UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

Unidad Académica de los Ciclos Profesionales y de Posgrado del Colegio de Ciencias y Humanidades

Proyecto: Maestría de Educación Matemática

La enseñanza del concepto de Función, con énfasis en la Función Lineal, en la División de Ciencias Sociales y Humanidades de la UAM-Iztapalapa

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN EDUCACION MATEMATICAS

PRESENTA:
Nahína Dehesa DeGyves

1998

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Unidad Académica de los Ciclos Profesionales y de Posgrado /0
del Colegio de Ciencias y Humanidades
Proyecto : Maestría de Educación Matemática

La enseñanza del concepto de Función, con énfasis en la Función Lineal, en la División de Ciencias Sociales y Humanidades de la UAM-Iztapalapa

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

P R E S E N T A

Nahína Dehesa De Gyves

1998

DIRECCIÓN DE TESIS: M. en E.M. Juan M. Estrada Medina

JURADO:

Dr. Jorge Barojas Weber

M. en E.M. Asela Carlón Monroy

M. en E.M. Sergio Cruz Contreras

M. en E.M. Iñaqui de Olaizola Arizmendi

Índice

Introducción **1**

I Planteamiento del Problema **3**

I.1 Enunciado del Problema 3
I.2 Descripción del Problema 3
I.2.1 El programa de la UAM-I 3
I.2.2 El profesor 7
I.2.3 El alumno 7
I.2.4 La evaluación 9
I.2.5 Relación Matemáticas - Ciencias Sociales 10

II Marco Teórico **11**

II.1 Las Matemáticas en la Historia 12
II.1.1 La matemática como herramienta 13
II.1.2 La matemática como modelo de pensamiento 14
II.2 Formación de Conceptos Matemáticos 15
II.3 Epistemología e Historia del concepto de Función 19
II.4 Registros de representación semiótica 26
II.5 Evaluación de aprendizajes de conceptos matemáticos 33

III Metodología **40**

III.1 Una Estrategia de Aprendizaje 41
III.1.1 El nivel de Abstracción y el nivel de Reconocimiento 41
III.1.2 Una Estrategia de Aprendizaje 45
III.2 Una Estrategia de Aprendizaje para el concepto de Función Lineal 47
III.2.1 Síntesis con base en una clasificación 47
III.2.2 Síntesis del desarrollo de la idea de Función 49
III.2.3 Tipos de Pensamiento 50
III.2.4 En el contexto Educativo 51
III.3 Desarrollo de Niveles 55
III.3.1 Desarrollo del Nivel de Abstracción 55
III.3.2 Conceptualización matemática y Evaluación 59
III.3.3 Desarrollo del Nivel de Reconocimiento 60
III.3.4 Secuencia Didáctica 63
III.4 Muestra de Actividades con base en la Estrategia de Aprendizaje 64
III.4.1 El nivel I - Cualitativo 66
III.4.2 El nivel III - Representación 70
III.4.3 El nivel de Conceptualización y Evaluación 73
III.4.4 El nivel II - Cuantitativo 77
III.4.5 El nivel IV - Interpretación 86

IV Exploración de la aplicación de la Propuesta **88**

V El enfoque de la propuesta 93

V.1 El papel del Profesor. 93
V.2 El programa del curso 93

VI Conclusiones **100**

Bibliografía **101**

Introducción

La motivación principal al realizar este trabajo es la de dar una propuesta para la enseñanza del concepto de Función con énfasis en el concepto de Función Lineal, dentro del contexto de un curso de Matemáticas I de la división de Ciencias Sociales y Humanidades de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa.

Es en el apartado I donde se exponen las causas que dieron origen a la propuesta, principalmente con base en los siguientes aspectos:

Lo que la Universidad pretende alcanzar en el alumno con este curso, las expectativas del propio alumno y por último, algunos comentarios introductorios acerca de sus posibilidades reales en cuanto a la adquisición de su conocimiento en matemáticas.

En el apartado II, se desarrolla el marco en el cual se fundamenta la propuesta y se profundiza acerca de las investigaciones realizadas en el campo educativo en cuanto a:

- Desarrollo histórico y epistemológico del concepto de función para identificar los rasgos más relevantes y generales de la formación del concepto.
- Aportaciones sobre formación de conceptos matemáticos y registros de representación semiótica que permitan analizar las repercusiones de utilizar cierto lenguaje simbólico en la presentación de las matemáticas a los alumnos. En esta parte del trabajo se abordan los procesos que involucra el modo de pensar matemático, con el propósito de promoverlos en los alumnos en forma de actividades dirigidas.
- Utilización de los mapas conceptuales, con la finalidad de proporcionar herramientas tanto al profesor como a los alumnos, para evaluar los aprendizajes de éstos, independientemente de satisfacer el requisito de examen. Otra utilidad de los mapas se refiere en cuanto a que muestran vías alternativas de la forma en que pueden estar relacionados conceptos y en particular, conceptos matemáticos.

En el apartado III se desarrolla una *estrategia de aprendizaje* la cual permite proponer una serie de actividades dirigidas al alumno. Dichas actividades se encuentran divididas en relación a dos planteamientos diferentes: las que a partir de un contexto social particular, permiten reconocer objetos matemáticos utilizables en él, denominado como *Nivel de Abstracción* y las que parten del lenguaje matemático y permiten dar una interpretación social, denominado *Nivel de Reconocimiento*.

En el apartado IV se expone la experiencia de haber realizado una primera exploración de su puesta en práctica en el salón de clases y se plantean posibles dificultades en su uso.

En el apartado V se cuestiona la posibilidad de extender el uso de la metodología empleada en la obtención de la *estrategia de aprendizaje* del concepto de Función, para otros conceptos matemáticos, en particular en este apartado se inicia el empleo de dicha *estrategia* con los temas restantes del programa y se vincula con el papel que debería ocupar el profesor para su puesta en práctica.

Por último, es el apartado VI donde se realizan algunas observaciones finales en dirección de delimitar el alcance de la propuesta.

I Planteamiento del Problema

I.1 Enunciado del Problema

Elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de Función, con énfasis en la Función Lineal dentro de un curso de Matemáticas I de la División de Ciencias Sociales y Humanidades de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa.

I.2 Descripción del Problema

I.2.1 El programa de Matemáticas I de C.S.H. de la UAM-I

La Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, cuenta con tres divisiones :

1) División de Ciencias Básicas e Ingeniería
2) División de Ciencias Biológicas y de la Salud
3) División de Ciencias Sociales y Humanidades

El Departamento de Matemáticas, ubicado en la División de Ciencias Básicas e Ingeniería es el encargado de proporcionar los cursos correspondientes de matemáticas del tronco común y tronco general de las tres divisiones.

Por otra parte, dentro de la División de Ciencias Sociales y Humanidades, se encuentran las carreras de Antropología Social, Lingüística, Filosofía, Psicología Social, Sociología, Administración y Economía, de las cuales las últimas cuatro, llevan en su tronco común, el curso correspondiente a Matemáticas I en el primer trimestre.

Así, los futuros psicólogos, sociólogos, administradores, economistas y el propio profesor del curso, se encuentran en su primer trimestre un curso de Matemáticas I, con el siguiente programa:

TEMAS

I Conjuntos, operaciones y conjuntos finitos e infinitos.

II Conjuntos de números N, Z, Q y R, su suma y producto, estructuras de orden, intervalos en R, valor absoluto.

III Ecuaciones de primer y segundo grado con una variable, ecuaciones de la recta, desigualdades.

IV Funciones.

A continuación se enumerarán los Objetivos, actividades y sugerencias de cada tema descritos en el programa.

Tema I: Conjuntos, operaciones y conjuntos finitos e infinitos
En este tema se pretende que los estudiantes revisen las definiciones más elementales de la teoría de conjuntos así como las operaciones de unión, intersección, diferencia y producto cartesiano.
Sugerimos que esto se vea, por un lado, como un lenguaje sin caer en formalismos teóricos para lo cual no están preparados nuestros estudiantes; por otro lado, de manera aplicada en el sentido de que se capacite al estudiante para describir en lenguaje de conjuntos los resultados de sus experimentos (como científico social que será en el futuro).
En este punto es muy importante que el estudiante distinga los conjuntos finitos e infinitos (en los casos discretos y continuo, cuando los conjuntos sean numéricos, sobre esto debe insistirse nuevamente en el tema II inciso a)).

Tema II: a)Conjuntos de números N, Z, Q y R.
b)Suma y producto de a).
c)Estructuras de Orden.
d)Intervalos en R.
e)Valor Absoluto.

*En lo que respecta a los incisos a) y b) se pretende que el estudiante conozca los conjuntos **N, Z, Q** y **R** así como los axiomas de éstos bajo las distintas operaciones, no con el fin de capacitarlos para hacer demostraciones formales, sino más bien para que asimile una estructura más conveniente, una serie de reglas que él ya sabe pero que maneja mecánicamente.*
Otro objetivo de b) es que el estudiante aplique las propiedades de los distintos sistemas numéricos para que llegue a operar con soltura las reglas y métodos de: productos notables, factorización, simplificación, suma y producto de fracciones algebraicas. En este punto sugerimos se realicen el mayor número posible de ejercicios.
En cuanto a c) y d) se pretende que los estudiantes aprendan la representación del conjunto de los números reales en la recta interpretando ahí sus propiedades de orden así como los distintos tipos de intervalos.
El objetivo de e), valor absoluto, es que el estudiante lo interprete como distancia en la recta y conozca sus propiedades más importantes.

*Tema III:*a) Ecuaciones de Primer y Segundo grado con una variable
b) Ecuaciones de la recta.
c) Desigualdades.

a) pretende por un lado que el estudiante aprenda a resolverlos algebraicamente utilizando el material que aprendió en el tema anterior y por el otro, que dado un problema esté capacitado para plantear la ecuación (ya sea de 1° ó 2° grado) a la que da lugar dicho problema.
En cuanto al inciso b), el estudiante debe aprender a manejar y operar las distintas representaciones de la ecuación de una recta así como obtenerlas dado: un punto y su pendiente, dos puntos y demás casos particulares de interés (la recta horizontal, etc.). También es necesario que el estudiante obtenga la gráfica de la recta a partir de su ecuación y que además maneje la relación entre el signo de la pendiente y la ordenada al origen con la gráfica.

En lo concerniente al inciso c) el estudiante debe aprender a <u>*encontrar*</u> *las regiones intervalares que son soluciones de desigualdades en una variable tanto de primero como de segundo grado, aplicando el material visto en el tema II. Por ejemplo si* $27 < 3x^2 < 48$ *entonces* $-4 < x < -3$ *ó* $3 < x < 4$*. También debe aprender dada una región intervalar de x a determinar, aplicando las propiedades del orden, la región intervalar de una función de x. Por ejemplo: si* $3 < x < 5$ *entonces* $1/3 < (x-2)/3 < 1$*.*

Tema IV: Funciones
Los objetivos son: que el estudiante aprenda la <u>*noción*</u> *de función como una terna de dos conjuntos (dominio y contradominio) y una regla de correspondencia. Aquí el Profesor tendrá la oportunidad de aplicar parte del material visto en el tema I (conjuntos).*
Se debe <u>*enseñar*</u> *al estudiante las funciones con dominio y contradominio en los reales distinguiendo muy bien aquellas cuyo dominio sea un conjunto o bien discreto, (finito o infinito) o continuo (que no puede ser finito). Deberá capacitarse al estudiante a graficar las funciones de cualquiera de estos dos tipos (gráficas puntuales y continuas). Recomendamos que se estudien y discutan las funciones identidad,* $1/x$ *, constante, raíz cuadrada positiva de x y polinomiales hasta de 3er. grado, haciendo énfasis en las transformaciones que sufren las gráficas al variar los coeficientes (por ejemplo* $2x^2$*,* $-3 + 2x^2$*,* $-2x^2$*,* $2x^2 + x$*, etc.) y por último* <u>*ver*</u> *las funciones exponencial y logaritmo natural.*

Bibliografía:
Budnick, F. S. <u>*Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*</u>. *Ed. Mc Graw-Hill.*
Kovacic, M. L. <u>*Matemáticas Aplicaciones a las Ciencias Económico Administrativas*</u>. *Ed. Fondo Educativo Interamericano.*

A continuación se enumeran algunos cuestionamientos que dieron pie a la propuesta con base en una serie de interpretaciones muy personales que se exponen para analizarlas bajo una óptica más objetiva.

Comentarios al programa[1]:

Una consecuencia de no hacer explícita la forma de presentar los contenidos de los temas, aunado con la falta de elementos que permita al propio profesor cuestionarse sobre su papel tradicional, es la de que tienda a ocupar totalmente su clase a proporcionar definiciones, axiomas y sus correspondientes ejemplos en el orden de los temas del programa.
Sin embargo, dicha secuencia ¿es el único medio para transmitir el significado de los objetos matemáticos?, o en otras palabras, ¿al dar definiciones se cubren los objetivos de revisar, distinguir, conocer o enseñar los temas y además, el de proporcionar un lenguaje?
Recordando, una de las recomendaciones es la de no entrar en formalismos teóricos (ver tema I) pero, ¿con qué medios cuenta el profesor para proporcionar conceptos matemáticos sin utilizar formalismos teóricos? ¿hasta dónde debe llegar su rigor matemático en las clases?
Por otra parte, el proporcionar los axiomas que rigen los sistemas numéricos N, Z, Q, R, ¿implica que los alumnos entiendan su operación con números particulares? ¿realmente los axiomas permiten adquirir la noción de cómo opera algún sistema numérico?

[1] **Una explicación más detallada acerca de éstos comentarios son los que se refieren a tema:**
Tema I : Las palabras subrayadas como "revisen" y "distingan" no son lo suficientemente explícitas en cuanto a la forma de alcanzar dichos objetivos, por lo tanto el profesor puede muy bien interpretar que la forma de "revisar" y "distinguir" es con base en proporcionar las definiciones de: operaciones con conjuntos, conjuntos finitos e infinitos.
Por otra parte la palabra subrayada "lenguaje" hace referencia a cierta necesidad de adquirir notación matemática para el desempeño del futuro científico social, la cual se retomará como un objetivo explícito y posible en la propuesta.
Tema II: Este tema se encuentra muy encaminado a aplicar reglas de resolución a ejercicios muy focalizados. Cabe aclarar ¿qué es lo que debe suponer el profesor acerca de lo que el alumno sabe sobre las estructuras de los números N, Z, Q y R? y con base en lo anterior, ¿de qué forma usar los axiomas para ayudarle a asimilar una estructura más conveniente?
Una observación adicional es la de no requerir el programa que los ejercicios contesten a algún planteamiento de una problemática social.
Tema III: Aquí se destaca que el alumno debe encontrarse en posibilidad de plantear ecuaciones; sin embargo, la propuesta cuestiona dicha posibilidad bajo las condiciones tradicionales de aprendizaje.
Por otra parte, se hace explícita la necesidad de operar distintas representaciones de la ecuación de la recta; la propuesta trata explícitamente este punto.
Tema IV: Pueden plantearse las siguientes cuestiones, ¿si se pretende que el alumno aprenda la noción de función, eso quiere decir que no es necesario que entienda formalmente la definición de ella? ¿Existe alguna otra alternativa para que el alumno aprenda el concepto de función, aparte de escuchar pasivamente la clase expositiva por parte del profesor?

Por último, se hace un cuestionamiento acerca del objetivo que plantea que el alumno sepa plantear ecuaciones: ¿a qué tipo de problemas se enfrenta el profesor? Se hace hincapié en este punto, porque como se precisará más adelante, abre a un tipo de pensamiento que tiene que ver con el paso de la abstracción de conceptos matemáticos a su representación en el lenguaje matemático.

El presente trabajo tuvo como motivaciones iniciales el contestar a las anteriores preguntas. A lo largo de los apartados siguientes se retomarán éstas y otras cuestiones, apoyándose en investigaciones en el campo de la educación matemática. Es en el apartado V donde se retoma el programa de Matemáticas I, el cual, después de haber revisado el desarrollo de la propuesta que se centra en el tema Funciones, toma sentido cuando da a conocer posibles estrategias de abordaje de los temas restantes.

I.2.2 El Profesor

Desde la perspectiva del profesor, el programa tiende a considerarse como un "repaso" de conceptos ya vistos por el alumno en secundaria o en el nivel medio superior, lo que muy probablemente le llevaría a suponer que se trata de un curso relativamente fácil, tanto en su impartición - por involucrar conceptos elementales -, como en la aprobación del mismo por parte del alumno.
La realidad es que este curso tiene uno de los mayores índices de reprobación en el Departamento de Matemáticas.
Para el profesor, la explicación se encuentra en que los alumnos ingresan con serias deficiencias, razón que consideramos válida y sumamente importante pero ... no exclusiva. De hecho, como se verá más adelante, el asunto es más complejo y una explicación con base en una única causa es insuficiente.

Por lo general la secuencia de contenidos impartidos en el curso corresponde a la secuencia lógica del programa, donde se procura "proveer" al alumno de la teoría necesaria para tratar cada tema junto con sus correspondientes ejemplos. De hecho, la manera de evaluar se orienta con base en la ejecución de "ejercicios" muy parecidos a los dados en clase.

I.2.3 El Alumno

En el otro extremo se encuentra lo que los alumnos perciben; a continuación se mencionan algunas impresiones obtenidas como resultado de la interacción personal que se ha tenido con dichos estudiantes. Una de las principales razones en la elección de la carrera en estos estudiantes (en menor grado los inscritos en la carrera de Economía), es la de no llevar "materias duras" como las matemáticas, ya que por lo general, su experiencia anterior con ellas ha sido poco exitosa. Una pregunta que casi siempre surge de los alumnos de las carreras de Psicología y Sociología al enfrentarse a

la seriación de materias que llevarán en sus respectivas carreras es ¿matemáticas ... para qué?
Es aquí donde surge la necesidad de por lo menos plantearse si es posible proporcionar situaciones que les sean afines, en donde sean ellos los que realmente puedan darse cuenta que la matemática satisface una necesidad profesional suya. Se ha nombrado a este problema el de *contextualización*, que insistentemente se retomará a lo largo del trabajo.

Así, si el alumno no encuentra una motivación para llevar el curso, el profesor se enfrenta a una actitud poco participativa por parte de él.

Al mismo tiempo, se puede llegar a cuestionar si los alumnos al llegar a la Universidad cuentan con prerrequisitos matemáticos que facilitan hallar significado a los postulados, axiomas y demás propiedades de la teoría correspondiente a cada tema y subtema del programa.
A estas alturas una cuestión que puede plantearse es ¿entonces qué puede hacer el profesor para que sus alumnos aprendan matemáticas?; realmente ¿puede hacer algo? o es más bien problema del alumno, y si es así ¿que puede hacer el alumno para que aprenda matemáticas?
Por lo pronto, lo que sí se puede decir es que en la dinámica del grupo cuando el profesor resuelve ejercicios muy específicos, se ha observado que el alumno tiende a verlos como una serie de procedimientos repetitivos asociados a un ejercicio patrón, es decir, el alumno favorece la memorización del proceso de resolución.
Antes de cuestionarse si el hecho de memorizar procedimientos constituye y/o permite alcanzar un aprendizaje, es conveniente mencionar que en términos generales, ésta parece ser la forma más socorrida de enfrentarse a los contenidos matemáticos por parte del alumno. Cabe mencionar la influencia del profesor en dicho respuesta del alumno, en términos de que posea una forma de enseñar que lo propicie. En este sentido, se cuestiona ¿es la única forma de enseñar con las condiciones en que llegan los alumnos y la necesidad de cubrir el programa? El presente trabajo hace un análisis de las componentes que debiera tener el proceso de enseñanza-aprendizaje para que se consiguieran los objetivos propuestos en el programa y considera el tema **IV Funciones** para ejemplificar el proceso.

El que el alumno resuelva ejercicios de forma repetitiva ocasiona otro tipo de inconvenientes, uno de ellos se presenta al resolver el examen: si los alumnos no encuentran ejercicios del "mismo tipo" que los vistos en clase, se sienten engañados.
En el apartado II se explica la razón de ésta aparente contradicción de lo que piensan profesor y el alumno con respecto a los ejercicios del "mismo tipo". Pareciera que el alumno sólo quisiera resolver el ejercicio que se vio en clase, por su incapacidad de generalizarlo a otro tipo de problemas.

En lo referente a la participación del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es indispensable que él mismo se responsabilice de su aprendizaje y acepte ser dirigido por el profesor. Un comentario al respecto es que en muchas ocasiones el alumno responsabiliza a sus circunstancias para justificarse de no poder dedicarle tiempo suficiente a resolver sus problemas matemáticos. Por otro lado, el proceso de aprendizaje es acumulativo en el sentido de que es necesario haber entendido ciertos conceptos para poder entender otros; si el alumno no realiza en su momento las indicaciones dadas por el profesor, le será más difícil entender los conceptos posteriores y no se le puede adjudicar al profesor la falta de claridad al "exponer una idea matemática".

Esta una de las causas por la que los esfuerzos por lograr el aprendizaje resultan en fracasos: la falta de compromiso.

Así, el alumno se puede desmoralizar básicamente por dos causas: aceptar cierta dedicación que requiere trabajo y tiempo de su parte y sentir que los temas se encuentran desligados de un objetivo suyo. La primera es una causa que el alumno puede resolver y requiere que comprenda y supere. En cuanto a la segunda, es decir, ante la visión de aparente ruptura que tiene el alumno, es el profesor quién se encuentra con la necesidad de buscar continuamente sentido a un objetivo común para mantener la atención de los alumnos.

1.2.4 La Evaluación

Cuando los grupos son muy numerosos, el examen se toma como la única fuente con la que cuenta el profesor para evaluar al alumno y ya se ha mencionado antes que la forma tradicional de evaluar el "aprendizaje" del alumno, es a través de ejercicios del "mismo tipo" que los vistos en clases.

Por otra parte, existe un problema adicional respecto a la explicación del fracaso del alumno al presentar un examen ¿con qué medios cuenta para evaluar él mismo su propio desempeño? parece ser que su única fuente es el profesor, por lo tanto la forma más frecuente de enterarse del grado de su aprendizaje es después de haber realizado el examen.

Plantear una forma alternativa de lograr aprendizajes de **conceptos** matemáticos y no de procedimientos matemáticos repercute en la forma de evaluar, puesto que el objeto de la evaluación cambia.
En este trabajo se propone el uso de *mapas conceptuales* como posibles vías en lo referente a que puede satisfacer dos cuestionamientos que se han planteado antes: por un lado en cuanto a ser una forma de evaluar la adquisición de conceptos matemáticos y por otro, en cuanto a que el alumno pueda autoevaluarse, independientemente del requisito de examen. Es necesario remarcar que la evaluación de la que se habla se refiere a un tipo cualitativo que difícilmente se puede calificar o cuantificar. Su objetivo está encaminado a detectar, de manera global, el estado de conocimiento del grupo de aprendizaje durante el curso. En este sentido se puede hablar de una evaluación de tipo formativo.

I.2.5 Relación Matemáticas - Ciencias Sociales

La mayoría de los profesores que enseñan Matemáticas saben de la importancia del carácter formativo que ellas tienen y es una de las razones por las que si se proponen enseñar un curso dentro de un contexto de aplicación de alguna disciplina, aún de las ciencias sociales, no se liga directamente aplicación con conceptos matemáticos. En el fondo se da por entendido que con el sólo hecho de practicarlas ya se generan habilidades o en algún sentido "ayudan a pensar". Sin embargo, sí se toma una actitud más crítica se puede cuestionar ... ¿qué es lo que realmente se fomenta?

Primero es necesario analizar el tipo de matemática que se requieren en estas disciplinas y en este caso, se propone realizarlo en lo que respecta a las ciencias sociales, para posteriormente proponer una estrategia para lograr desarrollarlas.

Cuadro 1.

Con el fin de cubrir los diversos aspectos que se ha visto a lo largo de este primer apartado, la propuesta pretende cubrir en el alumno los requerimientos de:

- Presentar contenidos significativos.
- Presentar contenidos accesibles.
- Valorar la pertinencia de realizar actividades que no promuevan la memorización.
- Adquirir en alguna medida el lenguaje matemático.
- Proporcionar medios para evaluar aprendizajes de conceptos y no de procedimientos matemáticos.

II Marco Teórico

A continuación se exponen los ejes que dieron origen al marco de la propuesta y que permitieron iniciar a una serie de consideraciones que se fueron delimitando para el logro de los objetivos de la propuesta. Se proporciona un panorama general en cuanto a qué y cómo se pretende justificar.

¿Por qué estudiar Matemáticas?

II.1 Las Matemáticas en la Historia

↓

¿Cómo se aprenden conceptos matemáticos?

II.2 Formación de Conceptos Matemáticos
II.3 Epistemología e Historia del concepto de Función
II.4 Registros de representación semiótica

↓

¿Cómo se evalúa el aprendizaje de conceptos matemáticos?

II.5 Evaluación de aprendizajes de conceptos matemáticos

II.1 Las Matemáticas en la Historia

Al cuestionamiento de ¿Por qué estudiar matemáticas? es necesario enfrentarla en principio, con base en saber en qué consiste la materia, ya que su importancia se manifiesta al conocer algo de su naturaleza y función.

Al respecto Morris Kline (1967) en *Matemáticas para los estudiantes de humanidades* opina:

> *"Es posible considerar las matemáticas como lenguaje, como clase particular de estructura lógica, como cuerpo de conocimientos sobre el número y el espacio, como serie de métodos para extraer conclusiones, como la esencia de nuestro conocimiento del mundo físico, o como una mera actividad intelectual divertida."*

Sin duda, para reconocer estas posibilidades será necesario conocer su propia historia, y aunque este apartado no pretende proporcionar estudios demasiado detallados al respecto, si lo hará de forma sintética y global.

Sea cual sea el método, todas las ciencias pretenden adquirir conocimiento. Los sentidos, la medición y la experimentación son algunas de las formas, aunque, necesariamente van acompañadas del razonamiento para lograr mayores alcances. En lo que sigue se expondrán las razones por las cuales se considera que todo razonamiento matemático es un procedimiento eficaz.

En palabras de M. Kline (1967): *"El objetivo primario de todo trabajo matemático es el de ayudar al hombre en el estudio de la naturaleza, empresa en que nuestra disciplina colabora con la ciencia en general"*. Para M. Kline, toda investigación relativa al problema de adquirir verdades ha tenido que ver, necesariamente, con las matemáticas y ello lo explica en razón de que permiten ver en acción las facultades de la mente humana. Entonces ¿no vale la pena estudiarlas bajo el supuesto de que proporcionan un testimonio acerca del poder de la mente para encarar problemas?

A continuación, se muestran al paso del tiempo, algunos rasgos que permitan "ver" lo que han sido, han hecho, han dado al mundo, y lo que ofrecen en sí mismas las matemáticas como ciencia.

Civilización	Egipcia y Babilónica.	Los griegos	Centrada en Alejandría	Hindú y árabe	Europa	En el mundo
En Matemáticas	Manejaron números enteros y fraccionarios, abundantes ideas de aritmética, álgebra y reglas simples para determinar áreas y volúmenes. Tabularon.	Se inclinaron en favor de la geometría. Erigieron una enorme estructura lógica que se concretó con los *"Elementos"* de Euclides.	La civilización, aunque predominante griega, fue influída de manera vigorosa por la egipcia y la babilónica. Surge la Trigonometría.	Emplean símbolos especiales para los nºs del 1 al 9, introducen la notación posicional base 10.	Introducen letras para representar clases de números. Surge la geometría analítica. A partir del estudio del movimiento surge la noción de función y el cálculo.	Se ensancharon las fronteras del álgebra, la geometría y el análisis,. Surge la geometría no euclideana la cual rompe con la relación matemáticas-mundo físico.
Aportación	Fueron grandes constructores. Sus reglas fueron producto de las experiencias acumuladas.	Abandonaron el empirismo y abordaron las matemáticas sistemática y racionalmente. Hicieron explícitos su intención de manejar conceptos abstractos y generales en lugar de relizaciones físicas y particulares.	Existe un empeño por obtener resultados cuantitativos, combinado por el amor por el estudio matemático de la naturaleza.	Siguieron la misma tendencia empírica y concreta de los egipcios y babilonios.	La meta es poner a la naturaleza al servicio del hombre.El plan era que de la experiencia y del experimento saldrían los principios matemáticos fundamentales que permitirían deducir nuevas verdades, tal y como se infieren nuevas certezas de los axiomas de la geometría. Las matemáticas estuvieron asociadas a las demás ciencias en el sentido de que organizaron su conocimiento.	Los progresos realizados en los siglos XVII y XVIII ilustraron en grado suficiente la eficacia de la ciencia como medio de desentrañar los misterios del mundo físico y de otorgarle al hombre control sobre la naturaleza. Las matemáticas progresan a un ritmo vertiginoso, debido a un inusitado crecimiento de las ciencias en general.
Periodo	4 000 años a.C.	600 a.C. - 300 a.C.	300 a.C. - 600 d.C.	800 - 1200	1550 - 1800	1800 - presente

En cuanto al papel que han jugado las matemáticas a lo largo de la historia, se resumen:

- Permitieron cuantificar y registrar observaciones.
- Trataron de erradicar el misterio y la aparente arbitrariedad de la naturaleza. Existió una convicción que la naturaleza estaba proyectada racional y en verdad matemáticamente, y que la razón humana, aliada a la matemáticas, desentrañaría ese proyecto.
- Dieron una pauta de cómo se debe razonar y distinguir un razonamiento correcto del falso dentro de una estructura axiomática.
- Contaron con herramientas que permitieron organizar el conocimiento de otras ciencias.

Podemos rescatar el papel de la matemática en tiempos actuales, tomando en cuenta la opinión de expertos dedicados a la investigación en ciencias sociales. Al respecto en la introducción de *Matemáticas y Ciencias Sociales* (1993), Pablo González Casanova opina:

> *"La estadística descriptiva y la aleatoria, la lógica y los métodos de la matemática moderna para el estudio de relaciones entre variables y estructuras nos pueden ayudar a saber si algo es verdad, y también a comprender por qué se dice algo, en qué sentido lo que proponemos como verdad corresponde a una proposición relativamente válida, y que relación guarda lo que sostenemos como verdad, o lo que otros sostienen como verdad con las características o atributos de quién lo dice y con las relaciones que observa en la trama social, en el sistema de que forma parte."*

Es decir, las matemáticas propagan una visión del mundo que se centra principalmente en que la naturaleza tiene un orden y que es posible relacionarla con la experiencia humana.

La propuesta resume el papel de las matemáticas, en dos principalmente: como herramienta y como modelo.

II.1.1 La matemática como herramienta

Con la potencialidad de la matemática para representar situaciones, se hace necesario la adquisición de la sintaxis adecuada para leerla y codificarla. Por otro lado, la matemática no sólo consta de términos que permiten codificarla y leerla, también consta de elementos con significación propia que permiten generalizar lo leído y dar un mayor espacio a su interpretación.

Así, en el presente trabajo se parte de que los objetos matemáticos cobran su verdadero sentido en las ciencias sociales, en tanto dan un mayor significado a lo estrictamente observado del fenómeno social, por lo que permiten inferir sobre el fenómeno y no precisamente sobre el objeto matemático que lo representa.

II.1.2 La matemática como modelo de pensamiento

Los griegos en la época helenística (s. XV a.C.) fueron los iniciadores de esta postura. Pensaron que la matemática podría ayudar a desentrañar la naturaleza si se veía en forma racional. Sin duda, es necesario revisar el desarrollo histórico, pero sobre todo, conocer más sobre los contenidos matemáticos curriculares, para darse cuenta de que consta de estructuras, con las cuales se permite pensar bajo un razonamiento lógico y encontrar resultados congruentes a dicha estructura. Estos resultados curiosamente, pueden llegar a conclusiones verificables en la realidad.

II.2 Formación de Conceptos Matemáticos

Ya se ha mencionado en el apartado I que el profesor generalmente presenta los temas del programa en el mismo orden en que se le ha proporcionado en forma escrita y de manera oficial.
Recordando, los temas del programa son:
TEMAS
I a)Conjuntos, operaciones y conjuntos finitos e infinitos.
II a)Conjuntos de números N, Z, Q y R.
b)Suma y producto de a).
c)Estructuras de Orden.
d)Intervalos en R.
e)Valor Absoluto.
III a)Ecuaciones de Primer y Segundo grado con una variable.
b)Ecuaciones de la recta.
c)Desigualdades
IV a)Funciones.

Los temas se encuentran ordenados de manera lógica en el sentido de que cada tema proporciona elementos formales, en cuanto a precisión de lenguaje y contenido matemático, que son utilizados en un tema posterior. Sin embargo, llevar acabo esta presentación lógica, tomando en cuenta las aportaciones de R. Skemp, implica ciertas limitaciones.

En este apartado se presentan principalmente las aportaciones de dicho autor en su obra "Psicología del aprendizaje de las matemáticas" (1980) en cuanto al análisis de los elementos necesarios que conducen a la comprensión de conceptos matemáticos. Skemp considera que muchos reformadores intentan presentar las matemáticas como un desarrollo lógico, lo cual considera como un esfuerzo loable en tanto que apunta a mostrar que la matemática es razonable y no arbitraria, pero implica ser erróneo en cuanto a que confunde los procedimientos lógico y psicológico.
A continuación se proporciona un espacio para discutir en que consiste y las repercusiones que tiene el aspecto anterior.

Presentación Lógica vs Presentación Psicológica.

En palabras de Skemp (1980) "*El propósito principal de una presentación lógica es convencer a los que dudan, el de una psicológica es conducir a la comprensión.*"; la primera presentación proporciona sólo el producto final del descubrimiento matemático, lo cual impide provocar en quien aprende aquellos procesos por los cuales se hacen los descubrimientos matemáticos.
Es decir, "*la presentación lógica enseña la idea matemática, no el modo de pensar matemático*". En contraposición, una presentación psicológica pretende responder a la pregunta del cómo se conduce a la comprensión.

Skemp parte de que todo problema de aprendizaje y enseñanza es de origen psicológico y por lo tanto, si se pretende dar alguna aportación en la enseñanza de las matemáticas, mínimamente se tendría que profundizar acerca de cómo se aprende.
Para iniciar el análisis del punto anterior, se han seleccionado aportaciones de Skemp que aclaran las siguientes preguntas ¿qué es comprensión? y ¿por qué medios podemos ayudar a provocarla?

Skemp (1980) distingue el aprendizaje inteligente (en contraposición con el aprendizaje memorístico) y lo define como: ***"la formación de estructuras conceptuales comunicadas y manipuladas por medio de símbolos"***.

Para entender el significado de esta frase es necesario haber entendido lo que es un concepto y cómo se forman. A continuación se inicia el análisis.

La Abstracción.

Dentro de nuestra experiencia cotidiana se tiene una actividad tan continua y automática que difícilmente se presta atención a ella: siempre clasificamos; clasificamos al reconocer un objeto como "uno que hemos visto antes". Por ejemplo, si vemos un cilindro alargado en forma de lápiz, pensamos que se trata de una pluma o el propio lápiz; sin embargo, al acercarnos y observar que se trata de un dulce en forma de lápiz, ya no lo clasificamos como un dispositivo que sirve para escribir, sino se distingue como un caramelo novedoso.
Internamente lo que ocurre es que para poder clasificar se necesitan distinguir ciertas cualidades que son propias de cada objeto, que las hacen únicas, de tal manera que se agrupan esas propiedades en una *clase*. Llegado el momento de aparecerse otro objeto, comparamos las propiedades del nuevo objeto con las que caracterizan a la clase, lo que nos permite incluirla en la clase antes mencionada o en cualquier otra.
Al comparar, buscamos lo semejante que tienen dos o más objetos, situaciones, imágenes, conceptos, etc., y simultáneamente hallamos en qué se diferencian (contrastamos). Al separar aspectos semejantes y diferentes, estamos abstrayendo.

Las abstracciones constan de un orden de generalidad, en el sentido de que por ejemplo, la abstracción **silla**, juntamente con otras abstracciones tales como **mesa**, **alfombra**, **armario**, construyen una posterior abstracción que es muebles. En este sentido, **muebles** es de una mayor abstracción que silla, de tal manera que las propiedades invariantes que las caracterizan se convierten en más funcionales y menos perceptibles; es decir, más alejadas de las propiedades físicas. En palabras de Skemp (1980): *"Aunque el proceso de abstracción se ejerce en diferentes niveles cognoscitivos; a pesar de ello, es el mismo proceso"*.

Resumiendo, **Abstraer** es la actividad por la cual nos hacemos conscientes de similitudes entre nuestras experiencias que nos capacitan para reconocer nuevas experiencias en tanto poseedoras de similitudes con una clase ya formada. El **concepto** surge como resultado de haber realizado cierto cambio mental relativamente duradero respecto a las propiedades definidoras de una clase, es decir, es el resultado de abstraer.

Skemp distingue dos tipos de conceptos, los que se derivan de nuestras experiencias sensoriales y motoras del mundo exterior, tales como "azul, pesado, caliente, suave, lápiz," que llama *conceptos primarios*; y aquellos abstraídos de otros conceptos que denomina *conceptos secundarios*, ejemplos de ellos son "cantidad, medida, numeración, etc."
Si el concepto A es un ejemplo del concepto B, entonces se dice que B es de un **orden** superior a A. Por ejemplo: "función lineal" es un ejemplo de "función polinomial", entonces se dice que "función polinomial" es de orden superior a "función lineal". Claramente, si A es un ejemplo de B, y B de C, entonces C es también de orden más elevado que B y A. En el caso anterior, "función polinomial" es un ejemplo de "función", entonces este último es de orden más elevado que "función lineal" y "función polinomial". "De orden más elevado" significa "que puede ser abstraído de" (directa o indirectamente).

Si se distingue a A, B y C como símbolos a los cuales se hacen referencia los conceptos de A, B y C, cuanto más elevado sea el orden de los conceptos que estos símbolos representan, mayor será la experiencia almacenada que mantienen.
En referencia a un orden elevado de los símbolos, las matemáticas son el más abstracto y, también el más poderoso de todos los sistemas teóricos.

Formación de Conceptos

Skemp (1980) considera que es posible facilitar la formación de conceptos en el alumno, con base en observar los procesos de su formación en la mente humana:

> *"Para formar el concepto rojo, podríamos señalar varios objetos y decir: 'Esto es un diario rojo; esto es una corbata roja; esto es un lápiz rojo...' De este modo podríamos conseguir que tuviese, reunidas en poco tiempo, una colección de experiencias de las cuales esperamos que llegará a abstraer la propiedad común, rojo."*

Así, se puede decir que un concepto requiere para su formación de un cierto número de experiencias que tengan algo en común.

Skemp declara que los conceptos de un orden superior a aquellos que una persona ya posee no pueden comunicarse mediante una definición, sino, únicamente, reuniendo ejemplos adecuados para que experimente. Y el alcance de las definiciones es que permiten ser una vía que añade precisión a las fronteras de un concepto, una vez formado y establece explícitamente su relación con otros conceptos.

La formación y uso de conceptos de orden superior que, en conjunto, constituyen nuestra herencia científica y cultural, transmitidos por el lenguaje durante siglos, es lo que permite construir en cada individuo su propio sistema conceptual.

Por otra parte, la construcción efectiva de un sistema conceptual es algo que cada individuo ha de hacer por sí mismo. La propuesta de tesis pugna por una toma de conciencia por parte del alumno, en cuanto a que su aprendizaje es una decisión y responsabilidad suya. El papel de la enseñanza toma sentido al poder y querer acelerar este proceso.

El aprendizaje de los conceptos matemáticos

Skemp (1980) propone dos *principios del aprendizaje de las matemáticas*, los cuales advierte que a pesar de su simplicidad, requieren de una reflexión más cuidadosa:

> 1) *Los conceptos de un orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos.*
>
> El segundo se sigue directamente de esto:
> 2) *Puesto que en matemáticas estos ejemplos son invariablemente otros conceptos, es necesario en principio asegurarse de que éstos se encuentran ya formados en la mente del que aprende.*

A continuación aclara cada uno de los principios:

> " *El primer punto se refiere a elegir una colección adecuada de ejemplos que tengan en común las propiedades que forman el concepto, pero no otras.*
> *Deben ser similares en las vías que han de abstraerse, y cualquiera otra cosa que difiera lo suficiente, respecto de las propiedades no esenciales de ese concepto particular, basta para rechazarlo o, con más precisión, lo elimina para su adquisición.*
>
> *El segundo de los dos principios, es de que necesariamente, los conceptos de orden más bajo deben estar presentes antes de la próxima etapa de abstracción, parece incluso más claro. Llevar esto a efecto, sin embargo, significa que antes de que intentemos comunicar un nuevo concepto debemos encontrar cuáles son sus conceptos contributorios; y, para cada uno de éstos, hemos de aflorar sus conceptos contributorios; y así sucesivamente, hasta que alcancemos los conceptos primarios, o experiencias que suponemos como dadas. Cuando se ha realizado esto, puede formarse un plan idóneo que presentará, al que aprende, una tarea posible, no una imposible.* "

En un apartado posterior se darán herramientas en forma de mapas conceptuales para abordar el segundo principio.

II.3 Epistemología e Historia del concepto de Función

Actualmente existe en cualquier libro de texto de Cálculo, aún el más modesto, una serie de definiciones y propiedades acerca del concepto de función, que a la humanidad le ha llevado construirlas más de 2000 años.

El objeto de realizar una revisión sobre el desarrollo histórico del concepto de función, poniendo especial énfasis en su evolución como concepto, es identificar las características más notables de su desarrollo para después tomarlos como un elemento para la propuesta. Las características se delimitarán con base en los siguientes puntos:

- Las nociones que fueron necesarias para llegar al concepto de función, porque ello serviría para proponer algún orden pedagógico en las actividades para los alumnos.
- Las representaciones simbólicas asociadas, porque ello serviría para distinguir las implicaciones de usar diversas representaciones.
- Las concepciones que históricamente se han configurado como resistentes a su evolución, porque se esperaría tener mayor cuidado en su impartición .

Para este trabajo se han utilizado las aportaciones de Ruiz Higueras (1993) en lo que corresponde a lo que denomina el "Análisis Epistemológico e Histórico del concepto de Función". A continuación se presenta una reseña de tales ideas; la exposición la divide en periodos históricos y a menos que se diga lo contrario, las citas y referencias provienen del trabajo antes citado.

LA ANTIGÜEDAD

La matemática Babilónica (2000-600 a.C.)

Las civilizaciones mesopotámicas realizaron las siguientes aportaciones: utilizaron tablas con dos columnas en donde la idea de funcionalidad se encuentra presente en una relación más general que asocia elementos de dos conjuntos o columnas. Al respecto, Pedersen (1974) reconoce en tales civilizaciones un "instinto de funcionalidad", en el sentido de que aunque no contaban con fórmulas -ya que no utilizaron letras para representar cantidades variables-, sí intentaron aritmetizar observaciones difícilmente medibles. Estas civilizaciones tampoco se conformaron con sólo tabular datos empíricos sino interpolaron y extrapolaron sus cálculos en una búsqueda de regularidades.

La matemática Griega

La matemática que utilizaron los griegos se desarrolla más en términos de proporciones y ecuaciones como consecuencia de que los objetos matemáticos al igual que sus relaciones fueron estáticas. Una consecuencia de lo anterior es que en la resolución de sus problemas se centraba en encontrar el valor de la incógnita que satisfacía la condición del problema. Pero la connotación de "variable" no existió tal y como se conoce ahora, debido a que sus problemas no eran en sí mismos variables. La "variabilidad" la consideraban como una característica exclusiva de la Física, aunque los problemas del movimiento, de la continuidad y del infinito habían sido examinados ya con Heráclito y Zenón; sin embargo, los consideraban como algo externo a las matemáticas.

Por otro lado, para los griegos existía una dificultad adicional para caracterizar relaciones de dependencia entre magnitudes diferentes. Por ejemplo, el área de un círculo la consideraban proporcional al cuadrado de su radio, pero no podían concebirlo como proporcional simplemente al radio.
Esta imposibilidad de relacionar áreas con longitudes como en el ejemplo anterior, repercute en clasificar a una magnitud variable en alguno de los siguientes tipos: longitud, área o volumen, según se tratara del problema. No se podía ver que los tres tipos de problemas se referían a una variable en común, la longitud.
En este sentido opina René de Cotret (1985) que *"la homogeneidad que conducía a comparar siempre magnitudes de la misma naturaleza, pudo ser también un obstáculo al desarrollo de la noción de función".*

Una dificultad más encontrada en la forma de pensar de los griegos es la "discretización de los números". Para los pitagóricos todo estaba formado por la "unión" de elementos indivisibles que incluso, podían llegar a formar objetos continuos. Esto suponía la existencia de una unidad común para comparar dos cantidades entre sí. Pero aparece el problema de la inconmensurabilidad, en donde se mostraba la existencia de casos donde era imposible encontrar dicha medida común que permitiera expresar a una cantidad como parte proporcional de la otra.
A los pitagóricos esto los lleva a concluir que es imposible tener variables numéricas que representen magnitudes, pues los números son discretos y las magnitudes continuas.

Esta imposibilidad constituye otro de los obstáculos que fue necesario enfrentar y al respecto Ruiz H. (1993) comenta: *"Mientras que la noción de número continuo no sea aceptada, será muy difícil construir la noción de función, ya que los números, así considerados, sólo permitían construir una ilustración discretizada de los fenómenos de la naturaleza, enmascarando la continuidad existente en la variabilidad de los mismos".*

EDAD MEDIA (siglos: XIII - XVII)

La matemática Árabe

La matemática Árabe encuentra como principal característica que el álgebra y la trigonometría se desarrollan como ciencias independientes. En el Álgebra se crearon las bases para la formalización de una teoría general de ecuaciones. En la trigonometría se estudian todo tipo de triángulos planos y esféricos. Sin embargo, ambas ciencias no adquirieron el aspecto analítico que tienen actualmente debido a la ausencia de la simbolización, razón que impidió su rápido desarrollo. Más adelante se verá lo que tuvo que ocurrir en la historia para alcanzarse el aspecto analítico de ciertos objetos matemáticos. En cuanto al concepto de función, en esta época no fue especialmente tratada.

En el continente europeo

En esta parte del mundo, a partir del comienzo del S.XIII y durante cuatro siglos se buscan explicaciones acerca de las causas de los cambios cualitativos del movimiento, con base en los fundamentos filosóficos de Aristóteles (300 a.C.) y Platón (400 a.C.). Este último sostenía que los sentidos eran engañosos y sólo mediante la razón se podía alcanzar la "verdad".

Es en la Edad Media cuando se intenta encontrar modelos del universo que respondieran al análisis de los fenómenos sujetos al cambio y al movimiento. Al respecto, René de Cotret (1985) comenta *"Se preguntaban por qué los planetas brillan, porqué el viento sopla, por qué se forma el arco iris, por qué la lluvia cae, mientras que el fuego sube.."*

En el siglo XIV la atención comienza a dirigirse del **por qué** al **cómo** suceden los movimientos, el énfasis se inclina por la formulación matemática y cuantitativa de las leyes del movimiento. Surge una teoría desarrollada en Inglaterra por Heytesbury y Swineshead siguiendo una orientación cinemática-aritmética llamada "**teoría de las calculaciones**". Según esta orientación, una "**forma**" era cualquier cualidad variable en la naturaleza, en la cual su "**intensidad**" era el valor numérico que había que asignarle en relación a otra forma invariable que llamaban "**extensión**" (como la distancia o el tiempo).
Con esta teoría comienza a desarrollarse una concepción sistemática de las relaciones entre causa y efecto como variaciones de ambas.

A partir de entonces las relaciones funcionales que se encontraban implícitas en las tablas de los babilónicos empiezan a expresarse, mediante dos métodos principales:

a) el álgebra de palabras: se utilizaban letras como cantidades variables y las operaciones se describían con palabras.

b) las gráficas: la representación gráfica de los grados de la "intensidad" de una cualidad con respecto a la "extensión" por medio de coordenadas rectilíneas se hizo común en Oxford y París, a principios del s. XIV. En particular a Nicolás Oresme alrededor de 1361, se le ocurrió una idea grandiosa : ¿Por qué no hacer un dibujo o gráfica de la manera en que las cosas varían? es decir, se preguntó ¿se podrá observar cómo se realiza el cambio de intensidades de una cualidad mediante una figura?

A este cuestionamiento Oresme propuso una respuesta afirmativa con base en tres tipos de figuras o de configuraciones diferentes que representan la velocidad en relación con el tiempo, como lo explican D'hombres y Cols. (1987):

1) Uniformemente uniformes, mediante un rectángulo representaba una velocidad constante.
2) Uniformemente deformes, mediante un triángulo rectángulo o trapecio representaban una aceleración constante.
3) Deformemente deformes, mediante cualquier curva cerrada representaban aceleraciones no constantes de la velocidad.

Se puede resumir la anterior aportación de Oresme en los siguientes términos: aunque en su obra no hay una asociación sistemática de una relación algebraica con una representación gráfica, fue capaz de percatarse de que una función se podía representar mediante una curva.

Siglos XV y XVI

En ésta época no se introdujeron grandes ideas en torno del concepto de función en sí mismo, aunque si produjo un desarrollo de la notación algebraica. Se distinguen dos direcciones fundamentales: el simbolismo algebraico y la formación definitiva de la trigonometría como rama particular; la importancia de la primera es que permitió beneficiar al desarrollo del concepto de función por la introducción del carácter sintético de la simbolización.

Siglo XVII

En esta época surge una aportación importantísima: la Geometría Analítica, con Descartes (1586-1650), quien mediante el método de coordenadas, no necesariamente concebidas como ortogonales, asocia representaciones geométricas a problemas algebraicos.

La importancia de la aportación de Descartes radica no sólo en el hecho de establecer un puente entre dos áreas de la matemáticas, la geometría plana y el álgebra, sino que introduce la idea de **variable algebraica**. Esto a su vez le permitió descubrir que en una ecuación donde intervienen **x** e **y** existe una dependencia entre las dos cantidades variables al observar que, dándole valores a una, permite calcular los valores de la otra.

Y es aquí donde por primera vez se propone una dependencia entre dos cantidades variables por medio de una ecuación en **x** e y. El efecto de la anterior aportación fue revolucionario en el desarrollo de las matemáticas.

Es necesario remarcar que el nuevo significado de "variable" contiene básicamente la posibilidad de que **x** tome infinitos valores. En este sentido **x** es variable, además, su variabilidad repercute en otra variable y en la forma de una curva en la gráfica.

La determinación práctica de la ordenada y, dada la abscisa **x**, permitió introducir el concepto de aproximación indefinida de los números evaluados por ciertas fórmulas algebraicas. Entre otras aportaciones este planteamiento dio pie a la aparición de series convergentes. En resumen surgieron varios descubrimientos en los cuales se encuentra el nacimiento y posterior desarrollo del concepto de número real y, en consecuencia, el inicio de una elaboración de la Teoría de Funciones (la cual se formalizó en el s. XIX).

Así, Descartes junto a Fermat (1601 - 1665), con el anterior instrumento algebraico, permiten descubrir el mundo de la "representación analítica", lo cual a su vez preparó el terreno para el desarrollo del análisis infinitesimal. Esto les permitió introducir a las funciones bajo forma de ecuaciones, es decir, sus aportaciones permitieron utilizar expresiones analíticas junto con sus reglas de operación, lo cual repercutió en que el estudio de las funciones tuviera el status de verdadero cálculo.

Resumiendo, a estas alturas del desarrollo histórico ya se contaba con la existencia del álgebra, la introducción del concepto de variable y del método de coordenadas, así como la asimilación de las ideas infinitesimales en forma gráfica.

Siglos XVIII - XIX

Con los trabajos de Fourier sobre series trigonométricas (problema de la cuerda vibrante) y con los trabajos sobre los números reales de Cauchy, Dedekind, Lobachevsky, Riemman o Dirichlet entre otros, el concepto de función es tratado como una correspondencia de tipo muy general, donde el énfasis se encuentra en la posibilidad de crear una función con el carácter de asignación entre variables, independientemente de la "forma" de la función.
"Si una variable y está relacionada con otra variable x, de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x". (Dirichlet cit. por Boyer, 1986, pág. 687).

Siglos XIX - XX

La noción general de función introducida por Dirichlet, se mantiene actualmente en las definiciones proporcionadas en el nivel universitario. En cita de Dieudonné (1989, pág.187): *"en la actualidad se prefiere considerar el concepto de función como aplicación".*

En cita de Fernández Viñas (1976 pág. 20): *"Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una función f definida en un conjunto X y con valores en Y es una ley mediante la cual se hace corresponder a cada elemento de X un elemento de Y. Se dice también que f es una aplicación de X en Y."*

Es decir, en la definición permanece el carácter de correspondencia unívoca y se mantiene explícita la idea de asignación de variables.

Sin embargo, en un intento por formalizar y aclarar expresiones tales como se hace corresponder, se modifica y reemplaza por las definiciones que a continuación se enumeran.

A partir de la estructuración sistemática y lógica de la teoría de conjuntos, cuando ésta se tomó como base y fundamento de toda la matemática, es cuando surge el concepto de función como terna. Veamos algunos ejemplos de definiciones donde se introduce esta idea.

> **DEF 1**. *"Se llama función a la terna $f = (G, X, Y)$, en donde G, X, Y son conjuntos que verifican las condiciones siguientes:*
> *1) $G \subseteq XxY$*
> *2) Para todo $x \in X$ existe un y solo un $y \in Y$, tal que, $(x, y) \in G$, G es la gráfica de la función f.*
> *El único elemento y de Y tal que $(x,y) \in G$ se llama valor de la función f en **x**, y se utiliza para designarlo $y = f(x)$.*
> *Es evidente entonces que la gráfica G es el conjunto de pares ordenados de la forma (x, f(x)) donde $x \in X$, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función.*
> *A X se le denomina conjunto de partida de f y a Y conjunto de llegada de f."*
> (Godement, 1971)

En la anterior definición el rasgo dinámico de asignación de variables queda oculto, resaltando el de colección de pares de elementos que es una caracterización más bien estática.

En una segunda definición se destaca la característica de que toda función es una relación.

> **DEF 2.** *"Una relación F se llama una función cuando*
> *$(x,y) \in F$ y $(x,z) \in F$, implique $y = z$*
> *una función es, pues, un conjunto de pares ordenados que tienen la propiedad especial de que siempre que dos pares (x,y) y (x,z) del conjunto tienen el mismo primer elemento, deben siempre tener idéntico el segundo"* (Apostol, 1960)

En ésta definición se enfatiza más en la importancia de que es una relación y en menor grado se destaca la característica de funcionalidad o en otras palabras, de la variabilidad de **y** con respecto a la asignación de valores de la **x**.
Al respecto cita Rusell (1967, págs.306-307) : *"La idea de función es tan importante, y tan a menudo ha sido considerada con referencia exclusiva a los números, que será conveniente llenar nuestras mentes con ejemplos de funciones no numéricas ....Por muchísimas razones es conveniente identificar la función y la relación, es decir, si y = f(x) es equivalente a* ***xRy****, donde* ***R*** *es una relación, es conveniente hablar de* ***R*** *como de la función, ... pero se debe de recordar que la idea de funcionalidad es más importante que la de relación".*

II.4 Registros de representación semiótica

En las anteriores páginas se ha hablado de "objetos representables" y de "representaciones" en el contexto del uso de la matemática en las Ciencias Sociales. Pero ¿qué es una representación? En este apartado se delimita su alcance en la comprensión de los conceptos matemáticos.

Ya se ha declarado que la vía para comprender un concepto matemático no lo es el proporcionar su definición. Entonces queda una pregunta ¿con cuales vías se cuenta?, R. Duval propone el uso de diferentes registros de representación semiótica y lo vincula con el funcionamiento cognitivo del pensamiento. Este apartado está dedicado a proporcionar sus ideas principales expuestas en "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento" (1993) y se enmarca en la dirección de la propuesta.

Una palabra comúnmente utilizada en matemáticas es la de *representación*. Así, se puede representar un objeto matemático: un número, una función, un vector, un segmento, un punto, un círculo, mediante una notación, un símbolo, trazos o figuras.... Es decir, la representación es la notación sintetizada del objeto del que hablamos o leemos, es el señuelo para recordarlo en la mente y hacer uso de él.

Es necesario recalcar que un mismo objeto matemático puede tener varias representaciones, cada una de las cuales cobra sentido según el contexto utilizado; por ejemplo, cuando hablamos de Función Lineal ¿qué nos imaginamos? ¿acaso una recta en el plano coordenado, o tal vez su representación en la forma algebraica "ax+by=0" o quizá una función que va creciendo a un ritmo constante? Solo hemos mencionado algunas alternativas las cuales cobran sentido en el contexto que se utilice.
En el ejemplo anterior, el objeto matemático es "Función Lineal" y sus representaciones pueden ser una recta o su "forma algebraica ax+by=0" por ejemplo, cada una de las cuales proporciona una idea parcial del objeto.

Por lo general en la enseñanza no se hace explícita esta posibilidad de diferentes representaciones de un mismo objeto matemático, es decir, lo que sí se hace es asociar a un objeto una única representación manteniendo el contexto constante. Esta asociación uno a uno entre objeto y su representación es lo que no permite distinguirlos como entidades separadas.
Para Duval una de las causas por la cual existe pérdida de comprensión en los conocimientos matemáticos adquiridos es precisamente esta falta de distinción entre el objeto matemático y su representación.

Una de las consecuencias de estar en contacto con sólo algún tipo de representación, es la de que proporciona una idea parcial del objeto matemático que puede ser fácilmente olvidada si se compara con la visión más general proporcionada por el uso de varias representaciones. Para Duval la explicación se encuentra en que el uso de diversas representaciones repercute en la propia conceptualización del objeto matemático.

A continuación se verán las aportaciones de Duval que sustentan esta postura.

II.4.1 Registros de representación

Las representaciones de las que se ha hablado se pueden encontrar en primer término en forma escrita o hablada pero es en la mente donde cobra significado, por lo tanto se puede cuestionar acerca de que si todo lo que imaginamos es una representación. A este respecto Duval (1993) distingue dos tipos de representación:

> *"Las representaciones **mentales** recubren al conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación, y sobre lo que les es asociado. Las representaciones **semióticas** son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un **sistema de representación**, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes."*

Por lo tanto, lo imaginable es representable mentalmente, pero sólo las representaciones semióticas se encuentran inmersas en un sistema con el cual cuentan con sus propias reglas de significado y funcionamiento, es decir, es posible operar con ellas.
A dicho sistema Duval le llamó *registro de representación semiótica* y define en él tres actividades cognitivas fundamentales:

1. **La formación** de una representación identificable.
2. **El tratamiento** de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ésta ha sido formada.
3. **La conversión** de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro en el cual conserva la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.

La formación

En la primera actividad cognitiva se responde al cuestionamiento de ¿cómo representar un objeto matemático? Ello implica una selección de rasgos y datos en el contenido por representar, los cuales son propios del registro semiótico donde se produce la representación. Por ejemplo, representar un punto en el plano coordenado repercute en precisar que ella se determina por una abscisa y una ordenada, bajo la óptica por supuesto, de la geometria analítica.
Se utiliza la descripción para proveer recursos de identificación y reconocimiento y con ello garantizar la posibilidad de su utilización, para ello existen reglas llamadas de conformidad. Ejemplificando: a las coordenadas (a,b) "a" representa la posición de la abscisa y "b" a la posición de la ordenada en el plano.

El tratamiento

En la segunda actividad cognitiva se responde al cuestionamiento de ¿cómo representar las relaciones entre los objetos matemáticos? Ello implica la existencia de reglas de tratamiento propias a cada registro.
Ejemplificando, los números del 0,1,2,...9 permiten representar cualquier cifra en notación decimal, y existen reglas de tratamiento para representar operaciones como suma, multiplicación, división, etc., entre dichas cifras.
Otro ejemplo es que bajo la regla de conformidad de que una igualdad de expresiones matemáticas es una ecuación, el símbolo de igualdad opera como una relación entre las dos expresiones matemáticas en las cuales es posible aplicar el principio de adición y multiplicación.

La conversión

En la tercera actividad cognitiva se responde al cuestionamiento de ¿cómo pasar de un registro de representación a otro? Ello implica realizar una transformación externa al registro de partida.
Se mencionarán algunos casos particulares donde se hace uso de la conversión:
En términos generales la *ilustración* es la conversión de una representación lingüística en una representación figural; por ejemplo, se puede ilustrar el valor del dólar en pesos mexicanos para determinados años, en un plano que contenga puntos y otros datos.

Por otro lado la *descripción* es la conversión de una representación no verbal como lo puede ser un esquema, una figura o gráfica en una representación lingüística. Un ejemplo lo puede ser el tener el plano con los puntos del ejemplo anterior y describir como cambia el valor del dólar con respecto al tiempo.

Duval comenta que muy comúnmente la conversión se confunde con **Código e Interpretación.**

Por un lado la **Interpretación** requiere de un cambio de marco teórico, o de contexto y con frecuencia moviliza analogías.
Por ejemplo en principio un modelo económico puede estar conformado por una expresión matemática, que por supuesto, consta por si misma de una significación; sin embargo, es necesaria una interpretación para que las componentes del modelo cobren sentido en el contexto económico.
El **código** es la transcripción de una representación en otro sistema semiótico. Esta transcripción se efectúa por medio de una serie de substituciones, aplicando reglas de correspondencia, las cuales se efectúan directamente sobre los significantes que componen la representación sin tomar en cuenta su organización ni lo que ella representa.

Para Duval, **la conversión no puede ser obtenida por la simple aplicación de reglas de codificación, ni por cualquier otra regla.**

Como ejemplo se tomará un caso particular de la expresión algebraica de una función lineal $y = ax + b$ con a, b dados: sea $y = x$, para pasar a su representación gráfica correspondiente, no basta con definir la regla de codificación "a un punto le corresponde una pareja de números" porque ello permite marcar tantos puntos como se quiera, pero no hacer un trazo continuo de una recta, para ello es necesario interpolar y aceptar la pertinencia de la ley gestaltista de contigüidad.
Para hacer la conversión inversa, de la representación gráfica hacia la escritura algebraica, es necesario identificar bien en el registro gráfico, las variables visuales pertinentes como la pendiente de la recta, la ordenada al origen y si el trazo sube o desciende, además de encontrar la relación de las anteriores variables con la forma algebraica de la función lineal.

Así, la anterior regla de codificación únicamente permite dos cosas: la lectura de una pareja de números sobre la gráfica a partir de un punto designado o la designación de un punto a partir de una pareja de números (que en este caso también es una regla de conformidad mencionada en la primera actividad cognitiva).

Su impacto

Al cuestionamiento de ¿cuál es el impacto de los registros de representación semiótica (RRS) en la cual radica su importancia?, Duval reconoce como tres características que cumple todo registro de representación y que repercuten directamente en el funcionamiento del pensamiento humano:

> *"Primera respuesta:* ***economía de tratamiento.***
> *La existencia de varios registros permite cambiar de registro, y este cambio de registro tiene por objetivo permitir efectuar tratamientos de una manera más económica y más potente."*

Por ejemplo, los números y la notación algebraica, permite representar a objetos y sus relaciones de manera más rápida en comparación con la realizada por la lengua natural, de la misma forma, permite disminuir el costo de memoria para utilizarse posteriormente. Así, una tabla con dos columnas con variables independiente y dependiente, permite mostrar la relación de los valores que toman dichas variables en determinado momento.

> *"Segunda respuesta:* ***la complementariedad de los registros.***
> *... toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa y lo que de un registro a otro no son los mismos aspectos del contenido de una situación los que están representados."*

Por ejemplo en un plano coordenado en la cual se encuentra representada una recta, la pendiente puede tomar un significado estático en referencia al ángulo de inclinación de la recta con respecto al eje de las abscisas. Así, con dicha representación es posible ver

el "estado" del objeto matemático recta: si su pendiente es positiva, negativa, cero etc., repercute en la forma del trazo de la figura.
En contraparte, el hecho de que la pendiente se mantiene constante para cualquier pareja de puntos sobre la recta, se puede comprobar mediante el uso de la forma algebraica del cálculo de pendientes, que es un registro diferente al gráfico.

En general, la lengua natural y el álgebra permiten representar operaciones entre los elementos que constituyen un objeto o una situación y las figuras representan el resultado de la operación y la totalidad de las relaciones.

> *"Tercera respuesta:* ***La conceptualización implica una coordinación de registros de representación.***
> *La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y la manifestación de esta comprensión es por medio de la rapidez y espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión."*

Con esta hipótesis Duval contradice la hipótesis de que basta con que un registro de representación este bien seleccionado para que las representaciones en ese registro permitan la comprensión de su contenido conceptual.
Ello lo considera válido para personas con un buen manejo de la actividad matemática pero insuficiente para personas sujetos en tratamiento de aprendizaje.
Reconoce que ignorar lo anterior lleva a centrar una enseñanza en contenidos conceptuales y que aparezca en los alumnos un fenómeno que denomina **encasillamiento de los registros de representación**, en el cual no reconocen al mismo objeto a través de representaciones que se dan de él en sistemas semióticos diferentes.
Así, aunque una falta de coordinación de registros no impide que se tenga comprensión del objeto, esta comprensión se verá limitada en aprendizajes ulteriores.

En resumen la existencia de RRS permite que ellos sean económicos y parciales. En caso de existir varios RRS para un mismo objeto matemático permiten que sean potencialmente coordinables.

Sin embargo, la coordinación de registros a los que hace referencia la tercera respuesta, está lejos de ser natural, la pregunta entonces se centra en como facilitar dicha coordinación, o mas bien replantearse ¿cómo se puede favorecer la actividad cognitiva de conversión?

La conversión

Duval propone un primer tipo de tarea donde :
Se requiera de identificar todos los factores de variación pertinente de una representación en un registro, con el objetivo de lograr una *discriminación de unidades significantes en el mismo registro donde la representación se reproduce.*

Para ello propone que *se realice la observación de variaciones de representación efectuadas sistemáticamente en un registro y, las variaciones concomitantes de representación en otro registro.*

Con la función lineal, en el registro gráfico, se pueden escoger actividades en las cuales se visualicen rectas con diferentes pendientes y con la misma ordenada al origen o rectas con la misma pendiente y diferentes ordenadas al origen.

Duval reconoce la percepción, como un elemento que no hay que descartar para fomentar la conversión ya que juega un rol heurístico para resolver problemas, especialmente si se trabaja con el registro gráfico.

Recalca de paso, que un aprendizaje de tratamientos puramente figurativos debe ser un aprendizaje centrado en la aprehensión operativa de las figuras, es decir, en los factores que intervienen en la visibilidad de la operación, y no sobre su aprehensión secuencial o discursiva que se centra más bien dentro de un campo teórico.

Por otra parte, Duval reconoce entre las propias representaciones grados de complejidad: entiende por *representación compleja a toda representación que "expone un procedimiento", como lo es un razonamiento deductivo o un cálculo con varias etapas.*

Antes de abordar este tipo de representaciones recomienda:

> *"Cuando estas producciones se realizan en un registro donde la organización semiótica es lineal, es esencial solicitar previamente una producción en un registro donde la organización semiótica no sea lineal (gráfica, esquema,...) y, enseguida abordar las producciones en el registro de organización semiótica lineal como una descripción de la primera producción."*

Se verá más adelante que el uso de mapas conceptuales permite detectar las representaciones menos complejas a partir de una dada además de proponer una secuencia de cómo abordarlos.

Conceptualización

¿Cuál es la relación entre representación y conceptualización?
Recordando, Duval parte de que para que exista conceptualización, es necesario la coordinación de por lo menos dos registros de representación. En sus palabras:

> ***"Si la conceptualización implica una coordinación de registros de representación, la apuesta principal de los aprendizajes de base en la matemática no puede ser solamente la automatización de ciertos tratamientos o la comprensión de nociones, sino, que debe ser también la coordinación de los diferentes registros de representación movilizados necesariamente para esos tratamientos o por esta comprensión."***

A continuación se precisará que implica la conceptualización via la coordinación de registros de representación.

Una representación semiótica permite exteriorizar una representación mental, pero no es su único papel, también es esencial en la actividad cognitiva del pensamiento en cuanto que permite:

- Desarrollar las propias representaciones mentales lo cual depende de una interiorización de las representaciones semióticas
- Cumplir diferentes funciones cognitivas: la función de objetivación que es una expresión privada del sujeto, la función de comunicación para otros y la función de tratamiento que no puede ser cubierta por las representaciones mentales
- Producir conocimientos: las representaciones semióticas permiten representaciones radicalmente diferentes de un mismo objeto en la medida en que pueden hacer surgir otros sistemas semióticos totalmente diferentes.

Así, el desarrollo de una representación mental, depende del nivel de interiorización de la representación semiótica.

Duval sostiene que el funcionamiento del pensamiento humano es inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación, y se realiza por medio de dos procesos inseparables: la aprehensión o producción de una representación semiótica necesaria para el segundo proceso, la aprehensión conceptual de un objeto.

En la propuesta

El lenguaje natural debe ser considerado a la vez como un registro de partida y como uno de llegada en el marco de la enseñanza de las matemáticas, pero, esta conversión interna no se hace directamente sino que pasa por etapas intermedias no discursivas, si en este proceso existe congruencia entre la representación de partida y de llegada de cada etapa, la conversión se facilita y podría llegar a ser, intuitivamente, como una simple codificación.

El presente trabajo pretende articular actividades que propicien un cambio de registros de representación en estas representaciones intermedias, para favorecer la conceptualización de Función, y en especial, la de Función Lineal.

II.6 Evaluación de aprendizajes de conceptos matemáticos.

En el transcurso de los anteriores apartados se ha hablado acerca de que la comprensión de conceptos matemáticos sí es un objetivo que puede alcanzar el alumno. Sin embargo, aún sin hacer un estudio bastante exhaustivo en cuanto al aprendizaje de las matemáticas en el salón de clases, se observa que no basta con la resolución correcta de ejercicios matemáticos con base en la identificación y repetición de algoritmos vistos en clases por parte del alumno, para alcanzar la mencionada comprensión (de hecho la propuesta proporciona una vía para comprenderlos mediante actividades y consideraciones dirigidas al alumno y profesor).

Sin embargo, dicha dinámica normalmente impulsada por una enseñanza centrada en proporcionar modos de operar para ciertos tipos de ejercicios y darlos por terminados para proporcionar ejercicios de otro tipo sin buscar relaciones entre ellos, se extiende hasta en la forma de evaluar, la cual sí presenta una ventaja.
Es relativamente fácil "detectar" los errores matemáticos presentados en el examen, lo cual se traduce en una evaluación con la misma rapidez del alumno, lo cual tiene un mayor impacto si se trata de grupos numerosos.

En contraposición, se puede plantear ¿hasta que grado un alumno ha comprendido un concepto? Es insuficiente la implicación lógica de a cada ejercicio resuelto incorrectamente le corresponde una comprensión errónea. La anterior pregunta origina que surjan nuevos planteamientos ¿cómo a partir de lo que cuenta, se puede construir el nuevo conocimiento?
Las aportaciones de Joseph Novak (1988) en "Aprendiendo a Aprender" se encuentran en la dirección de manifestar la importancia de utilizar **mapas conceptuales** como un elemento que permite hacer explícitas las relaciones y las imágenes que se tienen de determinado(s) concepto(s), una consecuencia de esto es que el profesor al detectar dichos conceptos en el alumno, esté en posibilidad de facilitarle una ruta de aprendizaje

En este apartado se dan consideraciones prácticas de cómo implantar dicho uso en el salón de clases. Se piensa que el profesor debe diseñar una estrategia más elaborada para aplicarla como sustituto de un examen tradicional, sobre todo si se trabaja con grupos muy numerosos.

Mapeo Conceptual como un instrumento para la Enseñanza

Los diagramas (por ejemplo organigramas) son utilizados en organizaciones donde lo que se requiere es proporcionar una idea de quienes son las partes que la conforman y como están relacionadas entre si jerárquicamente.
Aunque un diagrama es un recurso visual, puede ser una muy buena herramienta en el campo educativo. Se considerarán principalmente las aportaciones de Novak (1988) en cuanto al uso de un tipo de diagramas con fines educativos llamado **mapa conceptual**:

"Los diagramas de flujo se suelen emplear para representar sucesiones de actividades; los organigramas pueden mostrar una jerarquía, pero representan unidades y/o funciones administrativas y no significados conceptuales; los ciclos, por ejemplo el del agua, se utilizan a menudo en ciencias; las redes semánticas y los diagramas de predicabilidad se emplean en ciertos trabajos de lingüística y psicología; pero ninguno de estos tipos de mapa se basa en la teoría del aprendizaje ni en la teoría del conocimiento que constituyen la base de las estrategias de elaboración de ***mapas conceptuales*** *y de su aplicación a la educación."*

Como una primera aproximación de lo que es un **mapa conceptual, se** podría definir como un diagrama que indica relaciones entre conceptos de una disciplina o parte de una disciplina.
Novak (1988) propone que la forma de representar esas relaciones significativamente, sea a través del medio que utilizamos para comunicarnos en nuestro lenguaje natural: las proposiciones.

"Una ***proposición*** *consta de dos o más términos conceptuales unidos por palabras para formar una unidad semántica. En su forma más simple un mapa conceptual constaría tan sólo de dos conceptos unidos por una palabra de enlace para formar una proposición: por ejemplo, <el cielo es azul> representaría un mapa conceptual simple que forma una proposición válida referida a los conceptos <cielo> y <azul> ."*

Por lo tanto, los **mapas conceptuales** son un recurso visual en el cual se articula en forma sintética, las proposiciones que utilizamos en nuestro lenguaje natural.

Define:

"Un mapa conceptual es un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones."

Características

A continuación se enumerarán algunas de las posibilidades que ofrecen los **mapas conceptuales:**

- Es sintético, en el sentido de que posibilita utilizar un reducido número de ideas importantes y como consecuencia, facilita el concentrarse en tareas específicas de aprendizaje.
- Funciona como un <mapa de carreteras>, en el sentido de que muestra algunos de los caminos que se pueden seguir para conectar los significados de los conceptos de forma que resulten proposiciones.
- Una vez que se ha completado una tarea de aprendizaje, los mapas conceptuales proporcionan un resumen esquemático de todo lo que se ha aprendido.

Su contenido

Si se piensa en el tipo de conceptos involucrados en los mapas, podemos diferenciar conceptos más específicos y otros más generales. Por ejemplo, el concepto <geometría> lo podemos distinguir como un concepto más general al de <geometría analítica>. Siendo más precisos, el segundo concepto es un caso particular del primero, es decir, <geometría> es mas inclusivo que <geometría analítica>. Es decir, los conceptos constan de un orden de generalidad.
Así, *Los Ejemplos de conceptos*, que no son propiamente conceptos pero si casos particulares de ellos tienen un nivel mínimo de generalidad.

Su jerarquía

Al organizarse los conceptos en un mapa conceptual, estos cobran un orden en el nivel de generalidad. Los mapas deben ser jerárquicos, en el sentido de que los conceptos deben situarse en cierto orden.
Una razón para proponer que los conceptos más generales se coloquen en la parte superior del mapa y los conceptos progresivamente más específicos y menos inclusivos, hacia abajo, es que de esa forma los conceptos más generales pueden funcionar como organizadores iniciales del mapa, en el sentido de que proporcionan un anclaje a nivel global a partir de la cual se derivan conceptos más limitados que se encuentren incluídas en ellas.

Introducción a los estudiantes en la elaboración de mapas conceptuales

A continuación se proponen algunas consideraciones a tomar en cuenta en el proceso de introducir a los alumnos en la comprensión de lo que es un mapa conceptual y como elaborarlos, en vías de capacitarlos en el manejo de ellos.

1. Es importante hacer notar a los estudiantes que la naturaleza y el papel de los conceptos es personal y por lo tanto, puede existir diferencias entre los conceptos y sus relaciones, entre personas distintas. El elaborar mapas conceptuales en clases, permite uniformizar criterios por un lado, y por otro, le permite al profesor distinguir las características del concepto que se quieran resaltar
Así, la palabra *función* es un signo que designa ¿qué concepto? ¿qué imágenes mentales se tienen de ella?

2. Existen palabras que no son conceptos ya que no tienen un significado por si mismos en el contexto que se manejen. De este tipo son las *palabras de enlace* como los verbos y conectivos, las cuales se utilizan conjuntamente con los conceptos para formar frases que tengan significado. En este sentido, las *palabras de enlace* permiten establecer el tipo de relación que existe entre conceptos

3. Se puede iniciar relacionando dos conceptos y una o varias palabras de enlace.

Por ejemplo:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Relación}} \arrow[d, "\text{un ejemplo de ella es}"] \\ \boxed{\text{Función}} \end{tikzcd}$$

Se lee "ejemplo de relación es una función". Los conceptos son Relación y Función, las cuales están relacionadas por las palabras de enlace.

4. Se puede ampliar el significado del concepto progresivamente a medida que se vayan encontrando nuevas relaciones: "una función se puede representar de forma analítica", "una función se puede representar de forma tabular", etc.
Es decir, se puede dar ejemplos más elaborados con la intención de darse cuenta que el significado de los conceptos no es algo rígido y determinado, sino algo que puede crecer y cambiar a medida que se vayan aprendiendo más cosas.

5. Se pueden recopilar palabras que se hayan manejado durante el curso y/o palabras que los alumnos crean que son necesarias de precisar, por ejemplo:

función,	gráfica,	coordenadas,	plano coordenado,
variable,	ecuación,	punto,	etc.

Una vez identificados y puestos en el pizarrón, se proponen dos formas de realizar mapas conceptuales:

a) Se discute en grupo para seleccionar el concepto más importante, es decir, cuál es la palabra que denota la idea más inclusiva.
Se coloca el concepto más inclusivo al principio de lo que será el mapa conceptual, y a partir de ella se disponen los restantes conceptos hasta que todos los conceptos queden ordenados de mayor a menor generalidad e inclusividad. Aunque lo mas probable es que los estudiantes no estén siempre de acuerdo con la ordenación, las diferencias no deberán ser importantes y de hecho, esto resulta positivo, porque sugiere que hay más de un modo de entender el contenido de una clase.
Una vez identificado los conceptos por orden de generalidad, se eligen las palabras de enlace apropiadas para formar las proposiciones que muestren las líneas del mapa.

b) El profesor puede ordenar los conceptos de mayor a menor generalidad y a la par, ir encontrando junto con el grupo, las palabras enlaces (que denotan la manera en que están relacionados los conceptos). Esta forma de introducir los mapas en el grupo puede ser de más fácil inicio.

6. Una vez realizados los mapas de 5), se pueden buscar relaciones cruzadas entre los conceptos de una sección del mapa con otros que no provengan de la misma línea descendente o vertical, es decir, establecer relaciones horizontales.

Elementos que permiten evaluar un mapa conceptual

A continuación se proponen criterios o preguntas necesarias para realizar un mapa en forma correcta:

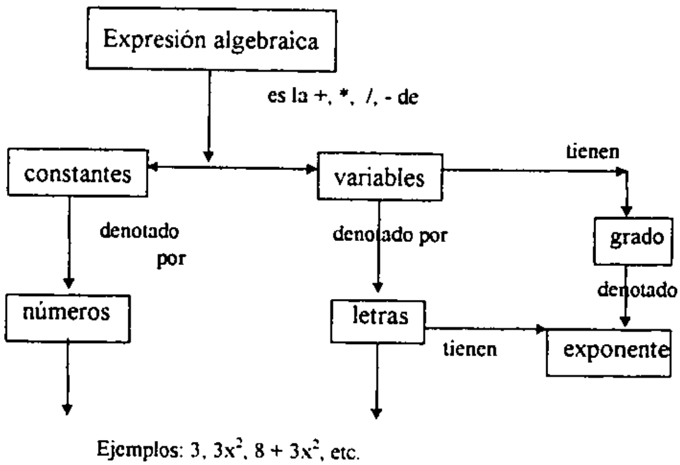
1. *En cuanto a las Proposiciones.* ¿Se indica la relación de significado entre dos conceptos mediante la línea que los une y mediante la(s) palabra(s) de enlace correspondiente(s)? ¿Es válida esa relación?

2. *En cuanto a la Jerarquía.* ¿Presenta el mapa una estructura jerárquica? ¿Es cada uno de los conceptos subordinados más específico y menos general que el concepto que hay dibujado sobre él?

3. *En cuanto a Conexiones Cruzadas.* ¿Muestra el mapa conexiones significativas entre conceptos dispuestos horizontalmente en la jerarquía conceptual? ¿Es válida la relación que se muestra?, ¿en caso de ser válida, ilustra alguna síntesis entre grupos relacionados de proposiciones o conceptos?

4. *Los Ejemplos,* que no son propiamente conceptos pero sí casos particulares de ellos ¿se colocan en el parte más inferior del mapa?

Ejemplo



Mapa 1

Aplicaciones educativas de los mapas conceptuales

Los mapas conceptuales pueden ser utilizados con diferentes objetivos, no únicamente para evaluar el desempeño del estudiante. A continuación se enumeran a manera de resumen, algunas posibilidades de su uso, haciendo manifiesto su potencialidad para dirigir actividades hacia la comprensión de conceptos matemáticos.

<u>Exploración de lo que los alumnos ya saben</u>

Es necesario que el alumno y profesor estén conscientes del valor que tienen los conocimientos previos en la adquisición de los nuevos, en el siguiente sentido: *"los estudiantes siempre aportan algo de ellos mismos en la negociación de significados y no son una tabla rasa donde hay que escribir o un depósito vacío que se debe llenar"* (Novak, J y Gowin, D. 1988).

Aquí el término *negociación de significados* pareciera no tener cabida en un planteamiento donde se considera que el profesor sabe lo que tiene que hacer, entonces ¿qué se puede negociar con el alumno? Aquí es necesario distinguir que, efectivamente la enseñanza es responsabilidad exclusiva del profesor, al igual que el aprendizaje no es una actividad que se pueda compartir, es responsabilidad del alumno. Sin embargo, se ha referido a otro tipo de negociación, el de los significados cognitivos, los cuales sí se pueden compartir, discutir, negociar y convenir.

> *"Los significados cognitivos, no se pueden transferir al estudiante tal como se hace una transfusión de sangre. Para aprender el significado de cualquier conocimiento es preciso dialogar, intercambiar, compartir y, a veces, llegar a un compromiso."* (Novak, J y Gowin, D. 1988).

En el epígrafe de su libro Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo, David Ausubel afirma:

> *"Si tuviera que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, diría lo siguiente: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia"* (Ausubel, 1968: 2a. edición, 1978).

J. Novak propone los mapas conceptuales como un instrumento educativo para averiguar "lo que el alumno ya sabe":

> *"No estamos diciendo que los mapas conceptuales sean una representación completa de los conceptos y proposiciones relevantes que el alumno conoce, pero afirmamos que constituyen un enfoque factible, a partir del cual, tanto estudiantes como profesores pueden, de manera consciente y deliberada, ampliar y avanzar."* (Novak, J y Gowin, D. 1988).

Señalar concepciones equivocadas

Los mapas conceptuales proporcionan información acerca de los conceptos y proposiciones con que cuenta el alumno, sean concepciones equivocadas o no. En caso de serlo, se pueden tomar medidas correctivas sobre una base más objetiva.

Hacer evidentes los conceptos clave o las proposiciones que se van a aprender

Por la característica de ser jerárquicos, los mapas conceptuales permiten diferenciar los conceptos por orden de importancia.

El trazado de una ruta de aprendizaje

Los mapas conceptuales pueden ayudar a los alumnos a trazar una ruta que les ayude a desplazarse desde donde se encuentran actualmente hacia el objetivo final. En este sentido, pueden funcionar como un mapa de carreteras, con la diferencia de que en lugar de utilizar lugares, se emplean ideas.

III Metodología

A continuación, se relaciona las aportaciones del marco teórico con el curso de matemáticas I :

¿En que sentido para un profesional en las disciplinas sociales, le es necesaria las matemátícas?
a)Herramienta. Organiza su información. II.1
b)Modelo. Ayuda a pensar abstractamente.II.1

↓

¿El curso de Matemáticas I, en su presentación más común, se encuentra encaminada al logro de esos requerimientos?
No, se requiere de un cambio de enfoque en varias direcciones, principalmente, en cuanto a la presentación de contenidos matemáticos para no favorecer la memorización. II.2

↓

Se propone un cambio, ¿En qué consiste?
Principalmente en favorecer la comprensión y no la memorización de objetos matemáticos, a partir del contexto que le es conocido. Proporcionar la sintaxis necesaria en cuanto a adquirir un nuevo lenguaje. Suprimir del papel protagónico las definiciones de objetos matemáticos por si mismas como punto de partida, más bien, se pretende que sean el punto de llegada.

↓

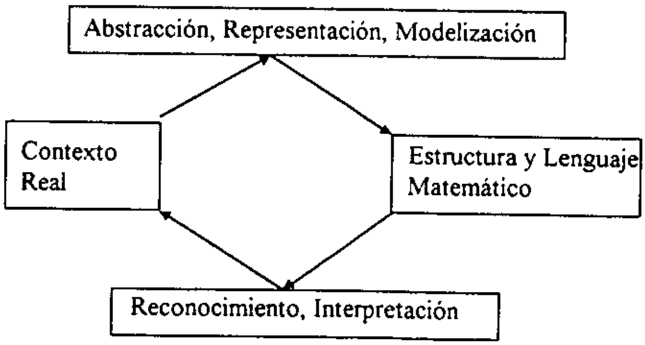
¿Cómo realizar dichos cambios?
Con base en la una Estrategia de Aprendizaje.

III.1 Una Estrategia de Aprendizaje

III.1.1 El nivel de Abstracción y el nivel de Reconocimiento

Acotando la función de la matemática para un científico social, se pueden mencionar principalmente dos:
Dar cuenta de alguna situación social a partir de interpretar relaciones en el lenguaje matemático; es decir, partir de representaciones matemáticas como lo son gráficas, tablas, fórmulas, modelos y darles una interpretación en el contexto particular social del que se trate.
Por otro lado y a un nivel más ambicioso, la matemática no es sólo el medio que permite hacer descripciones de problemáticas sociales en un momento dado; con su potencialidad de inferir sobre consecuencias y alternativas para un momento posterior, permite que sea el propio científico social quien pueda crear sus propios modelos. Como se vio anteriormente, plantear modelos requiere de habilidades y elementos que actuaron en la historia de la propia creación matemática.

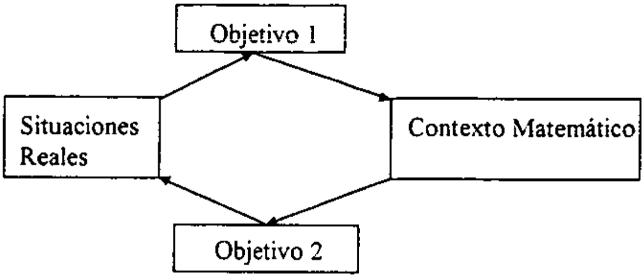
Así, se tiene un doble papel de la matemática: como elemento que le permita partir de situaciones sociales y llevar éstas a un lenguaje matemático, proceso comúnmente llamado modelización y la situación contraria, como herramienta que le sirve al científico social en su papel de traductor-interpretador de representaciones matemáticas en situaciones sociales.



Los dos papeles se pueden convertir en objetivos a desarrollar en el alumno, de hecho una interpretación de la propuesta es que el programa pretende que el alumno en algún nivel, sea capaz de alcanzarlos. En el presente trabajo los objetivos se hacen explícitos, se ven como procesos de aprendizaje y la propuesta contesta a la pregunta de cómo iniciarlos, desarrollarlos y proporciona elementos para su evaluación, todo ello en torno al concepto matemático de Función.

En el contexto Educativo

La propuesta hace explícito los siguientes objetivos centrales en relación al aprendizaje que se pretende fomentar en el alumno en el contexto escolar:
Objetivo 1: Que el alumno parta en algún nivel de situaciones reales y los represente en el contexto matemático.
Objetivo 2: Que el alumno parta en algún nivel de el contexto matemático y sus componentes representados cobren sentido en situaciones reales y sociales.



A las actividades dirigidas a alcanzar el objetivo de interpretación de las representaciones en lenguaje matemático de situaciones sociales, se les ha categorizado en un nivel llamado *Nivel de Reconocimiento*. Por otro lado, a las actividades dirigidas a alcanzar el objetivo de modelización de situaciones sociales en términos del lenguaje matemático, se les ha categorizado en un nivel llamado *Nivel de Abstracción.*

Se ha planeado:

¿Qué hacer?	¿Cómo hacerlo?	¿Con qué hacerlo?
Objetivos para el profesor	Estrategia de Aprendizaje	Actividades para el alumno

Con base en:

Objetivo 1:	**NIVEL DE ABSTRACCIÓN**
Objetivo 2:	**NIVEL DE RECONOCIMIENTO**

Dentro de las investigaciones que permiten distinguir elementos que cumplen con éstos dos objetivos, destacan las realizadas acerca de Registros de representación semiótica y las aportaciones acerca de la formación de conceptos matemáticos; ambos planteamientos ayudarán a crear un modelo de aprendizaje que justifique el logro del *nivel de Reconocimiento.*
Con respecto a alcanzar el objetivo desarrollado por el *nivel de Abstracción*, la pregunta inicial fue ¿qué es necesario para matematizar fenómenos?, ¿existe alguna metodología útil para "cuantificar" fenómenos y en especial fenómenos sociales? En la propia historia de las matemáticas surgieron este tipo de preguntas; aunque ciertamente

no todas referidas a la cuantificación; bajo la correspondiente consideración, analizar su desarrollo histórico junto con las investigaciones acerca de la formación de conceptos matemáticos, permite proponer un modelo que de cuenta de como funciona el pensamiento para pasar de lo cotidiano a la abstracción matemática.

Con base en las anteriores aportaciones, la propuesta contiene el diseño de una estrategia de aprendizaje de la cual se desprende una secuencia de actividades.

En resumen, la matemática en el contexto de las Ciencias Sociales puede tomar un doble papel, como :
a) **herramienta** para el científico social en su papel de traductor-interpretador del contexto matemático en referencia al contexto social.
b) **modelo** de pensamiento matemático que permite el paso de una situación o fenómeno cotidiano a un contexto matemático.

Con base en los anteriores papeles se pretende que el alumno en el primer curso de matemáticas I :
a) Haga: utilice a la matemática como herramienta para interpretar situaciones.
b) Se de cuenta: sepa que la matemática le podría ayudar a representar algunos fenómenos sociales y que son los fundamentos de esta ciencia, que proporcionan una forma de razonamiento, las que permiten tener una visión del mundo de forma cuantificable.

Sin duda el segundo propósito se puede extender a que el alumno modele cualquier tipo de situación social, lo cual no es un objetivo inmediato de este curso, antes de ello, el alumno se tendría que plantear la posibilidad de hacerlo. Aunque se quiera pretender que plantear modelos lineales es un objetivo mucho más modesto, no por ello deja de involucrar elementos que se han mencionado como participantes de la modelización y en lo cual toma sentido la propuesta.

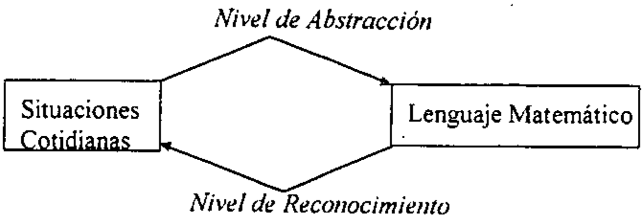
Una siguiente pregunta es cuestionarse si los procesos que sustentan *los niveles de Abstracción y Reconocimiento* son realmente independientes; es decir, si el logro del primer nivel no facilita el segundo, viceversa o ¿de que forma? Por lo pronto, queda claro que cada nivel parte de objetivos diferentes. A continuación se presentan algunas consideraciones en cuanto a las implicaciones de promover alguno de estos niveles.

Por lo general a los alumnos no siempre les agrada la idea de enfrentarse a situaciones nuevas, por ejemplo les pueden ocasionar cierta angustia el no encontrar una única respuesta rápida al cuestionamiento de ¿qué es lo variable de cierto fenómeno? Muchas veces existe cierta medida de desánimo al encontrarse ante preguntas ambiguas y peor aún, respuestas igual o más ambiguas. Una posible explicación puede ser que cuando ingresan a una carrera profesional ya se encuentran muy entrenados a dar respuestas condicionadas. Por otro lado, manejar situaciones propias del *nivel de Abstracción* implica partir de ideas creadas por el propio alumno, cuyo manejo requiere de cierto entrenamiento y acuerdo entre alumno y profesor.

Por otra parte el *nivel de Reconocimiento* es comparativamente más concreto en el sentido de que parte de las reglas de operación de la propia matemática, las cuales se expresan mediante símbolos. Pareciera que el uso de ellos evita cualquier tipo de ambigüedad, se vió en "Registros de representación semiótica" que esto no necesariamente es cierto.
Una aportación de la propuesta en este nivel es la de no ver a los símbolos con el único significado que proviene de su definición, sino el de darle diversos significados y la posibilidad de intercambiarlos según cierto contexto.

III.1.2 Una Estrategia de Aprendizaje

El aprendizaje de conceptos matemáticos se llevará a cabo a partir de la relación que se haga de abstraer y reconocer objetos matemáticos, a partir de una situación cotidiana para reinterpretarlos en un contexto matemático o, de partir de un lenguaje matemático hacia un contexto cotidiano.



Para lograr dicha relación, es necesario precisar que se manejan dos lenguajes, el cotidiano y el matemático, junto con principalmente dos habilidades, la abstracción y el reconocimiento. Se han puesto las posibilidades de relación de éstas cuatro variables, en el siguiente cuadro.

Nivel de Abstracción Parte del lenguaje cotidiano y :	***Nivel de Reconocimiento*** Parte del lenguaje matemático y :
I. Abstrae conceptos matemáticos en términos cotidianos.	**II.** Reconoce objetos matemáticos en términos del lenguaje matemático.
III. Abstrae conceptos matemáticos en términos del lenguaje matemático.	**IV.** Reconoce objetos matemáticos en situaciones extra-matemáticas y cotidianas.
Utiliza a la matemática como modelo de pensamiento.	Utiliza a la matemática como herramienta.

A su vez, a cada inciso se le llamará nivel, los cuales se precisarán en cuanto a las condiciones necesarias para desarrollarlas.

Nivel de Abstracción	***Nivel de Reconocimiento***
I. Uso de abstracciones de forma cualitativa.	**II.** Uso de conversiones y codificaciones para realizar cambios de registro de representación. Apartado II.4
III. Uso de abstracciones y representaciones.	**IV.** Se requiere de un cambio de contexto, propio de la interpretación para expresarse en términos de una situación cotidiana. Apartado II.4

Dichos niveles se manejarán con los siguientes títulos:

Nivel de Abstracción:	*Nivel de Reconocimiento:*
I. Nivel Cualitativo	**II.** Nivel Cuantitativo
III. Nivel de Representación	**IV.** Nivel de Interpretación

Un caso más elaborado del nivel III, es la modelización en el sentido que sus objetos representados son relaciones en términos de fórmulas. Así, éste nivel puede ser llamado también como el de Modelización, aunque se reconoció más propio el de Representación por considerarlo más preciso para los objetivos del curso.

Se identifican los niveles III y IV como los congruentes a los objetivos propuestos del curso y se hace necesario la participación de los niveles I y II como intermediarios para alcanzarlos. De los niveles III y IV, se destaca el nivel IV como el de mayor importancia por la frecuencia en que hará uso de este nivel el estudiante a lo largo de su carrera.

III.2 Una Estrategia de Aprendizaje para el concepto de Función Lineal

Se planteó iniciar una estrategia didáctica en la cual se fomenten *los niveles de Abstracción y Reconocimiento*, pero, ¿a partir de qué concepto matemático? De entrada se buscaría que el concepto fuera lo suficientemente general para que permitiera abarcar un mayor número de temas matemáticos y en especial, los temas a los que hace referencia el programa. Una de las razones de escoger el concepto de Función, fue la existencia de investigaciones históricas enfocadas en tal concepto. Dicho desarrollo histórico, que además se analiza bajo un enfoque epistemológico, hace explícito su surgimiento con base en situaciones contextualizadas.

III.2.1 Síntesis del desarrollo de la idea de Función con base en una clasificación

En el transcurso de la historia el desarrollo del concepto de Función se enfrentó a problemas de diferente índole; estos problemas se pueden categorizar en tres tipos, los cuales provienen de haberse enfrentado a una:
- **situación extra-matemática**
- **conceptualización matemática**
- **representación matemática**

Situación extra-matemática
Se enumerarán ejemplos de sucesos que dieron origen al desarrollo de la matemática desde un ámbito que no es la propia matemática, pero si responde a un cuestionamiento de una problemática particular de la época. En éste sentido son problemas *descontextualizados* del campo matemático:

- Las civilizaciones mesopotámicas en una búsqueda de regularidades, tabularon datos empíricos en tablas con dos columnas tratando de realizar interpolaciones y extrapolaciones.
- En la Edad Media se intenta encontrar modelos del universo: comenzó a dirigirse la atención al por qué suceden los cambios cualitativos.
- En la misma época, comenzó a dirigirse la atención al cómo suceden los cambios cualitativos.
- En el siglo XIV surge el análisis del movimiento en términos de distancia y tiempo (ya existía una concepción sistemática de las variaciones entre causa y efecto).

Conceptualización matemática
En la categoría de **conceptualización matemática** es donde los problemas se centraron en obstáculos propios de la ciencia matemática.

- En la matemática griega los objetos matemáticos y sus relaciones fueron estáticas, esto tuvo como consecuencia que se desarrollaran más en términos de proporciones y ecuaciones, sin necesidad de que surgiera la idea de "variable".

- A los pitagóricos les fue imposible imaginar que un número pudiera representar una magnitud continua, para ellos los números eran discretos. Por lo tanto podían construir sólo una ilustración discretizada de los fenómenos de la naturaleza.
- Fue necesario dejar de considerar a las magnitudes matemáticas como formadas por partes y pensarlas como descritas por un movimiento continuo.
- Surge la noción de variable algebraica.

Representación matemática

El papel de la representación va muy ligada con el de la conceptualización y de hecho se retroalimentan una a la otra, a continuación se enlistarán algunos acontecimientos que se han clasificado en esta categoría:

- En la matemática babilónica no se utilizaron letras para representar cantidades variables, sólo se registraban datos.
- Hasta el siglo XIV se utilizaron letras como cantidades variables, aunque las operaciones se seguían describiendo con palabras.
- En el mismo siglo surge la representación gráfica de los grados de la intensión de una cualidad con respecto a la extensión, utilizando coordenadas rectilíneas (trabajo de Oresme en relación a tres casos particulares del movimiento).
- En los siglos XV y XVI se introduce la idea de notación algebraica. Surge el simbolismo algebraico.
- En el siglo XVII Descartes descubre que a partir de la representación de una ecuación con **x** e **y** existe una relación de dependencia entre las dos magnitudes variables.
- Se representa la idea de curva en el plano, con base en la aportación anterior.
- Una Función se representa por diagramas de Venn.
- Una Función se representa como una terna.

Se prestará especial interés en las categoría de **situación extra-matemática** y de **representación matemática** junto con una estrategia de aprendizaje para diseñar actividades en los alumnos, con el fin de que puedan abstraer y representar respectivamente, objetos matematizables de interés en el contexto de las ciencias sociales.

III.2.2 Síntesis del desarrollo de la idea de Función

Con base en encontrar las nociones que fueron necesarias para llegar al concepto de función y sus representaciones simbólicas asociadas, a continuación se reconstruirá una historia del concepto de función como una interpretación propia a partir de los hechos vistos en el desarrollo histórico de este apartado. Se propone el siguiente orden de eventos:

1. Realización de mediciones particulares
2. Representación del resultado de mediciones por medio de tablas, las cuales no necesariamente se deducen como valores que toma una variable
3. Intento de encontrar respuestas al cómo se encuentran relacionadas dos variables en forma estática, longitud con área, (proporciones)
4. Obtención de la relación anterior en casos particulares y representación de las variables con letras y de las operaciones con palabras
5. Encuentro de la posibilidad de representar en forma gráfica una relación entre la variable independiente y la dependiente (que fue el caso de la velocidad en términos del tiempo)
6. Representación en el plano coordenado de casos particulares de valores de la abscisa y la ordenada y encuentro de alguna relación entre ellos; también se generaliza dicha relación algebraicamente, la cual es congruente con una forma definida gráficamente
7. Dada una expresión algebraica se encuentra que si se evalúa el valor de una variable, este valor repercute en el valor de la otra variable
8. Asociación de figuras con expresiones algebraicas
9. Surge la idea de infinitud para las variables y los puntos de su gráfica
10. Surge la idea de número real
11. Planteamiento de que ciertas formas algebraicas corresponden a figuras conocidas, por ejemplo, las cónicas
12. Comprensión de que los valores que toman la abscisa forman un conjunto

III.2.3 Tipos de Pensamiento

Se puede detectar el **tipo de pensamiento** que existió en la anterior síntesis histórica con base en las tres categorías antes mencionadas. Se verán algunos ejemplos puestos de menor a mayor orden de complejidad en el orden de izquierda a derecha:

Situación extra-matemática

PLANTEAMIENTO

Buscar encontrar relaciones con base en cierto orden	Analizar que es lo posible de cuantificar	Proponer que es lo posible de relacionar	Considerar como representar la relación

Representación matemática

REPRESENTACIÓN

Expresar mediciones, por medio de números	Expresar la relación entre los valores de variables (tabla)	Expresar la relación entre variables por medio de palabras y fórmulas	Expresar la relación entre variables y su valor numérico por medio de gráficas en el plano coordenado

Conceptualización matemática

CUESTIONAMIENTO

Se cuestiona la dependencia de las variables "x" e "y" en una expresión algebraica. Dependencia de la forma de la expresión algebraica con su gráfica	Se cuestiona la idea de infinitud para las variables y los puntos de su gráfica	Se cuestiona la idea de número real	Se cuestiona la idea de que los valores que toman la abscisa forman un conjunto

Una de las consecuencias de haber analizado las aportaciones de R.Skemp en cuanto al aprendizaje de conceptos matemáticos es que no es apropiado iniciar un tema desarrollando explícitamente la categoría de "conceptualización matemática" en el contexto del salón de clases. Tal conceptualización podrá alcanzarse luego de haber iniciado *los niveles de Abstracción y Reconocimiento*, es decir, después de haber empezado cierto proceso de abstracción y representación.

Se proponen como objetivos del *nivel de Abstracción* :
a) poner de manifiesto la posibilidad de "descontextualizar" o "abstraer" las variables que conforman problemáticas cotidianas al estudiante.
b) poder representar de algún modo lo abstraído en a).

El haber analizado el desarrollo histórico del concepto de función e interpretado según los anteriores tipos de pensamiento, en especial, la categoría de *situación extra-matemática*, permite planear una estrategia para promover *el nivel de abstracción* con el objetivo a). Para promover el objetivo b), se sugiere partir de la categoria de *representación matemática.*

III.2.4 Obstáculos en el contexto Educativo

Se puede cuestionar el efecto en el aprendizaje de los alumnos cuando éstos no sólo utilizan los objetos matemáticos sino que reflexionan sobre ellos mismos. Sin duda se habla de una conceptualización matemática, pero en el contexto escolar, en contraposición de la conceptualización matemática propuesta a partir del desarrollo histórico. En este sentido conviene hablar de algunos obstáculos encontrados en el salón de clases, en relación a uno de los propósitos por el que se hizo el análisis histórico.
A continuación, a partir de los hechos acontecidos en la historia, se enumerarán sus problemas equivalentes en el contexto escolar, en cuanto a que con frecuencia en el aula no se enfatiza lo suficiente que:

- Una "variable algebraica" puede no ser variable y tener la connotación de incógnita en un contexto donde las relaciones son estáticas, por ejemplo, en problemas de proporciones y ecuaciones.
- Los números no solo representan objetos discretos, resultado de contar, también representan una magnitud continua, resultado de medir.
- Lo anterior repercute en una representación continua del número, como lo es su representación en la recta numérica.
- La noción de variable algebraica surge con la posibilidad de asignarle a la variable distintos valores; por ejemplo, a una ecuación de una variable se le pueden asignar infinitos valores, pero la proposición es cierta para un único valor, en contraposición, una ecuación lineal de dos variables la satisfacen infinitos pares coordenados y en este caso, tiene una solución que no es única.
- La posibilidad de asignación del valor de la variable independiente puede ser infinita, y se representa mediante el eje de las abscisas del plano coordenado, que a su vez tiene otra representación como conjunto de los números reales.
- El rasgo dinámico de asignación de variables queda oculto en la definición de función como una terna de conjuntos, resaltando el de colección de pares de elementos que es una caracterización mas bien estática, propia de la teoría de conjuntos.
- En la definición de función con base en una relación, en principio, no es conveniente enfatizar su importancia en términos de **relación matemática** (véase la def 2. del siglo XX, del desarrollo histórico) sino su caracteristica de funcionalidad.

Se proponen como objetivos del *nivel de Abstracción* :
a) poner de manifiesto la posibilidad de "descontextualizar" o "abstraer" las variables que conforman problemáticas cotidianas al estudiante.
b) poder representar de algún modo lo abstraído en a).

El haber analizado el desarrollo histórico del concepto de función e interpretado según los anteriores tipos de pensamiento, en especial, la categoría de *situación extra-matemática*, permite planear una estrategia para promover *el nivel de abstracción* con el objetivo a). Para promover el objetivo b), se sugiere partir de la categoria de *representación matemática.*

III.2.4 Obstáculos en el contexto Educativo

Se puede cuestionar el efecto en el aprendizaje de los alumnos cuando éstos no sólo utilizan los objetos matemáticos sino que reflexionan sobre ellos mismos. Sin duda se habla de una conceptualización matemática, pero en el contexto escolar, en contraposición de la conceptualización matemática propuesta a partir del desarrollo histórico. En este sentido conviene hablar de algunos obstáculos encontrados en el salón de clases, en relación a uno de los propósitos por el que se hizo el análisis histórico.
A continuación, a partir de los hechos acontecidos en la historia, se enumerarán sus problemas equivalentes en el contexto escolar, en cuanto a que con frecuencia en el aula no se enfatiza lo suficiente que:

- Una "variable algebraica" puede no ser variable y tener la connotación de incógnita en un contexto donde las relaciones son estáticas, por ejemplo, en problemas de proporciones y ecuaciones.
- Los números no solo representan objetos discretos, resultado de contar, también representan una magnitud continua, resultado de medir.
- Lo anterior repercute en una representación continua del número, como lo es su representación en la recta numérica.
- La noción de variable algebraica surge con la posibilidad de asignarle a la variable distintos valores; por ejemplo, a una ecuación de una variable se le pueden asignar infinitos valores, pero la proposición es cierta para un único valor, en contraposición, una ecuación lineal de dos variables la satisfacen infinitos pares coordenados y en este caso, tiene una solución que no es única.
- La posibilidad de asignación del valor de la variable independiente puede ser infinita, y se representa mediante el eje de las abscisas del plano coordenado, que a su vez tiene otra representación como conjunto de los números reales.
- El rasgo dinámico de asignación de variables queda oculto en la definición de función como una terna de conjuntos, resaltando el de colección de pares de elementos que es una caracterización mas bien estática, propia de la teoría de conjuntos.
- En la definición de función con base en una relación, en principio, no es conveniente enfatizar su importancia en términos de **relación matemática** (véase la def 2. del siglo XX, del desarrollo histórico) sino su característica de funcionalidad.

Cuadro 2.

Con el fin de cubrir los diversos aspectos que se han visto a lo largo de los anteriores apartados, la propuesta pretende cubrir los requerimientos de:

- Presentar contenidos significativos para el alumno, para lo cual se pretende responder con problemas contextualizados.
- Presentar contenidos accesibles al alumno, para ello se parte de una noción, una noción muy utilizada en cualquier contexto y a cualquier nivel, la de Función.
- Valorar la pertinencia de realizar actividades que promuevan la adquisición de habilidades de abstracción en vías de modelar situaciones sociales, a poner en práctica en el nivel *nivel de Abstracción.*
- Adquirir un lenguaje matemático, y que el propio lenguaje sirva de herramienta para fomentar habilidades mas complejas, a desarrollar en el *nivel de Reconocimiento.*
- Proporcionar medios para evaluar aprendizajes y articularlos con la adquisición de nuevos conocimientos. Para ello, los mapas conceptuales permiten tener una visión del "estado" de cómo están articulados los conceptos, independientemente del fin, del momento y de quién lo utilice.

A continuación se expone una síntesis de las ideas ya desarrolladas:

¿Para qué estudiar matemáticas?
Se escogen las razones de ser un modelo de pensamiento y ser una herramienta. Modelo de pensamiento en cuanto a que a un sujeto le permite de forma instrospectiva, abstraer y representar eficazmente. Herramienta en cuanto que permite la comunicación de bloques de información también en forma eficaz. Aportaciones de M. Kline en II.1 Las Matemáticas en la Historia.

¿Cómo se aprenden los conceptos matemáticos?
A partir de situaciones contextualizadas al estudiante hasta adquirir conceptos más abstractos, en contraposición al de una presentación lógica. Aportaciones de R. Skemp en II.2 Formación de conceptos matemáticos.

¿Cuál es el mecanismo cognitivo que permite la aprehensión de los conceptos matemáticos?
Se toman las aportaciones en dos sentidos:
A partir de un objeto matemático primario, se puede construir mediante la abstracción, objetos matemáticos más complejos. Aportaciones de R. Skemp en II.2 Formación de conceptos matemáticos.
El segundo proceso se refiere al reconocimiento de los objetos matemáticos primarios o no, como entidades que por si mismas constan de significado dentro de una estructura donde se les puede operar. Dicha estructura conocida *como registros de representación semiótica*, no es única y es necesario realizar transferencias de significado entre ellas. Aportaciones de R. Duval en II.4 Registros de Representación semiótica.

> Para fines de la propuesta se declaran dos procesos: el de *abstracción* y el de *reconocimiento* que aluden a las dos anteriores aportaciones respectivamente. Esta separación se encuentra motivada por el papel de las matemáticas como modelo de pensamiento y herramienta. Aportaciones de M. Kline en II.1 Las Matemáticas en la Historia.

¿Cómo se aprenden los conceptos matemáticos del curso de matemáticas I?
A partir de situaciones contextualizadas (en el sentido de que parta de conceptos primarios para el alumno) y que tengan que ver con el programa de matemáticas I. La propuesta propone el concepto de Función como uno de los conceptos que es posible que cumpla con las dos condiciones. Aportaciones de R.Higueras II.3 Epistemologia e Historia del concepto de Función. Ver situación extra-matemática de III.2.1 .

¿En qué forma se debe abordar el concepto de Función para adquirir los conceptos matemáticos involucrados?

Para el proceso de abstracción: El desarrollo histórico y con un enfoque epistemológico del concepto, permite trazar una ruta de aprendizaje en la que interactúen los procesos cognitivos detectados en dicho desarrollo. Se reconocen básicamente tres tipos, las que de inicio parten de una situación extra-matemática, las que llevan a realizar una representación y las que tienen que ver con conceptualizar dicho proceso de abstracción y representación. Ver III.2.1 .

Para el proceso de reconocimiento: Se trabajan con las diferentes representaciones matemáticas del concepto de función y se reconocen como entidades con ciertas reglas de operación. Aportaciones de R. Duval en II.5 Registros de Representación semiótica.

Lo anterior se resume con base en la estrategia de aprendizaje:

Nivel de Abstracción	*Nivel de Reconocimiento*
I. Uso de abstracciones cualitativamente como las realizadas en la categoría de situación extra-matemática de III.2.3	**II.** Uso de conversiones y codificaciones para realizar cambios de registro de representación. Apartado II.4
III. Uso de abstracciones y representaciones. Categoría de representación matemática de III.2.3	**IV.** Se requiere de un cambio de contexto, propio de la interpretación para expresarse en términos de una situación cotidiana. Apartado II.4

¿Cómo evaluar el aprendizaje de los conceptos matemáticos?

Los mapas conceptuales dan esquemáticamente las relaciones que se tienen de los conceptos implicados. Por otro lado, obliga a reflexionar sobre la forma en que se encuentran relacionados dichos conceptos ya que se debe poner en forma explícita en forma de flechas. Aportaciones de J.Novak II.5 Evaluación de aprendizajes de conceptos matemáticos.

III.3 Desarrollo de Niveles

III.3.1 Desarrollo del *Nivel de Abstracción*

El *Nivel de Abstracción* consta de dos subniveles llamados *Cualitativo y de Representación*. A continuación se inicia el desarrollo de los dos niveles, tomando como principal aportación el análisis que se realizó acerca del *tipo de pensamiento* que prevaleció en las tres categorías detectadas en el desarrollo de la *historia y epistemología del concepto de Función*. Las categorías utlizadas fueron, respectivamente, las de **situación extra-matemática** y **de representación** para los mencionados niveles.

El nivel Cualitativo (El nivel I)

Recordando el desarrollo histórico del concepto de Función, el cual constó de una etapa cuyos cuestionamientos no fueron en torno a la matemática misma, si no en un intento por encontrar regularidades en los fenómenos que les acontecia, (ver **situación extra-matemática**) básicamente se tuvo un tipo de pensamiento cualitativo, centrado en la actividad de identificar. Es importante para este nivel identificar fenómenos cuantificables (A) y fenómenos en términos de causa y efecto (B) :

A)

Identificar fenómenos

↓

Identificar fenómenos cuantificables

↓

Identificar lo "variable" del fenómeno ==>para deducir lo que es una magnitud variable

↓

Saber el valor del fenómeno en un momento dado ==> y contrastarlo con la imposibilidad de saber el valor en un momento dado, para deducir la noción de incógnita

↓

Identificar las componentes del fenómeno ==> y deducir las nociones de "magnitud constante" y "magnitud variable"

B)

Identificar fenómenos en términos de causa y efecto

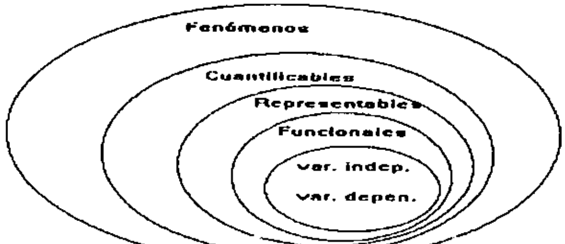
↓

Reconocimiento de regularidades en la relación entre causa y efecto

<u>Objetivos de aprendizaje del nivel I</u>

En el contexto escolar y partir del entorno cotidiano del estudiante, se proponen algunos objetivos que le faciliten la abstracción de objetos matematizables. Proceso necesario y anterior al de representación (propia del nivel III):

- Distinguir entre los fenómenos que le rodean, en aquellos que se puedan cuantificar y describir en forma explícita, la manera en que el fenómeno es cuantificado. Distinguir que es necesario una unidad de medida que exprese la cuantificación y que dicha unidad puede variar dependiendo del campo de estudio donde se analice el fenómeno.
- Distinguir a partir del fenómeno, los factores y variables que lo determinan. Discriminar las variables a las cuales se les puede asociar una magnitud, o que pueden ser fácilmente medidas.
- Distinguir entre las variables que determinan el fenómeno, aquellas que son consideradas como constantes e incógnitas en un momento dado.
- Describir la forma en que se encuentran relacionadas las variables del fenómeno.
- A partir de cierta situación, identificar las dos variables principales que dan cuenta de ella y distinguir cual de ellas determina la variabilidad de la otra, es decir, distinguir las nociones de variable independiente, dependiente y funcionalidad.
- Plantearse la posibilidad de representar dicha variabilidad entre magnitudes, con base en la existencia de un comportamiento regular.



El nivel de Representación (El nivel III)

En principio, este nivel no requiere necesariamente del uso del lenguaje matemático, ello se llevara a cabo cuando exista en algún grado el nivel de conceptualización de objetos matemáticos y se haya adquirido cierto lenguaje matemático del que hace uso el nivel cuantitativo. Este nivel, aunque inicia con las aportaciones de la **categoría de representación** detectada en la *historia y epistemología del concepto de Función*, necesita en un primer nivel de representación, del uso de representaciones más abstractas. Se requiere tomar en cuenta las aportaciones que se han proporcionado sobre *registros de representación*, en lo que se refiere al uso de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas.

El siguiente desarrollo implica dos finalidades, la primera es la de dar elementos para posibilitar la representación, la segunda es la de distinguir la noción particular que se va trabajar. Estas nociones son el título de las siguientes secciones.

I) Variable independiente y dependiente

Se pueden representar las componentes de un fenómeno

↓

Representar la causa y el efecto

↓

Posibilidad de representar relaciones en forma analítica

II) Modelos Lineales

Representación del fenómeno en momentos específicos por medio de una tabulación.

↓

Representación del fenómeno en momentos especificos por medio de una gráfica, utilizando una tabulación.

↓

Distinguir cierta regularidad en los datos de la tabulación o gráfica que permita encontrar de forma general la relación entre las variables.

↓

Posibilidad de representar el fenómeno de forma general por medio de una expresión algebraica.

III)Razón de cambio

a)Para gráficas discretas, observar para un mismo incremento en el eje **x**, el correspondiente incremento en y, y determinar su razón.

b)Generalización de gráfica discreta a gráfica continua.

c)Conversión de gráfica a expresión algebraica, vía razón de cambio.

IV) Modelos no lineales

a)Interpretación de situación real a tabulación

b)Codificación de tabulación a gráfica discreta

c)Conversión de tabulación a expresión algebraica.

d)Para gráficas discretas, observar para un mismo incremento en el eje **x**, el correspondiente incremento en **y**, ver que no es constante.

e)Graficar una función en forma continua.

f)Acotar el dominio.

g)Acotar el contradominio.

Objetivos de aprendizaje del Nivel III

En el contexto escolar, se proporcionan los siguientes objetivos para que el alumno se disponga a alcanzarlos:

- Posibilidad de representar la variable independiente y dependiente.
- Representar una situación real por medio de alguna representación tabular, gráfica y algebraica.
- Introducirse en el concepto de razón de cambio de una función lineal para después asociarlo con la de pendiente de una recta.
- Posibilidad de representar un modelo no lineal, por medio de alguna gráfica y tabla, generalizar a gráficas continuas, introducirse en el dominio y contradominio.

III.3.2 El nivel de Conceptualización matemática y Evaluación

Este nivel, tiene como inicio la **categoría de conceptualización matemática** del desarrollo que se realizó acerca de la *historia y epistemología del concepto de función*, en el sentido de hacer explícito que el objeto de estudio sean términos matemáticos. Por otra parte, las aportaciones acerca de registros de representación realizadas por Duval (1993), suponen que la conceptualización parte de la coordinación de registros de representación (ver nivel II). Uno de los objetivos de este nivel es reflexionar sobre términos matemáticos que de alguna forma ya se debieron de haber trabajado anticipadamente. El uso de mapas conceptuales permite ser un instrumento para la reflexión por un lado y ser un elemento de evaluación por el otro. Así, la evaluación, que permite darse cuenta del estado de conocimiento del concepto matemático, es otro de los objetivos de este nivel.
Los conceptos matemáticos con los que se han trabajado anteriormente y se pretenden hacer explícitos en este nivel son el de "variable matemática" y el de "función".

Objetivos de aprendizaje

En el contexto escolar que el alumno se encuentre en posibilidad de:

- distinguir diferentes usos del término variable .
- distinguir diferentes significados del término variable asociados a los diferentes usos.
- describir las diferencias entre los conceptos: magnitud, variable, constante, incógnita, relación entre ellas y función.

III.3.3 Desarrollo del *nivel de Reconocimiento*

El objetivo de este nivel es introducir a los *cambios de registros de representación* que permiten comprender el concepto de Función Lineal. Duval(1993) hace explícito la necesidad de realizar operaciones mentales como "codificar", "convertir" e "interpretar" para realizar los cambios de registros.

A continuación se describen los registros (en cuadros) y los cambios (representados por flechas) que se requieren para la conceptualización de Función Lineal.

1)Representación en palabras

↓ ↑

2)Representación tabular ==> casos particulares

↓ ↑

3)Representación analítica ==> caso general

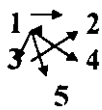
↓ ↑

4)Representación gráfica ==> casos particulares, caso global

↓ ↑

5)Interpretación bajo un contexto particular

Se pueden realizar cambios entre los registros de la siguiente forma, por mencionar un ejemplo:



El Nivel Cuantitativo (El nivel II)

Básicamente se encuentra centrado en motivar los cambios entre los registros del 1 al 4 de los registros descritos en III.3.3. Sus operaciones mentales se centran en codificar y convertir, descontextualizados de alguna interpretación social.

No fue un objetivo del presente nivel ahondar en información acerca de las *reglas de tratamiento* de cada registro (por ejemplo, definir plano coordenado, coordenadas, etc. para el registro gráfico), ya que se pensó como un material complementario a lo utilizado por el profesor.

Objetivos de aprendizaje del nivel II

En el contexto escolar que el alumno se encuentre en posibilidad de:

- A partir de gráficas continuas lineales, detectar algunas coordenadas que pertenezcan a la recta, encontrar su razón de cambio, encontrar su expresión algebraica.
- A partir de una descripción con palabras acerca de la posición de la "*x*" y la "*y*" para encontrar una línea recta, determinar su ecuación algebraica, identificar ciertas coordenadas que satisfacen a la gráfica y a la ecuación.
- Convertir parejas de variables que satisfacen ecuaciones lineales en puntos en el plano coordenado.
- Utilizar herramientas como la calculadora gráfica o computadoras que permitan utilizar su potencial dinámico para generalizar parámetros como el de pendiente y ordenada al origen, mediante la graficación múltiple e instantánea.
- Reconocer Funciones, su dominio, su rango y los valores que la satisfacen, en forma gráfica, analítica o con palabras. Obtener el rango de una función.
- Reconocer a las matemáticas como un lenguaje que permite hacer inferencias sobre los propios objetos matemáticos.

Se da la siguiente estructura con la finalidad de diseñar una muestra de actividades que sean congruentes a los objetivos antes propuestos.

I) Codificación y Conversión

a) De gráficas continuas lineales a:
- detectar algunas coordenadas .
- encontrar su razón de cambio .
- encontrar su expresión algebraica .

b) De descripción con palabras a:
- identificación de coordenadas.
- ubicación de coordenadas en el plano coordenado.
- encontrar su expresión algebraica.

c) De ecuaciones lineales a
- ubicación de puntos en el plano coordenado que satisfacen ciertas condiciones.

II) Generalización de Parámetros

a) Uso de Calculadora Gráfica.

La pendiente de una función lineal, su variabilidad.
La ordenada de una función lineal, su variabilidad.

b)Identificación de una ecuación de dos variables como función lineal.

III) Identificación de Parámetros

Reconocimiento de los parámetros, pendiente y ordenada al origen.

IV) Reconocimiento de Funciones

a)A partir de la gráfica, reconocer:

- si la gráfica corresponde a una función
- que puntos (pares ordenados) pertenecen a la gráfica de una función
- el dominio de una función
- el rango de una función
- la expresión algebraica

b)Una función lineal no tiene una única representación en forma analítica.

c) Dadas dos o más coordenadas, trazar su función correspondiente.

V) Resumen de Cambios de Registros de Representación.

Se diseñará una actividad que sintetice lo expuesto en este nivel y que facilite la comprensión acerca de que las matemáticas pueden ser vistas como otro lenguaje accesible siempre y cuando adquieran el significado de sus términos. Para ello se hace uso de otros objetos matemáticos que no son propiamente funciones lineales pero que el concepto de Función.

En ésta serie de actividades se encuentra información acerca de: gráfica discreta, gráfica continua, Conjunto de pares ordenados, Secuencia Finita, Enteros, Ecuación de dos variables, Ecuación de una variable, entre otros.

El nivel de Interpretación (El nivel IV)

Básicamente se encuentra centrado en motivar los cambios a partir de los registros del 1 al 4, en el registro 5 de III.3.3. Parte de situaciones contextualizadas y es necesario hacer uso de la interpretación para realizar el cambio de registro.

Objetivos de aprendizaje del nivel IV

En el contexto escolar que el alumno se encuentre en posibilidad de:

- Interpretar una representación gráfica en términos del contexto particular y social del problema.
- Utilizar herramientas matemáticas para describir problemas sociales con el objeto de mostrar su utilidad.

Se da la siguiente estructura con la finalidad de diseñar una muestra de actividades que sean congruentes a los objetivos antes propuestos.

I) Interpretación de Funciones Lineales

Pasar de una gráfica a la interpretación de la situación real contextualizada, correspondiente a su tabulación, razón de cambio y expresión algebraica.

II) Aplicación de Funciones

Aunque parte de una situación social contextualizada, requiere de herramientas matemáticas para interpretarlos en términos sociales.

III.3.4 Secuencia Didáctica

Se ha mencionado anteriormente que se espera que el alumno pueda comunicar lo que expresa de un fenómeno social en su lenguaje cotidiano y en términos matemáticos. Por otra parte, se también se espera que a partir de una representación matemática, pueda expresarlo en su lenguaje cotidiano. A lo largo de la propuesta se identificaron dichos objetivos como inmersos dentro de un proceso y se les asociaron los niveles III y IV respectivamente, reconocidos como los niveles de *representación* y de *interpretación*. Sin embargo, se hizo manifiesta la necesidad del uso de otros subniveles o niveles que permitieran alcanzar tales objetivos de forma más natural. Surgen los niveles *cualitativo* y *cuantitativo* como mediadores que permite, de manera dosificada, adquirir lo expuesto por los dos objetivos iniciales.
En el siguiente cuadro se expone una secuencia que permite la interacción de los niveles de manera alternada y que facilita de forma progresiva la abstracción y la representación de objetos matemáticos.
En las siguientes páginas se exponen algunos ejemplos de las actividades a que hacen referencia cada nivel. Las actividades se encuentran clasificadas con base en el nivel de que correspondan.

Secuencia Didáctica	Número de Actividades	Nivel
1	1,2	Cualitativo
2	1,2,3	Cuantitativo
3	3,4	Cualitativo
4	1	Representación
5	5,6,7	Cualitativo
6	1,2,3	Conceptualización y Eval.
7	2,3	Representación
8	4,5	Cuantitativo
9	1	Interpretación
10	4	Representación
11	6	Cuantitativo
12	2	Interpretación
13	7	Cuantitativo

Así, se espera iniciar con las primeras actividades de cada nivel en el siguiente orden: cualitativo, cuantitativo, representación, conceptualización y por último, interpretación. Una vez iniciado las dos primeras actividades del nivel cualitativo, se espera iniciar las tres primeras actividades del nivel cuantitativo, se retoma el nivel cualitativo y se prosigue con el de representación, se vuelve a retomar el nivel cualitativo hasta detenerse a reflexionar sobre lo que se ha hecho en el nivel de conceptualización. Después los cambios de niveles se realizan en torno a los niveles de representación, cuantitativo e interpretación.

III.4 Muestra de Actividades con base en la Estrategia de Aprendizaje para el concepto de Función con énfasis en la Función Lineal.

III.4. Muestra de Actividades con base en la Estrategia de Aprendizaje

A continuación se proporcionan algunas actividades en la dirección de dar algunos ejemplos acerca de la forma en que se puede intrumentalizar la Estrategia de Aprendizaje. Esta serie de actividades se encuentra desglosada por cada nivel y la puesta en práctica se propone se realice como la mencionada en la secuencia didáctica.

Índice de Actividades

Nivel I Cualitativo

a)Fenómenos cuantificables	Actividad 1
b)Magnitud y Magnitud Variable	Actividad 2
c)Variables	Actividad 3
d) Incógnita y Magnitud Constante	Actividad 4
e)Relaciones entre las anteriores ¿Cómo se relacionan?	Actividad 5
f)Variable independiente, dependiente y Función	Actividad 5
g)Función Analítica	Actividad 7

Nivel III de Representación

a)Representación de variable independiente y dependiente	Actividad 1
b)Modelos Lineales	Actividad 2
c)Razón de cambio	Actividad 3
d)Modelos no lineales	Actividad 4

Nivel de Conceptualización y Evaluación

a) Usos diversos de Variable.	Actividad 1
b) Significados de Variable	Actividad 2
c) Mapas Conceptuales.	Actividad 3

Nivel II Cuantitativo

a) Codificación y Conversión	
1) De gráficas continuas lineales	Actividad 1
2) De descripción con palabras	Actividad 2
3) De ecuaciones lineales	Actividad 3
b)Generalización de Parámetros	Actividad 4
c) Identificación de Parámetros	Actividad 5
d) Reconocimiento de Funciones	Actividad 6
e) Resumen de Cambios de Registros de Representación.	Actividad 7

Nivel IV de Representación

a) Interpretación de Funciones Lineales	Actividad 1
b) Aplicación de Funciones	Actividad 2

III.4.1 El nivel I Cualitativo

Actividad 1
Serie de problemas de reconocimiento de Fenómenos Cuantificables

1) Identifica 5 fenómenos
2) ¿Esos fenómenos se pueden cuantificar?
3) ¿Qué es lo variable de esos fenómenos?
4) Menciona 5 fenómenos que tengan causa y efecto.
5) ¿Cuál es la causa?
6) ¿Cuál es el efecto?
7) Propón tres ejemplos que no se puedan cuantificar.

Actividad 2
Serie de problemas de reconocimiento de Magnitudes

1)¿Qué se puede cuantificar o medir?

1. Las cuotas de Ingreso en la U.A.M. siempre suben, aunque existen vias que se podrán dar como alternas....
2. En Verano en las ciudades del norte del pais llueve mas.
3. Cada dia corro una distancia mayor.
4. De diciembre a la fecha, cada dia como menos.
5. Mi salario es insuficiente, ¿cómo administro mis gastos?
6. A pesar de que gano cada dia más dinero, también es cierto que gasto más.
7. Cada dia soy más hábil resolviendo ejercicios de matemáticas.
8. En este año la ciudadanía votó más que en las elecciones pasadas.

Propónle una unidad de medida en cada caso.

2) ¿Qué magnitudes son fijas y cuáles son magnitudes variables?

1. Un céntrico estacionamiento tiene una tarifa de $2.00 por la primera hora de estacionamiento y $1.00 por cada hora adicional o porción de ella hasta un máximo de $6.00 al día .
2. Un vendedor tiene un salario base de $1000 al mes más una comisión del 8% de las ventas totales que realiza por arriba de $6000.
3. Las cuotas de Ingreso en la U.A.M. siempre suben.
4. Se hará un estudio acerca del peso de la torre Latinoamericana.

Actividad 3
Serie de problemas de reconocimiento de Variables

1) En los siguientes enunciados identifica a la magnitud variable y determina qué valores toma.

1. Las cuotas de Ingreso en la U.A.M. siempre suben.
2. Los costos permanentes semanales de producción de una empresa son de $200 y el costo variable por unidad es de $0.70.

3. El ritmo de crecimiento de la población de México D.F.
4. La cantidad de aire que respiramos.

¿Puedes conocer el valor de magnitud variable en algún momento? ¿siempre? o es una incógnita.

2) En los siguientes enunciados identifica lo que consideres una incógnita y/o una magnitud variable. Explica porqué.

1. Yo siempre tengo el doble de lo que tu tienes.
2. Mientras más alumnos entran a un curso más Aprueban.
3. La cuota de inscripción al club no la conozco.
4. Un vendedor tiene un salario base de $1000 al mes más una comisión del 8% de las ventas totales que realiza por arriba de $6000 ¿Cuánto gana el vendedor?

Actividad 4
Serie de problemas de reconocimiento de Magnitudes e Incógnitas

1) ¿Qué magnitud es constante en los siguientes enunciados?

1. Los costos permanentes semanales de producción de una empresa son de $200 y el costo variable por unidad es de $0.70
2. Para rentar un autobús, el número mínimo de pasajeros debe cubrir cierto margen de ganancias, es decir, las entradas deben ser mayor a $200.00

2) Identifica Incógnita, Magnitud Constante y Variable en los siguientes problemas:

1. Las Aerolíneas del Pacífico tienen una tarifa de $6 por transportar cada libra de mercancía 900 millas y de $10 por transportar cada libra 1700 millas.
2. El propietario de un edificio de apartamentos puede alquilar todas las 60 habitaciones si fija un alquiler de $120 al mes por habitación. Si el alquiler se incrementa en $5, dos de las habitaciones quedarán vacías sin posibilidad alguna de alquilarse.
3. Para estudiar el ritmo al que aprenden los animales, un grupo de estudiantes de psicología realizaron un experimento en el que una rata blanca era enviada repetidamente a través de un laberinto de laboratorio. Los estudiantes encontraron que el tiempo requerido por la rata para atravesar el laberinto siempre sobrepasaba los 3 minutos pero a medida que se repetían las pruebas el tiempo disminuía.

3) ¿Qué variables consideras que intervienen en los siguientes eventos?

1. Crecimiento de la población.
2. Mortalidad de la población.

Actividad 5
Serie de problemas de reconocimiento de Relaciones entre Magnitudes

3)¿Cómo se relacionan las magnitudes en los siguientes eventos?

1. Crecimiento de la población.
2. Mortalidad de la población.

En cada evento, si crece una magnitud , ¿Qué pasa con la otra?

Actividad 6
Serie de problemas de identificación de Variables Dependientes e Independientes y Funciones

"La variable dependiente siempre esta en función de la variable independiente".
Con base en la Actividad 1 del nivel de Representación, completa los siguientes problemas:

Número de problema			
1	número de unidades vendidas	**esta en función de**	los pesos gastados en publicidad
2		**esta en función de**	
3		**esta en función de**	
4		**esta en función de**	
5		**esta en función de**	
6		**esta en función de**	
7		**esta en función de**	

Actividad 7
Serie de problemas de reconocimiento de Funciones Analíticas

1) Identifica si la función tiene un comportamiento regular o no:

1. Cantidad de dinero que ahorras por mes. La función entre la cantidad de dinero ahorrado con respecto al tiempo ¿siempre es la misma?:
2. (¿cada mes ahorras la misma cantidad?)
3. ¿Cómo es tu estado animico con respecto a tu nivel económico? ¿siempre es una función con comportamiento regular?
4. (¿a mayor nivel económico mayor satisfacción?
5. La función entre el número de nacimientos con respecto al tiempo ¿es siempre la misma?
6. Calificación promedio por trimestre ¿es siempre la misma?

2) Lo siguiente es falso o verdadero?

1. Si existe un comportamiento regular de las variables, entonces se puede predecir el comportamiento de la función en un momento posterior.
2. Si existe un comportamiento regular donde se conoce de manera explícita el comportamiento de las variables que intervienen en la función, entonces se puede expresar analíticamente.

3) Identifica funciones que pueden ser expresadas en forma analítica:

1. Yo siempre tengo el doble de dinero de lo que tu tienes. La función entre la cantidad de dinero que tu tienes con respecto a lo que yo tengo es:
2. Si yo siempre tengo $100.00 independientemente de lo que tengas tú. a)La función entre la cantidad de dinero que yo tengo con respecto a lo que tu tienes es: b)La función entre la cantidad de dinero que tu tienes con respecto a lo que yo tengo es:
3. La función entre número de habitantes con respecto al número de nacimientos, por ejemplo ¿si hay mas habitantes hay mas nacimientos? ¿hay un comportamiento regular?

III.4.2 Actividades del nivel III - Representación

Actividad 1
Problemas de identificación y representación de Variables y sus Relaciones

1) En la siguiente serie de problemas, identifica que variable se relaciona con cual y represéntalas. Te puedes apoyar en la tabla.

1. El número de unidades vendidas cada semana de cierto producto depende de la cantidad en pesos gastada en publicidad.
2. Un céntrico estacionamiento tiene una tarifa por hora de $1.00 por cada hora de estacionamiento.
3. Un céntrico estacionamiento tiene una tarifa de $2.00 por la primera hora de estacionamiento y $1.00 por cada hora adicional o porción de ella hasta un máximo de $6.00 al día .
4. Un vendedor tiene un salario del 8% de las ventas totales que realiza.
5. Un vendedor tiene un salario base de $1000 al mes más una comisión del 8% de las ventas totales que realiza por arriba de $6000.
6. Para estudiar el ritmo al que aprenden los animales un grupo de estudiantes de psicología realizaron un experimento en el que una rata blanca era enviada repetidamente a través de un laberinto de laboratorio. Los estudiantes encontraron que el tiempo requerido por la rata para atravesar el laberinto siempre sobrepasaba los 3 minutos y a medida que se repetían las pruebas el tiempo disminuía.
7. Los psicólogos opinan que cuando una persona es requerida para recordar un conjunto de hechos, el ritmo al que se recuerdan los hechos es proporcional al número de hechos importantes en la memoria del sujeto que no han sido recordados todavía.

Número de problema	Variable 1	Variable 2
1	número de unidades vendidas: x_1	pesos gastados en publicidad : x_2
2		
3		
4		
5		
6		
7		

De la anterior tabla , puedes decir ¿Cómo se relacionan x_2 y x_1?

			Var. independiente	Var. dependiente
1	A mayor x_2	Mayor x_1	x_2	x_1
2				
3				
4				
5				
6				
7				

¿Puedes representar la anterior tabla de forma más simplificada?

Actividad 2
Serie de problemas a nivel de Modelos de Funciones Lineales

1) Sabiendo que $15 dólares equivalen a $112.95 pesos (suponiendo que el valor de cambio entre compra y venta es el mismo), formar:

1. Una tabulación donde se encuentre el equivalente a pesos de 2, 4, 6, 8 y 10 dólares.
2. Un plano coordenado donde se muestre las equivalencias del número de pesos indicados en 1., con el eje **x** en unidades de dólares y el eje **y** en unidades de pesos. Estudia esos pares de coordenadas, ¿Tienen algún patrón?
3. Una expresión que permita convertir dólares a pesos, es decir, una función que determina el número de dólares dependiendo del número de pesos.
4. Una función que determina el número de pesos dependiendo del número de dólares.

2) Un obrero gana $22.60 por 8 horas de trabajo.

1. Tabula el número de horas de trabajo vs su salario, para 4,8,12 y 16 horas.
2. Gráfica los valores tabulados en 1.
3. ¿Cuál será la gráfica que represente el número de horas para cualquier tiempo?

Actividad 3
Serie de problemas a nivel de Razón de Cambio

1) En el problema 1 de la Actividad anterior:

Si se dan valores en la coordenada de pesos le corresponden valores en la coordenada de dólares y:

1. ¿Cuál es el incremento con el cuál oscilan los valores de la variable independiente (pesos)?

2. ¿A intervalos iguales de la variable independiente le corresponden intervalos iguales de la variable dependiente?
3. ¿Cuál es el incremento con el cuál oscilan los valores de la variable dependiente (dólares)?
4. ¿A que equivale el cociente del incremento en pesos entre el incremento de dólares? *Le llamaremos razón de cambio*
5. ¿Cuál será la gráfica para cualquier cantidad de pesos (1/4, 6/8, ...)?
6. ¿Cuál es una función que determina el número de dólares dependiendo del número de pesos, en términos de la razón de cambio?

2)En el problema 2 de la Actividad anterior:

1. ¿Cuál es el intervalo con el cuál oscilan los valores de la variable independiente (horas)?
2. ¿Cuál es el intervalo con el cuál oscilan los valores de la variable dependiente (pesos)?
3. ¿A que equivale la razón de cambio?
4. ¿Cuál será la gráfica para cualquier cantidad de horas (1/4, 7 o cualquier cantidad de pesos)?
5. ¿Cuál es una función que determina el número de pesos dependiendo del número de horas trabajadas, en términos de la razón de cambio?

Actividad 4
Serie de problemas a nivel de Modelos de Funciones No Lineales

1) Consideremos cierta ciudad con una población en un momento dado de 1 millón de habitantes. Después de 1 año, la población ha crecido 1.1 millones, es decir, ha crecido un 10% del tamaño al inicio de ese año. Lo anterior se expresa:

En el primer año:

$$1 + (0.1)(1) = 1.1 \text{ millones}$$

¿Cuánto ha crecido en el segundo año?

Ayuda: Durante el segundo año, el incremento en la población será del 10% del tamaño al inicio de ese año. Aplica el mismo razonamiento utilizado en el primer año.

Considerando que el crecimiento es a una tasa del 10% anual:

1. Tabula el tamaño de la población después de: 1,2,3,4,5,6,7 y 8 años.
2. Gráfica en el plano coordenado los puntos a los que hace referencia 1.
3. ¿Esos puntos corresponden a los puntos de una línea recta?
4. ¿Tiene una razón de cambio constante?
5. ¿Cuál será la gráfica para cualquier tiempo (año, mes, semana, día, etc.)
6. ¿Cuál es el intervalo donde la variable independiente "tiempo" tiene sentido para la gráfica?
7. ¿Cuál es el intervalo donde la variable dependiente "número de habitantes" tiene sentido para la gráfica?

III.4.3 Actividades de Conceptualización y Evaluación

Actividad 1
Serie de problemas al nivel de Conceptualización. Usos del términoVariable

1) Uso de las variables

1. En el siguiente ejemplo: Los costos permanentes semanales de producción de una empresa por son de \$200 y el costo variable por unidad producida es de \$0.70. Podemos declarar como "variable" a X.
2. ¿Qué denotan las siguientes expresiones : 200, 0.7X, 200 + 0.7X ?
3. La X ¿en que unidades de medida está? y el ¿costo total?
4. El valor de la X ¿es incógnita?
5. Para un momento específico, puedo saber la cantidad de unidades producidas, por lo tanto, para ese momento puedo conocer el costo total. Así, para X=6 unidades, ¿cuál es el costo total?
6. ¿Puedo asegurar que sé el costo total a través de la relación 200 + 0.7X, aunque de momento no conozca el número de unidades producidas?
7. ¿X representa un conjunto de valores potenciales porque el número de unidades puede ser 1 unidad producida , 2 unidades producidas, 5,10, etc. (de hecho podemos decir que los valores que tome X forman un subconjunto de los enteros no negativos)
8. ¿Obtengo un costo total para cada valor de unidades producidas?

Actividad 2
Serie de problemas al nivel de Conceptualización. Significados del término Variable

1) Significados del término variable

Ya se había mencionado que la X es una variable, pero éste término tiene diversos significados, pensar en la forma en que lo hicimos en los puntos del 1 al 8 de la actividad anterior es pensar en las diferentes connotaciones del término. A continuación, en la parte izquierda te damos algunos significados, relaciónalo con el tipo de pregunta de la anterior actividad que tu consideres que le corresponde mejor:

Significados:	Preguntas:
CANTIDAD	1
GENERALIZACIÓN	2
INCÓGNITA	3
CONJUNTO y mas específicamente DOMINIO	4
CASILLERO	5
CONJUNTO Y más específicamente CONTRADOMINIO	6
SÍMBOLO	7

Ejemplo: podríamos pensar que el ejercicio uno de la actividad 5, utiliza a la "X" como un símbolo.

Nota: 6 y 7 tienen implícitamente la idea de cambio.

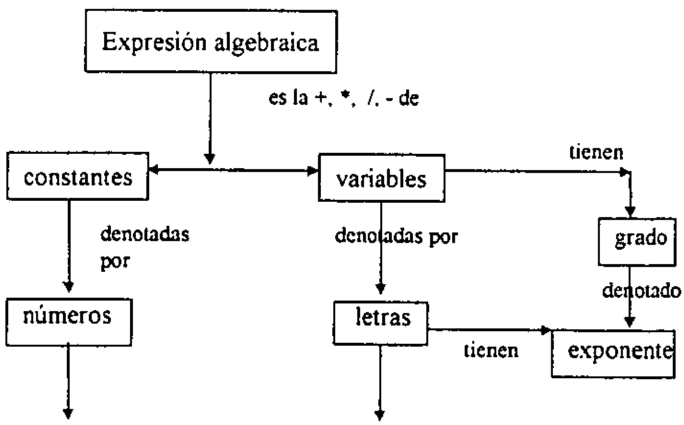
Actividad 3
Serie de problemas al nivel de Conceptualización. Mapas Conceptuales

1) Utiliza mapas para contestar las siguientes preguntas:

1. Relaciona las siguientes palabras por medio de un mapa:
   a) variable
   b) incógnita
   c) constante
   d) relación
   e) magnitud
2. Relaciona las siguientes palabras por medio de un mapa:
   a) variable independiente
   b)variable dependiente
   c)función
3. Relaciona 1) y 2) por medio de un mapa.
4. Preguntas: ¿Una incógnita siempre es variable?, ¿Una variable, incógnita, constante, siempre es una magnitud?, ¿Cuántas maneras tiene de representarse una función?

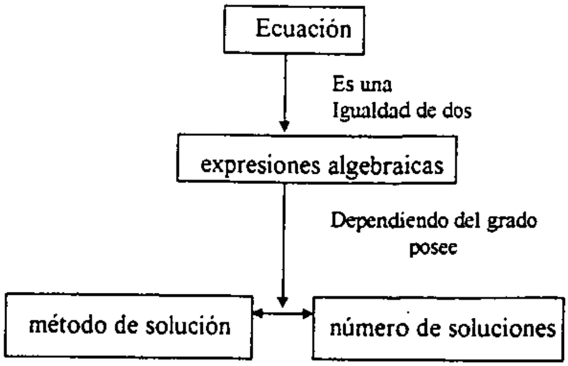
A continuación se muestran algunos ejemplos de mapas conceptuales los cuales se pueden contrastar con las respuestas dadas por los alumnos.

Ejemplos de Mapas:

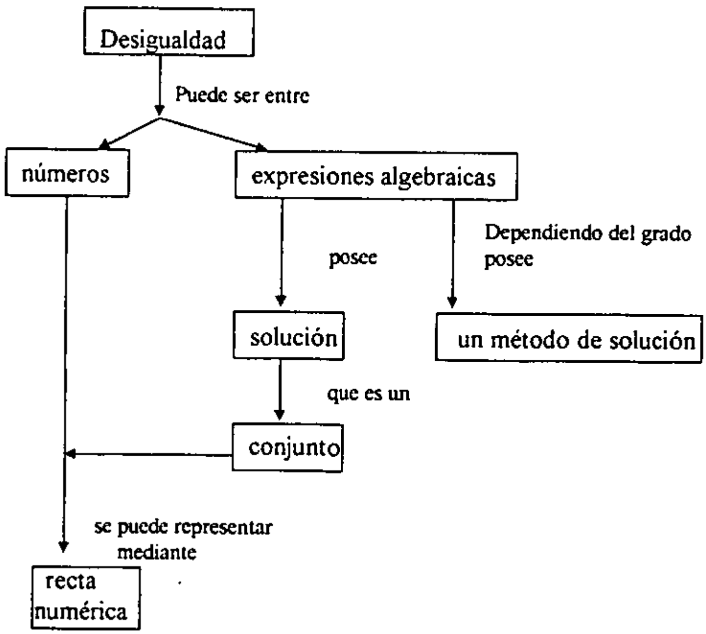


Ejemplos: 3, $3x^2$, $8 + 3x^2$, etc.

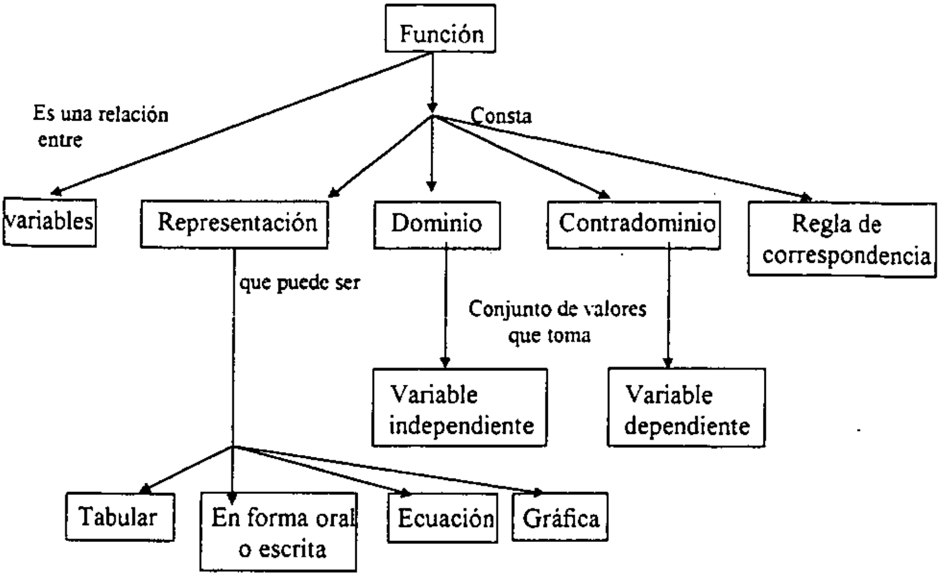
Mapa 1


Ecuación
Es una
Igualdad de dos
expresiones algebraicas
Dependiendo del grado
posee
método de solución
número de soluciones

Mapa 2


Desigualdad
Puede ser entre
números
expresiones algebraicas
posee
Dependiendo del grado
posee
solución
un método de solución
que es un
conjunto
se puede representar
mediante
recta
numérica

Mapa 3


Función
Es una relación entre
Consta
variables
Representación
Dominio
Contradominio
Regla de correspondencia
que puede ser
Conjunto de valores que toma
Variable independiente
Variable dependiente
Tabular
En forma oral o escrita
Ecuación
Gráfica

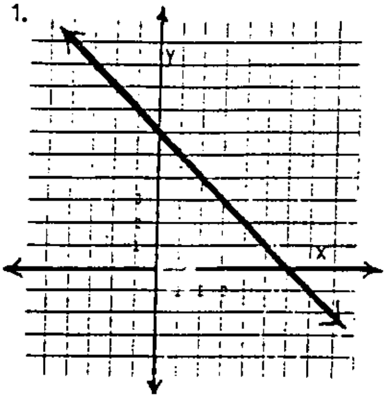
Mapa 4

III.4.4 Actividades del nivel II - Cuantitativo

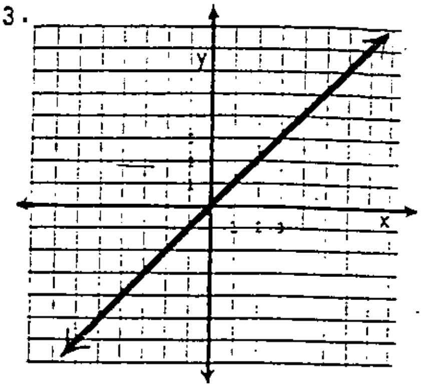
Actividad 1
Serie de problemas de Codificación y Conversión. A partir de Gráficas.

1)Para cada una de las gráficas:

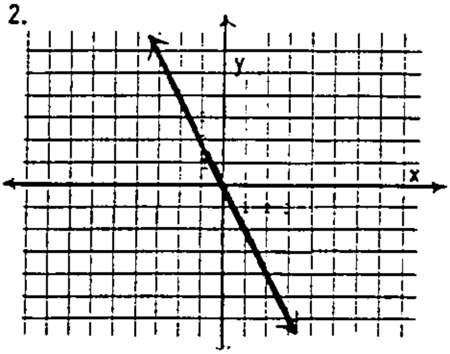
1.



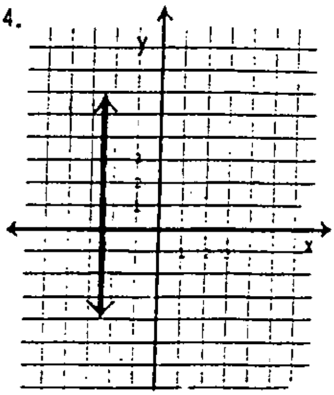
3.



2.

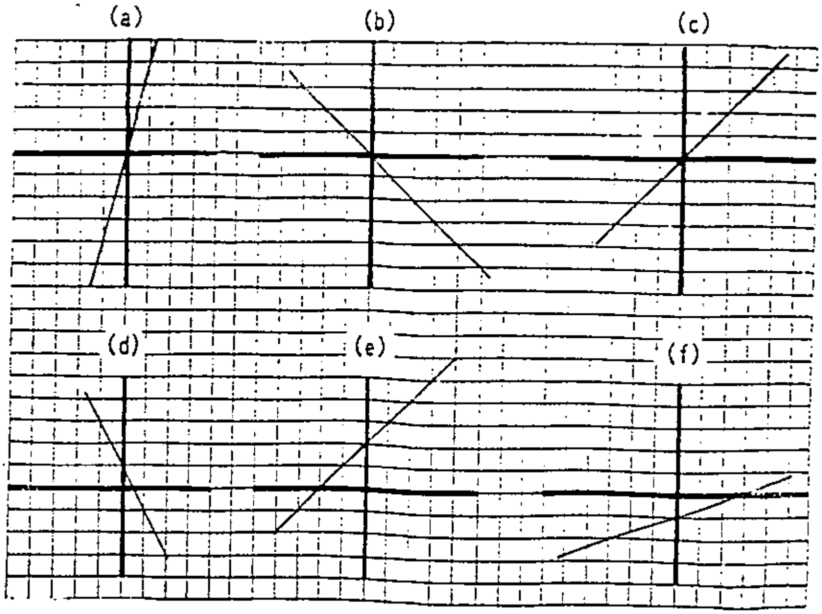


4.



a) Escribe 6 pares de coordenadas contenidas en la gráfica.
b)¿Cuál es el valor de y cuando $x = 0$?
c)¿Cuánto cambia y cuando x varía de $x=0$ a $x = 1$?
d)¿Cuál es la razón de cambio?
A la razón de cambio también le podemos llamar pendiente.
e) Escribe una ecuación algebraica, que permita encontrar y dada x .

2)Para cada una de las gráficas :
¿Cuáles son las pendientes de las rectas? ¿Es importante la escala para calcular su pendiente?



Ayuda: puedes formar un triángulo rectángulo construyendo su base y altura (trazando una recta horizontal y otra vertical) y así ver cuantas unidades en x por cuantas en y, te llevó formarlo.

Actividad 2
Serie de problemas de Codificación y Conversión. A partir de Descripción con palabras.

Para cada uno de los siguientes problemas :
a. Escribe cuatro pares de coordenadas que cumplan con la descripción correspondiente.
b. Señala la gráfica sugerida por los puntos que especifican tales pares de coordenadas.
c. Escribe una ecuación algebraica para cada descripción.

1. La suma de dos números es ocho.

2. La diferencia entre dos números es dos.

3. El cociente de dos números es tres.

4. Dados dos números, el primer número es siempre cero.

5. Dados dos números, el segundo número es siempre el negativo de cuatro.

6. Dados dos números, el segundo número es el opuesto de el primer número.

Actividad 3
Serie de problemas de Codificación y Conversión. A partir de Ecuaciones.

1) La ecuación es $x+y=-5$
Encontrar los pares ordenados que satisfacen las siguientes condiciones:
a) La coordenada en x es positivo.

b) La coordenada en y es cero.

c) La coordenada en x es cuatro veces la coordenada en y.

2) La ecuación es $y=2x+-6$
Encontrar los pares ordenados que satisfacen las siguientes condiciones:
a) La coordenada en x es cero.

b) Ambas coordenadas son negativas.

c) La coordenada en x es positiva y la coordenada en y es negativa.

d)Ambas coordenadas son positivas.

Actividad 4
Explorando con una Graficadora. Generalización de Parámetros.

1) Gráfica las cuatro funciones
$f_1(x)= 2x, f_2(x)= 3x$, $f_3(x)= 4x$ y $f_4(x)= 5x$, en el mismo plano coordenado.

a)¿Qué tienen en común las tres gráficas?
b)¿Cómo difieren las gráficas al variar los coeficientes de x, de 2 a 3, de 3 a 4, de 4 a 5?
c)Predice cómo son las gráficas de: $f_1(x)= -2x$, $f_2(x)= -3x$, $f_3(x)= -4x$ y $f_4(x)= -5x$.
y checa tu predicción.
d) Generaliza: ¿Cómo podrías describir la gráfica de $f(x)= mx$, cuando m es una constante?

2) Gráfica las cuatro funciones
$f_1(x)= mx-2, f_2(x)= mx+1$, $f_3(x)= mx+3$ y $f_4(x)= mx+5$, en el mismo plano coordenado (uno junto al otro, sin borrarlos). Para m = 1, m = 3, y m = -2.

a) Para un valor particular de m, ¿Qué tienen de común las gráficas anteriores?
b) Para un valor particular de m, ¿Qué tienen de diferentes las gráficas?
c) Generaliza, ¿Cómo podrías describir la gráfica de $f(x)= mx+b$?

Actividad 5
Serie de problemas de Ecuaciones Generales de rectas. Identificación de Parámetros.

Las siguientes ecuaciones

$$2x + y = 8$$
$$x - y = 4$$
$$x + y = -5$$
$$2x + 3y = 24$$

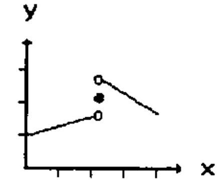
Son todas ecuaciones lineales de la forma: $\mathbf{ax + by = c}$
a) ¿Cuáles son los valores de a, b, y c en cada una de las ecuaciones anteriores?

Estas ecuaciones se pueden poner en forma de funciones lineales: $y = \mathbf{mx + b}$
Es decir, y como función de x, $y(x)$.
b) ¿Cuáles son los valores de m y b en cada una de las ecuaciones anteriores?

Actividad 6
Serie de problemas a nivel de Reconocimiento de Funciones

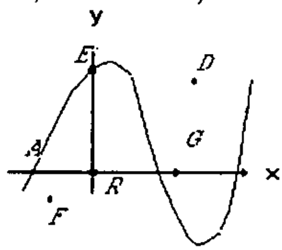
Reconocimiento de Funciones

1)¿ La siguiente relación es una función o no?



2) Propón un ejemplo de una relación que sea una función y otra que no lo sea.

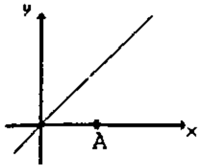
3) Para cada uno de los puntos indicados como A, D, E, F, G, R y la función representada por la gráfica, decide si representa un punto cuya abscisa pertenece al dominio, cuya ordenada pertenece al rango, un par (dominio, contradominio) o un punto que no representa un par (dominio, contradominio).

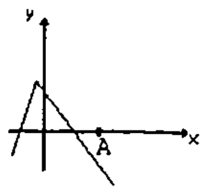


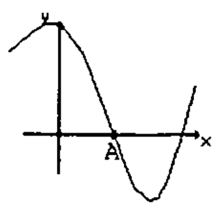
4) Para la siguiente función: f : N -> N , con $f(x) = 4x + 6$

a) ¿Cuáles de los siguientes puntos 2,-1,11, 11.5, 100 ,000 son parte del dominio?
b) ¿Cuáles de los siguientes puntos -2, 10, 8, 46, 23 son parte de la imagen?
c) ¿Cuáles de los siguientes pares ordenados (5,26), (0.5,8), (2,10) es un par (dominio, contradominio) de f ? ¿Porqué?

5) Para cada una de las gráficas siguientes marca los elementos del rango que son imagen del punto del dominio A.







6) Dada la función f

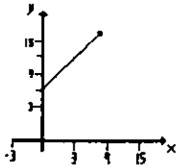
f : N --> N $\qquad\qquad$ f(x) = 4x + 6

decide si las siguientes funciones son iguales a la función f(x) , explica porqué.

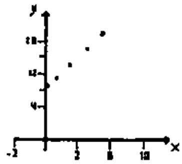
a) g: R --> R
g(x) = 4x + 6

b) g: N --> N
g(x) = 2x + 3

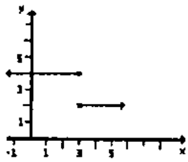
c)



d)

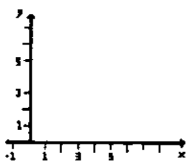


7) Encuentra la forma algebraica de la función mostrada en la gráfica, especificando su dominio y rango.

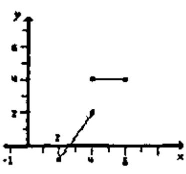


8) Traza la gráfica de la función :

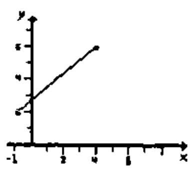
g : R --> R
g(x) = x -2



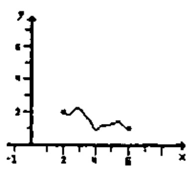
9) Indica si las siguientes gráficas representan una función con dominio {x | 2 < x < 6} y rango {y | -1< y < 4}



i)



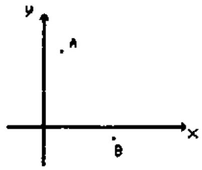
ii)



iii)

10) Da un ejemplo en forma algebraica de una función con f : R --> N

11) En el siguiente sistema de coordenadas se dan los puntos A y B, traza por ellos una función lineal y sus correspondientes dominio y rango para tales puntos.

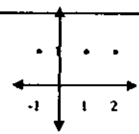


12) Da un ejemplo de una función algebraica que satisfaga estas condiciones:
f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 7, f(4) = 10
¿Puedes proponer su dominio y rango?

Actividad 7 del Nivel Cuantitativo.

Instrucciones: Rellena los espacios vacios de cualquiera de las cinco columnas, según sea el caso.

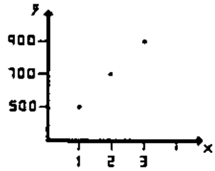
	Nivel de Interpretación			**Nivel de Representación**
Lenguaje Matemático	**Lectura, Traducción :**	**Se interpreta**	**Esta proposición es Falsa o Verdadera**	**1) Se puede representar en la recta.** **2) Se puede representar en el plano**
$\frac{1}{5}(10)$	De izq a der: Un quinto por diez, Un quinto de diez De der a izq: diez por un quinto, diez veces un quinto	La quinta parte de diez	Depende con qué la comparemos	
$(1/5) \cdot X$	De izq a der: Un quinto por equis, uno por equis entre cinco, un quinto de equis De der a izq: equis por un quinto	La quinta parte de equis	No tiene signo de igualdad, es sólo una proposición, no podemos saber hasta compararla.	
$3 = 10$	De izq a der: Tres es igual a diez De izq a der: 10 es igual a 3	Es una igualdad que es Falsa o Verdadera	Es Falsa	La posición del 3 no es la misma que la del 10.
$3x + 2 = 0$	Tres equis más dos es igual a cero.	Para que valores de "X" esa igualdad es cierta	Es Verdadera si $x = -2/3$	
$3 < 0$	Tres es menor que cero, cero es mayor que tres	Es una desigualdad que es Falsa o Verdadera	Es Verdadera siempre	
$x >= 8$	Las equis mayor o igual que ocho	Para que valores de "X" esa igualdad es cierta	Es verdadera para cualquier número que se encuentre en el intervalo [8,)	
$10 <= x < 11$	Las equis mayores que diez y menores que once	Para que valores de "X" esa desigualdad es cierta	Es verdadera para cualquier número que se encuentre en el intervalo [10,11); considerando el 10 y sin considerar el 11	

$3x + 2 < 6$	Que número(s) cumple que: 3 veces ese número mas 2 es menor que 6	Para que valores de "X" esa desigualdad es cierta	Es verdadera si el número se encuentra en ese intervalo (- ,4/3)	3x+2 <6, 3x < 6 -2, 3x<4, x < 4/3 –> (- ,4/3)
$y = 3x + 2$	ye igual a tres equis mas dos	Para que valores de "x " y de "y" esa igualdad es cierta	Es verdadera si los puntos se encuentran en la recta $y = 3x + 2$	La solución son pares ordenados; es una ecuación de 2 variables, su solución son puntos en el plano.
$y(x) = 3x + 2$		Dependiendo el valor de "x", obtengo el valor de la "y"		
{(x, 2x+1): x Z}				
{2n + 1: n {1...100 }				
{ 6 > 2n + 1: n {1...100 }				
		Gráfica discreta		
		Gráfica continua escalonada		
		Gráfica lineal por partes		

III.4.5 Actividades del nivel IV - Interpretación

Actividad 1
Serie de problemas a nivel de Interpretación de Funciones

1)Con base en la gráfica :



Sea:

x: número de unidades
y: costo diario de operación

1. ¿Qué pasa con el costo diario de operación a medida que aumento el número de unidades?
2. ¿Qué pasa con el costo diario cuando el número de unidades es 1, 2 y 3, respectivamente?
3. ¿Cuál es el cambio del costo diario al aumentar una unidad?
4. ¿Cuál será el costo diario de operación para 10 unidades?
5. ¿Cuál será el costo diario de operación para "x" unidades?

Actividad 2
Serie de problemas a nivel de Aplicación de Funciones

1) El índice medio de estudiantes que empiezan en una escuela de artes orientales ha ido disminuyendo: en 1974, el número de estudiantes que ingresaban era de 582 mientras que en 1979 era sólo de 552.
Si el ritmo ha ido disminuyendo a un ritmo constante en los últimos años, ¿Cuál será el número de estudiantes que empiezan en 1984?
Ayuda: Representa la relación de variables por medio de un plano coordenado.
¿Qué quiere decir que disminuya a un ritmo constante? ¿Puedo conocer el índice medio SAT para cualquier momento?

2) En un experimento psicológico sobre información visual, un sujeto observó brevemente un conjunto de letras y después se le pidió recordar tantas como fuera posible. Se repitió el procedimiento varias veces. Supóngase que "y" es el número promedio de letras recordadas, a partir de conjuntos con "x" letras.
Se registró el comportamiento del sujeto mediante la siguiente función:

$$y = f(x) = \begin{cases} x, \text{ sí} & 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x + 2, \text{ sí} & 4 \leq x \leq 5 \\ 4.5, \text{ sí} & 5 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

a) Si al sujeto se le dieron 4 letras, ¿Cuántas recordó?
b) Si al sujeto se le dieron 8 y15 letras, ¿Cuántas recordó?

La bibliografia expuesta en el programa (Budnick. F. S. Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales. Ed. Mc Graw-Hill. Kovacic, M. L. Matemáticas Aplicaciones a las Ciencias Económico Administrativas. Ed. Fondo Educativo Interamericano) contienen actividades que pueden ser utilizadas para el desarrollo de éste nivel.

IV Exploración de la aplicación de la Propuesta

Antes de exponer las conclusiones de este trabajo, se darán algunas observaciones con base en una primera experiencia de haber utilizado la serie de actividades en el salón de clases. Esto a manera de tener un primer indicio de las posibilidades reales de la interacción de la propuesta. Esta serie de observaciones aunque aun nivel de exploración y siendo que no fue su propósito obtener resultados concluyentes acerca de su impacto, permite sin embargo, darse cuenta de ciertas limitaciones a la par de realizar algunas recomendaciones en su uso.

En el curso de Matemáticas I para la División de C.S:H. de la UAM-I correspondiente al trimestre 97-O (octubre a diciembre de 1997), se utilizaron las actividades de la *estrategia de aprendizaje* de la propuesta, el cupo inicial fue de 100 alumnos y hasta la cuarta semana el grupo se redujo a 75 alumnos.

El primer problema presentado fue que la propuesta, de inicio, no pretendía modificar el programa, más bien, se sustentó en dar una vía alternativa de enseñar el concepto de Función sin haber considerado articulación alguna con los temas faltantes. Recordando, el programa tiene la siguiente secuencia de temas: *conjuntos, propiedades de los números, ecuaciones y desigualdades* y por último, el tema de *funciones*.
Así, la propuesta debía esperar la terminación de los tres temas anteriores, pero la disyuntiva en ese momento fue ¿cómo enseñar los temas iniciales? Una primera respuesta fue la de cubrir el programa lo más apegado al orden lógico establecido. Sin embargo, se tenía la inquietud de que los temas anteriores al de *funciones*, tuvieran una motivación parecida a él en el sentido de que partieran de situaciones sociales contextualizadas y de hecho, si fuera posible, prepararan el terreno para su incursión.
El curso se dividió en tres bloques, el de *ecuación*, el de *desigualdad* y el de *función*, con la posibilidad de que en esos bloques se encontraran situaciones extra-matemáticas que permitieran abordar el *nivel cualitativo*, para cada una de ellas. En las páginas posteriores se encontrará una explicación más detallada de las razones que sustentan esta primera diferenciación de bloques.
A falta de no haberse identificado actividades que sustentaran situaciones extra-matemáticas para los bloques de *ecuación* y *desigualdad* en esos momentos, se pensó en iniciar el curso con el bloque de *función* de la forma expuesta en la propuesta para deducir los dos bloques restantes a partir de ella. Medida que también requería de una planeación de la forma en que se desarrollaría.
En otras palabras, no se contaba con una estrategia que abarcara todos los temas del programa.
Y la medida tomada fue la más socorrida: iniciar precisamente con definiciones y axiomas para los bloques de *ecuación* y *desigualdad* pero, con una diferencia. Se pensó básicamente en trabajar estos bloques desde el punto de vista del *nivel de reconocimiento* y específicamente del *nivel cuantitativo*, en cuanto a una de sus componentes: se insistió en que fuera el alumno quién diera las interpretaciones de los

términos matemáticos con base en sus propias actividades de conversión y codificación propias de este nivel (ver actividad 7 del *nivel cuantitativo*).
El siguiente ejemplo ilustra lo anterior: el tema I de *conjuntos* se precisó a partir de considerar el tema de desigualdades y como resultado de contestar a la pregunta ¿cómo se representa la solución a una desigualdad y la solución a dos o más desigualdades simultáneas?

Hubo una inquietud que se presentó a lo largo de la propuesta y que permeó la forma de dar el primer curso, el que el alumno se diera cuenta en algún nivel, que la matemática podía contestar a una necesidad suya como futuro profesional. Se decidió iniciar el curso con el *nivel cualitativo* de la propuesta, a la par de iniciar el bloque de *ecuaciones* para no mantenerse muy alejado del programa.
Los cuatro niveles faltantes (cuantitativo, conceptualización y evaluación, representación e interpretación) fueron llevados a cabo cuando se desarrollaba el bloque de *función*, es decir, después de haber visto los bloques de *ecuación* y *desigualdad*.
Es decir, pasaron 21 sesiones de 2 horas (7 semanas), para retomar el *nivel cuantitativo* ligado con el *cualitativo* de la propuesta. Este desfasamiento obligado por la decisión de empezar el *nivel cualitativo* antes de iniciar propiamente el bloque de *función*, provocó que el curso se dividiera en dos partes, sin punto de unión entre los niveles.

Salvo el *nivel cualitativo*, los faltantes temas se desarrollaron en el bloque de *función* y con respecto al desarrollo de cada uno de los niveles de la *estrategia de aprendizaje* de la propuesta, se pueden plantear las siguientes observaciones:

Cualitativo
Los alumnos logran centrar la atención al cuestionarse acerca de lo posible de cuantificar en los fenómenos sociales, observan cierta diferencia entre las posibilidades que toman las variables que definen fenómenos físicos en contraposición con la de los fenómenos sociales. La parte más difícil se presenta cuando tratan de abstraer la magnitud variable del fenómeno. Además, causa cierta angustia el que cada alumno pueda dar respuestas diferentes y que el profesor pueda aceptar más de una respuesta. Sin embargo, en este nivel se sintieron fuertemente motivados a participar.
El papel del profesor fue como de coordinador-moderador de las sesiones, a manera que se conservara cierto orden en la exposición de las ideas, sin intervenir con juicios de bien o mal; su tarea más bien consistió en aclarar lo más posible, tanto las preguntas que se hacían los alumnos respecto a la serie de actividades para este nivel, como las contestaciones dadas por distintos alumnos, para que todos en la clase entendieran lo mismo. En este sentido se consideraba igualmente valioso cualquier abstracción lograda por los alumnos.

Cuantitativo
Cuando se busca encontrar un patrón en los cambios de valores escritos en una tabla, ésta y en general, cualquier actividad de conversión presentan mayor dificultad que las debidas a la codificación; por ejemplo, graficar en el plano los puntos de una

tabulación, presenta menor dificultad que encontrar un patrón de dichos puntos. La mayor dificultad que encuentra el profesor al dirigir estas actividades es la de coordinar el tiempo por cada actividad de conversión. En general siempre existirán diferencias en cuanto a la velocidad con que responden los alumnos y es el profesor al que le toca decidir un tiempo permisible de su resolución.
En las actividades del *nivel cuantitativo* se dedica la mitad del tiempo a que se discuta lo que el alumno interpreta de los términos matemáticos puestos en el pizarrón, sea cual fuere el registro de representación utilizado (sin considerar el de las palabras). Es necesario indicar que para que tengan significado los símbolos (que ocupan tan poco espacio), no es suficiente con leerlos literalmente, se requieren interpretaciones que no surgen de una simple codificación, sino que deben plantearse en términos de resolver un problema. La actividad 7 del *nivel cuantitativo* muestra un ejemplo de como se llevó a cabo el planteamiento de este nivel a lo largo del curso.

El papel del profesor fue de coordinador-experto, lo cual permitió dirigir las sesiones a partir de las aportaciones de los estudiantes para llegar a una conclusión final dada por el profesor que es el experto acerca de lo que son los significados matemáticos. En este sentido fue necesario que el profesor declarara las interpretaciones como falsas o verdaderas por supuesto, desde el punto de vista matemático. La mayor dificultad encontrada en este nivel fue la insistencia por parte del alumno a querer limitarse a resolver problemas de sólo sustitución de parámetros.

Conceptualización y Evaluación
Alrededor de 5 sesiones a lo largo del curso fueron dedicadas a cuestionar la naturaleza de los propios objetos matemáticos, por ejemplo: ¿qué son los números reales? y ¿cuál es su relación con otros sistemas de números? Dichos cuestionamientos se hicieron después de que tales conceptos se usaron en alguna forma. Por otro lado, aprender a usar mapas conceptuales requiere de un tiempo de atención por parte del alumno que especialmente en este nivel es difícil de sostener. La forma como se llevaron a cabo las sesiones que tuvieron que ver con el uso de mapas conceptuales (aprox. durante la 7° semana) fue la siguiente: se ponen en el pizarrón los conceptos que requieren explicar otro concepto matemático y el papel del profesor fue ubicar el concepto más general en la parte superior del pizarrón para que los alumnos encontrarán las relaciones con los conceptos menos generales. De esta manera, es el profesor quién construyó el mapa con base en las ideas de los alumnos. En clase se realizaron los mapas de *expresión algebraica*, *ecuación* y *desigualdad*. Ver actividad 3 del nivel de conceptualización.

Por otra parte, es en este nivel donde se pudo formalizar sólo las ideas de los conceptos matemáticos con referencia al concepto de función por medio de definiciones.

Aunque el papel del profesor fue de coordinador-experto, en este nivel fue muy fácil perder el contacto con los estudiantes, debido a que la participación del alumno es escasa muchas veces por la imposibilidad de expresar las ideas que sí tienen. Una vez más fue necesario plantear preguntas para promover la participación de los alumnos. La

orientación de las preguntas fue con base en que sus respuestas no requirieran demasiadas explicaciones teóricas.
En este nivel es necesario realizar procesos de conversión que apuntan con mayor énfasis hacia la formalización de elementos teóricos matemáticos. En dichos procesos se observa cierta tendencia a repetir los resultados de éxito o fracaso que han tenido los alumnos en anteriores actividades de conversión en el *nivel cuantitativo*, aunque en menor medida se repiten los resultados de éxito.

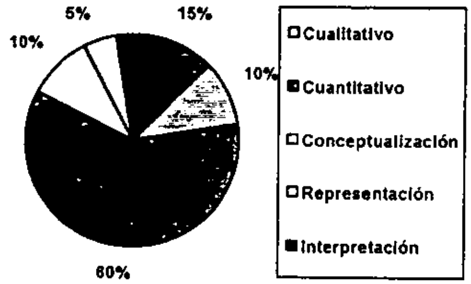
Representación

En este nivel la participación del profesor fue mayormente expositiva. El objetivo fue que el alumno observara en que elementos prestaba especial cuidado el profesor para representar o modelar alguna situación, por simple que ésta fuera. Es como si el profesor pensara en voz alta ante la presencia de los alumnos.
El tiempo dedicado a este nivel fue menor comparado con los demás niveles. Esto es debido a que la atención del alumno se centra en darse cuenta cómo a partir *del nivel de abstracción* que desarrolla el profesor llega a algún registro del *nivel cuantitativo.*

Interpretación

Este nivel requiere de la participación del profesor para plantear las preguntas que faciliten la asociación de los objetos representados matemáticamente con los términos a los que aluden dichos objetos, en el lenguaje natural. El papel de profesor-expositor fue necesario aunque se intentó reducirlo al mínimo. Para ello fue indispensable realizar preguntas cuyas respuestas servían para construir la codificación de los términos matemáticos en términos del problema social.

Tomando como 100% el tiempo dedicado a las sesiones de clase, sin contar las sesiones de examen, la siguiente tabla muestra la proporción de los tiempos dedicados a cada uno de los niveles :



Cualitativo : 10%
Cuantitativo : 60%
Conceptualización: 10%
Representación : 5%
Interpretación : 15%

V El enfoque de la propuesta

En el anterior apartado surgieron cuestionamientos acerca de lo que implica poner en práctica la *muestra de serie de actividades*. Con base en dicho análisis se resumen en dos los principales aspectos a considerar en el presente espacio:

- La forma en que son presentados al alumno. Es decir, las actividades se encuentra en relación directa con el papel que tenga el profesor ante ellas y la propuesta pretende entonces, hacer explícito dicho papel con respecto a los niveles desarrollados en la estrategia de aprendizaje.
- El vínculo de la propuesta con los temas restantes del programa. En el sentido de que es necesario plantearse la posibilidad de encontrar mayor relación entre el tema de *funciones* con el programa, con vías a evitar posibles contradicciones del enfoque de la propuesta con la forma tradicional de dar los temas faltantes.

V.1 El papel del Profesor

En el marco de la propuesta, el papel del profesor adquiere las siguientes modalidades:

- Moderador, cuya principal función es la de promover y coordinar la participación de los alumnos.
- Informador, en el sentido que proporciona la sintaxis matemática de términos que ya conocen los alumnos y que corresponden a conceptos primarios, producto de su cotidianidad y de aprendizajes anteriores; en la dirección de proporcionar elementos de codificación. También da las reglas de tratamiento para un registro.
- Coordinador del aprendizaje del alumno, el cual a partir de las ideas de algunos de los alumnos (los más participativos), construye una secuencia de observaciones que permiten facilitar la actividad de conversión del carácter simbólico de las representaciones matemáticas a entidades con significado. Esta interacción pública de lo que acontece a algunos de los alumnos ante el grupo, permite observar los procesos necesarios para el logro de dicho aprendizaje y ser una referencia para cualquier estudiante.
- Modelo que refleja una forma en que opera el pensamiento matemático. Es decir, la propia actividad del profesor al representar e interpretar matemáticamente, es un ejemplo de como abordar un problema. El papel del profesor es precisamente, el de explicitar los elementos con los cuales estructura dicha actividad, con el propósito de que el alumno se encuentre en mayor posibilidad de apropiárselos.

V.2 El programa del curso

Recordando los tres temas restantes a los que hace referencia el programa son:

I a)Conjuntos, operaciones y conjuntos finitos e infinitos.

II a)Conjuntos de números N, Z, Q y R.
  b)Suma y producto de a).
  c)Estructuras de Orden.
  d)Intervalos en R.
  e)Valor Absoluto.

III a)Ecuaciones de Primer y Segundo grado con una variable.
b)Ecuaciones de la recta.
c)Desigualdades

A continuación se proporcionan algunos pasos que permiten seguir cierta metodología para encontrar una secuencia didáctica de actividades, encaminadas al aprendizaje de conceptos matemáticos con significado en el contexto del estudiante. La base para proporcionar esta secuencia es la propuesta para el tema IV Funciones. Los ejemplos que se dan para ilustrar dicha metodología tienen que ver con los cuatro temas del programa.

A) Seleccionar los términos matemáticos que hacen referencia a conceptos primarios, por ejemplo: conjuntos, unión de conjuntos, igualdad, desigualdad, proposición, adición, sustraer, dividir, y palabras de enlace entre otros. Realizado lo anterior, se identifica su correspondiente símbolo que permite hacer su codificación. Se ilustran algunos conceptos en la siguiente tabla :

Codificación de términos matemáticos de los cuales se tiene cierta conceptualización

Tabla 1

Término	Símbolo
Suma	+
Diferencia	-
Producto	·
División	/
Variable	x
Conjunto	A
Unión de Conjuntos	$A \cup B$

La columna derecha se puede identificar como una representación de la columna izquierda.

B) Seleccionar los términos que hacen referencia a conceptos enteramente matemáticos y representarlos con ejemplos (se pueden seleccionar procediendo de menor a mayor orden de abstracción).

Codificación de términos de los cuales puede no tenerse cierta conceptualización

Tabla 2

Término	Símbolo, en ejemplos
Variable	x
Expresión algebraica	-3x, 3x+2, 5
Ecuación	x = 3x,
Grado de una ecuación	en x^2, es 2
Desigualdad algebraica	8x <3x / 2
Intersección de Conjuntos	$A \cap B$

Existe un primer nivel de reconocimiento a partir de la columna derecha para identificarlos como los términos expuestos en la columna izquierda. Es decir, se da un trabajo de codificación antes de operar con ellos.
Para operar con ellos, deben proporcionarse ciertas reglas de tratamiento que delimitan su uso.

Articular los términos de A) junto con los de B) de forma que estén relacionados entre si. Para ello una posibilidad es utilizar mapas conceptuales con el cual es necesario identificar términos que denotan conceptos con cierto orden de generalidad.

Después de cierto análisis de los conceptos involucrados en el programa, se identificaron con cierta independencia los bloques de "ecuación", "desigualdad algebraica" y "función", los cuales requerían de los conceptos de "expresión algebraica" y "variable". Por ello se propone la secuencia "variable", "expresión algebraica", "ecuación", "desigualdad algebraica" y "función, para cubrir los temas del curso.

Dichos conceptos son generales porque de ellos se derivan otros conceptos particulares y términos a los que alude el programa. Antes de detallar los términos matemáticos que de ellos se derivan, es necesario precisar a que se refiere el hecho de que sean "conceptos generales". Se muestran los siguientes ejemplos:

Tabla 3

Término	Algunos conceptos asociados
Variable	magnitud que varía según el momento
Expresión algebraica	+,-,·, / y potencia de variables
Ecuación	igualdad entre dos expresiones algebraicas
Desigualdad algebraica	desigualdad entre dos expresiones algebraicas
Función	dependencia entre dos variables

Los conceptos asociados a los términos de la Tabla 3 están orientados hacia una generalización de lo que significan; es decir, hacia su definición conceptual.

C) Una de las formas en que están involucrados los conceptos generales de la Tabla 3 con los conceptos restantes que abarca el programa, se encuentran relacionados en los mapas de la actividad 3 del *nivel de conceptualización y evaluación.*
A continuación se enumeran algunos de los conceptos relacionados con los conceptos más generales.

Tabla 4

Solución de una ecuación, Solución de una desigualdad, Conjunto solución, Intervalo, Números naturales, Números racionales, Números enteros, Conjuntos finitos e infinitos, Recta ...

C) Para adquirir los conceptos de la Tabla 4, es necesario usar los conceptos que se derivan de la abstracción de conceptos primarios en contextos extra-matemáticos y delimitarlos a términos matemáticos, junto con el uso de los primeros términos obtenidos a partir de la codificación y las reglas de tratamiento. hacia una conversión gradual de conceptos matemáticos de menor a mayor grado de abstracción.
Aunque en un mapa conceptual, los conceptos se pueden interpretar como ordenados de mayor a menor generalidad, se propone que ciertos términos matemáticos se deduzcan de los más generales y otros inicien de una codificación hacia una generalización, como se muestra en la siguiente tabla :

Tabla 5

Mapa conceptual

Conceptos extra-matemáticos	Concepto más general	Definiciones matemáticas
↓ Se deducen	↓ Concepto menos general ↓	↑ Se generaliza
Términos matemáticos (conceptualización)	Ejemplos	Términos matemáticos (codificación)

1a. Conclusión acerca del enfoque de la propuesta

El mismo proceso que sirve para representar conceptos primarios que surgen de la cotidianidad se usa para representar conceptos más elaborados. Los conceptos más abstractos parten de la combinación de conceptos primarios y la codificación y reglas de tratamiento de términos matemáticos.

Para adquirir los conceptos a los que se refieren las Tablas 3 y 4, es necesario que el profesor proporcione la información a la que hacen referencia las Tablas 1 y 2, junto con actividades que ayuden a establecer su conversión. Las actividades deberán tener las características mencionadas en los niveles de *abstracción* y de *reconocimiento* en cuanto a que facilite la abstracción de conceptos matemáticos a partir de una situación extra-matemática, como la interpretación de los objetos matemáticos en el contexto personal de los alumnos. El siguiente es un ejemplo :

Situación extra-matemática	**Contexto matemático**
representar	*interpretar*
Si después de haber comprado 2 unidades, se decide comprar 4 unidades de lo mismo, ¿Cuántas unidades se tienen en total? : **2+4**	**2+4:** es una cantidad de magnitud 2 unidades adicionada con otra de magnitud 4.

En resumen, las ideas manejadas para obtener una secuencia didáctica en el salón de clases se encuentran localizadas en la planeación y elaboración de actividades que tengan que ver con las siguientes etapas:

Codificación

Proporcionar la sintaxis de términos ya conocidos, ejemplos de términos desconocidos y reglas de tratamiento.

Situación extra-matemática	**Contexto matemático**
representar	interpretar

Conceptualización

Construir otros conceptos matemáticos que se derivan de la combinación de los procesos de representación e interpretación en un contexto que contenga los significados para realizarlos y entender las definiciones matemáticas y las generalizaciones que ellas encierran

La idea expuesta en la figura anterior, corresponde al siguiente diagrama en términos de los niveles desarrollados en la estrategia de aprendizaje y el papel del profesor correspondiente:

A) denota el nivel

B) denota el rol del profesor asociado al nivel A)

A) Cuantitativo
B) Informador

Abstracción	***Reconocimiento***
A) Cualitativo **B) Moderador**	**A) Cuantitativo** **B) Coordinador de Aprendizaje**
A) Representación **B) Modelo**	**A) Interpretación** **B) Coordinador de Aprendizaje y Modelo**

A) Conceptualización y evaluación
B) Coordinador de Aprendizaje

2a. Conclusión del enfoque de la propuesta

A manera de síntesis, se proponen las siguientes fases que debería llevar una secuencia didáctica para otros temas, que son:

- exponer los términos necesarios para realizar actividades de codificación y reglas de tratamiento.
- identificar los conceptos primarios y establecer un orden para adquirir los conceptos más abstractos.
- identificar actividades que promuevan los niveles de abstracción y reconocimiento.

VI Conclusiones

La propuesta ofrece una base para plantear la posibilidad de:

a) Reestructurar el programa tomando como eje principal el desarrollo de rasgos de pensamiento que correspondan con el perfil del futuro científico social. Consistentes con estos propósitos se deberán seleccionar y organizar contenidos temáticos y actividades asociadas e igualmente sugerir una secuencia didáctica como la presentada en este trabajo.

b) Reflexionar sobre la forma de enseñanza del profesor ya que la implementación de la presente propuesta implica un cambio en las interacciones sociales en el salón de clases.

c) Considerar que el enfoque de la propuesta podria ser usado como un marco para desarrollar el concepto de Funciones no lineales.

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, D. P. Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo. Ed. Trillas, México 1978.

Budnick, F. S. Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales. Ed. Mc Graw-Hill, México 1990.

Cervantes, P. S. Tesis de Maestría: Proposición Curricular para los cursos de Matemáticas I y II del Colegio de Ciencias y Humanidades; basado en un análisis epistemológico-histórico-crítico de los contenidos programáticos. Cinvestav/IPN, México 1983.

Cortés, F. y Rubalcava, R. "Escalas Básicas de Medida" en Serie C: Metodología y Técnicas de Investigación, No 3. Coordinación Académica. Sede México.

Dubinsky, E. y Harel, G. "The Nature of the Process Conception of Function" en The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. Universidad de Purdue (s/f).

Duval, R. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Traducción del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, del artículo original "Registres de représentation sémiotique et functionement cognitif de la penseé". Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives, 5 (1993), IREM de Strasbourg.

Kline, M. Matemáticas para los estudiantes de Humanidades. Ed. Fondo de Cultura Económica, México 1992.

Kovacic, M. L. Matemáticas Aplicaciones a las Ciencias Económico Administrativas. Ed. Fondo Educativo Interamericano, México 1977.

Lane County Mathematics Proyect. Problem Solving In Mathematics. Grade 9 Algebra, Oregon Department of Education. Dale Seymour Publications, U.S.A 1983.

Markovits, Z., Sheva E. B. y Bruckheimer M. "Difficulties Students Have with the Function Concept" en The ideas of algebra, k-12. NCTM, U.S.A 1988.

Méndez, I. y González P. Matemáticas y Ciencias Sociales. Ed. Miguel Angel Porrúa y Centro de Investigaciones Interdisciplinarias en Humanidades de la UNAM, México 1993.

Moreira, M. A. "Mapas Conceptuales" en Contactos, Vol 3 No 2, México 1988.

Novak, J. D. y Gowin, D. B. Aprendiendo a Aprender. Ed. Mtz. Roca, Barcelona, 1988.

Padua, J. Técnicas de Investigación aplicadas a las ciencias sociales. Ed. El Colegio de México y F.C.E., México 1979.

Pimm, D. El lenguaje matemático en el aula. Ediciones Morata y Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid 1990.

Pimm, D. Symbols and Meanings in school mathematics. Ed. Routledge & Kegan Paul, Londres 1995.

Ruiz, H. L. Tesis Doctoral: Concepciones de los Alumnos de Secundaria sobre la noción de Función: Análisis Epistemológico y Didáctico. Universidad de Granada, España 1993.

Schoenfeld, A. H. y Arcavi A. "On the Meaning of Variable" en Mathematics Teacher. Septiembre de 1988.

Skemp, R. Psicologia del aprendizaje de las matemática Ed. Morata, Madrid 1980.

Solomon, A. "Proportion: Interrelations and Meaning in Mathematics" en For the Learning of Mathematics. Vol 7 No.1, Montreal, Quebec, Canada. Febrero de 1987.

Usiskin Z. "Conceptions of School Algebra and Uses of Variables"en The ideas of algebra, k-12. NCTM, E.U.A 1988.