de la Tabla 16.- Conexiones bidimensionales y tridimensionales encontradas en las respuestas escritas de los participantes

ITEM	Diana	Viridiana	Mirelle	Omega	Fernando	Rafael	Roky
1.8.12							
Co. tri.	DSG, NSG	DSG, NSG	DSG	DSG, NSG	DSG, NSG	DNG, DSG NSG	NSG
(NR)	S→G	S→G		S→G	S→G	S→G D→G N→G	S→T
1.8.13							
Co. tri.	DNG, DNS DSG		DSG		DSG	DNS, DSG	DNS, DSG
(NR)	D→S N→G					D→S	D→S

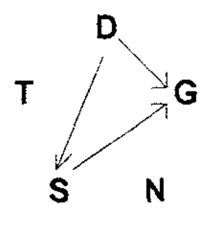
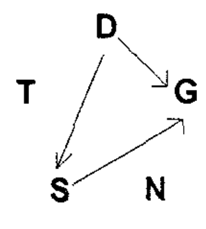
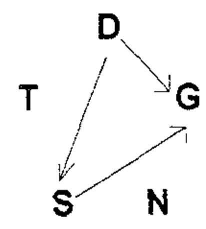
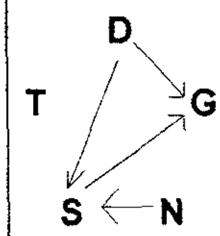
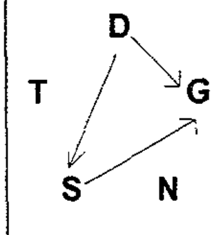
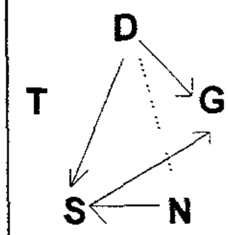
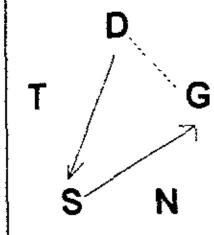
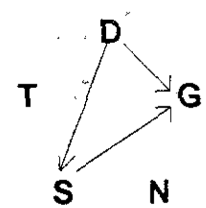
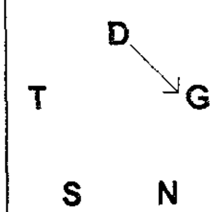
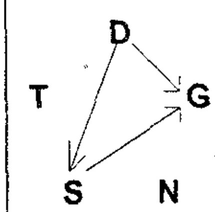
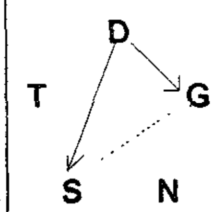
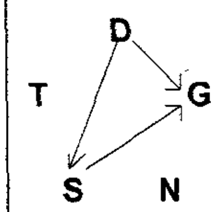
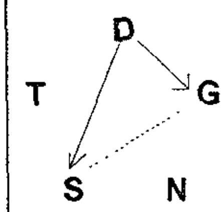
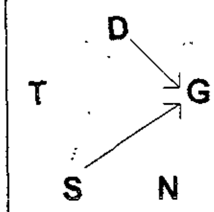
Continuación de la Tabla 16.- Conexiones bidimensionales y tridimensionales encontradas en las respuestas escritas de los participantes

ITEM	Diana	Viridiana	Mirelle	Omega	Fernando	Rafael	Roky
1.8.14							
Co. tri.	DSG	DNG, DNS DSG, NSG	DNS, DSG	DSG, DGT	DSG	DSG	DGT, DSG DST
(NR)		S→G D→G D→S N→G N→S	D→S	D→G			D→G D→S D→T
1.8.15							
Co. tri.	DNS, DSG NST	DNS, DSG	DNS, DSG	DNS, NST	DNS, DSG DST	DNS, DST NST	DNS, DSG
(NR)	D→S N→S	D→S	D→S	N→S	D→S	D→S S→T N→S	D→S

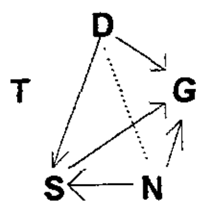
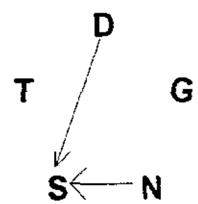
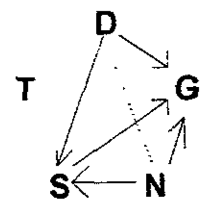
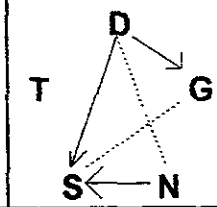
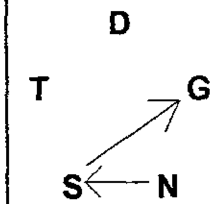
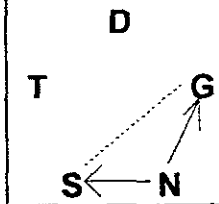
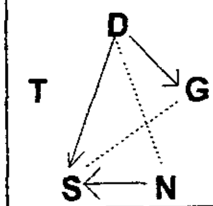
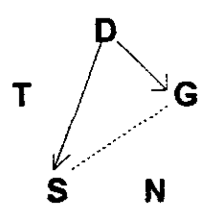
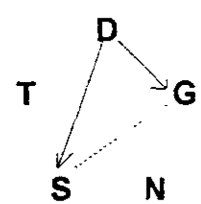
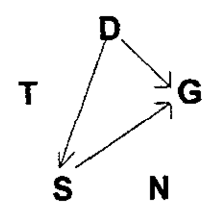
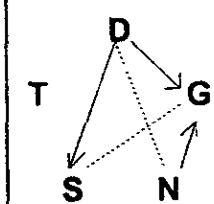
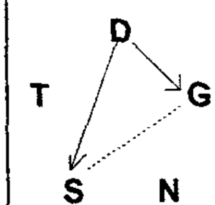
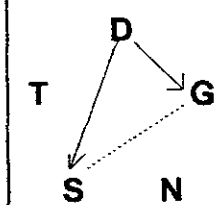
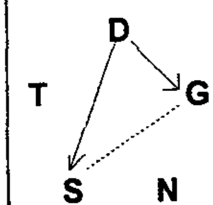
Continuación de la Tabla 16.- Conexiones bidimensionales y tridimensionales encontradas en las respuestas escritas de los participantes

ITEM	Diana	Viridiana	Mirelle	Omega	Fernando	Rafael	Roky
1.8.16							
Co. tri.	DNS	DNS	DNS, NSG	NST	DNS, DSG	DNS, DSG NSG	DNS, DSG NSG
(NR)			N→S		D→S	D→S N→S	D→S N→S S→G
2.2.p							
Co. tri.	DNG, DSG NSG	DSG	DNG, DSG	DSG	DSG	DNG, DSG	
(NR)	D→G S→G N→G		D→G			D→G	

Continuación de la Tabla 16.- Conexiones bidimensionales y tridimensionales encontradas en las respuestas escritas de los participantes

ITEM	Diana	Viridiana	Mirelle	Omega	Fernanc	Rafael	Roky
2.2.2							
Co. tri.	DSG	DSG	DSG	DSG	DSG	DNS, DSG	DSG
(NR)						D→S	
2.2 7							
Co. tri	DSG		DSG	DSG	DSG	DSG	DSG
(NR)							

Continuación de la Tabla 16.- Conexiones bidimensionales y tridimensionales encontradas en las respuestas escritas de los participantes

ITEM	Diana	Viridiana	Mirelle	Omega	Fernando	Rafael	Roky
2.4.1							
Co. tri.	DNS, DSG NSG		DNS, DSG NSG	DNS, DSG		NSG	DNS, DSG
(NR)	D→S N→S		D→S N→S	D→S			D→S
2.4.2							
Co. tri.	DSG	DSG	DSG	DNG, DSG	DSG	DSG	DSG
(NR)				D→G			

CAPÍTULO 5 PROPUESTA DIDÁCTICA DE CALCULO

> ... estamos convencidos de que un acercamiento significativo al cálculo diferencial a pesar de una cierta lentitud inicial, evita que el alumno adquiera técnicas de Cálculo sin comprender,...
> Wenzelburger, 1993

Introducción

En el capítulo anterior encontramos que el conocimiento de entrada de los participantes muestra que su núcleo representacional cuenta con las conexiones bidimensionales D→T y D→G y este hecho sugiere que el punto de partida de un curso introductorio de cálculo estaría apoyado en esas conexiones, es decir, que al plantear situaciones o fenómenos de variación discursivamente en la clase, hacer registros tabulares y gráficos de la información contenida en el problema y de la información generada por el proceso de resolución de las cuestiones formuladas con el fin de realizar un estudio profundo y rico de la situación fenomenológica haría que el trabajo inicial de la clase se hiciera con las representaciones que de entrada disponen los alumnos, para promover después un conocimiento conceptual y procedural con un repertorio más amplio de representaciones.

Respecto a las representaciones simbólicas encontramos muy pocas conexiones de ellas con las otras representaciones, esto nos alerta para diseñar la enseñanza de modo tal que se ponga énfasis y cuidado en el uso del lenguaje algebraico.

Desde luego que, a largo plazo, una meta de la enseñanza es lograr que el alumno se mueva con facilidad y de manera correcta entre las distintas representaciones de los conceptos. Teniendo presente lo anterior se requiere hacer los esfuerzos necesarios para conducir la enseñanza en esa dirección.

La enseñanza del cálculo diferencial e integral -en el bachillerato- se enfrenta con la interpretación y manejo de diferentes representaciones de conceptos básicos (cambio, razón de cambio, pendiente de una curva, efecto total de un fenómeno de variación, entre otros), por ello se requiere diseñar la enseñanza a partir de los resultados de investigación, es decir, tomando en cuenta las aproximaciones a cuestiones del tipo: ¿cómo es el proceso de representación mental de los conceptos involucrados en el aprendizaje de la derivada cuando el alumno realiza actividades de aprendizaje con tecnología?; ¿cuáles son algunas de las relaciones que el alumno establece entre dos o más tipos de representaciones de los conceptos relacionados con el aprendizaje de la derivada y la integral?; ¿cómo utiliza el alumno, sus representaciones internas de esos conceptos para resolver problemas de cambio?; o , ¿cómo al alumno relaciona la pendiente de una curva y la razón de cambio instantáneo?

Algunas propuestas y estudios relativos a esa problemática (Cruse y Lehman, 1982; Dolan *et.al.*, 1990; Galindo y Fiske, 1992; Martínez, 1993; Wenzelburger 1993a,b, 1994; Dubinsky y Leron, 1994; Thompson, 1994; Campos y Balderas, 1997) muestran formas diversas de abordar la enseñanza de conceptos matemáticos. La mayoría de esas propuestas y estudios, incorporan a la computadora o a la calculadora gráfica como una poderosa herramienta matemática para la exploración, descubrimiento y construcción de ideas matemáticas.

A partir de los resultados de estudios anteriores (Balderas, 1992, 1993 y 1996a) y los de esta investigación se diseñó una propuesta didáctica para el curso introductorio de cálculo diferencial e integral (Matemáticas VI) del nivel medio superior con el propósito fundamental de promover las relaciones entre diversas representaciones del concepto de derivada y el concepto de razón de cambio instantáneo. La elaboración de la propuesta que se describe en este capítulo se hizo con base en las representaciones que se desea promover en el estudiante de bachillerato.

En ese sentido, el uso de una calculadora gráfica se propone por su valiosa capacidad para manejar diferentes representaciones de los conceptos, situación que favorece la adquisición de habilidades perceptivas y matemáticas además de los conceptos mismos. El aprendizaje o acceso al conocimiento en condiciones escolares se logra como resultado de las actividades del alumno, organizadas y diseñadas de acuerdo a los recursos representacionales de textos y calculadoras avanzadas, y coordinadas por materiales didácticos.

Los materiales didácticos desarrollados en este estudio se valen de representaciones gráficas -en el plano cartesiano- para la secante y el trazo progresivo de secantes más próximas a la posición de la tangente, a fin de que el alumno relacione la dirección de una curva en un punto de su gráfica con la tangente trazada en dicho punto y concluya, simultáneamente, que la derivada valuada en la abscisa del punto de tangencia se obtiene como el valor límite de las pendientes de las secantes conforme las secantes se aproximan a la tangente.

La enseñanza de esos conceptos de cálculo concebida como coordinación de las actividades de exploración de los alumnos con una herramienta (graficador o calculadora gráfica) permite, por ejemplo, introducir el concepto de derivada de manera más objetiva, relacionándola con la pendiente de la recta tangente y con el concepto de razón de cambio. En este caso se puede simular una situación dinámica que enfatice el hecho de que la derivada es la razón de cambio instantáneo de la función, con lo cual el alumno capta tanto el proceso como el concepto mismo. La discusión en el aula debe hacer explícita también la relación entre la derivada y la dirección de la curva.

5.1 Propuesta

En el curso que a continuación proponemos se discuten los conceptos de razón de cambio promedio y razón de cambio instantáneo, asociados a velocidad promedio, pendiente de la secante, velocidad instantánea y pendiente de la recta tangente respectivamente, y el efecto total de un fenómeno de variación asociado a la integral, desde un punto de vista constructivo y en tres etapas: análisis y modelación de fenómenos de variación; exploración con representaciones diversas para aproximar la o las soluciones a las cuestiones que se plantean y finalmente, reformulación y resolución formal de las cuestiones, es decir, discusión de la derivada y la integral como culminación de procesos de límite.

5.1.1 Antecedentes

Es deseable que el alumno que inicia su estudio del cálculo diferencial e integral disponga de los siguientes conocimientos previos:

(1) Comprender la relación entre dos magnitudes que se asocian por pares.
(2) Tener presente dicha relación para trazar una gráfica en el supuesto de una continuidad.
(3) Disponer de una concepción madura de los conceptos de cambio y razón.

Los antecedentes curriculares de matemáticas son:

1. Curso de álgebra (con énfasis en variables y funciones),
2. Curso de álgebra de funciones elementales, y
3. Curso de geometría analítica (representaciones cartesianas de relaciones y funciones)

5.1.2 Objetivos y contenido

Se espera que el alumno logre conceptualizar a la derivada, como una función que proporciona información acerca de la función que se deriva (Wenzelburger, 1993a); y a la integral, como el resultado total de un proceso de cambio (Wenzelburger, 1994).

El contenido general del curso que se propone se divide en cuatro temáticas básicas:

I. Fenómenos dinámicos (situaciones problemáticas de variación).
II. Razones de cambio y efectos de las razones de cambio (uso de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas).
III. Derivada e integral (como procesos límite).
IV. Generalización de los conceptos de derivada e integral.

La clasificación anterior obedece más a fines de la instrucción que a razones temporales en la planeación de las actividades.

5.1.3 Planeación

El curso que se propone tiene una duración de un semestre y está dirigido a los alumnos del último año de bachillerato que estudian en las áreas físico-matemática, químico-bilógica y económico-administrativa.

El tiempo que se requiere por sesión es de dos horas y son indispensables al menos dos sesiones por semana.

El aula debe ser una área de trabajo que permita el libre movimiento de los estudiantes, con mesas para equipos de cuatro o cinco integrantes. Se necesita que cada estudiante o cada par de estudiantes disponga de una calculadora avanzada y es deseable que también esté disponible en el aula una computadora y software gráfico (Calcula, Cactusplot, Derive, Exel, Mathcad, Maple, etc.).

Otros recursos indispensables en el aula son: retroproyector, pantalla, pizarrón y un mueble para guardar materiales (láminas, modelos, acetatos, disquetes, etc.).

5.1.4 Actividades escolares y evaluación formativa

Las actividades de cada unidad se describen de manera general así:

I. Fenómenos dinámicos. El trabajo del grupo en la primera unidad consiste principalmente de las siguientes fases: observación, análisis y exploración guiada de situaciones que tengan que ver con fenómenos de variación. Las cuestiones que se elijan las deberá valorar el profesor, quien conducirá a los alumnos en caso de dificultad, para escoger un problema que esté de acuerdo a la idiosincrasia, antecedentes e intereses de los educandos.

Algunos ejemplos conocidos de fenómenos de variación son los problemas de resortes, volúmenes, distancias recorridas, crecimiento de una población, etc. En la sección 5.2 se proporcionan algunos ejemplos de fenómenos de variación a los que se considera material de aprendizaje potencialmente significativo (Ausubel, 1973).

II. Razones de cambio y efectos de las razones de cambio. En la segunda unidad, los alumnos generarán registros tabulares y gráficos de razones de cambio de los fenómenos escogidos a fin de que comparen y reconozcan modelos algebraicos, exponenciales y trigonométricos sencillos. También elaborarán representaciones tabulares y gráficas para los efectos de las razones de cambio.

De cada modelo construirán gráficas para las razones de cambio instantáneo como aproximación gráfica al modelo f'(x). Y construirán también, la gráfica de los efectos de las razones de cambio instantáneo para aproximar el modelo $\int f'(x)dx$.

III. Derivada e integral (como procesos límite). En esta unidad las ideas principales (derivada e integral) se abordarán como culminación de procesos límite de razones de cambio (Finney, Thomas, Demana y Waits, 1994; Stewart, 1995; Vázquez y Barros, 1958).

IV. Generalización de los conceptos de derivada e integral. La generalización de los conceptos abarcará criterios para determinar: funciones crecientes y decrecientes, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, concavidad de la curva, centro de gravedad, trabajo y valor promedio de una función.

La metodología del curso considera fundamental el aprendizaje cooperativo (Dubinsky, 1994) y la interacción por pares a fin de mostrar las concepciones de los estudiantes (Amigues, 1990), para no reducir la asimilación del conocimiento a la descripción verbal y la descripción de modelos (Galperin, Zaporózhets y Elkonin, 1987).

El tratamiento de los temas será por medio de resolución de problemas cuidando que el alumno se responsabilice de su aprendizaje. Las consecuencias en la evaluación dependerán del enfoque de la instrucción que se implemente en el aula, de ahí que la metodología propuesta tenga implicaciones en la forma de evaluación, hasta el punto de que el profesor no sólo evaluará la información que posee el educando, sino la comunicación de ideas (Martínez, 1994), en cuanto a la organización, síntesis, reflexión y conclusión, que pudiera llevar al alumno a la demostración del conocimiento adquirido (*id.*).

Para efectuar una evaluación formativa del aprendizaje se recomienda valerse de reportes escritos por los alumnos (*id.*) de las sesiones de clase, tareas, entrevistas individuales, cuestionarios breves que planteen cuestiones para reflexionar y reducir así las tendencias tradicionales de sólo evaluar aspectos rutinarios (*id.*).

5.2 Ejemplos de situaciones problemáticas de variación

Cada uno de los siguientes ejemplos hace referencia a un fenómeno de variación que bien puede adecuarse a las condiciones físicas, geográficas y culturales de los alumnos, así como a sus preferencias e intereses. Todos los ejemplos fueron discutidos en diversos foros y eventos del área de educación matemática en los que se participó durante la investigación.

5.2.1 Reacción química

En una reacción química la cantidad en gramos Y de la sustancia producida después de cierto tiempo X (horas), se obtiene de la expresión:

$$Y = 16X - 4X^2 \text{ cuando } 0 \leq X \leq 2$$

Actividades:

- Estima la velocidad en gramos por hora -con ayuda del programa DERIVADA [15]- a la cual se empieza a producir la sustancia cuando han transcurrido los siguientes tiempos:

  (a) X = 0.5 (b) X = 1 (c) X = 2

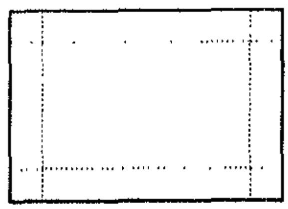
- Explica, dentro del contexto del problema la respuesta al inciso c.

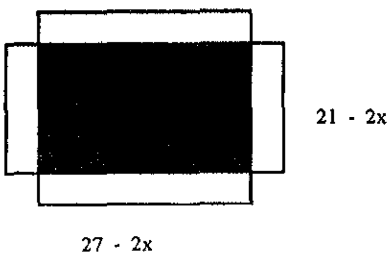
[15] Nota: el programa DERIVADA calcula razones de cambio con incrementos elegidos por el alumno, se corre en calculadoras TI82, ver anexo 3.

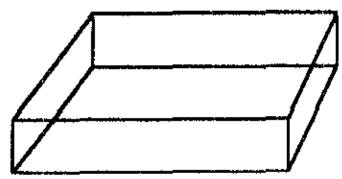
5.2.2 Volumen de una caja

Actividades:

- Construir una caja sin tapa con una pieza de papel, doblando por las líneas punteadas, como se muestra en la figura. Se pueden usar cuatro clips para mantener unidas las caras laterales. En cada esquina de la hoja se forma un cuadrado de lado x.







- Medir las dimensiones de la caja.

- Elaborar una tabla con las dimensiones de la caja obtenidas por cada alumno, conforme a la medida particular se le asigne a x.

- Obtener un modelo V(x) para el volumen de la caja en función de x.

- Graficar secuencialmente las funciones:

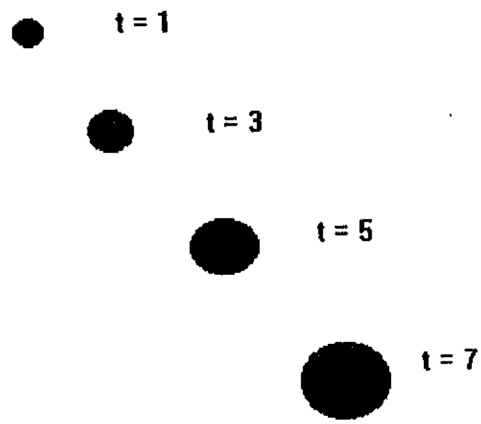
$$V(x),\ V(x+h),\ V(x+h)-V(x),\ \frac{V(x+h)-V(x)}{h}$$ en una misma pantalla.

- Construir una tabla con los valores de x y V(x) que muestre para qué valor de c, $V'(c)=0$.

- Interpretar lo encontrado en la actividad anterior respecto al volumen de la caja.

5.2.3 Balón

Un balón esférico se infla a razón de 4.5 pulgadas cúbicas por minuto, como se muestra en la ilustración.



Actividad:

- Explica cómo es la razón de cambio del radio cuando el radio mide 2 pulgadas.

Nota: *Utiliza el programa* DERIVADA *para estimar la respuesta.*

5.2.4 Excursionista

Actividades:

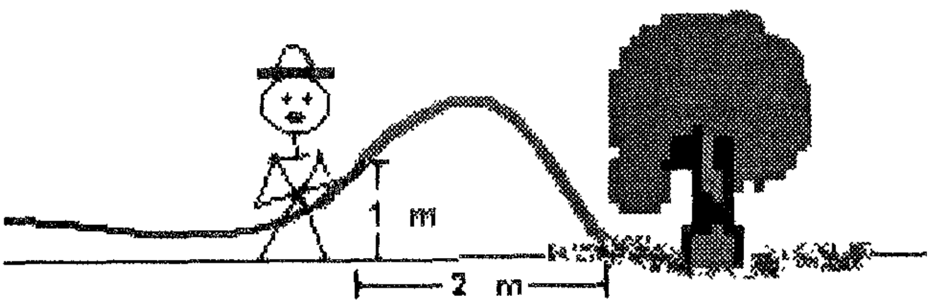
- Utiliza la información que te proporciona la derivada para contestar la cuestión siguiente:

Un excursionista se dirige hacia una cabaña que se encuentra en el lado opuesto de una colina y se pregunta en qué momento verá por primera vez a la cabaña.

- Dibuja un esquema de la situación.

5.2.5 Trayectoria del agua que sale de una manguera

En muchos lugares habitados es frecuente observar a las personas que riegan con mangueras las plantas o árboles de parques y jardines; respecto a esta situación ¿cuál debe ser la dirección de la salida del chorro de agua de la manguera para que el agua llegue a la base de un árbol que dista dos metros (medidos por el piso) de la salida del agua, si la misma se encuentra a una altura de un metro del piso?, (ver siguiente figura[16]).



Figura

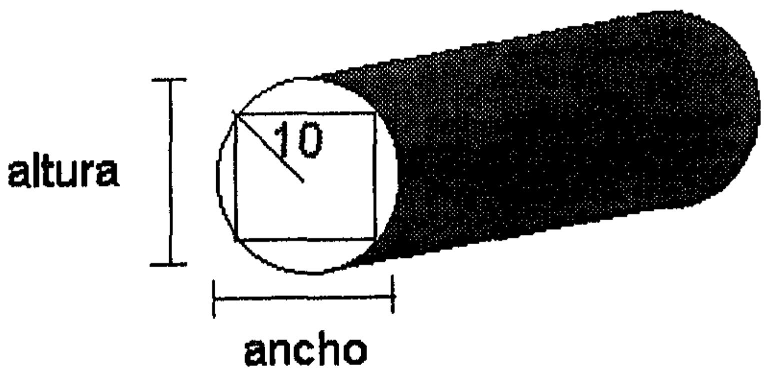
Actividades:

- Modelen matemáticamente la situación anterior con ayuda de un sistema de coordenadas cartesianas.
- Identifiquen las coordenadas de los puntos correspondientes a la salida del agua (S) y a la base del árbol (A) respecto al sistema propuesto en el punto anterior.
- Analicen algunos elementos de la familia de parábolas que pasan por los puntos S y A, por medio del modo gráfico de la calculadora.
- Proporcionen algunas soluciones particulares del problema.
- Proporcionen una restricción o condición al problema que de lugar a una solución única.

[16] La presentación de la figura en el enunciado del problema limitó el análisis de la situación e influyó en los tipos de respuestas a las dos primeras cuestiones, tanto de los estudiantes como de los maestros, con quienes se validó ese instrumento, razón por la cual, no se incluyó el dibujo en la segunda parte de la guía didáctica (ver anexo 1, p. 23).

5.2.6 Viga de área transversal máxima

Del tronco cilíndrico de un árbol, cuyo radio mide 10 pulgadas, se va a cortar una viga rectangular y se desea obtener la de mayor área transversal posible.



Actividades:

- Modelen matemáticamente la situación anterior con ayuda de un sistema de coordenadas cartesianas.
- Expresen el área de la sección rectangular de la viga en función de una de las variables.
- Analicen los valores que asume el área de la sección (rango de la función), con ayuda de la calculadora.
- Aproximen numéricamente el valor del área máxima (A) e ilustren la situación con una figura de la sección transversal y con la gráfica cartesiana de la función área.
- Calculen razones de cambio de la función en valores cercanos al que genera el área máxima (valor aproximado en la actividad 4) y tracen las secantes a la gráfica correspondientes a esas razones.
- Discutan cuál debe ser la razón de cambio instantáneo de la función área, donde ella alcanza su máximo valor.
- Propongan un procedimiento para determinar las dimensiones de la sección rectangular de área máxima, a partir de la información que se obtiene de la actividad anterior.

5.2.7 Globo meteorológico

Un globo meteorológico se eleva verticalmente desde el piso de manera que su velocidad durante los primeros 10 segundos de su ascenso se comporta conforme a la expresión:

$$v(t) = 3 + 2t \quad \text{pies por segundo}$$

Actividad:

- Responde y justifica tu respuesta a: ¿qué altura, medida desde el piso, alcanza el globo meteorológico cuando han transcurrido 4 segundos?

5.3 Comentarios finales

Los cursos tradicionales de cálculo en el bachillerato abordan las mismas temáticas básicas: funciones, límites, derivada e integral, pero la presentación inicial se hace formalmente, es decir, se dan a conocer los conceptos en forma acabada, sólo los resultados de los procesos, y de esa forma, además de que el proceso de construcción de dichos conceptos permanece oculto para el estudiante, no se favorece la adquisición de conocimiento conceptual, peor aún, se reduce la matemática escolar a procedimientos aislados.

Cuando el alumno resuelve problemas, en el sentido de situaciones problemáticas para él, como parte de las actividades del curso propuesto, se enfrenta a la necesidad de organizar sus ideas, reflexionar y llegar a conclusiones contínuamente; con ello, el profesor tiene la oportunidad de valorar su instrucción y el aprendizaje del alumno a lo largo del curso, utilizando técnicas de evaluación (Cangelosi, 1991; Balderas, 1995a), e instrumentos de evaluación diversos (véase los ítems planteados en la guía didáctica). La información derivada de ése y otros procesos de evaluación posibilitan al profesor para adecuar su enseñanza a las particularidades de los estudiantes.

6.1 Conclusiones

Durante la investigación se encontró que es difícil separar el contenido de la representación en la información que proporcionó cada participante al responder, y que la variación de la oscilación entre las representaciones en estudio está determinada por las relaciones entre los conceptos más que por los conceptos mismos.

Los participantes respondieron principalmente con representaciones discursivas y en los casos de los algoritmos procedieron correctamente con representaciones simbólicas que conectaron con representaciones discursivas y numéricas. Conectaron escasamente lo simbólico con lo gráfico y lo simbólico con las representaciones tabulares, tanto en las respuestas escritas como en las que se obtuvieron durante las entrevistas. No se encontraron conexiones entre las representaciones gráficas y tabulares en los datos obtenidos de los 22 ítems en estudio, pero el equipo formado por las tres mujeres participantes, sí las hicieron en la actividad 10 y el ítem 1.8.1. La actividad 10 les solicitaba coordenadas de puntos de una gráfica generada en la calculadora, utilizando la herramienta TRACE, y el ítem 1.8.1, organizar esos datos en una tabla y calcular otros con esas coordenadas. Estos resultados ponen en evidencia diferencias en la respuestas atribuibles, al parecer, a la interacción (pp. 63, 64 y 169).

En términos generales los participantes cumplieron la demanda potencial de representaciones (DR) lo que indicó que interpretaron la información contenida en los ítems y produjeron respuestas basadas en las representaciones contenidas en ellos. Este hecho fue un indicio, en cierta medida, de que las representaciones en estudio D, G, N, S y T estuvieron disponibles en los participantes, es decir, fueron parte de sus recursos, aunque al parecer no conformaron sistemas de representación (Palmer, 1978, 262) fuertemente conectados, lo cual dificultó el paso de una representación a otra (p. 33) y la comunicación de las ideas se hizo poco precisa o ambigua (*v.gr.* ítems 1.3.1, 1.8.16, 2.4.1 o 2.4.2.). Por tanto, no se consideró que existiera discrepancia entre las representaciones utilizadas en los instrumentos y las que el alumno usó para responder.

La presentación de los datos correspondientes a la cantidad de sustancia producida conforme al tiempo transcurrido en la Tabla 1 de la guía didáctica favoreció la comparación de los cambios en las variables tiempo y cantidad de sustancia, pero el hecho de que el cambio en la variable tiempo fuese de la misma magnitud para dos datos consecutivos promovió la interpretación de que "... no había cambio en el tiempo..." , cuando la referencia correcta era "... el cambio en el tiempo es constante...", y que sólo Fernando realizó. Por lo que, la construcción de la imagen correspondiente a la covariación entre la cantidad de sustancia producida y el tiempo transcurrido no fue trivial para los participantes del estudio, conforme a lo encontrado por Thompson (p. 47).

Las respuestas de los participantes a los ítems 1.2.1, 1.2.3, 1.3.1, 1.5.4, 1.8.2 o al problema 2.2 mostraron su decisión para etiquetar puntos, lo cual es un acto de visualización, y su decisión para escoger ciertos puntos al hacer las explicaciones de sus respuestas, es un acto de análisis en el sentido de Zazkis y asociados (p. 22).

El procedimiento algebraico para obtener la expresión que modela a una parábola que pasa por tres puntos conocidos, discutido en el ítem 1.5.2, no se utilizó para responder el ítem 2.2.2, aunque los participantes sí identificaron el tipo de expresión requerida, y realizaron diversos ensayos, variando los parámetros de la función cuadrática correspondiente, para ajustar la gráfica respectiva a los requerimientos del ítem. Cabe señalar, que la discusión de ese procedimiento en la clase fue previa a la investigación, y que el proceder de los participantes se explica como una evidencia del razonamiento visual, en el sentido expuesto en el capítulo dos (pp. 17-22). Lo anterior sugiere el reconocimiento de al menos dos variables que no fueron objeto de esta investigación, el tiempo transcurrido entre dos exposiciones a cuestiones relacionadas y el número de exposiciones.

Se encontró correspondencia física entre las representaciones discursiva y simbólica para el concepto "intervalo" en cinco de los siete participantes (ítem 1.5.3), por lo que, para este concepto en particular, la integración cognitiva (pp. 27 y 28) se puso de manifiesto en las respuestas de esos participantes.

Existen formas de representación matemática (p. 24) en el currículo escolar de matemáticas que se mantienen en situaciones de nuevos aprendizajes según se encontró durante la entrevista al ítem 1.5.4. Los participantes ilustraron con un ejemplo el hecho de que la expresión $y = 16x - 4x^2$ permite calcular la cantidad de sustancia y producida en cualquier momento x. Mirell y Rafael fueron los únicos que en sus respuestas escritas procedieron de la misma forma que durante la entrevista, los demás respondieron discursivamente haciendo referencia a la misma expresión que Fernando calificó de "general". En este mismo ítem se encontró una dificultad conceptual proveniente de un problema estructural (p. 52) que parece emanar del uso del modelo $y = 16x - 4x^2$ para calcular la cantidad de sustancia producida siendo x el tiempo transcurrido. El conflicto quizás estriba en operar con una magnitud temporal en el sentido de transformación para obtener una magnitud de cantidad de sustancia, y concebirla como una relación que describe el comportamiento por pares (p. 189) de magnitudes de diferentes categorías; pudiera ser que la forma de responder del equipo 1 sea una evidencia de eso.

Las respuestas al ítem 1.7.1 fueron muy detalladas y cabe señalar, por una parte, que el ítem se refiere al concepto *cambio*, del cual el alumno ha hecho un uso extensivo a lo largo de su curriculum escolar de matemáticas y de otras áreas de conocimiento, y por otra parte, hubo un mayor número de las conexiones entre las representaciones utilizadas que para los ítems anteriores (p. 122), situación que sugiere una integración más madura (p. 58) para este concepto. Sin embargo, la cuantificación del cambio sólo se hizo en forma numérica (p. 125).

El alumno enfocó el comportamiento de las secantes en el comportamiento de los puntos de intersección entre la secante y la curva, o entre la secante y uno de los ejes de coordenadas (ítems 1.8.12, 1.8.13 y 1.8.14), a diferencia de lo reportado por Speiser y Walter (1994). Lo que sugiere una inestabilidad de los referentes en el plano cartesiano (pp. 102-104), que pudiera deberse a conflictos derivados de la naturaleza de la enseñanza previa y a conflictos epistemológicos (p. 53), y pudiera ser causa de la ausencia de una correspondencia física entre las representaciones discursivas y numéricas para el concepto "se va acercando" (ítem 1.8.14).

Tampoco se encontró referencia geométrica explícita a la cuerda determinada por la secante como en otros estudios (Speiser y Walter, *ib.*), pero sí a la distancia entre los puntos de intersección de la secante y la curva, lo cual es una referencia indirecta a la cuerda.

El manejo del proceso límite de manera intuitiva y numérica, se vio favorecido por los materiales de aprendizaje (guía didáctica), lo cual no se considera como una limitación, sino como un puente hacia la concepción formal o simbólica del mismo. En las respuestas al ítem 1.8.13 no se ven regularidades importantes entre las representaciones de los siete participantes. En parte, una de las razones pudiera ser que en el ítem se plantea una condición que probablemente no fue bien interpretada y mucho menos relacionada con el efecto en la gráfica que se produce cuando se corre el programa SECANTE (que hace un "zoom") pero que no aparecen trazadas la secantes en cuestión. En este punto se ve que el programa debe mejorarse a fin de que la condición $|h| < 0.1$, produzca un acercamiento a los puntos por donde se traza la secante y se visualice la secante misma. Además, el cambio de escala debe quedar claro para el estudiante ya que podría olvidarlo y podría pensar que el efecto fue inverso, es decir, de que se produjo un alejamiento en lugar de un acercamiento.

En la segunda parte de la guía didáctica, relacionada con el análisis de la salida de agua por una manguera, el enunciado del problema fue traducido a una situación gráfica por todos los participantes con más o menos detalles, así que en este ítem, la representación G estuvo disponible como parte del conocimiento tácito (Campos y Gaspar, 1995a, p. 3) y fue relacionada con los conceptos que contiene el enunciado. Sin embargo, sólo un participante discutió la situación en términos de velocidad y dos hicieron referencia a la fuerza de la gravedad. Las coincidencias en las formas de representación de la salida de agua por una manguera no fueron efecto de la interacción grupal, porque de hecho, ésta no se permitió; al parecer, las formas de representación se explican por características culturales.

Ninguno de los participantes usó o aludió a la representación tabular en su respuesta al ítem 2.4.1, parece ser que ese recurso no es significativo para la situación del problema de la trayectoria del agua. Ninguno registró datos en arreglos tabulares. Los ítems 2.4.1 y 2.4.2 plantearon una problemática fundamental para los fenómenos de variación, a saber, la variación respecto a diferentes magnitudes (Thompson, 1994), una el desplazamiento horizontal y la otra el tiempo transcurrido.

Ninguno de los participantes dio una respuesta correcta a los ítems 2.4.1 y 2.4.2, ni siquiera un acercamiento a la relación entre la trayectoria del agua $y = f(x)$ y la dirección de la trayectoria $D_x(y) = f'(x)$ en el punto $(x, f(x))$. Tampoco para la relación entre la dirección de la trayectoria y la componente vertical de la velocidad $v = y'(t)$. Y desde luego no se explicaron la trayectoria del agua como una relación funcional: $y(t) = f(x(t))$, siendo x el desplazamiento horizontal de una partícula de agua ocurrido en el tiempo t y y la altura correspondiente, medida desde el piso.

6.2 Implicaciones pedagógicas y recomendaciones

Los resultados de esta investigación sugieren que se requiere favorecer el uso de las representaciones simbólicas, para lo cual es necesario proporcionar en los materiales de aprendizaje, los enlaces entre las representaciones discursiva y numérica, que ayuden al estudiante a incorporar el uso de representaciones simbólicas para expresar ideas. El material de aprendizaje por si mismo debe hacer uso de las representaciones simbólicas de manera relacionada con las representaciones discursiva y numérica de los mismos conceptos.

Por ejemplo, vincular el manejo del proceso límite de manera intuitiva y numérica, logrado con el uso de programas en la calculadora, con los recursos de manipulación simbólica de ambientes de trabajo matemáticos (p. 55), a fin favorecer la construcción de ese concepto.

En particular, las respuestas a los ítems 2.4.1 y 2.4.2, consideradas como un diagnóstico, permiten sugerir un tratamiento del problema de la trayectoria del agua al salir por una manguera que incluya los conceptos de velocidad y su relación al concepto de derivada de manera explícita, además, cabe subrayar que la enseñanza debe hacer explícita también la relación entre la derivada y la dirección de la curva. Con este fin los laboratorios basados en computadoras

(MBL, p. 57) se convierten en una alternativa, sujeta a verificación, susceptible de implementarse en las aulas de cómputo, para la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias, de los planteles.

También se requiere dar tiempo a los alumnos de cálculo para que utilicen varias representaciones de los conceptos antes de trabajar los algoritmos en forma simbólica, con el fin de que dispongan de relaciones entre diferentes representaciones de los conceptos, y tengan la posibilidad de configurar sistemas de representación más poderosos para resolver problemas de variación.

Como se dijo en la sección anterior, la variación de la oscilación entre las representaciones en estudio está determinada por las relaciones entre los conceptos más que por los conceptos mismos, de ahí se deriva una implicación pedagógica en el sentido de que el discurso didáctico contenido en los materiales de aprendizaje debe promover la construcción de relaciones entre los conceptos representados de maneras diversas para que el estudiante disponga de sistemas de representación poderosos.

En esa dirección, el experimento de la manguera se podría adecuar de modo que el estudiante tomara una secuencia de fotografías de la trayectoria del agua que sale por una manguera; agregando al agua pequeñas esferas de un material como el polietileno que fácilmente circulen por la manguera, a fin de elegir una y hacer registros de su posición en cada fotografía. Se requiere tomar la secuencia de fotografías a intervalos de tiempo conocidos, haciendo una partición del lapso de tiempo que tarda en salir y llegar a una referencia. Un tratamiento similar puede verse ilustrado en el libro Física (PSSC, 1966) y en Spiser y Walter (1994), así como en el montaje que puede apreciarse en la sala denominada "El Movimiento" del Museo UNIVERSUM.

En relación al diseño curricular cabe decir que es de vital importancia que los cursos de cálculo diferencial del bachillerato prevean el planteamiento de cuestiones como las de la trayectoria del agua que sale por una manguera, y las que se ejemplifican en el capítulo 5, las cuales son situaciones ricas desde el punto de vista conceptual, porque de ello depende en gran medida el desempeño posterior del estudiante en cursos de cálculo más avanzado o de ecuaciones diferenciales.

6.3 Limitaciones del estudio

Una de las limitaciones del estudio es que no se documentaron las representaciones involucradas en los conceptos que los participantes mostraron como formas verbales, es decir, como relaciones. (véase la sección 4.2, ítem 1.8.3).

En la construcción metodológica, y al preguntarse cuáles representaciones de las usuales emplean los alumnos para responder problemas de variación, se consideraron cinco rubros: discurso, gráfica, numérica, simbólica y tabular, esta decisión no permitió estudiar con mayor detalle las representaciones mostradas por el alumno. De hecho, las representaciones que utiliza el alumno se identificaron como alguna de las cinco anteriores, y de ese modo se puso más atención a las formas de utilizarlas, es decir, se puso más atención a las relaciones entre los conceptos que indicaban las conexiones entre las representaciones de los conceptos.

Cada una de las categorías denominadas representaciones discursiva, gráfica, numérica, simbólica y tabular, tienen componentes propias, pero en este estudio no se abordan, y es posible que para dos alumnos y un mismo concepto las representaciones tabular, gráfica o simbólica tengan distintas componentes. En este punto, el estudio no incluyó el análisis conceptual de las gráficas y tablas producidas por el participante.

También pudiera ser una limitante de la investigación el que no se estudien las concepciones del estudiante sobre velocidad y dirección de una trayectoria, desde luego que las concepciones no son el objeto de este estudio, pero una investigación sobre ellas probablemente sea una fuente que permita documentar las representaciones en cuestión.

6. 4 Perspectivas

Una implicación derivada de la construcción metodológica plantea una conjetura sobre la posibilidad de modelar el proceso de representación matemática en términos del conocimiento y de las estrategias de resolución de problemas. Además, las limitaciones de este estudio conforman por sí mismas interrogantes que se requieren investigar.

En cuanto a las categorías empíricas del estudio, una relación se considera bidimensional, cuando sólo se cumple entre pares ordenados de objetos, conforme a esto, la construcción empírica de las conexiones bidimensionales y tridimensionales abre una área de investigación para estudiar las categorías empíricas *conexión bidimensional* y *conexión tridimensional*, considerando que la primera se establece para pares ordenados de representaciones (los objetos) y, la segunda, entre pares de conexiones bidimensionales.

De la discusión de los datos surge también una interrogante respecto a saber si los participantes tienen o no representaciones funcionales para los fenómenos de cambio tratados en el estudio y cómo esas representaciones funcionales se relacionan con las representaciones en estudio.

Finalmente, las interrogantes antes mencionadas permiten ilustrar que el campo de investigación en torno a la representación matemática y el razonamiento visual en condiciones de enseñanza es basto y abierto. Y que, desde una perspectiva pedagógica, quisieramos que el estudio del cálculo no fuese la experiencia matemática final de los alumnos (aspiración compartida con Kaput, 1994a, p. 77).

abril de 1998

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Amigues, R. (1990) Peer interaction and conceptual change. En H. Mandll, E. De Corte, et.al. (eds.), *Learning and Instruction*, Great Britain., Pergamon Press, (2), 1, 27-43.

Ausubel, D. (1973) Aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento. En S. Elam (ed.), *Educación y estructura del conocimiento*, Buenos Aires, Ateneo, 211-238.

Ausubel, David (1973) Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. México, Trillas.

Balderas, P. (1992) Adquisición de conceptos de cálculo con apoyo de la graficación en microcomputadora Tesis maestría. México, UACPYP-CCH UNAM.

Balderas, P. (1993) Experiencias con el uso de un graficador en la enseñanza del cálculo en la escuela nacional preparatoria. *Educación Matemática*, (5), 3, México, diciembre, 125-142.

Balderas, P. (1995a) Evaluación alternativa de los procesos de aprendizaje: concepto de cambio, conferencia por invitación, XIII Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas, ANPM, Centro de Ciencias de Sinaloa y Universidad Autónoma de Sinaloa, Culiacán, Sin., Mex., noviembre de 1995.

Balderas, P. (1995b) Cálculo Diferencial: aprendizaje cooperativo en base a las representaciones que se logran en calculadoras avanzadas (TI82). Curso impartido en la IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Ministerio de Educación, La Habana, Cuba, agosto 15 -17.

Balderas, P. (1995c) Cálculo diferencial: aprendizaje cooperativo con base en las representaciones que se logran en calculadoras de tipo avanzado (TI82), *Educación Matemática*, Vol. 7 , No. 3, diciembre, 136 -151.

Balderas, P. (1996a) Representación del concepto de cambio en ambientes computacionales. En M.A. Campos y R. Ruiz, *Problemas de acceso al conocimiento y enseñanza de las ciencias*, México, Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, UNAM, 137-158.

Balderas, P. (1996b) La enseñanza del cálculo por computadora, *Perfiles Educativos*, (XVIII), 72, abril-junio, 10-14.

Bebout, H. (1987) Conceptual and procedural knowledge as related to instruction on symbolic representation. En J. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran, *Proceedings of the Eleventh International Conference*, PME XI, (II), 368-374.

Bishop, A. (1989) Review of Research on Visualization in Mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, (11), 1, Winter, 7-16.

Bloome, D. (1992) Interacción e *intertextualidad en el estudio de la lectoescritua en las aulas: el microanálisis como una tarea teórica.* En M. Rueda y M. Campos (eds.), *Investigación Etnográfica en Educación*, México, UNAM, 123-180.

Boyer, C. (1959) The History of the Calculus and its Conceptual Development. New York, Dover.

Bruner, J., Goodnow, J. y Austin, G (1978) El proceso mental en el aprendizaje. Federico Rubio y Gali (trad.), Madrid, Narcea, S.A. de Ediciones.

Campos, M. A. y Balderas, P. (1997) Representación matemática en solución de problemas. Artículo presentado en el IV Seminario de *Cognición, epistemología y enseñanza de las ciencias*, IIMAS y Fac. de Ciencias, UNAM, octubre de 1997.

Campos, M. A. y Gaspar, S. (1995a) The propositional analysis model: a concept-link *approach to text-based knowledge organization analysis.* Series Reportes de Investigación, México, IIMAS-UNAM, (5), 46, junio.

Campos, M.A. y Gaspar, S. (1995b) The Propositional Analysis Model: Semantic Analysis of Correspondence in Knowledge Construction. *Reportes de Investigación. México*, IIMAS-UNAM, (5), 49, octubre.

Cangelosi, J. (1991) Evaluating Classroom Instruction, New York, Longhman Publishing Group.

Castellan, G. W. (1987) Fisicoquímica. Versión en español de M.E. Costas y C. Amador, E.U.A., Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

Cobb, P. y Whitenack, J. (1996) A Method for Conducting Longitudinal Analyses of Classroom Videorecordings and Transcripts, *Educational Studies in Mathematics*, *(30), 3, abril.*

Cornu, B. (1991) Limits. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematic Thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 153-166.

Cruse, A. y Lehmann, M (1982) Lecciones de Cálculo 1. Introducción a la derivada. Versión en español de H. Arizmendi y M. Lara, México, Fondo Educativo Interamericano, 32-41.

Dolan, Stan, et.al. (1990) Introductory Calculus. The School Mathematics Project. Great Britain, Cambridge University Press.

Donmoyer, R. (1992) Argumentos para la investigación de estudios de caso: redefinición de conceptos de validez interna y externa. En M. Rueda y M.A. Campos (eds.), *Investigación Etnográfica en Educación,* UNAM, 65-86.

Dubinsky, E. (1991) Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematic Thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 95-123.

Dubinsky, E. (1994) Aprendizaje cooperativo. En Abstracción Reflexiva y Metodología de la Investigación en Matemática Educativa (taller). México, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, mayo 16.

Dubinsky, E. y Tall, D. (1991) Advanced Mathematical Thinking and the Computer. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 231-248.

Dubinsky, E. y Leron, U. (1994) Learning Abstract Algebra with ISETL. New York, Springer-Verlag.

Even, R. (1990) Subject Mattter Knowledge for Teaching and the Case of Functions, *Educational Series in Mathematics*, (21), 6, 521-544.

Finney, R, Thomas, G., Demana, F. y Waits, B (1994) Calculus Graphical, Numerical, Algebraic. Single variable version. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, p 198-210.

Fischbein, E. (1994) The Interaction between the Formal, the Algorithmic, and the Intuitive Components in a Mathematical Activity. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, B. Winkelmann (eds.) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 231-245.

Galindo, E. y Fiske, M. (1992) Visualización en la enseñanza del cálculo. Curso corto, Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, Cuernavaca, Mor. México, julio 23-25.

Galperin, P. , Zaporózhets, ? y Elkomin, D. (1987) Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades. En Martha Shuare (comp.), *La Psicología Evolutiva y Pedagógica en la URSS*. Antología. Biblioteca de Psicología Soviética, Moscú, Editorial Progreso.

Goldenberg, E. P., (1987) Believing is seeing: how preconceptions influence the perception of graphs. En J. C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran, *Proceeding of the Eleventh International Conference*, PME XI, , Montreal, (I), july, 19-25.

Goldin, G. y Kaput, J. (1992) A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. Rutgers University and University of Massachusetts, mecanoescrito, pp. 17.

Haaser, N., LaSalle, J. y Sullivan, J. (1970) Análisis Matemático. México, Trillas.

Harary, F., Norman, R. y Cartwright, D. (1965) Structural Models: An introduction to the Theory of Directed Graphs. New York, John Wiley & Sons, Inc.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992) Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York, NCTM, 65-97.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986) Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, London, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1-27.

Hitt, F. (1995) Intuición primera versus pensamiento analítico: Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Educación Matemática*, Vol. 7 , No. 1, abril, 63-75.

Janvier, C. (1987) Translation Processes in Mathematics Education. En C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Hillsdale (NJ), Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 27-32.

Janvier, C. , Girardon, C. y Morand, J. (s.f.) Mathematical symbols and representations. En (s.ed.), *Processes and Content*, capítulo 5, 79-102.

Kaput, J. (1985) Representation and Problem Solving: Methodological Issues Related to Modeling. En E. Silver (ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, Hillsdale (NJ), Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 381- 398.

Kaput, J. (1989) *Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. En S.* Wagner y C. Kieran (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, (4), EUA, National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 167-194.

Kaput, J. (1992) Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York, NCTM, 515- 556.

Kaput, J. (1994a) Democratizing access to calculus: New routes to old roots . En A. Schoenfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*, Hillsdale (NJ), Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 77-156.

Kaput, J. (1994b) The Representational Roles of Technology in Connecting Mathematics with Authentic Experience. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträβer, B. Winkelmann (eds.) Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 379-397.

Krutetskii, V.A. (1976) The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. Joan Teller (trad.), J. Kilpatrick y Y. Wirszup (eds.), Chicago, The University of Chicago Press.

Kuhn, T. (1971) La estructura de las revoluciones científicas. México, Fondo de Cultura Económica, Breviarios.

Lincoln, Y. y Guba, E. (1985) Naturalistic inquiry. Newbury Park, Sage Publications.

Luria, A. R. (1973) The working brain. An introduction to Neuropsychology. Basil Haigh (trad.) New York, Basic Books Ins., Publishers, 323-340.

Martínez, A. (1993) Knowledge and development of functions in a technology-enhanced high school precalculus class: A case study. Tesis doctoral sin publicar. The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Martínez, A. (1994a) Students' images of functions in a technology-enhanced high school precalculus class. Paper presented at the NCTM 72nd Annual Meeting, April 15, pp. 11.

Martínez, A. (1994b) El uso de reportes escritos en matemáticas remediales para ingeniería. una experiencia mexicana. Ponencia presentada en la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e investigación en Matemática Educativa, Costa Rica, julio.

Moses, B. (1982) Visualization: a problem-solving approach. *Math Monograph*, 7, April, 61-66.

Neisser, U. (1987) From direct perception to conceptual structure. En U. Neisser (ed.), *Concepts and Conceptual Development. Ecological and intellectual factors in categorization*, London, Cambridge University Press, p 11-24.

Orton, A. (1983) Students' Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics* , 14, 235-250.

Palmer (1978) Fundamental aspects of cognitive representation. En E. Rosch y B. Lloyd (eds.), *Cognition and Categorization*, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 259-303.

Presmeg, N. (1986) Visualization and Mathematical Giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, (17), 3, August, 297-311.

Sfard, A. (1991) On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, (22), 1-36.

Smith, D. (1958) History of mathematics. New York, Dover, (II), 319, 676-700.

Speiser, B. y Walter, C. (1994) Catwalk: First-Semester Calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, (13), 2, 135-152.

Spoehr, K. T and Lehmkuhle, S. W. (1982) Visual Information Processing. New York, W.H. Freeman and Company, 1-8, 63-93, 200-240.

Stewart, J. (1995). Calculus. Early Transcendentals. California, *USA:Brooks/Cole* Publishing Company, p 134-141.

Swokowski, E. (1987) Introducción al Cálculo con Geometría Analítica. J.L. Abreu y H. Fetter (trads.) México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Symons, S., Snyder, B., Cariglia-Bull, T. & Pressley, M. (1989) Why Be Optimistic About Cognitive Strategy Instruction? En C. B. Mc Cornick, G. E. Miller & M. Pressley (eds.), *Cognitive Strategy Research From Basic Research to Educational Applications*. New York, Spring Verlag, ?

Tall, D. y Vinner, S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics* (12), 151-169.

Thompson, P. (1994) Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, (26), 2-3, 229-274.

Vázquez, R. y Barros, J. (1958) Introducción al cálculo diferencial e integral, México, UNAM.

Von Glaserfeld, E. (1987) Preliminaries to any Theory of Representation. En C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning Mathematics*, Hillsdale (NJ), Erlbaum, 215-225.

Wenzelburger, E. (1993a) Didáctica. Cálculo Diferencial. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Wenzelburger, E. (1993b) Introducción de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral - una propuesta didáctica. *Educación Matemática,* (5), 3, México, diciembre, 93-123.

Wenzelburger, E. (1994) Didáctica. Cálculo Integral. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996) Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D_4. *Journal for Research in Mathematics Education*, (27), 4, 435-457.

Zimmermann, W. (1991) Visual thinking in calculus. En W. Zimmermann y S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Washington, The Mathematical Association of America, 127-137.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Nombre del alumno(a):

____

Nombre clave Apellido paterno Apellido materno Nombre
GRUPO:________ Fecha: ________________________ Ciclo escolar 96 Lección 1

==

INTRODUCCION

En las siguientes sesiones de clase estudiarás un fenómeno dinámico (reacción química) desde un punto de vista matemático, es decir, a partir de modelos matemáticos que te ayuden a contestar algunas interrogantes sobre dicho fenómeno.

Una parte importante de las actividades consiste de la discusión que sobre las mismas lleves a cabo con tus demás compañeros y, desde luego, la actitud crítica que asumas al estudiar el contenido de esta guía didáctica es esencial para responder ampliamente a todas las cuestiones que se plantean.

Las actividades[1] que a continuación te proponemos las desarrollarás de manera cooperativa con tus compañeros de equipo, porque pensamos que una manera de facilitarte el estudio y aprendizaje de la matemática es a través del trabajo cooperativo en pequeños equipos.

Las preguntas o cuestiones que te planteamos en esta guía didáctica están numeradas con tres dígitos para facilitarnos el proceso de revisión de tus respuestas. En caso de que tengas alguna dificultad, ya sea para entender el contenido de la guía o cualquier otra duda, puedes pedirle a tu profesora una explicación, todas las veces que sea necesario.

Los recursos que utilizarás son: una calculadora avanzada, lápiz. y hojas de papel para hacer anotaciones o escribir las respuestas que requieran de mayor espacio.
Finalmente, deseamos que logres los mejores resultados en tu aprendizaje de los conceptos: **velocidad instantánea, razón de cambio instantáneo, pendiente de la recta tangente y derivada.**

---

[1] Las actividades están numeradas en forma progresiva con un dígito en negritas.

1. REACCIÓN QUÍMICA

1.1 La situación

Imagínate que te encuentras en el laboratorio de química de la escuela y se te pide hacer una estimación del comportamiento de una reacción química en cuanto a la cantidad de sustancia que se produce *respecto al tiempo transcurrido.*

El laboratorista realiza algunas mediciones de la cantidad de sustancia producida y el tiempo que tarda en producirse y nos proporciona los datos de la Tabla 1.

1.2 *Modelo discreto*

En la Tabla 1 registramos algunos datos derivados de las mediciones.

Tabla 1

tiempo (x) hrs.	cantidad (y) grs.
0	0
0.25	3.75
0.50	7.00
0.75	9.75
1.00	12.00
1.25	13.75
1.50	15.00
1.75	15.75
2.00	16.00
2.25	15.75
2.50	15.00
2.75	13.75
3.00	12.00
3.25	9.75
3.50	7.00
3.75	3.75
4.00	0

1.2.1. ¿Cómo es la variación de la cantidad y de sustancia producida? Escribe en la parte posterior de esta hoja un primer acercamiento a la respuesta.

Para ilustrar una manera de explorar y analizar con calculadoras avanzadas sobre la cuestión 1.2.1 te proporcionamos algunas actividades con ese fin.

Actividades:

1. Introduce en la calculadora las dos colecciones de datos de la Tabla 1, consideradas como "listas" por medio de la opción **1:Edit...** del menú[2] $\boxed{\text{STAT}}$

   En L_1 anota la lista de datos de la variable x (tiempo) y en L_2 los de la variable y (cantidad de sustancia producida en el tiempo correpondiente); siguiendo la siguiente secuencia: para L_1

   $\boxed{\text{STAT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{.25}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ etc.

   Después de introducir todos los datos de L_1 cambia la posición del cursor a la columna L_2 con la tecla direccional derecha y agrega los datos correspondientes a la cantidad de sustancia producida.

   $\boxed{0}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{3.75}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ etc.

2. Representa los datos de la reacción química en la pantalla gráfica de la calculadora, localizando en el eje horizontal los datos de la lista L_1 y en el eje vertical los datos de la lista L_2, de la siguiente manera:

   a) Oprime la tecla de edición de funciones: $\boxed{\text{Y=}}$

   En la pantalla aparece una lista con las funciones $Y_1,\dots,Y_8$

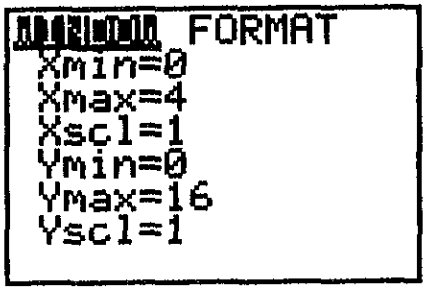
   b) Desactiva la lista de funciones (para que no las grafique la calculadora), colocándote sobre el signo igual de aquellas funciones declaradas o activas y oprimiendo la tecla $\boxed{\text{ENTER}}$

   (una función está activa cuando el signo igual tiene fondo negro).

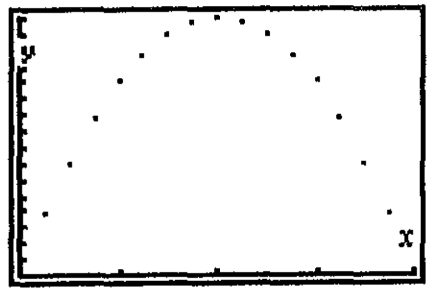
---

2 El menú STAT te muestra las herramientas para realizar análisis estadísticos, entre otras la edición de listas de datos.

c) Elije las dimensiones del rectángulo de visión (ventana) por medio de la tecla $\boxed{\text{WINDOW}}$ de acuerdo a los intervalos de variación de los datos. La selección del Cuadro 1 la representamos simbólicamente por el rectángulo $[0,4]\times[0,16]$, el cual contiene los puntos correspondientes a los pares de datos de la Tabla 1 (véase la Gráfica 1).



Cuadro 1



Gráfica 1

3. Completa el registro de los datos (2a, 3a, 5a y 6a columnas) en la Tabla 2.

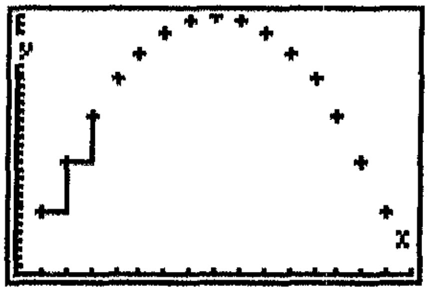
1.2.2 Calcula los cambios en las variables -tiempo y cantidad de sustancia- anotando en la cuarta y séptima columnas de la Tabla 2 los cambios entre pares de datos consecutivos de cada variable.

Tabla 2

Número de intervalo	tiempo x_2 (hrs.)	tiempo x_1 (hrs.)	cambio en x $x_2 - x_1$	cantidad y_2 grs.	cantidad y_1 grs.	cambio en y $y_2 - y_1$
1	0.25	0	0.25	3.75	0	3.75
2	0.50	0.25	0.25	7.00	3.75	
3	0.75	0.50		9.75	7.00	
4	1.00	0.75		12.00	9.75	
5	1.25			13.75		
6	1.50			15.00		
7	1.75			15.75		
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						

1.2.3 Algunos cambios registrados en la Tabla 2 se representan en la Gráfica 2 por medio de segmentos horizontales y verticales, señala sobre la gráfica a qué variables corresponden cada uno. Explica tu respuesta al reverso de la hoja.

4. Y dibuja los segmentos faltantes.



Gráfica 2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Nombre del alumno(a):

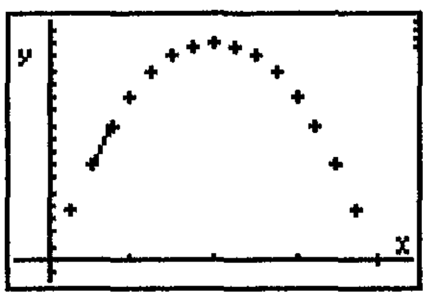
____

Nombre clave   Apellido paterno   Apellido materno   Nombre
GRUPO ________ Fecha: ______________________ Ciclo escolar 96   Lección 2

==

1.3 Aproximación al modelo contínuo

Como podrás observar, los cambios en la cantidad de sustancia producida no son iguales entre sí. Además, **desconoces qué cantidad de sustancia se produce en cada instante de un intervalo o período de tiempo particular**. Sin embargo, puedes aproximar la cantidad de sustancia suponiendo que varía en forma proporcional a lo largo de cada intervalo, es decir, aproxima la cantidad de sustancia en cualquier instante del tercer intervalo, por ejemplo, por medio del segmento de recta que une los puntos $(0.5,7)$ y $(0.75,9.75)$ correspondientes a dos pares de mediciones consecutivas (Gráfica 3).



Gráfica 3

1.3.1 ¿Por qué la variación proporcional en un intervalo se representa por medio de un segmento de recta?

Respuesta:____

1.4 Velocidad promedio

Que la cantidad de sustancia varíe en forma proporcional en un intervalo $[a,b]$ de tiempo significa que la comparación del cambio $y_2 - y_1$ de la cantidad de sustancia producida respecto a la duración del intervalo o cambio en el tiempo $x_2 - x_1$ es siempre la misma, para cualquier par de datos x_1, x_2 contenidos en el intervalo.

O bién, que la razón entre los cambios de las variables -cantidad de sustancia producida (grs.) y tiempo (hrs.)- es constante, a lo largo del intervalo.

Simbólicamente: $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

La razón de cambio anterior es la **velocidad promedio** a la que se produce la sustancia en esa reacción química, durante el período de tiempo $[x_1, x_2]$, el cual está contenido en $[a, b]$.

Actividades:

5. Traza todos los segmentos que unen puntos consecutivos de la Gráfica 3 con ayuda del programa MODISCRE, siguiendo los pasos indicados desde el inciso a hasta el inciso c.

a) Desactiva las funciones en la pantalla de edición de funciones (revisa la actividad 2b, página 3).

b) Después presiona la tecla

$\boxed{\text{PRGM}}$

y ejecuta el programa MODISCRE pulsando la tecla del número que le corresponde. En la pantalla principal debe leerse prgmMODISCRE y ver el cursor parpadeante.

1.4.1 Explica ampliamente, en la parte posterior de la hoja, los pasos que siguen del programa conforme lo ejecutas[3].

6. Elije dos pares de datos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la Tabla 1.

1.4.2 ¿Cuál es la velocidad promedio a la que se produce la sustancia durante el intervalo de tiempo $[x_1, x_2]$ que elegiste?

Respuesta: ____

[3] Un programa se ejecuta oprimiendo ENTER cada vez que se muestra una pantalla, a menos que se indique otra cosa.

7. Representa con la letra k el valor de la velocidad promedio que calculaste en la pregunta 1.4.2, y

1.4.3 Aproxima la cantidad de sustancia producida y en un instante x del intervalo abierto (x_1, x_2) con la expresión:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = k$$

Explica ampliamente el procedimiento y la respuesta a esta cuestión, en la parte posterior de esta hoja.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Nombre del alumno(a):

____

Nombre clave   Apellido paterno   Apellido materno   Nombre
GRUPO ________ Fecha: ________________________ Ciclo escolar 96   Lección 3

==

1.5 **Modelo contínuo**

Hasta aquí, hemos analizado un número finito de datos o mediciones, lo que nos permite estudiar el problema de manera muy rudimentaria, poco precisa (en relación a cada instante de tiempo), es decir, sólo apreciamos el problema desde un punto de vista promedio.

El problema

¿Qué podemos hacer para conocer el comportamiento de la reacción en cualquier momento, mientras dura la reacción, o calcular el ritmo al que se produce la sustancia durante la primera hora?, finalmente, ¿cómo estimar el ritmo al que se produce la sustancia en cada instante?

1.5.1 ¿Tienes alguna o algunas respuestas?, ¿cuál o cuáles?

Respuesta (s):

____

Para responder a la primera parte del problema anterior debes analizar la reacción química mediante un modelo matemático contínuo que describa un comportamiento similar.

De seguro habrás notado que la distribución de los puntos en la Gráfica 1 tiene forma de parábola y de acuerdo a las actividades de graficación que realizaste durante las sesiones de clase anteriores un modelo que se comporta de manera similar es el de la función cuadrática cuya regla de asociación es del tipo: $y = ax^2 + bx + c$.

Para conocer los valores de los coeficientes a, b y c del modelo $y = ax^2 + bx + c$ que aproxima el comportamiento de los datos, construye un sistema de tres ecuaciones con tres indeterminadas (incógnitas) usando tres pares distintos de datos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) de la Tabla 1, correspondientes a tres puntos de la parábola.

8. Elige tres pares de datos de la Tabla 1, y

1.5.2 Construye el modelo $y = 16x - 4x^2$ resolviendo, al reverso de la hoja, el sistema de tres ecuaciones generado por ellos:

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$
$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$$
$$y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c$$

El modelo $y = 16x - 4x^2$ expresa la cantidad y de sustancia producida (gramos) al cabo de cierto número x (horas) de tiempo transcurrido, mediante una relación entre la variable independiente "tiempo transcurrido" y la variable dependiente "cantidad de sustancia producida". Es decir, la variable y es función o depende de la variable x.

Para interpretar correctamente la expresión $y = 16x - 4x^2$ en el contexto de la reacción química conviene que señales el período o intervalo de tiempo de duración de la misma.

1.5.3 Anota el período o intervalo de tiempo durante el cual se inicia, desarrolla y termina la reacción.

Respuesta:

____

Ese intervalo se le conoce como **dominio** de la función $y = 16x - 4x^2$, en el contexto de la reacción química de que hablamos y su longitud nos dice la cantidad de tiempo que dura la reacción (cuatro horas).

El conjunto de valores que asume o toma la variable dependiente, que en nuestro caso es el intervalo [0,16], es el **rango** de la función.

1.5.4 ¿Por qué la expresión $y = 16x - 4x^2$ te permite calcular la cantidad de sustancia producida en cualquier momento x ?

Respuesta:

____

Con el modelo $y = 16x - 4x^2$ responde a la primera parte del <u>problema</u>: conocer la cantidad y de sustancia que se produce en cualquier momento x. del período de tiempo que dura la reacción.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Nombre del alumno(a):

____

Nombre clave   Apellido paterno   Apellido materno   Nombre
GRUPO __________ Fecha: ____________________________ Ciclo escolar 96   Lección 4

==

Analiza ahora, el ritmo al que se produce la sustancia química durante un intervalo $[x_1, x_2]$ de tiempo.

Actividad:

9. Selecciona dos momentos x_1 y x_2 pertenecientes al dominio de la función y calcula las cantidades de sustancia producida y_1 y y_2 respectivas, mediante la relación $y = 16x - 4x^2$.

1.5.5 ¿Cuál es la velocidad promedio a la que se produce la sustancia, durante el intervalo de tiempo que seleccionaste?

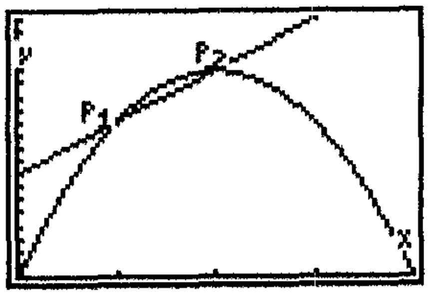
Respuesta:

____

1.5.6 Traza en la cuadrícula una gráfica que represente tu respuesta a la cuestión 1.5.5.

1.6 **Pendiente de la recta secante**

La expresión $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ tiene una interpretación geométrica, no sólo es el cambio promedio de la función, también mide la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de su gráfica (Gráfica 4).



Gráfica 4

1.7 **Velocidad promedio y razón de cambio promedio**

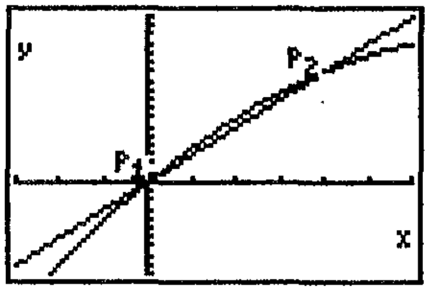
Para traducir en términos matemáticos la segunda parte del problema que planteamos en la página 7, **estimar el ritmo al que se produce la sustancia durante la primera hora**, hacemos referencia a los puntos $P_1(0,0)$ y $P_2(1,12)$ de la parábola $y = 16x - 4x^2$; en este caso $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0$ y $y_2 = 12$. Y a tu respuesta a la cuestión 1.5.5.

Es decir, la velocidad (ritmo) promedio a la que se produce la sustancia en la reacción química durante la primera hora se obtiene de la razón de cambio promedio:

$$\frac{12-0}{1-0} = \frac{12}{1} = 12 \quad \text{grs/hr}$$

Por lo tanto, la respuesta a la segunda parte del problema es: la sustancia se produce a un ritmo de 12 grs/hr durante la primera hora.

Esta razón de cambio promedio te proporciona también -como señalamos antes- la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P_1 y P_2 (Gráfica 5).



Gráfica 5

El cambio $x_2 - x_1$ en la variable independiente es de una unidad, es decir, $x_2 - x_1 = 1$ (una hora), y el valor final x_2 se obtiene del valor inicial x_1 aumentando una unidad, $x_2 = x_1 + 1$.

Pero si $x_2 - x_1 = -1$, entonces el valor final x_2 se obtiene del valor inicial x_1 disminuyendo una unidad, es decir, $x_2 = x_1 - 1$.

1.7.1 Proporciona un ejemplo de cada caso y represéntalos gráficamente, al reverso de la hoja.

Respuesta:

____

En ambos casos, el aumento o disminución, se representa usualmente con la letra $\boldsymbol{h}$, y la relación entre los valores x_1, x_2 y $\boldsymbol{h}$ es:

$$x_2 = x_1 + \boldsymbol{h}$$

Por tanto, el valor de y_2 se obtiene de $16(x+h) - 4(x+h)^2$.

1.7.2 ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

Respuesta:

____

Con esa representación para x_2 y y_2, las coordenadas del punto P_2 son $\left(x_1 + h,\ 16(x_1 + h) - 4(x_1 + h)^2\right)$.

Y la velocidad promedio a la que se produce la sustancia durante el intervalo de tiempo $[x_1, x_2] = [x_1, x_1 + h]$ (o la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P_1 y P_2) es:

$$\frac{\left[16(x_1 + h) - 4(x_1 + h)^2\right] - \left[16x_1 - 4x_1^2\right]}{\left[x_1 + h\right] - \left[x_1\right]} \qquad (1)$$

Expresión que se simplifica a:

$$16 - 8x_1 - 4h \qquad (2)$$

1.7.3 Explica ampliamente el proceso de simplificación que permite obtener la expresión (2) de la (1), en el reverso de la hoja.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Nombre del alumno(a):

____

Nombre clave   Apellido paterno   Apellido materno   Nombre
GRUPO:__________ Fecha: ______________________ Ciclo escolar 96   Lección 5

==

1.8 **Velocidad instantánea y razón de cambio instantáneo**

Discutiremos ahora, mediante un ejemplo, una forma de responder a la última parte del problema (página 9), **¿a qué ritmo se produce la sustancia química al término de la primera hora?**

Con la expresión **"al término de la primera hora"** nos referimos al instante de tiempo $x = 1$, a ese instante le corresponde el punto $(1,12)$ de la parábola, que *llamaremos* P_1, *y se requiere conocer el ritmo de producción en ese instante*, el cual evaluaremos analizando el comportamiento del ritmo promedio en las "proximidades" del punto P_1.

Actividad:

10. Obtén las coordenadas de algunos puntos $P_2(x_2, y_2)$ "próximos" a $P_1(1,12)$, tanto a la izquierda como a la derecha, con la tecla TRACE de la calculadora, después de: introducir $Y_1 = 16X - 4X^2$, ajustar la ventana de visualización a $[.8, 1.2] \times [10.25, 13.75]$ y desactivar la gráfica generada en el modo STAT[4].

1.8.1. Organiza tus observaciones en la Tabla 3 y calcula el valor de h para cada una.

Tabla 3

x_2					1				
h									
y_2					12				

Recuerda que $x_2 = x_1 + h$ y $x_1 = 1$.

[4] Oprime la tecla 2nd simultáneamente con Y= para ver el menú STAT PLOTS, después 1, finalmente elige Off en Plot1.

1.8.2 ¿Cómo se comporta el valor de h cuando P_2 se aproxima a P_1 ?

Respuesta:

En efecto, cuando P_2 se aproxima a P_1 el valor absoluto de h disminuye, ya sea que se aproxime por la derecha o por la izquierda.

1.8.3 Ilustra gráficamente ambas situaciones y explica ampliamente lo que observas, en el reverso de la hoja.

Para estudiar el comportamiento de la velocidad promedio y de la pendiente de la recta secante cuando el punto P_2 se aproxima al punto P_1, a fin de contestar a la cuestión: ¿a qué ritmo se produce la sustancia química al término de la primera hora?, te proponemos las actividades 11,12, 13 y 14 en las que utilizarás los programas DERIVADA y SECANTE. El primer programa está diseñado para resolverte las operaciones que contiene la expresión (1) de la página 15 y trazar al mismo tiempo la recta secante. Y el segundo, para analizar el comportamiento de las secantes.

Actividades:

11. Genera en la misma pantalla gráfica de la calculadora tanto la parábola $y = 16x - 4x^2$ como la secante que pasa por los puntos $P_1(1,12)$ y $P_2(2,16)$, y consigue el valor de la pendiente de esa secante mediante el procedimiento:

a) Introduce las siguientes funciones en la pantalla de edición de funciones.

$$Y_1 = 16X - 4X^2 \quad , \quad Y_2 = 16(X+H) - 4(X+H)^2$$

y ajusta las dimensiones del rectángulo de visión a $[0,4] \times [0,20]$.

Nota: Desactiva la función Y_2 para que no se grafique (ver explicación en la actividad 2b, página 3).

b) Después presiona la tecla

PRGM

y ejecuta el programa DERIVADA pulsando la tecla del número que le corresponde.

En la pantalla principal debe leerse: prgmDERIVADA y ver el cursor parpadeante,

c) Sigue ejecutando el programa[5].

1.8.4 ¿Qué sucede?

Respuesta:

---

d) Si oprimes de nuevo la tecla ENTER verás aparecer a X_1 y un signo **?**, significa que debes introducir el valor de x_1. En nuestro caso seleccionamos **1**, porque es la abscisa de $P_1(1,12)$.

e) Después se pide, de igual modo, el valor del incremento ***H*** de la variable independiente, introduce **1**.

1.8.5 ¿Por qué?

Respuesta:

Presiona para continuar la tecla ENTER.

1.8.6 Explica ampliamente, en la parte posterior de la hoja, los pasos que siguen del programa conforme oprimes la tecla ENTER, hasta llegar de nuevo a lo que se dice en el inciso d.

Nota: En la calculadora no se utilizan letras minúsculas, por tanto **M** representa a ***m*** y **H** representa a ***h***.

[5] Recuerda que un programa se ejecuta oprimiendo ENTER cada vez que se muestra una nueva pantalla, a menos que se indique otra cosa.

Nota: Cuando quieras que deje de ejecutarse el programa teclea la palabra FIN como valor de X_1.

12. Repite el procedimiento anterior pero con valores de h cada vez más pequeños (en valor absoluto).

1.8.7 Completa la Tabla 4 con los resultados que obtienes al ejecutar el programa DERIVADA; recuerda que $x_1 = 1,\ \ y_1 = 12$.

Tabla 4

h	x_2	y_2	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 16 - 8x_1 - 4h$
- 0.5			
- 0.1			
- 0.01			
0.01			
0.1			
0.5			

1.8.8 En la página 15 explicaste el procedimiento para simplificar la expresión que produce el valor de la pendiente; verifíca tu respuesta con el siguiente desarrollo:

$$m = \frac{\left[16(x_1 + h) - 4(x_1 + h)^2\right] - \left[16x_1 - 4x_1^{\,2}\right]}{x_1 + h - x_1} = \frac{16h - 8x_1h - 4h^2}{h} = \frac{h(16 - 8x_1 - 4h)}{h} = 16 - 8x_1 - 4h$$

1.8.9 ¿Se aproxima el valor de la pendiente m, de cada secante, hacia algún cierto número cuando el valor absoluto de h se hace cada vez más pequeño y P_2 se acerca P_1? ¿A cuál ? ¿Por qué?

Respuestas: ____

1.8.10 En relación a las secantes, ¿cómo debe ser el valor de h para que la secante se "parezca" más a una tangente?

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

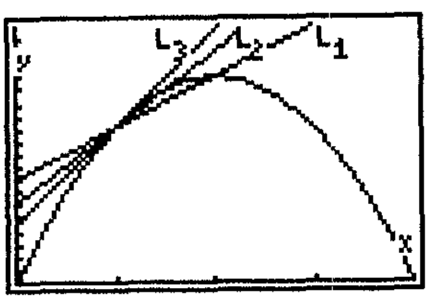
Nombre del alumno(a):

Nombre clave Apellido paterno Apellido materno Nombre
GRUPO:________ Fecha: ____________________ Ciclo escolar 96 Lección 6

En las actividades 11 y 12 calculaste la pendiente de varias rectas secantes y de su análisis aproximaste la pendiente de la tangente en forma numérica. Ahora abordaremos un enfoque más geométrico, es decir, trazaremos rectas secantes y buscaremos la que ocupe una posición lo más parecida a la tangente en el punto P_1, con ayuda del Programa SECANTE y de esa forma verificar tu respuesta a la cuestión 1.8.10

Actividades:

13. Observa las secantes l_1 , l_2 y l_3 que aparecen en la pantalla de la calculadora cuando ejecutas el programa SECANTE, con $x_1 = 1$ y $\boldsymbol{h}$ toma los valores 1, 0.5 y 0.1 respectivamente. La imagen en la calculadora debes verla como la Gráfica 5.



Gráfica 5

1.8.12 ¿Cuál secante crees que se aproxima mejor a la tangente en el punto $P_1(1,12)$? ¿Por qué? ¿Qué valor de $\boldsymbol{h}$ le corresponde?

Respuestas:

____

1.8.13 Explica qué sucede cuando el valor absoluto de $\boldsymbol{h}$ es menor que 0.1.

Respuesta:

____

1.8.14 ¿Qué puedes decir de las secantes correspondientes a los valores -1, -0.5 y -0.1, es decir, qué sucede cuando el valor absoluto de h es cada vez menor?

Respuesta:

____

14. Compara las respuestas a las preguntas de la actividad 13, con los datos de la Tabla 4 (página 19).

En dicha tabla y hacia el renglón central, los valores absolutos de h son cada vez más "pequeños" , *¿de acuerdo? , situación que representamos por* $h \rightarrow 0$.

1.8.15 Y si analizas, en la misma tabla, el comportamiento numérico de las pendientes o razones de cambio, ¿cuánto crees que mide la pendiente de la tangente y la razón de cambio instantáneo? ¿Por qué?

Respuestas:

____

1.8.16 Finalmente, ¿a qué ritmo o velocidad se produce la sustancia química al término de la primera hora? ¿Por qué?

Respuestas:

____

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Nombre del alumno(a):

____

Nombre clave   Apellido paterno   Apellido materno   Nombre
GRUPO:__________ Fecha: ______________________ Ciclo escolar 96   Lección 7

==

2. TRAYECTORIA DEL AGUA QUE SALE DE UNA MANGUERA

2.1 La situación

En muchos lugares habitados es frecuente observar a las personas que riegan con mangueras las plantas o árboles de parques y jardines. La salida constante y libre del agua (la misma cantidad y sin obstrucción de los dedos o de una válvula) forma un chorro de agua.

A continuación estudiarás la trayectoria que sigue el agua cuando sale de la manguera, es decir, la forma del chorro de agua, por medio de algunas actividades y cuestiones que deberás realizar y contestar. **Es muy importante que expliques ampliamente tanto los procedimientos como las respuestas. Estás en libertad de utilizar dibujos, gráficas o palabras en tus explicaciones.**

Actividad:

15. Elabora en la parte posterior de esta hoja un dibujo que represente la situación anterior.

2.2 Dirección de la trayectoria

El problema

¿Qué dirección debe tener el agua al salir de la manguera para que el chorro llegue a la base de un árbol que dista dos metros de la salida del agua (medidos por el piso) y esta última se sostiene a un metro del piso?

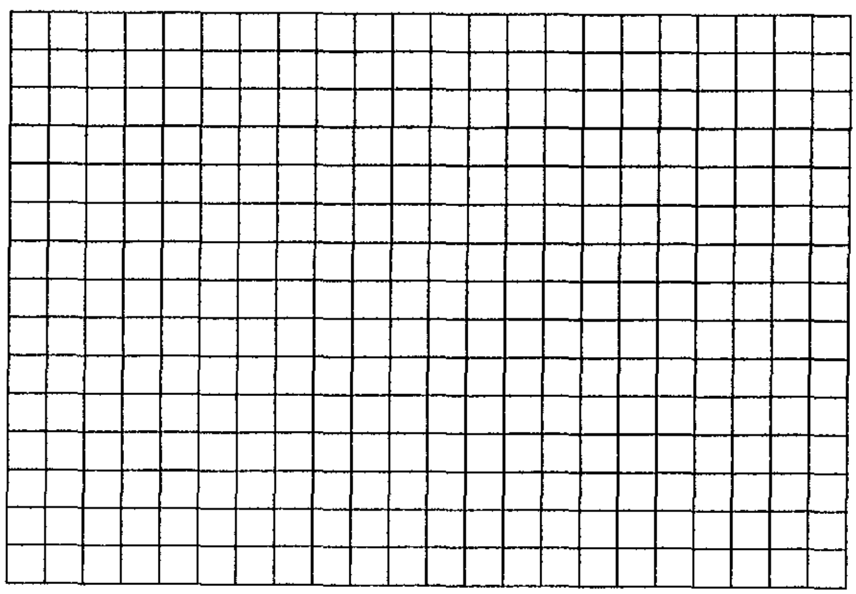
Actividades:

16. Ilustra las condiciones del problema en un esquema (usa para ello el reverso de la hoja).

17. Ahora, representa las condiciones del problema en un plano cartesiano, utiliza para tal fin la cuadrícula siguiente. Señala también:

a) Las coordenadas de los puntos S y A correspondientes a la salida del agua (S) y la base del árbol (A), y

b) La dirección del agua en la salida de la manguera. .



Responde las siguientes tres preguntas en el reverso de esta hoja.

2.2.1 ¿Qué trayectoria sigue el chorro del agua cuando la salida es libre?

2.2.2 ¿Cuál es su modelo matemático?

2.2.3 ¿ Hay sólo una trayectoria posible para el chorro del agua?

18. En caso de que tu respuesta a la pregunta 2.2.3 sea **NO**, genera tres ejemplos de trayectorias que pasen por los puntos S y A en la pantalla gráfica de tu calculadora y responde las cuestiones 2.2.4, 2.2.5 y 2.2.6.

2.2.4 ¿Cuál es el modelo matemático de cada una de las tres trayectorias?

Respuesta:

2.2.5 ¿Qué rango de visión (o ventana) usaste en la actividad 18?

Respuesta:

2.2.6 ¿Qué dirección tiene cada trayectoria en el punto de salida?

Respuesta:

2.2.7 Por lo tanto, ¿cuál es tu respuesta al problema enunciado en la página 23?

Respuesta:

2.3 Trayectoria única

Anota las respuestas a las cuestiones 2.3.1 y 2.3.2 atrás de esta hoja.

2.3.1 ¿Qué restricción o condición a la situación propones para que el chorro del agua siga una trayectoria particular?

2.3.2 ¿Qué dirección tiene el agua en el punto A (base del árbol) respecto a esa trayectoria particular?

2.4 Velocidad del agua

Contesta las cuestiones 2.4.1 y 2.4.2 en el espacio restante de esta hoja.

2.4.1 ¿Qué velocidad tiene el agua al llegar a la base del árbol en la trayectoria particular de la cuestión 2.3.1?

2.4.2 ¿Qué relación tienen la dirección de la trayectoria y la velocidad del agua en el punto A?

FORMATO DE OBSERVACION

Escuela Nacional Preparatoria	Fecha:
Grupo	Duración de la sesión (minutos):

Observaciones generales:

Condiciones físicas del aula:

Descripción del ambiente en el aula:

Actividad:

Observaciones específicas:

Desempeño:

Individual
Colectivo

Interacción:

En pequeños grupos:
Por pares:

Conceptos versus procedimientos:

Resolución de problemas	estimación
comprensión	cálculo
pensamiento matemático	pensamiento algorítmico
conexiones	
razonamiento	

Observaciones individuales:

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA "JOSE VASCONCELOS" (5)
GRUPO 614 Fecha: octubre 12 de 1995. Cicló escolar 96.

Nombre del alumno(a):

Nombre clave Apellido paterno Apellido materno Nombre

INTRODUCCIÓN.- El presente cuestionario tiene la finalidad de precisar cómo utilizas la calculadora avanzada en relación a: reconocimiento y aproximación de las soluciones de una ecuación, efectos de los parámetros de una curva en su gráfica, estimación de la distancia entre dos puntos de una curva y evaluación de los cambios en las variables independiente y dependiente, asociados al cambio de posición en la curva. Consideramos que tus respuestas son de suma importancia para dirigir de mejor manera tu aprendizaje de otros conceptos posteriores (derivada, razón de cambio instantáneo, entre otros), motivo por el cual te **solicitamos una participación entusiasta y comprometida** que nos ayude en ese cometido.

INSTRUCCIONES.- A continuación te señalamos una serie de cuestiones para las que debes **responder en la forma más amplia posible**. Puedes ilustrar gráficamente tus respuestas, para apoyar las explicaciones.

1. Aproxima la solución o soluciones de la ecuación $x^2 - 4 = 5$, con ayuda de la tecla $\boxed{\text{TRACE}}$ de tu calculadora y explica paso a paso tu respuesta.

2. Compara la gráficas de las funciones $y = x^2 - 3x$ y $y = -x^2 - 3x$ Describe las coincidencias y diferencias entre ellas.

3. Explica qué efectos producen los valores de los parámetros a y b en la gráfica de la función $y = (x+a)^2 + b$.

4. ¿Crees que sea posible asignar valores a los coeficientes a , b y c de manera que la gráfica de la función $y = c(ax+b)^2$ intersecte al eje X en el punto (1,0) y pase por los puntos (-1,-4) y (3,-4)? ¿Por qué?

5. ¿Crees que sea posible asignar valores a los coeficientes a y b de manera que la gráfica de la función $y = ax + b$ intersecte al eje Y en el punto (0,3)? ¿Por qué?

6. ¿Hay sólo una respuesta a la pregunta anterior? ¿Por qué?

7. Los puntos A(-3,0) y B(-2,-3) pertenecen a la gráfica de la función $y = x^2 + 2x - 3$ Con ayuda de la tecla $\boxed{\text{TRACE}}$ estima la distancia entre ellos. Explica tu procedimiento y respuesta.

8. Evalúa el cambio que ocurre en la variable **independiente** cuando pasas de la posición que ocupa el punto A(-3,0) a la posición del punto B(-2,-3), en la gráfica de la función anterior $y = x^2 + 2x - 3$. Explica tu respuesta.

9. Evalúa el cambio que ocurre en la variable **dependiente** cuando pasas de la posición que ocupa el punto A(-3,0) a la posición del punto B(-2,-3), en la gráfica de la misma función $y = x^2 + 2x - 3$. Explica tu respuesta.

10. Explica qué les sucede a las variables (independiente y dependiente) cuando vas de la posición del punto A(-3,0) a la posición de C(1,0), sobre la gráfica de la función $y = x^2 + 2x - 3$.

PROTOCOLOS

Las entrevistas fueron conducidas conforme a los ítems de la guía didáctica (anexo 1) para constatar las interpretaciones que dieron lugar a la construcción de categorías (p. 68), a través de preguntas que permitieran precisar, profundizar o ampliar las respuestas de los participantes. Algunos de los principales tipos de preguntas que se plantearon fueron:

Explica tu respuesta

Proporciona un ejemplo

¿Qué significa tu respuesta?

¿Por qué procediste de ese modo?

¿Por qué eliges esas expresiones?

¿A qué te refieres con...?

¿Por qué dibujaste...?

¿A qué variable (s) te refieres?

¿Cómo encontraste la expresión?

¿Qué quieres decir con...?

MODISCRE	DERIVADA	SECANTE
: Lbl 1	· Lbl 1	: ClrDraw
:Menu("DESEAS	: ClrDraw	: DispGraph
CONTINUAR?","SI",2,"N	: DispGraph	: Pause
O",3)	: Pause	: Lbl 1
: Lbl 2	: Disp "X"	: Disp "X"
: DispGraph	: Input X	: Input X
: Pause	: If X=FIN	: If X=FIN
: Disp "X1"	: Stop	: Stop
: Input A	: Disp "H"	: Disp "H"
: Disp "X2"	: Input H	: Input H
: Input C	: X - 1000 absH $\rightarrow$ A	: If abs H < .1
: A/.25 $\rightarrow$ N	: Y_1 - 1000 abs(Y_2 - Y_1) $\rightarrow$ B	: Goto
: L_2(N+1) $\rightarrow$ B	: X + 1000 absH $\rightarrow$ C	: X-100 absH $\rightarrow$ A
: L_2(N+2) $\rightarrow$ D	: Y_1 + 1000 abs(Y_2 - Y_1) $\rightarrow$ D	: Y_1 -100 abs(Y_2 -Y_1)$\rightarrow$ B
: Line(A,B,C,D)	: D - B $\rightarrow$ E	: X+ abs100H $\rightarrow$ C
: Pause	: C - A $\rightarrow$ F	: Y_1 +100 abs(Y_2 -Y_1) $\rightarrow$ D
: Goto 1	: E/F $\rightarrow$ M	: D - B $\rightarrow$ E
: Lbl 3	: Line(A,B,C,D)	: C - A $\rightarrow$ F
: Stop	: Pause	: E/F $\rightarrow$ M
	: Disp "X="	: PT-On(X,M)
	. Disp X	: Line (A,B,C,D)
	Disp "F(X)="	: Pause
	: Disp Y_1	: Goto 1
	: Pause	: Lbl 2
	: X+H $\rightarrow$ W	: X-100 abs H $\rightarrow$ Xmin
	: Disp "X+H="	: X+100 abs H $\rightarrow$ Xmax
	: Disp W	: Y_1 -200abs(Y_2 - Y_1) $\rightarrow$Ymin
	: Disp "F(X+H)="	: Y_1 +200abs(Y_2 - Y_1) $\rightarrow$Ymax
	: Disp Y_2	: DispGraph
	: Pause	: Pause
	: Disp "M="	: Goto 1
	: Disp M	
	: Pause	
	: Goto 1	

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA "JOSE VASCONCELOS" (5)
Nombre del alumno(a):

Roky Bilboi

Nombre clave	Apellido paterno	Apellido materno	Nombre	
GRUPO 614	Fecha: 3 / XI / 95		Ciclo escolar 96	Sesión 1

==

INTRODUCCION

En las siguientes sesiones de clase estudiarás un fenómeno dinámico (reacción química) desde un punto de vista matemático, es decir, a partir de modelos matemáticos que te ayuden a contestar algunas interrogantes sobre dicho fenómeno.

Una parte importante de las actividades consiste de la discusión que sobre las mismas lleves a cabo con tus demás compañeros y, desde luego, la actitud crítica que asumas al estudiar el contenido de esta guía didáctica es esencial para responder ampliamente a todas las cuestiones que se plantean.

Las actividades[1] que a continuación te proponemos las desarrollarás de manera cooperativa con tus compañeros de equipo, porque pensamos que una manera de facilitarte el estudio y aprendizaje de la matemática es a través del trabajo cooperativo en pequeños equipos.

Las preguntas o cuestiones que te planteamos en esta guía didáctica están numeradas con tres dígitos para facilitarnos el proceso de revisión de tus respuestas. En caso de que tengas alguna dificultad, ya sea para entender el contenido de la guía o cualquier otra duda, puedes pedirle a tu profesora una explicación, todas las veces que sea necesario.

Los recursos que utilizarás son: una calculadora avanzada, lápiz y hojas de papel para hacer anotaciones o escribir las respuestas que requieran de mayor espacio.
Finalmente, deseamos que logres los mejores resultados en tu aprendizaje de los conceptos: **velocidad instantánea, razón de cambio instantáneo, pendiente de la recta tangente y derivada.**

[1] Las actividades están numeradas en forma progresiva con un dígito en negritas.

1. REACCIÓN QUÍMICA

1.1 La situación

Imagínate que te encuentras en el laboratorio de química de la escuela y se te pide hacer una estimación del comportamiento de una reacción química en cuanto a la cantidad de sustancia que se produce respecto al tiempo transcurrido.

El laboratorista realiza algunas mediciones de la cantidad de sustancia producida y el tiempo que tarda en producirse y nos proporciona los datos de la Tabla 1.

1.2 Modelo discreto

En la Tabla 1 registramos algunos datos derivados de las mediciones.

Tabla 1

tiempo (x) hrs.	*cantidad* (y) grs.
0	0
0.25	3.75
0.50	7.00
0.75	9.75
1.00	12.00
1.25	13.75
1.50	15.00
1.75	15.75
2.00	16.00
2.25	15.75
2.50	15.00
2.75	13.75
3.00	12.00
3.25	9.75
3.50	7.00
3.75	3.75
4.00	0

1.2.1. ¿Cómo es la variación de la cantidad y de sustancia producida? Escribe en la parte posterior de esta hoja un primer acercamiento a la respuesta.

Para ilustrar una manera de explorar y analizar con calculadoras avanzadas sobre la cuestión 1.2.1 te proporcionamos algunas actividades con ese fin.

Actividades:

1. Introduce en la calculadora las dos colecciones de datos de la Tabla 1, consideradas como "listas" por medio de la opción **1:Edit...** del menú[2] STAT

   En L_1 anota la lista de datos de la variable x (tiempo) y en L_2 los de la variable y (cantidad de sustancia producida en el tiempo correpondiente); siguiendo la siguiente secuencia: para L_1

   STAT 1 0 ENTER .25 ENTER etc.

   Después de introducir todos los datos de L_1 cambia la posición del cursor a la columna L_2 con la tecla direccional derecha y agrega los datos correspondientes a la cantidad de sustancia producida.

   0 ENTER 3.75 ENTER 7 ENTER etc.

2. Representa los datos de la reacción química en la pantalla gráfica de la calculadora; localizando en el eje horizontal los datos de la lista L_1 y en el eje vertical los datos de la lista L_2, de la siguiente manera:

   a) Oprime la tecla de edición de funciones: Y=

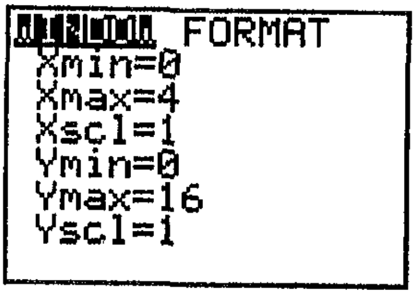
   En la pantalla aparece una lista con las funciones $Y_1,\ldots,Y_8$

   b) Desactiva la lista de funciones (para que no las grafique la calculadora), colocándote sobre el signo igual de aquellas funciones declaradas o activas y oprimiendo la tecla ENTER

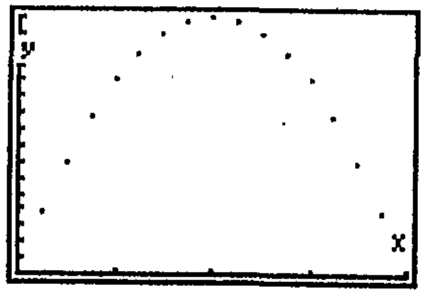
   (una función está activa cuando el signo igual tiene fondo negro).

[2] El menú STAT te muestra las herramientas para realizar análisis estadísticos, entre otras la edición de listas de datos.

c) Elije las dimensiones del rectángulo de visión (ventana) por medio de la tecla $\boxed{\text{WINDOW}}$ de acuerdo a los intervalos de variación de los datos. La selección del Cuadro 1 la representamos simbólicamente por el rectángulo $[0,4]\times[0,16]$, el cual contiene los puntos correspondientes a los pares de datos de la Tabla 1 (véase la Gráfica 1).



Cuadro 1



Gráfica 1

3. Completa el registro de los datos (2a, 3a, 5a y 6a columnas) en la Tabla 2.

1.2.2 Calcula los cambios en las variables -tiempo y cantidad de sustancia- anotando en la cuarta y séptima columnas de la Tabla 2 los cambios entre pares de datos consecutivos de cada variable.

Tabla 2

Número de intervalo	tiempo x_2 (hrs.)	tiempo x_1 (hrs.)	cambio en x $x_2 - x_1$	cantidad y_2 grs.	cantidad y_1 grs.	cambio en y $y_2 - y_1$
1	0.25	0	0.25	3.75	0	3.75
2	0.50	0.25	0.25	7.00	3.75	3.25
3	0.75	0.50	.25	9.75	7.00	2.75
4	1.00	0.75		12.00	9.75	2.25
5	1.25			13.75	12.00	1.75
6	1.50			15.00		
7	1.75			15.75		
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						

7.00
3.75
3.25

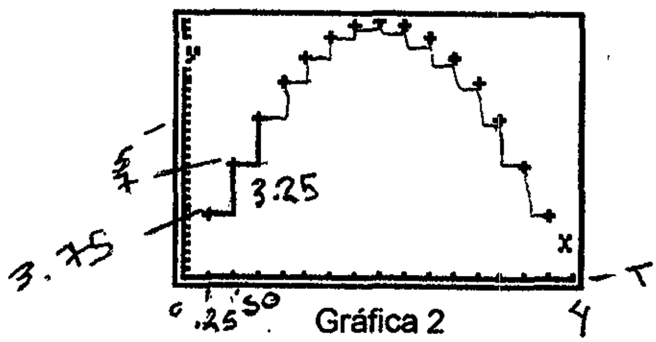
9.75
7.00
2.75

12.00
9.75
2.25

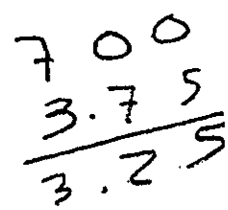
13.75
12.00
1.75

1.2.3 Algunos cambios registrados en la Tabla 2 se representan en la Gráfica 2 por medio de segmentos horizontales y verticales, señala sobre la gráfica a qué variables corresponden cada uno. Explica tu respuesta al reverso de la hoja.

4. Y dibuja los segmentos faltantes.



Gráfica 2



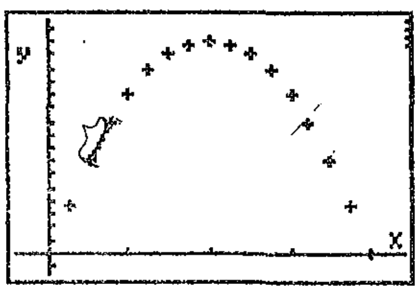
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA "JOSE VASCONCELOS" (5)
Nombre del alumno(a):

ROKY BALBOA

Nombre clave	Apellido paterno	Apellido materno	Nombre	
GRUPO 614	Fecha: 26/X/95		Ciclo escolar 96	Sesión 2

1.3 Aproximación al modelo contínuo

Como podrás observar, los cambios en la cantidad de sustancia producida no son iguales entre sí. Además, **desconoces qué cantidad de sustancia se produce en cada instante de un intervalo o período de tiempo particular**. Sin embargo, puedes aproximar la cantidad de sustancia suponiendo que varía en forma proporcional a lo largo de cada intervalo, es decir, aproxima la cantidad de sustancia en cualquier instante del tercer intervalo, por ejemplo, por medio del segmento de recta que une los puntos $(0.5,7)$ y $(0.75,9.75)$ correspondientes a dos pares de mediciones consecutivas (Gráfica 3).



Gráfica 3

1.3.1 ¿Por qué la variación proporcional en un intervalo se representa por medio de un segmento de recta?

Respuesta: EL SEGMENTO DE RECTA SIRVE PARA APROXIMAR LA CANTIDAD DE SUSTANCIA DE UN INTERVALO A OTRO

1.4 Velocidad promedio

Que la cantidad de sustancia varíe en forma proporcional en un intervalo $[a,b]$ de tiempo significa que la comparación del cambio $y_2 - y_1$ de la cantidad de sustancia producida respecto a la duración del intervalo o cambio en el tiempo $x_2 - x_1$ es siempre la misma, para cualquier par de datos x_1, x_2 contenidos en el intervalo.

O bién, que la razón entre los cambios de las variables -cantidad de sustancia producida (grs.) y tiempo (hrs.)- es constante, a lo largo del intervalo.

Simbólicamente:
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

La razón de cambio anterior es la **velocidad promedio** a la que se produce la sustancia en esa reacción química, durante el período de tiempo $[x_1, x_2]$, el cual está contenido en $[a, b]$.

Actividades:

5. Traza todos los segmentos que unen puntos consecutivos de la Gráfica 3 con ayuda del programa MODISCRE, siguiendo los pasos indicados desde el inciso a hasta el inciso c.

a) Desactiva las funciones en la pantalla de edición de funciones (revisa la actividad 2b, página 3).

b) Después presiona la tecla

$\boxed{\text{PRGM}}$

y ejecuta el programa MODISCRE pulsando la tecla del número que le corresponde. En la pantalla principal debe leerse prgmMODISCRE y ver el cursor parpadeante.

1.4.1 Explica ampliamente, en la parte posterior de la hoja, los pasos que siguen del programa conforme lo ejecutas[3].

6. Elije dos pares de datos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la Tabla 1.

---

[3] Un programa se ejecuta oprimiendo ENTER cada vez que se muestra una pantalla, a menos que se indique otra cosa.

1.4.2 ¿Cuál es la velocidad promedio a la que se produce la sustancia durante el intervalo de tiempo $[x_1, x_2]$ que elegiste?

Respuesta: (1,12) (1.25,13.75) $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{13.75-12}{1.25-1 \text{ hrs.}} = \frac{1.75}{.25} = 7$ VELOCIDAD PROMEDIO K=7

7. Representa con la letra k el valor de la velocidad promedio que calculaste en la pregunta 1.4.2, y

1.4.3 Aproxima la cantidad de sustancia producida y en un instante x del intervalo abierto (x_1, x_2) con la expresión:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = k \quad -4$$

Explica ampliamente el procedimiento y la respuesta a esta cuestión, en la parte posterior de esta hoja.

y x

$\frac{13\ y-12}{1.5-1} = 4$

$y - 12 = 4(.5)$

$y = 2 + 12$

$y = 13$

$\frac{y-12}{1.20-1} = 7$

multiplique $\frac{y-12}{.20} = 7$

$y-12 = 7(.20)$

$y = 7(.20)+12$

$y = 13.4$

$\frac{y-16}{1.5-2} = 4$

$y - 16 = 4(.5)$

$y = 2 + 16$

$y = 18$

$\frac{18-16}{1.5-8} = 4$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA "JOSE VASCONCELOS" (5)
Nombre del alumno(a):

[illegible]

Nombre clave Apellido paterno Apellido materno Nombre
GRUPO 614 Fecha: 7-/XI/96 Ciclo escolar 96 Sesión 3

1.5 **Modelo contínuo**

Hasta aquí, hemos analizado un número finito de datos o mediciones, lo que nos permite estudiar el problema de manera muy rudimentaria, poco precisa (en relación a cada instante de tiempo), es decir, sólo apreciamos el problema desde un punto de vista promedio.

<u>El problema</u>

¿Qué podemos hacer para conocer el comportamiento de la reacción en cualquier momento, mientras dura la reacción, o calcular el ritmo al que se produce la sustancia durante la primera hora?, finalmente, ¿cómo estimar el ritmo al que se produce la sustancia en cada instante?

1.5.1 ¿Tienes alguna o algunas respuestas?, ¿cuál o cuáles?

Respuesta (s):

CALCULANDO EL TIEMPO DE LA REACCIÓN Y SU RITMO

Para responder a la primera parte del <u>problema</u> anterior debes analizar la reacción química mediante un modelo matemático contínuo que describa un comportamiento similar.

De seguro habrás notado que la distribución de los puntos en la Gráfica 1 tiene forma de parábola y de acuerdo a las actividades de graficación que realizaste durante las sesiones de clase anteriores un modelo que se comporta de manera similar es el de la función cuadrática cuya regla de asociación es del tipo: $y = ax^2 + bx + c$.

Para conocer los valores de los coeficientes a, b y c del modelo $y = ax^2 + bx + c$ que aproxima el comportamiento de los datos, construye un sistema de tres ecuaciones con tres indeterminadas (incógnitas) usando tres pares distintos de datos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) de la Tabla 1, correspondientes a tres puntos de la parábola.

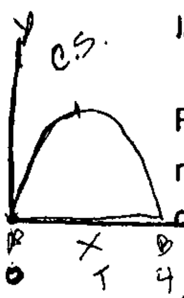
8. Elige tres pares de datos de la Tabla 1, y

(.25, 3.75) (.50, 7) (.75, 9.75)

1.5.2 Construye el modelo $y = 16x - 4x^2$ resolviendo, al reverso de la hoja, el sistema de tres ecuaciones generado por ellos:

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$
$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$$
$$y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c$$

El modelo $y = 16x - 4x^2$ expresa la cantidad y de sustancia producida (gramos) al cabo de cierto número x (horas) de tiempo transcurrido, mediante una relación entre la variable independiente "tiempo transcurrido" y la variable dependiente "cantidad de sustancia producida". Es decir, la variable y es función o depende de la variable x.



Para interpretar correctamente la expresión $y = 16x - 4x^2$ en el contexto de la reacción química conviene que señales el período o intervalo de tiempo de duración de la misma.

1.5.3 Anota el período o intervalo de tiempo durante el cual se inicia, desarrolla y termina la reacción.

[0, 4]

Respuesta:

VA AUMENTANDO DE CERO HASTA SU PUNTO MAXIMO EN GRAMOS, DESPUES DISMINUYE HASTA CERO DE NUEVO DE 0 a 2 HORAS SUBE a 16 gr Y DESPUES DE OTRAS 2 HORAS DISMINUYE A 0

Ese intervalo se le conoce como **dominio** de la función $y = 16x - 4x^2$, en el contexto de la reacción química de que hablamos y su longitud nos dice la cantidad de tiempo que dura la reacción (cuatro horas).

El conjunto de valores que asume o toma la variable dependiente, que en nuestro caso es el intervalo [0,16], es el **rango** de la función.

1.5.4 ¿Por qué la expresión $y = 16x - 4x^2$ te permite calcular la cantidad de sustancia producida en cualquier momento x ?

Respuesta:

PRIMERO TENEMOS EL VALOR DE "Y" Y ASI SE despeja X Y YA PODEMOS ENCONTRAR LA CANTIDAD DE SUSTANCIA PRODUCIDA EN CUALQUIER MOMENTO X, PORQUE ESTA ES LA ECUACIÓN DE LAS TRES ECUACIONES

Con el modelo $y = 16x - 4x^2$ respondes a la primera parte del problema: conocer la cantidad y de sustancia que se produce en cualquier momento x. del período de tiempo que dura la reacción.

$y = 16x - 4x^2 \qquad x = 1/60$

$y = 16(1/60) - \cancel{4x^2}\ 4(1/60)^2$

$y = \frac{16}{60} - 4\left(\frac{1}{3600}\right)$

$y = \frac{16}{60} - \frac{4}{3600} = 57600 - 240 = 57360$

$y =$

$\frac{960 - 4}{3600} = \frac{956}{3600} = .2655\ gr$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA "JOSE VASCONCELOS" (5)
Nombre del alumno(a):

Roky Balboa

Nombre clave	Apellido paterno	Apellido materno	Nombre	
GRUPO 614	Fecha: 9/X/96		Ciclo escolar 96	Sesión 4

Analiza ahora, el ritmo al que se produce la sustancia química durante un intervalo $[x_1, x_2]$ de tiempo.

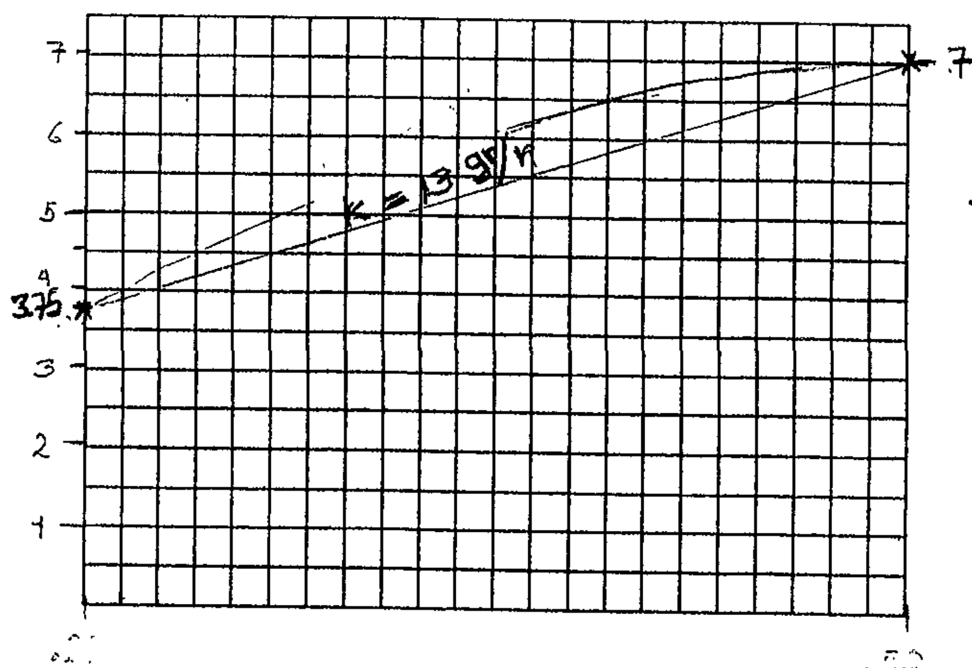
Actividad:

9. Selecciona dos momentos x_1 (.25) y x_2 (.50) pertenecientes al dominio de la función y calcula las cantidades de sustancia producida y_1 (3.75) y y_2 (7) respectivas, mediante la relación $y = 16x - 4x^2$

1.5.5 ¿Cuál es la velocidad promedio a la que se produce la sustancia, durante el intervalo de tiempo que seleccionaste?

Respuesta: k = 13 gr/h

1.5.6 Traza en la cuadrícula una gráfica que represente tu respuesta a la cuestión 1.5.5.



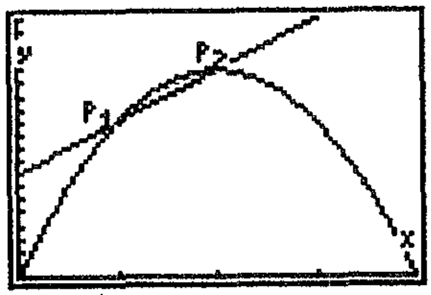
3.75x+7

3.75x+7x

13x —

1.6 Pendiente de la recta secante

La expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ tiene una interpretación geométrica, no sólo es el cambio promedio de la función, también mide la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de su gráfica (Gráfica 4).



Gráfica 4

1.7 Velocidad promedio y razón de cambio promedio

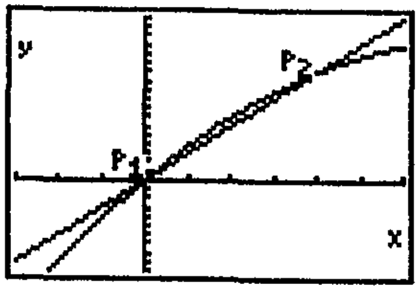
Para traducir en términos matemáticos la segunda parte del problema que planteamos en la página 7, **estimar el ritmo al que se produce la sustancia durante la primera hora**, hacemos referencia a los puntos $P_1(0,0)$ y $P_2(1,12)$ de la parábola $y = 16x - 4x^2$; en este caso $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0$ y $y_2 = 12$. Y a tu respuesta a la cuestión 1.5.5.

Es decir, la velocidad (ritmo) promedio a la que se produce la sustancia en la reacción química durante la primera hora se obtiene de la razón de cambio promedio:

$$\frac{12-0}{1-0} = \frac{12}{1} = 12 \quad \text{grs/hr}$$

Por lo tanto, la respuesta a la segunda parte del problema es: la sustancia se produce a un ritmo de 12 grs/hr durante la primera hora.

Esta razón de cambio promedio te proporciona también -como señalamos antes- la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P_1 y P_2 (Gráfica 5).



Gráfica 5

El cambio $x_2 - x_1$ en la variable independiente es de una unidad, es decir, $x_2 - x_1 = 1$ (una hora), y el valor final x_2 se obtiene del valor inicial x_1 aumentando una unidad, $x_2 = x_1 + 1$.

Pero si $x_2 - x_1 = -1$, entonces el valor final x_2 se obtiene del valor inicial x_1 disminuyendo una unidad, es decir, $x_2 = x_1 - 1$.

1.7.1 Proporciona un ejemplo de cada caso y represéntalos gráficamente, al reverso de la hoja.

Respuesta:

En ambos casos, el aumento o disminución, se representa usualmente con la letra h, y la relación entre los valores x_1, x_2 y h es:

$$x_2 = x_1 + h$$

Por tanto, el valor de y_2 se obtiene de $16(x_1 + h) - 4(x + h)^2$.

$16(1+.25) - 4(1+.25)^2$

1.7.2 ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

$16 + 4 - 4(1.5625)$

$16 + 4 - 6.25 = 13.75$

Respuesta:

$\boxed{13.75 = 13.75}$

SI, PORQUE SI TOMAMOS 2 VALORES DE LA GRAFICA NOS SIRVE PARA DESPEJAR "Y", Y "Y" ES LA VELOCIDAD, POR LO TANTO EL VALOR DE "Y" SERA EL MISMO VALOR DE LA GRAFICA

Con esa representación para x_2 y y_2 , las coordenadas del punto P_2 son $\left(x_1+h,\ 16(x_1+h)-4(x_1+h)^2\right)$.

Y la velocidad promedio a la que se produce la sustancia durante el intervalo de tiempo $[x_1,x_2]=[x_1,x_1+h]$ (o la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P_1 y P_2) es:

$$\frac{\left[16(x_1+h)-4(x_1+h)^2\right]-\left[16x_1-4x_1^{\,2}\right]}{[x_1+h]-[x_1]} \tag{1}$$

Expresión que se simplifica a:

$$16-8x_1-4h \tag{2}$$

1.7.3 Explica ampliamente el proceso de simplificación que permite obtener la expresión (2) de la (1), en el reverso de la hoja.

$$\frac{16x_1+16h-4(x_1^2+2x_1h+h^2)-16x_1+4x_1^2}{x_1+h-x_1}$$

$$\frac{\cancel{16x_1}+16h-\cancel{4x_1^2}-8x_1h-4h^2-\cancel{16x_1}+\cancel{4x_1^2}}{x_1+h-x_1}$$

$$\frac{16h-8x_1h-4h^2}{x_1+h-x_1}=\frac{\cancel{h}(16-8x_1-4h)}{\cancel{h}} \qquad h \quad \frac{16x-8x_1h-4h^2}{16}$$

$16h-8x\,h-4h^2$

$-16x$

$$\boxed{16-8x_1-4h}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA "JOSE VASCONCELOS" (5)
Nombre del alumno(a):

ROKY BILBOK OLVERA CARRIEL JUAN ANTONIO
Nombre clave Apellido paterno Apellido materno Nombre
GRUPO 614 Fecha: 21 / XI / 95 Ciclo escolar 96 Sesión 5

1.8 Velocidad instantánea y razón de cambio instantáneo

Discutiremos ahora, mediante un ejemplo, una forma de responder a la última parte del problema (página 9), **¿a qué ritmo se produce la sustancia química al término de la primera hora?**

Con la expresión **"al término de la primera hora"** nos referimos al instante de tiempo $x = 1$, a ese instante le corresponde el punto $(1,12)$ de la parábola, que llamaremos P_1, y se requiere conocer el ritmo de producción en ese instante, el cual *evaluaremos analizando el comportamiento del ritmo promedio en las "proximidades"* del punto P_1.

Actividad:

10. Obtén las coordenadas de algunos puntos $P_2(x_2, y_2)$ "próximos" a $P_1(1,12)$, tanto a la izquierda como a la derecha, con la tecla TRACE de la calculadora, después de: introducir $Y_1 = 16X - 4X^2$, ajustar la ventana de visualización a $[.8, 1.2] \times [10.25, 13.75]$ y desactivar la gráfica generada en el modo STAT[4].

1.8.1. Organiza tus observaciones en la Tabla 3 y calcula el valor de h para cada una. x_2 x_1

Tabla 3

x_2	.6	.7	.8	.9	1	1.2	1.3	1.5	2
h	-.4	-.3	-.2	-.1	0	.2	.3	.5	1
y_2	8	9	10	11	12	13	14	15	16

.6 − 1 = −.4

[4] Oprime la tecla 2nd simultáneamente con Y= para ver el menú STAT PLOTS, después 1, finalmente elige Off en Plot1.

$x_1 + h = x_2$
$h = x_2 - x_1$

Recuerda que $x_2 = x_1 + h$ y $x_1 = 1$.

$h = x_1 - x_2$

1.8.2 ¿Cómo se comporta el valor de h cuando P_2 se aproxima a P_1 ?

Respuesta:

EL VALOR NUMERICO VA AUMENTANDO, Y EL NUMERICO VA DISMINOYENDO

En efecto, cuando P_2 se aproxima a P_1 el valor absoluto de h disminuye, ya sea que se aproxime por la derecha o por la izquierda.

1.8.3 Ilustra gráficamente ambas situaciones y explica ampliamente lo que observas, en el reverso de la hoja.

Para estudiar el comportamiento de la velocidad promedio y de la pendiente de la recta secante cuando el punto P_2 se aproxima al punto P_1 , a fin de contestar a la cuestión: ¿a qué ritmo se produce la sustancia química al término de la primera hora?, te proponemos las actividades 11,12, 13 y 14 en las que utilizarás los programas DERIVADA y SECANTE. El primer programa está diseñado para resolverte las operaciones que contiene la expresión (1) de la página 15 y trazar al mismo tiempo la recta secante. Y el segundo, para analizar el comportamiento de las secantes.

Actividades:

11. Genera en la misma pantalla gráfica de la calculadora tanto la parábola $y = 16x - 4x^2$ como la secante que pasa por los puntos $P_1(1,12)$ y $P_2(2,16)$, y consigue el valor de la pendiente de esa secante mediante el procedimiento:

a) Introduce las siguientes funciones en la pantalla de edición de funciones.

$Y_1 = 16X - 4X^2$, $Y_2 = 16(X+H) - 4(X+H)^2$

y ajusta las dimensiones del rectángulo de visión a $[0,4] \times [0,20]$.

Nota: Desactiva la función Y_2 para que no se grafique (ver explicación en la actividad 2b, página 3).

b) Después presiona la tecla

$\boxed{\text{PRGM}}$

y ejecuta el programa DERIVADA pulsando la tecla del número que le corresponde.

En la pantalla principal debe leerse: prgmDERIVADA y ver el cursor parpadeante,

c) Sigue ejecutando el programa[5].

1.8.4 ¿Qué sucede?

Respuesta:

APARECE DE NUEVO LA GRAFICA

d) Si oprimes de nuevo la tecla ENTER verás aparecer a X_1 y un signo **?**, significa que debes introducir el valor de x_1. En nuestro caso seleccionamos **1**, porque es la abscisa de $P_1(1,12)$.

e) Después se pide, de igual modo, el valor del incremento ***H*** de la variable independiente, introduce **1**. x_i h

1.8.5 ¿Por qué?

Respuesta:

PORQUE ES EL VALOR DEL INCREMENTO DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE ENTRE LOS PUNTOS (1,12) y (2,16)

Presiona para continuar la tecla ENTER.

[5] Recuerda que un programa se ejecuta oprimiendo ENTER cada vez que se muestra una nueva pantalla, a menos que se indique otra cosa.

1.8.6 Explica ampliamente, en la parte posterior de la hoja, los pasos que siguen del programa conforme oprimes la tecla ENTER, hasta llegar de nuevo a lo que se dice en el inciso d.

Nota: En la calculadora no se utilizan letras minúsculas, por tanto **M** representa a ***m*** y **H** representa a ***h***.

Nota: Cuando quieras que deje de ejecutarse el programa teclea la palabra FIN como valor de X_1.

12. Repite el procedimiento anterior pero con valores de ***h*** cada vez más pequeños (en valor absoluto).

1.8.7 Completa la Tabla 4 con los resultados que obtienes al ejecutar el programa DERIVADA; recuerda que $x_1 = 1,\ \ y_1 = 12.$

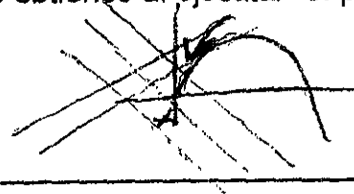


Tabla 4

h	x_2	y_2	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 16 - 8x_1 - 4h$
- 0.5	1.5	7	m= 10
- 0.1	.9	11.16	m 8.4
- 0.01	.99	11.9196	m= 8.04
[illegible]	1	12	8
0.01	1.01	12.07	m= 7.96
0.1	1.1	12.76	M= 7.6
0.5	1.5	15	m=6

1.8.8 En la página 15 explicaste el procedimiento para simplificar la expresión que produce el valor de la pendiente; verifica tu respuesta con el siguiente desarrollo:

$$m = \frac{\left[16(x_1+h) - 4(x_1+h)^2\right] - \left[16x_1 - 4x_1^2\right]}{x_1 + h - x_1} = \frac{16h - 8x_1h - 4h^2}{h} = \frac{h(16 - 8x_1 - 4h)}{h} = 16 - 8x_1 - 4h$$

1.8.9 ¿Se aproxima el valor de la pendiente m, de cada secante, hacia algún cierto número cuando el valor absoluto de h se hace cada vez más pequeño y P_2 se acerca P_1? ¿A cuál ? ¿Por qué?

Respuestas: LA PENDIENTE SE ACERCA AL 8, ESTA PENDIENTE ES DEL PUNTO (1,12), YA QUE AQUI h=0, O SE NO HAY VARIACION DE TIEMPO Y ES DONDE LA TANGENTE TOCA A LA RECTA.

1.8.10 En relación a las secantes, ¿cómo debe ser el valor de h para que la secante se "parezca" más a una tangente?

Respuesta:

EL VALOR DE LA SECANTE TIENE QUE SER = 0

1.8.11 Ilustra las dos respuestas anteriores mediante una gráfica (en el reverso de esta hoja).

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA "JOSE VASCONCELOS" (5)
Nombre del alumno(a):

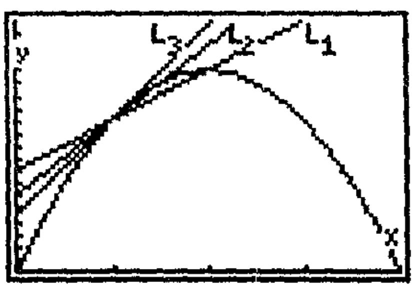
[illegible]

Nombre clave	Apellido paterno	Apellido materno	Nombre	
GRUPO 614	Fecha: 30 · IX · 95		Ciclo escolar 96	Sesión 6

En las actividades 11 y 12 calculaste la pendiente de varias rectas secantes y de su análisis aproximaste la pendiente de la tangente en forma numérica. Ahora abordaremos un enfoque más geométrico, es decir, trazaremos rectas secantes y buscaremos la que ocupe una posición lo más parecida a la tangente en el punto P_1, con ayuda del Programa SECANTE y de esa forma verificar tu respuesta a la cuestión 1.8.10

Actividades:

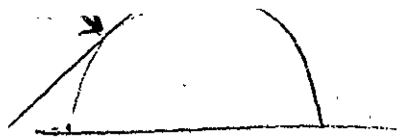
13. Observa las secantes l_1 , l_2 y l_3 que aparecen en la pantalla de la calculadora cuando ejecutas el programa SECANTE, con $x_1 = 1$ y h toma los valores 1, 0.5 y 0.1 respectivamente. La imagen en la calculadora debes verla como la Gráfica 5.



Gráfica 5

1.8.12 ¿Cuál secante crees que se aproxima mejor a la tangente en el punto $P_1(1,12)$? ¿Por qué? ¿Qué valor de h le corresponde?

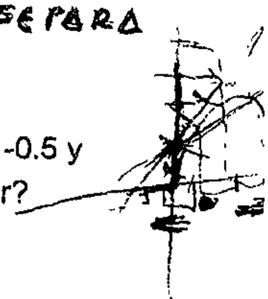
Respuestas:
L1 PORQUE SU h ES DE 1 Y ES LA QUE MAS SE ACERCA A (1,12) AUNQUE NO LA TOCA.



1.8.13 Explica qué sucede cuando el valor absoluto de h es menor que 0.1.

Respuesta:

CUANDO h ES MENOR 1 -1 LA SECANTE SE SEPARA DE LA GRAFICA.



1.8.14 ¿Qué puedes decir de las secantes correspondientes a los valores -1, -0.5 y -0.1, es decir, qué sucede cuando el valor absoluto de h es cada vez menor?

Respuesta:

LOS VALORES SON REPECTO AL EJE DE LAS Y, DONDE CORTA LA SECANTE ES CADA VES MAYOR, LA SECANTE SE VA INCLINANDO MAS.

14. Compara las respuestas a las preguntas de la actividad 13, con los datos de la Tabla 4 (página 19).

En dicha tabla y hacia el renglón central, los valores absolutos de h son cada vez más "pequeños", ¿de acuerdo?, situación que representamos por $h \rightarrow 0$.

1.8.15 Y si analizas, en la misma tabla, el comportamiento numérico de las pendientes o razones de cambio, ¿cuánto crees que mide la pendiente de la tangente y la razón de cambio instantáneo? ¿Por qué?

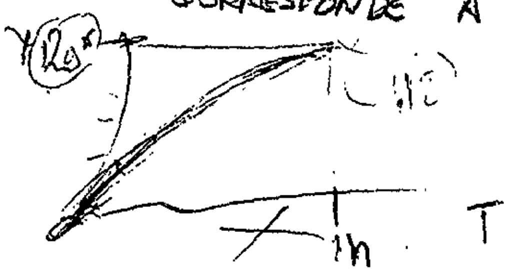
Respuestas:

M=8 CAMBIO INSTANTANEO = 0.4 ES LA VARIACION DE LA PENDIENTE ENTRE UN PUNTO Y OTRO

1.8.16 Finalmente, ¿a qué ritmo o velocidad se produce la sustancia química al término de la primera hora? ¿Por qué?

Respuestas:

12 g/h PORQUE AL SACAR LA VELOCIDAD PROMEDIO ENTRE EL PUNTO (0,0) Y (1,12) ES IGUAL A 12 YA QUE EL INTERVALO DE ESTOS DOS PUNTOS ES EL QUE CORRESPONDE A UNA HORA.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA "JOSE VASCONCELOS" (5)
Nombre del alumno(a):

Roky Balboa

Nombre clave	Apellido paterno	Apellido materno	Nombre	
GRUPO 614	Fecha: 7/XI/95		Ciclo escolar 96	Sesión 7

==

2. TRAYECTORIA DEL AGUA QUE SALE DE UNA MANGUERA

2.1 La situación

En muchos lugares habitados es frecuente observar a las personas que riegan con mangueras las plantas o árboles de parques y jardines. La salida constante y libre del agua (la misma cantidad y sin obstrucción de los dedos o de una válvula) forma un chorro de agua.

A continuación estudiarás la trayectoria que sigue el agua cuando sale de la manguera, es decir, la forma del chorro de agua, por medio de algunas actividades y cuestiones que deberás realizar y contestar. **Es muy importante que expliques ampliamente tanto los procedimientos como las respuestas. Estás en libertad de utilizar dibujos, gráficas o palabras en tus explicaciones.**

Actividad:

15. Elabora en la parte posterior de esta hoja un dibujo que represente la situación anterior.

2.2 Dirección de la trayectoria

El problema

¿Qué dirección debe tener el agua al salir de la manguera para que el chorro llegue a la base de un árbol que dista dos metros de la salida del agua (medidos por el piso) y esta última se sostiene a un metro del piso?

LA DIRECCION DEBE SER HACIA EL ARBOL, PERO LA MANGERA NO DEBE DE ESTAR MUY INCLINADA HACIA ARRIBA, YA QUE NO SALIA A DEMAS DE LA BASE EL TRONCO DEL [illegible], DEBE DE ESTAR UN POCO HACIA ABAJO PARA QUE EL CHORRO QUE SALE EN UNA FORMA DE UNA PEQUEÑA PARABOLA LLEGUE DIRECTO A LA BASE.

$y - y_1 = 4r(x - x_1)$

$y + 1 = 8(x - 2)$

$y = 8x^2 -$

INTENTOS

$-x^2 + x$

$-3x + x$

$-x^2 + 16x$

$4x^2 + 3x$

$-4x^2 - 3x$

$-4x^2 + 5x$

$-9x^2 + 6x$

$-11x^2 + 6x$

$-3x^2 + 6x$

$-3x^2 - 6x$

$-10x^2 - 4.5x$

$-7x^2 + 10x$

$-10x^2 + 10$

$-x^2 + 1$

$-.3x^2 + 1$

$-.25x^2 + 1$

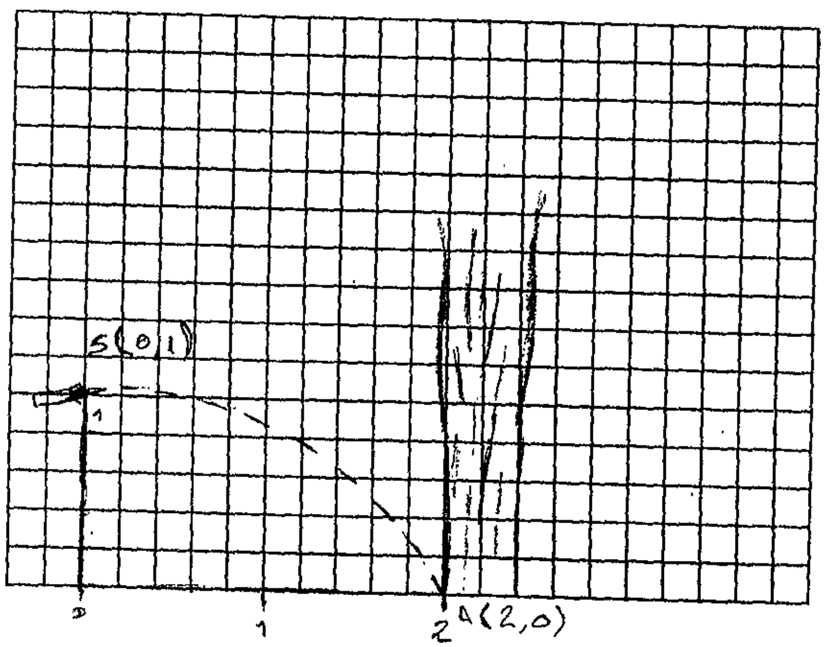
Actividades:

16. Ilustra las condiciones del problema en un esquema (usa para ello el reverso de la hoja).

17. Ahora, representa las condiciones del problema en un plano cartesiano, utiliza para tal fin la cuadrícula siguiente. Señala también:

a) Las coordenadas de los puntos S y A correspondientes a la salida del agua (S) y la base del árbol (A), y

b) La dirección del agua en la salida de la manguera. .



Responde las siguientes tres preguntas en el reverso de esta hoja.

2.2.1 ¿Qué trayectoria sigue el chorro del agua cuando la salida es libre? UNA PARABOLA

2.2.2 ¿Cuál es su modelo matemático? $-x^2 + x = 0$ - POR FIN LA ENCONTRE $\boxed{-.25x^2+1}$

2.2.3 ¿ Hay sólo una trayectoria posible para el chorro del agua? NO, POR QUE PUEDE ENCONTRARSE OTRO TIPO DE PARABOLAS

18. En caso de que tu respuesta a la pregunta 2.2.3 sea **NO**, genera tres ejemplos de trayectorias que pasen por los puntos S y A en la pantalla gráfica de tu calculadora y responde las cuestiones 2.2.4, 2.2.5 y 2.2.6.

2.2.4 ¿Cuál es el modelo matemático de cada una de las tres trayectorias?

Respuesta: CAMBIO DE OPINION, SOLO HAY UNA POR QUE PORQUE NO ENCONTRE OTRO QUE PASE POR EL PUNTO Y=1 Y POR X=2 Y SI LA HAY SE ELEVA DEMASIADO

2.2.5 ¿Qué rango de visión (o ventana) usaste en la actividad 18?

Respuesta:

[0,2] [0, 1.5)

2.2.6 ¿Qué dirección tiene cada trayectoria en el punto de salida?

Respuesta:

2.2.7 Por lo tanto, ¿cuál es tu respuesta al problema enunciado en la página 23?

Respuesta:

QUE LA DIRECCIÓN DEVE DE SER EN FORMA DE UNA PARABOLA DE ECUACION $-2.5x^2+1$

2.3 Trayectoria única

Anota las respuestas a las cuestiones 2.3.1 y 2.3.2 atrás de esta hoja.

2.3.1 ¿Qué restricción o condición a la situación propones para que el chorro del agua siga una trayectoria particular? QUE LA PRECION SIGUA SIENDO LA MISMA.

2.3.2 ¿Qué dirección tiene el agua en el punto A (base del árbol) respecto a esa trayectoria particular?

ES DEL PUNTO S CON 1 M DE ALTURA AL PUNTO A, FORMANDO ASI UNA PARABOLA, PERO ESTA PARABOLA NO ES COMPLETA, SINO LA MITAD DEL PUNTO MAS ALTO AL MAS BAJO

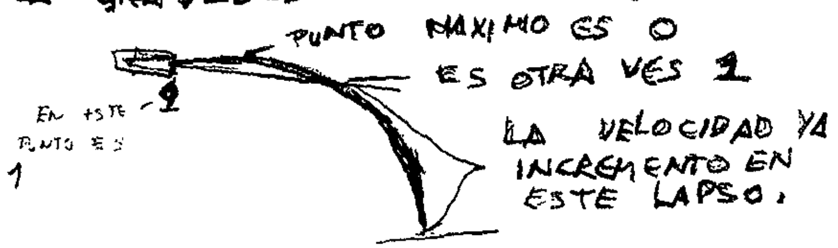
2.4 Velocidad del agua

Contesta las cuestiones 2.4.1 y 2.4.2 en el espacio restante de esta hoja.

2.4.1 ¿Qué velocidad tiene el agua al llegar a la base del árbol en la trayectoria particular de la cuestión 2.3.1?

2.4.2 ¿Qué relación tienen la dirección de la trayectoria y la velocidad del agua en el punto A?

2.4.1.- LA VELOCIDAD DEL AGUA VA EN INCREMENTO, ES DECIR QUE LA VELOCIDAD VA A SER CADA VES MAYOR, PORQUE CUANDO EL AGUA LLEGA A A PUNTO MAXIMO DE ESA PARABOLA QUE ES 1 AL CAER, POR LA GRAVEDAD LA VELOCIDAD VA EN AUMENTO



4.2: QUE DEPENDEN UNA DE OTRA, SI LA TRAYECTORIA CAMBIA, LA VELOCIDAD CAMBIA Y NO LLEGA AL PUNTO A, O SE PASA DEL PUNTO A, ES DECIR QUE LA VELOCIDAD SIEMPRE VA A DEPENDER DE LA TRAYECTORIA.