



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

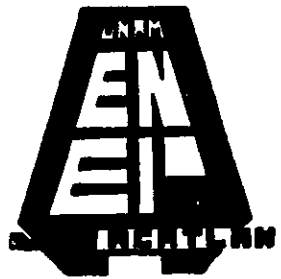
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
CAMPUS "ACATLAN"

APROXIMACION FRACTAL DE  
PERTURBACIONES ATMOSFERICAS  
SOBRE UN FRENTE DE ONDA PLANO

TESIS PROFESIONAL  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
LICENCIADO EN MATEMATICAS  
APLICADAS Y COMPUTACION  
P R E S E N T A

SERGIO ALEJANDRO MATIAS HERNANDEZ

DIRECTORES DE TESIS:  
FIS. FERNANDO ANGELES URIBE  
ING. ELVIRA BEATRIZ CLAVEL DIAZ



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

MEXICO, D. F.



1998



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# AGRADECIMIENTOS.

En primer lugar, quiero agradecer al Físico Fernando Ángeles Uribe por su paciencia, dedicación, ayuda y cordialidad que tuvo para que pudiera culminar este trabajo de tesis. A mis padres Dominga Hernández de Matias y Apolinar Jesús Matias Santiago, a mis hermanos Javier, Jesús Fernando, Elia y a la pequeña Paola Sofía por su apoyo en mis estudios.

Por otro lado, expreso mi agradecimiento a la Ingeniero Elvira Beatriz Clavel Díaz y al Fís. Mat. Jorge Luis Suárez Madariaga de la Escuela Nacional de Estudios Profesionales campus Acatlán y al Dr. Valeri Orlov Romanenko, al Dr. Salvador Cuevas Cardona y al Ing. Fernando Garfias Macedo del Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México, por el trabajo ejemplar en la revisión técnica de éste trabajo, ya que todas las páginas cuentan con sus sugerencias.

Finalmente quiero agradecerle al personal del Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México por sus sugerencias, cordialidad y ayuda en Ciudad Universitaria: al Ing. Gerardo Lara Lucario, Fís. Abel Bernal Bejarle, Ing. Justo Seiji Oshino del Departamento de Electrónica; Fís. J Pablo Sotelo Díaz, Dr. Voitsekhovitch Valerii del Departamento de Óptica; al Fís. Salustio González Allende, Fís. Carlos Espejo, Ing. Silvio Tinoco Puerto del Departamento de Mecánica y Vacío; y en el Observatorio Astronómico Nacional de San Pedro Mártir, Baja California Norte al jefe de Departamento de Electrónica Fís. Leonel Gutiérrez Albores; a mis amigos del Programa Formación de Recursos Humanos en Astronomía y Tecnologías de Punta por sus sugerencias Javier Alain Morones Camacho y Fís. Arturo García Cole; a mis compañeros del Instituto de Astronomía Fís. Monica Benítez, Fís. Xochitl Donaji Cruz López, D. I. Gastón Huerta y a mis compañeros de la Escuela Nacional de Estudios Profesionales campus Acatlán Mauricio Vázquez Estevez, Julian Antonio Méndez Rodríguez, Margarita Hernández Sánchez, Javier Amaya Ojeda, Mario Alberto Blancas Saldaña, y a mis amigas de Venezuela Mercedes Varela y a Luz Helena.

# ÍNDICE.

	Páginas.
INTRODUCCIÓN. ....	i
CONTEXTO DEL PROBLEMA. ....	iv
OBJETIVOS. ....	vi
HIPÓTESIS. ....	vi
I.- <b>MODELOS Y SIMULACIÓN.</b>	
Introducción. ....	1
1.1 <b>Antecedentes y definiciones de simulación.</b> ....	2
1.1.1 <b>Tipo de modelos.</b> ....	3
1.1.2 <b>Tipo de variables.</b> ....	4
1.2 <b>Evaluación del modelo.</b> ....	4
1.3 <b>Validación del modelo.</b> ....	5
II.- <b>PRINCIPIOS DE GEOMETRÍA FRACTAL.</b>	
Introducción. ....	6
2.1 <b>Caos.</b> ....	9
2.2 <b>Maurits Cornelis Escher precursor de la geometría fractal.</b> ....	11
2.3 <b>Fractales en la naturaleza.</b> ....	17
2.3.1 <b>La idea de autosimilaridad.</b> ....	17

2.3.2	Concepto de fractal.	20
2.3.3	Características y diferencias de la geometría fractal y euclídeana.	21
2.3.4	Dimensión fractal de Fraunhofer.	24
2.4	El movimiento Browniano.	27
2.5	El movimiento Browniano unidimensional.	28
2.6	El desplazamiento del punto medio en geometría griega: La construcción de Arquímedes para la parábola.	32
2.7	El método del desplazamiento del punto medio aleatorio.	33
2.8	El movimiento fraccional Browniano.	40

## III.- TURBULENCIA ATMOSFÉRICA.

	Introducción.	45
3.1	Caos y orden en astronomía.	49
3.2	Algunos conceptos sobre óptica.	50
3.3	Las estrellas como fuentes de luz.	51
3.4	Finalidad y tipos de telescopios.	52
3.5	Turbulencia atmosférica.	62
3.6	La función de estructura de fase.	66
3.7	El parámetro de Fried.	67
3.8	Estadísticas de una representación geométrica de un frente de onda distorsionado.	68
3.9	Estadísticas atmosféricas.	68

## IV.- DISEÑO DEL SIMULADOR ATMOSFÉRICO.

Introducción.	70
4.1 ¿ Qué es la programación orientada a objetos (POO) ?	71
4.1.1 Conceptos generales en el modelo orientado a objetos.	72
4.1.2 Algunos conceptos generales en la programación orientada a objetos.	73
4.2 Introducción a Delphi versión 1.0	74
4.3 Descripción del funcionamiento del simulador de frentes de onda perturbados.	76
4.4 Descripción de las rutinas utilizadas en la simulación de las perturbaciones del frente de onda plano.	85

## V.- VALIDACIÓN DEL SIMULADOR ATMOSFÉRICO.

Introducción.	89
5.1 Propiedades de autosimilaridad de la fase pantalla de Kolmogorov.	90
5.2 Espectro turbulento.	91
5.3 Relación de la turbulencia de Kolmogorov con el método de punto medio.	92

CONCLUSIONES.	94
---------------	----

## APÉNDICES Y ANEXOS.

### APÉNDICE 1

1.	Conceptos generales.	98
1.1	Reglas de crecimiento.	98
1.2	Definición de movimiento Browniano.	100
1.3	Tipos de telescopios.	101
1.4	La función de estructura de fase.	105

### APÉNDICE 2

2.	Procesos estocásticos.	107
2.1	El proceso de Wiener (movimiento Browniano).	109
2.2	Movimiento fraccional Browniano.	110

### APÉNDICE 3

3	Turbulencia atmosférica.	114
3.1	Fenómeno de refracción.	117

### ANEXO 1

1.	Glosario.	120
----	-----------	-----

REFERENCIAS.	129
--------------	-----

# Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.

---

## Introducción.

Desde que comenzaron a utilizarse los telescopios astronómicos, el avance tecnológico de éstos, durante muchos años se había dirigido hacia construir espejos de cada vez mayor diámetro. Esto evidentemente, permite coleccionar más luz y percibir objetos más débiles. Sin embargo, la resolución en las imágenes, es decir, la capacidad de percibir detalles en éstas ha quedado siempre limitada por los efectos de la turbulencia atmosférica o seeing<sup>1</sup>, por más grandes que se construyan los espejos. La turbulencia atmosférica, que hace que las estrellas titilen y los objetos lejanos centelleen, ha sido un problema para los astrónomos desde que se inventaron los telescopios. Newton en 1730 hacía notar que: "Los grandes telescopios pueden hacer que los objetos se vean más brillantes y más grandes que los telescopios pequeños, pero no pueden ser construidos de tal manera que supriman la confusión de los rayos que aparece de los temblores de la atmósfera", y proponía que: "el único remedio es un aire sumamente sereno y tranquilo, como el que quizá haya en las cimas de las montañas más altas, y por encima de las nubes". Los astrónomos han seguido este consejo, que Newton ofreció en su *Óptica*, pero hasta en las cimas más altas la turbulencia atmosférica limita la potencia de los grandes telescopios. El *Telescopio Espacial Hubble*<sup>1</sup> da fe de la altura a que están dispuestos a llegar los astrónomos para librarse de la turbulencia.

La construcción de telescopios astronómicos topa con la dificultad de obtener la imagen más clara posible de una estrella lejana, que debería de aparecer como un solo punto, y de los objetos más extensos como: las galaxias y los planetas que pueden considerarse colecciones de puntos.

Una estrella lejana produce un frente de onda esférico que viaja por el espacio hasta llegar a la atmósfera terrestre, donde la turbulencia atmosférica lo distorsiona. Los cambios de temperatura, asociados con la turbulencia producen variaciones en la densidad del aire, causa del retardo que sufren, en diverso grado, distintas partes del frente de onda y motivo de que la imagen se distorsione, como se puede observar en la figura (A). Estos antecedentes, *permiten que el desarrollo de esta investigación se oriente al análisis de las perturbaciones que sufre un frente de onda plano, ocasionadas por la turbulencia atmosférica, destacando a la vez el carácter fractal del seeing. Así mismo, se realizarán simulaciones numéricas de las perturbaciones que sufre el frente de onda para el caso unidimensional, recalcando que el algoritmo de simulación conserva características en común con la turbulencia de Kolmogorov.*

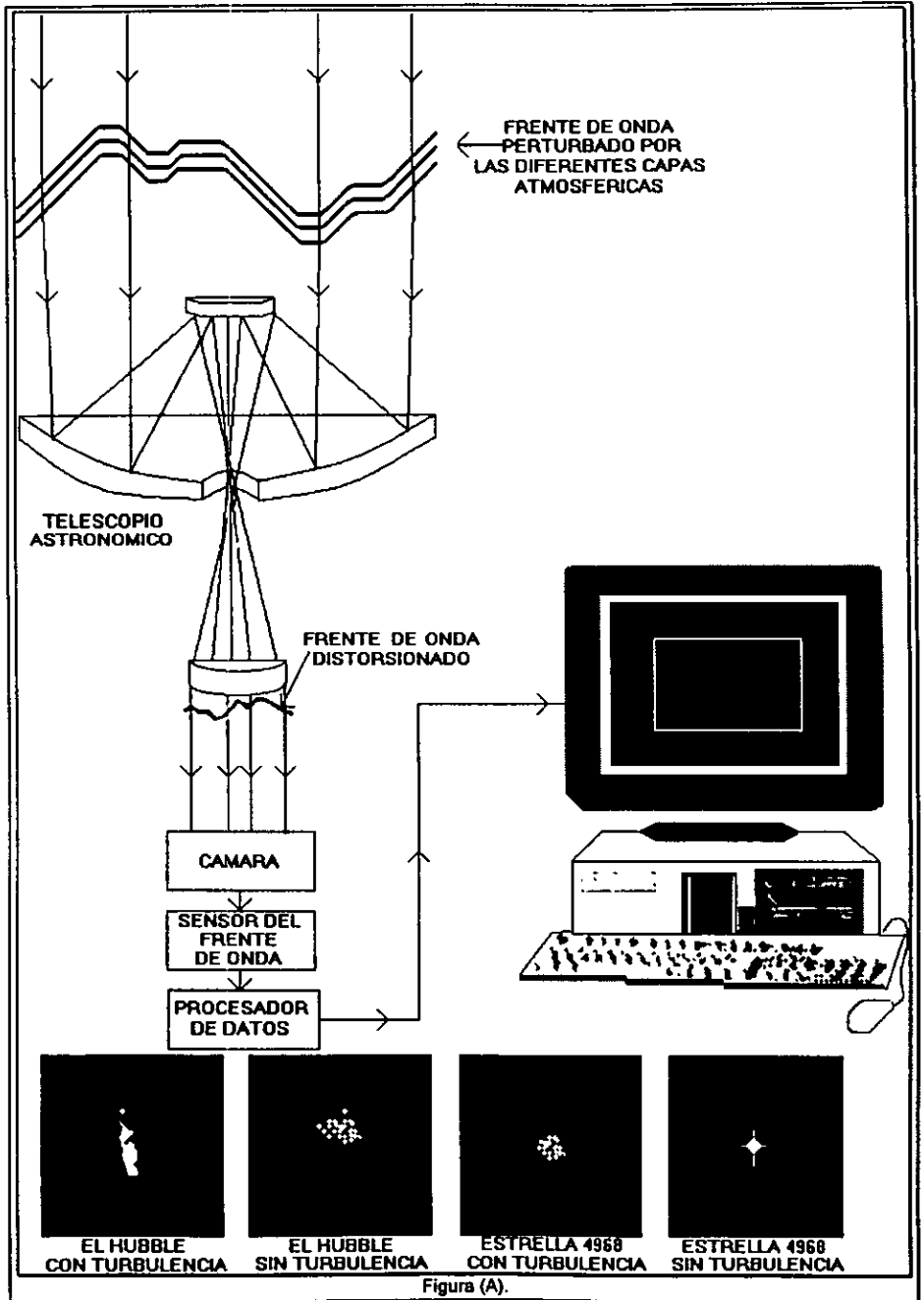
---

<sup>1</sup> Ver Anexo 1. Glosario.

<sup>1</sup> La NASA (National Aeronautics and Space Administration) lo colocó en órbita en el año de 1990, este telescopio se encuentra fuera de la atmósfera de la Tierra, lo cual reduce la turbulencia atmosférica y en consecuencia, las imperfecciones ópticas de las imágenes que son captadas a través del telescopio, ya que las imágenes de los cuerpos celestes aparecen más nítidas.



*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*



La investigación se divide en cinco capítulos los cuales se describen a continuación.

En el primero se aborda la metodología y conceptos de *modelos y simulación*, tomando en cuenta de que la turbulencia atmosférica es un problema con el cual no se puede experimentar, y en consecuencia, es necesario diseñar un modelo que permita de alguna manera simular las perturbaciones atmosféricas que sufre un frente de onda plano.

En el segundo se desarrollan los principios básicos de la *geometría fractal*, así como de algunos *procesos estocásticos*<sup>ii</sup>, puntualizando que el uso de este tipo de geometría y procesos aleatorios permiten suponer que el frente de onda que emite una estrella, es un frente de onda esférico pero dada la lejanía de éstas, dicho frente de onda al viajar a través del espacio y antes de llegar y cruzar la atmósfera terrestre, es un frente de onda plano, que ya perturbado se puede simular mediante un algoritmo fractal llamado el *método del desplazamiento del punto medio aleatorio*. Este algoritmo sirve para realizar una simulación del movimiento Browniano<sup>i</sup> que tiene muchas características en común con la *turbulencia de Kolmogorov*, descrita en términos de su *función de estructura* dada por  $D_p(\rho) = |\rho|^p$ , [Lane, R G 1992], ésta es más fácil de analizar dado que se genera el espectro en una dimensión con una regla de potencia<sup>1</sup> dada por  $\psi_s(k) = 1/k^2$ . La turbulencia atmosférica tiene una propiedad importante que es la *autosimilaridad* de ésta a cualquier escala, siendo éste uno de los conceptos básicos en la geometría fractal.

En el tercer capítulo se hablará sobre *Telescopios*<sup>1</sup> (definición, finalidad, tipos, etc..) así como de la *representación de un frente de onda en su espacio estadístico*, que está representada por su función de estructura<sup>1</sup> descrita como una regla de potencia con la característica que se mencionó anteriormente de *autosimilaridad*. Aquí también se explicará lo que se entiende por turbulencia atmosférica<sup>ii</sup>, así como algunas propiedades estadísticas de la función de estructura de fase y de su espectro de potencia.

En el cuarto se desarrolla un programa de cómputo, en el lenguaje de programación Delphi versión 1.0, que simula mediante el algoritmo del desplazamiento del punto medio aleatorio, las perturbaciones que sufre un frente de onda plano, para el caso unidimensional.

En el quinto los resultados de la simulación se validan comparando el espectro de potencia de la turbulencia de Kolmogorov y la de el algoritmo del desplazamiento del punto medio, asimismo se consulta a investigadores en este ámbito.

Finalmente se cuenta con tres Apéndices y un Anexo, el primer apéndice desglosa conceptos generales utilizados en el desarrollo de la investigación, el segundo a los procesos estocásticos<sup>2</sup>, el tercero a la turbulencia atmosférica y al fenómeno de refracción y por último, el anexo que es un glosario general sobre términos astronómicos y programación orientada a objetos manejados en el desarrollo de la investigación.

---

<sup>ii</sup> Ver Apéndice 2. Procesos Estocásticos.

<sup>i</sup> Ver Anexo 1. Glosario.

<sup>iii</sup> Ver Apéndice 3. Turbulencia Atmosférica.

<sup>2</sup> También conocidos como procesos aleatorios.

## Contexto del Problema.

Uno de los principales problemas a los que se ha enfrentado la astronomía desde sus inicios, es la *turbulencia atmosférica*, dado que cuando el astrónomo observa un objeto lejano, principalmente estrellas, la calidad de las imágenes captadas a través del telescopio aparecen como una pequeña mancha borrosa, como se puede observar en la figura (A). Esto se debe a que el frente de onda plano (el haz de luz) que emite la estrella al ser muy delgado, se perturba<sup>3</sup> al entrar en la atmósfera de la tierra por las variaciones en el índice de refracción<sup>1</sup>, fluctuaciones de temperatura<sup>4</sup> las cuales producen variaciones en la densidad del aire siendo esta la causa del retardo que sufre en diversos grados distintas partes del frente de onda y motivo de que la imagen se distorsione. Dichas fluctuaciones de temperatura que también ocasionan variaciones en la humedad, partículas suspendidas en el aire<sup>5</sup>, aire caliente, etc., son factores aleatorios que no se encuentran bajo control y que ocasionan que la imagen de una estrella se desenfoque y se mueva continuamente como se puede observar en la figura (B).

Por otro lado, se debe aclarar que la calidad de la imagen que es captada a través del telescopio, depende de factores o variables controlables, como por ejemplo las deformaciones del espejo primario<sup>6</sup>, que también causan los mismos efectos ópticos, pero que pueden evitarse corrigiendo la superficie, en este caso la del *espejo primario*.

La elaboración de la investigación está encaminada al estudio de las perturbaciones atmosféricas que ocasiona el *seeing* sobre un frente de onda plano, mediante el uso de geometría fractal, y procesos estocásticos, donde así mismo se realizarán simulaciones numéricas de cómo se perturba el frente de onda por las variables que no están bajo control, como lo es el *seeing*. Se supone que las perturbaciones que sufre el frente de onda pueden simularse mediante un algoritmo fractal que es el método del desplazamiento del punto medio, el cual toma en cuenta el espectro del movimiento Browniano que es descrita como una regla de potencia, dependiente de un parámetro  $H$ , el cual a su vez representa el factor de rugosidad que indica que tan suave o quebradiza son las deformaciones que sufre un frente de onda plano.

---

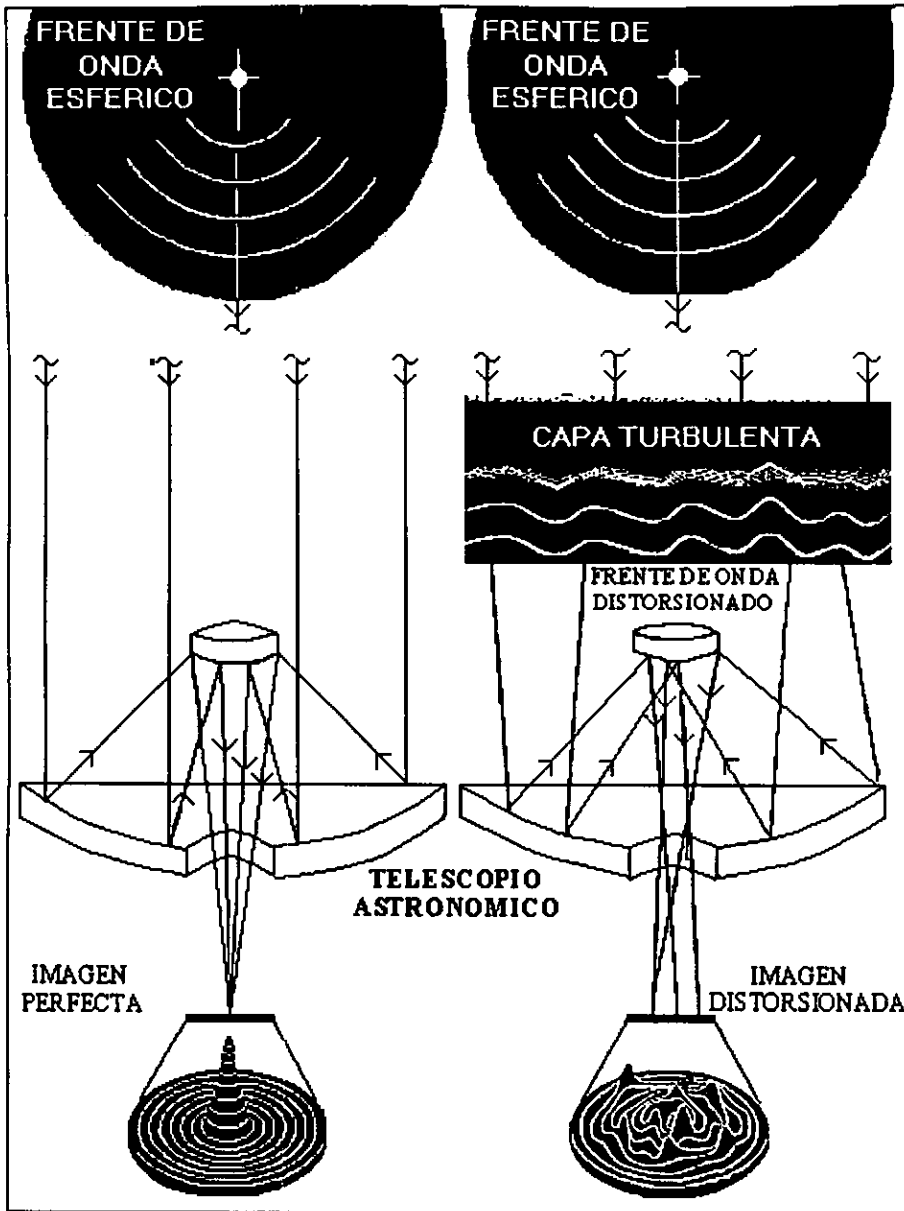
<sup>3</sup> Causa por la que centellean o titilan las estrellas.

<sup>1</sup> Ver Apéndice 1. Conceptos Generales.

<sup>4</sup> Consideradas como diferencias locales de temperatura.

<sup>5</sup> Particularmente polvo.

<sup>6</sup> Las cuales reciben el nombre de aberraciones, tales como: esfericidad, coma, astigmatismo, etc.,



La turbulencia atmosférica en la distorsión de imágenes.

**Figura (B). EL ASPECTO DE LAS ESTRELLAS.** Depende, cuando se observan desde una gran distancia, de la integridad de los frentes de onda de luz que producen. Si se pueden enfocar todos los componentes del frente de onda, la estrella aparece en forma de un punto de luz perfecto (izquierda). Sin embargo, la turbulencia atmosférica distorsiona aleatoriamente la forma del frente de onda, lo que hace que los componentes lleguen desfasados al punto focal (derecha).

---

## **Objetivos.**

- Emplear la teoría de los procesos estocásticos, para explicar que las perturbaciones atmosféricas que sufre un frente de onda plano provocadas por la turbulencia atmosférica\* pueden simularse, para el caso unidimensional, mediante el algoritmo del desplazamiento de punto medio, siendo éste una forma de simular movimiento Browniano (al cual se considera un proceso estocástico o caminata aleatoria).
- Simular las perturbaciones que sufre un frente de onda plano, verificando que los factores aleatorios que propician dichas perturbaciones pueden emularse mediante modelos fractales.

---

## **Hipótesis.**

Las perturbaciones atmosféricas que sufre un frente de onda plano, ocasionadas por la turbulencia atmosférica, pueden simularse pseudoaleatoriamente mediante el algoritmo del desplazamiento del punto medio siendo éste una manera de simular el movimiento Browniano en el caso unidimensional.

---

\* La simulación de la turbulencia atmosférica, se realiza mediante un proceso estocástico conocido como movimiento Browniano.

---

## **Objetivos.**

- Emplear la teoría de los procesos estocásticos, para explicar que las perturbaciones atmosféricas que sufre un frente de onda plano provocadas por la turbulencia atmosférica\* pueden simularse, para el caso unidimensional, mediante el algoritmo del desplazamiento de punto medio, siendo éste una forma de simular movimiento Browniano (al cual se considera un proceso estocástico o caminata aleatoria).
- Simular las perturbaciones que sufre un frente de onda plano, verificando que los factores aleatorios que propician dichas perturbaciones pueden emularse mediante modelos fractales.

---

## **Hipótesis.**

Las perturbaciones atmosféricas que sufre un frente de onda plano, ocasionadas por la turbulencia atmosférica, pueden simularse pseudoaleatoriamente mediante el algoritmo del desplazamiento del punto medio siendo éste una manera de simular el movimiento Browniano en el caso unidimensional.

---

\* La simulación de la turbulencia atmosférica, se realiza mediante un proceso estocástico conocido como movimiento Browniano.

# 1

## Modelos y Simulación.

### INTRODUCCIÓN:

El principio fundamental para usar la simulación en cualquier área del conocimiento, es la búsqueda constante del hombre por adquirir conocimientos relativos a la predicción del futuro. Con el surgimiento de las computadoras, la física y la matemática moderna tuvieron un cambio notable en su desarrollo. El ciclo teoría-experimento se vio alterado al aumentar en un paso intermedio, que es la simulación numérica. Donde el uso de la simulación toma otro significado, ya que surge la posibilidad de experimentar con modelos matemáticos que describen sistemas de interés en una computadora.

Una de las primeras personas en incursionar en esta nueva disciplina fue Enrique Fermi, pues tuvo la oportunidad de trabajar con una de las primeras computadoras, que fue la ENIAC<sup>7</sup>. El formuló un experimento que consistía en simular la dinámica de una cadena de moléculas unidimensionales con determinadas características. Fermi esperaba encontrar un comportamiento dinámico donde se cumplieran las premisas establecidas (la hipótesis ergódica de Boltzmann al incluir sólo unas cuantas decenas de partículas). Para su sorpresa la simulación numérica mostró un comportamiento recurrente y la distribución de energía distaba en mucho de ser equipartida. El dilema que se le presentó a Fermi fue determinar si esta simulación numérica reproducía correctamente el fenómeno físico. Tal cuestionamiento no ha sido exclusivo de Fermi, todos aquellos que realizan un cálculo numérico con la idea de entender un fenómeno físico tienen que *discernir sobre la validez de los resultados*, es decir, se espera que la información obtenida reproduzca en forma correcta el comportamiento del problema real.

El interés de realizar una simulación numérica está en entender el comportamiento de cierto tipo de expresiones matemáticas, así como sus posibles soluciones. Por lo tanto, el hecho de que la simulación para pronosticar algún tipo de fenómeno físico depende de los siguientes puntos:

---

<sup>7</sup> Electronic Numerical Integrator and Computer (ENIAC) primera computadora digital electrónica en la historia

- Los cálculos numéricos deben dar resultados que estén muy próximos a las soluciones de las expresiones matemáticas si es que existen éstas, de tal manera que el error numérico sea menor respecto a cierto orden de magnitud que se haya fijado previamente. Aquí la elección del método numérico<sup>8</sup> apropiado debe tomar en cuenta la complejidad de la expresión matemática, el máximo error numérico permitido, la capacidad y características de la computadora en la que se vaya a realizar la simulación. Otro punto es determinar el tiempo que ocupará el experimento numérico. El proceso de simulación debe estar en un intervalo de tiempo tal que, se puede decir que el cálculo numérico es computable. De esta manera, se observa que es necesario llegar a un equilibrio entre el error numérico máximo permitido, el método numérico utilizado y el tiempo de simulación estimado.
- Los resultados numéricos deben ser reproducibles por cualquier otro investigador interesado en el fenómeno. El resultado debe ser reproducible tomando en cuenta el error estipulado, es decir, no tiene sentido realizar algún tipo de cálculo que sea imposible de reproducir. Para asegurarse que cualquier lector de el artículo, donde se reporte la simulación, pueda repetir la experiencia.

Finalmente se puede concluir que realizar una simulación numérica que represente correctamente la solución de alguna expresión matemática es un problema nada trivial y es indispensable tener un buen conocimiento de los algoritmos numéricos y sobre todo una idea del comportamiento de las soluciones. Como se ha apuntado en la discusión anterior, es necesario estudiar la ecuación por otros métodos analíticos o asintóticos para poder hacer un pronóstico adecuado del tipo de solución que se espera obtener y así elegir el método numérico más apropiado. Si se es capaz de realizar simulaciones numéricas correctas, se habrá logrado añadir un elemento más al ciclo teoría-experimento, dando un potencial mayor a nuestra capacidad de entender los fenómenos de la naturaleza, tal como lo hizo Fermi.

## 1.1 ANTECEDENTES Y DEFINICIONES DE SIMULACIÓN.

El uso moderno de esta palabra se remonta a finales de 1940, cuando Von Neumann y Ulam propusieron el término "*análisis de Monte Carlo*" para aplicarlo a ciertos problemas de protección nuclear que eran, o demasiado costosos para resolver experimentalmente o demasiado complicados para ser tratados analíticamente. El análisis de Monte Carlo involucra la solución de un problema matemático no probabilístico, mediante la simulación de un proceso estocástico cuyos momentos o distribuciones de probabilidad satisfacen las relaciones matemáticas del problema no probabilístico.

Por ende, la simulación es el proceso de desarrollar el modelo de un problema y estimar medidas de su comportamiento llevando a cabo experimentos muestrales sobre un modelo.

---

<sup>8</sup> Algoritmo de solución.



La simulación es un proceso descriptivo de planteamiento de modelos. El proceso de modelado asociado con la simulación, por lo general implica recopilar datos para describir factores de entrada y factores operativos, que puedan definir las interrelaciones que existen entre los factores (variables), entradas y otros componentes del problema que se estudia. La salida de un modelo de simulación tiene la forma de descripciones del comportamiento y al ensayar el modelo es posible explorar las características del problema.

## DEFINICIONES DE SIMULACIÓN.

1. "x simula a y" si y sólo si:
  - a), x y y son sistemas formales;
  - b), y se considera como el sistema real;
  - c), x se toma como una aproximación del sistema real;
  - d), las reglas de validez en, x no están exentas de error.
2. Simulación de un sistema (u organismo) es la operación de un modelo (simulador), el cual es una representación del sistema. La operación de un modelo puede estudiarse y con ello, inferirse las propiedades concernientes al comportamiento del sistema o subsistema real.
3. *Simulación*, es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora, los cuales requieren ciertos tipos de modelos lógicos y matemáticos, que describen el comportamiento de un sistema (o algún componente de ellos) en ciertos períodos de tiempo.

### 1.1.1 TIPO DE MODELOS.

Para este estudio se está interesado en que los experimentos de simulación puedan emularse en una computadora, bajo condiciones estocásticas y cuyas soluciones por métodos estrictamente analíticos, no son necesariamente del todo determinísticas.

- Modelos determinísticos: en este tipo de modelos, ni a las variables exógenas<sup>9</sup>, ni a las endógenas, se les permite ser variables al azar, en tanto que se suponen relaciones exactas para las características de operación, en lugar de funciones de densidad de probabilidad.
- Modelos estocásticos: son aquellos modelos en los que por lo menos una de las características de operación está dada por una función de probabilidad. *La simulación es un método más atractivo para analizar y resolver los modelos estocásticos.*
- Modelos estáticos: son aquellos que no toman en cuenta explícitamente, a la variable tiempo.

---

<sup>9</sup> Variables independientes.

## 1.1.2 TIPO DE VARIABLES.

El estudio de las perturbaciones atmosféricas que sufre un frente de onda, involucra el manejo de *factores aleatorios* que no se encuentran bajo control, tal es el caso del índice de refracción y las fluctuaciones de temperatura que producen variaciones en la densidad del aire siendo esta la causa del retardo que sufre en diversos grados distintas partes del frente de onda y motivo de que la imagen se distorsione, lo cual ocasiona que la imagen de una estrella se desenfoque y se mueva continuamente.

Por otro lado, también existen factores o *variables controlables*, como por ejemplo las deformaciones del espejo primario, que también causan los mismos efectos ópticos, pero que pueden evitarse corrigiendo la superficie del *espejo primario*.

De lo anterior, es importante clasificar las variables según su comportamiento y según su manejo, a continuación se realiza una breve explicación de los distintos tipos de variables que existen:

- Las *variables exógenas*, son las *independientes* o de entrada de el modelo y se supone que han sido predeterminadas y proporcionadas independientemente del sistema que se modela. Es posible clasificar las variables exógenas en controlables<sup>10</sup> y no controlables. Las primeras son aquellas variables o parámetros susceptibles de manipulación o control por quienes toman decisiones o crean políticas para el sistema. El medio ambiente en el cual el sistema modelado existe y no el sistema en si o los encargados de tomar decisiones, genera las variables no controlables.
- Las variables de estado, describen el estado de un sistema o uno de sus componentes, ya sea al comienzo, al final o durante un período de tiempo.
- Las variables endógenas son las dependientes o de salida del sistema y no son generadas por la interacción de las variables exógenas con las de estado.

## 1.2 EVALUACIÓN DEL MODELO.

Es necesario realizar una evaluación del modelo, es decir, ponerlo a prueba. Lo anterior es fundamental considerando que poco o nada se obtendrá utilizando un modelo inadecuado para la simulación del sistema.

Un nivel de referencia para la evaluación del modelo en esta investigación es el espectro de potencia del movimiento Browniano y de la turbulencia de Kolmogorov [A N Kolmogorov, 1962], ya que dichas expresiones son próximas, además de que conservan la misma función de estructura.

---

<sup>10</sup> Conocidas también como instrumentales.

### 1.3 VALIDACIÓN DEL MODELO.

Siempre debe comprobarse que el modelo de simulación se aproxime de manera razonable al comportamiento del fenómeno real, recurriendo a uno o varios métodos de validación siempre bajo la luz de buen juicio y el conocimiento del entorno real.

La validación del modelo de simulación implica complejidades prácticas, teóricas, estadísticas e incluso filosóficas. Sin embargo existen las siguientes métodos para llevarla a cabo:

- A. Método Delphi. Consiste en pedir opiniones a investigadores en el campo de estudio por separado y luego darlos a conocer al mismo grupo de investigadores, ocultando el origen de cada una, para una nueva opción.
- B. Método de Turing. Se da a los investigadores el conjunto de resultados reales y del modelo de simulación, sin distinción, para llegar a la identificación de cada uno. Si son indistinguibles para los expertos el modelo es bueno.
- C. Comportamiento en casos extremos. Analizar las condiciones extremas en las cuales el modelo debe comportarse como se esperaría en el fenómeno real.
- D. Comparar los valores simulados de las variables endógenas o de salida y los datos históricos conocidos, si es que estos existen.
- E. Determinar la exactitud que tienen las predicciones del Modelo de Simulación respecto al comportamiento del sistema real en otros períodos.

La validación del modelo para este caso, se realizará mediante las opiniones a investigadores del Instituto de Astronomía, bajo el sustento de los parámetros que involucran al fenómeno real con el del algoritmo de simulación, es decir, viene siendo una combinación del método (A) y del método (B), recalcando que no existen datos históricos o datos reales de como se perturba un frente de onda plano, en el plano de la pupila en el caso unidimensional provocada por la turbulencia atmosférica.

# 2

## Principios de Geometría Fractal.

*"La geometría fractal según parece que tiene su propio lenguaje para describir la complejidad de muchas formas complicadas alrededor de nosotros".*

*(Mandelbrot, 1990a)*

*"Yo creo que los fractales responden a una profunda inquietud de los hombres".*

*(Mandelbrot, 1990b)*

*El interés de los fractales radica en la invarianza, e invarianza estadística.*

*(Heinz Otto Peitgen, 1993)*

### INTRODUCCIÓN:

La palabra fractal<sup>1</sup>, desde que ésta fue propuesta por Mandelbrot en el año de 1975 se refiere a una clase de objetos matemáticos abstractos que ya se conocían a la vuelta del siglo XIX, este término ha encontrado una resonancia dentro y fuera de la comunidad científica. El concepto de fractal, mucho más que el concepto de teoría de catástrofes<sup>11</sup> introducidos unos pocos años antes, están actualmente siendo aplicados en física, biología, medicina, ciencia de materiales y astronomía donde Benoit B Mandelbrot ha caracterizado, que la distribución de la materia a gran escala en el universo tiene una naturaleza fractal.

---

<sup>1</sup> Ver Anexo 1. Glosario.

<sup>11</sup> El matemático francés René Thom desarrollo la teoría de catástrofes en los años sesenta, la cual proporciona una comprensión profunda y precisa de un amplio abanico de fenómenos que presentan bruscas discontinuidades, desde la metamorfosis de una oruga hasta el desplome de las civilizaciones.

La esencia del mensaje de Mandelbrot es que muchas estructuras naturales como por ejemplo: las nubes, las montañas, las líneas de las costas, las grietas tectónicas, los pequeñísimos capilares sanguíneos, las superficies de la ruptura de materiales y otras muchas semejantes que aparentan tener una complejidad extraordinaria, poseen en realidad una misma regularidad geométrica: la denominada invariancia bajo escala o invarianza estadística. Si se analizan estas estructuras a distintas escalas, se encuentran una y otra vez los mismos elementos básicos, y por lo tanto, a distintas escalas se encuentra una descripción matemática apropiada mediante el concepto de dimensión fractal.

Para introducirse en la geometría fractal parece oportuna la metáfora lingüística siguiente: mientras que las lenguas occidentales se escriben con la ayuda de un alfabeto finito, las lenguas orientales, como el chino, utilizan tal número de signos que bien se puede decir que poseen infinitos elementos. En las lenguas occidentales hay que combinar las letras para formar palabras que son las portadoras del significado. Por el contrario, los símbolos chinos ya son significativos por sí mismos, sin que sea preciso combinarlos para que lo adquirieran. De manera análoga a las lenguas occidentales, que poseen un alfabeto finito (por ejemplo: el latín) la geometría euclideana tradicional posee sólo contados elementos, como la línea recta, la circunferencia, etcétera. Con estos pocos elementos se construyen objetos más complejos, que ya pueden asimilarse a objetos reales, es decir, empiezan a tener significado. Por el contrario, la geometría fractal correspondería a la familia de las lenguas orientales. Se compone de un número infinito de elementos, radicalmente distintos de los euclídeos. ¿Qué son, pues, estos elementos? la manera más simple de describirlos consiste en identificarlos como reglas de cálculo o algoritmos. Tales algoritmos pueden considerarse directamente como las unidades significativas de el lenguaje fractal. Por ende, la geometría fractal se expresa por medio de algoritmos, es decir, por medio de reglas e instrucciones de procedimiento, que requieren de la ayuda de un ordenador para convertirse en formas y estructuras.

Lo anterior hace hincapié en que la geometría euclideana es el lenguaje matemático, más utilizado para la descripción y manipulación de los objetos observados en la naturaleza, pero está tiene muchas limitantes dado que con un número contado de elementos como: cuadrados, triángulos, círculos, etc., ofrecen un pobre vocabulario para modelar objetos de la naturaleza, como lo observo Mandelbrot "las montañas no son conos, las nubes nos son esferas", proporcionando la respuesta en términos de un nuevo lenguaje matemático, la geometría fractal de la naturaleza. La geometría fractal caracteriza y modela formas complejas e irregulares encontradas en la naturaleza, haciendo uso de la autosimilaridad y autoafinidad que poseen dichos objetos.

De lo anterior, en este estudio la característica de autosimilaridad es el punto principal y el punto de partida para analizar la turbulencia atmosférica, dado que se supone que tiene una autosimilaridad sobre el intervalo inercial y que además esta sigue un espectro de Kolmogorov, donde las distorsiones introducidas por la turbulencia causan una distorsión en la magnitud y la fase del frente de onda incidente en la atmósfera. Kolmogorov en el año de 1941, estableció que la turbulencia es infinita en extensión e infinita en detalle, es decir, proporciona un cierto criterio de escala apropiado, que permite pensar que cualquier parte de la turbulencia atmosférica observada a cualquier escala se observa *autosimilar* a cualquier otra, en un cierto rango (conocido como intervalo inercial) dado por:

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

$$L_0 \geq |r| \geq l_0 \quad (2.1)$$

Donde:  $L_0$  es la escala externa de la turbulencia y puede estar entre 2 y 100 metros o más, mientras que  $l_0$  es la escala interna y puede estar en un intervalo de milímetros, aunque los valores de estos parámetros son inciertos.

Además de que la autosimilaridad es una consecuencia directa del espectro de potencia de las fluctuaciones de fase, y que esta representada por:

$$\Phi(k) = 0.023r_0^{-5} |k|^{-11/3} \quad (2.2)$$

en la función de estructura de fase<sup>12</sup> descrita por la siguiente regla de potencia<sup>1</sup> en el plano unidimensional:

$$D_p(|r|) = \left\langle \left( p(r') - p(r' + r) \right)^2 \right\rangle = 6.88 \left( \frac{|r|}{r_0} \right)^{5/3} \quad (2.3)$$

Donde:  $r_0$  es el parámetro de Fried y los paréntesis triangulares  $\langle \rangle$  denotan la esperanza sobre un conjunto de frentes de onda.

En 1996, David L. Fried observó que los efectos ópticos de la turbulencia del aire se pueden describir mediante formas o aberraciones simples del frente de onda, tales como la inclinación, el desenfoque, astigmatismo, curvatura esférica y cilíndrica, etc., y que la intensidad de la turbulencia se puede representar con una sola magnitud  $-r_0$  que es el diámetro de la mayor apertura utilizable antes de que la turbulencia empiece a degradar la calidad de la imagen. A medida que la turbulencia aumenta,  $r_0$  disminuye.

La expresión (2.3) es el promedio de las deformaciones de un conjunto de frentes de onda en el plano de la pupila en el espacio estadístico. Estas deformaciones pueden emularse mediante el algoritmo del desplazamiento de punto medio, la cual como se mencionó en la introducción conserva algunas características con la turbulencia atmosférica como lo es el espectro de potencia en el plano unidimensional y la función de estructura. Por lo tanto, este capítulo proporcionará las bases fundamentales de la geometría fractal, partiendo de lo que se entiende por caos, conceptos básicos de geometría fractal como por ejemplo dimensión, tipos de autosimilaridad, tipos de fractales, etc, y finalmente se habla del algoritmo del desplazamiento del punto medio y sus parámetros más importantes.

<sup>12</sup> Que representa las deformaciones del frente de onda en el plano estadístico.

<sup>1</sup> Ver Apéndice 1. Conceptos Generales.

## 2.1 CAOS<sup>13</sup>.

*Lo que realmente me interesa saber es si Dios tuvo la posibilidad de elegir durante la creación del mundo.*

*Albert Einstein*

El gran poder la ciencia descansa en la capacidad de relacionar causa y efecto, pero hay fenómenos naturales cuya predicción no es tan sencilla. Aunque los movimientos de la atmósfera obedecen las leyes de la física en la misma medida que los movimientos de los planetas, las predicciones meteorológicas se realizan todavía en términos de probabilidades. El clima, el flujo de un torrente y el rodar de los dados tienen, todos ellos, aspectos impredecibles. Al no aparecer una relación clara entre causa y efecto, se dice que esos fenómenos poseen elementos aleatorios, es decir, se suponía que bastaría con recoger y procesar una gran cantidad suficiente de información para alcanzar una predecibilidad.

Hoy en día este enfoque se ha visto alterado por un descubrimiento sorprendente: algunos sistemas deterministas muy simples, con sólo unos pocos elementos pueden generar comportamiento aleatorio. El azar es fundamental; la información no lo esfuma. A la aleatoriedad generada en sistemas gobernados por leyes físicas que manifiestan cambios de manera irregular y difícil de predecir se le llama caos. Una aparente paradoja es que el caos es determinista, generado por reglas fijas que no encierran en sí mismas ningún elemento de azar. En principio, el futuro está enteramente determinado por el pasado, pero en la práctica las pequeñas incertidumbres se agrandan, es decir, si bien el movimiento es predecible a corto plazo, no lo es a largo plazo. El caos permite encontrar orden en sistemas tan diversos como la atmósfera, los grifos que gotean, etc., Lo anterior permite formular la siguiente pregunta ¿cuál es el origen del comportamiento estocástico?, La respuesta es el movimiento Browniano el cual ofrece un ejemplo clásico de azar. Si se observa una partícula de polvo a través del microscopio, se ve que sigue un zigzag continuo y errático. Ello se debe al bombardeo que sufre la partícula por las moléculas de agua. Puesto que las moléculas de agua no se distinguen y su número es muy elevado, el movimiento detallado de la partícula de polvo resulta completamente impredecible.

## EL CAOS DETERMINISTA.

*Una causa muy pequeña que escapa a nuestra percepción determina efectos considerables que no pueden escapársele a nuestra vista, y entonces se dice que el efecto se debe al azar.*

*Henri Poincaré: Ciencia y método.*

La palabra caos evoca una situación errática en la cual toda previsión es imposible, lo cual parece excluir el determinismo. El descubrimiento de comportamientos erráticos en sistemas gobernados por unas pocas ecuaciones muy simples, de las que intuitivamente cabría esperar un comportamiento relativamente regular y que no están sometidos a fuerzas irregulares o aleatorias, sino por el contrario por leyes estrictamente deterministas, ha significado el surgimiento de un nuevo paradigma llamado *caos determinista* que hace énfasis en situaciones, en la cual sistemas regidos por unas pocas ecuaciones simples presentan un comportamiento aparentemente desordenado e imprevisible sin que intervenga ninguna fuerza aleatoria.

---

<sup>13</sup> La teoría del caos se ocupa de sistemas que exhiben sensibilidad a las condiciones iniciales y bifurcación.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

En ciertas ocasiones, pequeñas modificaciones de las circunstancias pueden acarrear importantes cambios. En meteorología se sabe que la magnitud de una perturbación atmosférica se duplica cada tres días, en caso de que nada se interponga en su desarrollo, es decir, si se agita un abanico, la perturbación atmosférica que se produce (ciertamente no muy grande), se verá multiplicada por dos en tres días y por  $2^{10} = 1024$  veces en un mes. Dentro de un año se verá multiplicada  $10^{36}$  veces, lo que probablemente será sentido como un ciclón en alguna parte del planeta. Este efecto, es conocido como el *efecto mariposa*, la perturbación se duplica en tres días de no haber nada que se interponga en su camino, y por supuesto, hay muchas mariposas, estornudos y tornados que sí lo hacen. Otro ejemplo es que, una variación de un metro de la posición de la tierra puede ocasionar que al cabo de cien millones de años se modifique esta posición hasta un millón de kilómetros

## EL POR QUE DEL CAOS DETERMINISTA.

Cuando Newton estudió la física, se pensaba que todo podía medirse, como el movimiento o la caída de un cuerpo. Sin embargo, se descubrieron, por ejemplo, las turbulencias difíciles de predecir, estudiadas por la mecánica de fluidos, fenómenos como los truenos o la trayectoria que toma un globo cuando se desinfla que son muy particulares, es decir, tienen "personalidad". En el caso del globo, pequeñas diferencias en la elasticidad del látex hacen que sea imprevisto su recorrido. Un grano de polvo interestelar, no es igual al otro, ya que cada uno contiene estructuras complejas. Lo mismo ocurre con los planetas, cuya composición esta estrechamente relacionada con el clima imperante en cada uno de ellos.

Algunos modelos matemáticos representados por ecuaciones diferenciales, resumen las leyes de la física y permiten deducir cuál va a ser el comportamiento futuro de un sistema físico dado. Por ejemplo, si se tienen las posiciones de los planetas del sistema solar se puede establecer la ecuación diferencial, usando las leyes de Newton y las de gravitación universal. Se resuelve y se aplica a las condiciones iniciales, mediante lo cual se puede predecir para siempre cuál será la posición y la velocidad de cada uno de los planetas. Esto se comprueba también en la predicción de un eclipse o en el lanzamiento de un cohete, del cual se establece con anterioridad su trayectoria.

Por otro lado, como se mencionó anteriormente existen fenómenos llamados azarosos o aleatorios, los cuales son imposibles de predecir, como algunos problemas de la turbulencia en la dinámica de fluidos. En un sistema normal una pequeña perturbación, con el tiempo, crece linealmente y después de cien años causa pocos estragos. En un fenómeno de caos esa misma perturbación crece exponencialmente después del mismo lapso de tiempo los efectos se incrementan. Cuando se efectúan cálculos no se puede hacer con números exactos por lo que se dificulta poder predecir cuál será el comportamiento. Aquí, las décimas, centésimas o millonésima que no se toman en cuenta funcionan como una perturbación que crece. Por lo anterior, el caos es un sistema con crecimiento exponencial en donde no se pueden eliminar las pequeñas perturbaciones.



Las ecuaciones de la mecánica de Newton, describen el movimiento de una pelota que cae en el campo gravitatorio terrestre, por ende, las leyes de la mecánica permite predecir con precisión lo que va a ocurrir; si se deja caer la pelota desde una posición inicial, acabará llegando al suelo a un punto bien determinado. Si cambiamos un poco el punto de partida el punto de impacto con el suelo será distinto pero próximo al primero. En otras palabras, las trayectorias de la pelota son cercanas si también lo son las condiciones iniciales, llegando así a la idea que subtiende todo el caos determinista y que es la *sensibilidad a las condiciones iniciales*.

En una situación caótica, sistemas que parten de condiciones iniciales próximas pueden evolucionar de un modo completamente distinto; esta propiedad fundamental es común a todas las formas de fenómenos caóticos, como ejemplo: considérese un péndulo que oscila débilmente, en cada instante podemos representar su posición y su velocidad por un punto en un plano cuyas coordenadas son la posición y la velocidad: este plano es el espacio matemático llamado *espacio fase*<sup>1</sup>.

## 2.2 MAURITS CORNELIS ESCHER PRECURSOR DE LA GEOMETRÍA FRACTAL.

Mientras la geometría fractal data desde 1975, es importante recalcar que muchas de las formas o imágenes fractales hoy conocidas ya se habían dado a conocer en tiempos anteriores. Los fractales tuvieron su origen en los trabajos de Fatou y Julia cerca de 1918 pero ellos no vieron el tema relevante o importante en su tiempo.

Existe una gran cantidad de imágenes creadas por Maurits C Escher, las cuales ponen en relieve algunas características de los fractales como lo es la autosimilaridad, la escala, la dimensión etc., Maurits Cornelis Escher de niño, se vio intrigado por el orden y la simetría. Escher escribió que una de las principales fuerzas impulsoras de sus trabajos era un "vivo interés por las leyes geométricas contenidas en la naturaleza que nos rodea".

Los ojos de Escher, discernían en lo ordinario efectos visuales de gran impacto detalles arquitectónicos de edificios monumentales vistos desde insólitas perspectivas-, las luces y sombras proyectadas por las escalinatas de los pueblecitos, y en el otro extremo de la escala, detalles diminutos de la naturaleza vistos como a través de una potente lupa. Las obras de Escher hacen énfasis en los siguientes conceptos: la simetría, dualidad, sibi semejanza, dimensión, relatividad, reflexión e infinito, como se verá a continuación en algunas de sus obras.

---

<sup>1</sup> Ver Anexo 1. Glosario.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones  
Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

- **LA BANDA DE MÖBIUS II:** da cabida a una procesión de hormigas que reptan en un ciclo sin fin. Escher, con un número finito de figuras, plasma la infinidad en el recorrido incesante de un bucle sin fin como se muestra en la figura (2.1).

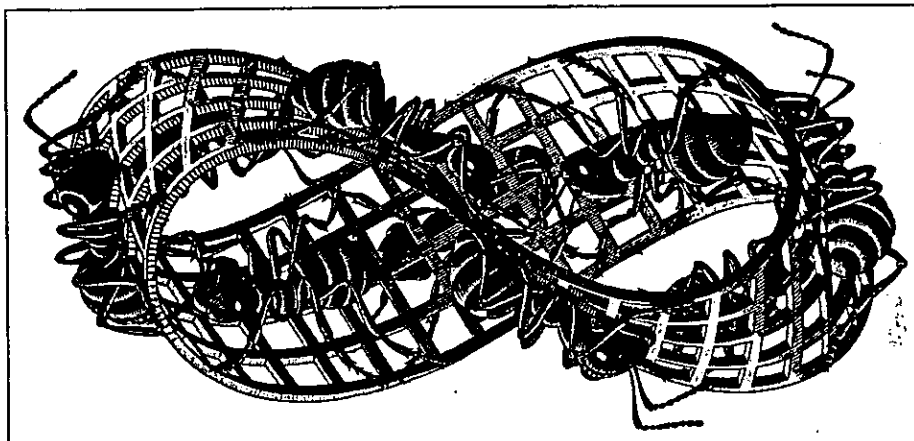


Figura (2.1). Banda de Möbius II, 1963.

- **LA DIMENSIÓN:** es esa noción que separa punto, recta, plano y espacio. Para poner de manifiesto las ambigüedades en la percepción de dimensión. En su obra *Día y Noche*, el grabado se metamorfosea en dos bandadas de gansos. El grabado también ilustra la noción de cambio topológico, en el cual las figuras son deformadas sin ser cortadas ni perforadas. También se aprecian la simetría por reflexión y la dualidad o complementariedad: los gansos negros vuelan sobre un villa iluminada por el sol, mientras que los blancos aletean sobre la imagen nocturna y simétrica de la misma escena.

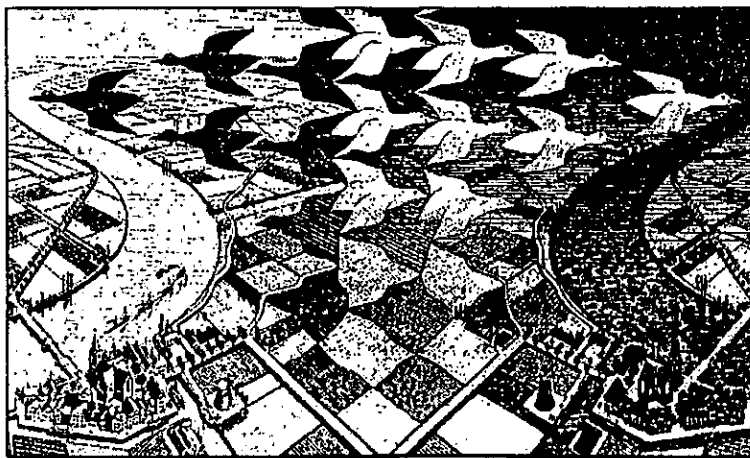


Figura (2.2). Día y Noche, 1938

- **LA SIMETRÍA:** es una noción estructural que conforma a muchos modelos físicos y matemáticos, en la figura (2.3), las mariposas parecen llenar la pagina al azar; sin embargo cada una de ellas está situada con gran precisión y rodeada exactamente de igual modo. Siempre son seis (en colores alternantes) las que revolotean alrededor del punto donde se tocan las extremidades de las alas delanteras izquierdas; siempre son tres (de diferentes colores) las que giran en torno a un punto donde se tocan las alas posteriores derechas. Además de simetría de rotación, el dibujo posee simetría de traslación, basada en un retículo triangular, el motivo puede repetirse ilimitadamente en todas las direcciones, proporcionando así una metáfora del infinito.

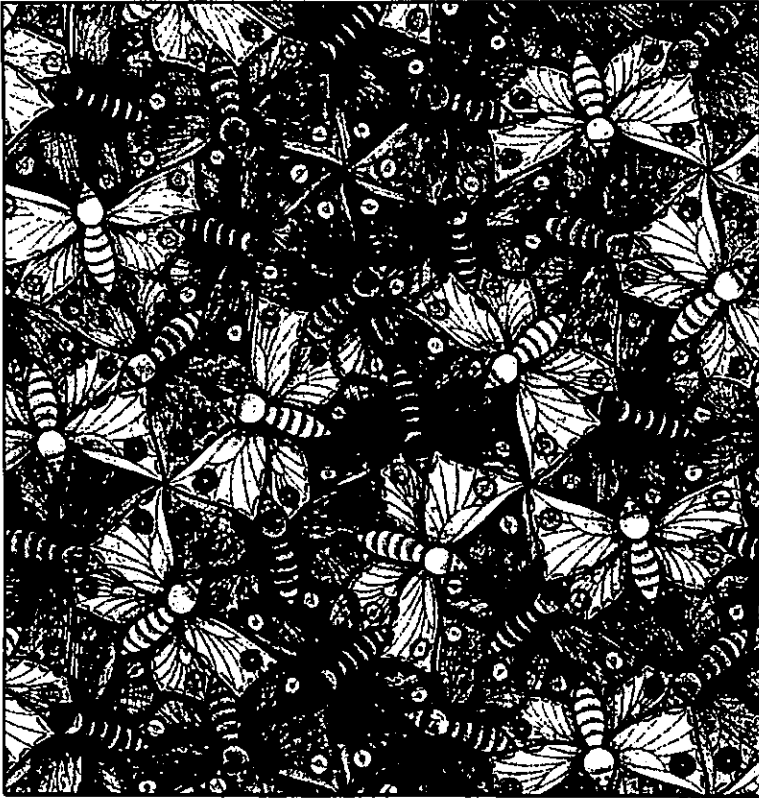


Figura (2.3). Sistema triangular I B<sub>3</sub> Tipo 2, 1948.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones  
Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

- **LA DUALIDAD:** es el tema que más prevalece en los últimos grabados de Escher. *En matemáticas a cada enunciado se le puede asociar su negación, y a cada conjunto, su complementario; en cada caso, el objeto y su dual definen el uno al otro. En Límite circular IV no hay perfiles; los contornos de los ángeles y de los demonios se definen mutuamente. Cada uno es, a la vez, figura y fondo. Para nuestros ojos euclídeos, las figuras de esta pavimentación hiperbólica parecen distorsionarse más y más al disminuir de tamaño. Sin embargo, medidas por la geometría intrínseca al mundo del grabado, cada ángel tiene exactamente la misma forma y el mismo tamaño, y otro tanto vale para cada diablo. Un número infinito de copias se repite, sin salirse de los confines del círculo.*

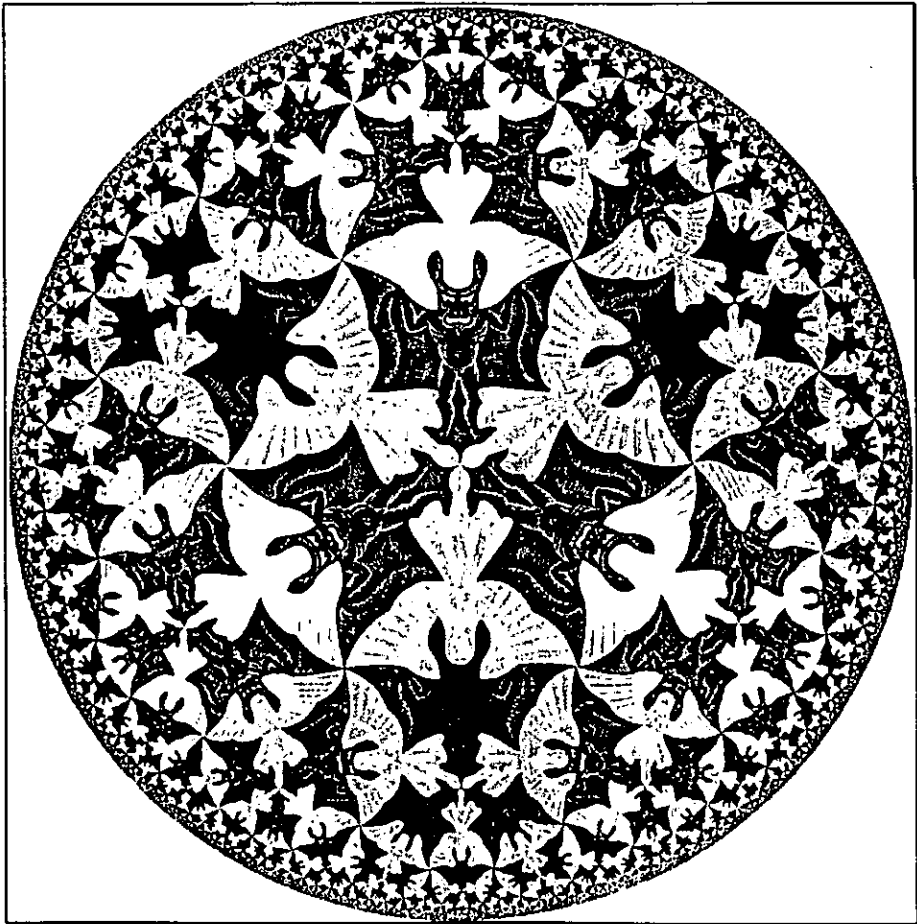


Figura (2.4). Límite Circular IV por M C Escher, © 1988 M C Escher.

- **LA SIBISEMEJANZA:** queda ilustrada en el grabado *Límite cuadrado* construido mediante un esquema recursivo invención del propio Escher. Los algoritmos recursivos son conjunto de instrucciones aplicadas a un objeto con el propósito de producir nuevos objetos, y luego a los nuevos para producir otros, y así sucesivamente. El producto final es autosimilar o autosemejante si todos los objetos finales son iguales al original, salvo por cambios de escala, orientación o posición.



Figura (2.5). Límite cuadrado, 1964.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones  
Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

- **LA RELATIVIDAD:** afirma que lo que ve un observador está influenciado por el contexto y por el punto de observación. En la escena *Alto y Bajo*, Escher presenta dos vistas de la misma escena. En la mitad inferior, el observador se encuentra en el patio; en la mitad superior, el observador mira hacia abajo. Si se Aleja ahora del grabado. El cuadrilátero pavimentado que ocupa el centro, ¿corresponde a suelo o al techo? Escher lo utiliza de ambas formas, a fin de casar las dos vistas. Es imposible ver con lógica la figura completa. La escena pone también de manifiesto que, al pegar visiones parciales para formar un todo global, pueden aparecer contradicciones.



Figura (2.6). Alto y Bajo, 1947.

Los motivos sibilimejantes proporcionan ejemplos de figuras que poseen dimensión fraccionaria, o fractal, ambigüedad que sin duda hubiera causado gozo a Escher.

## 2.3 FRACTALES EN LA NATURALEZA.

La noción central que subyace en la palabra *fractal* es la de autosimilitud o autosimilaridad. Si se observa una nube en el cielo, esta tiene una forma complicada y un perfil indistinguible, pero en cambio si se observa ahora una pequeña porción de la nube, sin duda la forma de este "pedazo de nube" es diferente a la de la nube completa, pero se puede percatar inmediatamente que se trata de una nube. Lo mismo sucede con una montaña: una porción de una montaña, si bien es diferente y distinguible de la montaña original completa, es "parecida" a ella. Y esto pasa con las costas de los continentes en la tierra, los relámpagos en el cielo, el perfil de los árboles del bosque. Estas importantes observaciones fueron formuladas por Benoit Mandelbrot en 1975 mientras trabajaba para los laboratorios de IBM. Su libro: la geometría fractal de la naturaleza ha influenciado en muchas formas el pensamiento científico de los últimos años.

La idea de autosimilaridad o autosimilitud ya había sido explotada en el arte, como se ha visto en los grabados de *Escher*. La geometría fractal de Mandelbrot proporciona modelos descriptivos y matemáticos para muchas de las formas aparentemente complejas que existen en la naturaleza. Formas tales como líneas de costas, montañas y nubes no son fácilmente descritas por geometría euclídeana tradicional. Sin embargo, ellas frecuentemente poseen una notable característica que es la invarianza en cambios o ampliaciones de escala. Esta *autosimilaridad exacta o estadística* es la característica esencial de los fractales en la naturaleza. Esto puede ser cuantificada por una dimensión fractal, un número que debe estar de acuerdo con nuestra noción intuitiva de dimensión pero no necesariamente debe de ser entera.

### 2.3.1 LA IDEA DE AUTOSIMILARIDAD.

La esencia de los fractales, se ilustra en la figura (2.7), con vistas sucesivas de un planeta fractal tomadas a distintas escalas. Cada imagen sucesiva representa una ampliación de una porción seleccionada de la línea de la costa de la imagen previa, tal y como se indica al pie de la figura. La ampliación mayor se puede comparar con la imagen inicial que se repite abajo a la derecha. Aunque estas imágenes *difieren en escala por más de  $10^7$  ellas son idénticas, y coinciden en algunas porciones en determinadas características*. Esta propiedad de que los objetos, contengan un subconjunto de formas similares o parecidas<sup>14</sup> unas a las otras en todas y cada una de sus partes a diferentes escalas o ampliaciones, es conocida como *autosimilaridad*<sup>15</sup>. Esta es una característica de los fractales y se diferencia de las formas euclídeanas más tradicionales las cuales en general son superficies suaves sobre una escala ampliada.

---

<sup>14</sup> Estadísticamente o de manera exacta.

<sup>15</sup> Ver página 21, tipos de autosimilaridad.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

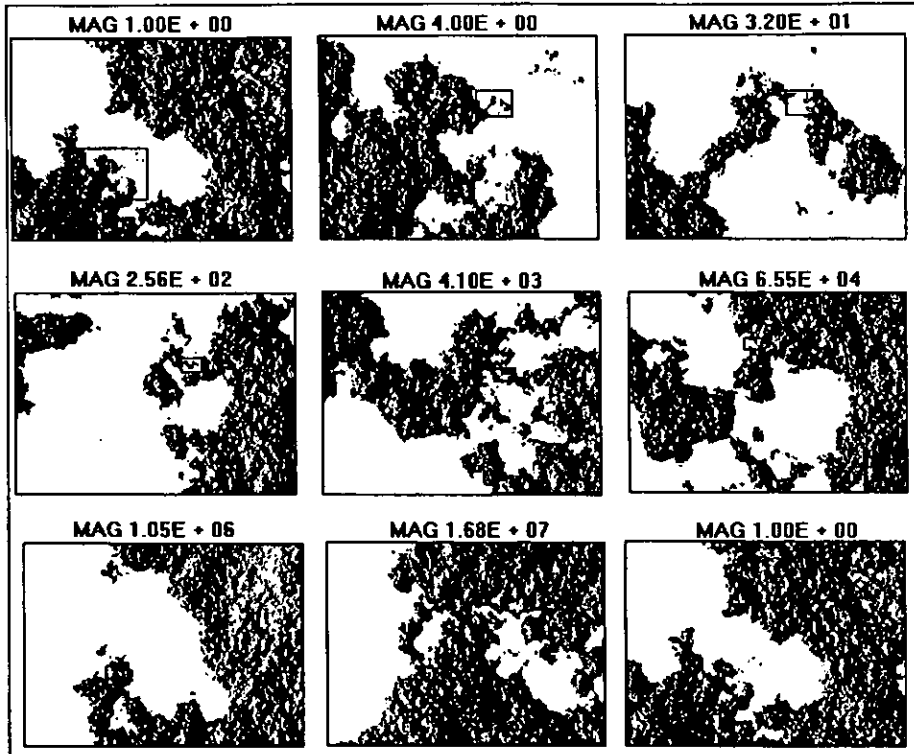


Figura (2.7). Autosimilaridad estadística. Sucesión de ampliaciones y acercamientos del contorno de la línea de una costa, dicho paisaje se considera como un fractal estadísticamente autosimilar, donde cada imagen muestra una ampliación de la porción seleccionada de la imagen previa, dado que dicha superficie se amplifica, cada porción pequeña se observa estadísticamente similar a cualquier porción más grande.



La figura (2.8) muestra otra imagen generada mediante computadora, donde se pueden observar algunas formas fractales tales como la distribución de cráteres, en las cuales algunas porciones tienen una característica en común que es la *autosimilaridad*.

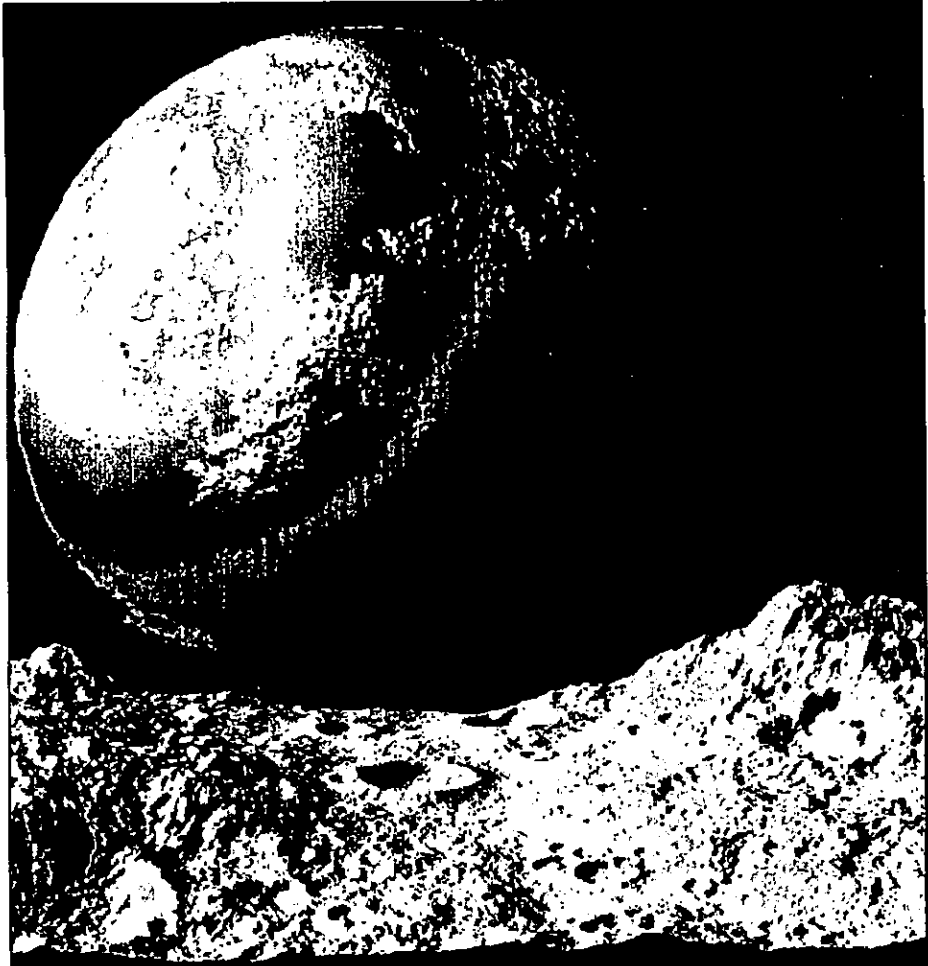


Figura (2.8). Planeta Fractal. Esta figura muestra el carácter fractal aleatorio de los cráteres de una superficie fractal (Benoit B Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* [1982]).

## 2.3.2 CONCEPTO DE FRACTAL.

*Las nubes no son esféricas, las montañas no son conos, las costas no son circulares y los relámpagos no viajan en líneas rectas.*

*Benoit B Mandelbrot.*

La palabra Fractal<sup>16</sup>, ha ayudado a reconocer y realizar investigaciones en matemáticas aplicadas en ciencias naturales y en el área de cómputo. Desde su descubrimiento, la geometría fractal y sus conceptos se han convertido en una herramienta central en muchas de las ciencias naturales: física, química, biología, geología, meteorología, y ciencias en materiales. Al mismo tiempo, los fractales han sido de interés para los diseñadores gráficos y productores de películas, esto se debe al alcance de crear nuevas y excitantes formas de mundos artificiales con aspecto real. Las imágenes fractales aparecen a la vista en forma compleja, sin embargo ellas son producto o resultado de reglas simples. Los cálculos gráficos han jugado un papel importante en el desarrollo y rápida aceptación de la geometría fractal como una nueva disciplina válida. Las computadoras proporcionan formas fractales parecidas a las que se encuentran en la naturaleza, donde algunos desconían que hayan sido generadas por computadoras. De manera que la geometría fractal ahora juega un papel central al proporcionar y modelar fenómenos naturales en computadoras gráficas en forma real.

El término fractal es una invención de Benoit B Mandelbrot quién proporciona la siguiente explicación de la palabra: "figuras amontonadas unas sobre otras, es decir, figuras encimadas sobre sí mismas" o "figuras dibujadas recursivamente".

<b>FRACTAL</b>	Proviene del latín y del adjetivo <i>fractus</i> , el cual tiene las mismas raíces de fracción y fragmento, la cual significa "irregular o fragmentado".  Está relacionada también con la palabra <i>frangere</i> la cual significa "romperse" o "quebrantarse".
----------------	--

## CLASIFICACIÓN DE LOS FRACTALES.

Las formas fractales son clasificadas en dos categorías básicas: los fractales determinísticos y los no determinísticos.

- *Los fractales determinísticos*, son formados por iteraciones de patrones de principios geométricos sobre todas las escalas. Los objetos estrictamente autosimilares son los que se encuentran en esta clase de fractales. Ejemplos: la Curva de Von Koch, figura (2.9)a.
- *Los fractales no determinísticos*, que involucran algunas variaciones aleatorias en la construcción de procesos, pero no obstante la dirección de los detalles aparecen bajo ampliaciones continuas observadas en forma invariante. Este tipo de modelos fractales pueden ser usadas para modelar líneas de costas y montañas. La simulación del movimiento fraccional Browniano es una herramienta para simular líneas de costas y montañas, el algoritmo del desplazamiento del punto medio se clasifica dentro de los fractales no determinísticos.

<sup>16</sup> Término propuesto por Benoit B Mandelbrot en el año de 1975.

## PROPIEDADES BÁSICAS DE AUTOSIMILARIDAD.

Haciendo énfasis en la propiedad de autosimilaridad, el triángulo de Sierpinski proporciona muchas de las características de los fractales determinísticos, que se definirá posteriormente. Algunos objetos que se encuentran en la naturaleza tienen características que de manera clara se pueden observar, tal característica es que algunas porciones del objeto son copias pequeñas del todo, denotando a esta característica como autosimilaridad. Sin embargo, existen diferentes grados de autosimilaridad, donde el grado mayor ocurre cuando dentro de cualquier parte seleccionada de una figura autosimilar, existen réplicas de la figura total. A continuación se dan algunas definiciones de autosimilaridad.

<b>AUTOSIMILARIDAD</b>	Si las partes de una figura son todas réplicas pequeñas del todo, entonces a la figura se le clasifica como autosimilar.
<b>AUTOSIMILARIDAD ERICTAMENTE</b>	Una figura es estrictamente autosimilar si la figura puede ser descompuesta en partes, las cuales son réplicas exactas del el todo. Una parte arbitraria contiene réplicas exactas de la figura total.
<b>AUTOSIMILARIDAD ESTADÍSTICA</b>	Una figura es autosimilar estadísticamente si la figura a distintas ampliaciones o escalas contienen segmentos de formas "parecidas" (pero no de manera exacta) a las previas. Un ejemplo de este tipo de autosimilaridad es el contorno de una costa.

### 2.3.3 CARACTERÍSTICAS Y DIFERENCIAS DE LA GEOMETRÍA FRACTAL Y EUCLIDEANA.

La tabla (T2.1), resume algunas de las principales diferencias entre las formas fractales y la euclideanas tradicionales. *En primer lugar* los fractales son de manera indiscutible una invención moderna. *En segundo lugar*, en vista de que las formas euclideanas tienen una, o al menos unas pocas características de tamaño o de longitud de escala<sup>17</sup>, en los fractales, si se piensa en la línea de una costa, ésta no posee tamaño o regla característica, es decir, las formas fractales son autosimilares e independientes de la escala.

La *tercera* es que la geometría euclideana proporciona de manera limitada e inapropiada descripciones de objetos encontradas en la naturaleza, hechas por el hombre. Tal y como lo vio B Mandelbrot las montañas no son conos, las nubes no son esferas, etc.,. Esto lleva a reconocer, que es una forma inapropiada e incorrecta de manejar la descripción de la formas naturales, de esta manera se admiten las limitaciones del lenguaje tradicional de las formas, siendo ésta la responsable hasta cierto punto, de la sorprendente diferencia cualitativa entre las formas naturales. Las máquinas ocupan esencialmente factores euclideanos: objetos que pueden ser descritos y construidos fácilmente. Los fractales, por otro lado, proporcionan una excelente descripción de muchas formas naturales y desde entonces han proporcionado una gran cantidad de imágenes generadas en computadoras con sus características naturales.

<sup>17</sup> Tal y como el radio de una esfera o el lado de un cubo.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

Finalmente cualquiera de las formas euclidianas son usualmente descritas por una fórmula algebraica simple ( por decir,  $r^2 = x^2 + y^2$  define un círculo de radio r), en cambio los fractales en general son el resultado de un procedimiento construido en base de algoritmos que comúnmente son *recursivos*<sup>18</sup> y que se generan en computadoras.

*Lenguaje matemático para representar, describir y manipular formas.*

GEOMETRÍA EUCLIDEANA	GEOMETRÍA FRACTAL
Es la más tradicional, y tiene más de 2000 años de su nacimiento y actualmente es muy usada.	Gráficas modernas. Aproximadamente 20 años de su invención y estudio formal y por lo tanto, muy pocos la usan.
Las formas euclidianas conservan características principales como : El tamaño y escala.	No especifica el tamaño y la escala.
El ser humano se vale de ella para hacer una representación mas cómoda de los objetos, pero resulta inapropiada.	Es la más ideal para realizar una representación apropiada de los objetos que se encuentran en la naturaleza.
Son descritos por fórmulas.	Se describen en base a algoritmos recursivos.

Tabla (T2.1) *Una comparación de la geometría fractal y euclideana.*

## EL COPO DE NIEVE DE LA CURVA DE VON KOCH COMO FRACTAL DETERMINISTICO.

La gráfica de el copo de nieve de von Koch descubierto en el año de 1904, se ilustra en la figura (2.9.a) como un procedimiento iterativo y recursivo para la construcción de curvas fractales. Un segmento de línea simple se divide en tres partes y el segmento de en medio es reemplazado por dos segmentos iguales formando parte de un triángulo equilátero, en los siguientes pasos de la construcción cada uno de estos cuatro segmentos se reemplaza por 4 nuevos segmentos con longitud de  $\frac{1}{3}$  de su origen, de acuerdo a su patrón original, este procedimiento se repite de manera recursiva, hasta generar la curva de von Koch que se muestra en la figura (2.9.a). Lo anterior muestra que la iteración de una regla muy simple produce formas aparentemente complejas con algunas propiedades sumamente nada usuales, que no son característicos de las formas euclidianas, tales como la autosimilaridad a diferentes escalas, donde las curvas que se generan tienen detalles en todas las escalas de longitud.

<sup>18</sup> Recursivos se refiere a que se repiten una y otra vez.

La característica principal que se observa en estas curvas, es la autosimilaridad que se puede encontrar y observar a distintas escalas, como si se hiciera uso de un poderoso microscopio, para captar y encontrar el mínimo detalle, por ende, la curva se pronuncia invariante bajo cambios de escala. Algo similar ocurre con el contorno de una costa.

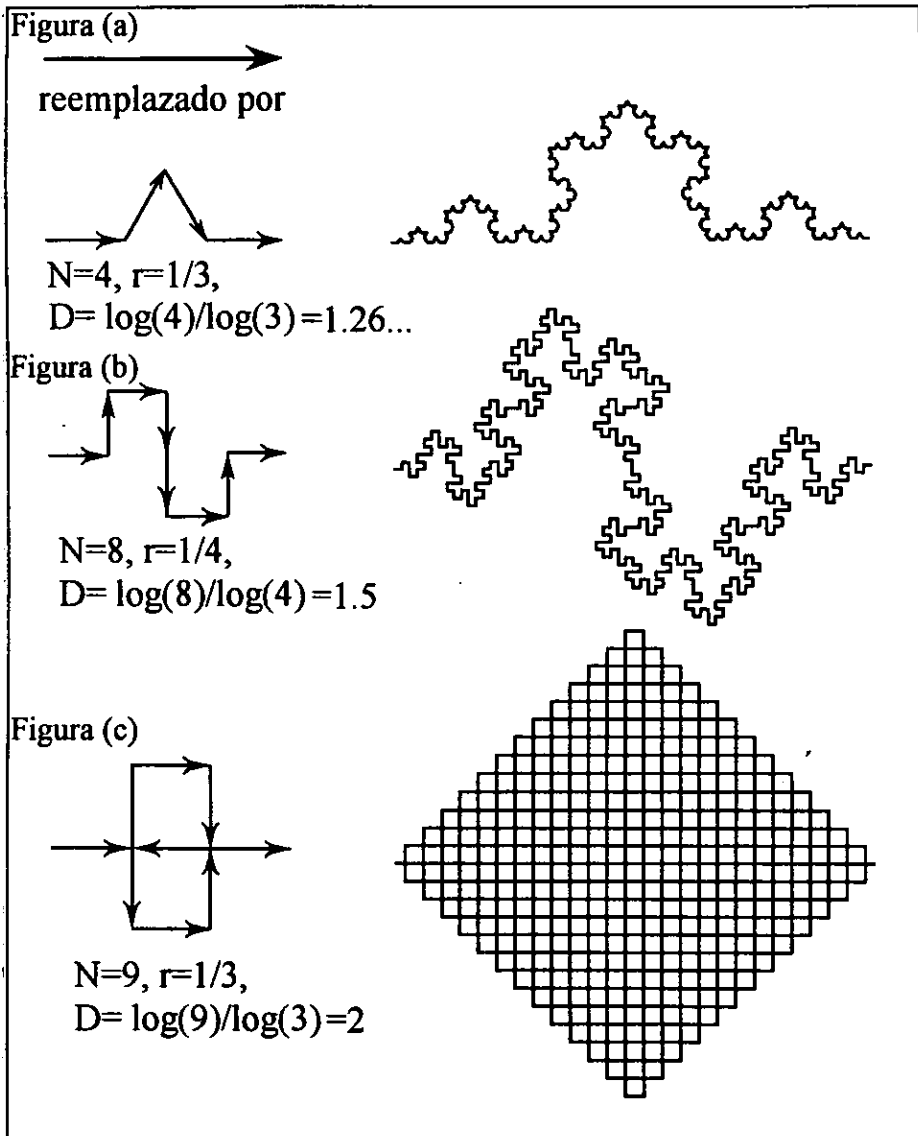
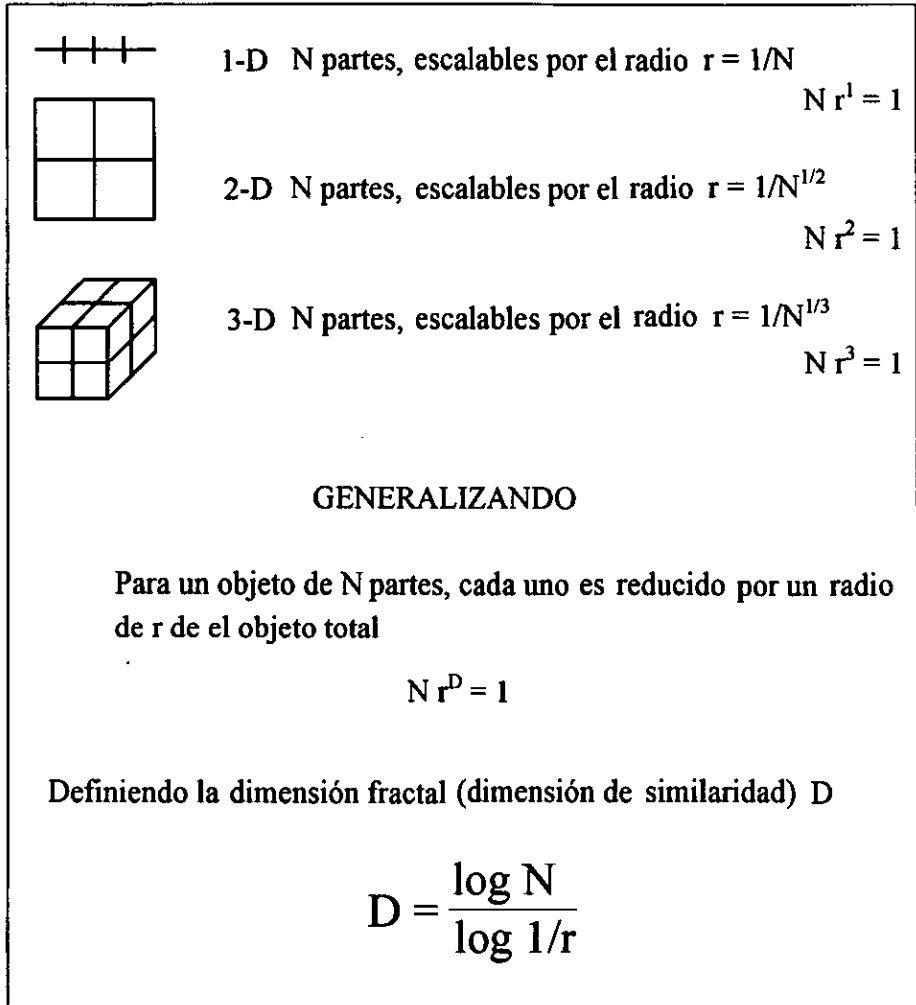


Figura (2.9). Procedimiento recursivo para generar la curva del copo de nieve de von Koch y algunas variaciones en su dimensión fractal.

### 2.3.4 DIMENSIÓN FRACTAL DE FRAUNHOFER.

La propiedad de autosimilaridad y *escala*, se ejemplifica en el contorno de la costa y la curva de von Koch. La propiedad de autosimilaridad esta fuertemente relacionada con el concepto intuitivo de *dimensión*<sup>19</sup> como se ilustra en la figura (2.10).



Figura(2.10) Interpretación de dimensión entera estándar en términos de autosimilaridad exacta y dimensión fractal no entera.

<sup>19</sup> La dimensión fractal, se refiere a el grado de detalle que exhibe a escalas cada vez menores un objeto.

Un objeto en el plano unidimensional, por ejemplo, un segmento de una línea  $r$ , se considera que también posee una propiedad de escala similar, es decir, este segmento de línea se puede dividir en  $N$  partes idénticas cada una de las cuales es escalable hasta el origen por el radio  $r = \frac{1}{N}$  del objeto completo. De manera similar, un objeto en el plano bidimensional, tal y como el área de un cuadrado  $r$  en el plano puede dividirse en  $N$  partes *autosimilares* cada una de las cuales es escalable hacia el interior (reducción del factor de escala) por un factor de  $r = \frac{1}{\sqrt{N}}$ . En cambio, un objeto en el plano tridimensional, por ejemplo un cubo  $r$  se puede dividir en  $N$  cubos pequeños cada uno de los cuales es escalable hacia el interior por un radio  $r = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$ . De esta manera, y tomando en cuenta la idea de *autosimilaridad*, la generalización para la dimensión fractal se realiza de la siguiente manera: un objeto  $D$ -dimensional *autosimilar* que se pueda dividir en  $N$  copias pequeñas de ella misma, siendo cada una de ellas escalables hacia el interior por un factor  $r$  donde  $r = \frac{1}{\sqrt[D]{N}}$  o

$$N = \frac{1}{r^D} \quad (2.4)$$

o de manera inversa, si se proporciona un objeto autosimilar de  $N$  partes escalables por un radio  $r$  del objeto entero, su *dimensión fractal* o *dimensión de similaridad* está dada por:

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (2.5)$$

La dimensión fractal, no es entera, para el caso de cualquier segmento de la curva de von Koch que está compuesta de 4 subsegmentos cada uno de los cuales es escalable hacia el interior por un factor de  $\frac{1}{3}$  de sus patrones. Esta dimensión fractal es  $D = \frac{\log(4)}{\log(3)}$  o aproximadamente 1.26... *Esta dimensión no es entera, pero es mayor que uno y menor que dos*, Mandelbrot proporciona algunas variaciones para construir la curva von Koch, dos de las cuales se representan en la figura (2.9.b). La mitad del segmento, se reemplaza por ocho nuevos segmentos cada  $\frac{1}{4}$ , empezando por el inicial para llegar a determinar.

$$D = \frac{\log(8)}{\log(4)} = 1.5$$

En la figura (2.9.c) cada segmento se reemplaza por nueve segmentos nuevos, cada  $\frac{1}{3}$  de original.

$$D = \frac{\log(9)}{\log(3)} = 2$$

Como se puede observar,  $D$  va incrementando de 1 a 2 y las "curvas" resultantes avanzan de tal manera que empiezan a ocupar o llenar el plano. En efecto, cuando el límite  $D \rightarrow 2$  se obtiene una curva de Peano o una curva de "espacio relleno". La dimensión fractal  $D$ , proporciona una medida cuantitativa de curvas ondulantes o sinuosas.

## AUTOSIMILARIDAD ESTADÍSTICA.

La *autosimilaridad* exacta de la curva de von Koch se puede considerar como un modelo simple para simular el contorno de un costa, pero difiere del contorno de la costa en un aspecto muy importante, si se amplifica por segmentos el contorno de la costa, ésta se parece (de manera estadística) a distintos segmentos, en diferentes escalas. Por ende, el concepto de dimensión fractal, puede también ser aplicado a tales objetos semejantes *autosimilares estadísticamente*. Si se realiza una medición cuidadosa de la longitud del contorno de una costa, se puede observar que sigue una trayectoria en forma sinuosa, de tal manera que si se camina a través del contorno de una costa, ésta es más amplia o extensa que si se recorre en automóvil a través de la carretera, sin embargo, cada sección pequeña de la línea de la costa puede parecerse de manera estadística a una porción más grande. Cuando se usa una regla de tamaño  $r$  para medir la longitud de la línea de la costa, la longitud total es igual a la regla de tamaño  $r$  multiplicada por el número de pasos de tamaño  $r$ , que en este caso se representa por  $N(r)$ .

$$\text{Longitud} = r N(r) \quad (2.6)$$

por ejemplo: en el copo de nieve de von Koch,  $N(r)$  varía en el promedio como  $\frac{1}{r^D}$  y su longitud está dada por:

$$\text{Longitud} \propto r \times \frac{1}{r^D} = \frac{1}{r^{D-1}} \quad (2.7)$$

donde  $D > 1$ , como el tamaño de la regla usada para medir el contorno de una costa disminuye o se reduce, ésta longitud se incrementa, por lo tanto la dimensión fractal  $D$  del contorno de una costa, se encuentra entre los valores 1.15 y 1.25, muy cercana a la curva de el copo de nieve de von Koch  $\frac{\log(4)}{\log(3)}$ .

Finalmente, se puede decir que la propiedad de autosimilaridad estadística, que algunos objetos conservan, hace referencia a que éstos son al mismo tiempo diferentes en detalle y en longitudes de escala, siendo ésta la principal característica de los fractales y de algunos objetos que se encuentran en la naturaleza.



## 2.4 EL MOVIMIENTO BROWNIANO.

En determinadas ocasiones una gota de agua puede quedar atrapada en un fragmento de roca ígnea durante la solidificación de ésta. A principios del siglo XIX, el botánico escocés Robert Brown descubrió una gota de éstas en un trozo de cuarzo. El agua, pensó Brown, debió haber permanecido inaccesible al polen y las esporas transportadas por el viento o la lluvia. Al enfocar dicha gota en un microscopio, observó trazas de minúsculas partículas suspendidas en la misma que oscilaban sin cesar con un movimiento completamente irregular. Este movimiento le resultaba familiar a Brown, él había observado antes semejantes tipos de oscilaciones en sus estudios de granos de polen en agua. Brown concluyó que la agitación de las partículas atrapadas en el interior del cuarzo debía ser un fenómeno físico y no biológico, pero no pudo llegar a mayores precisiones.

La explicación del movimiento Browniano se encuentra hoy en día bien analizada. Un grano de polen o de polvo suspendido en un fluido se ve sometido al bombardeo continuo de las moléculas de éste. Una sola molécula difícilmente puede tener suficiente Impetu para que su efecto sobre la partícula en suspensión lo recogiera el microscopio. Ahora bien, cuando muchas moléculas chocan con la partícula en la misma dirección, y simultáneamente, producen una deflexión observable de su trayectoria. El movimiento Browniano es, por consiguiente, un efecto doblemente aleatorio: la trayectoria de la partícula en suspensión deviene imprevisible en razón de las fluctuaciones arbitrarias de la velocidad de las moléculas circundantes. Por otro lado, como el microscopio es esencialmente un filtro que sólo pone de manifiesto los efectos de las fluctuaciones de cierta magnitud, el movimiento observado sólo insinúa la complejidad de la trayectoria real. Si el poder de resolución del microscopio se incrementara en un factor 10, 100 o 1000, se detectarían los efectos del bombardeo por grupos progresivamente menores de moléculas. A un mayor aumento, partes de la trayectoria de la partícula que inicialmente habían aparecido como rectas se observarían ahora dotadas de una estructura quebrada e irregular. La trayectoria de una partícula en el movimiento Browniano fue uno de los primeros fenómenos naturales en los que se reconoció una *autosemejanza* como se muestra en la figura (2.11), donde dicha propiedad, es fundamento clave de los objetos geométricos que Benoit B Mandelbrot ha denominado fractales.

## FENÓMENOS PROBABILISTICOS.

El estudio del movimiento Browniano ha ejercido una poderosa influencia en física, química y matemáticas. Albert Einstein demostró que la medición de ciertas propiedades del movimiento Browniano de las partículas determinaban diversas constantes físicas de importancia: las masas de los átomos y las moléculas y el valor del número de Avogadro, que es el número de partículas elementales por mol, siendo ésta la unidad química estándar de cualquier sustancia.

Se sabía que cuanto menor era el tamaño de la partícula, más rápido se desarrollaba el movimiento Browniano. Un aumento de la temperatura del fluido también parecía incrementar la agitación de dicho movimiento. Se reconoció que tales efectos eran coherentes con la teoría cinética de los gases, poco después de su elaboración de James Clerk Maxwell y Ludwig Boltzmann en la década de 1870. Pero hubo que esperar hasta 1905 para que Einstein estableciera las primeras implicaciones cuantitativas de la teoría cinética en el movimiento Browniano.

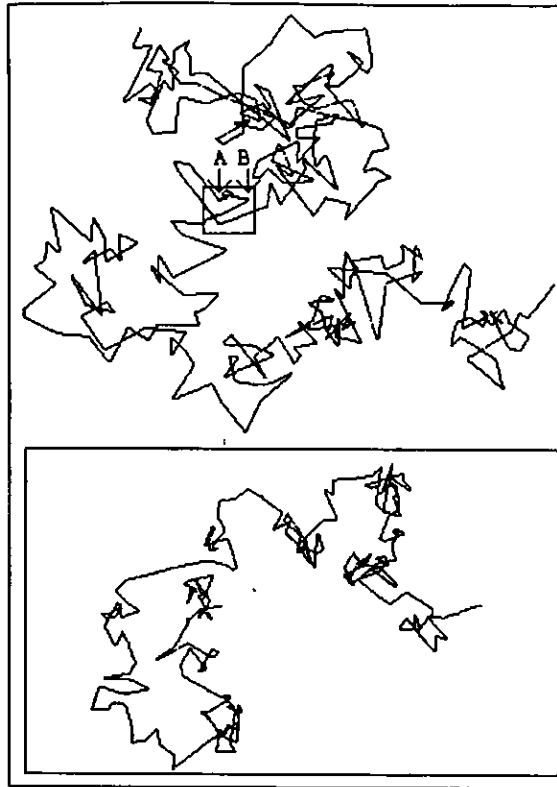


Figura (2.11). El movimiento Browniano aleatorio de una partícula microscópica suspendida en agua. En la ilustración se muestra tal como fue representado en 1912 por Jean Baptiste Perrin. El diagrama de Perrin registra la posición de la partícula cada 30 segundos; tales diagramas, como él hizo notar, "sólo dan una idea muy pobre de la extraordinaria complejidad de la trayectoria real", es decir, si se considerara con más detalle parte de la trayectoria y si la posición de la partícula se registrara con una frecuencia 100 veces mayor, pongamos por caso, se reproduciría la complejidad de la trayectoria inicial (abajo).

## 2.5 EL MOVIMIENTO BROWNIANO UNIDIMENSIONAL.

### DEFINICIONES:

El movimiento Browniano en una variable constituye un fractal aleatorio simple. Si se considera una partícula pequeña sólida sumergida o suspendida en un líquido y éste se observa en un microscopio, sus desplazamientos se comportan de una manera irregular y errática. Esto lo observó Brown en 1827, al movimiento Browniano también se le conoce como "ruido de Brown". En el caso unidimensional se obtiene un proceso estocástico  $X(t)$ , es decir, una función de  $X$  de una variable real, por lo general el tiempo, cuyos valores son variables aleatorias  $X(t_1)$ ,  $X(t_2)$ , etc.,

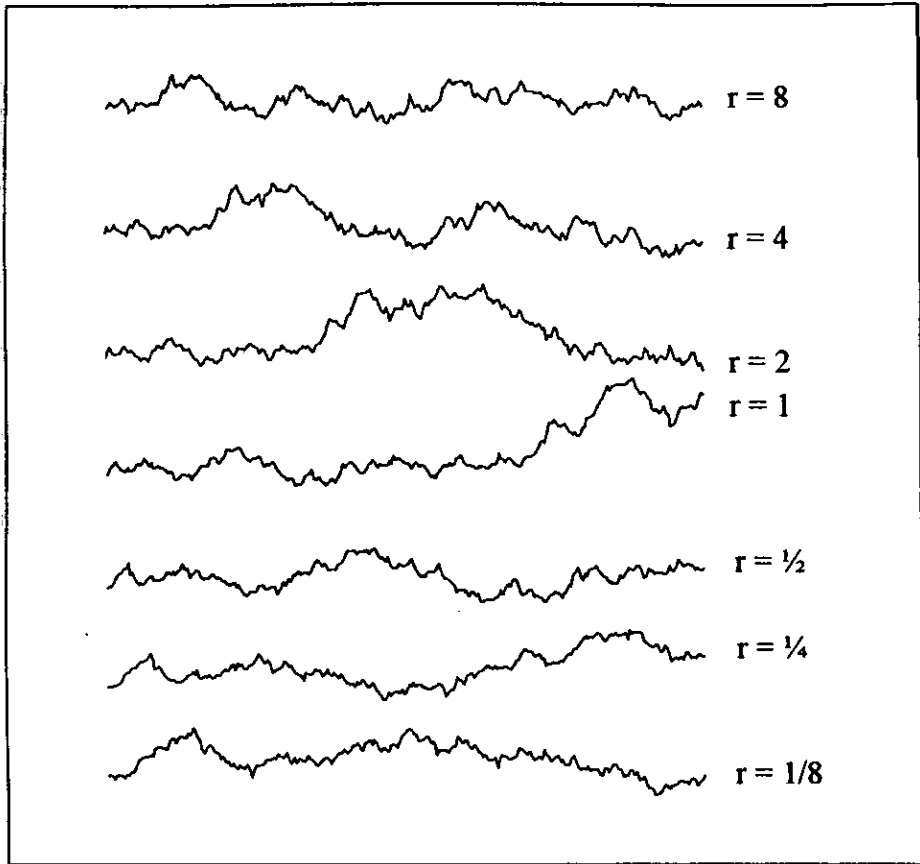


Figura (2.12). La propiedad de escala de el movimiento Browniano. En la gráfica del centro, se muestra una sección pequeña de el movimiento Browniano  $X(t)$ , en las otras gráficas se muestra la propiedad de escala de estas funciones aleatorias, cuya forma es  $r^{-1/2} X(rt)$ . El factor de escala  $r$  se encuentra en el intervalo  $r = 1/8$  a  $r = 8$  las cuales muestran una extensión o contracción de la función original en dirección del tiempo, sin embargo, se puede observar que la apariencia visual de todas las muestras son las mismas.

El incremento  $X(t_2) - X(t_1)$  tiene una distribución Gaussiana (2.8)

Donde además se puede observar que los incrementos medios al cuadrado tienen una varianza proporcional a la diferencia del tiempo, expresada como:

$$E\left[|X(t_2) - X(t_1)|^2\right] \propto |t_2 - t_1| \quad (2.9)$$

donde  $E$  denota la esperanza matemática de una variable aleatoria, es decir, es el promedio sobre un conjunto de muestras.

Por otro lado, se dice que los incrementos de  $X$  son estadísticamente autosimilares, lo que significa

$$X(t_0 + t) - X(t_0) \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{r}}(X(t_0 + rt) - X(t_0))$$

tienen la misma función de distribución conjunta dimensional finita para cualquier  $t_0$  y  $r > 0$ . Si se establece a  $t_0 = 0$  y  $X(t_0) = 0$ , entonces las dos funciones aleatorias anteriores están representadas por:

$$X(t) \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{r}}(X(rt))$$

las cuales son estadísticamente indistinguibles, donde la segunda expresión indica una propiedad de escala, lo cual significa que si se acelera el proceso  $X(t)$  por un factor de 16, por poner un ejemplo, entonces se puede dividir  $X(16t)$  en 4 para obtener el mismo movimiento Browniano que se obtuvo en un principio.

## ESCALAS AZAROSAS EN EL TIEMPO : $1/\beta$ - RUIDOS.

El ejemplo anterior del movimiento Browniano demuestra la aleatoriedad de los fractales en el tiempo, y por lo tanto, los distintos cambios en estos muestran muchas similitudes a diferentes escalas, para los físicos, cualquier cambio impredecible de cualquier cantidad  $V$  que varíe en un tiempo  $t$ , se le conoce como ruido. Algunas gráficas de ruidos típicos  $V(t)$  se muestran en la figura (2.13).

La densidad espectral,  $S_v(f)$ , proporciona una estimación de las fluctuaciones medias al cuadrado en la frecuencia  $f$  y, en consecuencia, de las variaciones sobre la escala de tiempo de orden  $1/f$ . Los trazos de cada uno de estos ruidos es una curva fractal, y por ende, conservan una relación directa entre la dimensión fractal y la inclinación logarítmica de la densidad espectral. En la figura (a) se muestra ruido blanco, el más aleatorio, y que se puede producir mediante un generador de números pseudoaleatorios, los cuales no deben estar correlacionados entre sus puntos. Su densidad espectral es una línea constante, la cual representa cantidades iguales es todas las frecuencias. La figura (c) muestra un movimiento Browniano o una caminata aleatoria, el ruido más correlacionado de los tres que se muestran. Este proceso consiste de mucho más fluctuaciones en declive (frecuencias bajas), que altitudes (frecuencias altas), su densidad espectral es una línea en declive, la cual varía como  $\frac{1}{f^2}$ . El movimiento Browniano es la integral de los ruidos blancos de la figura (a). En la figura (b) se muestra un ruido conocido como ruido rosa cuya densidad espectral esta dada por  $1/f$ . En general el termino  $1/f$ -ruido se aplica a una cantidad fluctuante  $V(t)$  con  $S_v(f)$  variando como  $\frac{1}{f^\beta}$  sobre muchas decenas con  $0.5 < \beta < 1.5$ .

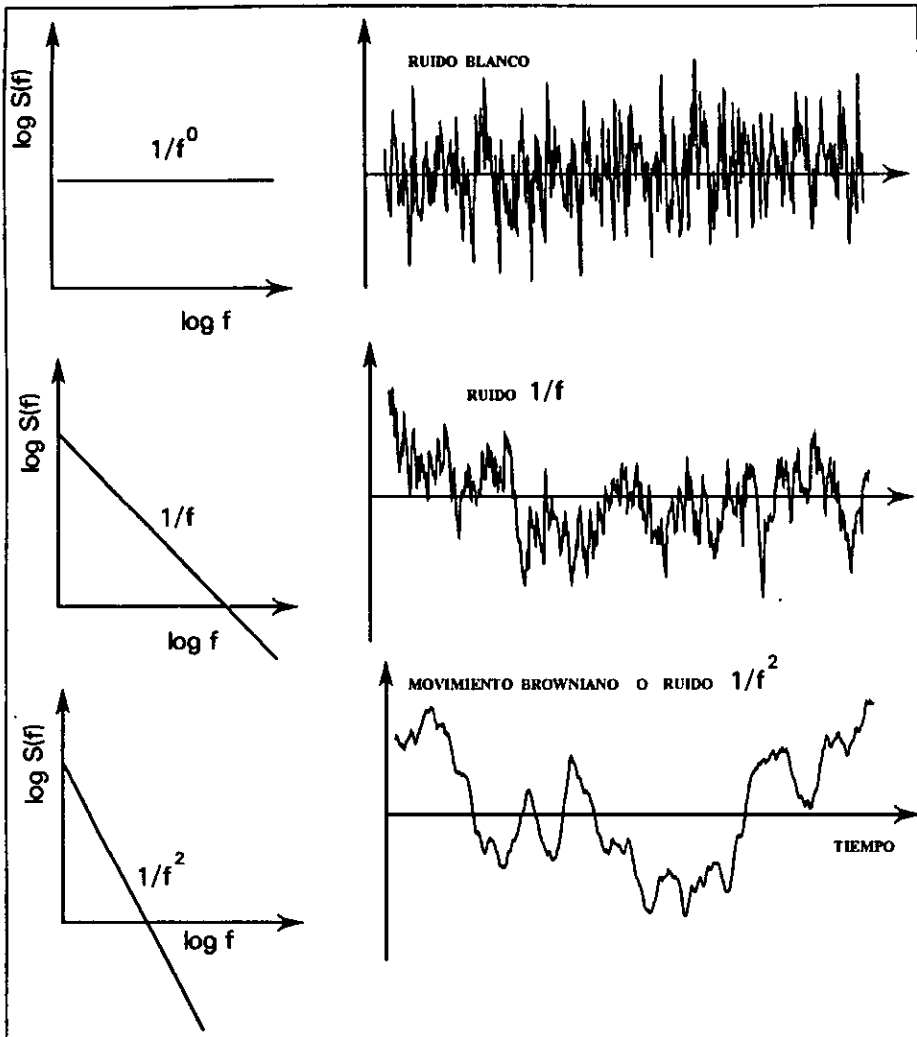


Figura (2.13). Muestras de "ruidos" típicos,  $V(t)$ , las variaciones aleatorias de una cantidad en el tiempo. (a)

Ruido blanco, el más aleatorio; (b)  $\frac{1}{f}$ -ruido, se ve en fluctuaciones en la naturaleza, su origen es todavía un

misterio. (c) Movimiento Browniano o caminata aleatoria. su densidad espectral  $S_V(f)$  es una medida que caracteriza el tiempo de correlación en los ruidos. Las gráficas de la izquierda de cada ruido son sus densidades espectrales.

## 2.6 EL DESPLAZAMIENTO DE EL PUNTO MEDIO EN GEOMETRÍA GRIEGA: LA CONSTRUCCIÓN DE ARQUÍMEDES PARA LA PARÁBOLA.

Arquímedes (287-212 D C) evaluó el área de una parábola y su cuerda AB, donde algunos dicen que estos argumentos son los primeros pasos hacia el cálculo. Arquímedes escribió la ecuación de la parábola como  $y = P(x) = a - bx^2$ , seleccionando  $a > 0$  obteniendo la curva con sus puntos finales  $\{X_A, P(X_A) = a - bX_A^2\}$  y  $\{X_B, P(X_B) = a - bX_B^2\}$ . La interpolación de  $P(x)$  que realizó Arquímedes de manera recursiva arrojó valores de  $x$  con ciertos incrementos en una rejilla diádica crecientemente cerrada. En primer instancia se observa lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 P\left[\frac{1}{2}(X_A + X_B)\right] - \frac{1}{2}[P(X_A + X_B)] &= a - b\left[\frac{1}{2}(X_A + X_B)\right]^2 - \frac{1}{2}[a - bX_A^2 + a - bX_B^2] \\
 &= a - \frac{b}{4}(X_A + X_B)^2 - \frac{1}{2}[2a - b(X_A^2 + X_B^2)] \\
 &= a - \frac{b}{4}(X_A + X_B)^2 - \left[a - \frac{b}{2}(X_A^2 - X_B^2)\right] \\
 &= \frac{-b}{4}(X_A^2 - X_B^2) - \frac{b}{2}X_AX_B + \frac{b}{2}(X_A^2 - X_B^2) \\
 &= \left(\frac{-b(X_A^2 + X_B^2) + 2b(X_A^2 + X_B^2)}{4}\right) - \frac{b}{2}X_AX_B \\
 &= \frac{b}{4}(X_A^2 + X_B^2) - \frac{b}{2}X_AX_B \\
 &= \frac{b}{4}(X_B - X_A)^2 = \frac{\delta}{4}
 \end{aligned}$$

Para una  $\delta$  pequeña, en el primer estado de la interpolación se requiere un desplazamiento hacia arriba de  $\frac{\delta}{4}$ , para que sea aplicado a el punto medio de la cuerda original, reemplazándola por dos cortes pequeños, para la segunda iteración de la interpolación, el complemento de  $(X_B - X_A)$  es dos veces más pequeño, y por lo tanto este estado requiere un desplazamiento hacia arriba de el punto medio, para cada subcuerda, hasta que llegue a hacer igual a  $4^{-2}\delta$ , etc... El  $k$ -ésimo estado requiere un desplazamiento hacia arriba del punto medio de  $2^{k-1}$  cuerdas hasta llegar a ser igual a  $4^{-k}\delta$ . Desde luego, la idea de que la parábola tenía una ecuación no era muy conocida hasta las ideas de geometría analítica de Descartes, sin embargo, este procedimiento formulado por Arquímedes, produce una regla para los incrementos y desplazamientos hacia arriba y que es igual a  $4^{-k}\delta$ .

## 2.7 EL MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO.

La forma más práctica y directa de reproducir el movimiento Browniano es por el método llamado el desplazamiento del punto medio aleatorio. Una de sus más importantes ventajas es que se puede generalizar en varias dimensiones para producir paisajes artificiales<sup>20</sup>.

Para este estudio, si el proceso  $X(t)$  se calcula para un tiempo  $t$  entre 0 y 1, se debe empezar fijando  $X(0) = 0$  y seleccionar  $X(1)$  como una muestra de un número aleatorio Gaussiano. Nuevamente  $X(\frac{1}{2})$  se construye en base al promedio de  $X(0)$  y  $X(1)$ , es decir,  $\frac{1}{2} [X(0)+X(1)]$  más el incremento de una compensación aleatoria  $D_{1,1}$ , como se muestra en la figura (2.14). La compensación  $D_{1,1}$  es un número aleatorio Gaussiano, el cual deberá ser multiplicado por un factor de escala  $\frac{1}{2}$ , de ésta manera se debe reducir el factor de escala por  $\sqrt{2}$ , es decir, para la segunda iteración deberá ser ahora  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$ , para la tercera iteración los dos intervalos de 0 a  $\frac{1}{2}$  y de  $\frac{1}{2}$  a 1 son divididos de nuevo.  $X(\frac{1}{4})$  es en conjunto el promedio de  $\frac{1}{2} [X(0) + X(\frac{1}{2})]$  con el incremento de una compensación  $D_{2,1}$ , el cuál es un número aleatorio Gaussiano multiplicado por el factor de escala  $1/\sqrt{8}$ . La expresión correspondiente para  $X(\frac{3}{4})$ , es:

$$X(\frac{3}{4}) = \frac{X(\frac{1}{2}) + X(1)}{2} + D_{2,2}$$

donde:  $D_{2,2}$  es una compensación o incremento aleatorio.

En la tercera etapa, se procede de la misma manera, recordando que se debe reducir el factor de escala por  $\sqrt{2}$ , es decir, ahora será  $1/\sqrt{16}$ , de aquí que el conjunto a generarse es:

$$X(\frac{1}{8}) = \frac{X(0) + X(\frac{1}{4})}{2} + D_{3,1}$$

$$X(\frac{3}{8}) = \frac{X(\frac{1}{4}) + X(\frac{1}{2})}{2} + D_{3,2}$$

<sup>20</sup> Una ventaja es que los valores de  $X(t)$  se pueden calcular para varios momentos en  $t$  y en base al método del desplazamiento de el punto medio aleatorio se pueden calcular los valores intermedios, este método se puede interpretar como una interpolación fractal.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

$$X\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{X\left(\frac{1}{2}\right) + X\left(\frac{3}{4}\right)}{2} + D_{3,3}$$

$$X\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{X\left(\frac{3}{4}\right) + X(1)}{2} + D_{3,4}$$

en cada expresión,  $D_3$  es un número aleatorio Gaussiano diferente, multiplicado por el actual factor de escala  $1/\sqrt{16}$ .

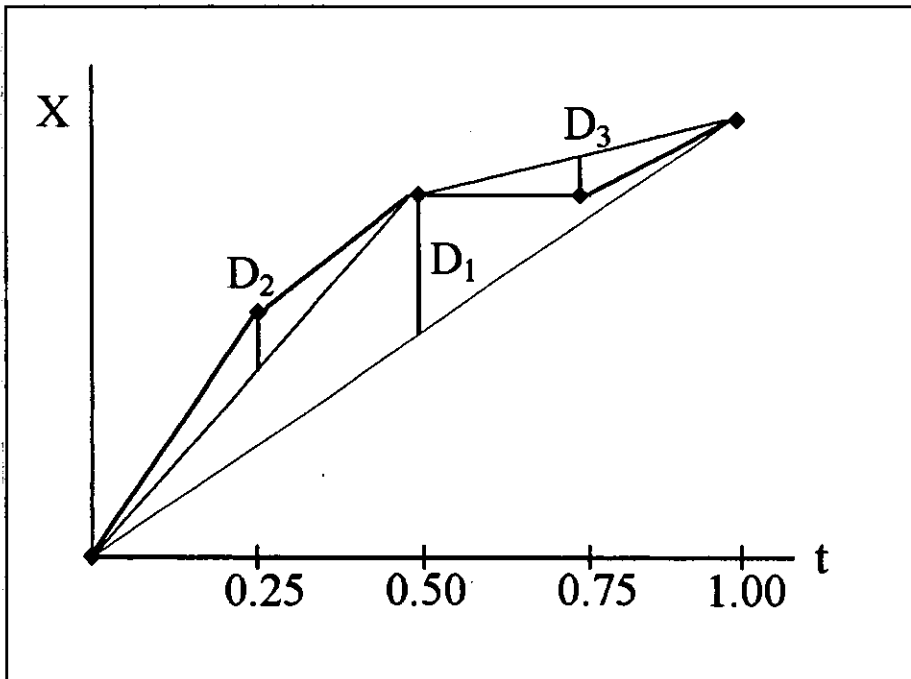


Figura (2.14). La figura muestra las dos primeras iteraciones del algoritmo del desplazamiento del punto medio aleatorio.

En el siguiente paso se calcula  $X(t)$  con  $t = 1/16, 3/16, 5/16, 7/16, 9/16, 11/16, 13/16, 15/16$ , sin olvidar que hay que reducir el factor de escala por  $\sqrt{2}$ , a continuación se ejemplifican algunas iteraciones.



- Iteración 1

$$X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{X(0) + X(1)}{2} + D_{1,1}$$

Donde:  $D_{1,1}$  es un número aleatorio Gaussiano multiplicado por un factor de escala 1/2.

- Iteración 2

$$X\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{X(0) + X\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + D_{2,1}$$

$$X\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{X\left(\frac{1}{2}\right) + X(1)}{2} + D_{2,2}$$

Donde: El nuevo factor de escala se reduce a:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{8}}$ , y los números aleatorios Gaussiano  $D_{2,1}$  y  $D_{2,2}$  se deben multiplicar por éste nuevo factor de escala.

- Iteración 3

$$X\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{X(0) + X\left(\frac{1}{4}\right)}{2} + D_{3,1}$$

$$X\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{X\left(\frac{1}{4}\right) + X\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + D_{3,2}$$

$$X\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{X\left(\frac{1}{2}\right) + X\left(\frac{3}{4}\right)}{2} + D_{3,3}$$

$$X\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{X\left(\frac{3}{4}\right) + X(1)}{2} + D_{3,4}$$

*Aproximación Fractal de Perturbaciones  
Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

Donde: El nuevo factor de escala se reduce a:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{16}}$ , y los números aleatorios Gaussiano  $D_{3,1}$ ,  $D_{3,2}$ ,  $D_{3,3}$  y  $D_{3,4}$ , se deben multiplicar por éste nuevo factor de escala.

• Iteración 4

$$X\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{X(0) + X\left(\frac{1}{8}\right)}{2} + D_{4,1}$$

$$X\left(\frac{3}{16}\right) = \frac{X\left(\frac{1}{8}\right) + X\left(\frac{1}{4}\right)}{2} + D_{4,2}$$

$$X\left(\frac{5}{16}\right) = \frac{X\left(\frac{1}{4}\right) + X\left(\frac{3}{8}\right)}{2} + D_{4,3}$$

$$X\left(\frac{7}{16}\right) = \frac{X\left(\frac{3}{8}\right) + X\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + D_{4,4}$$

$$X\left(\frac{9}{16}\right) = \frac{X\left(\frac{1}{2}\right) + X\left(\frac{5}{8}\right)}{2} + D_{4,5}$$

$$X\left(\frac{11}{16}\right) = \frac{X\left(\frac{5}{8}\right) + X\left(\frac{3}{4}\right)}{2} + D_{4,6}$$

$$X\left(\frac{13}{16}\right) = \frac{X\left(\frac{3}{4}\right) + X\left(\frac{7}{8}\right)}{2} + D_{4,7}$$

$$X\left(\frac{15}{16}\right) = \frac{X\left(\frac{7}{8}\right) + X(1)}{2} + D_{4,8}$$

Donde: El nuevo factor de escala se reduce a:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{32}}$ , y los números aleatorios Gaussiano  $D_{4,1}$ ,  $D_{4,2}$ ,  $D_{4,3}$ ,  $D_{4,4}$ ,  $D_{4,5}$ ,  $D_{4,6}$ ,  $D_{4,7}$  y  $D_{4,8}$ , se deben multiplicar por éste nuevo factor de escala.

Y así se sigue sucesivamente hasta obtener alguna o algunas muestras que se observan en la siguiente figura.

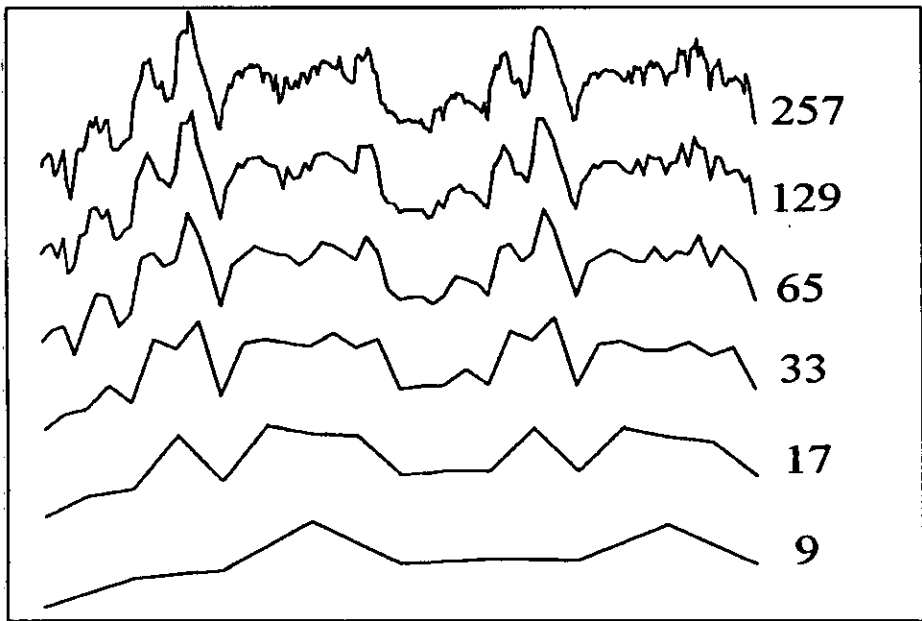


Figura (2.15) Algunas iteraciones del método del desplazamiento del punto medio aleatorio.

A continuación se muestra un análisis formal de como funciona el método del desplazamiento del punto medio aleatorio.

## ANÁLISIS DEL MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO.

Una forma directa de reproducir el movimiento Browniano, es mediante el método del desplazamiento del punto medio, si el proceso se calcula para cualquier tiempo  $t$  entre 0 y 1, se debe empezar fijando el siguiente conjunto de premisas  $X(0)=0$  y seleccionar  $X(1)$  como un valor muestral de una variable aleatoria Gaussiana con media 0 y varianza  $\sigma^2$ . De lo anterior se tiene que la  $Var [X(1)-X(0)]=\sigma^2$ , y se espera que

$$Var[X(t_2) - X(t_1)] = |t_2 - t_1| \sigma^2 \quad (2.10)$$

para  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ . Para el conjunto  $X(1/2)$  que es el promedio de  $X(0)$  y  $X(1)$  más alguna compensación aleatoria Gaussiana  $D_1$  con media 0 y varianza  $\Delta_1^2$ , el valor medio esta dado por:

$$X(1/2) - X(0) = 1/2 [X(1) - X(0)] + D_1$$

de esta manera  $X(1/2)-X(0)$  y  $X(1)-X(1/2)$  tienen valor medio igual a 0. Además, por (2.10) es verdad que se debe cumplir lo siguiente:

$$Var[X(1/2) - X(0)] = 1/4 Var[X(1) - X(0)] + \Delta_1^2 = 1/2 \sigma^2$$

por lo tanto  $\Delta_1^2 = 1/4 \sigma^2$ .

En el nuevo paso se procede de la misma manera pero ahora para el conjunto:

$$X(1/4) - X(0) = 1/2 [X(0) + X(1/2)] + D_2$$

observándose de nuevo que los incrementos en  $X$ , en este caso  $X(1/2) - X(1/4)$  y  $X(1/4) - X(0)$  son Gaussianos y que tienen media 0. De igual forma se debe de elegir la varianza  $\Delta_2^2$  de  $D_2$  tal que

$$Var[X(1/4) - X(0)] = 1/4 Var[X(1/2) - X(0)] + \Delta_2^2 = 1/4 \sigma^2$$

Obteniéndose lo siguiente

$$\Delta_2^2 = 1/8 \sigma^2$$

Aplicando la misma idea para  $X(3/4)$  y continuando para resoluciones más finas se produce que:

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2^{n+1}} \sigma^2$$

Como la varianza del desplazamiento  $D_n$ , correspondientes a tiempos diferentes  $\Delta t = 2^{-n}$ , donde se debe sumar un elemento aleatorio de varianza  $2^{-(n+1)} \sigma^2$  el cual es proporcional a  $\Delta t$  como se esperaba.

## EL MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO.

Un método directo para generar el movimiento Browniano es por el método de desplazamiento de el punto medio aleatorio. Si el proceso se calcula para un tiempo  $t$ , entre 0 y 1, se debe empezar asignando  $X(0) = 0$  y seleccionando  $X(1)$  como una muestra de una variable aleatoria Gaussiana con media 0 y varianza  $\sigma^2$ . Entonces la  $\text{var}(X(1) - X(0)) = \sigma^2$  y se espera que

$$\text{var}(X(t_2) - X(t_1)) = |t_2 - t_1| \sigma^2 \quad (2.11)$$

para  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ , el conjunto  $X(\frac{1}{2})$  es el promedio de  $X(0)$  y  $X(1)$  más alguna compensación aleatoria Gaussiana  $D_1$ , con media 0 y varianza  $\Delta_1^2$ , de aquí se tiene que

$$X\left(\frac{1}{2}\right) - X(0) = \frac{1}{2}(X(1) - X(0)) + D_1$$

es decir,  $X\left(\frac{1}{2}\right) - X(0)$  tiene como valor medio 0, además que al mismo tiempo se obtiene  $X(1) - X\left(\frac{1}{2}\right)$ . Por otro lado, de (2.11) se debe cumplir que

$$\text{var}\left(X\left(\frac{1}{2}\right) - X(0)\right) = \frac{1}{4} \text{var}(X(1) - X(0)) + \Delta_1^2 = \frac{1}{2} \sigma^2$$

donde,  $\Delta_1^2 = \frac{1}{4} \sigma^2$

Para la siguiente iteración, se procede de la misma manera, pero ahora para el conjunto

$$X\left(\frac{1}{4}\right) - X(0) = \frac{1}{2}\left(X(0) + X\left(\frac{1}{2}\right)\right) + D_2$$

donde se puede observar que los incrementos en  $X$ , están representados por  $X(\frac{1}{2}) - X(\frac{1}{4})$  y  $X(\frac{1}{4}) - X(0)$  los cuales son Gaussianos con valor medio igual a 0, además de que se debe elegir la varianza  $\Delta_2^2$  de  $D_2$  tal que

$$\text{var}\left(X\left(\frac{1}{4}\right) - X(0)\right) = \frac{1}{4} \text{var}\left(X\left(\frac{1}{2}\right) - X(0)\right) + \Delta_2^2 = \frac{1}{4} \sigma^2$$

donde de la misma forma se obtiene que  $\Delta_2^2$  es igual a

$$\Delta_2^2 = \frac{1}{8} \sigma^2$$

Si se aplica la misma idea, pero ahora para  $X\left(\frac{3}{4}\right)$  y si se continua así de manera iterativa para obtener diferentes resoluciones se obtiene la siguiente regla

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2^{n+1}} \sigma^2$$

que es la varianza del desplazamiento  $D_n$ , el cual corresponde a diferentes tiempos  $\Delta t = 2^{-n}$  cuando se suma un elemento aleatorio con varianza  $2^{-(n+1)}\sigma^2$ , la cual es proporcional a  $\Delta t$  como se esperaba.

## 2.8 EL MOVIMIENTO FRACCIONAL BROWNIANO.

Uno de los modelos matemáticos más usados para generar fractales aleatorios encontrados en la naturaleza tales como superficies montañosas, nubes, etc., son generadas por el movimiento fraccional Browniano (mfB)<sup>ii</sup> (véase [B B Mandelbrot and Van Ness, 1968]), el cual es una generalización del movimiento Browniano. Muchos de los cálculos para realizar simulaciones gráficas de formas fractales encontradas en la naturaleza, se basan en el mfB generando de acuerdo a la dimensión paisajes o superficies Brownianos fraccionales, el mfB es también un punto de partida para entender las difusiones irregulares y caminatas aleatorias en fractales.

En la figura (2.16) se observa diferentes trazos de mfB, en un mfB  $V_H(t)$ , es una función de variable real por lo general, es el tiempo, esta función conserva un comportamiento escalable como se muestra en la figura (2.15), además de que se caracteriza por el parámetro  $H^{21}$  que se encuentra en el intervalo  $0 < H < 1$ , cuando  $H$  se aproxima a 0 los trazos son muy quebradizos o rugosos, mientras que cuando  $H$  se aproxima a 1 son relativamente suaves,  $H$  proporciona un cambio típico en  $V$ , el cual esta representado por  $\Delta V = V(t_2) - V(t_1)$ , para un tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , y por una regla de escala simple dada por

$$\Delta V \propto \Delta t^H \quad (2.12)$$

Finalmente, se debe mencionar, que un movimiento Browniano ordinario o caminata aleatoria se obtiene cuando  $H=0.5$ , la suma de incrementos o pasos independientes conducen a una variación de las escalas que esta dada como la raíz cuadrada de el número de pasos.

<sup>ii</sup> Véase Apéndice 2. Procesos Estocásticos (movimiento fraccional Browniano).

<sup>21</sup> A este parámetro  $H$  se le conoce como exponente de Hurst, en honor a esta persona, quién realizo estudios del comportamiento de las fluctuaciones del Río Nilo y cuestiones de Hidrología. Este parámetro describe lo "quebradizo" o "rugoso" de las funciones en diferentes escalas.

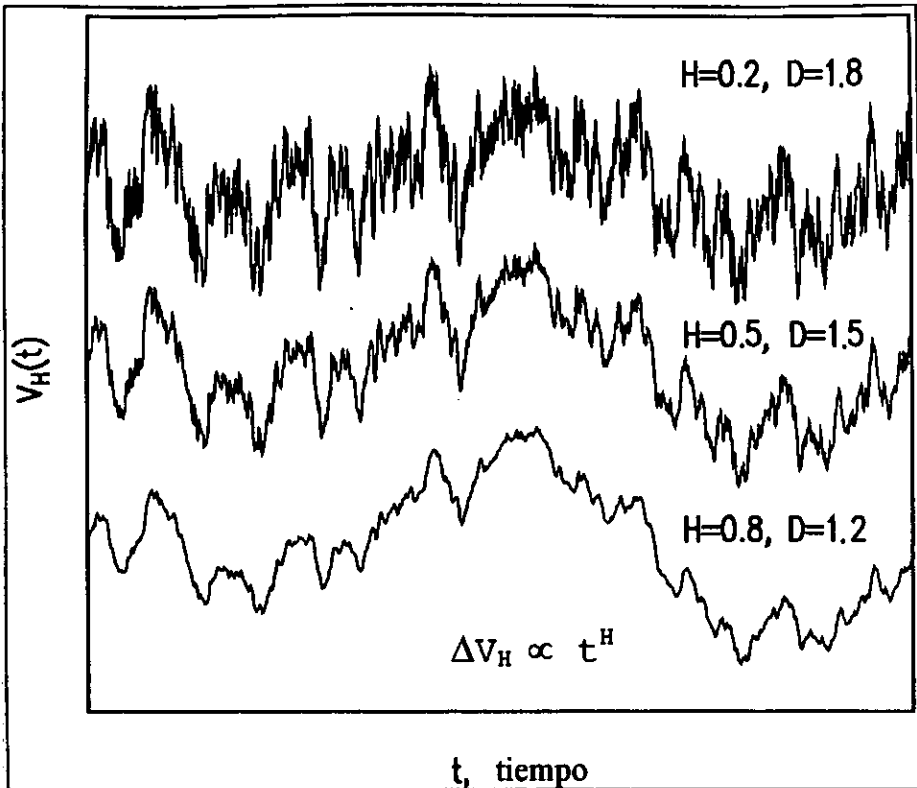


Figura (2.16). Muestras de diferentes trazos del movimiento fraccional Browniano  $V_H(t)$ , donde  $t$  se gráfica contra  $V_H(t)$  arrojando diferentes valores para  $H$  (exponente de rugosidad) y  $D$  (Dimensión Fractal).

## DETALLES DEL MOVIMIENTO FRACCIONAL BROWNIANO.

Como se mencionó anteriormente un mfB,  $V_H(t)$ , es una función de variable real  $t$  que por lo general casi siempre es el tiempo, sus incrementos  $V_H(t_2) - V_H(t_1)$  tienen una distribución Gaussiana con varianza dada por

$$\langle [V_H(t_2) - V_H(t_1)]^2 \rangle \propto |t_2 - t_1|^{2H}$$

donde los  $\langle \rangle$  denotan un promedio muestral de  $V_H(t)$  y el parámetro  $H$  tiene un valor  $0 < H < 1$ , esta función es estacionaria e isotrópica, y sus incrementos medios al cuadrado dependen únicamente de la diferencia del tiempo  $t_2 - t_1$ , y por lo tanto, todas las  $t$ 's son estadísticamente equivalentes. El valor  $H=1/2$ , éste propicia el movimiento Browniano ordinario con

$$\Delta V^2 \propto \Delta t.$$

para el caso del movimiento Browniano ordinario,  $V_H(t)$  es continua, y en ninguna parte es diferenciable. Sin embargo, algunas teorías han surgido a partir de esto, tales como la "derivada del movimiento fraccional Browniano" y ruidos Gaussianos fraccionales, donde tales construcciones se basan en promedios muestrales de  $V_H(t)$  sobre escalas decrecientes. La derivada del movimiento Browniano ordinario ( $H=1/2$ ), corresponde a ruido blanco no correlacionado figura(12a). En dicho movimiento Browniano se dice que tiene *incrementos independientes*, lo cual significa que para cualquier momento  $t_1 < t_2$ ,  $V_H(t) - V_H(t_1)$  es estadísticamente independiente de  $V_H(t_2) - V_H(t)$ , para  $H = 1/2$ . Por otro lado, si se toma  $H > 1/2$  se tiene una correlación positiva para  $V_H(t)$ , en cambio para  $H < 1/2$  los incrementos están correlacionados negativamente.  $V_H(t)$  muestra un comportamiento de escala estadístico, si la escala de tiempo  $t$  se modifica por un factor  $r$ , entonces los incrementos  $\Delta V_H$  cambian por un factor  $r^H$ , como se puede observar en la siguiente expresión:

$$\langle \Delta V_H(rt)^2 \rangle \propto r^{2H} \langle \Delta V_H(t)^2 \rangle$$

Las curvas autosimilares estadísticamente no son muy parecidas, como por ejemplo el contorno de la costa figura (7). Para los trazos de  $V_H(t)$ , que requieren factores de escala diferentes en las dos coordenadas ( $r$  para  $t$  y  $r^H$  para  $V_H$ ), reflejan el estado espacial de la coordenada  $t$ . A cada  $t$  le debe corresponder únicamente un valor de  $V_H$ , pero para cualquier  $V_H$  específico puede ocurrir que le correspondan múltiples  $t$ 's. A dicha característica de escala no uniforme se le conoce como *autoafinidad*<sup>1</sup> en lugar de autosimilaridad.

## LA GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO ALEATORIO.

La técnica del desplazamiento del punto medio aleatorio fue aplicada por Norbert Wiener para generar el movimiento Browniano con una  $H=0.5$  de manera iterativa. Por otro lado, si se considera una aproximación para un mfB, con  $V_H(t)$ , donde las medias al cuadrado incrementan para diferentes puntos separados, con un tiempo  $\Delta t=1$  y con varianza igual a  $\sigma^2$ , entonces de la ecuación (2.12) para diferentes puntos separados por un tiempo  $t$  se tiene lo siguiente

$$\langle [V_H(t) - V_H(0)]^2 \rangle = t^{2H} \cdot \sigma^2$$

por comodidad, se establece que  $V_H(0)=0$ , entonces el punto en  $t = \pm 1$  se eligen como muestras de una variable aleatoria Gaussiana con varianza  $\sigma^2$  que debe satisfacer la ecuación (2.12), dadas estas condiciones iniciales, se puede definir los puntos medios como

---

<sup>1</sup> Ver Anexo 1. Glosario.



$$V_H\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0.5[V_H(0) + V_H(\pm 1)] + \Delta_1$$

donde  $\Delta_1$  es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza  $\Delta_1^2$  que se determina por la condición de que los incrementos de  $0$  a  $\frac{1}{2}$  deben satisfacer la ecuación (2.12)

$$\Delta_1^2 = \frac{\sigma^2}{2^{2H}} - \frac{1}{4} \text{var}[\Delta V_H(1)] = \frac{\sigma^2}{2^{2H}} [1 - 2^{2H-2}]$$

El primer término es el que proporciona una varianza total de la ecuación (2.12) mientras el segundo término representa las fluctuaciones

$$\Delta V_H(1) = [V_H(\pm 1) - V_H(0)]$$

de lo anterior, cuando  $H \rightarrow 1$ ,  $\Delta_1^2 \rightarrow 0$  y  $D \rightarrow 1$ , las nuevas fluctuaciones no se adicionan a los estados mas pequeños, y  $V_H(t)$  permanece como una colección de segmentos de líneas suaves que conectan los puntos iniciales. Para el segundo estado se tiene que

$$V_H\left(\pm\frac{1}{4}\right) = 0.5\left[V_H(0) + V_H\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right] + \Delta_2$$

donde  $\Delta_2$  tiene la varianza

$$\Delta_2^2 = \frac{\sigma^2}{4^{2H}} - \frac{1}{4} \text{var}\left[\Delta V_H\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\sigma^2}{4^{2H}} [1 - 2^{2H-2}]$$

Para la  $n$ -ésima iteración la longitud de escala se decrementa en  $\frac{1}{2^n}$ , con una variable aleatoria Gaussiana  $\Delta_n$  se suma a los puntos medios de la  $(n-1)$ -ésima iteración con varianza.

$$\Delta_n^2 = \frac{\sigma^2}{(2^n)^{2H}} [1 - 2^{2H-2}]$$

como se esperaba para un mFB, en una longitud de escala  $r = \frac{1}{2^n}$  anexada aleatoriamente con variaciones medias al cuadrado fluctuando como  $r^{2H}$ . Aunque este proceso produce un fractal, el resultado es desafortunadamente no estacionario para toda  $H$ . Una vez dado un punto  $t_i$ , éste tiene que ser determinado donde sus posibles valores permanecen sin cambios en todos los estados posteriores. Todos los estados adicionales  $t < t_i$  cambian independientemente de  $t > t_i$ , y las correlaciones que se requieren de el mFB con  $H \neq \frac{1}{2}$  no están presentes. Para construir los incrementos se toma en cuenta.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones  
Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

$$\langle [V_H(\pm 1) - V_H(0)]^2 \rangle = \sigma^2$$

para un proceso estacionario, se tiene la misma condición anterior, pero ahora debe cumplirse para todos los incrementos con  $\Delta t=1$ . Sin embargo, tomando en cuenta la correlación de los estados a través del tiempo se requiere que

$$\langle [V_H(1/2) - V_H(-1/2)]^2 \rangle = 2 \langle [V_H(1/2) - V_H(0)]^2 \rangle = 2 \frac{\sigma^2}{2^{2H}}$$

Este da el resultado deseado  $\sigma^2$  únicamente para  $H=1/2$  del movimiento Browniano normal. Como una consecuencia, los puntos generados en diferentes estados tienen diferentes propiedades estadísticas en sus vecindades. Esto frecuentemente autoriza un trazo visible que no desaparece en muchos estados cuando son compensados. Este efecto se nota más cuando  $H \rightarrow 1$ . Estos artificios, consecuencia de la regla de estacionariedad de una aproximación matemática, son particularmente observables en una superficie fractal.

# 3

## Turbulencia Atmosférica.

### INTRODUCCIÓN:

Los astrónomos, hoy en día, sufren del titilar de las estrellas. ¿Qué origina que éstas no se observen como pequeños puntos azules, plateados, dorados-rojizos<sup>22</sup>, sino como objetos con brillo intermitente<sup>23</sup> y borrosas, como se puede observar en la figura (3.1)?



Figura (3.1) Estas imágenes son de una estrella, y muestra como la turbulencia atmosférica degrada la calidad de la imagen la cual aparece como un punto de luz difuso.

Las estrellas emiten luz y otras ondas electromagnéticas que al entrar a la atmósfera de la tierra se perturban, a tales perturbaciones se les denomina frente de onda atmosférico perturbado<sup>1</sup>, estas radiaciones sufren alteraciones debido a los cambios de temperatura, humedad y corrientes de aire, la cual ocasiona su titilar y que su imagen presente insuficiente definición al ser observadas a través de los telescopios. "Cuando las estrellas se observan con una cámara rápida de televisión conectada al telescopio, se asemejan a unas amibas danzarinas, es decir, se ven con la forma de estos parásitos, desplazándose en zig-zag". Por otro lado, a la atmósfera se le puede comparar con la especie de vaho que se levanta cuando el asfalto o un comal se calientan mucho; ya que, a través de éste cualquier objeto se observa deformado.

<sup>22</sup> así deberían verse.

<sup>23</sup> como manchas borrosas.

<sup>1</sup> Ver Anexo 1. Glosario.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones  
Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

El problema de la turbulencia atmosférica se ha atacado mediante diferentes vías, muestra de ello es el Telescopio Espacial Hubble, el cual la NASA puso en órbita en el año de 1990, dicho telescopio al encontrarse fuera de la atmósfera de la Tierra reduce la turbulencia atmosférica, lo que permite captar imágenes mucho más nítidas de los cuerpos celestes. Pero como este aparato resultó muy costoso y actualmente ya tiene menos capacidad que los grandes telescopios terrestres, especialistas desarrollan nuevas tecnologías que instalan en estos aparatos para obtener la misma o hasta mayor resolución a la alcanzada por el Hubble.

Tal es el caso de la *óptica adaptiva* que funciona de la siguiente manera: el haz de luz, emanada por las estrellas, distorsionada por la atmósfera, entra al telescopio, dónde unos sensores captarán estas alteraciones y emitirán la información a una computadora, la cual envía inmediatamente órdenes a un espejo de 25 milímetros de diámetro que se colocará a la salida del telescopio. Este espejo se mueve cada 10 milisegundos y reflejará la luz de tal manera que recompondrá la imagen y quedará eliminado el aparente desplazamiento en zig-zag de las estrellas. Esto facilitará su estudio, al poderlas centrar en el monitor de la computadora conectada al telescopio, como se ve en la figura (3.3). Por otro lado, la simulación de frentes de onda distorsionados por el seeing es una herramienta importante para el estudio de la propagación de la luz en un medio turbulento y la importancia de esta tesis radica en la necesidad de desarrollar un método simple, eficiente y rápido para simular el comportamiento de los objetos e imágenes astronómicas a través de la turbulencia atmosférica. Una parte de este capítulo explica el comportamiento de la turbulencia atmosférica en el plano estadístico cuya función de estructura de fase esta representada por la expresión (2.3), la cual es un componente esencial de cualquier simulación de imágenes atmosféricas distorsionadas por el seeing.

En la teoría de la turbulencia desarrollada por Kolmogorov<sup>24</sup>, la energía cinética que existe en la atmósfera, se transporta a escalas cada vez más y más pequeñas por medio de remolinos, hasta que finalmente en el límite inferior del intervalo inercial, dicha energía se disipa, es decir, se convierte en calor, lo cual produce fluctuaciones de temperatura, como ejemplo de esto en la figura (3.2) se muestra las fluctuaciones o diferencias de temperatura que fueron captadas en el telescopio de 2.1 metros que se encuentra ubicado en la Sierra de San Pedro Mártir, Baja California Norte, estas imágenes muestran la turbulencia atmosférica o seeing cuando dicho telescopio se enfoca a una distancia finita. Para Kolmogorov la turbulencia no conserva detalles y es indiferente a cualquier escala a la que se observe y se estudie, lo cual proporciona un cierto criterio de escala apropiado, donde cualquier porción de turbulencia que se observe a cualquier escala se ve autosimilar a cualquier otra. De esta manera la turbulencia atmosférica tiene un comportamiento autosimilar y escalable, bajo un cierto intervalo inercial dado por (2.1), donde  $L_0$  es la escala externa de la turbulencia e  $l_0$  es la escala interna.

La teoría de la turbulencia atmosférica o seeing surge de las observaciones que se efectúan sobre imágenes de estrellas. En resumen se tiene que:

---

<sup>24</sup> También conocida como la Teoría-K41, dado que fue en el año de 1941 cuando Kolmogorov desarrolló su teoría de la turbulencia. Véanse las referencias.

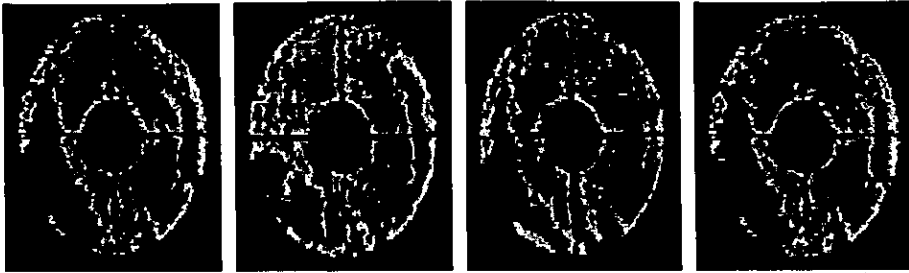


Figura (3.2) Muestra las diferencias locales de temperatura provocadas por el seeing, estas imágenes fueron captadas por en el telescopio de 2.1 metros al ser enfocado éste a un distancia finita. Este telescopio se encuentra en la Sierra de San Pedro Mártir, Baja California Norte.

1. La forma de la función de estructura de la temperatura está representada por  $D_T \propto r^{2/3}$ .
2. El tamaño del seeing se incrementan según la actividad microtermal<sup>25</sup>, además depende de la ruta de longitud del haz de luz.
3. El tamaño de la imagen depende de su longitud de onda.

Dainty estudio las perturbaciones que sufre el frente de onda promedio, de una estrella luminosa en la apertura del telescopio, y llegó a la conclusión de que ésta tiene una aproximación a la regla de potencia  $2/3$ , para la función de estructura de fase a través de dicha apertura<sup>26</sup>, esta función de estructura de fase representa el espacio estadístico de las deformaciones de un frente de onda plano y se describe por la siguiente regla de potencia.

$$D_\phi(r) = \langle |\phi(x) - \phi(x+r)|^2 \rangle = 6.88 \left[ \frac{r}{r_0} \right]^3$$

donde  $r_0$  es la longitud de Fried y mide las aberraciones que causa la turbulencia atmosférica.

De lo anterior se desprende que el espectro de potencia de la función de estructura de fase es muy próximo al espectro de potencia en una dimensión del movimiento Browniano el cual es  $\psi_\phi(k) = 1/k^2$  y como el algoritmo del desplazamiento de punto medio que se analizó en el capítulo anterior, sirve para simular el movimiento Browniano para el caso unidimensional, esto permite simular las perturbaciones atmosféricas que sufre un frente de onda plano provocadas por el seeing, además, como lo hace notar (Lane, R. G. [1992]) que la turbulencia atmosférica y dicho algoritmo tienen en común la misma función de estructura que esta representada por  $D_\rho(\rho) = |\rho|$ .

<sup>25</sup> Fluctuaciones de temperatura.

<sup>26</sup> Cabe destacar que las aberraciones atmosféricas de un frente de onda, se representan de manera estadística en la función de estructura de fase, la cual caracteriza las deformaciones promedio que sufre un frente de onda a través de la Turbulencia Atmosférica.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

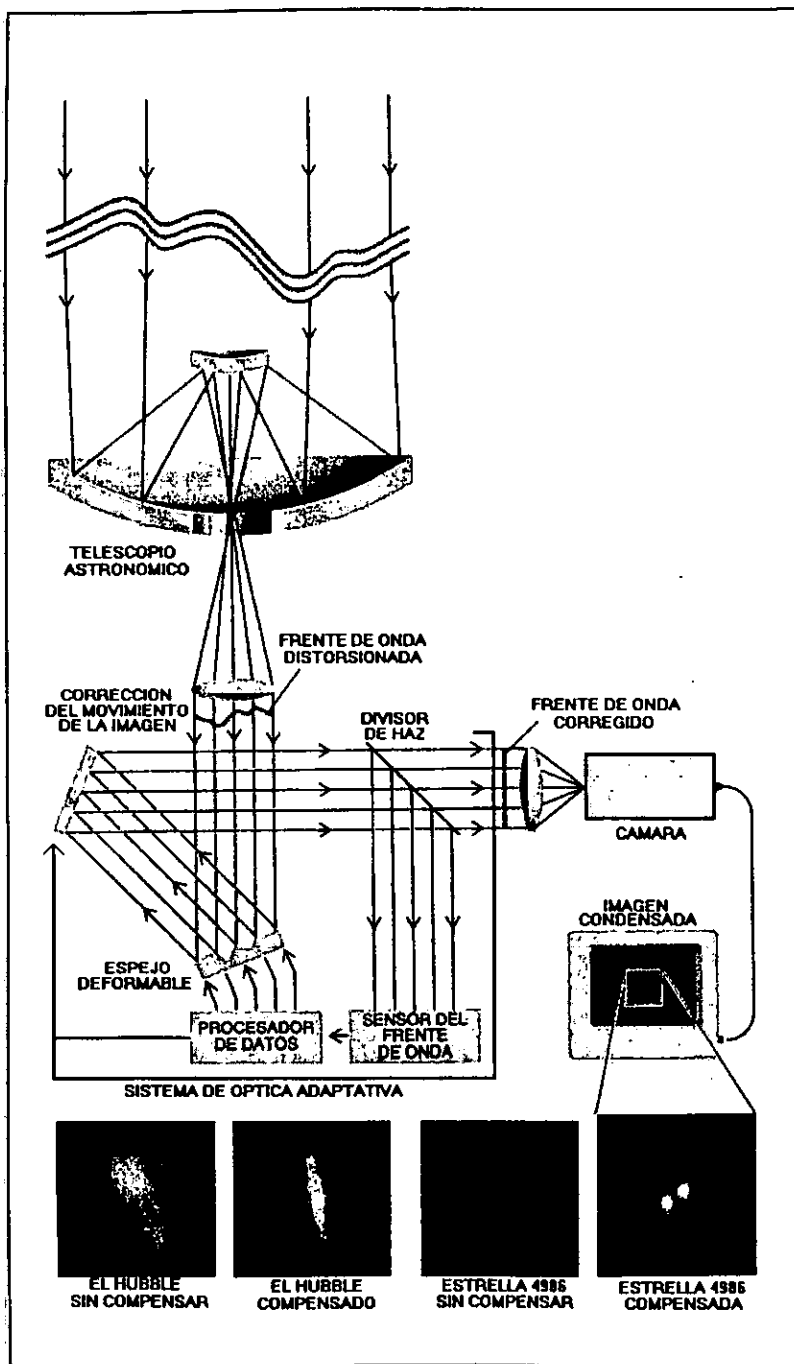


Figura (3.3) Esquema de Óptica Adaptiva.

### 3.1 CAOS Y ORDEN EN ASTRONOMÍA.

La astronomía es la ciencia que pretende explicar la totalidad: el tiempo, la materia, el espacio y los acontecimientos que allí ocurren. Para tal efecto, se emplea la física y no solamente se quiere comprender lo observable sino también formular predicciones; ejemplos comunes son las previsiones relativas a eclipses. Por otro lado, el astrofísico busca orden en los sucesos celestes y lo explica mediante las leyes deterministas de la física; también aplica la teoría del caos para comprender fenómenos que a primera vista podrían parecer desordenados. El universo es *todo*: el espacio, el tiempo, la materia y la radiación. La astronomía es la física aplicada al resto del cosmos ocupándose del estudio de los cuerpos celestes productores de luz, como las estrellas la más cercana de la cuales es el sol. Además, ha descubierto otros que sólo la reflejan como los planetas. Las estrellas se agrupan en galaxias, que son conglomerados estelares, algunas de las cuales tienen forma de espiral como la Vía Láctea, de la que forma parte el sistema solar, o la galaxia de Andrómeda<sup>27</sup>, la cual está constituida por un conjunto de cien mil millones de estrellas. La física predictiva y el caos, subyace en la idea de sensibilidad a las condiciones iniciales, es decir, si se imagina lo que sucedería si se lanzara suavemente una pelota de fútbol a otra persona y si se soltara un globo inflado cuyo extremo no se encontrará amarrado. En el primer caso resulta posible anticiparse a la trayectoria del balón, es decir, se puede predecir con seguridad. En cuanto al globo, éste puede salir volando en cualquier dirección pues, al expulsar el aire de manera turbulenta, cualquier cambio pequeño de presión, alterará la trayectoria de éste a tal grado de que se vuelve impredecible. Por otro lado, los planetas y estrellas tienen forma esférica, la fuerza de gravedad es su carácter de fuerza central, es decir, que se distribuye igual en todas direcciones y por consiguiente produce cuerpos redondos, la combinación de gravitación y rotación produce simetría y orden, sin embargo, si se observa con cuidado la estructura superficial de Júpiter se puede distinguir que posee estructuras caóticas, como las turbulencias formadas alrededor de la gran mancha roja. Esta estructura es en realidad un huracán de Júpiter. En la tierra el clima no se puede predecir con meses de antelación porque una pequeña perturbación se puede amplificar y producir grandes perturbaciones, como señala la teoría del caos<sup>28</sup>.

En el universo, además de las estrellas y planetas, existe materia interestelar constituida por gas y polvo, cuyo estudio resulta en especial importante para la astronomía porque las estrellas nuevas se forman dentro de las nubes interestelares. La forma precisa de una de éstas no se puede calcular con antelación ni tampoco la cantidad exacta de estrellas que formará, por razones muy parecidas a las que impiden predecir con exactitud cuántas gotas y burbujas producirá una ola al romperse en la costa, pues uno y otra poseen estructuras caóticas. Lo anterior muestra que en el Universo existe una gran cantidad de fenómenos que tienen estructuras caóticas tal y como es el caso de la Turbulencia Atmosférica. Finalmente habría que destacar que cuando se dice que el cosmos es homogéneo e isotrópico se refiere a que cualquier observador en cualquier lugar del cosmos vería una distribución de materia y de energía igual que cualquier otro y que cualquier persona aprecia lo mismo en cualquier dirección. En otras palabras, no existen posiciones, ni direcciones privilegiadas en el universo.

---

<sup>27</sup> la más próxima a nuestra sistema solar

<sup>28</sup> Recuérdese la trayectoria del globo cuando expulsa el aire o el efecto mariposa.

## 3.2 ALGUNOS CONCEPTOS SOBRE ÓPTICA.

La óptica es la parte de la física que se ocupa de el estudio de la luz, de su naturaleza y de los fenómenos a que da lugar.

Se divide en óptica geométrica y óptica física. A partir de la propagación rectilínea de la luz, se observa que muchas leyes se pueden deducir por la matemática, esta parte de la óptica es la llamada geométrica, en ella los rayos luminosos son considerados como líneas rectas y los fenómenos se estudian con relación al espacio, por el contrario, todo lo concerniente a la naturaleza de la luz y su relación con los cuerpos que la producen forman la óptica física.

- NATURALEZA DE LA LUZ

Se admite que la luz es producida por la vibración de las partes integrantes de los electrones, debida a la variación de los campos eléctrico y magnético, que se propaga en forma de ondas de determinada longitud y frecuencia. Es decir, que la energía luminosa se propaga igual que la eléctrica y térmica, diferenciándose una de otra en la frecuencia y longitud de sus ondas.

Las ondas luminosas que impresionan el sentido de la vista tienen una longitud que varía de 38 a 76 millonésima de centímetro.

La luz puede definirse, por consiguiente, como energía radiante en forma de ondas de longitud tal que afectan al ojo humano y producen la sensación llamada visión.

Al chocar los rayos contra los cuerpos, en vez de ser detenidos o absorbidos por los mismos en su totalidad, son en parte rechazados, reflejados y absorbidos los restantes, según sea su longitud de onda, es decir, según el color de los rayos incidentes, cada color se caracteriza por una longitud de onda determinada y, por consiguiente, el color que le atribuimos a cada cuerpo es resultado de la reflexión de los rayos que deja de absorber. Si un cuerpo aparece rojo, es por que absorbe todos los rayos excepto los de este color, cuya longitud de onda es capaz de dar la impresión de rojo.

Los cuerpos que absorben la mayor parte de los rayos luminosos que inciden sobre ellos aparecen negros, y aquellos que reflejan todos los rayos que reciben aparecen a la luz de el sol blancos; y los cuerpos blancos, bajo una luz de color, aparecen de el mismo color que la luz que reciben. Por el contrario, los cuerpos de color aparecen negros al ser iluminados con una luz de color diferente al suyo, porque los rayos que reciben no contienen los que reflejarían y, por consiguiente, no reflejan rayo alguno.

- RAYOS LUMINOSOS.

Se denominan así las líneas que representan la dirección de propagación de la luz. En la práctica es imposible aislar una de estas rectas, estudiándose sus propiedades en grupos de ellas, formando lo que se llama un haz luminoso.



- PROPAGACIÓN DE LA LUZ.

En un medio homogéneo, la luz se propaga siempre en línea recta, en cambio en un medio no homogéneo<sup>29</sup> esta sufre alteraciones en la trayectoria en que ésta se propaga.

- CLASIFICACIÓN DE LOS CUERPOS.

Cuerpos luminosos	Son aquellos que irradian luz (El Sol, las estrellas, etc.,)
Cuerpos iluminados	Son aquellos cuerpos que reflejan en todas direcciones los rayos que reciben de los cuerpos luminosos, por lo general, son la mayoría de los cuerpos que nos rodean (Los planetas, etc.,).
Cuerpos opacos	Son los que impiden ver la luz cuando se interponen entre nuestra vista y un cuerpo luminoso.
Cuerpos transparentes	Son aquellos cuerpos que dejan pasar fácilmente la luz y a través de su masa podemos distinguir perfectamente la forma de los objetos colocados detrás de ellos.

### 3.3 LAS ESTRELLAS COMO FUENTES DE LUZ.

Es difícil imaginar las distancias a las que están situados los diferentes objetos cósmicos que estudia la astronomía actual. Si se piensa en un foco doméstico de 60w, la cantidad de luz<sup>30</sup>, que irradia en todas direcciones, es del orden  $10^{20}$  fotones por segundo. El sol lanza al espacio  $10^{24}$  veces más fotones por segundo que el foco de nuestra casa. La cantidad de luz que se recibe de una estrella de las más cercanas<sup>31</sup>, es equivalente a la cantidad de luz que se recibiría del foco de 60w, colocado a 4 km!. De los objetos que hoy estudian los astrónomos, llegan a la superficie de la Tierra apenas 3000 fotones por segundo, por cada metro cuadrado del suelo.

Lo anterior revela los problemas existentes en la observación de las estrellas: están muy lejos, la cantidad de luz que de ellas se recibe es muy poca, además de las deformaciones que sufre el frente de onda provocadas por el fenómeno del seeing, por ende, es importante realizar simulaciones numéricas que permitan ver que tanto se perturba el frente de onda plano, con la finalidad de que se apliquen a los sistemas de control, los cuales ayudaran a compensar las deformaciones que sufre el frente de onda para obtener imágenes más nítidas de los objetos celestes, de esta manera se pueden corregir algunos problemas existentes en la observación de las estrellas.

<sup>29</sup> Tal es el caso de la turbulencia atmosférica.

<sup>30</sup> medida en fotones.

<sup>31</sup> supuestamente similar al sol.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

• OJOS PARA VER LAS ESTRELLAS.

Para entender el desarrollo instrumental en la astronomía visual<sup>32</sup> la que utiliza luz visible, se debe describir el primer instrumento que ha utilizado el hombre: el ojo.

El ojo humano consiste en un sistema óptico de enfoque: el cristalino y la córnea, constituidos por diferentes medios figura (3.4), y un sistema sensible a la luz: la retina. El cristalino, ayudado por la córnea, proyecta sobre la retina las imágenes del mundo que nos rodea. La retina las convierte en impulsos eléctricos que interpreta el cerebro. La cantidad de luz que puede entrar por el ojo esta regulada por la apertura del iris, que de noche mide unos cuantos milímetros de diámetro. La sensibilidad del ojo a la luz está determinada por la retina, resulta necesario contar con ojos más grandes, de mayor apertura y con una retina más sensible aún, para poder estudiar las estrellas.

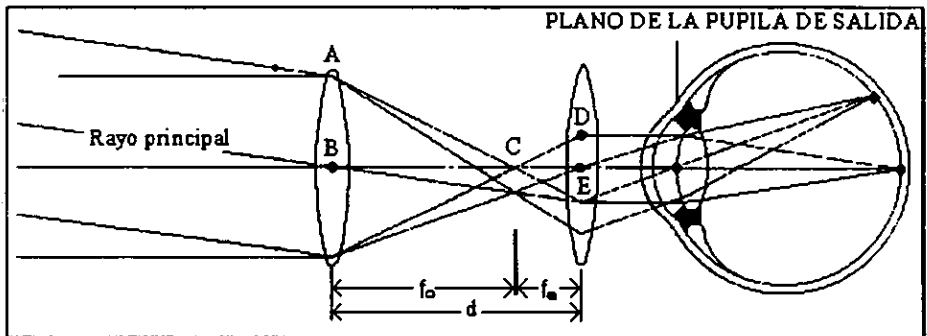


Figura (3.4) Principio del telescopio astronómico. La distancia focal del objetivo  $f_o$  se ha dibujado muy disminuida. La distancia focal del ocular  $f_e$  define el aumento del telescopio dado por la razón  $f_o/f_e$ .

Los astrónomos siguiendo este ejemplo, utilizan los telescopios como un sistema de enfoque de luz y los detectores de luz como una retina mas sensible.

### 3.4 FINALIDAD Y TIPOS DE TELESCOPIOS.

Los telescopios tienen dos funciones: *la primera*, es captar más luz, usando una superficie colectora miles de veces más grande que la del ojo humano y *la segunda*, es su poder de resolución: un telescopio puede diferenciar objetos distantes y cercanos entre sí, que a simple vista, se confundirían. Es la "distancia focal" del telescopio la que determina ese poder de resolución. A mayor distancia focal<sup>1</sup>, mayor poder de resolución.

Existen dos tipos de telescopios: *los reflectores*, que emplean la reflexión de la luz en espejos para recolectar y enfocar luz; y *los refractores*, que utilizan lentes. En la figura (3.5), se describen los tipos más importantes de telescopios a través de la historia

<sup>32</sup> Existen varios tipos de astronomía una de tantas, es la radioastronomía que utiliza las ondas de radio  
<sup>1</sup> Ver Apéndice 1. Tipos de telescopios.

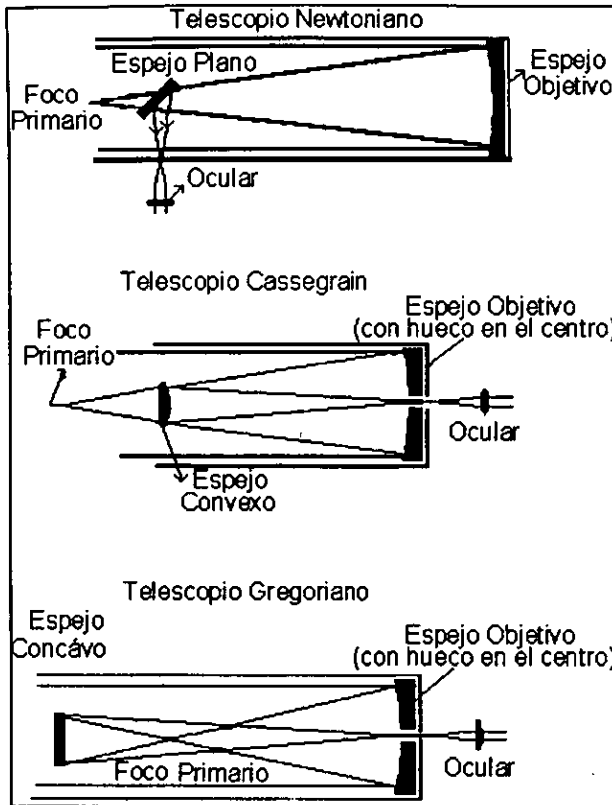


Figura (3.5) Diferentes tipos y focos de un telescopio reflector. El foco primario se utiliza sólo en telescopios de grandes dimensiones; (a) Telescopio Newtoniano, se utiliza en telescopios pequeños; (b) Telescopio Cassegrain, es el más utilizado en telescopios profesionales (c) Telescopio Gregoriano, tiene sólo interés histórico.

Construir un telescopio con un espejo primario de dos o tres metros de diámetro implica utilizar técnicas muy sofisticadas de óptica, mecánica y electrónica. Un telescopio de este tipo tiene las siguientes características: la masa total que se mueve es de unas 20 toneladas aproximadamente, las cuales deben ser movidas y controladas electrónicamente. La precisión necesaria para poder apuntar el telescopio a una estrella u objeto deseado es de unos cuantos segundos de arco. Esto implica la disponibilidad de mover todo el telescopio en una dirección determinada y que el extremo del telescopio no este desviado más allá de unas cinco décimas de milímetro.

Además, de la precisión requerida para colocar el telescopio en la posición deseada, los sistemas electrónicos de control deben contrarrestar el movimiento aparente de la bóveda celeste debida a la rotación de la Tierra. En caso contrario el objeto de estudio saldría rápidamente de la "mira" del astrónomo.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

• COMO FUNCIONA UN TELESCOPIO.

Un telescopio es esencialmente un par de lentes, una llamada objetivo porque es la más cercana al objeto y otra llamada ocular porque es la más cercana al ojo. El objetivo es una lente convergente que forma una imagen T del objeto, es fácil comprender que esta imagen es mayor cuanto más larga sea su distancia o longitud focal, es decir, cuanto menos convergente sea. Esta Imagen T se observa después con el auxilio de una pequeña lente, divergente como en el telescopio galileano de la figura (3.6), o convergente como en el telescopio kepleriano.

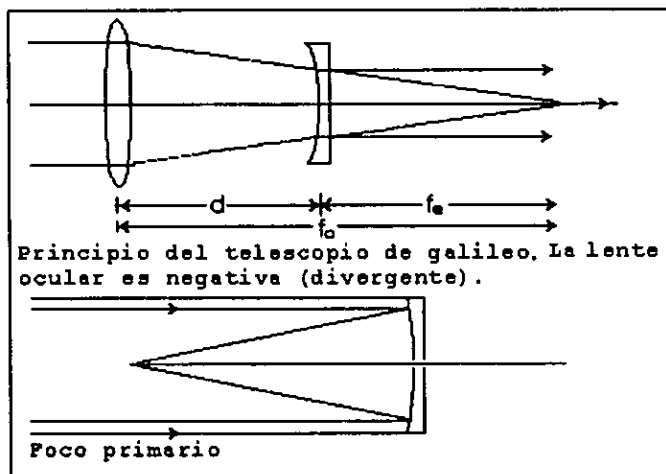


Figura (3.6) Telescopio Galileano.

La imagen T, al ser observada, producirá a su vez una imagen en la retina del ojo, que será tanto más grande cuanto más cerca este esté imagen T del globo ocular. Como el ojo no puede enfocar los objetos que están muy cerca de él, es necesario la ayuda de una lente, llamada ocular, para realizar este enfoque. Si la imagen T está atrás del ojo se usa una lente negativa o divergente, pero si está adelante se usa una lente positiva o convergente. En vista de esto, es fácil comprender que la amplificación aparente o angular M del telescopio es directamente proporcional a la distancia focal  $f_{ob}$  del ocular. Si un objeto tiene un diámetro angular  $\alpha$ , la imagen tendrá un diámetro angular  $\beta$ . Pero se puede uno percatar de que la lente ocular forma una imagen del objetivo a una distancia/ de ella, es fácil ver que esta relación de ángulos, o sea la amplificación, está dada por

$$M = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{f_{ob} - f_{oc}}{l}$$

Relación que permite determinar la posición de la imagen real formada por una lente, que en este caso es el ocular, está representada por

$$M = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$

esta amplificación de los diámetros aparentes de los objetos observados se puede interpretar también como un acercamiento del objeto. Así como una amplificación de cinco, los objetos se ven a través del telescopio a la quinta parte de su distancia real.

En un telescopio, como en cualquier otro sistema óptico, el haz luminoso está limitado en extensión lateral por una o más de las lentes del sistema. Generalmente es una sola superficie la que limita los rayos y recibe el nombre de pupila del sistema. Un rayo que salga de un punto en el objeto fuera del eje óptico para llegar al punto imagen correspondiente, pasando por el centro de la pupila, se llama *rayo principal*. Obviamente, existe un rayo principal para cada punto del objeto. La *pupila de entrada* es la posición aparente que tiene la pupila real cuando se le observa desde el espacio del objeto. La pupila de salida es la posición aparente que tiene la pupila real cuando se le observa desde el espacio del ojo que mira a través del telescopio. Alternativamente, se puede decir que la pupila de entrada es la imagen de la pupila real, formada por los lentes del sistema óptico que preceden a esta pupila real. Análogamente, la *pupila de salida* es la imagen de la pupila real, formada por las lentes del sistema que siguen a esta pupila real. Es posible demostrar que si el diámetro de la pupila de entrada en un telescopio se representa por  $d_{ent}$  y el diámetro de la pupila de salida por  $d_{sal}$ , la amplificación  $M$  estará representada por

$$M = \frac{d_{ent}}{d_{sal}}$$

si el cociente  $\frac{d_{ent}}{M}$  es mucho mayor que el diámetro de la pupila del ojo, es decir, si el telescopio tiene un objetivo grande y una amplificación pequeña la pupila real y la de salida estarán sobre el plano del iris del observador. La pupila de entrada no está en el plano del objetivo, por lo que el diámetro de este último determina la amplitud de el campo visual. Es fácil ver que el diámetro del objetivo no tiene ninguna relación con el diámetro de la pupila de entrada.

## TIPO DE ABERRACIONES DE LOS TELESCOPIOS.

La calidad de la imagen en un telescopio está limitada por muchos factores, unos asociados *al telescopio*, otros *al medio en el que se propaga la luz*, es decir, a la *atmósfera*, y otros que dependen de la *naturaleza de la luz*, a continuación se describirán brevemente cada uno de estos factores

- Las que dependen del *telescopio* reciben el nombre de *aberraciones*, recuérdese que un sistema óptico ideal, ya sea telescopio o cualquier otro, tiene que refractar los rayos de un punto en el objeto a un punto correspondiente en la imagen. Según la posición del punto objeto en el campo, y el color de este objeto, se pueden clasificar las aberraciones ópticas más comunes de la siguiente manera:

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

- a) Aberración de esfericidad.
- b) Aberración de coma.
- c) Astigmatismo.

Dichas aberraciones se pueden manifestar, cualquiera que sea el color del objeto, incluso si es de un color puro, monocromático, por lo que en ocasiones reciben el nombre de aberraciones monocromáticas, a continuación se describen brevemente cada una de estas aberraciones.

**a) Aberración de esfericidad.**

Supóngase que el punto objeto está sobre el eje óptico y que no todos los rayos pasan por el punto imagen en el eje, para una lente y para un espejo. Este efecto es muy frecuente y, debido a que ocurre aún con superficies refractoras de forma esférica perfecta, recibe el nombre de aberración de esfericidad. La causa de esta aberración, los rayos reflejados en una superficie esférica o cilíndrica forman una figura característica, a la que se le da el nombre de cóustica.

Si una lente no tiene corregida su aberración de esfericidad, está se puede representar aproximadamente por:

$$Esf = A_{esf} D^3$$

Donde:  $A_{esf}$  es una constante que depende de cómo esté construida la lente y de la distancia del objeto a la lente. La magnitud de esta aberración aumenta con el cubo de su diámetro, por lo que la calidad de la imagen aumentaría drásticamente si se reduce la abertura mediante un diafragma, pero esto tiene el gran inconveniente de reducir la cantidad de luz que entra al telescopio.

*un telescopio con aberración de esfericidad, presenta las imágenes borrosas como si estuvieran desenfocadas, y no servirá ningún esfuerzo por ponerlas en foco. Si los objetos son estrellas, las imágenes aparecen como pequeñas manchas en lugar de puntos.*

**b) Aberración de coma.**

Si el objetivo tiene la aberración llamada coma, no todos los rayos tangenciales llegan a un punto en común en la imagen, y la imagen de la estrella, en lugar de ser puntual, tendría la apariencia de una pequeña coma, de donde proviene su nombre. En una lente simple que tenga aberración de coma, está se puede representar aproximadamente por:

$$Coma = A_{coma} D^2 h$$

Donde:  $A_{coma}$  es una constante cuyo valor depende de la configuración de la lente y de la posición del objeto. La coma aumenta linealmente con la distancia de la imagen al eje óptico, por lo que sólo es perceptible al observar objetos alejados de este eje, cuando el campo es amplio. Por otro lado, la magnitud de la coma también aumenta con el cuadrado del diámetro de la abertura del telescopio, por lo que al igual que en el caso de la aberración de esfericidad, ésta también disminuiría al reducir el diámetro del objetivo.

c) **Astigmatismo.**

Puede suceder que los rayos tangenciales y los sagitales tengan diferente foco, y entonces se dice que el sistema óptico tiene astigmatismo. El efecto es que la imagen es nítida y clara en el centro del campo, pero tanto más difusa y desenfocada cuanto más lejos observemos del eje óptico. Si el campo visual está formado por estrellas, las imágenes son circulares o alargadas, según la superficie focal que se enfoque visual o fotográficamente al hacer la observación.

El astigmatismo en una lente simple se puede representar aproximadamente por:

$$A_{ast} \frac{dh^2}{4f^2}$$

Donde:  $A_{ast}$  es una constante que depende de la configuración de la lente y de la posición del objeto. El astigmatismo crece linealmente con el diámetro del objetivo y con el cuadrado de la distancia de la imagen del eje óptico. Como en el caso de la coma, esta variación es lineal y el resultado es que para campos relativamente poco amplios la coma es la única que se detecta, pero a medida que crece el campo el astigmatismo alcanza a la coma, hasta superarla finalmente.

---

\*Nota:  $A_{esf}$  es la constante de la aberración de esfericidad,  $A_{coma}$  es la constante de la aberración de coma,  $A_{ast}$  es la constante de la aberración de astigmatismo.

## LA DIFRACCIÓN DE LA LUZ EN UN TELESCOPIO.

Recuérdese que el concepto de rayo de luz es solamente una idealización matemática que representa la realidad sólo en forma aproximada. La luz es una onda de naturaleza electromagnética y que difiere de una onda de radio solamente en su longitud de onda. Cuando una onda, ya sea de luz, de radio o acusto-mecánica como el sonido, pasa por una abertura, se produce un efecto llamado difracción. Al limitar la extensión lateral de la onda con la abertura el haz luminoso u onda cambia su dirección de propagación cerca de los bordes, abriendo el haz un poco en forma de abanico. La desviación angular del haz es tanto mayor cuanto menor sea la abertura del diafragma.

La pupila de un sistema óptico limita la extensión lateral del haz luminoso; por lo tanto, es inevitable que se produzca el fenómeno de la difracción como se muestra en la figura (3.7). Aunque según la óptica geométrica o de rayos la imagen sea perfectamente puntual, debido a este fenómeno no será en realidad así. La difracción hará que la imagen de una estrella supuestamente puntual sea en realidad un pequeño disco luminoso rodeado de unos anillos más débiles. Al primer anillo oscuro de esta imagen de difracción se le llama *anillo de Airy*, en honor a uno de los precursores en el estudio de este fenómeno.

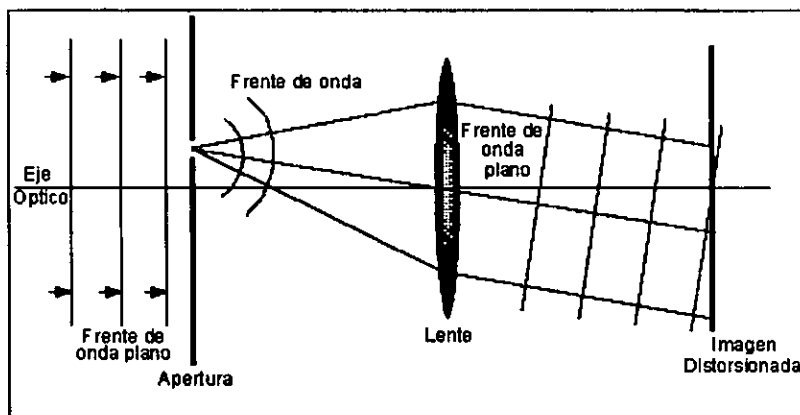
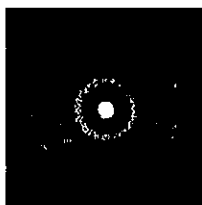
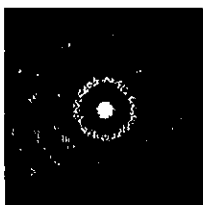
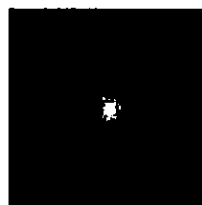


Figura (3.7) Fenómeno de difracción.

Las aberraciones se pueden corregir, pero la difracción no es posible eliminarla jamás; sólo se puede reducir su magnitud aumentando de tamaño la pupila, o sea, el diámetro de las lentes, el efecto de la difracción es muy pequeño comparado con el que casi siempre introduce aun pequeñas aberraciones.



Anillos de Airy.





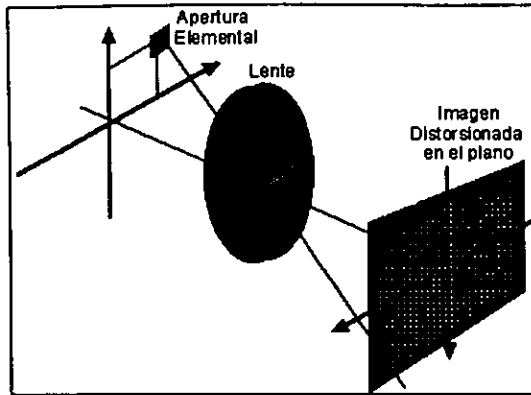


Figura (3.7) Difracción geométrica.

## LA LUZ COMO CLAVE DE LA ASTRONOMÍA.

La luz es la clave de la astronomía moderna. Todo lo que se conoce acerca del origen, composición, estructura, evolución y dinámica de los objetos celestes se deduce del tipo de luz que radian. La profundización teórica sobre el sentido de este testimonio luminoso y el desarrollo de nuevos y mejores instrumentos -como espectrógrafos, interferómetros, sistemas CCD y contadores de fotones- dio lugar, hace más de una década, al deseo de construir telescopios ópticos cada vez más grandes y precisos, para captar la mayor cantidad posible de luz y de esta manera, poder captar objetos celestes más distantes o de mayor brillo y obtener imágenes más nítidas de ellos. La gran mayoría de los grandes telescopios ópticos del mundo son del tipo reflector, constan, en esencia, de un amplio espejo cóncavo *primario* -cuyo diámetro se considera el del telescopio- que capta la luz de los objetos celestes; a mayor tamaño del espejo mayor captación de luz. El espejo *primario* refleja la luz que recibe hacia otro espejo de menor diámetro, llamado *secundario*, el cual puede ser de varios tipos, según la índole de la observación que se pretenda realizar. Este *secundario* refleja la luz, a su vez hacia un *ocular*, para que el astrónomo mire la imagen captada por el espejo *primario*, o hacia algún instrumento, para medir su intensidad y analizarla, como se muestra en la figura (3.8).

Los lugares factibles para la observación astronómica se mide por lo que en inglés se denomina *seeing*<sup>33</sup>, es decir, por el grado de turbulencia atmosférica. La atmósfera se compone de pequeñas celdas de aire que presentan ligeras diferencias de temperatura y densidad. Cuando la luz proveniente de las estrellas pasa a través de esas celdas sufre una deflexión o desviación, en función de la densidad del aire. En perfectas condiciones de *seeing* una estrella aparece como un punto de luz bien definido. Pero si el aire que se halla sobre el telescopio presenta turbulencias, y por ende marcadas diferencias en su densidad, la estrella se ve como un punto de luz difuso. "Se considera que los mejores sitios del mundo para la observación astronómica tienen un *seeing* promedio de 0.55 segundos de arco.

<sup>33</sup> El *seeing* se mide en segundos de arco, es decir, la luz de las estrellas sufre una deflexión menor que la millonésima parte de una circunferencia.

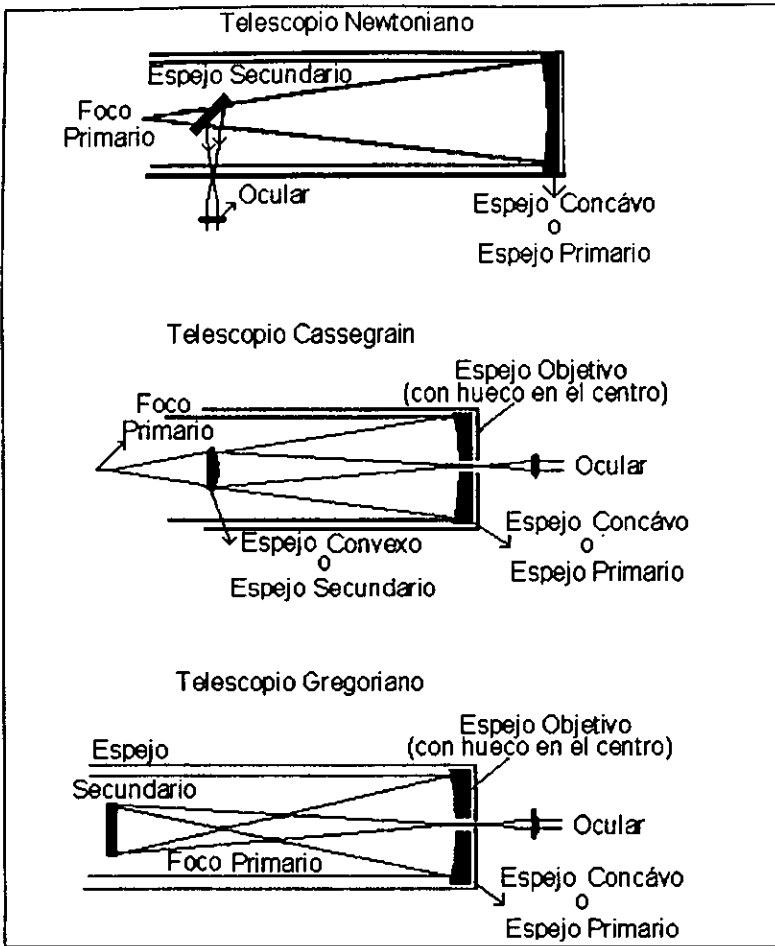


Figura (3.6). Telescopios reflectores.

## LA IMPORTANCIA DE UNA BUENA RESOLUCIÓN EN IMÁGENES ASTRONÓMICAS.

En astronomía, la única manera de estudiar los objetos astronómicos es a través de la luz que provienen de ellos. Pero como el flujo de fotones proveniente de estos objetos es muy pequeño, surge la necesidad colectar la mayor cantidad de fotones posible.

Los telescopios tienen la función de colectar la mayor cantidad de luz de un objeto en estudio para observar fuentes débiles y resolver estas fuentes. Mientras mayor sea el

diámetro de la pupila de entrada de el telescopio mayor será el área colectora de luz<sup>34</sup>, y también será mayor la resolución, es decir, la capacidad de detectar detalles en el objeto. Sin embargo, antes de llegar al telescopio, la luz tiene que pasar a través de un medio turbulento que es la atmósfera de la tierra. La turbulencia atmosférica impone un límite en la resolución de un telescopio astronómico independientemente del diámetro de este. Esto se debe a que la atmósfera tiene variaciones aleatorias de un índice de refracción la cual provoca un *ensanchamiento en la imagen debido a la naturaleza ondulatoria de la luz y a las dimensiones del espejo primario*, lo cual introduce variaciones aleatorias en la distribución de fase del frente de onda<sup>35</sup>. El frente de onda que incide en la pupila de el telescopio tiene entonces, distorsiones que varían en el tiempo figura (A). Por ende, contar con telescopios más grandes sin sistemas de corrección implica recibir más fotones pero no mayor resolución.

## EFFECTOS ÓPTICOS PRODUCIDOS POR LA ATMÓSFERA AL OBSERVAR LAS ESTRELLAS.

La atmósfera es la capa gaseosa que envuelve a la Tierra. La masa de gases que la forman es relativamente densa en las zonas bajas, pero esta densidad varia en sentido decreciente según se va ganando altura. Como consecuencia de ello se modifica la dirección de los rayos luminosos que se propagan en la atmósfera, fenómeno que recibe el nombre de refracción<sup>iii</sup>. Los rayos luminosos se desvían al acercarse a la vertical, ésta desviación es mas intensa, si es mayor la densidad de la capa de aire en la que penetran.

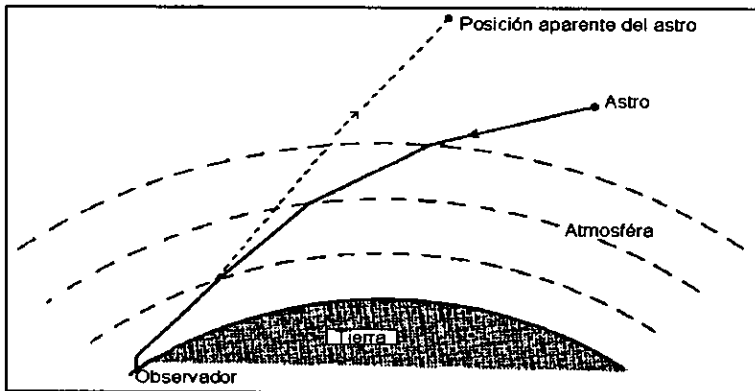


Figura (3.9) Fenómeno de Refracción. Cuando un astro esta próximo al horizonte acaba de salir o se va a poner, la refracción que experimenta el rayo luminoso produce la sensación de que dicho astro se encuentra en una posición más elevada.

Los rayos de luz procedentes de los astros se propagan en línea recta hasta que penetran en la atmósfera; pero a partir de entonces se desvían de tal forma que cuando

<sup>34</sup> lo que implica detectar fuentes mas débiles.

<sup>35</sup> la cual esta representada por una función de estructura, que indica el espacio estadístico de las deformaciones de estos frentes de onda planos.

<sup>iii</sup> Ver Apéndice 3. Turbulencia Atmosférica. (Fenómeno de Refracción).

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

llegan a nuestros ojos, se experimenta la sensación de que proceden de puntos distintos de los que realmente proceden. Todo ello se traduce en un levantamiento aparente de la posición que el astro ocupa realmente en el firmamento, como se puede ver en la figura (3.9).

La refracción es más notable cuando el astro se encuentra próximo al horizonte, es decir, acaba de salir o se va a poner ya que el rayo de luz tiene que atravesar una capa de atmósfera mas gruesa. Por este motivo se pueden ver los astros antes de que realmente aparezcan por el horizonte<sup>36</sup> y después de haber desaparecido<sup>37</sup>. Otro fenómeno que provoca la refracción de los rayos luminosos procedentes de las estrellas es el centelleo o titileo de las mismas. Las capas de aire se mueven unas con respecto a otras y, como consecuencia de ello, el fino rayo de luz procedente de una estrella oscila ligeramente. El resultado es que ese fino rayo de luz llega por un instante a los ojos de el observador y al instante siguiente deja de llegar, y así sucesivamente; es decir que en instantes sucesivos el observador ve y deja de ver la estrella, lo que produce una sensación de centelleo. Los planetas mas cercanos a la Tierra y, por supuesto, la luna y el Sol no centellean, porque al ser de mayor tamaño aparente producen unos haces de luz mas gruesos que las estrellas.

### *3.5 TURBULENCIA ATMOSFÉRICA.*

La atmósfera está en continuo movimiento y agitación debido a las diferencias locales de temperatura. Como las variaciones de temperatura ocasionan también variaciones en el índice de refracción, la imagen de una estrella se desenfoca y se mueve continuamente. El primero que se dio cuenta de la importancia de la turbulencia atmosférica o *seeing*<sup>38</sup>, como le llamaban los astrónomos, fue Christian Huygens en Holanda quién notó que las estrellas cintilaban y que la orillas de la Luna y los Planetas vibraban aun cuando la atmósfera estaba aparentemente calmada y serena.

Una consecuencia importante de *seeing* atmosférico es que aumenta el tamaño de la imágenes de las estrellas y además las desplaza constantemente de su posición, y con ello disminuye el poder resolutor del telescopio. Se puede imaginar la turbulencia atmosférica como celdas o globos de aire en continuo movimiento, con variaciones de una a otra en el índice de refracción. Cada celda tiene un diámetro entre 10 y 25 centímetros. Para telescopios con aberturas menores de 10 centímetros el efecto de la turbulencia es un movimiento continuo y al azar, con desenfoques ocasionales de la imagen. Esta es la razón de la cintilación de las estrellas cuando se ven a simple vista. Si la abertura del telescopio es mucho mayor de 20 centímetros, la imagen no se mueve, sino que su tamaño aumenta, y adquiere una forma que en promedio es circular, pero que cambia constantemente. El diámetro aparente de las estrellas debido a este efecto depende del lugar, el día y la hora, y puede variar desde unos cuantos segundos de arco hasta dos o tres décimos de segundo de arco en las montañas de los mejores observatorios astronómicos del mundo.

---

<sup>36</sup> en la salida.

<sup>37</sup> en la puesta.

<sup>38</sup> del inglés: visión.

Las no homogeneidades de índice de refracción asociadas a la turbulencia atmosférica provocan perturbaciones en un rayo de luz que se propaga a cualquier distancia a través de la atmósfera. Esta perturbación se manifiesta en una deformación de la forma del frente de onda y una variación de la intensidad del mismo. Si un haz colimado<sup>39</sup> pasa a través de la atmósfera y es colectado por una lente, forma una imagen cuya calidad es modificada por las perturbaciones producidas por la turbulencia atmosférica.

Los flujos turbulentos contrarios a los flujos laminares o estables tienen un campo aleatorio de velocidades. En una tubería, la transición de flujo laminar a flujo turbulento ocurre cuando el número de Reynolds excede un valor crítico determinado, que depende únicamente de la estructura geométrica del flujo. El número de Reynolds<sup>40</sup> está dado por

$$Re = \frac{V \cdot L}{\nu}$$

donde: V es la velocidad característica, L el tamaño característico del flujo, y  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido.

Si se tiene que la viscosidad del aire es del orden de  $\nu=15 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, la velocidad V=1 m/s, y el tamaño del flujo L=15 m, entonces el número de Reynolds es del orden de Re=10<sup>6</sup>. Cuando Re=10<sup>6</sup>, el medio está en la llamada "capa de frontera turbulenta", por lo tanto, en las condiciones anteriores el aire es un medio turbulento.

La turbulencia atmosférica aumenta rápidamente con la altura de la observación, por lo que las observaciones deben efectuarse lo más cerca del zenit, de ser posible.

## FLUCTUACIONES DE TEMPERATURA.

Según la teoría de Kolmogorov (Rodier, 1989), un flujo turbulento produce grandes remolinos a una escala L<sup>40</sup>, llamada turbulencia de escala externa. Estos remolinos producen otros más y más pequeños transfiriendo la energía de la turbulencia a escalas cada vez más pequeñas, siendo éste el carácter fractal de la turbulencia. A estos pequeños remolinos<sup>41</sup>, se le conoce como turbulencia de escala interna. Los flujos turbulentos producen flujos no homogéneos, debido a la mezcla *adiabática* de los estratos atmosféricos a diferentes temperaturas, lo que conduce a que la atmósfera sea un medio con una fluctuación aleatoria del índice de refracción.

Kolmogorov en el año de 1941, desarrolló su teoría para la turbulencia isotrópica local, usando *funciones de estructura*, siendo esta la herramienta más importante para analizar la estructura de la turbulencia a diferentes escalas, y es equivalente a la función de correlación de velocidades fluctuantes entre 2 puntos distintos. Dicha función de estructura tiene un comportamiento escalable y una conexión entre las funciones de distribución de las diferencias de velocidades. La turbulencia en un medio isotrópico local,

<sup>39</sup> luz proveniente de un objeto situado en un lugar tan lejano que todos los rayos de luz son paralelos.

<sup>iii</sup> Ver Apéndice 3. Turbulencia Atmosférica.

<sup>40</sup> entre 100 metros y hasta algunos kilómetros.

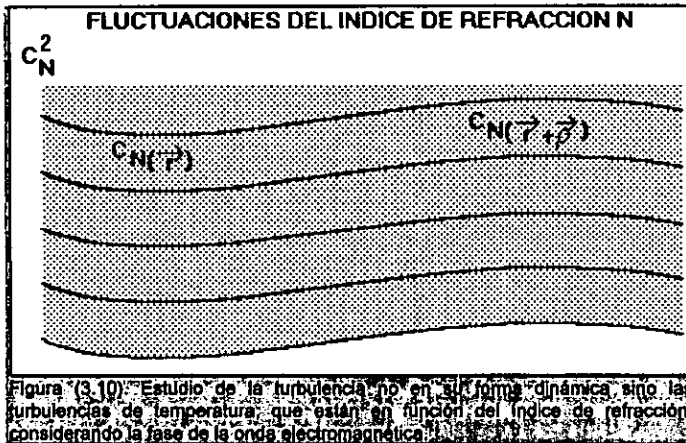
<sup>41</sup> en milímetros.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

implica que el promedio, de la distribución de probabilidad de las diferencias entre las velocidades relativas están dadas por:  $\Delta \bar{u}(\bar{r}) = \bar{u}(\bar{x} + \bar{r}) - \bar{u}(\bar{x})$ , la cual es independiente de  $\bar{u}(\bar{x})$ , además de ser independiente del tiempo, reflexiones, rotaciones y de las translaciones invariantes a cualquier escala. La función de estructura es por lo tanto, la correlación de las diferencias de velocidades en dos puntos. Una función de estructura de orden  $\rho$  se define como:

$$G_\rho(\bar{r}) = \langle \|\Delta \bar{u}(\bar{r})\|^\rho \rangle = \langle \|\bar{u}(\bar{x} + \bar{r}) - \bar{u}(\bar{x})\|^\rho \rangle$$

donde los  $\langle \rangle$  denotan un promedio sobre el tiempo, y se asume implícitamente que la disipación de energía se distribuye uniformemente.



## ESCALA EXTERNA E INTERNA DE LA TURBULENCIA DE KOLMOGOROV.

La escala interna de la turbulencia depende en conjunto por las propiedades moleculares de el aire, pero la escala externa depende de las circunstancias en las cuales la energía se suministra. Una mezcla en la escala exterior, produce un espectro total que puede reducirse en separaciones grandes, lo cual explica que la función de estructura de temperatura se encuentra favorecida por la regla de potencia  $r^{2/3}$ .

$$D_{N\theta}(\bar{\rho}) = \langle |N(\bar{r}) - N(\bar{x} - \bar{r})|^2 \rangle \propto \underbrace{C_N^2 r^N}_{\substack{4 < r < l_0; N=2/3}} \\ \text{KOLMOGOROV-TATARSKI}$$

formulo 2 hipótesis de similaridad las cuales se citan a continuación:

**"PRIMERA HIPÓTESIS DE SIMILARIDAD".**

- Para la turbulencia en un medio isotrópico local, las distribuciones de la velocidad relativa a cualquier escala son indiferentes y están determinadas por la viscosidad cinemática  $\nu$  y la disipación de energía promedio  $\langle \varepsilon \rangle$ , por unidad de tiempo y por unidad de masa, suponiendo que todas las distancias  $\bar{r} = |\bar{r}|$  por más pequeñas que sean, se comparen con las macroescalas  $r \ll \Lambda$ .

**"SEGUNDA HIPÓTESIS DE SIMILARIDAD".**

- La distancia  $r$  (para una  $r$  grande) se compara con el rango de disipación, tal que cuando  $r$  ésta en el rango inercial  $\eta \ll r \ll \Lambda$ , entonces las distribuciones de velocidad relativa son inicuamente determinadas por la cantidad  $\langle \varepsilon \rangle$  y estas no dependen de  $\nu$ .

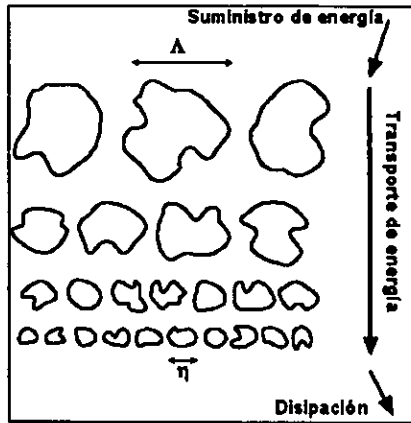


Figura (3.11). En los remolinos de tamaño  $\Lambda$  la energía se transmite por medio de remolinos a escalas cada vez más pequeñas, hasta que esta se disipa, por medio de calor en los remolinos más pequeños de tamaño  $\eta$ .

el parámetro  $\Lambda$ , es la estructura externa y depende del tamaño del sistema turbulento, en cambio el parámetro  $\eta$ , es la estructura interna de los remolinos pequeños, el corte de escala, se determina por viscosidad de disipación. De lo anterior, el intervalo de escala esta dado por  $\eta \ll r \ll \Lambda$  conocido como *intervalo inercial*.

Por otro lado, la turbulencia fractal homogénea está en función de la dimensión de autosimilaridad  $D$ , Mandelbrot en el año de 1974, caracterizo la turbulencia intermitente, bajo una serie de exponentes en una ecuación espectral, que representa el espectro de la velocidad turbulenta en términos de varianzas, de lo anterior se sabe que el carácter fractal de la turbulencia homogénea, con una velocidad  $v$  en el punto  $x$  satisface la expresión siguiente

$$\langle [v(x) - v(x+r)]^2 \rangle = |r|^{2+\beta}$$

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

donde  $B = (3-D)/3$ . Para el caso, de la turbulencia homogénea de Taylor,  $D=3$ , y entonces  $B=0$ , encontrando como punto de partida el exponente clásico de Kolmogorov  $2/3$ . De lo anterior, una forma de describir el campo aleatorio de las fluctuaciones de temperatura es en términos de su función de estructura

$$D_T(\bar{\rho}) = \langle |\phi(\bar{r} + \bar{\rho}) - \phi(\bar{r})|^2 \rangle$$

la cual expresa la varianza de la temperatura entre dos puntos separados una distancia  $\rho$ . La teoría de Kolmogorov, considera que el campo aleatorio es homogéneo e isotrópico y el intervalo inercial de la función de estructura depende solamente de que  $\rho = |\rho|$ . La función de estructura de Kolmogorov  $D_T = (\bar{\rho})$  es usualmente escrita de la siguiente manera

$$D_T(\bar{\rho}) = C_T^2 \rho^{\frac{2}{3}}$$

donde:  $C_T$  es conocida como la constante de estructura de las fluctuaciones de temperatura y es la medida de la intensidad local de las fluctuaciones de temperatura.

### 3.6 LA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA DE FASE.

La teoría de la turbulencia de Kolmogorov, predice que la correlación espacial de la turbulencia decrece proporcionalmente a una potencia de dos tercios de la separación espacial; Fried (en 1965), muestra que la función de estructura de fase puede ser escrita como

$$D(r) = Ar^{\frac{5}{3}} \tag{3.3}$$

La ecuación anterior es exacta solamente para trayectorias cortas de propagación, donde  $A$  es una constante determinada por el camino óptico, la longitud de onda y las condiciones ambientales particulares, Fried determina que  $A$  puede ser escrita como

$$A = 2.91 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \int d\Lambda C_N^2 \tag{3.4}$$

Donde:  $\lambda$  es la longitud de onda.

$\Lambda$  es una variable que define una longitud a lo largo de la trayectoria de propagación.

$C_N$  es la constante de estructura del índice de refracción para la turbulencia atmosférica.  $C_N^2$  puede ser escrito en términos de la varianza del índice de refracción atmosférico  $A$ .

La escala externa de la turbulencia  $L_0$  se define aquí como la distancia en la cual la correlación de la turbulencia decrece a la mitad del valor máximo. La expresión es



$$C_N^2 = BL^{\frac{-2}{3}} \quad (3.5)$$

De las siguientes expresiones dadas por Fried (1965), se obtienen valores "razonables" para B y  $L_0$

$$B = 6.7 \times 10^{-4} \exp \frac{-h}{3200} \quad (3.6)$$

$$L_0 = 2h^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

Donde: h es la altura de la capa atmosférica correspondiente a la turbulencia de escala externa.

Sustituyendo (3.6) y (3.7) en (3.5) y (3.4) se llega a un valor consistente de A.

### 3.7 EL PARÁMETRO DE FRIED.

Fried introduce el parámetro  $r_0$  que corresponde al diámetro de una porción del frente de onda atmosférico, en la cual el tamaño de las aberraciones provocadas por la turbulencia atmosférica es tal que la imagen formada con un telescopio hipotético del mismo diámetro  $r_0$  solamente estaría limitada por difracción.

Para que esto suceda, la variación máxima en el frente de onda debe ser aproximadamente de 1/6 de la longitud de onda. Los valores típicos de  $r_0$ , para longitudes de onda en el visible y una propagación vertical de la trayectoria óptica a través de la atmósfera, son del orden de los centímetros.

Fried, reemplaza la constante A con el parámetro  $r_0$  y lo define como

$$r_0 \approx \left( \frac{6.88}{A} \right)^{\frac{3}{5}}$$

Quedando la función de estructura en términos de  $r_0$  como

$$D(r) = 6.88 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}$$

### 3.8 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS ESTADÍSTICAS DE UN FRENTE DE ONDA DISTORSIONADO.

La parte más importante de un frente de onda distorsionado por la turbulencia atmosférica es el titileo aleatorio de un frente de onda plano. La propagación de las ondas a través de un medio no homogéneo aleatorio, produce frentes de onda deformados. El espacio estadístico, de esta deformación se describe por una cantidad llamada la función de estructura de fase.

Sean los puntos  $x$  y  $x'$ , la fase de variación asociada con la deformación se denotan por  $\phi(x)$  y  $\phi(x')$ , respectivamente entonces la función de estructura de fase se define como

$$D(r) = \langle [\phi(x) - \phi(x')]^2 \rangle$$

Donde:  $r = |x - x'|$   
 $\langle \rangle$  Denota un promedio total.

La definición anterior hace hincapié de manera implícita en la isotropía y homogeneidad de las deformaciones estadísticas, donde  $D(r)$  representa todas las estadísticas de la fase de fluctuación<sup>42</sup>, de esta manera, se puede obtener información con respecto a la "forma" de el frente de onda deformado de  $D(r)$ .

### 3.9 ESTADÍSTICAS ATMOSFÉRICAS.

La propagación de una onda a través de la atmósfera ha sido discutida en la sección anterior, y la función de estructura para la fase de fluctuación esta dada según Noll (véase [Robert J Noll 1976]) por

$$D_{\phi}(r) = 2 \left[ \langle \phi^2(r_1) - \langle \phi(r_1) \phi(r_1 + r) \rangle \rangle \right]$$

Para la turbulencia de Kolmogorov  $D_{\phi}(r)$  puede ser escrita en términos de la longitud de correlación ( $r_0$ ) introducida por Fried como:

$$D_{\phi}(r) = 6.88 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (3.8)$$

---

<sup>42</sup> Las fluctuaciones de la función de estructura de fase tiene una distribución Gaussiana, es decir,  $D(r)$  se describe completamente a partir de una distribución Gaussiana excepto por un valor medio y por un segundo momento, como  $D(r)$  es el segundo momento para la fluctuación de fase diferencial, donde la diferencia tiene que ser cero, se concluye que  $D(r)$  especifica de manera completa las estadísticas de las fluctuación. de la función de estructura de fase (ver Apéndice 1. La Función de Estructura de Fase).

La función de estructura esta relacionada con el espectro de Wiener,  $\Phi(k)$ , por

$$D_{\mu}(r) = 2 \int dk \Phi(k) [1 - \cos(2\pi kr)]$$

Pero usando la ecuación (3.8) y la integral

$$\int_0^{\infty} x^{-p} [1 - J_0(bx)] dx = \frac{\pi b^{p-1}}{2^p \left[ \Gamma \left( \frac{p+1}{2} \right) \right]^2 \operatorname{sen} \left[ \pi \frac{p-1}{2} \right]}$$

Se encuentra según (Noll, 1976), la siguiente expresión:

$$\Phi(k) = \left( \frac{0.023}{r_0^{\frac{3}{5}}} \right) k^{-\frac{11}{3}}$$

La cual es el espectro de Wiener, de la fase de fluctuaciones debida a la turbulencia de Kolmogorov.

# 4

## Diseño del Simulador Atmosférico.

*"Nuestra capacidad de creación de software de computación no está a la par con la evolución del hardware. Se necesita una revolución industrial en el software. Es probable que esta revolución provenga de las técnicas orientadas a objetos, combinadas con herramientas CASE, generadores de código, programación visual y desarrollo basado en depósitos (repository-based development). La meta es maximizar la reutilización de código, así como construir y almacenar objetos complejos."*

JAMES MARTÍN.

### INTRODUCCIÓN:

Una de las preocupaciones actuales más urgentes de la industria de la computación es la de crear software lo más pronto posible y de más bajo costo. Para hacer un buen uso del poder cada vez mayor de las computadoras, se necesita un software de mayor complejidad y también es necesario que dicho software sea confiable. La alta calidad es esencial en el desarrollo del software, ya que una calidad pobre es un desperdicio de dinero y tiempo.

Las técnicas orientadas a objetos permiten que el software se construya a partir de objetos de comportamiento específico. Los propios objetos se pueden construir a partir de otros, que a su vez pueden estar transformados por otros objetos. Esto recuerda a una maquinaria compleja, construida por partes, subpartes, etc. La frase "orientado(a) a objetos" se ha vuelto muy popular en los últimos años, se habla de lenguajes orientados a objetos, Programación Orientada a Objetos<sup>43</sup>, etcétera. Sin embargo, el concepto surgió hace 25 años con la creación del lenguaje Simula; su redescubrimiento y creciente popularidad se deben a C++, lenguaje creado por Stroustrup y basado en un lenguaje ampliamente utilizado como es C.

A continuación se describirá en breve que es lo que se entiende por POO, así como los conceptos generales de dicho modelo y en que consiste la Programación en Delphi 1.0 o como se le conoce también Delphi 16 bits. Por otro lado, se describirá como esta constituido el simulador de frentes de onda perturbado.

---

<sup>43</sup> De aquí en adelante la frase Programación Orientado a Objetos se reemplazará por POO.

## 4.1 ¿ QUE ES LA PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS?

### ALGO MAS QUE UN OBJETO.

Cuando alguien pregunta a una persona que utiliza la POO, ¿qué es OBJETO?, muy posiblemente se encontrarán con la siguiente respuesta:

"Un objeto es cualquier cosa que usted vea, un libro, una persona, una silla, una computadora, etc."

Probablemente usted quede más confundido que antes de la respuesta, puesto que un libro, una persona, una silla, un computadora realmente no aclara nada sobre el profundo concepto que hay detrás de lo dicho anteriormente.

Si alguien me preguntara ¿qué es un OBJETO?, mi respuesta sería la respuesta anterior. Y a lo mejor sigue confundido pero esa es la respuesta más sencilla si nos atenemos a la definición de objeto dada a continuación.

**OBJETO:** Un objeto es cualquier cosa, real o abstracta. Cada objeto tiene una identidad única que lo distingue e independiente de cualquiera de sus características y a la vez cada objeto ofrece una o más operaciones como en el caso de un televisor que se puede usar como monitor de una computadora.

Ahora, se tratará de juntar las dos respuestas con el fin de tratar de dar solución a la pregunta de objeto. Como se explicó un objeto es cualquier cosa, pues bien, si es cualquier cosa imaginemos un televisor. En este caso es algo real, pero nos pudimos haber imaginado algo abstracto (Ej. Un número complejo). Si tenemos dos televisores exactamente idénticos, estos serán dos objetos<sup>44</sup>. Cada uno en distintos lugares del espacio y no importa lo que le suceda al otro seguirán siendo dos objetos independientes. Es todo lo que necesitamos saber para comprender que un televisor es un objeto.

Internamente el televisor tiene algunos circuitos básicos de funcionamiento, un receptor, un filtro, etc. Posiblemente no sabemos como están contruidos estos circuitos, desde el punto de vista de objetos, por lo cual se dice que está encapsulado, solo se sabe de su existencia porque al encender el televisor, éste da una imagen (si se encuentra en buenas condiciones el televisor), se pueden sintonizar programas, etc.,. Esta es la manera de enviar un mensaje a los circuitos para que éstos se ajusten y dejen pasar únicamente la señal del programa deseado. La comunicación con los objetos se hace a través de mensajes. El modelo del televisor (con sus circuitos) puede ser utilizado para diseñar un nuevo aparato de recepción, el principio de funcionamiento de los televisores es único, de manera que puede haber una reutilización de su tecnología para crear nuevos aparatos. Por último un televisor puede ser usado como monitor de una computadora, un proyector de cine de un VHS, etc., en términos de objetos esto se conoce como polimorfismo.

---

<sup>44</sup> no se necesita distinguirlos con un código o una marca, sólo son dos objetos diferentes.

#### 4.1.1 CONCEPTOS GENERALES EN EL MODELO ORIENTADO A OBJETOS.

Los conceptos generales más utilizados en el *modelo orientado a objetos* son: **abstracción, encapsulación y modularidad**, que a continuación se describen.

**Abstracción**, es la descripción o especificación simplificada de un sistema que hace énfasis en algunos detalles o propiedades y suprime otros. Una buena abstracción es aquella que *hace énfasis en los detalles significativos y suprime los irrelevantes*. La abstracción *debe enfocarse más en qué es un objeto y qué hace antes de pensar en la implementación*. Por ejemplo, un automóvil puede abstraerse como un objeto que sirve para desplazarse a mayor velocidad sin importar cómo lo haga. Una característica de la abstracción es que un objeto puede abstraerse de diversas formas, dependiendo del observador. Así el automóvil que se mencionaba puede ser visto como un objeto de colección por un coleccionista, una herramienta de trabajo por un corredor profesional, una mercancía por un vendedor, etcétera.

Al **encapsular**, u ocultar información se separan los aspectos externos de un objeto (los accesibles para todos) de los detalles de implementación (los accesibles para nadie). Con esto se trata de lograr que al tener algún cambio en la implementación de un objeto no se tengan que modificar los programas que utilizan tal objeto. Siguiendo con el ejemplo del automóvil, se sabe que existen diversos mecanismos para que funcione éste en particular se tiene el sistema de frenado que todo mundo sabe que sirve para detener el auto al pisar el pedal del freno, pero sólo el mecánico sabe los detalles de implementación. Por otro lado, si en algún momento se cambia el tipo de frenos para el conductor es transparente.

La **modularidad**, consiste en dividir un programa en partes llamadas *módulos*, *los cuales puedan trabajarse por separado*. En términos de programación, *los módulos pueden compilarse por separado y la división no depende de cierto número de líneas sino es una división en términos de integrar en un módulo un conjunto de procedimientos relacionados entre sí junto con los datos que son manipulados por tales procedimientos*. El objetivo de la modularidad es reducir el costo de elaboración de programas al poder dividir el trabajo entre varios programadores. Por ejemplo, un automóvil está constituido por un conjunto de módulos tales como un sistema eléctrico, el mecánico y el de frenado. Cada módulo se trabaja por separado y el especialista sólo conoce la forma en que se relaciona su módulo con los otros pero no tiene porque saber los detalles de funcionamiento de otros módulos o sistemas.

Estos conceptos no son exclusivos de la POO pues se han desarrollado desde la programación estructurada sólo que en ésta se pueden omitir, desde luego bajo responsabilidad del programador, pues el hacerlo lleva a tener grandes programas en un solo archivo y sin estructura alguna, lo cual causa grandes pérdidas de tiempo al desear modificar tal programa. La POO no puede lograrse sin hacer uso de los mecanismos mencionados.

## 4.1.2 ALGUNOS CONCEPTOS GENERALES EN LA PROGRAMACIÓN ORIENTADO A OBJETOS.

En cuanto a *programación*, las más comunes son: **objeto**, **método**, **herencia** y **polimorfismo**. A pesar de que el punto central en esta nueva metodología de programación es el concepto de objeto, resulta difícil tratar de definirlo. En un diccionario se puede encontrar la siguiente definición: Un **objeto** es cualquier cosa que se ofrece a la vista y afecta los sentidos. Es una entidad tangible que exhibe algún comportamiento bien definido. Sin embargo, en términos de programación, un objeto no necesariamente es algo tangible (por ejemplo: un proceso). Lo que sí puede decirse de todo objeto es que tiene estado, comportamiento e identidad.

El **estado**, de un objeto abarca todas las propiedades o características distintivas del mismo y los valores de cada una de estas propiedades. En términos de programación, puede decirse que las propiedades son las variables que sirven para describir tal objeto. El **comportamiento**, es la forma como actúa o reacciona un objeto en términos de cambios de estado, envío y recepción de mensajes. Está formado por la definición de las operaciones<sup>45</sup> que puede realizar este objeto. Los tipos más comunes de operaciones, en POO de métodos, son: modificar, seleccionar, iterar, construir y destruir. El conjunto de operaciones que un objeto puede realizar sobre otro, se conoce como protocolo.

La **identidad**, es la propiedad de un objeto que lo distingue de todos los demás. En un programa, normalmente se trata de un identificador.

En resumen, un **objeto** es un conjunto de localidades en memoria con un conjunto de subprogramas que en POO se conocen como **métodos** que definen su comportamiento y un identificador asociado. Lo más común es que el programa tenga más de un objeto con propiedades y comportamiento similares, así que en lugar de repetir la definición de un objeto se agrupan las características comunes de los objetos en **una clase**. La clase representa la esencia del objeto y el objeto es una entidad que existe en el tiempo. El objeto se define también como instancia de la clase al que pertenece. La clase tiene dos vistas: La exterior, en la cual se hace énfasis en la abstracción y se oculta la estructura y secretos de comportamiento; y la vista interior o implementación. Aquí se nota que es indispensable hacer uso del concepto de encapsulación. Por lo tanto, un objeto es cualquier cosa que se ofrece a la vista y afecta los sentidos. Es una entidad tangible que exhibe algún comportamiento bien definido. En términos de programación, un objeto no necesariamente es algo tangible<sup>46</sup>. Lo que sí puede decirse de todo objeto es que tiene estado, comportamiento e identidad.

La **herencia**, es la contribución más importante de la POO, pues mediante este mecanismo es posible lograr la principal meta de la POO que es la reutilización de código. La herencia permite proporcionar una jerarquía de clases. En tal jerarquía, algunas clases son subordinadas a otras llamadas subclases. Una subclase define el comportamiento de un conjunto de objetos que heredan algunas de las características de la clase padre, pero

---

<sup>45</sup> funciones y procedimientos.

<sup>46</sup> por ejemplo: un proceso.

adquieren características especiales no compartidas por el padre, en este sentido se dice que la subclase es una especialización de la clase padre. La herencia define relaciones entre clases, donde una clase comparte la estructura o comportamiento definidos en una o más clases.

El **polimorfismo**, es la capacidad de tener métodos con el mismo nombre pero que su implementación sea diferente. En la vida diaria se presenta el siguiente ejemplo de polimorfismo: al tratar de frenar un vehículo siempre se debe oprimir el pedal del lado izquierdo y el vehículo se detendrá sin importar si los frenos son de tambor o de aire. Una forma de polimorfismo en POO, se da al usar un operador para aplicarlo a elementos de diferente tipo. Por ejemplo, al pretender sumar enteros, reales o complejos, se emplea el mismo símbolo +, esto se conoce como sobrecarga de operadores. En este caso el compilador se encarga de determinar cual es el método que se está invocando de acuerdo a los objetos involucrados en la operación, así como hay sobrecarga de operadores, también la hay de métodos.

## 4.2 INTRODUCCIÓN A DELPHI.

### ¿Qué es Delphi ?

Delphi es un componente basado en aplicaciones de desarrollo ambientales, soportando desarrollos de alta eficiencia en Microsoft Windows contemplando aplicaciones con un mínimo de código. Los requerimientos de programación para Windows y para que el usuario son encomendados a la librería de clases de Delphi, para que de forma menos complicada programe tareas que pueden ser repetitivas.

A Delphi se le considera como una poderosa herramienta de desarrollo de programas que permite la creación de aplicaciones para Windows 3.1/3.11, 95 y NT. Las aplicaciones pueden colocarse de manera sencilla en la pantalla según el principio de módulos. Para ello se dispone de una paleta, dotada de una gran variedad de componentes, algo así como los bloques de construcción de cada programa. Esta paleta es denominada por Borland VCL<sup>47</sup>. Con Delphi es posible crear de manera sencilla nuevos componentes que se pueden incorporar en la paleta con los componentes ya existentes y que pueden ser utilizados de la misma forma. La VCL puede estructurarse libremente y así adaptarse totalmente a las situaciones propias de programación.

Delphi dispone del Object Pascal, un lenguaje de programación muy poderoso que esta sin duda a la altura del C++. Este lenguaje surge a partir del desarrollo del Borland Pascal 7.0. El Object Pascal es totalmente compatible con el Borland Pascal 7.0, lo que permite que programas desarrollados con este último puedan ser convertidos a Delphi. Las aplicaciones terminadas quedan disponibles como archivos ejecutables (EXE) que pueden utilizarse solos y sin bibliotecas adicionales, y como consecuencia, la velocidad con la que pueden ejecutarse dichos programas es muy rápida.

---

<sup>47</sup> Visual Component Library (VCL) = Biblioteca de componentes visuales.



Delphi es una herramienta Two-Way-Tool, es decir, una herramienta de dos formas: una de forma visual en la pantalla, por medio de la función Arrastrar y colocar (Drag & Drop), y la otra es a través de la programación convencional, escribiendo el código. Ambas técnicas pueden utilizarse de manera alternativa y simultánea. Finalmente proporciona diseño de herramientas tales como aplicaciones y patrones de formas, y de esta manera se puede crear y probar aplicaciones prototipo. Por ende, usando el conjunto de componentes en Delphi y de manera intuitiva el código generado, se puede hacer de los prototipos, aplicaciones robustas que sean necesarias para determinadas tareas.

## PROGRAMANDO CON OBJETOS EN DELPHI.

La POO es una extensión natural de la programación estructurada. La POO requiere que los programadores conserven un estilo muy práctico de programación, para que desarrolle de manera fácil y rápida las aplicaciones. El resultado de este estilo de programación es un código limpio y fácil de modificar al darle mantenimiento. Una vez que se crea un objeto para una aplicación, los distintos programadores pueden usar el mismo objeto en otras aplicaciones. De esta manera, rehusando y reutilizando el objeto se pueden, en gran parte, hacer más cortas las aplicaciones y los desarrollos.

### ¿Qué es un objeto en Delphi?

Un objeto es un tipo de dato que se encuentra relacionado con datos y código. Antes, en POO código y datos eran manejados como elementos separados.

Si se piensa en el trabajo que involucra armar una bicicleta, donde si se tienen todas las partes de ésta y una lista de instrucciones para el proceso de ensamblado, esto sirve de analogía para escribir un programa en Windows empezando de cero o de la nada, sin usar objetos. Delphi es una herramienta que proporciona un encabezado inicial análogo al proceso de "construcción y ensamblado de la bicicleta" ya que ésta proporciona algunas de las "partes de la bicicleta preensamblada".

Se debe entender que un Objeto Pascal es un registro en este mismo código, constituido de varios campos que contienen datos y cada uno de estos campos tienen sus propios tipos de datos. Los registros facilitan la referencia a una colección relacionada de una variedad muy amplia de elementos de datos como una entidad.

Los objetos son también colecciones de elementos y datos, es decir un todo, y los registros tienen campos, de los cuales cada uno tiene su propio tipo de datos. Sin embargo, los registros también contienen código -procedimientos y funciones- que actúa en el contenido de los datos en el campo de los objetos, donde estos procedimientos y funciones se denominan *métodos*. De tal manera que se puede observar de los registros que los objetos ahí contenidos tienen propiedades. Las propiedades de los objetos Delphi tienen valores por default, estos valores se pueden modificar en tiempo de diseño o de ejecución con la finalidad de reflejar las necesidades de la aplicación optimizando, de esta manera el escribir código objeto, de esta manera si se busca el valor de una propiedad para cambiar en tiempo de ejecución su valor se necesita escribir poco código.

### 4.3 DESCRIPCION DEL FUNCIONAMIENTO DEL SIMULADOR DE FRENTE DE ONDA PERTURBADOS.

El simulador de frentes de onda perturbado consta de 3 módulos los cuales se citan a continuación: el módulo padre que contiene los siguientes módulos: el modulo graficador y el módulo editor a los cuales se le puede llamar módulos hijos.

*Módulo padre:* es la pantalla de inicio donde se encuentran todas las aplicaciones tales como el módulo graficador y el módulo editor de textos figura (4.1).

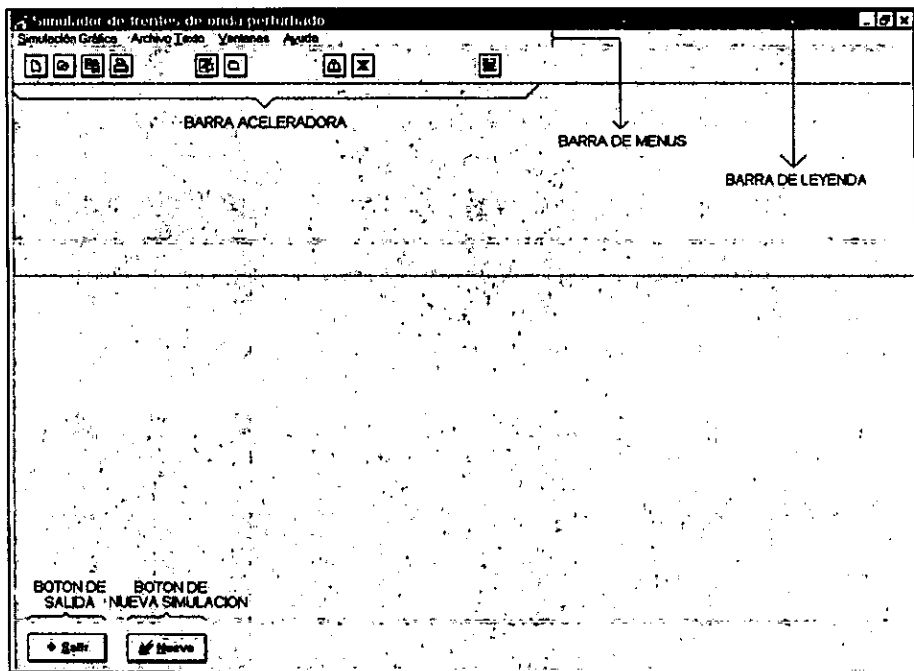


Figura (4.1) Muestra el modulo padre, el cual es el programa de inicio de la simulación de los frentes de onda perturbados atmosféricamente.

*Módulos hijos:* son dos aplicaciones que son: el graficador y el editor de textos, como se puede observar en la figura (4.2).

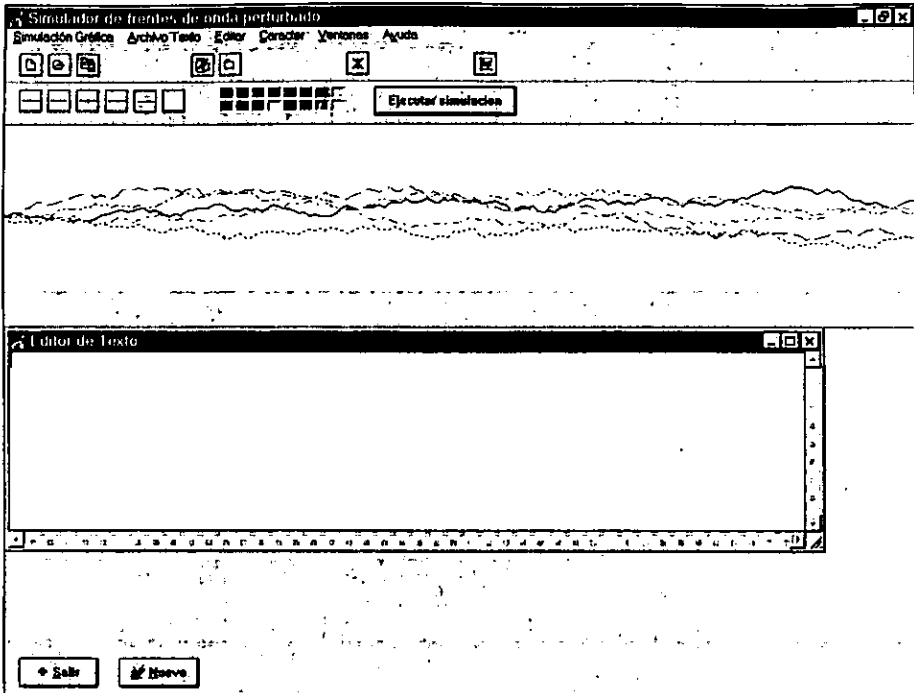


Figura (4.2) Muestra los dos módulos hijos, el módulo graficador que muestra algunas simulaciones del frente de onda perturbado atmosféricamente con distintos tipos de líneas y colores; y el módulo editor, que permite mediante un editor de texto realizar observaciones de las distintas simulaciones ejecutadas.

#### La barra de Leyenda.



La barra de leyenda, o de título es la barra horizontal situada en la parte superior de la pantalla; e indica el nombre del *Simulador de frentes de ondas perturbados* véase figura (4.1).

#### La barra de menús.



La barra de menús ofrece las herramientas necesarias para desarrollar tareas específicas, tales como: El menú *Simulación Gráfica* que contiene las ordenes para trabajar con las simulaciones gráficas de frentes de onda perturbados. El menú *Archivo Texto* contiene herramientas para comenzar a capturar observaciones acerca de las simulaciones numéricas realizadas, cabe destacar que cuando se activa alguna opción de dicho menú, invoca a que aparezcan otras dos opciones sobre la barra de menús figura (4.3) los

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

cuales son: el menú **Editar** que contiene las herramientas de edición que permiten realizar una mejor presentación de los datos u observaciones que se capturan en el documento actualmente abierto en el procesador de textos; el menú **Carácter** permite realizar modificaciones relacionadas con la captura de datos en el editor de Texto. El menú **Ventanas** permite organizar algún(os) documentos que se encuentren abiertos en el editor de textos. El menú **Ayuda** proporciona información acerca de las opciones que presenta el simulador de frentes de onda perturbados. Lo anterior puede observarse en la figura (4.1).



Figura (4.3)

A continuación se describirá de manera breve las opciones que contiene cada opción de la barra de menús

- **Simulación gráfica.**

Opción	Función
<b>Nuevo</b>	crea una nueva área donde se dibujará una nueva simulación de como se perturba un frente de onda plano por el método del desplazamiento del punto medio.
<b>Abrir</b>	permite llamar una simulación ya realizada o ejecutada.
<b>Almacenar</b>	guarda una simulación ya efectuada con extensión .bmp
<b>Almacenar como</b>	permite guardar con otro nombre una simulación ya almacenada.
<b>Salir</b>	permite salir del simulador de frentes de onda.

Estas opciones se pueden observar en la figura (4.4).

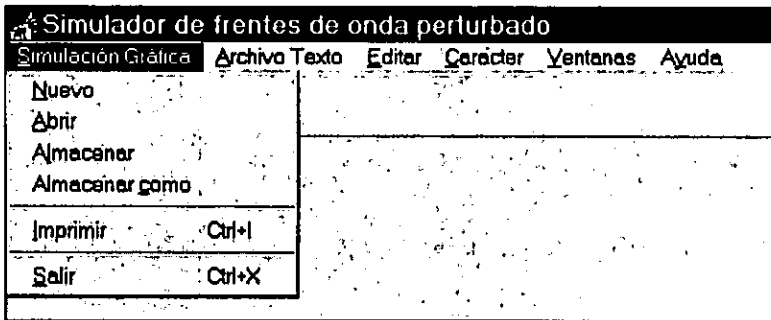


Figura (4.4)

- **Archivo Texto.**

Opción	Función
<b>Nuevo</b>	Genera una plantilla para un nuevo documento en el editor de textos.

- Abrir** Abre un documento ya existente con extensión .txt
- Cerrar** Cierra el actual documento en uso, con la peculiaridad de que si el documento no ha sido guardado antes de los últimos cambios, entonces antes de cerrar, se le preguntara al usuario si desea salvar este.
- Guardar** Almacena el documento que ha sido elaborado (observaciones de las simulaciones efectuadas) con extensión .txt
- Guardar Como** Almacena con otro nombre un documento ya existente con extensión .txt
- Imprimir** Esta opción permite imprimir las observaciones o anotaciones que se realizan sobre las diferentes simulaciones efectuadas.
- Imprimir** Esta opción imprime la configuración de las características de impresión. (tamaño de papel, impresión horizontal o vertical. Etc.,)
- Setup**
- Salir** Esta opción permite salir del editor de textos, pero antes sino se han salvado los cambios en algún documento del editor, preguntara si se desean almacenar estos.

Estas opciones se pueden observar en la figura (4.5).

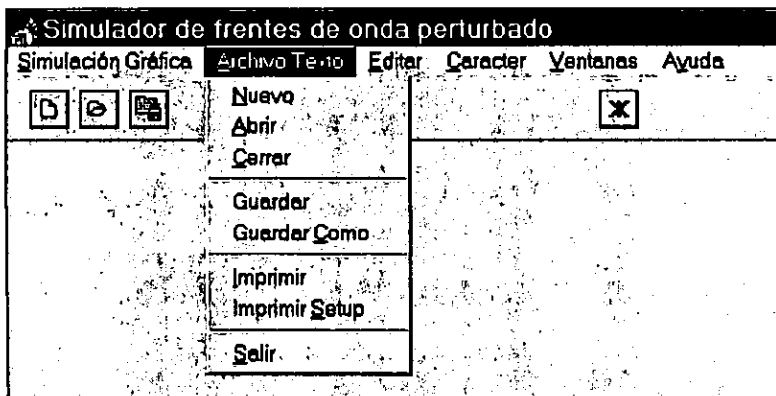


Figura (4.5)

- **Editar.**

Opción	Función
<b><u>Copiar</u></b>	hace una copia del texto seleccionado y lo guarda en el portapapeles para que posteriormente sea acupada en algún lugar del documento.
<b><u>Cortar</u></b>	realiza un corte del área seleccionada de texto para que esta sea pegada posteriormente en algún lugar del documento.
<b><u>Pegar</u></b>	coloca texto que previamente ha sido copiado o cortado donde uno desee que aparezca éste.
<b><u>Borrar</u></b>	borra el texto que ha sido seleccionado o marcado.
<b><u>Seleccionar Todo</u></b>	selecciona todo el documento que esta actualmente en uso en el editor de textos.

Estas opciones se pueden observar en la figura (4.6).

*Aproximación Fractal de Perturbaciones  
Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

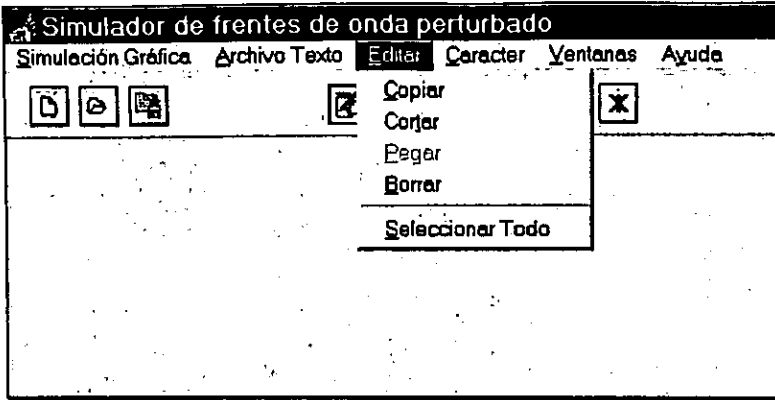


Figura (4.6)

• Carácter.

Opción	Función
<b><u>Izquierdo</u></b>	Alinea el texto en relación al lado izquierdo del actual documento en uso.
<b><u>Derecho</u></b>	Alinea el texto en relación al lado derecho del actual documento en uso.
<b><u>Centrado</u></b>	Alinea el texto en relación al centro del documento del actual documento en uso .
<b><u>Word Warp</u></b>	Establece unas barras de Scroll tanto horizontal como vertical para poder observar el contenido del documento.
<b><u>Letra</u></b>	Permite cambiar la fuente del texto marcado tipo de letra, estilo y tamaño de algún(nos) párrafos del documento.

Estas opciones se pueden observar en la figura (4.7).

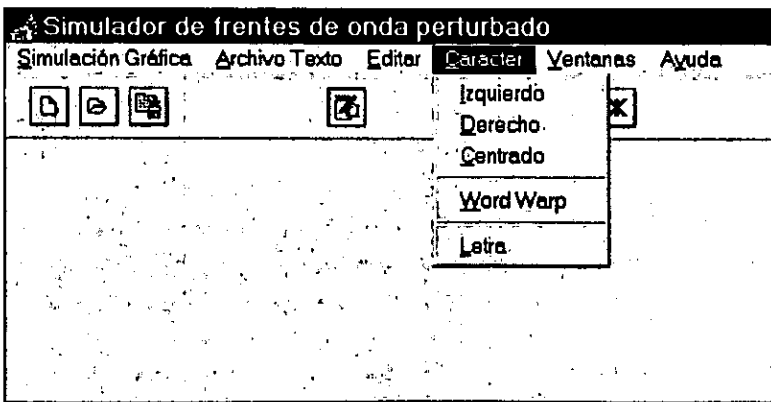


Figura (4.7)

- **Ventanas.**

Opción	Función
<b><u>T</u>ítulo</b>	Organiza los diferentes documentos que se encuentran abiertos mediante el nombre o título del documento.
<b><u>C</u>ascada</b>	Organiza los documentos en forma de cascada.

Estas opciones se pueden observar en la figura (4.8).

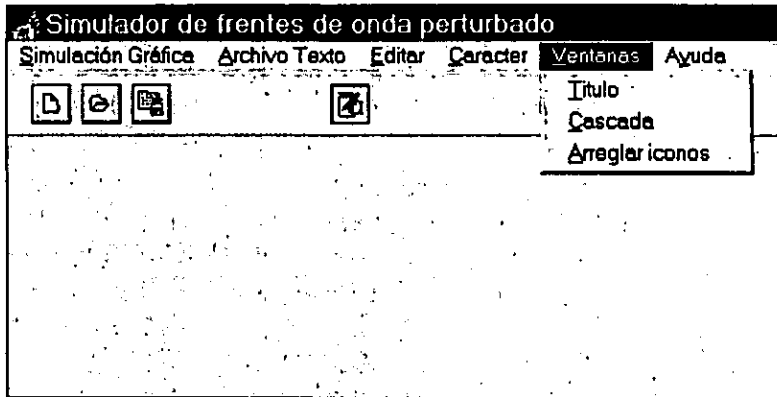
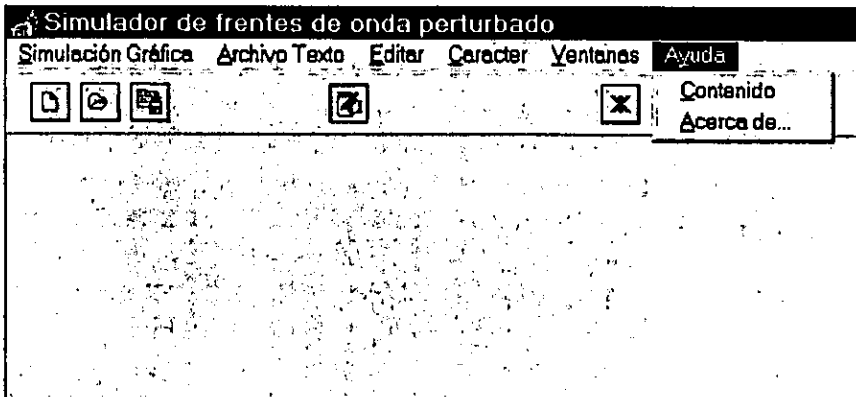


Figura (4.8)

- **Ayuda.**

Opción	Función
<b><u>A</u>yuda</b>	Despliega ayuda del funcionamiento del simulador de frentes de onda.
<b><u>A</u>cerca de...</b>	Despliega una ventana con la descripción del nombre del software, así como el autor, los derechos y versión de este.

Estas opciones se pueden observar en la figura (4.9).



Figura(4.9)

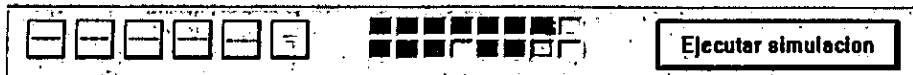
La barra aceleradora.



La barra aceleradora que se encuentra debajo de la barra de menús incluye iconos representativos que permiten activar algunas tareas comunes sin utilizar la barra de menús. Algunos elementos de la barra aceleradora tienen su equivalente en el teclado, para realizar la misma tarea, el método a emplear es cuestión de gustos. Para recordar lo que hace cada botón de la barra aceleradora incluye un icono, que al situarse con el cursor sobre él, emerge una <<Leyenda>> o lo que es lo mismo una <<sugerencia de texto>>, que explica mediante un texto muy corto las funciones que realiza la pulsación de dicho botón. La tabla siguiente muestra y describe cada uno de los iconos de la barra aceleradora.







Icono.	Nombre.	Propósito.
	Nuevo.	Este botón permite realizar una nueva Simulación gráfica, apareciendo el lienzo en color blanco dónde se realizará la simulación y aquél dado que se refiere a la simulación funciona de manera similar a la opción <i>nuevo</i> del menú Simulación gráfica.
	Abrir.	Permite abrir un archivo extensión (*.bmp) que pertenece a una simulación gráfica ya realizada, este es similar a la opción abrir del menú Simulación gráfica.
	Guardar.	Almacena el gráfico generado de las simulaciones de los frentes de onda con extensión (*.bmp), éste es similar a la opción Almacenar del menú Simulación gráfica.
	Editor de Texto.	La pulsación de este botón de rapidez permite abrir varios editores de texto donde se podrán capturar las observaciones pertinentes de las simulaciones gráficas realizadas.
	Tipo de línea para graficar la simulación	La pulsación de este botón permite acceder a un panel de control de graficación donde existen algunas opciones como (diferentes tipos de línea, así como diferentes tipos de colores) para realizar distintas simulaciones numéricas de como se perturba el frente de onda, asimismo, permite abrir un área de graficación donde se realizarán las simulaciones que sufre el frente de onda.

La barra aceleradora de tipo de línea a graficar.





Como se mencionó anteriormente el botón tipo de línea a graficar permite abrir un área donde se realizaran las simulaciones de las perturbaciones de los frentes de onda, pero también permite acceder a un panel de control que permite distinguir entre un número limitado de simulaciones a realizar, esto mediante diferentes tipos de líneas que se describen a continuación:

Icono.	Nombre.	Propósito.
	Continua	la simulación a realizar se efectúa mediante una línea <i>continua</i> o <i>sólida</i> .
	Discontinua	la simulación a realizar se efectúa mediante una línea <i>discontinua</i> .
	Punteada	la simulación a realizar se efectúa mediante una línea punteada.
	Raya Punto	la simulación a realizar se efectúa mediante una línea raya punto.
	Raya dos Puntos	la simulación a realizar se efectúa mediante una línea raya dos puntos.
	Clara	la simulación a realizar se efectúa mediante una línea clara, es decir, no se ve el gráfico de la simulación.



*Paleta de Colores.*

La paleta de colores permite realizar varias simulaciones del frente de onda con 16 distintos tipos de colores para distinguir entre varias simulaciones que se hayan realizado sobre el lienzo.

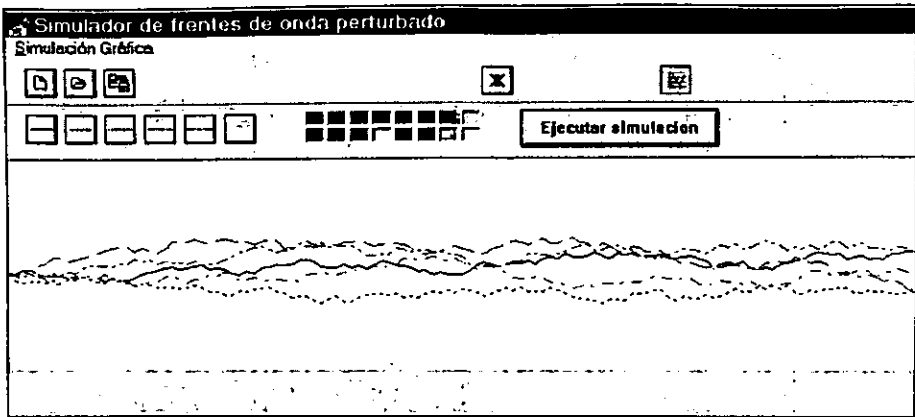


*Ejecuta Simulaciones.*

Este botón permite ejecutar la simulación de como se perturba el frente de onda, después de haberse elegido o no un tipo de línea así mismo como un tipo de color para la simulación.

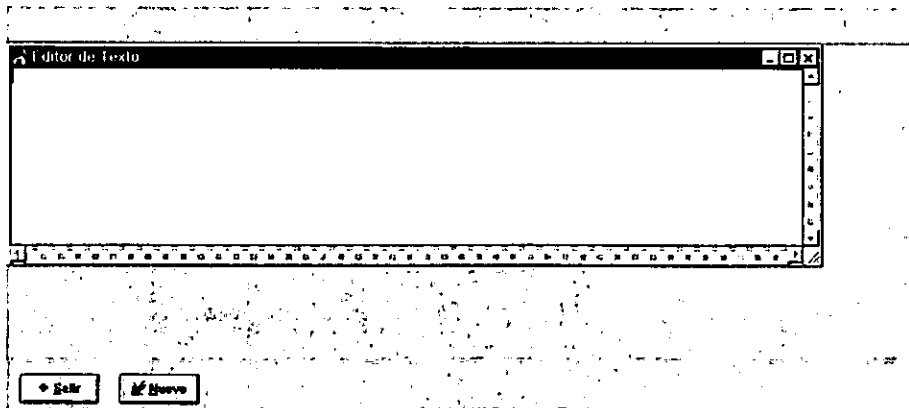
A continuación se observan algunas simulaciones realizadas con diferentes tipos de líneas y diferentes tipos de colores, así mismo como las opciones que se pueden usar durante las simulaciones.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones  
Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*



*El Editor de Textos.*

Permite realizar observaciones pertinentes acerca de las simulaciones realizadas, cabe destacar que las opciones del menú principal que controlan al editor de textos fueron explicadas previamente.





El botón Nuevo.

Permite limpiar el área o lienzo donde se efectuará una nueva simulación de los frentes de onda perturbados



El botón Salir.

Permite salir y cerrar el simulador de frentes de onda perturbados

#### 4.4 DESCRIPCION DE LAS RUTINAS UTILIZADAS EN LA SIMULACION DE LAS PERTURBACIONES DEL FRENTE DE ONDA PLANO.

El programa usa una rutina llamada fractal que genera las perturbaciones que sufre el frente de onda plano en el plano unidimensional por el método del desplazamiento del punto medio aleatorio.

Este procedimiento denominado fractal realiza las perturbaciones o deformaciones que sufre el frente de onda, mediante cortes irregulares, utilizando el algoritmo del desplazamiento del punto medio aleatorio. El procedimiento fractal llama a la rutina subdivide la cual ayuda a mejorar la *fractalización* o perturbación del frente de onda, esta rutina toma un segmento de línea y le pasa dos valores (el punto inicial y final del segmento de la línea utilizada), calculando de esta manera el punto medio para el segmento de línea recta que representa el frente de onda plano, y es aquí donde se utiliza el punto medio para realizar las perturbaciones hacia arriba o hacia abajo de manera aleatoria. Estas perturbaciones se realizan mediante un incremento aleatorio, usando el generador de números aleatorios de la computadora, el punto medio en cada iteración corresponde a un valor de  $y$  que se utiliza cuando se dibujan las distintas perturbaciones de los segmentos de la línea, donde además estas son almacenadas en un arreglo llamado *frctl*. La fractalización de la línea se realiza de izquierda a derecha de los distintos segmentos generados del punto medio, generando en cada iteración diferentes puntos medios para cada subsegmento, a todos estos segmentos se les subdivide y se les compensa un número aleatorio y esto se repite en forma recursiva sobre diferentes subsegmentos originando una serie de subsegmentos conectados por los puntos medios encontrados, los cuales representan las perturbaciones que sufre el frente de onda plano en el plano de la pupila, donde se debe destacar que estos desplazamientos se realizan sobre el eje  $y$ .

El parámetro escala que utiliza la rutina fractal, determina el incremento de la perturbación en cada iteración de la fractalización, por otro lado, el parámetro llamado  $H$  representa un factor de decrecimiento que multiplica en cada iteración el valor actual de la perturbación en escala, cabe destacar que en cada subdivisión de la línea se reduce el

*Aproximación Fractal de Perturbaciones  
Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

tamaño de la escala, así mismo cada segmento de línea es cada vez más y más pequeño, estos segmentos de línea varían mucho, pero como cada segmento es cada vez más pequeño los desplazamientos se hacen cada vez menores. La combinación de estos dos valores escala y  $h$  son las variables que se pueden manipular para obtener distintas simulaciones de las perturbaciones que sufre el frente de onda. El punto de enlace de las simulaciones con la teoría de procesos estocásticos manejados anteriormente se encuentra en el parámetro  $H$  o exponente de Hurst como se le conoce, si  $H=1/2$  se tiene movimiento Browniano y si  $0 < H < 1/2$ , las simulaciones del frente de onda plano tienen un carácter más rugoso y por el contrario si  $1/2 > H > 1$  entonces dichas simulaciones son más suaves, a este tipo de proceso se le conoce como movimiento fraccional Browniano.

Como se explicó en los capítulos anteriores la clave de la geometría fractal es la aleatoriedad que se le aplica a el frente de onda plano que esta representada o idealizada por una línea recta, siendo esta la superficie que se fractaliza y se deforma, en cada iteración. Las rutinas random y randomize se utilizan para que se obtenga un valor aleatorio generado en base al reloj que utiliza la PC. Estos valores aleatorios se usan para determinar cuanto se ha perturbado cada segmento de línea. Sin embargo, el reloj genera números aleatorios distintos en cada simulación.

## DESCRIPCION DE LA RUTINA PRINCIPAL UTILIZADA EN LA SIMULACION DE LAS PERTURBACIONES DEL FRENTE DE ONDA PLANO.

A continuación, se describe las rutinas principales que desarrollan el proceso de fractalización en las simulaciones realizadas.

Program Programa\_Fractal;  
Constantes

Tamaño\_Máximo=1000 {Tamaño del arreglo de puntos fractalizados a utilizarse}

Nivel\_Maximo=6 {Numero de periodos de tiempo en el cual se efectuan los cortes }

Variables

FrctI: arreglo[1..Tamaño\_Maximo] Reales;

Función Potencia (Numero, Pow:Real):Real; {Regresa el numero de la potencia}

Comienzo

Si Numero=0 entonces Potencia:=0

Y sino Potencia= Exponencial (Pow \* Logaritmo\_Natural(Numero))

Fin

Procedimiento Subdivide(P1,P2:Enteros; Std, Radio:Reales);

*{Esta rutina es la que realiza el proceso de fractalización. Este calcula el punto medio entre los dos punto P1 y P2, y por lo tanto este es perturbado por un factor aleatorio que es escalable por std. Se debe recalcar que subdivide se llama a sí misma para fractalizar el segmento de línea para encontrar el nuevo punto medio de izquierda a derecha de los nuevos subsegmentos. Este proceso se realiza hasta que el número de subdivisiones deseadas.}*

### Variables

MidPnt: Enteras

StdMid: Reales

Comienzo *{Realiza la perturbación mediante la técnica punto medio}*

MidPnt:=(P1+P2) DIV 2 *{Calcula el punto medio del punto 1 y el punto 2}*

*{si el punto medio es único de el punto 1 y el punto 2, entonces la perturbación se realiza aleatoriamente de acuerdo a la perturbación anterior}*

Si (MidPnt <>P1) y (MidPnt <>P2) Entonces

Comienza

Frctl[MidPnt]:=(Frctl[p1]+Frctl[p2])/2 + (random(16) -8.0)/8.0\*std;

*{Aquí se realiza la fractalización o perturbación que sufre el segmento de línea del frente de onda de izquierda a derecha de el punto medio y subdivide se llama a sí mismo. Nótese que el factor de escala utilizado para perturbar o realizar cada perturbación se va decrementando cada vez que se ejecuta la rutina subdivide por la cantidad llamada radio}*

StdMid := Std\*Radio

Subdivide(P1, MidPnt, StdMid, Radio); *{fractaliza el lado izq}*

Subdivide(MidPnt, P2, StdMid, Radio); *{fractaliza el lado der}*

Final de comienzo

Final de comienzo

Procedimiento Fractal (Y1, Y2, Nivel\_Maximo: Enteros; H, Escala: Reales);

*{ Esta es la rutina principal Fractal. Esta rutina fractaliza o perturba el frente de onda en el plano unidimensional. Para este caso la dimensión y. La línea fractalizada se coloca sobre un arreglo global Fractal: Frctl. El parámetro Nivel\_Maximo especifica cuanto se perturba el frente de onda plano donde H es un valor entre 0 y 1 y especifica el factor de rugosidad, como se ha analizado en el Capítulo II Principios de Geometría Fractal y Escala es el factor de escala que dice cuando se debe perturbar cada segmento de línea}*

### variables

Primero, Ultimo: Enteros

Radio, Std: Reales

### Comienzo

Primero:=1 *{Determina la frontera del arreglo que puede ser usado}*

Ultimo:= Round(Power(2.0, Nivel\_Maximo))

Frctl[Primero]:= Y1 *{usa Y1 y Y2 como pto. de inicio y finales del frente de onda}*

Frctl[Ultimo]:=Y2

Radio:=1.0/Potencia(2.0, H); *{La regla de potencia de la Función de estructura}*

Std := Escala\*Radio *{Determina la rugosidad del frente de onda plano}*

Subdivide(Primero, Ultimo, Std, Radio)

Final del comienzo

### Procedimiento Dibujar\_Fractal

*{Esta rutina despliega como se deforma el frente de onda perturbado en el plano unidimensional. El arreglo Frctl compensa los valores de y. Los valores de x son igualmente espaciados a través de la pantalla dependiendo de el numero de niveles calculados}*

*Aproximación Fractal de Perturbaciones  
Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

Variables

I, X, Xinc, L: Enteros

```
Comienzo           {Numero de puntos en Frctl utilizados}
L:=Round(Potencia(2.0, Nivel_Maximo));
Xinc:=GetMaxX div L*3 div 2   {Calcula el incremento de X}
MoveTo(0,100);           {Se usa para dibujar cada línea}
Para I:=1 Hasta L realiza lo siguiente {Dibuja la línea a utilizarse}
    LineTo(X,Round(Frctl[I]))   {El valor de y en Frctl}
    Inc(X,Xinc)
Fin del ciclo
Fin del comienzo
```

PROGRAMA PRINCIPAL

Comienzo

```
Randomize
Fractal(100,100, Nivel_Maximo, 0.5, 50.0);
Dibujar_Fractal
Final del comienzo
```

Este método calcula el movimiento Browniano, el cual tiene la característica de autosimilaridad, donde los incrementos de  $B_H(u)$ , por simplicidad de notación se puede utilizar  $B_H(u)$  en lugar de  $B_H(u,w)$ , donde se debe resaltar lo siguiente  $B_H(u + \Delta u) - B_H(u)$  y  $B_H(u + h\Delta u) - B_H(u)$  tienen la misma función de distribución para cualquier factor de escala  $h^{-H}$ , donde H es el parámetro que se analizó en el capítulo II conocido como exponente de Hurst.

# 5

## Validación del Simulador Atmosférico.

### INTRODUCCIÓN:

La simulación de frentes de onda en el plano unidimensional, es el objetivo principal de esta investigación, enfocándose a modelar una fase pantalla de Kolmogorov, donde se deben simular frentes de onda con una función de estructura de fase cercana a la regla de potencia teórica  $\frac{5}{3}$ . La importancia de obtener simulaciones confiables, radica en

generar un frente de onda perturbado atmosféricamente con una fase cercana a  $r^{\frac{5}{3}}$  que es la regla de potencia de la función de estructura. Por otro lado, se debe destacar que los principales criterios tomados en cuenta para la evaluación del modelo de simulación es el realismo de éste y la rapidez de los cálculos. En este caso, la función de estructura unidimensional es un corte en cualquier dirección de la fase de la función de estructura atmosférica teórica bidimensional expresada por

$$D_{\psi}(r) = 6.88 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad (5.1)$$

donde:  $r$  es un vector en el plano de la pupila y  $r_0$  es el parámetro de Fried que representa la turbulencia atmosférica.

La regla de potencia de la función de estructura, es resultado de las fases de los frentes de onda, que contienen las mismas estructuras en diferentes escalas. Para emular dichas perturbaciones en el caso unidimensional que sufre la función de estructura, se usa la técnica desplazamiento de el punto medio aleatorio el cual conserva una regla de potencia  $\psi_{\psi}(k) = \frac{1}{k^2}$  y una función de estructura dada por  $D_{\psi}(\rho) = |\rho|$ , las cuales según Roddier (1970) y Lane (1982) son próximas a los mismos parámetros de la turbulencia atmosférica.

## 5.1 PROPIEDADES DE AUTOSIMILARIDAD DE LA FASE PANTALLA DE KOLMOGOROV.

Una de las propiedades importantes de la fase pantalla de Kolmogorov es que ésta no difiere de la escala a la que se observa. En otras palabras, conserva la característica de autosimilaridad a diferentes escalas, siendo ésta una de las propiedades básicas de la geometría fractal. Dicha propiedad de autosimilaridad, es una consecuencia directa de la función de estructura que es descrita por una regla de potencia y del espectro de potencia de las fluctuaciones de fase.

Esto se puede observar si se cambia el tamaño de la apertura, es decir, si se amplía o reduce la apertura por un factor  $\alpha$ , donde ésta no tiene efecto en la forma de la fase de la función de estructura

$$D_{\phi}(\alpha|r) = \alpha^{\frac{5}{3}} D_{\phi}(|r|).$$

Esto permite pensar que aparte de un factor de escala constante, el tamaño de la apertura no afecta a las estadísticas que se ocupan para generar la fase pantalla de Kolmogorov.

Por otro lado, la turbulencia atmosférica introduce no homogeneidades en la temperatura las cuales se traducen en inhomogeneidades del índice de refracción<sup>48</sup>. Lo anterior permite formular que el espectro de potencias de las fluctuaciones de índice de refracción, que se va a suponer como válido, sigue la ley de Kolmogorov (Kolmogorov, 1941, citado por Roddier, 1981).

$$\Phi_N(\bar{k}) = 0.033 C_N^2 k^{-11/3}$$

donde  $C_N$  es un parámetro que indica la "intensidad" de la turbulencia llamado constante de estructura de fluctuaciones de índice de refracción. Este espectro es la transformada de Fourier de la correlación de fluctuaciones de índice de refracción  $N$  dado por (Roddier, 1981):

$$B_N(\bar{\rho}) = \int \Phi_N(\bar{k}) \exp(i\bar{k} \cdot \bar{\rho}) d\bar{k}$$

donde la correlación  $B_N$  es:

$$B_N(\bar{\rho}) = \langle N(\bar{r}) N(\bar{r} + \bar{\rho}) \rangle$$

A continuación se proporciona la relación estadística de la turbulencia atmosférica con el frente de onda incidente al telescopio.

Supóngase que incide sobre la atmósfera un frente de onda plano no perturbado

$$\psi(\bar{x}) = 1$$

<sup>48</sup> El índice de refracción esta representado por la siguiente constante de estructura  $C_N^2$ .



se supone que existe una distribución continua de turbulencia caracterizada por una constante de estructura de fluctuaciones de índice de refracción dependiente de la altura  $C_N(h)$ , que introduce fluctuaciones de fase  $\phi(\bar{x})$ . La función de correlación<sup>49</sup> del frente de onda en el plano de la pupila.

$$B_0(\bar{\xi}) = \langle \psi(\bar{x})\psi(\bar{x} + \bar{\xi}) \rangle$$

está dada por (del espectro de Kolmogorov)

$$B_0(\bar{\xi}) = \exp\left(\frac{-1}{2} \left[ 2.91 k^2 \xi^{\frac{5}{3}} \int C_N^2(h) dh \right]\right)$$

## 5.2 ESPECTRO TURBULENTO.

Scaddan y Dainty observaron que las perturbaciones del frente de onda promedio para una estrella luminosa en la apertura del telescopio, tiene una aproximación a la regla de potencia  $\frac{5}{3}$  para la función de estructura de fase, y por otro lado determinaron que las propiedades de las aberraciones atmosféricas del frente de onda  $\phi(x, t)$  se caracterizan de manera estadística por la función de estructura de fase, que representa *el espacio estadístico de las deformaciones de un frente de onda plano que es descrito por la siguiente regla de potencia*

$$D_\phi(r) = \langle |\phi(x) - \phi(x+r)|^2 \rangle = 6.88 \left[ \frac{r}{r_0} \right]^{\frac{5}{3}}$$

Esta función de estructura caracteriza las deformaciones introducidas por la propagación óptica del frente de onda a través de la turbulencia atmosférica. *En astronomía, debido a que las fuentes observadas son muy débiles, generalmente se toman imágenes de largo tiempo de exposición. Una imagen de largo tiempo de exposición es el promedio de muchas imágenes instantáneas.*

Por otro lado, la turbulencia atmosférica según Mandelbrot (1982), se asemeja a algunas características de la turbulencia fractal homogénea la cual esta en función de la dimensión de similaridad D (cuya notación es  $\theta = D-2$ ). La turbulencia intermitente, como la formuló Mandelbrot, se caracteriza por una serie de exponentes distintos en la ecuaciones del espectro<sup>50</sup>, la cual representa *el espectro de la velocidad turbulenta*, y que a la vez se expresa en términos de varianzas. De lo anterior, el carácter fractal de la turbulencia homogénea, así como su velocidad  $v$  en el punto  $x$  satisface

$$\langle [v(x) - v(x+r)]^2 \rangle = |r|^{2+\theta} \quad (5.2)$$

<sup>49</sup> o de coherencia.

<sup>50</sup> Ecuación formulada por Mandelbrot.

donde  $B = (3-D)/3$ .

Para el caso, de la turbulencia homogénea de Taylor,  $D=3$ , y por lo tanto  $B=0$ , al cual se le considera como punto de partida al exponente clásico de Kolmogorov<sup>51</sup>  $2/3$ . El modelo  $\beta$  establece una teoría sobre la fractabilidad de la turbulencia homogénea.

### 5.3 RELACIÓN DE LA TURBULENCIA DE KOLMOGOROV CON EL MÉTODO DE PUNTO MEDIO.

Las fases pantalla de Kolmogorov, obtenidas en la simulación mediante el método de punto medio muestra que la naturaleza fractal del seeing radica en que sobre todas las escalas existe una autosimilaridad en las diferentes estructuras, *entre las escalas externas e internas de la turbulencia*. Por ende, una de las propiedades de la fase pantalla de Kolmogorov es que estas son semejantes y que no importa a que escala se observen ya que son similares e igualmente observables. Esta propiedad de autosimilaridad es una consecuencia directa de el espectro de potencia de las fluctuaciones de fase en la función de estructura (5.1) descrita como una regla de potencia. Para generar las fases se implementa el algoritmo del "desplazamiento de el punto medio", el cual consiste en interpolar y desplazar el punto que se sitúa en medio de dos puntos donde a dicho desplazamiento se le adiciona una variable aleatoria Gaussiana, este procedimiento se itera varias veces según la resolución que se desee alcanzar.

El algoritmo del desplazamiento del punto medio aleatorio, proporciona una buena aproximación al espectro de Kolmogorov, siendo este método un procedimiento muy rápido y fácil de calcular. Este algoritmo genera un espectro unidimensional cuya regla de potencia dada por

$$\psi_s(k) = \frac{1}{k^2}$$

Que representa lo mismo que el espectro de el movimiento Browniano y es próxima a la regla de potencia de la Turbulencia de Kolmogorov, la cual también se describe en términos de la siguiente función de estructura.

$$D_s(\rho) = |\rho|$$

donde :  $D_s$  representa la función de estructura del movimiento Browniano.

---

<sup>51</sup> Existe un estudio denominado el modelo  $\beta$  el cual establece una teoría sobre la fractabilidad de la turbulencia homogénea.

## ESTADÍSTICAS DE LAS FLUCTUACIONES DE TEMPERATURA Y HUMEDAD.

Las fluctuaciones de temperatura y humedad (citadas por Roddier 1981) están en función de la altura de la atmósfera, y dentro de un cierto intervalo inercial  $[L_0, l_0]$ . De lo anterior, el espectro de potencia de las fluctuaciones de temperatura está representada por:  $\phi_T(k)$ , mientras que el de las fluctuaciones de humedad es:  $\phi_C(k)$ , y se describen mediante su espectro de potencia dada respectivamente por

$$\phi_T(k) \propto K^{-\frac{5}{3}} \quad \phi_C(k) \propto K^{-\frac{5}{3}} \quad (5.3)$$

La cual es muy cercana al espectro en una dimensión del movimiento Browniano. El espectro en tres dimensiones está dado por

$$\phi(k) = \phi(K_x, K_y, K_z),$$

donde realizando una integración en todas las direcciones, y suponiendo que el medio es isotrópico se obtiene

$$\phi(k) = 4\pi k^2 \phi(K)$$

por lo tanto

$$\phi_T(k) \propto K^{-\frac{11}{3}} \quad \phi_C(k) \propto K^{-\frac{11}{3}}$$

donde la covarianza de las fluctuaciones de temperatura  $\theta = T - \langle T \rangle$  es  $B_T(\rho) = \langle \theta(r) - \theta(r+\rho) \rangle$  donde de acuerdo al Teorema Wiener-Khinchine ésta es la transformada de Fourier tridimensional de  $\phi_T(k)$  definida como

$$B_T(\rho) = \int \phi_T(k) \exp(ik \cdot \rho) dk$$

la cual no existe en el origen, considerando la función de estructura  $D_T(\rho) = \langle |\theta(r+\rho) - \theta(r)|^2 \rangle$ .  $D_T(\rho)$  es una expresión válida en el intervalo inercial, y puede derivarse de un razonamiento unidimensional, asumiendo que: depende únicamente sobre  $|\rho| = \rho$ , y sobre el promedio  $\epsilon_0$  de la producción de energía turbulenta, además del promedio  $\eta_0$  de la producción de la fluctuación de temperatura, la cual también es el promedio de la disipación molecular, por lo tanto, necesariamente  $D_T(\rho)$  es proporcional a

$$D_T(\rho) \propto \eta_0 \epsilon^{-1/3} \rho^{2/3} \quad \text{o} \quad D_T(\rho) = C_T^2 \rho^{2/3}$$

donde  $C_T^2$  es la constante de estructura de las fluctuaciones de temperatura.

$$\phi_T(k) = \frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4\pi^2} C_T^2 K^{-1/3} = 0.033 C_T^2 K^{-1/3}$$

---

## Conclusiones.

Como se pudo, observar en el desarrollo de esta investigación, la geometría fractal es la herramienta más precisa para representar, describir y manipular algunos objetos que se encuentran en la naturaleza. Esta geometría proporciona una herramienta idónea para caracterizar y modelar formas aparentemente complejas e irregulares que se encuentran en la naturaleza, tal y como lo dijo Benoit B Mandelbrot las montañas no son conos, las nubes no son esféricas, los rayos no viajan en línea recta, el contorno de una costa no son líneas rectas, la distribución del Universo tiene un carácter fractal, etc., pero también dicha geometría crea algunas gráficas espectaculares tal y como la curva de Von Koch y el triángulo de Sierpinski, donde se debe destacar que la característica principal de los fractales es la autosimilaridad y autoafinidad a diferentes escalas, que son descritas mediante una regla de potencia, la cual es caso de estudio de esta investigación.

El desarrollo de este trabajo permitió dar a conocer una aplicación práctica de la geometría fractal en el campo de la turbulencia atmosférica o seeing, entendiéndose como turbulencia atmosférica las diferencias locales de temperatura que son ocasionados por el advenimiento o disipación de energía en forma de calor en un cierto intervalo inercial ( $l_0 < r < L_0$ ), por medio de remolinos a diferentes escalas. Kolmogorov en el año de 1941, estudió y determinó que la turbulencia tiene un carácter fractal, la cual esta representada por el espectro de potencia de las fluctuaciones de temperatura (espectro de Kolmogorov) y por la siguiente regla de potencia que es conocida como la función de estructura de fase.

$$D_s(|r|) = D_s\left(|\phi(r') - \phi(r'+r)|^2\right) = 6.88 \left[\frac{r}{r_0}\right]^{\frac{3}{2}}$$

Se debe resaltar que, hipotéticamente, a la atmósfera se le consideró como pequeñas celdas, donde en cada una de ellas existe una variación de temperatura y que, además, depende de la altura a la cual se analice ésta. Lo anterior, permitió que mediante algunos procesos aleatorios como es el caso del movimiento Browniano o caminata aleatoria, se realicen estudios y simulaciones de como se perturba el frente de onda atmosférico en el plano unidimensional, dado que éste proceso conserva similitudes como lo es la función de estructura y el espectro de potencia, las cuales marcan el trayecto para formular un modelo de simulación, que permita de manera práctica simular las perturbaciones atmosféricas que sufre un frente de onda plano al entrar a la pupila del telescopio la cual ocasiona que las imágenes se vean totalmente borrosas.

Se debe hacer hincapié en los estudios sobre turbulencia que se analizaron, donde existen dos enfoques sobre procesos aleatorios, de los cuales se derivan los modelos sobre turbulencia homogénea de Burgers  $K^{-2}$  y de Kolmogorov  $K^{-\frac{5}{3}}$ . El modelo turbulento de Burgers se caracteriza por su densidad espectral la cual es proporcional a  $K^{-2}$ , donde su temperatura en el punto P esta representada por  $B(P)$ , de lo anterior, si se toman dos puntos  $P'$  y  $P''$ , el promedio está representado por  $\langle [B(P') - B(P'')] \rangle = 0$ , con varianza  $\langle [B(P') - B(P'')]^2 \rangle = |\overline{P'P''}|$ , la cual representa un campo aleatorio Gaussiano. Lo antes mencionado es el resultado principal del movimiento Browniano de una caminata aleatoria, la cual origina una distribución de probabilidad Gaussiana, para las diferentes posiciones aleatorias de la partícula durante un tiempo t, con varianza proporcional a t, algo similar sucede para el caso de una caminata aleatoria de N pasos en una dimensión, con un tamaño de paso aleatorio x, donde estos desplazamientos están gobernados por la misma distribución de probabilidad  $p(x)$ , con media cero. De lo anterior, y de las teorías analizadas se comprueba que la distribución de probabilidad  $P_N(X)$  para la suma de N pasos  $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \dots + X_N$  tiene la misma distribución  $p(x)$ , interpretándose éste como un factor de escala para los diferentes pasos individuales, siendo esta una de las ideas principales de la geometría fractal, idea que se conoce como autosimilaridad, donde existe una escala en el que se puede observar el todo de un objeto parecido a sus partes, como en el contorno de una costa, el de un helecho o el pedazo de una nube, para este estudio la respuesta mas idónea es que  $p(x)$  debe ser una Gaussiana, porque la suma de N Gaussianas produce una distribución Gaussiana, con N desplazamientos de la varianza original.

Para el caso del modelo turbulento de Kolmogorov, se considera un campo Gaussiano  $B^*(P)$  con promedio  $\langle [B^*(P') - B^*(P'')] \rangle = 0$ , y con una varianza  $\langle [B^*(P') - B^*(P'')]^2 \rangle = |\overline{P'P''}|^{\frac{2}{H}}$ , la diferencia entre  $B(P)$  y  $B^*(P)$ , corresponde a el valor de  $H = \frac{1}{2}$  y  $H = \frac{1}{3}$  respectivamente, originando una relación con el movimiento fraccional Browniano (que también es conocido en el contexto de isosuperficies de la turbulencia homogénea como campos Gaussianos). La varianza de los incrementos de  $B_H(P)$  esta representada por  $|\overline{P'P''}|^{2H}$ , con  $0 < H < 1$ , es decir, tales funciones son *estacionarias*, lo que significa que en promedio sus características permanecen constantes a lo largo del tiempo, donde los incrementos de la varianza dependen únicamente de la diferencia del intervalo de tiempo  $\Delta t$  y todas las  $t$ 's son estadísticamente equivalentes. Como se pudo observar el valor  $H = \frac{1}{2}$  da origen ha el movimiento Browniano con  $\langle [B(P') - B(P'')]^2 \rangle = |\overline{P'P''}|$  o lo que es lo mismo si  $V_H(t)$  es una función de valores simples de variable real, por lo general el tiempo sus incrementos  $\Delta V_H(\Delta t) = V_H(t_2) - V_H(t_1)$  tienen una distribución Gaussiana con varianza  $\langle \Delta V_H^2(\Delta t) \rangle \propto \Delta t^{2H} = (|t_2 - t_1|)^{2H}$  donde los paréntesis angulares denotan un promedio muestral sobre  $V_H(t)$ .

### *Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

Como se hizo notar, el carácter fractal de la turbulencia atmosférica en el ámbito astronómico, queda bien representada por su función de estructura de Fase y por su espectro de potencia, la cual esta relacionada con el proceso estocástico de Wiener-Levy o movimiento Browniano como se pudo observar anteriormente, y que se puede simular en el plano unidimensional mediante el algoritmo del desplazamiento del punto medio, donde este se puede generalizar para realizar simulaciones de movimiento fraccional Browniano, siendo esta una muestra representativa de como se deforma el frente de onda plano al entrar en la pupila del telescopio, de acuerdo a la aproximación del espectro de potencia del movimiento Browniano y del Espectro de Kolmogorov. Por otro lado, surge un parámetro conocido como exponente de Hurst, dicho parámetro, permite generar movimiento Browniano cuando  $H=1/2$  o curvas suaves y rugosas cuando  $0 < H < 1/2$  y  $1/2 > H > 1/2$  respectivamente.

Así mismo se debe hacer hincapié en las variables que sí están bajo control del investigador, las cuales son variables controlables como lo son las aberraciones producidas por la calidad de la óptica de la superficie primaria del telescopio, donde existen formas de corregir estas perturbaciones mediante una técnica llamada polinomios de Zernike, que permiten corregir las aberraciones de orden mayor tales como la aberración de primer orden (tip o tilt), las de segundo orden (coma), las de tercer orden (astigmatismo), etc.,

## Otro modelo de simulación.

Según Oliver Lai<sup>♦</sup>, una manera de simular una fase pantalla (phase screen) que tiene propiedades espaciales de la turbulencia atmosférica, es generar ruido blanco, y calcularle después la transformada de Fourier, produciendo una densidad espectral constante y luego multiplicarla por un filtro que tenga una forma apropiada del espectro de Kolmogorov (es decir, un espectro de potencia  $K^{-1/3}$ ) y tomar la transformada de Fourier inversa, obteniendo así una fase pantalla que tiene las propiedades espaciales de la turbulencia de Kolmogorov.

## Expectativas.

La importancia de este trabajo permitirá a futuro ser aplicado a la tecnología llamada óptica adaptiva como se puede observar en la figura (C-1), la cual permite corregir por mínimos cuadrados, el frente de onda perturbado en el plano de la pupila, mediante un espejo deformable que permita compensar al máximo el error en dicho frente de onda, esto con la finalidad de corregir la imagen que se observa a través del telescopio para que tenga una mayor nitidez al observarse. Es importante enfatizar que el estudio de este trabajo surge como una propuesta en la corrección de imágenes degradadas por el

---

<sup>♦</sup> E-mail de Olivier Lai donde contesta la siguiente pregunta: Como calcular el espectro de la turbulencia atmosférica de Kolmogorov? (How computer this spectrum atmospheric turbulence the Kolmogorov?) <lai@hplyot.obspm.fr> .

seeing, a través de simulaciones numéricas donde ésta es un terreno virgen. Por otro lado, este estudio puede servir como un punto de partida para realizar correcciones de aberraciones de primer orden (tip y tilt) y que a futuro se pueda implantar en el Telescopio de 6.0 m, que se desea implantar en el Observatorio Astronómico Nacional de San Pedro Mártir, donde la óptica, mecánica, y electrónica de dicho telescopio estará a cargo del personal del Instituto de Astronomía en sus dos cedes en Ciudad Universitaria en el Instituto de Astronomía y en el Observatorio Astronómico Nacional de San Pedro Mártir Ensenada Baja California Norte.

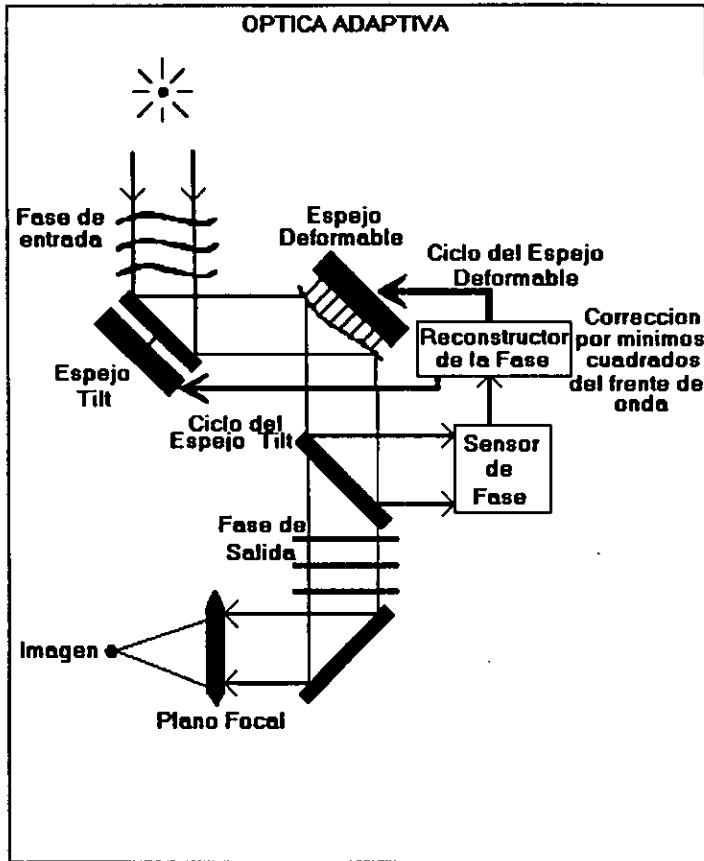


Figura (1) Principios de Óptica Adaptiva.

Finalmente, se debe decir, que como el telescopio es, esencialmente, un filtro que sólo pone de manifiesto los efectos de las fluctuaciones de cierta magnitud, la turbulencia observada sólo insinúa la complejidad de la trayectoria real. Si el poder de resolución del telescopio se incrementara, se detectarían los efectos de la turbulencia de manera más compleja.

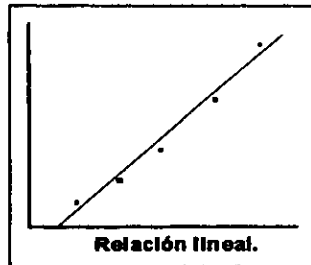
# 1

## Conceptos Generales.

A continuación se describirá lo que se entiende por regla de potencia, el carácter fractal de una caminata aleatoria o movimiento Browniano, así como cuales son los tipos de telescopios más comunes y sus parámetros principales, y por último las estadísticas Gaussianas de la Función de Estructura de Fase.

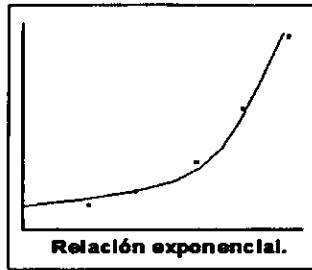
### 1.1 REGLAS DE CRECIMIENTO.

*Relación lineal.* Una relación entre dos variables es lineal si la relación  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  sufre una inclinación, es decir, si dado un cambio  $\Delta y$  en la variable dependiente existe un cambio  $\Delta x$  en la variable independiente, permaneciendo dicho cambio constante en todo el dominio de la variable independiente. De tal manera, que dicha relación se puede modelar por una ecuación de la forma  $y = mx + b$ . Graficando los puntos  $(x,y)$ , ambos ejes el horizontal y el vertical son constantes la cual conduce a una línea de la siguiente forma.



*Relación exponencial.* Una relación exponencial se da entre dos variables, si se puede modelar de la siguiente manera  $y = ka^x$ . Si se grafican los puntos  $(x,y)$  de dicha relación, el resultado es una curva y no una línea recta (excepto cuando  $a=0$  y  $a=1$ ). Por ende, si existe una relación exponencial entre dos variables  $(x,y)$ , al graficar dicha relación se obtiene una gráfica de la forma  $(x, \log y)$ .





Si  $a > 0$  y

$$y = ka^x$$

Entonces

$$\begin{aligned} \log y &= \log ka^x \\ \log y &= \log a^x + \log k \\ \log y &= x \log a + \log k \end{aligned}$$

donde las ecuaciones anteriores son de la forma lineal  $Y = AX + K$ .

**Relación potencia.** Se dice que entre dos variables existe una relación de potencia, cuando dicha relación se puede modelar por una ecuación de la forma  $y = kx^r$ . Si se gráfica dicha relación  $(x,y)$ , el resultado es una curva y no una línea recta. La única excepción es cuando  $r=0$  o  $r=1$ . A continuación se muestra que una relación potencia se da cuando existen una relación entre dos variables positivas  $(x,y)$ , entonces los puntos trazados son  $(\log x, \log y)$

Si se tiene

$$y = kx^r$$

Entonces

$$\begin{aligned} \log y &= \log kx^r \\ \log y &= \log x^r + \log k \\ \log y &= r \log x + \log k \end{aligned}$$

donde estas ecuaciones son de la forma lineal  $Y = rX + K$ . La inclinación es igual al exponente  $r$  de la función potencia original, mientras que el eje  $y$  se intercepta en el logaritmo de  $K$ .



## 1.2 DEFINICIÓN DE MOVIMIENTO BROWNIANO.

Un proceso continuo  $\{y(t)\}$  se llama caminata aleatoria de tiempo continuo o proceso Browniano, si para cualquier tamaño de paso  $\Delta t$  en el tiempo, los incrementos  $\Delta y(t)=y(t+\Delta t)-y(t)$  son

- (i) Gaussianos
- (ii) De media cero y,
- (iii) Varianza proporcional a  $\Delta t$ .

El axioma siguiente es equivalente a los axiomas (ii) e (iii).

- (iv) Incrementos sucesivos  $\Delta y(t)$  y  $\Delta y(t+\Delta t)$  no están correlacionados.

Los axiomas anteriores, se pueden generalizar de tal manera que se puede caracterizar un *proceso fractal*, donde se introduce un parámetro adicional  $H$ , que es el "exponente de Hurst"<sup>52</sup>, y que se encuentra en el intervalo  $(0 < H < 1)$  y reemplazando el axioma (iii) por lo siguiente

- (iii') varianza proporcional a  $\Delta t^{2H}$

Una caminata aleatoria que tiene exponente de Hurst  $H=1/2$ , los axiomas (iii') e (iv) son equivalentes. Cabe destacar que existe una correlación de los incrementos sucesivos, dicha correlación en un proceso fractal se caracteriza por el siguiente coeficiente de correlación  $\rho$ , independientemente del tamaño paso en el tiempo  $h$ , donde  $\rho$  se define de la siguiente manera.

$$2^{2H} = 2 + 2\rho \qquad \left(-\frac{1}{2} < \rho < 1\right)$$

Los axiomas anteriores caracterizan el comportamiento escalable de un proceso fractal, es decir, si  $\{y(t)\}$  es un proceso fractal con exponente de Hurst  $H$ , entonces, para cualquier constante  $c > 0$ , el proceso

$$y_c = \left(\frac{1}{c^H}\right) y(ct)$$

es otro proceso fractal con las mismas estadísticas. A lo anterior se le denomina como *renormalización* escalable. Si se consideran la familia  $F_H$  de gráficas de todos los procesos fractales de exponente de Hurst  $H$ . La familia  $F_H$  es cerrada bajo el proceso de renormalización y todos los elementos de  $F_H$  conservan las mismas propiedades estadísticas.

---

<sup>52</sup> Hurst fue el primero en observar propiedades de escala de autosimilaridad y después Mandelbrot.

### 1.3 TIPOS DE TELESCOPIOS.

El propósito de los lentes y espejos es llevar los rayos de luz de una fuente puntual<sup>53</sup> a un punto en común en el espacio, al cual se le denomina punto focal. Para una fuente de luz amplia de tamaño finito, como por ejemplo, una galaxia, las lentes enfocan los rayos de cada punto de la fuente a un punto separado en la imagen como se muestra en la siguiente figura (A.1).

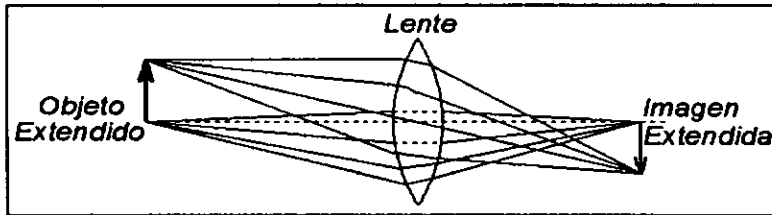


Figura (A.1)

Por lo general, la imagen extendida puede ser más pequeña que el objeto extendido original de manera aparente para el ojo. Suponiendo que los objetos se localizan muy lejos de las lentes, entonces se puede suponer que los rayos que emiten estas fuentes de luz son aproximadamente paralelos, por lo tanto, la distancia de la imagen a la lente determina la longitud focal, y es aproximadamente la misma para todos los objetos.

Existen dos tipos de telescopios el refractor, el cual usa lentes en su elemento óptico primario u objetivo, y el reflector el cual usa espejos. En ambos casos, la luz que proviene de un objeto<sup>54</sup> incide en un foco en el telescopio para formar una imagen del objeto. El tamaño del telescopio se refiere a el diámetro de su lente o espejo primario, estos lentes o espejos<sup>55</sup> son usados para controlar las rutas de los rayos de luz que entran al telescopio. El diseño óptico de los telescopios refractores se mostrara a continuación, donde la imagen se forma por la refracción de la luz que pasa a través de la lente, los telescopios refractores tiene una ventaja sobre los reflectores, la cual es que los refractores no producen una nubosidad<sup>56</sup> en la imagen, que si produce el fenómeno de difracción<sup>57</sup> y por lo tanto proporciona imágenes mas nítidas. La complejidad de las lentes, hacen que los telescopios refractores sean muy costosos; por otro lado, los refractores son mucho mas pequeños en diámetro que los reflectores comparablemente en precio. Un telescopio reflector enfoca y redirecciona el haz de luz hacia alguna dirección incidente, por lo tanto, este requiere de óptica adicional para recibir la imagen en la ruta deseada.

<sup>53</sup> Todas las estrellas que puedan estar lo suficientemente lejos tales que estas puedan considerarse como fuentes puntuales de luz.

<sup>54</sup> Usualmente en el infinito.

<sup>55</sup> Componentes ópticos.

<sup>56</sup> La nubosidad central reduce el incremento de luz que llega hasta el lente primario y adiciona patrones de difracción los cuales degradan la resolución.

<sup>57</sup> Introduce aberraciones en la calidad de las imágenes.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

El *telescopio Newtoniano*<sup>58</sup> es del tipo reflector, este usa un espejo diagonal<sup>59</sup> para redireccionar la luz, fuera del costado del telescopio a el ocular, la colocación del ocular en el lugar equivocado al final del telescopio limita su tamaño práctico y su diseño asimétrico, por lo anterior, su diseño excluye el uso de instrumentación muy pesada. El diseño Newtoniano como se muestra en la figura (A.2) es utilizado principalmente por astrónomos amateurs.

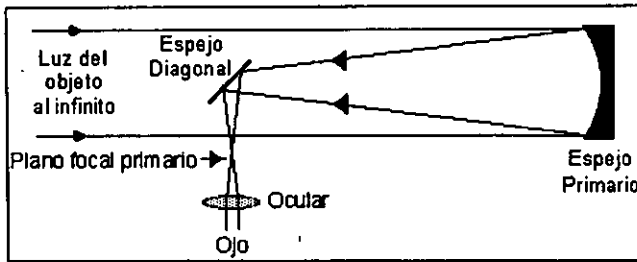


Figura (A.2) Telescopio Newtoniano.

El Telescopio reflector Cassegrain como se muestra en la figura (A.3) usa un espejo secundario convexo el cual tiene la función de interceptar la luz del espejo primario, y reflejarla en el sentido inverso de nuevo, reduciendo el ángulo convergente en el proceso, después la luz pasa a través de un hueco que se encuentra en el centro del espejo primario. Cabe destacar que el lugar donde se encuentra el foco en este tipo de telescopios facilita montar instrumentación y el diseño óptico permite ampliar el diámetro de los telescopios y por ende permite hacer cúpulas con domos pequeños. Este diseño es el más usado en la mayoría de los observatorios del mundo.

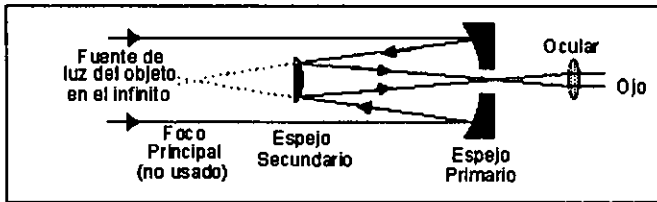


Figura (A.3) Telescopio Cassegrain.

Los telescopios que usan una combinación de lentes y espejos para formar imágenes son llamados *catadiotrico*. Un ejemplo es la cámara de Schmidt, el cual usa un lente débil y frágil, parecida a una placa correctora en la entrada de el telescopio para corregir en ambos ejes las aberraciones de la imagen; este tipo de telescopio no puede ser usado para observación. Uno de los mas populares del diseño anterior es el Cassegrain-Schmidt, el cual es muy parecido al Cassegrain, pero con la adición de una platina correctora del tipo Schmidt como se observa en la figura (A.4).

<sup>58</sup> Inventado por Sir Isacc Newton.

<sup>59</sup> Es un espejo plano inclinado en un ángulo de 45 grados.

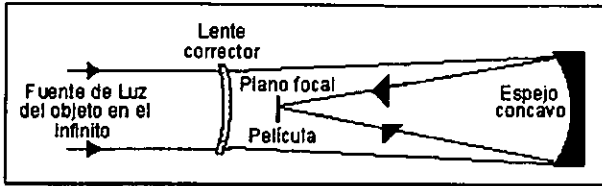


Figura (A.4). Telescopio Cassegrain-Schmidt.

Las propiedades fundamentales ópticas de un telescopio se describen por tres parámetros: la *longitud focal*, la *apertura*, y el *radio focal (f/radio)*. La longitud focal ( $f$ ) es la distancia de el objetivo a donde la imagen de un objeto distante en el infinito se forma. La apertura ( $A$ ) de un telescopio es simplemente el diámetro de sus lentes (o espejos) colectores de luz. El  $f$ /radio se define como, el radio de la longitud focal de la lente o espejo para su apertura

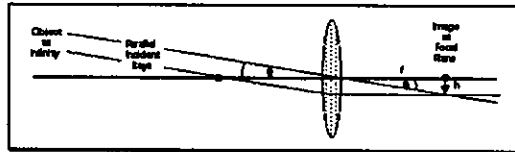
$$\frac{f}{\text{radio}} = \frac{f}{A}$$

si se conocen dos de los tres parámetros, entonces se puede calcular el tercero.

## LONGITUD FOCAL.

Un objeto que tiene un tamaño angular ( $\theta$ ) en el cielo puede formar una imagen de tamaño lineal  $h$ , dado aproximadamente por

$$h = \theta_{\text{radianes}} f = \frac{\theta}{57.3^\circ} f$$



La escala de la imagen, es el radio del tamaño de la imagen lineal para su tamaño angular actual.

$$\text{Escala de la Imagen} = \frac{h}{\theta} = \frac{f}{57.3^\circ}$$

Como se sabe *la escala de la imagen de cualquier objeto depende únicamente sobre la longitud focal de los telescopios*. Dos telescopios con longitud focal idéntica producen imágenes de tamaño idéntico de el mismo objeto a pesar de cualquier otra diferencia física. Por otro lado, la escala de la imagen es directamente proporcional a  $f$ : duplicando la longitud focal puede producirse una imagen al doble del tamaño lineal y cuatro veces la longitud del tamaño real.

## APERTURA.

La apertura  $A$  de un telescopio es el diámetro del elemento óptico principal donde la luz se recolecta. La capacidad para recolectar la luz, o captar luz, de el telescopio es proporcional a el área de el elemento objetivo o  $A^2$ . Para una fuente puntual, como una estrella, todos los rayos de luz colectados o recogidos, podrían converger para formar una imagen puntual (parecida). La apertura de un telescopio es el principal criterio para determinar la magnitud estelar limite visible.

La potencia de resolución<sup>60</sup> de una imagen en un telescopio óptico es también principalmente función de la apertura. El limite de difracción teórico para la resolución de un telescopio esta dado por:

$$\theta_{DIF} \geq \frac{1.2\lambda}{\Lambda}$$

donde  $\lambda$  (lambda) es la longitud de onda de luz usada.

## RADIO FOCAL.

Aunque la cantidad de luz captada por un telescopio es proporcional a  $A^2$ , la luz colectada se extiende sobre un área en el plano focal que es proporcional a  $h^2$  y por lo tanto proporcional a  $f^2$ ; por ende, lo resplandeciente de la imagen extendida (no puntual) del objeto puede ser linealmente escalable por el radio  $(Af)^2$ , o inversamente con el cuadrado de el  $f/\text{radio} = f/A$  de el telescopio:

$$\text{Brillantez} \propto \frac{1}{f/\text{radio}^2}$$

El  $f/\text{radio}$  de un telescopio es por lo tanto un factor único que determina la brillantez de la imagen de un objeto extendido. Por ejemplo, si un telescopio tiene dos veces la apertura y dos veces la longitud focal de otra, ambos telescopios son geoméricamente similares y pueden usar la misma exposición fotográfica para producir imágenes idénticamente brillantes.

---

<sup>60</sup> Capacidad para resolver características adyacentes.

## 1.4 LA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA DE FASE (FEF)<sup>61</sup>.

La función de estructura de fase tiene la característica de simetría como se observa a continuación

$$D_{\varphi}(\bar{\rho}) = \left\langle \left| \varphi(\bar{u} + \bar{\rho}) - \varphi(\bar{u}) \right|^2 \right\rangle \quad (\text{A.1})$$

donde se cumple que para toda  $\bar{\rho} = -\bar{\rho}$ , esto por la suposición, de que la FEF tiene estadísticas Gaussianas para  $\varphi$  de la cual se deriva que

$$\langle e^{i\alpha} \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2)}$$

Se sabe que el promedio de un frente de onda sobre una integración finita en el tiempo es diferente de cero, es decir, en el frente de onda promedio se generan errores de frentes de onda residuales que son la causa de las aberraciones estadísticas gaussianas como astigmatismo, coma, etc., ya que la exposición larga de imágenes son la causa de que las aberraciones que se generan tengan estadísticas gaussianas. Rigaut's uso un método por medio del cual pudo sustraer *el promedio del frente de onda de la totalidad de los frentes de onda en su conjunto*, de tal manera que para extraer de una Función de Transferencia Modulada (FTM) simétrica y gaussiana la cual se encuentra convolucionada con otra FTM no simétrica y no gaussiana; que se obtuvieron del tiempo promedio del frente de onda; a esta finalmente se le aplica transformada de Fourier para obtener la FEF (Esta PSF después se le aplica la transformada de Fourier del frente de onda, dado que el "ruido" se ha promediado junto con la salida.

Escribiendo la ecuación básica como

$$FTM = \varphi * \varphi^*$$

donde la Función de Transferencia Modulada (FTM), esta representada por

$$FTM(\bar{\rho}) = \int_{\text{PUPILA}} A(\bar{r}) e^{i\varphi(\bar{r})} A(\bar{r} + \bar{\rho}) e^{-i\varphi(\bar{r} + \bar{\rho})} d\bar{r}$$

Ahora bien, se supone que la fase se puede descomponer en dos componentes, uno el promedio del tiempo  $\varphi_0$ , y el otro la fase dinámica,  $\varphi'$ , de donde

$$FTM(\bar{\rho}) = \int_{\text{PUPILA}} A(\bar{r}) A(\bar{r} + \bar{\rho}) e^{i\varphi_0(\bar{r})} e^{i\varphi'(\bar{r})} e^{-i\varphi_0(\bar{r} + \bar{\rho})} e^{-i\varphi'(\bar{r} + \bar{\rho})} d\bar{r}$$

<sup>61</sup> En inglés se le conoce como Phase Structure Función = Función de Estructura de Fase. Para más información consulte la siguiente dirección electrónica [http:// hplyot.obspm.fr/~lai/psf/psf.html](http://hplyot.obspm.fr/~lai/psf/psf.html) [PSF retrieval from the WFS measurements in the case of non-gaussian statistics. O Lai].

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

$$FTM(\vec{\rho}) = \int_{PUPILA} A(\vec{r})A(\vec{r} + \vec{\rho})e^{i(\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r} + \vec{\rho}))} e^{i\varphi_0(\vec{r})} e^{-i\varphi_0(\vec{r} + \vec{\rho})} d\vec{r}$$

y de esta manera, si se toma el promedio en el tiempo de un conjunto de imágenes, se obtiene

$$\langle FTM(\vec{\rho}) \rangle = \int_{PUPILA} A(\vec{r})A(\vec{r} + \vec{\rho})e^{\frac{-1}{2}\langle (\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r} + \vec{\rho}))^2 \rangle} e^{i\varphi_0(\vec{r})} e^{-i\varphi_0(\vec{r} + \vec{\rho})} d\vec{r}$$

Pero de (A.1), se puede obtener la función de estructura de fase  $D_\varphi$  de la siguiente manera

$$\langle FTM(\vec{\rho}) \rangle = e^{\frac{-1}{2}D_\varphi(\rho)} \int_{PUPILA} A(\vec{r})A(\vec{r} + \vec{\rho})e^{i\varphi_0(\vec{r})} e^{-i\varphi_0(\vec{r} + \vec{\rho})} d\vec{r}$$

El método para recuperar  $D_\varphi$ , se describe en el artículo de F Rigaut's. Finalmente se puede extraer la función de difusión puntual aplicando la transformada de Fourier.

$$FEF = TF \left( e^{\frac{-1}{2}D_\varphi(\rho)} \times \int_{PUPILA} A(\vec{r})A(\vec{r} + \vec{\rho})e^{i\varphi_0(\vec{r})} e^{-i\varphi_0(\vec{r} + \vec{\rho})} d\vec{r} \right)$$

Donde la integral de la expresión anterior es la autocorrelación de la fase promedio sobre la pupila.



# 2

## Principios de Procesos Estocásticos.

### INTRODUCCIÓN:

Hay sistemas que se pueden presentar en ciertos números de estados y esto se da en forma aleatoria, interviniendo la probabilidad de dos maneras.

- a) Los cambios de estado se efectúan en instantes aleatorios  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .
- b) En uno de estos instantes se pasa, por ejemplo de un estado  $E_i$  a otro también aleatorio:  $E_0, E_1, \dots, E_k$

Por lo tanto, la sucesión aleatoria de instantes "privilegiados" en que se produce un cierto hecho o suceso, define la originalidad de este modelo probabilístico llamado "proceso".

### ALGUNAS DEFINICIONES DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS.

¿Qué es un proceso estocástico?

Si se denota a  $X_n$  como el valor de un objeto en un almacén en la  $n$ -ésima unidad de tiempo, se puede representar esta evolución errática por una familia de variables aleatorias  $[X_0, X_1, \dots, X_n]$  indexada por el parámetro de tiempo discreto  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ejemplos:

1. El número  $X_t$  de carros accidentados en una ciudad, durante el intervalo de tiempo  $[0, t]$  proporciona una colección de variables aleatorias  $[X_t; t \geq 0]$  indexadas por el parámetro de tiempo continuo  $t$ .
2. La velocidad  $X_u$  en el punto  $u$  en un campo de viento turbulento proporciona una familia de variables aleatorias  $[X_u; u \in \mathbb{R}^3]$  indexadas por un parámetro espacial multidimensional  $u$ .

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

**Definición 1:** Un proceso estocástico  $\bar{X} = \{X(t), t \in T\}$  es una colección de variables aleatorias, donde para cada  $t$  en el conjunto indexado  $T$ ,  $X(t)$  es una variable aleatoria, a menudo  $t$  es el tiempo y a  $X(t)$  se le denomina el estado del proceso en el tiempo  $t$ . Si el conjunto indexado  $T$  es un conjunto contable, se denomina a  $\bar{X}$  un proceso estocástico de tiempo discreto, y si  $T$  es continuo, se denomina un proceso continuo. [Sheldon M. Ross. 1989]

**Definición 2:** Dado un conjunto indexado  $I$ , un proceso estocástico indexado por  $I$  es una colección de variables aleatorias  $\{X_\lambda; \lambda \in I\}$  en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  tomando valores en un conjunto  $S$ . Al conjunto  $S$  se le llama el espacio de estados del proceso. [N Bhattacharya, Rabi. 1989]

## PROCESOS ESTOCÁSTICOS CON INCREMENTOS INDEPENDIENTES.

**Definición 3:** Un proceso estocástico  $\bar{X} = \{X(t), t \in T\}$  se dice que tiene *incrementos independientes* si para todo  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , las variables aleatorias

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

son independientes. Por otro lado,  $X(t-s) - X(t)$  tiene incrementos estacionarios si tiene la misma distribución para toda  $t$ . [Sheldon M. Ross. 1989]

**Definición 4:** Un proceso estocástico de parámetros  $\{X(t), 0 \leq t \leq \infty\}$  se dice que tiene incrementos independientes. Si  $X(0) = 0$  y para toda elección de índices  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , de  $n$  variables aleatorias,

$$X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

son independientes. [N Bhattacharya, Rabi. 1989]

El proceso se dice que tiene incrementos independientes si, en resumen  $X(t_2 + h) - X(t_1 + h)$  tienen la misma distribución como  $X(t_2) - X(t_1)$  para toda elección de índices  $t_1, t_2$  y  $h$  mayores que cero.

## EJEMPLOS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS.

a) *Ruido Blanco:* Las perturbaciones aleatorias que aparecen en muchos fenómenos reales se representan adecuadamente mediante un proceso estocástico formado por variables aleatorias independientes. En general estas variaciones aleatorias se consideran que son normales o gaussianas. A este proceso aleatorio se le denomina ruido blanco.

b) *Movimiento Browniano*: En 1905, Einstein demostró que este movimiento puede explicarse si se supone que la partícula está sometida a continuos choques de las moléculas del fluido, por lo tanto, si  $X(t)$  representa al desplazamiento que, desde la posición inicial, ha experimentado la partícula en el tiempo  $t$ , considerando además que  $X(t)$  es un proceso estocástico de incrementos normales estacionarios independientes de media cero.

## 2.1

### EL PROCESO DE WIENER-LEVY.

Supóngase una partícula con diámetro  $10^{-4}$  cm inmersa en un líquido o gas, esta manifiesta continuos movimientos irregulares, los cuales se pueden percibir bajo el microscopio<sup>62</sup>. El movimiento de tales partículas se conoce como movimiento Browniano. En 1905 Einstein mostró que el movimiento Browniano se puede explicar, asumiendo que las partículas están expuestas a un bombardeo continuo de las moléculas (entre ellas mismas) alrededor de el medio.

Si se denota a  $X(t)$  el desplazamiento desde cualquier punto después de un tiempo  $t$  de una partícula Browniana, y se establece por definición  $X(0)=0$ , se sabe que una partícula Browniana sufre constantes movimientos debido a continuos choques o "impactos" que sufre una partícula sobre otra debido a un campo de fuerza que existe alrededor de el medio. El desplazamiento de una partícula sobre un intervalo de tiempo  $(s,t)$ , es la suma de un extenso número de pequeños desplazamientos, y por el Teorema del Límite Central es razonable suponer que  $X(t)-X(s)$  está distribuida en forma normal, es decir, se distribuye en forma gaussiana o de campana. De lo anterior, se asume que la distribución de probabilidad para el desplazamiento  $X(t)-X(s)$ , deberá ser el mismo en cuanto a un incremento  $h$  dado por  $X(t+h)-X(s+h)$  para cualquier  $h>0$ , y por lo tanto se concluye que el medio está en equilibrio y que la regla de probabilidad de el desplazamiento de las partículas sobre un intervalo debe depender únicamente de la longitud  $t-s$  de el intervalo, y no de el tiempo en el cual se empieza la observación. Se asume que el movimiento de la partícula se debe a impactos moleculares e irregulares, es decir, el proceso estocástico  $X(t)$  tiene incrementos independientes, donde los desplazamientos sobre distintos intervalos, sin que se traslapen éstos, son independientes. Un proceso estocástico  $\{X(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Wiener si:

- i.  $\{X(t), t \geq 0\}$  tiene incrementos independientes estacionarios.
- ii. Para cada  $t>0$ ,  $X(t)$  está distribuida normalmente.
- iii. Para toda  $t>0$ ,  $E[X(t)]=0$ ,
- iv.  $X(0)=0$

es decir,  $X(t)$  tiene incrementos independientes y  $X(0)=0$ , para cualquier intervalo o estado, la regla de probabilidad de un proceso estocástico  $X(t)$  donde los incrementos están dados por  $X(t)-X(s)$  para cualquier  $s<t$  su distribución de probabilidad es una normal y sus reglas de probabilidad están determinadas por su media y su varianza. Una forma de verificar esto es calculando la  $E[X(s)-X(t)]=0$ , Por lo tanto,

<sup>62</sup> este mismo fenómeno ocurre también en partículas suspendidas en el aire.

$$\varphi_{X(t)-X(s)}(\mu) = \exp\left\{\frac{-1}{2}\mu^2 \text{var}[X(t) - X(s)]\right\}$$

de esta manera  $X(t)$  tiene incrementos independientes estacionarios, y se puede demostrar que ésta es alguna constante positiva  $\sigma^2$ , tal que para toda  $t > s > 0$ ,  $\text{var}[X(t) - X(s)] = \sigma^2 |t - s|$

## 2.2 MOVIMIENTO FRACCIONAL BROWNIANO.

### INTRODUCCIÓN.

Por "movimiento fraccional Browniano" (mfB), se denota a una familia de funciones aleatorias Gaussianas definidas como<sup>63</sup>:  $B(t)$  es el movimiento Browniano ordinario, y  $H$  es un parámetro que se encuentra entre  $0 < H < 1$ , el mfB de exponente  $H$  es un promedio del desplazamiento de  $dB(t)$ , en el cual los incrementos  $B(t)$  se compensan con el Kernel  $(t-s)^{H-1/2}$ . La característica básica de el mfB, es que existe un "periodo de interdependencia" entre sus incrementos los cuales son infinitos. El estudio de funciones aleatorias ha sido desarrollada para sucesiones de variables aleatorias independientes, en procesos Markov, y para otras funciones aleatorias que tienen la propiedad de que para un número de muestras, suficientemente grandes, estas funciones son independientes. Algunos estudios empíricos de fenómenos con cambio aleatorio frecuentemente sugieren, todo lo contrario, una fuerte interdependencia entre muestras distantes, algunos ejemplos surgen en economía. Estos son conocidos por los economistas como series de tiempo y los cuales exhiben ciclos en ciertos ordenes de magnitud, los ciclos más pequeños tienen periodos de duración comparables a alguna muestra de tamaño más grande. Otra clase de ejemplos se ve en el estudio de fluctuaciones de sólidos, donde muchas de tales fluctuaciones se llaman "1:f ruidos", porque las muestras de su densidad espectral toman la forma  $\lambda^{-1-2H}$ , siendo  $\lambda$  la frecuencia, y  $H$  se encuentra en el intervalo  $1/2 < H < 1$ . Una tercera clase de fenómenos, se encuentra en Hidrología donde existe una interdependencia, Hurst encuentra que el intervalo del flujo de agua acumulado varía proporcionalmente a  $t^H$  con  $1/2 < H < 1$ , lo anterior se puede observar en lo subsecuente para relacionar íntimamente el presente de un intervalo infinito de interdependencia entre flujos de agua sucesivos.

### LA DEFINICIÓN DE MOVIMIENTO FRACCIONAL BROWNIANO.

Si  $t$  denota el tiempo  $-\infty < t < \infty$ , y  $\omega$  representa el conjunto de todos los valores de la función aleatoria (es decir,  $\omega$  representa el espacio muestra  $\Omega$ ). El movimiento Browniano Ordinario,  $B(t, \omega)$  de Bachelier, Wiener y Levy es una función aleatoria real con incrementos Gaussianos independientes tales que  $B(t_2, \omega) - B(t_1, \omega)$  tiene media cero y varianza  $|t_2 - t_1|$ , y tales que  $B(t_2, \omega) - B(t_1, \omega)$  es independiente de  $B(t_4, \omega) - B(t_3, \omega)$  si los intervalos  $(t_1, t_2)$  y  $(t_3, t_4)$  no se traslapan. El hecho es que la desviación estándar de los incrementos  $B(t+T, \omega) - B(t, \omega)$ , con  $T > 0$ , es igual a  $T^{1/2}$  y frecuentemente se refiere como "la regla  $T^{1/2}$ ".

<sup>63</sup> Mandelbrot, Benoit B., *Autosimilaridad en procesos aleatorios*, Abril 13 de 1964, y *Autosimilaridad de procesos aleatorios: extrapolación, interpolación, y perturbaciones decrecientes*, Mayo 1 de 1964, editado por IBM.

**Definición 5:** Denótese a  $H$ , un parámetro que toma valores entre  $0 < H < 1$ , y asígnese a  $b_0$  un número real arbitrario. Se denomina a la siguiente función aleatoria  $B_H(t, \omega)$ , el movimiento Browniano fraccional reducido con parámetro  $H$  y un valor inicial  $b_0$  en el tiempo 0. Para  $t > 0$ ,  $B_H(t, \omega)$  se define como

$$B_H(0, \omega) = b_0 \quad (1)$$

$$B_H(t, \omega) - B_H(0, \omega) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (s)^{H-\frac{1}{2}} \right\} dB(s, \omega) + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s, \omega)$$

lo mismo sucede para  $t < 0$ . Nótese que si  $b_0 = 0$ ,  $B_{1/2}(t, \omega) = B(t, \omega)$ . Para cualquier valor de  $H$  diferente de  $1/2$ , a  $B_H(t, \omega)$  se le llama una *derivada o integral fraccional<sup>64</sup>* de  $B(t, \omega)$ , el *mB* se divide en tres categorías diferentes que corresponden a  $0 < H < 1/2$ ,  $1/2 < H < 1$ , y  $H = 1/2$ .

Existe una similitud y que se conoce como el movimiento promedio de  $B(t, \omega)$ , llámese, la integral fraccional de Holmgren-Riemann-Liouville

$$B_H(t, \omega) = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \int_0^t (t-s)^{H-1/2} db(s, \omega)$$

donde  $H$  es cualquier número positivo. Esta integral es una herramienta de gran importancia en el origen de muchas aplicaciones. Si  $B(t, \omega)$  se reemplaza por un valor complejo de el movimiento Browniano, la integral que define  $B_H$  proporciona el movimiento fraccional Browniano complejo.

### PROPIEDADES DE AUTOSIMILARIDAD.

**Definición 6:** La notación  $\{X(t, \omega)\} \cong \{Y(t, \omega)\}$  significa que las dos funciones aleatorias  $X(t, \omega)$  y  $Y(t, \omega)$  tienen la misma función de distribución conjunta finita a *fortiori*, y a la vez el mismo espacio de estados.

**Definición 7:** Los incrementos de una función aleatoria  $\{X(t, \omega); -\infty < t < \infty\}$  se dice que son autosimilares<sup>65</sup> (selfsimilarity s-s) con parámetro  $H$  ( $H \geq 0$ ) si para cualquier  $h > 0$  y cualquier  $t_0$ ,

$$\{X(t_0 + \tau, \omega) - X(t_0, \omega)\} \cong \{h^H [X(t_0 + h\tau, \omega) - X(t_0, \omega)]\} \quad (2)$$

<sup>64</sup> La introducción de  $\Gamma(H+1/2)$  como denominador asegura que cuando  $H-1/2$  es un entero, una integral fraccional viene representada por una integral ordinaria repetida. Se nota también que la definición de  $B_H$  se observa más simétrica de tal manera que se puede escribir la siguiente expresión como la diferencia de convergencia de integrales convergentes:

$$B_H(t_2, \omega) - B_H(t_1, \omega) = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \left\{ \int_{-\infty}^{t_2} [(t_2 - s)^{H-1/2} dB(s, \omega) - \int_{-\infty}^{t_1} (t_1 - s)^{H-1/2} dB(s, \omega) \right\}.$$

<sup>65</sup> Para cada  $t_0$ , esta definición significa que cuando  $t$  se restringe para  $t \geq t_0$ ,  $X(t, \omega) - X(t_0, \omega)$  es un "proceso estocástico semiestable", por ejemplo, la integral fraccional de Levy Riemann-Liouville de  $B(t, \omega)$  es semiestable para toda  $H > 0$ . Si  $X(t, \omega)$  es semiestable con parámetro  $H$  y tiene incrementos estacionarios, entonces  $X(t, \omega)$  es la restricción para  $t \geq 0$  de un proceso con incrementos autosimilares (selfsimilarity s-s) con parámetro  $H$ .

El siguiente teorema introduce el movimiento fraccional Browniano (mfB).

**Teorema 1:** Los incrementos de el mfB,  $B_H(t, \omega)$  son estacionarios y autosimilares con parámetro H.

**Corolario 1:** Una regla  $T^H$  para la desviación estándar de  $B_H$  puede ser calculada de la siguiente manera

$$E[(B_H(t+T, \omega) - B_H(t, \omega))]^2 = T^{2H} V_H \quad (3)$$

donde:

$$V_H = [\Gamma(H+1/2)]^{-2} \left\{ \int_0^1 [(1-s)^{H-1/2} - (s)^{H-1/2}] ds + \frac{1}{2H} \right\} \quad (4)$$

**Definición 8:** Denótese a  $X(t, \omega)$  una función aleatoria de valores reales. El intervalo secuencial se define como sigue:

$$M(t, T, \omega) = \sup_{t \leq s \leq t+T} [X(s, \omega) - X(t, \omega)] - \inf [X(s, \omega) - X(t, \omega)] \quad (5)$$

**Corolario 2:** Una regla  $T^H$  para el intervalo secuencial de un proceso con incrementos autosimilares se puede representar como sigue: Si  $X(t, \omega)$  tiene incrementos autosimilares con parámetro H, entonces

$$M(T, \omega) \cong T^H M(1, \omega)$$

Si por ejemplo,  $X(t, \omega) = B(t, \omega)$  tal que  $H = 1/2$ , entonces  $T^{-1/2} M(t, T, \omega)$  tiene una distribución independiente de t en T.

## REGLAS DE ESCALA DEL MOVIMIENTO FRACCIONAL BROWNIANO.

Un proceso aleatorio  $X(t)$  con incrementos gaussianos se representa por

$$X(X(t_2) - X(t_1)) \propto |t_2 - t_1|^{2H}$$

donde si  $H = 1/2$  se tiene movimiento Browniano ordinario, pero si el parámetro H toma valores entre  $0 < H < 1$  se llama movimiento fraccional Browniano (mfB), para el caso del movimiento Browniano ordinario, se dice que los incrementos de X son estadísticamente autosimilares con parámetro H, es decir

$$X(t_0 + t) - X(t_0) \quad \text{y} \quad \frac{1}{r^H} (X(t_0 + rt) - X(t_0))$$

tienen la misma función de distribución unidimensional conjunta finita para cualquier  $t_0$  y  $r > 0$ . Si se establece que  $t_0=0$  y  $X(t_0)=0$ , las dos funciones anteriores se expresan como:

$$X(t) \quad \text{y} \quad \frac{1}{r^H} X(rt)$$

las cuales son estadísticamente indistinguibles, e indica que el movimiento fraccional Browniano es un proceso "acelerado" por un factor  $X(rt)$  siendo esta la propiedad de escala dividida entre las amplitudes de  $r^H$ , como se puede observar en la figura (A.5).

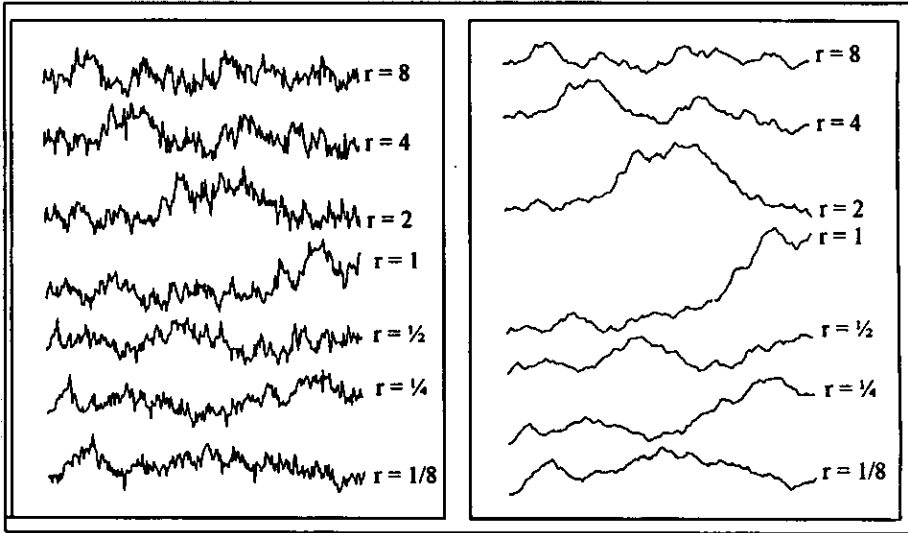


Figura (A.5).

El movimiento fraccional Browniano se divide en tres categorías distintas:  $H < 1/2$ ,  $H = 1/2$  y  $H > 1/2$ . Para  $H = 1/2$ , es el movimiento Browniano ordinario el cual tiene incrementos independientes, esto quiere decir que,  $X(t_2) - X(t_1)$  y  $X(t_3) - X(t_2)$  con  $t_1 < t_2 < t_3$ , son independientes de acuerdo a la teoría de probabilidades, y su correlación es 0. Para  $H > 1/2$  su correlación es positiva entre estos incrementos, es decir, la gráfica es mucho mas suave y creciente para algún  $t_0$ , entonces esta tiende a ser continua incrementando para  $t > t_0$ , donde su dimensión fractal de la gráfica debe ser  $2-H=1$ . Para  $H < 1/2$ , la correlación entre sus incrementos son negativos y las curvas observadas oscilan más erráticamente. De hecho las gráficas de las muestras de mfB tienen una dimensión fractal de  $2-H$  para  $0 < H < 1$ .

# 3

## Turbulencia Atmosférica.

### INTRODUCCIÓN:

El estudio del fenómeno turbulento es una tarea demandante en muchos campos del conocimiento, como por ejemplo, en Astrofísica, la descripción de transporte de energía turbulenta y procesos de disipación en plasmas estelares es una clave importante para el entendimiento de el balance de la energía en las estrellas.

### TURBULENCIA:

¿Qué es *la turbulencia*? La turbulencia se puede definir como un movimiento irregular, desordenado e inestable de un fluido, en el espacio y en el tiempo. Algunas definiciones consultadas en el diccionario indican lo siguiente

Turbulencia movimientos de fluidos en los cuales las velocidades locales y presión fluctúan irregularmente, como por ejemplo en un río o en el viento.

...“La característica esencial del flujo turbulento es que sus fluctuaciones son aleatorias...”

...“La aleatoriedad de las fluctuaciones del viento reflejan un comportamiento irregular y aleatorio como cuando se hace volar un papalote...”

### CARACTERÍSTICAS QUE HACEN QUE UN FLUJO TENGA UN CARÁCTER TURBULENTO.

1. *Irregularidad o aleatoriedad*: el flujo turbulento es impredecible, es decir, existen movimiento fortuitos o azarosos que causan contraflujos en el movimiento de un fluido.
2. *Difusividad*, la cual ocasiona un rápido y máximo incremento al instante en la transferencia de calor y masa.
3. Cuando el *numero de Reynolds* es muy grande ocurre un flujo turbulento.
4. Disipación: flujos turbulentos que son siempre disipativos.
5. Continuo: la turbulencia es un fenómeno continuo.



Las referencias anteriores hacen énfasis en: desorden, azaroso o fortuito, irregular y vórtices, lo cual indica que la palabra turbulencia significa el desorden en todas las escalas siendo este uno de los problemas que tradicionalmente ha sido considerado como *arquetipo* de lo aleatorio. Para H. Tennekes la turbulencia es impredecible, y es el caos que aparece en fluidos por causa de las innumerables inestabilidades asociadas con los vórtices o torbellinos.

La turbulencia atmosférica muestra que el movimiento de el aire en distintas partes consiste en sucesiones de ráfagas o rachas de viento, así como de vientos tranquilos acompañadas por algunas alteraciones rápidas e irregulares en diferentes direcciones. La turbulencia implica un estado en el cual las velocidades instantáneas exhiben un comportamiento irregular y aparentemente sufren fluctuaciones aleatorias, tal que en la práctica únicamente las propiedades estadísticas pueden ser reconocidas y sometidas a análisis.

## ALGUNAS TEORÍAS SOBRE FLUJOS TURBULENTOS.

Imagínese un fluido en un tubo, la velocidad de el fluido es muy baja, si se observa minuciosamente el comportamiento de éste, a dicho comportamiento se le denomina *laminar*, si las velocidades del flujo cambian repentinamente y estas son altas, se le conoce como *turbulencia*, es decir, las velocidades muestran fluctuaciones rápidas e irregulares. De esta manera, a los cambios que sufre un fluido, de un comportamiento laminar a uno turbulento y viceversa en un determinado tiempo se le ha denominado "intermitencia". Cuando la velocidad de un flujo se incrementa, el movimiento turbulento podría incrementar, y finalmente el flujo llegaría a ser totalmente turbulento. La manera de describir la transición de un flujo laminar a uno turbulento lo proporciona el número de Reynolds, representado por la siguiente expresión

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\mu}$$

donde:  $v$  es la velocidad del fluido,  $\rho$  es la densidad,  $\mu$  es la viscosidad de el fluido, y  $l$  es el diámetro de el tubo. De tal manera que de varios experimentos se ha concluido que la transición hacia un comportamiento turbulento ocurre cuando el número de Reynolds ésta entre  $2 \times 10^3$  y  $1 \times 10^5$ .

La teoría de Kolmogorov, explica que la energía se suministra de escalas exteriores a escalas interiores cada vez más y más pequeñas, a las cuales denomino cascadas de energía, donde la energía termina por disiparse. Si se define  $E(k)$  como la energía cinética por unidad de masa y número de ondas,  $\varepsilon$  el promedio de la energía de disipación, entonces la regla de Kolmogorov para el espectro de energía esta dada por

$$E(k) \sim \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$$

*Aproximación Fractal de Perturbaciones  
Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

la regla puede obtenerse para un análisis unidimensional. Usando la regla de Kolmogorov se asume que en un momento determinado existen cascadas o remolinos de tamaño definido, y en algún tiempo posterior este tamaño tiende a decrecer. Tomando como punto de partida el concepto de *existencia simultánea* de remolinos grandes y pequeños, Frisch y otros en el año de 1978 derivan la siguiente relación

$$E(k) \sim \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} (kl)^{-\left(1-\frac{D}{3}\right)}$$

donde  $l$  es la escala de remolinos grandes o externos, y  $D$  la dimensión de similaridad, el cual es un caso especial de la dimensión fractal de Mandelbrot [B Mandelbrot, Benoit, 1975].

## DIMENSIÓN FRACTAL Y AUTOSIMILARIDAD.

Mandelbrot en el año de 1967 utiliza una forma sencilla de introducir el concepto de fractal, preguntándose él mismo lo siguiente: ¿Cuál es la longitud de la costa de Bretaña? Obviamente la longitud es rugosa, irregular y difícilmente se puede definir, dependiendo fuertemente de la escala a la cual uno observa y del procedimiento de medición. Por ejemplo, si se hace un conjunto de divisiones y comenzando con un patrón de medición de tamaño  $\delta$ , o de manera alternativa un criterio de la misma longitud, y después "caminando" a través del contorno de la línea de la costa, se debe encontrar un cierto número de pasos necesarios para cubrir el perímetro total de la isla, si a este número de pasos necesarios denotado por  $N$  es multiplicado por  $\delta$ , el resultado proporciona una medida aproximada de la longitud de la costa denotada por  $L(\delta)$ , de tal manera que todo depende del tamaño del patrón de medición, es decir, si se comienza con valores muy pequeños de  $\delta$ , se obtiene un valor muy grande de la longitud  $L(\delta)$ , de esta forma si se utilizan subdivisiones más y más pequeñas a distintas escalas cada vez más finas,  $L(\delta)$  observa un crecimiento hacia el infinito, el cual resulta que no es un resultado apropiado, de tal manera que se requiere trazar la longitud de el perímetro  $L(\delta)$  como una función de  $\delta$  en una escala log-log. Finalmente, la relación se puede representar por una línea recta descrita por

$$L(\delta) \sim \delta^{1-D}$$

$1-D$  es la inclinación de la línea de regresión, comúnmente el valor real de  $D$  para el contorno de una costa se encuentra entre 1.3 y 1.5. Mandelbrot utiliza el término "*dimensión fractal*" para esta  $D$ , y desde entonces, esta puede tomar valores no enteros entre 1 y 2. Para una curva "ordinaria", por ejemplo, el perímetro de un círculo, el procedimiento podría resultar en una constante  $L(\delta)$  para valores de  $\delta$  entre un cierto límite, lo cual está dirigido o encaminado para un trazo de inclinación de cero y  $D=1$ . Por ejemplo si se tiene la curva de Koch, cuyo perímetro consiste de estructuras formadas por triángulos en finas escalas, tiene una dimensión fractal de  $D=1.26$ . En términos generales, la dimensión fractal permite describir la complejidad morfológica de las fronteras de objetos naturales.

## DIMENSIÓN FRACTAL DE LA TURBULENCIA.

Mandelbrot en el año de 1975, estudio la geometría de la turbulencia homogénea de Kolmogorov  $k^{-\frac{5}{3}}$  y concluyo que las isosuperficies se caracterizan por una dimensión fractal de  $3 - \frac{1}{3}$  en tres dimensiones, en tanto que, para cortes bidimensional y unidimensional tienen una dimensión fractal de  $2 - \frac{1}{3}$  y  $1 - \frac{1}{3}$ , respectivamente.

### 3.1 FENÓMENO DE REFRACCIÓN.

Si un rayo luminoso incide con ángulo  $\alpha$  de modo oblicuo desde una sustancia ópticamente menos densa a otra más densa, su dirección de propagación se desvía y su trayectoria continua en la segunda sustancia con un ángulo de refracción  $\beta$  como se muestra en la siguiente figura (A.6). Para una sustancia isotrópica<sup>66</sup> es válida la ley de refracción de Snell.

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{c_2}{c_1}$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de incidencia,  $\beta$  es el ángulo de refracción,  $c_1$  y  $c_2$  son las velocidades de la luz, de la sustancia 1 y 2 respectivamente.

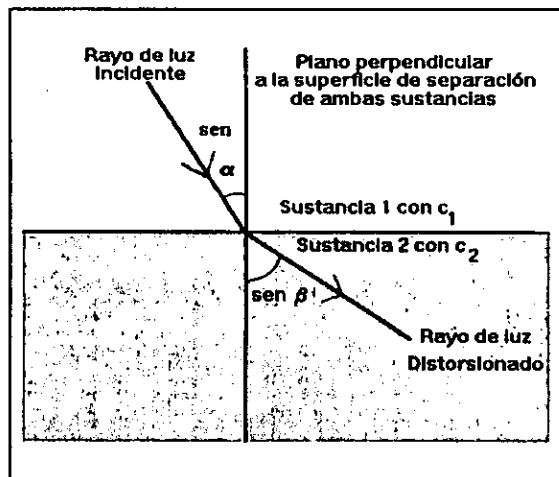


Figura (A.6) Fenómeno de Refracción.

Considerando la transición desde el vacío en el cual la velocidad de la luz es  $c_0$ , a una sustancia con velocidad de la luz  $c$ , se obtiene

<sup>66</sup> mismas propiedades en todas direcciones

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

$$c_1 = \frac{c_0}{n_1} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{c_0}{n_2}$$

donde se obtiene la ley de refracción de Snell

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

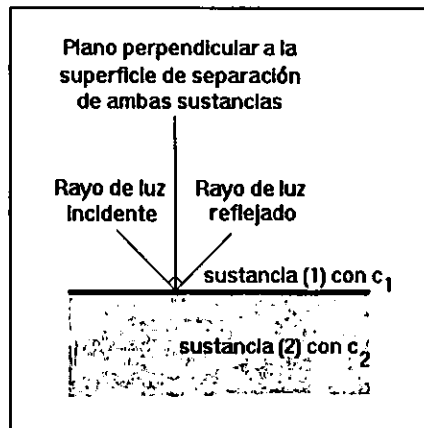
El índice de refracción  $n$  depende fundamentalmente de la correspondiente longitud de onda de la luz. La magnitud  $n$  vale para ondas luminosas que se propagan solamente con una única longitud de onda y con amplitud constante. En estas condiciones la onda no puede transmitir informaciones, la cual solo se logra cuando se aplica modulaciones en las mismas. En las comunicaciones ópticas (digitales) la modulación se efectúa por medio de pulsos luminosos. Se trata de grupos de ondas de corta duración que contienen ondas luminosas con diferentes longitudes. Las diferentes ondas integrantes de estos grupos no se propagan con la misma velocidad ya que sus longitudes de onda difieren entre sí. La velocidad de propagación de un grupo se denomina, velocidad de grupo, para la cual se denomina el índice de refracción del grupo  $n_g$  por medio de la relación

$$n_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}$$

Donde  $dn/d\lambda$  indica la pendiente de la curva de los índices de refracción  $n(\lambda)$ .

- Reflexión Total.

Cuando el rayo luminoso incide con ángulo  $\alpha$  cada vez mayor desde una sustancia ópticamente más densa con un índice de refracción  $n_1$  sobre la superficie de separación con una sustancia menos densa, con índice de refracción  $n_2$ , el ángulo de refracción  $\beta_0$  al llegar a determinado ángulo de incidencia  $\alpha_0$  puede ser igual a  $90^\circ$ .

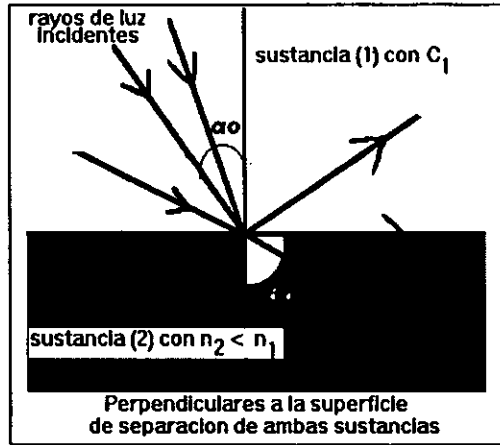


Fenómeno de reflexión.

En este caso el rayo luminoso se propaga paralelamente a la superficie de separación de ambas sustancias y el ángulo de incidencia  $\alpha_0$  se denomina ángulo límite entre las 2 sustancias. Para este ángulo vale la relación.

$$\text{sen}\alpha_0 = n_2 / n_1$$

Como se puede ver, el ángulo límite es función de los índices de refracción de ambas sustancias, como se muestra en la siguiente figura.



# 1

## **Glosario.**

- Aberraciones** En 1996, David L. Fried observó que los efectos ópticos de la turbulencia del aire se pueden describir mediante formas -aberraciones- simples del frente de onda, tales como el astigmatismo, la coma, curvatura esférica y cilíndrica, etc. Una aberración óptica es una imperfección en la calidad de la imagen que se observa a través de las lentes o espejos de un telescopio. Por ejemplo: la aberración cromática se manifiesta en la imagen que se forma a través de la lente con unas franjas de colores alrededor de la imagen, o la coma óptica, su nombre se deriva de la apariencia de la imagen algo así como un cometa de una fuente puntual de la luz formada por una lente simple.
- Abstracción** Define la relación entre un grupo de objetos tales que, un tipo de objeto representa un conjunto de características las cuales son compartidas por otros tipos de objetos.
- Ad hoc** que conviene a tal objeto argumento ad hoc.
- Adiabático** Transformación de estado de un cuerpo sin que éste ceda o reciba calor.
- A fortiori** (por lo que precede) dicese de los conocimientos que son independientes de la experiencia.
- Anisoplanatismo** Se refiere a la diferencia entre la fase de distorsión que se mide con el sensor del frente de onda, del haz de luz que emite un objeto que incide en el sensor y un instante antes de la corrección que se aplica por un sistema de óptica adaptiva, a dicha diferencia se le considera como un residual o un error.
- Apertura óptica** La apertura de una lente es la abertura a través del cual la luz pasa para formar la imagen. El tamaño de la apertura es el tamaño de la lente.
- A posteriori** (por lo que viene detrás). A partir de los datos de la experiencia.

<i>A priori</i>	(por lo que precede) dicese de los conocimientos que son independientes de la experiencia.
<i>Atmósfera</i>	Es la envolvente transparente de gases y partículas suspendidas que rodea la Tierra, y esta se encuentra influenciada por las condiciones ambientales de la superficie del planeta.
<i>Astronomía infrarroja</i>	Estudia las radiaciones que emiten los objetos celestes en longitudes de onda infrarroja, estas longitudes de onda son más grandes que las ópticas y más pequeñas que las longitudes de onda de radio. La región infrarroja del espectro electromagnético es catalogada por astrónomos sobre tres regiones pequeñas: la infrarroja media, la cercana y la grande.
<i>Autoafín o Autoafinidad</i>	Un objeto geométrico se denomina autoafín, si está formado por la unión de copias de el objeto mismo a diferentes escalas, con la característica de que a diferentes escalas el objeto no es isotrópico y no depende de la dirección. <i>Los fractales regulares</i> despliegan una autosimilaridad exacta, mientras que <i>los fractales aleatorios</i> conservan una autosimilaridad muy débil, conocida como autosimilaridad estadística.
<i>Autosimilar</i>	Un objeto geométrico se denomina Autosimilar, si está formado por la unión de copias de el objeto mismo a diferentes escalas, con la característica de que a diferentes escalas el objeto es isotrópico y uniforme en todas direcciones.
<i>Caos</i>	El caos es la antítesis de la simetría, y éste se puede definir como cualquier condición o lugar de un total desorden.
<i>Capa turbulenta</i>	Es cuando el número de Reynolds toma el valor de $Re=10^6$ lo cual ocasiona que el medio en el aire sea un medio turbulento.
<i>CCD</i>	(Charge-Coupled Device) Dispositivo de Acoplamiento por Carga.
<i>Comunicación entre objetos</i>	En sistemas orientados a objetos, toma la forma de un envío de requerimientos por parte de un objeto a otros objetos.
<i>Determinismo</i>	Newton no únicamente formula la teoría de la gravitación, y las tres leyes del movimiento, también revolucionó las matemáticas. Un ejemplo es que construyó un modelo para el movimiento de los planetas alrededor del Sol, la característica más importante de el modelo de Newton fue la habilidad de proporcionar predicciones exactas de la órbita de los planetas, es decir, si se conoce la posición y la velocidad de los planetas en cualquier instante dado, se puede, en teoría predecir la posición de los planetas en cualquier tiempo subsecuente, es decir, el sistema solar es <i>determinístico</i> : si se conoce la posición inicial y la velocidad de los planetas, entonces el movimiento subsecuente puede ser determinado.
<i>Difracción.</i>	Este fenómeno se produce cuando una onda de luz, de radio o acústica como el sonido, pasa por una abertura y se produce el efecto llamado difracción. La difracción es un cambio en la dirección, o inclinación, de una onda sobre una región.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones  
Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

- Disco de Airy** Es la imagen pequeña que se puede observar en un telescopio y que es provocada por una fuente de luz puntual tal como una estrella. La refracción de la luz que pasa a través de la apertura de un telescopio causa que la imagen de una fuente puntual tenga un tamaño finito.
- Encapsulamiento** Define el empaquetamiento de operaciones y datos dentro del objeto, tal que los datos son únicamente accesibles a través de su interfaz.
- Especialización** Ocurre cuando un tipo de objeto hereda operaciones, tipos de atributos y tipos de relaciones de uno o más tipos (con posibles restricciones).
- Espectro** Es la dispersión o exhibición de luz sobre todos los componentes. La luz Blanca tiene un espectro continuo; todos las longitudes de onda (o frecuencias) de la luz visible están presentes. La separación de la luz se efectúa por un prisma o Difracción discordante para crear un espectro de colores; el arco iris es un ejemplo natural de su espectro.
- Eventos** Son los mensajes que recibe del Kernel de Windows, es decir, las acciones que se están llevando a cabo sobre el control. El evento es una situación en la que se ve involucrado el control. Por ejemplo, el click del botón del Mouse sobre la superficie del control, el simple paso del Mouse sobre el control, el arrastrar y soltar, la perdida del foco en el control, etc.,
- Fractal** Patrón o norma geométrica que se repite a distintas escalas para producir formas irregulares y superficies que no se pueden representar por geometría euclídeana (geometría clásica). Los fractales son usados de manera especial en computadoras para el modelado de patrones irregulares y estructuras que se encuentran en la naturaleza.  
*Dictionary the American Heritage*  
[De el Latín *fractus*, y del pasado *fragmentado* o *quebrantarse*]
- Fractales aleatorios** La simulación del movimiento Browniano, es un ejemplo de un Fractal aleatorio, una caminata aleatoria en una dimensión se puede definir de la siguiente manera. Elegir un tamaño de paso  $\Delta t$  en el tiempo y un tamaño de paso en el espacio  $\Delta y$ .
- Flujo atmosférico** Son oscilaciones que se encuentran en la atmósfera, y estos se pueden comparar con los flujos que existen en los océanos, donde la causa en este ultimo se debe en parte por el movimiento gravitacional de el Sol y la Luna. Los flujos atmosféricos, son muy diferentes a las flujos de los océanos, el ozono y el vapor de agua en la atmósfera absorben las radiaciones solares, y el calor y la expansión del aire que resultantes influyen en las oscilaciones atmosféricas.
- Fotómetro** Es un instrumento óptico-electrónico que mide la intensidad de los haces de luz, un fotómetro transforma los haces de fotones en una corriente eléctrica, donde dichas mediciones y transmisiones de estas corrientes son consideradas como información.



**Fotón** Es un quantum de luz, o pequeños paquetes de luz en una determinada longitud de onda. Esta es emitida por un átomo durante la transmisión de un estado de energía a otro. Como partículas fundamentales, los fotones viajan a la velocidad de la luz.

**Frente de onda** Haz de luz producido por una fuente puntual (estrellas) en el infinito. Un frente de onda es una representación abstracta de la fase de una onda que se desplaza. Una fuente puntual produce un frente de onda esférico el cual viaja hacia afuera de la fuente puntual.

**Frente de onda atmosférico perturbado** Este se define como el frente de onda que es deformado al pasar a través de la atmósfera por la turbulencia atmosférica, siendo su diámetro el de la pupila del telescopio.

**Función de estructura.** Es la herramienta más importante para analizar la estructura de la turbulencia en diferentes escalas, es equivalente a la función de correlación de velocidades fluctuantes entre 2 puntos distintos, la cual tiene un comportamiento escalable y una conexión entre las funciones de distribución de las diferencias de velocidades.

**Función de estructura de Fase** Representa el promedio de las deformaciones de un conjunto de frentes de onda en el plano de la pupila en el espacio estadístico donde las deformaciones son descritas por la siguiente regla de potencia en el plano unidimensional

$$D_p(|r|) = \langle (p(r') - p(r'+r))^2 \rangle = 6.88 \left( \frac{|r|}{r_0} \right)^3$$

donde:  $r_0$  es el parámetro de Fried y  $\langle \rangle$  denota el promedio sobre un conjunto de frentes de onda, dicha función de estructura depende solamente en  $r$  y  $r_0$ .

**Función de Transferencia Modulada** La turbulencia atmosférica junto con las no homogeneidades del índice de refracción, perturban el haz de luz que emite un objeto puntual, la cual sufre una distorsión que repercute en una distancia significativa a través de la atmósfera, dichas distorsiones que sufre el frente de onda repercuten en una variación de la intensidad del haz de luz a través de la atmósfera. Si un haz colimado que pasa a través de la atmósfera y que es colectado por una lente donde dicho haz de luz incide en el foco de este, la calidad de la imagen que se forma depende de las perturbaciones producidas por la atmósfera, y por lo tanto las distorsiones que sufre la forma del frente de onda afectan la calidad de la imagen, donde también existen variaciones en las intensidades a través de la turbulencia que afectan la calidad de la imagen. Una unidad de medida inicial de la calidad de la imagen, la considera la Función de Transferencia Modulada (Modulation Transfer Function -MTF-) de un sistema óptico que considera a la atmósfera y las lentes. La MTF se define en términos de la amplitud de la imagen, mediante ondas senoidales cuya amplitudes se puede definir en términos de su espectro de Fourier de la respuesta de la imagen para una parte del impulso en el arreglo de isoplanatismo.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

La MTF considera las distorsiones que sufre el frente de onda ocasionadas por el tilt aleatorio, este tilt desplaza la imagen pero no reduce la nitidez. Para imágenes expuestas en periodos cortos, la nitidez de la imagen y la MTF son insensibles para el tilt la cual es una parte de la distorsión total en cambio en la cual se tiene un factor asociado con el tilt extraído de la MTF después de haber realizado el promedio y para el caso de exposiciones largas tal factor no es removido, para imágenes expuestas en periodos largos la imagen se considera como una difusión durante su exposición por las variaciones aleatorias del tilt. Por lo tanto, la nitidez de la imagen y la MTF son afectadas por el tilt del frente de onda también como por algunas formas complejas.

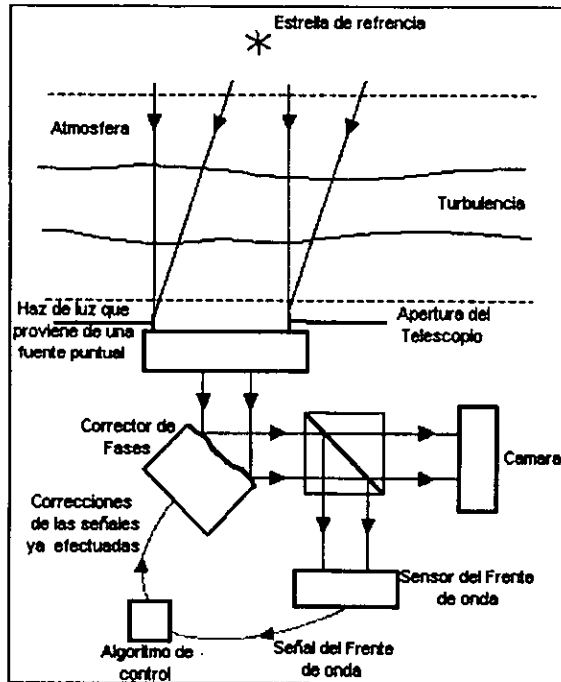
- Función potencia.** Se llama *función potencia* a cualquier función que tiene una ecuación de la forma  $y = kx^n$ .
- Homogéneo e Isotropico** e Indica que no existen posiciones, ni direcciones privilegiadas en un medio.
- Indice de refraccion** O índice refractivo,  $n$ , de una substancia es una medida de la trayectoria de la luz cuando esta pasa a través de una substancia, esta se determina mediante ángulos de incidencia  $i$  y refracción  $r$  de un haz de luz;  $n = \frac{c}{v} = \frac{\sin i}{\sin r}$ . Al Índice de refracción también se le considera como la velocidad del rayo de luz en el vacío  $c$  para sus velocidades en la substancia  $v$ , tal que  $n = \frac{c}{v}$ .
- Interferometro Optico** Es un dispositivo en el cual dos o mas ondas de luz son combinadas juntas para producir interferencia. Si dos telescopios que observan la misma estrella y los mismos rayos o haces de luz son sobrepuestas ocurre el fenómeno llamado interferencia. Al interferometro se le considera un instrumento que permite una variedad de mediciones a través de patrones interferometricos de la luz, sonido y ondas de radio. Los interferometros ópticos se usan para determinar el grosor o los índices de refracción de un material, y el Interferometro acustomecanico puede medir la velocidad del sonido en un gas o liquido. En astronomía óptica el Interferometro sirve para determinar el diámetro aparente de una estrella, en radio astronomía la técnica se usa para obtener mediciones precisas de la posición de las fuentes de radio, finalmente se debe decir que la interferometría también se usa en el estudio de espectros estelares.
- Intermitencia (Intermettency)** se refiere, a los cambios de movimiento que sufre un fluido, de un movimiento laminar a uno turbulento y viceversa.
- Isosuperficies** Superficies de temperatura y concentración constante.

**Métodos** Son mecanismos o rutinas con las cuales se afecta al control de diversas formas: desde borrar el área del control, mover el control, añadir y eliminar elementos, hasta pasar el foco de un control a otro y generar comunicación con el clipboard.

**Minuto de arco** Es la unidad en la cual varios ángulos muy pequeños son medibles. Un minuto de arco es igual a un sesentavo de grado.

**Número de Reynolds.** *El número de Reynolds es la relación de la velocidad de un flujo con respecto a su viscosidad, el cual da información del comportamiento de un medio (ver también apéndice 3 Turbulencia Atmosférica).*

**Optica adaptiva** Técnica que permite mejorar la calidad de las imágenes astronómicas captadas por un telescopio, mediante un sistema óptico que compensa las perturbaciones que sufre el frente de onda y que repercuten en la calidad de la imagen al observarse, esta técnica corrige el frente de onda mediante un corrector de fase (después de que la imagen ya se formo en el ocular), antes de corregir el frente de onda las distorsiones que sufre este son medibles por un sensor de frente de onda las cuales provienen del objeto de estudio.



Esquema de Optica Adaptiva.

*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

**Parámetro de Fried.** La intensidad de la turbulencia se puede representar con una sola magnitud  $r_0$  que es el diámetro de la mayor apertura utilizable antes de que la turbulencia empiece a degradar la calidad de la imagen. A medida que la turbulencia aumenta,  $r_0$  disminuye. El incremento de la degradación de la imagen depende de los errores de los frentes de onda introducidos atmosféricamente y es descrito por el parámetro de Fried  $r_0$  [Fried 1965], el cual es la escala espacial sobre los cuales estos errores son menores que un radian en unidades astronómicas. La función de transferencia óptica de la imagen degradada por el seeing se expresa como [F Roddier 1981]

$$S(\vec{f}) = T(\vec{f}) \exp \left\{ -3.44 \left( \frac{\lambda \vec{f}}{r_0} \right)^2 \right\}$$

donde  $\vec{f}$  define el dominio de la frecuencia espacial y  $T(\vec{f})$  es la función de transferencia óptica del telescopio, es decir, la transformada de Fourier de la función de difusión puntual (point-spread function) del telescopio.

**Patrón de Machas** Es el resultado de la formación de una imagen cuando esta se enfoca, ajustándose así el conjunto de frentes de onda, las cuales contienen distorsiones a diferentes escalas, dichas distorsiones son ocasionadas por la turbulencia atmosférica, cabe destacar que el patrón de manchas fluctúa de manera muy rápida para exposiciones cortas (en milisegundos).

**Polimorfismo** Ocurre cuando una operación puede ser aplicada a varios tipos.

**Polinomios de Zernike** Conjunto de polinomios que describen de manera estadística las aberraciones en fenómenos de turbulencia atmosférica en sistemas ópticos, estos polinomios se definen sobre un círculo unitario. El uso de coordenadas polares es la representación mas adecuada y se refleja en el hecho de una representación en forma de producto de funciones angulares y polinomios radiales.

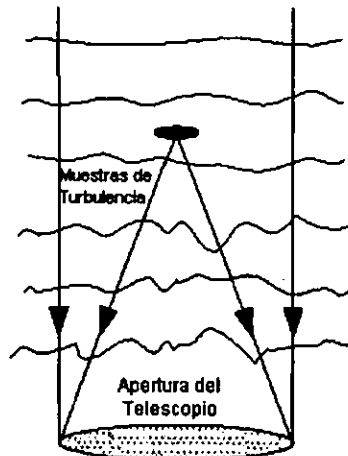
**Propiedades** Son las características que tienen los controles, es decir, el tamaño, el color, el título, posición, etc.,

**Radioastronomía** Es el estudio de el Universo a través de observaciones de las ondas de radio emitidas por objetos celestes. Cabe destacar que todo objeto en el Universo emite ondas de radio.

**Refracción** Repercute en el comportamiento del haz de luz cuando este pasa a través de dos medios en los cuales hay una diferencia de velocidad, y por ende, la ruta del haz de luz cambia. Estas inclinaciones de los haces de luz, se les denomina refracción, y es característica de todas las ondas (sonido, radio y mecánica).

- Reusabilidad** Define la habilidad de rehusar objetos y clases de objetos con la implementación de un sistema.
- Segundo de arco** Es la unidad en la cual varios ángulos muy pequeños son medibles, un segundo de arco es igual a un sesentavo de minuto de arco.
- Simetría** Correspondencia exacta en forma y configuración con respecto a una línea, un plano o un punto.
- Sistema afocal** Es un sistema óptico donde el objeto y la imagen secundaria, se encuentran en conjunto dentro de una distancia infinita.
- Turbulencia atmosférica o Seeing** Este es un serio problema en astronomía porque tiene efectos considerables en la calidad de las imágenes de largo tiempo de exposición limitando la resolución de las imágenes astronómicas y que es mas notable en telescopios con un espejos grandes. El tamaño de la imagen de un objeto puntual es el llamado "seeing", la turbulencia ocasiona variaciones o fluctuaciones en el índice de refracción y por ende la ruta que siguen los rayos de luz se distorsionan, lo cual ocasiona un retardo en el haz de luz, motivo por el cual la imagen se distorsione, los efectos de la turbulencia atmosférica se pueden modelar mediante las Teorías formuladas por Kolmogorov.

El efecto de la turbulencia de la Atmósfera de la Tierra influye en la calidad de la imagen de un objeto astronómico. En buenas condiciones de seeing, las imágenes son nítidas y permanecen fijas, en condiciones pobres de seeing la imagen es borrosa e inestable.



*Aproximación Fractal de Perturbaciones Atmosféricas sobre un Frente de Onda Plano.*

Telescopio Espacial Hubble

Telescopio que la NASA puso en órbita en el año de 1990, y que al encontrarse fuera de la atmósfera de la superficie terrestre reduce la turbulencia atmosférica lo cual permite captar imágenes mucho más nítidas de los cuerpos celestes.

Teoría cinética.

La teoría cinética de los gases, considera efectos microscópicos de átomos en movimiento. Se sabe desde el siglo XVII que existe una relación inversa entre la presión y el volumen de un gas. Manteniendo constante la temperatura, si el volumen disminuye aumenta la presión en una cantidad inversamente proporcional. Si el volumen aumenta, la presión disminuye. Según la teoría cinética, la presión es el resultado de un bombardeo constante de las partículas contra las paredes del recipiente. La presión aumenta al disminuir el volumen porque la tasa de bombardeo de las partículas es mayor para un volumen pequeño que para un volumen grande. Análogamente, existe una relación directa entre presión y temperatura. Si la temperatura de un gas aumenta sin que su volumen cambie, la presión aumenta proporcionalmente. Si baja la temperatura la presión disminuye.

La teoría cinética, ofrece una descripción estadística del movimiento ocurrido, que resultaba plausible por el hecho de que un sistema constituido por muchas partículas tienen muy poca probabilidad de desviarse significativamente de su comportamiento promedio. Por ello, la teoría cinética se denomina muchas veces mecánica estadística.

Teoría de Kolmogorov

La teoría de Kolmogorov de la turbulencia predice que las fluctuaciones del índice de refracción, las cuales se usan para predecir las propiedades de las distorsiones de fase que se introducen en un conjunto de frentes de onda, que se propagan a través de la turbulencia. Las estadísticas atmosféricas de la turbulencia están definidas, por el parámetro  $C_N^2$ , el cual representa la fuerza de la turbulencia atmosférica. Tatarski utiliza este modelo para mostrar que las propiedades de una onda electromagnética se propaga a través de rayos o haces de luz que pueden ser predecibles mediante el modelo de Kolmogorov. En escalas pequeñas el diámetro de la apertura del telescopio, se puede argumentar que las fluctuaciones de fase son estacionarias (es decir, no varían de un lugar a otro), e isotrópico (es decir no tienen dirección privilegiada) y por otro lado se tienen estadísticas bien definidas, tal es el caso del espectro de potencia de las fases siguen la regla de potencia de  $^{-1/3}$ ; de esta regla las estadísticas espaciales de las fluctuaciones de fase están completamente definidas en términos de el parámetro de Fried  $r_0$ , como se sabe  $r_0$  es un parámetro dependiente del tiempo, la cual bajo las suposiciones de Kolmogorov define de manera completa las estadísticas espaciales de las fluctuaciones de fase que ocurren a través de la apertura del telescopio.

Unidad astronómica

La unidad astronómica principal que se usa para realizar mediciones en astronomía, esta representada en el sistema solar, la cual es igual a la distancia entre la Tierra y el Sol, la abreviación es AU y esta en unidades inglesas, la Unión Astronómica Internacional a adoptado el valor 1 AU= 149, 600, 000 Km (92, 956, 000 mi)

---

## Referencias.

- [1] A. Heck and J M, Perchang. Fractal in Astronomy Turbulence: Fractals, and the Solar Granulation. P.N. Brandt, R. Greimel E, Guenther, W Mattig. Lecture Notes in Physics (m3), Springer Verlag, p.p. 899.
- [2] Carot, Alonso Vicente. Probabilidades y Procesos Estocásticos. Universidad Politécnica de Valencia, Servicio de Publicaciones 1990, p.p. 569.
- [3] Christou, Julian C. Calidad de las imágenes astronómicas, corrección del tip y tilt, y mejoramiento de imágenes infrarrojas. (Image Quality, tip-tilt correction, and shift-add-add infrared imaging). Publication of the Astronomical Society of the Pacific, Volumen 103; Numero 667; p.p. 1548; September 1991.
- [4] Field, Michael and Golubitsky, Martin. Symmetry in Chaos (A search for Pattern in Mathematics, art and nature), p.p. 798.
- [5] Fried. D. L., Statistics of a Geometric Representation of Wafefront Distortion. Journal of the Optical Society of América. Volumen 55; Número 11; Noviembre de 1965; p.p. 1835.
- [6] Froyland, J. Introduction to Chaos and Coherence. Editorial Institute of Physics Publishing Bristol. (Philadelphia and New York), p.p. 1044.
- [7] Fuentes Yaque, J Luis. Nociones de Astronomía. Biblioteca Básica del Agricultor (Ministerio de agricultura, pesca y alimentación); Madrid 1989; Segunda Edición, p.p. 988.
- [8] González Videgaray, María del Carmen. Apuntes de la materia de modelos y simulación.
- [9] H Naylor Thomas et. al. Técnicas de simulación en computadoras. Limusa, Primera edición 1971, p,p, 798.
- [10] J R P Angel. Optimización de frentes de onda sensados para una altura precisa y su susceptibilidad (Optimization of wavefront sensors for the heighest accuracy and sensitivity). Steward Observatory University of Arizona Tucson, Arizona. Proceedings of the institut d'estudes scientifiques de cargese, optique adaptative astrophysique -aute technologies, in press 1993.
- [11] Klafter Joseph, Michael F Shlesinger and Zumofen Gert. Beyond Brownian Motion. Physics Today, Febrero de 1996, Volumen 49, Numero 2, American Insitutte of Physics, pp.33-39.

- [12] Kolmogorov, A.N. (1962), *A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number*, J.Fluid Mech. 13, 82, (1962).
- [13] Lane, R G; Glindemann, A and Dainty, J C. "*Simulation of a Kolmogorov phase screen*". Waves in Random Media, Volumen 2, Año 1992, p.p. 574. Printed in the United Kingdom.
- [14] Mandelbrot, Benoit B. *Comment on Computer Rendering of Fractal Stochastic Models*. Communications of the ACM. IBM T J WATSON Research Center, Agosto de 1982, Volumen 25, Numero 8, p.p. 347, Yorktown, N Y 10598.
- [15] Mandelbrot, B Benoit and Van Ness, John W. "*Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications*". SIAM Review Octubre de 1968, Volumen 10, Número 4, p.p. 737.
- [16] Mandelbrot, B.B. (1982), *The fractal geometry of Nature*, W H Freeman, New York, USA (1982).
- [17] Mandelbrot, Benoit B. *On the geometry of homogeneous turbulence, with stress on the fractal dimension of the iso-surfaces of scalars*. Journal Fluid Mechanics (1975), volumen 72, parte 2, pp.401-416
- [18] Mandelbrot, B Benoit. *Rendering of Fractal Stochastic Models*. Communications of de ACM, Agosto de 1982, volumen 25, Numero 8. pp. 581-584
- [19] Meza, José. *Astronomía Contemporánea*. Editorial Universitaria 1988, Impreso en Chile, p.p. 744.
- [20] N Bhattacharya, Rabi and C Waymire, Edward. *Stochastic Processes with Applications*. Editorial John Wiley and Sons, p.p. 976.
- [21] N J Woolf. *Alta Resolución de Imágenes desde la Corteza Terrestre*. STEWARD OBSERVATORY, UNIVERSIDAD DE ARIZONA, TUCSON, ARIZONA 85721. Ann. Rev. Astron. Astrophys.
- [22] Noll, Robert J. *Zernike Polynomials and Atmospheric Turbulence*. Journal of the Optical Society of América, Volumen 66; Numero 3; Marzo de 1976; p.p. 932.
- [23] Peitgen Heinz-Otto and Saupe Dietmar. *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, p.p. 1790.
- [24] Peitgen Heinz-Otto, Jürgens Hartmut, Maletsky Evan M, Perciante Terence H, Saupe Dietmar, Yunker Lee E. *Fractals for Classroom*. National Council of Teachers of Mathematics, Springer Verlag, p.p. 976.



- [25] Peitgen Heinz-Otto, Saupe Dietmar and Jürgens Hartmut. Chaos and Fractals: New Frontiers of Science. Springer Verlag (S-V), p.p. 3999.
- [26] Richard F Voss. Random Fractals: Self-Affinity in Noise, Music, Mountains, and Clouds. Physica D (1989) volumen 38, 362-371 North-Holland, Amsterdam.
- [27] Roddier, F. Los efectos de la turbulencia atmosférica en astronomía óptica (The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy). North-Holland, Amsterdam 1991, p.p.1575
- [28] Sánchez P, Leonardo J and G Petrov Roumain. Département d'Astrophysique, U.A. 709 du C N R S Universsité de Nice-Sophia Antipolis, About the Optimization of Partially Correcting Adaptive Optics (Acerca de la Optimización de correcciones parciales mediante óptica adaptiva). Nice Cedex 2 France.
- [29] Sánchez P, Leonardo J. Simulation numérique de fronts d'onde et correction Partielle par Optique Adaptive. (Simulación numérica de frentes de onda y corrección parcial mediante Óptica Adaptiva). Univers de Nice-Sophia Antipolis. Rapport de stage de DEA. Février-Juin 1992
- [30] Sheldon M. Ross. Stochastic Process. Editorial John Wiley and Sons 1983, p.p. 1989.

---

## Conferencias

- [31] Avila, Remy. Caracterización de la turbulencia atmosférica para la astronomía a alta resolución angular. Departamento de Astrofísica, Universidad de Niza, Francia. Miércoles 9 de abril de 1997, Instituto de Astronomía, UNAM, 12:00 hrs.