



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

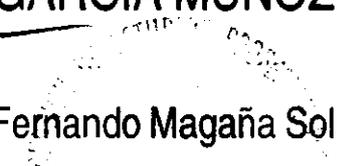
*Cálculo de la variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor, para un material fotorrefractivo (BSO)*

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
F I S I C O  
P R E S E N T A

ERIC ALAN GARCIA MUÑOZ

Director: Dr. Luis Fernando Magaña Solís

TESIS CON 1998  
FALLA DE ORIGEN



1998-10-14



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: Cálculo de la variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor, para un material fotorrefractivo. (BSO).

realizado por Eric Alan García Muñoz

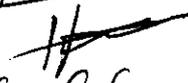
con número de cuenta 8907782-1 , pasante de la carrera de Física

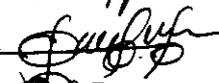
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

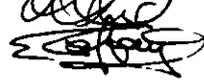
Director de Tesis

Propietario DR. LUIS FERNANDO MAGAÑA SOLIS 

Propietario DR. HECTOR OCTAVIO MURRIETA SANCHEZ 

Propietario M. EN C. AUGUSTO CABRERA MANUEL 

Suplente DRA. ALICIA OLIVER GUTIERREZ 

Suplente DR. ENRIQUE GEFFROY AGUILAR 

Consejo Departamental de Física  
DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

  
  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Do, or do not. There is no try...  
Master Yoda, ESB.

A mi mamá, quien ha entregado su vida y su cariño para formarme como ser humano.  
A mi papá, quien siempre me ha apoyado para seguir adelante.  
A mi hermanita Ayra de quien siempre he podido contar con su apoyo.  
A mi hermano Edwin, que no sólo ha sido para mi un ejemplo de tenacidad y coraje, sino un soporte, un amigo, una inspiración...un verdadero hermano. "We are like a couple of shootig stars that can never be stopped".  
A Gabriela, quien, gracias a un acierto del destino, ha llenado mi vida.

Es muy difícil otorgar crédito a todas y cada una de las personas (o grupos de ellas) que, durante el transcurso de mi carrera, intervinieron para que ahora yo escriba estas líneas. El enumerarlas, me costaría una cantidad de hojas comparable a las del presente trabajo. Puedo mencionar, por ejemplo, a los profesores que intentaron cada semestre compartir conmigo lo que saben (o no saben). A cada uno de ellos, bueno o malo, agradezco su intención, porque no sólo me mostraron su visión de la física, sino me abrieron la posibilidad de crear mi propia visión de ella.

Debo, sin embargo, mencionar a un grupo de personas que definitivamente (y con gran fortuna) fueron decisivos para mi durante los 5 años anteriores:

Al Dr. Fernando Magaña no sólo debo agradecerle por ser director de esta tesis y mi profesor (de los que sí saben) en la carrera; sino también por el gusto y las ganas que me contagia con su visión al hacer las cosas, por la buena voluntad que muestra cada vez que necesito de su consejo y, sobre todo, por la amistad que desde un principio me brindo.

A Gerardo Vázquez, Gregorio Ruiz y M<sup>4</sup> (Magda) quienes me han brindado su apoyo, consejo, conocimiento y amistad. Mención especial merece la doctora Isabel Casar quien desde un principio ha estado pendiente de mi trabajo, animándome siempre con palabras de aliento.

Agradezco a los doctores Héctor Murrieta, Alicia Oliver y Augusto Cabrera por haber revisado éste trabajo y aportado sus opiniones que han contribuido a mejorarlo. Debo mencionar por separado al doctor Enrique Geffroy porque mucho antes de tener tema de tesis, y por los vínculos que lo unen a mi hermano, se convirtió en algo así como mi "guía espiritual" y sus sugerencias siempre han sido de gran utilidad, como las dadas al leer este trabajo.

A todos los compañeros y agradezco también, porque juntos aprendimos no sólo física, matemáticas, fotografía, literatura y un poco de filosofía, sino también aprendimos a vivir. Si no menciono el nombre de todos se debe a la brevedad que intento imprimir en esta sección. Vale la pena destacar a Edgar Vázquez, Likin Simón, Elsa Puente, Felipe y Marianne, Mito, Adriana Tejeda, Omar Lugo, César Maldonado, Igor Peña, Fanny Jasso, Ivette Fuentes, Pablo Barberis y Eric Nagel. Si olvidé mencionar a alguien, por favor reclámenme.

Debo agradecer a Gabicho por apoyarme en todo momento y ayudarme a corregir la redacción de una innumerable cantidad párrafos de ésta tesis. No sólo eso, también por el "con respecto" del título.

Por último, y sin que esto lo demerite, agradezco al IFUNAM por otorgarme un espacio de estudio, y por las facilidades que encontré para utilizar sus instalaciones. Agradezco, también, a la Fundación UNAM y a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico, por el apoyo económico que recibí durante la realización de este trabajo.

**CÁLCULO DE LA VARIACIÓN DE LA EFICIENCIA  
DE DIFRACCIÓN CON RESPECTO AL ESPESOR,  
PARA UN MATERIAL FOTORREFRACTIVO (BSO).**

**ÍNDICE**

<i>ÍNDICE DE FIGURAS</i>	3
<i>RESUMEN</i>	5
1. <i>INTRODUCCIÓN</i>	6
2. <i>MATERIALES FOTORREFRACTIVOS.</i>	
• <i>efecto fotoconductor</i>	9
• <i>efecto electroóptico</i>	10
• <i>efecto fotorrefractivo</i>	14
• <i>ecuaciones de Kukhtarev.</i>	17
3. <i>EFICIENCIA DE DIFRACCIÓN.</i>	
• <i>definición de la eficiencia de difracción.</i>	24
• <i>teoría de ondas acopladas.</i>	27
• <i>Cálculo de la dependencia de la eficiencia de difracción con el campo de cargas espaciales, con la razón de modulación y con el espesor del material.</i>	35
4. <i>RESULTADOS Y CONCLUSIONES.</i>	42
<i>REFERENCIAS</i>	45

## ÍNDICE DE FIGURAS

- Fig. 2.1 Dependencia con la longitud de onda de la absorción de fotones y la fotoconductividad para materiales idiocromáticos y alocromáticos.* 46
- Fig. 2.2 Dependencia ilustrativa de  $r^e$ ,  $r^s$  y  $r^T$  (coeficientes electroópticos) con la frecuencia de modulación  $\Omega$  del campo eléctrico.* 47
- Fig. 2.3 Campo de cargas espaciales bajo iluminación cosenoidal, sin campo eléctrico aplicado ( $E_D \gg E_A$ ) y campo de cargas espaciales con un campo eléctrico aplicado muy grande ( $E_A \gg E_D$ ).* 48
- Fig. 2.4 Comparación entre  $m$  (razón de modulación) y la aproximación lineal de  $2[1-(1-m^2)^{1/2}]/m$ .* 49
- Fig. 3.1 Difracción de Bragg por una malla periódica volumétrica (diagrama esquemático) y diagrama de vectores de onda.* 50
- Fig. 3.2 Modelo de un holograma volumétrico con franjas inclinadas respecto a la superficie.* 51
- Fig. 3.3 Vectores de propagación de las onda de referencia  $R$  y de salida  $S$ . Se muestra también su relación con el vector de la malla  $K$ .* 52
- Fig. 3.4 Diagrama vectorial (conservación de momento) en el ángulo de Bragg y para valores cercanos.* 53
- Fig. 3.5 Propagación de ondas en hologramas de transmisión y de reflexión.* 54
- Fig. 3.6 Elipsoide de índices para KDP, antes y después la aplicación de un campo eléctrico a lo largo del eje óptico.* 55
- Fig. 3.7 División de la muestra para encontrar las soluciones a las ecuaciones que describe la variación de la onda que lee la información del patrón de franjas.* 56
- Fig. 4.1 Variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor para  $m=0.01$  y  $E=2.5kV/cm$ .* 57
- Fig. 4.2 Variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor para  $m=0.3$  y  $E=2.5kV/cm$ .* 58
- Fig. 4.3 Variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor para  $m=0.3, 0.6$  y  $0.9$  y  $E=2.5kV/cm$ .* 59

- Fig. 4.4 Variación del parámetro de acoplamiento con respecto al espesor para  $E=2.5\text{kV/cm}$  y todos los valores de  $m$ .* 60
- Fig. 4.5 Variación de la intensidad del patrón de luz incidente con respecto al espesor para  $E=2.5\text{kV/cm}$  y todos los valores de  $m$ .* 61
- Fig. 4.6 Variación de la intensidad del patrón de luz difractado con respecto al espesor para  $E=2.5\text{ kV/cm}$  y todos los valores de  $m$ .* 62
- Fig. 4.7 Variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor para  $m=0.01$  y  $E=5\text{ kV/cm}$ .* 63
- Fig. 4.8 Variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor para  $m=0.9$  y  $E=5\text{ kV/cm}$ .* 64
- Fig. 4.9 Variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor para  $m=0.3, 0.6$  y  $0.9$  y  $E=5\text{ kV/cm}$ .* 65
- Fig. 4.10 Variación del parámetro de acoplamiento con respecto al espesor para  $E=5\text{ kV/cm}$  y todos los valores de  $m$ .* 66
- Fig. 4.11 Variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor para  $m=0.01$  y  $E=10\text{ kV/cm}$ .* 67
- Fig. 4.12 Variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor para  $m=0.3$  y  $E=10\text{ kV/cm}$ .* 68
- Fig. 4.13 Variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor para  $m=0.6$  y  $E=10\text{ kV/cm}$ .* 69
- Fig. 4.14 Variación de la eficiencia de difracción con respecto al espesor para  $m=0.3, 0.6$  y  $E=10\text{ kV/cm}$ .* 70
- Fig. 4.15 Variación del parámetro de acoplamiento con respecto al espesor para  $E=10\text{ kV/cm}$  y todos los valores de  $m$ .* 71
- Fig. 4.16 Variación de la intensidad del patrón de luz incidente con respecto al espesor para  $E=10\text{ kV/cm}$  y todos los valores de  $m$ .* 72
- Fig. 4.17 Variación de la intensidad del patrón de luz difractado con respecto al espesor para  $E=10\text{ kV/cm}$ .* 73

## RESUMEN

En este trabajo, mediante el uso del cálculo numérico, se consideran las características no-lineales del fenómeno fotorrefractivo para evaluar la eficiencia de difracción (en  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ ), a diferencia del cálculo comúnmente realizado en donde se examinan únicamente las características lineales.

La importancia de este trabajo radica en que se ha obtenido un método para caracterizar materiales fotorrefractivos calculando la variación de la eficiencia de difracción con respecto a su tamaño. Esto nos permite obtener las dimensiones del material para las que resulta máxima su eficiencia.

## 1. INTRODUCCIÓN

Un material fotorrefractivo es aquel que al ser iluminado, cambia su índice de refracción en una magnitud que es dependiente de la intensidad de la luz. Si la luz que se hace incidir es un patrón de interferencia, se genera un patrón de índice de refracción dentro del material que, al alcanzar un estado estacionario, permanece grabado. Este patrón de índice de refracción continua durante varias horas o meses o años, si se mantiene aislado de la luz. Sin embargo, puede ser borrado si se le ilumina uniformemente o se le somete a un tratamiento térmico.

La enorme cantidad de aplicaciones que se derivan de este efecto hace de los materiales fotorrefractivos objetos de estudio de gran interés, además, durante el proceso ocurren otros fenómenos que también pueden ser aprovechados: al leer una malla escrita en el material, la señal de salida se amplifica, por lo que resulta interesante emplear esta propiedad. Para darnos una idea de lo práctico de los materiales fotorrefractivos, es posible almacenar en un  $\text{cm}^3$  alrededor de  $10^{12}$  bits (que es del orden de mil veces lo común en memorias magnéticas), en un arreglo tridimensional.

En 1966 se observó por primera vez el efecto fotorrefractivo en los laboratorios Bell<sup>i</sup> registrándose cambios semipermanentes del índice de refracción de Titanato de Litio. En ese entonces, el fenómeno se consideró como un daño óptico sufrido por el material al ser iluminado con un patrón de interferencia por qué este arruinaba el experimento. A finales de los sesenta, F. S. Chen<sup>ii</sup> y colaboradores se percataron que el daño óptico sufrido por estos materiales, podía ser utilizado para el almacenaje óptico de alta densidad de datos.

En 1969, Chen publicó el primer modelo de migraciones de cargas, exclusivamente para cristales ferroeléctricos. El modelo utiliza polarización espontánea, característica de los ferroeléctricos, junto con el patrón de iluminación generado por las dos ondas que interfieren dentro del medio, para describir la alta calidad de los hologramas volumétricos que se logran en ellos. La excitación de electrones y su acarreo subsecuente debido al campo eléctrico interno del medio, induciría la distribución de carga espacial. A través del efecto electroóptico lineal, este campo produce la malla de índice de refracción con el mismo periodo espacial del patrón de luz original. Iluminando homogéneamente el cristal, los portadores de carga son nuevamente excitados y de este modo su distribución vuelve a ser uniforme, desapareciendo la malla de índice de refracción. Este modelo ha sido la base de los trabajos posteriores en fotorrefractivos durante los 20 años siguientes.

En ese mismo año, 1969, Herwig Kogelnik<sup>iii</sup> publicó un trabajo en el que se desarrolla la teoría del acoplamiento entre ondas dentro de materiales donde es posible el grabado holográfico volumétrico. Partió de los principios físicos obtenidos por Bragg (para la difracción de ondas) y de la ecuación de Helmholtz (que describe la propagación de una onda dentro de un material). En su análisis, toma a las ondas con comportamiento senoidal y obtiene una expresión para la eficiencia de difracción que aproxima a una función periódica. Sus resultados son aún utilizados para calcular las eficiencias de difracción. Nuestro trabajo se basa en esta contribución de Kogelnik.

También en 1969, Thaxter<sup>iv</sup> demostró que la presencia de un campo eléctrico aplicado en un holograma dentro de  $\text{Sr}_2\text{BaNb}_2\text{O}_6$ , está involucrado en el transporte de los portadores, ayudando al “acarreo” de los mismos.

A lo largo de los años que siguieron, se descubrieron nuevos materiales fotorrefractivos entre los que destaca el Titanato de Bario<sup>v</sup> ( $\text{BaTiO}_3$ ) y el  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  (BSO)<sup>vi</sup>. Además, se experimentaron con variaciones en la pureza<sup>vii</sup> de los materiales para lograr optimizar el proceso de grabado y mejorar la resolución de los hologramas.

En 1970, Amodei<sup>viii</sup> mostró que las migraciones de carga por difusión juegan un papel importante para la formación de mallas con franjas espaciadas, no muy separadas entre sí. Obtuvo también expresiones para los patrones del campo eléctrico formado por acarreo y difusión para hologramas generados por ondas planas. A pesar de esto, los mecanismos de acarreo y difusión no acababan por describir la eficiencia de algunos materiales. En 1974 Glass y sus colaboradores<sup>ix</sup> incluyeron el efecto fotovoltaico volumétrico para fundamentar esta anomalía. Este efecto es debido a la asimetría del cristal y causa que los portadores fotoionizados sean excitados hacia la banda de conducción en una dirección preferencial relativa al eje óptico del mismo, incrementando la fotocorriente.

Hasta este entonces, todas las teorías propuestas habían sido lineales y no consideraban el campo fotogenerado por acarreo y difusión. Glass, D. M. Kim, R. R. Shah, T. A. Rabson y F. K. Tittel<sup>x</sup> resolvieron este problema desarrollando una teoría dinámica no lineal que incorpora un mecanismo de retroalimentación entre el campo fotogenerado y la densidad de electrones libres.

En 1977, se dio un paso muy importante en el entendimiento del efecto fotorrefractivo: Hellwarth<sup>xi</sup> sugirió la interferencia degenerada de cuatro ondas para conjugación de fase. Este es un método no-lineal para generar una réplica de cualquier patrón de franjas creado por una señal monocromática.

En 1979 Kukhtarev y su equipo<sup>xii</sup> publicaron el modelo más completo que hasta entonces se había escrito y que aún ahora continúa vigente. Este modelo toma en cuenta los efectos de un campo eléctrico externo aplicado, el efecto fotovoltaico volumétrico y los efectos recursivos del campo de cargas espaciales en la distribución misma de las cargas. El modelo muestra cómo la malla del índice de refracción se graba en el material con la misma frecuencia espacial de las ondas con las que se escribe y, sin campo aplicado, el periodo se desfasa un cuarto de longitud de onda con respecto al campo de interferencia.

En 1980, el grupo de Feinberg<sup>xiii</sup>, trabajando con Titanato de Bario, produjo el primer modelo que no está basado en la aproximación de transporte de bandas: el modelo de “saltos” de cargas. Este modelo de “saltos” involucra la sencilla visión física de cargas saltando de lugar en lugar y la probabilidad del salto está relacionada con la intensidad de la luz aplicada y con el campo eléctrico. Se demostró posteriormente que la descripción dada por Kukhtarev y su equipo incluye a la dada por Feinberg *et al.*

Como se definirá más adelante<sup>1</sup>, la eficiencia de difracción ( $\eta$ ) es una medida de la energía que se intercambia entre el haz de luz que entra al material al leerlo y el haz que sale de éste después de atravesar un patrón de franjas y tras haber pasado por un proceso de acoplamiento<sup>2</sup>.  $\eta$  depende de distintos parámetros, pero en general, depende de las características propias del material<sup>3</sup> y de la forma en que se den las condiciones de escritura<sup>4</sup>. En la medida en que se controlen estos parámetros, más control se tendrá sobre el resultado de la eficiencia aunque existan algunas variables que no puedan ser controladas y que dependan exclusivamente del tipo de muestra que se tome.

Es importante notar que  $\eta$ , al depender del acoplamiento entre los haces, no está restringida a permanecer entre ciertos valores (salvo que sea mayor que cero), porque la energía que le puede ceder el haz que entra al que sale, está limitada sólo por las condiciones iniciales de energía del sistema y por los parámetros que intervienen en el acoplamiento<sup>5</sup>. La variación de  $\eta$  depende de cómo cambien éstas últimas condiciones. El acoplamiento entre los haces varía con la modulación del índice de refracción a lo largo del espesor del material (es decir, con el ancho de material que la luz debe atravesar para pasar de un extremo al otro). Como consecuencia, la eficiencia también es función del espesor de la muestra. La medida del acoplamiento se representa por  $\kappa$ : el parámetro de acoplamiento

El almacenaje y lectura de grandes cantidades de información y la amplificación de señales vía acoplamiento, son las aplicaciones más importantes que se le han dado a los materiales fotorrefractivos. La adecuación de éstas propiedades a cada tipo de utilidad depende de qué tan bien caracterizado se encuentre el material. Esto se logra encontrando el tamaño óptimo y la energía necesaria para obtener la señal de salida que se desee. Aquí es donde la eficiencia de difracción se vuelve importante porque, al depender del espesor de la muestra, es posible conocer el tamaño en el cual el material tiene la amplificación deseada. En general, el valor de la eficiencia el buscado es el máximo, porque en estas condiciones, la amplificación de la señal de salida es máxima.

El presente trabajo tiene como principal objetivo calcular la variación de la eficiencia de difracción dentro de una muestra fotorrefractiva de  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  (BSO), apoyándose en el cálculo numérico para evaluar su variación con respecto al espesor del material y a partir de las ecuaciones que describen el fenómeno, sin usar la aproximación lineal.

El segundo capítulo se dedica a la descripción del efecto fotorrefractivo partiendo de sus manifestaciones físicas y abordando los modelos que lo describen.

En el tercer capítulo, se desarrolla el tema de la eficiencia de difracción, definiéndola a partir de la teoría de las ondas acopladas, encontrando expresiones que muestran los parámetros de la que es dependiente. Utilizando los resultados del trabajo realizado por Murillo, Magaña, Carrascosa y Agulló-López<sup>xiv</sup>, en donde se resuelven numéricamente

<sup>1</sup> Capítulo 3

<sup>2</sup> Nombre que se le da al intercambio de energía mencionado.

<sup>3</sup> estructura, absorción de luz, dimensiones, etc.

<sup>4</sup> del tipo de malla: transmisión, reflexión; acoplamiento de dos, tres o más haces; de la diferencia de fase entre los haces; etc.

<sup>5</sup> contraste de franjas  $m$ ; campo eléctrico aplicado al grabar la malla, etc.

las ecuaciones del material y se encuentra la variación de los componentes del desarrollo de Fourier del campo eléctrico con respecto al contraste de franjas (o razón de modulación)  $m^6$ ; se realiza un cálculo numérico (a través de un programa de cómputo) de las expresiones mencionadas y se calculan las eficiencias de difracción.

Finalmente, en el cuarto y último capítulo se muestran y discuten los resultados obtenidos comparándolos con datos experimentales y se concluye sobre la validez y utilidad del trabajo.

## 2. MATERIALES FOTORREFRACTIVOS.

### 2.1. Efecto fotoconductorivo

Un material fotoconductor es aquél que al ser iluminado absorbe fotones y genera portadores de carga que pueden conducir una corriente eléctrica. En otras palabras, los fotones propician el movimiento de los electrones al cederles energía, generando parejas electrón-hueco que aumentan la conductividad del material. Los excesos de electrones y huecos se recombinan.

Estrictamente hablando, todo material es fotoconductor si al absorber energía de fotones aumenta su conductividad, lo cual significaría que también los aislantes y los metales lo son. Los materiales semiconductores se caracterizan por ser considerados buenos fotoconductores aunque los semiconductores no son los únicos materiales de este tipo, ya que también hay polímeros y cristales fotoconductivos. La característica principal para que estos materiales sean considerados como buenos fotoconductores, es que la energía térmica produzca los electrones y huecos de los que se han hablado y que éstos se muevan libremente dentro de la estructura del material, aún en la obscuridad. En los materiales aislantes, el número de dichos portadores "térmicos" es tan pequeño que en general no puede ser determinado. En los semiconductores, en cambio, el número de éstos es de tal magnitud que su conductividad puede ser comparada a la de los metales.

La utilidad obvia que se les ha encontrado a este tipo de materiales es el hecho que permiten la conversión simple de radiación luminosa en corrientes eléctricas.

Se ha descubierto<sup>xv</sup> que los fotoconductivos se dividen en dos clases: *los idiocromáticos y los alocromáticos*:

Los primeros, idiocromáticos, son aquéllos que en su estado puro presentan el efecto fotoconductorivo que está asociado directamente a las propiedades intrínsecas del material. Estos materiales, conocidos también como fotoconductores intrínsecos, muestran su característica fotoconductoriva cuando los átomos del cristal absorben la energía del fotón. La máxima fotosensibilidad se presenta en longitud de onda correspondiente a la mínima energía requerida para producir electrones libres.

Por otra parte, los fotoconductores alocromáticos, también conocidos como fotoconductores de imperfecciones o impurezas, son aquellos en los cuales la

<sup>6</sup> Como se desarrollará mas adelante, la eficiencia de difracción varía con la razón de modulación.

las ecuaciones del material y se encuentra la variación de los componentes del desarrollo de Fourier del campo eléctrico con respecto al contraste de franjas (o razón de modulación)  $m^6$ ; se realiza un cálculo numérico (a través de un programa de cómputo) de las expresiones mencionadas y se calculan las eficiencias de difracción.

Finalmente, en el cuarto y último capítulo se muestran y discuten los resultados obtenidos comparándolos con datos experimentales y se concluye sobre la validez y utilidad del trabajo.

## 2. MATERIALES FOTORREFRACTIVOS.

### 2.1. Efecto fotoconductorivo

Un material fotoconductor es aquél que al ser iluminado absorbe fotones y genera portadores de carga que pueden conducir una corriente eléctrica. En otras palabras, los fotones propician el movimiento de los electrones al cederles energía, generando parejas electrón-hueco que aumentan la conductividad del material. Los excesos de electrones y huecos se recombinan.

Estrictamente hablando, todo material es fotoconductor si al absorber energía de fotones aumenta su conductividad, lo cual significaría que también los aislantes y los metales lo son. Los materiales semiconductores se caracterizan por ser considerados buenos fotoconductores aunque los semiconductores no son los únicos materiales de este tipo, ya que también hay polímeros y cristales fotoconductivos. La característica principal para que estos materiales sean considerados como buenos fotoconductores, es que la energía térmica produzca los electrones y huecos de los que se han hablado y que éstos se muevan libremente dentro de la estructura del material, aún en la obscuridad. En los materiales aislantes, el número de dichos portadores "térmicos" es tan pequeño que en general no puede ser determinado. En los semiconductores, en cambio, el número de éstos es de tal magnitud que su conductividad puede ser comparada a la de los metales.

La utilidad obvia que se les ha encontrado a este tipo de materiales es el hecho que permiten la conversión simple de radiación luminosa en corrientes eléctricas.

Se ha descubierto<sup>xy</sup> que los fotoconductivos se dividen en dos clases: *los idiocromáticos* y *los alocromáticos*:

Los primeros, idiocromáticos, son aquéllos que en su estado puro presentan el efecto fotoconductorivo que está asociado directamente a las propiedades intrínsecas del material. Estos materiales, conocidos también como fotoconductores intrínsecos, muestran su característica fotoconductoriva cuando los átomos del cristal absorben la energía del fotón. La máxima fotosensibilidad se presenta en longitud de onda correspondiente a la mínima energía requerida para producir electrones libres.

Por otra parte, los fotoconductores alocromáticos, también conocidos como fotoconductores de imperfecciones o impurezas, son aquellos en los cuales la

<sup>6</sup> Como se desarrollará mas adelante, la eficiencia de difracción varia con la razón de modulación.

fotoconductividad se debe a las imperfecciones e impurezas del cristal. El tipo de materiales aquí estudiados (fotorrefractivos) son de esta clase: *alocromáticos*.

Uno debe ser cuidadoso al considerar estas distinciones, ya que sólo se refieren a la excitación de los electrones en el proceso fotoconductor. Las impurezas e imperfecciones pueden determinar otro tipo de propiedades de los fotoconductores. De hecho, un mismo material puede presentar tanto características idiocromáticas como características alocromáticas como se muestra en la Figura 2.1.

## 2.2. Efecto electroóptico

Cuando se da un cambio en las propiedades ópticas de un material al aplicar un campo eléctrico y existe una variación medible en el índice de refracción, el material es catalogado como electroóptico.

La forma con que cambian las propiedades ópticas del material varían de acuerdo a las condiciones a las que es sometido. La velocidad y el resultado final del proceso, son determinados por las características intrínsecas del material: sensibilidad a ciertos impulsos, estructura del material, el grado de pureza o impureza del mismo, la movilidad de los portadores, etc.

Es importante notar, que el cambio en el índice de refracción se debe a que el estímulo que se aplica en el material produce un reacomodo de cargas internas que alteran las configuraciones electrónicas en las moléculas y forman un patrón de distribuciones de cargas distinto al original. El efecto local asociado con la distorsión de las nubes electrónicas por el campo eléctrico aplicado se explica suponiendo que los átomos están fijos en sus posiciones de equilibrio. De hecho, los electrones son los únicos portadores de carga que pueden ser excitados con las energías asociadas a las longitudes de onda de la luz. Analizando el problema desde un punto de vista cuántico, el campo modifica las funciones de onda de los electrones y los niveles energéticos del sistema, cambiando las propiedades dieléctricas del material.

La *relajación atómica* y la *reorientación molecular*, son los procesos causantes de que únicamente los electrones figuren y determinen contribuciones adicionales al efecto electroóptico. Esto sucede ya que el reacomodo atómico y molecular inducido por el campo eléctrico produce un cambio en las distribuciones de la carga electrónica y, por lo tanto, en las propiedades ópticas del material.

En algunos óxidos ferroeléctricos esta contribución es más importante que la contribución electrónica directa. En materiales cerámicos y cristales líquidos, también electroópticos, aparecen fenómenos mucho más complejos: para cerámicos, uno debe tomar en cuenta el efecto del campo sobre la estructura granular cristalina; en cristales líquidos, el campo eléctrico causa una reorientación de las moléculas, llevándonos a una variedad de arreglos de estructuras y un gran número de respuestas ópticas.

Si  $n$  es el índice de refracción, entonces:

$$n=n(\mathbf{E}) .$$

desarrollando  $n(\mathbf{E})$  en series de Taylor y suponiendo campos eléctricos muy pequeños ( $|\mathbf{E}| \approx 0$ ), tenemos:

$$n = n(\mathbf{E}=0) + \left( \frac{\partial n}{\partial \mathbf{E}} \right)_0 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 n}{\partial \mathbf{E}^2} \right)_0 \mathbf{E}^2 + \dots$$

Si proponemos que  $n$  debe ser de la forma:

$$n = n_0 + \left( \frac{1}{2} \right) r n^3 \mathbf{E} - \left( \frac{1}{2} \right) s n^3 \mathbf{E}^2 + \dots$$

cuando identificamos términos, como  $n_0 = n(0)$ , tenemos que

$$-\left( \frac{1}{2} \right) r n^3 = \left( \frac{\partial n}{\partial \mathbf{E}} \right)_0$$

y

$$-\left( \frac{1}{2} \right) s n^3 = \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 n}{\partial \mathbf{E}^2} \right)_0$$

$\Rightarrow$

$$r = \left( -2/n^3 \right) \left( \frac{\partial n}{\partial \mathbf{E}} \right)_0$$

$$s = \left( -1/n^3 \right) \left( \frac{\partial^2 n}{\partial \mathbf{E}^2} \right)_0$$

A estos términos se conoce como *Coefficientes electroópticos* y serán tratados más adelante. A partir de la permeabilidad eléctrica:

$$\chi = \epsilon/\epsilon_0 = 1/n(\epsilon)^2$$

$\Rightarrow$

$$\Delta \chi = \left( \frac{d\chi}{dn} \right) \Delta n = \left( -2/n^3 \right) \left[ \left( r n^3 \mathbf{E} / 2 \right) - \left( s n^3 \mathbf{E}^2 \right) \right]$$

$\Rightarrow$

$$\Delta \chi = r \mathbf{E} + s \mathbf{E}^2$$

y se tiene

$$n = n_0 + r \mathbf{E} + s \mathbf{E}^2$$

con

$$n_0 = n(\mathbf{E}=0)$$

Tenemos dos casos:

1. Cuando  $\partial^2 n / \partial \mathbf{E}^2 \approx 0$  tenemos que  $n \approx n_0 + r \mathbf{E}$ , es decir, que el cambio en el índice de refracción es lineal a la variación del campo eléctrico. Cuando esto se presenta, se le

conoce como *efecto Pockels*. Además, en el material debe estar presente una celda de Pockels. A  $r$  se le conoce como el coeficiente electroóptico de Pockels.

2. Por otro lado, si el material es centrosimétrico<sup>7</sup>,  $n(\mathbf{E})$  deberá ser una función simétrica del campo eléctrico y por tanto,  $dn/d\mathbf{E}=0 \Rightarrow r=0$  y  $n(\mathbf{E}) \approx n_0 + s \mathbf{E}^2$ . Esto es, la modulación del índice de refracción varía con el cuadrado de la evolución del campo eléctrico. A esta situación se le conoce como *Efecto Kerr* y a  $s$  se le llama coeficiente electroóptico de Kerr.

El coeficiente electroóptico es importante para observar los cambios en las propiedades ópticas del material con respecto a un campo eléctrico asociado

Otra forma de describir a los electroópticos (a las propiedades ópticas de un material, en general) es caracterizándolos por medio del tensor de índice de refracción

$$\left( \frac{1}{n^2} \right)_y = (\epsilon^{-1})_y .$$

El eje principal y los valores propios de éste tensor determinan la dirección de propagación de la luz dentro del material. Para medios con absorción de luz, los valores del índice principales son complejos y los componentes son influenciados por el campo eléctrico aplicado.

Si consideramos al medio no absorbente, esto es, transparente (lo que caracteriza al tensor de índice de refracción  $(1/n^2)_{ij}$  como real), al aplicar el campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , se induce un cambio en los componentes del tensor. Como los cambios deben ser muy pequeños, podemos desarrollar a  $\Delta(1/n^2)_{ij}$  en series de potencia de  $\mathbf{E}$  y utilizar sólo los términos significativos, que son los términos lineal y cuadrático con los que se observan los efectos más prominentes:

$$\left( \frac{1}{n^2} \right)_y = r_{ijk} E_k + s_{ijkl} E_k E_l \quad (2.1)$$

el término lineal determina al Efecto Pockels y el término cuadrático es responsable por el efecto Kerr. Los coeficientes correspondientes (efecto Pockels y efecto Kerr):  $r_{ijk}$  (lineal) y  $s_{ijkl}$  (cuadrático), constituyen tensores de tercero y cuarto rango respectivamente. Los componentes de estos tensores dependen de la frecuencia de la luz  $\omega$  debido a la dispersión del material. Más aún, en la mayoría de los experimentos el campo eléctrico aplicado,  $\mathbf{E}$ , es modulado a una cierta frecuencia  $\Omega$  y es de esperarse que  $r_{ijk}$  y de  $s_{ijkl}$  dependan también de  $\Omega$ , a consecuencia de la respuesta finita de los mecanismos electroópticos activos.

Es importante notar que la expansión (2.1) se utiliza en frecuencias muy por abajo de las transiciones electrónicas relevantes como en el caso en mayoría de las aplicaciones. Sin embargo la dependencia de  $n$  con el campo eléctrico debe ser considerada mucho más

<sup>7</sup> Cuando la estructura molecular de un material tiene simetría central, se le conoce como material centrosimétrico

compleja cuando la frecuencia de la luz se encuentra cerca de la frecuencia de las transiciones electrónicas, esto es, la variación depende notoriamente del mecanismo físico específico.

### Efecto Pockels.

De la ecuación (2.1), observamos que el efecto Pockels se presenta cuándo el término de primer orden está presente:

$$\left( \frac{1}{n^2} \right)_{ij} = r_{ijk} E_k. \quad (2.2)$$

esta relación no está definida a menos que las condiciones del experimento se encuentren especificadas apropiadamente. Dependiendo si el material durante el experimento se mantiene sujeto ("clamped") o no ("unclamped"), se obtienen diferentes respuestas que son descritas por los coeficientes electroópticos respectivos  $r^s$  (lineal) o  $r^T$  (cuadrático).

Las diferencias entre  $r^s$  y  $r^T$  las determina las condiciones del experimento: si el material está sujeto no se deforma (condiciones de *strain*) y si la muestra no se sujeta (condiciones de esfuerzo) deben examinarse las condiciones de deformación dadas por el campo eléctrico, ya que los materiales que presentan el efecto Pockels poseen propiedades piezoeléctricas. Para pequeñas deformaciones, esta contribución simplemente se suma a la respuesta electrónica directa.

Profundizando en el argumento anterior, deben considerarse los dos tipos de movimiento iónico en la malla cristalina, correspondientes a cada uno a los modos de vibración: acústico y óptico. Para el modo óptico, los iones positivos y negativos se mueven en sentido contrario dentro de una celda unitaria generando a una polarización neta que se acopla con el campo eléctrico aplicado. Sin embargo, como estos modos no modifican el tamaño de la celda unitaria, pueden ser activados tanto en experimentos donde el material se sujeta así como en aquellos donde no es así.

Por otra parte, los modos acústicos modifican el tamaño de la celda unitaria y, por lo tanto, no pueden ser activados en experimentos donde la muestra se encuentra sujeta. Para la geometría de los experimentos donde la muestra no sostiene, por la falta de un centro de inversión en los cristales de Pockels, éstos generan una polarización neta que contribuye a la respuesta electroóptica.

Debido a la respuesta temporal finita de los mecanismos electroópticos, el coeficiente  $r_{ijk}(\omega, \Omega)$  depende de las frecuencias de modulación  $\Omega$  del campo eléctrico aplicado y de la frecuencia de la luz  $\omega$ . Para especificar el valor del coeficiente electroóptico, se necesita proporcionar primero el valor de ambas frecuencias. La dependencia con  $\omega$  del coeficiente electroóptico está ligada a la dispersión óptica del material la cual, a su vez, se relaciona con el tiempo de respuesta electrónico. Esta relación se encuentra determinada por la frecuencia y fuerza de las transiciones electrónicas activas. Por otro lado, su dependencia con  $\Omega$  se deriva de la contribución iónica o de malla que contribuye al efecto electroóptico.

Un diagrama ilustrativo para ambas situaciones (la sujeta y la no sujeta) se observa en la Figura 2.2. En los experimentos en donde la muestra es sujeta, el término piezoeléctrico no es operativo así como para campos estacionarios o para frecuencias de modulación arriba de  $10^{11}$  Hz (por debajo de la banda de frecuencias de los modos ópticos), es decir, no existe dependencia de  $\Omega$ . Por arriba de esas frecuencias de modulación, la contribución a los modos ópticos es inhibida y sólo se obtienen puras respuestas electrónicas.

### **Efecto Kerr**

El efecto Kerr se presenta en materiales donde el término cuadrático del desarrollo (2.1) es dominante o bien, cuando el material carece de respuesta electroóptica lineal. A pesar de que en todos los materiales se presenta el efecto Kerr, sólo en aquellos de estructura no-centrosimétrica, como son líquidos, vidrios, cerámicas electroópticas y nanoestructuras semiconductoras, en donde el término no lineal no contribuye, éste efecto puede ser mejor apreciado.

Para líquidos puros o soluciones, el efecto Kerr es dominante debido a la orientación que toman las moléculas al ser expuestas a la acción del campo eléctrico, teniendo cada líquido sus propias peculiaridades. Para experimentos donde la muestra es sometida a un campo eléctrico, o cuando el esfuerzo sobre el material es constante, la contribución al aumento en la respuesta electroóptica debido al cambio en el índice de refracción es importante. Esta variación en el índice de refracción es debida a que la tensión del campo eléctrico aplicado modifica el arreglo de la red.

Las condiciones de simetría de la estructura de un material determinan aquellas componentes (del tensor que lo describe) que son distintas de cero o que son linealmente independientes, por lo que cada material estará determinado por su propio tensor.

Materiales que carecen de centro de inversión (o que son no-centrosimétricos), suelen presentar únicamente el efecto Kerr. Esto se explica debido a que todos los tensores polares de rango impar son idénticamente iguales a cero y, por el contrario, todos los tensores polares de rango par no tendrán restricciones bajo esta simetría. Este es el caso para  $r_{ijk}$  y  $s_{ijkl}$  respectivamente.

### **2.3. Efecto fotorrefractivo.**

Los materiales fotorrefractivos pueden ser explicados a partir de los fenómenos anteriormente descritos, ya que en éstos materiales se exhiben tanto comportamientos fotoconductoros como electroópticos.

Cuando el material se ilumina con luz en forma de un patrón de interferencia, el índice de refracción cambia en función de la intensidad. Esto es consecuencia del reacomodo de cargas que, excitadas por el patrón de luz, emigran de las zonas luminosas a las zonas oscuras de la red.

Las cargas fijas en la red absorben la energía de los fotones, generándose portadores que pasan de los niveles de la banda de impurezas a los niveles de la banda de conducción.

en un número proporcional a la potencia luminosa. Cargas fijas del signo opuesto quedan en el sitio donde se encontraban los portadores. Las cargas móviles son recapturadas por otras impurezas ionizadas en diferentes partes del material. Después de pasado un cierto tiempo, el proceso llega a un estado estacionario. Como resultado de esta migración, se acumulan excesos de cargas en distintas regiones del material en forma de patrones de distribución inhomogénea de carga espacial; la separación de cargas genera campos eléctricos muy intensos entre las concentraciones de cargas de signo opuesto, rompiéndose el arreglo de la red y, por lo tanto, se altera el índice de refracción del material.

El tiempo que le lleva al material para alcanzar un estado de estabilidad, depende del material con el que se esté trabajando y su permanencia en dicho estado está sujeta también a las características de la substancia. La estructura, la cantidad de impurezas, su tiempo de respuesta, etc., son los factores que intervienen en la eficiencia que presente el material para su uso. Así, los arreglos de índice de refracción permanecen grabados desde milisegundos, hasta años, si el material se almacena aislado adecuadamente de la luz.

Borrar estos arreglos es mucho más sencillo que almacenarlos; al iluminar de manera uniforme al material, o calentándolo, el patrón de cargas se redistribuye deshaciendo las concentraciones y deja el material listo para volver a usarse.

Existe una enorme diversidad de materiales fotorrefractivos, que van desde cierto tipo de cristales, hasta amorfos. Incluyen aislantes, semiconductores, compuestos orgánicos y líquidos ferroeléctricos, entre otros. Ésta gran variedad se debe a que el fenómeno se presenta a consecuencia de las imperfecciones de la estructura del material y, por lo tanto, la cantidad de impurezas que posea, contribuye al proceso como donadores o aceptores de cargas.

Para interpretar mejor el proceso fotorrefractivo se necesita primero entender lo que ocasiona el cambio en el índice de refracción. Cuando el material es iluminado, los electrones son expulsados de las zonas luminosas hacia las zonas oscuras. Es fundamental para comprender éste cambio, explicar los principios que rigen el transporte de cargas. Las tres formas de transporte de cargas involucrados en el proceso son:

1. Difusión de cargas debido a la distribución no homogéneas de éstas.
2. Acarreo debido al campo eléctrico aplicado.
3. Efecto fotovoltaico.

En la mayoría de los cristales, los dos primeros procesos son suficientes para explicar el efecto fotorrefractivo, sin embargo, aquí se discutirán los tres para una mejor comprensión.

### **Difusión**

La difusión es el proceso natural con la que la mayoría de los fotorrefractivos llevan a cabo sus transportes de densidades de cargas. En las zonas luminosas del patrón de

interferencia, los electrones son estimulados y expulsados de estas regiones hacia las zonas oscuras del patrón, esto es, se presenta una migración de densidad de carga espacial de las zonas luminosas hacia las zonas oscuras, en donde las cargas son recapturadas por los iones que ahí se encuentran.

Los electrones se difunden de tal forma que la amplitud espacial de la variación de densidad de electrones es pequeña comparada con la amplitud espacial de la variación de los donadores ionizados. Esta diferencia de amplitudes incrementa la separación de la distribución espacial modulada de las cargas, que está en fase con la intensidad de la luz.

La distribución de campo eléctrico resultante  $E_{SC}$  estará desfasada un cuarto de periodo de malla ( $\Lambda/4$ ) en comparación a la intensidad de la luz.

### **Acarreo.**

Un campo eléctrico estático aplicado al material fotorrefractivo, contribuye a direccionar el movimiento de las cargas a través del mismo.

Si la razón de excitación de los donadores es proporcional a  $\cos Kx$ , la razón de excitación por acarreo es proporcional a  $\cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} + \phi)$  ( $\mathbf{K}$ : vector de onda de la malla,  $\phi$  diferencia de fase con respecto a la iluminación).

Para desplazamientos suficientemente pequeños, la diferencia entre estas dos distribuciones (es decir, con la densidad de carga espacial) es proporcional a  $\sin Kx$ . El campo eléctrico resultante será proporcional a  $-\cos Kx$ , que es igual a la intensidad de distribución excepto por un signo negativo. En suma, se genera un campo eléctrico espacialmente modulado debido a la variación de las densidades de portadores libres.

Tomar en cuenta el acarreo y la difusión es suficiente para explicar el efecto fotorrefractivo en cristales como  $\text{K}(\text{Ta}_{1-x}\text{Nb}_x)\text{O}_3$ ,  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ ,  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ ,  $\text{GaAs}$  y ferroeléctricos altamente fotoconductorivos como el  $\text{KNbO}_3$ .

### **Efecto fotovoltaico.**

A la capacidad que tienen algunos materiales para generar una diferencia de potencial como resultado de la absorción de radiación en presencia de un campo electromagnético, se le conoce como efecto fotovoltaico. Se ha descubierto que este efecto está asociado con las características superficiales del material y con las interfaces entre las uniones metal-semiconductor y semiconductor-semiconductor.

En todos los cristales electroópticos se puede inducir una fotocorriente sin necesidad de aplicar un voltaje. Los fotoelectrones son excitados en una banda de transferencia de cargas con una dirección preferencial de velocidad a lo largo del eje polar.

También es posible la contribución de corrientes adicionales debidas a la captura anisotrópica de electrones y al desplazamiento de iones. La densidad de corriente total debido al efecto fotovoltaico es:

$$j_{ph} = \beta_{ijk} E_j E_k^*$$

donde  $\beta_{ijk}$  es el llamado tensor fotovoltaico que cumple  $\beta_{ijk} = \beta_{ijk}^*$ ;  $E_j, E_k$ , son componentes de campo de fuerza eléctrico. Las componentes del tensor fotovoltaico son distintas de cero sólo en materiales centrosimétricos.

La corriente fotovoltaica depende únicamente de la longitud promedio que recorre una partícula antes de llegar, por sucesivas interacciones, a una velocidad que está, prácticamente, a lo largo del eje polar del material, mientras que la fotoconductividad depende totalmente de la historia completa de los portadores excitados.

La variación espectral de la corriente fotovoltaica, no necesita ser la misma que la constante de absorción  $\alpha$  (la cte. de absorción es una cantidad que depende del material y que está relacionada con la cantidad de energía proveniente de la luz que absorbe dicho material), porque los portadores no dependen sólo de la probabilidad de transición sino, también, de los detalles del potencial local y del camino libre medio.

El efecto fotovoltaico produce un cambio de las distribuciones espaciales de los electrones y de los donadores ionizados en una forma parecida a un campo electrostático aplicado. El patrón de malla del campo eléctrico está, entonces, en fase con la distribución de intensidad de excitación excepto por un factor no importante de -1.

Las mallas pueden ser grabadas también usando las componentes no diagonales del tensor fotovoltaico. En estos casos pueden producirse corrientes fotovoltaicas espacialmente oscilantes, por polarización de los rayos de excitación.

#### 2.4. Modelo de transporte de Bandas (Ecuaciones de Kukhtarev).

Hay dos tipos de modelos comúnmente aceptados para describir este fenómeno: uno es el *modelo de transporte por bandas*, (o modelo de Kukhtarev<sup>xii</sup>) que propone que el patrón de luz que se aplica al material, excita a los electrones de los sitios de los donadores hacia los niveles de la banda de conducción, en donde son transportados por alguno de los métodos antes descritos a las regiones no iluminadas del material donde son recapturados por algún aceptor vacío; el otro es el *modelo de salto de cargas* (o modelo de Feinberg<sup>xiii</sup>) que propone el transporte de las cargas por medio de saltos fotoinducidos de un sitio donde se encuentra un donador hacia una impureza vacía. A pesar de que son físicamente distintos entre sí, es posible demostrar la equivalencia de sus respectivas ecuaciones, siendo el segundo un caso particular del primero. por lo que el modelo de transporte por bandas resulta ser más general.

Antes de empezar con este desarrollo, es importante notar que se supondrá que el patrón de interferencia de la luz dentro del material no es influido por el desarrollo de la red, esto es, que la forma de la red y la propagación de la luz pueden ser manejados independientemente.

Consideremos una placa con dimensiones infinitas en las direcciones  $X$  y  $Y$ , y dos haces de luz coherente linealmente polarizados con la misma frecuencia que inciden sobre éste. Por simplicidad, supondremos que los portadores de carga son de un sólo tipo (ya sean electrones o huecos).

Como ya se ha mencionado, la luz del patrón de interferencia estimula a los electrones de las zonas luminosas o sitios de los donadores llenos  $N_D$  (los cuales se supone que están fijos) de donde son transportados a las regiones de obscuridad dentro del cristal. En las zonas luminosas queda una carga positiva de huecos que se forma debido a la ausencia de los electrones que emigraron. La densidad de carga que queda,  $\rho(Y)$ , tiene la misma periodicidad espacial que el patrón de luz.

Como se han separado las cargas, se tienen dentro del cristal regiones con densidades de carga positivas y negativas, entre ambas, se genera un campo eléctrico de carga espacial,  $E_{sc}$ , que es el responsable del cambio en el índice de refracción y que posee el mismo periodo espacial que el patrón inicial de interferencia.

Debido a la excitación térmica, no todos los donadores potenciales  $N_D$  están en las regiones iluminadas del cristal, algunos se encuentran ionizados también en las regiones oscuras.

La ecuación de neutralidad global de la carga, en estado térmico estable, está dada por:

$$N_D^+ = N_A + n_d$$

donde  $N_D^+$  es el número de donadores ionizados por unidad de volumen en la obscuridad,  $n_d$  es la densidad de electrones libres en la banda de conducción, y  $N_A$  es la densidad de aceptores que se necesita para compensar el exceso de cargas positivas (por lo tanto es negativa) pero que no participan en el proceso de transición, más son necesarios para que exista un gran número de donadores ionizados en la obscuridad. Es indispensable que en la obscuridad existan muchos donadores ionizados porque los electrones en la banda de conducción tienden a borrar la modulación espacial de éstos, o lo que es lo mismo, para que la modulación de los donadores ionizados no se interrumpa en las regiones de obscuridad, debe existir un número mucho mayor de  $N_D^+$  y  $N_A$ , en las regiones oscuras, que electrones que llegan a estas zonas de la banda de conducción.

El modelo de transporte por bandas se describe con:

1. Una ecuación de continuidad para los electrones móviles en la banda de conducción:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = G - R + \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{q}, \quad (2.3)$$

siendo  $G$  la Rapidez de generación de los electrones libres y  $R$  la Rapidez con la cual los electrones libres se recombinan. En la densidad de la corriente se toman en cuenta 3 contribuciones de transporte de cargas: arrastre, difusión y efecto fotovoltaico,  $\mathbf{J}_A$ ,  $\mathbf{J}_D$ ,  $\mathbf{J}_F$ , este último, la densidad de corriente debida al efecto fotovoltaico, en la mayoría de los materiales es poco relevante por lo que  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_A + \mathbf{J}_D$

La ecuación (2.3) significa que el cambio de densidad de electrones en la banda de conducción depende de la diferencia entre el número de electrones creados por la

fotoionización y los que se recombinan, más los que ya se encontraban en la banda de conducción.

La densidad de corriente de difusión,  $\underline{J}_D = K_B T \mu \nabla n$  (donde  $K_B$  es la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura y  $\mu$  la movilidad de los portadores) establece que, en analogía a un flujo de calor en un gradiente de temperatura, siempre que exista un gradiente de concentración  $\nabla n$ , se tiene un flujo neto de corriente de las regiones de alta concentración, a las regiones de baja concentración, que es proporcional al gradiente de la concentración en cualquier punto. Usando la relación de Einstein  $D = K_B T \mu / q$ , la densidad de corriente queda como:

$$\underline{J}_D = qD\nabla n \quad (2.4)$$

La corriente de acarreo, por otro lado, se origina debido a acciones de campos eléctricos aplicados al material, por lo que resulta lógico que dependa de éstos:

$$\underline{J}_A = q\mu n\underline{E} \quad (2.5)$$

donde  $\underline{E}$  es la suma del campo eléctrico externo aplicado y el campo de las cargas espaciales.

Por lo tanto, de las ecuaciones (2.4) y (2.5), la densidad de corriente está dada por:

$$\underline{J} = q(D \nabla n + \mu n \underline{E}) \quad (2.6)$$

La rapidez de generación de portadores,  $G$ , depende de la cantidad de donadores potenciales (no ionizados) y de la intensidad de la luz necesaria para dicha generación:

$$G = (sI + \beta)(N_D - N_D^+) \quad (2.7)$$

siendo la  $s$  sección transversal de fotoionización;  $I$  la intensidad de la luz;  $\beta$  la razón de probabilidad de excitación térmica;  $N_D$  la densidad total de donadores y  $N_D^+$  es la densidad total de donadores ionizados. El término  $\beta(N_D - N_D^+)$  es la rapidez de generación térmica y el término  $sI$  se conoce como la razón de probabilidad de fotoexcitación.

La rapidez de recombinación,  $R$ , indica una recombinación lineal con los electrones libres con la probabilidad de que una trampa esté vacía

$$R = \gamma_R N_D^+ n \quad (2.8)$$

con  $\gamma_R$  coeficiente de recombinación.

2. Una ecuación de continuidad para los donadores ionizados e inmóviles:

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = G - R \quad (2.9)$$

Esta ecuación no contiene términos de corriente, la rapidez de generación y la de recombinación, se han igualado a aquellas de los electrones. Esto resulta por demás, congruente con el hecho de que las únicas transiciones que se toman en cuenta son las excitaciones fotónicas o térmicas de los electrones, que pasan del nivel de los electrones hacia la banda de conducción y la recombinación de éstos a un donador ionizado.

3. La ley de Gauss:

$$\nabla \cdot (\epsilon \underline{\mathbf{E}}) = q (N_D^+ - N_A - n) \quad (2.10)$$

con  $\epsilon = \epsilon' \epsilon_0$ ,  $\epsilon'$  es la cte. dieléctrica del material y  $\epsilon_0$  es la cte. dieléctrica en el vacío. Esta ecuación significa que la carga es igual al número de los donadores ionizados  $N_D^+$  (con carga positiva), menos la contribución negativa de los aceptores  $N_A$  y los portadores libres  $n$  en la banda de conducción.

El término de los  $N_A$  contribuye al efecto de los aceptores inmóviles y compensativos, los cuales se suponen completamente ionizados (y por lo tanto negativamente cargados) no tomando parte en el proceso de fotoexcitación. La importancia de su presencia ya ha sido explicada.

El transporte de cargas está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = (sI + \beta)(N_D - N_D^+) - \gamma_R N_D^+ n \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial N_D^+}{\partial t} + \nabla \cdot (D \nabla n - \mu n \mathbf{E}) \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \epsilon \underline{\mathbf{E}} = q (N_D^+ - N_A - n) \quad (2.13)$$

que, sin tomar en cuenta el efecto fotovoltaico, son las llamadas ecuaciones de Kukhtarev.

Independientemente de que 2.11, 2.12 y 2.13 deban ir acompañadas de sus condiciones iniciales y de frontera, aún debemos agregar otra ecuación.

4. La ecuación de onda para  $\underline{\mathbf{E}}$  de los haces de luz coherente :

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial^2 (\epsilon_H \underline{\mathbf{E}})}{\partial t^2} \right) \quad (2.14)$$

donde  $\epsilon_H$  es la constante dieléctrica de alta frecuencia.

En general,  $D$ ,  $\mu$  y  $\epsilon$  son tensores y  $N_D$  y  $N_A$  varían con la posición. Por simplicidad, los primeros se tomarán como escalares y los segundos como constantes del material.

Las ecuaciones 2.11-2.14, son ecuaciones no lineales acopladas, generalmente, difíciles de resolver sin hacer aproximaciones que las simplifiquen. Para cada situación física, los parámetros involucrados se simplifican de forma diferente y, por lo tanto, la solución difiere, así como el método que se utiliza para resolverlo.

Si el material se ilumina con dos ondas planas (es decir, que poseen un comportamiento periódico cosenoidal) separadas un cierto ángulo y con intensidades  $I_1$  e  $I_2$ , la intensidad del patrón de interferencia que se forma dentro de la muestra se comporta como:

$$I=I_0(1+m \cos (\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{x}})), \quad (2.15)$$

donde  $I_0= I_1 + I_2 =$  intensidad promedio,  $m=2(I_1 I_2)^{1/2} / I_0$  es el contraste de franjas o razón de modulación ( $0 \leq m \leq 1$ )<sup>8</sup> y  $\underline{\mathbf{k}}$  es el vector de onda del patrón de franjas.

Además, se toma a la densidad de portadores en la banda de conducción,  $n$ , como mucho menor que la densidad de aceptores  $N_A$  y que la diferencia entre los donadores potenciales  $N_D$  y los mismos aceptores,  $N_D - N_A$ . También se supone generación y recombinación lineal ( $N_D^+ \approx N_A$ ).

Entonces, la ecuación 2.11 del estado estacionario se reduce a:

$$n=n_0(1+M \cos (\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{x}})); n_0=(g(I_0)\tau_R) \quad (2.16)$$

donde a  $M=m/(1+[\beta/s I_0])$  se le conoce también, como el contraste entre las franjas o la razón de modulación y a  $g(I_0)$  como la rapidez de generación lineal.  $\tau_R$  es el tiempo de recombinación lineal.

El que se tome una variación del patrón de franjas cosenoidal no es causa de pérdida de generalidad porque éste resultado es el más simple y además, para cualquier otro tipo de onda puede encontrarse su correspondiente expansión de Fourier, la cual se expresará como sumas y restas de senos y cosenos, por lo que basta con conocer este caso para conocer también los de mayor complicación.

Como la iluminación varía sólo en una dimensión, la ecuación 2.12 queda como:

<sup>8</sup> La razón de modulación o contraste de franjas,  $m$ , es la medida entre la diferencia de fase de los rayos que interfieren para formar el patrón de franjas dentro de la muestra fotorrefractiva. Esto es claro de la ecuación (2.15)

$$I=I_0(1+m \cos (\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{x}}))$$

que indica la intensidad de la luz que interfiere a lo largo de la muestra, esto es, si  $m$  es 1 ó cercano a este,  $I$ , es a lo mas, igual a  $2I_0$  lo que nos daría una diferencia o contraste máximo entre zonas de mayor iluminación y zonas de menor iluminación; por otro lado, si  $m$  es 0.5, el valor máximo de  $I$  es  $1.5I_0$  lo que acerca las diferencias entre máximos y mínimos de intensidad y, por lo tanto, disminuye el contraste. Como  $I$  depende de los rayos que interfieren para formar la malla de la información que estos tengan se va a manifestar los máximos y mínimos de intensidad a lo largo de la muestra. La razón de modulación es el parámetro que representa esta variación.

El anterior análisis nos indica que  $m$  es en realidad una medida de la diferencia de fase entre los rayos interferentes para la escritura de la malla dentro del material fotorrefractivo. Dada la variación del patrón de franjas en el material, no existe garantía de que  $m$  sea una constante y por el contrario, que varíe con  $z$ .

$$\frac{\partial \left( D \frac{\partial n}{\partial x} + \mu n E \right)}{\partial x} = 0,$$

que integrandò con respecto a x :

$$E = \frac{\left( J - qD \frac{\partial n}{\partial x} \right)}{q\mu n}, \quad (2.17)$$

donde J es la densidad de corriente fotoelectrónica que se obtiene como constante de integración y está determinada por las condiciones a la frontera. Sustituyendo 2.16 en 2.17, tenemos :

$$E = \left[ \frac{J}{q\mu n_0 (1 + M \cos(kx))} \right] - \left[ \frac{DkM \sin kx}{\mu (1 + M \cos kx)} \right]. \quad (2.18)$$

Para un material de longitud L y con un voltaje aplicado constante V, las condiciones de frontera quedan como

$$\frac{1}{L} \int_0^L E dx = \frac{V}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L \left[ \frac{J}{q\mu n_0 (1 + M \cos(kx))} \right] dx - \frac{1}{L} \int_0^L \left[ \frac{DkM \sin kx}{\mu (1 + M \cos kx)} \right] dx.$$

Si hay un número entero de un gran conjunto de franjas en L, entonces :

$$\frac{1}{L} \int_0^L \left[ \frac{dx}{(1 + M \cos(kx))} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}$$

y

$$\frac{1}{L} \int_0^L \left[ \frac{M \sin kx}{(1 + M \cos kx)} \right] dx = 0,$$

por lo que

$$\frac{1}{L} \int_0^L E dx = V/L = \frac{J}{q\mu n_0 \sqrt{1 - M^2}}$$

⇒

$$J = (1 - M^2)^{1/2} \sigma_0 E_A$$

con  $\sigma_0 = q\mu n_0$  y  $E_A = V/L$ : campo eléctrico aplicado. Podemos reescribir la ecuación 2.18 como:

$$E = E_A \left[ \frac{\sqrt{1 - M^2}}{1 + M \cos(kx)} \right] - E_D \left[ \frac{M \sin(kx)}{1 + M \cos(kx)} \right] \quad (2.19)$$

donde  $E_D$  es el campo característico que, a partir de la relación de Einstein  $D/\mu = k_B T/q$ , está dado por:

$$E_D = \frac{Dk}{\mu} = \left( \frac{k_B T}{q} \right) k.$$

dónde  $k_B$  es la constante de Boltzman y  $T$  la temperatura absoluta. Ésta relación indica que el campo característico es independiente del tipo de material. A temperatura ambiente,  $E_D \approx 1.6$  KV/cm para franjas espaciadas de  $1 \mu\text{m}$ .

En la figura 2.3a, se muestran gráficas normalizadas para la ecuación 2.19 para  $E_A = 0$  y en la figura 2.3b  $E_A \gg E_D$ , con varios valores de la razón de modulación  $m$ . Nótese el cambio en el campo de distribución espacial cuando el campo es aplicado: ambos son muy diferentes a funciones senoidales cuando  $m$  se aproxima a 1. La ecuación 2.19 predice singularidades para  $kx = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$  si  $m = 1$ .

En la realidad, la contribución térmica a la densidad de electrones libres asegurará que siempre  $m < 1$ . Los campos eléctricos muy grandes, sin embargo, no pueden ser soportados en ningún caso debido al rompimiento de la linealidad de la generación y la recombinación.

Expandiendo  $E$  en series de Fourier, tenemos

$$E = \sum_{l=-\infty}^{\infty} E_l e^{il kx}; \quad E_0 = E_A; \quad E_{-l} = E_l^*,$$

$$E_l = (E_A + i E_D)(-1)^l \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{m} \right]^l; \quad l > 0.$$

Este resultado garantiza varios puntos:

Primero, la componente fundamental,  $E_G$ , del campo de cargas espaciales se escribe como:

$$E_G = E_1 e^{i kx} + E_{-1} e^{-i kx} = 2 \left\{ \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{m} \right] \right\} (E_A^2 + E_D^2)^{1/2} \cos(kx + \phi)$$

siendo  $\phi = \tan^{-1}(E_D/E_A)$ , la diferencia de fase respecto al patrón de franjas con un ángulo  $\phi$  limitado por valores  $\phi = 0$  para  $E_A \gg E_D$  y  $\phi = \pi/2$  para  $E_A \ll E_D$ .

Segundo:

$$0 \leq \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{m} \right] \leq 1$$

por lo que el tamaño del pico de la componente fundamental del campo de las cargas espaciales puede alcanzar los valores:

$$2[E_A^2 + E_D^2]^{1/2} \cong 2 E_A \quad \text{cuando } E_A \gg E_D \text{ ó}$$

$$2[E_A^2 + E_D^2]^{1/2} \cong 2 E_D \quad \text{cuando } E_A \ll E_D;$$

y, finalmente, de la figura 2.4 observamos que la aproximación

$$2 \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{m} \right] \approx m$$

es muy cercana al 11% para  $m < 0.6$ ; al 25% para  $m < 0.8$ , en cuyo caso:

$$E_G \approx -m[E_A^2 + E_D^2]^{1/2} \cos(kx + \phi).$$

Esta respuesta se encuentra lejana de ser lineal con la razón de modulación.

### 3. EFICIENCIA DE DIFRACCIÓN.

#### 3.1. Definición.

Cuando un haz de luz pasa a través de un cristal, se difracta obedeciendo el modelo de Bragg. El haz incidente, con vector de onda  $k_i$ , es desviado por las partículas del arreglo cristalino lo que obliga a la señal a difractarse en otra dirección  $k_d$ . Esta última,  $k_d$ , es la dirección con la que la luz sale del material. La condición de difracción de Bragg especifica que los vectores de onda de la luz incidente y difractada deben cumplir con la relación:

$$k_d - k_i = K_g \quad (3.1)$$

La relación 3.1 determina la dirección de propagación de la luz.

Consideremos la geometría de la figura 3.1, el haz difractado atraviesa al cristal desde  $z=0$  hasta  $z=l$  a lo largo de la llamada *malla de transición*, que será explicada más adelante. El patrón de difracción se supone no inclinado con respecto a las caras.

El cambio del índice de refracción al quedar grabada la malla en el material, puede ser descrito con la ecuación :

$$n = n_0 + n_1 \cos \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{X} = n_0 + (1/2) n_1 [e^{i \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{X}} + e^{-i \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{X}}] \quad (3.2)$$

donde el vector de la malla,  $\mathbf{K}_g$ , es perpendicular a la dirección  $\mathbf{X}$ ;  $n_0$  es el índice de refracción promedio y  $n_1$  es la modulación de  $n_0$ .

por lo que el tamaño del pico de la componente fundamental del campo de las cargas espaciales puede alcanzar los valores:

$$2[E_A^2 + E_D^2]^{1/2} \cong 2 E_A \quad \text{cuando } E_A \gg E_D \text{ ó}$$

$$2[E_A^2 + E_D^2]^{1/2} \cong 2 E_D \quad \text{cuando } E_A \ll E_D;$$

y, finalmente, de la figura 2.4 observamos que la aproximación

$$2 \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - m^2}}{m} \right] \approx m$$

es muy cercana al 11% para  $m < 0.6$ ; al 25% para  $m < 0.8$ , en cuyo caso:

$$E_G \approx -m[E_A^2 + E_D^2]^{1/2} \cos(kx + \phi).$$

Esta respuesta se encuentra lejana de ser lineal con la razón de modulación.

### 3. EFICIENCIA DE DIFRACCIÓN.

#### 3.1. Definición.

Cuando un haz de luz pasa a través de un cristal, se difracta obedeciendo el modelo de Bragg. El haz incidente, con vector de onda  $k_i$ , es desviado por las partículas del arreglo cristalino lo que obliga a la señal a difractarse en otra dirección  $k_d$ . Esta última,  $k_d$ , es la dirección con la que la luz sale del material. La condición de difracción de Bragg especifica que los vectores de onda de la luz incidente y difractada deben cumplir con la relación:

$$k_d - k_i = K_g. \quad (3.1)$$

La relación 3.1 determina la dirección de propagación de la luz.

Consideremos la geometría de la figura 3.1, el haz difractado atraviesa al cristal desde  $z=0$  hasta  $z=l$  a lo largo de la llamada *malla de transición*, que será explicada más adelante. El patrón de difracción se supone no inclinado con respecto a las caras.

El cambio del índice de refracción al quedar grabada la malla en el material, puede ser descrito con la ecuación :

$$n = n_0 + n_1 \cos \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{X} = n_0 + (1/2) n_1 [e^{i \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{X}} + e^{-i \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{X}}] \quad (3.2)$$

donde el vector de la malla,  $\mathbf{K}_g$ , es perpendicular a la dirección  $\mathbf{X}$ ;  $n_0$  es el índice de refracción promedio y  $n_1$  es la modulación de  $n_0$ .

La constante dieléctrica correspondiente a este patrón de índice de refracción está dado por:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (1/2)\varepsilon_1 [e^{i k_g X} + e^{-i k_g X}] \quad (3.3)$$

De la relación  $n^2 = \varepsilon$ , se obtiene que  $n_0^2 = \varepsilon_0$  y que  $2nn_0 = \varepsilon_1$ .  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_1$  se suponen reales, lo que significa que el medio no tiene pérdidas. La ecuación que gobierna la propagación de la luz monocromática  $E_y(z,x)e^{i\omega t}$ , con polarización lineal y trasladándose en dirección  $Y$  (perpendicular al plano de incidencia), es una ecuación tipo Helmholtz de la forma:

$$\nabla^2 E_y + (\omega^2/c^2) \varepsilon E_y = 0 \quad (3.4)$$

con la constante dieléctrica  $\varepsilon$  dada por la ecuación (3.3). La solución propuesta para la ecuación (3.4), se da en términos de la superposición de las ondas planas correspondientes a los campos ópticos de los rayos incidente y difractado. Sus amplitudes complejas  $A_i$  y  $A_d$ , dependen de la distancia de penetración de las ondas en la dirección  $Z$  del material, escribiéndose como :

$$E_y = A_i(z) e^{i K_i \cdot r} + A_d(z) e^{i K_d \cdot r} \quad (3.5)$$

con  $K_i$  y  $K_d$  formando el mismo ángulo  $\theta$  con el eje  $Z$ , dentro del material.

En la ecuación (3.5), se han ignorado los órdenes de difracción mayor por suponer al material mucho más ancho respecto al periodo de la malla,  $\Lambda = 2\pi/k_g$ .

Sustituyendo (3.5) en (3.4), usando (3.3) y no considerando los términos exponenciales que resultan del producto  $\varepsilon E$ , se obtienen unas ecuaciones de segundo orden para las amplitudes:

$$\frac{d^2 A_i}{dz^2} - 2i k_i \cos\theta \frac{dA_i}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} n_1 n A_d = 0, \quad (3.6a)$$

$$\frac{d^2 A_d}{dz^2} - 2i k_d \cos\theta \frac{dA_d}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} n_1 n A_i = 0, \quad (3.6b)$$

donde  $k = k_i = k_d = 2\pi/\lambda$  se refiere a la dirección de propagación de la onda en el espacio libre. Para no tomar en cuenta las segundas derivadas en las ecuaciones (3.6), es válido apoyarse en el criterio de variación lenta de las amplitudes para la óptica no lineal. Se llega, finalmente, a las siguientes ecuaciones acopladas:

$$\frac{d^2 A_i}{dz^2} + i\kappa A_d = 0 \quad (3.7a)$$

$$\frac{dA_d}{dz} + i\kappa A_i = 0 \quad (3.7b)$$

con

$$\kappa = \frac{\omega n_1}{2c \cos \theta} \quad (3.8)$$

$\kappa$  es el parámetro de acoplamiento. Si  $\kappa = 0$ , entonces  $n_1 = 0$ , y el campo óptico de las amplitudes permanece constante a lo largo del eje  $Z$ .

La solución general de (3.7) es:

$$A_I(z) = R_1 e^{\gamma_1 z} + e^{\gamma_2 z} R_2 \quad (3.9a)$$

$$A_{II}(z) = S_1 e^{\gamma_1 z} + S_2 e^{\gamma_2 z} \quad (3.9b)$$

con  $\gamma_{1,2} = \pm i\kappa$ .

Para encontrar las soluciones particulares de las ecuaciones (3.9) debemos especificar las condiciones a la frontera adecuadas: donde la luz entra al cristal.  $z=0$ , toda la amplitud es de la onda incidente y no hay luz difractada, por lo que :

$$A_I(0) = A_0 \text{ y } A_{II}(0) = 0 \quad (3.10)$$

sustituyendo (3.10) en (3.9), llegamos a que

$$A_I(l) = \frac{A_0}{2} \{ e^{i\kappa l} + e^{-i\kappa l} \} = A_0 \cos \kappa l \quad (3.11a)$$

$$A_{II}(l) = \frac{A_0}{2} \{ e^{-i\kappa l} - e^{i\kappa l} \} = -iA_0 \sin \kappa l \quad (3.11b)$$

donde  $l$  es el ancho de la muestra. Las ecuaciones 3.11 son soluciones al oscilador armónico clásico. Es claro que  $A_I A_I^* + A_{II} A_{II}^* = A_0^2$  es necesario para que se cumpla la conservación de la energía.

Aquí, se define la *eficiencia de difracción* como el cociente entre la intensidad de la luz que se le aplica a la muestra para leer la información grabada previamente y la intensidad de la luz que es difractada a través de la muestra:

$$\eta = \frac{I_d}{I_i} = \frac{|A_d A_d^*|}{|A_i A_i^*|} \quad (3.12)$$

En este caso,  $\eta = \tan^2 \kappa z$ . Cabe señalar que éste resultado se obtuvo suponiendo a  $\kappa$  constante.

El grabado holográfico volumétrico es de particular importancia para almacenar grandes cantidades de información, en holografía en color y luz blanca. La alta eficiencia en la conversión de la luz que se obtiene al leer hologramas en dieléctricos gruesos es también importante para la creación de micro imágenes, lo que los hace prácticos para su uso en componentes holográficos y en una gran variedad de sistemas ópticos.

En mallas holográficas gruesas, tanto de transmisión como de reflexión, la difracción de la luz en el ángulo donde se cumple la relación de Bragg (o cerca de éste) es la condición que lleva a la reconstrucción eficiente del frente de ondas. El grabado volumétrico del patrón de interferencia holográfico (patrón de franjas) usualmente toma la forma de una modulación espacial de la constante de absorción o del índice de refracción del medio (o de ambos). La modulación de la constante de absorción se produce en emulsiones fotográficas convencionales, mientras que la modulación del índice de refracción se produce en materiales fotorrefractivos, gelatina dicromada o materiales fotopoliméricos.

Es importante conocer la eficiencia que presenten las mallas al convertir la luz en una onda reconstruida utilizable (eficiencia de difracción); su dependencia angular a partir de la luz incidente se relaciona con el ángulo de Bragg.

Para altas eficiencias de difracción la onda incidente se ve fuertemente disminuida, lo cual contradice la suposición de que la luz incidente no es perturbada por el proceso de difracción. El uso de la teoría de las ondas acopladas, propuesta por H. Kogelnik<sup>(9)</sup> resuelve este problema. Dicha teoría predice la máxima eficiencia posible de los distintos tipos de hologramas y la dependencia angular de longitud de onda para altas eficiencias de difracción. A continuación se presentará dicha teoría. Por simplicidad en el análisis, los patrones de interferencia para el grabado holográfico estarán restringidos a la forma sinusoidal y serán llamados mallas holográficas. Los patrones de mayor complejidad, se describen como superposiciones de estas mallas holográficas.

### 3.2 Teoría de ondas acopladas.

#### Análisis de ondas acopladas.

En esta teoría, se supone luz monocromática, polarizada perpendicularmente al plano de incidencia, para un haz lector de la malla holográfica en  $z=0$  y cerca del ángulo de Bragg. El mismo análisis puede ser realizado cuando la luz se encuentra polarizada paralela al plano de incidencia, modificando la cte. de acoplamiento  $\kappa^9$ . Se toman tan sólo dos ondas significativas presentes en la malla: la luz de referencia que entra  $R$  y la señal que sale con información  $S$ . Únicamente estas dos ondas obedecen a la condición de difracción de Bragg, al menos aproximadamente. Los órdenes de difracción mayor violan fuertemente la condición de Bragg, por lo que son despreciados. Existe, también, una pequeña influencia del intercambio de energía entre  $R$  y  $S$  debida al acoplamiento.

La Figura 3.2 muestra el modelo de una malla holográfica que se utiliza en el análisis. El eje  $Z$ , se escoge perpendicular a la superficie del medio; el eje  $X$  en el plano de incidencia, paralelo a la frontera del medio, el eje  $Y$ , perpendicular al papel. Los planos de la malla están orientados perpendicularmente al plano de incidencia e inclinados con respecto a la frontera del medio un ángulo  $\phi$ . El patrón de franjas se observa punteado en la Figura 3.2. El vector de la malla  $K$  está orientado perpendicularmente al plano de las franjas y su tamaño es  $K=2\pi/\Lambda$ , donde  $\Lambda$  es el periodo de la malla. Se considera a la

<sup>9</sup> Es importante señalar que en la mayoría de los casos  $\kappa$  no es una constante, como se observará más adelante.

misma constante dieléctrica promedio dentro y fuera de los límites de la malla. El ángulo de incidencia medido desde el medio es  $\theta$ .

La propagación de la onda en la malla está descrita por la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{E}(x,z)$  es la amplitud compleja de la componente  $\mathbf{Y}$  del campo eléctrico, que es tomada independiente de  $y$  y oscilando con frecuencia angular  $\omega$ . Para describir otro el tipo de polarización, ésto es, polarización de la luz en el plano de incidencia, hay que agregar el término  $-\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{E})$  que en dicho caso, no es necesariamente cero. La constante de propagación  $k(x,z)$  se encuentra espacialmente modulada y relacionada con la constante dieléctrica relativa  $\epsilon(x,z)$  y la conductividad  $\sigma(x,z)$  del medio por medio de

$$k^2 = \epsilon \omega^2 / c^2 - i \omega \mu \sigma \quad (3.14)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $\mu$  es la permeabilidad del medio, la cual suponemos que es igual a aquélla en el vacío. En este modelo las constantes del medio son independientes de  $y$ .

Las franjas de la malla holográfica aparecen debido a la modulación espacial de  $\epsilon$  ó  $\sigma$ :

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}) \quad (3.15a)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}) \quad (3.15b)$$

$\epsilon_1$  y  $\sigma_1$  son las amplitudes de la modulación espacial y  $\epsilon_0$  es la constante dieléctrica promedio y  $\sigma_0$  es la conductividad promedio del material.  $\epsilon$  y  $\sigma$  se suponen moduladas y en fase.  $\mathbf{x}$  es el radio vector y  $\mathbf{K}$  el vector de malla, que se escriben como :

$$\mathbf{x} = [x, y, z] ; \mathbf{K} = [\sin\phi, 0, \cos\phi] ; K = 2\pi/\Lambda$$

Las ecuaciones (3.14) y (3.15) pueden ser combinadas para formar

$$k^2 = \beta^2 - 2i\alpha\beta + 2\kappa\beta(e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}} + e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}}), \quad (3.16)$$

se introduce a  $\beta$  como la constante de propagación promedio y a  $\alpha$  como la constante de absorción promedio:

$$\beta = 2\pi(\epsilon_0)^{1/2}/\lambda ; \alpha = \mu\sigma_0/2(\epsilon_0)^{1/2} \quad (3.17)$$

$\kappa$  se le llama la constante de acoplamiento que se define como:

$$\kappa = \frac{1}{4} \left[ \frac{\epsilon_1 (2\pi/\lambda)}{\epsilon_0^{1/2}} - \frac{i\mu\sigma_1}{\epsilon_0^{1/2}} \right] \quad (3.18)$$

esta cantidad describe el acoplamiento entre la onda de referencia R y la señal S.  $\kappa$  es el parámetro central en la teoría de acoplamiento de ondas, si  $\kappa=0$  no hay acoplamiento entre R y S y, por lo tanto, no hay difracción.

Los medios ópticos se caracterizan por su índice de refracción y su constante de absorción. Es conveniente usar estos parámetros si las siguientes condiciones para  $n$ ,  $n_1$  y  $\alpha_1$ . (índice de refracción promedio, amplitudes de modulación espacial del índice de refracción y de la cte. de absorción, respectivamente; ecuaciones 3.15), se cumplen :

$$2\pi n/\lambda \gg \alpha; \quad 2\pi n/\lambda \gg \alpha_1; \quad n \gg n_1. \quad (3.19)$$

$\lambda$  es la longitud de onda en el espacio libre. Dichas condiciones son ciertas en casi todo caso práctico. Bajo las condiciones anteriores, podemos escribir con gran precisión:

$$\beta = 2\pi n/\lambda \quad (3.20)$$

y para la constante de acoplamiento

$$\kappa = \frac{\pi n_1}{\lambda} - \frac{i\alpha_1}{2}. \quad (3.21)$$

La modulación espacial representada por  $n_1$  (o por  $\alpha_1$ ) forman una malla que acopla a dos ondas R y S y genera un intercambio de energía entre ambas. Estas ondas son descritas con las amplitudes complejas  $R(z)$  y  $S(z)$  que varían a lo largo de  $z$  como resultado del intercambio de energía o bien, si existe absorción, pérdida debida a la absorción. El campo eléctrico total en la malla es la superposición de las dos ondas:

$$E = R(z)e^{-i\rho \cdot x} + S(z)e^{-i\sigma \cdot x}. \quad (3.22)$$

Los vectores de propagación  $\rho$  y  $\sigma$  contienen información acerca de las constantes de propagación y de las direcciones de propagación de R y S.  $\rho$  se supone igual al vector de propagación de la onda de referencia libre en ausencia del acoplamiento.  $\sigma$ , por tanto, es forzado a ser :

$$\sigma = \rho - \mathbf{K}. \quad (3.23)$$

Debido a la malla y a su relación con  $\rho$  y dado que debe cumplir con la relación de Bragg,  $\rho$  y  $\sigma$  han sido escogidos para ser lo más cercanos posibles a lo que sucede con el proceso físico de la difracción de la malla. Si las velocidades de fase difieren de alguna forma de sus valores supuestos, entonces estas amplitudes complejas aparecerán en las amplitudes de  $R(z)$  y  $S(z)$  como resultado de la teoría.

La figura 3.3 muestra los vectores de interés y su orientación. Las componentes de  $\rho$  son:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_x \\ 0 \\ \rho_z \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \text{sen}\theta \\ 0 \\ \text{cos}\theta \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

de (3.24) y de la ecuación (3.23), obtenemos que:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \text{sen}\theta - (K/\beta)\text{sen}\phi \\ 0 \\ \text{cos}\theta - (K/\beta)\text{cos}\phi \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

La relación vectorial (3.23) se muestra en la figura 3.4 dentro de un círculo de radio  $\beta$ . El caso general se muestra en la figura 3.4a, donde las condiciones de Bragg no se cumplen y la magnitud de  $\sigma$  difiere de la de  $\beta$ . En la figura 3.4b, se muestra el mismo diagrama pero para un ángulo de incidencia  $\theta_0$ . En este caso especial las magnitudes de  $\rho$  y  $\sigma$  son iguales a la constante de propagación libre  $\beta$  y la condición de Bragg:

$$\cos(\phi - \theta) = K/2|\beta| \quad (3.26)$$

se cumple.

Para una longitud de onda fija, la condición de Bragg no se satisface debido a desviaciones angulares,  $\Delta\theta$ , de  $\theta_0$ , el ángulo de Bragg. Para un ángulo de incidencia fijo, una violación de la condición de Bragg parecida se presenta al cabo para pequeños cambios de la longitud de onda  $\Delta\lambda$  de la longitud de onda correcta  $\lambda_0$ .

Escribimos entonces:

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta \text{ y } \lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda \quad (3.27)$$

supondremos en adelante que  $\Delta\lambda$  y  $\Delta\theta$  son pequeñas.

Los cambios angulares  $\Delta\theta$  tienen efectos muy parecidos en el comportamiento de la malla a los cambios de longitud de onda  $\Delta\lambda$  y existe una relación muy cercana entre la sensibilidad angular y la sensibilidad de longitud de onda de las mallas holográficas volumétricas. Tenemos una idea de esta relación derivando la condición de Bragg (3.26) de lo que resulta:

$$\frac{d\theta_0}{d\lambda_0} = \frac{K}{4\pi} \text{sen}(\phi - \theta_0). \quad (3.28)$$

La conexión  $\theta - \lambda$  en la medida de desfaseamiento  $\mathcal{V}$  que aparece en las ecuaciones de acoplamiento y que se define como:

$$\mathcal{V} \equiv \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\beta} = \text{cos}(\phi - \theta) - \frac{K^2}{4\pi} \lambda, \quad (3.29)$$

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_x \\ 0 \\ \rho_z \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \text{sen}\theta \\ 0 \\ \text{cos}\theta \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

de (3.24) y de la ecuación (3.23), obtenemos que:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \text{sen}\theta - (K/\beta)\text{sen}\phi \\ 0 \\ \text{cos}\theta - (K/\beta)\text{cos}\phi \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

La relación vectorial (3.23) se muestra en la figura 3.4 dentro de un círculo de radio  $\beta$ . El caso general se muestra en la figura 3.4a, donde las condiciones de Bragg no se cumplen y la magnitud de  $\sigma$  difiere de la de  $\beta$ . En la figura 3.4b, se muestra el mismo diagrama pero para un ángulo de incidencia  $\theta_0$ . En este caso especial las magnitudes de  $\rho$  y  $\sigma$  son iguales a la constante de propagación libre  $\beta$  y la condición de Bragg:

$$\cos(\phi - \theta) = K/2 |\beta| \quad (3.26)$$

se cumple.

Para una longitud de onda fija, la condición de Bragg no se satisface debido a desviaciones angulares,  $\Delta\theta$ , de  $\theta_0$ , el ángulo de Bragg. Para un ángulo de incidencia fijo, una violación de la condición de Bragg parecida se presenta al cabo para pequeños cambios de la longitud de onda  $\Delta\lambda$  de la longitud de onda correcta  $\lambda_0$ .

Escribimos entonces:

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta \text{ y } \lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda \quad (3.27)$$

supondremos en adelante que  $\Delta\lambda$  y  $\Delta\theta$  son pequeñas.

Los cambios angulares  $\Delta\theta$  tienen efectos muy parecidos en el comportamiento de la malla a los cambios de longitud de onda  $\Delta\lambda$  y existe una relación muy cercana entre la sensibilidad angular y la sensibilidad de longitud de onda de las mallas holográficas volumétricas. Tenemos una idea de esta relación derivando la condición de Bragg (3.26) de lo que resulta:

$$\frac{d\theta_0}{d\lambda_0} = \frac{K}{4\pi} \text{sen}(\phi - \theta_0). \quad (3.28)$$

La conexión  $\theta - \lambda$  en la medida de desfaseamiento  $\mathcal{V}$  que aparece en las ecuaciones de acoplamiento y que se define como:

$$\mathcal{V} \equiv \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\beta} = \text{cos}(\phi - \theta) - \frac{K^2}{4\pi} \lambda, \quad (3.29)$$

que ha sido expresada de esta forma usando la ecuación (3.25). Una expansión en series de Taylor de la ecuación (3.29) arroja la siguiente expresión para  $\mathcal{V}$ , que es correcta a primer orden de las desviaciones  $\Delta\lambda$  y  $\Delta\theta$ :

$$\mathcal{V} = \Delta\theta * K \operatorname{sen}((\phi - \theta_0) - \Delta\lambda (K^2/4\pi)) \quad (3.30)$$

Es importante que notar que  $\Delta\lambda$  y  $\Delta\theta$  producen un desfase idéntico en  $\mathcal{V}$  por su relación en la ecuación (3.28)

Ahora, es conveniente derivar las ecuaciones de acoplamiento de ondas: combinando las ecuaciones (3.13) y (3.16), e insertando las expresiones de (3.22) y (3.23), son comparados los términos con exponenciales iguales ( $e^{-i\rho^*x}$  y  $e^{-i\sigma^*x}$ ) llegando a que:

$$R'' - 2iR'\rho_z - 2i\alpha\beta R + 2\kappa\beta S = 0 \quad (3.31)$$

y

$$S'' - 2iS'\sigma_z - 2i\alpha\beta + (\beta^2 - \sigma^2)S + 2\kappa\beta R = 0 \quad (3.32)$$

donde las cantidades primadas indican diferenciación con respecto a  $z$ . Las ondas generadas en las direcciones de  $\rho + \mathbf{K}$  y  $\sigma + \mathbf{K}$  no son tomadas en cuenta junto con los órdenes de difracción mayor. En suma, será supuesto un intercambio lento de energía entre  $S$  y  $R$  y que la energía se absorbe lentamente (si es que se absorbe). la suposición anterior nos permite despreocupar  $R''$  y  $S''$ . Los resultados de la teoría serán revisados más adelante para una justificación detallada de este último paso. Introduciendo la ecuación (3.30) y reescribiendo, las ecuaciones anteriores quedan de la forma :

$$C_R R' + \alpha R = -i\kappa S; \quad (3.33)$$

$$C_S S' + (\alpha + j\mathcal{V})S = -i\kappa R, \quad (3.34)$$

éstas son las ecuaciones que describen el acoplamiento de ondas y son la base nuestro análisis.  $C_R$  y  $C_S$  se escriben como:

$$C_R = \rho_z / \beta = \cos\theta \quad (3.35)$$

$$C_S = \sigma_z / \beta = \cos\theta - (K/\beta)\cos\phi$$

La física del proceso de difracción se refleja en las ecuaciones de acoplamiento de ondas. Una onda cambia en amplitud a lo largo de  $z$  por el acoplamiento ( $\kappa R$ ,  $\kappa S$ ) o absorción ( $\alpha R$ ,  $\alpha S$ ) con otra onda. Al alterar la condición de Bragg,  $S$  es forzada a romper la sincronía con  $R$  y la interacción disminuye ( $\mathcal{V} S$ ).

El balance de energía del modelo de acoplamiento de ondas es descrito por la relación :

$$(C_R R R^* + C_S S S^*)' + 2\alpha(R R^* + S S^*) + (i(\kappa - \kappa^*)(R S^* + R^* S)) = 0 \quad (3.36)$$

donde el asterisco denota al complejo conjugado. La ec. 3.36 se deriva fácilmente de las ecuaciones (3.33) y (3.34) multiplicándolas por  $R^*$  y  $S^*$  respectivamente y sumando el resultado junto con el de los complejo conjugados. La presencia de los factores de

oblicuidad  $C_R$  y  $C_S$  en la primera parte de la ecuación (3.36) indica que la potencia del flujo de las 2 ondas en la dirección  $z$  se involucra en el balance de energía. En ausencia de pérdidas por disipación óhmica, este flujo de potencia se conserva. La segunda y tercera parte de la ecuación describe la pérdida de energía resultado de la absorción de la malla, correspondientes a los términos relevantes de  $\sigma EE^*$ .

### Solución de las ecuaciones de ondas acopladas.

Del anterior análisis se obtiene la solución general de las ecuaciones de ondas acopladas (eoa), que es:

$$R(z) = r_1 e^{\gamma_1 z} + r_2 e^{\gamma_2 z} \quad (3.37)$$

$$S(z) = s_1 e^{\gamma_1 z} + s_2 e^{\gamma_2 z} \quad (3.38)$$

donde  $r_j$  y  $s_j$  son constantes que dependen de las condiciones de frontera. Para determinar las constantes  $\gamma_j$ , se sustituyen la ecuaciones (3.37) y (3.38) en las eoa y obtenemos

$$(C_R \gamma_j + \alpha) r_j = -i \kappa s_j \quad (3.39)$$

$$(C_S \gamma_j + \alpha + i\mathcal{V}) s_j = -i \kappa r_j \quad (3.40)$$

$$j=1,2$$

Después de multiplicar una ecuación por la otra, se tiene una ecuación cuadrática para  $\gamma_j$

$$(C_R \gamma_j + \alpha)(C_S \gamma_j + \alpha + i\mathcal{V}) = -\kappa^2, \quad (3.41)$$

con solución :

$$\gamma_{1,2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{C_R} + \frac{\alpha}{C_S} + \frac{i\mathcal{V}}{C_S} \right) \pm \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\alpha}{C_R} - \frac{\alpha}{C_S} - \frac{i\mathcal{V}}{C_S} \right)^2 - \frac{4\kappa^2}{C_R C_S} \right]^{1/2} \quad (3.42)$$

En este punto es necesario desviarse un poco de la derivación principal, porque ahora se cuentan los recursos para verificar la validez de despreciar  $R''$  y  $S''$  en la sección 2.1. Este paso se justifica si las condiciones  $S'' \ll \sigma_z S'$  y  $R'' \ll \zeta_z R'$  se cumplen. Desde el punto de vista de las ecuaciones (3.37) y (3.38), las condiciones se cumplirán si  $\gamma_j \ll \beta$ . De acuerdo con la ecuación (3.42), el requerimiento de arriba se cumple si  $\Delta\theta \ll 1$  y si las desigualdades de la ecuación (3.19) se satisfacen ( que usualmente es el caso).

Para continuar con el análisis de las ondas acopladas, tenemos que determinar las constantes  $r_{ij}$  y  $s_j$ . Especificar condiciones de frontera al modelo se presenta necesario. Los valores en la frontera son diferentes entre hologramas de transmisión y de reflexión. La Figura 3.5 muestra el caso. Para ambos tipos de hologramas, la onda de referencia  $R$  inicia con amplitud unitaria en  $z=1$  y decae mientras se propaga hacia la derecha, transfiriendo energía a  $S$ . En los hologramas de transmisión,  $S$  comienza con amplitud 0

en  $z=0$  y se propaga hacia la derecha ( $C_S > 0$ ). En los hologramas de reflexión, en cambio,  $S$  se transmite hacia la izquierda ( $C_S < 0$ ) y comienza con amplitud 0 en  $z=d$ .

Se analizarán primero los hologramas de transmisión donde  $C_S > 0$  y con condiciones de frontera

$$R(0)=1 \quad S(0)=0. \quad (3.43)$$

Si metemos 3.43, condiciones de frontera, en las ecuaciones (3.37) y (3.38), nos quedan las siguientes ecuaciones :

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 1 \\ s_1 + s_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Combinando estas ecuaciones (3.44) con 3.40 tenemos que

$$s_1 = -s_2 = -\frac{i\kappa}{C_S(\gamma_1 - \gamma_2)} \quad (3.45)$$

Utilizando estas constantes en la ecuación (3.38) llegamos a una expresión para la amplitud de la onda a la salida de la malla

$$S(d) = \frac{i\kappa}{C_S(\gamma_1 - \gamma_2)} (e^{\gamma_2 d} - e^{\gamma_1 d}) \quad (3.46)$$

Esta es una expresión general que es válida para todo tipo de hologramas volumétricos de transmisión incluyendo los casos de incidencia distinta al ángulo de Bragg, mallas con pérdida y franjas de malla inclinadas respecto a su superficie.

El análisis de los hologramas de reflexión tiene un comportamiento parecido al anterior.

Tenemos que  $C_S < 0$  y las condiciones de frontera están dadas por

$$R(0)=1, \quad S(d)=0 \quad (3.47)$$

El plano de salida está ahora en  $z=0$  y  $S(0)$  es la amplitud de salida.

Imponiendo las condiciones de frontera en las ecuaciones (3.37) y (3.38), tenemos que

$$r_1 + r_2 = 1 \quad (3.48a)$$

$$s_1 e^{\gamma_2 d} + s_2 e^{\gamma_1 d} = 0. \quad (3.48b)$$

Continuando con el desarrollo, la ecuación 3.48b, depende de  $s_1$  y  $s_2$  y se escribe de la forma :

$$s_1 (e^{\gamma_2 d} - e^{\gamma_1 d}) = (s_1 + s_2) e^{\gamma_2 d} \quad (3.49)$$

$$s_2 (e^{\gamma_2 d} - e^{\gamma_1 d}) = -(s_1 + s_2) e^{\gamma_1 d}.$$

Sumando las ecuaciones que resultan de (3.40) para  $j=1$  y para  $j=2$  se obtiene la relación:

$$-i\kappa(r_1+r_2)=-i\kappa=(s_1+s_2)(\alpha+i\varphi)+C_S(\gamma_1s_1+\gamma_2s_2). \quad (3.50)$$

Usando las relaciones (3.49) para sustituir la suma  $(s_1+s_2)$  por los términos  $s_1$  y  $s_2$  en esta ecuación se llega finalmente al resultado para la amplitud de la señal de salida  $S(0)$ , del holograma de reflexión :

$$S(0)=s_1+s_2=-i\kappa / \{\alpha+i\varphi+C_S[\gamma_1 e^{\gamma_1 d}-\gamma_2 e^{\gamma_2 d}] / (e^{\gamma_1 d}-e^{\gamma_2 d})\} \quad (3.51)$$

Ésta es nuevamente una ecuación de validez muy general para los hologramas de reflexión, incluyendo incidencia fuera del ángulo de Bragg, pérdidas e inclinación.

De este desarrollo, la *eficiencia de difracción*  $\eta$  que se define como

$$\eta = \left( \frac{|C_S|}{C_R} \right) \frac{SS^*}{RR^*} \quad (3.52)$$

donde  $S$  es la amplitud compleja de la señal de salida para una señal de referencia  $R$ , que en adelante será unitaria, si no se indica lo contrario.  $\eta$  es la fracción de la potencia luminosa incidente que es difractada hacia la señal de salida.  $S$  es igual a  $S(d)$  para mallas de transmisión y a  $S(0)$  para mallas de reflexión en la notación de esta sección. Por razones de simplicidad los argumentos no serán escritos en la secciones siguientes.

Los factores de oblicuidad  $C_S$  y  $C_R$  aparecen en la anterior definición por la misma razón que aparecen en la ecuación del balance de energía (3.36): en la ausencia de pérdidas, es la potencia del flujo la que se conserva. Además,  $C_S$  y  $C_R$  tienen que ver directamente con la inclinación de la malla respecto al haz de incidencia. La ecuación 3.52 es idéntica a la ecuación (3.12), salvo por la notación y por el factor  $|C_S|/C_R$  que se incluye por los argumentos anteriores.

Para mallas inclinadas el factor de inclinación  $c$  es importante que es definido como la razón entre los factores de oblicuidad

$$c = \frac{C_S}{C_R} = - \frac{\cos\theta}{\cos(\theta_0 - 2\phi)}$$

que ha sido expresado aquí, para incidencia de Bragg, en términos del ángulo de incidencia  $\theta_0$  y del ángulo de inclinación  $\phi$ . Para hologramas de transmisión,  $c$  es positivo ( $c>0$ ), y para hologramas de reflexión  $c$  es negativo ( $c<0$ ).

Los resultados aquí expuestos son lo más general posibles. Sin embargo, una amplia gama de suposiciones se han realizado para hacer simple el análisis de acoplamiento de ondas. Es apropiado enlistar nuevamente estas suposiciones para dejar en claro el rango de validez de la teoría. Se ha supuesto que:

- La modulación espacial del índice de refracción y de la cte. de absorción son sinusoidales.
- Existe una pequeña pérdida debida a la absorción, por longitud de onda y un intercambio de energía “lento” entre las dos ondas acopladas. Esta suposición esta expresada en la ecuación (3.19) y justifica no tomar en cuenta a las segundas derivadas R” y S” en el análisis.
- Se toma el mismo índice de refracción promedio, n, para las regiones dentro y fuera de la malla de interferencia. Si la malla tiene frontera con el aire, la ley de Snell debe ser usada para corregir los cambios angulares debidos a la refracción.
- La incidencia de la luz debe ser cerca o en el ángulo de Bragg y solo los órdenes de difracción que cumplen con la condición de Bragg se toman en cuenta en el análisis. Se pueden ofrecer argumentos físicos mas detallados para mostrar que esta suposición limita la validez de la teoría para mallas volumétricas anchas donde la sincronía de la fase entre las dos ondas tiene tiempo suficiente para crear efectos fuertes y dominantes.

La teoría es corroborada por medio de desarrollos como el que a continuación se realizará comparándolos con los resultados experimentales de mallas específicas.

### 3.3. Calculo de la eficiencia de difracción dependiente del campo de las cargas espaciales

El cálculo que aquí se realiza se presenta bajo las siguientes condiciones:

Se tiene una malla previamente escrita dentro del material fotorrefractivo, es decir, estamos leyendo la información que ya se encuentra ahí almacenada. Dado lo común que resulta el uso del  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  (BSO) y lo típico del material en cuanto a un ejemplo de un fotorrefractivo común, el cálculo que aquí se presenta, es para este material (entendiéndose que la mayoría de los fotorrefractivos se comportan de manera muy parecida, además de que el BSO no presenta efecto fotovoltaico). Otra propiedad por la que se ha elegido el BSO ya que para aplicaciones, su sensibilidad a la luz es muy alta y, por tanto, su velocidad de respuesta también. Se hace incidir, una onda lectora con amplitud  $A_i$ , en tanto que al otro lado del material y después de haber seguido el proceso de acoplamiento de haces donde el haz que entra le cede energía al haz que sale, obtendremos la señal de salida con amplitud  $A_d$  con la información escrita de la malla.

De la sección 3.1, a partir de la ecuación de onda (3.4) y haciendo las suposiciones adecuadas, bajo el mismo criterio que en dicha sección, llegamos a las ecuaciones (3.7) que son:

$$\frac{dA_i}{dz} + i\kappa A_d = 0 \quad (3.7a)$$

$$\frac{dA_d}{dz} + i\kappa A_i = 0 \quad (3.7b)$$

con

$$\kappa = \frac{\omega n_1}{2c \cos \theta} \quad (3.8)$$

$\kappa$  es el parámetro de acoplamiento y, como ya se mencionó en la sección anterior, éste es el parámetro fundamental de la teoría del acoplamiento de ondas. En este caso y dado que la modulación del índice de refracción,  $n_1$ , no es una constante, sino que varía con el campo de cargas espaciales  $E_s$  que al mismo tiempo es función de la razón de modulación,  $m$ , que es función del ancho de la muestra, su relación se observa en la ecuación:

$$n_1 = \frac{1}{2} n^3 r E_s m, \quad (3.53)$$

siendo  $m$  la ya mencionada razón de modulación y  $r$  el coeficiente electroóptico correspondiente. Como  $E_s = E_1 / m$ , sustituyendo en la anterior ecuación nos queda

$$n_1 = \frac{1}{2} n^3 r E_1 \quad (3.54)$$

donde  $E_1$  es la primera componente de Fourier del desarrollo del campo de las cargas espaciales cuya modulación varía con el eje  $z$  (ancho de la muestra) dada su dependencia con el parámetro de contraste de franjas  $m$  que veremos más adelante.

La ecuación (3.53) se obtiene al encontrar la componente direccional del índice de refracción, aplicando un campo eléctrico sobre el material, lo que se traduce en un cambio en la orientación de la estructura del material y por tanto, una reorientación de los ejes ópticos principales y en los respectivos índices. En la figura 3.6 se muestra esquemáticamente la relación entre los ejes ópticos antes y después de aplicado el campo eléctrico.

Tenemos que el tensor del índice de refracción cuando se le ha aplicado el campo eléctrico y bajo la estructura de KDP<sup>10</sup> ( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ) queda:

$$\left( \frac{1}{n^2} \right)_{ij} = \begin{vmatrix} 1/n_0^2 & r_{63}E_z & r_{41}E_y \\ r_{63}E_z & 1/n_0^2 & r_{41}E_x \\ r_{41}E_x & r_{41}E_y & 1/n_0^2 \end{vmatrix},$$

eq. (3.55)

donde  $r_{63}$  y  $r_{41}$  son las componentes del tensor electroóptico que se ven involucrados bajo estas condiciones de la estructura de este material; y  $n_0$  y  $n_e$  son los índices ordinario y extraordinario respectivamente. Si el campo se aplica a lo largo de  $Z$ ,  $E_x = E_y = 0$  y  $E_z = E$ . Lo que sigue, es diagonalizar la matriz para encontrar los componentes

<sup>10</sup> Se utiliza este tipo de material, ya que es un ejemplo relevante entre la mayoría de los fotorrefractivos. Este cristal es ópticamente uniaxial.

direccionales del índice de refracción una vez aplicado el campo eléctrico a lo largo del eje principal.

Las ecuaciones para determinar los vectores propios (o direcciones ópticas principales  $V_i$ ) están dadas por:

$$(1/n^2)_{ij} V_j - v_i V_i = 0, \quad (3.56)$$

donde  $v_i$  son los valores propios correspondientes (o índices principales).

Al diagonalizar la matriz (3.55) para los valores propios  $v_i$ , debemos resolver el conjunto de ecuaciones homogéneas que resulten de encontrar el determinante de la siguiente matriz :

$$(1/n^2)_{ij} - v_i \delta_{ij} = \begin{vmatrix} 1/n_0^2 - v_1 & r_{63}E & 0 \\ r_{63}E & 1/n_0^2 - v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_0^2 - v_3 \end{vmatrix} \quad (3.57)$$

de aquí<sup>11</sup>, se obtienen los siguientes índices principales ( $v_i$ ):

$$\begin{aligned} v_1 &= 1/n_e^2 \\ v_2 &= 1/n_0^2 + r_{63}E \\ v_3 &= 1/n_0^2 - r_{63}E \end{aligned} \quad (3.58)$$

Obteniendo las nuevas direcciones principales de los índices a partir de la ecuación (3.56), uno llega a que

Parav<sub>1</sub>:  $X=0, Y=0$  y que el eje  $Z$  no varía, esto es  $Z \equiv Z'$ . Parav<sub>2</sub>:  $X+Y=0, Z=0$  (eje  $Y'$ ), y para  $v_3$ :  $X-Y=0, Z=0$  (eje  $X'$ ).

De las ecuaciones (3.58) obtenemos:

$$\begin{aligned} n_{x'} &= \frac{n_0}{(1 + n_0^3 r_{63} E)^{1/2}} \\ n_{y'} &= \frac{n_0}{(1 - n_0^3 r_{63} E)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$n_{z'} = n_z \approx n_e$$

Dado que  $r_{63} E$  es en general un término muy pequeño, podemos escribir (3.59) como

<sup>11</sup> después de realizada el álgebra correspondiente

$$n_x = \frac{n_0}{(1 + n_0^3 r_{63} E)^{1/2}} \approx n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 r_{63} E$$

$$n_y = \frac{n_0}{(1 - n_0^3 r_{63} E)^{1/2}} \approx n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 r_{63} E \quad (3.60)$$

$$n_z \approx n_e$$

Si identificamos a la ecuación (3.60) con el desarrollo del índice de refracción (3.2) podemos observar que el segundo término de la primera y de la segunda ecuaciones se refieren a la modulación del índice de refracción  $n_1$ , lo que nos lleva a la ecuación (3.53).

Una vez justificado este paso podemos desacoplar las ecuaciones (3.7) para encontrar las soluciones para las Amplitudes  $A_i$  y  $A_d$  y así calcular la eficiencia de difracción con el cociente de sus normas al cuadrado.

Se van a resolver las ecuaciones 3.7 para  $A_i$  y  $A_d$  ya que no es posible ponerlas en términos de las intensidades  $I_i$  e  $I_d$  porque al momento de desacoplar y sustituir el valor de  $\kappa$ , ésta no depende ni de  $A_i$  ni de  $A_d$ , lo que nos lleva a términos cruzados de estos y no a expresiones directas para las intensidades.

Desacoplando las ecuaciones 3.7, derivando 3.7a y sustituyendo el resultado en 3.7b, y derivando 3.7b y sustituyéndolo en 3.7a, resultando las siguientes 2 ecuaciones

$$\frac{d^2 A_i}{dz^2} + \kappa^2 A_i = 0 \quad (3.61a)$$

$$\frac{d^2 A_d}{dz^2} + \kappa^2 A_d = 0 \quad (3.61b)$$

Estas ecuaciones se obtuvieron suponiendo a  $\kappa$  constante. Son ecuaciones del oscilador armónico y sus soluciones son bien conocidas. Sin embargo, existe una dependencia en  $z$  de este parámetro de acoplamiento. Para conocer la dependencia de  $\kappa$  con respecto a  $z$  es necesario conocer la variación del campo de las cargas espaciales respecto  $z$ , e incluir esta dependencia en las ecuaciones (3.61) y resolverla ya con la dependencia en  $z$  establecida. Comúnmente, esto puede resultar muy complicado porque la variación del campo en  $z$  puede ser igualmente complicada. La manera de resolver este problema, es dividiendo la muestra en segmentos o "rebanadas" en donde la variación de  $\kappa$  sea menor que 0.1% y pueda considerarse como una constante (fig. 3.7) y así conocer su variación en  $z$ .

El procedimiento de cómo calcular la eficiencia de difracción será mostrado más adelante, por lo pronto se resolverán las ecuaciones (3.61).

Tenemos entonces, que para un cierto punto  $Z=Z_0$ , las condiciones iniciales son:

$$A_i(z=z_0)=A_i(z_0) \quad (3.62a)$$

$$A_d(z=z_0)=A_d(z_0) \quad (3.62b)$$

Además de las ecuaciones (3.7) obtenemos que:

$$\frac{dA_i}{dz}(z_0) = -i\kappa A_d(z_0) \quad (3.63a)$$

$$\frac{dA_d}{dz}(z_0) = -i\kappa A_i(z_0) \quad (3.63b)$$

que serán las segundas condiciones iniciales para cada ecuación.

La solución más general para las ecuaciones 3.61, se escribe como:

$$A_i = A_{i1} e^{i z\kappa} + A_{i2} e^{-i z\kappa}, \quad (3.64a)$$

$$A_d = A_{d1} e^{i z\kappa} + A_{d2} e^{-i z\kappa}. \quad (3.64b)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.62) en (3.61) las condiciones iniciales nos quedan como:

$$A_i(z_0) = A_{i1} e^{i z_0\kappa} + A_{i2} e^{-i z_0\kappa} \quad (3.65a)$$

$$A_d(z_0) = A_{d1} e^{i z_0\kappa} + A_{d2} e^{-i z_0\kappa} \quad (3.65b)$$

Derivando (3.64) e igualando con (3.63) y evaluando en  $z_0$ , las segundas condiciones iniciales nos quedan como:

$$\frac{dA_i}{dz}(z_0) = A_{i1} e^{i z_0\kappa} - A_{i2} e^{-i z_0\kappa} = -A_d(z_0),$$

$$\frac{dA_d}{dz}(z_0) = A_{d1} e^{i z_0\kappa} - A_{d2} e^{-i z_0\kappa} = -A_i(z_0),$$

$$\Rightarrow A_{i1} e^{i z_0\kappa} - A_{i2} e^{-i z_0\kappa} = -A_d(z_0), \quad (3.66a)$$

$$A_{d1} e^{i z_0\kappa} - A_{d2} e^{-i z_0\kappa} = -A_i(z_0). \quad (3.66b)$$

Las anteriores expresiones nos llevan a dos sistemas de ecuaciones lineales ((3.65a) con (3.66a) ; y (3.65b) con (3.66b)) para las incógnitas  $A_{i1}$  y  $A_{i2}$ :

$$-A_d(z_0) = A_{i1} e^{i z_0\kappa} - A_{i2} e^{-i z_0\kappa},$$

$$A_i(z_0) = A_{i1} e^{i z_0\kappa} + A_{i2} e^{-i z_0\kappa}$$

y para  $A_{d1}$  y  $A_{d2}$ :

$$A_d(z_0) = A_{d1} e^{i z_0 \kappa} + A_{d2} e^{-i z_0 \kappa},$$

$$-A_i(z_0) = A_{d1} e^{i z_0 \kappa} - A_{d2} e^{-i z_0 \kappa}.$$

Resolviendo estos sistemas de ecuaciones llegamos a que

$$A_i(z) = A_i(z_0) \cos \kappa(z-z_0) - i A_d(z_0) \operatorname{sen} \kappa(z-z_0), \quad (3.67a)$$

$$A_d(z) = A_d(z_0) \cos \kappa(z-z_0) - i A_i(z_0) \operatorname{sen} \kappa(z-z_0). \quad (3.67b)$$

que son las amplitudes de las ondas incidente y difractada por la malla.

Podemos, ahora sí, encontrar las intensidades de los haces calculando los productos  $I_i(z) = |A_i(z) A_i(z)^*|$  y  $I_d(z) = |A_d(z) A_d(z)^*|$ , donde \* significa el complejo conjugado del término correspondiente.

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} I_i(z) &= |A_i(z) A_i^*(z)| = \\ &= [A_i(z_0) \cos \kappa(z-z_0) - i A_d(z_0) \operatorname{sen} \kappa(z-z_0)] [A_i^*(z_0) \cos \kappa(z-z_0) + i A_d^*(z_0) \operatorname{sen} \kappa(z-z_0)] = \\ &= I_i(z_0) \cos^2 \kappa(z-z_0) + I_d(z_0) \operatorname{sen}^2 \kappa(z-z_0) + i [A_i(z_0) A_d^*(z_0) - A_i^*(z_0) A_d(z_0)] \\ &\quad \times \cos \kappa(z-z_0) \operatorname{sen} \kappa(z-z_0) \end{aligned}$$

Por lo que

$$I_i(z) = I_i(z_0) \cos^2 \kappa(z-z_0) + I_d(z_0) \operatorname{sen}^2 \kappa(z-z_0) + i [A_i(z_0) A_d^*(z_0) - A_i^*(z_0) A_d(z_0)] \times \cos \kappa(z-z_0) \operatorname{sen} \kappa(z-z_0) \quad (3.68)$$

y análogamente para  $I_d(z)$ :

$$I_d(z) = I_d(z_0) \cos^2 \kappa(z-z_0) + I_i(z_0) \operatorname{sen}^2 \kappa(z-z_0) - i [A_i(z_0) A_d^*(z_0) - A_i^*(z_0) A_d(z_0)] \times \cos \kappa(z-z_0) \operatorname{sen} \kappa(z-z_0) \quad (3.69)$$

que son las expresiones para las intensidades de las ondas incidente y difractada que participan en el proceso de acoplamiento. No podemos, sin embargo, calcular la eficiencia de difracción con estas expresiones, ya que tienen términos cruzados en  $A_i$  y  $A_d$ , por lo que recurrimos al siguiente procedimiento: multiplicamos la expresión (3.7 a) por  $A_i^*$  y le sumamos el complejo conjugado del resultado:

$$A_i^* \frac{dA_i}{dz} + \frac{dA_i^*}{dz} A_i - i \kappa (A_i A_d^* - A_i^* A_d) = \frac{dI_i}{dz} - i \kappa (A_i A_d^* - A_i^* A_d) = 0$$

esto es:

$$(-i/\kappa) \frac{dI_i}{dz} = (A_i A_d^* - A_i^* A_d) \quad (3.70)$$

análogamente para  $I_d$ , nos queda que:

$$(i/\kappa) \frac{dI_d}{dz} = (A_i A_d^* - A_i^* A_d) \quad (3.71)$$

evaluando (3.70) y (3.71) en  $z=z_0$  y sustituyéndolos en (3.68) y (3.69) respectivamente y dado que  $\cos\kappa(z-z_0)\sin\kappa(z-z_0) = \sin 2\kappa(z-z_0)/2$ , estas últimas ecuaciones nos resultan:

$$I_i(z) = I_i(z_0)\cos^2\kappa(z-z_0) + I_d(z_0)\sin^2\kappa(z-z_0) + (1/2\kappa) \frac{dI_i}{dz}(z_0) \sin 2\kappa(z-z_0) \quad (3.72)$$

$$I_d(z) = I_d(z_0)\cos^2\kappa(z-z_0) + I_i(z_0)\sin^2\kappa(z-z_0) + (1/2\kappa) \frac{dI_d}{dz}(z_0) \sin 2\kappa(z-z_0) \quad (3.73)$$

Por conservación de energía, las intensidades de onda deben cumplir la relación  $I_0 = I_i + I_d$  para toda  $z$ , específicamente para  $z=z_0$ , también se cumple por lo que usando esta relación convenientemente en (3.72) y (3.73), nos quedan las ecuaciones:

$$I_i(z) = I_i(z_0)[\cos^2\kappa(z-z_0) - \sin^2\kappa(z-z_0)] + I_0\sin^2\kappa(z-z_0) + (1/2\kappa) \frac{dI_i}{dz}(z_0) \sin 2\kappa(z-z_0) \quad (3.74)$$

$$I_d(z) = I_d(z_0)[\cos^2\kappa(z-z_0) - \sin^2\kappa(z-z_0)] + I_0\sin^2\kappa(z-z_0) + (1/2\kappa) \frac{dI_d}{dz}(z_0) \sin 2\kappa(z-z_0) \quad (3.75)$$

Con la relación  $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ , (3.74) y (3.75) quedan como:

$$I_i(z) = I_i(z_0)\cos 2\kappa(z-z_0) + I_0\sin^2\kappa(z-z_0) + (1/2\kappa) \frac{dI_i}{dz}(z_0) \sin 2\kappa(z-z_0) \quad (3.76)$$

$$I_d(z) = I_d(z_0)\cos 2\kappa(z-z_0) + I_0\sin^2\kappa(z-z_0) + (1/2\kappa) \frac{dI_d}{dz}(z_0) \sin 2\kappa(z-z_0) \quad (3.77)$$

Una vez llegado a este resultado y conociendo la variación de  $\kappa$  con  $z$ , podemos comenzar el cálculo de las eficiencias de difracción. Utilizando los resultados del trabajo realizado por Murillo, Magaña, Carrascosa y Agulló-López<sup>xvi</sup>, en donde se resuelven numéricamente las ecuaciones del material y se encuentra la variación de los componentes del desarrollo de Fourier del campo eléctrico con respecto al contraste de franjas (o razón de modulación)  $m^{12}$ ; se realiza un cálculo numérico (a través de un programa de cómputo) para asociar las dependencias con  $m$  del parámetro de acoplamiento ( $\kappa$ ). El programa comienza por calcular los valores de  $\kappa$  comparando las variaciones de  $m$  menores al 0.1%<sup>13</sup> con respecto a  $z$ , para poder tomar a  $\kappa$  como una constante en ese intervalo y usar las ecuaciones arriba expuestas.

Conocida la variación del parámetro de acoplamiento con el ancho de la muestra, el cálculo de la variación de las intensidades de la luz con  $z$  se realiza utilizando la ya evaluada  $\kappa$  y las condiciones iniciales para cada uno de los rayos, que son: cuando  $z=0$ .

<sup>12</sup> Como se desarrollará mas adelante, la eficiencia de difracción varía con la razón de modulación.

<sup>13</sup> de ahí las pequeñas "rebanadas" de muestra a lo largo del eje  $z$ ,

$I_i = 5\text{mw/cm}^2$  e  $I_d = 0$ . Se realiza el cálculo numérico para cada una de ellas con la ecuaciones 3.76 y 3.77 al lo ancho de toda la muestra, tomando la primera variación de  $\kappa$ , menor al 0.1%<sup>14</sup> para considerarla prácticamente constante. Para  $z=0$ , las derivadas de ambas intensidades son cero.

Con las funciones  $I_i(z)$  e  $I_d(z)$ , para este intervalo inicial, se calculan sus derivadas y se recalculan los valores de  $I_i$  e  $I_d$  hasta encontrar la siguiente variación de  $\kappa$  mayor al 1%. repitiéndose este proceso hasta cubrir toda la muestra.

Calculadas finalmente  $I_i$  e  $I_d$ , se puede directamente calcular  $\eta$  a partir de la definición (3.12). Las aproximaciones comúnmente usadas para  $\eta$  varían como el seno cuadrado del argumento  $\kappa z$ , ya que  $I_i$  se toma como el *cos*  $\kappa z$  e  $I_d$  como el *sen*  $\kappa z$  y como  $\eta$  es el cociente al cuadrado del segundo entre el primero, para  $z$  pequeña, se aproxima como el seno cuadrado, aunque en realidad es una tangente al cuadrado. Utilizando el cálculo para  $\kappa$ , es posible calcular también estas dos aproximaciones y compararlas con el cálculo realizado en este trabajo.

#### 4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Es importante resaltar que los resultados que aquí se presentan son inéditos, ya que, de lo que se ha revisado de la literatura correspondiente, no han sido hasta ahora reportados.

Se han considerado tres valores del campo eléctrico externo aplicado al grabar y cuatro para la razón de modulación a la entrada. Los campos aplicados son: 2.5 KV/cm, 5.0 KV/cm y 10 KV/cm. Los valores iniciales para el contraste de franjas  $m=0.01, 0.3, 0.6, 0.9$ . Los resultados se muestran en las figuras de las páginas siguientes de la 4.1 a la 4.17.

En la siguiente tabla, se observan los valores calculados para los máximos de la eficiencia (ver Figuras 4.3, 4.9 y 4.14). Para  $m=0.01$  los valores enlistados no son necesariamente los máximos de la eficiencia, ya que dadas las condiciones del sistema, el máximo deberá alcanzarlo en una muestra con dimensiones mucho mayores.

	$\eta_{\max}$			
	$m=0.01$	$m=0.3$	$m=0.6$	$m=0.9$
$E=2.5\text{KV/cm}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	0.31	4.1	27.68
$E=5\text{KV/cm}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	3.7	6.32	62.8
$E=10\text{KV/cm}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$	3.48	9.38	$8.19 \cdot 10^5$

En las figuras 4.3, 4.9 y 4.14 se observa claramente que al aumentar la razón de modulación inicial y el campo eléctrico, aumenta la eficiencia de difracción. Si se mantiene el campo eléctrico externo fijo y aumenta la razón de modulación inicial, se alcanzan valores mas pequeños de eficiencia que si se mantiene fija la razón de

<sup>14</sup> estas variaciones pueden ser ligeramente mayores dependiendo de los resultados que se obtengan y para no limitar tanto el cálculo

$I_i = 5\text{mw/cm}^2$  e  $I_d = 0$ . Se realiza el cálculo numérico para cada una de ellas con la ecuaciones 3.76 y 3.77 al lo ancho de toda la muestra, tomando la primera variación de  $\kappa$ . menor al  $0.1\%$ <sup>14</sup> para considerarla prácticamente constante. Para  $z=0$ , las derivadas de ambas intensidades son cero.

Con las funciones  $I_i(z)$  e  $I_d(z)$ , para este intervalo inicial, se calculan sus derivadas y se recalculan los valores de  $I_i$  e  $I_d$  hasta encontrar la siguiente variación de  $\kappa$  mayor al  $1\%$ , repitiéndose este proceso hasta cubrir toda la muestra.

Calculadas finalmente  $I_i$  e  $I_d$ , se puede directamente calcular  $\eta$  a partir de la definición (3.12). Las aproximaciones comúnmente usadas para  $\eta$  varían como el seno cuadrado del argumento  $\kappa z$ , ya que  $I_i$  se toma como el *cos*  $\kappa z$  e  $I_d$  como el *sen*  $\kappa z$  y como  $\eta$  es el cociente al cuadrado del segundo entre el primero, para  $z$  pequeña, se aproxima como el seno cuadrado, aunque en realidad es una tangente al cuadrado. Utilizando el cálculo para  $\kappa$ , es posible calcular también estas dos aproximaciones y compararlas con el cálculo realizado en este trabajo.

#### 4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Es importante resaltar que los resultados que aquí se presentan son inéditos, ya que, de lo que se ha revisado de la literatura correspondiente, no han sido hasta ahora reportados.

Se han considerado tres valores del campo eléctrico externo aplicado al grabar y cuatro para la razón de modulación a la entrada. Los campos aplicados son: 2.5 KV/cm, 5.0 KV/cm y 10 KV/cm. Los valores iniciales para el contraste de franjas  $m=0.01, 0.3, 0.6, 0.9$ . Los resultados se muestran en las figuras de las páginas siguientes de la 4.1 a la 4.17.

En la siguiente tabla, se observan los valores calculados para los máximos de la eficiencia (ver Figuras 4.3, 4.9 y 4.14). Para  $m=0.01$  los valores enlistados no son necesariamente los máximos de la eficiencia, ya que dadas las condiciones del sistema, el máximo deberá alcanzarlo en una muestra con dimensiones mucho mayores.

	$\eta_{\max}$			
	$m=0.01$	$m=0.3$	$m=0.6$	$m=0.9$
$E=2.5\text{KV/cm}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	0.31	4.1	27.68
$E=5\text{KV/cm}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	3.7	6.32	62.8
$E=10\text{KV/cm}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$	3.48	9.38	$8.19 \cdot 10^5$

En las figuras 4.3, 4.9 y 4.14 se observa claramente que al aumentar la razón de modulación inicial y el campo eléctrico, aumenta la eficiencia de difracción. Si se mantiene el campo eléctrico externo fijo y aumenta la razón de modulación inicial, se alcanzan valores mas pequeños de eficiencia que si se mantiene fija la razón de

<sup>14</sup> estas variaciones pueden ser ligeramente mayores dependiendo de los resultados que se obtengan y para no limitar tanto el cálculo

modulación y se aumenta el campo eléctrico externamente aplicado. Incluso, para la última de las variaciones (razón de modulación fija y cambio en el campo eléctrico) la distancia en la que se alcanza el máximo es menor. Por lo tanto, si es necesario reducir el tamaño de una muestra pero tener al mismo tiempo altas eficiencias, resulta mejor grabar la muestra con un campo eléctrico relativamente grande que grabarla con una razón de modulación alta. Si ambas técnicas son combinadas, los resultados serán óptimos.

De una inspección detallada de las gráficas de las páginas siguientes, se observa que para valores pequeños del contraste de las franjas (o razón de modulación),  $m$  (figuras 4.1, 4.7 y 4.11) los 3 cálculos,  $\eta_{sen}$ ,  $\eta_{tan}$  y  $\eta_{cal}$ , son muy parecidos, sobre todo y como es de esperarse, las aproximaciones del seno cuadrado ( $\eta_{sen}$ ) y de la tangente cuadrada ( $\eta_{tan}$ ). La aproximación numérica ( $\eta_{cal}$ ), en cambio, para estos valores, es ligeramente diferente. Como la eficiencia de difracción no crece mucho, puede tomarse cualquiera de las tres aproximaciones para predecir este comportamiento dentro de éstos rangos, a menos que la precisión requerida sea muy grande; entonces el método aquí reportado es el óptimo. En general, la aproximación  $\eta_{sen}$  se considera con mayor frecuencia pues, para ésta situación, la aproximación lineal es válida.

Mientras aumenta la razón de modulación inicial (figuras 4.2 y 4.8), las tres aproximaciones difieren entre sí cada vez más:  $\eta_{sen}$  no puede ser mayor que uno y se rezaga en tanto  $\eta_{cal}$  se parece cada vez más a  $\eta_{tan}$  (sin llegar a ser del todo iguales). Para espesores pequeños (menores a 0.4 cm) es indistinto la aproximación que se utilice.

Si el valor del campo aplicado aumenta (figuras 4.7, 4.12 y 4.13), la diferencia de  $\eta_{cal}$  con las otras dos aproximaciones es más clara.  $\eta_{sen}$  deja de ser conmensurable y su valor es cada vez más cercano a  $\eta_{tan}$  sin que esto signifique que sean iguales. El intervalo de distancia en el que el modelo lineal sigue funcionando es cada vez más pequeño, el cual no es útil si se pretenden ganancias grandes.

Para los valores que nos interesan,  $\eta$ 's grandes (fig. 4.2, 4.8, 4.12 y 4.13),  $\eta_{tan}$  es mucho mayor que  $\eta_{cal}$  y sus máximos no coinciden en los mismos espesores.

En las figuras 4.4, 4.10 y 4.15 se muestra la variación con el espesor del parámetro de acoplamiento  $\kappa$  (líneas sólidas), comparándolas con la variación del contraste de franjas  $m$  (líneas punteadas). Como  $\kappa$  se calcula usando la variación de  $m$ , es de esperarse que tengan una evolución parecida.

En la figura 4.4 se observa que  $\kappa$  es menor que  $m$  y que las curvas se aproximan en los máximos. Por otra parte, en las figuras 4.10 y 4.15,  $\kappa$  es mayor que  $m$  y en los máximos, por el contrario, tienden a alejarse, en 4.15 la diferencia es mucho más notoria. El anterior análisis nos indica que  $\kappa$  tiene una fuerte tendencia no lineal mientras el campo eléctrico se incrementa. Este resultado nos indica que es un error tomar a  $\kappa$  como constante porque su variación está lejos de serlo.

En las gráficas 4.5, 4.6, 4.16 y 4.17 se muestra la variación con el espesor de las intensidades de los patrones de luz incidente y difractada. Al comparar una con otra para los mismos valores de campo eléctrico se observa como la onda incidente le cede

energía a la onda difractada. También es claro que mientras la razón de modulación inicial aumenta, el intercambio de energía entre los haces se incrementa en regiones mas cercanas ala entrada de la luz.

La mayor parte de los experimentos con fotorrefractivos se realizan en el intervalo lineal. donde los valores de  $m$  son menores que 0.02 y los espesores de las muestras son menores que 0.5 cm. Consultando artículos publicados sobre mediciones de le eficiencia de difracción, se han encontrado los siguientes valores de  $\eta$  para BSO:

Los resultados medidos por Wang, Cook, Cartright y Gillespie<sup>xvii</sup> para un láser de argón de 514.5 nm, un voltaje aplicado de 6.25 KV/cm, con  $I_0=25\text{mW/cm}^2$  y una frecuencia de malla  $\Lambda=20\mu\text{m}$ , para varios valores de razón de modulación de franjas,  $m$ , se obtuvieron los siguientes máximos de eficiencia de difracción: para  $m=0.9$ ,  $\eta_{\text{max}}$  está entre 0.58 y 0.6; para  $m=0.7$ ,  $\eta_{\text{max}}$  está entre 0.38 y 0.4; para  $m=0.5$ ,  $\eta_{\text{max}}=0.32$ ; para  $m=0.3$ ,  $\eta_{\text{max}}=0.2$ . En su trabajo, ellos miden la variación de la eficiencia contra la intensidad de luz blanca.

Los resultados medidos para los máximos de eficiencia por Pouet y Krishnaswamy<sup>xviii</sup> al medir  $\eta$  variando con el ángulo de escritura y para distintos campos eléctricos en  $\text{AC}^{15}$ , con una longitud de onda de 514nm, una intensidad total  $I_0=10\text{mW/cm}^2$  y un espesor de 2mm (no se menciona la razón de modulación  $m$  que fue usada), son los siguientes: Para  $E=6.5\text{kV/cm}$ ,  $\eta_{\text{max}}=1.9$ ; para  $E=5.6\text{kV/cm}$ ,  $\eta_{\text{max}}=1.4$ ; para  $E=4.6\text{kV/cm}$ ,  $\eta_{\text{max}}=1$ ; con  $E=3.7$ ,  $\eta_{\text{max}}$  está entre 0.6 y 0.7; para  $E=2.8\text{kV/cm}$ ,  $\eta_{\text{max}}=0.4$ ; para  $E=1.9\text{kV/cm}$ ,  $\eta_{\text{max}}=0.2$ ; y finalmente, para  $E=1\text{kV/cm}$ ,  $\eta_{\text{max}}$  está entre 0.1 y 0.2.

Desafortunadamente se encontraron resultados experimentales en la literatura con los cuales comparar directamente nuestros cálculos y los más parecidos se han hecho para otro tipo de materiales como el KLTN<sup>xix</sup>,  $\text{Li NbO}_3^{\text{xx}}$ ,  $\text{Li NbO}_3:\text{Fe}^{\text{xxi}}$ , pero no serviría de nada enunciarlos aquí, al no poder compararlos con los resultados obtenidos. El hecho anterior es bastante significativo, porque al no contar con una teoría que aproxime los valores de la eficiencia de difracción en las regiones de efectos no-lineales, los experimentales trabajan dentro de la región lineal para obtener los resultados que desean.

Es posible concluir, entonces, que la aproximación lineal comúnmente usada en la literatura para la eficiencia de difracción, es bastante imprecisa cuando se trata de valores grandes de  $m$  ( $m \approx 1.0$ ) ó de campos eléctricos altos aplicados al grabar la malla. La aproximación lineal también deja de ser válida cuando el intercambio energético entre los haces es grande.

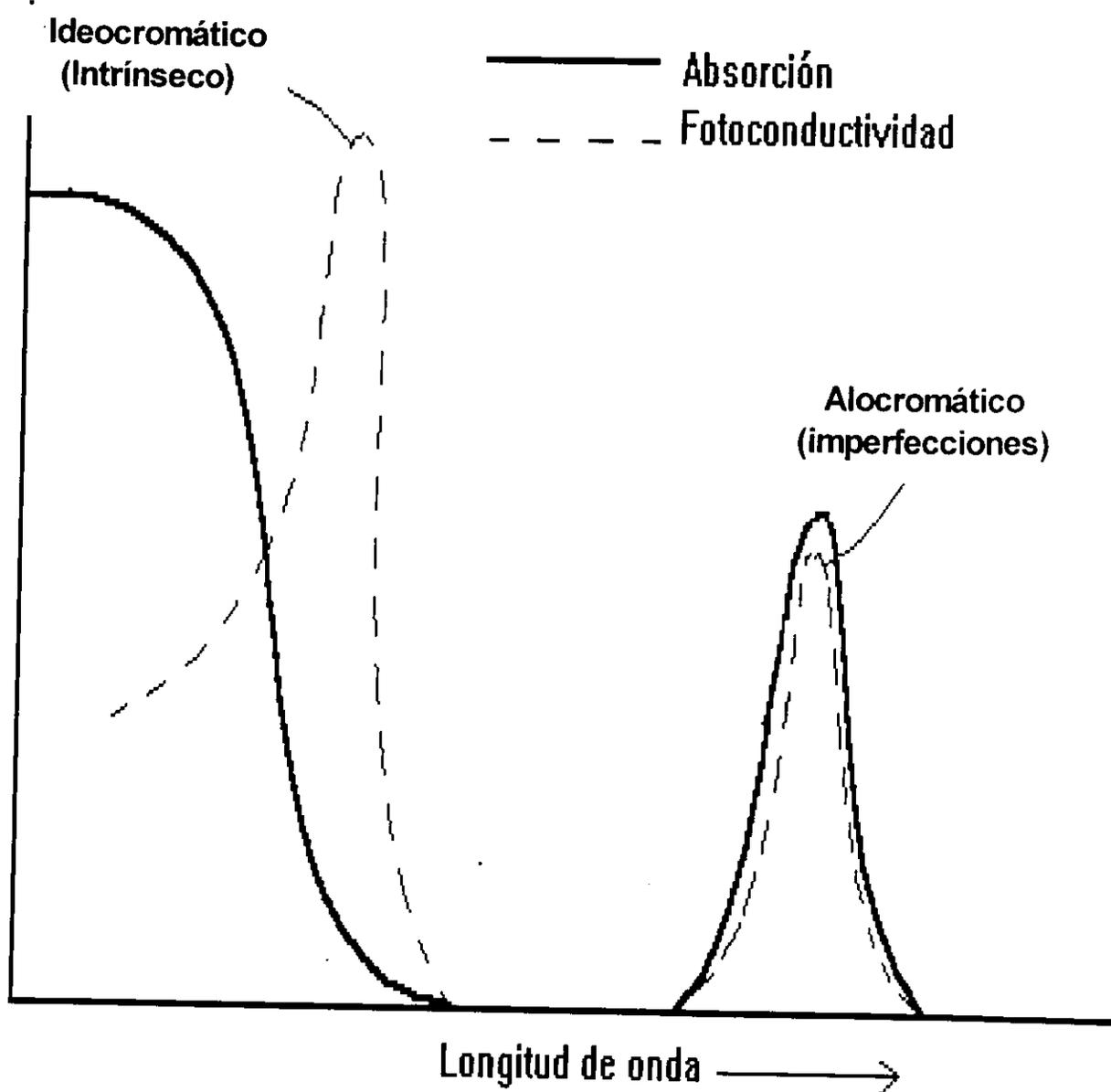
Finalmente, podemos señalar que hemos desarrollado un método que proporciona de manera muy precisa y aún en condiciones fuertemente no lineales el valor de la eficiencia de difracción como función del espesor de la muestra, para diferentes valores del campo eléctrico aplicado al grabar y diferentes valores del índice de modulación del contraste de franjas.

<sup>15</sup> por lo que se mencionará sólo la amplitud máxima de la señal

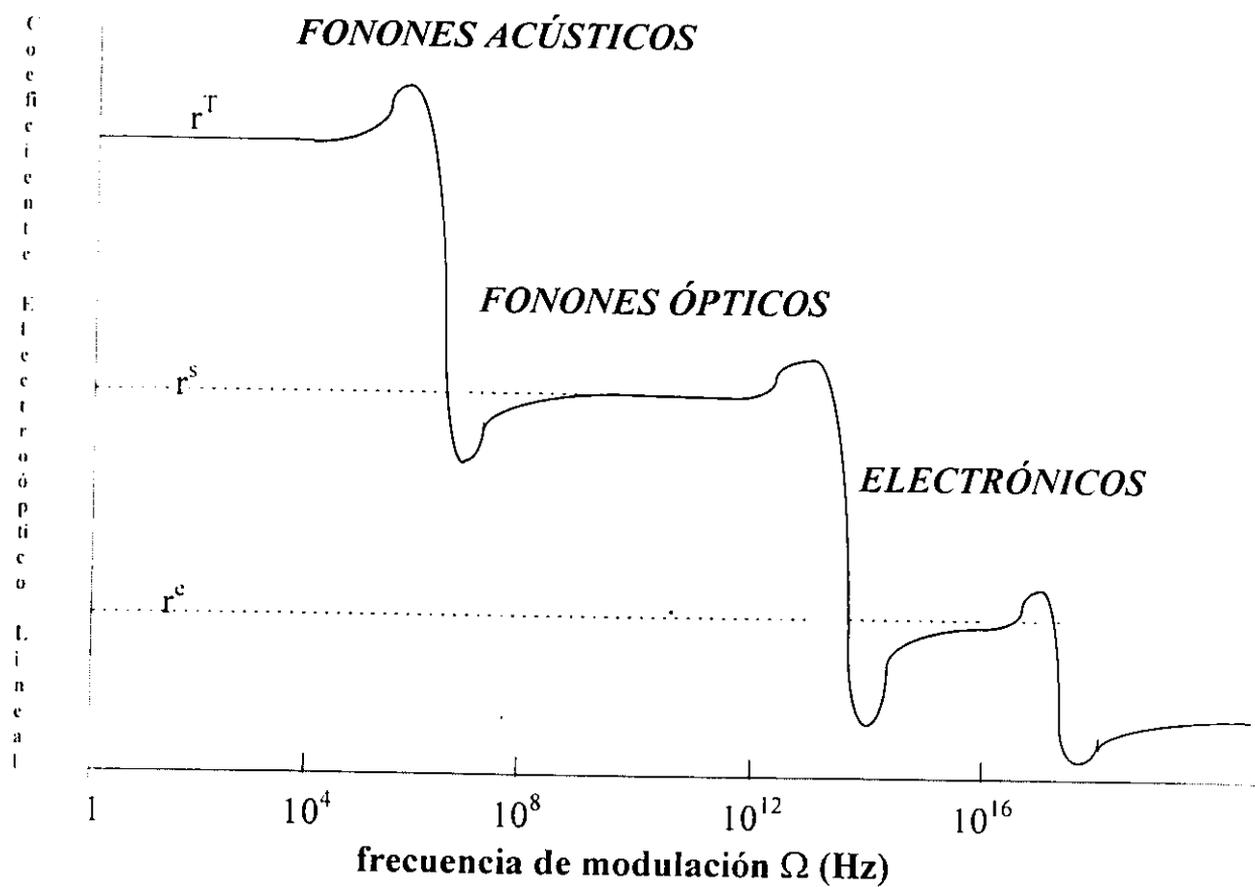
---

**REFERENCIAS.**

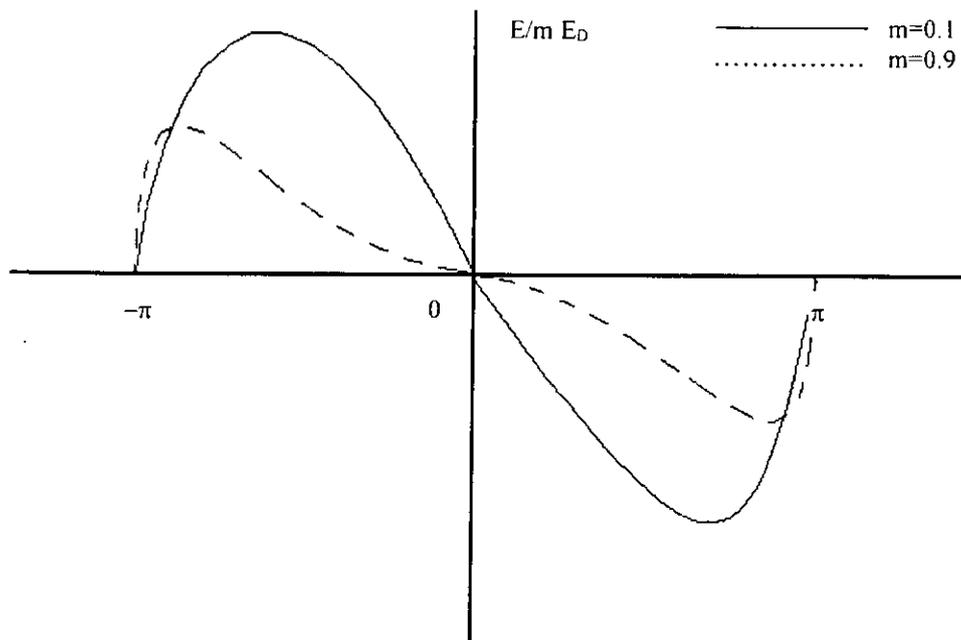
- I. *The photorefractive effect- a review*. Hall, R. Jaura, L.M. Connors y P.D. Foote. *Prog. Quant. Electr.* **10**, 77-146. (1985)
- II. *Electrooptics*, F. Agullo-López, J.M. Cabrera, F. Agullo-Rueda.
- III. *Photorefractive Materials and their aplicaciones, vol. I*. Editado por P. Günter y J.-P. Huignard., Springer-Verlag, 1988.
- IV. *Photorefractive Materials and their aplicaciones, vol. II*. Editado por P. Günter y J.-P. Huignard., Springer-Verlag, 1988.
- V. Tesis de doctorado *Propiedades electromagnéticas de sólidos*, J.G. Murillo. (1992)
- <sup>I</sup> A. Ashkin, G.D. Boyd, J.M. Dziedzic, R.G. Smith, A.A. Ballman y K. Nassan. *Appl. Phys. Lett.* **9**, **72**, (1966)
- <sup>II</sup> F.S. Chen, *J. Appl. Phys.* **40**, 3389-3396 (1969)
- <sup>III</sup> H. Kogelnik, *Bell Sist. Tech. J.*, **48**, 2909-2947 (1969)
- <sup>IV</sup> J.B. Thaxter. *Appl. Phys. Lett.*, **15**, 210 (1969)
- <sup>V</sup> R.L. Townsend y J.T. La Macchia, *J. Appl. Phys.*, **41**, 5188-5192 (1970)
- <sup>VI</sup> S.L. Hou., R.B. Lauer y R.E. Aldrich, *J. Appl. Phys.*, **44**, 2652-2658 (1973)
- <sup>VII</sup> D.L. Staebler y W. Phillips, *Appl. Opt.*, **13**, 788-794 (1974)
- <sup>VIII</sup> J.J. Amodei, *RCA Rev.*, **32**, 185-198 (1971)
- <sup>IX</sup> A. M Glass, D. Von der Linde y T.J. Negran. *Appl. Phys. Lett.*, **25**, 133 (1974)
- <sup>X</sup> D.M. Kim, R.R. Shah, T.A. Rabson y F.K. Tittel, *Appl. Phys. Lett.*, **28**, 3338 (1974)
- <sup>XI</sup> R.W. Hellwarth, *J. Opt. Soc. Am*, **67**, 1-3 (1977)
- <sup>XII</sup> N.V. Kuktarev, V.B. Markov, S.G. Odulov y V.L. Vinetskii, *Ferroelectrics*, **22**, 949-960. (1979)
- <sup>XIII</sup> J. Feinberg, D. Heiman, A.R. Tanguay Jr. y R.W. Hellwarth, *J. Appl. Phys.* **51**, 1297-1305 (1980)
- <sup>XIV</sup> J.G. Murillo, L.F. Magaña, M. Carrascosa y F. Agulló-López, *J Appl. Phys.* **78**, Nov. 1995
- <sup>XV</sup> B. Gudden y R. Pohl. *Physik Z*, **1**, 365, (1920)  
B. Gudden y R. Pohl. *Physik Z*, **3**, 98, (1920)  
B. Gudden y R. Pohl. *Physik Z*, **5**, 176, (1921)  
B. Gudden y R. Pohl. *Physik Z*, **23**, 417 (1922)
- <sup>XVI</sup> J.G. Murillo, L.F. Magaña, M. Carrascosa y F. Agulló-López, *J Appl. Phys.* **78**, Nov. 1995
- <sup>XVII</sup> Z. Q. Wang, C. M. Cartwright, w. A. Gillespie y N. J. Cook ; *Appl. Opt.*, **20**, 3829 (1996).
- <sup>XVIII</sup> B. Pouet y S. Krishnaswamy, *Appl. Opt.*, **5**, 787 (1996).
- <sup>XIX</sup> B. Peshach, G. Bartal, E. Rafaeli y A. J. Agranat, *Proceedings, 1997 topical meeting, Phorrefractive materals, efects and devices*; 220-223.
- <sup>XX</sup> K. Buse, S. Breer, K. Peithman y E. Krätzig; *Proceedings, 1997 topical meeting, Phorrefractive materals, efects and devices*; 234-237.
- <sup>XXI</sup> F. Havermeyer, R. A. Rupp, U. Schellhorn y R. May; *Proceedings, 1997 topical meeting, Phorrefractive materals, efects and devices*; 281-283.



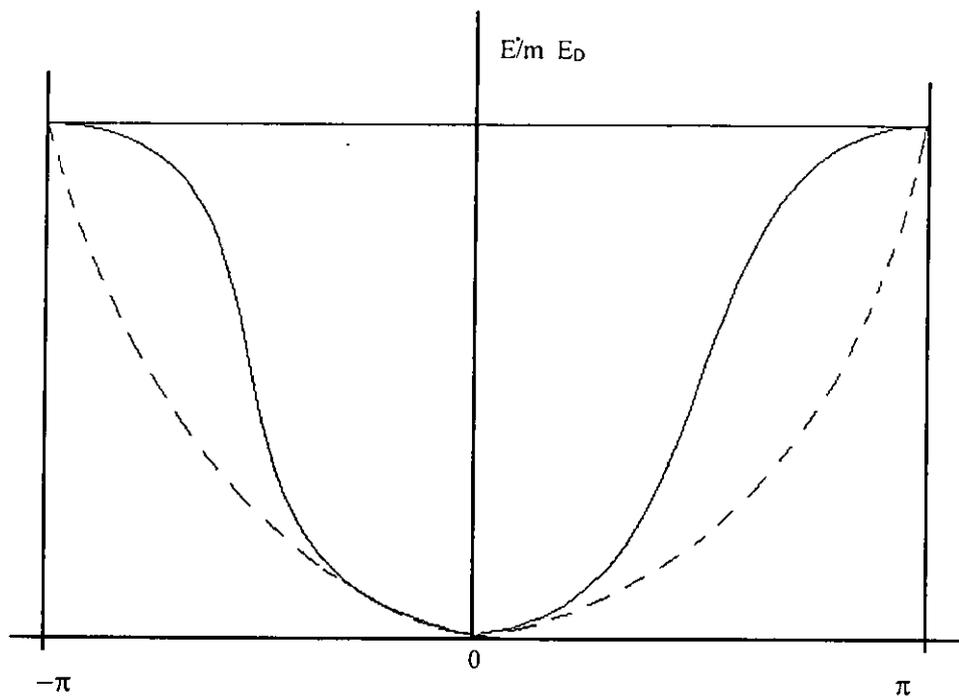
**Fig 2.1**  
Dependencia con la longitud de onda de la absorción de fotones y la fotoconductividad para materiales ideocromáticos y alcromáticos



**Fig. 2.2**  
dependencia ilustrativa de  $r^e$ ,  $r^s$  y  $r^T$  con la frecuencia de modulación  $\Omega$  del campo eléctrico

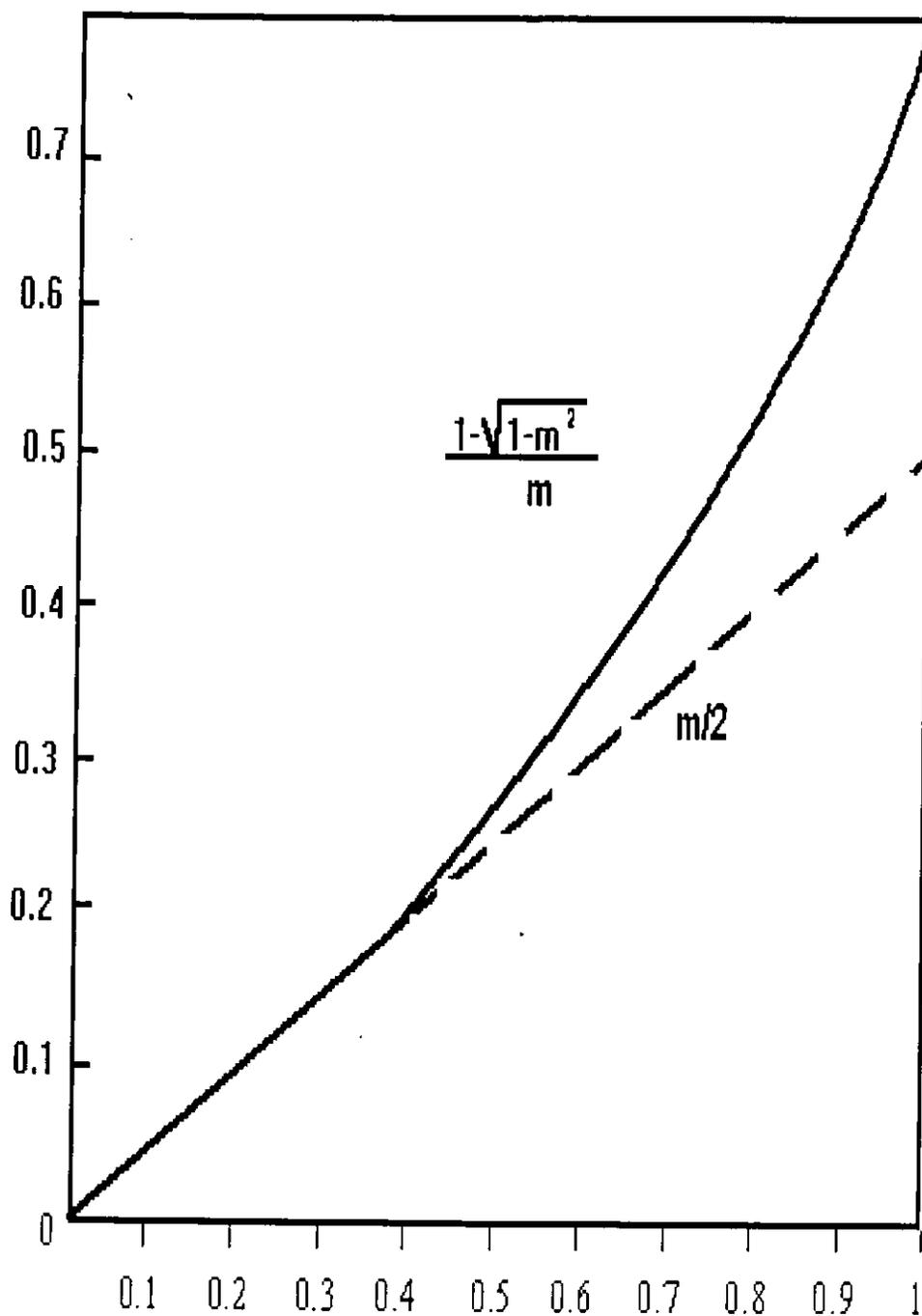


A) Campo de cargas espaciales bajo iluminación cosenoidal, sin campo eléctrico aplicado ( $E_D \gg E_A$ )



B) campo de cargas espaciales con un campo eléctrico aplicado muy grande ( $E_A \gg E_D$ )

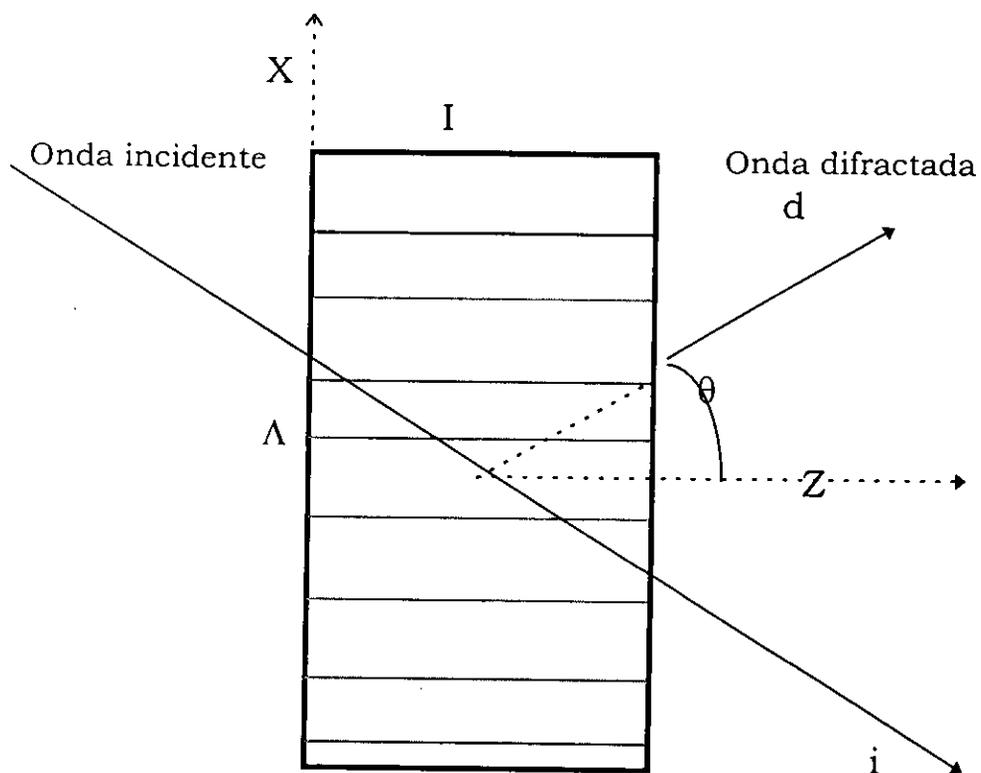
Fig. 2.3



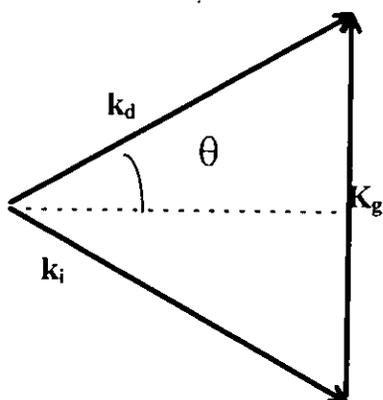
**Fig. 2.4**

aproximación lineal de  $2[1 - (1 - m^2)^{1/2}]/m \approx m$  (razón de modulación;  $m$  es muy cercana al 11% de diferencia para  $m < 0.6$ ; al 25% de diferencia para  $m < 0.8$ )

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA



a) difracción de Bragg por una malla periódica volumétrica (diagrama esquemático)



b) diagrama de vectores de onda.

Fig. 3.1

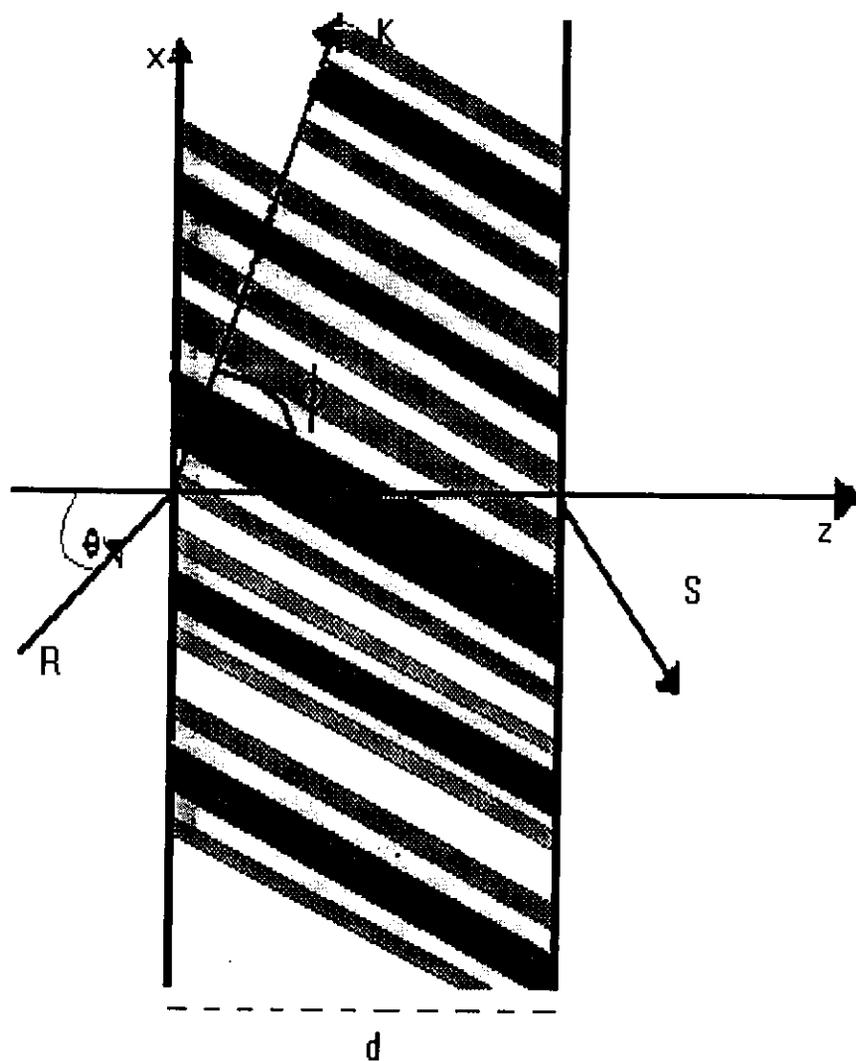


Fig. 3.2

Modelo de un holograma volumétrico con franjas inclinadas respecto a la superficie. La modulación espacial de  $n$  (índice de refracción) o de  $\alpha$  (constante de absorción) se muestra a través de las franjas punteadas. Los parámetros de la malla son:  $\theta$ -ángulo de incidencia del medio,  $K$ -vector de la malla(perpendicular al patrón de franjas),  $\Lambda$ -el ancho de la malla,  $\phi$ -la inclinación de las franjas y del ancho de la malla.

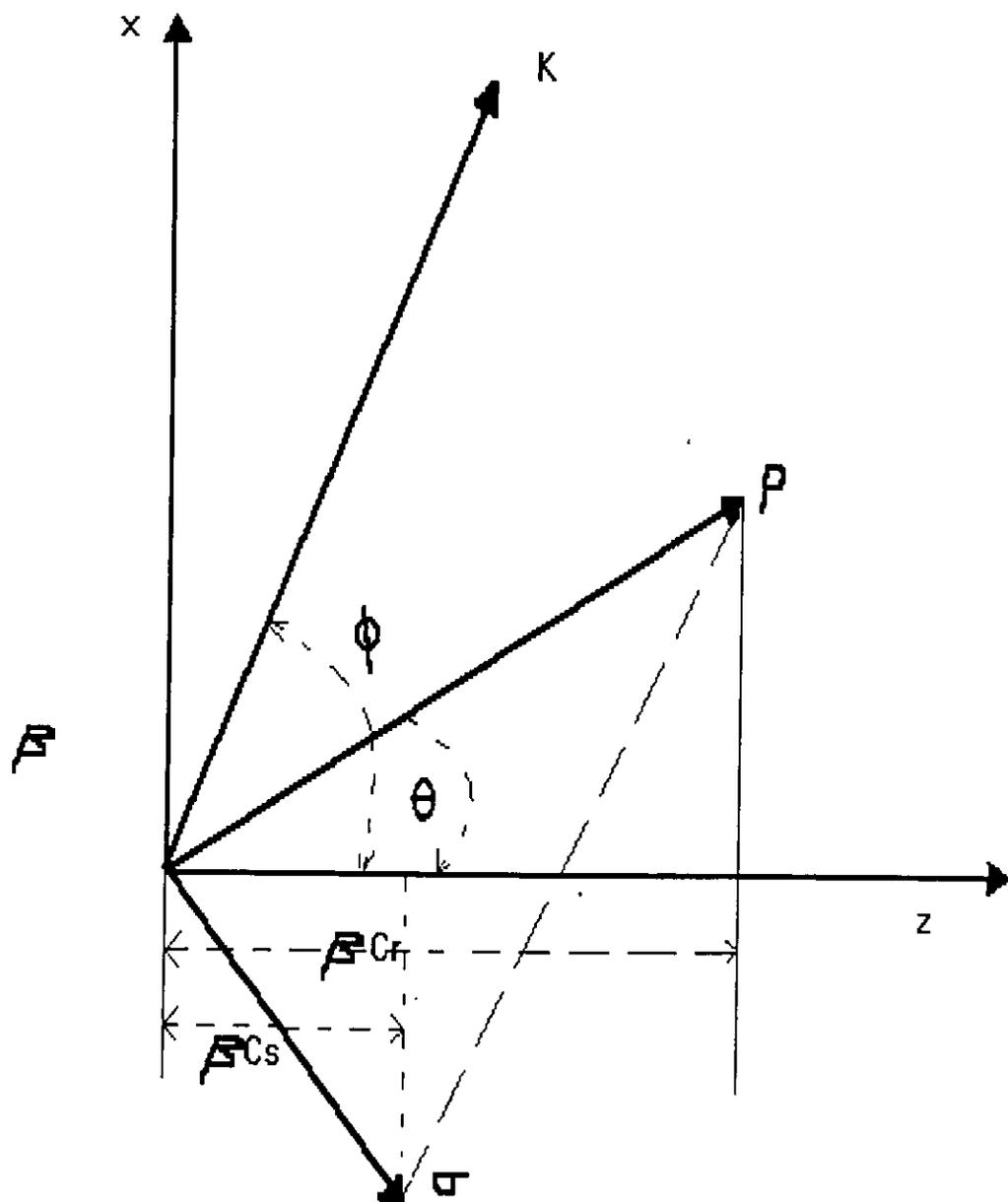


Fig. 3.3

$\rho$  y  $\sigma$  son los vectores de propagación de las ondas de referencia R y de salida S. Aquí se muestra su relación con el vector de la malla K. Los factores de oblicuidad  $C_S$  y  $C_R$ , se encuentran indicados.

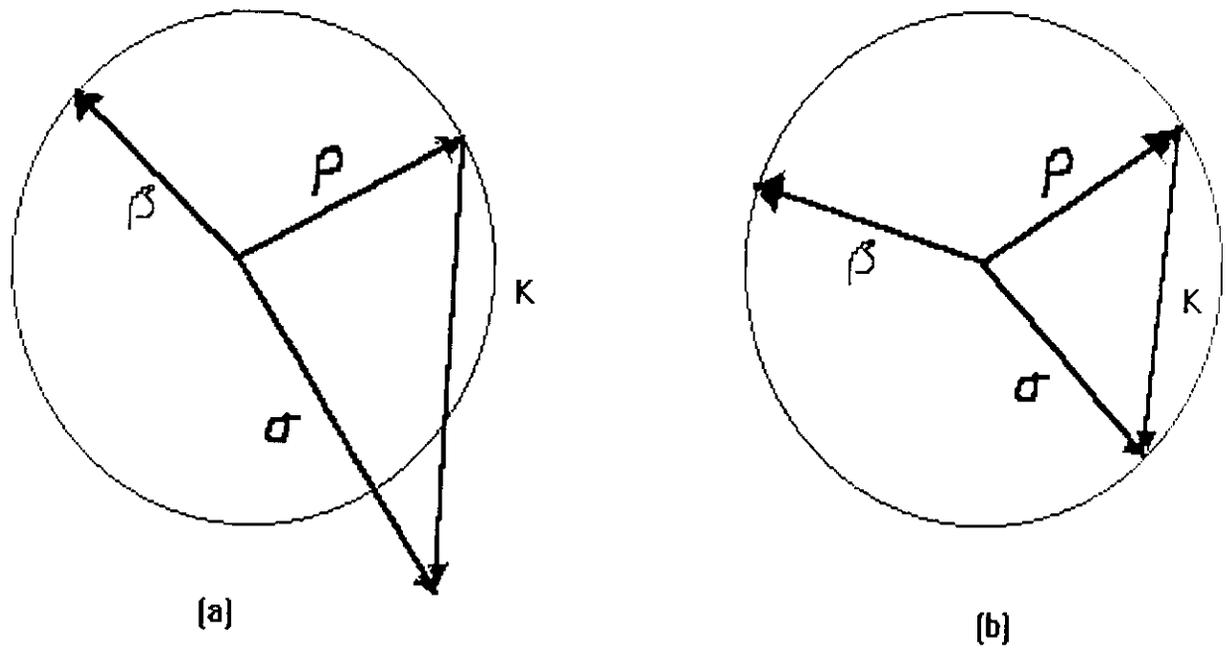


Fig. 3.4

Diagrama vectorial (conservación de momento) para los vectores de onda cerca (Figura 3.4a) y en el ángulo de Bragg (Figura 3.4b).

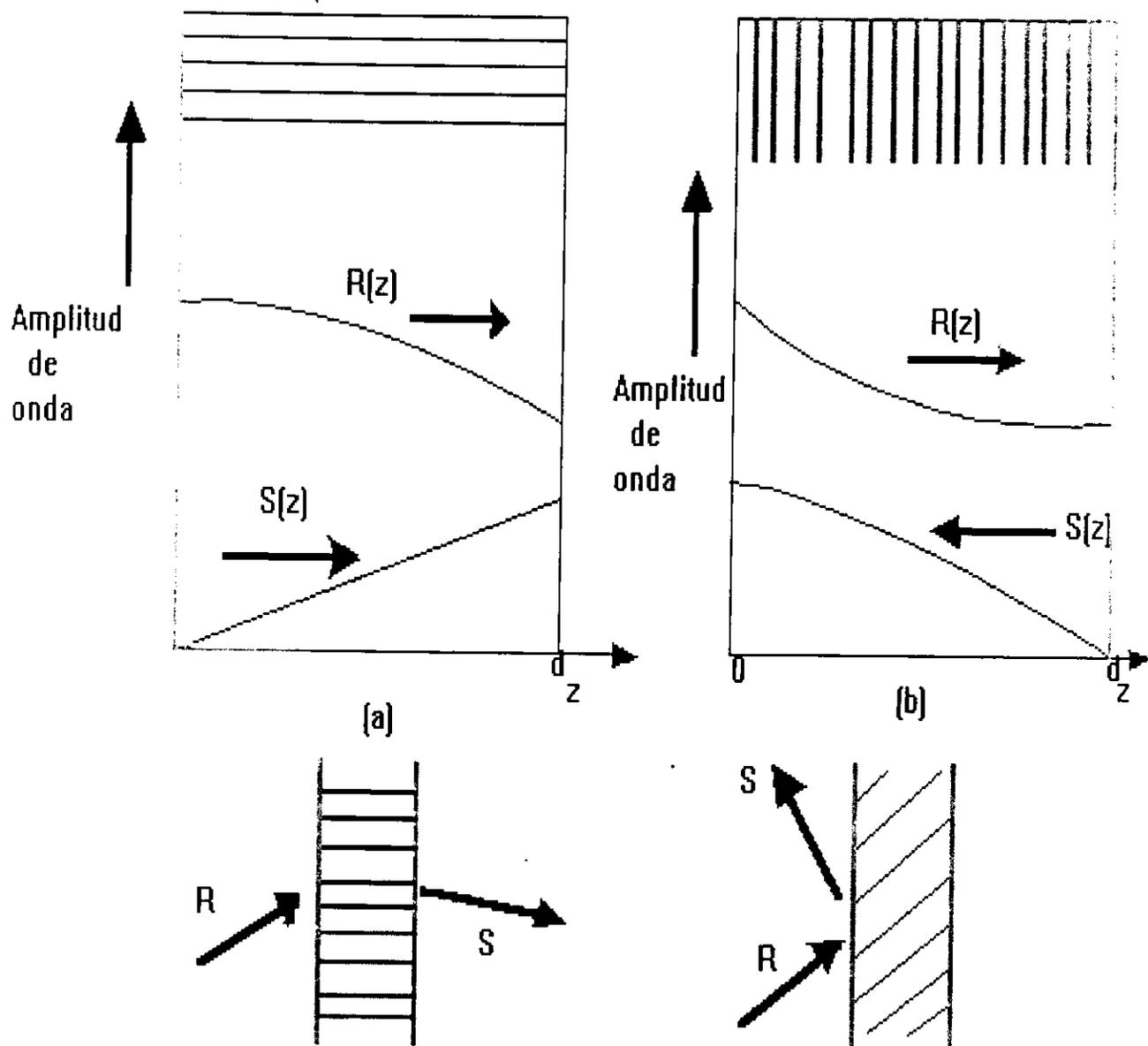


Fig. 3.5

Propagación de ondas en (a) holograma de transmisión y (b) de reflexión. La onda de referencia  $R$  decae mientras se propaga hacia la derecha. En (a), la señal transmitida  $S$  se desplaza hacia la derecha y se incrementa con  $z$ , mientras que en (b) la señal se propaga hacia la izquierda y se incrementa mientras que  $z$  disminuye. El sombreado indica la dirección de las franjas.

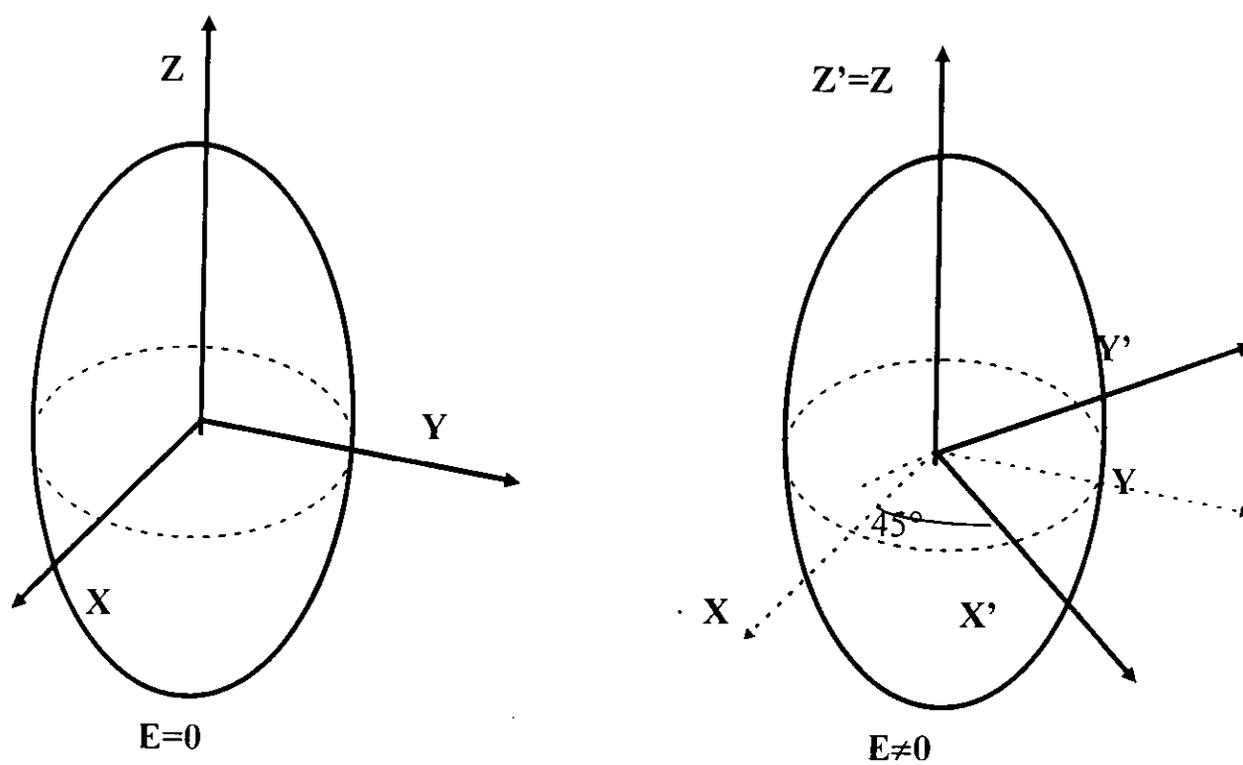
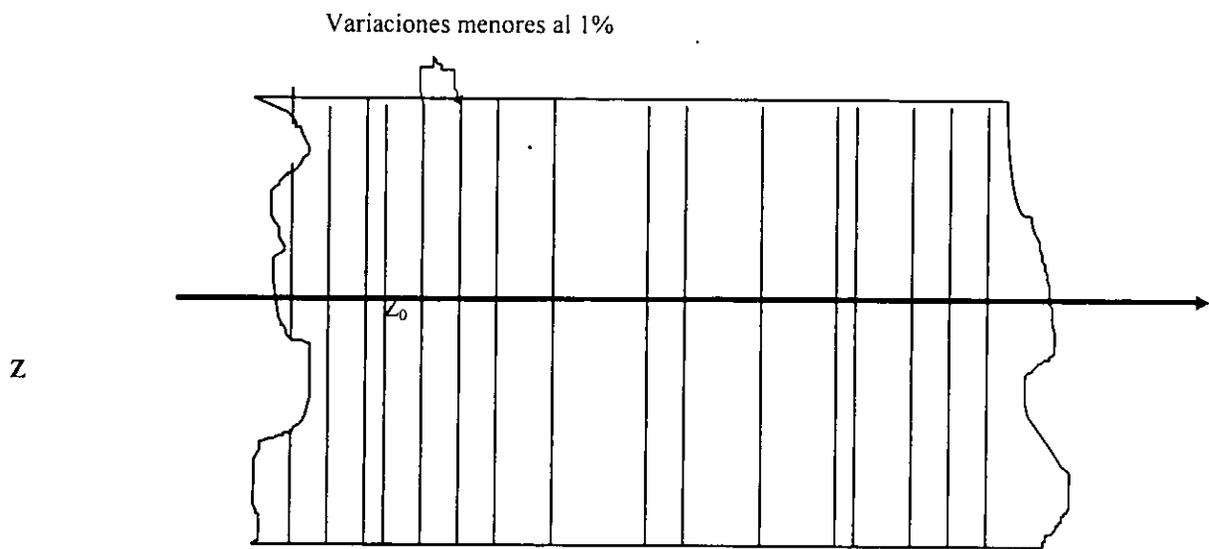


Fig. 3.6  
Elipsoide de índices para KDP, antes y después la aplicación de un campo eléctrico a lo largo del eje óptico. Nótese la rotación de los ejes de  $XY$  a  $X'Y'$



**Fig. 3.7**  
**División de la muestra para encontrar las soluciones a las ecuaciones que describe la variación de la onda que lee la información del patrón de franjas.**

2.5 KV/cm,  $m=0.01$

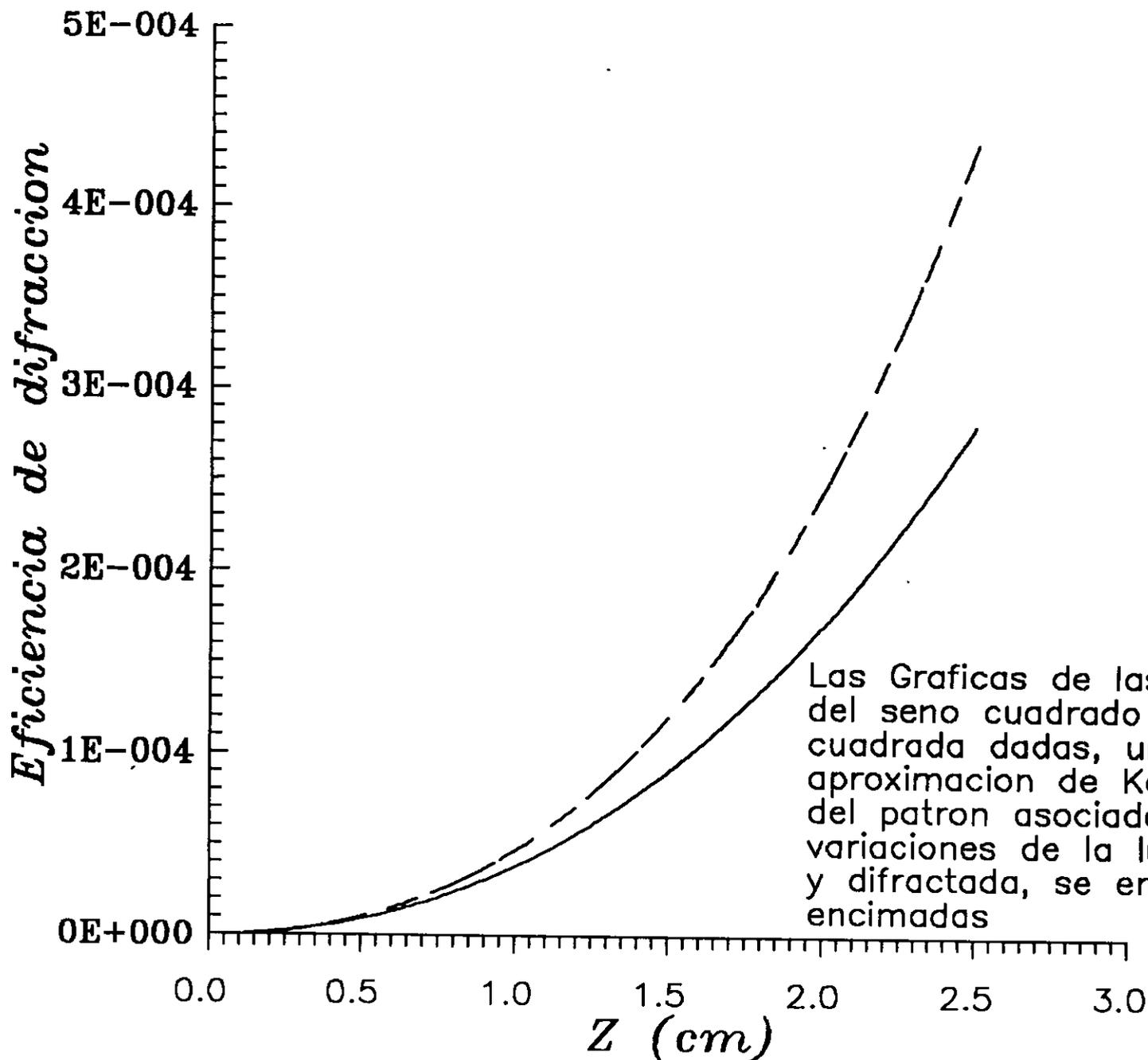


Fig 4.1

2.5 KV/cm,  $m=0.9$

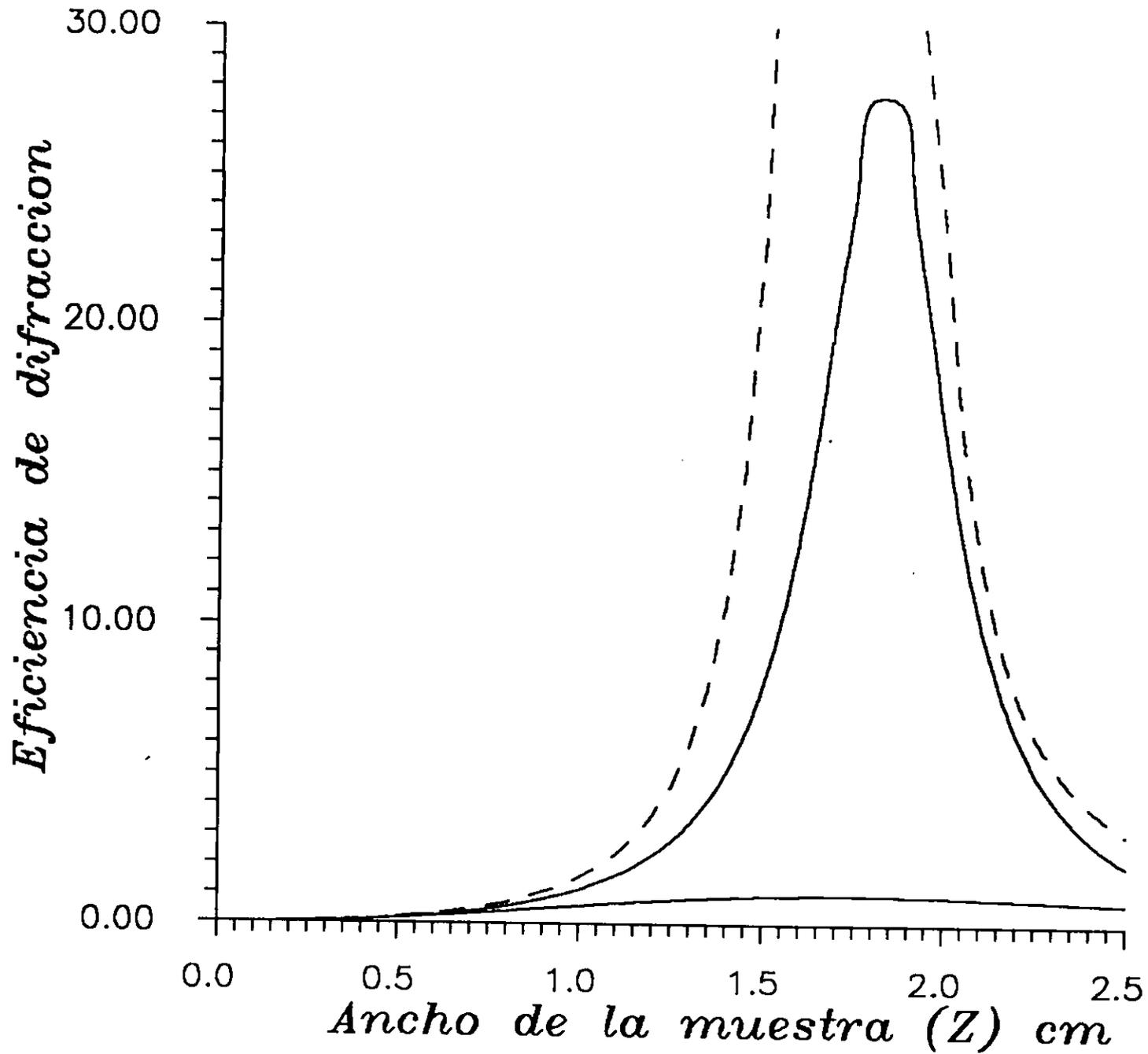


Fig 4.2

2.5 KV/cm

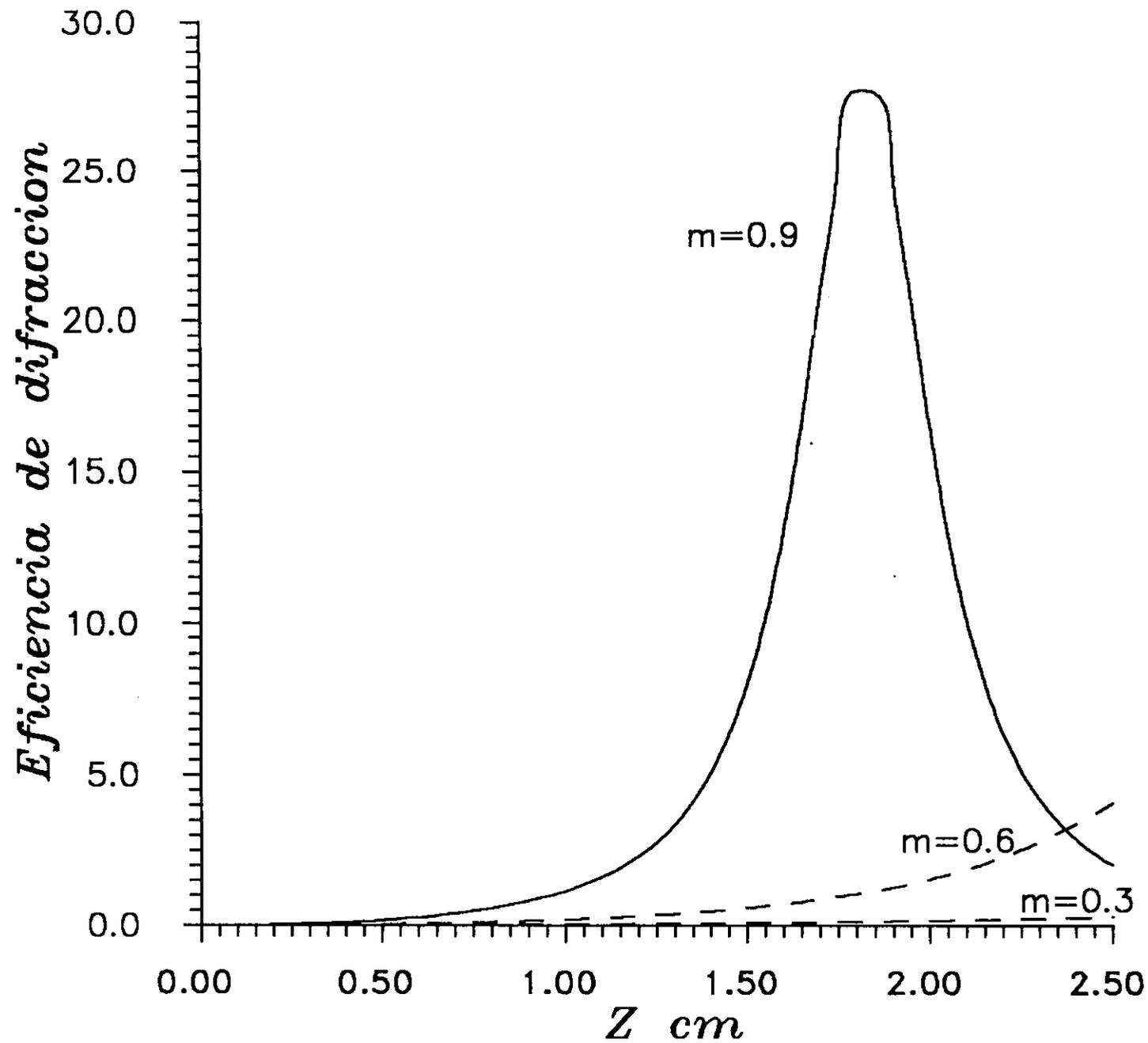


Fig 4.3

2.5 KV/cm

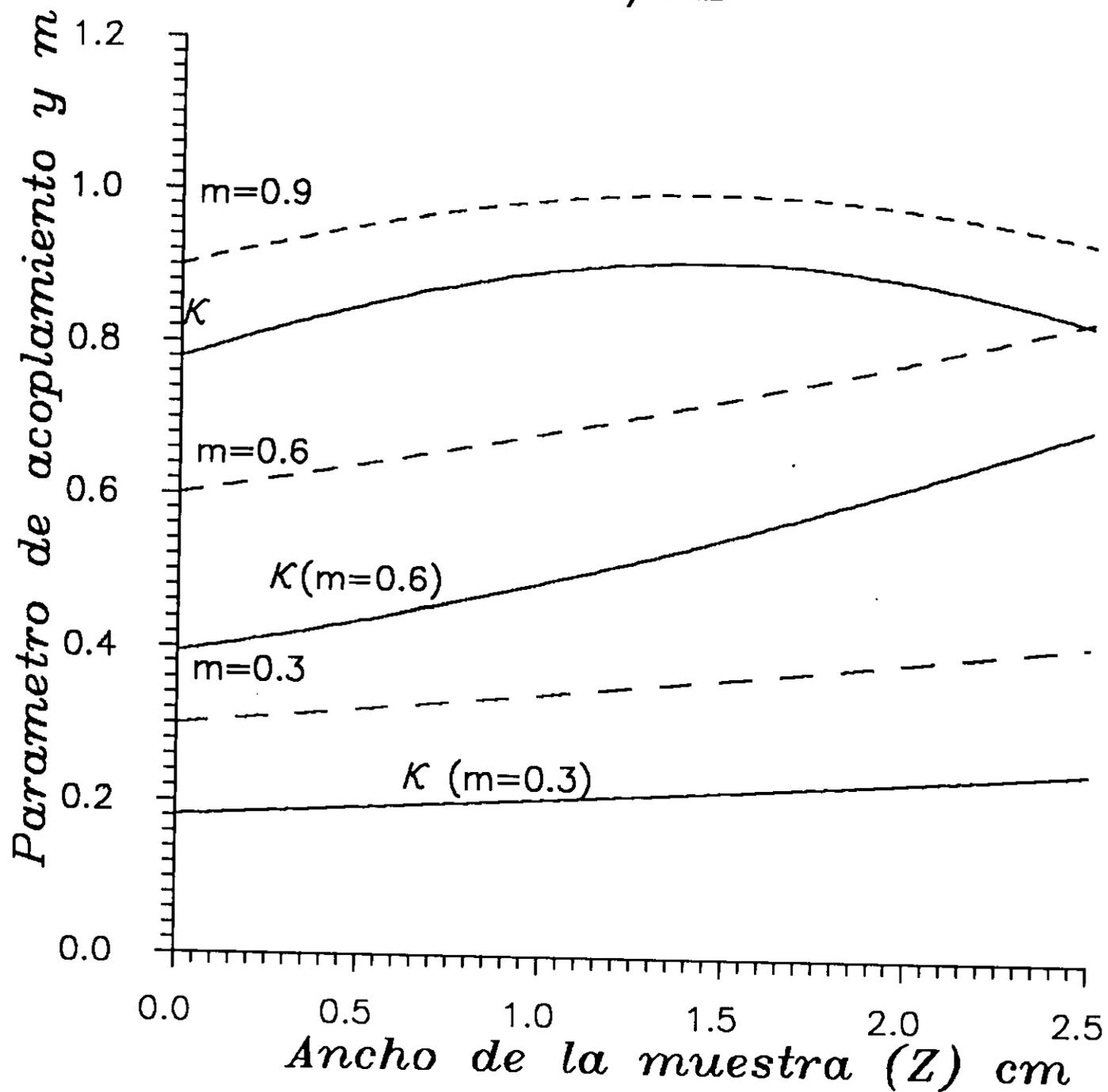


Fig 4.4

2.5 KV/cm

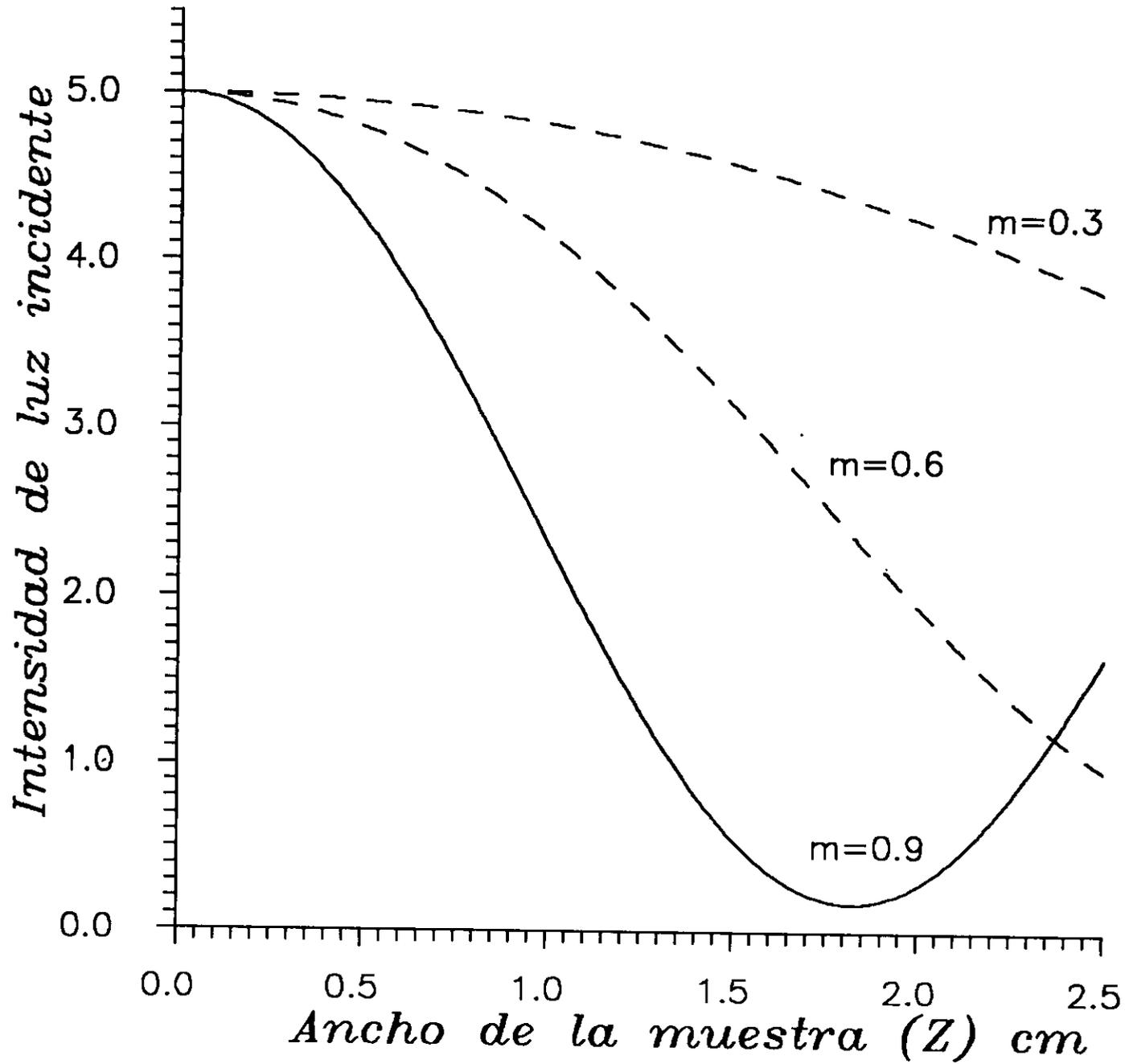


Fig 4.5

2.5 KV/cm

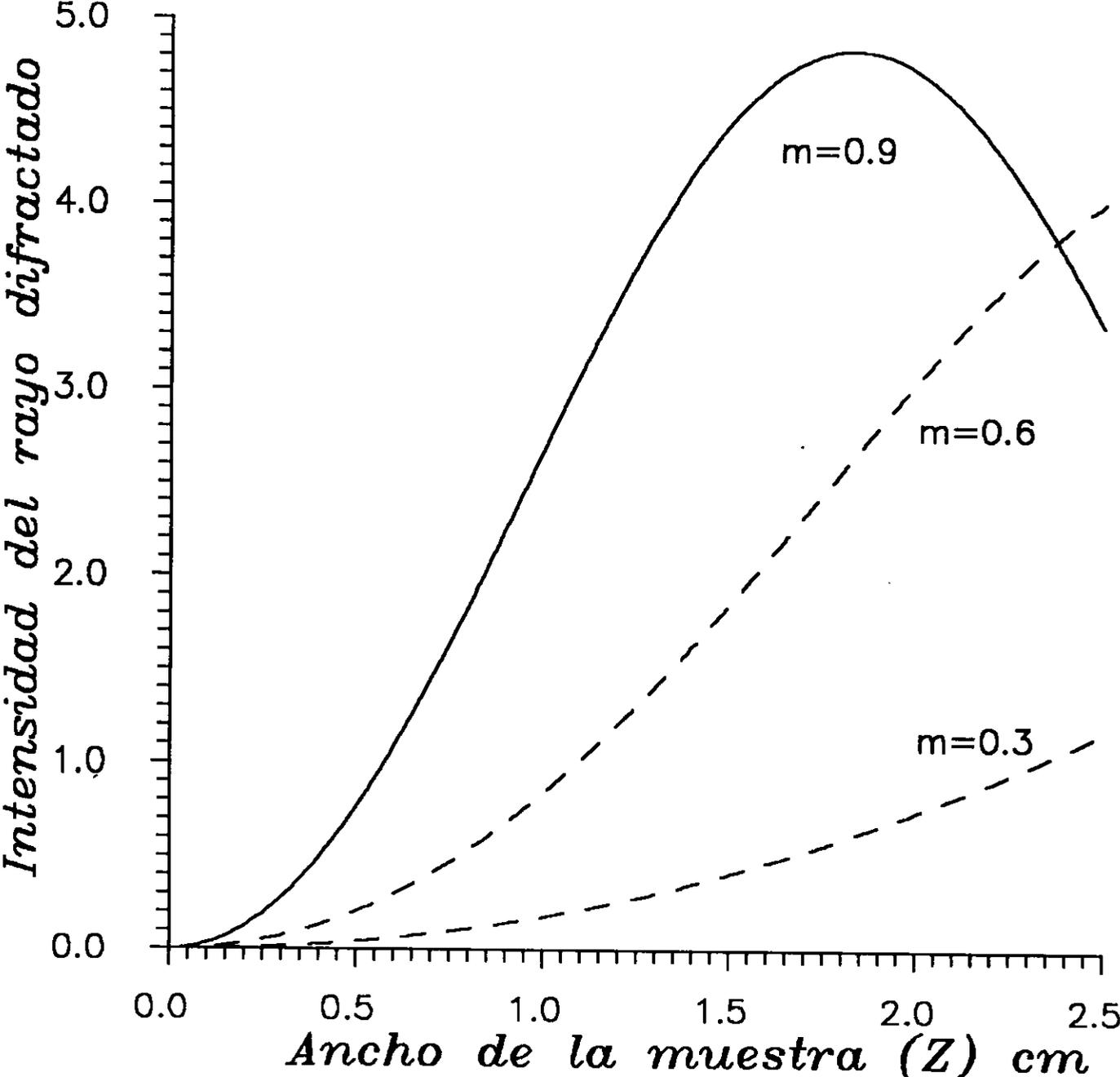


Fig 4.6

5 KV/cm,  $m=0.01$

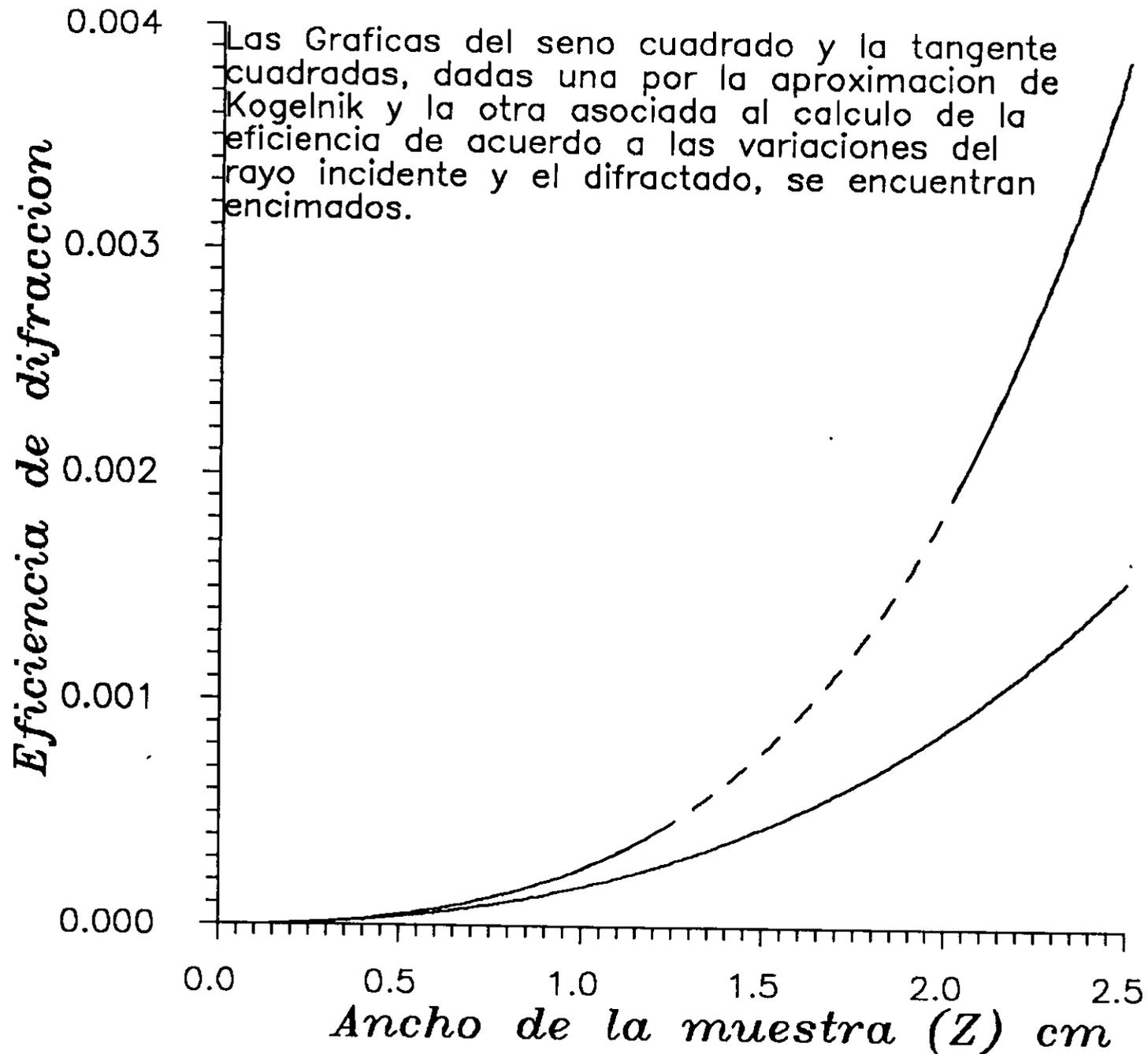


Fig 4.7

5 KV/cm,  $m=0.9$

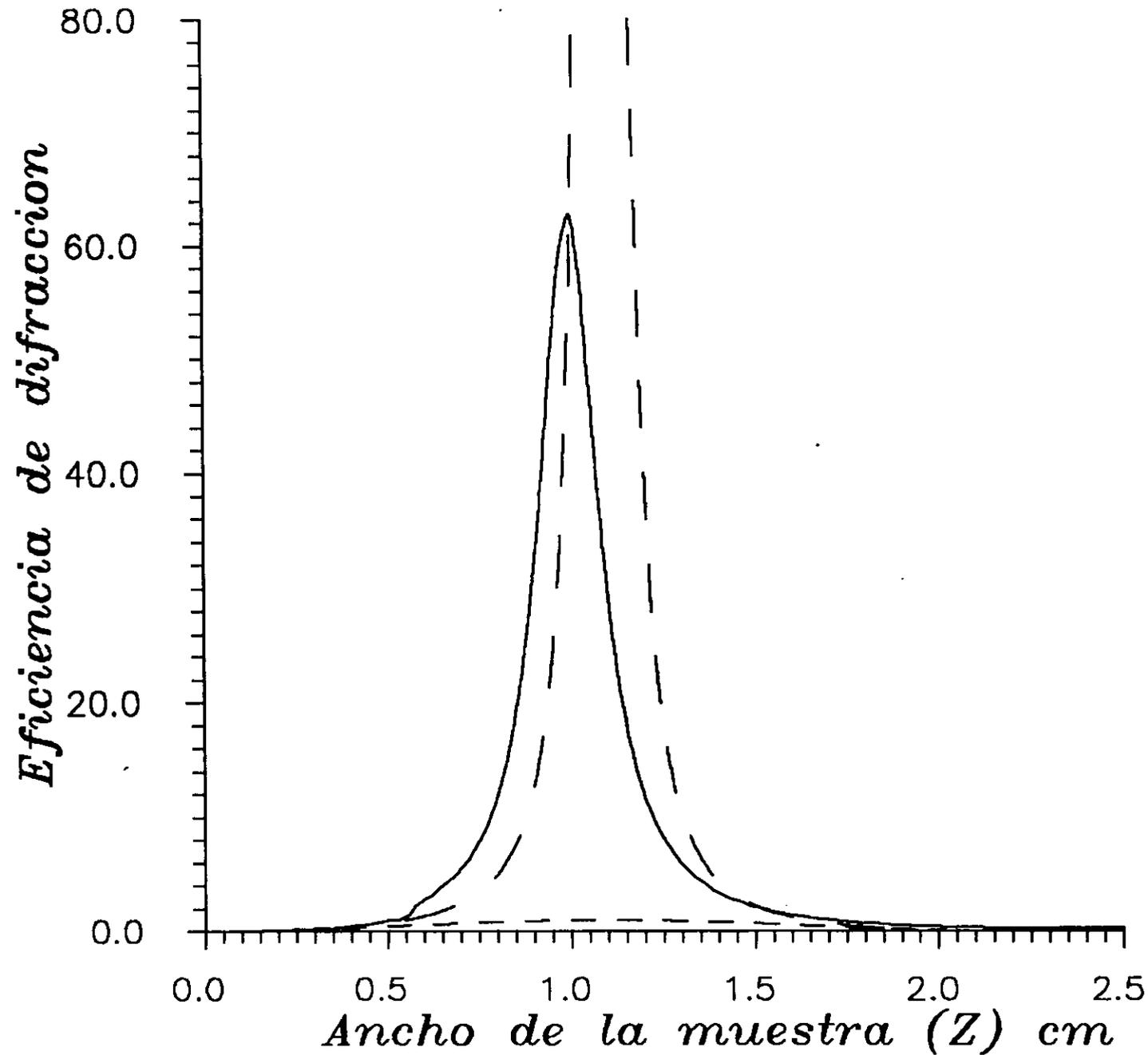


Fig 4.8

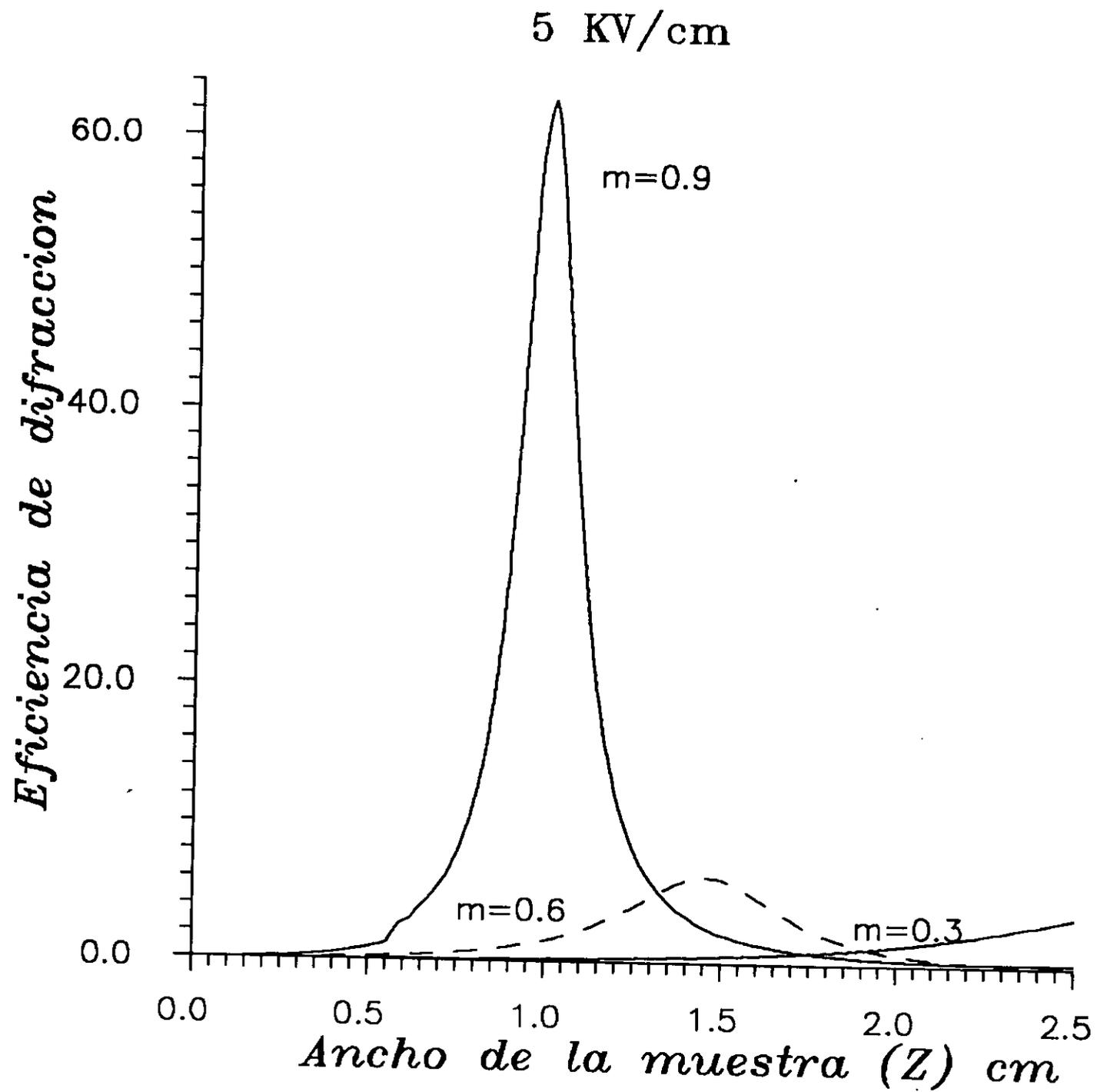


Fig 4.9

5 KV/cm

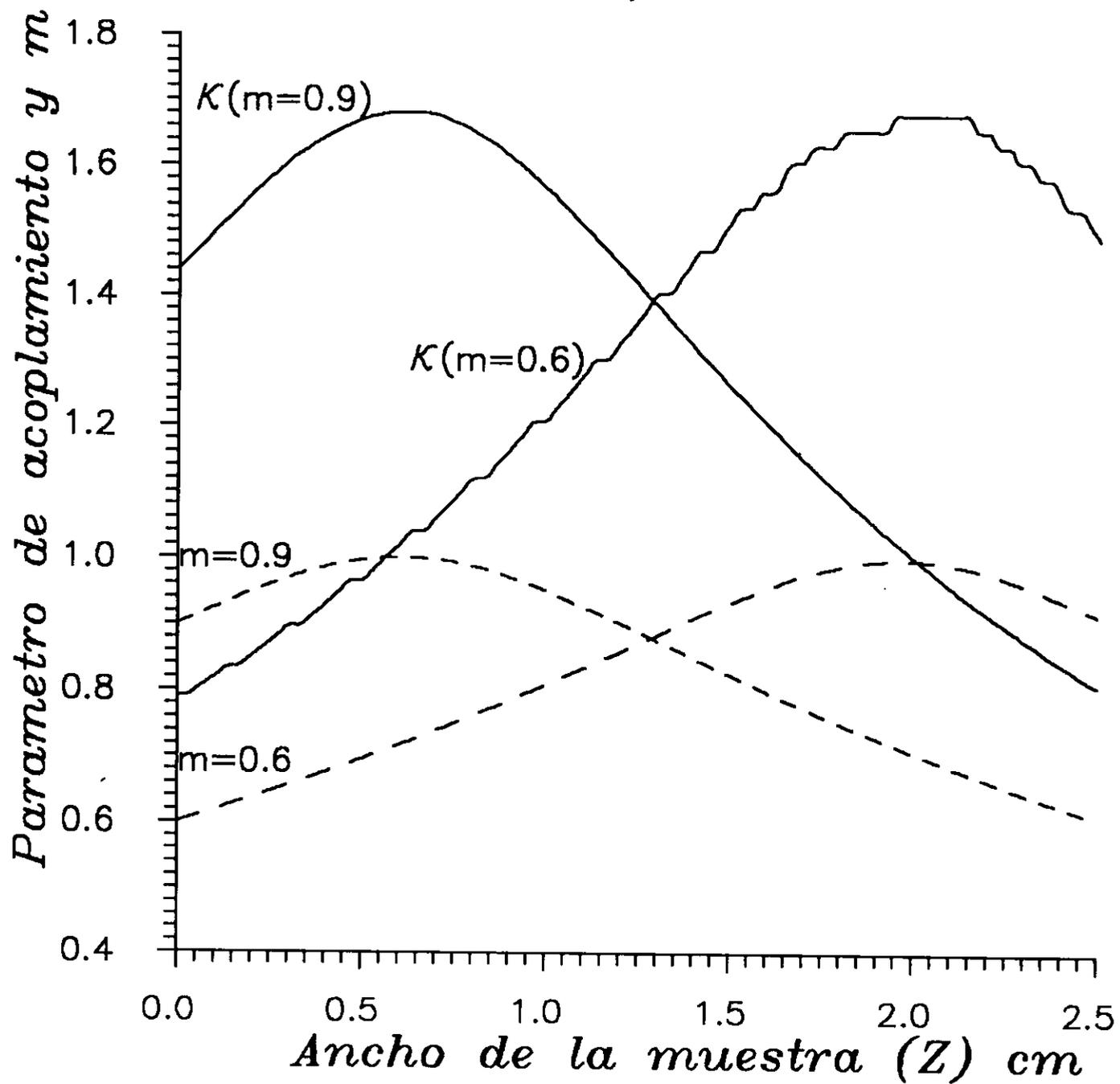


Fig 4.10

10 KV/cm,  $m=0.01$

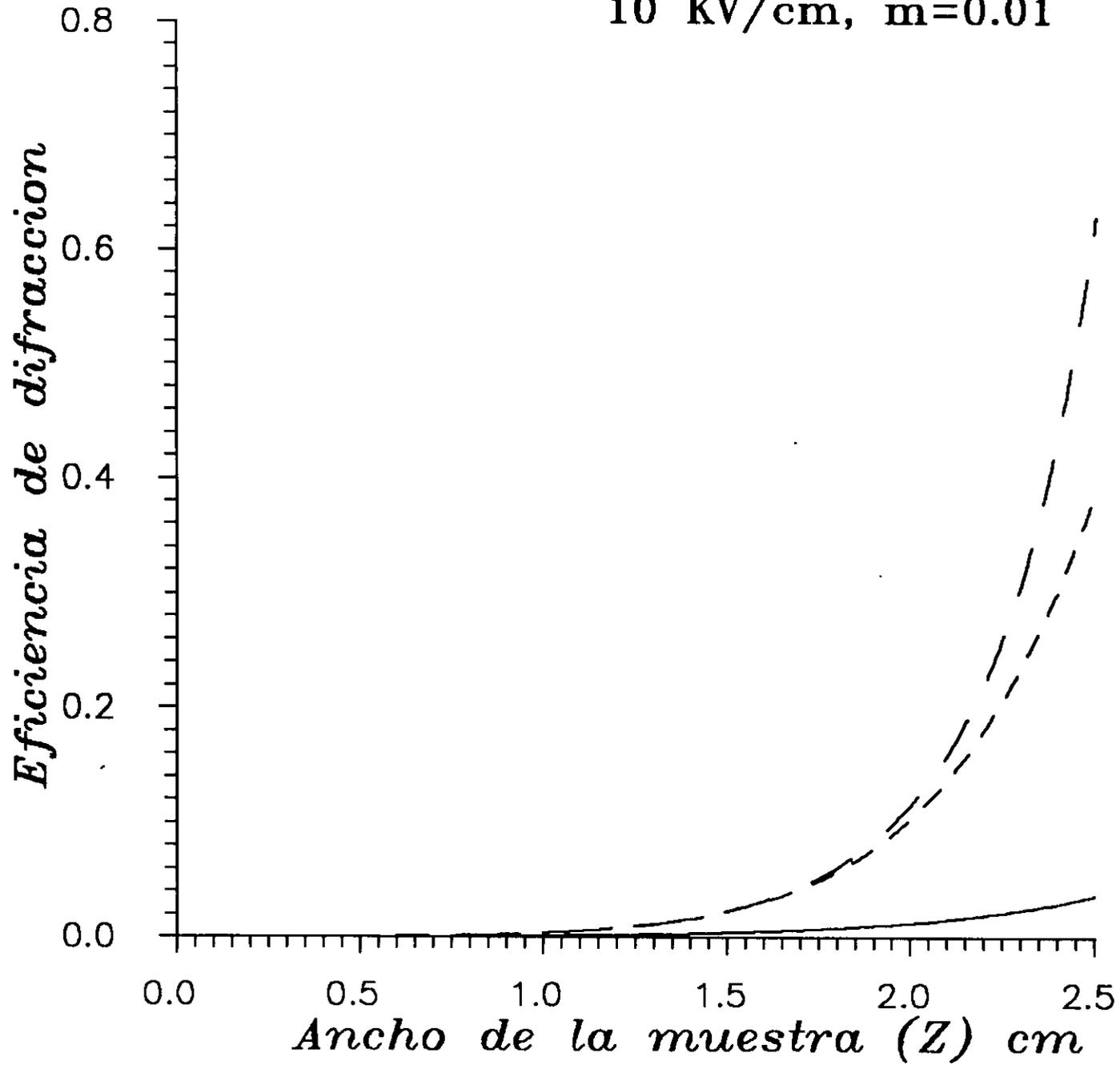


Fig 4.11

10 KV/cm,  $m=0.3$

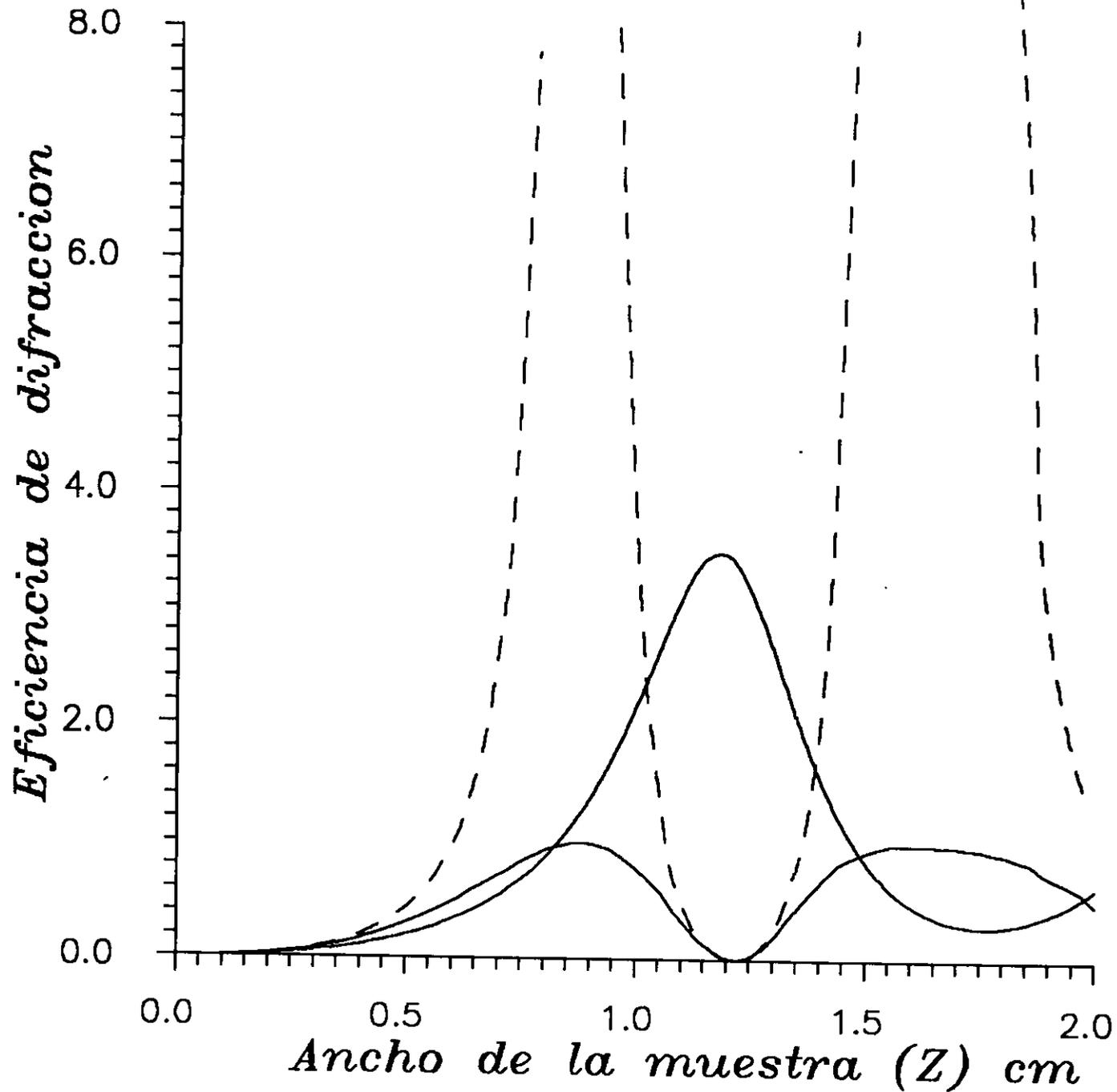


Fig 4.12

10 KV/cm,  $m=0.6$

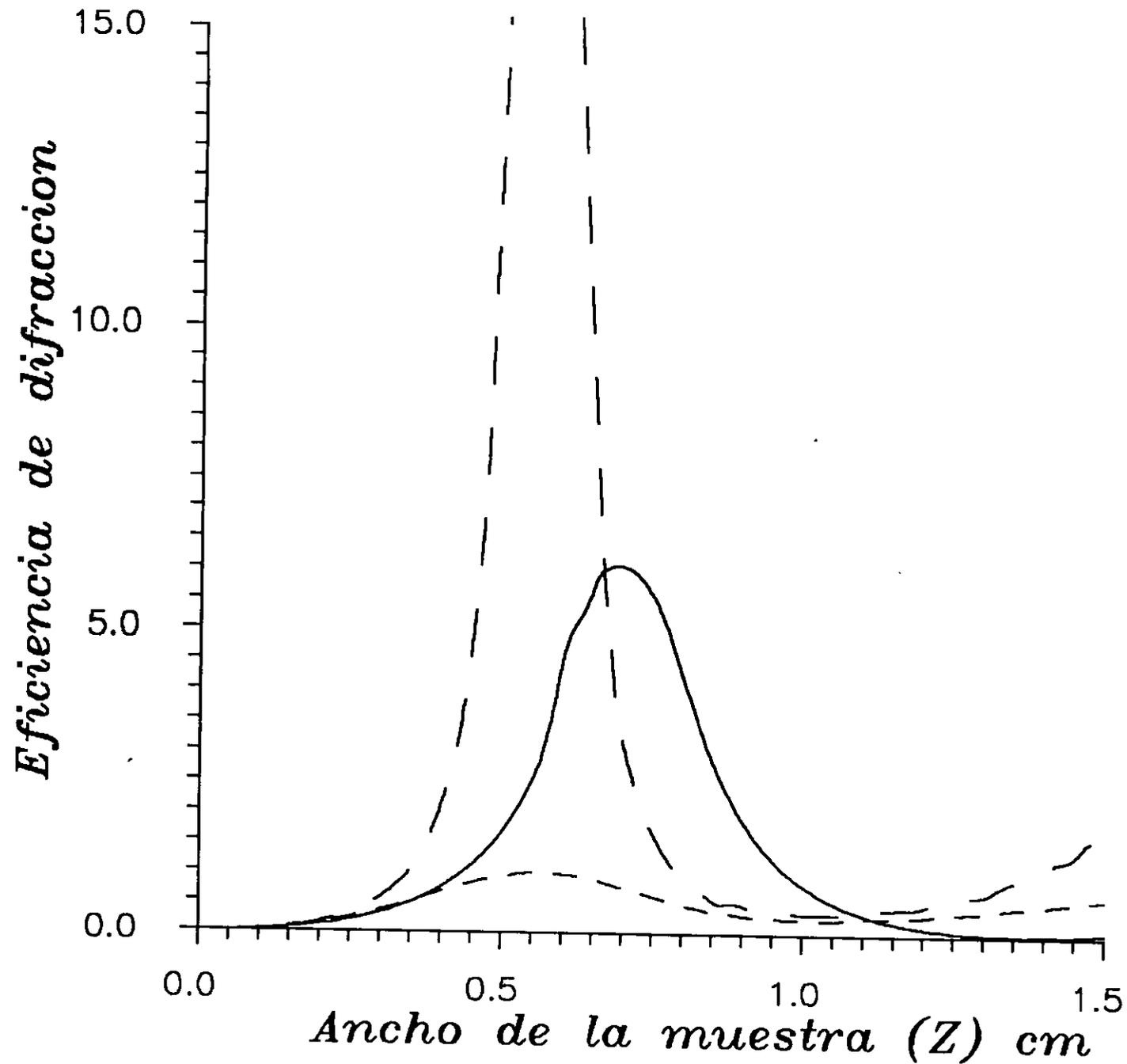


Fig 4.13

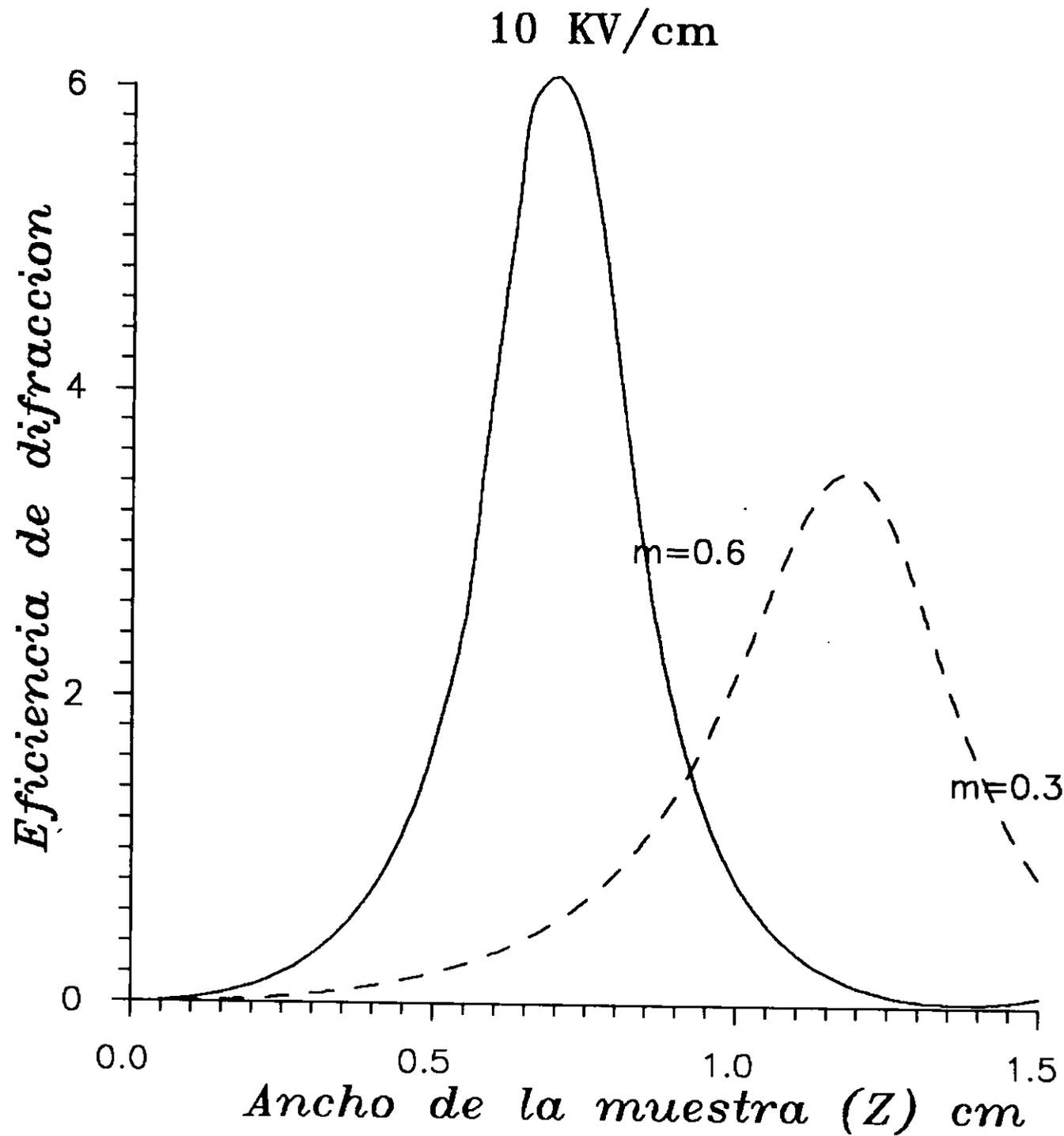


Fig 4.14

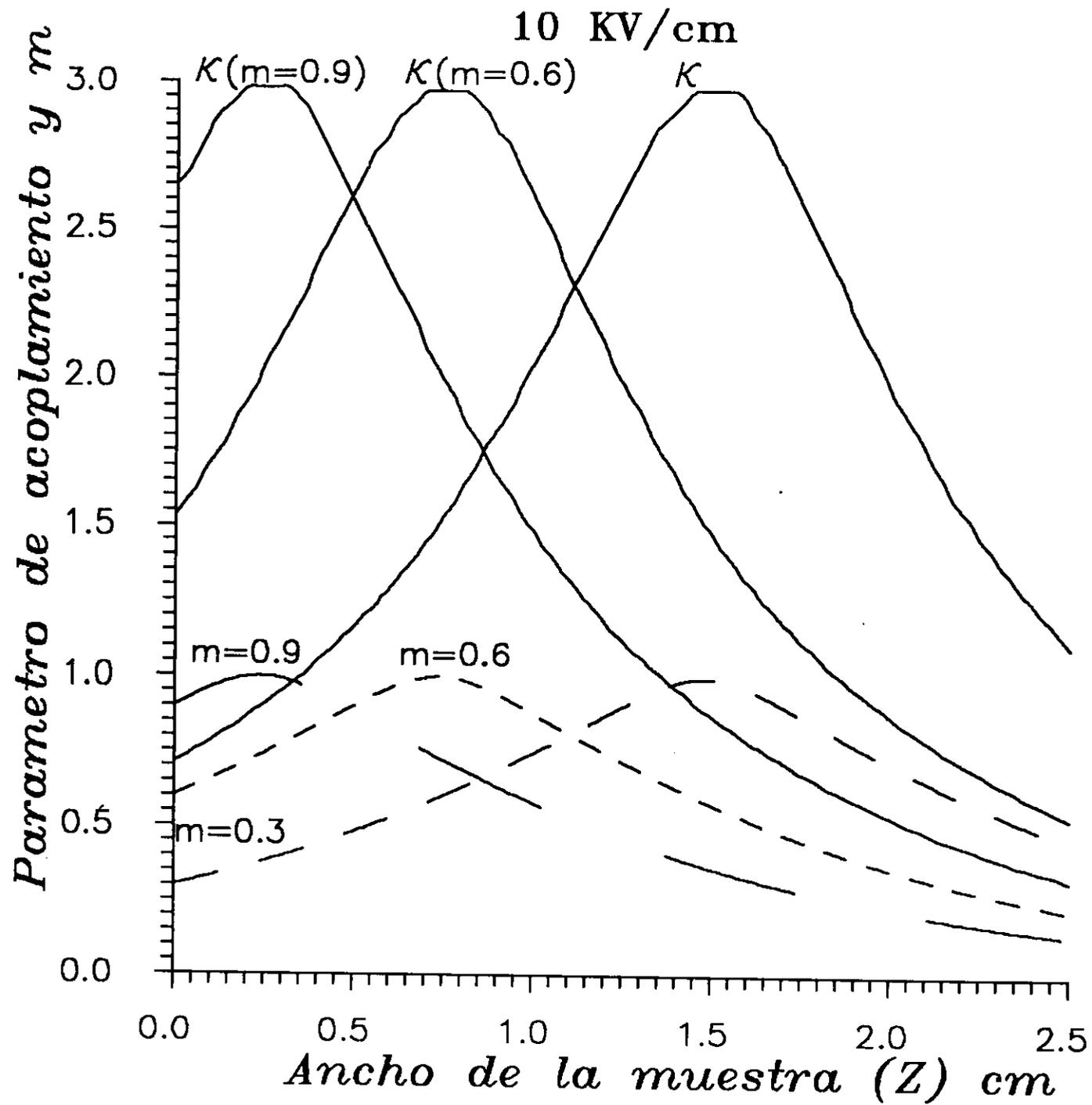


Fig 4.15

10 KV/cm

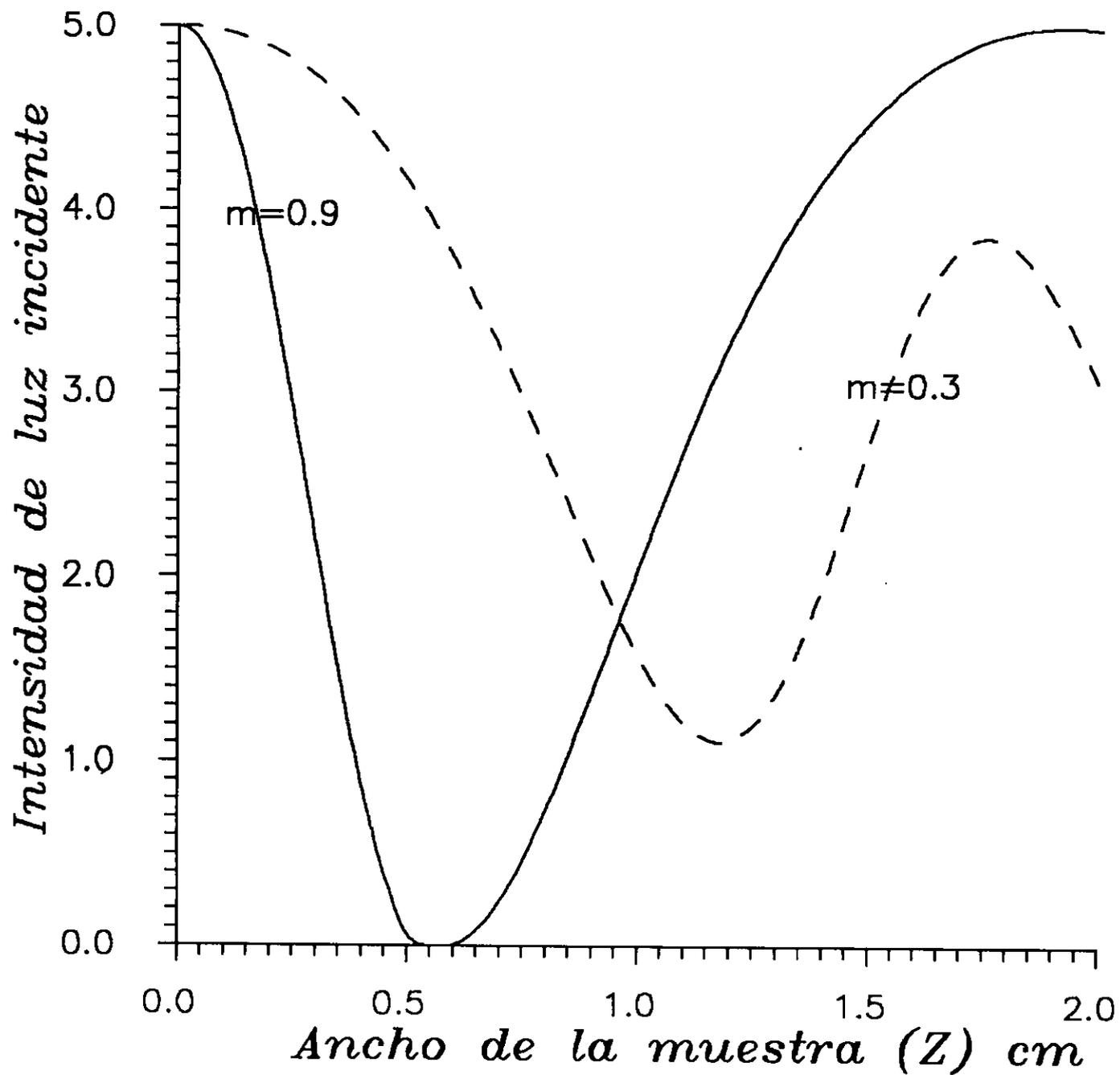


Fig 4.16

10 KV/cm

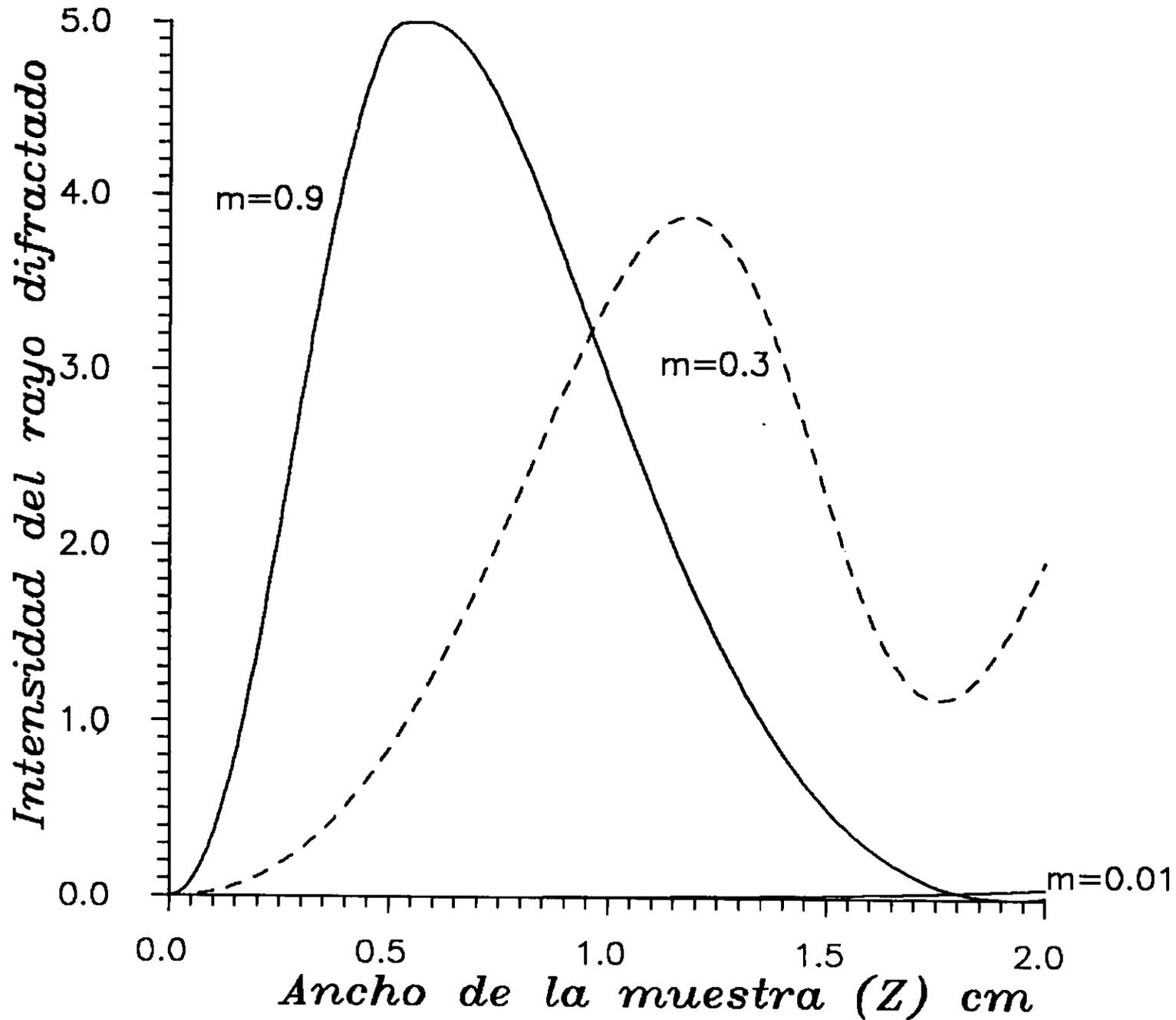


Fig 4.17