149
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

PROPUESTA DE DISEÑOS EXPERIMENTALES PARA LA REDUCCION DE COSTOS EN EL ESTUDIO DE PROCESOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
(AREA INDUSTRIAL)

P R E S E N T A

ALEJANDRO REYES TORRES

DIRECTOR: DR. ALEJANDRO TERAN
CO-DIRECTOR: M.C. MARCIA GONZALEZ OSUNA

MEXICO D. F. NOVIEMBRE, 1997

A mis Papas

A mis hermanos

AGRADECIMIENTOS

A la Facultad de Ingeniería de la U. N. A. M.

Al Instituto de Ingeniería de la U. N. A. M.

Al Dr. Alejandro Terán C.

A la M. C. Marcia González O.

A todos aquellos que de alguna u otra forma hicieron posible la realización de este trabajo.

INDICE

RESUMEN

En este trabajo se propone un tipo de diseños experimentales útiles en el estudio de procesos que muestran planaridad. De estos diseños se presenta su construcción y análisis, aspectos que toman como base la teoria de los experimentos factoriales usuales en la industria.

Los diseños experimentales tradicionales (diseños factoriales), presentan la opción de poder realizar sólo una parte del total de los ensayos requeridos por el experimento completo con el fin de reducir el costo de experimentación, sin embargo, ésto trae consigo una reducción en la calidad de la información obtenida, ya que los efectos de las variables del proceso, se confunden con los efectos de interacciones entre dichas variables. Cuando se realiza solo una parte de los ensayos de un experimento, el diseño utili· .do es un experimento factorial fraccionado

Los experimentos propuestos, a diferencia de los factoriales tradicionales, tienen la caracteristica de considerar tres niveles de operación para cada variable estudiada, este tercer nivel no se utiliza cuando se analiza la información generada por el experimento, sino que permite, con un menor número de ensayos que el experimento factorial fraccionado, obtener los efectos de las variables libres de confusión con interacciones, siendo por tanto la información obtenida más precisa y a un menor costo

Con el fin de poder comparar la efectividad de los experimentos propuestos, se hace un análisis de funciones obtenidas para un mismo proceso supuesto, con dos diferentes métodos, experimentos factoriales tradicionales, y experimentos propuestos. En este análisis se puede observar la gran oportunidad que la investigación y uso de estos experimentos puede generar en términos de eficiencia de experimentación, debida a dos aspectos, (1) reducción de costos, y (2) capacidad para generar una mejor información.

NOMENCLATURA

0, 1, 2	Niveles de operación bajo, medio y alto en un experimento con 3 niveles, en los experimentos propuestos, el cero es el nivel medio de operación.
+ 1, (+)	Nivel alto de operación de un factor
- 1, (-)	Nivel bajo de operación de un factor.
I, II, III, IV,...	Resolución del diseño factorial fraccionado
A, B, ...	Efecto principal del factor A, B
AB, BC, ...	Interacción entre los factores A y B (AxB), B y C (BxC), ...
I(XY)	Componente I de la interacción de segundo orden XY.
J(XY)	Componente J de la interaccion de segundo orden XY
W(RST)	Componente W de la interacción de tercer orden RST.
X(RST)	Componente X de la interacción de tercer orden RST.
Y(RST)	Componente Y de la interacción de tercer orden RST
Z(RST)	Componente Z de la interacción de tercer orden RST.
K	Número de factores a estudiar en un proceso de experimentación.
N	Número de ensayos de un experimento factorial.
q	Número de generadores utilizados para formar bloques
R	Denota la resolución del diseño factorial fraccionado.
r_x	Respuesta del x-ésimo ensayo del experimento.
y_+	Promedio positivo de las observaciones de un factor.
y_-	Promedio negativo de las observaciones de un factor.
I	Columna identidad formada por signos positivos.
l_x	Contraste del efecto o interacción X.
l_{+X}	Contraste positivo del efecto o interacción X
l_{-X}	Contraste negativo del efecto o interacción X.

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE GRAFICAS

INDICE DE TABLAS

CAPITULO I
OBJETIVO

1.1 ANTECEDENTES

En la industria, se presentan un gran número de situaciones que impiden el óptimo desarrollo de procesos. Esto se debe a que los resultados de dichos procesos dependen de muchas variables, tales como, presiones, temperaturas, revoluciones por minuto, tiempos de procesos, etc.

El mejoramiento de la salida generada por un proceso productivo puede hacerse a través del uso de experimentos diseñados, basados en un conjunto de técnicas estadísticas conocidas como el diseño de experimentos.

1.2 PROBLEMATICA

En la práctica industrial se suele utilizar un tipo particular de experimentos conocidos como diseños factoriales, a través de los cuales es posible analizar o estimar el efecto que tienen diferentes factores de producción sobre la respuesta de un proceso. Con el fin de reducir los costos y el tiempo de realización de un experimento (el cual consta de varios ensayos), se suele hacer uso de diseños factoriales fraccionados, con los cuales se reduce el número de ensayos de que consta el proceso de experimentación. La reducción de ensayos si bien trae consigo una reducción de costos, viene aparejada con una disminución en el nivel o calidad de la información que resulta del proceso experimental.

En ocasiones, la información generada por el proceso de experimentación cuando se utiliza un diseño factorial fraccionado, puede no ser la suficiente como para considerar satisfactorios los resultados obtenidos, pero por otro lado, los recursos necesarios para lograr la información deseada pueden ser una limitante para la experimentación. Surge entonces la necesidad de una opción intermedia, que permita reducir la inversión realizada, pero sin sacrificar con ésto la calidad de la información generada.

1.3 OBJETIVO

En este documento se propone un tipo de experimentos que, en comparación con los experimentos tradicionales (diseños factoriales y diseños factoriales fraccionados) resultan en un mejor comportamiento en términos del costo y la información asociados con un experimento. Con ésto, los objetivos de la tesis se pueden concretar en los siguientes puntos:

- Revisión de los conceptos y diseños experimentales existentes
- Presentación de los diseños experimentales propuestos
- Comparación y análisis de los diseños propuestos contra los diseños existentes.

Para ello se desarrolla este trabajo que consta de seis capitulos, de los cuales el presente es el primero. El segundo capitulo presenta los conceptos generales que se relacionan con el diseño de experimentos. En el tercer capitulo, se presentan los diseños de experimentos usuales en la industria y existentes en la literatura. El cuarto capitulo presenta la construcción y analisis de resultados para los diseños propuestos en este trabajo. En el quinto capitulo, se hace un análisis en el cual se someten a consideración los resultados obtenidos por los experimentos propuestos en comparación con los resultados obtenidos por los experimentos tradicionales. En el capitulo seis se enuncian las conclusiones y recomendaciones más relevantes. Por último se presenta una lista de referencias y una serie de apéndices que se relacionan, sustentan y complementan el desarrollo de esta tesis

CAPITULO II
DISEÑO DE EXPERIMENTOS

2.1 INTRODUCCION

El diseño de experimentos es una herramienta estadística de gran utilidad para determinar la relación que existe entre las variables de entrada y las variables de salida en un proceso industrial

El conocimiento sobre esta relación permite, entre otras cosas, identificar las condiciones de funcionamiento del proceso con las cuales se obtienen ciertos valores deseados de las variables de salida.

Un experimento diseñado, consiste en el cambio sistemático de los valores de las variables de entrada, para observar los correspondientes valores que toma la variable de salida, con el fin de entender como se comporta el proceso en estudio y así poderlo mejorar.

En el presente capitulo se exponen los conceptos básicos del diseño de experimentos. En la sección 2.2, se expone la relación que existe entre variables de entrada y variables de salida en la fabricación de un producto o desarrollo de un proceso. En la sección 2.3, se analiza la representación matemática, conocida como modelo matemático, de esta relación; y la dificultad que algunas veces existe para obtener dichos modelos. En la sección 2.4, se examina el uso del diseño de experimentos como herramienta para conocer la relación entrada/salida, con la cual se pueden obtener las funciones que modelan los procesos. En la sección 2.5, se trata el concepto de planaridad, el cual permite el uso de modelos lineales, que presentan las ventajas de ser analiticamente sencillos en su tratamiento. Este concepto permite facilitar el estudio de una gran cantidad de procesos, y es de especial importancia para fundamentar los experimentos propuestos en este trabajo. En la sección 2.6 se sintetizan los conceptos básicos del diseño de experimentos. Finalmente, en la sección 2.7 se presenta un resumen del capitulo

2.2 VARIABLES DE ENTRADA / VARIABLES DE SALIDA

En un proceso industrial, hay variables cuyos valores no se pueden modificar directamente, sino que son el resultado de otras variables a las cuales sí se les puede cambiar su valor. Por ejemplo, el rendimiento en kilogramos del producto que se obtiene en un reactor químico, depende de los valores que toman diferentes variables como pueden ser: tiempo de reacción, temperatura, presión, etc. Los valores que toman estas últimas variables pueden cambiarse de manera independiente.

Las variables que dependen de otras, se conocen como variables de salida, y las variables cuyos valores se pueden modificar de manera independiente se conocen como variables de entrada.

En el ejemplo del reactor químico, el rendimiento es la variable de salida, y las variables de entrada son el tiempo de reacción, la temperatura, la presión, etc.

En la fabricación de un producto, también se puede identificar variables de entrada y variables de salida. Estas últimas por lo regular representan especificaciones del producto que se pueden identificar como características de calidad. Por ejemplo, la rugosidad de una superficie que se obtiene en un proceso de torneado, depende de la velocidad a la que se trabaja el torno, y del avance que se le da por vuelta al buril. En este caso, la velocidad y el avance mencionados son las variables de entrada, y la rugosidad es la variable de salida que determina la calidad del producto.

Por lo regular, es deseable tener las variables de salida en valores determinados, que pueden ser el máximo posible si se trata por ejemplo, de un rendimiento; el mínimo posible, como es el caso de los costos de un proceso, o un valor medio, que puede ser el diámetro obtenido de un proceso de torneado. Para poder obtener estos valores deseados, es necesario establecer las condiciones de funcionamiento de las variables de entrada que garantizan dicho resultado.

2.3 MODELOS

La relación entre las variables de entrada y las variables de salida puede expresarse a través de un modelo matemático.

Cuando el proceso se conoce lo suficientemente bien, en ocasiones es fácil obtener un modelo teórico a partir de las leyes que rigen dicho proceso, pero cuando éste no se entiende lo suficiente o es muy complicado, es posible obtener un modelo empírico. Este modelo puede obtenerse por medio de experimentación, considerando los posibles rangos normales de operación del proceso

Suponga dos fenómenos de la misma naturaleza, por ejemplo, una reacción química en dos diferentes reactores, donde se quiere obtener un rendimiento (**y**), como función de la temperatura (**x**), y del reactor utilizado (**1** o **2**) [1]. En la figura 2.1, las líneas curvas representan la relación que existe entre el rendimiento y la temperatura en el proceso real para cada uno de los reactores

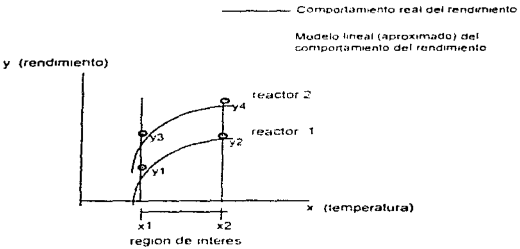


Figura 2.1. Uso de modelos aproximados

En la región de interés, correspondiente al rango usual de operación de temperatura de los reactores, las líneas rectas punteadas, representan las aproximaciones lineales de un modelo empírico, que se pueden obtener por medio de experimentación, y con las cuales se puede estimar el comportamiento aproximado del proceso real, representado en la figura por las líneas curvas continuas.

El modelo empírico aproximado es de la siguiente forma

$$y = a1 + b1\,x \quad \text{para el reactor 1}$$
$$y = a2 + b2\,x \quad \text{para el reactor 2}$$

donde (y) es la variable dependiente (rendimiento), (x) la variable independiente (temperatura), (a) es la ordenada al origen y (b) la pendiente.

Para poder obtener el modelo basado en las aproximaciones lineales, es necesario conocer los diferentes valores de rendimiento y1, y2, y3, y y4, así como los valores de temperatura y tipo de reactor asociado

El valor y1, es la respuesta que se obtiene de realizar un ensayo del proceso a la temperatura x1, en el reactor 1, así mismo, y2, y3, y4, se obtienen de realizar un ensayo para cada una, variando las condiciones de operación en cada ensayo

Este proceso de obtener valores de salida, estableciendo condiciones de entrada diferentes cada vez que se realiza un ensayo, se conoce como experimentación

El experimento que se realiza para observar y1, y2, y3, y y4, se muestra de manera esquemática en la figura 2.2. En este caso se estudian dos factores (temperatura y reactor), cada uno a dos niveles, con lo que se tiene un total de cuatro combinaciones de operación, ésto se conoce como arreglo 2 x 2 factorial.

	temperatura (°C)	
	X1	X2
reactor 1	y1	y2
reactor 2	y3	y4

Figura 2.2. Arreglo factorial 2 x 2.

Con este arreglo factorial, es posible obtener un modelo lineal aproximado al proceso real. Sin embargo, si el comportamiento del rendimiento en el rango de operación es altamente no lineal, es necesario usar una aproximación de orden superior, por ejemplo una aproximación cuadrática. Este tipo de aproximación tiene la siguiente forma:

$$y = a1 + b1\,x + c1\,x^2 \quad \text{para el reactor 1}$$
$$y = a2 + b2\,x + c2\,x^2 \quad \text{para el reactor 2}$$

En esta expresión, los parámetros **a1**, **a2**, **b1** y **b2** se asocian con la parte lineal de la aproximación, en tanto que **c1** y **c2** expresan la intensidad de la curvatura. En este tipo de situaciones, es conveniente realizar un experimento donde la temperatura se estudie a 3 niveles, con lo cual se tiene un arreglo **2X3** factorial, esto es, dos factores, el primero a 2 niveles y el segundo a 3 niveles, siendo necesario realizar 6 ensayos.

Un aspecto fundamental del diseño de experimentos, consiste en ayudar a determinar los puntos o niveles de las variables de entrada, en los cuales conviene experimentar para lograr resultados más satisfactorios, en términos del costo de realizar el experimento, y de la información obtenida del mismo.

Con lo anterior se puede definir el diseño de experimentos como:

Conjunto de técnicas que permiten obtener y organizar la máxima cantidad de información de un proceso, a partir de la mínima cantidad de trabajo, tiempo, energía, dinero y otros recursos limitantes.

El diseño de experimentos, cuando es bien realizado, provee una riqueza de información que ayuda a resolver problemas de producción rápidamente [8]

2.4 FUNDAMENTO DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS.

Cuando se tiene un proceso donde existen dos variables y una de ellas depende de la otra, su representación geométrica se puede hacer por medio de un plano **x-y**, como se muestra en la figura 2.3.

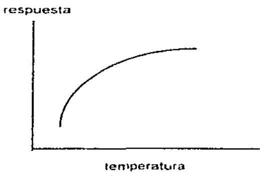


Figura 2.3. Representación gráfica de la relación entre 2 variables.

Cuando una variable es función de otras dos variables, su representación geométrica es una superficie curva en el espacio, lo cual da un sistema de coordenadas **x-y-z**, (figura 2.4).

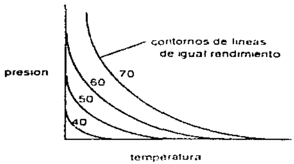
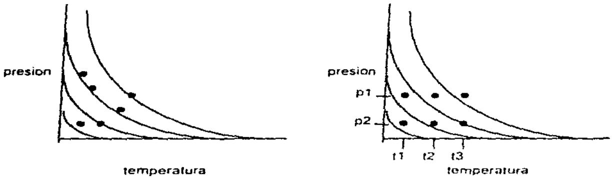


Figura 2.4. Representacion grafica de un sistema de coordenadas x-y-z.

Al no conocerse esta superficie que representa la respuesta del proceso (variable de salida), súrge el problema de saber cuáles son los puntos donde se puede experimentar y obtener más información

En general, aún cuando se desconoce el comportamiento real del proceso, se tiene una idea de los valores de los factores alrededor de los cuales se va a obtener la respuesta deseada, por lo tanto, en esta región se necesitan situar los ensayos de manera que la información que se obtenga sea la mayor posible, para lo cual se puede recurrir a las opciones mostradas en la figura 2.5



Opciones para localizar los puntos de ensayo del experimento (a)

Opciones para localizar los puntos de ensayo del experimento (b)

Figura 2.5. Opciones para localizar puntos de experimentación

En la figura 2.5 (a), se tienen 6 ensayos, cuya distribución no uniforme, dificulta la comparación entre los valores de respuesta obtenidos como resultado de los incrementos de temperatura o presión. A diferencia de ésto, en la figura 2.5 (b), se tiene un arreglo de un experimento de dos factores, uno a 2 y el otro a 3 niveles, ésto es un experimento 2x3 factorial, con los mismos 6 ensayos que en la opción (a), pero con este arreglo, es más fácil comparar los resultados obtenidos como respuestas, con relación a los incrementos uniformes en la temperatura y en la presión

Otra característica de la opción (b), es que se tienen tres puntos de temperatura para la presión 1, y los tres mismos puntos de temperatura para la presión 2. Esta es una propiedad de los experimentos factoriales llamada ortogonalidad, que permite evaluar el efecto de los factores de manera independiente uno de otro. Esta propiedad de ortogonalidad se discute con más detalle en el capitulo 3.

El promedio de las tres respuestas que se obtienen con la presión 1 se resta del promedio de las tres respuestas que se obtienen con la presión 2; esta diferencia se conoce como el efecto de la presión sobre la variable de salida. Esta información sirve también para calcular el efecto de la temperatura.

Cuando los dos factores, de manera conjunta y simultanea, afectan a la respuesta, se dice que están interactuando, y el efecto de ésto se conoce como interacción de la presión por la temperatura. Cuando la interacción se presenta entre dos factores, se conoce como interacción de segundo orden; de la misma forma, una interacción de tercer orden es la que existe entre tres factores, y así sucesivamente. La opción 2.5 (b) permite calcular la interacción que existe entre los factores, la forma en que ésto se hace se presenta en el capitulo 3.

Las interacciones, son una medida de la curvatura de la superficie, por lo que las interacciones de orden superior se presentan cuando la superficie cambia bruscamente de una región de funcionamiento a otra.

2.5 PLANARIDAD

Un concepto importante en el diseño de experimentos es la planaridad. Las funciones encontradas en la práctica usualmente muestran una gran planaridad [1], ésto es, cuando se cambian los niveles de funcionamiento de las variables de entrada los cambios en el valor de la respuesta del proceso son proporcionales

Cuando se grafica un proceso que muestra planaridad, la superficie que modela la respuesta del mismo se puede representar mediante un plano o función lineal. Para una experimentación eficiente de procesos, en los cuales se presenta planaridad, basta con considerar dos niveles de funcionamiento de las variables.

Si el proceso no presenta planaridad, entonces la superficie que representa a la respuesta es una curva, y es necesario considerar más de dos niveles en las variables de entrada para poder determinar su relación con la variable de salida, teniendo como consecuencia experimentos más complicados, tanto en términos analíticos, como en términos del número de ensayos requeridos, incrementando así el costo del experimento.

Cuando en un experimento las variables se estudian a 2 niveles, el número de combinaciones posibles de niveles y por tanto de ensayos requeridos es 2^k siendo **k** el número de variables estudiadas, a este arreglo se le llama diseño 2^k factorial. Por ejemplo, si en un proceso de experimentación se estudian 3 factores a 2 niveles cada uno, entonces se tiene un diseño 2^3 factorial, para el cual es necesario realizar ocho ensayos, (2^3 = 2X2X2 = 8)

2.6 CONCEPTOS BASICOS DE LOS EXPERIMENTOS DISEÑADOS

En el diseño de experimentos, hay algunos conceptos que son básicos para el estudio de la técnica y entenderlos es de gran importancia, dichos conceptos se presentan a continuación.

FACTORES.- Los factores son las variables independientes en un experimento, también se les llama variables de entrada. Estas son las variables que influyen en la respuesta del proceso, y por tanto, sus valores se modifican intencionalmente durante el desarrollo del experimento para determinar se efecto sobre la respuesta. El número de factores que pueden ser estudiados en un proceso, depende del costo de cambiar los niveles en el mismo, y la importancia que el experimentador considere que tienen sobre la respuesta.

NIVELES.- Los niveles son los valores de operación que se establecen para cada factor durante el proceso de experimentación, éstos pueden ser cuantitativos, (5 libras, 20 grados, 7 pascales, etc.) o cualitativos. (catalizador A o B, tanque A o B, etc.). Se pueden manejar dos o más niveles para un factor dado

NIVEL ALTO Y NIVEL BAJO.- Cuando se usan 2 niveles para un factor, es posible identificar al mayor de ellos como nivel alto, y se relaciona con una variable codificada igual a **+1**, y al menor de los niveles se le llama nivel bajo, relacionándolo con una variable igual a **-1**, esto cuando son cuantitativos. Si son cualitativos, es indistinto con que valor (**-1** ó **+1**) se les identifique.

ENSAYO.- Si se tienen dos factores con dos niveles cada uno, se pueden hacer cuatro combinaciones de funcionamiento, y para cada una se realiza un ensayo del proceso, ésto es, por cada combinación de los niveles, se realiza un ensayo, en la figura 2.6, se muestra como dos factores con dos niveles de operación generan cuatro ensayos

ensayo	temperatura (°C)	tiempo min	respuesta
1	70	20	____
2	90	20	____
3	70	40	____
4	90	40	____

Figura 2.6. Representación de un arreglo con 4 ensayos.

ARREGLO O MATRIZ DE DISEÑO.- Es la matriz de todos las combinaciones de niveles de todos los factores involucrados en un experimento

EFECTO.- Es el incremento o decremento del valor de la respuesta causado al pasar de un nivel a otro de un factor. Con un sólo arreglo se pueden evaluar cuáles son los efectos de muchos factores, o incluso las interacciones de los mismos.

EFECTO PRINCIPAL.- Es el efecto que producen los factores sin interactuar con otros, en algunos experimentos, sólo se evalúan los efectos principales si se considera que las interacciones no influyen de manera significativa en la respuesta (figura 2.7).

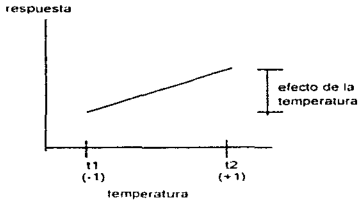


Figura 2.7. Efecto debido al cambio de niveles en un factor

INTERACCION.- Es el efecto que produce el cambio conjunto y simultaneo de niveles de 2 o más variables (figura 2.8).

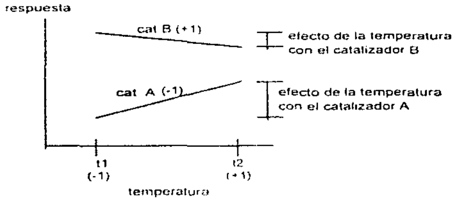


Figura 2.8. Interaccion entre 2 factores

En la figura 2.8 se muestra que el catalizador y la temperatura en una reacción química determinada, están interactuando. Pasar de un nivel bajo de temperatura a un nivel alto usando el catalizador A, incrementa la respuesta, pero si se usa el catalizador B, el efecto es mucho menor y decrementa el valor de la respuesta.

RESPUESTA.- Es el valor que se obtiene a la salida del proceso para un ensayo determinado , y que por lo tanto depende de la combinación de niveles de los factores.

RUIDO.- Son factores generalmente desconocidos y que por tanto no pueden ser controlados por el experimentador, pero que tienen cierto efecto sobre la respuesta, es la razón por la cual, para una misma combinación de niveles de los factores realizada dos o mas veces, no se obtiene exactamente la misma respuesta, este ruido se relaciona entonces con la variación que tiene el experimento

GRADOS DE LIBERTAD.- Phillip [9], define de dos formas lo que son los grados de libertad:

1. Un grado de libertad en un sentido estadístico se asocia con cada pedazo de información que se estima a partir de los datos

2. Otra forma de pensar en el concepto de grados de libertad es asociar un grado de libertad con cada comparacion independiente que se puede hacer en los datos.

Para este trabajo se toma la segunda definición, y la interpretación es la siguiente:

Entre dos ensayos se puede hacer una comparación. Si el nivel de un factor se cambia de uno a otro ensayo, con esta comparación, (o grado de libertad), se puede calcular el efecto de dicho factor sobre la respuesta

Si en los mismos dos ensayos se cambian los niveles de dos factores, no se sabe a cual de estos factores se debe el cambio de la respuesta, y de hecho, el cambio se debe a la suma de los dos efectos. En éste caso sólo existe una comparación posible (o grado de libertad), por eso no se puede calcular el efecto de dos factores por separado, si no que el unico efecto obtenido involucra a los dos factores

2.7 RESUMEN

El diseño de experimentos es una técnica que permite obtener información de un proceso de tal forma que los recursos invertidos en dicha experimentación sean aprovechados lo mejor posible.

En un proceso de experimentación se estudian las variables o factores que intervienen en la respuesta de interés para determinar sus efectos e interacciones existentes. El número de factores y niveles a los cuales se van a estudiar, determinan el número de ensayos requeridos, siendo el resultado un experimento factorial.

En la práctica, la mayoría de los procesos se pueden modelar mediante planos, tomando las interacciones de tercer orden o superior como no significativas, ésto permite estudiar el proceso con experimentos sencillos que involucren sólo 2 niveles para las variables de interés.

CAPITULO III
EXPERIMENTOS DISEÑADOS USUALES EN LA INDUSTRIA

3.1 INTRODUCCION

En el presente capitulo se expone la teoria de los experimentos más comunes en la industria. Estos experimentos son de dos tipos, por un lado aquellos donde los factores se estudian a dos niveles, y por otro, aquellos donde los factores se estudian a tres niveles.

Los experimentos donde los factores se estudian a dos niveles, conocidos como experimentos factoriales 2^k, son de especial importancia, ya que permiten la interpretación de las observaciones basándose muchas veces sólo en el sentido común y su análisis requiere del uso de la aritmética elemental, además de ser muy útiles cuando se van a investigar varios factores

Su utilidad radica en que una gran cantidad de procesos se ajustan con suficiente precisión a los resultados obtenidos por este tipo de experimentos, ésto gracias al concepto de planaridad, que se discute en el capítulo 2.

Los experimentos 3^k, son de utilidad sólo cuando se desea estudiar interacciones de orden superior, lo cual pocas veces llega a ser necesario, sin embargo, sirven de base para la construcción de los experimentos que se proponen en este trabajo

De los experimentos 3^k, se presentan los conceptos relevantes que permiten entender la construcción de los experimentos propuestos en el capitulo 4

La sección 3.2 presenta los experimentos 2^k; la sección 3.3 presenta los experimentos 3^k

3.2 DISEÑO FACTORIAL 2^K.

Los diseños factoriales 2^k son de gran importancia cuando los factores se estudian a dos niveles, ésto es de gran utilidad cuando los procesos presentan planaridad como se discute en el capítulo 2.

Los factores que se estudian en un diseño factorial se pueden clasificar como: factores continuos y factores discretos

Un factor es discreto cuando los diferentes valores de funcionamiento que toma son totalmente independientes entre si, como por ejemplo, estudiar el efecto de realizar un proceso con una máquina u otra distinta, o estudiar el efecto de realizar la operación de un proceso con un operario u otro. En estos ejemplos, las dos máquinas o los dos operarios son los factores por estudiar y son independientes entre sí, es decir, el resultado de realizar el proceso con una máquina no influye en el resultado de realizarlo con la otra máquina, lo mismo pasa con los operarios

Los resultados obtenidos indican cual de esos dos valores resulta en un mejor desempeño, medido ya sea en costo, tiempo o alguna otra característica, estos resultados no necesariamente dan información de aquellos que se pueden esperar si se realiza el proceso con una tercer maquina o un tercer operario.

En el caso de un factor continuo, los valores que asume están contenidos en una escala que puede ser temperatura, presión, tiempo, etc. y los resultados obtenidos dan información acerca de lo que se puede esperar para valores dentro de la región de experimentación

El caso más simple de experimentación consiste en observar el efecto de un solo factor sobre la respuesta del proceso

La figura 3.1 (a) muestra dos valores de respuesta obtenidos para los dos niveles a los que se estudia el factor **A**, los valores de la respuesta están representados por los puntos en la gráfica, y se ve que para el nivel **+1**, la respuesta obtenida es mayor. Si la respuesta mide por ejemplo, la eficiencia de un proceso como función del factor **A**, entonces el nivel **+1** de dicho factor es el adecuado para trabajar, pero si la respuesta mide el costo del proceso, el nivel **-1** será el más conveniente como condición de operación.

En la figura 3.1(b) se presentan dos factores, con dos niveles cada uno, con lo cual se obtienen cuatro valores de respuesta, uno para cada combinación de los niveles de los factores **A** y **B**.

La figura 3.1(c) muestra un experimento factorial donde se estudian tres factores, y se obtiene para cada combinación de los niveles de los factores una respuesta, siendo ocho combinaciones en total, y por tanto, ocho respuestas diferentes.

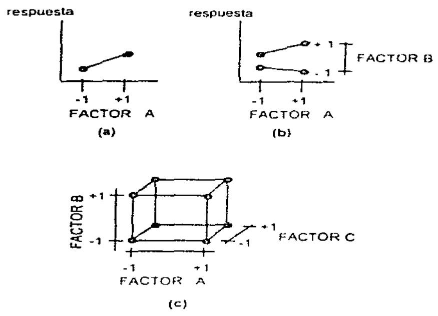


Figura 3.1. Representación de un experimento de: (a) 1 factor, (b) 2 factores, (c) 3 factores.

3.2.1 EFECTOS PRINCIPALES

El cambio en la respuesta producido por un factor cuando pasa de un nivel bajo a un nivel alto, se conoce como **efecto principal**.

El caso de un experimento con 3 factores a dos niveles, (2^3), se muestra en la figura 3.2. Los datos son tomados de Box [1].

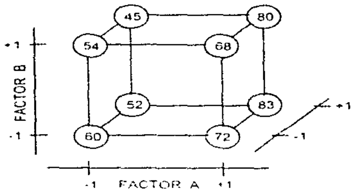


Figura 3.2. Respuestas de un experimento 2^3.

Los números encerrados en los círculos son el valor numérico que toma la respuesta cuando el proceso se realiza con los niveles correspondientes a cada factor, por ejemplo, cuando se realiza un ensayo con los tres factores **A**, **B** y **C** tomando todos ellos el nivel **-1**, el valor de la respuesta es **60**. De la misma forma se pueden observar los valores que toma la respuesta para las diferentes combinaciones de operación de los niveles de los factores.

La tabla 3.1 muestra, de manera tabular, los datos asociados con la figura 3.2. El primer renglón corresponde al ensayo identificado con el número **1**, donde los tres factores estudiados toman el nivel **-1** y cuya respuesta numérica del proceso es **60**. En el ensayo número **2**, el factor **A** toma el nivel **+1** como condición de operación y los factores **B** y **C** mantienen el nivel **-1**, para esta combinación de niveles la respuesta del proceso es **72**. De igual forma se interpretan los demás ensayos.

	FACTORES			
ENSAYO	A	B	C	RESPUESTA
1	-	-	-	60
2	+	-	-	72
3		+	-	54
4	+	+	-	68
5		-	+	52
6	+	-	+	83
7	-	+	+	45
8	+	+	+	80

Tabla 3.1. Experimento 2^3 factorial.

Entre el ensayo 1 y 2 de la tabla 3.1, el único cambio en los niveles de operación se presenta para el factor **A**, que pasa de (-1) a (+1). Los factores **B** y **C** permanecen constantes. El incremento en la respuesta debido al cambio en el nivel de **A** es **72 - 60 = 12**. Para los siguientes pares de ensayos pasa lo mismo, con lo cual se tiene:

Incrementos debidos al factor A	factor B	factor C
r2 - r1 = 72 - 60 = 12	-1	-1
r4 - r3 = 68 - 54 = 14	+1	-1
r6 - r5 = 83 - 52 = 31	-1	+1
r8 - r7 = 80 - 45 = 35	+1	+1

El promedio de estos cuatro cambios en la respuesta debidos al cambio del factor **A**, se interpreta como el efecto principal de A. Para el ejemplo anterior:

Efecto principal **A** = **A = (12 + 14 + 31 + 35) / 4 = 23**

Los efectos de los factores B y C se calculan de la misma forma, con lo cual se tiene:

Efecto principal **B = - 5**

Efecto principal **C = 1.5**

Como se puede ver, el efecto principal de cada factor es la diferencia entre el promedio de las respuestas cuando el factor tiene el valor **+1** menos el promedio de las respuestas cuando el factor tiene el valor **-1**.

$$\text{Efecto principal} = y_{+} - y_{-}$$

En este ejemplo, cada promedio se obtiene a partir de cuatro valores de respuesta, y por tanto, cada efecto se obtiene a partir de ocho valores de respuesta.

Cada efecto se calcula como la diferencia de dos promedios, y no como la diferencia de un solo valor de respuesta cuando el factor toma el valor **+1**, menos un solo valor de respuesta cuando el factor toma el valor **-1**. Al utilizar promedios en el calculo de efectos, y no valores solos de respuesta, lo que se consigue es obtener información más cercana a la realidad del proceso, por tanto, más precision de los modelos empíricos obtenidos. Si en vez de analizar el efecto de los 3 factores combinando sus niveles en un mismo proceso de experimentación, se analizara a cada factor por separado (uno a la vez), para obtener la misma precisión en los modelos empiricos, es necesario hacer 8 ensayos por cada factor siendo necesarios un total de 24 ensayos para los 3 factores.

El arreglo usado (tabla 3.1) tiene la propiedad de ser ortogonal, por eso con los mismos 8 ensayos se calculan los efectos de los 3 factores

En un arreglo ortogonal, el número de niveles (**+1**) que hay en una columna, es igual al número de niveles (**-1**) que hay en ésa misma columna, además, para todos los niveles (**+1**) o (**-1**) de cualquier columna, existe un igual número de niveles (**+1**) y (**-1**) de cualquier otra columna

Observando la tabla 3.1, se vé que cada columna del arreglo tiene un número igual de niveles positivos (+1) y negativos (-1), siendo en este caso cuatro niveles positivos y cuatro niveles negativos.

Para los cuatro niveles positivos de la primera columna existen dos niveles positivos y dos niveles negativos en la segunda columna, y para los cuatro niveles negativos de la primera columna, existen dos niveles positivos y dos niveles negativos en la segunda, esta propiedad se da entre cualesquiera dos pares de columnas, y es la que hace al arreglo ortogonal

Con ésto, al calcular el promedio positivo de una columna, los niveles positivos y negativos de las otras columnas se encuentran balanceados y su promedio es igual a cero, de tal forma que no influyen sobre el promedio positivo del efecto calculado, lo mismo pasa cuando se calcula el promedio negativo de la columna

Por esta propiedad de ortogonalidad es posible utilizar los mismos 8 ensayos para calcular de manera independiente los efectos de los factores involucrados en el experimento.

3.2.2 INTERACCIONES

Dos o más factores influyen aditivamente sobre la respuesta cuando el incremento de dicha respuesta debido al efecto del primer factor se suma al incremento en la respuesta debido al efecto de un segundo factor, en éste caso se dice que los factores no están interactuando.

Dos o más factores interactúan cuando el cambio de nivel de un primer factor influye en el efecto que produce el cambio de nivel de un segundo factor, por ejemplo, para los datos de la tabla 3.1 se observa que el efecto del factor **A** es mayor cuando el factor **C** asume el valor +1, y menor cuando el factor **C** toma el valor -1, de tal forma que **A** y **C** están interactuando.

Una medida de esta interacción esta dada por la diferencia entre el efecto de **A** **cuando C** asume el valor de **-1** y el del efecto de **A** cuando **C** asume el valor **+1**. Por **convención**, la mitad de esta diferencia es llamada la interacción de **A** por **C**, o interacción **A x C** [1], **(AC)**.

Para los datos de la tabla 3.1, cuando se toman los primeros cuatro ensayos donde el **factor C** toma el nivel **-1** el efecto de **A** es **13**, y cuando se toman los cuatro ensayos donde **C toma** el nivel **+1**, el efecto de **A** es **33**. Esto quiere decir que cuando el factor **C** toma el **nivel +1**, el efecto de **A** sobre la respuesta es mucho mayor

La diferencia que existe entre el efecto de **A** con el nivel **+1** de **C**, y el efecto de **A** con el **nivel -1** de **C** es **20**, y la mitad de esta diferencia se conoce como interacción **A x C**

Factor C	Efecto A
+	**33**
-	**13**
diferencia =	**20**

Interacción **A x C = 20 / 2 = 10**

La interacción es una diferencia de promedios, donde 4 de lo 8 **ensayos asumen un valor positivo**, y los otros 4 un valor negativo.

Las interacciones **A x C** y **B x C** se calculan de igual forma.

Cabe la posibilidad de que no sólo haya interacciones de dos factores, sino que los tres factores interactuen para influir la respuesta, el razonamiento es similar al que se hace para la interacción de dos factores

El efecto de la interacción **A x B** puede tener valores distintos para cada nivel del factor **C** , la mitad de la diferencia de estos dos valores es lo que se conoce como el efecto de la interacción **A x B x C**.

Factor C	Interacción A x B
+	((r8 - r7) - (r6 - r5)) / 2 = ((80 - 45) - (83 - 52)) / 2 = 2
-	((r4 - r3) - (r2 - r1)) / 2 = ((68 - 54) - (72 - 60)) / 2 = 1
	diferencia = 1

Interacción **A x B x C** = 1 / 2 = 0.5

Cuando se calculan las interacciones, la propiedad de ortogonalidad se mantiene, por esto se pueden calcular de manera independiente y con los mismos 8 ensayos, las interacciones existentes entre los factores

Hasta este punto, para estudiar tres factores se han calculado tres efectos principales, tres efectos de interacciones de segundo orden, y un efecto de la interacción de tercer orden, con lo cual se tiene un total de siete efectos que se presentan en el siguiente cuadro.

EFECTO		
A	=	23.0
B	=	-5.0
C	=	1.5
A x B	=	1.5
A x C	=	10.0
B x C	=	0.0
A x B x C	=	0.5

En ocho ensayos que se requieren para realizar el experimento completo hay siete grados de libertad, cada grado de libertad se asocia a uno de los siete efectos calculados, (el concepto de grado de libertad se trata en el capítulo 2).

3.2.3 CALCULO DE EFECTOS

La tabla 3.2, muestra los valores positivos o negativos que toman cada factor e interacción en cada ensayo.

	MEDIA	A	B	C	AB	AC	CB	ABC	RESPUESTA
	+	-	-	-	+	+	+	-	60
	+	+	-	-	-	-	+	+	72
	+	-	+	-	-	+	-	+	54
	+	+	+	-	+	-	-	-	68
	+	-	-	+	+	-	-	+	52
	+	+	-	+	-	+	-	-	83
	+	-	+	+	-	-	+	-	45
	+	+	+	+	+	+	+	+	80
divisor:	8	4	4	4	4	4	4	4	

Tabla 3.2. Cálculo de efectos principales e interacciones.

El cálculo de los efectos principales e interacciones se puede hacer de una manera más simple multiplicando las columnas de los factores e interacciones por la columna de respuestas

Los signos que toman las interacciones en cada ensayo se obtienen multiplicando las columnas de signos de los factores involucrados en la interacción

Asociando la columna de la media con la de respuestas se tiene:

MEDIA = (60 + 72 + 54 + 68 + 52 + 83 + 45 + 80) / 8 = 514 / 8 = 64.25

De igual forma el efecto principal **A** se calcula de la segunda columna:

$$A = (- 60 + 72 - 54 + 68 - 52 + 83 - 45 + 80) / 4 = 92 / 4 = 23$$

La interacción **A x C** es:

$$A \times C = (60 - 72 + 54 - 68 - 52 + 83 - 45 + 80) / 4 = 40 / 4 = 10$$

3.2.4 BLOQUES

Cuando se realiza un experimento, hay variables que pueden tener cierta influencia en los resultados pero que no se pueden controlar, y cuyos efectos no son de interés. Si por ejemplo los ensayos de un experimento requieren de mucho tiempo, posiblemente no todos lo ensayos se pueden realizar en un mismo día y se necesitan dos días para realizar el experimento completo. Los dos días utilizados son una variable que asume dos valores que pueden influir en la respuesta, esta variable no se puede controlar y su efecto sobre la respuesta no es de interés. En un día se realizan entonces solo una parte de los ensayos siendo ésta un bloque, y otro bloque lo forman los ensayos que se realizan en el segundo día.

Es importante definir los ensayos por realizar en cada bloque, de forma que las variables que no se pueden controlar no influyan de manera significativa en los resultados y por tanto, la información obtenida sea más precisa

Si se hacen dos bloques y se realizan aquellos ensayos donde un factor de importancia toma el valor **-1** en un día, y los ensayos donde este mismo factor toma el valor **+1** en otro día, entonces no se puede saber si el efecto calculado se debe sólo al factor, o al hecho de realizar el experimento en dos partes o bloques; de hecho este efecto calculado es la suma de los efectos del factor y del bloque, por lo tanto, se dice que se confunden.

Cuando es aplicable el concepto de planaridad, (capítulo 2), las interacciones de orden superior generalmente son muy pequeñas y se deben sólo al ruido, así que se pueden considerar despreciables. En la mayoría de los casos sólo las interacciones de segundo orden pueden llegar a tener un efecto importante.

Tomando en cuenta lo anterior, con el fin de no perder información sobre los efectos significativos, es conveniente realizar experimentos en los cuales se confunden los bloques con las interacciones de orden superior, suponiendo que éstas son despreciables, perdiendo así la posibilidad de ser calculadas a cambio de poder realizar experimento en partes.

Si por ejemplo, el experimento no se puede realizar en un solo día y entonces es necesario realizarlo en dos partes, para un experimento factorial 2^3 como el del ejemplo de la tabla 3.1, se pueden colocar en un bloque los ensayos relacionados a la interacción **AxBxC** con signo (+) y los otros al bloque relacionado con el signo (-) de esta misma interacción. Los ensayos asignados a cada bloque se muestran en la tabla 3.3.

	FACTORES				
ENSAYO	A	B	C	D = ABC	BLOQUE
1	-	-	-	-	I
2	+		-	+	II
3	-	+	-	+	II
4	+	+	-	-	I
5	-	-	+	+	II
6	+	-	+	-	I
7	-	+	+	-	I
8	+	+	+	+	II

Tabla 3.3. Arreglo 2^3 en 2 bloques.

Como se vé, si se introduce la variable **D=ABC** para generar el **bloque, esta variable está relacionada** con el grado de libertad que existe entre **los dos bloques.**

En ocasiones es necesario realizar el experimento en más de 2 bloques, por ejemplo cuatro, en éste caso se necesita asociar los ensayos a dos variables que se confundan con los efectos, el razonamiento es escoger los ensayos para cada bloque que estén divididos por cierto criterio (por ejemplo, el signo positivo de una interacción) y además que estén divididos por otro criterio. (por ejemplo, el signo positivo de otra interacción).

Si se usan dos interacciones para confundir los bloques, y para cada interacción se tiene un signo (+) y uno (-), se tienen entonces cuatro combinaciones de estos signos, (- -), (- +), (+ -), y (+ +), y los ensayos que se relacionan con una combinación, se colocan en un bloque, los de otra combinación en otro, y así sucesivamente.

La construcción de estos bloques se muestran en la tabla 3.4. En los ensayos 1 y 8 los factores D y E toman el nivel +1, estos ensayos se realizan juntos en un bloque, de igual manera los ensayos que corresponden a las diferentes combinaciones de los factores D y E se asocian a los otros bloques.

	FACTORES						
ENSAYO	A	B	C	D=AB	E=BC	BLOQUE	AC
1	-	-	-	+	+	1	+
2	+	-	-	-	+	2	-
3	-	+	-		-	3	+
4	+	+	-	+	-	4	-
5	-	-	+	+	-	4	-
6	+	-	+	-	-	3	+
7	-	+	+	-	+	2	-
8	+	+	+	+	+	1	+

Tabla 3.4. Arreglo 2^3 en 4 bloques.

Los bloques se confunden con las interacciones AB, y BC. Si se desea calcular el efecto de la interacción AB, se tiene que para la diferencia de promedios, los signos positivos se encuentran en los bloques 1 y 4, y los signos negativos se encuentran en los bloques **2** y **3**, por lo tanto no es posible saber si dicho efecto se debe a la interacción o a una diferencia producida por alguno de los bloques

El factor **E** se confunde con la interacción **BC**, por lo cual, cuando se calcula dicha interacción tampoco se puede saber si el efecto obtenido tiene alguna contribución significativa debida a los bloques

La interacción **AC** no se usó para formar los bloques, sin embargo, si se quiere calcular su efecto se ve que, también dos de los cuatro ensayos que corresponden al signo positivo de la interaccion se encuentran en el bloque **1** y los otros dos en el bloque **3**, de igual forma para los ensayos que generan los signos negativos, dos están en el bloque **2**, y los otros en el bloque **4**, y nuevamente, se confunde la interacción con los bloques.

Para entender porque la interacción **AC** también se confunde con bloques, deben tenerse en cuenta los siguientes tres puntos.

(1) Cuando se multiplica la columna de signos de un factor por sí misma, el resultado es una columna de signos positivos, llamada identidad (I), de tal forma que

$$I = AA = BB = CC$$

(2) Las dos variables que se introdujeron para confundirse con los efectos, son:

$$D = AB, \quad E = BC$$

(3) Entre cuatro bloques hay tres grados de libertad, la variable **D** o interacción **AB**, se asocia a un grado de libertad, la variable **E** o interacción **BC**, se asocia al segundo grado de libertad, el tercer grado de libertad se asocia con la interacción **DE**, que es igual a

$$DE = ABBC = AIC = AC$$

Así entonces, los cuatro bloques se confunden con las interacciones AB, AC, BC, y los ensayos se relacionan a los bloques para los cuales D y E toman los signos (- -), (- +), (+ -), y (+ +).

El factor D se usa para formar los bloques haciendo D = AB, a esta expresión se le llama generador Se tienen entonces dos generadores D = AB y E = BC

En general, para un número n de factores con 2^n ensayos, se pueden hacer desde 2 hasta $2^n/2$, bloques, siendo $2^n/2$ equivalente a formar bloques de 2 ensayos en cada uno, (no tiene caso hablar de un ensayo por bloque) . Si q es el número de generadores que se utilizan para formar los bloques, el número de bloques que se obtienen es 2^q y se confunden con las q interacciones más las 2^q -q -1 interacciones que existen entre ellas.

Es importante atender a las interacciones entre los generadores, de lo contrario se podrían confundir los bloques con efectos principales. Si en el ejemplo, en vez de tomar como generadores D = AB, se hubiera tomado D = ABC, entonces los bloques se hubieran confundido con las interacciones ABC, BC y con la interacción entre ellas, ésto es DE = ABCBC = ABBCC = A I I = A, y no se podría estimar el efecto principal del primer factor.

3.2.5 DISEÑOS FACTORIALES FRACCIONADOS

Conforme aumenta el número de factores a estudiar en un diseño factorial 2^k, el número de ensayos requerido para realizar el experimento completo aumenta rápidamente, y se tiene que se puede obtener un número 2^k - 1 de efectos, entre efectos principales e interacciones

Sin embargo, cuando sólo algunos de los efectos principales e interacciones de segundo orden son realmente significativos, las interacciones de orden superior se pueden considerar tan pequeñas que pueden ser ignoradas.

Para un experimento completo 2^6, se requieren un total de **64** ensayos, y sólo **6** de los **63** grados de libertad son para los efectos principales, sólo **15** grados de libertad corresponden a las interacciones de segundo orden, los restantes **42** grados se asocian con las interacciones de tercer orden y superior [2]. Si se considera que estas interacciones de orden superior se pueden ignorar, entonces se puede realizar sólo una fracción del experimento, y así el objetivo básico del experimento se reduce al cálculo de los efectos principales e interacciones de menor orden.

Como ya se vió, para formar bloques, una forma de dividir el experimento en dos partes, es asociando los ensayos al signo de la interacción de mayor orden. En el caso de los experimentos fraccionados donde se hace sólo una parte de los ensayos se puede hacer lo mismo, suponga un 2^4 dividido en **2** bloques (tabla 3.5)

FACTORES								
A	B	C	D	ABCD	BLOQUE	BCD	AB	CD
-	-	-	-	+	1	-	+	+
+	+	-	-	+	1	+	+	+
+	-	+	-	+	1	+	-	-
-	+	+	-	+	1	-	-	-
+	-	-	+	+	1	+		-
-	+	-	+	+	1	-	-	-
-	-	+	+	+	1	-	+	+
+	+	+	+	+	1	+	+	+
+	-	-	-	-	2	-	-	+
-	+	-	-	-	2	+	-	+
-	-	+	-	-	2	+	+	-
+	+	+	-	-	2		+	-
-	-	-	+	-	2	+	+	-
+	+	-	+	-	2	-	+	-
+	-	+	+	-	2	-	-	+
-	+	+	+	-	2	+	-	+

Tabla 3.5. Experimento factorial 2^4 dividido en 2 bloques.

Aquellos ensayos donde la interacción ABCD es igual a **+1**, se colocan en un bloque y se toman para sólo realizar esa parte del experimento, en vez de realizarlo completo, de aquí que la columna de signos de la interacción **ABCD** en esa mitad del experimento está formada sólo con signos positivos, o elemento identidad (I) por lo tanto se tiene que:

$$I = ABCD$$

y se le llama la ***relación de definición.***

En esa mitad del experimento, (tabla 3.5), se vé que las columnas de signos del factor **A** y la interacción **BCD** son iguales. Escribiendo estas dos columnas por renglon se tiene:

$$A = - + + - + - - +$$
$$BCD = - + + - + - - +$$

Por otro lado las interacciones **AB**, y **CD**, escritas por renglon son:

$$AB = + + - - - - + +$$
$$CD = + + - - - - + +$$

Por lo tanto, cuando se calcula el efecto **A**, se está calculando también el efecto de la interacción **BCD**, y no se puede saber a cuál de estos dos efectos se le debe atribuir el resultado obtenido, y se dice entonces que éstos se confunden. La interacción **AB**, no se puede distinguir de la interacción **CD**, también se confunden. Cuando se calcula el efecto de un factor o interacción en un diseño fraccionado, en realidad se calcula la suma de dicho efecto más los otros con los que se confunde [2]

Cuando se calcula el efecto del factor **A**, en realidad se está calculando la suma de ese efecto, más el de la interacción **BCD**. Cuando se calcula el efecto de la interacción **AB**, en realidad se obtiene la suma de ese efecto con el de la interacción **CD**, ésto se denota de la siguiente manera:

$$l_A \rightarrow A + BCD$$
$$l_{AB} \rightarrow AB + CD$$

al símbolo l_A se le llama el contraste del efecto, o de la interacción (l_{AB}) según sea el caso.

Para encontrar los efectos que se confunden con uno de interés, se multiplica dicho efecto por la relación de definición. Para el caso del factor A se tiene.

$$
\begin{aligned}
I &= ABCD \\
A &= AABCD \\
A &= I\,BCD \\
A &= BCD
\end{aligned}
$$

es decir, el efecto de A se confunde con el de la interacción BCD.

De igual forma, para la interacción AB, multiplicándola por ambos lados de la relación de definición se obtiene:

$$
\begin{aligned}
I &= ABCD \\
AB &= AB\,ABCD \\
AB &= I\,CD \\
AB &= CD
\end{aligned}
$$

De ésta forma se puede obtener la estructura de los efectos que se confunden mostrada en la tabla 3.6.

La ventaja de usar experimentos fraccionados consiste en que si las interacciones de orden superior se pueden considerar como cero, entonces, el valor obtenido para el efecto de un factor y una interacción de orden mayor que se confunden se le puede atribuir totalmente al efecto principal

$$
\begin{aligned}
& l_A \rightarrow A + BCD \\
\text{como} \quad & BCD = 0 \\
\text{entonces} \quad & l_A \rightarrow A + BCD = A
\end{aligned}
$$

Esto es, con sólo **8** y no **16** ensayos que requiere el experimento factorial 2^4 completo (tabla 3.5), se puede calcular los efectos principales de **4** factores.

A = BCD	$l_A \rightarrow A + BCD$
B = ACD	$l_B \rightarrow B + ACD$
C = ABD	$l_C \rightarrow C + ABD$
D = ABC	$l_D \rightarrow D + ABC$
AB = CD	$l_{AB} \rightarrow AB + CD$
AC = BD	$l_{AC} \rightarrow AC + BD$
AD = BC	$l_{AD} \rightarrow AD + BC$
BC = AD	$l_{BC} \rightarrow BC + AD$
BD = AC	$l_{BD} \rightarrow BD + AC$
CD = AB	$l_{CD} \rightarrow CD + AB$
I = ABCD	$l \rightarrow$ promedio + ABCD

Tabla 3.6. Estructura de confusión.

En la tabla 3.5, se observa que el segundo bloque se puede tomar como la mitad de los ensayos a realizar, en esta mitad, la relación que existe entre la columna de signos del factor **A** con la de la interacción BCD, es la siguiente

$$A = -BCD$$

multiplicando ambos lados por **A**, se obtiene:

$$I = -ABCD$$

que es la relación de definición para la otra mitad del experimento, de tal forma que cuando se calcula el efecto del factor A, en realidad se calcula **A - BCD**, con lo que se tiene:

$$l'_A \rightarrow A - BCD$$

y lo mismo sucede para los demás factores

Si se realizan las dos fracciones del experimento, se tiene un experimento factorial completo en bloques, con lo cual se pueden obtener todos los efectos e interacciones combinando los resultados, ésto implica que si:

$$I_A \rightarrow A + BCD$$
$$I'_A \rightarrow A - BCD$$

entonces:

$$\tfrac{1}{2}\,(I_A + I'_A) = \tfrac{1}{2}\,(A + BCD + A - BCD) = A$$
$$\tfrac{1}{2}\,(I_A - I'_A) = \tfrac{1}{2}\,(A + BCD - A + BCD) = BCD$$

De la misma forma se pueden tener las interacciones de segundo orden.

$$I_{AB} \rightarrow AB + CD$$
$$I'_{AB} \rightarrow AB - CD$$

entonces:

$$\tfrac{1}{2}\,(I_{AB} + I'_{AB}) = \tfrac{1}{2}\,(AB + CD + AB - CD) = AB$$
$$\tfrac{1}{2}\,(I_{AB} - I'_{AB}) = \tfrac{1}{2}\,(AB + CD - AB + CD) = CD$$

Otra forma de obtener la mitad de los experimentos de un diseño factorial 2^k, es escribiendo un diseño factorial completo para los primeros k-1 factores, y en la columna del **k-ésimo** factor escribir los signos (+) y (-) correspondientes a la interacción **ABC...(k-1)**; para el ejemplo se tiene:

$$D = ABC$$

que se denomina el *generador* del diseño.

Del generador se vé que **D** y **ABC** tienen el mismo signo, de tal forma que **D x ABC** siempre es (+), y los ensayos que se obtienen de esta construcción son aquellos para los cuales **ABCD = +1** que es la forma en que se construyó anteriormente esta fracción del experimento. Cuando se construye de esta forma o por medio de **2** bloques, se obtiene la mitad del experimento y se denomina 2^{k-1}.

DISEÑOS 2^{K-2}

Cuando el número de factores **k** es grande, puede resultar conveniente, sobre todo por razones de costo, realizar una fracción experimental menor a la mitad del experimento, por ejemplo la cuarta parte. En este caso se habla de un diseño 2^{K-2}. Para ello es necesario relacionar dos factores con dos de las interacciones de los otros **k-2** factores, teniendo entonces dos generadores. Si se denominan estos dos generadores como **P** y **Q**, entonces la relación de definición resulta:

$$I = P = Q = PQ$$

y multiplicando cualquier factor o interacción por esta relación, se obtiene la estructura de los efectos con los cuales se confunde

Este diseño, correspondiente a un cuarto del experimento completo, se forma de manera que se puede utilizar cualquiera de las cuatro fracciones, usando como generadores, las diferentes opciones para **P** y **Q**, esto es $\pm P$, y $\pm Q$.

DISEÑOS 2^{K-p}

En general, un diseño fraccionado con 2^{K-p} ensayos, es $1/2^p$ de fracción del experimento original. La relación de definición para el diseño esta formada por p generadores y sus $2^p - p - 1$ interacciones. Cada efecto se confunde con otros $2^p - 1$, sin embargo dicha estructura se simplifica si se considera que las interacciones de tercer orden o superiores son despreciables

3.2.6 RESOLUCION DEL DISEÑO

Cuando se utilizan experimentos fraccionados la información obtenida pierde precisión. La resolución de un experimento factorial fraccionado es un indicador de la precisión que se tiene en el experimento, ya que indica los factores o interacciones que se confunden entre si. Cuando se confunde un efecto principal con una interacción de segundo orden, la resolución del experimento es 3 y la información perdida es mayor que cuando un efecto principal se confunde con una interacción de tercer orden, y en cuyo caso la resolución del experimento es 4

En general, un diseño es de resolucion *R* si ningúno de los efectos de los **p** diferentes factores, es confundido con otro que tenga menos de R-p factores. La resolución de un diseño es denotada por el número Romano como subindice [1]. En el caso del experimento fraccionado de cuatro factores mostrado en la tabla 3.5, se tiene un diseño $\mathbf{2_{IV}^{4-1}}$, lo cual quiere decir que los efectos principales se confunden con interacciones de tercer orden, y las interacciones de segundo orden se confunden con otras iguales

A mayor resolución de un experimento, las confusiones de los efectos principales se dan con interacciones de mayor orden, y haciendo suposiciones de estas últimas sobre su efecto no significativo en la respuesta, se puede hacer una mejor interpretación de los datos. Por lo anterior, una resolucion alta nos indica que la precisión que se pierde de la información es menor que cuando la resolución es más baja

Dos diseños de especial interés, son los que tienen resolución **III** y **IV**.

1. En un diseño de resolución **III** los efectos principales se confunden con las interacciones de segundo orden. Estos diseños requieren de pocos ensayos, y son útiles cuando las interacciones de segundo orden no parecen tener un efecto significativo, o para realizar

solo una fracción del experimento, analizar la información y definir la siguiente fracción a realizar.

2. En un diseño de resolución IV, los efectos principales no se confunden con interacciones de segundo orden, sino con interacciones de tercer orden, y las interacciones de segundo orden, se confunden con otras iguales. Estos diseños son útiles para estudiar los efectos principales de los factores esencialmente.

DISEÑOS DE RESOLUCION I I I

Como ya se vió, para formar un diseño fraccionado, se escribe un diseño factorial completo para los primeros **k-p** factores, y los restantes **p** factores se relacionan con los signos de algunas de las interacciones de los primeros.

La mínima interacción con la que se puede confundir un factor es la de segundo orden, y de ahí que el diseño resulte de resolución I I I.

Si se confunden los factores con interacciones mas altas, la resolución es más alta también, lo que deja libres de confusión los efectos principales con interacciones de segundo orden, por tanto sería preferible no tener experimentos de resolución I I I. Sin embargo, cuando el costo de los ensayos o el tiempo requerido para realizarlos es alto y se convierte en una limitante para el proceso de experimentación, es necesario reducir los ensayos a un número tal que sea factible y económico realizar el experimento, ésto se logra confundiendo el mayor número de factores con interacciones.

Cuando se confunden todas las interacciones que existen entre los primeros **k-p** factores, con otros $2^{k-p} - (k-p) - 1 = p$ factores se obtiene un diseño saturado. Con estos diseños se tiene la ventaja de poder estudiar un gran numero de factores, pero la desventaja de tener una resolucion III, donde los efectos principales se confunden con interacciones de segundo orden, y por tanto la información obtenida puede tener un alto grado de error. Las opciones para los diseños saturados son:

1.- Estudiar **7** factores a partir de un diseño **2^3**, confundiendo **4** factores con las interacciones existentes entre los primeros 3 factores, o también **2_{III}^{7-4}**.

2.- **4** factores, con **11** interacciones, lo que da un total de **15** factores en **16** ensayos, o también **2_{III}^{15-11}**.

3.- **5** factores, con **26** interacciones, lo que da un total de **31** factores en **32** ensayos, o también **2_{III}^{31-26}**.

Como se ve, en cada uno de estos experimentos se pueden investigar hasta **k = N - 1** factores en N ensayos. Para el caso 1 se tiene el diseño de la tabla 3.7. Este diseño representa **1/16** del experimento completo para **7** factores, y su relación de definición es:

I = **ABD** = **ACE** = BCF = ABCG = BCDE = ACDF = CDG = ABEF = BEG = AFG = DEF = **ADEG** = **CEFG** = BDFG = ABCDEFG

A	B	C	D = AB	E = AC	F = BC	G = ABC
-	-	-	+	+	+	-
+	-	-	-	-	+	+
-	+	-	-	+	-	+
+	+	-	+	-	-	-
-		+	+	-	-	+
+	-	+	-	+	-	-
-	+	+	-	-	+	-
+	+	+	+	+	+	+

Tabla 3.7. Diseño con generadores D = AB, E = AC, F = BC, G = ABC.

Multiplicando los factores o interacciones por la relación de definición, se encuentra con que otras interacciones se confunden. Para el factor **A**, se tiene:

A = BD = CE = ABCF = BCG = ABCDE = **CDF = ACDG = BEF = FG = ADEF = DEG = ACEFG** = ABDFG = BCDEFG

Así, para los demás factores, considerando que las interacciones de tercer orden y superiores son despreciables, se tiene:

$$I_A \rightarrow A + BD + CE + FG$$
$$I_B \rightarrow B + AD + CF + EG$$
$$I_C \rightarrow C + AE + BF + DG$$
$$I_D \rightarrow D + AB + CG + EF$$
$$I_E \rightarrow E + AC + BG + DF$$
$$I_F \rightarrow F + BC + AG + DE$$
$$I_G \rightarrow G + CD + BE + AF$$

En diseño de experimentos, cuando se van a estudiar muchos factores, por economía, es recomendable realizar sólo una fracción del experimento y analizar los resultados, para poder posteriormente determinar la conveniencia de realizar el experimento completo, o de introducir o eliminar variables. Al proceso de realización de experimentos en diferentes etapas se le conoce como experimentación secuencial.

Los diseños exitosos requieren el conocimiento de los factores importantes, los rangos sobre los cuales se cambian los niveles, las unidades propias de medida para los factores, etc., generalmente no se esta bien equipados para contestar estas cuestiones al principio del experimento, y se aprenden las respuestas conforme se avanza en el mismo [2]. Lo anterior sugiere la importancia de realizar los experimentos secuencialmente para no gastar todos los recursos en un sólo momento

3.2.7 USO SECUENCIAL DE DISEÑOS FRACCIONADOS

Cuando existe en los resultados algún factor de gran interés, se puede realizar un segundo bloque de ensayos con el fin de obtener los efectos de dicho factor sin confundirlo con algún otro efecto.

Si se realiza un segundo bloque cambiando el signo de la columna **D** en la tabla 3.7, ésto es **D = - AB**, entonces se tiene:

$$l'_A \rightarrow A - BD + CE + FG$$
$$l'_B \rightarrow B - AD + CF + EG$$
$$l'_C \rightarrow C + AE + BF - DG$$
$$l'_D \rightarrow -D + AB + CG + EF$$
$$l'_E \rightarrow E + AC + BG - DF$$
$$l'_F \rightarrow F + BC + AG - DE$$
$$l'_G \rightarrow G - CD + BE + AF$$

Combinando los dos bloques se obtiene:

i	$\frac{1}{2}(l_i + l'_i)$	$\frac{1}{2}(l_i - l'_i)$
A	A+CE+FG	BD
B	B+CF+EG	AD
C	C+AE+BF	DG
D	D	AB+CG+EF
E	E+AC+BG	DF
F	F+BC+AG	DE
G	G+BE+AF	CD

De esta forma, se puede obtener el efecto del factor **D** y sus interacciones, libres de confusión con otros efectos.

3.3 DISEÑO FACTORIAL 3^K.

Los diseños factoriales 3^K se usan para estudiar la curvatura de la superficie de respuesta de un proceso, para ésto los factores se estudian a 3 niveles que se pueden identificar como 0, 1 y 2 (Esta es sólo una notación, otra puede ser -1, 0 y 1, o bién, bajo, medio y alto, cualquiera de estas notaciones se puede usar indistintamente, sin afectar los resultados del experimento)

La importancia de estos diseños dentro de este trabajo se limita a la descomposición de las interacciones existentes entre los factores en sus componentes de interacción, ya que la construcción de los diseños de experimentación que se proponen en este trabajo, se basa precisamente en esta descomposición.

El diseño más simple de la serie es el 3^2 con un total de 9 combinaciones de tratamientos que dan 8 grados de libertad. Los efectos principales para cada factor tienen 2 grados de libertad, y la interacción existente tiene 4 grados de libertad.

La interacción de segundo orden se puede descomponer en 2 componentes de la interacción con 2 grados de libertad cada uno. Yates llamo a estos componentes los componentes de interacción I y J, [2], cuyas notaciones son:

$$I(AB) = AB^2$$
$$J(AB) = AB$$

estos componentes no tienen interpretación física, pero cada uno descompone el experimento en 3 bloques ortogonales

Si x_1 representa el nivel 0, 1 ó 2 del factor A, y x_2 los niveles del factor B, entonces tomando como base el componente $I(AB) = AB^2$ se puede asociar a un bloque aquellos ensayos donde se cumpla que.

$$x_1 + 2x_2 = 0 \pmod 3$$

donde los coeficientes de **x1** y **x2** son los exponentes de **A** y **B** respectivamente para el componente de la interacción, de igual forma para los otros **2** bloques, se asocian los ensayos con las expresiones:

$$x_1 + 2x_2 = 1 \pmod 3$$
$$x_1 + 2x_2 = 2 \pmod 3$$

(mod 3), o módulo 3, significa que al resultado de $x_1 + 2x_2$ se le resta el número mayor en múltiplos de 3 de tal forma que el resultado obtenido final no sea mayor a **2**.

La tabla 3.8 muestra un experimento 3^2 dividido en **3** bloques para el componente de la interacción **I**, y en **3** bloques distintos para el componente **J**.

				I(AB) = AB²		J(AB) = AB
ensayo	A	B	$X_1 + 2X_2$	$X_1 + 2X_2$ (mod 3)	$X_1 + X_2$	$X_1 + X_2$ (mod 3)
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1
3	2	0	2	2	2	2
4	0	1	2	2	1	1
5	1	1	3	0	2	2
6	2	1	4	1	3	0
7	0	2	4	1	2	2
8	1	2	5	2	3	0
9	2	2	6	0	4	1

Tabla 3.8. Diseño factorial 3^2 con la interacción AB descompuesta en sus **componentes I y J.**

Las columnas correspondientes a los componentes I y J, resultan ortogonales entre sí y con respecto a las columnas de los factores A y B

Cuando se estudian más de dos factores, las interacciones de tercer orden existentes, con 8 grados de libertad cada una, se pueden descomponer también en sus componentes de interacción con dos grados de libertad cada uno, identificándose estos componentes por las letras **W, X, Y, Z**, y definiéndose por:

$$W(ABC) = AB^2C^2$$
$$X(ABC) = AB^2C$$
$$Y(ABC) = ABC^2$$
$$Z(ABC) = ABC$$

de la misma manera, estos componentes forman cada uno 3 bloques diferentes, siendo las columnas correspondientes a cada componente ortogonales entre si y con respecto a las columnas de los factores.

3.4 RESUMEN

Dentro de los experimentos más usuales en la industria, se encuentran los factoriales a dos niveles, conocidos como experimentos 2^k, que permiten el estudio simultáneo de varios factores y sus interacciones mediante arreglos ortogonales

Cuando el número de factores a estudiar es alto, el número de ensayos necesarios para determinar sus efectos es también alto. Para reducir el costo de realizar un gran número de ensayos es conveniente utilizar experimentos fraccionados. Los diseños fraccionados se justifican plenamente cuando es valido suponer que las interacciones de orden superior son despreciables.

La resolución de un experimento indica el orden de las interacciones que se van a confundir entre si, y por tanto la calidad de la información obtenida. Entre más fracciones se hagan del experimento, se reduce la resolución del mismo, y como consecuencia la calidad de la información.

La construcción de estos diseños es similar a la consideración de un experimento en bloques, donde cada bloque corresponde a una fracción del experimento completo.

El uso secuencial de experimentos fraccionados, permite obtener mejor información a un menor costo que si se realiza el experimento completo en una sola etapa.

CAPITULO IV
EXPERIMENTOS PROPUESTOS

4.1 INTRODUCCION

La experimentación industrial requiere realizar un compromiso entre el costo de realizar el experimento y la información generada por éste. Los experimentos factoriales fraccionados 2^k permiten obtener información de un proceso, invirtiendo menos recursos que los requeridos por un experimento factorial completo, no obstante, dependiendo de la resolución del experimento la información obtenida tiene un error con respecto a la realidad.

Cuando la resolución del experimento es baja, el costo de experimentación disminuye, sin embargo la información obtenida tiene un error con respecto a la realidad. Al aumentar la resolución del experimento, la información es más precisa, pero los costos pueden llegar a incrementarse de manera considerable

Lo anterior deja el espacio de investigación para continuar con el desarrollo de experimentos que presenten una opción intermedia, para el caso en que los costos de realizar ensayos así lo requieran. En dicho espacio de investigación entran los experimentos propuestos en este trabajo. En el presente capitulo, se exponen los diseños de experimentos propuestos, que presentan ciertas ventajas (principalmente en términos de costo y duración) en relación con los experimentos usuales en la industria (diseños factoriales o factoriales fraccionados)

La sección 4.2, presenta la construcción de los experimentos propuestos (Determinación de ensayos experimentales), la sección 4.3, trata el cálculo de los efectos para estos diseños. En la sección 4.4, se presenta un ejemplo que ilustra los resultados obtenidos con este tipo de experimentos. Por último, en la sección 4.5 se presenta un resumen del capitulo.

4.2 CONSTRUCCION DE LOS EXPERIMENTOS PROPUESTOS

Los experimentos propuestos consideran la determinación de los diferentes ensayos de los que consta a través del uso de diseños factoriales 3^k. Para fines de ilustración, considere el diseño 3^k requerido para analizar dos factores, **A** y **B**. Los ensayos de que consta este diseño se presentan en la tabla 4.1. En dicha tabla se observa que el diseño requiere de un total de nueve ensayos.

ENSAYO	A	B
1	-1	-1
2	0	-1
3	1	-1
4	-1	0
5	0	0
6	1	0
7	-1	1
8	0	1
9	1	1

Tabla 4.1. Experimento factorial 3^k para 2 factores.

La figura 4.1 muestra la región experimental del diseño mostrado en la tabla 4.1, identificando los diferentes ensayos requeridos. En dicho diseño, el ensayo 5 tiene un papel especial, ya que corresponde al centro del diseño, ésto es, al ensayo experimental asociado con el punto medio de la región experimental y para el cual los factores **A** y **B** toman el nivel medio de operación.

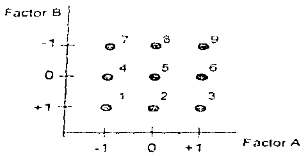


Figura 4.1. Región experimental para un diseño factorial 3^k de 2 factores.

Considerando las componentes de la interacción **AB** (capítulo 3) se tiene el diseño mostrado en la tabla 4.2.

			J (AB)=AB	I (AB)=AB^2
ENSAYO	A	B	C	D
1	-1	-1	-1	-1
2	0	-1	0	0
3	1	-1	1	1
4	-1	0	0	1
5	0	0	1	-1
6	1	0	-1	0
7	-1	1	1	0
8	0	1	-1	1
9	1	1	0	-1

Tabla 4.2. Experimento factorial 3^k para 2 factores y sus componentes de interacción.

A partir del experimento de la tabla 4.2 se observa que es posible analizar hasta cuatro factores: los dos factores originales **A** y **B**, y dos factores adicionales, **C** y **D** que se confundiran con los componentes de la interacción J e I

Es importante notar lo que ocurre con el ensayo 5, el cual corresponde, como se señala en la figura 4.1, al centro del diseño. En la tabla 4.2, el ensayo 5 se realiza bajo las siguientes condiciones: los factores **A** y **B** a nivel cero, el factor **C** a nivel **+1** y el factor **D** a nivel **-1**. Para ilustrar lo anterior considere la figura 4.2, en la cual se muestra, para los factores **A**, **B** y **C**, el cubo que representa la región experimental

Localizar los ensayos como se muestra en la tabla 4.2, donde el ensayo 5 deja de ser el centro del diseño (figura 4.2), implica tomar un bloque de lo que sería el experimento completo para el cual existe confusion entre factores e interacciones (confusion no deseable)

Para que no exista tal confusión, es necesario mantener el centro del diseño dentro del experimento forzandolo a que siga siendo el ensayo número 5. En la tabla 4.2 se observa que el componente de la interacción **J(AB)** toma el nivel de operación **+1** en el ensayo 5; para mantener el centro del diseño en dicho ensayo es necesario cambiar el nivel tomado por el componente de la interacción (+1), por el nivel **0**.

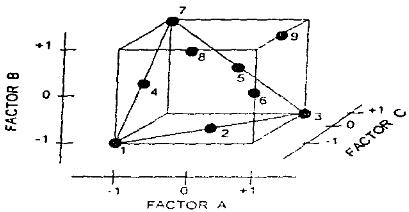


Figura 4.2. Región experimental para los factores A, B y C de la tabla 4.2.

El componente **J(AB)** de la interacción, divide al experimento mostrado en la 4.2 en 3 bloques. Aquellos ensayos que quedan en uno de los tres bloques se relacionan con uno de los tres niveles (-1, 0 ó 1) lo mismo se hace para los otros dos bloques, por lo tanto, al cambiar el nivel **+1** por el nivel **0** en el centro del diseño, es necesario hacer lo mismo con todos los ensayos del componente de la interacción que toman el nivel **+1**, ésto con el fin de mantener el bloque. Como consecuencia de lo anterior, el bloque antes identificado con el nivel **0** cambia por el nivel +1

De esta forma, para transformar la matriz del diseño original de la tabla 4.2 en una matriz de diseño transformada se propone la siguiente regla de transformación:

1. Todas las columnas que toman el valor cero en el centro del diseño de la matriz original, se quedan igual en la matriz transformada

2. Si el centro de diseño para una columna de la matriz original toma el valor **+1**, entonces, todos los valores **+1** de la columna cambian por el valor **0**, y todos los valores **0** de la columna cambian por el valor **+1** en la matriz transformada, ésto es:

+1 cambia por **0**
0 cambia por **+1**

3. Si el centro de diseño para una columna de la matriz original toma el valor **-1**, entonces, todos los valores **-1** de la columna cambian por el valor **0**, y todos los valores **0** de la columna cambian por el valor **-1** en la matriz transformada, ésto es:

-1 cambia por **0**
0 cambia por **-1**

Las anteriores reglas se pueden sintetizar en la tabla de transformación 4.3. Con estas reglas, lo que se hace es forzar a que el experimento en la matriz transformada conserve el centro de diseño de la matriz original

Si el valor en el centro del diseño es:	entonces el nivel	cambia por
-1	-1	0
	0	-1
	1	1
0	-1	-1
	0	0
	1	1
1	-1	-1
	0	1
	1	0

Tabla 4.3. Reglas para la transformación de un experimento 3^k en un experimento propuesto.

Es importante resaltar entonces los siguientes aspectos en la construcción del experimento propuesto:

1. Los niveles de operación que toman los ensayos de los componentes de interacción en la matriz original, sólo identifican tres diferentes bloques, y no el nivel de operación con el cual se realiza el experimento

2. Al forzar el nivel del bloque que contiene el ensayo del centro del diseño a que sea **0** y obtener la matriz transformada, se obtienen los niveles de operación a los cuales se realiza el experimento

Cuando coinciden todos los factores en el centro del diseño con el valor cero, cualquier interacción entre ellos también es cero, y entonces el ensayo se puede eliminar, resultando el número de ensayos necesarios para realizar el experimento igual a $\mathbf{3^k -1}$, siendo **k** el número de factores que se toman como base para la construcción del diseño $\mathbf{3^k}$. El experimento resultante (matriz de diseño transformada) es el que se muestra en la tabla 4 4, los espacios en blanco son los que corresponden a los niveles **0**, se dejan así por facilidad de estudio Note que el ensayo 5 corresponde al centro del diseño, y por tanto todos los factores y sus interacciones toman el nivel **0** de operación

	A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	ABC	ABD	ACD	BCD	ABCD
1	-1	-1	-1		1	1		1			1				
2		-1	1	1				-1	1	-1				1	
3	1	-1		1	-1		1		-1			-1			
4	-1		1	1		-1	-1			1			-1		
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1		-1	-1		1	-1			1			1		
7	-1	1		1	1	-1	1		-1			1			
8		1	-1	1				1	1	-1				-1	
9	1	1	1		1	1		1			1				
divisor	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	0

Tabla 4 4. Experimento propuesto para 4 factores.
(Matriz transformada a partir de la matriz original de la tabla 4.2).

Los factores C y D toman el lugar de los componentes I y J de la interacción AB, y las interacciones mostradas en la tabla 4.4 se obtienen como en un experimento 2^k, multiplicando entre si las columnas de los factores de la interacción. Como resultado, se tiene un experimento donde los efectos principales están confundidos con componentes de interacciones obtenidas a partir de un experimento 3^k, y no con las interacciones obtenidas directamente entre factores de un experimento 2^k.

4.3 CALCULO DE EFECTOS PARA LOS EXPERIMENTOS PROPUESTOS

Para obtener el efecto de los factores y las interacciones, el análisis del experimento se hace de la misma forma que con un experimento 2^k, ésto es, se multiplica la columna del factor a analizar por la columna de respuestas, y el resultado de la sumatoria de los productos, se divide entre el número de ensayos con un mismo nivel.

Una diferencia entre los experimentos propuestos y los presentados en el capítulo 3 es que el número de ocurrencias para cada nivel es diferente en las columnas de factores que en la de interacciones, por lo cual cambia el divisor para las diferentes columnas. El divisor de la media es diferente al de las columnas de los efectos principales y estas dos difieren del divisor de las interacciones.

- Para la media, el divisor es el número de ensayos, ésto es $3^k - 1$.

- Para los efectos principales el divisor es $3^k/3$.

- Las columnas de interacciones de segundo orden se obtienen de multiplicar dos columnas de efectos, de tal forma que para el número de ensayos de un nivel del primer factor, la tercera parte de dicho número de ensayos es igual a cero para el segundo factor, por lo tanto esta tercera parte no interviene en el calculo de la interacción, siendo entonces el divisor para las interacciones igual a $3^k/3 - 3^k/9$.

4.4 EJEMPLO

Suponga que se desea estudiar un proceso cuya función desconocida para el experimentador esta dada por:

$$y = 65 + 44\,a + 12\,b - 22\,c + 5\,d + 7\,ab + 10\,ad - 8\,bc + 5\,bd + 6\,cd \quad ......(1)$$

Tomando la tabla 4.4 como matriz de diseño se realizan los ensayos mostrados en la tabla 4.5, a los niveles indicados para cada factor en cada ensayo, obteniéndose las respuestas mostradas

ENSAYO	A	B	C	D	RESPUESTA
1	-1	-1	-1	0	30
2	0	-1	1	-1	33
3	1	-1	0	!	100
4	-1	0	1	1	0
5	1	0	-1	-1	122
6	-1	1	0	-1	26
7	0	1	-1	1	111
8	1	1	1	0	98

Tabla 4.5. Experimento propuesto realizado para estudiar el proceso correspondiente a la función 1.

Las respuestas se obtienen sustituyendo los valores que toman los factores para cada ensayo de la tabla 4.4 en la función 1. Las respuestas calculadas suponen una varianza igual a cero para poder obtener valores exactos en el cálculo de efectos, ya que el objetivo no es hacer una simulación con estudio de varianza, sino mostrar la funcionalidad de los experimentos propuestos

Analizando el experimento como se hace en los experimentos 2^k, se obtienen los efectos mostrados en la tabla 4.6, de la cual se observa que los efectos principales calculados corresponden al doble de los coeficientes de la función 1, por ejemplo, para

el efecto de A se tiene que **A = 88** que es el doble del coeficiente del factor en la función, **ésto es** porque el efecto calculado se debe al cambio de niveles de **-1** a **+1**, lo cual es un cambio de dos unidades.

Es posible calcular el efecto del factor **A** debido a que el diseño usado en el experimento, no confunde a este factor con otros factores o interacciones, y lo mismo pasa para los demás efectos principales.

M =	65				
A =	88				
B =	24				
C =	-44				
D =	10				
AB =	1	=	64	-	63
AC =	3	=	64	-	61
AD =	2	=	63	-	61
BC =	-8	=	64	-	72
BD =	9	=	72	-	63
CD =	-11	=	61	-	72

Tabla 4.6. Efectos calculados con las respuestas de la tabla 4.5.

Como sustento teórico de los experimentos propuestos, en el apéndice 1 se expone la estructura del diseño, mostrando la relación de signos que existe entre las diferentes columnas, y con la cual es posible calcular efectos principales libres de confusión.

Al igual que los experimentos tradicionales, en los experimentos propuestos existen efectos de interacciones que se confunden con otros, sin embargo la estructura de confusión es diferente a los experimentos 2^k. El apéndice 2 muestra la estructura de confusión entre interacciones de segundo grado para los experimentos propuestos.

Como último apoyo teórico, en el apéndice 3 se presenta la forma en que los experimentos propuestos se pueden realizar en bloques.

Para estudiar de **9** a **15** factores con un experimento 2^k se necesitan realizar **32** ensayos, obteniendo un experimento de resolución **IV**, y si se quiere obtener todas las interacciones de segundo orden, Box [1] presenta diseños en los que para **9**, **10** y **11** factores se necesitan **128** ensayos para un experimento de resolución mayor a **IV**.

En la tabla 4.7 se presenta un experimento 3^k para 3 factores con las componentes de interacción de segundo orden **I** y **J**, y los componentes **W**, **X**, **Y** y **Z** para la interacción de tercer orden, de este diseño se puede obtener el experimento propuesto de la tabla 4.8, en el cual sólo se presentan las columnas de los niveles para los factores, que son las que determinan los niveles a los cuales los ensayos son realizados. Las columnas de las interacciones se determinan a partir de las columnas presentadas.

Este experimento cumple con la estructura presentada en la descripción de los experimentos propuestos, por lo cual es posible obtener los efectos principales de los **13** factores que pueden ser analizados sin que estén confundidos con interacciones. El patrón de confusión para las interacciones de segundo grado se presenta en el apéndice 4.

Hasta aquí, para estudiar **13** factores, un experimento 2^k requiere de **32** ensayos para obtener efectos principales libres de confusión, con el diseño propuesto en la tabla 4.8 sólo se requirieron **26**. Con este diseño, se pueden estudiar de **9** a **13** factores obteniendo una ventaja sobre los experimentos 2^k.

EXPERIMENTO FACTORIAL 3^k PARA 3 FACTORES

				I	J	I	J	I	J	Z	X	Y	W
	A	B	C	AB	AB^2	AC	AC^2	BC	BC^2	ABC	AB^2C	ABC^2	AB^2C^2
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	0	-1	-1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0
3	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1
4	-1	0	-1	0	1	1	-1	0	0	0	1	0	1
5	0	0	-1	1	-1	0	0	0	0	1	-1	1	-1
6	1	0	-1	-1	0	1	1	0	0	-1	0	-1	0
7	-1	1	-1	1	0	-1	-1	1	1	1	0	1	0
8	0	1	-1	-1	1	0	0	1	1	-1	1	-1	1
9	1	1	-1	0	-1	1	1	1	1	0	-1	0	-1
10	-1	-1	0	-1	-1	0	1	0	1	0	0	1	1
11	0	-1	0	0	0	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
12	1	-1	0	1	1	-1	0	0	1	-1	-1	0	0
13	-1	0	0	0	1	0	1	1	-1	1	-1	-1	0
14	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	-1	0	0	1
15	1	0	0	-1	0	-1	0	1	-1	0	1	1	-1
16	-1	1	0	1	0	0	1	-1	0	-1	1	0	-1
17	0	1	0	-1	1	1	-1	-1	0	0	-1	1	0
18	1	1	0	0	-1	-1	0	-1	0	1	0	-1	1
19	-1	-1	1	-1	-1	1	0	1	0	1	1	0	0
20	0	-1	1	0	0	-1	1	1	0	-1	-1	1	1
21	1	-1	1	1	1	0	-1	1	0	0	0	-1	-1
22	-1	0	1	0	1	1	0	-1	1	-1	0	1	-1
23	0	0	1	1	-1	-1	1	-1	1	0	1	-1	0
24	1	0	1	-1	0	0	-1	-1	1	1	-1	0	1
25	-1	1	1	1	0	1	0	0	-1	0	-1	-1	1
26	0	1	1	-1	1	-1	1	0	-1	1	0	0	-1
27	1	1	1	0	-1	0	-1	0	-1	-1	1	1	0

Tabla 4.7. Experimento factorial 3^k para 3 factores.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	-1	-1	-1	-1	0	-1	0	-1	0	0	-1	-1	-1
2	0	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	0	-1	0	0	1
3	1	-1	-1	0	1	0	1	-1	0	1	1	1	0
4	-1	0	-1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1	0	0
5	0	0	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
6	1	0	-1	-1	-1	0	1	1	-1	0	0	-1	1
7	-1	1	-1	0	-1	-1	0	0	1	1	0	1	1
8	0	1	-1	-1	1	1	-1	0	1	0	1	-1	0
9	1	1	-1	1	0	0	1	0	1	-1	-1	0	-1
10	-1	-1	0	-1	0	1	1	1	1	-1	0	1	0
11	0	-1	0	1	-1	0	0	1	1	1	1	-1	-1
12	1	-1	0	0	1	-1	-1	1	1	0	-1	0	1
13	-1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	-1	-1	1
14	1	0	0	-1	1	-1	-1	0	0	-1	1	1	-1
15	-1	1	0	0	-1	1	1	-1	-1	0	1	0	-1
16	0	1	0	-1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	1	1
17	1	1	0	1	0	-1	-1	-1	-1	1	0	-1	0
18	-1	-1	1	-1	0	0	-1	0	-1	1	1	0	1
19	0	-1	1	1	-1	-1	1	0	-1	0	-1	1	0
20	1	-1	1	0	1	1	0	0	-1	-1	0	-1	-1
21	-1	0	1	1	1	0	-1	-1	1	0	0	1	-1
22	0	0	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
23	1	0	1	-1	-1	1	0	-1	1	1	-1	0	0
24	-1	1	1	0	-1	0	-1	1	0	-1	-1	-1	0
25	0	1	1	-1	1	-1	1	1	0	1	0	0	-1
26	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1

Tabla 4.8. Experimento propuesto para estudiar 13 factores.

4.5 RESUMEN

En este capítulo se expone la propuesta de diseños de experimentos que permiten calcular los efectos principales de los factores de un proceso, sin confundirlos con efectos de interacciones, logrando ésto con un menor número de ensayos que los requeridos por un experimento tradicional expuesto en la literatura

Estos experimentos se realizan usando tres niveles de operación para cada factor estudiado, su construcción se basa en los experimentos 3^k, y la forma de calcular los efectos de los factores se basa en el calculo de efectos para experimentos 2^k.

Por lo anterior, los dos puntos básicos tratados en el capitulo son:

1. Construcción de los experimentos propuestos

2. Calculo de efectos en los experimentos propuestos

La teoria desarrollada para estos experimentos referente a su estructura, patrón de confusión y realización de experimentos en bloques, se presentan como sustento en los apéndices 1, 2 y 3 respectivamente.

CAPITULO V
VALIDACION DE LOS EXPERIMENTOS PROPUESTOS

5.1 INTRODUCCION

En el presente capitulo, se desarrolla el análisis de un proceso hipotético utilizando dos caminos, por un lado los métodos tradicionales de experimentación, y por el otro los experimentos propuestos en este trabajo. Con los resultados obtenidos se hace una comparación de los dos métodos para poder obtener conclusiones acerca de los mismos.

El objetivo de este análisis es observar cuanta precisión se puede obtener con el modelo estimado por los métodos tradicionales, comparada con la precisión obtenida por el modelo estimado con los experimentos propuestos

5.2 CASO HIPOTETICO

Las consideraciones en el caso hipotetico de estudio son las siguientes:

Un experimentador desea encontrar la función de un proceso desconocido, para lo cual decide hacer uso del diseño de experimentos. El experimentador supone que en el proceso existen 9 variables (factores) que son significativas en la respuesta.

El proceso supuesto obedece a una funcion que involucra sólo 7 de los nueve factores considerados por el experimentador, y algunas de sus interacciones. En este análisis, el objetivo no es llegar hasta la función real, pues al ésta involucrar 7 factores, el número de ensayos requeridos para lograrlo podria ser muy grande, por lo cual, el experimentador considera que las posibles interacciones sólo existen entre los factores con efecto más significativo, siendo éstas menores que los efectos principales, y considera las demás interacciones como nulas

La función que se supuso, considera las caracteristicas de un proceso expresadas por la literatura en cuanto a que, el valor de los efectos principales es mayor que el de las interacciones (condición de planaridad), por tanto, las interacciones más significativas sólo se presentan entre algunos de los factores cuyos efectos principales son mayores. Teniendo en cuenta ésto, la función con la que se realiza el estudio es:

$$y = 70 + 2a + 3b + 4c + 13f + 15g + 5h + 10i + 1af + 1ag - 1ch + 6fg + 5fi + 7gi$$

Cuando se realizan experimentos factoriales para estudiar un proceso, se incurre en una serie de costos que se pueden clasificar en dos tipos.

- Costos Fijos. Son aquellos en que se incurre por el hecho de realizar el estudio. Dentro de estos costos estan conceptos tales como pago de asesoria o contratacion de un experto, papeleria, cursos, etc.

- Costos Variables: Son aquellos que estan directamente relacionados con el tipo de experimento realizado y obedecen a dos aspectos, (1) Costo de realizar un ensayo, el cual depende por lo tanto del costo del proceso, y (2) Número de ensayos realizados. Asi, el costo variable de experimentacion es igual al número de ensayos multiplicado por el costo de realizar cada ensayo. Para efectos de este trabajo, se puede considerar que el costo de todos los ensayos realizados es constante, es decir, no varia de manera significativa de un ensayo a otro.

Con lo anterior, el costo del experimento queda expresado de la siguiente forma:

$$CE = CF + CV$$

pero: $CV = ne * ce$

entonces : $CE = CF + ne * ce$

donde:

CE : Costo de experimentación.
CF : Costo Fijo.
CV : Costo Variable.
ne : número de ensayos
ce : costo del ensayo

Al realizar ya sea un experimento tradicional factorial, o un experimento propuesto, los costos fijos son los mismos. Por otro lado, para el mismo proceso en estudio, el costo de dicho proceso es prácticamente constante, y es entonces el número de ensayos la variable que se puede cambiar para disminuir el costo de experimentación.

Cuando la calidad de la información se ve disminuida por la reducción en el número de ensayos, lo único que se consigue es un proceso de experimentación barato. Por el contrario, cuando se disminuye el número de ensayos sin sacrificar la calidad de la información en la misma proporción, se consigue un proceso de experimentación más eficiente, en el cual se optimizan los recursos invertidos.

5.3 EXPERIMENTOS FACTORIALES FRACCIONADOS 2^K

Para estudiar el proceso supuesto por medio de experimentos factoriales fraccionados 2^k, el experimentador decide realizar dos etapas.

En una primera etapa, se realiza un experimento con el fin de tener una mayor certeza en cuanto a que factores que influyen significativamente sobre la respuesta. En la segunda etapa se busca encontrar los efectos principales de los factores que en la primera etapa se encuentren significativos.

ETAPA 1. Para estudiar 9 factores, Montgomery [1], propone un experimento fraccionado de resolución **III** que se construye confundiendo 5 factores con interacciones de los 4 restantes con los siguientes generadores: **E = ABC**, **F = BCD**, **G = ACD**, **H = ABD**, **I = ABCD**. Este se identifica como experimento 1, su matriz de diseño se presenta en la tabla 5.1 junto con las respuestas obtenidas para cada ensayo.

EXPERIMENTO 1

ensayo	A	B	C	D	E	F	G	H	I	respuestas
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	33
2	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	55
3	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	57
4	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	123
5	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	75
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	77
7	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	87
8	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	53
9	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	77
10	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	59
11	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	69
12	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	55
13	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	51
14	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	53
15	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	55
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	141

Tabla 5.1. Experimento 2_{III}^{9-5}, I = ABCD **(EXPERIMENTO 1)**

Los efectos obtenidos para el experimento 1 junto con su **patrón de confusión se presentan** en la tabla 5.2.

Para estos resultados se tienen 2 opciones.

1. Considerar sólo los efectos principales, en cuyo caso la función que se obtiene es:

$$y = 70 + 7\,\mathbf{a} + 10\,\mathbf{b} + 4\,\mathbf{c} + 13\,\mathbf{f} + 15\,\mathbf{g} + 5\,\mathbf{h} + 10\,\mathbf{i} \;\ldots\ldots\; \mathbf{(f.1)}$$

2. Considerar los efectos principales y las interacciones que sólo se confunden con otras interacciones, atribuyendo el valor calculado a la interacción que se presente entre los efectos principales aparentemente más significativos; la función que se obtiene es:

$$y = 70 + 7\,a + 10\,b + 4\,c + 13\,f + 15\,g + 5\,h + 10\,i + 6\,fg + 1\,bf \;\ldots\ldots\; \textbf{(f.2)}$$

RESULTADOS EXPERIMENTO 1

M =	70											
l_A =	14	=	A	+	FI							
l_B =	20	=	B	+	GI							
l_C =	8	=	C	+	HI							
l_D =	0	=	D	+	EI							
l_E =	0	=	E	+	DI							
l_F =	26	=	F	+	AI							
l_G =	30	=	G	+	BI							
l_H =	10	=	H	+	CI							
l_I =	20	=	I	+	AF	+	BG	+	CH	+	DE
l_{AB} =	12	=	AB	+	CE	+	DH	+	FG		
l_{AC} =	0	=	AC	+	BE	+	DG	+	EG	+	FH
l_{AD} =	0	=	AD	+	BH	+	CG	+	EF		
l_{AE} =	0	=	AE	+	BC	+	DF	+	GH		
l_{AG} =	2	=	AG	+	BF	+	CD	+	EH		
l_{AH} =	0	=	AH	+	BD	+	CF				

Tabla 5.2. Efectos calculados con las respuestas del experimento 1.

ETAPA 2. El experimento 2, se obtiene con los mismos generadores del experimento 1, excepto el del factor I, que cambia por I = -ABCD, este diseño se presenta en la tabla 5.3 junto con las respuestas obtenidas para cada ensayo.

Con este experimento 2 se calculan los efectos presentados en la tabla 5.4 junto con su patrón de confusión. Combinando los efectos con los obtenidos en el experimento 1, se obtiene los resultados de la tabla 5.5, donde los efectos principales no se confunden con interacciones

EXPERIMENTO 2

ensayo	A	B	C	D	E	F	G	H	I	respuestas
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	37
2	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	79
3	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	73
4	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	79
5	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	119
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	61
7	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	63
8	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	49
9	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	121
10	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	43
11	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	45
12	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	51
13	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	55
14	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	77
15	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	71
16	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	97

Tabla 5.3. Experimento 2_{III}^{9-5}, I = -ABCD (EXPERIMENTO 2)

RESULTADOS EXPERIMENTO 2

M =	70									
l_A =	-6	=	A	-	FI					
l_B =	-8	=	B	-	GI					
l_C =	8	=	C	-	HI					
l_D =	0	=	D	-	EI					
l_E =	0	=	E	-	DI					
l_F =	26	=	F	-	AI					
l_G =	30	=	G	-	BI					
l_H =	10	=	H	-	CI					
l_I =	20	=	I	-	AF	-	BG	-	CH	+ DE
l_{AB} =	12	=	AB	+	CE	+	DH	+	FG	
l_{AC} =	0	=	AC	+	BE	+	DG	+	EG	+ FH
l_{AD} =	0	=	AD	+	BH	+	CG	+	EF	
l_{AE} =	0	=	AE	+	BC	-	DF	+	GH	
l_{AG} =	2	=	AG	+	BF	+	CD	+	EH	
l_{AH} =	0	=	AH	+	BD	+	CF			

Tabla 5.4. Efectos calculados con las respuestas del experimento 2.

A=	4	AI=	0
B=	6	BI=	0
C=	8	CI=	0
D=	0	DI=	0
E=	0	EI=	0
F=	26	FI=	10
G=	30	GI=	14
H=	10	HI=	0
I=	20		

		AB	+	CE	+	DH	+	FG	=	12
AC	+	BE	+	DG	+	EG	+	FH	=	0
		AD	+	BH	+	CG	+	EF	=	0
		AE	+	BC	+	DF	+	GH	=	0
		AG	+	BF	+	CD	+	EH	=	2
				AH	+	BD	+	CF	=	0

Tabla 5.5. Efectos calculados combinando los experimentos 1 y 2.

La función obtenida combinando los experimentos 1 y 2, tiene el valor real de los efectos principales, y atribuye el valor de las interacciones que se confunden a aquella que existe entre los efectos principales de mayor significancia, la función que se obtiene es:

$$y = 70 + 2a + 3b + 4c + 13f + 15g + 5h + 10i + 1bf + 6fg + 5fi + 7gi \quad \text{.....(f.3)}$$

5.4 EXPERIMENTOS PROPUESTOS

El experimentador tiene como opción realizar el estudio utilizando los experimentos propuestos en este trabajo. El diseño utilizado (experimento 3), es un experimento propuesto para 9 factores, que se obtuvo tomando las primeras 9 columnas de la tabla 4.8, este diseño se presenta en la tabla 5.6 junto con las respuestas obtenidas para cada ensayo.

EXPERIMENTO 3

ensayo	A	B	C	D	E	F	G	H	I	respuestas
1	-1	-1	-1	-1	0	-1	0	-1	0	43
2	0	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	0	49
3	1	-1	-1	0	1	0	1	-1	0	75
4	-1	0	-1	1	1	-1	0	1	-1	53
5	0	0	-1	0	0	1	-1	1	-1	56
6	1	0	-1	-1	-1	0	1	1	-1	73
7	-1	1	-1	0	-1	-1	0	0	1	60
8	0	1	-1	-1	1	1	-1	0	1	69
9	1	1	-1	1	0	0	1	0	1	104
10	-1	-1	0	-1	0	1	1	1	1	124
11	0	-1	0	1	-1	0	0	1	1	82
12	1	-1	0	0	1	-1	-1	1	1	48
13	-1	0	0	1	1	1	1	0	0	100
14	1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	48
15	-1	1	0	0	-1	1	1	-1	-1	76
16	0	1	0	-1	1	0	0	-1	-1	58
17	1	1	0	1	0	-1	-1	-1	-1	48
18	-1	-1	1	-1	0	0	-1	0	-1	52
19	0	-1	1	1	1	1	1	0	-1	55
20	1	-1	1	0	1	1	0	0	-1	72
21	-1	0	1	1	1	0	-1	-1	1	57
22	0	0	1	0	0	-1	1	-1	1	78
23	1	0	1	-1	-1	1	0	-1	1	101
24	-1	1	1	0	-1	0	-1	1	0	65
25	0	1	1	-1	1	-1	1	1	0	77
26	1	1	1	1	0	1	0	1	0	97

Tabla 5.6. Experimento propuesto para 9 factores (EXPERIMENTO 3)

Los efectos calculados a partir del experimento 3 se presentan en la tabla 5.7.

M	A	B	C	D	E	F	G	H	I	AB	AC	AD	AE	AF	AG
70	4	6	8	0	0	25	30	10	20	12	0	6	-6	-3	-3

AH	AI	BC	BD	BE	BF	BG	BH	BI	CD	CE	CF	CG	CH	CI
-12	0	-1	13	-1	-7	-5	-5	-4	-7	-5	7	-7	-2	1

DE	DF	DG	DH	DI	EF	EG	EH	EI	FG	FH	FI	GH	GI	HI
7	-6	0	1	-4	0	6	-1	-8	10	7	10	5	14	3

Tabla 5.7. Efectos calculados con las respuestas de la tabla 5.6.

Los efectos principales que se calculan, no se confunden con interacciones, por lo tanto son los reales, y con base en ésto, se seleccionan sólo las interacciones que se presentan entre los efectos más significativos, que en este caso son F, G e I, por lo tanto la función que se obtiene es

$$y = 70 + 2a + 3b + 4c + 13f + 15g + 5h + 10i + 5fg + 5fi + 7gi \quad \ldots\ldots(f.4)$$

5.5 ANALISIS DE LAS FUNCIONES

Las 4 funciones encontradas, se obtienen a partir de 3 diseños experimentales distintos entre sí, donde los primeros 2, tienen 16 condiciones diferentes de operación del proceso, y el 3er diseño tiene 26 condiciones, con lo cual se tiene un total de 58 condiciones diferentes de funcionamiento

Para cada ensayo de los 3 diferentes experimentos, se obtiene la respuesta estimada por cada uno de los 4 modelos obtenidos y su comparacion con respecto a la respuesta real que se obtiene para los mismos ensayos con la función real

Las tablas 5.8 a la 5.10 presentan en las columnas de respuesta, la respuesta real (real), y la obtenida por los modelos estimados (**f.1** a **f.4**) El error para cada modelo, es la diferencia que existe entre la respuesta real y la que se obtiene por el modelo estimado, y el porcentaje de error, es la razón existente entre el error y la respuesta real expresada en terminos porcentuales

La información contenida en las tablas se presenta en las graficas 5.1 a 5.6, las primeras dos corresponden respectivamente a las respuestas y a los porcentajes de error obtenidos para todas las funciones con el experimento 1, de la misma forma, las graficas 3 y 4 corresponden al experimento 2, y las últimas dos, corresponden al experimento 3.

	EXPERIMENTO 1												
	respuestas					ERRORES				% ERRORES			
ensayo	f.1	f.2	f.3	f.4	exp	f.1	f.2	f.3	f.4	f.1	f.2	f.3	f.4
1	26	33	33	31	33	7	0	0	2	21.2	0.0	0.0	6.1
2	60	55	55	55	55	-5	0	0	0	-9.1	0.0	0.0	0.0
3	62	57	57	57	57	5	0	0	0	-8.8	0.0	0.0	0.0
4	116	123	123	121	123	7	0	0	2	5.7	0.0	0.0	1.6
5	70	75	75	75	75	5	0	0	0	6.7	0.0	0.0	0.0
6	84	77	77	79	77	-7	0	0	-2	-9.1	0.0	0.0	-2.6
7	94	87	87	89	87	-7	0	0	-2	-8.0	0.0	0.0	-2.3
8	48	53	53	53	53	5	0	0	0	9.4	0.0	0.0	0.0
9	72	77	77	77	77	5	0	0	0	6.5	0.0	0.0	0.0
10	66	59	59	61	59	[illegible]	0	0	-2	-11.9	0.0	0.0	-3.4
11	76	69	69	71	69	-7	0	0	-2	-10.1	0.0	0.0	-2.9
12	50	55	55	55	55	5	0	0	0	9.1	0.0	0.0	0.0
13	44	51	51	49	51	7	0	0	2	13.7	0.0	0.0	3.9
14	58	53	53	53	53	5	0	0	0	9.4	0.0	0.0	0.0
15	60	55	55	55	55	-5	0	0	0	-9.1	0.0	0.0	0.0
16	134	141	141	139	141	7	0	0	2	5.0	0.0	0.0	1.4

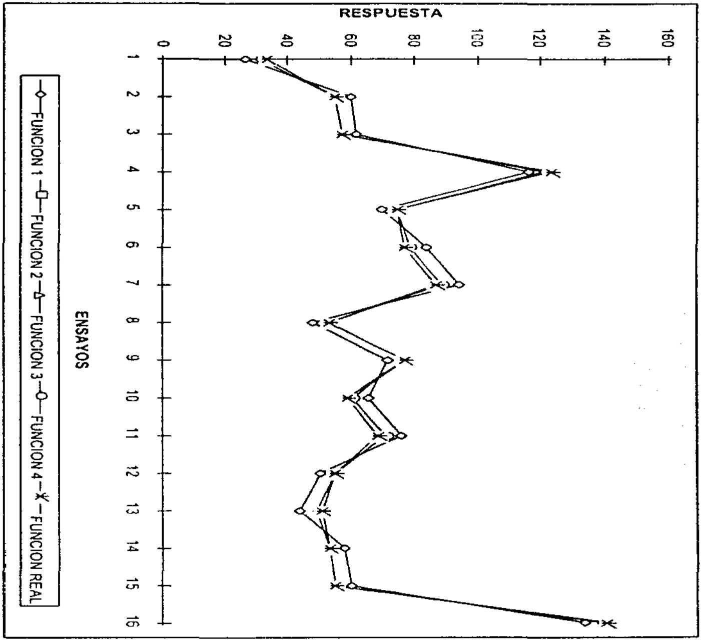
Tabla 5.8. Valores de respuestas y errores obtenidos para cada función con el experimento 1.

	EXPERIMENTO 2												
	respuestas					ERRORES				% ERRORES			
ensayo	f.1	f.2	f.3	f.4	exp	f.1	f.2	f.3	f.4	f.1	f.2	f.3	f.4
1	6	13	37	35	37	31	24	0	2	83.8	64.9	0.0	5.4
2	80	75	79	79	79	1	4	0	0	-1.3	5.1	0.0	0.0
3	82	77	73	73	73	9	-4	0	0	-12.3	-5.5	0.0	0.0
4	96	103	79	77	79	-17	-24	0	2	-21.5	-30.4	0.0	2.5
5	90	95	119	119	119	29	24	0	0	24.4	20.2	0.0	0.0
6	64	57	61	63	61	-3	4	0	-2	-4.9	6.6	0.0	-3.3
7	74	67	63	65	63	-11	-4	0	-2	-17.5	-6.3	0.0	-3.2
8	68	73	49	49	49	-19	24	0	0	-38.8	-49.0	0.0	0.0
9	92	97	121	121	121	29	24	0	0	24.0	19.8	0.0	0.0
10	46	39	43	45	43	[illegible]	4	0	-2	-7.0	9.3	0.0	-4.7
11	56	49	45	47	45	-11	-4	0	-2	-24.4	8.9	0.0	-4.4
12	70	75	51	51	51	19	24	0	0	-37.3	47.1	0.0	0.0
13	24	31	55	53	55	31	24	0	2	56.4	43.6	0.0	3.6
14	78	73	77	77	77	-1	4	0	0	-1.3	5.2	0.0	0.0
15	80	75	71	71	71	9	-4	0	0	-12.7	-5.6	0.0	0.0
16	114	121	97	95	97	-17	24	0	2	-17.5	-24.7	0.0	2.1

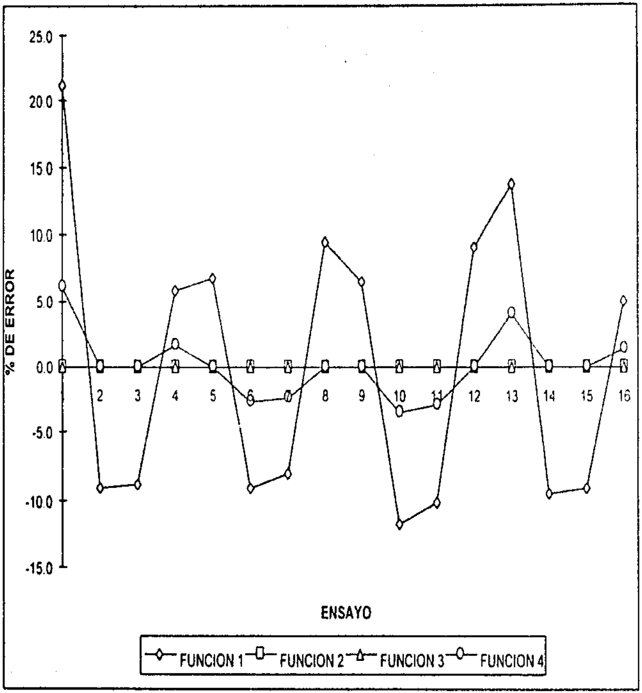
Tabla 5.9. Valores de respuestas y errores obtenidos para cada función con el experimento 2.

	EXPERIMENTO 3												
	respuestas					ERRORES				% ERRORES			
ensayo	f.1	f.2	f.3	f.4	exp	f.1	f.2	f.3	f.4	f.1	f.2	f.3	f.4
1	31	32	44	43	43	12	11	-1	0	27.9	25.6	-2.3	0.0
2	49	42	49	51	49	0	7	0	-2	0.0	14.3	0.0	-4.1
3	73	73	75	75	75	2	2	0	0	2.7	2.7	0.0	0.0
4	41	41	51	51	53	12	12	2	2	22.6	22.6	3.8	3.8
5	59	53	55	56	56	-3	3	1	0	-5.4	5.4	1.8	0.0
6	83	83	71	71	73	-10	-10	2	2	-13.7	-13.7	2.7	2.7
7	66	65	58	59	60	-6	-5	2	1	-10.0	-8.3	3.3	1.7
8	84	79	70	70	69	-15	-10	-1	-1	-21.7	-14.5	-1.4	-1.4
9	108	108	103	103	104	-4	-4	1	1	-3.8	-3.8	1.0	1.0
10	96	101	125	125	124	28	23	-1	-1	22.6	18.5	-0.8	-0.8
11	75	75	82	82	82	7	7	0	0	8.5	8.5	0.0	0.0
12	54	61	51	49	48	-6	-13	-3	-1	-12.5	-27.1	-6.3	-2.1
13	91	97	102	101	100	9	3	-2	-1	9.0	3.0	-2.0	-1.0
14	49	55	50	49	48	-1	-7	-2	-1	-2.1	-14.6	-4.2	-2.1
15	86	93	79	77	76	-10	-17	-3	-1	-13.2	-22.4	-3.9	-1.3
16	65	65	58	58	58	-7	-7	0	0	-12.1	-12.1	0.0	0.0
17	44	49	49	49	48	4	-1	-1	-1	8.3	-2.1	-2.1	-2.1
18	32	32	51	51	52	20	20	1	1	38.5	38.5	1.9	1.9
19	56	51	56	56	55	-1	4	-1	-1	-1.8	7.3	-1.8	-1.8
20	74	73	70	71	72	-2	-1	2	1	-2.8	-1.4	2.8	1.4
21	57	57	55	55	57	0	0	2	2	0.0	0.0	3.5	3.5
22	81	75	77	78	78	-3	3	1	0	-3.8	3.8	1.3	0.0
23	99	99	99	99	101	2	2	2	2	2.0	2.0	2.0	2.0
24	67	67	65	65	65	-2	-2	0	0	-3.1	-3.1	0.0	0.0
25	91	84	77	79	77	-14	-7	0	-2	-18.2	-9.1	0.0	-2.6
26	109	110	98	97	97	-12	-13	-1	0	-12.4	-13.4	-1.0	0.0

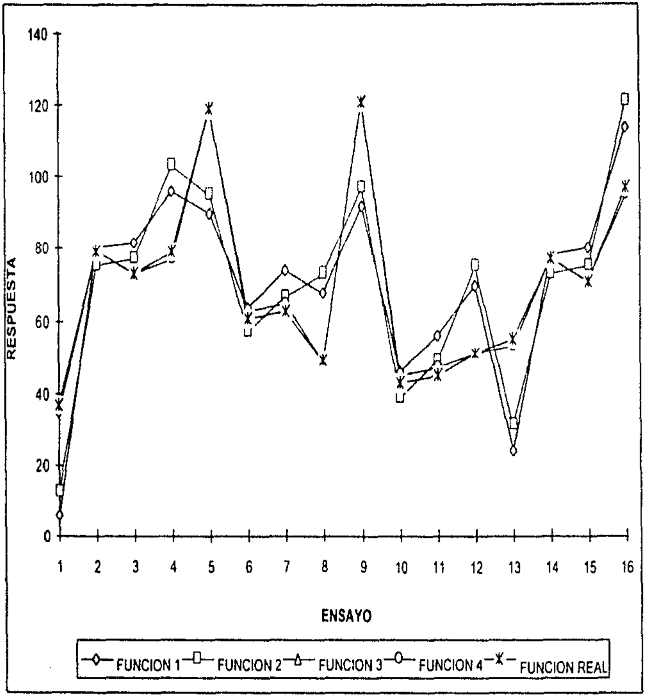
Tabla 5.10. Valores de respuestas y errores obtenidos para cada función con el experimento 3.



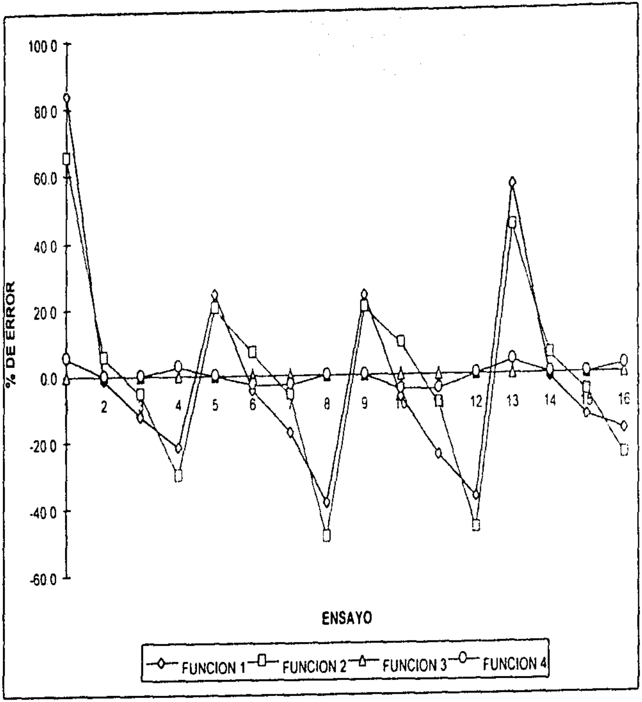
Gráfica 5.1. Respuestas estimadas con las funciones f.1 a f.4 para el experimento 1.



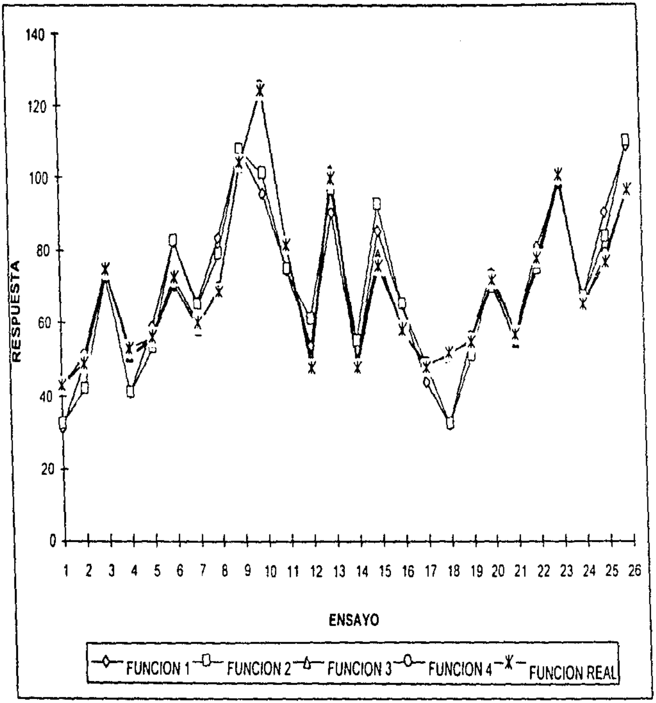
Gráfica 5.2. Porcentajes de error para las respuestas obtenidas con el experimento 1.



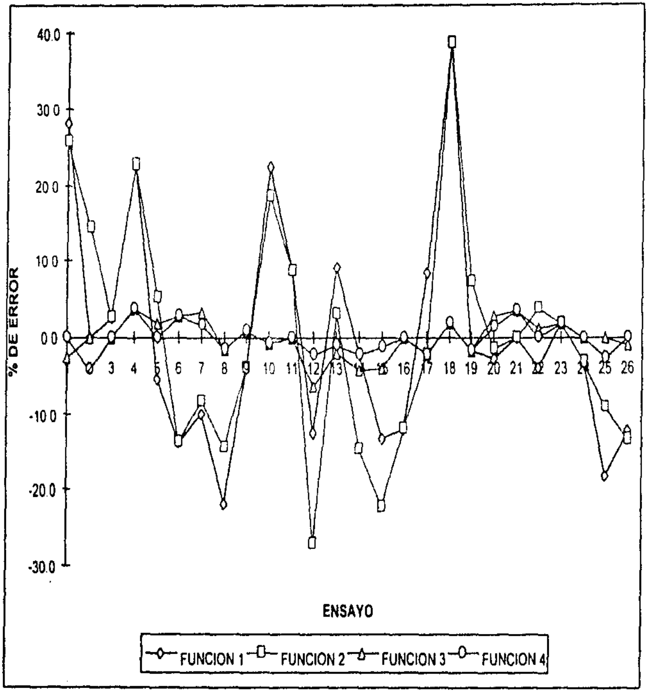
Gráfica 5.3. Respuestas estimadas con las funciones f.1 a f.4 para el experimento 2.



Gráfica 5.4. Porcentajes de error para las respuestas obtenidas con el experimento 2.



Gráfica 5.5. Respuestas estimadas con las funciones f.1 a f.4 para el experimento 3.



Gráfica 5.6. Porcentajes de error para las respuestas obtenidas con el experimento 3.

Considerando los 58 ensayos totales que definen diferentes condiciones de funcionamiento del proceso, y tomando los valores absolutos de los errores y porcentajes de errores, es posible calcular, el promedio de las respuestas, errores y porcentajes de error para cada función; los resultados se presentan en la tabla 5.11.

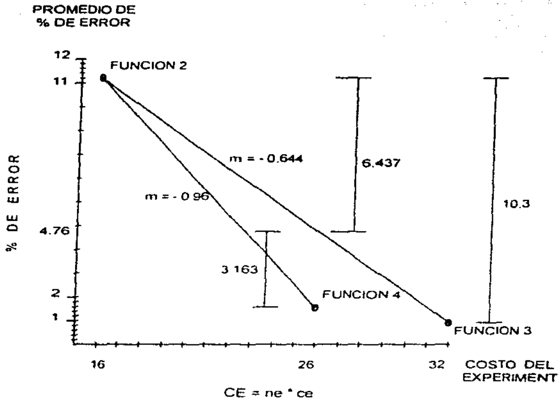
FUNCION	TIPO DE EXPERIMENTO	No. ENSAYOS	PROMEDIO RESPUESTA	PROM ERROR (unidades)	PROMEDIO % ERROR	% ERROR MAXIMO
F. REAL	--	--	70	--	--	--
F. 1	FACTORIAL 2^k	16	70	9.1	14.1	83.8
F. 2	FACTORIAL 2^k	16	70	7.21	11.2	64.9
F. 3	FACTORIAL 2^k	32	70	0.55	0.9	6.3
F. 4	*PROPUESTO*	26	70	0.97	1.6	6.1

Tabla 5.11. Promedio de respuestas, error y porcentaje de error.

5.5.1 EFECTIVIDAD DE LOS EXPERIMENTOS PROPUESTOS

Si se grafica costo variable de experimentación contra porcentaje de error, se obtiene la gráfica 5.7. Como **CV = ne*ce** el número de ensayos requeridos para obtener una función está directamente relacionada con el costo. (No se toma la función 1 porque las condiciones con las que se obtuvo son las mismas que las de la función 2, y su promedio de porcentaje de error es más alto, así que la función 2 ofrece más ventaja para los experimentos factoriales 2^k)

Con los experimentos tradicionales 2^k, se pueden obtener las funciones 2 y 3, entre las cuales se puede trazar una línea que representa la disminución del promedio del porcentaje de error cada que se aumenta un ensayo. Entre estas funciones existe una disminución 10.3 puntos porcentuales en el promedio del porcentaje de error.



Gráfica 5.7. Relación entre costos y error para las funciones estimadas f2 a f4.

Otra opción de experimentación que disminuyera el número de ensayos y por tanto el costo de experimentación, seria proporcional a los experimentos tradicionales si el porcentaje promedio de error se localizara sobre la linea. Para la función 4, con 26 ensayos, el promedio de porcentaje de error proporcional que se ubica sobre la linea es de 4.76 %, lo cual implica una disminución de 6 437 puntos porcentuales. Sin embargo, el promedio para la función 4 es de 1.6 %, ésto es 3 163 puntos porcentuales por debajo del valor proporcional a los experimentos 2^k.

Esta disminución adicional representa un **49.13 %** de ventaja sobre los experimentos tradicionales. Dicho nivel de ventaja se debe a dos razones:

- Capacidad para reducir el número de ensayos, y por tanto el costo de experimentación. La función 4 se obtiene con **18.75%** menos ensayos que la función 3.

- Capacidad para obtener más información por cada ensayo realizado. A partir de la función 2, la función 3 (experimento 2^k) reduce 0.644 puntos porcentuales de promedio de porcentaje de error por cada ensayo realizado, mientras que la función 4 (experimento propuesto) lo reduce en 0.96 puntos porcentuales.

Debido a estos dos aspectos, el proceso de estudio con los experimentos propuestos, resulta más eficiente en cuanto al aprovechamiento de recursos que lo logrado con los experimentos 2^k. Estos datos son iguales en tratamiento si se habla del tiempo de experimentación en vez del costo.

5.5.2 OPTIMIZACION DE PROCESOS

Uno de los objetivos de obtener funciones de procesos por medio del diseño de experimentos, es poder utilizar esas funciones para optimizar procesos, pudiéndose presentar 3 situaciones distintas:

1.- Maximizar la respuesta.
2.- Minimizar la respuesta.
3.- Mantenerla en un valor medio deseado.

Para comparar el ajuste de las funciones al proceso real en términos de optimización de procesos, se ordenan de forma ascendente las 58 respuestas obtenidas con la función real a partir de los experimentos; se toman los 10 ensayos que minimizan la respuesta, (orden 1-10), los 10 ensayos que la maximizan, (orden 49-58), y los 10 ensayos que dan las respuestas más cercanas a 60, resultando ser en orden los ensayos 21 al 30. (el valor de 60 se toma arbitrariamente como valor medio deseado). Los resultados se presentan en la tablas 5.12 a 5.14, la primer columna es el orden en que quedo la respuesta, siendo el 1 la minima, y el 58 la máxima; la segunda y tercer columna representan respectivamente, el experimento y el ensayo con los cuales se obtiene la respuesta; las columnas 4a. a 8a. representan el valor de la respuesta que se obtiene con la función real y con las estimadas, para el ensayo correspondiente.

OPTIMIZACION DE RESPUESTA (VALOR MINIMO)							
			respuesta				
orden	experimento	ensayo	f. real	f.1	f.2	f.3	f.4
1	1	1	33	26	33	33	31
2	2	1	37	6	13	37	35
3	2	10	43	46	39	43	45
4	3	1	43	31	32	44	43
5	2	11	45	56	49	45	47
6	3	12	48	54	61	51	49
7	3	14	48	49	55	50	49
8	3	17	48	44	49	49	49
9	2	8	49	68	73	49	49
10	3	2	49	49	42	49	51

Tabla 5.12. Ensayos que optimizan la respuesta obtenida por experimentación (mínimo).

OPTIMIZACION DE RESPUESTA (VALOR MEDIO, 60)							
			respuesta				
orden	experimento	ensayo	exp	f.1	f.2	f.3	f.4
21	3	19	55	56	51	56	56
22	3	5	56	59	53	55	56
23	1	3	57	62	57	57	57
24	3	21	57	57	57	55	55
25	3	16	58	65	65	58	58
26	1	10	59	66	59	59	61
27	3	7	60	66	65	58	59
28	2	6	61	64	57	61	63
29	2	7	63	74	67	63	65
30	3	24	65	67	67	65	65

Tabla 5.13. Ensayos que optimizan la respuesta obtenida por experimentación (valor medio).

OPTIMIZACION DE RESPUESTA (VALOR MAXIMO)							
			respuesta				
orden	experimento	ensayo	exp	f.1	f.2	f.3	f.4
49	2	16	97	114	121	97	95
50	3	26	97	109	110	98	97
51	3	13	100	91	97	102	101
52	3	23	101	99	99	99	99
53	3	9	104	108	108	103	103
54	2	5	119	90	95	119	119
55	2	9	121	92	97	121	121
56	1	4	123	116	123	123	121
57	3	10	124	96	101	125	125
58	1	16	141	134	141	141	139

Tabla 5.14. Ensayos que optimizan la respuesta obtenida por experimentación (máximo).

El valor mínimo que se obtiene a partir de los experimentos es 33, mientras que las funciones 1 y 2 llegan a estimar como valores mínimos hasta 6 y 13 de respuesta respectivamente. En el caso de maximización y búsqueda de valor medio, se vé de igual forma que mientras las funciones 3 y 4 se acercan muy bien a la realidad, las funciones 1 y 2 llegan a tener errores de hasta 28 unidades, como es el caso del ensayo que en orden de respuesta ocupa el número 57 (tabla 5 14), donde la respuesta real es 124, y la estimada por la función 1 es 96, lo cual representa un error de 22 58%.

Con las condiciones definidas por el ensayo 13 del experimento 2, (resultado mostrado en la tabla 5.9), las funciones 1 y 2 estiman el segundo valor más chico de la respuesta, siendo esta 31 y 24 respectivamente, mientras que para esas mismas condiciones de operación definidas por ése ensayo, el valor real que se obtiene queda en el lugar número 20 con una respuesta igual a 55, esto representa un error de 43.63% para la función 1, y 56.36% para la función 2.

RESULTADOS

De las gráficas, tablas de experimentos, tabla de promedios gráfica de costo-%error, y tabla de optimización se puede observar lo siguiente:

<u>FUNCION 1</u>.- Se requiere de un total de 16 ensayos para calcularla, tiene un promedio de error y porcentaje de error más altos, el porcentaje de error llega a ser 83.8%. Cuando se trata de optimizar el proceso, puede estimar valores muy lejanos a la realidad.

<u>FUNCION 2</u>.- Se obtiene con 16 ensayos. Cuando se aplico al experimento 1, el error y por lo tanto el porcentaje de error fue cero, sin embargo, cuando se considera bajo caracteristicas diferentes a las consideradas por el primer experimento 1, llega a tener hasta un 64.9% de error, lo cual significa, que si el experimentador la adopta, puede llegar a tener resultados diferentes a los esperados, con un error promedio de 11.2%. En la optimización de procesos las respuestas estimadas pueden ser muy diferentes a las reales.

<u>FUNCION 3</u>.- Se obtiene con 32 ensayos, es la que da resultados mas cercanos a las respuestas obtenidas por experimentación, su error promedio es de 0.9%, y en optimización de procesos estima respuestas muy cercanas a las reales.

<u>FUNCION 4</u>.- Se obtiene a partir del diseño propuesto en este trabajo con 26 ensayos, lo cual representa un 62.5% más de costo y tiempo que lo necesario para las funciones 1 y 2, pero reduce el error promedio de la función 1 en un 88.65%, y el error promedio de la función 2 en un 85.71%. Con respecto a la función 3, la función 4 representa un ahorro en costo y tiempo de un 18.75%, la diferencia entre el error promedio de estas dos funciones es de 0.7%, y en las tablas de optimización no muestran gran diferencia. En la gráfica de costo-%error, se observa que tiene una ventaja de 49.13% con respecto a los experimentos 2^k

5.6 RESUMEN

En el presente capítulo se expone el análisis de un proceso supuesto. El objetivo de este análisis es encontrar la función más aproximada al proceso real con el mínimo posible de ensayos, se obtienen 4 funciones a partir de los 2 métodos de experimentación que se tratan, el método tradicional y el de experimentos propuestos, y se hace un análisis de cada función, comparando las respuestas obtenidas por las funciones contra las respuestas reales. Por último, estas 4 funciones se analizan en con respecto a la exactitud con la que se puede optimizar el proceso.

CAPITULO VI
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capitulo se repasan los resultados obtenidos del trabajo y se indican las áreas de oportunidad para futuros estudios

El diseño de experimentos es una herramienta de gran potencial para la optimización de procesos, ya que permite conocer como afectan las diferentes variables a la respuesta obtenida, utilizando de manera eficiente los recursos destinados al estudio

Dentro del diseño de experimentos, aquellos en los que se estudian las variables a dos niveles son de gran importancia (experimentos 2^k con niveles -1 y +1), ya que en la mayoría de los procesos reales, las funciones que los describen se pueden aproximar con suficiente precisión a planos, y no es necesario hacer ajustes cuadráticos o de mayor orden.

Lo anterior permite tener experimentos con un número de ensayos reducidos, donde las interacciones de orden mayor no se pueden calcular, pero se consideran como no significativas, esta reducción de ensayos, muchas veces es obligada por los recursos limitantes para la experimentación, como lo son costo y tiempo.

Esta obligación en la reducción de ensayos, lleva a experimentos de baja resolución, donde se pueden presentar casos para los cuales los resultados obtenidos varien de los reales en un porcentaje considerable de error, siendo necesario realizar experimentos posteriores, si la precisión que se desea obtener es relativamente alta

En este trabajo se desarrollaron experimentos cuya caracteristica estratégica es la de la introducción de un tercer valor a los dos utilizados por los experimentos 2^k, siendo este tercer valor el cero El cálculo de efectos se realiza de la misma forma que en los experimentos tradicionales, por lo cual el ensayo correspondiente al tercer valor, no se utiliza para dicho cálculo.

Para introducir este tercer valor, la construcción de los experimentos propuestos se basa en la descomposición de las interacciones de los experimentos 3^k en componentes de interacción, las cuales no tienen un significado físico, pero descomponen el experimento en bloques.

De esta forma se obtienen los experimentos con los cuales se realizan análisis de funciones para las que también se usaron los experimentos tradicionales.

En términos de resolución, los experimentos propuestos requieren un número menor de ensayos que los requeridos por los experimentos 2^k para obtener el valor de los efectos principales libres de interacciones; para estudiar de 9 a 13 factores, esta disminución de ensayos representa un 18.75%, que puede traducirse de una manera un poco arbitraria a ese mismo porcentaje de ahorro en costo y tiempo pudiendo variar de acuerdo a las condiciones del proceso sobre el cual se experimenta.

Con la certeza en la información de los efectos principales, es posible suponer las interacciones que pueden tener efectos más significativos, ésto gracias al concepto de planaridad, por lo tanto, representa una ventaja obtener los efectos principales de la manera más rápida posible, y deja la posibilidad de usar los experimentos propuestos como un medio para la experimentación secuencial, donde en etapas posteriores se pueden usar experimentos 2^k de un número pequeño de ensayos.

La forma en que las interacciones de segundo grado se confunden, es más complicada que en los experimentos tradicionales, sin embargo, utilizando lo mejor posible la información disponible, el patrón de confusión puede presentar ventajas en términos de dar por bueno el efecto de la interacción calculada.

No es posible obtener un camino único como medio efectivo de experimentación, las condiciones de experimentación, el conocimiento que el experimentador tiene del proceso, la habilidad de este mismo para manejar la información y hacer suposiciones acertadas, y el proceso en sí, son factores de los cuales depende el proceso de experimentación y por tanto su efectividad.

Todas los posibles procesos que se podrian presentar en la práctica y para las cuales se puede realizar análisis de funciones son un número infinito, por lo cual, validar los experimentos propuestos por el número de casos en los que presenta resultados efectivos no seria el camino adecuado, pero tampoco se puede concluir que estos experimentos son más efectivos que los tradicionales a partir de los resultados obtenidos, ya que no es la suficiente información para hacerlo

Es necesario continuar con la investigación de este tipo de experimentos ya que pueden llegar a ser de gran utilidad en la práctica.

La funcion simulada fue definida al azar, asignando valores arbitrarios a cualesquiera de las posibles variables involucradas, así que, se puede ver que estos experimentos pueden llegar a dar resultados muy buenos con una adecuada aplicación a partir de estudios que se puedan desarrollar

La teoria de los experimentos propuestos no se limita a la presentada en este trabajo, en el apéndice 5, se presenta, junto con un análisis de una función de 6 variables, un diseño que sirve para estudiar 6 factores en 12 ensayos obteniendo los efectos principales libres de confusión con interacciones de segundo orden, lo cual, es equivalente a un diseño 2^k de resolución IV con 16 ensayos, el ahorro en este caso es de un 25%

Este diseño no se incluyo dentro de el contexto de este trabajo, ya que su construcción no coincide con la teoria expuesta y no fue obtenido bajo ningún método en especial, sino sólo buscando los ensayos que dieran estos resultados

Lo que si tiene en común este diseño con los presentados en este trabajo, es la introducción de un tercer nivel a los experimentos tradicionales, y su construcción representa un campo de investigación, lo cual reforzaria los experimentos propuestos como alternativa para la reducción de costos y tiempo de experimentación

Así como este experimento difiere en teoria de los presentados en este trabajo, se puede esperar, que a partir de otros caminos se obtenga una variedad de experimentos propuestos para estudiar números distintos de factores, con lo cual se acrecentaria de manera importante la riqueza de el diseño de experimentos como herramienta de estudio de procesos.

De igual forma, se puede ver que la teoría con la cual se obtienen los experimentos tanto 2^k como los experimentos compuestos, puede llegar a ser un poco complicada según se profundice en su estudio, pero su aplicación y análisis de resultados son de lo más sencillo, y las ventajas que se pueden obtener de ellos en la práctica son muy grandes, por lo tanto, es necesario promover el estudio de estas técnicas dentro de la Facultad de Ingeniería para proveer a los egresados de una herramienta más, con la cual se puede impulsar la industria mexicana.

BIBLIOGRAFIA

1. Box, G. E. P., W. G. Hunter, and J. S. Hunter. *Statistics for Experimenters*. Wiley, New York. 1978.

2. D. C. Montgomery. *Design and Analysis of Experimenters* Second Edition. Wiley, New York. 1976.

3. Gunter B. "Statistically Designed Experiments, Part 1". *Quality Progress*. December 1989. pp 63-64.

4. Gunter B "Statistically Designed Experiments, Part 3" *Quality Progress*. April 1990. pp 74-75

5. Hahn G. J "Some Things Engineers Should Know About Experimental Design". *Journal of Quality Technology* Vol. 9, No 1, January 1977 pp 13-20

6. Hendrix. Charles D. "What Every Technologist Should Know About Experimental Design". *Chemtech*, March 1979. pp 167-174

7. Kenett R. S. and V Brian M. "Going Beyond Main-Effect Plots". *Quality Progress*. February 1991. pp 71-73.

8. Knowlton J. and K. Ren. "The Experimentation Process". *Quality Progress*. February 1993. pp 43-47.

9. Phillip J. Ross. *Taguchi Techniques for Quality Engineering*. McGraw-Hill, Singapore, 1988.

APENDICE I

ESTRUCTURA DE LOS DISEÑOS PROPUESTOS

Como se puede observar en la tabla 4.4, la estructura de la matriz de diseño obtenida para el experimento propuesto, no es uniforme en cuanto al número de niveles que existe por columna.

- Para los efectos principales existen tres ensayos por cada nivel **-1** y **1**, y existen dos ensayos para el nivel **0**.

- Para las interacciones de segundo orden existen dos ensayos por cada nivel **-1** y **1**, y existen cuatro ensayos para el nivel **0**.

- Para las interacciones de tercer orden existe un ensayo por cada nivel **-1** y **1** y existen seis ensayos para el nivel **0**

- Para la interacción de cuarto orden todos los ensayos toman el nivel **0**.

Así, los efectos principales se pueden obtener sin que se confundan con interacciones a cambio de perder precisión e información para el cálculo de estas últimas.

Se pierde precisión porque conforme aumenta el orden de la interacción disminuye la cantidad de ensayos existentes para cada nivel, lo que es perdida de información.

Estas perdidas de información y precisión son permisibles si se consideran las interacciones de tercer orden y superiores como insignificantes.

La relación existente entre las diferentes columnas de los efectos principales y las interacciones y que permite obtener la información de los efectos principales libre de confusiones se divide en tres casos

A) RELACIÓN ENTRE DOS COLUMNAS DE EFECTOS PRINCIPALES.

Como las columnas de signos para los factores se definen a partir de un experimento ortogonal, estas resultan de igual forma ortogonales. De la tabla 4.4, se ve que los ensayos 1, 4 y 6 se utilizan para calcular el promedio del nivel -1 del factor A. En el ensayo 4, el factor B no interviene en la respuesta pues su nivel es 0. En el ensayo 1, el factor B toma el nivel -1, y en el ensayo 6 toma el nivel +1, quedando por tanto balanceados los niveles del factor B con respecto al factor A, de aquí que A no se confunde con B. Lo mismo pasa entre las diferentes columnas de factores.

B) RELACIÓN ENTRE UNA COLUMNA DE EFECTO PRINCIPAL Y UNA COLUMNA DE INTERACCIÓN QUE INVOLUCRA ESE MISMO EFECTO PRINCIPAL.

Entre la columna de un factor y la de una interacción que involucra ese mismo factor, por ejemplo la columna del factor A con relación a la columna de la interacción AB, se mantiene la ortogonalidad de la forma existente entre columnas de factores, por tanto existe una ocurrencia de cada nivel de la interacción AB para los ensayos de nivel -1 del factor A, lo mismo pasa para los ensayos de nivel 1, así, A no se confunde con AC.

C) RELACIÓN ENTRE UNA COLUMNA DE EFECTO PRINCIPAL Y UNA COLUMNA DE INTERACCIÓN QUE NO INVOLUCRA AL EFECTO PRINCIPAL.

La relación que existe entre un factor y una interacción que no involucra dicho factor es diferente, por ejemplo, para el factor B y la interacción AC, se tiene la relación presentada en la tabla A1.1.

Como se puede ver, existe un ensayo con nivel 1 de la interacción AC, para un nivel -1 del factor B, y para los otros dos niveles -1 del factor, la interacción toma el valor de 0, lo mismo pasa para los valores 1 del factor B.

ENSAYO	B	AC
1	-1	1
2	-1	
3	-1	
4		-1
5		-1
6	1	
7	1	
8	1	1

Tabla A1.1. Relación de columnas de signos para un factor y una interaccion de un experimento propuesto para 4 factores.

Cuando se calcula el efecto B, lo que se hace es obtener el promedio **de los ensayos donde el factor** toma al nivel **1** y restar el promedio de los ensayos **toma el nivel -1**. **El primer promedio** esta influenciado por una contribución debida al nivel **1** de la interacción **AC, y el segundo** promedio esta influenciado por la misma contribución **del nivel 1** de la **misma interacción AC**, por lo tanto al hacerse la diferencia de promedios para **obtener** el efecto, la contribución de la interacción **AC** se elimina

Lo anterior se puede desarrollar de manera abstracta tomando en cuenta lo siguiente:

El efecto de un factor es la diferencia entre 2 promedios, uno en el nivel **1** y otro en el nivel -1. El valor de la respuesta del proceso varia alrededor de la media según el nivel que tome el factor que se esté cambiando. Representando con letra minúscula cursiva el coeficiente de un factor en el modelo matemático que representa el proceso, por ejemplo para el factor **B** el coeficiente de la función es b, entonces el efecto **B** es igual a dos veces b, esto es **B = 2** b. Lo anterior se puede observar en la figura A1.1

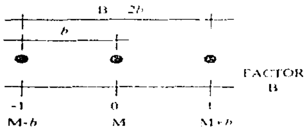


Fig. A1.1. Variación de la respuesta al rededor de la media del proceso.

Cuando el factor se mantiene en **0**, la respuesta se mantiene en la media con respecto a ese factor, cuando el factor toma el nivel **1**, la respuesta toma el valor $\mathbf{M}+b$, y $\mathbf{M}-b$ es lo que vale la respuesta cuando el factor se encuentra en **-1**.

De esta forma, el efecto de **B** está dado por

$$B = (M+b) - (M-b) = M - M + (b) - (-b) = b + b = 2\,b \quad \ldots\ldots(1)$$

como ya se había mencionado. Sustituyendo en (1) los valores de la función (1) del ejemplo de la sección 4.4 se puede ver que

$$B = (M+b) - (M-b) = (64 + 12) - (64 - 12) = 64 - 64 + (12) - (-12) = 12 + 12 = 24 = 2\,b$$

Por otro lado b_+ representa el promedio que toma la respuesta cuando el factor **B** toma el nivel 1, y b_- representa el promedio de la respuesta en el nivel **-1** del mismo factor, por lo tanto:

$$b_+ = (M+b)$$
$$b_- = (M-b)$$

con los datos del ejemplo:

$$b_+ = (64 + 12) = 76$$
$$b_- = (64 - 12) = 52$$

sustituyendo en (1):

$$B = b_+ - b_- \quad \ldots\ldots(2)$$

los promedios incluyen a la media, pero cuando se hace la resta de promedios, como se vió en la ecuación (1), dicha media se elimina, por lo que se tiene:

$$B = +\,b - (-b) = 2b$$

que es equivalente a multiplicar el signo del subíndice en (2) por el del coeficiente, con lo que se tiene:

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}_+ - \mathbf{b}_- = b + b = 2b$$

Sólo se puede hacer esta multiplicación de signos cuando se hace una diferencia de promedios, es decir, cuando la expresión se iguala al valor de un efecto.

No tomando en cuenta los otros factores o interacciones, si se saca el promedio de las respuestas de los 3 primeros ensayos en la tabla A1 1, el resultado es el valor de la respuesta cuando **B** toma el valor **-1**, o dicho de otro modo el valor $\mathbf{b}_-$, más el promedio que existe entre los 3 ensayos donde la interacción **AC** toma el valor **0** dos veces y el valor **1** una vez

Cuando la interacción toma el valor cero no existe influencia de ésta en la respuesta, por lo tanto la única influencia existe cuando **AC** toma el valor **1**, de aquí que el promedio con referencia a la interacción da el valor $\mathbf{ac}_+/3$; si la interacción tomara el nivel -1, el valor obtenido sería $\mathbf{ac}_-/3$.

Con lo anterior, se tiene que el promedio de los primeros 3 ensayos está dado por $\mathbf{b}_- + \mathbf{ac}_+/3$, y el promedio de los últimos 3 ensayos es $\mathbf{b}_+ + \mathbf{ac}_+/3$, pues en éstos existe también sólo un valor **1** para la interacción, de tal forma que cuando se calcula el efecto del factor **B**, lo que se obtiene es

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_+ + \mathbf{ac}_+/3) - (\mathbf{b}_- + \mathbf{ac}_+/3) = \mathbf{b}_+ - \mathbf{b}_- + \mathbf{ac}_+/3 - \mathbf{ac}_+/3 = b + b + ac/3 - ac/3 = 2\,b$$

Como se puede ver, aunque la relación existente entre estas 2 columnas difiere de la existente entre 2 factores o entre 1 factor y una interacción que lo involucre, es posible calcular efectos principales sin que el resultado este influido por el efecto de la interacción.

APENDICE II

CONFUSION EN LOS EXPERIMENTOS PROPUESTOS

El experimento propuesto en la tabla 4.4, es sólo una parte de un experimento completo, y al igual que los experimentos tradicionales, confunde ciertos efectos con otros, pero, a diferencia de los experimentos 2^k donde se confunde un efecto totalmente con otro, la confusión en el experimento propuesto entre las interacciones de segundo orden resulta compleja, pues un efecto se confunde con partes de otros efectos y no con el efecto completo.

El patrón se puede obtener a partir de la matriz de diseño. En los experimentos 2^k, los efectos que se confunden se identifican por medio del contraste l, por ejemplo l_B representa la suma de todos los efectos que se confunden cuando se calcula el efecto **B**. En el presente trabajo se propone que el contraste se puede descomponer en el promedio positivo, el cual se denota por l_{+B} y el promedio negativo, denotado por l_{-B} de aquí se tiene que:

$$l_B = l_{+B} - l_{-B}$$

de tal forma que en un experimento 2^k de resolución **III** para 3 factores, **B** se confunde con la interacción **AC**, por lo tanto, recordando que el efecto **B** es igual a $2b = b_+ - b_-$, y la interacción **AC** es igual a $2ac = ac_+ - ac_-$, entonces el contraste de **B**, se puede descomponer de la siguiente forma:

$$l_B = B + AC = 2b + 2ac = (b_+ - b_-) + (ac_+ - ac_-) = (b_+ + ac_+) - (b_- + ac_-) = l_{+B} - l_{-B}$$

con lo cual se vé que la descomposición del contraste es valida

De la tabla 4.4 del experimento se observa que para la interacción **AB** los ensayos 1 y 8 son donde dicha interacción toma el nivel **1**, asi mismo para esos ensayos, las interacciones **AC** y **BC** toman el nivel **1**, por tanto, en el promedio positivo de la interacción **AB** se confunden también los promedios positivos de las interacciones **AC** y **BC**, ésto es:

$$I_{+AB} = ab_{+} + ac_{+} + bc_{+}$$

Para el promedio negativo, el contraste de confusión I_{-AB} esta dado por:

$$I_{-AB} = ab_{-} + ad_{+} + bd_{-}$$

Por lo tanto el contraste de confusión esta dado por:

$$I_{AB} = I_{+AB} - I_{-AB} = (ab_{+} + ac_{+} + bc_{+}) - (ab_{-} + ad_{+} + bd_{-}) \quad \ldots\ldots(3)$$

en función de los promedios de las respuestas; reduciendo la expresión se tiene:

$$I_{AB} = ab + ac + bc + ab - ad + bd = 2\,ab + ac - ad + bc + bd$$

como $2ab = AB$ entonces:

$$I_{AB} = AB + ac - ad + bc + bd \quad \ldots\ldots(4)$$

que queda en función de los coeficientes de la función del proceso. **Sustituyendo los** coeficientes de la función (1) en (4) se tiene:

$$I_{AB} = 14 + 0 - 10 + (-8) + 5 = 1$$

que es el valor que se obtiene para la interacción **AB** en la tabla 4.6.

De aquí que, cuando se calcula una interacción, se obtiene el valor del efecto de dicha interacción más las componentes positivas o negativas de otras interacciones, pero no con el total de estas, dicho de otra forma, el efecto debido a una interacción se confunde con la mitad del efecto de otras interacciones.

De la misma forma, para las demás interacciones se obtienen las siguientes expresiones:

$$I_{AC} = (ac_+ + ab_+ + bc_+) - (ac_- + ad_- - cd_+) = ab + 2ac + ad + bc - cd$$

$$I_{AD} = (ad_+ + ab_- + bd_-) - (ad_- + ac_- - cd_+) = -ab + ac + 2ad - bd - cd$$

$$I_{BC} = (bc_+ + ab_+ + ac_+) - (bc_- + bd_+ + cd_-) = ab + ac + 2bc - bd + cd$$

$$I_{BD} = (bd_+ + bc_- + cd_-) - (bd_- + ab_- + ad_+) = ab - ad - bc + 2bd - cd$$

$$I_{CD} = (cd_+ + ac_- + ad_-) - (cd_- + bc_- + bd_+) = -ac - ad + bc - bd + 2cd$$

los coeficientes de las expresiones encontradas se pueden escribir por renglones en una matriz e igualarlos a los resultados obtenidos del cálculo de efectos para cada interacción, con lo cual se obtiene el sistema expresado en la tabla A2.1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ab \\ ac \\ ad \\ bc \\ bd \\ cd \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{AB} \\ I_{AC} \\ I_{AD} \\ I_{BC} \\ I_{BD} \\ I_{CD} \end{vmatrix}$$

Tabla A2.1. Patrón de confusión expresado en matrices para el experimento propuesto con 4 factores.

Para efectos de este trabajo, el sistema se puede representar en un sólo arreglo mostrado en la tabla A2.2. En este arreglo, el valor numérico de la columna de efecto, representa el resultado obtenido de buscar la interacción que corresponde al renglón, el cual es la sumatoria de la multiplicación de cada uno de los coeficientes del renglón por el coeficiente de la función del proceso que encabeza la columna.

	ab	*ac*	*ad*	*bc*	*bd*	*cd*	efecto
AB	2	1	-1	1	1	0	
AC	1	2	1	1	0	-1	
AD	-1	1	2	0	-1	-1	
BC	1	1	0	2	-1	1	
BD	1	0	-1	-1	2	-1	
CD	0	-1	-1	1	-1	2	

Tabla A2.2. Representación del patron de confusión de un experimento propuesto para 4 factores.

Los coeficientes de la función por supuesto se desconocen, pero el arreglo se puede ver en términos de efectos, para saber como se confunden las interacciones.

Recordando que **AB**=2*ab* , el renglon correspondiente a la interacción **AB**, quiere decir que el efecto calculado es igual a la interaccion **AB** más la mitad de la interacción **AC**, menos la mitad de la interacción **AD**, mas la mitad de la interacción **BC**, mas la mitad de la interacción **BD**

Todos estos efectos tambien se desconocen y aunque el sistema es de **6X6**, el experimento del cual se obtuvo, no proporciona los grados de libertad necesarios para obtener una solución única, y por tanto dicho sistema no se puede resolver. Sin embargo, basándose en lo expuesto del concepto de planaridad en el capítulo 2, se puede estar interesado sólo en las interacciones existentes entre factores cuyos efectos principales son los más significativos, y tomar los otros como cercanos a cero

Cuando se calcula el coeficiente de la función, lo que se hace es dividir el efecto obtenido entre 2, para obtener el cambio en la respuesta por unidad de incremento de la variable. Si para la tabla A2.2, interesara solo la interacción **AB**, por ser **A** y **B** los factores de mayor significancia, al dividir el efecto entre 2, la mitad de los efectos con que se confunde la interacción también se dividen entre 2, y por tanto, el coeficiente calculado para la interacción **AB**, se confunde con solo la mitad de los coeficientes de algunas de las demás interacciones, y si estas se consideran pequeñas, al dividirlas entre 2, se puede esperar que el valor de la interacción calculada sea muy cercano a la realidad

Si lo que interesa es encontrar el valor de dos interacciones, se toma sólo las columnas y renglones correspondientes a dichas interacciones. con lo cual se tiene un sistema de **2X2** cuya solución se puede obtener

Si se esta interesado en mas de dos interacciones, puede ser que el sistema resultante al eliminar columnas y renglones que no interesen tenga solución, y si no, se puede buscar calcular con experimentos posteriores el minimo de interacciones que después permitan regresar al sistema y obtener su solución

APENDICE III

EXPERIMENTOS PROPUESTOS REALIZADOS EN BLOQUES

En los experimentos propuestos no es necesario realizar todos los ensayos en una misma etapa Las condiciones bajo las que se va a realizar el experimento puede requerir en ocasiones, que sólo parte de los ensayos se realicen en un primer bloque. dejando los demás quizá para otro dia o para llevarse a cabo con otro lote de materiales

Los experimentos compuestos pueden realizarse en 3 bloques, que son los definidos por los 3 niveles de cualquiera de las columnas, ya sean factores o interacciones, pero debe tenerse en cuenta que para analizar el experimento propuesto, cualquiera de los bloques obtenidos no representa un arreglo ortogonal por si mismo

Por lo anterior, cuando se realiza un bloque, los efectos principales obtenidos, están confundidos con parte de otros efectos, similar a lo presentado en la confusión de interacciones de segundo orden

Esto quiere decir que los bloques no se pueden usar por si solos como una fracción más pequeña aún del experimento, sólo presentan la ventaja de no tener que realizar todo el experimento en una misma etapa, y es cuando se tienen los resultados de los 3 bloques cuando se puede obtener la información de los efectos buscados

La forma en que se pueden obtener los efectos a partir de bloques se presenta para dos factores, uno utilizado como bloque, y las interacciones entre estos dos, la matriz de diseño esta presentada en la tabla A3.1

Nótese que debido a que el ensayo en el centro del diseño se elimino, 2 bloques quedan de tamaño 3 y uno de tamaño 2, no obstante, si se vé el experimento por columnas, los valores -1 y 1 que son los que interesan quedan balanceados en los distintos bloques.

ENSAYO	A	B	AB	BLOQUE FACTOR B
1	-1	-1	1	1
2	0	-1	0	1
3	1	-1	-1	1
4	-1	0	0	2
5	1	0	0	2
6	-1	1	-1	3
7	0	1	0	3
8	1	1	1	3

Tabla A3.1. Experimento propuesto en bloques confundidos con el factor B.

En el bloque 2, el efecto del factor A se puede calcular pues las otras dos columnas toman el valor de cero, pero debe recordarse que los beneficios de estos experimentos se obtienen para un número de factores relativamente grande, por lo tanto, bajo esas condiciones existen otras columnas que toman valores distintos de cero para ese bloque intermedio. La tabla A3.1, sólo sirve para presentar como se recupera la información cuando el experimento se realiza en bloques, no es de ningún modo una propuesta de experimento, así mismo, la forma en que la información se confunde y posteriormente se recupera entre estos factores cuando se forman bloques es la misma cuando intervienen más columnas.

Para calcular el efecto A del primer bloque se toma el primer y tercer ensayo, siendo el patrón de confusión el siguiente:

$$A = (a_+ + b_- + ab_-) - (a_- + b_- + ab_+)$$

$$A = a + a - b + b - ab - ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Para el bloque 2 se tiene:

$$A = a_+ - a_-$$

$$A = a + a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

por último para el bloque 3:

$$A = (a_{+} + b_{+} + ab_{+}) - (a_{-} + b_{+} + ab_{-})$$

$$A = a + a + b - b + ab + ab \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

sumando las expresiones (5), (6) y (7) de cada uno de los 3 bloques se tiene:

$$A + A + A = a + a - b + b - ab - ab + a + a + a + a + b - b + ab + ab$$

de donde:

$$3\,A = 6\,a$$

por lo tanto:

$$A = 2\,a$$

que es la forma en que ya se vió que se puede expresar el efecto del factor.

Si se aumentan factores y por lo tanto columnas de factores e interacciones, el análisis es similar y el resultado es el mismo, de tal forma que cuando se realiza un experimento en bloques, la forma de obtener los efectos es, calcular el promedio de los efectos obtenidos en cada bloque para cada factor.

El factor que se confunde con los bloques, queda influenciado por el efecto que los bloques tengan en el proceso, sin embargo si el experimentador considera que el efecto del bloque puede ser no muy significativo, puede considerar un factor a estudiar en vez de eliminarlo, con la diferencia de cómo se obtiene el efecto de dicho factor, donde sólo se resta el promedio obtenido en el bloque cuando este toma el valor positivo menos el promedio del bloque donde toma el promedio negativo

APENDICE IV

PATRON DE CONFUSION DE LAS INTERACCIONES DE SEGUNDO GRADO PARA EL EXPERIMENTO PROPUESTO DE LA TABLA 4.7

La tabla del patrón de confusión para el experimento propuesto de la tabla 4.8 se presenta en las siguientes ocho páginas, dividida en ocho tablas identificadas de la A4.1 a la A4.8.

La forma en que dichas tablas forman el patrón de confusión se presenta en la figura A4.1.

Tabla A4 1	Tabla A4 2
Tabla A4 3	Tabla A4 4
Tabla A4.5	Tabla A4 6
Tabla A4 7	Tabla A4 8

Figura A4.1. Patrón de confusión para el experimento propuesto de la tabla 4.8, formado por las tablas A4.1 a A4.8

	ab	ac	ad	ae	af	ag	ah	ai	aj	ak	al	am	bc	bd	be	bf	bg	bh	bi	bj	bk	bl	bm	cd	ce	cf	cg	ch	ci	cj	ck	cl	cm	de	df	dg	dh	di
AB	2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
AC	0	2	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
AD	1	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	1	-1	0	0	0	0
AE	-1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	0
AF	0	1	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
AG	0	-1	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
AH	0	0	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
AI	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
AJ	0	0	0	0	0	0	-1	0	2	0	0	1	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	-1	-1	0	-1
AK	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	2	1	0	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0
AL	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0	1	0	0	1	0	1	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
AM	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2	1	0	0	1	0	0	-1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
BC	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
BD	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
BE	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0	1	0	-1	0	0	0	0
BF	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	2	0	0	0	-1	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
BG	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	-1	-1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
BH	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Tabla A4.1

	dj	dk	dl	dm	ef	eg	eh	ei	ej	ek	el	em	fg	fh	fi	fj	fk	fl	fm	gh	gi	gj	gk	gl	gm	hi	hj	hk	hl	hm	ij	ik	il	im	jk	jl	jm	kl	km	lm
AB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	-1	-1	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	-1	0	-1	0	0	1	0
AC	0	1	0	1	0	0	1	-1	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	1
AD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1	1	0	0	1	-1	0	1	-1	1	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
AE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	-1	-1	0	0	1	1	-1	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
AF	-1	1	1	0	0	0	0	-1	-1	1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
AG	-1	0	1	-1	0	0	-1	0	0	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	1	0
AH	0	0	1	0	0	-1	0	1	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AI	-1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
AJ	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
AK	1	0	0	1	1	1	-1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
AL	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0
AM	0	1	1	0	-1	-1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
BC	0	1	0	1	-1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
BD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	0	1	1	-1	-1	1	0	0	0	1	1	1	0
BE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	0	0	1	1	0	-1	0	1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	0
BF	0	0	1	0	0	-1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
BG	-1	0	0	0	-1	0	1	0	0	-1	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
BH	-1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0

Tabla A4.2

	ab	ac	ad	ae	af	ag	ah	ai	aj	ak	al	am	bc	bd	be	bf	bg	bh	bi	bj	bk	bl	bm	cd	ce	cf	cg	ch	ci	cj	ck	cl	cm	de	df	dg	dh	di
BI	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
BJ	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	2	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	-1	-1
BK	0	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1
BL	0	1	0	0	1	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
BM	0	1	0	0	1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	2	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0
CD	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	1	2	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0
CE	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	0	-1	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	1	-1	-1	1
CF	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
CG	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1
CH	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0
CI	0	0	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	1	0	-1	0	0
CJ	1	0	0	-1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0
CK	1	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	0	1
CL	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0
CM	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	1	1	0
DE	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0
DF	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2	0	0	1
DG	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	1	-1	-1	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	2	1	0
DH	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	0
DI	0	-1	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	-1	1	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2

Tabla A4.3

	dj	dk	dl	dm	ef	eg	eh	ei	ej	ek	el	em	fg	fh	fi	fj	fk	fl	fm	gh	gi	gj	gk	gl	gm	hi	hj	hk	hl	hm	ij	ik	il	im	jk	jl	jm	kl	km	lm
BI	-1	-1	1	0	1	0	0	0	0	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
BJ	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	-1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0
BK	0	0	1	1	0	-1	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
BL	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
BM	1	1	0	0	1	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
CD	1	0	1	0	1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
CE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
CF	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	1	1	-1	1	0	0	0	1	1	0	1
CG	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	1	-1	1	-1	0	-1	-1	0	0
CH	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	1	0	0	1	0	1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
CI	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	1	-1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	-1
CJ	-1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	0
CK	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	1	-1	0	-1	0	0	1	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
CL	0	0	1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	-1	0	-1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
CM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-1	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
DE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	-1	0	0	1	0	-1	1	0	-1	0	1	1	0	-1
DF	0	0	0	1	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	1	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
DG	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	-1	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
DH	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	1
DI	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0

Tabla A4.4

	ab	ac	ad	ae	af	ag	ah	ai	aj	ak	al	am	bc	bd	be	bf	bg	bh	bi	bj	bk	bl	bm	cd	ce	cf	cg	ch	ci	cj	ck	cl	cm	de	df	dg	dh	di
DJ	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
DK	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
DL	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
DM	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
EF	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0	-1	-1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
EG	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	-1	1	0	0	-1	0	1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0
EH	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	-1	-1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1
EI	0	-1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	-1	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0
EJ	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0
EK	0	0	0	0	1	1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	-1
EL	0	-1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1
EM	0	0	0	0	-1	-1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
FG	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
FH	1	0	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	1	0	0	0	0	0
FI	1	0	0	-1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	-1	0	0	-1
FJ	0	0	-1	-1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	-1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
FK	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	-1	0	0	0	0
FL	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	-1	0	0
FM	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0

Tabla A4.5

	dj	dk	dl	dm	ef	eg	eh	ei	ej	ek	el	em	fg	fh	fi	fj	fk	fl	fm	gh	gi	gj	gk	gl	gm	hi	hj	hk	hl	hm	ij	ik	il	im	jk	jl	jm	kl	km	lm
DJ	2	0	-1	0	1	0	-1	0	0	-1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	-1	0
DK	0	2	0	0	-1	0	0	-1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1
DL	-1	0	2	0	0	-1	0	1	0	1	0	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
DM	0	0	0	2	0	1	1	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0
EF	1	-1	0	0	2	0	-1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
EG	0	0	-1	1	0	2	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
EH	-1	0	0	1	-1	0	2	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	-1	0	0	0	0	0
EI	0	-1	1	0	0	-1	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
EJ	0	-1	0	1	0	1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1
EK	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	-1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
EL	0	1	0	-1	-1	0	-1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	1	0	-1	0	0	0
EM	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	2	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0
FG	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	-1	1	0	0	-1	1	1	-1	0
FH	1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
FI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	1	1	0	0	-1	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
FJ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-1	0	0	-1	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	-1
FK	0	0	1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	-1	0	0	1	-1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
FL	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0
FM	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	1	0	0

Tabla A4 6

	ab	ac	ad	ae	af	ag	ah	ai	aj	ak	al	am	bc	bd	be	bf	bg	bh	bi
GH	1	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	1	-1	0	0	0
GI	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	-1	0	0	0
GJ	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	-1	0	0	0	1	0
GK	-1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	-1
GL	0	0	1	1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
GM	0	0	-1	-1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
HI	0	0	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
HJ	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	-1	1	0	1	0	0
HK	1	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
HL	1	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
HM	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	-1	1	0	0	0
IJ	-1	1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
IK	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	-1	1	0	-1	0	0
IL	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1	-1	-1	0	0	0
IM	-1	1	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
JK	0	-1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
JL	-1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	1
JM	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	-1	1	-1	0	0	0	1
KL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	-1	0	0	1	0
KM	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
LM	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	bj	bk	bl	bm	cd	ce	cf	cg	ch	ci	cj	ck	cl	cm	de	df	dg	dh	di
GH	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	0	-1	-1	0
GI	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0
GJ	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	-1	0	1	0	0	0
GK	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	-1	0	0	0	-1	0	0
GL	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1	-1	0	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1
GM	0	0	0	1	1	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	0
HI	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
HJ	0	0	1	0	0	1	-1	1	0	0	0	1	0	0	-1	1	0	0	1
HK	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
HL	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	-1
HM	0	1	0	0	1	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
IJ	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	1	0
IK	0	0	0	1	1	0	-1	1	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0
IL	1	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	-1	1	0	-1	-1	0
IM	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	-1
JK	-1	-1	0	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1
JL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0
JM	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	-1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
KL	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
KM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
LM	0	0	1	1	0	0	1	0	1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0

Tabla A4.7

	dj	dk	dl	dm	ef	eg	eh	ei	ej	ek	el	em	fg	fh	fi	fj	fk	fl	fm	gh	gi	gj	gk	gl	gm	hi	hj	hk	hl	hm	ij	ik	il	im	jk	jl	jm	kl	km	lm
GH	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	-1	0	0	1	2	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	-1	0	0	0	0
GI	0	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	1	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
GJ	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	1	0	-1	2	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
GK	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	-1	-1	0	0	2	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	0	0
GL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0	0	2	-1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
GM	1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	-1
HI	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	1
HJ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	2	0	0	-1	0	1	-1	0	0	0	-1	-1	0	0
HK	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	-1	0	-1	0	0	0	1
HL	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0	1	0
HM	0	0	1	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	2	0	-1	1	0	0	0	1	1	0	0
IJ	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
IK	1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	-1	0	2	-1	0	0	0	-1	-1	0	0
IL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	-1	2	0	0	0	1	1	0	0
IM	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	-1	0	0	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	2	-1	1	0	0	0	0
JK	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	1
JL	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-1	0	-1	0	0	0	-1	-1	0	0	1	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	1	0
JM	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	2	1	0	0
KL	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	1	2	0	0
KM	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-1	1	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	-1	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	2	0
LM	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2

Tabla A4.8

APENDICE V

DISEÑO EXPERIMENTAL PROPUESTO DE TRES NIVELES PARA ESTUDIAR 6 FACTORES EN 12 ENSAYOS

Suponga un proceso cuya función identificada como f.A 6 esta dada por:

$$y = 55 + 22\,a + 13\,b - 15\,c + 10\,d - 5\,e + 16\,f + 4\,ab - 2\,af + 2\,bd + 1\,be - 3\,bf + 2\,cf + 1\,df$$

El experimentador desconoce dicha función, y realiza un experimento con tres niveles analizado como $\mathbf{2^k}$. La matriz de diseño que utiliza se muestra en la tabla A5.1, junto con las respuestas obtenidas para cada ensayo. Dicha matriz permite estudiar seis factores con 12 ensayos; en los experimentos tradicionales, se necesitan 16 ensayos para obtener un experimento de resolución **IV**.

ensayo	A	B	C	D	E	F	respuestas
1	0	-1	-1	-1	-1	0	55
2	-1	0	-1	1	0	-1	41
3	1	0	-1	1	0	1	115
4	0	1	-1	-1	1	0	67
5	-1	-1	0	0	1	1	39
6	1	-1	0	0	1	-1	37
7	-1	1	0	0	-1	1	61
8	1	1	0	0	-1	-1	87
9	0	-1	1	1	-1	0	41
10	-1	0	1	-1	0	-1	-11
11	1	0	1	-1	0	1	67
12	0	1	1	1	1	0	61

Tabla A5.1. Matriz de diseño y respuestas para un experimento con 3 niveles (función de estudio f.A.6)

Analizando el experimento, los efectos principales calculados se muestran en la tabla A5.2, dichos efectos son el doble del valor de los coeficientes de la función, es decir no se confunden con otros efectos.

M	=	55
A	=	44
B	=	26
C	=	-30
D	=	20
E	=	-10
F	=	32

Tabla A5.2. Efectos calculados para el experimento de la tabla A5.1.

Para las interacciones de segundo orden, los efectos calculados junto con su patrón de confusión se muestran en la tabla A5.3. En este caso el patrón de confusión difiere de los tratados en el apéndice 2, en el sentido de que algunas interacciones si se confunden con el total de otras interacciones, lo cual no pasa con los patrones obtenidos para los experimentos construidos a partir de un diseño 3^k.

	ab	ac	ad	ae	af	bc	bd	be	bf	cd	ce	cf	de	df	do	efecto
AB	2	0	0	-2	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	14
AC	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	2
AD	0	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	2	0	-2
AE	-2	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	-2	-14
AF	0	0	0	0	2	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	-3
BC	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	2	0	2	0	0	4
BD	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	2	0	2	0	0	4
BE	0	0	0	0	1	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0
BF	-2	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	-2	-14
CD	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	3
CE	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	2	0	2	0	0	4
CF	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	2
DE	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	2	0	2	0	0	4
DF	0	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	2	0	-2
EF	2	0	0	-2	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	14

Tabla A5.3. Patrón de confusión y efectos calculados para las interacciones de segundo orden obtenidas a partir del diseño de la tabla A5.1.