

C 1180

1  
29.

**METODOLOGIA DE DISEÑO DE COJINETES  
HIDROSTATICOS CILINDRICOS CON CAPACIDAD  
DE CARGA AUTOCOMPENSADA ANTE  
DESALINEAMIENTOS DE LA FLECHA**

**Luis Fernando Martínez Báez**

División de Estudios de Posgrado

Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.

**Cd. Universitaria, D.F., marzo de 1998**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

259548



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Indice general

<b>Nomenclatura</b>	<b>4</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2 Revisión bibliográfica</b>	<b>16</b>
2.1 Introducción . . . . .	16
2.2 Diseño de cojinetes hidrostáticos con autocompensación . . . . .	16
2.3 Análisis matemático y numérico de cojinetes con desalineamiento . . . . .	18
2.4 Flujo turbulento y diseño óptimo en cojinetes . . . . .	19
2.5 Discusión . . . . .	21
<b>3 Modelo matemático, cojinetes con desalineamiento</b>	<b>23</b>
3.1 Ecuaciones de balance de masa y cantidad de movimiento. . . . .	24
3.2 Ecuación de lubricación de Reynolds para flujo laminar . . . . .	25
3.3 Ecuación de lubricación de Reynolds para flujo turbulento . . . . .	27
3.4 Ecuaciones de Continuidad en los recesos . . . . .	32
3.5 Sistemas de alimentación de lubricante . . . . .	33
3.5.1 Presión conocida en múltiple, alimentación restringida . . . . .	33
3.5.2 Gasto conocido a cada receso, alimentación libre . . . . .	35
3.6 Condiciones de frontera en la región de cavitación . . . . .	36
<b>4 Parámetros de diseño, cojinetes con desalineamiento</b>	<b>39</b>
4.1 Funciones que describen el claro radial . . . . .	39
4.2 Sistemas de referencia y definiciones . . . . .	40

4.2.1	Flecha en posición excéntrica-alineada . . . . .	40
4.2.2	Flecha en posición excéntrica-desalineada . . . . .	41
4.2.3	Desalineamiento . . . . .	43
4.2.4	Excentricidad y ángulo de máxima aproximación, con desalineamiento . . . . .	43
4.3	Claro radial excéntrico-alineado . . . . .	44
4.4	Claro radial con desalineamiento, solución aproximada . . . . .	45
4.5	Claro radial con desalineamiento, solución exacta . . . . .	45
4.6	Fuerzas y momentos de película con flecha desalineada . . . . .	47
4.6.1	Fuerzas de presión . . . . .	47
4.6.2	Fuerzas de fricción . . . . .	49
4.6.3	Momentos de presión . . . . .	50
4.7	Coefficientes de rigidez y amortiguamiento . . . . .	51
4.7.1	Coefficientes de rigidez de fuerza . . . . .	51
4.7.2	Coefficientes de amortiguamiento de fuerza . . . . .	52
4.7.3	Coefficientes de rigidez de momento . . . . .	52
4.7.4	Coefficientes de amortiguamiento de momento . . . . .	52
4.8	Capacidad de carga, condición de equilibrio . . . . .	53
4.9	Coefficiente de fricción, pérdida de potencia por fricción . . . . .	53
4.10	Potencia de bombeo . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Modelo numérico</b> . . . . .	<b>59</b>
5.1	Introducción . . . . .	59
5.2	Expresión discreta de ecuaciones y condiciones de frontera . . . . .	60
5.2.1	Nodos interiores . . . . .	61
5.2.2	Error y criterio de convergencia . . . . .	62
5.2.3	Nodos en recesos . . . . .	63
5.2.4	Nodos en zona de cavitación . . . . .	64
5.3	Proceso de cálculo . . . . .	64
5.4	Comparación de resultados . . . . .	66
5.4.1	Cojinete hidrodinámico . . . . .	66
5.4.2	Cojinete hidrostático . . . . .	67

<b>6</b>	<b>Cojinetes autocompensados</b>	<b>82</b>
6.1	Autocompensación ante desalineamientos de la flecha . . . . .	82
6.2	Resultados . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Ejemplo de diseño</b>	<b>101</b>
7.1	Introducción . . . . .	101
7.2	Ejemplo . . . . .	101
7.2.1	Datos . . . . .	102
7.2.2	Dimensiones . . . . .	102
7.2.3	Diseño, condiciones de operación . . . . .	103
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>105</b>
8.1	Líneas de investigación futuras . . . . .	106
<b>9</b>		
	<b>Apéndice: Fundamentos teóricos</b>	<b>107</b>
0.1	Ecuaciones generales . . . . .	107
0.2	Ecuación de continuidad . . . . .	108
0.3	Ecuaciones de movimiento . . . . .	109
0.4	Ecuación constitutiva . . . . .	109
0.5	Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	114
0.6	Ecuación de la energía térmica . . . . .	115
0.7	Análisis de órdenes de magnitud . . . . .	116
0.8	Criterio de transición . . . . .	119

# Indice de figuras

3-1	Coeficientes $G$ vs. número de Reynolds, de acuerdo con Ref.[34] . . . . .	31
3-2	Sistema de lubricación, presión constante en múltiple . . . . .	34
3-3	Sistema de lubricación, flujo constante a recesos . . . . .	36
4-1	Sistemas de referencia, flecha alineada . . . . .	40
4-2	Sistemas de referencia, cojinete parcial. . . . .	41
4-3	Sistemas de referencia, flecha excéntrica-desalineada . . . . .	56
4-4	Angulos de desalineamiento, representación gráfica de Ec.(4.2) . . . . .	57
4-5	Representación gráfica de la Ec.(4.7). . . . .	58
5-1	Nodos en frontera de cavitación . . . . .	65
5-2	Diagrama de flujo, programa de cálculo . . . . .	70
5-3	Excentricidad relativa $\epsilon$ vs. número de Sommerfeld $S$ , cojinete hidrodinámico parcial $\Theta = 120^\circ$ , comparación con datos experimentales de Morton [56]. . . . .	71
5-4	Excentricidad relativa $\epsilon$ vs. carga específica, cojinete hidrodinámico parcial $\Theta = 120^\circ$ , viscosidad fija y viscosidad a temperatura calculada por disipación de energía, comparación con datos experimentales de Morton [56]. . . . .	72
5-5	Angulo de máxima aproximación $\theta_o$ vs. excentricidad relativa $\epsilon$ , cojinete hidrodinámico parcial $\Theta = 120^\circ$ , comparación con datos experimentales de Morton [56]. . . . .	73
5-6	Distribución de presión, cojinete hidrodinámico parcial $\Theta = 120^\circ$ , $S = 0.5433$ , $p_{max} = 9.47MPa$ , $\theta_o = 86.9^\circ$ . . . . .	74

5-7	Cojinete hidrostático, 4 rebajes, carga sobre rebaje, con ranuras axiales entre rebajes, diseño de acuerdo con Ref.[92]. . . . .	75
5-8	Capacidad de carga adimensional $W_{ad}$ y gasto de lubricante adimensional $Q_{ad}$ vs. excentricidad relativa $\epsilon$ , cojinete hidrostático 4 rebajes, carga sobre rebaje ("LOP"), comparación con datos de Someya Ref. [92]. . . . .	76
5-9	Distribución de presión, cojinete hidrostático 4 rebajes, carga sobre rebaje, ranuras axiales entre rebajes, diseño de acuerdo a Someya [92], $\Theta = 360^\circ$ , $p_{max} = 9.99 MPa$ . . . . .	77
5-10	Distribución de presión a capacidad de carga máxima, cojinete hidrostático 4 rebajes, carga sobre rebaje $\Theta = 360^\circ$ , $p_{max} = 6.85 MPa$ . . . . .	78
5-11	Distribución de presión, cojinete hidrostático, 4 rebajes, carga sobre rebaje, sin ranuras axiales, flecha alineada $\Theta = 360^\circ$ , $p_{max} = 6.89 MPa$ . . . . .	79
5-12	Distribución de claro radial, cojinete hidrostático, 4 rebajes, carga sobre rebaje, flecha alineada. . . . .	80
5-13	Distribución de claro radial con desalineamiento $\alpha$ y $\beta \neq 0$ . . . . .	80
5-14	Distribución de presión, cojinete hidrodinámico con desalineamiento $\alpha$ y $\beta \neq 0$ , $\Theta = 360^\circ$ , $S = 1.3851$ , $p_{max} = 1.54 MPa$ . . . . .	81
6-1	Cojinete hidrostático autocompensado, 4+4 rebajes, carga sobre rebaje (LOP). . . . .	88
6-2	Cojinete hidrostático autocompensado, 4+4 rebajes, carga entre rebajes (LBP). . . . .	89
6-3	Momento $M_{xx}$ a desalineamiento máximo $\alpha_{max}$ vs. $\frac{l_2}{L}$ y $\frac{C}{r_j}$ . . . . .	90
6-4	Momento adimensional $M_{xx}$ y excentricidad en la sección central $\epsilon$ a desalineamiento máximo $\alpha$ vs. longitud total cubierta por rebajes $\frac{l_2}{L}$ . . . . .	91
6-5	Momento adimensional $M_{xx}$ y excentricidad en la sección central $\epsilon$ @ desalineamiento máximo $\alpha_{max}$ vs. $\frac{2l_r}{L}$ , $\frac{l_2}{L} = 0.667$ , $\frac{C}{r_j} = 0.00125$ . . . . .	92
6-6	Momento adimensional $M_{xx}$ y excentricidad en la sección central $\epsilon$ @ desalineamiento máximo $\alpha_{max}$ vs. $\frac{t_1}{t_2}$ , $\frac{2l_r}{L} = 0.167$ , $\frac{l_2}{L} = 0.667$ , $\frac{C}{r_j} = 0.00125$ . . . . .	93
6-7	Momento adimensional $M_{xx}$ y excentricidad en la sección central $\epsilon$ @ desalineamiento máximo $\alpha_{max}$ vs. $t_3$ , $\frac{t_1}{t_2} = 0.25$ , $\frac{l_2}{L} = 0.667$ , $\frac{C}{r_j} = 0.00125$ . . . . .	94

6-8	Momento adimensional $M_{xx}$ y excentricidad en la sección central $\varepsilon$ @ desalineamiento máximo $\alpha_{max}$ vs. resistencia capilar $R_c = \frac{8\mu l_c}{\pi d_c^4}$ , $\frac{l_1}{l_2} = 0.25$ , $\frac{2l_c}{L} = 0.167$ , $\frac{l_x}{L} = 0.667$ , $\frac{C}{r_j} = 0.00125$ , . . . . .	95
6-9	Momentos adimensionales $M_X$ y $M_Y$ y excentricidad en la sección central $\varepsilon$ @ desalineamiento máximo $\alpha_{max}$ vs. $S$ , $R_c = 7.26 \times 10^9 \frac{Pas}{m^3}$ , $\frac{l_1}{l_2} = 0.25$ , $\frac{2l_c}{L} = 0.167$ , $\frac{l_x}{L} = 0.667$ , $\frac{C}{r_j} = 0.00125$ . . . . .	96
6-10	Flujo de lubricante adimensional y excentricidad en sección central con flecha alineada y con desalineamiento máximo, vs. número de Sommerfeld $S$ . . . . .	97
6-11	Distribución de presión, cojinete híbrido con autocompensación optimada, 4+4 recesos, carga entre recesos, a desalineamiento máximo $\alpha_{max}$ , $\beta = 0$ , $\Theta = 360^\circ$ , $p_{max} = 23.5 MPa$ , vista 1. . . . .	98
6-12	Distribución de presión, cojinete híbrido con autocompensación optimada, 4+4 recesos, carga entre recesos, a desalineamiento máximo $\alpha_{max}$ , $\beta = 0$ , $\Theta = 360^\circ$ , $p_{max} = 23.5 MPa$ , vista 2. . . . .	99
6-13	Distribución de claro radial con flecha desalineada a $\alpha_{max}$ , $\beta = 0$ , correspondiente a cojinete híbrido, 4+4 recesos, carga entre recesos. . . . .	100
0-1	Par vs. velocidad angular, cojinete hidrodinámico, de acuerdo con Ref.[28] . . . . .	120
0-2	Criterio de transición, Reynolds vs. claro radial, de acuerdo con Ref.[27] . . . . .	121



## Resumen

Se propone como criterio de diseño de cojinetes hidrostáticos cilíndricos, la rigidez angular óptima y la autocompensación de capacidad de carga frente a desalineamientos del eje. Se discute y se presenta la metodología para lograr ese objetivo de diseño. Se desarrolla el análisis de cojinetes cilíndricos -hidrodinámicos, hidrostáticos e híbridos- considerando flujo laminar o turbulento de un lubricante newtoniano incompresible en el claro entre el cojinete y el eje con desalineamiento. La representación matemática del claro con desalineamiento, así como las condiciones de frontera en los recesos, se tratan de manera original. Se describen dos alternativas para el sistema de alimentación de lubricante: con presión fija en el múltiple de distribución y alimentación restringida o con flujo fijo no-restringido a cada receso. Con base en el análisis anterior, se desarrolla un modelo de cálculo computacional empleando diferencias finitas y un programa modular, que facilita su modificación para analizar diversos diseños de cojinetes hidrostáticos o híbridos, de arco parcial o completo, con diferente número y posición de recesos, etc. Se comparan resultados obtenidos con el presente modelo para dos casos típicos de cojinetes, uno hidrodinámico y otro hidrostático, con datos experimentales y calculados provenientes de referencias citadas con frecuencia en la literatura. Se presentan los resultados óptimos obtenidos para un diseño de cojinetes hidrostáticos con alimentación restringida, con el que se obtiene la máxima rigidez angular ante desalineamientos de la flecha, manteniendo su capacidad de carga constante. Dichos resultados permiten el dimensionamiento de este tipo de cojinete para otras aplicaciones, especificando previamente las cargas y momentos externos, así como sus condiciones de operación.

*a:*

*Natalia, Carlos Fernando y Guillermo*

# Prefacio

Mi interés por la tecnología de los dispositivos antifricción en las máquinas, proviene de la década de los 70 en que cursaba los últimos semestres de la licenciatura y fui ayudante del Dr. Enrique Chicurel quien coordinó al grupo de investigadores que inició el posgrado en ingeniería mecánica de la Facultad de Ingeniería y lo que fue el antecedente de su Centro de Diseño Mecánico, tales como el M.en C. Alberto Camacho, el M.en C. Manuel Aguirre, el Dr. Ricardo Chicurel, el Dr. Enzo Levi, el Dr. Jorge Angeles, entre otros pioneros del desarrollo de esta disciplina en nuestra Facultad. En ese entonces participé en proyectos del Dr. Chicurel y tuve oportunidad de aprender sobre el proceso de diseño; me gustaba estudiar los catálogos de baleros o rodamientos de diversos tipos y tamaños, o enterarme sobre los esfuerzos de Hertz o la lubricación a presiones extremas que se dan en las zonas de contacto, también calculé y apliqué este tipo de componentes.

En 1989, en el Centro de Investigación y Asistencia Técnica del Estado de Querétaro se produjo mi reencuentro con los dispositivos antifricción, ya que ahí se nos expusieron los problemas frecuentes de rayadura de los cojinetes y rotura de flechas de molinos de caña de azúcar en los ingenios, y el Ing. Carlos Beckwith, en esas fechas director general de esa institución, me pidió analizar la posible utilización de cojinetes hidrostáticos para esas máquinas. En aquel período se resolvieron algunos problemas de ese proyecto dirigido a la industria azucarera, pero debido a que no pudo ofrecerse una solución completa, su desarrollo se interrumpió.

Más adelante cuando me reincorporé a la Facultad de Ingeniería en 1994, con la guía e impulso del Dr. Jaime Cervantes y del Dr. Enrique Chicurel, tutores de tesis del autor, se establecieron los objetivos de un proyecto de análisis de cojinetes cilíndricos de contacto plano lubricado, con desalineamiento y otras características especiales, como proyecto académico, a

fin de plantear los problemas y obtener las soluciones que en un futuro cercano posibilitaran el diseño de este tipo de componentes para aplicaciones variadas. Afortunadamente se han alcanzado esos objetivos.

Por el apoyo, por el impulso, por sus consejos, por su amistad y por todo lo que significa en el terreno personal el llegar a esta meta, quiero agradecer de manera muy especial a mis tutores, es algo por lo que estaré siempre en deuda con ellos. Asimismo deseo agradecer a los demás miembros de mi jurado doctoral, Dr. Francisco Solorio, Dr. Luis Ferrer, Dr. Ricardo Chicurel, Dr. Alejandro Romero y Dr. Alejandro Lozano, por sus sabios consejos y detalladas observaciones durante el desarrollo y después de la lectura del borrador de esta tesis. Cualquier error que involuntariamente, haya permanecido o al final hubiera surgido, es responsabilidad única del autor.

Esta tesis se llevó a cabo en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México y el autor agradece a las autoridades de la Facultad las facilidades otorgadas y también el apoyo moral y material recibido durante el tiempo en que se desarrolló, de manera particular al Dr. Francisco Solorio Ordaz, jefe del departamento de Termoenergía y al Ing. y M.en A. Gonzalo Guerrero Zepeda, jefe de la División de Ingeniería Mecánica e Industrial.

Finalmente pero no en menor medida, el autor agradece la amistad y el apoyo de todos sus compañeros del Departamento de Termoenergía, así como el cariño y comprensión de su familia, a quienes está dedicado este trabajo y por quienes todo cobra sentido.

Luis Fernando Martínez Báez.

Cd. Universitaria, D. F. a 14 de marzo de 1998.

# Nomenclatura

$A$  = ángulo del plano de desalineamiento medido a partir del eje  $X$ , [rad]

$A_b = \Theta \times r_b \times L$ ; área de cojinete, [ $m^2$ ]

$A_r = a_r \times l_r$ ; área de receso, [ $m^2$ ]

$a_r$  = ancho de receso, en dirección tangencial  $x$ , [ $m$ ]

$a(i, j), b(i, j), c(i, j), d(i, j), e(i, j), f_1, f_2, f_3$  = coeficientes dados por Ecs.(5.4) y (5.4)

$a, b_1, b_2, c$  = elementos en Ec.(4.19)

$C = r_b - r_j$ ; claro radial concéntrico, [ $m$ ]

$c_p, c_v$  = calor específico a presión y volumen constante respectivamente, [ $\frac{Nm}{kg}$ ]

$C_{xx}, C_{xy}, C_{yy}, C_{yx}$  = coeficientes de amortiguamiento de fuerza debidos a desplazamientos [ $\frac{N \cdot s}{m}$ ]

$C_{x\alpha}, C_{x\beta}, C_{y\beta}, C_{y\alpha}$  = coeficientes de amortiguamiento de momento debidos a rotaciones de desalineamiento [ $Nms$ ]

$D = 2r_b$ ; diámetro de cojinete, [ $m$ ]

$d_c$  = diámetro de capilar restrictor, [ $m$ ]

$e$  = excentricidad en la sección central del cojinete o excentricidad con flecha alineada, distancia entre orígenes  $O_b$  y  $O_j$ , [ $m$ ]

$e_d(z)$  = excentricidad con flecha desalineada en una sección dada del cojinete, [ $m$ ]

$F_{fX}, F_{fY}, F_{fZ}$  = fuerzas de fricción, en dirección de ejes  $\{XYZ\}$ , [ $N$ ]

$F_{pX}, F_{pY}, F_{pZ}$  = fuerzas de presión, en dirección de ejes  $\{XYZ\}$  [ $N$ ]

$G_x, G_z$  = coeficientes en Ec.(3.17), para flujo turbulento

$h$  = espesor de película o claro radial local

$h(x, z, \alpha, \beta)$  = función que describe el claro radial local, ver Ecs.(4.10, 4.12 y 4.19), [ $m$ ]

$H_r$  = profundidad de receso, [ $m$ ]

$\{i, j\}$  = coordenadas reticulares para esquema en diferencias finitas

$k$  = conductividad térmica del fluido,  $\left[\frac{W}{mK}\right]$

$K_{xx}, K_{xy}, K_{yy}, K_{yx}$  = coeficientes de rigidez de fuerza debidos a desplazamientos  $\left[\frac{N}{m}\right]$

$K_{x\alpha}, K_{x\beta}, K_{y\beta}, K_{y\alpha}$  = coeficientes de rigidez de momento debidos a rotaciones de desalineamiento  $[Nm]$

$\mathcal{L} = 2\pi r_b$ ; longitud característica en análisis de órdenes de magnitud  $[m]$

$L$  = longitud (axial) de cojinete,  $[m]$

$l_r$  = longitud de receso, en dirección axial  $z$ ,  $[m]$

$l_c$  = longitud de capilar restrictor,  $[m]$

$l_z = 2l_r + 2s_r$  = longitud axial ocupada por dos recesos; ver Figs.(6-1 o 6-2),  $[m]$

$M_X = M_{xx}, M_Y = M_{yy}$ , momentos de las fuerzas de presión, alrededor de ejes  $\{XY\}$   $[Nm]$

$m, n$  = número de divisiones de la superficie del cojinete en dirección tangencial y axial respectivamente, para formar el retículo del modelo numérico

$n_r$  = número de recesos en cojinete

$p$  = presión,  $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

$p_o, p_{mult}, p_s$  = presión en múltiple, presión de suministro,  $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

$Pot_b$  = potencia de bombeo,  $\left[\frac{Nm}{s}\right]$

$Q$  = flujo total de lubricante,  $\left[\frac{m^3}{s}\right]$

$q_r$  = flujo de lubricante a receso  $r$ ,  $\left[\frac{m^3}{s}\right]$

$r_b$  = radio de cojinete,  $[m]$

$r_j$  = radio de flecha,  $[m]$

$\{r, \theta, z\}$  = coordenadas cilíndricas

$2s_r$  = separación axial entre recesos,  $[m]$

$t_c = \theta_b = \Theta$  = ángulo cubierto por el cojinete,  $[rad]$

$t_1 = \theta_1$  = ángulo cubierto por un receso (ancho en dirección tangencial), ver Fig.(6-1),  $[rad]$

$t_2 = \theta_2$  = ángulo cubierto por un receso y por la parte del cojinete entre dos recesos, ver Fig.(6-1),  $[rad]$

$t_3 = \theta_3$  = posición angular de sección central de recesos, medido a partir de eje  $X$ , ver Fig.(6-2),  $rad$

$t_4 = \theta_4$  = ángulo cubierto por una ranura axial entre dos recesos, ver Fig.(5-7),  $[rad]$

$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_r t_1}{t_c}$ ; razón entre el ángulo total ocupado por recesos y el ángulo cubierto por el

cojinete, ver Fig.(6-1)

$U = \omega \times r_j$ , velocidad tangencial en superficie flecha,  $\left[\frac{m}{s}\right]$

$\bar{u}$  = velocidad promedio de lubricante,  $\left[\frac{m}{s}\right]$

$V$  = componente de velocidad del eje de la flecha en dirección radial,  $\left[\frac{m}{s}\right]$

$u, v, w$  = componentes de velocidad de lubricante en dirección de ejes  $\{XYZ\}$ ,  $\left[\frac{m}{s}\right]$

$u', v', w', p'$  = fluctuaciones de velocidad en dirección de ejes  $\{XYZ\}$ ,  $\left[\frac{m}{s}\right]$  y de presión,  $[Pa]$

$W$  = carga radial externa, capacidad de carga del cojinete,  $[N]$

$\{XYZ\}$  = sistema de referencia inercial acoplado al cojinete, eje  $Z$  coincidente con el eje geométrico longitudinal

$\{xyz\}$  = sistema de referencia con origen en la intersección del eje de la flecha con la sección central del cojinete, paralelo al sistema  $\{XYZ\}$

$\{x'y'z'\}$  = sistema de referencia con origen en la intersección del eje de la flecha con la sección central del cojinete, girado un ángulo  $\alpha$  alrededor del eje  $x$  del sistema  $\{xyz\}$

$\{x''y''z''\}$  = sistema de referencia con origen en la intersección del eje de la flecha con la sección central del cojinete, girado un ángulo  $\beta$  alrededor del eje  $y'$  del sistema  $\{x'y'z'\}$ , eje  $z''$  acoplado al eje geométrico de la flecha

## Letras Griegas

$\alpha$  = ángulo alrededor del eje  $x$ , componente del ángulo de desalineamiento entre ejes  $z$  y  $z'$ ,  $[rad]$ ; difusividad térmica,  $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

$\beta$  = ángulo alrededor del eje  $y'$ , componente del ángulo de desalineamiento entre ejes  $z'$  y  $z''$ ,  $[rad]$

$\gamma$  = ángulo de desalineamiento, entre ejes  $z$  y  $z''$ ,  $[rad]$

$\Delta x, \Delta z$  = incrementos reticulares

$\delta_{pr}$  = tensor unitario

$\varepsilon = \frac{e}{C}$ ; razón de excentricidad

$\theta_b = \Theta$  = ángulo cubierto por cojinete,  $[rad]$

$\theta$  = posición angular medida alrededor del eje  $Z$ , a partir de eje  $X$ ,  $[rad]$

$\theta_0$  = ángulo de máximo acercamiento en sección central del cojinete o con flecha alineada,

medido a partir de eje  $X$ ,  $[rad]$

$\theta_{0d}$  = ángulo de máximo acercamiento con flecha desalineada, en una sección  $z$  dada del cojinete, medido a partir de eje  $X$ ,  $[rad]$

$\theta^*$  = define el punto en que la presión en la película disminuye hasta la presión ambiente, frontera de cavitación,  $[rad]$

$\theta_1 = t_1$  = ángulo cubierto por un receso (ancho en dirección tangencial), ver Fig.(6-1),  $[rad]$

$\theta_2 = t_2$  = ángulo cubierto por un receso y por la parte del cojinete entre dos recesos, ver Fig.(6-1),  $[rad]$

$\theta_3 = t_3$  = posición angular de sección central de recesos, medido a partir de eje  $X$ , ver Fig.(6-2),  $[rad]$

$\theta_4 = t_4$  = ángulo cubierto por una ranura axial entre dos recesos, ver Fig.(5-7),  $[rad]$

$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ ; coeficiente de viscosidad global,  $[Pa \cdot s]$

$\lambda$  = segundo coeficiente de viscosidad, ver Ec.(0.10),  $[Pa \cdot s]$

$\mu$  = viscosidad dinámica,  $[Pa \cdot s]$

$\nu$  = viscosidad cinemática,  $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

$\rho$  = densidad del fluido lubricante,  $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

$\sigma_{jm}$  = tensor de esfuerzos,  $[Pa]$

$\tau_{jm}$  = tensor de esfuerzos cortantes viscosos,  $[Pa]$

$\omega$  = velocidad angular de la flecha,  $\left[\frac{rad}{s}\right]$

## Grupos Adimensionales

$\frac{A_r}{A_b} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \frac{2l_r}{L}$ ; razón entre área total de recesos y área de cojinete

$Ec = \frac{\bar{u}^2}{c_v \Delta T}$ ; número de Eckert

$\varepsilon = \frac{e}{C}$ ; razón de excentricidad

$\frac{2l_r}{L}$  = razón entre longitud (axial) de recesos en dos planos y longitud de cojinete, ver Fig.(6-1)

$\frac{l_r}{L} = \frac{2l_r + 2s_r}{L}$ ; razón entre longitud axial ocupada por recesos en dos planos y longitud de cojinete, ver Fig.(6-1)

$M_{I ad} = \frac{M_{ji}}{DL^2 p_s}$ ; momento adimensional alrededor del eje  $I$

$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k}$ ; número de Prandtl



$Pot_{ad} = \frac{2\mu\omega t C Q}{\mu r_b^3 L \omega^2}$ ; potencia de bombeo adimensional

$Q_{ad} = q_c \text{ adim} = \frac{12\mu Q}{C^3 p_s}$ ; flujo adimensional de lubricante al cojinete

$Re = \frac{UC}{\nu}$ ; número de Reynolds para flujo dominado por esfuerzos cortantes

$Re_p = \frac{\bar{u}h_{min}}{\nu}$ ; número de Reynolds para flujo dominado por gradientes de presión

$Re_h \left(\frac{h}{\ell}\right) = \frac{\bar{u}h}{\nu} \left(\frac{h}{\ell}\right) = Re_\ell \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 = \frac{\bar{u}\ell}{\nu} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2$ ; número de Reynolds reducido, Ec.(0.34)

$S = \frac{\omega \cdot \mu \cdot r_b \cdot L}{\left(\frac{C}{r_b}\right)^2 W}$ ; número de Sommerfeld o inverso de la capacidad de carga adimensional

$S_{M_{ii}} = \frac{\omega \cdot \mu \cdot r_b \cdot L^2}{\left(\frac{C}{r_b}\right)^2 M_{ii}}$ ; número de Sommerfeld para momentos o inverso de la capacidad de momento adimensional

$Ta = \frac{UC}{\nu} \sqrt{\frac{C}{r_j}}$ ; número de Taylor

$W_{ad} = \frac{W}{D \cdot L \cdot p_s}$ ; capacidad de carga específica adimensional

$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{r_r \cdot t_1}{t_c}$ ; razón entre ángulo total ocupado por recesos y el ángulo cubierto por el cojinete, ver Fig.(6-1)

En el Apéndice y en algunas otras partes se utiliza notación indicial, en que se implica la suma sobre índices repetidos.

# Capítulo 1

## Introducción

En el grupo de componentes críticas que un diseñador de maquinaria debe resolver, están aquellas que transmiten cargas y al mismo tiempo deben permitir movimiento relativo; los cojinetes cilíndricos de superficies deslizantes lubricadas, pertenecen a este grupo de partes, en los cuales la presencia de un lubricante entre las superficies sólidas del cojinete, es indispensable para evitar el contacto entre metales, lo que produciría desgaste y la falla del componente y de la máquina, debe observarse que si las superficies sólidas se mantienen separadas bajo la acción de cargas externas que tienden a unir las, es la película lubricante la que resiste dichas fuerzas sin perder su integridad; esto en efecto sucede gracias a que en la película se producen esfuerzos normales y cortantes (presión y fricción), que en acción conjunta pueden equilibrar a las fuerzas externas. El análisis físico y matemático de la generación de presión y otros fenómenos que se producen en el flujo de lubricante en cojinetes y en otras componentes de maquinaria, constituyen la teoría y la técnica de la lubricación. Los artículos clásicos del profesor Nikolay Pavlovitch Petroff en Rusia [61], del ingeniero Beauchamp Tower y del profesor Osborne Reynolds en Inglaterra de 1883 a 1887 [97] [70], han dado la pauta y han sido origen de grandes avances teóricos y experimentales en este siglo, que han llevado al descubrimiento de otros fenómenos, al desarrollo de técnicas de análisis matemático y computacional, etc., y como consecuencia de todo ello a mejores diseños.

Los cojinetes cilíndricos pueden clasificarse en cuatro tipos, atendiendo al mecanismo físico principal con el que se genera la presión en la película lubricante:

- a) Cojinetes *hidrodinámicos* en los que la presión se desarrolla por el giro de la flecha, que

en las superficies, con lo que se consigue un movimiento más uniforme, que cuando se tiene lubricación límite o de película delgada. Por lo anterior en este tipo de cojinetes el desgaste es virtualmente cero y las fuerzas de fricción muy pequeñas. Tal como se verá en el desarrollo de este trabajo, además pueden diseñarse, con otras características igualmente deseables.

En esta tesis se desarrollan las bases para el diseño de un tipo especial de cojinete cilíndrico hidrostático, que se caracteriza por tener alta resistencia a momentos externos que producen desalineamiento, manteniendo así su capacidad de carga, lo que constituye un procedimiento original en el diseño de estos componentes. La trascendencia práctica del punto de vista propuesto se ilustra con el siguiente ejemplo.

Las flechas y cojinetes para maquinaria pesada -por ejemplo los grandes turbogeneradores- se diseñan considerando a los cojinetes como soportes libres sin capacidad de resistir momentos, lo que resulta casi cierto en el caso de cojinetes comunes hidrodinámicos o hidrostáticos. Sin embargo, la realidad es que la flecha se flexiona debido al peso del rotor, se produce desalineamiento en cada cojinete y como resultado una disminución de su capacidad de carga, que normalmente se compensa con un incremento en la excentricidad de la flecha. Como se sabe, la deflexión central en una viga libremente apoyada, es aproximadamente cinco veces mayor que la que se produce en la misma flecha si se apoya rígidamente [86], por lo que, si en este tipo de máquinas se instalaran cojinetes con una rigidez angular máxima, se podrían reducir las deflexiones de la flecha o sus diámetros, obteniéndose una turbina más ligera, o mejorar la precisión en su diseño interno, reduciendo sus claros, etc.; se podría igualmente mejorar su comportamiento dinámico frente a cargas de desbalanceo.

El concepto de autocompensación en cojinetes se refiere a que el cojinete posee características de autoajuste frente a condiciones externas cambiantes, que le permiten seguir operando normalmente. Por ejemplo, como ya se ha mencionado, puede decirse que los cojinetes hidrodinámicos tienen alguna capacidad de autoajuste cuando se incrementa la carga radial. Cuando aumenta la carga se incrementa la excentricidad, y si la flecha sigue girando a la misma velocidad, habrá también un incremento hidrodinámico de presión en el lubricante y de su capacidad de carga, encontrándose así un nuevo equilibrio. Por otro lado, se han inventado algunos diseños de cojinetes hidrostáticos que presentan esa misma u otras características de autocompensación. Por ejemplo, el cojinete hidrostático descrito por Ashley en 1996 [5] y que se refiere a un

con los temas fundamentales de este trabajo y se discute y se enfatiza el carácter original de varias de las ideas que conforman esta tesis.

En el Capítulo 3 se presenta un modelo matemático completo para el análisis de cojinetes cilíndricos, hidrodinámicos, hidrostáticos e híbridos con desalineamiento, funcionando con lubricante newtoniano, incompresible, en flujo laminar o turbulento. El modelo se basa en las ecuaciones de lubricación de Reynolds [70], que son ecuaciones diferenciales parciales (EDP) con la presión en el lubricante como variable dependiente, en las que intervienen el claro radial local entre flecha y cojinete o espesor de la película lubricante, el coeficiente de viscosidad del lubricante, la velocidad angular de la flecha, los esfuerzos turbulentos de Reynolds, entre otros factores. También forma parte del modelo, un criterio para la transición entre flujo laminar y turbulento, como se presenta en el Apéndice. Se discuten las condiciones de frontera, que en cojinetes hidrostáticos e híbridos, presenta dificultades particulares, ya que además de considerarse las condiciones en los bordes de salida del cojinete y las de la región de cavitación como en los cojinetes hidrodinámicos, deben también considerarse las condiciones en los bordes de los recesos, necesarias para la predicción de la presión que se desarrolla en los mismos. El modelo matemático se complementa con un procedimiento propio, aplicando la ecuación de continuidad en cada receso, en la que interviene el flujo alimentado o la presión de suministro, y las presiones en los bordes de los recesos. Las ecuaciones así escritas, resultan ser ecuaciones integro-diferenciales (EID), con diferente forma dependiendo del sistema de alimentación de lubricante que se considere, y deben resolverse simultáneamente con la ecuación de Reynolds y las condiciones de frontera, mismas que también se tratan en este capítulo.

En el Capítulo 4 se continúa con el modelo matemático y se presenta la deducción de ecuaciones que describen la variación del claro radial local. Para el caso en que la flecha se encuentre alineada, se obtiene una ecuación usada con frecuencia en otros trabajos. Para el caso con desalineamiento, primero se propone una expresión aproximada como una corrección de la ecuación anterior y luego se deduce una ecuación exacta. La expresión aproximada se obtiene al sustituir la excentricidad y el ángulo de máximo acercamiento como funciones de la coordenada axial y de los ángulos de desalineamiento. La ecuación exacta considera además la variación del radio de la flecha desalineada, cuando esta se observa desde una sección normal al eje del cojinete; esta ecuación es especialmente útil para el caso con desalineamientos grandes

usando variables adimensionadas.

En el Capítulo 7 se resume el procedimiento de diseño y se presenta un ejemplo del tipo de cojinetes propuesto para una aplicación particular.

En el Capítulo 8 se concluye y se presentan algunas líneas de investigación futuras.

## Capítulo 2

# Revisión bibliográfica

### 2.1 Introducción

En este capítulo se describen brevemente los trabajos publicados que guardan mayor similitud con los temas principales de esta tesis, provenientes de una revisión que incluyó varias revistas periódicas especializadas como el "Journal of Lubrication Technology" de la "American Society of Mechanical Engineers" (ASME), o los "Proceedings" de la "Institution of Mechanical Engineers" de Inglaterra, "Proceedings de la Conferencia de la "North Atlantic Treaty Organization, Advisory Group for Aerospace Research and Development" (NATO), el "Journal of Tribology" también de la ASME, y otras referenciadas a lo largo de este trabajo, para lo cual se dividen en los siguientes temas:

- a) Diseño de cojinetes hidrostáticos con autocompensación
- b) Análisis matemático y numérico de cojinetes con desalineamiento
- c) Flujo turbulento y diseño óptimo en cojinetes.

Al final del capítulo se discute y se destaca la novedad de las partes fundamentales de este tesis

### 2.2 Diseño de cojinetes hidrostáticos con autocompensación

Rippel en 1963 [72] describió en una serie de 10 artículos la técnica usual de diseño de cojinetes hidrostáticos, utilizando varias aproximaciones. En estos artículos también se trata el diseño

de compensadores o restrictores pero no se consideran desalineamientos.

Bassani y Piccigallo en 1982 [7] publicaron el diseño de un cojinete hidrostático especial para empuje axial, de cojines opuestos, auto-regulado por geometría variable de las restricciones al flujo. El diseño del cojinete le permite al cojinete dividir el flujo de lubricante en dos partes iguales. Este artículo presenta también el análisis de la respuesta del cojinete a cargas dinámicas, con un sistema de alimentación a presión constante, resultando una rigidez superior a la de cojinetes hidrostáticos axiales de cojines opuestos convencionales.

Zhang en 1988 [103] publicó un diseño de cojinete que es una combinación mitad hidrostático y mitad hidrodinámico, capaz de controlar inestabilidades cuando disminuye la carga o cuando la carga es pequeña; presenta el análisis térmico y de flujo laminar combinados para considerar la variación de la viscosidad con la temperatura, y el efecto sobre el flujo y la distribución de presiones y capacidad de carga; también presenta el análisis de estabilidad con base en el criterio de Routh. En esta publicación se presentan resultados de los cálculos en forma gráfica, se describe también un banco de pruebas para cojinetes como el propuesto y se comparan resultados del análisis con mediciones experimentales. En este trabajo también se utiliza la condición de frontera de cavitación de Flöberg y un modelo para simular el flujo en la zona de cavitación.

Martínez en 1991 [46] presentó resultados obtenidos con un modelo antecedente al que se discute en esta tesis, aplicado al diseño de cojinetes cilíndricos hidrostáticos con autocompensación por desalineamientos.

Ashley en 1996 [5] describe en este artículo de difusión el trabajo de Slocum, Wasson y Lienhard, para diseñar un cojinete hidrostático lubricado con agua, con ranuras de geometría especial sobre la flecha, que produce alta capacidad de carga y rigidez dinámica, con baja pérdida de potencia y operación estable a velocidades de operación altas. El sistema de distribución de flujo a los recesos permite la autocompensación respecto de la carga radial. La sección transversal de las ranuras del cojinete descrito se modifica al cambiar la excentricidad de la flecha; al desplazarse la flecha hacia una zona del cojinete, se restringe la alimentación de lubricante hacia la superficie opuesta 180 grados y de acuerdo con el artículo, este superávit de lubricante sirve para incrementar el flujo hacia la superficie en que se acercó la flecha. Sin embargo de este reporte no resulta claro cómo se consigue lo anterior, ya que en la zona donde aumenta la

separación también aumenta la tendencia del lubricante a escapar lateralmente, y ahí mismo se inyecta el lubricante que debiera llegar a la zona más restringida y presionada.

## **2.3 Análisis matemático y numérico de cojinetes con desalineamiento**

Reason y Siew en 1982 [69] presentan una solución numérica para el diseño de cojinetes hidrodinámicos con desalineamiento.

Siew y Reason en 1982 [88] describieron en esta publicación las características de un programa de computadora que trata del comportamiento de cojinetes hidrodinámicos de matriz sólida o porosa en estado estacionario; el programa considera geometría variable, configuración de recesos, presión de suministro de lubricante, permeabilidad de la matriz para el caso de cojinetes porosos, y desalineamiento de la flecha.

Buckholz y Lin en 1986 [12] publicaron un análisis de cojinetes hidrodinámicos con desalineamiento, con lubricante no-newtoniano que sigue una ley de gradiente de velocidades elevado a una potencia, considerando flujo isoterma, incompresible. La geometría del claro entre flecha y cojinete la describen con dos ángulos independientes. Para obtener la solución analítica descrita en este artículo, se procede dividiendo en tres regiones el campo de flujo, utilizando la aproximación de capa límite en cada una de ellas, llevando a cabo una expansión asintótica de la función que describe a la presión, y expresando la solución con combinaciones lineales de funciones de Bessel.

Yu y Adams en 1989 [102] publicaron un modelo lineal general para describir la dinámica de la flecha en cojinetes, incluyendo movimientos radiales y de desalineamiento.

Vijayaraghavan y Keith en 1990 [99] analizan en este artículo un tipo especial de cojinete hidrodinámico considerando desalineamiento y cavitación.

Martínez en 1993 [47] presenta resultados de cálculos realizados para el diseño de un cojinete hidrostático parcial de 180 grados, de alta carga y baja velocidad, con desalineamientos grandes.

San Andrés en 1993 [81] presenta el análisis de respuesta dinámica de fuerza y momento, de un cojinete hidrostático de cinco recesos compensados por placa de orificio, bajo condiciones de flujo turbulento. Sus resultados predicen una disminución en la capacidad de carga con el



desalineamiento debido a "una disminución del espesor de la película y momentos restauradores significativos"; este trabajo también presenta una formulación para calcular coeficientes de fuerza y momento debidos al desalineamiento de la flecha.

Qiu y Tieu en 1995 [67] analizan el efecto del desalineamiento en las características estáticas y dinámicas de cojinetes hidrodinámicos ranurados axialmente. Entre sus principales resultados se muestra la disminución de la capacidad de carga (manifestada por un aumento de excentricidad) frente al desalineamiento, así como su efecto sobre ocho coeficientes lineales de fuerza. Una posible fuente de discusión está en el sistema de referencia que utiliza y el cálculo de fuerzas y momentos de presión referidos a ese sistema, ya que cantidades referidas a un sistema ligado a la flecha son expresadas como si se refirieran a un sistema fijo al cojinete.

## 2.4 Flujo turbulento y diseño óptimo en cojinetes

Taylor en 1923 [95] escribió este artículo clásico donde muestra el análisis de la estabilidad del flujo entre dos cilindros concéntricos con giro relativo y predice la formación de estructuras regulares de vórtices en el fluido, así como el inicio de la turbulencia para este flujo impulsado por esfuerzos cortantes. Observó experimentalmente el fenómeno y comprobó los números de Taylor de transición entre flujo laminar y flujo con vórtices regulares, y entre este último y flujo turbulento.

Ng y colaboradores en 1965 [58] presentan un modelo de cálculo de cojinetes con flujo turbulento, utilizando el concepto de viscosidad turbulenta, propuesto por Boussinesq, que se correlaciona mediante la llamada "ley de pared", con el perfil de velocidades promedio en la región cercana a la superficie para calcular el esfuerzo cortante turbulento.

Seirez y Ezzat en 1969 [85] presentaron aspectos sobre el diseño óptimo de cojinetes hidrodinámicos.

Hirs en 1973 [34] presenta una teoría integral de análisis de flujo turbulento en cojinetes, semejante a la teoría integral para flujo laminar o turbulento en tuberías; presenta una separación clara entre flujos dominados por gradiente de presión ( $Re < 3 \times 10^3$ ), y flujos dominados por arrastre viscoso ( $Re > 2 \times 10^4$ ), así como flujos en los que estos dos efectos son influyentes (en el rango intermedio de números de Reynolds). Esta teoría se basa en el descubrimiento empírico

de que la velocidad promedio del flujo, relativa a la pared, y el esfuerzo cortante (en la misma) pared, pueden expresarse mediante una fórmula común exponencial, tanto para flujos por presión, flujos por arrastre, y para combinaciones de estos dos tipos. Dicha fórmula relaciona al factor de fricción con el número de Reynolds. Los coeficientes y exponentes de estas ecuaciones se determinan a partir de mediciones sobre el flujo promedio, sin considerar en forma alguna las fluctuaciones turbulentas y puede extenderse para considerar el flujo entre superficies rugosas o ranuradas.

Frene y Godet en 1974 [27] reportan un estudio experimental para la visualización de vórtices de Taylor y mediciones de par; corroboran que el inicio de inestabilidades ocurre como lo predice la teoría con formación de vórtices (de Taylor), entre dos cilindros concéntricos. Cuando el número de Taylor alcanza el valor de 41.2, ocurre un aumento en el par. También midieron este número ( $\# Ta$  de transición) variando la razón de excentricidad. Estos autores encontraron una disminución hasta  $Ta = 36$  y un aumento posterior  $Ta = 60$ , cuando la razón de excentricidad varía de 0 a 0.4 y de 0.4 a 0.9 respectivamente.

Dowson y colaboradores en 1977 [21] trataron la optimización de cojinetes hidrodinámicos para carga radial, mediante la aplicación de una modificación del método de búsqueda por gradiente de Davidon, y usaron un método secuencial Simplex para calcular cojinetes de empuje axial con cojines inclinados, también hidrodinámicos.

Singh y colaboradores en 1977 [89] investigaron el comportamiento estático y dinámico de cojinetes hidrostáticos de cuatro recesos, con alimentación restringida por compensadores de tubo capilar; estudiaron la estabilidad y determinaron la masa crítica y la trayectoria del centro de la flecha, discretizando al tiempo e integrando numéricamente la ecuación de movimiento para el sistema flecha-cojinete.

Bou-Said y Chaomleffel en 1989 [10] presentaron resultados para cojinetes alineados híbridos de alta velocidad con tres recesos, lubricados con aceites de baja viscosidad dinámica y recesos de baja profundidad, en los que resulta necesario considerar las modificaciones a la presión y turbulencia, debidos a fuerzas de inercia a la salida de los recesos, para calcular sus características de trabajo; realizan mediciones experimentales de presión en los bordes de recesos y comprueban dicho efecto en recesos de poca profundidad. Los autores también presentan un método global de estudio de contactos lubricados en flujo isoterma laminar y no-laminar, por

el método del elemento finito, usando un elemento de aproximación tipo Hermit, con ventajas en el manejo de las no-linealidades que surgen de modelar los fenómenos de turbulencia y discontinuidades geométricas o caídas de presión en recesos. En el trabajo también se comparan resultados numéricos y experimentales.

San Andrés en 1990 [83] presenta el análisis de cojinetes híbridos turbulentos incluyendo efectos inerciales en las ecuaciones de movimiento.

San Andrés en 1990 [82] presenta un análisis simplificado del flujo turbulento en cojinetes híbridos, con posición centrada, basado en un modelo diferencial promediado, con coeficientes a partir de un análisis integral presentado por Hirs, G.G. en 1973; analiza su respuesta a fuerzas dinámicas y lleva a cabo una comparación de resultados de esta teoría simplificada, con los que proporciona un modelo numérico desarrollado por el mismo autor.

Kurtin y colaboradores en 1993 [42] investigaron experimental y numéricamente, cojinetes híbridos en aplicaciones que involucraran altas velocidades de la flecha y lubricantes con muy baja viscosidad. Estos autores específicamente proponen cojinetes híbridos lubricados con líquidos criogénicos, para reemplazar los rodamientos en uso en el motor principal del trasbordador espacial de la NASA; describen el equipo experimental de la Universidad de Texas A&M, para estudiar cojinetes lubricados con agua a altas velocidades, donde se probó un cojinete híbrido, de 5 recesos, alimentación compensada con orificios, a velocidades de 10000 a 25000 rpm, midiéndose la posición relativa, el par, la presión en recesos, el flujo másico y la temperatura, así como la capacidad de carga.

## 2.5 Discusión

La idea de compensación o autocompensación, que se encuentra contenida en el título de esta tesis, aparece con frecuencia en la literatura, casi siempre ligada a los restrictores de flujo de lubricante a los recesos. Los artículos de Ashley, Zhang y Bassani y Piccigallo la mencionan asociada a otros aspectos del funcionamiento de cojinetes; Ashley y Zhang con variaciones de la carga radial, y Bassani con variaciones de carga sobre cojinetes axiales. La propuesta principal de esta tesis, que consiste en emplear como criterio de diseño de cojinetes hidrostáticos cilíndricos, la rigidez angular óptima y la autocompensación de capacidad de carga ante des-

alineamientos de la flecha, no se trata ni se presenta, ni tampoco se sugiere en ninguno de los artículos revisados.

Para el análisis de cojinetes con desalineamiento el número de referencias es también reducido, sin embargo como se ha visto se han realizado trabajos importantes, principalmente sobre cojinetes completos (360 grados), con claros radiales pequeños, que sólo permiten desalineamientos pequeños; en este sentido las expresiones usadas en esas referencias, son aproximadas, tanto para el cálculo del claro radial, como de otros parámetros en que también afecta el desalineamiento. Como se señala mas adelante, especialmente en cojinetes parciales con desalineamientos mayores, el claro radial influye de forma importante sobre la exactitud de los cálculos de distribución de presión, por lo que en esta tesis se deduce una expresión que permite su evaluación exacta. Parte del método utilizado en la deducción del claro radial, se emplea además por primera ocasión para modificar otras expresiones en las que influye el desalineamiento, como es el caso de las ecuaciones con las que se calculan las fuerzas y momentos de presión y de fricción actuando sobre la flecha desalineada, que se modifican al referirse a un sistema ligado al cojinete.

Por otro lado, en el análisis matemático de cojinetes hidrostáticos o híbridos, es necesario establecer las condiciones de frontera en los recesos, o determinar las presiones y los flujos en los recesos. No se encontró referencia que presentara esta este problema de manera explícita, por lo que aquí se resuelve de manera original a través del planteamiento de las ecuaciones integro diferencial de continuidad en cada receso.

## Capítulo 3

# Modelo matemático, cojinetes con desalineamiento

El modelo matemático está constituido por las ecuaciones de lubricación de Reynolds, que son ecuaciones diferenciales parciales con la presión en el lubricante como variable dependiente, en las que intervienen con fuerte influencia sobre la solución, el claro radial local o espesor de la película, la viscosidad, la velocidad angular de la flecha, la velocidad del centro de la flecha en el caso transitorio, y para el caso de flujo turbulento, los esfuerzos turbulentos de Reynolds. El modelo incluye un criterio de transición entre flujo laminar y turbulento, y para el cálculo de cojinetes hidrostáticos o híbridos también debe contarse con las ecuaciones de continuidad para los recesos, que son ecuaciones integro-diferenciales en que intervienen el flujo de lubricante, la viscosidad, el claro radial local y como variables dependientes la presión dentro del receso y en sus bordes. Estas ecuaciones deben resolverse simultáneamente con las ecuaciones de Reynolds, considerando las condiciones de frontera, en los bordes laterales del cojinete y en los límites de la zona de cavitación. Para el caso de cojinetes hidrostáticos o híbridos, la solución simultánea de las ecuaciones de Reynolds y de continuidad en los recesos, determina las condiciones en los bordes de los recesos. El claro radial local o espesor de la película lubricante es de magnitud normalmente muy pequeña y aparece en las ecuaciones de Reynolds, como factor en dos de sus términos elevado a la tercera potencia, por lo que juega un papel esencial en la exactitud de los cálculos. Su determinación correcta es aún más importante en el caso de cojinetes con

desalineamiento, por lo que a esta variable se le da consideración especial en el capítulo siguiente. Finalmente, el cálculo de la magnitud y dirección de las fuerzas y momentos ejercidos por la película lubricante sobre la flecha y la definición de coeficientes de rigidez y amortiguamiento de la película, también forman parte del modelo matemático y se tratan en el siguiente capítulo.

Las ecuaciones de continuidad en los recesos considerando dos sistemas de alimentación de lubricante, la ecuación que describe de manera exacta el claro radial entre cojinete y flecha con desalineamiento finito, y las ecuaciones para el cálculo de fuerzas y momentos de la película sobre la flecha corregidas por desalineamiento de la flecha, como se presentan en esta tesis, fueron obtenidas de manera original por el autor.

A continuación se deducen las ecuaciones de lubricación de Reynolds, para flujo laminar y para flujo turbulento, siguiendo patrones originales establecidos por Reynolds y por otros investigadores [70][18][58][34]. Se deduce la ecuación de Reynolds para condiciones de flujo laminar y más adelante se presenta brevemente la teoría con la que comúnmente se trata el flujo turbulento. En la deducción se usan las ecuaciones de movimiento y la ecuación de continuidad, adaptadas a las condiciones particulares del flujo del lubricante en cojinetes y basándose en el análisis de órdenes de magnitud de los términos respectivos, tal como se presenta en el Apéndice.

### 3.1 Ecuaciones de balance de masa y cantidad de movimiento.

Se considera un sistema de referencia  $\{xyz\}$  para la película lubricante, sobre la superficie del cojinete, con  $x$  en dirección tangencial,  $y$  en dirección radial (positiva hacia el centro de la flecha) y  $z$  en dirección axial respectivamente.

Si se llama  $u, v, w$  a los componentes del vector velocidad en las direcciones  $x, y, z$  descritas en el párrafo anterior y se considera flujo incompresible, la ecuación de continuidad Ec.(0.4) del Apéndice, puede expresarse como,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.1)$$

Conservando la consideración de flujo incompresible, la ecuación anterior para flujo laminar, toma la misma forma para flujo turbulento, excepto que en este segundo caso  $u, v, w$  representan los promedios temporales. Bajo la misma condicionante de incompresibilidad la ecuación

anterior también se escribe igual, para flujo transitorio y para flujo permanente.

Si el "número de Reynolds reducido" es mucho menor que la unidad, ver Ec.(0.35), se justifica que en las ecuaciones de movimiento Ec.(0.6), se descarten los términos inerciales y las fuerzas de cuerpo, por lo que las ecuaciones de movimiento se escriben simplemente,

$$\frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial x_l} = 0 \quad (3.2)$$

Esta ecuación expresa el equilibrio entre esfuerzos viscosos, se lee como la divergencia del tensor de esfuerzos y en ella se implica la suma de términos sobre el índice repetido. Si en la ecuación anterior se sustituye la Ec.(0.16) resulta,

$$\frac{\partial p}{\partial x_m} = \frac{\partial \tau_{jm}}{\partial x_j} \quad (3.3)$$

ecuación que ahora expresa el equilibrio entre las fuerzas de presión y las fuerzas cortantes viscosas.

### 3.2 Ecuación de lubricación de Reynolds para flujo laminar

Sustituyendo en la Ec.(3.3) la relación constitutiva para fluidos newtonianos en flujo laminar dada en la Ec.(0.11), anulando previamente el segundo término del lado derecho de esa ecuación por considerarse lubricantes incompresibles, se obtiene,

$$\frac{\partial p}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_l} \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \quad (3.4)$$

Haciendo referencia nuevamente al análisis de órdenes de magnitud de las fuerzas viscosas en las ecuaciones de movimiento Ec.(0.32), la ecuación anterior puede escribirse en sus componentes, conservando sólo los términos de mayor orden de magnitud, como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

aquí la segunda ecuación simplemente indica que la presión no depende de  $y$ .

Las condiciones de frontera para la película lubricante en el claro entre flecha y cojinete, pueden escribirse como sigue, tomando la coordenada  $y$  positiva en dirección radial hacia el centro del cojinete,

$$\begin{aligned} \text{en } y = 0: & \quad u = 0; \quad w = 0; \quad v = 0; \\ \text{en } y = h: & \quad u = U; \quad w = 0; \quad v = V + U \frac{\partial h}{\partial x} \\ h(x, z) = 0, & \quad p = p_o \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde:

$v$  es la componente de velocidad del lubricante en dirección  $y$ .

$U$  es la velocidad tangencial en la superficie de la flecha

$V$  es la velocidad del centro de la flecha en dirección radial ( $V = \frac{\partial h}{\partial t}$ ).

$h(x, z)$  es una función que describe el claro radial entre flecha y cojinete y,

$p_o$  es la presión de suministro del lubricante.

Las Ecs.(3.5) con las condiciones de frontera Ec.(3.6) pueden integrarse directamente. Para el caso en que la viscosidad es una constante, se obtienen las componentes de velocidad  $u$  y  $w$  dadas por,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y - h) y + U \frac{y}{h} \\ w &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y - h) y. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Derivando  $u$  con respecto a  $x$ ,  $w$  con respecto a  $z$ , tomando a  $\mu$  como constante, y sustituyendo en la ecuación de continuidad Ec.(0.34) se obtiene,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} (y - h) y \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial p}{\partial z} (y - h) y \right\} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ U \frac{y}{h} \right\} \tag{3.8}$$

Integrando la ecuación anterior entre los límites de la película lubricante  $y = 0$  y  $y = h$ , considerando las condiciones de frontera Ec.(3.6), se obtiene la *ecuación de lubricación de*



*Reynolds para flujo laminar:*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left[ U \frac{\partial h}{\partial x} + 2V \right] \quad (3.9)$$

Nótese en esta ecuación la variable dependiente  $p$ , el claro radial local  $h(x, z)$  elevado a la tercera potencia y por lo tanto con importante influencia sobre su solución, la viscosidad  $\mu$  y las componentes de la velocidad en la superficie de la flecha, en dirección tangencial  $U$  y en dirección radial  $V$ .

Si la flecha se encuentra fuera de equilibrio, tanto las componentes  $U$  y  $V$ , como el claro radial  $h$ , y por consiguiente la presión local  $p$ , son dependientes del tiempo. En este caso el segundo término del lado derecho  $6\mu(2V)$ , que recibe el nombre de *término de prensado de película*, puede tener un orden de magnitud comparable a los demás y debe considerarse en el cálculo. Si la flecha gira en equilibrio,  $U$  y  $h$  no dependen del tiempo, el término de prensado es cero y la ecuación se escribe,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.10)$$

Como puede observarse en la Ec.(3.9), una solución de la ecuación de Reynolds está dada por una función  $p(x, z, t)$  que describe la distribución de presión en la superficie del cojinete y su posible variación en el tiempo.

La ecuación de lubricación de Reynolds para flujo laminar, con viscosidad variable se presenta en la referencia [93].

### **3.3 Ecuación de lubricación de Reynolds para flujo turbulento**

A velocidades angulares muy grandes de la flecha o con lubricantes de baja viscosidad o de alta densidad, puede alcanzarse la condición de flujo turbulento. Un modelo de cálculo completo debe incluir un criterio para decidir cuando emplear las ecuaciones para flujo laminar y cuando para flujo turbulento, por lo que se incluye la sección del Apéndice llamada Criterio de transición. Cuando se tiene flujo turbulento, las teorías de Constantinescu [17], Ng y Pan [58] o la de Hirs [34], que se tratan brevemente a continuación, permiten el cálculo mediante la llamada

ecuación de lubricación de Reynolds para flujo turbulento, que toma una forma casi igual que la ecuación para flujo laminar Ec.(3.9), excepto por los coeficientes de las derivadas del lado izquierdo de la ecuación, y al igual que la primera, se basa en la suposición de que se pueden despreciar los términos de inercia en las ecuaciones de movimiento. Esto es así, a pesar de que en la representación de los esfuerzos cortantes para flujo turbulento se consideran las fluctuaciones turbulentas, que como se sabe provienen de la consideración precisamente de las fuerzas de inercia, con lo cual se plantea la necesidad de revisar este tema en una investigación posterior. Lo anterior sugiere por otra parte y como efectivamente sucede, la determinación experimental de algunos coeficientes que son necesarios para el cálculo de los esfuerzos turbulentos usando alguna de las teorías mencionadas. En estas condiciones la Ec.(0.22) se escribe,

$$\frac{\partial p}{\partial x_s} = \frac{\partial}{\partial x_q} \left( \mu \frac{\partial u_s}{\partial x_q} - \overline{\rho u'_s u'_q} \right) \quad (3.11)$$

en que  $u_s$  y  $p$  representan respectivamente los promedios temporales de la velocidad y la presión y no sus valores instantáneos, mientras que las  $u'_s$  representan las fluctuaciones turbulentas instantáneas. A los promedios  $\overline{\rho u'_s u'_q}$  se les llama correlaciones entre fluctuaciones de velocidad, esfuerzos cortantes aparentes o esfuerzos turbulentos de Reynolds [36]. Las componentes de esta ecuación referidas al sistema  $\{xyz\}$  para la película lubricante antes descrito, se escriben como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\overline{\rho v'v'} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} - \overline{\rho w'v'} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Las condiciones de frontera correspondientes son:

$$\begin{aligned} \text{en } y = 0 : u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad u' = v' = w' = 0 \\ \text{en } y = h : u = U; \quad v = V + U \frac{\partial h}{\partial x}; \quad w = 0; \quad u' = v' = w' = 0 \\ h(x, z) = 0, \quad p = p_o. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La mayoría de las teorías sobre lubricación turbulenta, están de acuerdo hasta este punto. El problema principal desde el punto de vista teórico, es la representación de los esfuerzos turbulentos en términos de los gradientes de velocidad promedio o de alguna otra propiedad del flujo. Las teorías más usadas en el diseño de cojinetes son la de Constantinescu, que se basa en el concepto de Prandtl de la longitud de mezcla. La teoría de Ng, Pan y Elrod por otro lado, usa el concepto de "difusividad de remolino" ("eddy") propuesto por Boussinesq [80], y en tercer término la teoría de Hirs que utiliza un procedimiento integral ("bulk-flow") que al contrario de las teorías anteriores no requiere de la representación detallada del fenómeno de transporte turbulento [34]. La principal ventaja de esta última teoría, consiste en que las constantes empíricas usadas, se derivan de mediciones macroscópicas, de esfuerzos cortantes en la superficie, sin recurrir a la determinación, ni teórica ni experimental de perfiles de velocidad o fluctuaciones turbulentas.

Por ejemplo Ng y Pan [58], representan los esfuerzos turbulentos en la dirección tangencial como,

$$\begin{aligned} -\overline{\rho u'v'} &= \rho\epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\overline{\rho w'v'} &= \rho\epsilon \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Aquí  $\epsilon$  es la llamada difusividad de remolino. Sustituyendo estas expresiones en las Ecs.(3.12) e integrando entre 0 y  $h$ , con las condiciones de frontera (3.13), se obtiene para las componentes de la velocidad promedio en la película,

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -G_x \frac{h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U}{2} \\ \bar{w} &= -G_z \frac{h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Los coeficientes  $G_x$  y  $G_z$  consideran el transporte de momentum por difusión turbulenta y se correlacionan con el número de Reynolds, como se observa a continuación en las Ecs.(3.17) y (3.18).

Con un procedimiento semejante al seguido para obtener la ecuación de Reynolds para flujo laminar, pero usando las Ecs.(3.12), con una representación empírica adecuada para los

esfuerzos turbulentos, como la Ec.(3.14), las dos primeras teorías mencionadas conducen a la misma forma de la ecuación de Reynolds para flujo turbulento,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( G_x \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G_z \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.16)$$

Para obtener los valores de  $G_x$  y  $G_z$  se distinguen los flujos dominados por esfuerzos cortantes (de Couette, cojinetes hidrodinámicos) de aquellos dominados por gradientes de presión (de Poiseuille, cojinetes hidrostáticos o híbridos). Constantinescu [18] proporciona los valores numéricos para el primer caso, mediante las siguientes ecuaciones, para flujos de Couette con  $Re = \frac{U_C}{\nu}$  [18],

$$\begin{aligned} G_x &= \frac{1}{12 + 0.0136 Re^{0.9}} \\ G_z &= \frac{1}{12 + 0.0043 Re^{0.96}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

y para el caso de flujos dominados por gradientes de presión Hirs propone [34],

$$G_x = G_z = \frac{6.8}{Re_p^{0.681}} \quad (3.18)$$

con el número de Reynolds calculado como  $Re_p = \frac{\bar{u}h_{\min}}{\nu}$ ,

En el trabajo pionero de Constantinescu [17] se consideró flujo de Couette dominante, por lo que sus resultados aplicados a cojinetes híbridos e hidrostáticos puede conducir a errores, por otro lado esta teoría no considera la transición suave entre la delgada capa junto a la pared y el núcleo turbulento, lo que origina discontinuidad en el esfuerzo cortante. Finalmente surge la dificultad en especificar el valor de la constante de longitud de mezclado para paredes tan cercanas como se presentan en cojinetes. A pesar de las limitaciones su trabajo es aplicable en lubricación turbulenta compresible, con los términos de densidad apropiados en la ecuación de Reynolds [96].

La teoría de Hirs [34] está basada en el descubrimiento empírico de que la relación entre esfuerzo cortante en la pared  $\tau$ , y la velocidad promedio del flujo relativa a la pared  $\bar{u}$ , en que el esfuerzo cortante se está ejerciendo, puede expresarse por la fórmula siguiente, común para flujos impulsados por esfuerzos cortantes, por fuerzas de presión, o una combinación de estos

dos tipos básicos de flujo,

$$\frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2} = n \left( \frac{\rho\bar{u}h}{\mu} \right)^m \quad (3.19)$$

donde  $n$  y  $m$  son constantes que pueden determinarse experimentalmente, para una variedad muy grande de condiciones de operación de los cojinetes, por ejemplo superficies rugosas [33], cojinetes en los que los efectos de inercia sean importantes, con flujo dominado por esfuerzos cortantes o dominado por gradientes de presión, etc. De aquí la importancia práctica de esta teoría. Debido a su naturaleza, con esta teoría no se llega directamente a la ecuación de lubricación turbulenta de Reynolds, dada en la forma de la Ec.(3.16), ya que no se conocen de antemano las componentes de velocidad en el flujo y su sustitución en la ecuación de continuidad no es posible; sin embargo, aceptando su validez, es posible adaptar los resultados del trabajo de Hirs de la misma manera que en las dos teorías anteriores Ng [96]. Así Hirs proporciona la Ec.(3.18) que da los valores de  $G_x$  y  $G_z$ , para diferentes condiciones de flujo en función del número de Reynolds.

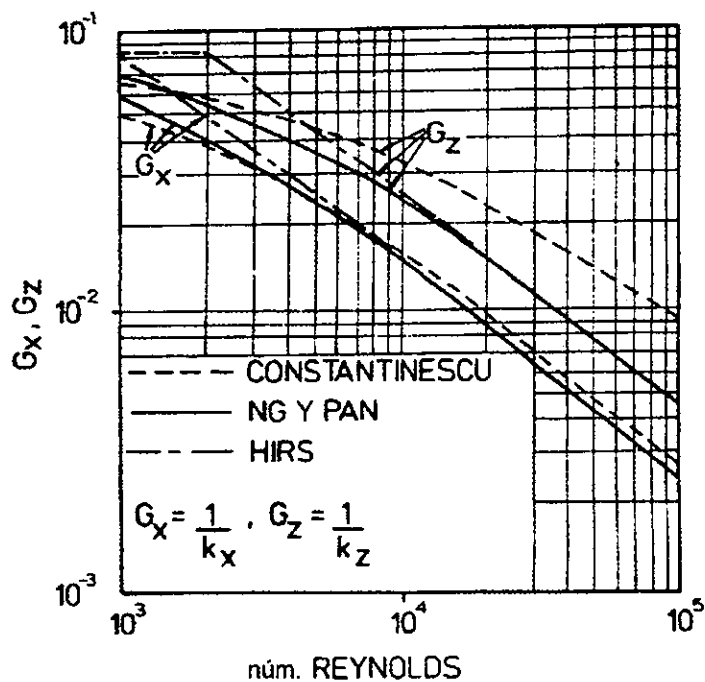


Figura 3-1: Coeficientes G vs. número de Reynolds, de acuerdo con Ref.[34]

Una comparación de valores de estos coeficientes para las tres teorías mencionadas puede observarse en la Fig.(3-1).

La solución de la ecuación de lubricación de Reynolds en cualquiera de sus formas, requiere conocimiento sobre las condiciones de frontera para la presión en los límites del cojinete y, la función  $h$  que describe la variación del claro entre flecha y cojinete. En el caso de cojinetes *hidrodinámicos* dicha solución es válida para toda la superficie del cojinete, excepto en la zona de cavitación, donde también, como se ha mencionado, hay necesidad de establecer las condiciones de frontera.

### 3.4 Ecuaciones de Continuidad en los recesos

En cojinetes *hidrostáticos* o *híbridos*, la alimentación forzada de lubricante en las zonas de recesos, altera el movimiento del lubricante que se debe a la rotación de la flecha y también altera la distribución de presiones. Hay una interdependencia entre flujos y presiones, e inicialmente se desconocen las presiones en toda la superficie, incluyendo la que se establece en cada receso, lo que implica un incremento en el número de incógnitas igual al número de recesos. Las ecuaciones adicionales que se requieren se obtienen al escribir la ecuación de continuidad para cada receso, como sigue [14][46],

$$q_r = \oint (\bar{u}h dz + \bar{w}h dx) \quad (3.20)$$

Aquí  $q_r$  representa el gasto que se alimenta al receso, el símbolo de integración representa la suma tomada alrededor de la frontera del receso,  $\bar{u}$  y  $\bar{w}$  son las componentes de velocidad promedio en  $h$ , el espesor de la película.

Para recesos de forma rectangular orientados de acuerdo a un sistema de referencia  $\{xyz\}$ , que coincida con la superficie del cojinete y la película desplegada, donde  $x$  fija la dirección tangencial,  $z$  la dirección axial y  $y$  la dirección radial, la ecuación anterior se escribe como,

$$q_r = \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} [h\bar{u}dz]_{X_{\min}} + \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} [h\bar{w}dx]_{Z_{\max}} - \int_{Z_{\max}}^{Z_{\min}} [h\bar{u}dz]_{X_{\max}} - \int_{X_{\max}}^{X_{\min}} [h\bar{w}dx]_{Z_{\min}} \quad (3.21)$$

o sustituyendo en ellas las Ecs.(3.15):

$$q_r = \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} \left[ -G_x \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Uh}{2} \right]_{X_{\min}} dz + \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \left[ -G_z \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right]_{Z_{\max}} dx + \\ - \int_{Z_{\max}}^{Z_{\min}} \left[ -G_x \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Uh}{2} \right]_{X_{\max}} dz - \int_{X_{\max}}^{X_{\min}} \left[ -G_z \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right]_{Z_{\min}} dx \quad (3.22)$$

recordando que  $G_x = G_z = \frac{1}{12}$  para flujo laminar y  $h$  es el claro radial local.

En esta ecuación intervienen los gradientes de presión calculados en la frontera del receso, por lo que involucran la presión incógnita dentro del receso. Inicialmente tampoco se conocen las presiones en sus bordes; sin embargo al resolverse simultáneamente con la ecuación de lubricación de Reynolds, pueden determinarse todas ellas.

### 3.5 Sistemas de alimentación de lubricante

La ecuación de continuidad Ec.(3.22) requiere de modificaciones que dependen del sistema de alimentación de lubricante al cojinete. Aquí se describen someramente dos sistemas de alimentación posibles y las modificaciones necesarias a dicha ecuación. El primer sistema es de uso muy difundido y se emplea en los cálculos y resultados que se presentan más adelante. El segundo sistema es de uso menos frecuente, pero tiene posibilidades de aplicación, de acuerdo a los objetivos de esta tesis. Las características que los definen son las siguientes:

- i) presión constante en múltiple de distribución de flujo, alimentación restringida, y
- ii) flujo de lubricante fijo a cada receso, alimentación libre.

#### 3.5.1 Presión conocida en múltiple, alimentación restringida

En este sistema la presión en el múltiple se mantiene constante, usando por ejemplo una válvula de alivio calibrada, y en la línea de alimentación a cada receso se usan restrictores de flujo, que pueden ser de tubo capilar, de placa de orificio o de otros tipos, ver Fig.(3-2).

Para calcular un cojinete con este sistema de alimentación se fijan la presión en el múltiple y las dimensiones y tipo de restrictores. Inicialmente se desconocen el flujo  $q_r$  y la presión que se establecen en cada receso, y tampoco se conocen las presiones en sus límites. Se sustituye

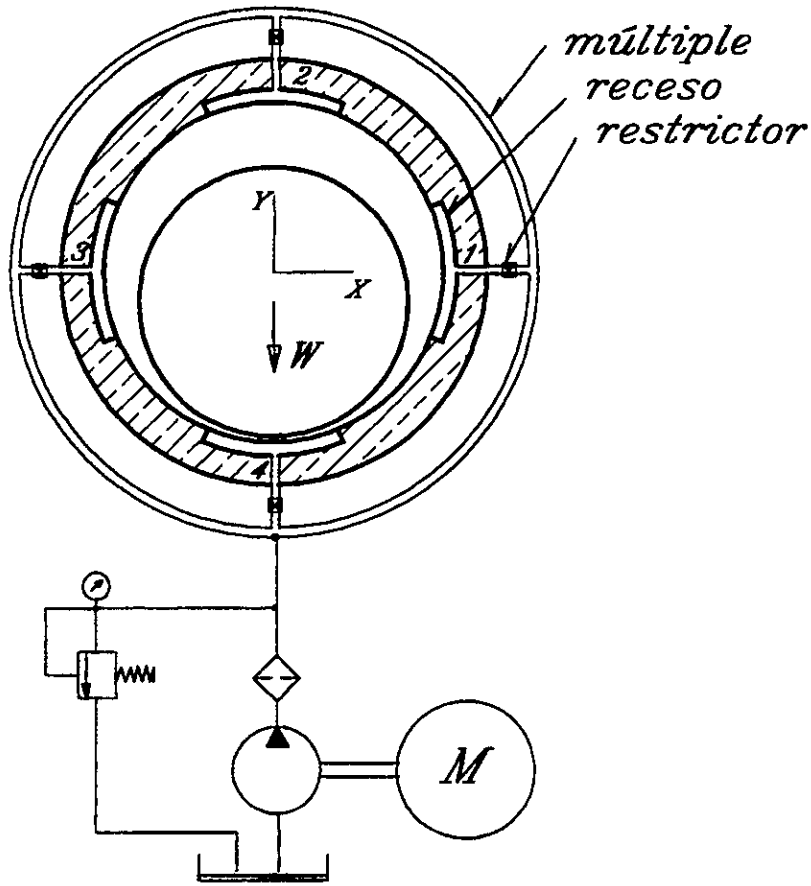


Figura 3-2: Sistema de lubricación, presión constante en múltiple

en las Ecs.(3.22) el flujo  $q_r$ , por la expresión siguiente:

$$q_r = \frac{p_{mult} - p_i}{R_i}, \quad (3.23)$$

aquí  $R_i$  es la resistencia al flujo calculada con las Ecs.(3.24) o (3.25),  $p_{mult}$  es la presión en el múltiple, y  $p_i$  representa la presión en el receso  $i$ , que es la misma incógnita que se tiene del lado derecho de la Ec.(3.22) y está incluida en los gradientes de presión calculados en los límites de los recesos.  $p_i$  puede factorizarse junto con los términos del lado derecho que también la incluyen, y las ecuaciones resultantes, resolverse simultáneamente con la ecuación de Reynolds.



Si el restrictor es un tubo capilar, la resistencia al flujo está expresada como,

$$R_i = \frac{8\mu l_c}{\pi d_c^4} \quad (3.24)$$

donde  $l_c$  y  $d_c$  representan la longitud y el diámetro del tubo capilar usado como restrictor.

Si el restrictor es una placa de orificio de bordes afilados, el flujo a través del orificio es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de presiones, ya que:

$$R_i = \frac{\sqrt{\frac{\rho}{2}(p_{mult} - p_i)}}{c_d \frac{\pi d_o^2}{4}} \quad (3.25)$$

donde  $c_d$  y  $d_o$  representan el coeficiente de descarga del orificio y su diámetro, respectivamente, que sustituida en la Ec.(3.23) resulta [72],

$$q_i = \frac{p_{mult} - p_i}{R_i} = c_d \frac{\pi d_o^2}{4} \left(\frac{2}{\rho}\right)^{1/2} (p_{mult} - p_i)^{1/2} \quad (3.26)$$

Nuevamente al combinarse esta ecuación con la Ec.(3.22) se tendrá como incógnita a la presión en el receso  $p_i$ , tanto del lado izquierdo como del lado derecho, y al no poderse factorizar, debe resolverse por tanteos o iteraciones, simultáneamente con la ecuación de Reynolds.

### 3.5.2 Gasto conocido a cada receso, alimentación libre

En este sistema el flujo alimentado a cada receso pasa libremente por la línea y se mantiene constante (por ejemplo, mediante bombas de desplazamiento positivo independientes en cada receso, a menos que la restricción impuesta por la flecha sobre el receso, origine que ahí la presión aumente hasta el valor límite recomendado por el fabricante de la bomba. Si esto sucede, debe recircularse una parte del flujo y el gasto que pasa por el receso se reduce, ver Fig.(3-3).

Si no se llega a dicha presión límite el flujo alimentado a cada receso se conoce y las Ecs.(3.22) se usan sin modificación. Si se llega a la presión límite, en los cálculos debe buscarse el flujo  $q'_i$  mínimo, con el cual se mantenga dicha presión. El excedente de flujo se considera flujo de recirculación  $q_{recir}$ .

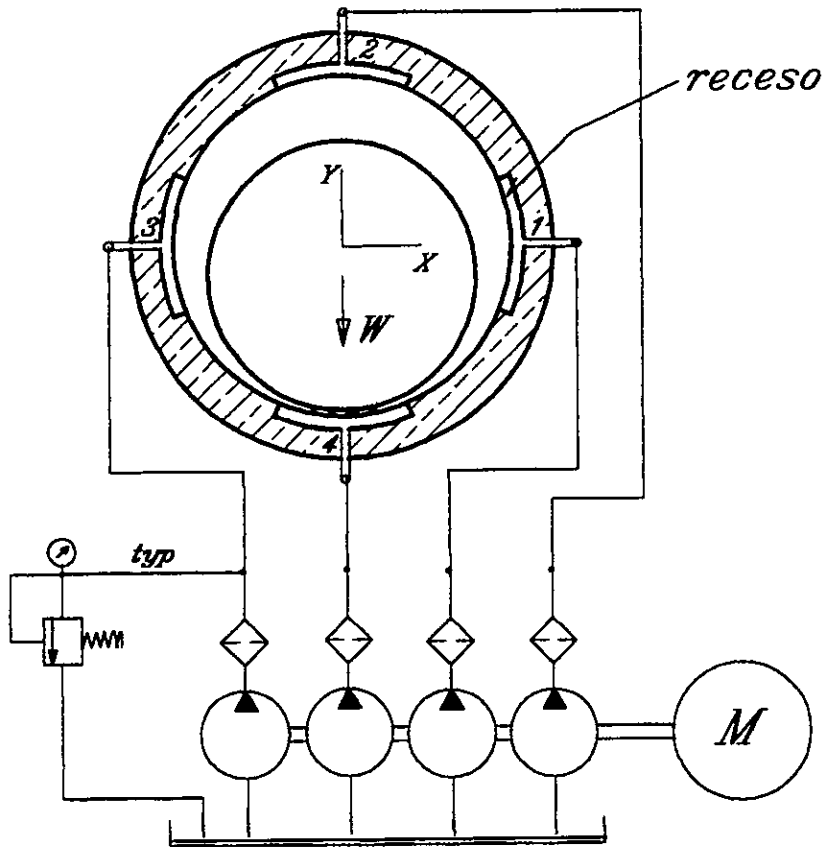


Figura 3-3: Sistema de lubricación, flujo constante a recesos

$$q_i = q_{recir_i} + q'_i \quad (3.27)$$

### 3.6 Condiciones de frontera en la región de cavitación

Debido a la excentricidad de la flecha en el cojinete, el lubricante se desplaza entre ellos, en un espacio con forma convergente y luego en otro de forma divergente. En la región convergente la presión en el lubricante se incrementa paulatinamente y al pasar a la región divergente la presión en el lubricante baja nuevamente. La presión puede incluso caer por debajo de la presión ambiente, en la que opere el cojinete. Si además ocurre que la temperatura del lubricante es la de saturación a esa presión, se presenta el *fenómeno de cavitación* [87], que se caracteriza por la formación de burbujas en el lubricante, que rompen la continuidad de la película. En la

región divergente normalmente hay un déficit de lubricante debido a que el volumen del canal de flujo es mayor que el del lubricante, lo que también origina el rompimiento de la película.

Existen varios criterios para el tratamiento de la condición de frontera en la zona de cavitación: la llamada condición de frontera de Flöberg [25], con la que se logra predecir ciertos patrones de flujo que se forman en la zona de cavitación [87] pero cuyo uso es impráctico debido a su complejidad, la condición de Sommerfeld [94], con distribución de presiones simétrica puntual en la zona divergente del canal de flujo, respecto a la distribución que se obtiene en el canal convergente, condición que se usa sólo cuando la presión ambiente es alta de manera que no se presente la cavitación, el criterio de Gumbel [93] en que la presión calculada por debajo de la ambiente se reemplaza simplemente por dicha presión y aunque no se satisface la continuidad en el punto de máximo acercamiento, se ha usado ampliamente debido a su simplicidad y a que no afecta grandemente los resultados, y la condición de frontera de Reynolds que establece un gradiente de presión nulo en el punto  $\theta = \theta^*$  en el que la presión en la película cae al mismo valor que la presión ambiente, y que remedia parcialmente el defecto en la continuidad [70].

Las ecuaciones de lubricación de Reynolds, predicen adecuadamente la distribución de presiones en el canal divergente si *no* se presenta la cavitación o el rompimiento de la película, lo que también puede suceder si el cojinete opera en un ambiente a alta presión que induzca un flujo de lubricante hacia el interior compensando el déficit de volumen. Se tiene entonces la mencionada condición de Sommerfeld. Con este tipo de operación de cojinetes hidrodinámicos "presurizados", pueden obtenerse capacidades de carga de hasta el doble de la normal.

Cuando la presión ambiente es la normal atmosférica por ejemplo, en la zona divergente puede haber cavitación o la película en el canal divergente, puede romperse por déficit de lubricante, lo que origina que se introduzca aire y prevalezca una presión prácticamente igual a la ambiente en esa zona. La complejidad física con la que se presenta el fenómeno obliga, en la mayoría de los casos, a considerar de manera simplificada la condición de frontera entre la película continua y la película con discontinuidad. Utilizando por ejemplo la llamada condición de Gumbel o la condición de Reynolds que se expresa como [93]:

$$p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0 \text{ en } x = x^* \text{ (} \theta = \theta^* \text{)} \quad (3.28)$$

donde  $x^*$  ( $\theta^*$ ) define el punto en que la presión en la película disminuye hasta la presión ambiente. Estas dos condiciones no son totalmente exactas, ya que no se cumple la ecuación de continuidad en esos puntos, o inducen a pensar en un flujo uniformemente distribuido en la frontera, que no se observa en la práctica; sin embargo se emplean ampliamente debido como se ha dicho a que esto no afecta en gran medida los cálculos de distribución de presión. Flöberg [25], a través de un análisis detallado de la ecuación de continuidad en esa frontera, ha podido predecir su forma con bastante certeza, incluyendo la formación de estrías que se observan experimentalmente [87].

Cabe señalar que el fenómeno de cavitación se presenta con mayor frecuencia en cojinetes hidrodinámicos que en hidrostáticos en virtud de que en los últimos la alimentación de lubricante, también en la zona divergente, normalmente cancela el fenómeno. Sin embargo, pudiera aparecer en las zonas entre recesos, especialmente cuando la alimentación de lubricante no es de magnitud suficiente para presurizar y restituir el volumen correspondiente.

## Capítulo 4

# Parámetros de diseño, cojinetes con desalineamiento

### 4.1 Funciones que describen el claro radial

En el diseño de cojinetes de maquinaria rotatoria, deben tomarse en cuenta las fuerzas y momentos externos que actúan sobre la flecha. Durante el funcionamiento estable, la flecha adopta una posición en la que se establece equilibrio entre las fuerzas y momentos externos y los que se generan en la película lubricante; la flecha gira y se sustenta en la película lubricante, sin que exista contacto con el cojinete. La posición estable que adopta la flecha generalmente es tal que el eje de la flecha no coincide ni es paralelo al del cojinete. Es decir, la flecha se encuentra en posición excéntrica y con desalineamiento. La excentricidad se debe fundamentalmente a la fuerza radial y el desalineamiento a los momentos externos, sin mencionar otros factores. Si se modifican las fuerzas y momentos externos o algún otro factor cambia, la posición de la flecha y el espacio en que se encuentra el lubricante, también cambia. Este último factor, llamado claro radial o espesor de la película  $h(\theta, z)$ , aparece elevado a la tercera potencia en la ecuación de lubricación de Reynolds y tiene fuerte efecto en la exactitud de los cálculos.

## 4.2 Sistemas de referencia y definiciones

### 4.2.1 Flecha en posición excéntrica-alineada

Se establecen dos sistemas de referencia paralelos, como se observa en la Fig.(4-1):

- i) sistema  $\{XYZ\}$  con origen  $O_b$  y eje  $Z$  en el eje geométrico del cojinete.
- ii) sistema  $\{xyz\}$  con origen  $O_j$  y eje  $z$  en el eje geométrico de la flecha.

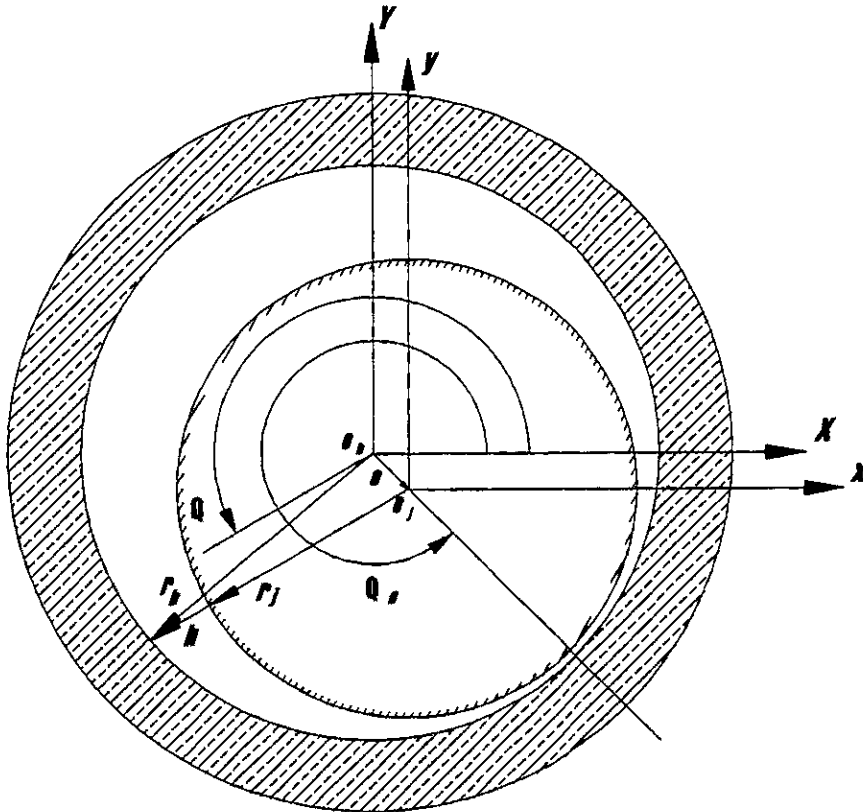


Figura 4-1: Sistemas de referencia, flecha alineada

Si la flecha se encuentra alineada, cualquier sección transversal del conjunto cojinete-flecha presenta el mismo aspecto. Por ser más simple, el origen de cada sistema se toma en la misma sección transversal. Los ejes  $X, x$  se consideran en posición horizontal y en el caso de cojinetes parciales, los ejes  $X$  y  $x$  coinciden con el inicio del arco del cojinete, como en la Fig.(4-2),

Se define *excentricidad alineada*  $e$ , al vector que va del origen  $O_b$  al origen  $O_j$ , como se muestra en la Fig.(4-1). Se designa *ángulo de máxima aproximación*  $\theta_0$ , al ángulo entre el eje

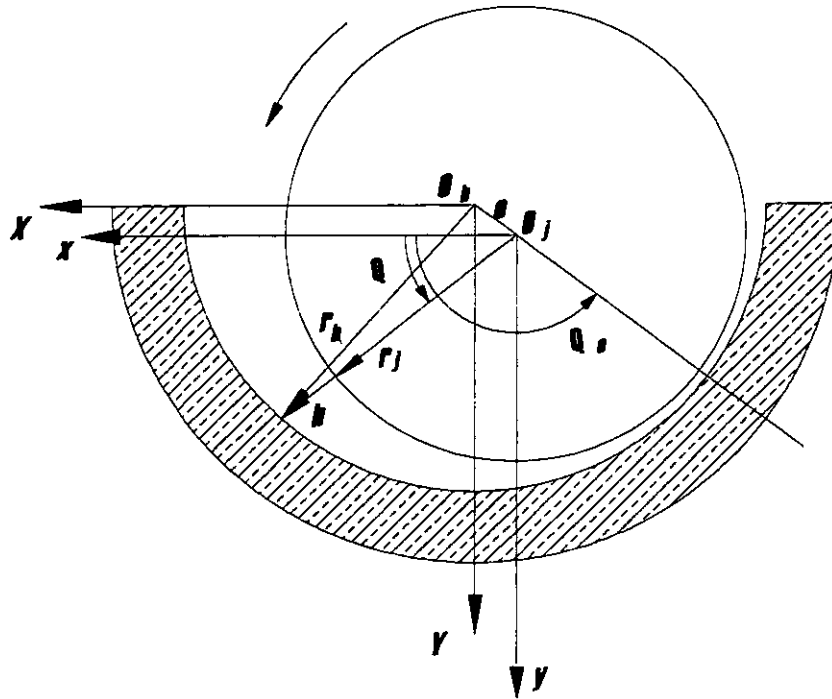


Figura 4-2: Sistemas de referencia, cojinete parcial.

$X$  positivo y el vector  $\vec{e}$ . También se define el *claro radial concéntrico*  $C$  como la diferencia entre el radio de la flecha  $r_j$  y el radio del cojinete  $r_b$ , o sea  $C = r_b - r_j$ .

#### 4.2.2 Flecha en posición excéntrica-desalineada

Si la flecha está desalineada respecto del cojinete, la excentricidad  $e$  y el ángulo de máxima aproximación  $\theta_0$ , son diferentes para cada sección transversal a lo largo del eje  $Z$ , por lo que también  $h$  será función de la posición axial  $Z$ . Si la sección transversal se observa como la intersección de un plano normal al eje del cojinete, la sección de la flecha aparece como una elipse, mientras que la sección del cojinete es circular; por lo que en este plano el radio  $r_j$  de la flecha no es constante y depende de  $\theta$ . Si ahora la sección transversal se observa como la intersección de un plano normal al eje de la flecha, entonces la sección del cojinete es la que aparece como una elipse y entonces el radio  $r_b$  será una función de  $\theta$ . Por lo tanto el claro radial

local  $h$  también depende del grado de desalineamiento.

Si se considera un claro radial pequeño (cojinetes de 360 grados o de más de 180 grados), los ángulos posibles para el desalineamiento también serán pequeños, por lo que resulta una diferencia pequeña entre la elipse y la circunferencia respectiva, y en una primera aproximación podría dejar de considerarse la variación de  $r_b$  o  $r_j$  con  $\theta$ . Para el caso de cojinetes parciales de 180 grados o menos, o el caso de claros radiales grandes, puede haber desalineamientos grandes. En este caso o también para una mayor exactitud en los cálculos, deberá considerarse la variación de los radios  $r_b$  o  $r_j$  con  $\theta$ , mediante la definición matemática del desalineamiento y su repercusión en el cálculo de  $h$ .

Para el análisis geométrico de la excentricidad y el desalineamiento de la flecha, usaremos las siguientes definiciones y sistemas de referencia:

Se define como *sección central* de un cojinete de longitud  $L$ , al plano normal a su eje geométrico, que pasa por  $L/2$ . Se define como *punto de pivoteo*  $O_j$ , al punto en que se intersecta el eje geométrico de la flecha, con la sección central del cojinete, ver Fig.(4-3).

i) sistema de referencia  $\{XYZ\}$  fijo al cojinete, con eje  $Z$  coincidente con el eje geométrico del cojinete y cuya intersección con la sección central, localiza al origen  $O_b$ .

ii) sistema  $\{xyz\}$  paralelo al primero, con origen  $O_j$  en la intersección del eje geométrico de la flecha con la sección central del cojinete.

iii) sistema  $\{x'y'z'\}$  con origen coincidente con el anterior  $O_j$ , obtenido al rotar el sistema  $\{xyz\}$  un ángulo  $\alpha$ , alrededor del eje  $x$ .

iv) sistema  $\{x''y''z''\}$  con origen  $O_j$ , obtenido al rotar el sistema  $\{x'y'z'\}$  un ángulo  $\beta$ , alrededor del eje  $y'$ .

El eje  $z''$  se mantiene siempre coincidente con el eje geométrico de la flecha.

Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  se miden a partir del eje  $z$  y  $z'$  respectivamente, como puede observarse en las Figs.(4-3 4-4). Por convención los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  son positivos si se dan en dirección de una permutación par de los ejes de referencia (de  $x$  a  $y$  o de  $z$  a  $x$  respectivamente), y negativos si se dan en dirección de una permutación impar (de  $y$  a  $x$  o de  $x$  a  $z$ ). Las rotaciones pequeñas son conmutativas [51], por lo que las rotaciones  $\alpha$  y  $\beta$  podrían considerarse en el orden inverso;  $\alpha$  en el plano  $xz$ , alrededor del eje  $y$ , y  $\beta$  en el plano  $y'z'$ , alrededor del eje  $x'$ . Los sistemas (i) y (ii) son los mismos que los empleados en la sección anterior, y los sistemas (ii),(iii) y (iv)



tienen su origen en  $O_j$ .

### 4.2.3 Desalineamiento

Para el cálculo del claro radial local  $h$ , se requiere la expresión matemática del *desalineamiento*. Se define primero *ángulo de desalineamiento*  $\gamma$ , al ángulo entre los ejes  $z$  y  $z''$ ; *plano de desalineamiento* al plano que contiene a los ejes  $z$  y  $z''$ ; y *ángulo del plano de desalineamiento*  $A$ , al ángulo entre el eje  $x$ -positivo y la línea en que se intersecta el plano de desalineamiento con la sección central del cojinete, paralela al plano coordenado  $xy$ , ver Fig.(4-4).

Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  se relacionan con los ángulos  $A$  y  $\gamma$ , a través del triángulo rectángulo esférico de lados  $\alpha\beta\gamma$  y radio  $z$ , o del ángulo triedro  $O_jADE$ , como se observa en la Fig.(4-4), mediante las siguientes fórmulas de trigonometría esférica [2], que se deducen fácilmente,

$$\begin{aligned}\tan A &= \frac{\sin \alpha}{\tan \beta} \\ \tan \gamma &= \frac{\tan \beta}{\cos \alpha \cos A}\end{aligned}\quad (4.1)$$

Como se observa, los ángulos  $A$  y  $\gamma$  que definen completamente el desalineamiento de la flecha en cualquier dirección, pueden darse alternativamente por los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

### 4.2.4 Excentricidad y ángulo de máxima aproximación, con desalineamiento

Haciendo referencia a la misma Fig.(4-4) se escribe la relación vectorial siguiente,

$$\vec{e}_d = \vec{g} + \vec{e} + \vec{c}_Z \quad (4.2)$$

Aquí  $\vec{e}$  es el vector que se definió antes como *excentricidad alineada*;  $\vec{g}$  es el vector de desplazamiento de un punto en el centro de la flecha que va de la posición alineada en  $z = Z_a$  a la posición desalineada en  $z'' = Z_a$ ;  $\vec{c}_Z$  es un vector en dirección del eje  $Z$  de magnitud igual a la proyección de  $\vec{g}$  sobre el mismo eje  $Z$  y  $\vec{e}_d$  es el vector que se define como *excentricidad desalineada*, nótese la perpendicularidad entre este vector y el eje  $Z$  del cojinete, y parte del centro del cojinete en  $Z = Z_a - c_Z$ , al centro de la flecha desalineada, en  $z'' = Z_a$  sobre un plano paralelo a  $XY$ .

Las componentes del vector  $\vec{e}_d$  referidas al sistema  $\{XYZ\}$ , se expresan como sigue, haciendo referencia a la Fig.(4-4),

$$\begin{aligned} e_{dX} &= e \cos \theta_0 - z \sin \beta \\ e_{dY} &= e \sin \theta_0 - z \cos \beta \sin \alpha \\ e_{dZ} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde se ha tomado en cuenta la convención de signos para los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

La magnitud del vector  $\vec{c}_Z$ , puede expresarse como,

$$c_Z = z(1 - \cos \gamma) \quad (4.4)$$

Combinando las Ec.(4.3) se obtiene la excentricidad desalineada,

$$e_d(z, \alpha, \beta) = \sqrt{e_{dX}^2 + e_{dY}^2} \quad (4.5)$$

y el ángulo de máximo acercamiento  $\theta_{0d}$ , cuando hay desalineamiento,

$$\theta_{0d}(z, \alpha, \beta) = \arctan \frac{e_{dY}}{e_{dX}} \quad (4.6)$$

### 4.3 Claro radial excéntrico-alineado

Para deducir la función que describe el claro entre flecha y cojinete, con la flecha excéntrica-alineada, se hace referencia a la Fig.(4-1) y se escribe la siguiente ecuación vectorial,

$$\vec{r}_b = \vec{r}_j + \vec{h} + \vec{e} \quad (4.7)$$

cuyas componentes referidas al sistema  $\{XYZ\}$  se expresan como,

$$\begin{aligned} r_{bX} &= (r_j + h) \cos \theta + e \cos \theta_0 \\ r_{bY} &= (r_j + h) \sin \theta + e \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Combinando las Ec.(4.8) se tiene,

$$r_b^2 = r_{bX}^2 + r_{bY}^2 = (r_j + h)^2 + 2e(r_j + h) \cos(\theta - \theta_0) + e^2 \quad (4.9)$$

En la práctica  $r_b$  o  $r_j$  son del orden de  $10^{-2}$  a  $10^1$  m, mientras que  $h$  o  $e$ , son del orden de  $10^{-5}$  m, por lo que al desarrollar los términos de la ecuación anterior y considerar que  $e^2$ ,  $h^2$ ,  $eh$  son mucho menores que  $r_j$ , se obtiene para  $h$ :

$$h(\theta) = \frac{r_b^2 - r_j^2}{2r_j} - e \cos(\theta - \theta_0). \quad (4.10)$$

Si se considera además que  $r_b + r_j \simeq 2r_j$  y se sustituye el claro radial  $C$ , y la definición de excentricidad relativa  $\varepsilon = \frac{e}{C}$ , se obtiene una expresión más simple, pero un poco menos precisa que la Ec.(4.10),

$$h(\theta) = C [1 - \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)] \quad (4.11)$$

nótese de esta ecuación, que si la flecha se encuentra alineada,  $h$  sólo es función de la posición angular  $\theta$ , ya que  $C$ ,  $\varepsilon$  y  $\theta_0$  no dependen de  $Z$ .

#### 4.4 Claro radial con desalineamiento, solución aproximada

La Ec.(4.10) para el claro radial  $h$ , puede corregirse de manera aproximada para desalineamientos pequeños, utilizando las Ec.(4.5 y 4.6) anteriores, sin considerar la variación de  $r_b$  o  $r_j$  con  $\theta$ ,

$$h(z, \theta, \alpha, \beta) = \frac{r_b^2 - r_j^2}{2r_j} - e_d(z, \alpha, \beta) \cos [\theta - \theta_{0d}(z, \alpha, \beta)] \quad (4.12)$$

#### 4.5 Claro radial con desalineamiento, solución exacta

Se escribe la siguiente ecuación vectorial, partiendo del punto A de la Fig.(4-5) con el objetivo de obtener la expresión exacta para el claro radial  $h$ .

$$\vec{r}_j + \vec{h} = \vec{e}_d + \vec{b}_Z + \vec{r}_b \quad (4.13)$$

aquí los vectores  $\vec{r}_b$  y  $\vec{e}_a$  se encuentran sobre planos paralelos al plano coordenado  $XY$ , separados una distancia variable dada por el vector  $\vec{b}_Z$ , que es la proyección del vector rotatorio suma  $\vec{r}_j + \vec{h}$ , sobre el eje  $Z$ .  $\vec{r}_j$  y  $\vec{h}$  tienen la misma dirección normal al eje  $z''$ , o sea se encuentran en un plano paralelo al plano coordenado  $x''y''$ .

A continuación se introduce la matriz de rotación  $a_{ij}$  que considera las rotaciones  $\alpha$  y  $\beta$  descritas antes, para convertir el sistema  $\{XYZ\}$  o el sistema paralelo  $\{xyz\}$ , al sistema  $\{x''y''z''\}$ , o la traspuesta de dicha matriz para hacer la conversión inversa

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Primero se consideran las componentes del vector  $\vec{r}_j + \vec{h}$  sobre el sistema  $\{x''y''z''\}$  y se usa la traspuesta de la Ec.(4.14), para convertir dichas componentes al sistema  $\{XYZ\}$  y se obtiene,

$$\begin{aligned} (r_j + h)_X &= |r_j + h| (\cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \alpha \sin \beta) \\ (r_j + h)_Y &= |r_j + h| (\sin \theta \cos \alpha) \\ (r_j + h)_Z &= |r_j + h| (-\cos \theta \sin \beta + \sin \theta \sin \alpha \cos \beta) \end{aligned} \quad (4.15)$$

la tercer componente, como se ha dicho, es de magnitud igual a la del vector  $\vec{b}_Z$ ,

Ahora se puede escribir la Ec.(4.33), en sus componentes referidas al sistema  $\{XYZ\}$ , sustituyendo en ella las Ecs.(4.15),

$$\begin{aligned} (r_j + h)_X &= e_{aX} + r_{bX} = |r_j + h| (\cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \alpha \sin \beta) \\ (r_j + h)_Y &= e_{aY} + r_{bY} = |r_j + h| (\sin \theta \cos \alpha) \\ (r_j + h)_Z &= b_Z = |r_j + h| (-\cos \theta \sin \beta + \sin \theta \sin \alpha \cos \beta) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Si se despejan de las Ec.(4.16) las componentes de  $r_b$ , se eleva al cuadrado cada componente

y se suman las ecuaciones resultantes, se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para  $r_j + h$ ,

$$a |r_j + h|^2 + 2(b_1 + b_2) |r_j + h| + c = 0 \quad (4.17)$$

con coeficientes dados por las expresiones siguientes, que se obtienen en función de la excentricidad alineada  $e$  y, el ángulo de máximo acercamiento alineado  $\theta_0$ , al sustituir las Ecs.(4.3),

$$\begin{aligned} a &= \cos^2 \theta \cos^2 \beta + 2 \cos \theta \sin \theta \sin \alpha \cos \beta \sin \beta + \sin^2 \theta \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \theta \cos^2 \alpha \\ b_1 &= e(\cos \theta_0 \cos \theta \cos \beta + \cos \theta_0 \sin \theta \sin \alpha \sin \beta + \sin \theta_0 \sin \theta \cos \alpha) \\ b_2 &= z(\cos \theta \sin \beta \cos \beta + \sin \theta \sin \alpha \sin^2 \beta + \sin \theta \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta) \\ c &= e^2 - r_b^2 + 2ez(\cos \theta_0 \sin \beta + \sin \theta_0 \sin \alpha \cos \beta) + z^2(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha) \end{aligned} \quad (4.18)$$

La expresión general exacta para el claro radial  $h$  entre cojinete y flecha excéntrica y con desalineamiento finito, se obtiene entonces de la raíz positiva de la Ec.(4.17),

$$h(\theta, z, \alpha, \beta) = \frac{1}{a} \left( -b + \sqrt{b^2 - ac} \right) - r_j \quad (4.19)$$

en que  $b = b_1 + b_2$ .

## 4.6 Fuerzas y momentos de película con flecha desalineada

A continuación se deducen varias ecuaciones para el cálculo de parámetros físicos de interés en este trabajo. Estas fórmulas son semejantes a las empleadas por otros, sin embargo su corrección para el caso en que la flecha presenta desalineamiento finito, fueron desarrolladas por el autor [48].

### 4.6.1 Fuerzas de presión

Las componentes diferenciales de la fuerza de presión que actúa en un área diferencial en la superficie de la flecha desalineada, en las direcciones del sistema de referencia  $\{x'' y'' z''\}$ , pueden

escribirse como sigue,

$$\begin{aligned}
 dF_{px''} &= -p(\theta, z) \cos \theta r_j d\theta dz \\
 dF_{py''} &= -p(\theta, z) \sin \theta r_j d\theta dz \\
 dF_{pz''} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Aplicando la traspuesta de la Ec.(4.14), para convertir dichas componentes al sistema  $\{XYZ\}$  fijo al cojinete, e integrando sobre la superficie del muñón de la flecha se obtiene,

$$\begin{aligned}
 F_{pX} &= -r_j \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p(\theta, z) (\cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \alpha \sin \beta) d\theta dz \\
 F_{pY} &= -r_j \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p(\theta, z) \sin \theta \cos \alpha d\theta dz \\
 F_{pZ} &= -r_j \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p(\theta, z) (\sin \theta \sin \alpha \cos \beta - \cos \theta \sin \beta) d\theta dz
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

La fuerza de presión resultante  $F_p$ , en  $\{XYZ\}$  se escribe,

$$F_p = \sqrt{F_{pX}^2 + F_{pY}^2 + F_{pZ}^2} = \sqrt{F_{pXY}^2 + F_{pZ}^2} \tag{4.22}$$

donde  $F_{pXY}^2 = F_{pX}^2 + F_{pY}^2$ .

El ángulo en que actúa  $F_{pXY}$  sobre el plano  $XY$ , medido a partir del eje  $X$ ,

$$\phi_{pXY} = \arctan \frac{F_{pY}}{F_{pX}} \tag{4.23}$$

El ángulo en que actúa la fuerza resultante, medido a partir de la dirección de  $F_{pXY}$  hacia el eje  $Z$ ,

$$\phi_p = \arctan \frac{F_{pZ}}{F_{pXY}} \tag{4.24}$$

La fuerza de presión adimensional  $\bar{F}_p = W_{\text{adim}}$  se define como:

$$W_{\text{adim}} = \frac{F_p}{DLp_{\text{mult}}} \tag{4.25}$$

## 4.6.2 Fuerzas de fricción

La fuerza de fricción resultante así como su dirección, se calcula de manera totalmente análoga a las de la sección anterior. Las componentes diferenciales de la fuerza de fricción, respecto del sistema de referencia  $\{x''y''z''\}$ , se escriben,

$$\begin{aligned} dF_{fx''} &= \tau_{xy}(\theta, z) \sin \theta r_j d\theta dz \\ dF_{fy''} &= -\tau_{xy}(\theta, z) \cos \theta r_j d\theta dz \\ dF_{fz''} &= 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Aquí el esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$  sobre la superficie de la flecha se calcula a partir de las Ecs.(0.11, 3.7) y resulta para la zona presurizada,

$$\tau_{xy} = \frac{h}{2r_j} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \frac{U}{h} \quad (4.27)$$

y para la zona de cavitación [103],

$$c\tau_{xy} = \mu \frac{Uh^*}{h^2} \quad (4.28)$$

En las áreas donde existen recesos, el espesor de la película lubricante es mucho mayor comparada con aquella fuera del receso, por lo cual el esfuerzo cortante en estas zonas no se considera significativo.

Para convertir las componentes dadas en Ec.(4.23) al sistema  $\{XYZ\}$ , se usa nuevamente la Ec.(4.14), y para obtener las componentes totales se integra sobre la superficie del muñón,

$$\begin{aligned} F_{fX} &= r_j \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \tau_{xy}(\theta, z) (\sin \theta \cos \beta - \cos \theta \sin \alpha \sin \beta) d\theta dz \\ F_{fY} &= -r_j \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \tau_{xy}(\theta, z) \cos \theta \cos \alpha d\theta dz \\ F_{fZ} &= -r_j \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \tau_{xy}(\theta, z) (\sin \theta \sin \beta + \cos \theta \sin \alpha \cos \beta) d\theta dz \end{aligned} \quad (4.29)$$

La fuerza de fricción resultante  $F_f$ , en  $\{XYZ\}$  se escribe,

$$F_f = \sqrt{F_{fX}^2 + F_{fY}^2 + F_{fZ}^2} = \sqrt{F_{fXY}^2 + F_{fZ}^2} \quad (4.30)$$

El ángulo en que actúa  $F_{fXY}$  sobre el plano  $XY$ , medido a partir del eje  $X$  :

$$\phi_{fXY} = \arctan \frac{F_{fY}}{F_{fX}} \quad (4.31)$$

El ángulo en que actúa la fuerza resultante, medido a partir de la dirección de  $F_{fXY}$  hacia el eje  $Z$ ,

$$\phi_f = \arctan \frac{F_{fZ}}{F_{fXY}}. \quad (4.32)$$

### 4.6.3 Momentos de presión

De manera semejante los momentos diferenciales originados por las fuerzas elementales de presión, alrededor de las direcciones del sistema de referencia  $\{x''y''z''\}$ , se escriben como sigue, aplicando la misma convención de signos que fue establecida para los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ ,

$$\begin{aligned} dM_{x''} &= z \cdot p(\theta, z) \sin \theta r_j d\theta dz \\ dM_{y''} &= -z \cdot p(\theta, z) \cos \theta r_j d\theta dz \\ dM_{z''} &= 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Usando de nueva cuenta la traspuesta de la matriz de rotación (4.14),  $a_{ji}$ , para convertir estas componentes al sistema  $\{XYZ\}$ , e integrando sobre la superficie del muñón se obtienen los momentos de las fuerzas de presión,

$$\begin{aligned} M_X &= r_j \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p(\theta, z) (\sin \theta \cos \beta - \cos \theta \sin \alpha \sin \beta) d\theta z dz \\ M_Y &= -r_j \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p(\theta, z) \cos \theta \cos \alpha d\theta z dz \\ M_Z &= -r_j \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p(\theta, z) (\sin \theta \sin \beta + \cos \theta \sin \alpha \cos \beta) d\theta z dz. \end{aligned} \quad (4.34)$$

De manera semejante a los dos casos anteriores, el vector que representa el momento total



sobre el cojinete, originado por las fuerzas de presión  $M_p$ , en  $\{XYZ\}$  se escribe,

$$M_p = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{M_{XY}^2 + M_Z^2} \quad (4.35)$$

donde  $M_{XY} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}$ , y la dirección en que actúa se obtiene de manera semejante, usando ecuaciones similares a la (4.31) y a la (4.32).

Los momentos adimensionales  $M_{ij \text{ adim}}$  se definen como:

$$M_{ij \text{ adim}} = \frac{M_{ij}}{DL^2 p_{mult}}. \quad (4.36)$$

## 4.7 Coeficientes de rigidez y amortiguamiento

Los coeficientes de rigidez son una medida del cambio que sufren las componentes de las fuerzas de presión en la película lubricante, frente a desplazamientos de la flecha y los coeficientes de amortiguamiento también miden el cambio de dichas fuerzas pero debidos a la rapidez con que se dan esos desplazamientos. Ambos aparecen como factores en las ecuaciones de movimiento usadas en los estudios de estabilidad de sistemas flecha-cojinetes [103][93], etc.

### 4.7.1 Coeficientes de rigidez de fuerza

Cuando el centro de la flecha se desplaza de su posición de equilibrio, las fuerzas de presión  $F_{pX}$ ,  $F_{pY}$  cambian. Los coeficientes de rigidez de fuerza describen los cambios en estas fuerzas correspondientes a desplazamientos de la flecha y pueden escribirse como sigue,

$$\begin{aligned} K_{xx} &= -\frac{\partial F_{pX}}{\partial x} \\ K_{xy} &= -\frac{\partial F_{pX}}{\partial y} \\ K_{yx} &= -\frac{\partial F_{pY}}{\partial x} \\ K_{yy} &= -\frac{\partial F_{pY}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

### 4.7.2 Coeficientes de amortiguamiento de fuerza

Cuando el centro de la flecha se desplaza de su posición de equilibrio con una velocidad de componentes  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ , las fuerzas de presión  $F_{pX}$ ,  $F_{pY}$ ,  $F_{pZ}$  cambian. Los coeficientes de amortiguamiento de fuerza describen los cambios en estas fuerzas correspondientes a esa velocidad, y pueden escribirse como sigue,

$$\begin{aligned}C_{xx} &= -\frac{\partial F_{pX}}{\partial \dot{x}} \\C_{xy} &= -\frac{\partial F_{pX}}{\partial \dot{y}} \\C_{yx} &= -\frac{\partial F_{pY}}{\partial \dot{x}} \\C_{yy} &= -\frac{\partial F_{pY}}{\partial \dot{y}}.\end{aligned}\tag{4.38}$$

### 4.7.3 Coeficientes de rigidez de momento

Cuando el eje de la flecha se desalinea; es decir, gira alrededor de los ejes  $x$  o  $y$ , los momentos de las fuerzas de presión  $M_X$ ,  $M_Y$  cambian. Los coeficientes de rigidez de momento, describen el cambio de estos momentos respecto de rotaciones de desalineamiento de la flecha y pueden escribirse como se muestra a continuación, referidos a los ángulos de desalineamiento  $\alpha$  y  $\beta$  definidos antes,

$$\begin{aligned}K_{x\alpha} &= -\frac{\partial M_X}{\partial \alpha} \\K_{x\beta} &= -\frac{\partial M_X}{\partial \beta} \\K_{y\alpha} &= -\frac{\partial M_Y}{\partial \alpha} \\K_{y\beta} &= -\frac{\partial M_Y}{\partial \beta}.\end{aligned}\tag{4.39}$$

### 4.7.4 Coeficientes de amortiguamiento de momento

Cuando el eje de la flecha se desalinea alrededor de los ejes  $x$  o  $y$  con una cierta velocidad angular, los momentos de las fuerzas de presión  $M_X$ ,  $M_Y$  cambian. Los coeficientes de amortiguamiento de momento describen las razones de cambio en estos momentos respecto de las componentes

de la velocidad angular  $\dot{\alpha}$  y  $\dot{\beta}$  de desalineamiento y pueden escribirse como,

$$\begin{aligned} C_{x\alpha} &= -\frac{\partial M_X}{\partial \alpha} \\ C_{x\beta} &= -\frac{\partial M_X}{\partial \beta} \\ C_{y\alpha} &= -\frac{\partial M_Y}{\partial \alpha} \\ C_{y\beta} &= -\frac{\partial M_Y}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

## 4.8 Capacidad de carga, condición de equilibrio

Para que haya equilibrio, la suma de los vectores que representan las fuerzas de presión y de fricción internas, debe ser igual y de sentido contrario al vector que representa la fuerza externa. También para que haya equilibrio, se requiere que los vectores que representan a los momentos externos y los que representan a los momentos internos, deben ser de igual magnitud y de sentido contrario.

De aquí se define la *capacidad de carga*  $W$  del cojinete en estado permanente, como la suma vectorial de las fuerzas de presión y de fricción,

$$\vec{W} = \vec{F}_p + \vec{F}_f \quad (4.41)$$

El equilibrio se representa por las condiciones

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= -\vec{W} \\ \vec{M}_e &= -\vec{M}_p \end{aligned} \quad (4.42)$$

## 4.9 Coeficiente de fricción, pérdida de potencia por fricción

El coeficiente de fricción  $f$  se define como la razón entre la fuerza de fricción y la capacidad de carga

$$f = \frac{F_f}{W} \quad (4.43)$$

Por otro lado el par de la fuerza de fricción actuando sobre la flecha en dirección tangencial,

se expresa referida al sistema  $\{XYZ\}$ ,

$$M_{fZ} \hat{i}_z = r_j \times F_{fX} = \hat{i}_z r_j^2 \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \tau_{xy}(\theta, z) (\sin \theta \cos \beta - \cos \theta \sin \alpha \sin \beta) d\theta dz \quad (4.44)$$

y a partir de ella la pérdida de potencia por fricción como,

$$P_f = \omega M_{fZ} \quad (4.45)$$

## 4.10 Potencia de bombeo

Los sistemas de bombeo de lubricante considerados son los descritos antes. El primero mantiene una presión fija en el múltiple mediante una válvula de alivio de presión calibrada. La alimentación a cada receso se restringe con una placa de orificio o un tubo capilar, con el objeto de asegurar la alimentación a los recesos con mayor restricción, debido a la cercanía de la flecha. En el segundo sistema se alimenta positiva e independiente, un flujo fijo de lubricante a cada receso y en alguno de ellos puede haber recirculación de flujo, si ya se alcanzó la presión de trabajo de la bomba. Las figuras 3-2 y 3-3, muestran detalles de los dos sistemas.

La potencia de bombeo del primer sistema está dada por,

$$Pot = \frac{Q p_{mult}}{\eta}, \quad (4.46)$$

donde  $\eta$  representa la eficiencia mecánica de la bomba,  $p_{mult}$  es la presión en el múltiple y  $Q$  es el flujo total alimentado por la bomba (al cojinete o al múltiple de distribución), dado por

$$Q = q_{mult \text{ recir}} + \sum_i^r q_i \quad (4.47)$$

Aquí  $q_i$  es el flujo que se tiene en el receso  $i$ ,  $q_{mult \text{ recir}}$  es el flujo recirculado desde el múltiple.

Para el segundo sistema con flujo fijo a cada receso, la potencia de bombeo se calcula mediante,

$$P_{ot} = \frac{\sum_i (q'_i + q_{i \text{ recir}}) p_i}{\eta} \quad (4.48)$$

En esta ecuación  $q'$  es el flujo que llega al receso,  $p_i$  es la presión en el receso  $i$ ,  $q_{i \text{ recir}}$  es el flujo recirculado, mayor que cero si  $p_i$  es igual que la presión máxima de bombeo.

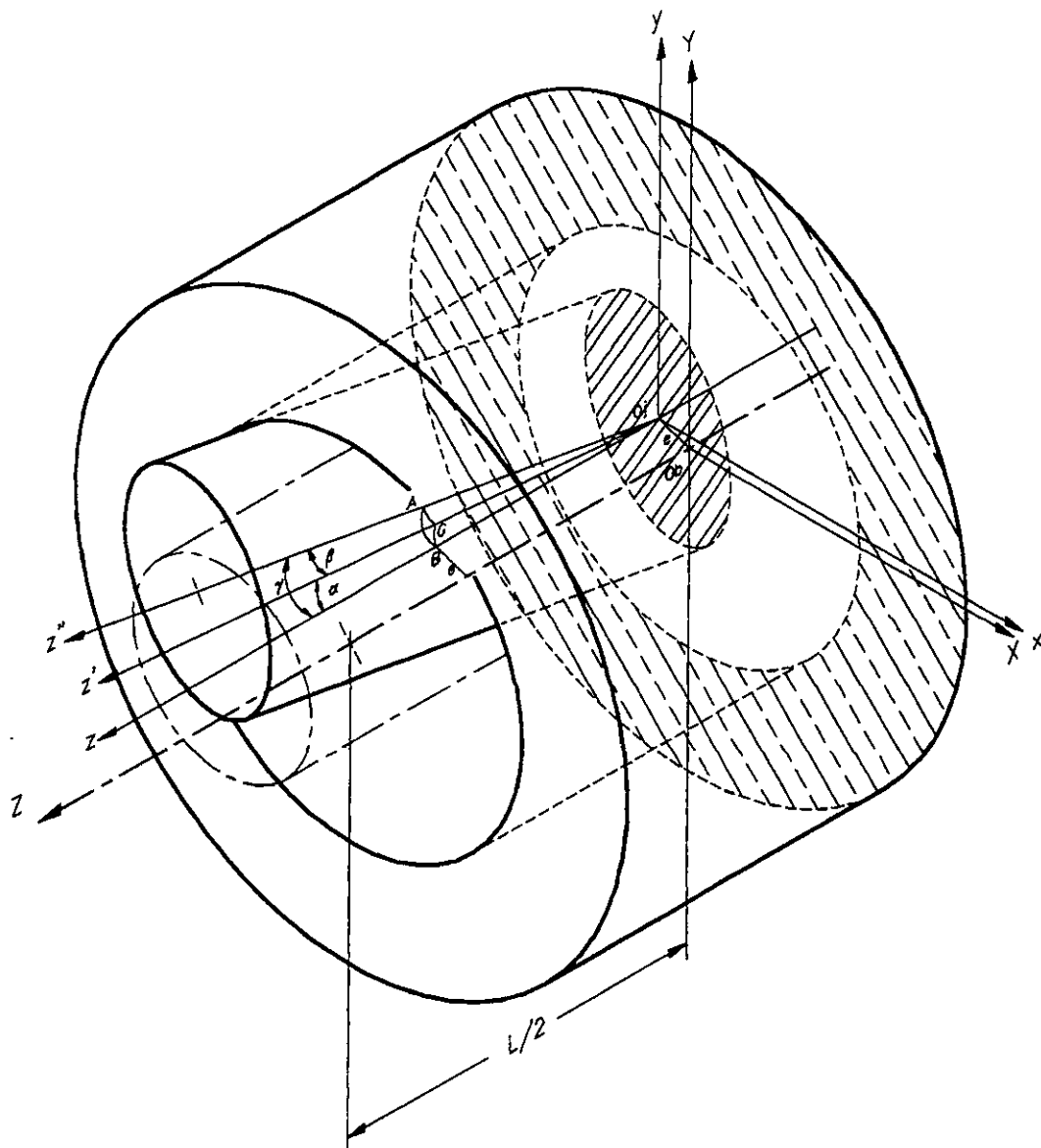


Figura 4-3: Sistemas de referencia, flecha excéntrica-desalineada

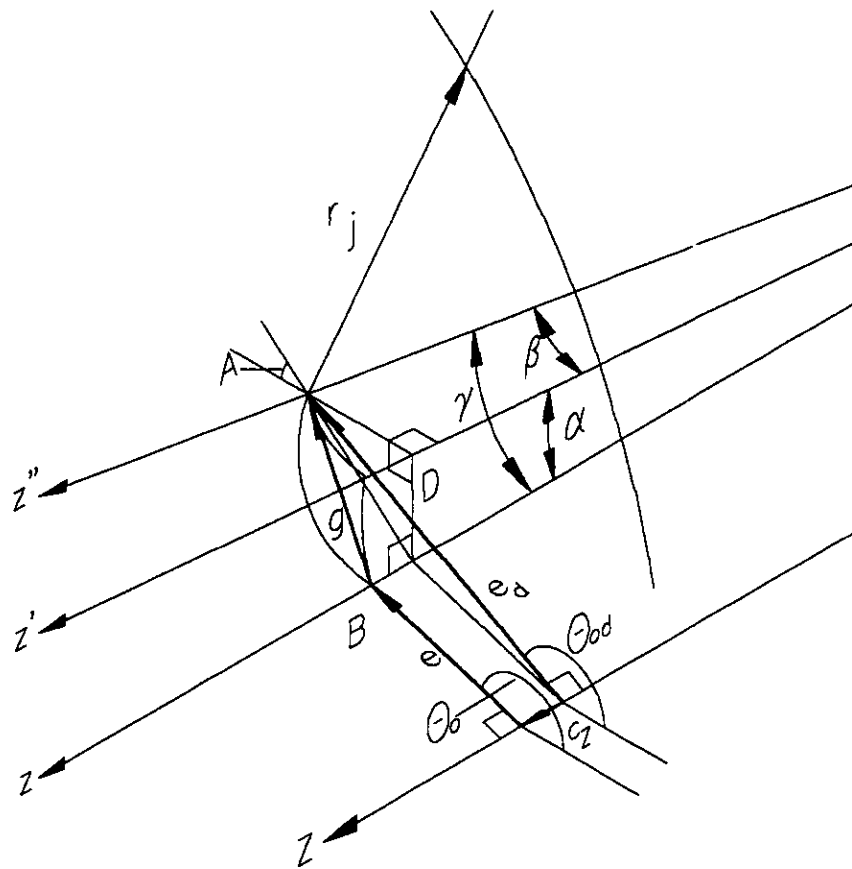


Figura ~4-4: Angulos de desalineamiento, representación gráfica de Ec.(4.2)

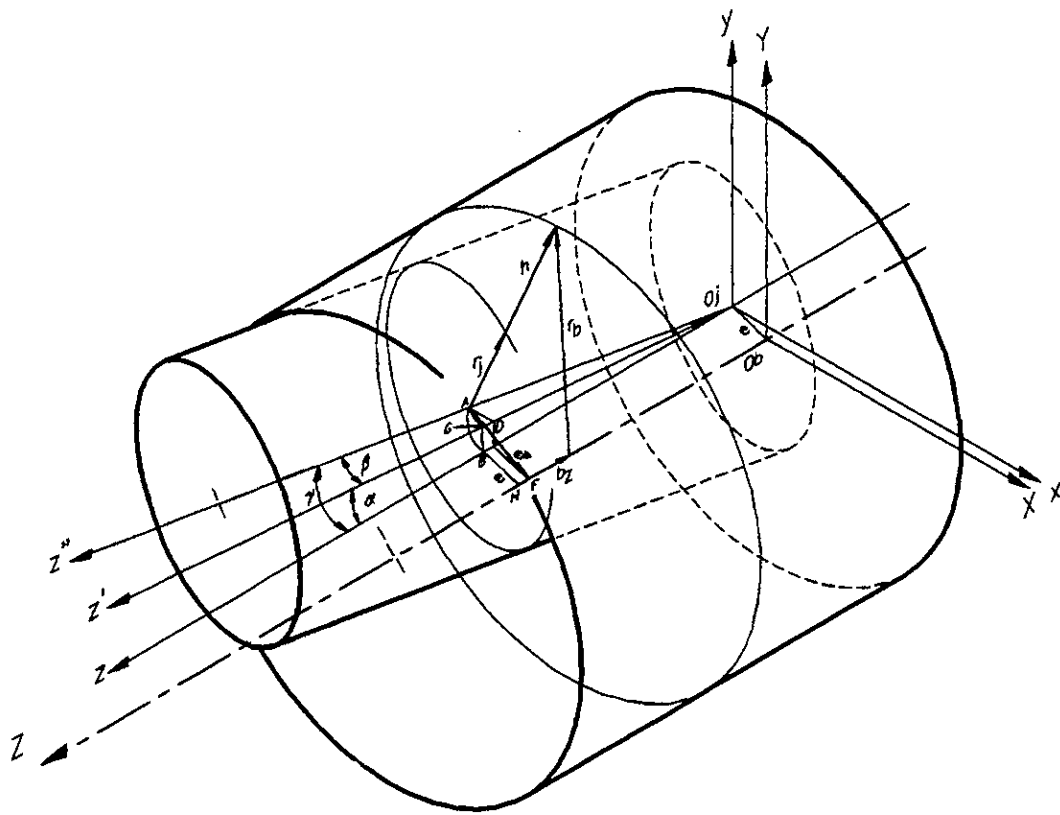


Figura 4-5: Representación gráfica de la Ec.(4.7).



## Capítulo 5

# Modelo numérico

### 5.1 Introducción

El problema matemático brevemente descrito, consiste entonces en resolver una de las formas de la ecuación de lubricación de Reynolds de manera simultánea con las ecuaciones de continuidad en los recesos, considerando las condiciones de frontera en los límites del cojinete, en la zona de cavitación y en los puntos de alimentación del lubricante, condición esta última, que depende del sistema de alimentación que se emplee. Además como es evidente, se requiere considerar la geometría del cojinete, que es discontinua por la presencia de los recesos, y la geometría del canal de flujo, que depende de los movimientos y posición de la flecha. Los datos con los que normalmente se cuenta son las dimensiones generales del cojinete y de la flecha, las fuerzas y los momentos externos; la presión en un múltiple de distribución de flujo, el tipo y dimensiones de los restrictores, las propiedades físicas del lubricante como su viscosidad, densidad, capacidad calorífica y temperatura de alimentación, las condiciones de operación del cojinete: velocidad angular y grados de libertad de la flecha. En una alternativa de sistema de alimentación de lubricante, en lugar de la presión en el múltiple, se emplearía como dato el gasto de lubricante a cada receso. Una solución del problema descrito, consiste en obtener la distribución de presión sobre la superficie del cojinete, los flujos de lubricante a cada receso, la posición de equilibrio de la flecha incluyendo excentricidad y ángulos de desalineamiento, o alternativamente las condiciones de estabilidad o de reposo. Obviamente una solución analítica a ese problema se presenta como una tarea formidable si no es que imposible, por lo que para

obtener la solución se plantea un modelo numérico.

Como se sabe, los modelos numéricos parten de la discretización del dominio de la solución, es decir de la división del volumen en que se quiere obtener la solución, en elementos discretos o pequeños volúmenes. En la solución los pequeños volúmenes estarán representados por un sólo punto en su interior al que se le llama *nodo*. La solución numérica da como resultado el valor de las variables, no de manera continua para el volumen completo, sino sólo para los puntos en el interior de los pequeños volúmenes en que se dividió el volumen grande. Las derivadas de las ecuaciones del modelo matemático, se expresan como aproximaciones en diferencias finitas, obtenidas de expansiones en series de Taylor truncadas [92], incluyendo en ellas los valores de la variable en un nodo particular y en los nodos vecinos. Así las EDP quedan convertidas en ecuaciones algebraicas, de las que se puede escribir una para cada nodo del dominio. Para los nodos de frontera las ecuaciones algebraicas quedan reducidas a la expresión del valor de la variable en ese nodo o el valor de su derivada, dependiendo del tipo de condición de frontera que se tenga. Se tiene entonces que las EDP quedan representadas en el dominio por un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, en número igual al de nodos, que pueden resolverse por cualquiera de los métodos conocidos y obtener el valor de la variable para cada nodo. La solución discreta así obtenida permite aproximar la solución continua para todos los puntos del dominio. Existen varias formas de las expresiones en diferencias finitas (df), entre las que se encuentran las llamadas df centrales, df hacia adelante, df hacia atrás, etc., que están relacionadas con los nodos vecinos que se usan en la expresión discreta de la derivada [92].

## 5.2 Expresión discreta de ecuaciones y condiciones de frontera

En el problema que se analiza, el dominio para el que se requiere la solución es la película lubricante, misma que puede desplegarse y asociarse a un sistema de coordenadas  $\{XYZ\}$  con la dirección  $X$  coincidente con la dirección tangencial, dirección  $Y$  coincidente con la dirección radial y dirección  $Z$  coincidente con la dirección axial del cojinete. Se divide la película mediante una malla con  $m$  divisiones en dirección  $X$ , y  $n$  divisiones en dirección  $Z$ . Cada intersección de la malla se asocia con un nodo, por lo que el número de nodos es igual al producto  $(m+1)(n+1)$ , y cada nodo puede identificarse con las coordenadas  $(Xi, Zj) = (i, j)$  desde  $(0, 0)$  hasta  $(m, n)$ .

Se distinguen dos tipos de nodos: *nodos interiores* y *nodos en la frontera*. El número de nodos interiores es igual al producto  $(m - 1)(n - 1)$  y el número de nodos en la frontera igual a la diferencia  $(m + 1)(n + 1) - (m - 1)(n - 1)$ . Los nodos interiores representan pequeños volúmenes de dimensiones  $(\Delta X \Delta Y \Delta Z)$  donde  $\Delta X = \frac{2\pi r_j}{m}$ ,  $\Delta Z = \frac{L}{n}$  y  $\Delta Y = h$ . Los nodos en la frontera representan una fracción del volumen anterior. Si el dominio es rectangular, los nodos en la frontera que no coincidan con esquina representan la mitad del volumen anterior y los nodos en las esquinas un cuarto del volumen anterior.

Para el caso en estado permanente, desarrollando la Ec.(3.10) en sus derivadas se obtiene la siguiente ecuación,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{6\mu U}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.1)$$

### 5.2.1 Nodos interiores

Si se escribe la Ec.(5.1) con sus primeras y segundas derivadas de la presión en diferencias finitas centrales, para *cada nodo interior* y despejando la presión  $p(x_i, z_j) = P(i, j)$  asociada con el nodo de coordenadas  $(i, j)$ , resulta un sistema de  $(m - 1)(n - 1)$  ecuaciones algebraicas lineales dado por:

$$P(i, j) = \frac{1}{4} [a(i, j)P(i + 1, j) + b(i, j)P(i - 1, j) + c(i, j)P(i, j + 1) + d(i, j)P(i, j - 1) + e(i, j)] \quad (5.2)$$

Si en este conjunto de ecuaciones, se sustituyen los valores conocidos para la presión de cada nodo de frontera, se tiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, en número igual al número de incógnitas (presiones en nodos interiores). Los coeficientes de esta ecuación están dados como sigue,

$$\begin{aligned} a(i, j) &= \frac{(\Delta z)^2}{2[(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2]} \left[ 1 + \frac{\Delta x}{2} f_1 \right] \\ b(i, j) &= \frac{(\Delta z)^2}{2[(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2]} \left[ 1 - \frac{\Delta x}{2} f_1 \right] \\ c(i, j) &= \frac{(\Delta x)^2}{2[(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2]} \left[ 1 + \frac{\Delta z}{2} f_2 \right] \\ d(i, j) &= \frac{(\Delta x)^2}{2[(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2]} \left[ 1 - \frac{\Delta z}{2} f_2 \right] \end{aligned}$$

$$e(i, j) = \frac{(\Delta x)^2 (\Delta z)^2}{2[(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2]} f_3 \quad (5.3)$$

en que,

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \simeq \frac{3}{2\Delta x} \frac{1}{h(i, j)} [h(i+1, j) - h(i-1, j)] \\ f_2 &= \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial z} \simeq \frac{3}{2\Delta z} \frac{1}{h(i, j)} [h(i, j+1) - h(i, j-1)] \\ f_3 &= \frac{6\mu U}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x} \simeq \frac{3\mu U}{\Delta x [h(i, j)]^3} [h(i+1, j) - h(i-1, j)] \end{aligned} \quad (5.4)$$

El sistema de Ecs.(5.2) se resuelve por medio de un método iterativo dado por,

$$P(i, j)^{(K+1)} = P_{(i, j)}^{(K+1)} = P_{(i, j)}^{(K)} + r_{(i, j)}^{(K)} \quad (5.5)$$

en que  $r_{i, j}^{(K)}$  es el residuo de la Ec.(5.2), dado como

$$r_{(i, j)}^{(K)} = -P_{(i, j)}^{(K)} + \frac{1}{4} \left[ a(i, j)P_{(i+1, j)}^{(K)} + b(i, j)P_{(i-1, j)}^{(K+1)} + c(i, j)P_{(i, j+1)}^{(K)} + d(i, j)P_{(i, j-1)}^{(K+1)} + e(i, j) \right], \quad (5.6)$$

donde  $K$  representa la iteración  $K$ -ésima, y  $P_{(i, j)}^{(K)}$  es la presión en el nodo  $(i, j)$  después de la  $K$ -ésima iteración. La Ec.(5.6) se conoce como iteración de Gauss-Seidel. Para incrementar la razón de convergencia se emplea un coeficiente de relajación  $c_r$  y la Ec.(5.5) se modifica como

$$P_{(i, j)}^{(K+1)} = P_{(i, j)}^{(K)} + c_r \cdot r_{(i, j)}^{(K)} \quad (5.7)$$

ecuación en que, si  $c_r > 1$ , se conoce como método de sobre-relajación sucesiva ("SOR") [92]. El coeficiente de relajación usado en los cálculos es  $c_r = 1.4$ .

### 5.2.2 Error y criterio de convergencia

En cada iteración se calcula el error promedio como la suma de las diferencias entre los valores de presión obtenidos en la  $K$ -ésima iteración con los obtenidos en la iteración anterior, mediante la siguiente ecuación,

$$ep = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} |P_{(i, j)}^{(K)} - P_{(i, j)}^{(K-1)}|}{(m-1)(n-1)} \quad (5.8)$$

Se considera que el cálculo converge, cuando el valor de  $ep$  disminuye en cada iteración. Como criterio de convergencia se usa la comparación de  $ep$  con un valor  $\epsilon$  pequeño, que representa una tolerancia en el cálculo, equivalente a una fracción de la unidad de presión usada. El proceso iterativo se interrumpe cuando,

$$ep < \epsilon \quad (5.9)$$

### 5.2.3 Nodos en recesos

Si los recesos se practican con profundidad grande comparada con el claro radial, la presión en ellos es prácticamente uniforme. Para el cálculo numérico no hace falta considerar más que los nodos en la frontera de los recesos y los nodos vecinos del lado externo, como de hecho lo expresa la Ec.(3.22) obtenida antes.

Considerando al receso  $r$ , localizado entre las coordenadas nodales  $i_{\min}$  a  $i_{\max}$ ,  $j_{\min}$  a  $j_{\max}$ , con un sistema de lubricación alimentando un flujo constante  $q_r$  sin restricción, ver Fig.(3-3).

Si la Ec.(3.22) se escribe expresando sus derivadas en diferencias finitas hacia adelante [92] y las integrales usando la regla trapezoidal de integración numérica [66], resulta la siguiente ecuación para la presión en los nodos en los bordes de los recesos,

$$p_r = \frac{12\mu(q_r + N_1) + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}{D_1 + D_2} \quad (5.10)$$

en que,

$$N_1 = \frac{U}{2} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{j_{\min}+1}^{j_{\max}-1} [h_{(i_{\min}, j)} - h_{(i_{\max}, j)}] \Delta z + \\ & + (h_{(i_{\min}, j_{\min})} + h_{(i_{\min}, j_{\max})} - h_{(i_{\max}, j_{\min})} - h_{(i_{\max}, j_{\max})}) \frac{\Delta z}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$N_2 = \sum_{j_{\min}+1}^{j_{\max}-1} [P_{(i_{\min}-1, j)} h^3_{(i_{\min}, j)} + P_{(i_{\max}+1, j)} h^3_{(i_{\max}, j)}] \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$N_3 = \sum_{i_{\min}+1}^{i_{\max}-1} [P_{(i, j_{\min}-1)} h^3_{(i, j_{\min})} + P_{(i, j_{\max}+1)} h^3_{(i, j_{\max})}] \frac{\Delta x}{\Delta z}$$

$$N_4 = \left[ \begin{aligned} & P_{(i_{\min}-1, j_{\min})} h^3_{(i_{\min}, j_{\min})} + P_{(i_{\min}-1, j_{\max})} h^3_{(i_{\min}, j_{\max})} + \\ & + P_{(i_{\max}+1, j_{\min})} h^3_{(i_{\max}, j_{\min})} + P_{(i_{\max}+1, j_{\max})} h^3_{(i_{\max}, j_{\max})} \end{aligned} \right] \frac{\Delta z}{2\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
N_5 &= \left[ \begin{aligned} &P_{(i_{\min}, j_{\min}-1)} h^3_{(i_{\min}, j_{\min})} + P_{(i_{\min}, j_{\max}+1)} h^3_{(i_{\min}, j_{\max})} + \\ &+ P_{(i_{\max}, j_{\min}-1)} h^3_{(i_{\max}, j_{\min})} + P_{(i_{\max}, j_{\max}+1)} h^3_{(i_{\max}, j_{\max})} \end{aligned} \right] \frac{\Delta x}{2\Delta z} \\
D_1 &= \sum_{j_{\min}+1}^{j_{\max}-1} [h^3_{(i_{\min}, j)} + h^3_{(i_{\max}, j)}] \frac{\Delta z}{\Delta x} + \sum_{i_{\min}+1}^{i_{\max}-1} [h^3_{(i, j_{\min})} + h^3_{(i, j_{\max})}] \frac{\Delta x}{\Delta z} \\
D_2 &= \left[ \begin{aligned} &h^3_{(i_{\min}, j_{\min})} + h^3_{(i_{\max}, j_{\min})} + h^3_{(i_{\min}, j_{\max})} + \\ &+ h^3_{(i_{\max}, j_{\max})} \end{aligned} \right] \left( \frac{\Delta x}{2\Delta z} + \frac{\Delta z}{2\Delta x} \right) \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Cuando se considera un sistema de lubricación con presión fija en el distribuidor de flujo  $p_{mult}$ , y restrictores de tubo capilar con resistencia  $R_r$  (ver Fig.3-2), la Ec.(5.10) se modifica usando las Ecs.(3.23, 3.24) y se obtiene,

$$p_r = \frac{12\mu \left[ \frac{p_{mult}}{R_r} + N_1 \right] + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}{D_1 + D_2 + \frac{12\mu}{R_r}} \quad (5.12)$$

con  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, D_1$  y  $D_2$ , dadas también por las Ec.(5.11).

#### 5.2.4 Nodos en zona de cavitación

Debido a que la solución numérica corresponde a puntos discretos en la superficie del cojinete, resulta obvio que las condiciones de frontera en la zona de cavitación no pueden satisfacerse exactamente. Sin embargo ya que los incrementos en la red son pequeños, no se requiere de interpolación. Si la frontera de cavitación exacta para una cierta  $j$  cae entre el punto  $i$  y el punto  $i+1$ , correspondiente a la curva de presión correcta  $C$ . La curva  $A$  y la curva  $B$  son curvas calculadas [103] correspondientes a presión cero en dichos puntos  $i$  e  $i+1$  respectivamente, ver Fig.(5-1). En los cálculos la curva  $A$ , de dicha figura, con derivada negativa en el extremo, se acepta como la curva de presión, fijándose con ello el borde de cavitación. Esto equivale a la aplicación de la condición de Gumbel mencionada en el Capítulo 1.

### 5.3 Proceso de cálculo

En la Fig.5-2 se presenta un diagrama de flujo que muestra el procedimiento de cálculo numérico básico. La estructura del programa está hecha con base en módulos o subrutinas, cuya

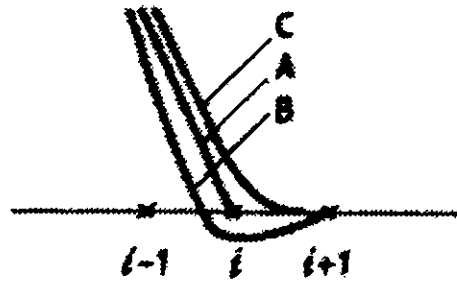


Figura 5-1: Nodos en frontera de cavitación

utilización se controla por un programa principal, fácilmente modificable. En las subrutinas se realizan los cálculos principales, se estructuran los resultados y se procesan para su presentación gráfica.

En el programa principal se definen las dimensiones generales del cojinete  $L, r_j, r_b$ , las propiedades del lubricante  $\mu, \rho, c_v$ , el tipo de sistema de lubricación especificando el flujo alimentado a cada receso  $q_r$ , o la presión en el múltiple  $p_{mult}$ , el número de recesos  $n_r$  con sus dimensiones  $l_r, a_r$  y posición angular  $\theta_3$  y posición axial  $l_z$ , la velocidad angular de la flecha  $\omega$ , la posición inicial de la flecha dada por los valores de la excentricidad  $e$  y los ángulos de desalineamiento  $\alpha$  y  $\beta$ , el número de divisiones de la malla  $m$  y  $n$ , entre otros datos. El objeto y la estructura de las subrutinas puede describirse como sigue

Se usa opcionalmente la Subrutina 1 para llevar a cabo la lectura de resultados anteriores respecto de distribución de presiones, lo que permite acelerar la convergencia o alcanzarla en un menor número de iteraciones, especialmente cuando se requieren resultados para alguna condición cercana a la anterior.

En la Subrutina 2 se determina la distribución de claro radial para cada posición nodal en la superficie del cojinete  $h(x_i, z_j) = h(i, j)$ . Para ello se sustituyen las Ec.(4.5) y (4.6) en la Ec.(4.12) si el desalineamiento puede considerarse pequeño; o emplearse la Ec.(4.19) si el desalineamiento es grande, o se requiere mayor exactitud en los cálculos.

La Subrutina 3 considera el sistema de bombeo y utiliza la Ec.(5.10) o la Ec.(5.12), para calcular la presión en cada receso. Aquí se usa información respecto de la presión en los límites

de los recesos, el claro radial local y el flujo de lubricante además de la presión en el múltiple y las dimensiones de los restrictores de flujo.

La Subrutina 4 usa las Ecs.(5.2) a (5.7), da forma y resuelve el sistema de  $(m - 1)(n - 1)$  ecuaciones algebraicas lineales y encuentra la distribución de presiones en la superficie del cojinete fuera de los recesos para la  $K$ -ésima iteración. Se calcula el error promedio con la Ec.(5.8). El proceso iterativo se interrumpe en el programa principal cuando el valor del error promedio es menor que  $\epsilon = 0.01$  Pa, de acuerdo con la Ec.(5.9). En esta subrutina se calculan además la capacidad de carga, los momentos reactivos y los coeficientes de rigidez de fuerza radial y de momentos, considerando las presiones en la superficie total del cojinete.

La Subrutina 5 presenta datos de avance del cálculo al final de cada iteración.

En las Subrutinas 6 a 9 se corrigen datos de posición de la flecha (excentricidad, ángulos de máximo acercamiento y ángulos de desalineamiento  $\alpha$  y  $\beta$ ) a fin de satisfacer condiciones de magnitud y dirección de las cargas y momentos externos.

Se utilizan las Subrutinas 10 a 12 para el archivo de resultados, su impresión y su graficación.

## 5.4 Comparación de resultados

A continuación y con objeto de validar el presente modelo y programa de cálculo, se comparan sus resultados con datos experimentales y calculados, obtenidos de la literatura, adaptando el modelo en cada caso, al tipo de cojinete y condiciones de operación reportados.

### 5.4.1 Cojinete hidrodinámico

En primer término, los resultados obtenidos para un cojinete hidrodinámico parcial con ángulo de 120 grados, a 1200 revoluciones por minuto, de un tipo usado en turbomaquinaria, se comparan con los datos reportados por Morton [56], quien realizó mediciones de capacidad de carga, ángulo de máxima aproximación ("attitude angle"), excentricidad y coeficientes de rigidez y amortiguamiento, sobre un cojinete con esas características.

En la Fig.(5-3) se grafica la excentricidad relativa de la flecha para diferentes números de Sommerfeld. Se presentan las mediciones de Morton y los resultados obtenidos con el presente modelo considerando dos diferentes valores constantes de viscosidad.



En la Fig.(5-4) se comparan nuevamente los datos anteriores, pero en lugar del número de Sommerfeld se usa la carga específica o carga por unidad de área de cojinete. De esta forma se acentúan las diferencias obtenidas con el modelo respecto de los datos experimentales. Se presentan los resultados obtenidos con valores constantes de viscosidad señalados antes, así como los resultados obtenidos al considerar un comportamiento exponencial para la viscosidad en función de la temperatura (fórmula de Vogel). Se calculó el flujo de lubricante lateral y en los extremos (cojinete parcial), la disipación viscosa de energía en la película y el incremento de temperatura para ese flujo, suponiendo que la energía disipada fuera absorbida totalmente por el lubricante. Se realizaron nuevamente los cálculos suponiendo las nuevas temperatura y viscosidad. Con este procedimiento se obtienen resultados muy cercanos a los experimentales como puede observarse en dicha figura, a pesar de que no se consideran variaciones locales de temperatura. Esto es explicable, ya que en este tipo de cojinetes la zona convergente cercana al punto de máximo acercamiento, es en donde se da la mayor disipación de energía, y es también ahí donde se resiste en mayor proporción la carga externa, por lo que esta aproximación resulta correcta.

Un tercer parámetro de comparación está dado en la Fig.(5-5), que relaciona el ángulo de máximo acercamiento  $\theta_0$  en radianes, con la excentricidad relativa  $\epsilon$ . Se presentan los resultados obtenidos usando las dos viscosidades señaladas antes y los datos experimentales de Morton.

La Fig.(5-6) presenta el tipo de distribución de presión que se obtiene en cojinetes hidrodinámicos parciales de 120 grados, como el descrito. Puede observarse la zona de cavitación y su frontera, a la derecha sobre el plano formado por los ejes inferiores, aproximadamente entre los 100 y 120 grados.

#### 5.4.2 Cojinete hidrostático

En segundo término se comparan los resultados obtenidos para un cojinete hidrostático con cuatro recesos, carga sobre receso LOP ("load over pocket") con diseño como el que se muestra en la Fig.(5-7), con alimentación restringida, presión constante en múltiple y velocidad cero de la flecha, con datos obtenidos del "Journal-Bearing Databook" editado por Tsuneo Someya [93].

En la Fig.(5-8) se presentan la comparación de resultados obtenidos con el presente modelo

para el cojinete mencionado y los datos presentados en la Ref.[93] para capacidad de carga adimensional  $W_{ad}$  y gasto de lubricante adimensional  $Q_{ad}$  contra excentricidad relativa  $\varepsilon$ .

La magnitud y tendencia de los datos de la referencia y los resultados del presente modelo a excentricidades menores a 0.4 es semejante, aunque a excentricidades mayores se presentan diferencias apreciables en magnitud y tendencia especialmente en las curvas de capacidad de carga específica. Esto puede atribuirse al tipo de restrictor considerado en cada caso: mientras en la referencia se considera restricción a base de placas de orificio, aquí se considera restricción a base de tubos capilares, con dimensiones seleccionadas a fin de que se proporcione al cojinete un gasto adimensional aproximadamente igual al de los datos, a excentricidades entre 0.7 y 0.95. Sin embargo, es conveniente discutir la tendencia extraña de la curva obtenida con los datos de la referencia a excentricidades grandes. Primero, si se consideran los datos geométricos del cojinete del manual [93], presión máxima en el receso sobre el que se apoya la flecha, presión cero en el receso opuesto a 180 grados y distribución de presión lineal entre los bordes del receso y los límites del cojinete y de las ranuras axiales de este diseño, se obtiene un valor máximo para la capacidad de carga adimensional de 0.48, lo que concuerda con esos datos para una excentricidad de 0.95. Pero a partir de este valor esa curva muestra una tendencia hacia capacidades de carga mayores, lo que no sería posible por encima del valor mencionado. Segundo, las características geométricas del canal de flujo en dirección tangencial entre el borde del receso y las ranuras axiales es divergente, dada la excentricidad y la diferencia de radios entre flecha y cojinete, lo que también resulta para el canal de flujo en dirección axial, en virtud de que el ancho del receso es menor al correspondiente sobre el borde del cojinete (en este caso la distancia angular entre dos ranuras axiales). Por lo tanto, la distribución de presión difiere mucho de la lineal, y se tienen gradientes de presión mayores cerca de los bordes de los recesos, disminuyendo hacia los límites del cojinete o de las ranuras axiales de este diseño, lo que puede observarse gráficamente en las Figs.(5-9) y (5-10).

Esto conduce a obtener capacidades de carga menores que con distribución lineal. La forma divergente de los canales de flujo se acentúa (relación entre área de salida y área de entrada) con excentricidades grandes e implica la existencia de un máximo en capacidad de carga antes de llegarse a excentricidad 1. La excentricidad a la que se alcanza ese máximo depende del ancho angular de los recesos y se alcanzaría precisamente a una excentricidad 1 sólo con un ancho de

receso tendiente a cero. Se considera por lo tanto que la tendencia y magnitud de los resultados del presente modelo para el cojinete señalado son más exactos que los referenciados, a reserva de comprobar resultados considerando alimentación de lubricante restringida por placas de orificio.

A continuación y a fin de ilustrar otros tipos de cojinete y condiciones bajo las que pueden estudiarse con el presente modelo, se presentan las siguientes figuras. La Fig.(5-11) muestra resultados de distribución de presión para un cojinete de 4 recesos semejante al de la Fig.(5-7) excepto que en este caso no se tienen ranuras axiales.

La Fig.(5-12) muestra la distribución de claro radial en un cojinete de  $\Theta = 360$  grados, alineado.

La Fig.(5-13) muestra la distribución de claro radial en un cojinete de  $\Theta = 180$  grados, con desalineamiento  $\alpha$  y  $\beta \neq 0$ .

Finalmente la Fig.(5-14) muestra la distribución de presión para un cojinete hidrodinámico de  $\Theta = 360$  grados, con desalineamiento.

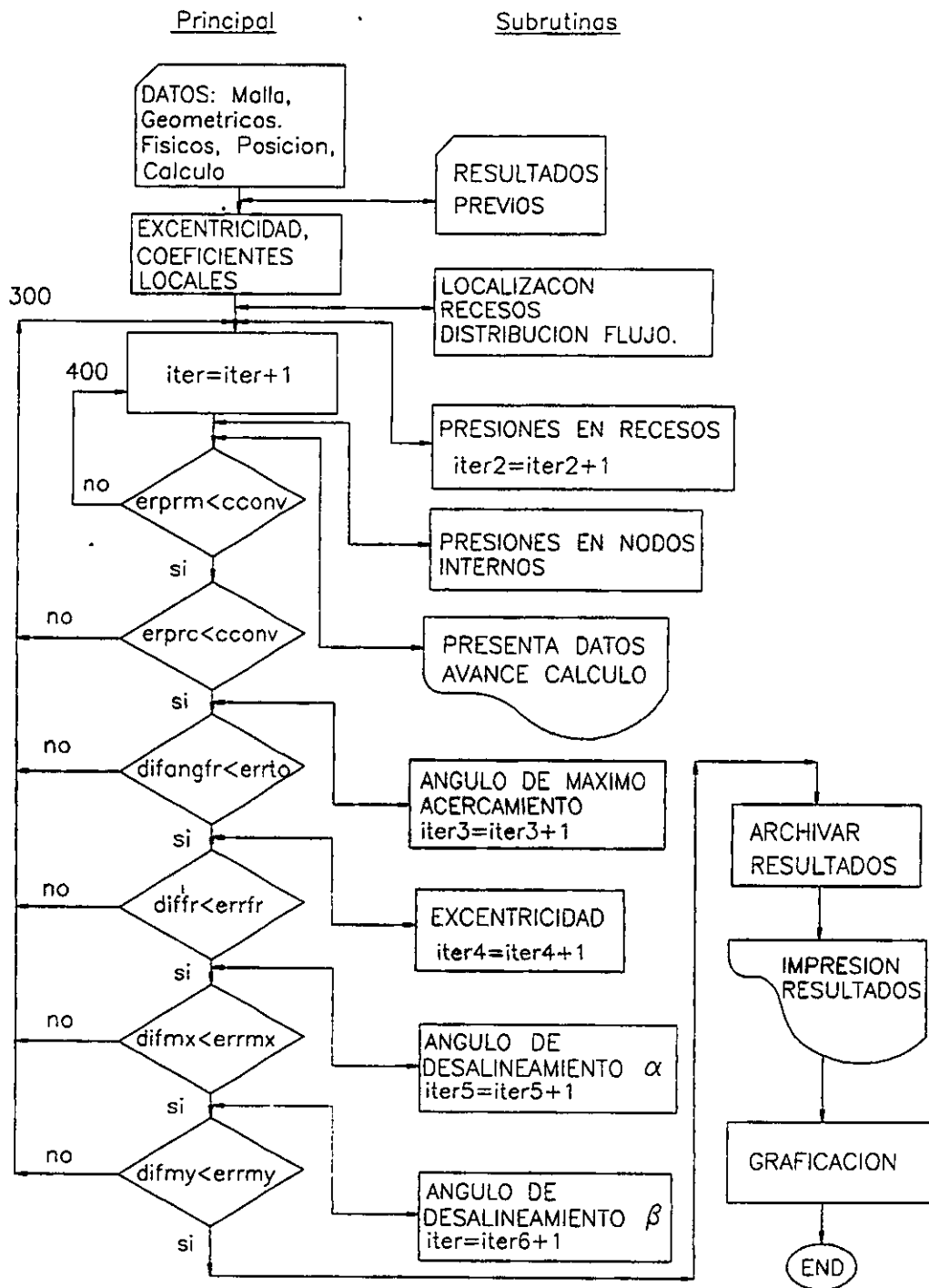


Figura 5-2: Diagrama de flujo, programa de cálculo

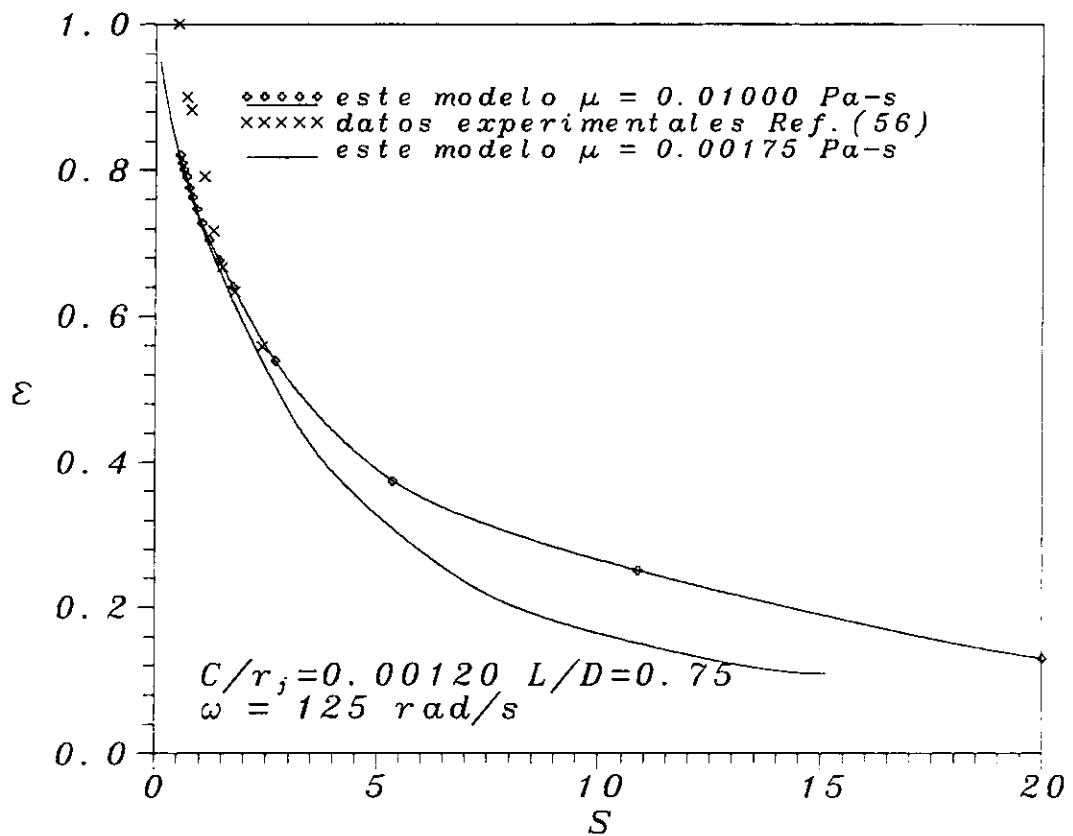


Figura 5-3: Excentricidad relativa  $\epsilon$  vs. número de Sommerfeld  $S$ , cojinete hidrodinámico parcial  $\Theta = 120^\circ$ , comparación con datos experimentales de Morton [56].

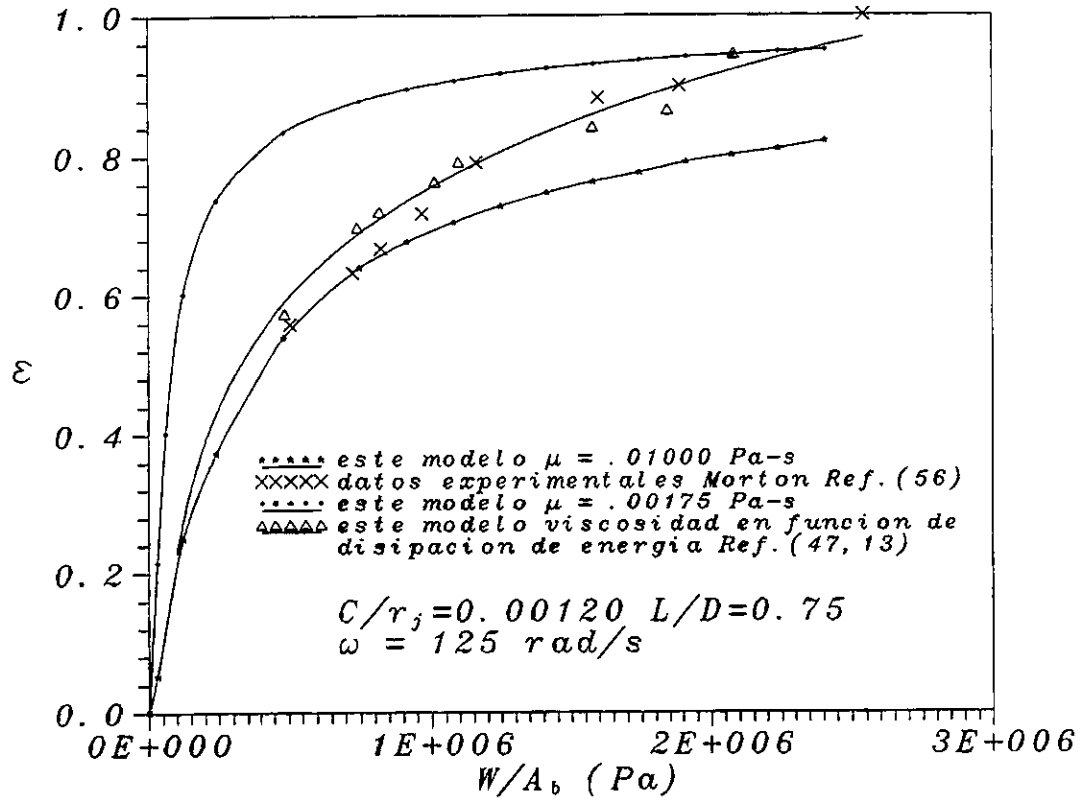


Figura 5-4: Excentricidad relativa  $\epsilon$  vs. carga específica, cojinete hidrodinámico parcial  $\Theta = 120^\circ$ , viscosidad fija y viscosidad a temperatura calculada por disipación de energía, comparación con datos experimentales de Morton [56].

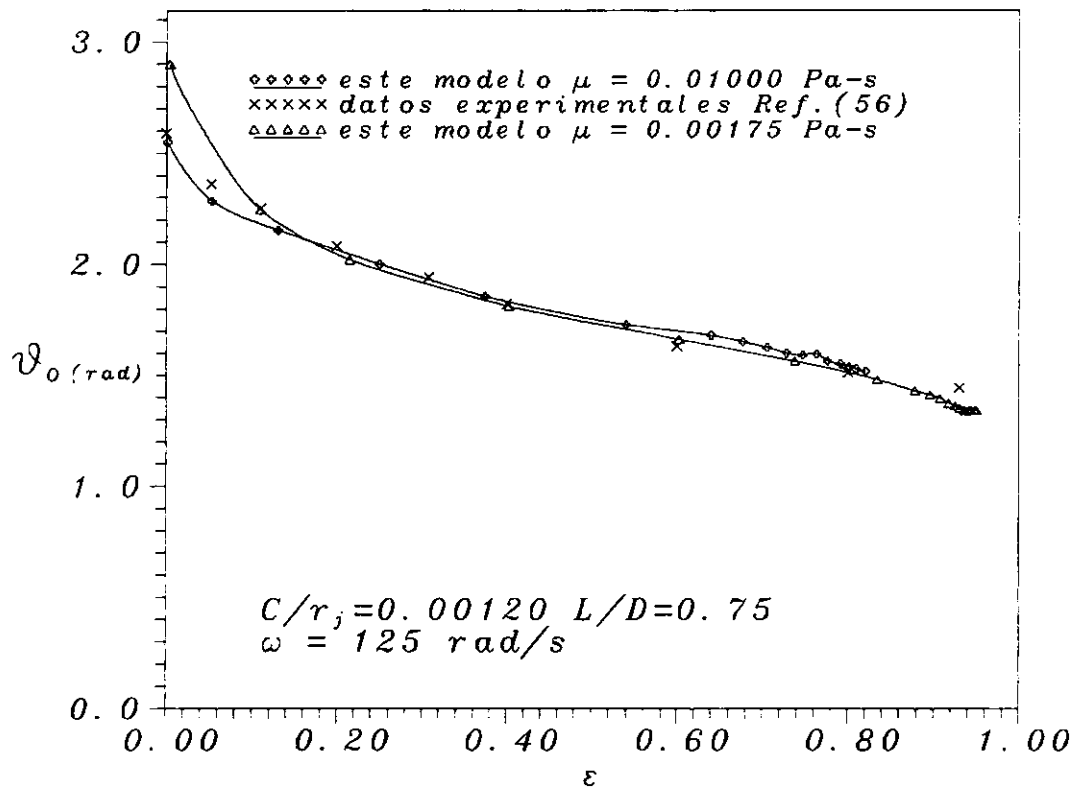


Figura 5-5: Angulo de máxima aproximación  $\theta_0$  vs. excentricidad relativa  $\epsilon$ , cojinete hidrodinámico parcial  $\Theta = 120^\circ$ , comparación con datos experimentales de Morton [56].

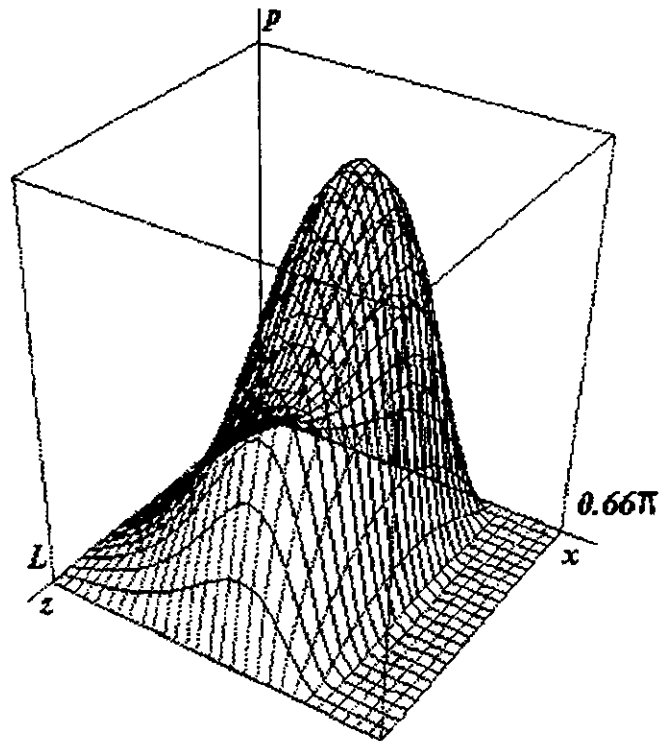


Figura 5-6: Distribución de presión, cojinete hidrodinámico parcial  $\Theta = 120^\circ$ ,  $S = 0.5433$ ,  $p_{max} = 9.47 MPa$ ,  $\theta_o = 86.9^\circ$ .



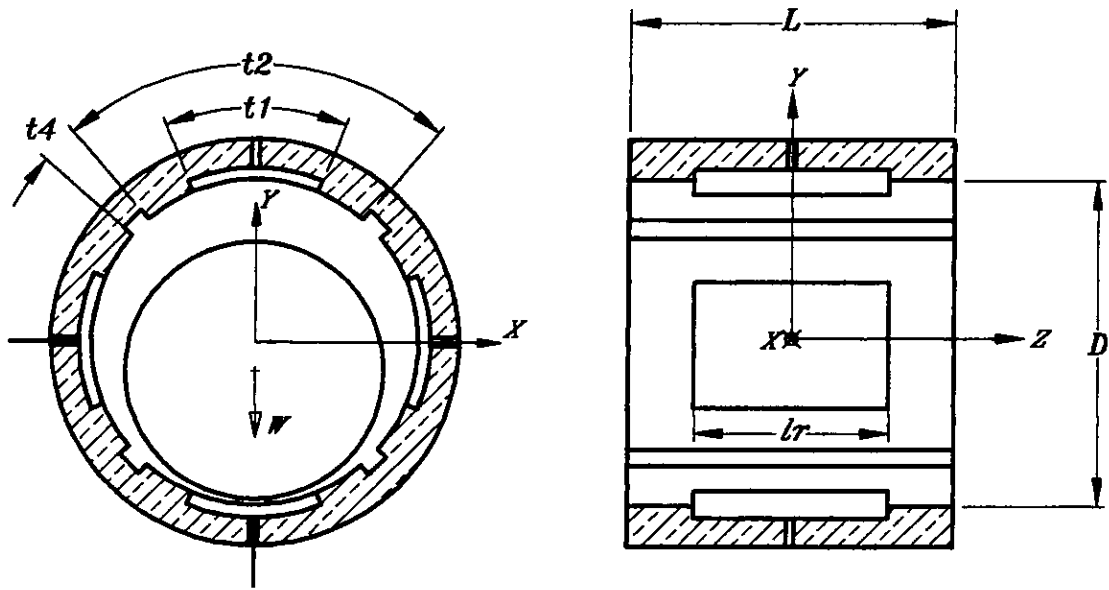


Figura 5-7: Cojinete hidrostático, 4 recesos, carga sobre receso, con ranuras axiales entre recesos, diseño de acuerdo con Ref.[92].

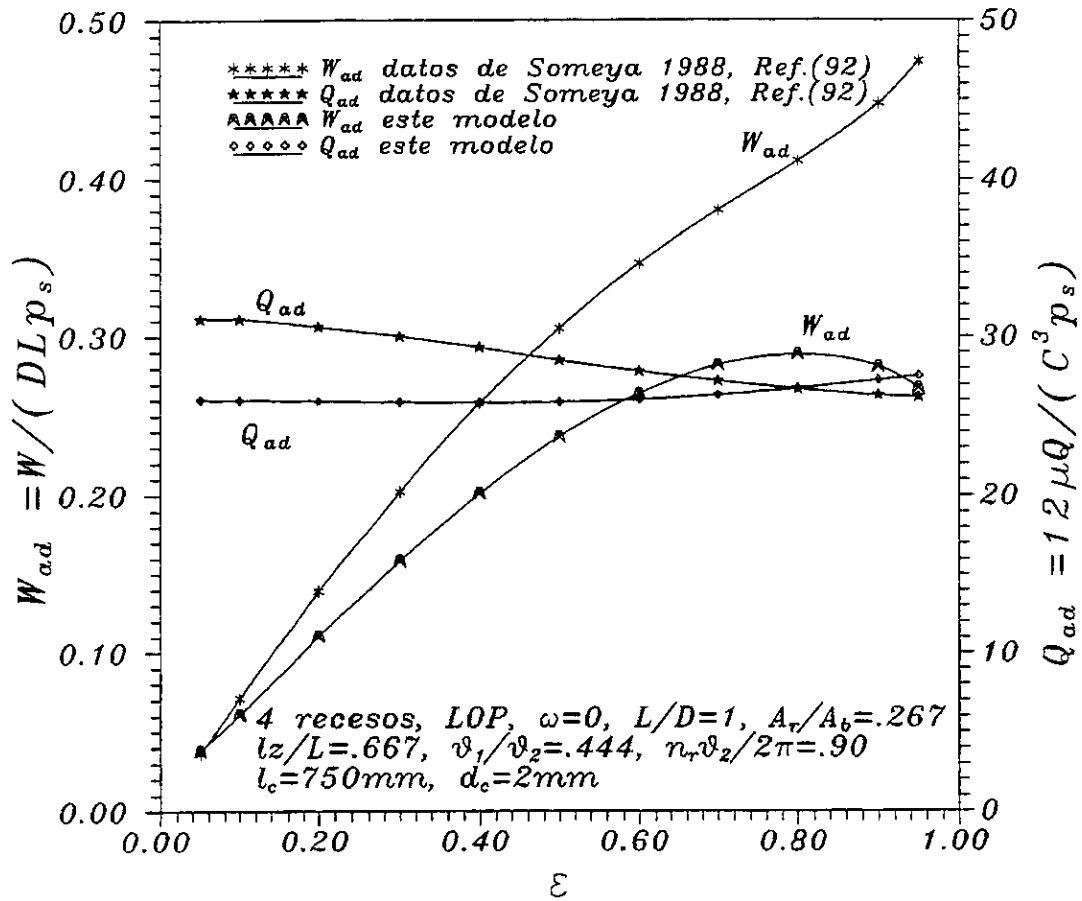


Figura 5-8: Capacidad de carga adimensional  $W_{ad}$  y gasto de lubricante adimensional  $Q_{ad}$  vs. excentricidad relativa  $\epsilon$ , cojinete hidrostático 4 recesos, carga sobre receso ("LOP"), comparación con datos de Someya Ref. [92].

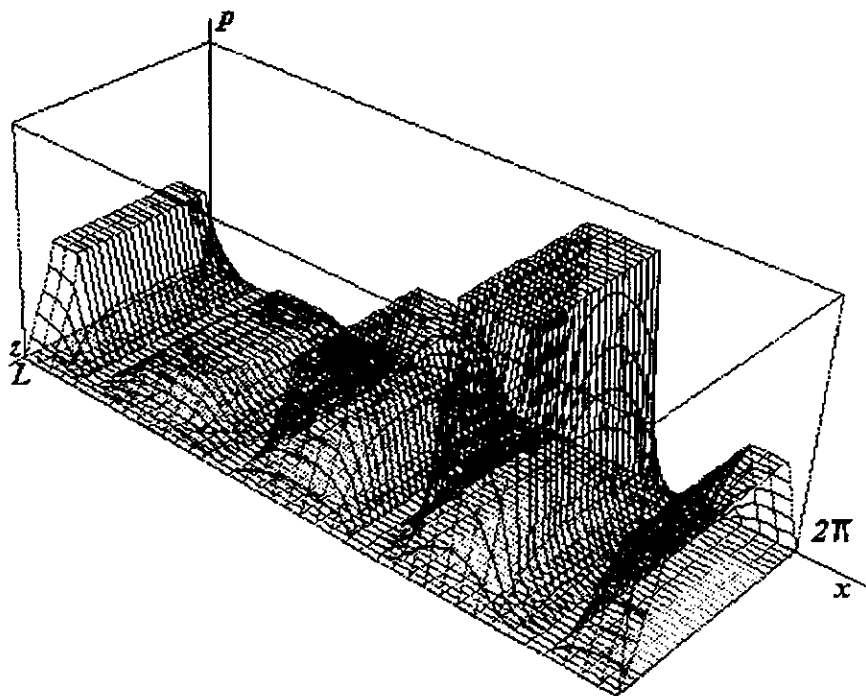


Figura 5-9: Distribución de presión, cojinete hidrostático 4 recesos, carga sobre receso, ranuras axiales entre recesos, diseño de acuerdo a Someya [92],  $\Theta = 360^\circ$ ,  $p_{max} = 9.99 \text{ MPa}$ .

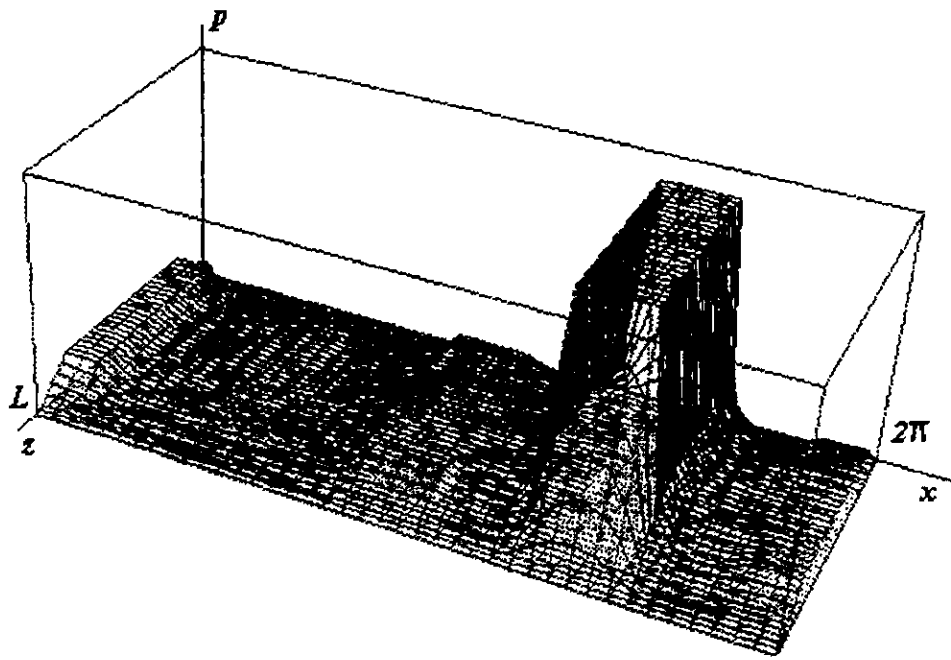


Figura 5-10: Distribución de presión a capacidad de carga máxima, cojinete hidrostático 4 recesos, carga sobre receso  $\Theta = 360^\circ$ ,  $p_{max} = 6.85 \text{ MPa}$ .

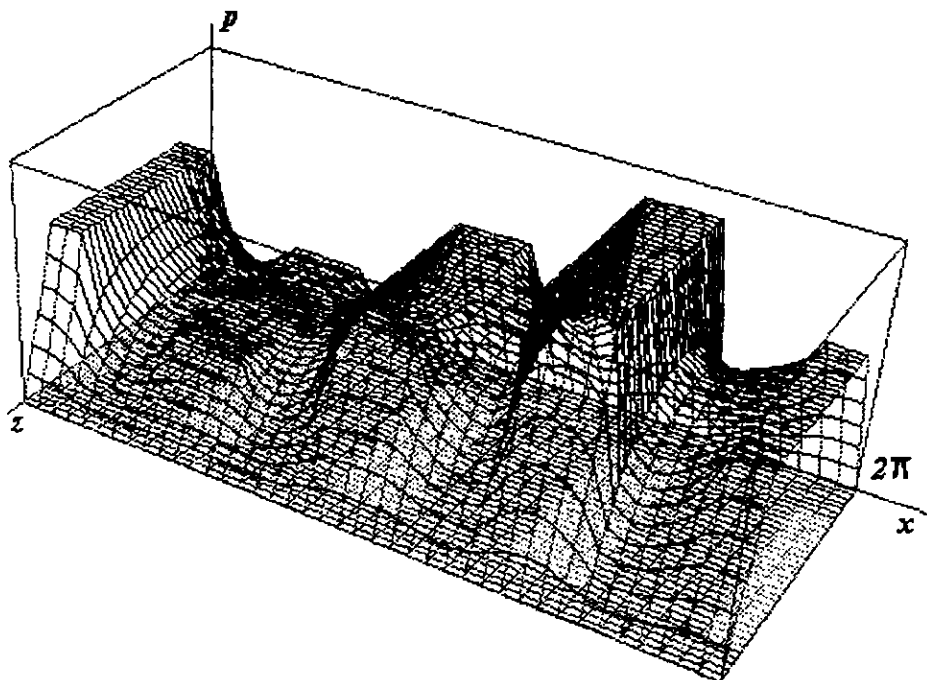


Figura 5-11: Distribución de presión, cojinete hidrostático, 4 recesos, carga sobre receso, sin ranuras axiales, flecha alineada  $\Theta = 360^\circ$ ,  $p_{max} = 6.89 \text{ MPa}$ .

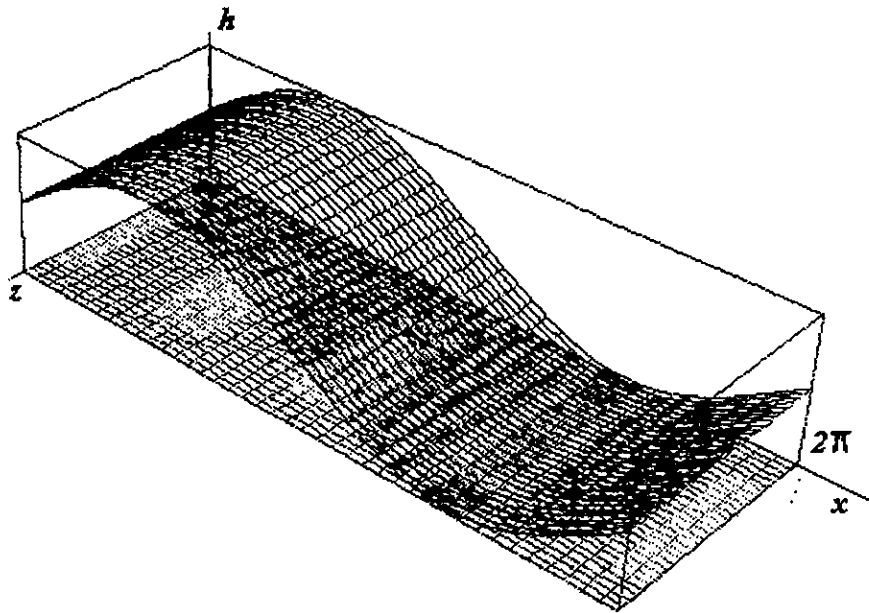


Figura 5-12: Distribución de claro radial, cojinete hidrostático, 4 recesos, carga sobre receso, flecha alineada.

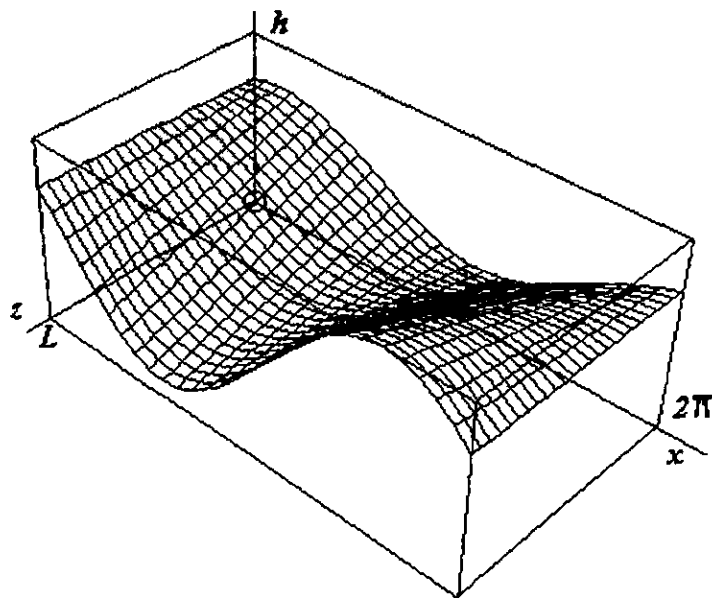


Figura 5-13: Distribución de claro radial con desalineamiento  $\alpha$  y  $\beta \neq 0$

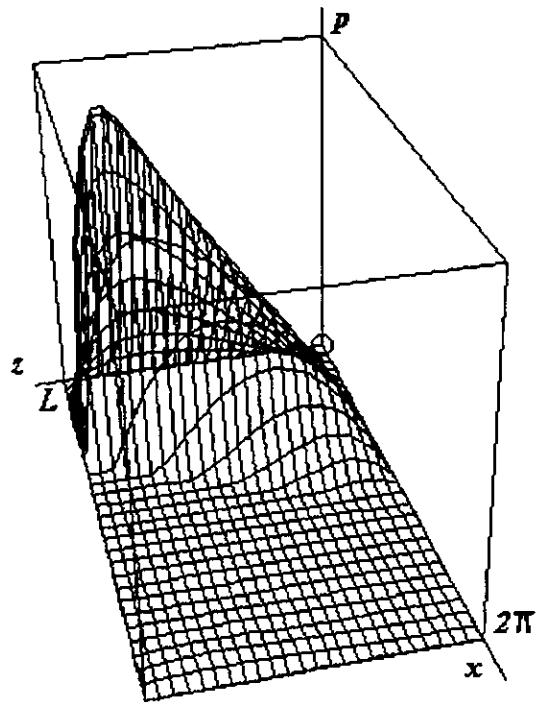


Figura 5-14: Distribución de presión, cojinete hidrodinámico con desalineamiento  $\alpha$  y  $\beta \neq 0$ ,  $\Theta = 360^\circ$ ,  $S = 1.3851$ ,  $p_{max} = 1.54 \text{ MPa}$

## Capítulo 6

# Cojinetes autocompensados

### 6.1 Autocompensación ante desalineamientos de la flecha

De acuerdo con una de sus acepciones la palabra compensación significa "reacción orgánica para evitar o neutralizar un defecto o necesidad y restablecer un equilibrio". De manera totalmente análoga la "autocompensación" en cojinetes, es un término que se refiere a que se ajustan automáticamente, ante el cambio de algunas condiciones externas y dentro de ciertos límites. Esto les permite reequilibrarse y seguir operando normalmente. Por ejemplo, si se incrementa la carga radial durante la operación de cojinetes hidrodinámicos, se produce un incremento de la excentricidad; si se mantiene la velocidad angular, la presión en el lubricante se incrementa, balanceando la carga externa que cambió. El límite en este proceso de autoajuste, se alcanza cuando la carga crece tanto que las superficies de flecha y cojinete se rozan entre sí. Procesos semejantes se producen también en algunos diseños de cojinetes hidrostáticos, cuando la viscosidad del lubricante disminuye por incrementos de temperatura o por otras causas; cuando el claro radial crece por desgaste de las superficies de la flecha o cojinete; o como se verá, con el desalineamiento.

De acuerdo con la literatura [88] [82] [81], cuando se presenta desalineamiento en cojinetes hidrodinámicos o hidrostáticos con diseño normal, se produce una disminución de la capacidad de carga. Si debido al desalineamiento la flecha toca al cojinete en uno de sus extremos, no hay posibilidad de autoajuste por incremento de excentricidad y el cojinete falla. Sin embargo si la flecha desalineada no toca al cojinete, hay posibilidad de autoajuste, ya que puede aumentar



la excentricidad y recuperar capacidad de carga. En este caso la flecha desalineada estará más cerca de tocar al cojinete y por lo tanto la autocompensación por incremento de excentricidad tendrá un menor rango de autoajuste que en los casos en que se encuentre alineada. De manera semejante si se produce un incremento del momento externo el cojinete reacciona originándose un momento contrario, lo que lo reequilibra dentro de ciertos rangos.

El desalineamiento en cojinetes se produce por diferentes causas: por flexión de la flecha; por la excentricidad de cargas externas; por cargas dinámicas; por fallas durante la manufactura o durante el montaje; etc., por lo que casi siempre está presente. Los procedimientos normales de diseño por el contrario, no consideran esta situación y, en opinión del autor, no se originan problemas más frecuentes, debido a que se diseñan con amplios márgenes de seguridad y a que operan dentro de los límites en que los mecanismos de autoajuste descritos antes aún operan. Sin embargo, un diseño más racional debiera considerar esta realidad, de manera integral, ya que como se discute más adelante, podrían conseguirse mejoras sustanciales en el diseño de la máquina completa. Por ejemplo, al no considerar los desalineamientos y por lo tanto ignorar los momentos reactivos de las fuerzas de presión que se producen en su interior por esa causa, se desconoce la capacidad real de dichos componentes para resistir modificaciones en la carga radial, en los momentos externos, o en otras condiciones como la viscosidad o el flujo, lo que ocasiona que el diseñador de los cojinetes proporcione o use información inadecuada o inexacta, necesaria para un diseño más correcto de otros componentes. Por ejemplo, en el análisis de la respuesta al desbalanceo de rotores de turbomáquinas soportados en cojinetes, se supone a los cojinetes como soportes libres sin capacidad de resistir momento, lo que en cojinetes normales es casi cierto. Pero la fuerza de desbalanceo depende directamente de la deflexión de la flecha, y esta a su vez depende de la rigidez transversal de la flecha y del tipo de soporte que proporcionen los cojinetes. La deflexión que se obtiene con soportes simplemente apoyados, podría reducirse hasta en cinco veces con soportes perfectamente rígidos en lo referente a desalineamientos (empotramiento) [86]. Por otro lado, no debe confundirse este tipo de rigidez asociada con desalineamiento del eje, con la rigidez ligada a sus desplazamientos radiales. Hay casos en que esta última, no debe maximizarse, debido a que afecta las características de amortiguamiento del sistema [93]. Una rigidez grande implica desplazamientos pequeños y por lo tanto una menor disipación de energía. Pero para el amortiguamiento la disipación de energía es indispensable.

En algunas aplicaciones podría combinarse el uso de cojinetes con rigidez grande para los apoyos extremos, con cojinetes con alto coeficiente de amortiguamiento en la zona de la flecha en que se esperara la mayor amplitud de vibraciones. Más aún, hay casos como el de las máquinas-herramienta, en que para lograr una mayor exactitud y precisión de los maquinados es deseable que el husillo y otras partes de la máquina tengan la mayor rigidez posible, a lo cual podrían contribuir cojinetes hidrostáticos para el husillo con rigidez angular máxima.

*El criterio de diseño de cojinetes hidrostáticos maximizando la rigidez asociada con desalineamiento del eje y manteniendo su capacidad de carga constante, es una idea original del autor, que junto con los modelos matemático y numérico presentados en los capítulos anteriores, es la base de esta tesis.*

Una de las formas que se han encontrado para maximizar la rigidez angular descrita, consiste en el posicionamiento de recesos en dos secciones axiales del cojinete, por ejemplo 4 recesos en una sección y 4 en otra (4+4), en lugar de colocarse en una sola sección, como se practica casi universalmente, con la carga sobre recesos (LOP "load over pocket") como se muestra en la Fig.(6-1).

Aquí se analiza la respuesta de este tipo de cojinetes con alimentación de lubricante desde un múltiple que lo distribuye a los recesos, a través de líneas restringidas [72]. Otra idea del autor generada con el mismo propósito y cuyo análisis podría ser de interés, es el uso de restrictores sensibles a la presión en la película de lubricante, que reciban la presión en una posición axial del cojinete y controlen el flujo hacia la posición axial opuesta y la alimentación o disposición asimétrica de los recesos para resistir el momento flexionante principal, así como la alternativa de alimentación independiente y no-restringida, de lubricante a cada receso.

Un análisis cualitativo del diseño basado en la primera alternativa, conduce a las interrogantes acerca de la combinación de características geométricas y operativas del cojinete, que maximicen su rigidez angular, lo que constituye un problema de optimación. El objetivo es entonces el de encontrar las características geométricas y operativas de un cojinete hidrostático cilíndrico, con recesos colocados en dos posiciones axiales del cojinete. Esto incluye la determinación de las dimensiones y posición axial y angular de los recesos sobre la superficie del cojinete, así como el claro radial y otros parámetros como el flujo, la presión y la viscosidad del lubricante, con las cuales se obtenga un cojinete con la máxima capacidad para resistir

momento externo, manteniendo su capacidad de carga constante.

## 6.2 Resultados

A continuación se discuten los resultados obtenidos para el tipo de cojinete propuesto, semejante al descrito en la sección anterior, pero con la carga entre recesos (LBP), 4+4 recesos,  $\frac{L}{D} = 1.25$ , como se muestra en la Fig.(6-2), con sistema de alimentación de lubricante con múltiple a presión constante, restrictores de flujo de tubo capilar en las líneas de alimentación a los recesos y diferentes valores de las razones  $\frac{l_x}{L}$ ,  $\frac{2l_x}{L}$ ,  $\frac{l_1}{l_2}$ ,  $t_3$ ,  $R_c$ .

Los datos y sus gráficas se obtuvieron como parte del proceso de optimación, y muestran el efecto que tienen los diferentes factores del diseño, geométricos y operativos, sobre el momento reactivo máximo adimensional  $M_{xx}$  adim, definido en la Ec.(4.36), correspondiente al desalineamiento máximo. La capacidad de carga que se ve afectada por el desalineamiento, se autocompensa en diferente grado con los diferentes valores de las razones de diseño mencionadas y también por ajuste de la excentricidad en la sección central.

El ángulo de desalineamiento máximo depende, como se ha mencionado, del claro radial y de la excentricidad de la flecha en la sección central. A menor claro radial o mayor excentricidad en la sección central, menor ángulo de desalineamiento es posible y viceversa. Por otro lado un ángulo de desalineamiento mayor no implica un momento reactivo mayor (o sea una mayor rigidez angular).

Por ejemplo en la Fig.(6-3) se muestra el efecto del claro radial relativo  $\frac{C}{r_j}$  y la razón  $\frac{l_x}{L}$ , sobre el momento  $M_{xx}$ . Puede observarse que con menores claros radiales, en general se obtiene mayor momento reactivo; sin embargo a partir de ciertos valores  $\frac{C}{r_j}$  y  $\frac{l_x}{L}$  las curvas se cruzan y el efecto se invierte, por lo tanto para este diseño de cojinete, el claro radial relativo mínimo que debería considerarse es de  $\frac{C}{r_j} = 0.00075$  y valores en el rango de  $0.57 < \frac{l_x}{L} < 0.75$ . Sin embargo desde el punto de vista práctico este claro radial es muy pequeño e implica costos de manufactura altos. Por lo tanto en los cálculos siguientes se considera para este parámetro un valor realista de  $\frac{C}{r_j} = 0.00125$ , manteniendo en mente que se pueden obtener valores mayores del momento reactivo con valores menores de claro radial.

La Fig.(6-4) muestra como en el caso anterior, el efecto de la separación de los recesos

respecto de la sección central del cojinete, para cojinetes como los descritos con  $\frac{c}{r_j} = 0.00125$ . La curva de excentricidad de la flecha en el plano central, permite observar la posición de la flecha necesaria para mantener la capacidad de carga constante en los diferentes diseños. Puede observarse que el momento reactivo máximo se obtiene para la relación  $\frac{l_z}{L} = 0.730$  y el valor del momento máximo adimensional correspondiente de  $M_{xx \text{ adim}} = 0.0115$ .

La Fig.(6-5) muestra el efecto de la longitud (dirección axial) de los recesos. Los resultados mostrados en esta figura, son para el valor del parámetro  $\frac{l_z}{L} = 0.730$ , obtenido de los cálculos anteriores. Se observa en este caso que el momento reactivo máximo se obtiene para una longitud relativa de recesos de  $\frac{2l_r}{L} = 0.17$ . El valor del momento adimensional máximo es de  $M_{xx \text{ adim}} = 0.016$ .

La Fig.(6-6) muestra el efecto del ancho (dirección tangencial) de los recesos. Los resultados mostrados en esta figura, se obtuvieron manteniendo fijos los valores de los parámetros  $\frac{l_z}{L} = 0.730$  y  $\frac{2l_r}{L} = 0.17$ , de los cálculos anteriores. Se observa que el momento reactivo máximo se obtiene para un ancho angular relativo de recesos de  $\frac{t_1}{t_2} = 0.25$ . El valor del momento adimensional máximo es de  $M_{xx \text{ adim}} = 0.0255$ .

La Fig.(6-7) muestra el efecto de la posición angular de los recesos. Los resultados que se muestran en esta figura, se obtuvieron manteniendo fijos los valores de los parámetros  $\frac{l_z}{L} = 0.730$ ,  $\frac{2l_r}{L} = 0.17$  y  $\frac{t_1}{t_2} = 0.25$  de los cálculos anteriores. Se observa que el momento reactivo máximo se obtiene para una posición angular de los recesos de  $t_3 = 1.06 \text{ rad} = 60.7 \text{ grados}$ , ver Fig.(6-1). El valor del momento adimensional máximo es de  $M_{xx \text{ adim}} = 0.0355$ .

La Fig.(6-8) muestra el efecto de la resistencia al flujo impuesta por los restrictores en la alimentación a los recesos, sobre el momento máximo adimensional. Los resultados mostrados en esta figura, se obtuvieron manteniendo fijos los valores de los parámetros  $\frac{l_z}{L} = 0.730$ ,  $\frac{2l_r}{L} = 0.17$ ,  $\frac{t_1}{t_2} = 0.25$  y  $t_3 = 1.06 \text{ rad}$ . de los cálculos anteriores. Se observa que el momento reactivo máximo se obtiene para una resistencia capilar de  $R_c = 1.8 \times 10^9 \frac{\text{Pas}}{\text{m}^3}$  correspondiente a un valor del momento adimensional máximo de  $M_{xx \text{ adim}} = 0.048$ . Valor que sin embargo no corresponde a la potencia de bombeo mínima, que se obtiene para un valor aproximado de la resistencia capilar de  $R_c = 7.26 \times 10^9 \frac{\text{Pas}}{\text{m}^3}$  por lo que se emplea ese valor en los cálculos que siguen.

Dada la baja razón de área de recesos a área de cojinete, y con base en lo señalado en la clasificación de cojinetes del Capítulo 1, el cojinete caería en la clasificación de cojinete híbrido.

La Fig.(6-9) muestra el efecto del número de Sommerfeld, sobre el momento máximo adimensional. Los resultados mostrados en esta figura, se obtuvieron manteniendo fijos los valores de los parámetros  $\frac{l_c}{L} = 0.730$ ,  $\frac{2l_c}{L} = 0.17$ ,  $\frac{t_1}{t_2} = 0.25$ ,  $t_3 = 1.06$  rad y  $R_c = 7.26 \times 10^9 \frac{Pas}{m^3}$  de los cálculos anteriores. Se observa que los momentos reactivos  $M_X$  y  $M_Y$  a desalineamiento máximo  $\alpha_{max}$ , se incrementan monótonicamente con el número de Sommerfeld. Como el número de Sommerfeld es proporcional a la velocidad angular, la variación de los momentos encontrada en estos cálculos y mostrada en esta figura, se puede atribuir a la generación de presión hidrodinámica. El carácter asimétrico de la distribución de presión hidrodinámica, origina la aparición del momento reactivo  $M_Y$  a pesar de que el desalineamiento presente es solamente  $\alpha$ .

En la Fig.(6-10), se observa una disminución en el flujo de lubricante con el incremento de número de Sommerfeld con flecha alineada y con desalineamiento máximo, lo que implica un consumo de potencia de bombeo menor. Es interesante la variación en el flujo que se tiene cuando hay desalineamiento, que se explica por la modificación de las resistencias al flujo en las salidas entre los recesos y la flecha, lo que ocasiona variación en la potencia de bombeo consumida.

Las Figs.(6-11) y (6-12) muestran dos aspectos de la distribución de presión en el cojinete operando como híbrido, con una velocidad angular de 1200 rpm y desalineamiento máximo. La correspondiente distribución de claro radial con desalineamiento máximo  $\alpha_{max}$ , se muestra en la Fig.(6-13).

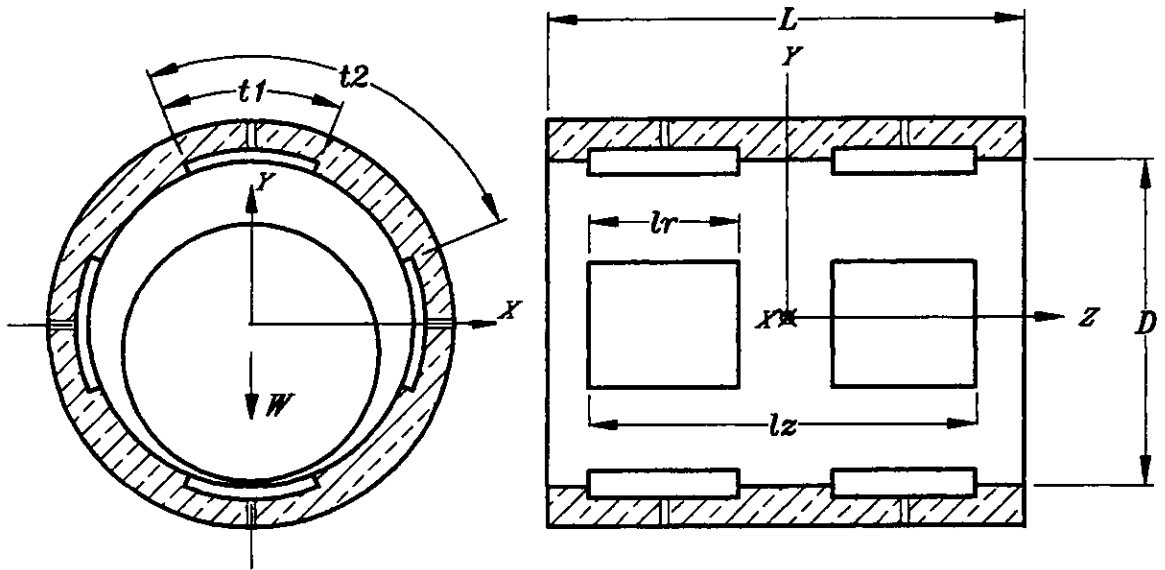


Figura 6-1: Cojinete hidrostático autocompensado, 4+4 recesos, carga sobre receso (LOP).

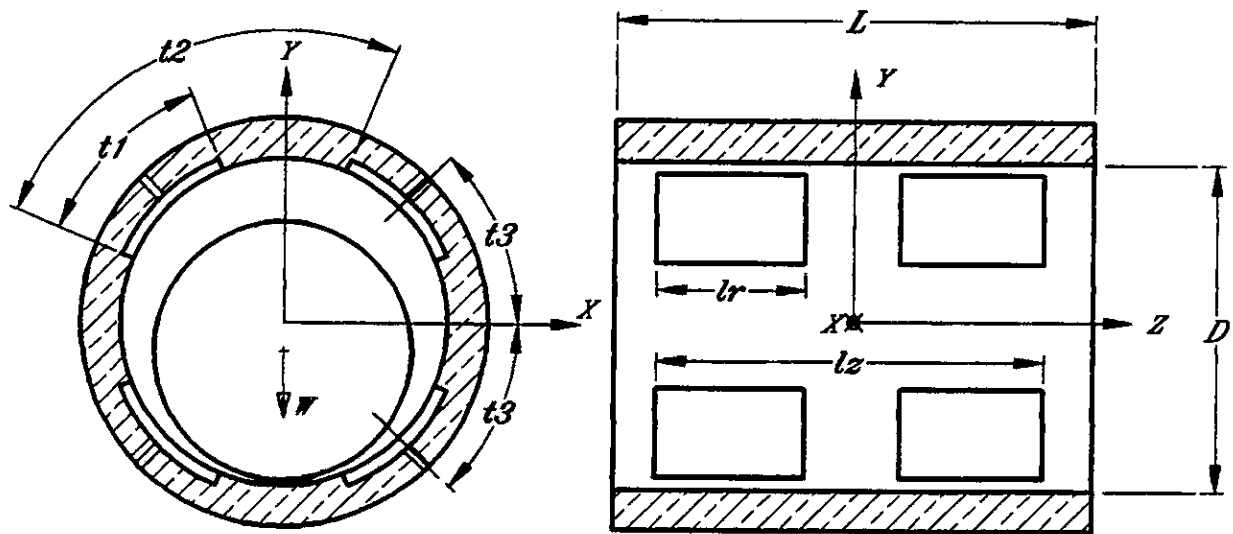


Figura 6-2: Cojinete hidrostático autocompensado, 4+4 recesos, carga entre recesos (LBP).

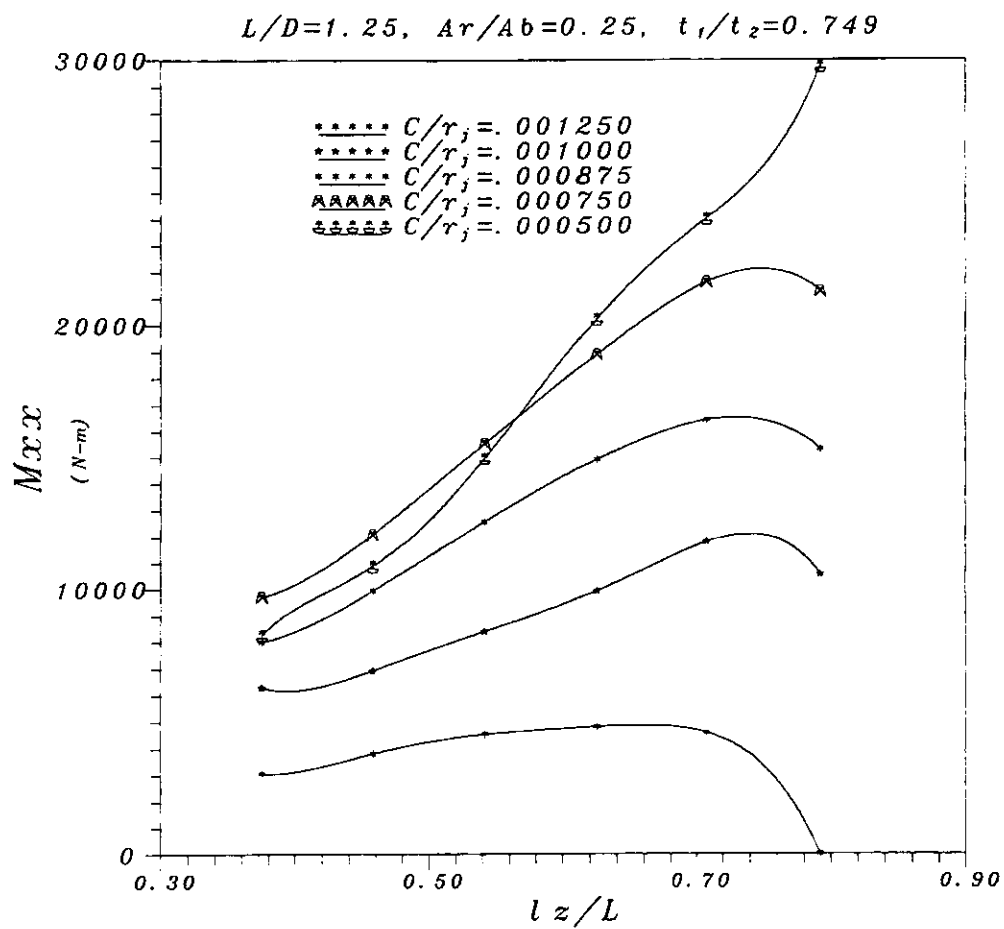


Figura 6-3: Momento  $M_{xx}$  a desalineamiento máximo  $\alpha_{max}$  vs.  $\frac{l_z}{L}$  y  $\frac{C}{r_j}$



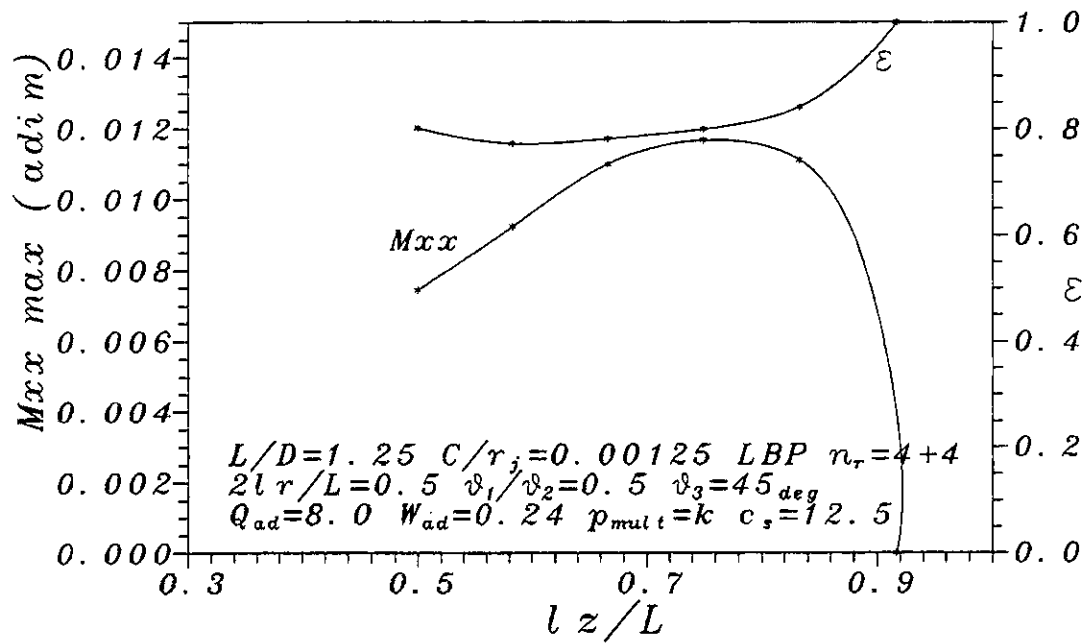


Figura 6-4: Momento adimensional  $M_{xx}$  y excentricidad en la sección central  $\varepsilon$  a desalineamiento máximo  $\alpha$  vs. longitud total cubierta por recesos  $\frac{l_z}{L}$

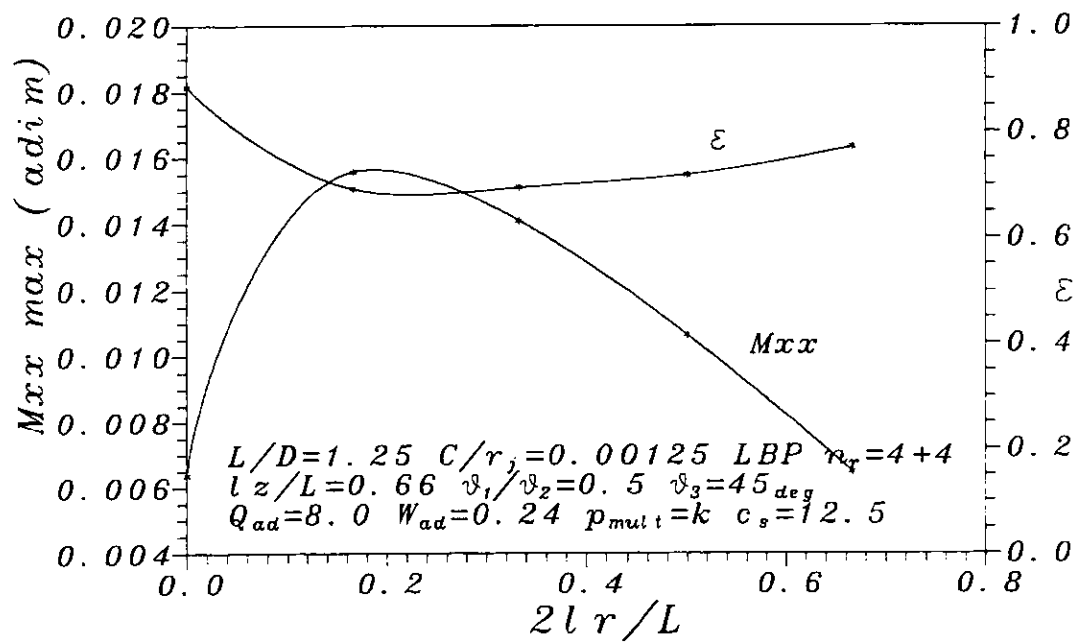


Figura 6-5: Momento adimensional  $M_{xx}$  y excentricidad en la sección central  $\varepsilon$  @ desalineamiento máximo  $\alpha_{max}$  vs.  $\frac{2lr}{L}$ ,  $\frac{l_z}{L} = 0.667$ ,  $\frac{C}{r_j} = 0.00125$

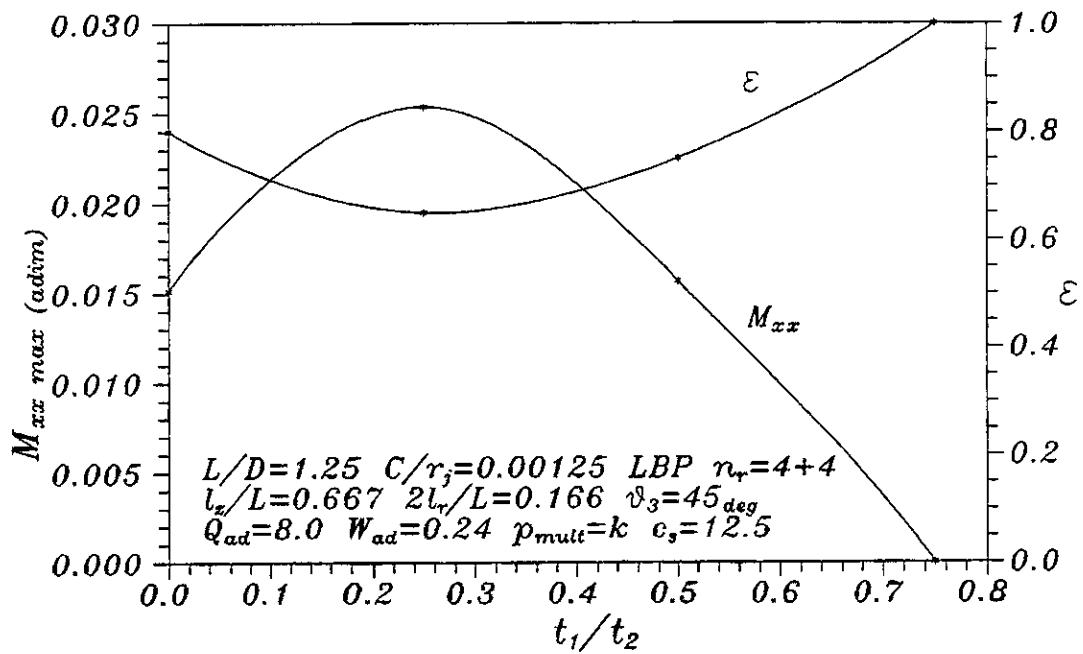


Figura 6-6: Momento adimensional  $M_{xx}$  y excentricidad en la sección central  $\epsilon$  @ desalineamiento máximo  $\alpha_{\max}$  vs.  $\frac{t_1}{t_2}$ ,  $\frac{2l_r}{L} = 0.167$ ,  $\frac{l_z}{L} = 0.667$ ,  $\frac{C}{r_j} = 0.00125$

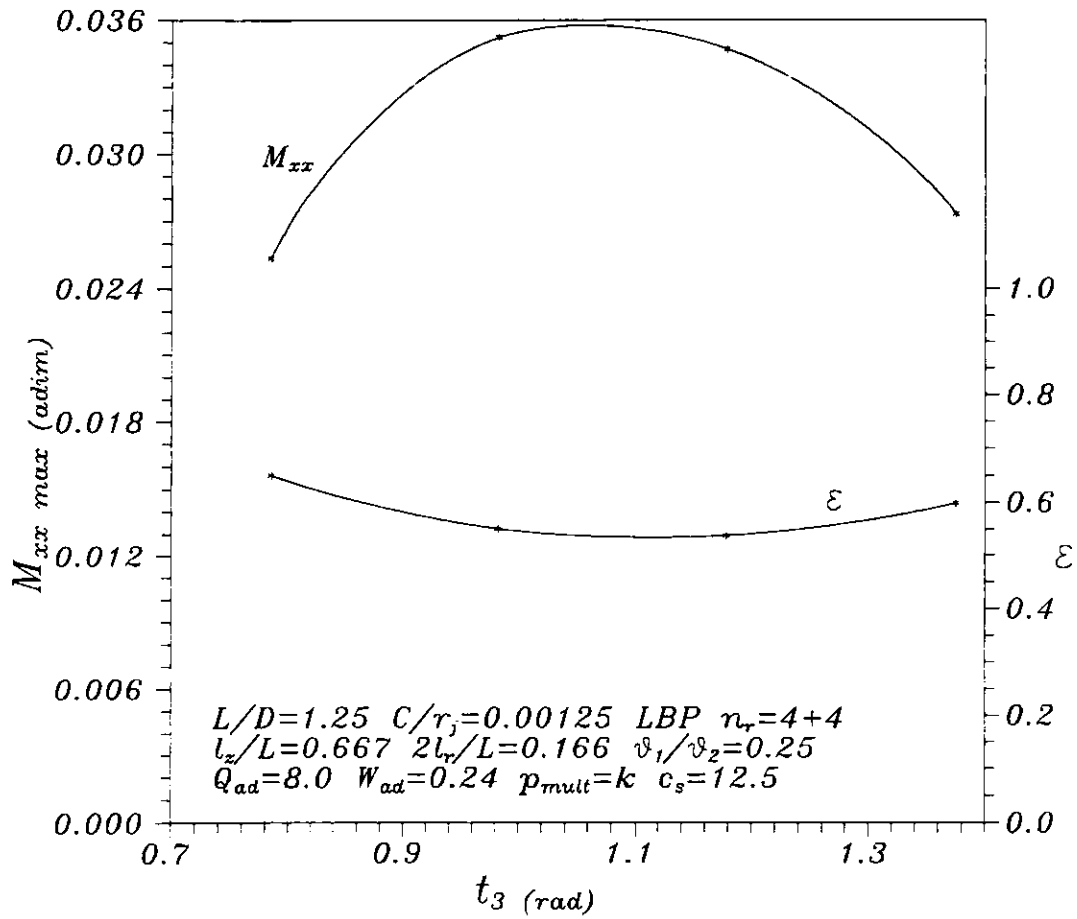


Figura 6-7: Momento adimensional  $M_{xx}$  y excentricidad en la sección central  $\epsilon$  @ desalineamiento máximo  $\alpha_{\max}$  vs.  $t_3$ ,  $\frac{l_1}{t_2} = 0.25$ ,  $\frac{l_z}{L} = 0.667$ ,  $\frac{C}{r_j} = 0.00125$

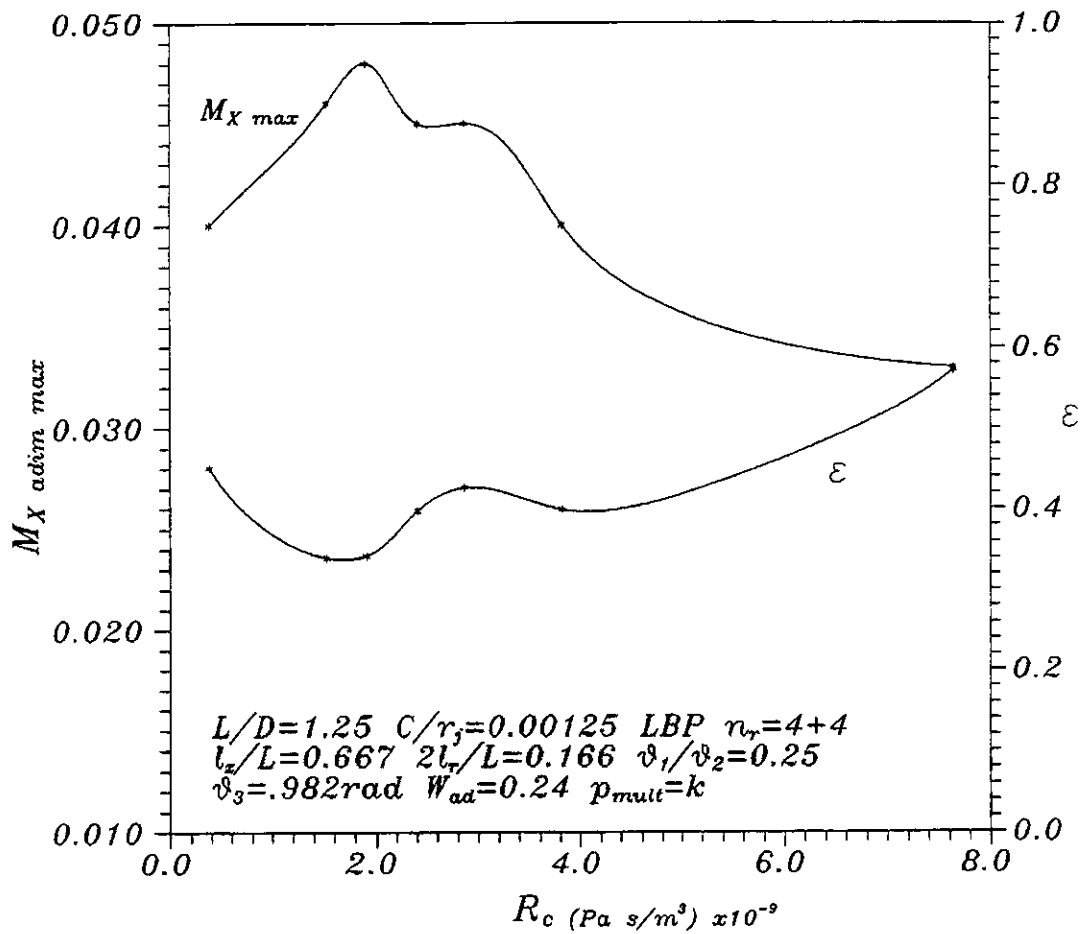


Figura 6-8: Momento adimensional  $M_{xx}$  y excentricidad en la sección central  $\varepsilon$  @ desalineamiento máximo  $\alpha_{\text{max}}$  vs. resistencia capilar  $R_c = \frac{8\mu l_c}{\pi d_c^4}$ ,  $\frac{l_1}{l_2} = 0.25$ ,  $\frac{2l_r}{L} = 0.167$ ,  $\frac{l_x}{L} = 0.667$ ,  $\frac{C}{r_j} = 0.00125$ ,

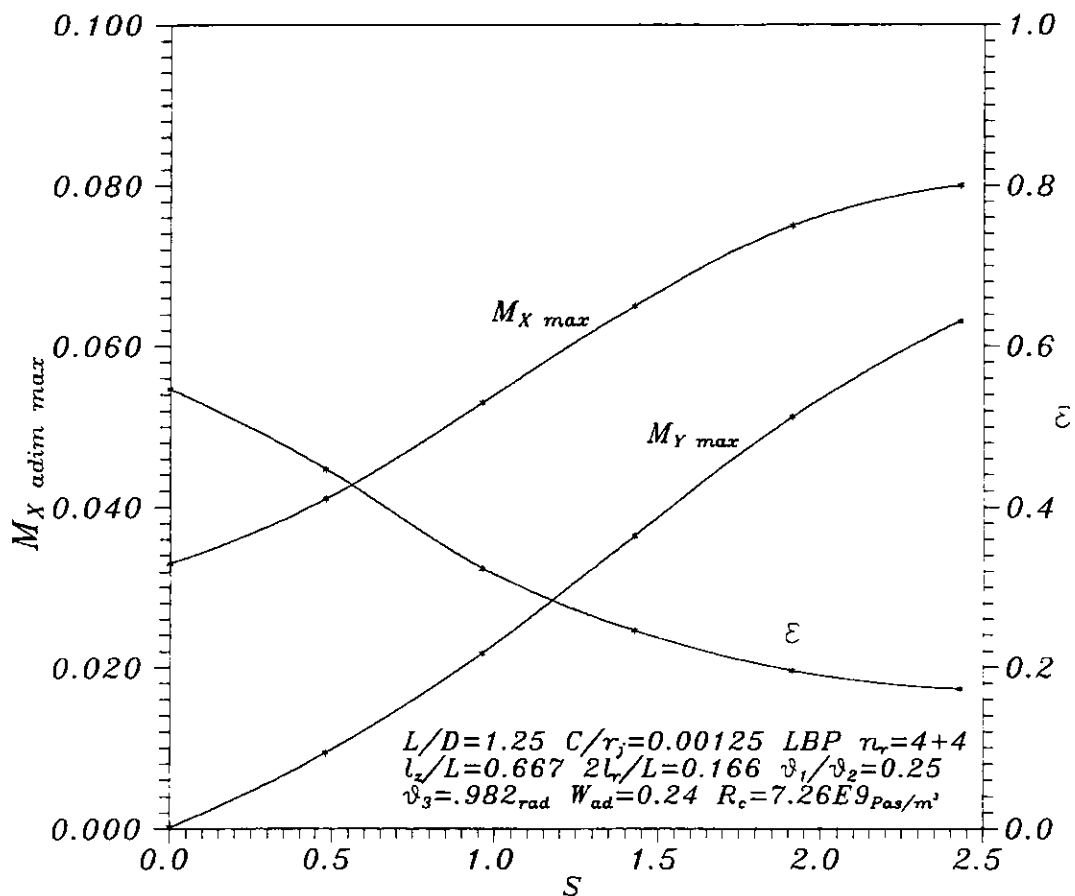


Figura 6-9: Momentos adimensionales  $M_X$  y  $M_Y$  y excentricidad en la sección central  $\varepsilon$  @ desalineamiento máximo  $\alpha_{max}$  vs.  $S$ ,  $R_c = 7.26 \times 10^9 \frac{Pas}{m^3}$ ,  $\frac{t_1}{t_2} = 0.25$ ,  $\frac{2l_r}{L} = 0.167$ ,  $\frac{l_z}{L} = 0.667$ ,  $\frac{C}{r_j} = 0.00125$

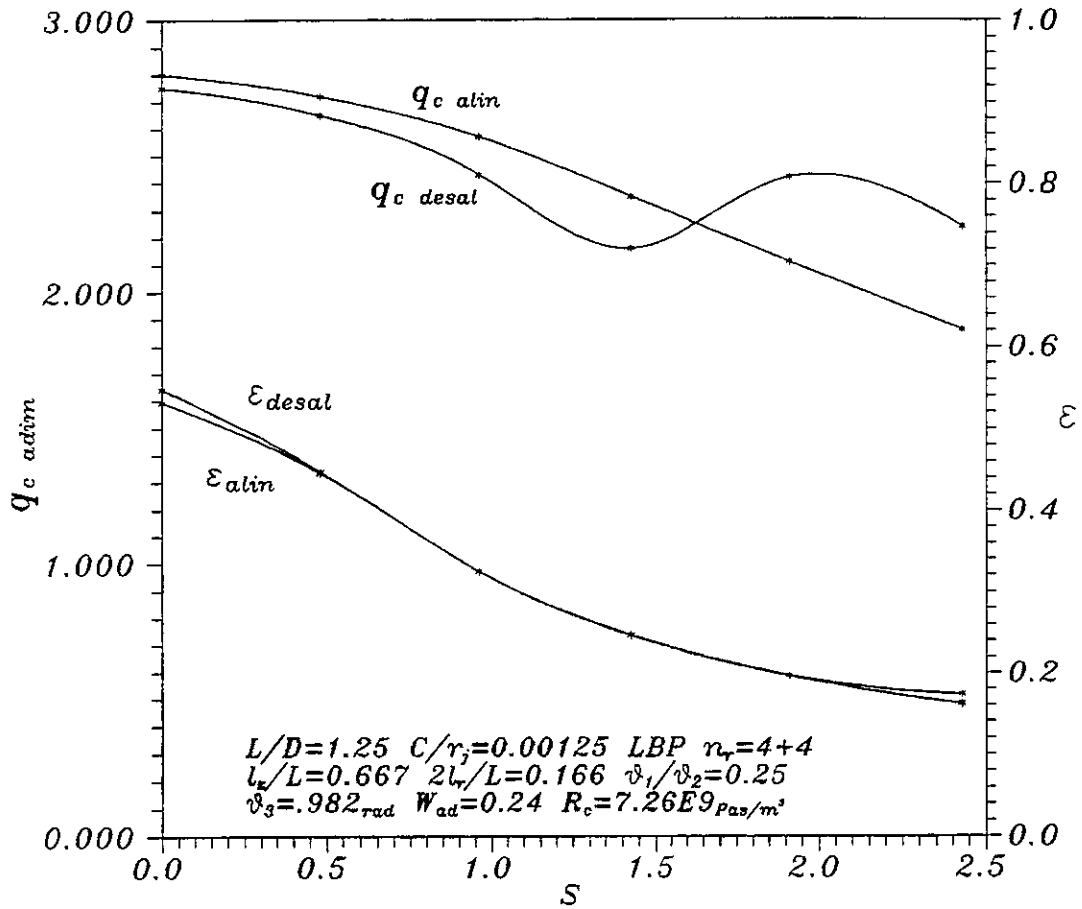


Figura 6-10: Flujo de lubricante adimensional y excentricidad en sección central con flecha alineada y con desalineamiento máximo, vs. número de Sommerfeld  $S$ .

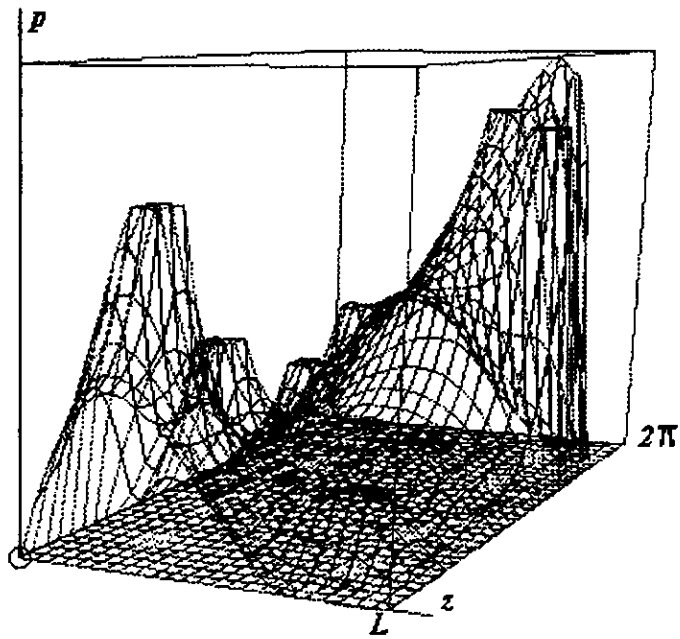


Figura 6-11: Distribución de presión, cojinete híbrido con autocompensación optimada, 4+4 recesos, carga entre recesos, a desalineamiento máximo  $\alpha_{max}$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Theta = 360^\circ$ ,  $p_{max} = 23.5$  MPa, vista 1.



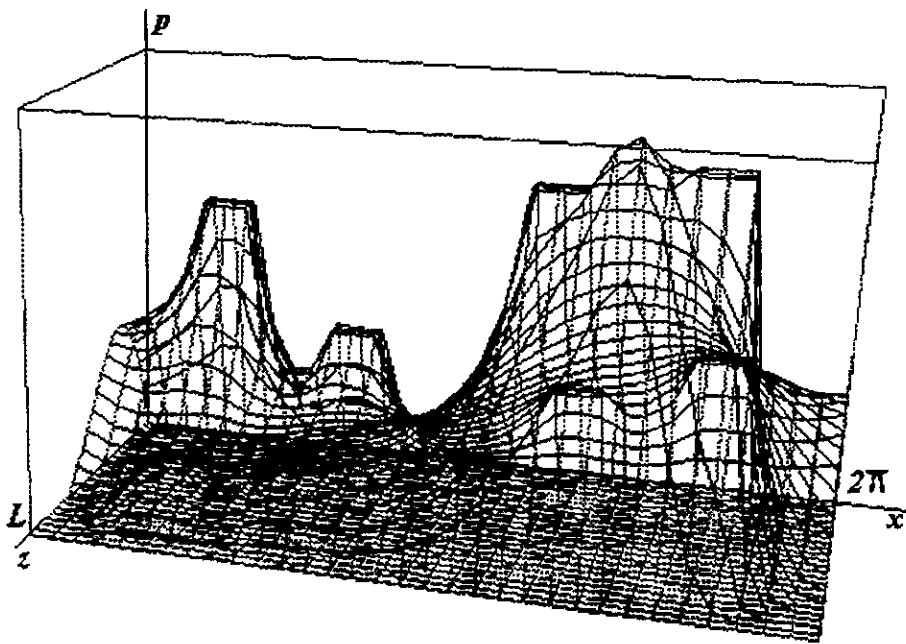


Figura 6-12: Distribución de presión, cojinete híbrido con autocompensación optimada, 4+4 recesos, carga entre recesos, a desalineamiento máximo  $\alpha_{max}$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Theta = 360^\circ$ ,  $p_{max} = 23.5$  MPa, vista 2.

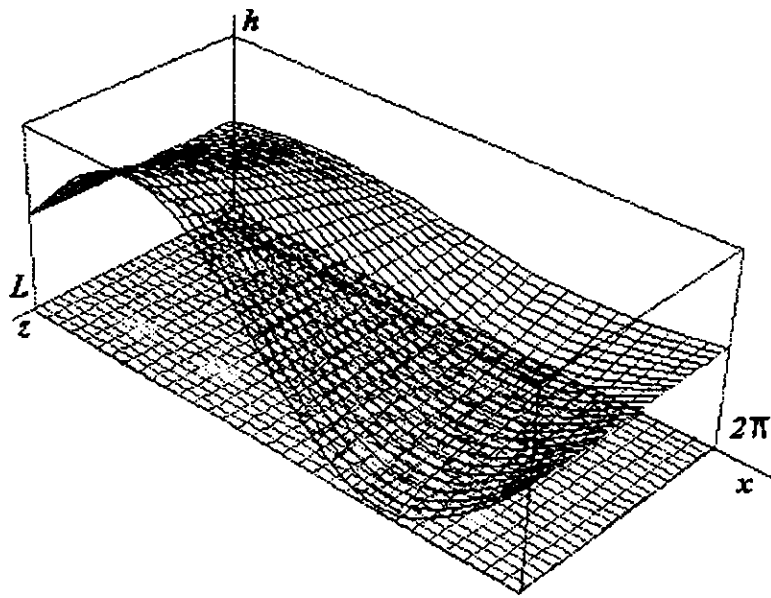


Figura 6-13: Distribución de claro radial con flecha desalineada a  $\alpha_{\max}$ ,  $\beta = 0$ , correspondiente a cojinete híbrido, 4+4 recesos, carga entre recesos.

# Capítulo 7

## Ejemplo de diseño

### 7.1 Introducción

Se suponen conocidas las variables  $W$ ,  $r_j$ ,  $\omega$ , para un cojinete híbrido cilíndrico completo (360 grados), con autocompensación de capacidad de carga ante desalineamientos de la flecha, con sistema de alimentación de lubricante por distribuidor de flujo a presión constante, con restrictores de tubo capilar en las líneas hacia los recesos. Se requiere determinar las dimensiones y condiciones operativas óptimas desde el punto de vista de rigidez angular máxima ante momentos externos.

1. Se determinan las dimensiones geométricas a partir de las razones óptimas obtenidas de las Figs.(6-4), (6-5), (6-6), (6-7) y (6-8) del capítulo anterior.
2. Se determinan las condiciones operativas a partir de las Figs.(6-9) y (6-10) del capítulo anterior.

### 7.2 Ejemplo

Diseñe un cojinete hidrostático cilíndrico completo (360 grados) de 4+4 recesos, con rigidez angular máxima y autocompensación de capacidad de carga en el rango completo de desalineamientos de la flecha. Determine sus dimensiones, su capacidad de momento, la viscosidad mínima del lubricante, el flujo de lubricante, la presión en el múltiple, la potencia de bombeo requerida, la excentricidad, el ángulo de máxima aproximación y el ángulo de desalineamiento

máximo con los siguientes datos:

### 7.2.1 Datos

$$W = 1572 \text{ kN} = 160244 \text{ kg}$$

$$r_j = 0.25 \text{ m}$$

$$\omega = 600 \text{ rpm} = 62.83 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\frac{L}{D} = 1.25$$

$$\frac{C}{r_j} = 0.00125$$

$$W_{ad} = \frac{W}{DL\rho_{mult}} = 0.24$$

### 7.2.2 Dimensiones

De las razones óptimas aludidas en el paso 1 del procedimiento de diseño y obtenidas de las Fig.(6-4) a (6-8) válidas para cojinetes con la misma razón  $\frac{C}{r_j}$  y  $\frac{L}{D}$ , se tiene:

**longitud de cojinete,**

$$\frac{L}{D} = 1.25 = \frac{L}{2r_j},$$

$$L = 1.25 \times 2 \times r_j = 1.25 \times 2 \times 0.25 \text{ m} = 0.625 \text{ m}$$

**separación total de los recesos,**

$$\frac{l_z}{L} = 0.730,$$

$$l_z = L \times .73 = 1.25 \times 2 \times r_j \times .73 = 1.25 \times 2 \times 0.25 \times .73 = .45625 \text{ m}$$

**longitud (axial) de recesos,**

$$\frac{2l_r}{L} = 0.17,$$

$$l_r = 0.17 \times L/2 = 0.17 \times 0.625/2 = 0.053125 \text{ m}$$

**ángulo cubierto por cada receso,**

$$\frac{t_1}{t_2} = 0.25,$$

$$t_1 = 0.25 \times t_2 = 0.25 \times \frac{2\pi \text{ rad}}{4 \text{ recesos}} = 0.3926 \text{ rad} = 22.5 \text{ grados}$$

**posición angular del centro de recesos respecto del eje X positivo,**

$$\text{recesos 1 y 5: } t_3 = 1.06 \text{ rad} = 60.73 \text{ grados}$$

$$\text{recesos 2 y 6: } t_3 = 180 - 60.73 = 119.27 \text{ grados,}$$

$$\text{recesos 3 y 7: } t_3 = 180 + 60.73 = 240.73 \text{ grados,}$$

$$\text{recesos 4 y 8: } t_3 = 360 - 60.73 = 299.27 \text{ grados,}$$

posición axial del centro de recesos respecto de sección central de cojinete,

$$\frac{l_z}{2} - \frac{l_r}{2} = \frac{l_z - l_r}{2} = \frac{0.45625 - 0.053125}{2} = 0.20156 \text{ m}$$

radio de cojinete,

$$\frac{c}{r_j} = \frac{r_b - r_j}{r_j} = 0.00125, \quad r_b = 0.2503125 \text{ m}$$

dimensiones de restrictores de tubo capilar y viscosidad lubricante,

$R_c = 7.257465 \times 10^9 \frac{\text{Pas}}{\text{m}^3} = \frac{8l_c}{\pi d_c^4} \cdot \mu$ , pueden tenerse varias combinaciones de longitud y diámetro de capilar con la viscosidad del lubricante, por ejemplo si  $d_c = .001 \text{ m}$ , y  $l_c = .019 \text{ m}$ , resulta una viscosidad de  $\mu = 0.15 \text{ Pas}$  (Pascal-segundo) o si  $d_c = .001 \text{ m}$ , y  $l_c = .005 \text{ m}$ , resulta una viscosidad de  $\mu = 0.57 \text{ Pas}$ , etc.

### 7.2.3 Diseño, condiciones de operación

la presión en el múltiple,

se obtiene del dato para la capacidad de carga adimensional  $W_{ad} = 0.24$

$$W_{ad} = \frac{W}{DLp_{mult}} = 0.24 = \frac{1572000N}{0.5m \cdot 0.625m \cdot p_{mult}} = 5.0304 \times 10^6 \frac{N}{m^2 p_{mult}}$$

$$p_{mult} = \frac{5.0304 \times 10^6 \frac{N}{m^2}}{0.24} = 2.096 \times 10^7 \frac{N}{m^2} = 213.65 \frac{kg}{cm^2}$$

la capacidad de momento,

se obtiene con el número de Sommerfeld-

$$S = \frac{\omega \mu r_b L}{\left(\frac{c}{r_j}\right)^2 W} = \frac{(62.83 \frac{rad}{s})(0.15 \text{ Pas})(0.2503125m)(0.625m)}{(0.00125)^2 (1572000N)} = .60027$$

y la Fig.(6-9):

$$M_{X \text{ max adim}} = 0.044 = \frac{M_{xx}}{DL^2 p_{mult}}$$

$$M_{xx} = 0.044 \cdot 0.5m \cdot 0.625^2 m^2 \cdot 2.096 \times 10^7 \frac{N}{m^2} = 1.8013 \times 10^5 Nm$$

$$M_{Y \text{ max adim}} = 0.012 = \frac{M_{yy}}{DL^2 p_{mult}}$$

$$M_{yy} = 0.012 \cdot 0.5m \cdot 0.625^2 m^2 \cdot 2.096 \times 10^7 \frac{N}{m^2} = 0.49125 \times 10^5 Nm$$

de la misma figura se obtiene la excentricidad relativa en la sección central del cojinete desalineado  $\varepsilon = 0.42$

el flujo de lubricante,

se obtiene de la Fig.(6-10)

con  $S = 0.60027$

se lee:

$$q_{c \text{ adim}} = 2.75 = \frac{12\mu Q}{C^3 p_{mult}} = \frac{12 \times 0.15 \text{ Pas} \cdot Q}{(0.2503125 - 0.25000)^3 \text{ m}^3 \text{ d} (2.096 \times 10^7) \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 2814.0 \text{ Pas} \frac{Q}{\text{m}^3} = 2814.0 \frac{\text{s}}{\text{m}^3} Q$$

$$Q = \frac{2.75 \text{ m}^3}{2814.0 \frac{\text{s}}{\text{m}^3}} = 9.7726 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 977.26 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

la potencia de bombeo,

se obtiene de la Ec.(4.48)

$$Pot_b = \frac{p_{mult} \times Q}{\eta_b} = \frac{(2.096 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}) (9.7726 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}})}{\eta} = \frac{20483. \text{N} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\eta} = 20.5 \text{ kW.}$$

## Capítulo 8

# Conclusiones

Se consideró el diseño de cojinetes cilíndricos hidrostáticos e híbridos bajo condiciones de desalineamiento variable y autocompensación de su capacidad de carga, a fin de obtener aquél que presente la rigidez angular máxima, y se mencionaron algunas ventajas posibles que se obtendrían al aplicar este nuevo criterio de diseño. Se discutieron las características físicas del flujo de lubricante en cojinetes cilíndricos, incluyendo condiciones laminares y turbulentas, así como el fenómeno de cavitación. Se dedujo la ecuación diferencial de lubricación de Reynolds para flujo laminar, basada en la suposición de fuerzas inerciales pequeñas comparadas con las fuerzas viscosas. Dada la importancia que tiene el claro radial en la precisión de los cálculos basados en las ecuaciones de lubricación de Reynolds, se obtuvieron expresiones originales que permiten su determinación exacta con desalineamiento del eje. También se dedujeron de forma original las ecuaciones integro-diferenciales de continuidad para los recesos, que se requieren junto a las ecuaciones de lubricación de Reynolds para obtener la distribución de presiones de cojinetes hidrostáticos e híbridos. Se desarrolló un modelo numérico con base en un esquema en diferencias finitas a partir de las ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales mencionadas, que se convierten en un sistema de ecuaciones algebraicas, del que se obtiene una solución discreta, aproximada. Se usó el método de sobrerrelajación sucesiva (SOR) en la solución del sistema de ecuaciones algebraicas. Se compararon resultados obtenidos con el presente modelo, con datos experimentales y numéricos reportados en la literatura para cojinetes hidrodinámicos e hidrostáticos. Se usó el modelo numérico en el estudio y diseño óptimo relativo de un tipo de cojinete propuesto a fin de obtener una rigidez angular máxima y autocompensación de la capacidad de

carga, con sistema de alimentación de lubricante a partir de un múltiple a presión constante y restrictores de tubo capilar. Dichos resultados pueden usarse para el diseño directo de cojinetes hidrostáticos cilíndricos completos (360 grados), de 4+4 recesos, con características de rigidez angular máxima y autocompensación de capacidad de carga en el rango de desalineamientos posible.

## **8.1 Líneas de investigación futuras**

Pueden sugerirse como líneas de investigación futuras el estudio de cojinetes del mismo tipo, refinando el proceso de optimación hasta obtener el óptimo absoluto, posiblemente con la combinación del presente modelo de cálculo y programa con una rutina de optimación mas eficiente, el estudio del mismo tipo de cojinete pero con el sistema de alimentación no-restringida y flujo constante a cada receso, o el tipo de cojinete mencionado en el cuerpo de trabajo con restrictores variables, sensibles a la presión en la misma película lubricante, con los que seguramente se obtendría rigidez angular mayor, a cambio de una mayor potencia de bombeo en el primer caso y una mayor complejidad del diseño mecánico en el segundo caso. Asimismo, restaría la investigación detallada y cuantitativa del efecto que este tipo de cojinetes produciría en el dimensionamiento de otras partes de la maquinaria en que se emplearan, como por ejemplo grandes turbo-generadores.



## Capítulo 9

# Apéndice: Fundamentos teóricos

### 0.1 Ecuaciones generales

El marco teórico lo constituye el análisis diferencial del flujo de lubricante en el cojinete. Dicho flujo se produce por gradientes de presión y esfuerzos cortantes viscosos. En el análisis se aplican los principios generales de conservación, de masa, de cantidad de movimiento lineal y de energía. Matemáticamente lo anterior se representa mediante ecuaciones diferenciales parciales y ecuaciones que describen el comportamiento y relación entre propiedades físicas del fluido. A estas ecuaciones se les llama dependiendo de su tipo: relaciones constitutivas, ecuaciones de estado o correlaciones experimentales. Inicialmente se presenta el análisis más general y posteriormente se especializa para fluidos particulares, usando las relaciones constitutivas y las correlaciones apropiadas. Se consideran fluidos con relación lineal entre los esfuerzos y los gradientes espaciales de velocidad o sea fluidos newtonianos, con lo que las ecuaciones generales de movimiento, se convierten en las ecuaciones de Navier-Stokes.

Por otra parte, en el estudio de inestabilidades del rotor sustentado sobre cojinetes, manifestadas por movimientos adicionales al de giro, se aplica la segunda ley de Newton de la dinámica, aceptando una dependencia lineal de las fuerzas en la película con el desplazamiento y la velocidad del centro de la flecha. Los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de la película lubricante que intervienen en esta ecuación, se determinan empleando el modelo descrito en el párrafo anterior, al considerar pequeños desplazamientos lineales o angulares, del centro o del eje de la flecha respectivamente, y evaluar los cambios que tienen lugar en la distribución

de presiones que dan lugar a las fuerzas y momentos, que actúan en la superficie de la flecha y cojinete.

Por brevedad en esta sección se usa notación vectorial, libre de sistema de referencia y, notación tensorial o indicial, con la convención de Einstein de la suma sobre índices repetidos y sistema de referencia cartesiano rectangular:  $x_j = (x_1, x_2, x_3)$ .

## 0.2 Ecuación de continuidad

El principio general de conservación de la masa, se representa mediante la *ecuación de continuidad*, que puede escribirse en notación vectorial [19][43][84],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (0.1)$$

donde  $\rho$  y  $t$  representan la densidad del fluido y la variable tiempo respectivamente,  $\bar{\nabla}$  el operador gradiente y  $\vec{V}$  el vector de velocidad. En notación indicial la ecuación anterior se escribe como,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (0.2)$$

aquí  $u_j$  representa la componente del vector velocidad en la dirección  $x_j$ , la que también puede escribirse como,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (0.3)$$

donde  $\frac{d\rho}{dt}$  representa la derivada sustancial de la densidad. Esta ecuación para flujos incompresibles, se reduce a,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (0.4)$$

### 0.3 Ecuaciones de movimiento

El principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal se representa mediante las *ecuaciones de movimiento*, [19] etc.,

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = \nabla \cdot \tilde{\sigma} + \rho \vec{g} \quad (0.5)$$

los términos entre paréntesis del lado izquierdo de la ecuación, representan la aceleración local y la aceleración convectiva; términos que al multiplicarse por la densidad, pueden interpretarse como fuerzas de inercia por unidad de volumen, por lo que también se denominan términos inerciales. El primer término del lado derecho de la ecuación representa las fuerzas de superficie, donde  $\tilde{\sigma}$  es el tensor de esfuerzo, que también puede leerse como la divergencia del tensor de esfuerzos o fuerza neta de superficie (por fricción viscosa y por esfuerzos normales). El segundo término del lado derecho de la ecuación representa las fuerzas de cuerpo, donde  $\vec{g}$  es el vector aceleración. Al analizar dimensionalmente esta ecuación, se observa que todos los términos pueden interpretarse como fuerzas por unidad de volumen, y son fuerzas que actúan sobre una partícula diferencial o sobre el fluido que en un instante dado está contenido dentro de un volumen de control diferencial. En notación indicial la ecuación anterior se escribe,

$$\rho \left( \frac{\partial u_m}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{jm}}{\partial x_j} + \rho g_m \quad (0.6)$$

Esta es entonces la ecuación general de movimiento, cuya solución requiere de la representación de los elementos del tensor de esfuerzos  $\sigma_{jm}$  mediante una ecuación constitutiva, que relacione los elementos del tensor de esfuerzos, con otras variables presentes en la ecuación.

### 0.4 Ecuación constitutiva

Si el fluido está *en reposo* los elementos del tensor de esfuerzos están dados por la ecuación siguiente en que  $p_0$  es la llamada presión hidrostática y que es también la *presión termodinámica*,

$$\sigma_{jm} = -p_0 \delta_{jm} \quad (0.7)$$

Esta ecuación expresa que para un fluido en reposo, el esfuerzo en todo punto es de compresión; su forma indica que el esfuerzo es isotrópico y que cada dirección es una dirección principal.

Si la ecuación constitutiva debe representar también al *fluido en movimiento*, el estado de esfuerzo estará dado por la suma del tensor  $-p_0\delta_{jm}$ , y, de otro tensor  $\tau_{jm}$ , que dependa del movimiento y se anule cuando el fluido esta en reposo o con movimiento como cuerpo rígido. A  $\tau_{jm}$  se le llama *tensor de esfuerzos viscosos*,

$$\sigma_{jm} = -p_0\delta_{jm} + \tau_{jm} \quad (0.8)$$

Una característica de los fluidos y que los define como tales, es que se deforman indefinidamente, es decir "fluyen", bajo la acción de esfuerzos cortantes, sin importar que tan pequeños sean éstos. Los fluidos a diferencia de los sólidos elásticos, una vez deformados no retornan a su configuración inicial, por lo que se dice no tienen "memoria". Otra propiedad de los fluidos es que los esfuerzos cortantes en su interior no dependen de la deformación total, sino de la rapidez con la que se lleve a cabo la deformación, la fricción ocurre sólo cuando diferentes partículas se mueven con diferentes velocidades, o sea sólo durante el movimiento relativo entre partículas de fluido, a diferencia de los sólidos en que los esfuerzos cortantes se mantienen mientras subsista la deformación. Por lo tanto  $\tau_{jm}$  debe depender de los gradientes espaciales de velocidad. Si los gradientes son pequeños, puede suponerse que  $\tau_{jm}$  depende sólo de las primeras derivadas de la velocidad. Con la misma aproximación puede suponerse  $\tau_{jm}$  como una función lineal de las derivadas  $\frac{\partial u_j}{\partial x_m}$ . En esta definición no puede haber términos independientes de  $\frac{\partial u_j}{\partial x_m}$ , ya que  $\tau_{jm}$  debe desaparecer cuando  $\vec{V} = \text{constante}$ , o sea en reposo o en movimiento uniforme. También  $\tau_{jm}$  debe anularse cuando todo el fluido está en rotación uniforme, ya que en este movimiento no hay desplazamiento relativo entre partículas ni fricción interna. En rotación uniforme  $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  para cada partícula en todo el flujo. La sumas  $\frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j}$  son combinaciones lineales que se anulan cuando  $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Por lo tanto  $\tau_{jm}$  debe contener sólo este tipo de combinaciones simétricas de  $\frac{\partial u_j}{\partial x_m}$  [43], que son elementos de un tensor que representan o "miden" la rapidez de deformación cortante de un elemento de fluido, debido a su interacción con las partículas vecinas. Si se acepta lo anterior se pueden expresar los elementos del tensor de esfuerzos viscosos, como función lineal de cada uno de los elementos del tensor de rapidez

de deformación,

$$\tau_{jm} = \beta_{kljm} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (0.9)$$

donde  $\beta_{kljm}$  es un tensor de cuarto orden, formado con 81 constantes o módulos necesarias para establecer la proporcionalidad entre nueve elementos de esfuerzo y nueve de deformación. Sin embargo si se considera que el fluido es isotrópico y la simetría de los tensores de esfuerzo y deformación, el tensor  $\beta_{kljm}$  debe ser también un tensor isotrópico y simétrico cuando se intercambian los subíndices  $k$  y  $l$ , o  $j$  y  $m$ . La forma más general de este tensor es [37],

$$\beta_{kljm} = \lambda \delta_{kl} \delta_{jm} + \mu (\delta_{kj} \delta_{lm} + \delta_{km} \delta_{jl}) \quad (0.10)$$

y solo contiene dos módulos independientes  $\mu$  y  $\lambda$ . Si se sustituye la Ec.(0.10) en la (0.9) y se realizan las operaciones indicadas, se obtiene para los elementos del tensor de esfuerzos viscosos  $\tau_{jm}$ ,

$$\tau_{jm} = \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \delta_{jm} \quad (0.11)$$

la que sustituida en la Ec.(0.8) resulta en la ecuación constitutiva buscada,

$$\sigma_{jm} = -p_0 \delta_{jm} + \lambda \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \delta_{jm} + \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \quad (0.12)$$

Los módulos  $\mu$  y  $\lambda$  caracterizan la viscosidad del fluido y la mayoría de las veces deben ser obtenidos experimentalmente. Debido a la linealidad de su forma a esta ecuación se le llama *ecuación constitutiva para fluidos newtonianos*.

Se pueden obtener otras conclusiones importantes de las ecuaciones anteriores, si el tensor de esfuerzos  $\sigma_{jm}$  se expresa como la suma de un *tensor de esfuerzos cortantes distorsionales*  $\tau_{jm}$  y otro *tensor isotrópico de esfuerzos esféricos*, con elementos en la diagonal iguales al promedio de esfuerzos normales de  $\sigma_{jm}$ , [45]:

$$\sigma_{jm} = \tau_{jm} + \frac{1}{3} \sigma_{qq} \delta_{jm} \quad (0.13)$$

Expresando de la misma manera el tensor de rapidez de deformación, se tiene,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) = s_{jm}^c + \frac{1}{3} \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \delta_{jm} \quad (0.14)$$

donde  $s_{jm}^c$  representa el *tensor de rapidez de deformación cortante o de rapidez de distorsión*; y un tensor isotrópico con elementos iguales al promedio de las deformaciones normales  $\frac{1}{3} \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \delta_{jm}$ , que representa la *rapidez de deformación volumétrica* no distorsional.

Sustituyendo las Ec.(0.13) y (0.14) en la (0.12) se obtiene,

$$\tau_{jm} = (-p_0 + \sigma) \delta_{jm} + \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \delta_{jm} + 2\mu s_{jm}^c \quad (0.15)$$

donde  $\sigma = -\frac{1}{3} \sigma_{qq}$  es el esfuerzo normal promedio con el fluido en movimiento, también llamada presión mecánica.

Haciendo en la ecuación anterior  $j = m$  y sumando, como  $\tau_{mm} = 0$ ,  $s_{mm}^c = 0$  resulta,

$$(-p_0 + \sigma) + \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u_q}{\partial x_q} = 0 \quad (0.16)$$

o sea que los dos primeros términos del lado derecho de la Ec.(0.15) se anulan y la ecuación constitutiva (0.11) es equivalente a las dos relaciones siguientes.

$$\begin{aligned} \tau_{jm} &= 2\mu s_{jm}^c \\ \sigma &= p_0 - \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u_q}{\partial x_q} = p_0 + \kappa \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \end{aligned} \quad (0.17)$$

En la segunda forma de la segunda ecuación se usa la Ec.(0.3). Al módulo  $\kappa = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ , se le llama viscosidad global y como se ve depende de  $\lambda$  y  $\mu$ , por lo que no constituye un tercer módulo independiente.

Como puede observarse, de la segunda forma, de la segunda Ec.(0.17), se obtienen las siguientes conclusiones:

i) si el fluido es incompresible, el esfuerzo normal promedio en el fluido en movimiento o presión mecánica  $\sigma$ , es igual a la presión hidrostática o termodinámica  $p_0$ . Nótese que para fluidos en movimiento, esta variable puede ser una función espacial tridimensional e incluso

dependiente del tiempo.

$$\sigma = p_0$$

ii) la igualdad anterior también es válida para procesos de expansión o compresión lentos (cuasi-estacionarios). Así la Ec.(0.13) puede escribirse de la siguiente manera,

$$\sigma_{jm} = \tau_{jm} - \sigma \delta_{jm}$$

el esfuerzo cortante  $\tau_{jm}$  es irreversible, mientras el esfuerzo isotrópico  $\sigma \delta_{jm}$  es reversible.

iii) al esfuerzo normal promedio dado por  $\sigma = -\frac{1}{3}\sigma_{qq}$  se le llama *presión mecánica*. La diferencia entre la presión termodinámica  $p_0$  y la presión mecánica  $\sigma$  está dada de la misma Ec.(0.17) como,

$$p_0 - \sigma = -\kappa \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

De acuerdo con la teoría cinética de los gases la presión mecánica  $\sigma$  es una medida sólo de la energía traslacional de las moléculas, mientras que la presión termodinámica  $p_0$  es una medida de la energía total, que incluye los modos vibracionales y rotacionales de la energía, así como el modo traslacional. En los líquidos también se incluyen otras formas de energía tales como atracción intermolecular. La viscosidad global  $\kappa$  es una medida de la transferencia de energía del modo traslacional a otros modos de energía, como puede interpretarse de la ecuación anterior, lo cuál es correcto para gases o líquidos con moléculas poliatómicas, ya que si el fluido es un *gas monoatómico*, el único modo de energía es el traslacional y la presión mecánica será igual a la presión termodinámica o sea que la viscosidad global es cero en este caso, es decir,

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

relación a la que se denomina *hipótesis de Stokes*. de manera que solo hay un coeficiente de viscosidad independiente en gases monoatómicos [19]. Para el caso de gases poliatómicos y para líquidos, comúnmente  $\kappa \simeq 0$  y se incorpora la hipótesis de Stokes en la ecuación constitutiva (0.12). Para fluidos incompresibles, el término de esa ecuación que involucra  $\lambda$  es cero, por lo que no hay necesidad de incorporar la hipótesis de Stokes.

## 0.5 Ecuaciones de Navier-Stokes

Al sustituir la Ec.(0.12) en la (0.6), y emplear  $p$  en lugar de  $p_0$  para nombrar a la presión termodinámica, se obtiene la forma más general de las ecuaciones de movimiento,

$$\rho \left( \frac{\partial u_m}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_m} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \mu \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \lambda \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \right) + \rho g_m \quad (0.18)$$

estas ecuaciones se conocen como *ecuaciones de Navier-Stokes*. Son tres, de carácter escalar, correspondiendo a los tres valores posibles del subíndice libre  $m$ . Los coeficientes de viscosidad  $\mu$  y  $\lambda$ , pueden depender de la posición espacial por lo que no se extraen de las derivadas.

En las condiciones más frecuentes el fluido puede considerarse incompresible y la viscosidad dinámica constante, por lo que utilizando la ecuación de continuidad (0.4), la ecuación anterior se escribe como,

$$\rho \left( \frac{\partial u_m}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_m} + \mu \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_r \partial x_r} + \rho g_m \quad (0.19)$$

Si los esfuerzos viscosos son muy pequeños la ecuación anterior se convierte

$$\rho \left( \frac{\partial u_m}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_m} + \rho g_m \quad (0.20)$$

que se conoce como *ecuación de Euler*.

A continuación se introducen las *ecuaciones de Navier-Stokes para flujo turbulento*, como fueron escritas por Osborne Reynolds en 1895[71]. Reynolds expresó los valores instantáneos de presión y velocidad, como la suma de sus respectivos, promedio temporal y su fluctuación, así,

$$\begin{aligned} u_j &= \bar{u}_j + u'_j \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (0.21)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la Ec.(0.19), en lugar de los valores instantáneos respectivos, promediando en un intervalo de tiempo cada término y aplicando las reglas de



operación de promedios temporales [84], se obtiene, después de su simplificación,

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial t} + \bar{u}_l \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_m} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} - \overline{\rho u'_m u'_l} \right) + \rho g_m \quad (0.22)$$

Estas ecuaciones tienen el mismo aspecto que las ecuaciones para flujo laminar (0.19), excepto por el significado de las variables dependientes y por la aparición de los promedios temporales de los productos de fluctuaciones. Debe notarse que los productos  $\overline{\rho u'_m u'_l}$  tienen las mismas unidades que los esfuerzos  $\mu \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l}$ , y al igual que éstos pueden interpretarse como flujo de cantidad de movimiento en la dirección  $m$ , transferida, por unidad de tiempo, a través de un plano con normal en la dirección  $l$ . Por lo que se llaman "esfuerzos viscosos aparentes" o "esfuerzos de Reynolds". En virtud de que las fluctuaciones están asociadas con la inercia del fluido, también lo están los esfuerzos de Reynolds. Como se observa por los dos subíndices diferentes de este término, representa un tensor de segundo orden, de esfuerzos de flujo turbulento.

## 0.6 Ecuación de la energía térmica

El principio de conservación de la energía se expresa mediante la *ecuación de la energía térmica*, puede escribirse como [4]:

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_l \frac{\partial T}{\partial x_l} \right) - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_l} \right) + \tau_{lm} s_{lm}^c \quad (0.23)$$

En esta ecuación los dos primeros términos del lado izquierdo, representan el cambio local y el transporte convectivo de energía interna respectivamente, el tercero representa la conversión reversible de energía mecánica en calor, o los cambios reversibles de presión y temperatura asociados a deformaciones volumétricas, también llamado *acoplamiento termomecánico*. El primer término del lado derecho expresa el flujo neto de calor por conducción y  $k$  es el coeficiente de conductividad térmica. El segundo término representa la conversión irreversible de energía mecánica en calor, asociada con deformaciones viscosas y plásticas, por lo que recibe el nombre de *función de disipación*,  $\Phi_v$ . En este último término  $\tau_{lm}$  es el tensor de esfuerzos viscosos y  $s_{lm}^c$  el tensor de rapidez de deformación cortante pura (no isotrópicos), que se introdujeron en las Ec.(0.13) y (0.14). Cuando se sustituye la relación constitutiva para fluidos newtonianos

dada en la Ec.(0.17), resulta,

$$\tau_{lm} s_{lm}^c = \Phi_v = 2\mu s_{lm}^c s_{lm}^c \quad (0.24)$$

que para el caso de fluidos newtonianos en flujo laminar, se expresa utilizando la Ec.(0.14) como sigue,

$$\Phi_v = 2\mu \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \delta_{lm} \right\}^2 \quad (0.25)$$

La Ec.(0.23) puede escribirse entonces incluyendo la función de disipación:

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_l \frac{\partial T}{\partial x_l} \right) - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_l} \right) + \Phi_v \quad (0.26)$$

La ecuación anterior se escribe en notación vectorial como sigue,

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \tau \cdot \cdot \tilde{s}^c \quad (0.27)$$

Si el fluido o el flujo se considera incompresible, la Ec.(0.26) y la función de disipación (0.25) se simplifican eliminándose en ambos casos los términos que representan cambios de volumen  $\frac{\partial u_l}{\partial x_l}$ .

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_l \frac{\partial T}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_l} \right) + \Phi_v \quad (0.28)$$

Siguiendo un procedimiento similar al que se sigue para obtener las ecuaciones de movimiento (0.22), se puede escribir la ecuación de la energía para flujo turbulento. Sin embargo en el análisis de cojinetes con flujo turbulento se evita implícitamente su uso, al suponer una viscosidad uniforme en el fluido.

## 0.7 Análisis de órdenes de magnitud

Para obtener las ecuaciones de lubricación de Reynolds para un flujo incompresible, estacionario, como el que se presenta con mayor frecuencia en cojinetes cilíndricos con lubricante líquido, se lleva a cabo un análisis de órdenes de magnitud para cada término de las ecuaciones de continuidad y movimiento, Ec.(0.4) y (0.19), considerando un espesor pequeño de la película lubricante, comparado con otras dimensiones del cojinete en dirección axial y circunferencial. El análisis de ordenes de magnitud justifica la simplificación de las ecuaciones generales.

Se llamará  $u, v$ , y  $w$  a las componentes del vector velocidad y,  $x, y$ , y  $z$  a las coordenadas, correspondientes a las direcciones tangencial, radial y axial. Se adimensionaliza las componentes tangencial y axial de la velocidad ( $u, w$ ), usando una velocidad de referencia  $U$ , y las coordenadas en las mismas direcciones ( $x, z$ ) con una longitud de referencia  $\mathcal{L}$ , seleccionadas de manera que el gradiente de velocidad adimensional  $\frac{\partial u}{\partial x}$  no exceda la unidad, para adimensionalizar las distancias en dirección radial ( $y$ ) se usa como longitud de referencia el espesor de la película  $h$ .

Reteniendo los mismos nombres para las variables adimensionalizadas, la ecuación de continuidad (0.4), se escribe,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (0.29)$$

ecuación que toma la misma forma para flujo laminar y para flujo turbulento, excepto que en el segundo caso las componentes de velocidad ( $u, v, w$ ), representan los valores promedio.

Ya que  $w \sim U$ , y  $z \sim \mathcal{L}$  en la ecuación anterior, el orden de magnitud del tercer término es también la unidad como se muestra a continuación,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u}{\mathcal{L}} \sim \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{w}{\mathcal{L}} \sim \frac{1}{1} = 1 \quad (0.30)$$

Como las superficies del cojinete y la flecha se mantienen casi paralelas, la componente de velocidad en la dirección radial es mucho menor a las otras dos componentes ( $v \ll U$ ), y el espesor de la película mucho menor a la longitud de referencia  $\mathcal{L}$  ( $y \leq h \ll \mathcal{L}$ ), por lo que si el segundo término es del mismo orden de magnitud que los otros dos

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim 1 \sim \frac{v}{\mathcal{L}} \sim \frac{v}{h}$$

la componente de velocidad en la dirección radial, debe tener un orden de magnitud  $h$ ,

$$v \sim h \quad (0.31)$$

Entonces los órdenes de magnitud de los términos de inercia en las ecuaciones de movimiento (0.19) pueden expresarse como sigue:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} &\sim \frac{U^2}{\mathcal{L}}, & v \frac{\partial u}{\partial y} &\sim h \frac{U}{h} = U, & w \frac{\partial u}{\partial z} &\sim \frac{U(\mathcal{L}h)U}{\mathcal{L}h} = \frac{U^2}{\mathcal{L}} \\
u \frac{\partial v}{\partial x} &\sim \frac{Uh}{\mathcal{L}}, & v \frac{\partial v}{\partial y} &\sim \frac{h^2}{h} = h, & w \frac{\partial v}{\partial z} &\sim \frac{Uh}{\mathcal{L}} \\
u \frac{\partial w}{\partial x} &\sim \frac{U^2}{\mathcal{L}}, & v \frac{\partial w}{\partial y} &\sim \frac{hU}{h} = U, & w \frac{\partial w}{\partial z} &\sim \frac{U^2}{\mathcal{L}}
\end{aligned} \tag{0.32}$$

Se observa que los términos de magnitud mayor son del orden de  $\frac{U^2}{\mathcal{L}}$ .

De igual manera, los órdenes de magnitud de los términos que representan las fuerzas de fricción o fuerzas viscosas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\sim \frac{U}{\mathcal{L}^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\sim \frac{U}{h^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &\sim \frac{U}{\mathcal{L}^2} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &\sim \frac{h}{\mathcal{L}^2}, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &\sim \frac{h}{h^2} = \frac{1}{h}, & \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &\sim \frac{h}{\mathcal{L}^2} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &\sim \frac{U}{\mathcal{L}^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &\sim \frac{U}{h^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &\sim \frac{U}{\mathcal{L}^2}
\end{aligned} \tag{0.33}$$

Los términos mayores son del orden de  $\frac{U}{h^2}$ .

Por lo anterior la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas, de mayor orden de magnitud, puede representarse como:

$$\frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}} \sim \frac{\rho \frac{U^2}{\mathcal{L}}}{\mu \frac{U}{h^2}} = \frac{\rho U h}{\mu} \frac{h}{\mathcal{L}} = \text{Re} \left( \frac{h}{\mathcal{L}} \right) \tag{0.34}$$

con lo que se obtiene un parámetro adimensional que permite decidir si en un caso particular se permite la eliminación de los términos de inercia frente a los viscosos; es decir si el número de Reynolds reducido por el factor  $\left(\frac{h}{\mathcal{L}}\right)$ , es mucho menor que la unidad, se justifica que en las ecuaciones de movimiento, se descarten los términos que representan las fuerzas de inercia.

$$\text{Re} \left( \frac{h}{\mathcal{L}} \right) \ll 1 \tag{0.35}$$

{Por ejemplo un cojinete hidrodinámico, operando a 1000 rpm, con un radio de flecha de 0.25 m, ( $U = 26.2 \frac{m}{s}$ ), un claro radial  $C = 0.0005$  m, lubricante con viscosidad cinemática

$\nu = 5 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$  ( $\mu = 4.25 \times 10^{-2} Pa \cdot s$ , SAE30 @ 50 C); con  $\mathcal{L} = 2\pi R$ , resulta en un número de Reynolds reducido =  $\frac{\rho UC}{\mu} \frac{C}{\mathcal{L}} = 0.08$ ).

## 0.8 Criterio de transición

La transición de flujo laminar a flujo turbulento, está caracterizada por la aparición de inestabilidades, que se amplifican sucesivamente si el flujo lleva suficiente velocidad. En el caso de flujo debido al giro relativo entre cilindros concéntricos, las inestabilidades adquieren formas bien definidas, a las que se llama *vórtices o inestabilidades de Taylor*. Este fenómeno fue presentado por primera vez en el artículo clásico de G. I. Taylor en 1922 [95], que analiza la estabilidad y predice la formación de estructuras regulares con forma de vórtices en el fluido, y a mayores velocidades relativas entre los cilindros el inicio de la turbulencia, producida por esfuerzos constantes. Investigaciones posteriores [54] [27], han mostrado que también se presentan patrones de flujo parecidos cuando los cilindros son excéntricos, lo que tiene interés en el estudio de cojinetes, en particular como criterio de transición entre los dos tipos de flujo principales.

Taylor demostró que en el caso de cilindros concéntricos, el parámetro adimensional que determina la transición esta dado por,

$$Ta = \frac{UC}{\nu} \sqrt{\frac{C}{r_j}} \quad (0.36)$$

donde  $C$  es el claro radial concéntrico,  $r_j$  el radio del cilindro interior,  $U$  la velocidad tangencial del cilindro interior y  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido. Este grupo adimensional recibe el nombre de número de Taylor. Taylor encontró que la aparición de inestabilidades en forma de vórtices toroidales, se presenta inicialmente cuando  $Ta = 41.2$ , lo que permite definir una *primera transición* entre flujo totalmente laminar y flujo con vórtices de Taylor, existiendo una *segunda transición* entre este tipo de flujo y flujo totalmente turbulento.

Lo anterior fue establecido para cilindros concéntricos y se modifica cuando se trata de cilindros excéntricos como en el caso de cojinetes.

De acuerdo con Frene [27], el número de Taylor que define la *primera transición* se establece dependiendo de la excentricidad como sigue:

si la excentricidad está en el rango de  $0 \leq e \leq 0.4$ , entonces

$$Ta = 36$$

y si se encuentra en el rango de  $0.4 \leq e \leq 0.9$ , entonces

$$Ta = 60$$

La *segunda transición* se determina de manera aproximada como el doble del número de Taylor para la primera transición, o sea  $Ta \simeq 120$  [17]. Se usa entonces un rango aproximado de *transición a flujo turbulento* de,

$$100 < Ta < 150 \tag{0.37}$$

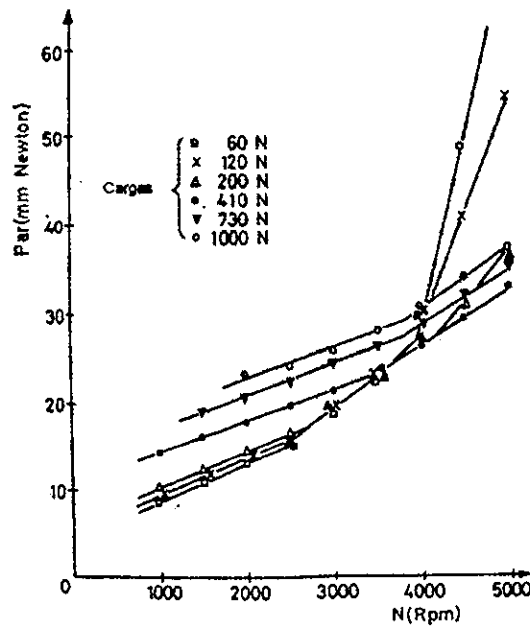


Figura 0-1: Par vs. velocidad angular, cojinete hidrodinámico, de acuerdo con Ref.[28]

Como puede observarse en la Fig.(0-1) de la referencia [27], los efectos que produce la turbulencia en los cojinetes, se manifiestan principalmente en un aumento en el par necesario

para hacer girar la flecha, aún en la primera transición. Para el caso ilustrado en la figura la primera transición se presenta a velocidades angulares de más de 2500 rpm, pero esta velocidad se incrementa hasta más de 4000 rpm cuando aumenta la carga sobre el cojinete y por lo tanto su excentricidad. Esto coincide con este criterio mencionado.

Sin embargo, como criterio de transición a flujo turbulento también se usa el número de Reynolds basado en el claro radial y la velocidad periférica de la flecha  $Re = \frac{UC}{\nu}$  con valores entre,

$$1000 < Re < 2000 \tag{0.38}$$

ver Fig.(0-2). Sin embargo, este criterio no toma en consideración efectos de curvatura, que si están incluidos en el número de Taylor. Por lo que el primer criterio describe el fenómeno de manera más cercana y frecuentemente se prefiere sobre el segundo.

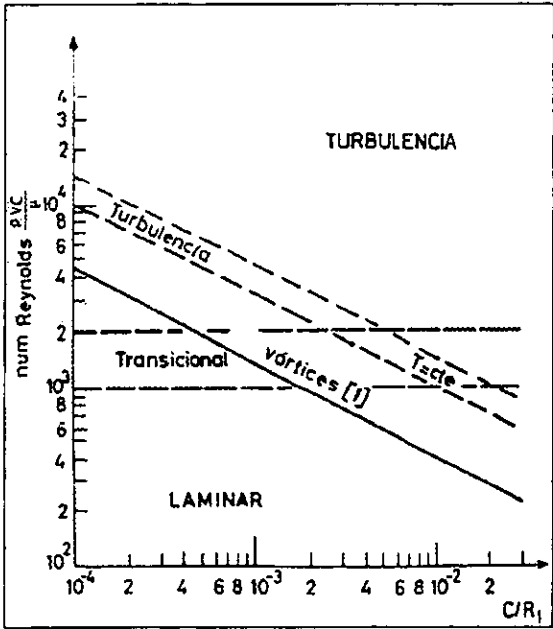


Figura 0-2: Criterio de transición, Reynolds vs. claro radial, de acuerdo con Ref.[27]

En cojinetes con flujo de lubricante controlado en mayor medida por *gradientes de presión*, como es el caso de *cojinetes hidrostáticos*, se usa más el criterio del número de Reynolds basado en el claro radial mínimo y la velocidad promedio del flujo local  $Re_p = \frac{\bar{u}h_{min}}{\nu}$  , con un rango

aproximado de [27],

$$500 < Re_p < 1000 \quad (0.39)$$

Como ejemplo un cojinete hidrodinámico, operando a 3600 rpm, con un radio de flecha de 0.25 m, ( $U = 94.2 \frac{m}{s}$ ), un claro radial de  $C = 0.0005 \text{ m}$ , operando con un  $\varepsilon = 0.8$  de excentricidad relativa, lubricante con viscosidad  $\nu = 5 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$  ( $4.25 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot s$ , SAE30@50°C); implica un número de Taylor  $Ta = 40$ , mientras que para la primera transición  $Ta = 60$ , por lo que se tendrá flujo laminar sin vórtices de Taylor. Por otro lado se tiene  $Re = \frac{UC}{\nu} = 942 < 1000 \ll 2000$  por lo que la conclusión es la misma.



# Bibliografía

- [1] Abramowitz M., "On backflow of a viscous fluid in a divergent channel", Jour. Math. Phys. 28, 1-21, (1949)
- [2] Ayres F., "Plane and Spherical Trigonometry", Schaum Publishing Co., New York, 1954.
- [3] Alaire P.,
- [4] Arpaci V. S., Larsen P. S., "Convection Heat Transfer", Prentice-Hall Inc. New Jersey, 1984.
- [5] Ashley Steven, "Building a better bearing", Mechanical Engineering , ASME, May 1996. pp. 56-60.
- [6] Bakke E., Kreider J.F., Kreith F., "Turbulent source flow between parallel stationary and co-rotating disks", J. Fluid Mech. (1973), vol. 58, part 2, pp. 209-231, Great Britain.
- [7] Bassani R., Piccigallo B., "The Dynamic Performance of the Self-Regulated Hydrostatic Opposed-Pad Bearing", NATO, Advisory Group for Aerospace Research and Development, AGARD Conference Proceedings No. 323, pp. 21-1, 21-12, Ottawa, Canada, 1982.
- [8] Bech K.H., Andersson H.I., "Secondary flow in weakly rotating turbulent plane Couette flow", J. Fluid Mech. (1996), vol. 317, pp. 195-214, Great Britain.
- [9] Bejan19B.J.
- [10] Bou-Said
- [11] Boyd J., Raimondi A. A., "Applying Bearing Theory to the Analysis and Design of Journal Bearings", Parts I and II, J. Appl. Mechanics, Vol. 73, 1951, pp 298-316.

- [12] Buckholz R. H. , Lin J. F., "The Effect of Journal Bearing Misalignment on Load and Cavitation for Non-Newtonian Lubricants", Trans. ASME, Journal of Tribology, Vol. 108, p 645, Oct. 1986.
- [13] Cameron, A. "Basic Lubrication Theory", 3a. Ed., Ellis Horwood Ltd., 1976.
- [14] Chavoya O., comunicación personal 1993.
- [15] Choy F.K., Braun M.J., Hu Y., "Nonlinear Transient and Frequency Response Analysis of a Hydrodynamic Journal Bearing", Trans. ASME, Journal of Tribology, Vol. 114, p 448, Jul. 1992.
- [16] Christopherson D. G., "Boundary conditions in lubricating films", The Engineer, Vol. 203, 1957, pp 100.
- [17] Constantinescu V. N., "Analysis of Bearings Operating in Turbulent Regime", Trans. ASME Journal of Basic Engineering, Ser. D, Vol. 81, No. 1 (1962), pp 139-151.
- [18] Constantinescu V. N., "Basic Relationships in Turbulent Lubrication and Their Extension to Include Thermal Effects", Trans. ASME Journal of Lubrication Technology, Paper No.72-Lub-16, April 1973, pp 147-154.
- [19] Currie, I.G., "Fundamental Mechanics of Fluids", McGraw-Hill Book Co., New York, 1974.
- [20] Dowson D., "A Generalized Reynolds Equation for Fluid-Film Lubrication", Int. J. Mech. Sci., Vol. 4 (1962).
- [21] Dowson D., Blount G. N., Ashton J. N., "Optimization methods applied to hydrodynamic bearing design", Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, 1977, pp 1005-1027.
- [22] Dowson D. , Taylor C. M., Ann. Rev. Fluid Mech. 11, 35-66, 1979. (Cavitation in a Journal Bearing, Sherman F., p. 244).,
- [23] Dubois, Mabie, Ocvirk (Siew and Reason)

- [24] Elrod H.G., Ng C.W., Trans. ASME, Ser. F, Vol. 89, No. 3, (1967), 346.
- [25] Flöberg
- [26] Faux I.D., Pratt M.J., "Computational Geometry for Design and Manufacture", Ellis Horwood Ltd. Publishers, England, 1987.
- [27] Frene J., Godet M., "Flow Transition Criteria in a Journal Bearing", Trans ASME, Journal of Lubrication Technology, (Paper 73-LubS-13, 1972), Jan. 1974.
- [28] Frene J., Godet M., "Performance of Plain Journal Bearings Operating Under Vortex Flow Conditions", Trans ASME, Journal of Lubrication Technology, (Paper 73-LubS-9, 1973), Jan. 1974.
- [29] Fuller
- [30] Glienicke J., Proc. IME, 181-3B (1966-67), 116.
- [31] Hausenblas H. "Die nicht isotherme Strömung einer zhen Flüssigkeit durch enge Spalte und Kapillarrhren." Ing.-Arch. 18, 151-166 (1950). (Temperature distribution in Poiseuille Flow with temp. depend. viscosity, Schlichting p.277)
- [32] Hamel G., "Spiralfrömige Bewegung zher Flüssigkeiten. Jahresber". d. Dt. Mathematiker-Verinigung 25, 34-60 (1916). (Flow in convergent and divergent channels, Schlichting p.99)
- [33] Hashimoto H., Wada S., "Theoretical Approach to Turbulent Lubrication Problems Including Surface Roughness Effects", Trans ASME, Journal of Tribology, Vol. 111, p 17, 22, Jan. 1989.
- [34] Hirs G. G., "A Bulk-Flow Theory for Turbulence in Lubricant Films", Paper 72-Lub12, ASME-ASLE Conference, New York, Oct. 1972. También en Trans ASME, Journal of Lubrication Technology, pp. 137-146, April, 1973.
- [35] Hsiao C. Kao, "A Numerical Method and Higher Approximations for Self-Acting, Gas-Lubricated Bearing of Finite Length", Trans ASME, Journal of Lubrication Technology, Paper 70-Lub-23, 1970.

- [36] Hinze J.O., "Turbulence", 2nd. ed., McGraw-Hill Book Co. New York, 1975.
- [37] Jeffreys Harold, "Cartesian Tensors", Cambridge University Press, 7th. reprint, Great Britain 1974.
- [38] Kicinski J., "Einfluß des Luftblasengehalts im Schmierl auf die statischen und dynamischen Gleitlager-Kennwerte", Konstruktion, Vol. 34, (1982), pp.479-483, Springer Verlag 1982.
- [39] Kicinski Jan, "Influence of the flow prehistory in the cavitation zone on the dynamic characteristics of slide bearings, Wear, Vol. 111, (1986), pp.289-311, Elsevier Sequoia, Print. The Netherlands.
- [40] Kicinski Jan, "New method of description of dynamic properties of slider bearings", Wear, Vol. 132, (1989), pp.205-220, Elsevier Sequoia, The Netherlands.
- [41] Kicinski J., Popowicz Z. "The influence of thermoelastic deformations of bearings bush and its external fixings on static and dynamic properties of journal bearings", Eurotrib89, Helsinki.
- [42] Kurtin A. K., Childs D., San Andres L., Hale K., "Experimental Versus Theoretical Characteristics of a High-Speed Hybrid (Combination Hydrostatic and Hydrodynamic) Bearing", Trans ASME, Journal of Tribology, Vol. 115, Jan. 1993.
- [43] Landau L.D., Lifshitz E. M., "Fluid Mechanics", 2nd. ed., (Course of Theoretical Physics, Vol. 6), Pergamon Books, 1989.
- [44] Landau L.D., Lifshitz E. M., "Theory of Elasticity", 3rd. ed., (Course of Theoretical Physics, Vol. 7), Pergamon Books, 1989.
- [45] Malvern L.E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall, Inc. 1969.
- [46] Martínez-Báez L.F. "Lubricación con efecto hidrostático e hidrodinámico en cojinetes cilíndricos de alta carga", Mem. XVII Cong., Academia Nacional de Ingeniería, 1991.

- [47] Martínez-Báez L.F., Arias R., Merino T.A., "Design of hidrostatic cylindrical bearings for constant load capacity under variable misalignment", II Conferencia Latinoamericana de Turbomáquinas, México, feb.1993.
- [48] Martínez-Báez, L.F. "Parámetros Geometricos y Físicos en Cojinetes Cilíndricos con Desalineamiento", en preparación, DEPMI-UNAM, 1998.
- [49] Mase, Mase, "Continuum Mechanics for Engineers", ed. CRC, Florida 1991.
- [50] McLean L.J., Hahn E.J., "Unbalance Behavior of Squeeze Film Damped Multi-Mass Flexible Rotor Bearing Systems, Trans. ASME; Journal of Lubrication Technology, Vol.105, pp. 22-28, Jan. 1983.
- [51] Meriam, J.L., "Dynamics", ed. John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [52] Mitchel J.R., Holmes R., Ballengooyen H.V., Proc. IME, 180-3K (1965-66), 90. (Someya p.248, exp. meth.)
- [53] Millsaps K., Pohlhausen, "Thermal distribution in Jeffery-Hamel flows between non-parallel plane walls", JAS 20, 187-196 (1953). (Schlichting p. 278).
- [54] Mobbs F.R., Younes M.A.M.A., "The Taylor vortex regime in the flow between eccentric rotating cylinders", Trans ASME, Journal of Lubrication Technology, pp. 127-134, January, 1974.
- [55] Mochizuki S., Yang Wen-Jei, "Self sustained radial oscillating flows between parallel disks", J. Fluid Mech.,(1985), vol. 154, pp. 377-397, Great Britain.
- [56] Morton P.G., "Measurement of the Dynamic Characteristics of a Large Sleeve Bearing", J. Lub. Technol. Trans. ASME, Ser. F, 93-1, (1971), pp 143-150. (Someya, p.248 exp. meth.)
- [57] Mukherjee, A., "Effect of Biphase Lubricants on Dynamics of Rigid Rotors", Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology, Vol 105, pp.29 38, Jan. 1983.
- [58] Ng C. W., Pan C.H.T., Trans. ASME, Ser. D, Vol. 87, No. 1 (1965), 675. (Someya p 240)

- [59] Ocvirk F.W., NACA TN 2808, (1952)
- [60] Panton R. L., "Incompressible Flow" (Sec. 21.8-21.15), John Wiley & Sons, U. S. A., 1984.
- [61] Petrov N.P., "Friction in Machines and The Effect of the Lubricant", Inzhenernii Zhurnal, St Petersburg, 1883.
- [62] Pinkus O., Sternlicht B., "Theory of Hydrodynamic Lubrication", McGraw-Hill Book Company, Inc., U. S. A., 1961.
- [63] Popowicz Z., "Charakterystyki Dynamiczne Wahliwego Segmentu Poprzecznego Lozyska Slizgowego", Instytut Maszyn Przeplywowych Pan, ISSN 0239-9091, Gdansk, Poland.
- [64] Popowicz Z., Rybczynski J., "Teoretyczne charakterystyki hydrodynamicznego lozyska wzdluznego o elastycznym pierscieniu slizgowym", Instytut Maszyn Przeplywowych Pan, Zagadnienia Eksploatacji Maszyn, Zeszyt 3-4 (63-64) 1985, Gdansk, Poland.
- [65] Popowicz Z., "Wspiczynniki sztywnosci i tlumienia filmu olejowego lozyska wzdluznego z whaliwymi segmentami", Instytut Maszyn Przeplywowych Pan, Zagadnienia Eksploatacji Maszyn, Zeszyt 4 (76) 1988, Gdansk, Poland.
- [66] Protter M.H., Morrey C.B. Jr., "Modern Mathematical Analysis", Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964.
- [67] Qiu Z.L., Tieu A.K., "Misalignment Effect on the Static and Dynamic Characteristics of Hydrodynamic Journal Bearings", J. of Tribology, Trans ASME, Vol. 117, pp 717-723, Oct. 1995.
- [68] Raimondi A. A., Boyd J., "A solution for the finite journal bearing and its application to analysis and design: I, II, III", Trans ASLE., Vol. 1, 1958, pp 159-209.
- [69] Reason B. R., Siew A. H., "A numerical Solution for the design and performance evaluation of journal bearings with misalignment", Inst. Mech. Engrs., 1982, C9/82, pp 77-85.

- [70] Reynolds O., "On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of viscosity of olive oil", Phil. Trans. Roy. Soc., London, Vol. 177, Pt. I, 1886, pp 157-234.
- [71] Reynolds, O., "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion", Phil. Trans. Roy. Soc. 186, A 123-164(1895).
- [72] Rippel Harry C. "Design of Hydrostatic Bearings" Parts 1 to 10, Machine Design, U. S. A. , Aug.-Dec. 1963.
- [73] Rippel H. C., "Designing fluid-film bearings by computer", Mechanical Engineering, June 1970, pp 30-41.
- [74] Rodríguez Fernández M., "Efecto del borde axial en la lubricación de un cojinete corto parcial", Depto. de Mecánica de Fluidos, E.T.S. Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid, 1984.
- [75] Rohde S. M. editor , Dowson D., Saibel E., Fuller D. D. contributors, "Fluid Film Lubrication: A Century of Progress", The American Society of Mechanical Engineers, U. S. A., 1983.
- [76] Rohde S. M. "Bounds on the solution of Reynolds Equation", Trans. ASME, J. Lub. Tech., Jan. 1973, pp 102-104.
- [77] Rohsenow W.M, Choi H., "Heat, Mass and Momentum Transfer", Prentice Hall Inc., United States of America , 1961
- [78] Rowe W. B., "Hydrostatic and hibrid bearing design", London-Boston:Butterworths, 1983.
- [79] Rybczynski J. "Koncepcja wiskozymetru cisnieniowego de badania oleju zawierajacego powietrze nierozpuszczone" (Concept of pressure viscometer for testing oil containing undissolved air), Trybologia, 4-5 1987, pp 29-31.
- [80] Safar Z., Szeri A. Z., "Thermohydrodynamic Lubrication in Laminar and Turbulent Regimes", Trans ASME, Journal of Lubrication Technology, pp. 48-57, January, 1974.

- [81] San Andrés L., "The effect of Journal Misalignment on the Operation of a Turbulent Flow Hydrostatic Bearing", Trans. ASME, Journal of Tribology, Vol. 115, pp 355-363, Jul.1993.
- [82] San Andrés L., "Approximate Analysis of Turbulent Hybrid Bearings. Static and Dynamic Performance for Centered Operation", Trans. ASME, Journal of Tribology, Vol. 112, pp.692-698, Oct. 1990.
- [83] San Andrés L., "Turbulent Hybrid Bearings With Fluid Inertia Effects", Trans. ASME, Journal of Tribology, Vol. 112, pp.699-707, Oct. 1990..
- [84] Schlichting H., "Boundary Layer Theory", translated by J. Kestin, McGraw Hill Book Co., 6th. ed., New York, 1968.
- [85] Seirez A. , Ezzat H., "Optimum design of hydrodynamic journal bearings", Trans. ASME, J. Lub. Tech., July 1969, pp 516-523.
- [86] Shanley F. R., "mecánica de Materiales", ed. McGraw-Hill, México, 1971.
- [87] Sherman F. S., "Viscous Flow", McGraw Hill Book Co. , New York 1990.
- [88] Siew A. H., Reason B. R. "The Computer Aided Design Entity (C.A.D.E.), a new approach to journal bearing design", North Atlantic Treaty Organization, Advisory Group for Aerospace Research and Development, AGARD Conference Proceedings No. 323, pp. 13-1, 13-14, Ottawa, Canada, 1982.
- [89] Singh S., Sinhasan R., Ghai R. C., "Static and Dynamic Analysis of Capillary Compensated Hydrostatic Journal Bearings by Finite Element Method", Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology, pp.478-484, Oct. 1977.
- [90] Singh S., "Conversational techniques in computer-aided bearing design", 1949, NEL Report 429, pp 12-22.
- [91] Smith E.S., Salkover M., Justice H.K., "Analytic Geometry", John Wiley & Sons, Inc. New York, 1943.



- [92] Smith G.D., "Numerical Solution of Partial Differential Equations", Oxford University Press, 1969.
- [93] Someya T., editor, "Journal Bearing Databook", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Germany, 1989.
- [94] Sommerfeld, A., *Zeit. angew Math. u Physik*, (1904) 50, 97-155.
- [95] Taylor G. I., "Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders", *Phil. Trans A* 223, 289-293 (1923); see also: *Proc. Roy. Soc. A* 151, 494-512 (1935) and 157, 546-523 and 565 (1936).
- [96] Taylor C. M., "A survey of computerized bearing design programmes", *Tribology*, May 1971, pp 87-93
- [97] Tower Beauchamp, "First Report on Friction Experiments", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, (England) Nov. 1883, pp632-659.
- [98] Vance John M., "Rotordynamics of Turbomachinery" John Wiley and Sons, 1988, USA
- [99] Vijayaraghavan D., Keith Jr. T.G., "Analysis of a Finite Grooved Misaligned Journal Bearing Considering Cavitation and Starvation Effects", *Trans. ASME Journal of Tribology*, Vol. 112, pp 60-67, Jan.1990.
- [100] Woodcock J.S., Holmes R., *Proc. IME*, 184-3L (1969-70), 111. (Someya p.248, exp. meth.)
- [101] White, F., "Viscous Fluid Flow"
- [102] Yu H., Adams M.L., "The linear model for rotor-dynamic properties of journal bearings and seals with combined radial and misalignment motions", *Journal of Sound and Vibration*, (1989), Vol. 131(3), pp 367-378.
- [103] Zhang Y. "On the Combined Hydrodynamic and Hydrostatic Journal Bearing", *Transactions of Machine Elements Division*, Lund Technical University, Lund, Sweden, 1988.