



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

03064

1
24.



Unidad Académica de los Ciclos Profesionales y de Posgrado del
Colegio de Ciencias y Humanidades
Instituto de Ciencias del Mar y Limnología
Proyecto Académico Especialización, Maestría y Doctorado en Ciencias del Mar

**SIMULACIÓN DE LA CIRCULACIÓN EN EL SISTEMA
LAGUNAR CHACAHUA-PASTORÍA, OAX.**

T E S I S
que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias del Mar
(Oceanografía Física)
P R E S E N T A
ROSARIO SANAY GONZÁLEZ

Ciudad Universitaria, D. F.

Diciembre, 1997

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres

A mis hermanos

AGRADECIMIENTOS

A mis asesores: Dra. Adela Monreal Gómez, Dr. David Salas de León y Dr. Eugenio Gómez Reyes. A los Drs. Adolfo Molina Cruz y Virgilio Arenas Fuentes por sus atinados comentarios y sugerencias.

Muy en especial a mi directora de tesis Dra. Adela Monreal Gómez, por su incansable labor de enseñanza y dedicación hacia sus estudiantes y al Dr. David Salas de León por la siempre disponibilidad y contribución en el enriquecimiento de este trabajo.

Al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico brindado durante el transcurso de mis estudios de maestría. A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA-UNAM) por la beca otorgada durante la etapa final de la elaboración de esta tesis.

Este estudio formó parte del proyecto "Programa para la evaluación del Recurso Camaronero en el Litoral Oaxaqueño" dentro del convenio INI-UNAM.

Agradezco el apoyo logístico de la comunidad de pescadores de Chacahua-Pastoría.

A todas las personas que hicieron posible la culminación de este trabajo.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
OBJETIVO	4
CAPITULO I: DESCRIPCIÓN DEL ÁREA DE ESTUDIO	5
1.1 Situación geográfica	5
1.2 Hidrografía	7
1.3 Clima	7
1.4 Mareas	8
1.5 Vientos	10
1.6 Geología	10
1.7 Biología	11
1.8 Hidrodinámica	12
CAPITULO II OBSERVACIONES EN CAMPO	13
2.1 Mediciones de corrientes	13
2.2 Mediciones de parámetros Físico-Químicos	15
2.3 Resultados de las observaciones en campo	15
2.3.1 Corrientes	16
2.3.2 Temperatura y Salinidad	16
CAPITULO III. MODELO PARA LAGUNAS COSTERAS	19
3.1 Mecanismos de forzamiento de la circulación en sistemas lagunares costeros	19
3.2 Modelo matemático	20
3.2.1 Ecuaciones de movimiento	20
3.2.1.1 Ecuación de continuidad	20
3.2.1.2 Ecuación de momentum	20
3.2.2 Ecuaciones de movimiento para el flujo medio	21
3.2.2.1 Ecuación de momentum para flujo medio	21
3.2.2.2 Ecuación de continuidad para flujo medio	22
3.2.3 Modelo barotrópico	22
3.2.4 Condiciones iniciales y de frontera	23
3.2.4.1 Fronteras naturales	23
3.2.4.2 Fronteras artificiales	24
3.3 Modelo numérico	26
3.3.1 Mallas numéricas	27
3.3.1.1 Malla espacial	27
3.3.1.2 Malla temporal	27
3.3.2 Ecuaciones discretizadas	30

CAPITULO IV. RESULTADOS DEL MODELO NUMÉRICO	34
4.1 Circulación inducida por la marea	37
4.2 Circulación inducida por el viento	47
4.3 Circulación inducida por la marea y la descarga de ríos	49
4.4 Circulación inducida por la marea, descarga de ríos y viento	60
4.5 Efecto de la batimetría	62
DISCUSIONES	66
CONCLUSIONES	71
LITERATURA CITADA	73
APÉNDICE A	77
APÉNDICE B	94
ADENDUM	107

RESUMEN

Se aplicó un modelo numérico hidrodinámico, barotrópico no-lineal para simular la circulación transitoria y residual del sistema lagunar Chacahua-Pastoria, Oax. Para validar las simulaciones numéricas se realizaron mediciones *in situ* de velocidad de la corriente y de parámetros fisico-químicos en la boca de Cerro Hermoso, durante 24 horas. Se consideró a la marea, al viento y a la descarga de agua dulce como fuerzas generadoras de la circulación. El sistema lagunar presenta grandes zonas con un deterioro paulatino, provocado tanto por el cierre prolongado de la boca-barra de Chacahua, como por la disminución del aporte de agua dulce. Ante la posibilidad de que esta boca-barra se abriera se simuló la circulación utilizando dos diferentes direcciones en su apertura, una paralela y otra perpendicular a la línea de costa, esta última coincidiendo con la orientación original.

Los resultados muestran que la marea es el mecanismo que gobierna la circulación transitoria. Se observa una asimetría con dominancia en el flujo, la cual genera un delta interno en la boca-barra de Cerro-Hermoso y un efecto de sifón en el canal de conexión entre ambas lagunas. El viento y la descarga de agua dulce son importantes a escala de la circulación residual ya que sus ordenes de magnitud son similares a las corrientes residuales inducidas por la marea. De los resultados se concluye que la apertura de la boca-barra de Chacahua en forma perpendicular a la línea de costa es la mejor opción para aumentar la circulación en el sistema lagunar, siempre y cuando exista una descarga mínima de $8 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ del río San Francisco.

INTRODUCCIÓN

El sistema lagunar Chacahua-Pastoria se encuentra dentro del Parque Nacional Lagunas de Chacahua, en el Estado de Oaxaca. Este sistema lagunar ha ido en deterioro debido al cierre prolongado de la boca-barra de Chacahua y la falta de aporte de agua de los ríos, los cuales fueron desviados y represados aguas arriba.

La presión social que ejerce el rápido crecimiento de la población impulsa la toma rápida de decisiones. En algunos casos estas decisiones no están basadas en estudios que permitan prever el impacto que dichas acciones van a tener en las regiones adyacentes o lejanas a donde se aplican. Así es como estas acciones que tienden a mitigar problemas en una región, pueden desencadenar otros en otras regiones. Un ejemplo de esto, es el caso del sistema lagunar Chacahua-Pastoria en el estado de Oaxaca.

La construcción de presas, bordos y retenes de agua, para la formación de distritos de riego ha ocasionado fuertes alteraciones en el sistema lagunar Chacahua-Pastoria. La disminución o eliminación de la descarga de agua dulce hacia dicho sistema ha tenido como consecuencia la disminución de una de las fuerzas que balanceaban la fuerza de la marea. El resultando de ello, en conjunto con la errónea construcción de un par de espigones en la boca-barra de Chacahua, ha sido un cierre prolongado de dicha boca.

Como resultado del cierre de la boca de la laguna de Chacahua se produjo una disminución del movimiento de las aguas hasta casi el reposo, originándose diversos problemas que afectan su funcionalidad con respecto a los objetivos inicialmente planteados. Estos objetivos son el de *"proteger y conservar los recursos naturales del área, para mantener un banco de germoplasma que permita conservar la diversidad biológica que naturalmente se encuentra en dicha área, fomentar la investigación científica del medio natural, la educación sobre el mismo y la satisfacción de necesidades sociales como el esparcimiento al aire libre"* (Madrígal, 1986). En forma paralela se han desencadenado serios problemas económicos y sociales en las comunidades de pescadores de la región.

La necesidad de conocer los patrones de circulación en las regiones costeras, es un pre-requisito en cualquier estudio ambiental que se pretenda realizar, desde una perspectiva interdisciplinaria (Nihoul, 1994). Sin embargo, el alto costo de los equipos de medición de

corrientes ha motivado el desarrollo de métodos alternos, uno de los cuales es la modelación numérica. La modelación numérica no sustituye a las técnicas de muestreo *in situ* o a las observaciones efectuadas con sensores remotos, ya que cada uno de estos métodos de muestreo es complementario.

El uso de modelos numéricos en el estudio de procesos costeros es de gran relevancia, ya que estas técnicas permiten obtener una idea a bajo costo de la evolución de la hidrodinámica del sistema. Estos modelos, una vez que se han ajustado y calibrado proporcionan información sobre áreas de difícil acceso o en las cuales no se efectuaron mediciones.

Los modelos no sustituyen al trabajo observacional ya que estos se basan en él para garantizar su validez. Los resultados de los modelos permiten efectuar análisis rápidos sobre grandes áreas, de tal forma que se puedan hacer recomendaciones a futuro u obtener la evolución particular de una variable. Una de las ventajas que ofrecen los modelos es que permiten analizar por separado el efecto de cada uno de los mecanismos que intervienen en la circulación. De esta forma los modelos numéricos han cobrado importancia en el estudio de la dinámica de regiones costeras.

Con el objetivo de conocer la circulación general del sistema lagunar Chacahua-Pastoria, así como su respuesta a la descarga de agua dulce y a la apertura de la boca-barra de Chacahua, se aplicó un modelo numérico de circulación de tipo barotrópico. Este modelo resuelve las ecuaciones de movimiento verticalmente integradas, utilizando un método numérico semi-implícito a dirección alternada.

Con la finalidad de comparar las simulaciones obtenidas a través del modelo numérico con las características reales del sistema, se realizaron mediciones de corrientes, salinidad y temperatura *in situ*.

Los resultados muestran que el principal mecanismo generador de la circulación en el sistema lagunar, en su estado actual es la onda de marea que pasa a través de la boca-barra de Cerro Hermoso. También se muestra que la influencia que esta onda de marea ejerce sobre la laguna de Chacahua es casi nula. Como conclusión de este estudio se tiene que para mejorar la circulación y lograr un mejor saneamiento del sistema lagunar, es necesario la

apertura de la boca-barra de Chacahua así como el incremento de la descarga de agua dulce de los ríos.

OBJETIVO

El objetivo de este trabajo es el de adaptar un modelo numérico no lineal que simule el efecto de la descarga de agua dulce, de los vientos, de la marea y de la apertura de la boca-barra de Chacahua, considerando diferentes morfologías para el sistema lagunar Chacahua-Pastoría, que sirva como apoyo a cualquier programa de monitoreo o rehabilitación del sistema lagunar.

CAPITULO I

DESCRIPCIÓN DE LA ZONA DE ESTUDIO

1.1 Situación geográfica

El sistema lagunar se localiza en el Estado de Oaxaca en la planicie del Océano Pacífico, forma parte del municipio de Tututepec. Las lagunas se localizan entre los 97° 46' y 97° 33' de longitud oeste y los 15° 57' y 16° 01' de latitud norte (Fig. 1.1).

Tanto la laguna de Chacahua como la de Pastoria, tienen una forma alargada. La laguna de Pastoria tiene una superficie aproximada de 20.25 km², con una longitud de 8 km por 2.5 km de ancho y una profundidad promedio de 1 m. En ella existen seis islotes llamados: El Venado, La Culebra, Las Piñuelas, El Ciruelo, Tijerillas y Las Garzas. En su parte oriental, al norte de Cerro Hermoso se comunica con el mar en forma permanente por medio de un canal de 1.5 km de largo. Este canal fue dragado y se construyó un sistema de espigones en 1972 para evitar el azolvamiento y mantener la comunicación con el mar.

La laguna de Chacahua tiene aproximadamente 5 km de largo y en promedio 1.5 km de ancho, abarcando una superficie aproximada de 6.6 km² con profundidades menores a un metro en su mayoría. Antiguamente la comunicación de la laguna de Chacahua con el mar se hacía en forma natural a través de la boca-barra de Chacahua la cual se abría cada año o cada dos años, dependiendo de los eventos de precipitación. Sin embargo, Teodoro y Ortíz (1990) reporta que antes de 1982 la boca-barra se cerró y no se ha vuelto a abrir. Este cierre prolongado esta relacionado con la deficiencia en el aporte de aguas continentales y el mal funcionamiento del sistema de espigones de bolsacreto en la boca-barra, los cuales fueron construidos con la finalidad de estabilizar la conexión con el mar. La laguna de Chacahua y la de Pastoria se comunican mediante un canal de 2.5 km de largo, con 15 m de ancho en promedio y 4 m de profundidad.

La laguna de Chacahua se comunica también con la laguna de Tianguisito por medio de un canal de 400 m de largo, aunque esta última tiene una superficie aproximada de 3.1 km², una longitud de 3 km y un ancho de 1 km aproximadamente (González, 1985) es muy somera y no influye significativamente en la dinámica del sistema lagunar Chacahua-Pastoria.

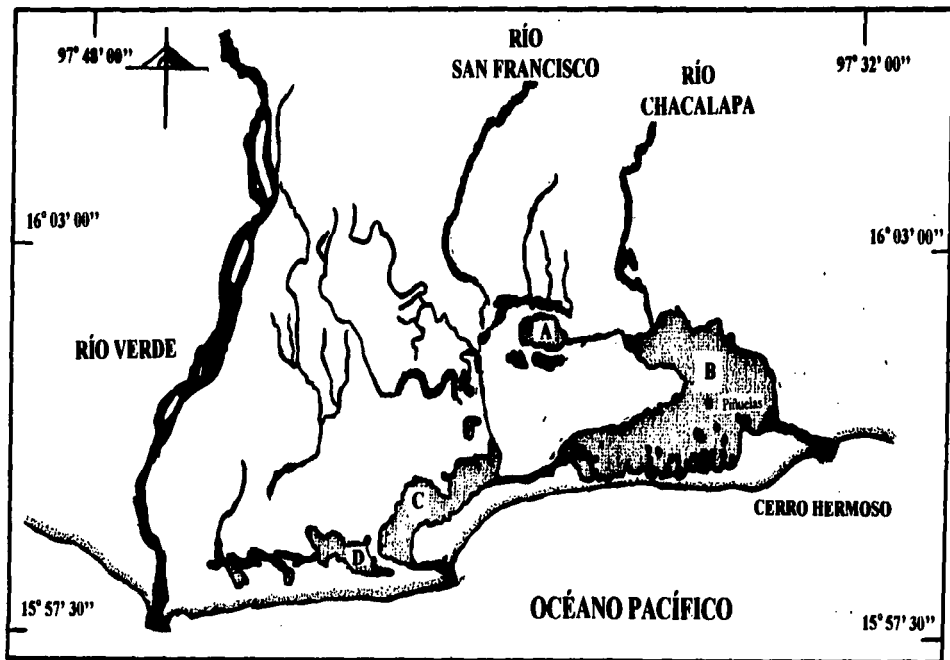


Figura 1.1 Localización del área de estudio. A) Laguna Palmerito, B) Laguna de la Pastoria, C) Laguna de Chacahua, D) Laguna de Tianguisito.

1.2 Hidrología

El parque Nacional Lagunas de Chacahua se ubica en la subcuenca "d" Río San Francisco, correspondiente a la cuenca "C" Río Colotepec dentro de la región hidrológica 21, conocida como "Costas de Oaxaca". Esta región hidrológica cuenta con una superficie de 10,400 km² y un escurrimiento medio de $6,739.4 \times 10^6$ m³/año (SRH, 1976). La precipitación media registrada es entre 600 y 2,000 mm/año (INEGI, 1989).

Las lagunas que conforman el sistema hidrológico del parque son: Pastoría, Chacahua, Las Salinas, Pozas de los Corraleños, la Palizada, Poza del Mulato, Poza del Camarón, Poza del Camalote y Palmarito, comunicadas todas ellas por canales angostos que varían entre 2 y 20 m de ancho (TIA, 1994).

Los principales escurrimientos del área de estudio son el río Verde, el río San Francisco y el río Chacalapa.

El río San Francisco descarga su caudal en la laguna de Chacahua y el río Chacalapa en la laguna de Pastoría. El río San Francisco parte del suroeste de Santa Cruz Tuxtepec conservando esa dirección se pierde en los canales de manglares del Parque a una distancia de 4 km del mar. Su cuenca es de 341 km² y el escurrimiento medio es de 123×10^6 m³/año. Durante la época de secas no corre agua en este río. El río Chacalapa parte del sur de Santiago Jocotepec con dirección hacia el sureste, pasando la carretera que va de Santa Rosa a Río Grande; luego se desvía hacia el sur haciéndose más angosto hasta terminar en la laguna de Pastoría (Zárate Vidal, 1986).

El río Verde, nace de la confluencia de los ríos Sordo y Atoyac y su aporte al sistema lagunar lo hace en avenidas extraordinarias. En avenidas ordinarias este río solo aporta pequeños escurrimientos, los cuales han ido en disminución a raíz de la construcción de la presa Río Verde (Ramón Díaz, 1995). El gasto promedio en época de lluvias es de $16 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

1.3 Clima

El clima de la zona es AW1; de acuerdo al sistema de clasificación de Koeppen, modificado por García (1970), es un clima tropical subhúmedo, con régimen de lluvias en el verano. Las máximas temperaturas se presentan en mayo siendo la diferencia entre el mes más cálido y el más frío menor a 5° C (Madrigal, 1986).

En términos generales, se presenta un periodo lluvioso que va de mayo a octubre y uno de secas que comprende del mes de noviembre al mes de abril (Madrigal, 1986). Sin embargo, en invierno la región es afectada por los "nortes" provocando fuertes lluvias.

1.4 Mareas

Las estaciones mareográficas mas cercanas a la zona de estudio, son: hacia el este Puerto Ángel y Salina Cruz, Oax. y hacia el oeste Acapulco, Gro., las cuales forman parte de la red de estaciones del Instituto de Geofísica de la UNAM.

Las amplitudes y fases de los 7 principales armónicos para las diferentes estaciones de la región se muestran en la Tabla I.

Tabla I
Amplitudes y fases de las principales componentes de marea, para las estaciones de Acapulco Gro., Puerto Ángel y Salina Cruz, Oax. La fase esta con respecto al meridiano local 90° W

COMPONENTE	ACAPULCO GRO.		PUERTO ANGEL, OAX.		SALINA CRUZ, OAX.	
	AMPLITUD (m)	FASE (°)	AMPLITUD (m)	FASE (°)	AMPLITUD (m)	FASE (°)
M ₂	0.185	57.37	0.424	66.92	0.493	68.77
S ₂	0.082	239.80	0.067	170.77	0.082	162.64
N ₂	0.057	6.52	0.103	31.17	0.109	33.62
K ₂	0.024	244.47	0.016	173.24	0.015	141.23
K ₁	0.117	53.65	0.101	33.25	0.102	27.14
O ₁	0.090	64.06	0.074	53.19	0.070	52.79
P ₁	0.038	53.66	0.031	32.14	0.033	27.38

Tabla de predicción de mareas, UNAM (1993)

Las mareas en las costas de Oaxaca, pueden clasificarse de acuerdo a su número de forma como mixtas con dominancia semi-diurna, ya que estos números tienen valores de 0.77, 0.35 y 0.299 para las estaciones de Acapulco, Puerto Ángel y Salina Cruz respectivamente.

La dominancia de la componente M₂ es evidente en las costas de Oaxaca, cuya distribución de fase y amplitud están representadas en la figura (1.2).

De acuerdo al mapa cotidal (Fig. 1.2), la diferencia de fase entre la estación de Puerto Ángel y la boca-barra de Cerro Hermoso del sistema Lagunar Chacahua-Pastoría, es

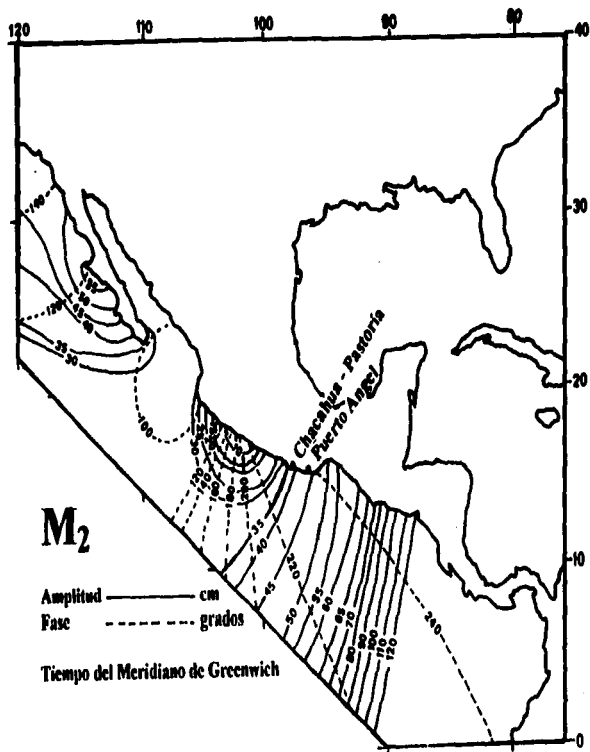


Figura 1.2 Mapa cotidal para el Océano Pacífico Mexicano

de 5.04° aproximadamente, equivalentes a 10 minutos para la componente M_2 . Mientras que la diferencia de amplitudes es de 4 cm aproximadamente.

1.5 Vientos

Las estaciones meteorológicas más cercanas a la zona de estudio son la estación de Pinotepa Nacional (ubicada en $16^\circ 21' N$ y $98^\circ 03' W$) en el municipio de Santiago Pinotepa Nacional, Oax., y la estación de El Paso de la Reina en el municipio de Santiago Jamiltepec, Oax. Las dos estaciones se encuentran tierra adentro a una altitud con respecto al nivel del mar de 190 y 240 m respectivamente.

Los vientos dominantes y reinantes en la estación del Paso de la Reina la mayor parte del año son del suroeste, con una intensidad de 1.8 y 3.3 m s^{-1} . Ocasionalmente los vientos proceden del sur y del sureste con la misma intensidad. Por otro lado, los vientos dominantes y reinantes para la estación de Pinotepa Nacional proceden del sur con intensidades entre 1.8 y 3.3 m s^{-1} .

Las máximas intensidades registradas durante el periodo de 1961 a 1977 fluctuaron entre 8 y 13.8 m s^{-1} (Servicio Meteorológico Nacional, 1979).

1.6 Geología

La zona de estudio forma parte de la subprovincia "Cuenca Papagayo-Tehuantepec", correspondiente a la provincia litoral "Sierra Madre del Sur", de acuerdo a la regionalización de provincias fisiográficas del INEGI (1989).

Las provincias se definen como regiones de un mismo origen geológico, con paisajes y tipos de rocas genéticamente similares y aún con características climáticas, hidrológicas y oceanográficas semejantes en la mayor parte de su extensión, (Álvarez Arellano y Gaitán Moran, 1994).

La provincia Sierra Madre del Sur, se subdivide en tres sub-provincias. En general presenta sierras abruptas con pendientes fuertes. Es una zona que se caracteriza por su inestabilidad tectónica y sísmica. En esta provincia se ubican 16 lagunas costeras, entre las que se encuentran el sistema lagunar Chacahua-Pastoria.

Las playas de Oaxaca se encuentran dentro de la unidad morfológica costera VIII (Carranza Edwards *et al.*, 1975), la cual se caracteriza por tener una plataforma continental angosta. Tectónicamente se considera como costa de colisión continental afectada por el contacto de la placa de América con la placa de Cocos; geomorfológicamente como costas

primarias formadas por movimientos diastróficos y en menor proporción como costas secundarias por la erosión debida al oleaje y la depositación marina.

Los sedimentos sobre las playas de Oaxaca provienen principalmente de afloramientos de gneisses e intrusivos silíceos, que se encuentran ampliamente distribuidos dentro de las cuencas hidrológicas que drenan hacia el Pacífico. Por otro lado, en esta zona reconocida como tectónicamente inestable, se encuentran sedimentos con inmadurez textural, manifestando la influencia del tectonismo sobre el tipo de sedimento depositado (Carranza Edwards *et al.*, 1988).

Estudios recientes, muestran que el transporte litoral predominante en la Bahía de Chacahua es hacia el este (Ramón Díaz, 1995), dando lugar a un delta interno producto del transporte de sedimentos hacia el interior de la laguna, lo cual tiende a incrementar el azolve de la misma (Ledesma *et al.*, 1992).

1.7 Biología

En el sistema lagunar Chacahua-Pastoria se han desarrollado diversos estudios relacionados con la abundancia y distribución de la flora y fauna, dada su importancia como zona de desove, crianza, alimentación y protección para diferentes especies marinas y dulce-acuícolas de importancia comercial. Este sistema es considerado dentro de los más importantes para las pesquerías del camarón y con potencial para desarrollos acuícolas (SEPESCA, 1990).

Sin embargo, ya desde 1937 Sosa reporta el deterioro progresivo del sistema y la consecuente disminución de las pesquerías producto de la falta de aporte de agua dulce del río Verde, que anteriormente descargaba parte de su caudal al sistema lagunar.

Por otro lado, diversos estudios de plancton evidencian que la producción de la laguna está altamente influenciada por la época de lluvias y la variación de los parámetros físico-químicos (Vega Rojas, 1971; Martínez Pérez, 1980; Zárate Vidal, 1986). Barón Sevilla (1988) asocia la entrada de los juveniles de *Lisa mugica* con la época de lluvias.

Teodoro y Ortiz (1990) realizaron una serie de muestreos de plancton durante un ciclo anual comprendido entre 1982 y 1983, por medio del cual encuentra una composición diferente entre las lagunas de Chacahua y Pastoria, lo que asocia con el cierre prolongado de la boca-barra de Chacahua.

1.8 Hidrodinámica

Existen muy pocos estudios de hidrografía e hidrodinámica del sistema lagunar Chacahua-Pastoría, debido básicamente a que las mediciones realizadas se han llevado a cabo como complementos de estudios que como interés principal tienen el análisis de la distribución y abundancia de la fauna en la laguna y de la distribución de sedimentos cerca de la boca de Cerro Hermoso.

Durante la época de secas ocurren rangos de temperatura de 26 a 33 °C con un promedio de 31 °C, con fluctuaciones de salinidad entre 37 y 40 ups teniendo un promedio de 39 ups. El pH oscilaba entre 7 y 9.6 con un promedio de 7.6. La concentración de oxígeno presenta concentraciones de 2.4 a 8.6 ppm, teniendo un promedio de 5.4 ppm (Martínez Pérez, 1980). Otros estudios muestran salinidades de hasta 50 ups en la zona llamada la Salina, la cual constituía una importante zona de producción de camarón (Cruz *et al.*, 1985).

Téllez Velasco (1983) realiza muestreos periódicos en 21 estaciones hidrográficas, con intervalos de dos meses, midiendo velocidad del viento, velocidad de la corriente, transparencia del agua, temperatura, salinidad, oxígeno disuelto, amonio, nutrientes, cantidad de clorofila y velocidad fotosintética; encontrando que las variaciones más notables son producidas por las precipitaciones. Este autor menciona que otro fenómeno de importancia es el cierre paulatino de la boca-barra de Chacahua.

Torres Moya *et al.* (1993) encuentran que las condiciones físicas y químicas de laguna Pastoría reflejan la influencia de las aguas oceánicas que recibe esta laguna, mientras que para la laguna de Chacahua reportan procesos de eutrofización en la columna de agua.

Ramón Díaz (1995) realizó mediciones del nivel de la superficie libre del agua, en el interior de las Lagunas de Chacahua y Pastoría en cuatro puntos diferentes en forma simultánea, durante un ciclo de marea con intervalos de 30 minutos; concluyó que *no existe una influencia significativa de la onda de marea entre ambas lagunas, debido al efecto de amortiguamiento que sufre esta onda en el canal de conexión entre las lagunas, dada la batimetría y sinuosidad del mismo.*

CAPITULO II

OBSERVACIONES EN CAMPO

2.1 Mediciones de Corrientes

Las mediciones *in situ* de corrientes se realizaron con la finalidad de ver la variación del flujo y reflujo y compararlas con las estimaciones obtenidas a través del modelo numérico. Estas mediciones se realizaron en la boca de Cerro Hermoso durante 24 horas con intervalos de muestreo de una hora. El muestreo se llevó a cabo a principios de verano iniciando el día 19 de junio de 1995, durante el periodo de lluvias.

Las corrientes fueron medidas con correntómetros tipo "vanes" diseñados por Kjerfve y Medeiros (1989), los cuales permiten conocer en forma indirecta la velocidad instantánea en un punto dado. Los correntómetros consisten de una placa de Lexán de 30×30 cm y de 6 mm de espesor, doblada en forma de "V" formando un ángulo interno de 60°. El correntómetro se suspende de un hilo de alambre, el cual a su vez está sujeto a una polea que se fija a una plataforma (Fig. 2.1).

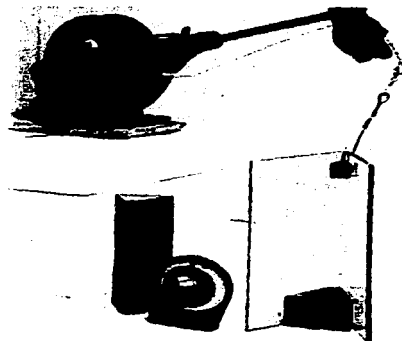


Figura 2.1 Correntómetro tipo Vanes (tomado de Kjerfve y Medeiros, 1989)

En el vértice de la placa se coloca un bloque de 1, 2 ó 5 kg, dependiendo de la intensidad de la corriente, mayor será la masa a usar cuando mayor sea la intensidad de la corriente. El instrumento se sumerge en el agua y se mide tanto la desviación del hilo con respecto a la vertical como su rumbo; para lo cual se utilizó un clinómetro y una brújula respectivamente.

La desviación del hilo de alambre se utilizó para calcular la rapidez de la corriente. El rumbo indica la dirección del flujo.

El principio teórico en el que se basa este cálculo es el de la conservación de la energía, obteniéndose que la rapidez de la corriente en el sistema mks esta dada por (Kjerfve y Medeiros, 1989):

$$v = \left[\frac{2mg}{A\rho C_D} \right]^{0.5} [\tan\alpha]^{0.5} \quad (2.1)$$

Donde m es la masa del correntómetro sumergido, α es el ángulo con respecto a la vertical, C_D un coeficiente de arrastre sin dimensiones, A es el área de la sección transversal de la placa de Lexán normal al flujo, g la gravedad y ρ la densidad del agua.

Kjerfve y Medeiros (1989) obtiene que para una masa (m) de 1 kg la velocidad está dada por:

$$v = 0.65[\tan\alpha]^{0.5} + 0.056 \quad (2.2)$$

y para una masa (m) de 7 kg la velocidad es:

$$v = 1.36[\tan\alpha]^{0.5} + 0.079 \quad (2.3)$$

Este tipo de correntómetro fue diseñado para la medición de corrientes en el rango de 0.1 a 1.6 m s⁻¹, con un error de medición de 0.04 a 0.06 m s⁻¹, recomendándose que el

ángulo α no exceda los 50° con respecto a la vertical, siendo el rango óptimo de este en $0^\circ < \alpha < 30^\circ$ (Kjerfve y Medeiros, 1989).

2.2 Mediciones de Parámetros Físico-Químicos

En forma simultánea a las mediciones de corrientes se realizaron mediciones horarias de parámetros físico-químicos del agua en la boca-barra de Cerro Hermoso en tres niveles de la columna de agua, superficie, media agua y fondo. Las mediciones se hicieron con un analizador múltiple de agua (Hidrolab H20) y los parámetros medidos fueron: temperatura, salinidad y oxígeno disuelto.

Las especificaciones de los sensores del analizador múltiple son presentadas en la Tabla II:

TABLA II
Especificaciones de los diferentes sensores del analizador múltiple de agua
(HIDROLAB H20)

Parámetro	Salinidad UPS	Temperatura [°C]	O ₂ Disuelto [mg l ⁻¹]	pH	REDOX [mV]	Profundidad [m]
Rango	0-70	-5 - 50	0-20	0-14	-999 a 999	0-50
Resolución	0.1	0.01	0.01	0.01	1.0	0.01
Precisión	+/-0.2	+/- 0.15	+/- 0.2	+/- 0.2	+/- 20	+/-0.5

2.3 Resultados de las observaciones en campo

Las mediciones *in situ* comprenden valores de observaciones horarias durante un ciclo de marea tanto de los parámetros temperatura, salinidad y oxígeno como de la velocidad de corriente en la boca-barra de Cerro Hermoso.

2.3.1 Corrientes

La serie de tiempo obtenida de las mediciones de corrientes en la boca-barra de Cerro Hermoso se presenta en la figura 2.2. Las velocidades positivas representan el flujo y las velocidades negativas el reflujó. De esta figura se observa que la velocidad de la corriente de entrada al sistema es de mayor magnitud que la de salida. Sin embargo, la duración del reflujó es mayor que la del flujo en 2 horas aproximadamente. Es decir, el agua entra con mayor velocidad al sistema pero tarda un tiempo menor que en el reflujó.

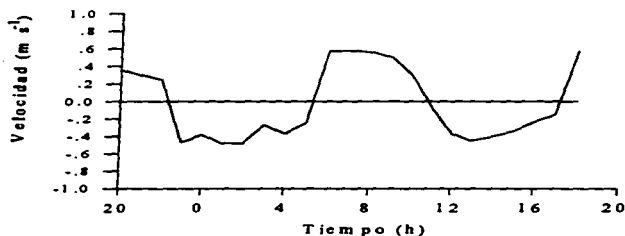


Figura 2.2 Velocidad de la corriente de marea medida en la boca-barra de Cerro Hermoso.

2.3.2 Temperatura y salinidad

Las series temporales de temperatura, salinidad y oxígeno son representadas en las figuras (2.3, 2.4 y 2.5) respectivamente. En cada una de estas, se grafican los tres niveles de la columna de agua donde se realizó la medición (superficie, media agua y fondo).

En las tres series se observa un comportamiento muy similar en los diferentes niveles en los que se muestreo, lo que evidencia que la columna de agua está completamente mezclada, fluctuando los valores únicamente de acuerdo con la entrada o salida de la marea.

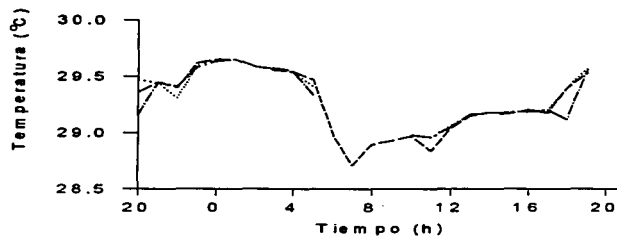


Figura 2.3 Temperatura en la boca-barra de Cerro Hermoso en tres niveles de la columna de agua: superficie (—), media agua (.....) y fondo (-.-.-).

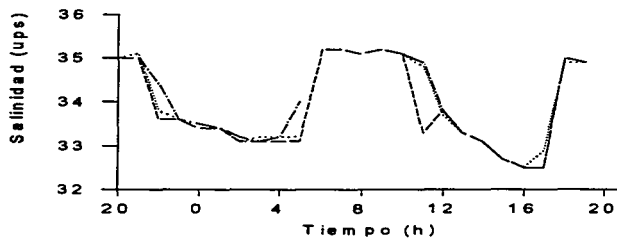


Figura 2.4 Salinidad en la boca-barra de Cerro Hermoso en tres niveles de la columna de agua: superficie (—), media agua (.....) y fondo (-.-.-).

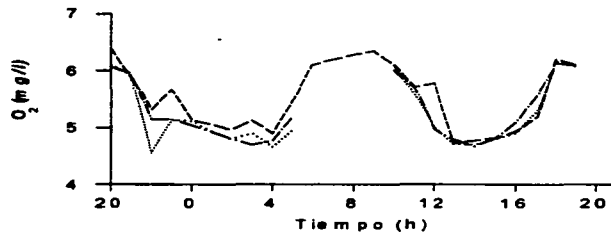


Figura 2.5 Serie de tiempo de oxígeno disuelto para los tres niveles: superficie (_ _ _), media agua (.....) y fondo (_.-.-).

Comparando la velocidad medida en campo con cada uno de los parámetros físico-químicos, se observa que el agua durante el flujo es más salina, más fría y con un mayor contenido de oxígeno disuelto en relación con las características del agua que se presentan durante el reflujó (Fig. 2.6)

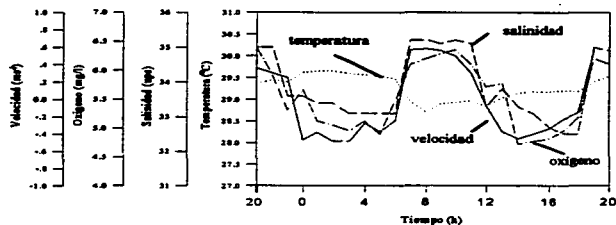


Figura 2.6 Parámetros físico-químicos y velocidades medidas *in situ* en la boca de Cerro Hermoso.

CAPITULO III

MODELO PARA LAGUNAS COSTERAS

La simulación de la circulación del sistema lagunar Chacahua-Pastoria se efectuó usando el modelo numérico de circulación de Monreal Gómez y Salas de León (1985), para el caso de un sistema barotrópico.

En este capítulo se describe el modelo matemático y su solución numérica. Mayores detalles se presentan en los apéndices A y B.

3.1 Mecanismos de forzamiento de la circulación en sistemas lagunares costeros

Los cuerpos de agua costeros se clasifican de acuerdo a la fuente de energía que induce el movimiento (Aldeco y Salas de León, 1994). Esta clasificación considera a las lagunas costeras como: controladas por la marea, controladas por la fricción del viento y sistemas controlados por el drenaje continental (ríos). Sin embargo, es común encontrar sistemas donde todos estos mecanismos de forzamiento están presentes.

En las lagunas costeras la marea es uno de los mecanismos mas importantes que generan la circulación y mezcla. Sin embargo, esta no es debida a la acción directa de los astros sobre el cuerpo de agua, sino a la influencia que tiene la marea oceánica cuando se aproxima al sistema. En aguas someras los efectos no lineales son importantes, debido a la poca profundidad la fricción en el fondo y los movimientos advectivos se incrementan; generando armónicos de alta frecuencia.

La componente de marea M_2 junto con los efectos no lineales produce componentes armónicas como la M_4 y la M_6 . Sus frecuencias resultan múltiplos de la frecuencia del armónico que las generó. Las mareas compuestas son el resultado de las interacciones no lineales entre dos o mas constituyentes armónicos. Su frecuencia corresponde a la suma y/o diferencia de las frecuencias de estos (Westerink *et al.*, 1985).

En aquellas lagunas controladas por el esfuerzo del viento, donde la marea y descarga de ríos son de poca importancia, la variación en el patrón de vientos definen la circulación.

3.2 Modelo matemático

3.2.1 Ecuaciones de movimiento

El modelo matemático considera las ecuaciones de movimiento o ecuaciones de Navier-Stokes las cuales se basan en el principio de conservación de masa y momentum.

3.2.1.1 Ecuación de continuidad

La conservación de masa se expresa matemáticamente mediante la ecuación de continuidad (e.g. Batchelor, 1977).

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

donde ρ es la densidad del fluido que se mueve con una velocidad v_j en el espacio x_j con $j=1,2,3$.

La cual considerando la aproximación de Boussinesq se transforma en la condición de incompresibilidad o de flujo no divergente

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.2)$$

3.2.1.2 Ecuación de momentum

Los movimientos de un fluido geofísico, como aquellos que se encuentran en el océano y en la atmósfera se rigen por la segunda ley de Newton. Esta contiene todas las fuerzas actuando sobre un sistema. En el océano en particular estas fuerzas se deben a la acción de la gravedad, a la rotación de la tierra, al gradiente de presión, a las viscosidades molecular y turbulenta.

La rotación de la tierra induce la fuerza de Coriolis, en grandes áreas oceánicas se manifiesta en la desviación de las corrientes hacia la derecha en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el hemisferio sur. La fuerza de gradiente de presión se origina por una

pendiente en la superficie libre la cual puede ser provocada por la elevación de la marea.

Existen fuerzas friccionales de dos tipos, una a nivel molecular la cual depende del tipo de fluido, la otra a una escala mayor depende del tipo de flujo, estas últimas conocidas como fuerzas friccionales turbulentas y son mas importantes que las moleculares.

Las ecuaciones de movimiento bajo la aproximación de Boussinesq se expresan como:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \left(\frac{\rho_0 + \rho'}{\rho_0} \right) g_i \delta_{i3} - 2 \varepsilon_{ijk} \Omega_j v_k - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{g}_i = (0, 0, g)$ es la gravedad aparente, ρ_0 la densidad de referencia, ρ' la variación de la densidad "in situ" respecto a su valor de referencia, Ω_j la velocidad angular de la tierra, p la presión, μ la viscosidad dinámica molecular, finalmente δ_{ij} y ε_{ijk} son la delta de Kronecker y el tensor de Levi-Civita.

3.2.2 Ecuaciones de movimiento para flujo medio

El flujo de un fluido geofísico es considerado como compuesto por un flujo medio y uno fluctuante

3.2.2.1 Ecuación de momentum para flujo medio

Las ecuaciones anteriores representan los campos instantáneos de las velocidades, las cuales se componen de una parte media y una fluctuante, esta última originada por la turbulencia. En este caso estamos interesados en el flujo medio que determina la mayor parte de la circulación. Sin embargo, aún en el flujo medio existe la manifestación de la turbulencia mediante el término de la viscosidad turbulenta, producto de la interacción de los términos no lineales. La ecuación de flujo medio está dada por:

$$\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} = -g_i \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle v_k \rangle - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2 \langle v_i \rangle}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_j \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} \right) \quad (3.4)$$

donde A_j es el coeficiente de viscosidad turbulenta.

3.2.2.2 Ecuación de continuidad para flujo medio

La conservación de masa para un fluido incompresible, permite escribir la ecuación de continuidad para el flujo medio como:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle v_i \rangle = 0 \quad (3.5)$$

En lo sucesivo se eliminará el símbolo $\langle \rangle$ sabiendo que se trata del flujo medio.

3.2.3 Modelo barotrópico

En zonas donde la mezcla vertical es importante es posible utilizar un modelo barotrópico. En este caso utilizando la aproximación hidrostática e integrando en la vertical las ecuaciones de movimiento, se obtiene el modelo hidrodinámico bidimensional:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{(\tau_\eta)_i - (\tau_d)_i}{\rho_0} + A_H \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3.6)$$

para $i, j=1,2$ donde η es la anomalía de la superficie libre, τ_η y τ_d son el esfuerzo de fricción en la superficie libre y en el fondo, respectivamente. Donde V_j es el transporte horizontal y v_j la velocidad promedio en la columna de agua. De acuerdo a la extensión del sistema lagunar se considera que la presión atmosférica es uniforme y la aceleración de Coriolis despreciable.

Para resolver el sistema de ecuaciones (3.6) es necesario incluir la ecuación de continuidad integrada verticalmente, la cual es escrita como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial (V_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.7)$$

para $i=1,2$

3.2.4 Condiciones iniciales y de Frontera

La solución de las ecuaciones hidrodinámicas requiere de condiciones iniciales y de frontera para cerrar el sistema. Como condición inicial se consideró el estado de reposo. Las condiciones de frontera se establecen tanto para la línea de costa como para las boca-barras del sistema lagunar y las desembocaduras de los ríos.

3.2.4.1 Fronteras naturales

Una frontera natural se define como una frontera donde el movimiento del fluido es restringido por obstáculos físicos, tales como la línea de costa conocidas como fronteras cerradas y el fondo.

En las fronteras cerradas representadas por la línea de costa del sistema lagunar, se establecieron condiciones de impermeabilidad y libre deslizamiento las cuales expresadas matemáticamente son:

$$\bar{v}_n = 0 \quad (3.8)$$

y

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad (3.9)$$

para $i, j = 1, 2$; válido solo cuando $i \neq j$, v_n es un vector de velocidad perpendicular a la línea de la costa.

Aplicando estas condiciones a fronteras meridionales, se tiene $v_1 = 0$, $\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0$,
 mientras que en las fronteras zonales: $v_2 = 0$, y $\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$

Para la frontera natural representada por el fondo, también se impuso la condición de impermeabilidad es decir:

$$v_3 = 0 \quad \text{en } x_3 = d(x_1, x_2) \quad (3.10)$$

3.2.4.2 Fronteras artificiales

Las fronteras artificiales son aquellas que delimitan el área de integración de las aguas adyacentes. Para el caso del sistema lagunar Chacahua-Pastoría, estas fronteras están representadas por las boca-barras (comunicación con el océano), y por las desembocaduras de los ríos.

En las boca-barras de la laguna, la condición de frontera impuesta fue la elevación de marea correspondiente a la reportada para Puerto Ángel, Oax. (Fig. 3.1).

En cuanto a los ríos, las condiciones impuestas fueron los escurrimientos promedios reportados por la Comisión Nacional del Agua.

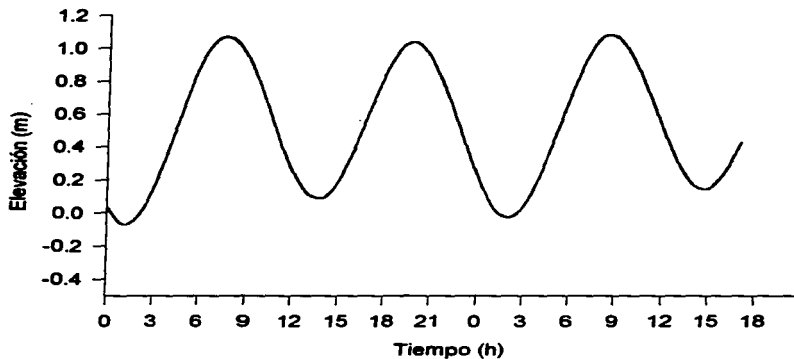


Figura 3.1 Elevación de la marea en Puerto Ángel, Oax. para los días 19 y 20 de junio de 1995. Referidos al meridiano local y al nivel de bajamar media inferior. (Instituto de Geofísica de la UNAM, 1985)

3.3 Modelo numérico

La solución analítica del sistema de ecuaciones hidrodinámicas en su forma general, no ha sido obtenida aún. Las soluciones analíticas que han sido obtenidas son de casos donde se introduce una serie de simplificaciones y linealizaciones. Por otro lado, estas ecuaciones aplicadas a la simulación en oceanografía se enfrentan a la complejidad de la geometría de las cuencas, lo que hace que la representación analítica de éstas no sea posible.

De acuerdo a lo anterior es necesario recurrir a soluciones alternas como las numéricas. Varios métodos numéricos han sido desarrollados con esta finalidad, y en general consisten en remplazar las variables continuas de las ecuaciones diferenciales por variables discretas, obteniéndose un conjunto de ecuaciones algebraicas, que se resuelven en un espacio físico bien definido, previamente discretizado, cuya solución por medio de una computadora da una solución aproximada correspondiente a la solución del sistema continuo.

Se dice solución aproximada, dado que el proceso de discretización así como el de solución de las ecuaciones algebraicas introducen ciertos errores. De aquí que deben establecerse las circunstancias y la garantía bajo las cuales la solución numérica converja a la solución exacta.

El modelo hidrodinámico planteado en la sección anterior junto con las condiciones iniciales y de fronteras, es resuelto en forma numérica. Las ecuaciones son discretizadas utilizando diferencias finitas, el esquema numérico planteado para este caso es semi-implícito a dirección alternada el cual se resuelve en una malla tipo Arakawa-C modificada. El método semi-implícito a dirección alternada divide el incremento de tiempo en dos sub-incrementos. En el primer sub-incremento, la componente V_2 del transporte horizontal se resuelve en forma explícita, mientras que la componente V_1 es resuelta implícitamente. En el segundo sub-incremento se resuelve el caso contrario. Esta división del incremento del tiempo tiene como ventaja la disminución del error de discretización (Velasco Mendoza, 1994).

Este esquema permite que se utilice un paso de integración temporal mas grande que en caso del esquema explícito puro sin presentar las complicaciones de un sistema implícito y por lo tanto resulta mas barato desde el punto de vista computacional.

Al área de estudio delimitada por medio de las fronteras naturales y artificiales, es denominada área de integración. Es sobre esta área donde se definen las condiciones de frontera y se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas.

Las fronteras que delimitan el área de integración para el sistema lagunar Chacahua-Pastoria son las fronteras cerradas o costas y la frontera abierta desembocadura de los rios y bocas del sistema cuyas condiciones impuestas sobre éstas son determinadas por el flujo a través de ellas.

3.3.1 Mallas numéricas

El área de integración del sistema (Fig. 3.2), fue discretizada en una malla uniforme de 200 m de resolución formando una malla de 82×31 celdas, en donde se calculan las variables V_1, V_2 y η . La modificación a la malla Arakawa-C consiste en generar una malla de profundidades en todos y cada uno de los puntos de las celdas, obteniendo así una malla de doble densidad (Fig. 3.3).

3.3.1.1 Malla espacial

La malla utilizada fue del tipo Arakawa-C, la cual se representa esquemáticamente en la figura (3.4). Donde en cada celda son resueltas las variables V_1, V_2 y η .

3.3.1.2 Malla temporal

Para efectuar la integración temporal se discretizó de forma tal que cada paso de tiempo Δt , fue dividido en dos sub-incrementos. En el primer sub-incremento se resuelve V_1 de forma implícita y V_2 de forma explícita, mientras que para el segundo semi-paso se

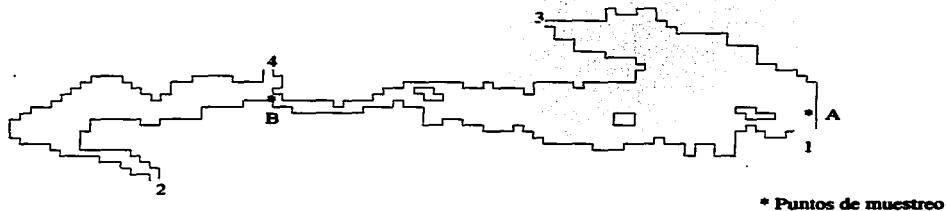


Figura 3.2 Área de integración del sistema Lagunar Chacahua-Pastoria. 1) Boca-barra de Cerro Hermoso, 2) boca-barra de Chacahua paralela a la línea de costa, 3) entrada del río Chacalapa, y 4) entrada del río San Francisco .

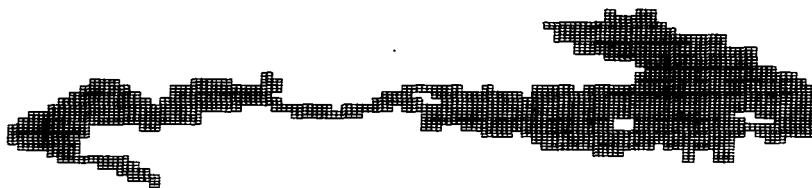


Figura 3.3 Malla de profundidades del sistema Lagunar Chacahua-Pastoria

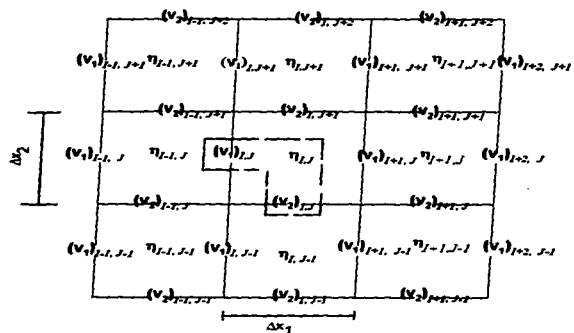


Figura 3.4 Malla espacial tipo Arakawa-C

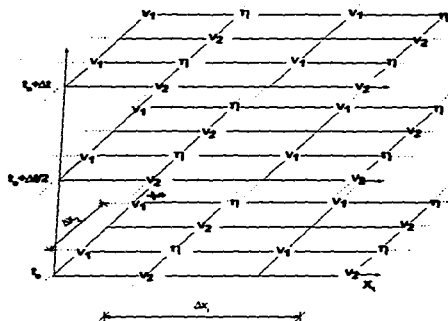


Figura 3.5 Malla temporal utilizada en la discretización de las ecuaciones.

resuelve en forma inversa. De tal manera que se establece un esquema a dirección alternada. La malla temporal se presenta en la figura (3.5).

3.3.2 Ecuaciones discretizadas

Primer sub-incremento

La componente V_2 del transporte horizontal en forma explícita es:

$$\begin{aligned}
 (V_2)_{i,j}^{n+1/2} = & (V_2)_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_1)} \left[\left(\left(\frac{V_1}{h} \right) + \left| \frac{V_1}{h} \right| \right)_{CV_1}^n ((V_2)_{i,j} - (V_2)_{i-1,j})^n \right] \\
 & - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_1)} \left[\left(\left(\frac{V_1}{h} \right) - \left| \frac{V_1}{h} \right| \right)_{CV_1}^n ((V_2)_{i-1,j} - (V_2)_{i,j})^n \right] \\
 & - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_2)} \left[\left(\left(\frac{V_2}{h} \right) + \left| \frac{V_2}{h} \right| \right)_{CV_2}^n ((V_2)_{i,j} - (V_2)_{i,j-1})^n \right] \\
 & - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_2)} \left[\left(\left(\frac{V_2}{h} \right) - \left| \frac{V_2}{h} \right| \right)_{CV_2}^n ((V_2)_{i,j-1} - (V_2)_{i,j})^n \right] \\
 & - g h_{CV_2}^n \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} [\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}]^n \\
 & + \left(\frac{\Delta t}{2\rho} \tau_{\eta_{x_1}} \right)_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{D|\bar{V}_{i,j}^n|(V_2)_{i,j}^n}{(h_{CV_2})^2} \\
 & + \frac{A_H \Delta t}{2\Delta x_1^2} ((V_2)_{i-1,j} - 2(V_2)_{i,j} + (V_2)_{i+1,j})^n \\
 & + \frac{A_H \Delta t}{2\Delta x_2^2} ((V_2)_{i,j-1} - 2(V_2)_{i,j} + (V_2)_{i,j+1})^n
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

La componente V_1 del transporte horizontal en forma implícita, para el primer sub-incremento:

$$\begin{aligned}
 (V_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = & (V_1)_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_1)} \left[\left(\left(\frac{V_1}{h} \right) + \left| \frac{V_1}{h} \right| \right)_{CV_1}^n ((V_1)_{i,j} - (V_1)_{i-1,j})^{n+\frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_1)} \left[\left(\left(\frac{V_1}{h} \right) - \left| \frac{V_1}{h} \right| \right)_{CV_1}^n ((V_1)_{i-1,j} - (V_1)_{i,j})^{n+\frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_2)} \left[\left(\left(\frac{V_2}{h} \right) + \left| \frac{V_2}{h} \right| \right)_{CV_1}^n ((V_1)_{i,j} - (V_1)_{i,j-1})^n \right] \\
 & - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_2)} \left[\left(\left(\frac{V_2}{h} \right) - \left| \frac{V_2}{h} \right| \right)_{CV_1}^n ((V_1)_{i,j-1} - (V_1)_{i,j})^n \right] \\
 & - gh_{CV_1}^n \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} [\eta^{n+\frac{1}{2}} - \eta_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}] \\
 & + \left(\frac{\Delta t}{2\rho} \tau_{\eta x_1} \right)_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{D\bar{V}_{i,j}^n}{(h_{CV_1}^n)^2} (V_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{A_H \Delta t}{2\Delta x_1^2} ((V_1)_{i-1,j} - 2(V_1)_{i,j} + (V_1)_{i+1,j})^{n+\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{A_H \Delta t}{2\Delta x_2^2} ((V_1)_{i,j-1} - 2(V_1)_{i,j} + (V_1)_{i,j+1})^n
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Con la finalidad de que la anomalía de la superficie libre este centrada en el tiempo los valores de $V_1^{n+\frac{1}{2}}$ y V_2^n son utilizados para calcular las elevaciones en cada punto de la malla en el primer medio paso de integración, que de acuerdo a la ecuación de continuidad es escrita como:

$$\eta^{n+\frac{1}{2}} = \eta^n - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{(V_1)_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - (V_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x_1} + \frac{(V_2)_{i,j-1}^n - (V_2)_{i,j}^n}{\Delta x_2} \right] \tag{3.13}$$

Segundo sub-incremento

El transporte horizontal V_1 calculado explícitamente esta dado por:

$$\begin{aligned}
 (V_1)_{i,j}^{n+1} = & (V_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_1)} \left[\left(\left(\frac{V_1}{h} \right) + \left| \frac{V_1}{h} \right| \right)_{C_{V_1}}^{n+\frac{1}{2}} ((V_1)_{i,j} - (V_1)_{i-1,j})^{n+\frac{1}{2}} \right. \\
 & - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_1)} \left[\left(\left(\frac{V_1}{h} \right) - \left| \frac{V_1}{h} \right| \right)_{C_{V_1}}^{n+\frac{1}{2}} ((V_1)_{i+1,j} - (V_1)_{i,j})^{n+\frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_2)} \left[\left(\left(\frac{V_2}{h} \right) + \left| \frac{V_2}{h} \right| \right)_{C_{V_1}}^{n+\frac{1}{2}} ((V_1)_{i,j} - (V_1)_{i,j-1})^{n+\frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_2)} \left[\left(\left(\frac{V_2}{h} \right) - \left| \frac{V_2}{h} \right| \right)_{C_{V_1}}^{n+\frac{1}{2}} ((V_1)_{i,j-1} - (V_1)_{i,j})^{n+\frac{1}{2}} \right] \\
 & - g h_{C_{V_1}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} [\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}]^{n+\frac{1}{2}} \\
 & + \left(\frac{\Delta t}{2\rho} \tau_{\eta_{i,j}} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \frac{D|\bar{V}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}|(V_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(h_{C_{V_1}}^{n+\frac{1}{2}})^2} \\
 & + \frac{A_H \Delta t}{2\Delta x_1^2} ((V_1)_{i-1,j} - 2(V_1)_{i,j} + (V_1)_{i+1,j})^{n+\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{A_H \Delta t}{2\Delta x_2^2} ((V_1)_{i,j-1} - 2(V_1)_{i,j} + (V_1)_{i,j+1})^{n+\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

El transporte horizontal V_2 calculado implícitamente es:

$$\begin{aligned}
 (V_2)_{i,j}^{n+1} = & (V_2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_1)} \left[\left(\left(\frac{V_1}{h} \right) + \left| \frac{V_1}{h} \right| \right)_{cV_2}^{n+\frac{1}{2}} ((V_2)_{i,j} - (V_2)_{i-1,j})^{n+\frac{1}{2}} \right. \\
 & \left. - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_1)} \left[\left(\left(\frac{V_1}{h} \right) - \left| \frac{V_1}{h} \right| \right)_{cV_2}^{n+\frac{1}{2}} ((V_2)_{i-1,j} - (V_2)_{i,j})^{n+\frac{1}{2}} \right] \right. \\
 & \left. - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_2)} \left[\left(\left(\frac{V_2}{h} \right) + \left| \frac{V_2}{h} \right| \right)_{cV_2}^{n+\frac{1}{2}} ((V_2)_{i,j} - (V_2)_{i,j-1})^{n+1} \right] \right. \\
 & \left. - \frac{\Delta t}{4(\Delta x_2)} \left[\left(\left(\frac{V_2}{h} \right) - \left| \frac{V_2}{h} \right| \right)_{cV_2}^{n+\frac{1}{2}} ((V_2)_{i,j-1} - (V_2)_{i,j})^{n+1} \right] \right. \\
 & \left. - gh_{cV_2}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} [\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}]^{n+1} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\Delta t}{2\rho} \tau_{\eta x_2} \right)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \frac{D|V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}| (V_2)_{i,j}^{n+1}}{(h_{cV_2}^{n+\frac{1}{2}})^2} \right. \\
 & \left. + \frac{A_H \Delta t}{2\Delta x_1^2} ((V_2)_{i-1,j} - 2(V_2)_{i,j} + (V_2)_{i+1,j})^{n+\frac{1}{2}} \right. \\
 & \left. + \frac{A_H \Delta t}{2\Delta x_2^2} ((V_2)_{i,j-1} - 2(V_2)_{i,j} + (V_2)_{i,j+1})^{n+1} \right] \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

La elevación o anomalía de la superficie libre para este subincremento, se calcula de tal manera que este centrada en $n + \frac{1}{2}$:

$$\eta^{n+1} = \eta^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{(V_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - (V_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x_1} + \frac{(V_2)_{i,j-1}^{n+1} - (V_2)_{i,j}^{n+1}}{\Delta x_2} \right] \quad (3.16)$$

La condición de estabilidad para el esquema numérico planteado en este trabajo ya ha sido ampliamente demostrada por Monreal Gómez (1986). Donde se especifica que se debe de cumplir para $\Delta T \leq \frac{\Delta x^2}{A_H}$ donde A_H es el coeficiente de viscosidad turbulenta numérica.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS DEL MODELO NUMÉRICO

Con el objetivo de analizar el efecto del forzamiento debido a la componente M_2 de la marea, al viento, a la descarga de agua dulce y a la apertura de la boca-barra de Chacahua, se realizaron diversos experimentos numéricos considerando una o varias de las situaciones antes mencionadas. Así mismo, con el fin de evaluar el efecto de la batimetría en la circulación se realizó un experimento suponiendo fondo plano en el sistema, con profundidad de 4 m.

Se consideraron dos orientaciones en la apertura de la boca-barra de Chacahua. Una siguiendo una línea paralela a la costa, en forma semejante a la orientación de la boca de Cerro Hermoso. La otra perpendicular a la línea de costa simulando la orientación original que tenía la boca de Chacahua, esto último de acuerdo a la información proporcionada por los habitantes del lugar.

En los experimentos realizados con descarga de agua dulce proveniente de los ríos Chacalapa y San Francisco, se impusieron como puntos de entrada los correspondientes a los canales construidos por la Comisión Nacional del Agua (CNA). El volumen de descarga fue de $13 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$; volumen propuesto por Salas de León, Monreal Gómez y Díaz González (comunicación personal) como resultado de un análisis efectuado en conjunto con la CNA para rehabilitar el sistema lagunar.

En todos los casos se simuló la circulación transitoria y se obtuvo la circulación "residual" mediante un promedio en cinco ciclos de marea, iniciándose del reposo usando una resolución espacial de 200 m, viscosidad turbulenta de $100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ y un paso de integración temporal de 49.68 s, cumpliendo así con las restricciones numéricas en la solución del modelo. Con estas consideraciones para simular la circulación durante un ciclo de la componente de marea M_2 , cuyo periodo es de 12.42 h, se requieren 900 iteraciones.

Con el objeto de determinar en que momento de la ejecución del modelo se podía considerar que los resultados representan las condiciones con una mejor aproximación a la realidad, se analizó la estabilidad estadística de la solución en términos de la evolución de la

energía cinética, potencial y total de todo el sistema. Esto es, si el mecanismo de forzamiento es la marea, se dice que el modelo llega a la estabilidad estadística cuando las energías presentan oscilaciones similares a las de la elevación de la marea. En el caso en el cual el forzamiento es un viento constante, entonces el modelo dará su mejor aproximación a la realidad cuando la evolución de las energías se comporten como constantes.

Por otro lado, para evaluar la validez del modelo se compararon las soluciones numéricas con series de datos observados en campo. En este caso se debe tener en consideración que en las simulaciones efectuadas solo se consideró a la componente M_2 de la marea y que en las observaciones se encuentra el efecto de todos los armónicos.

La estación mareográfica de Puerto Ángel, Oax. es la más próxima al sistema lagunar. La tabla IV.I muestra las características de las principales componentes de marea en dicha estación. En la figura (4.1) se muestra la evolución de la elevación total y de cada una de las componentes de marea, observándose que la componente M_2 es dominante.

Tabla IV.I

Principales constantes armónicas para la estación mareográfica de Puerto Ángel, Oax. y su contribución en la amplitud total

Componente	Amplitud (m)	Contribución (%)	A/A _{M₂}
M ₂	0.424	51.96	1.00
S ₂	0.067	8.21	0.15
N ₂	0.103	12.62	0.24
K ₂	0.016	1.96	0.03
K ₁	0.101	12.37	0.23
O ₁	0.074	9.06	0.17
P ₁	0.031	3.79	0.07

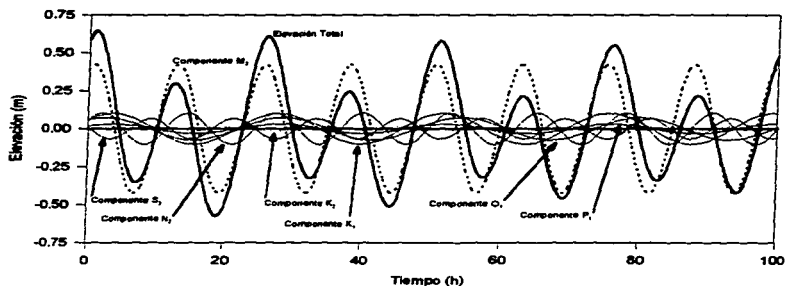


Figura 4.1 Principales componentes armónicas y su resultante en Puerto Ángel, Oax.

Se escogieron 4 instantes en la evolución del ciclo de marea para representar las soluciones mediante patrones instantáneos de circulación (Fig. 4.2). El punto (a) corresponde a 2,742 iteraciones el (b) a 2,970 y las (c) y (d) a 3,230 y 3,438 iteraciones respectivamente. Estos instantes corresponden a las velocidades máximas y mínimas en flujo y reflujo que se presentan durante un ciclo de marea en la boca de Cerro Hermoso cuando se considera fondo plano, la boca-barra de Chacahua cerrada y la componente M_2 de la marea como único mecanismo de forzamiento. La solución en dichos instantes permite analizar la solución a lo largo de un ciclo de marea.

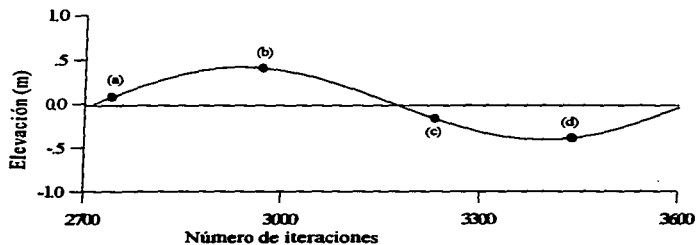


Figura 4.2 Instantes (a), (b), (c) y (d) en el ciclo de marea, para los cuales se presentan las soluciones de las simulaciones numéricas.

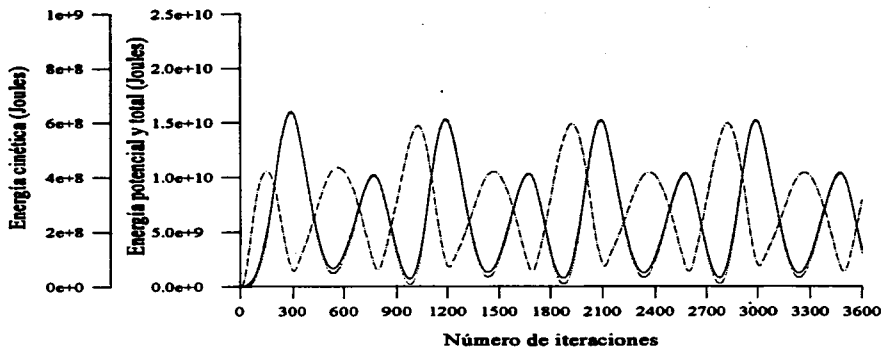
4.1 Circulación inducida por la marea

La marea es uno de los principales mecanismos que inducen el movimiento en el sistema lagunar. Para evaluar su efecto se realizaron varios experimentos numéricos considerando la componente M_2 de la marea como único forzamiento. El primero de estos se desarrolló con batimetría real y con la boca de Chacahua cerrada.

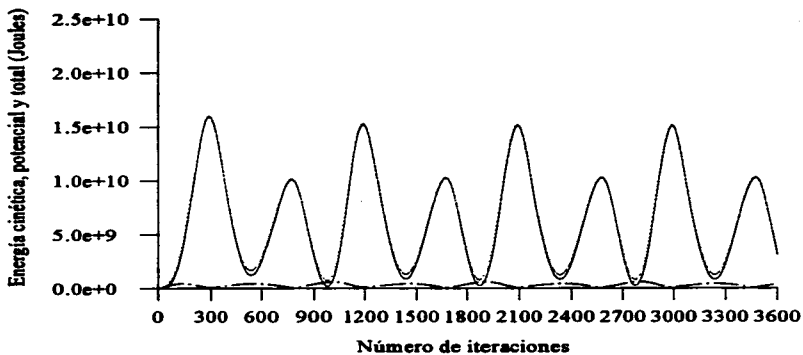
La evolución de las energías del sistema muestran en un principio un incremento resultado del forzamiento de la onda de marea, esto es, inicialmente el sistema se encuentra en reposo y al ser perturbado la energía sube rápidamente. Después del efecto inicial la energía tiende a oscilar en forma similar a las oscilaciones inducidas por la marea. De la evolución de las energías de todo el sistema (Fig. 4.3a y b) se puede observar que este se encuentra estadísticamente en equilibrio después de 1,800 iteraciones, situación que refleja la gran capacidad que tiene el modelo para eliminar las perturbaciones anormales iniciales y la fuerte convergencia del esquema empleado.

Los resultados de la simulación de la circulación transitoria, muestran para el instante (a) una circulación general hacia el oeste en la laguna de Pastoría (Fig. 4.4a) con un transporte mayor a $0.25 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, mientras que la circulación en la laguna de Chacahua es casi nula. La circulación en el canal que conecta ambas lagunas presenta un transporte de aproximadamente $0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ y un defasamiento con respecto al que se presenta en Pastoría.

El transporte horizontal en el instante (b) conserva la misma dirección que en el cuarto de marea anterior, decreciendo en magnitud en la laguna de Pastoría (Fig. 4.4b) y presenta un transporte medio de $0.2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. En el canal se observa que el transporte es muy alto llegando a valores de $0.4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, el cual alcanza a influenciar a la laguna de Chacahua, presentándose transportes horizontales de magnitud mucho mayor ($0.15 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) que en el caso anterior. Un cuarto de marea mas tarde, se observa una inversión de la circulación en todo el sistema lagunar (Fig 4.4c). La laguna de Pastoria responde a este efecto presentando transporte de $0.3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ en su parte central, de $0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ en las partes norte y sur de la misma. En la parte mas cercana a la boca-barra de Cerro Hermoso se presentan transportes mayores a $0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. En la laguna de Chacahua las velocidades son mínimas y en el canal se



(a)



(b)

Figura 4.3 Evolución de la energía cinética (---), potencial (....) y total (___) para el caso en el cual se considera fondo real, boca-barra de Chacahua cerrada y marea como único forzamiento. Utilizando: (a) diferente escala para la energía cinética, (b) la misma escala para todas las energías.

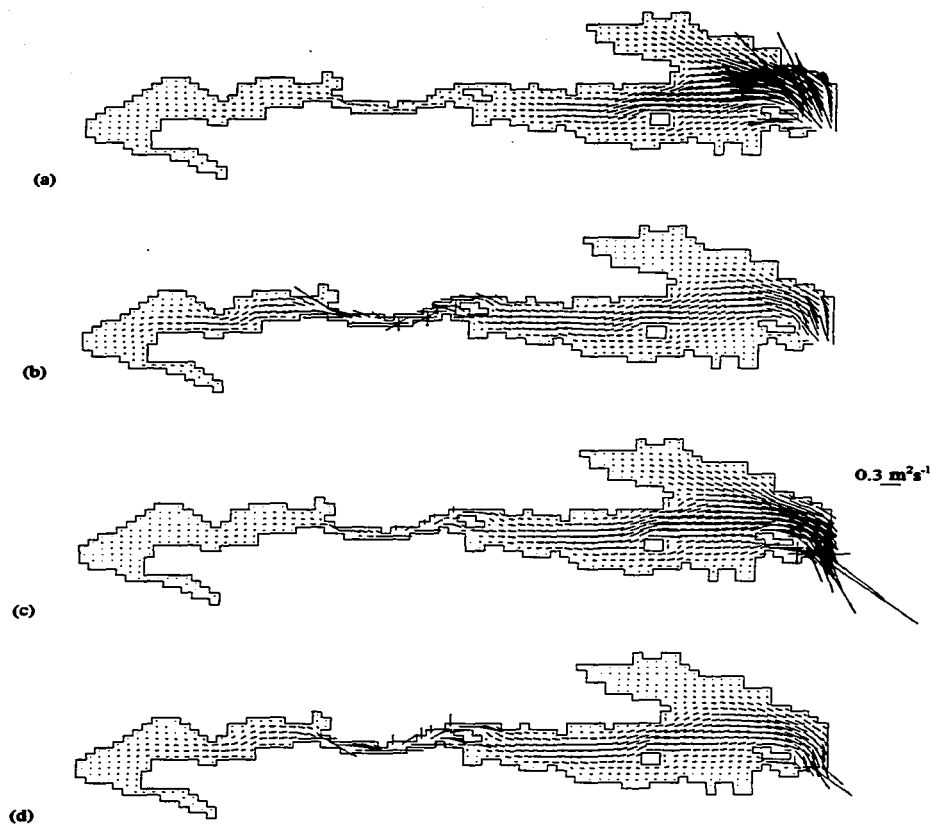


Figura 4.4 Resultados de la simulación numérica de la circulación considerando fondo real, boca-barra de Chacahua cerrada y marea como único forzamiento.

observa un transporte bajo en contraste con los altos valores obtenidos en la laguna de Pastoría. Esta situación evidencia un retraso de la onda de marea. Para el instante (d) el transporte en la laguna de Pastoría decrece notablemente (Fig. 4.4d), observándose transportes de aproximadamente $0.15 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ en la parte central y zonas de bajo transporte en la parte norte y sur de la misma. En la laguna de Chacahua se observa un transporte bien desarrollado en la parte más cercana al canal de conexión. Este transporte presenta la misma magnitud y dirección que en la parte central de la laguna de Pastoría.

Finalmente se realizó un análisis de la variaciones de la elevación y velocidad de la marea en dos puntos del sistema. Un punto se ubicó próximo a la boca de Cerro Hermoso y el otro en la laguna de Chacahua cerca al canal de conexión (puntos A y B de la figura 3.2 respectivamente).

En el punto A la elevación tiene una amplitud de 0.4 m. La componente más importante de la corriente es en dirección norte-sur con amplitudes cercanas a 1.0 m s^{-1} , mientras que la componente este-oeste tiene una amplitud de 0.2 m s^{-1} (Fig. 4.5). En este punto el flujo y reflujo son en dirección noroeste y sureste respectivamente. Para el punto B la elevación máxima es de 0.2 m, las corrientes son unidireccionales con amplitudes cercanas a 0.3 m s^{-1} (Fig. 4.6). En este caso el flujo es en dirección este y el reflujo en dirección oeste.

En este par de figuras la asimetría de la marea es evidente, la cual se manifiesta con una mayor velocidad en el flujo y menor en el reflujo. La compensación de masa se lleva a cabo mediante una mayor duración del reflujo.

Comparando la evolución de la marea en los puntos mencionados anteriormente, se observa un defasamiento. La máxima elevación en el punto de la laguna de Chacahua se presenta 2.6 horas mas tarde en referencia al máximo presentado en la laguna de Pastoria.

Al promediar las velocidades durante cinco ciclos de marea se observa que la circulación residual en la mayor parte de la laguna de Pastoría es hacia el este (Fig. 4.7), la magnitud de ésta en la región más al oeste es cercana a $2.8 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$ y conforme se va acercando a Cerro Hermosos aumenta su magnitud llegando a $8.5 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$ en promedio. Se presenta también la formación de un giro ciclónico arriba de la isla Las Piñuelas. Por otro lado, la circulación residual en la Laguna de Chacahua y en la Parte superior de Pastoria es casi nula, mientras que en el canal es aproximadamente de $2 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$.

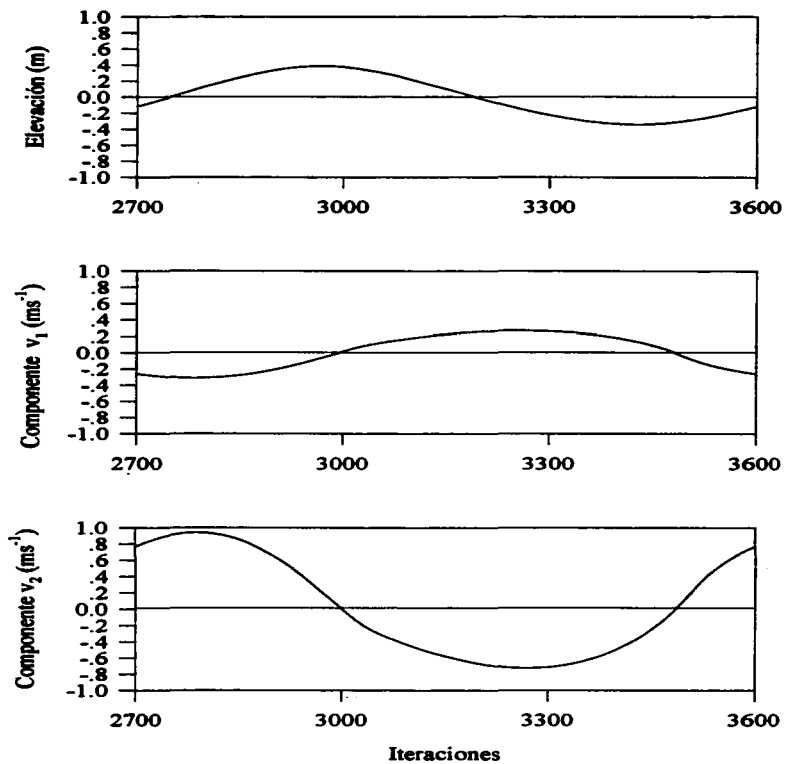


Figura 4.5 Elevación y velocidad de la marea en el punto de análisis A, cerca de la boca de Cerro Hermoso.

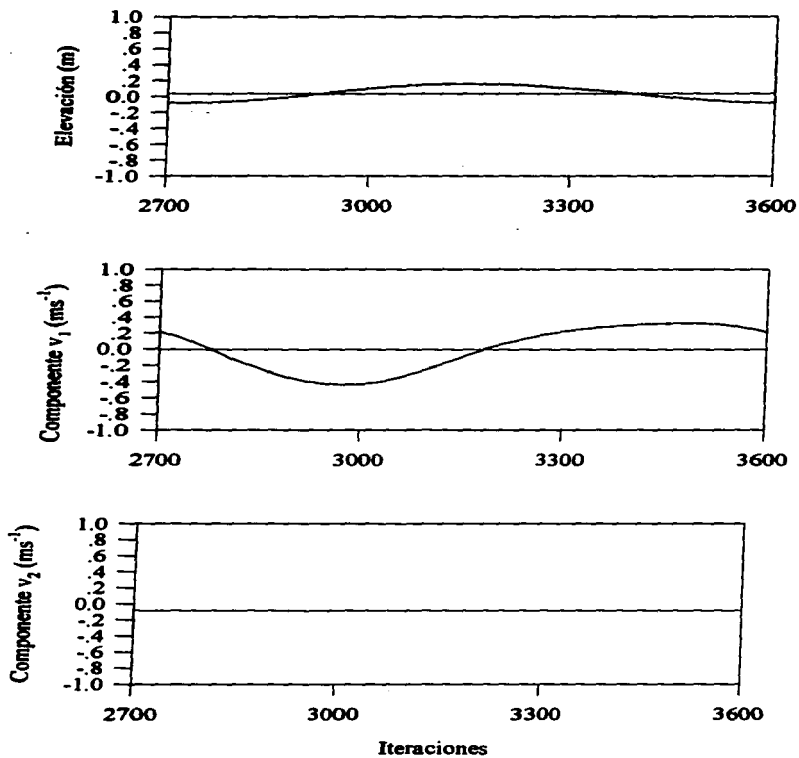


Figura 4.6 Elevación y velocidad de la marea en el punto de análisis B, en la laguna de Chacahua cerca del canal de conexión

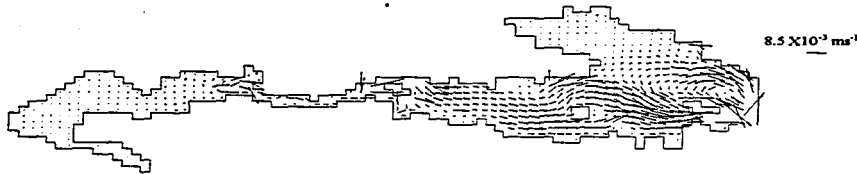


Figura 4.7 Circulación residual considerando fondo real, boca-barra de Chacahua cerrada y marea como único forzamiento.

Al considerar abierta la boca-barra de Chacahua en dirección paralela a la línea de costa en general la circulación en Pastoria se presenta muy semejante al caso anterior. Sin embargo, la circulación en el canal y en la laguna de Chacahua se ve influenciada por la apertura de la boca barra.

En el instante (a) se presenta un transporte de entrada a Chacahua que alcanza a influenciar las zonas oeste y central (Fig. 4.8a). La magnitud del transporte es aproximadamente de $0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

En contraste con el experimento descrito en la figura (4.4b) donde la marea influencia media laguna de Chacahua, en este experimento la circulación inducida por la onda de marea que entra por la boca de Cerro Hermoso y que se propaga por el canal hacia la laguna de Chacahua (Fig. 4.8b), se extiende solo sobre una tercera parte de esta última. Por otro lado, la circulación de la laguna de Chacahua inducida por la onda de marea que entra a través de su boca es similar a la circulación en el instante (a). Por su parte, el centro de la laguna de Chacahua se mantiene en reposo.

En el instante (c) la circulación en el sistema lagunar se invierte (Fig. 4.8c), observándose que el transporte desde la parte mas al este de la laguna de Chacahua hasta la boca de Cerro Hermoso es hacia el este. La parte central de la laguna de Chacahua se mantiene en reposo y su región oeste responde a la apertura de la boca barra teniendo un transporte hacia afuera del sistema lagunar.

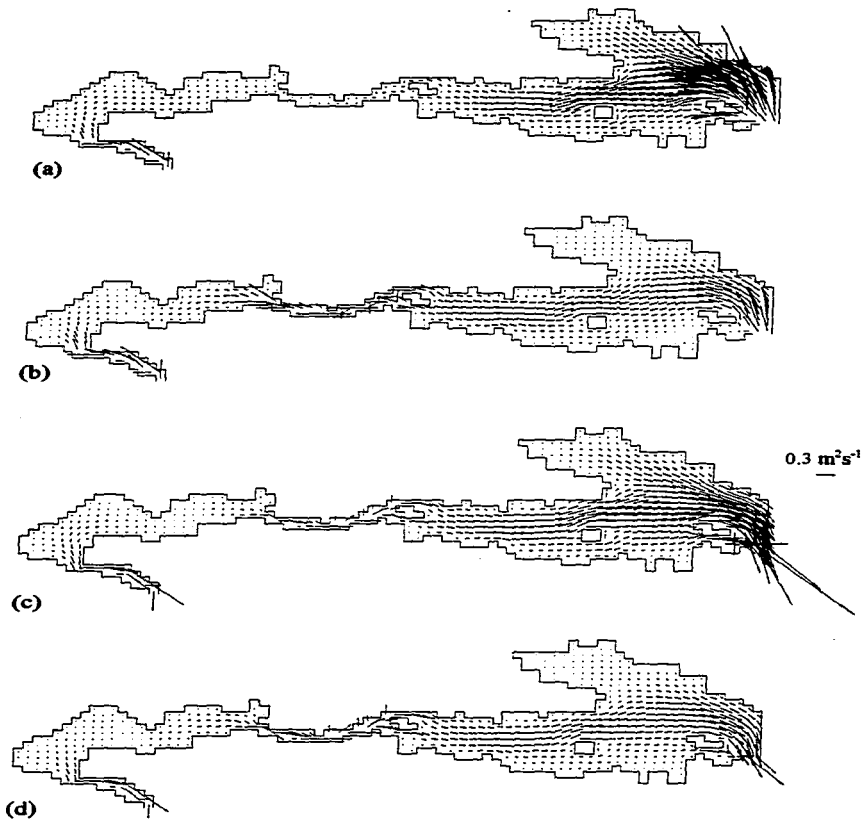


Figura 4.8 Resultados de la simulación numérica de la circulación considerando fondo real, boca-barra de Chacahua abierta y marea como único forzamiento.

A excepción del canal de conexión donde el transporte se incrementa hacia la laguna de Pastoria, la circulación en un cuarto de marea mas tarde (Fig. 4.8d) conserva el mismo patrón que en el instante (c), pero la magnitud en general decrece considerablemente.

Para este caso, la circulación residual (Fig. 4.9) refleja una velocidad neta a lo largo de todo el sistema lagunar hacia el este, incluso en la mayor parte de la laguna de Chacahua, evidenciando la asimetría del sistema. Al igual que en el caso anterior, la circulación residual de la parte norte de la laguna de Pastoria permanece casi nula.

Otro experimento propuesto es la apertura de la boca-barra de Chacahua pero en forma perpendicular a la línea de costa. Los resultados muestran que la dinámica en la zona próxima al canal de conexión se comporta en forma similar al caso donde la boca-barra se mantiene cerrada (Fig. 4.10). El efecto de tal apertura se manifiesta solo en la zona próxima a ella, produciendo velocidades residuales de aproximadamente $6 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$ (Fig. 4.11).

La apertura de la boca barra de Chacahua independientemente de la forma en que se abra no influye significativamente sobre la circulación en la laguna de Pastoria.

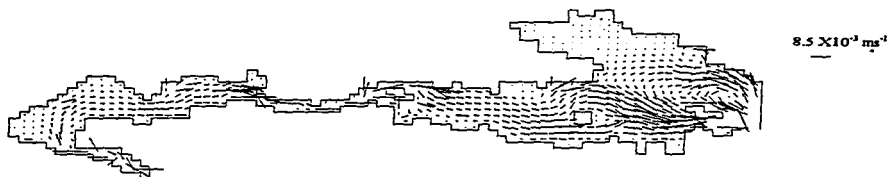


Figura 4.9 Circulación residual considerando fondo real, boca-barra de Chacahua abierta y marea como forzamiento.

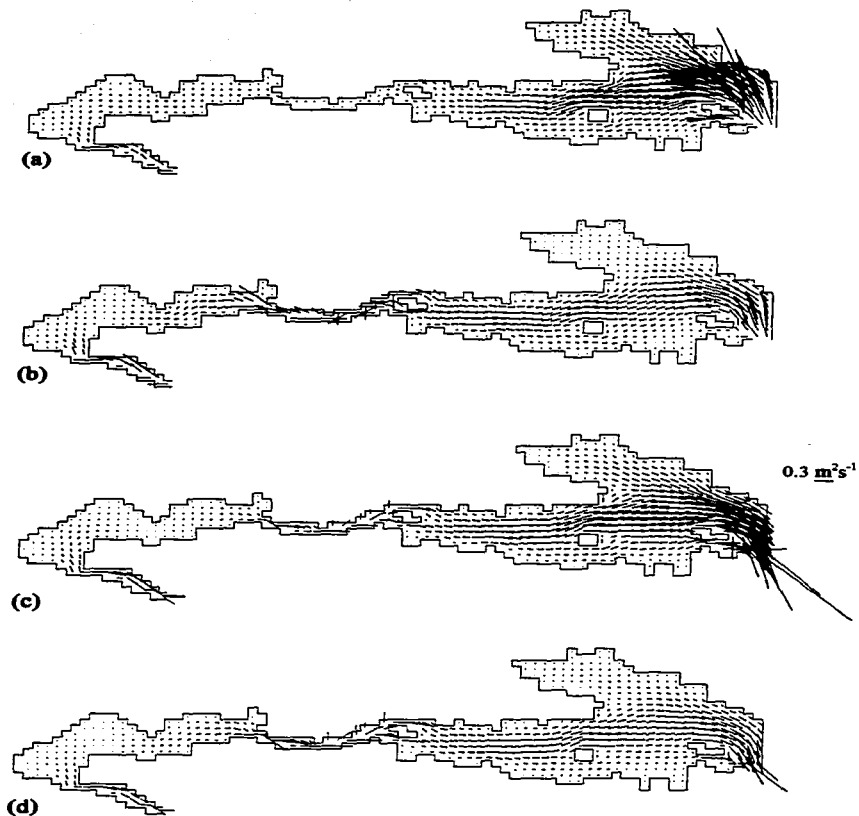


Figura 4.10 Resultados de la simulación numérica de la circulación considerando fondo real, boca-barra de Chacahua abierta en forma perpendicular a la línea de costa y marea como único forzamiento.

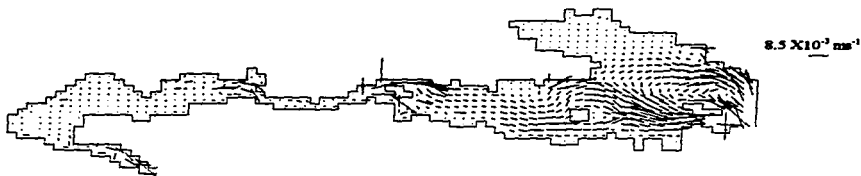


Figura 4.11 Resultados de la circulación residual considerando fondo real, boca-barra de Chacabua abierta en forma perpendicular a la línea de la costa y marea como único forzamiento.

4.2 Circulación inducida por el viento

Se realizaron dos experimentos numéricos tomando en cuenta la geomorfología del sistema lagunar, considerando al viento como único mecanismo de transmisión de energía al sistema. Dadas las dimensiones de las lagunas el viento se impuso constante y uniforme sobre toda la superficie. Los vientos reinantes en la región tienen magnitud de aproximadamente 5 m s^{-1} y dirección Noreste, presentándose vientos extremos que conservan la misma dirección pero alcanzan velocidades de hasta 13 m s^{-1} (Servicio Meteorológico Nacional; Ramón, 1995). En el primer experimento numérico se simuló la circulación debida a los vientos reinantes y en el segundo la circulación correspondiente a los vientos extremos.

De acuerdo a la evolución de las energías cinética, potencial y total para ambos experimentos el modelo alcanza la estabilidad después de 2,400 iteraciones, a partir de entonces la circulación del sistema se mantiene invariable. Cuando se impone el viento extremo (Fig. 4.12) las energías aumentan en dos ordenes de magnitud respecto a aquellas que se presentan durante los vientos reinantes.

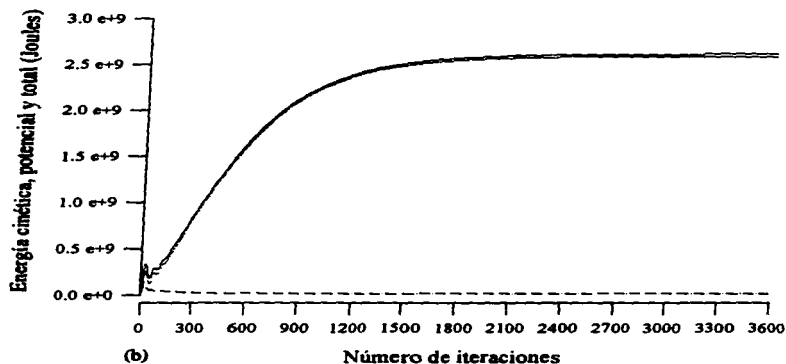
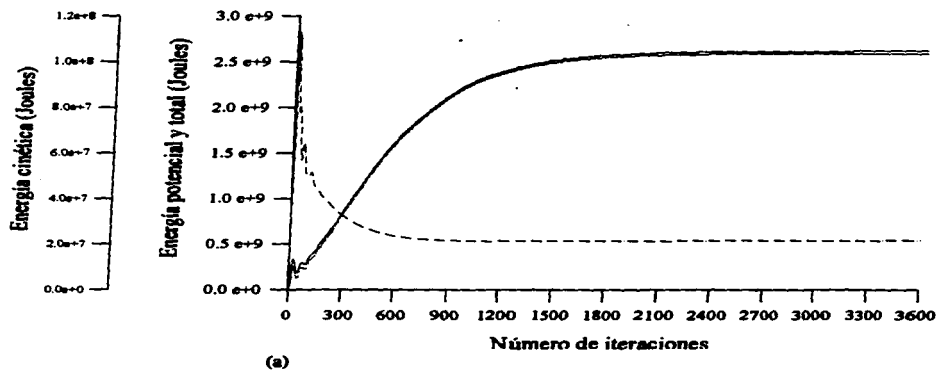


Figura 4.12 Evolución de la energía cinética (.....), potencial (.....) y total (_____), considerando solo el viento (13 m s^{-1}) como mecanismo de forzamiento y tomando en cuenta la batimetría real. Utilizando: a) diferente escala para la energía cinética, b) la misma escala para todas las energías.

El patrón de circulación inducida por el viento (Fig 4.13) presenta dos giros anticiclónicos en la parte sur-centro de la laguna de Pastoria y un giro ciclónico en la parte superior de la misma. En la periferia del giro anticiclónico mayor existe un transporte de aproximadamente $0.2 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, mientras que en la vecindad del giro ciclónico los transportes son de aproximadamente $0.15 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. El resto de la laguna se ve muy poco influenciada por este mecanismo de forzamiento.

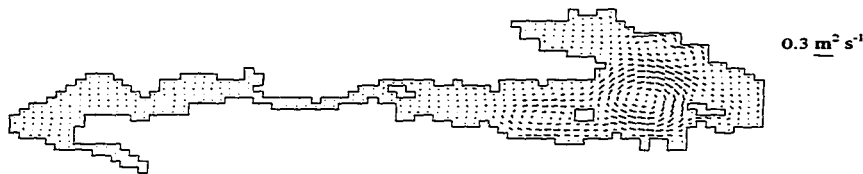


Figura 4.13 Resultados de la simulación numérica de la circulación considerando fondo real y viento como único mecanismo de forzamiento con velocidad de 13 ms^{-1} sobre el espejo de agua.

4.3 Circulación inducida por la marea y la descarga de los ríos

Se efectuaron cinco experimentos con el fin de simular la circulación del sistema lagunar inducida conjuntamente por la marea y la descarga de agua dulce al sistema.

El primero consistió en considerar la batimetría real, la boca-barra de Chacahua cerrada y un aporte de $12 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ por el río San Francisco.

Los resultados de la simulación de la corriente transitoria para este caso muestran una circulación general muy similar a la presentada en la figura (4.4) durante todo el ciclo de marea. Las diferencias son leves en la zona cercana a la descarga del río.

En el instante (a) de la marea el agua del río va en dirección de la laguna de Pastoria (Fig. 4.14a).

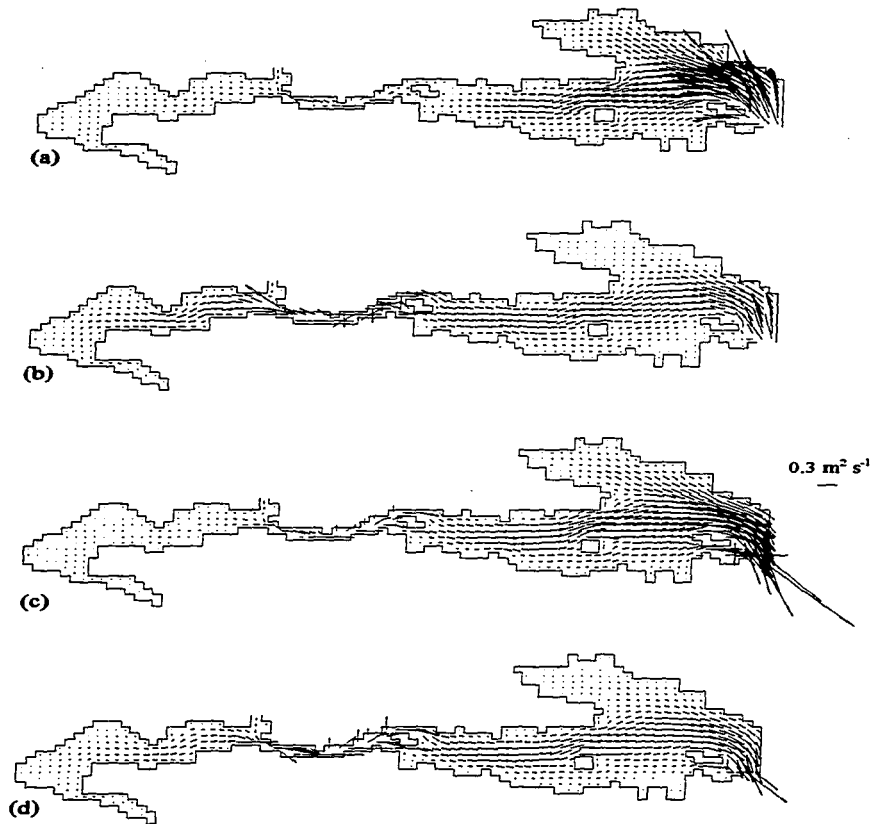


Figura 4.14 Resultados de la simulación numérica de la circulación considerando fondo real, boca-barra de Chacahua cerrada, la marea y la descarga del río San Francisco como forzamientos.

Cuando disminuye el flujo de entrada en la boca de Cerro Hermoso, en el instante (b) de la marea, el transporte en el canal y en la laguna de Chacahua se intensifican alcanzando transportes de aproximadamente $0.2 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ hacia el oeste, durante este tiempo el agua del río es transportada hacia la laguna de Chacahua (Fig. 4.14b).

En el instante (c) de la marea el transporte en todo el sistema lagunar cambia de sentido (Fig. 4.14c) dirigiéndose hacia la boca-barra de Cerro Hermoso. Nuevamente el agua del río es transportada hacia la laguna de Pastoria. Un cuarto de marea mas tarde el reflujó en la laguna de Pastoria disminuye significativamente mientras que para el canal y la laguna de Chacahua se intensifica (Fig. 4.14d).

Los resultado de la circulación residual reflejan un transporte neto del agua del río hacia la laguna de Pastoria (Fig. 4.15) manteniéndose la laguna de Chacahua y la parte norte de la laguna de Pastoria con circulación residual casi nula. Comparando estos resultados con los presentados en la figura (4.7) se observa que el aporte del río San Francisco no permite la formación del giro anticiclónico presente en la parte mas al este de la laguna de Chacahua.

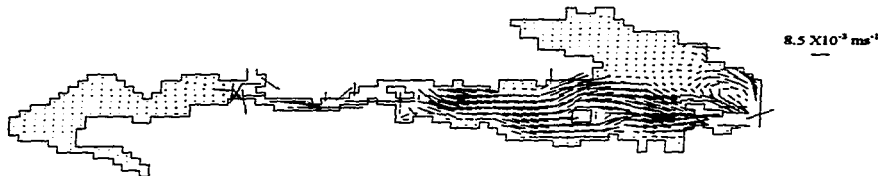


Figura 4.15 Resultados de la circulación residual considerando fondo real, boca barra de Chacahua cerrada, marea como forzamiento y aporte del río San Francisco ($12 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$).

El segundo experimento se efectuó utilizando las condiciones anteriores, además se consideró la boca barra de Chacahua abierta paralela a la línea de costa.

La circulación transitoria en general para este caso es semejante a la presentada en la figura (4.8), es decir donde se consideran las dos boca barras abiertas, fondo real pero sin aporte de agua dulce. Nuevamente la circulación solo se ve un poco modificada en la parte mas cercana a la descarga del río (Fig. 4.16). Sin embargo en la gráfica de vectores de la circulación residual (Fig. 4.17) se observa que el agua del río San Francisco ya no es completamente en dirección de la laguna de Pastoria, sino que se alcanza a distinguir una circulación residual hacia la laguna de Chacahua con magnitudes de $1.7 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$. La circulación residual en la laguna de Pastoria se conserva con las mismas condiciones del caso donde no se considera el aporte de aguas continentales (Fig. 4.9).

Bajo las mismas condiciones pero abriendo la boca-barra en forma perpendicular a la línea de la costa se realizó el tercer experimento. El patrón de circulación que se obtiene (Fig. 4.18) es semejante al presentado en la figura (4.10) en donde no se consideró aporte de ríos. Sin embargo en el esquema de la circulación residual (Fig. 4.19) se presenta en la laguna de Chacahua una circulación residual de mayor magnitud que la reportada cuando la boca-barra se abre en forma paralela a la línea de costa.

En los dos últimos experimentos de este tópico se consideraron las dos boca barras abiertas y el aporte de agua de los ríos San Francisco y Chacalapa. Dado que la Comisión Nacional del Agua destina solo $13 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ para el sistema lagunar, y que existe una perdida de aproximadamente un metro cúbico por segundo, los gastos propuestos fueron de $8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ para el río San Francisco y de $4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ para el río Chacalapa.

La diferencia entre ambos experimentos reside en la orientación de la boca-barra de Chacahua. En el primer caso se considera en forma paralela a la línea de costa y en el otro caso perpendicular a ella.

El efecto de los ríos en la circulación transitoria se manifiesta solamente en las regiones próximas a las desembocaduras (Figs. 4.20 y 4.21). Sin embargo, al promediar las velocidades sobre cinco ciclos de marea, se muestra una circulación residual mas importante en la laguna de Chacahua para el caso donde la boca-barra se abre en forma perpendicular (Figs. 4.22 y 4.23).

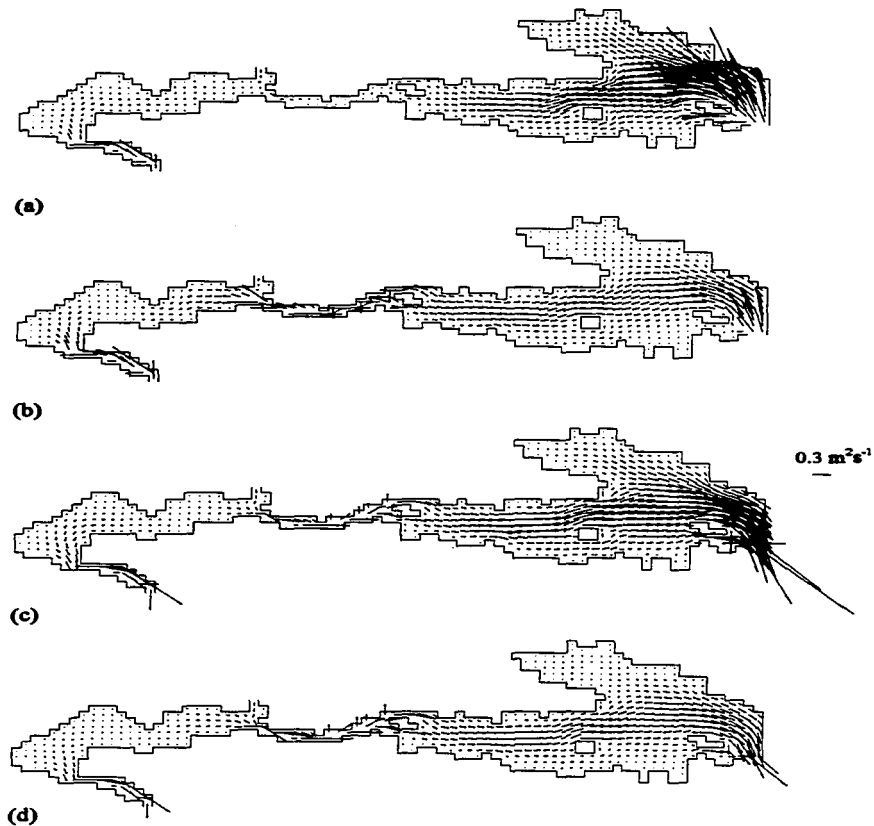


Figura 4.16 Resultados de la simulación numérica de la circulación considerando fondo real, boca-barra de Chacahua abierta, marea como forzamiento y con aporte de agua dulce al sistema del río San Francisco ($12 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$).

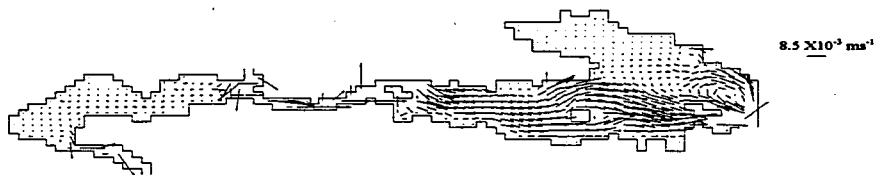


Figura 4.17 Resultados de la circulación residual considerando fondo real, boca-barra de Chacahua abierta, marea como forzamiento y aporte de agua dulce al sistema por el río San Francisco ($12 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$).

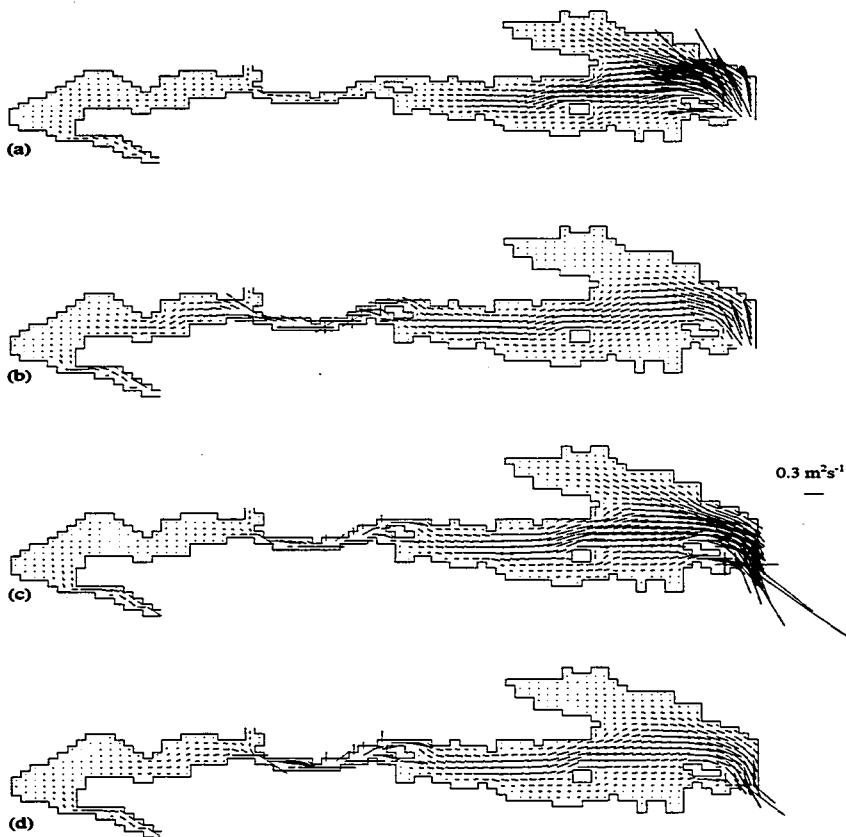


Figura 4.18 Resultados de la simulación numérica de la circulación considerando fondo real, boca-barra de Chachhua abierta en forma perpendicular a la línea de la costa, marea como forzamiento y aporte de agua del río San Francisco con un flujo constante de $12 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

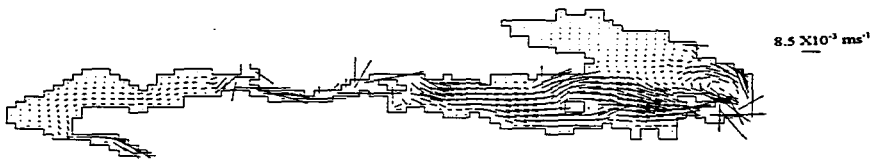


Figura 4.19 Circulación residual considerando fondo real, boca-barra de Chacahua abierta en forma perpendicular a la línea de costa, aporte del río San Francisco ($12 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) y marea como forzamiento.

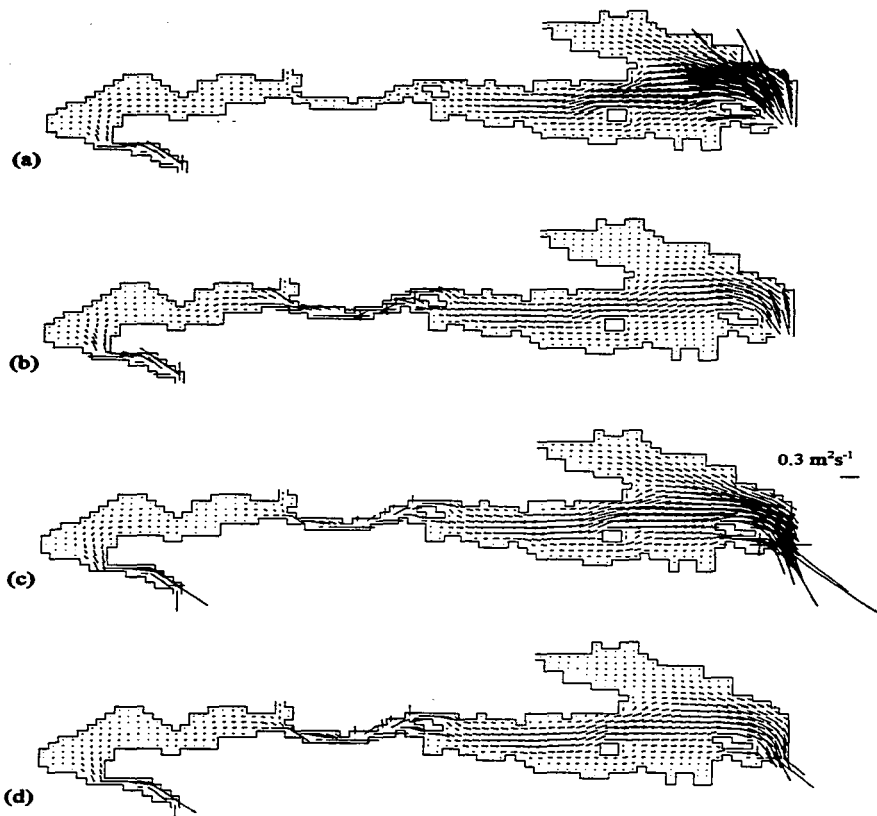


Figura 4.20 Resultados de la simulación numérica de la circulación considerando fondo real, boca-barra de Chacahua abierta, marea como forzamiento y aporte de agua dulce al sistema por los ríos San Francisco ($8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) y Chacalapa ($4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$).

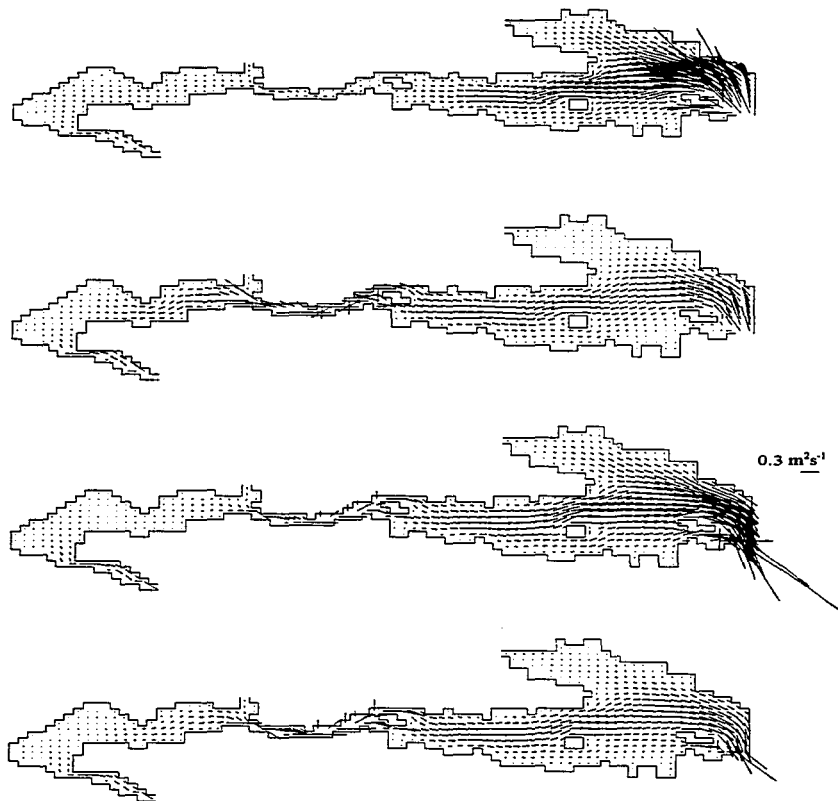


Figura 4.21 Resultados de la simulación numérica de la circulación considerando fondo real, boca-barra de Chacahua abierta en forma perpendicular a la línea de costa, marea y aporte de agua por los ríos San Francisco ($8\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$) y Chacalapa ($4\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$) como forzamientos.

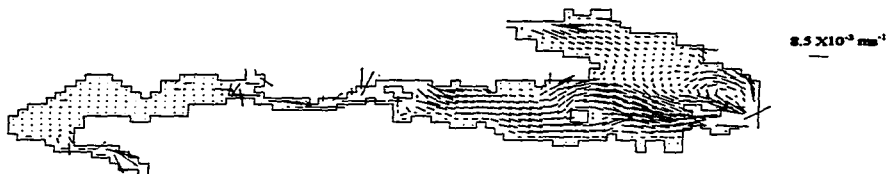


Figura 4.22 Resultados de la circulación residual considerando fondo real, boca-barra de Chacahua abierta en forma paralela a la línea de costa, marea y aporte de los ríos San Francisco ($8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) y Chacalapa ($4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) como forzamiento.

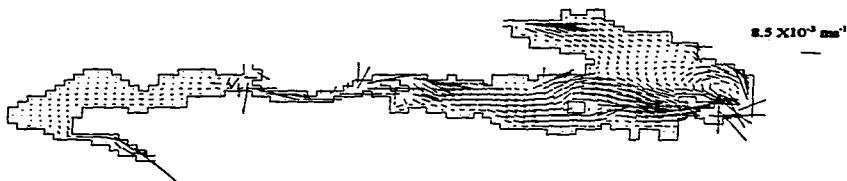


Figura 4.23 Resultados de la circulación residual considerando fondo real, boca-barra de Chacahua abierta en forma perpendicular a la línea de costa, marea y aporte de los ríos San Francisco ($8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) y Chacalapa ($4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) como forzamientos.

4.4 Circulación inducida por la marea, descarga de ríos y viento

El efecto conjunto de la marea, de la descarga de ríos y del viento sobre la circulación del sistema se analizó tomando todas las fronteras abiertas con aporte de $8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ por el río San Francisco y $4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ por el río Chacalapa y viento con velocidad de 5 m s^{-1} .

La circulación transitoria inducida por los tres mecanismos en conjunto muestra que el factor determinante en la dinámica del sistema es la marea (Fig. 4.24). Sin embargo la circulación residual evidencia algunos cambios después de promediar las velocidades (Fig. 4.25). En general la circulación residual se manifiesta en todo el sistema lagunar, intensificándose los giros. La circulación en Chacahua se intensifica con dirección hacia el oeste y hacia afuera.

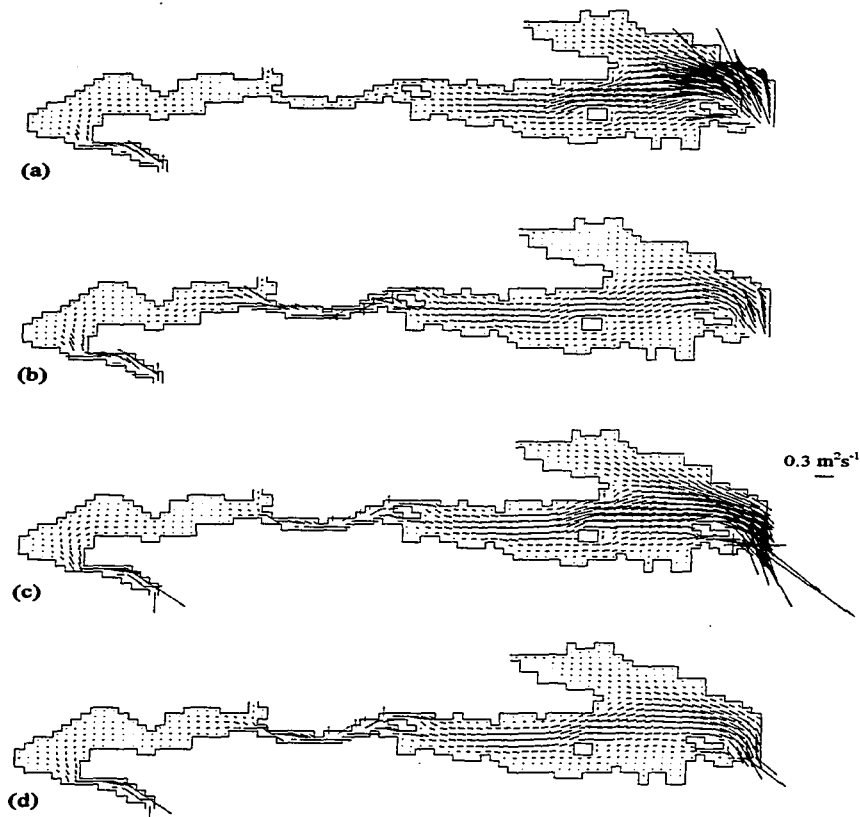


Figura 4.24 Resultados de la simulación numérica de la circulación considerando fondo real, boca-barra de Chacahua abierta y la marea, el viento (5 m s^{-1}) y los aportes de los ríos San Francisco ($8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) y Chacalapa ($4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) como mecanismos de forzamiento.

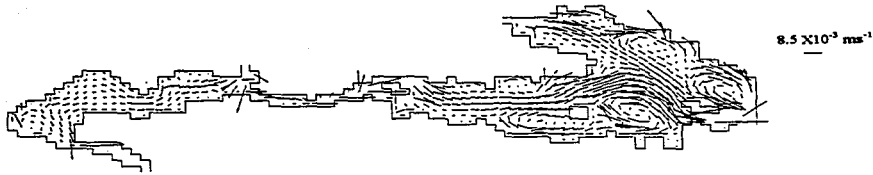


Figura 4.25 Resultados de la circulación residual considerando fondo real, boca-barra de Chacahua abierta, marea, viento (5 m s^{-1}) y aportes de agua dulce por los ríos San Francisco ($8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) y Chacalapa ($4 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) como mecanismos de forzamiento.

4.5 Efecto de la batimetría

Para el análisis de este parámetro se consideró la boca-barra de Chacahua cerrada, un fondo uniforme de 4 m de profundidad en todo el sistema lagunar y la marea como único mecanismo de forzamiento. Para este ensayo en el inciso (a) de la figura (4.26) se gráfica el instante de flujo máximo en la boca de Cerro Hermoso. La laguna de Pastoria presenta transportes del orden de $0.3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ en la parte oeste, dicho transporte se incrementa hacia el este. Por otro lado en el canal se reportan transportes del orden de $0.4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, mientras que en la laguna de Chacahua solo se observa movimiento en la parte mas cercana al canal con transportes de aproximadamente $0.2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, y mas pequeños conforme nos alejamos del canal. Un cuarto de marea mas tarde, (Fig. 4.26b) el transporte en la boca de Cerro Hermoso es mínimo, situación que se refleja en la parte norte y este de Pastoria. La circulación en el canal y de la laguna de Chacahua se ven incrementados alcanzando transportes de $0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ y $0.3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ en promedio respectivamente.

En el instante (c) de la marea, se presentan velocidades máximas en la boca de Cerro Hermoso, solo que esta vez en refluo. La circulación en todo el sistema lagunar cambia de dirección dirigiéndose hacia el este. El transporte en la laguna de Chacahua es del orden de $0.15 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ y va en aumento hacia el este alcanzando su máximo ($3.2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) en la laguna de Pastoria la cual presenta velocidades de 0.8 m s^{-1} . Cuando la velocidad en la boca de Cerro Hermoso disminuye nuevamente (Fig. 4.26d), la circulación en el canal y en la laguna de Chacahua presentan magnitudes de transportes similares al instante anterior.

En comparación con el primer experimento reportado en este escrito (Fig. 4.4), el cual se desarrolló bajo estas mismas condiciones pero con batimetría real, se tiene que el efecto de asimetría se conserva, solo que el defase es menor. El retraso de la onda de marea entre la boca-barra de Cerro Hermoso y la laguna de Chacahua disminuye, además de incrementar su influencia sobre esta. Sin embargo al analizar la circulación residual para el caso de fondo plano (Fig. 4.27), se tiene que para la laguna de Chacahua no se presenta ninguna diferencia con respecto al fondo real, en tanto que en la laguna de Pastoria ésta disminuye.

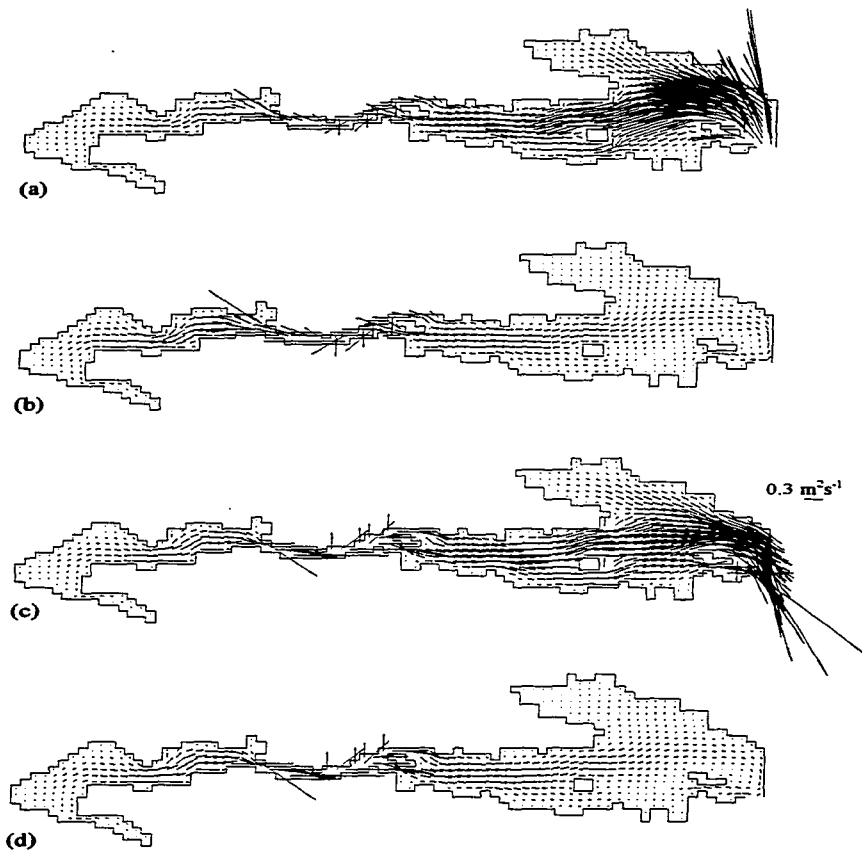


Figura 4.26 Resultados de la simulación numérica de la circulación considerando fondo plano, boca-barra de Chacahua cerrada, marea como forzamiento.

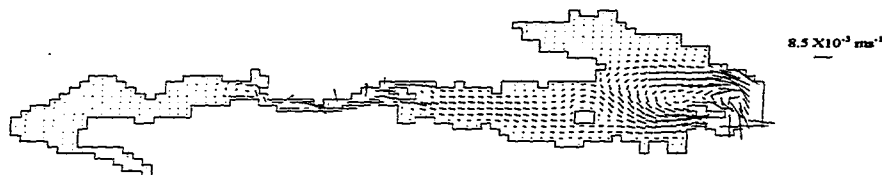


Figura 4.27 Resultados de la circulación residual considerando fondo plano, boca barra de Chacahua cerrada, marea como forzamiento.

DISCUSIONES

En este estudio se simuló la respuesta del sistema lagunar Chacahua-Pastoría ante diferentes tipos de forzamientos, los cuales son: marea, aporte de agua de los ríos y vientos. Ante la posibilidad de la apertura de la boca-barra de Chacahua, se simuló la circulación teniendo en cuenta dos orientaciones de la misma, una paralela a la línea de costa y otra perpendicular.

El modelo llega a su estabilidad estadística después de 2,400 interacciones (33.12 h) cuando es forzado por viento y después de 1,800 iteraciones (2 ciclos de M_2) en todos los demás casos. Esto muestra la enorme consistencia y estabilidad del esquema numérico usado.

La circulación inducida solo con marea, usando batimetría real y manteniendo la boca-barra de Chacahua cerrada, presenta los valores máximos del transporte en la laguna de Pastoría, siendo estos de $0.25 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. La circulación residual considerada muestra la existencia de un giro ciclónico, o zona de divergencia positiva de la circulación transitoria, próximo a la isla de las Piñuelas. La circulación residual, en general, es en dirección a la boca de Cerro Hermoso, y los valores máximos son de $8.5 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$, estando estos cerca de la boca de Cerro Hermoso.

Cuando se abre la boca de Chacahua en forma paralela a la línea de costa los resultados son muy similares a los obtenidos en el caso anterior, siendo la única diferencia un pequeño aumento de la magnitud de la circulación en la laguna de Chacahua. Sin embargo, la circulación residual sigue siendo hacia la boca de Cerro Hermoso incluso en la laguna de Chacahua.

Al imponer una apertura de la boca de Chacahua en dirección perpendicular a la línea de costa la circulación residual no mejora en gran medida, esto en relación al caso cuando se considera la boca-barra cerrada. solo se ve beneficiada la zona próxima a dicha boca-barra.

El viento como único mecanismo de forzamiento produce la aparición de dos giros anticiclónico, ambos en la laguna de Pastoría cuyos transportes son de 0.2 a $0.15 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ en sus periferias.

El resultado del modelo que incluye descarga de agua dulce en el sistema, muestra que dicho forzamiento no es de gran importancia para incrementar la circulación transitoria, pero se puede decir que es fundamental en términos de saneamiento del sistema y para mejorar las condiciones de los hábitats que requieren ciertas especies estuarino-dependientes, como lo es el camarón.

Cuando se considera solo la boca-barra de Cerro Hermoso abierta y la marea como forzamiento, en los flujos transitorios se observa la influencia de la laguna de Pastoria sobre la circulación en la laguna de Chacahua, sin embargo se tiene que la circulación residual en esta última es casi nula.

Una de las propuestas planteadas para mejorar la circulación transitoria y residual en la laguna de Chacahua es considerar un aporte de $12 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ del río San Francisco, río que desemboca en la laguna de Chacahua. Sin embargo, los experimentos numéricos desarrollados reflejaron que el canal de conexión entre ambas lagunas funciona como un sifón, el cual transporta el agua dulce hacia la laguna de Pastoria, situación que se agrava por la localización de la desembocadura del río San Francisco, muy próxima a este canal, lo que ocasiona que la laguna de Chacahua prácticamente no reciba ningún beneficio de esta descarga.

El considerar un aporte de agua dulce a la laguna de Chacahua, no mejoró notablemente la circulación; de ahí la propuesta de abrir la boca-barra de Chacahua.

De los dos ensayos realizados para la apertura de esta boca-barra, se observa que la mejor opción sin aporte de agua dulce al sistema, es cuando la boca se abre en forma paralela a la línea de la costa, ya que cuando la boca-barra de Chacahua se abre con esta orientación, la circulación residual es hacia el este, mientras que cuando es abierta en forma perpendicular a la línea de la costa la circulación residual de la laguna de Chacahua vuelve a ser prácticamente nula con excepto de la zona próxima a la boca-barra.

Al imponer un aporte de agua dulce al sistema mediante el río San Francisco y la apertura de la boca-barra de Chacahua, se observa una mejor circulación en esta laguna, tanto para el caso cuando se abre la boca-barra en forma paralela como cuando se abre en forma perpendicular a la línea de la costa. El flujo residual en la laguna de Chacahua en ambos ensayos es hacia su boca-barra, lo que originaría un recambio más eficiente de agua.

Sin embargo, se tiene una mejor circulación residual cuando se considera la orientación de la boca-barra perpendicular a la línea de costa.

Otra zona con poca circulación transitoria y casi nula circulación residual es la parte norte de la laguna de Pastoría. Una forma de mejorar esta situación es imponiendo un gasto constante en el río Chacalapa, río que desemboca en esta parte de la laguna. Sin embargo, como el gasto destinado para el sistema lagunar es de $13 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$, el aporte del río San Francisco tendría que disminuir. Dicha situación genera nuevamente un problema en la circulación residual en la laguna de Chacahua.

De acuerdo a las simulaciones numéricas se tiene que la mejor opción para la circulación en la parte alta de la laguna de Pastoría y la laguna de Chacahua, es considerar la apertura de la boca-barra de Chacahua en forma perpendicular a la línea de la costa en conjunto con el aporte de $12 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ al sistema lagunar, inyectándose $8 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ del río San Francisco y $4 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ del río Chacalapa. Si se disminuye más el aporte del río San Francisco la circulación residual en la laguna de Chacahua tenderá a ser nula nuevamente.

El retraso de la onda de marea entre la laguna de Pastoría y la Laguna de Chacahua es de más de dos horas en el caso cuando la boca-barra de Chacahua permanece cerrada. Este retraso es debido a la morfología principalmente a la batimetría. La elevación y la corrientes dentro del sistema lagunar no son ondas senosoidales perfectas, sino que exhiben una asimetría o distorsión de las elevaciones y de las corrientes entre el flujo y el reflujo. Estas formas son debidas tanto a la presencia de componentes de alta frecuencia (overtides), generadas por las interacciones no lineales (Bowden, 1983) como a la fricción con el fondo.

En este sistema lagunar en específico, las interacciones no lineales generan un tiempo de reflujo mayor con velocidades menores con respecto al tiempo de flujo en el cual las velocidades son mayores, mostrando un defase entre la elevación y la velocidad menor a 90° . En referencia a la componente de marea M_2 este defasamiento es de 2.4 h (70°) aproximadamente cuando se considera la batimetría real en el modelo, esta última situación es concordante con lo reportado en la literatura (Friedrichs *et al.*, 1990). La asimetría en conjunto con la geomorfología en este sistema lagunar ocasiona un efecto de sifón.

Ledesma (1990) reporta la formación de un delta interno en la boca-barra de Cerro Hermoso, lo que conlleva al azolve de la misma. Presumiblemente este se debe a la

diferencia entre los tiempos de entrada y salida de la onda de marea y a la diferencia de la rapidez entre el flujo y el reflujo, dado que son más débiles las de reflujo. Lo que finalmente se resume en el efecto de la asimetría en la boca-barra. Dicha asimetría se refleja en las mediciones *in situ* ya que se tiene que el tiempo de entrada de la onda de marea por la boca de Cerro Hermoso es de 5 horas aproximadamente, mientras que el tiempo de reflujo es de 7 horas.

De los ensayos numéricos se encontró una buena concordancia con esta asimetría, así como con las magnitudes de las velocidades medidas.

De los tres mecanismos que se impusieron como generadores de la circulación transitoria en este sistema lagunar, se tiene que el de mayor importancia es la marea. La circulación inducida por el viento así como la inducida por la descarga de los ríos es significativa en períodos largos, es decir, en la circulación residual o circulación a largo plazo.

La circulación residual es la responsable del transporte neto de las partículas en suspensión, por lo que en este aspecto el efecto del viento y la descarga de ríos juega un papel importante en el saneamiento del sistema lagunar.

Del último experimento efectuado en este trabajo, el cual fue planteado para analizar el efecto de la batimetría, se tiene que esta es importante en la determinación del patrón de circulación. En los dos casos considerados: fondo plano y fondo real, se presentan las asimetrías y retrasos mencionados anteriormente. En el caso con fondo plano la influencia de la laguna de Pastoría sobre la de Chacahua se intensifica, observándose un menor retraso entre la boca de Cerro Hermoso y la entrada a la laguna de Chacahua por el canal que conecta ambas lagunas.

El defasamiento entre la máxima elevación y la máxima rapidez de la corriente es de 2.7 h cuando se tiene fondo plano. Por otro lado la circulación residual en la laguna de Pastoría disminuye y conservándose casi nula en la laguna de Chacahua. El efecto de la batimetría se manifiesta en un menor defasamiento entre la elevación y la velocidad y un mayor retardo de la onda de marea, debido a que su velocidad de fase disminuye al disminuir la profundidad.

La asimetría de las mareas juega un papel muy importante en el transporte de sedimentos y en general en la evolución geomorfológica de cuerpos costeros con longitudes de aproximadamente 20 km y amplitudes de marea mayores o iguales a 0.1 m (Friedrich *et al.*, 1990). Esto es debido fundamentalmente a las características no lineales de los flujos inducidos por la marea. Si suponemos que el transporte de sedimentos es una función geométrica de las velocidades del sistema, entonces la dirección del transporte será la misma que la del campo de velocidades (Meyer-Peter y Muller, 1948).

La circulación residual es el resultado de la asimetría del campo de velocidad (Salas de León, 1986). Las corrientes de marea al interactuar con la línea de costa, con el fondo de la cuenca y al ser modificadas por los vientos, responden en forma no lineal, resultando en un esquema asimétrico, dichas condiciones tienden a producir depositación de material en suspensión o resuspensión en los cuerpos estuarino-lagunares.

El sistema lagunar Chacahua-Pastoria presenta una fuerte asimetría en sus velocidades, lo cual indica que es un cuerpo inestable, con propensión a generar regiones de bajos en su interior; tal como lo es el delta interno de Cerro Hermoso, y a cerrar sus bocas. Ante dichas condiciones el mantener abierta la boca-barra y navegable el sistema, aunque sea para pequeñas embarcaciones, implica la inversión constante de recursos para el dragado de las bocas y la inyección periódica de grandes cantidades de agua dulce.

CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos se concluye que:

La circulación transitoria del sistema lagunar Chacahua-Pastoria es dominada por la marea. Sin embargo la descarga de agua dulce y el viento son importantes para mantener sano el sistema, ya que estos son significativos en la circulación residual.

Cuando la boca-barra de Chacahua se considera cerrada y no existe aporte de agua dulce por los rios, la circulación residual en la laguna de Chacahua es casi nula.

La onda de marea a través de la boca de Cerro Hermoso presenta una asimetría, empleando menor tiempo y mayor rapidez en el flujo que en el reflujó, dando origen a un delta interno.

Cuando se considera cerrada la boca-barra de Chacahua, la onda de marea presenta un retardo de más de dos horas entre la boca barra de Cerro Hermoso y el final del canal de conexión.

El aporte del río San Francisco sobre la laguna de Chacahua tendrá efecto sobre esta solo si la boca de Chacahua es abierta, de otro modo el agua será transportada a la laguna de Pastoria debido al canal de conexión entre ambas lagunas que funciona como un sifón.

En general la hidrodinámica de la laguna de Chacahua mejora cuando la boca-barra se abre en forma perpendicular a la línea de costa y se mantiene un aporte de agua dulce de $12 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ del río San Francisco.

Al considerar un aporte de agua dulce del río Chacalapa de $4 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ y de $8 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ del río San Francisco y la apertura de la boca-barra en forma perpendicular a la línea de costa, la

circulación en la laguna de Chacahua y en la parte norte de la laguna de Pastoria se ven considerablemente beneficiadas.

No basta con solo alimentar a la Laguna de Chacahua de agua dulce o con solo abrir la boca-barra de Chacahua para mejorar la circulación y por lo tanto su saneamiento, sino que es necesario su acción conjunta para mantener el sistema en buenas condiciones.

LITERATURA CITADA

- Aldeco, J. y D.A. Salas de León (1994). Física. En: *Lagunas Costeras y el litoral Mexicano. De la Lanza Espino, G. y C. Cáceres Martínez, Eds. 525 pp.*
- Alvarez Arellano, A.D. y J. Gaitán Moran (1994). Geología. En: *Lagunas Costeras y el litoral Mexicano. De la Lanza Espino, G. y C. Cáceres Martínez, Eds. 525 pp.*
- Barón Sevilla, B. (1988). Contribución al conocimiento de la biología de *Mugil curemal* (Valenciennes) en el sistema lagunar Chacahua-Pastoria, Oax. Tesis de Licenciatura en biología ENEPI-UNAM. 78 pp.
- Batchelor, G.K. (1977). *An introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press. 615 pp.*
- Bowden, K.F. (1983). *Physical Oceanography of Coastal Waters. Halsted Press. 302 pp.*
- Carranza Edwards, A., M.Gutierrez Estrada y R.G. Rodriguez (1975). Unidades Morfo-Tectónicas continentales de las Costas Mexicanas. *An. Inst. Cien. del Mar y Limn. Univ. Nac. Auton. México 2(1):81-88*
- Carranza-Edwards, A., L. Rosales Hoz y R. Lozano Santa Cruz (1988). Estudio sedimentológico de playas del estado de Oaxaca, México. *An. Inst. Cienc. del Mar y Limnol. Univ. Nal. Autón. México, 15(2):23-38.*
- Cruz, L.J., T.F. Ibarra y J.L. Gómez (1985). Estudio del espectro trófico de cuatro especies ictioplanctónicas en la laguna de Chacahua, Oax., México. *Mem. VIII congreso Nal. de Zool. Escuela Superior de Saltillo, Coahuila.*
- Fletcher, C.A.J. (1991). *Computational Techniques for Fluid Dynamics. Springer-Verlag. 401 pp.*
- Friedrichs, C.T., D.R. Lynch y D.G. Aubrey, 1990. Velocity asymmetries in frictional dominated tidal embayments: Longitudinal and lateral variability. En *Dynamics and Exchanges in Estuaries and the coastal zone, D. Prandle De. Coastal and Estuarine Studies. American Geophysical Union. 647 pp.*
- García, E. (1970) Modificaciones al Sistema de Clasificación Climática de Köppen para adaptarlo a las condiciones de la República Mexicana. *Apuntes de meteorología, 1ª Ed. UNAM, 252 pp.*
- González, R.G. (1985) Contribución de los Chaetognatha del Golfo de Tehuantepec. Tesis de Licenciatura. *Fac de Ciencias, UNAM. 68 pp.*

- INEGI, Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (1989). Datos básicos de geografía de México. Secretaría de Programación y Presupuesto México.**
- INEGI Instituto Nacional de Estadística, Geografía e informática (1989). Cartas topográficas y geológicas escalas 1:250 000.**
- Kjerfve, B. y C. Medeiros (1989). Current Vanes for Measuring Tidal Currents in Estuaries. Estuarine, Coastal and Shelf Science. 28, 87-93.**
- Kreeke, J. (1988) Dispersion in shallow estuaries. Hydrodynamics of Estuaries. Vol. I. Ed. Kjerfve. B., C.R.C. press. 27-39 pp.**
- Landau, L. y E. Lifchitz, (1971). Physique théorique. Éditions Mir Moscou. 752 pp.**
- Ledesma Vázquez J., V.R. Castro Valdés, G. Torres Moye y D. Ortega del Valle (1992). Diagnóstico del transporte sedimentario para tres lagunas costeras en el estado de Oaxaca. En memorias del IX Congreso Nacional de Oceanografía, 246 pp.**
- Madrigal U.D. (1986). Hábitat y uso del suelo como indicadores de la problemática del Parque Nacional Lagunas de Chacahua, Oaxaca. Tesis UNAM, México. 172 pp.**
- Martínez, P.J.A., (1980). Contribución al conocimiento del ictioplancton de la Laguna costera de Chacahua, Oax. Tesis de Licenciatura en biología, ENEPI-UNAM. 45 pp.**
- Meyer-Peter, E. y R. Muller (1948). Formulas for bedload transport. Proceeding of the Second Meeting, International Association of Hydraulic Research. Stockholm, Sweden 39-64 p.**
- Monreal Gómez, M.A. (1985) Modelisation du mode barotrope et du premier mode barocline dans le Golfe du Mexique. Tesis doctoral. Université de Liege Faculté des Sciences.**
- Monreal Gómez, M.A. y D.A. Salas de León (1985). Barotropic and Baroclinic modes in The Gulf of Mexico. In progress in Belgian Oceanographic Research. E Van Kriek and R. Wollast. De. University of Antwerpen Press.**
- Nihoul, J.C.J. (1994). Do not use a simple model when a complex one will do. J. Marine Systems. (5) 6, 401-406.**
- Nihoul, J.C.J. (1997). Modèles mathématiques et dynamique de l'environnement, Ele Plul., Liège 198 pp.**
- Officer C.B. (1976). Physical Oceanography of Estuaries (and Associated Coastal Waters). Wiley-Interscience. 465 pp.**

- Pond, S. y G.L. Pickard (1983). *Introductory Dinamyc Oceanography*. Pergamon Internacional Library. Great Britain. 241 pp.
- Ramming, H.G. y Z. Kowalik (1980). *Numerical Modelling of Marine Hydrodynamics*. Elsevier Scientific Publishing Company. New York, 197 pp.
- Ramón Díaz, M.A. (1995). *Alternativas de apertura en la boca de la laguna de Chacahua, Oaxaca, México*. Tesis de Licenciatura de la Fac. de Ciencias Marinas de la UABC, México. 106 pp.
- Roache, P.J. (1980). *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa Publishers. Albuquerque, New Mex. 444 pp.
- Rosenberg, D.U.V. (1969). *Methods for the numerical solution of partial differential equations*. American Elsevier Publishing Company. New York, USA. 128 pp.
- Salas de León, D.A., (1986) *Modele de mareé et circulation residuelle dans le Golfe du Mexique*. Tesis doctoral. Universida del estado de Lieja, Bélgica.
- Secretaria de Pesca (1990). *Bases para el ordenamiento costero-pesquero de Oaxaca y Chiapas (Aspectos generales)*. Inst. Nal. de la Pesca. Dirección General de Acuicultura. México D.F.
- Soza, J. (1937). *El parque Nacional "Chacahua", en el estado de Oaxaca, México*. Bol. Dpto. Forestal de Caza y Pesca, 3(8):263-298 pp.
- SRH, Secretaria de Recursos Hidráulicos (1976). *Atlas del agua de la República Mexicana*.
- IGOFIS, Instituto de Geofísica de la UNAM. (1985). *Tablas de predicción de mareas para Puertos del Oceano Pacifico 1985. Datos Geofisicos serie A Oceanografia*. Instituto de Geofisica- UNAM. 399 pp.
- Tellez Velasco, M.A.A. (1983). *Estudio Prospectivo de algunos aspectos hidrológicos en un sistema Lagunar Costero de Oaxaca, Mex. VII, Congreso Nal. de Zool.*
- Toedoro, S.M.E. y J. Ortiz O. (1990). *Algunos aspectos ecológicos del zooplancton en las lagunas de Chacahua y Pastoria, Oaxaca*. Res. VIII Cong. Nal. Oceanogr. 147 pp.
- TIA, Técnica Informática Aplicada S.A. de C.V. (1994). *Resumen Plan de Manejo Integral Parque Nacional Lagunas de Chacahua, Oax. Contrato no. SDS-BM-IN-OAX-016-93*.
- Torres Moye, G., J.Ledesma Vázquez, R.Castro Valdés, y D. Ortega del Valle (1993). *Tidal inlet closure effects on tree coastal lagoons*. En Ferman Almada J.L., L.G.M. Fuentes, D.W. Fischer. (Eds.). *Coastal Management in Mexico: The Baja California Experience*. American Society of Civil Engineers. 156-164.

- Uncles, R.J. (1988). Tidal dynamics of estuaries. Vol. I. Ed. Kjerfve. B., C.R.C. Press. 59-73 pp.
- Vega Rojas, E.J. (1971). Algunos aspectos de importancia biológica del Parque Nacional Lagunas de Chacahua. Tesis de Licenciatura en biología, Fac. de Ciencias UNAM. 66 pp.
- Velasco Mendoza, H. (1994). Modelo Numérico de Circulación para la Bahía de Campeche. Tesis de Maestría UACPyP-CCH UNAM, México, 154 pp.
- Von Schwind, J.J. (1980). Geophysical Fluid Dynamics. Prentice Hall, Inc. New Jersey. 307 pp.
- Westerink J., J. K. D. Stolzenbach y J.J. Conner (1985). A frequency domain finite element model for tidal circulation. Energy Laboratory Report No. MIT-EL85-006.
- Zárate, Vidal. S. (1986). Algunos aspectos ecológicos de ictioplancton de las lagunas de Chacahua-Pastoria, Oax. Tesis de Licenciatura en biología FESZ UNAM. 121 pp.

APÉNDICE A

MODELO MATEMÁTICO

En este apéndice se dan las bases hidrodinámicas del modelo con la finalidad de esbozar física y matemáticamente el problema. Se analizan las fuerzas que actúan en las lagunas y las aproximaciones adoptadas.

A.1 Ecuaciones básicas

Las ecuaciones básicas en la hidrodinámica de fluidos geofísicos resultan de la aplicación de los principios de conservación de masa y de momentum.

A.1.1. Ecuación de continuidad

La conservación de la masa, especifica que la cantidad de masa que entra menos la cantidad de masa que sale en un volumen determinado, es igual al cambio de masa en el interior de dicho volumen. Matemáticamente se puede escribir como (e.g. Batchelor, 1977):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad \text{o bien:} \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Esta ecuación es conocida como ecuación de continuidad. La variación debida a la advección está representada en el segundo término de la primera ecuación.

La aproximación de Boussinesq consiste en considerar que en el océano existe una pequeña diferencia entre la densidad (ρ) del agua de mar y un valor de referencia (ρ_0), la cual es denotada por ρ' . Por lo que la densidad puede ser escrita como $\rho = \rho_0 + \rho'$ donde $\rho' \ll \rho_0$, y debido a que $\frac{|\rho'|}{\rho_0} \leq 10^{-2}$ la ecuación (A.1) se transforma en

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Por otro lado, cuando la densidad de un elemento de fluido no es afectada por cambios en la presión se dice que el fluido es incompresible. La densidad del fluido de un

elemento de masa, también puede cambiar como consecuencia de la conducción molecular de calor y de sal. Sin embargo, estos efectos de conducción molecular son despreciables, por lo tanto la densidad del elemento de fluido permanece constante, indicando que en un fluido incompresible la razón de cambio de la densidad siguiendo el movimiento es cero.

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Con lo cual la ecuación de continuidad bajo la aproximación de Boussinesq se reduce a la condición de incompresibilidad. De aquí en adelante se considerará al fluido como incompresible debido a que el interés es analizar la hidrodinámica y no es el propósito analizar la propagación de las ondas sonoras.

A.1.2 Ecuación de momentum

La ecuación de momentum, es una expresión de la segunda ley de Newton, la cual muestra que la razón de cambio de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza neta aplicada sobre el fluido. En un sistema de referencia inercial fijo denotado por el subíndice I con coordenadas x_i ($i=1,2,3$) esta ley puede ser escrita como:

$$\frac{d_I(m\vec{v})_I}{dt} = \vec{F} \quad (\text{A.4})$$

Si el cambio temporal de momentum del fluido es analizado desde un sistema no inercial que rota con una velocidad angular (Ω_i) denotado con el subíndice R , la ecuación (A.4) puede ser escrita como (Landau y Lefchitz, 1971):

$$\frac{d_I(v_i)_I}{dt} = \frac{d_R(v_i)_R}{dt} + 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j v_k + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\Omega_j\Omega_m r_n + \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\Omega_j}{\partial t}r_k \quad (\text{A.5})$$

donde las direcciones de los vectores unitarios $i=1,2,3$ son positivos hacia el este, hacia el norte y hacia arriba respectivamente, ε_{ijk} es el tensor de Levi-Civita, con valores de -1,0,1 para permutación impar, índices repetidos o permutación par respectivamente. El primer

término del lado derecho de la ecuación, es la aceleración ejercida sobre el mismo elemento observado desde el nuevo sistema de referencia. Los términos restantes son las aceleraciones aparentes (dado que no son observadas en el sistema de referencia inercial), producto del cambio de sistemas de referencia, conocidas como: aceleración de Coriolis, aceleración centrípeta y aceleración debida a la variación temporal de la velocidad de rotación respectivamente.

Omitiendo el subíndice R del primer término del lado derecho de la ecuación (A.5), suponiendo que la variación de (Ω_j) respecto al tiempo es muy pequeña para las escalas temporales en las cuales estamos interesados y con la ayuda de la ecuación (A.4), la ecuación (A.5) puede escribirse como:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j v_k + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\Omega_j\Omega_m r_n = \sum \frac{F_i}{m} \quad (\text{A.6})$$

donde los dos primeros términos de la ecuación, son los integrantes de la derivada material $\frac{d(v_i)}{dt}$. Al multiplicar la ecuación anterior por el campo de densidades se obtiene:

$$\frac{d(\rho v_i)}{dt} + 2\rho\varepsilon_{ijk}\Omega_j v_k + \rho\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\Omega_j\Omega_m r_n = \sum \frac{F_i}{V_0} = (F_v)_i \quad (\text{A.7})$$

esta ecuación es utilizada para describir el movimiento de una parcela de agua o la circulación en el océano desde un sistema en rotación con velocidad angular (Ω_j) , donde $(F_v)_i$ representa la suma de las distintas fuerzas por unidad de volumen (V_0) que inducen el movimiento en un medio continuo.

Las fuerzas pueden ser clasificadas como fuerzas de cuerpo o que actúan a distancia y como fuerzas de superficie o que actúan en contacto. Dentro de las primeras se encuentran las fuerzas gravitatorias y de Coriolis y en las segundas se tienen las fuerzas de gradiente de presión y las fuerzas friccionales (Pond y Pickard, 1983).

Fuerzas de cuerpo

La fuerza de Coriolis por unidad de volumen esta representada por $2\rho\epsilon_{ijk}\Omega_j v_k$ donde la velocidad angular tiene componentes $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = \Omega\cos\varphi$, $\Omega_3 = \Omega\sin\varphi$, donde φ es la latitud. Desarrollando el tensor, se tiene que las componentes de la fuerza de Coriolis por unidad de volumen son: $2\rho(v_3\Omega_2 - v_2\Omega_3)$, $2\rho v_1\Omega_3$, y $-2\rho v_1\Omega_2$ para $i=1,2,3$ respectivamente. El factor $2\Omega_3$ o bien $2\Omega\sin\varphi$, es frecuentemente abreviado como f y conocido como parámetro de Coriolis o frecuencia inercial.

Por otro lado, las fuerzas gravitacionales están representadas por la fuerza de marea la cual depende de la distancia entre los astros y del producto de sus masas por la fuerza de gravedad de la tierra.

La interacción gravitacional entre la luna, el sol y los océanos tiene como resultado la generación de las fuerzas de marea, estas en el océano abierto pueden ser descritas por la superposición de una serie de componentes armónicos los cuales se puede considerar que no se ven afectados por efectos no lineales (Westerink *et al.*, 1985).

Nuevamente considerando la tierra como una esfera de radio r , con centro de masa en O , que dista R unidades de un cuerpo de masa M , la aceleración (con respecto al punto O) de P sobre la superficie terrestre, debida al cuerpo de masa M esta dada por:

$$(\alpha_{po})_i = -\left[\frac{GM}{(R_i - r_i)^2} - \frac{GM}{R_i^2} \right] \quad (\text{A.8})$$

la cual, es una aceleración creada por el desbalance entre la atracción de M sobre la tierra en el punto O y la atracción de M sobre la tierra en el punto P , conocida como la fuerza de marea en P por unidad de masa. La presencia de masa de un astro perturbador es considerada en la suma vectorial de las aceleraciones generadas. Esta fuerza de marea perturba los grandes océanos, sin embargo en áreas como la cuenca en estudio, su efecto se ve en la onda de marea oceánica que pasa a través de la boca, mas que en forzamiento directo.

La fuerza de gravedad que ejerce la tierra sobre una masa m en P puede ser escrita como:

$$(F)_i = -mg_a \delta_{ij} \quad \text{o bien} \quad (F_g)_i = -\rho g_a \delta_{ij} \quad (\text{A.9})$$

que representaría la fuerza por unidad de volumen, con $j=3$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker cuyo valor es 0 y 1 si los subíndices son diferentes o iguales, respectivamente. El eje x_3 ha sido alineado al vector g_a el cual representa las atracciones absolutas por la unidad de masa, dada por la ley de gravitación universal. Este vector $(g_a)_i$ está dirigido al centro de la tierra. Si a este vector se le suma la aceleración centrípeta $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \Omega_j \Omega_n r_m$, la cual está dirigida hacia adentro y normal al eje de rotación de la tierra, se obtiene lo que se conoce como la aceleración debida a la gravedad aparente, la cual está representada por g_r . La fuerza debida a la acción de la gravedad estará representada por:

$$(F_g)_i = -\rho g_r \delta_{i3} \quad (\text{A.10})$$

Fuerzas de superficie

Cuando un fluido está en reposo, la presión en un punto interior es isotrópica. Si existe un gradiente de presión, se induce un movimiento. Una forma sencilla de analizar este tipo de fuerzas es considerando un elemento de volumen rectangular de lados Δx_i ($i=1,2,3$) inmerso en un fluido, de tal forma que la fuerza en la dirección i en este volumen debido a la presión hidrostática será $p \Delta x_j \Delta x_k$ y $-(p + \Delta p) \Delta x_j \Delta x_k$ en la cara opuesta, donde el signo negativo indica que actúa en dirección negativa de i , para j y k igual a 1,2,3 con $i \neq j \neq k$. La fuerza neta del gradiente de presión en la dirección i es la suma de las dos anteriores, de tal forma que la fuerza del gradiente de presión por unidad de volumen en la dirección i está dada por:

$$(F_p)_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (\text{A.11})$$

Es necesario incluir el término de *fricción molecular* en la ecuación de movimiento, debido a la viscosidad molecular del fluido.

La existencia de movimiento relativo entre varias capas del fluido crea fricción interna, debido a su propia naturaleza. Estas fuerzas viscosas en un punto determinado, son proporcionales al gradiente de la velocidad.

La representación de estas fuerzas internas se puede hacer por medio del tensor de esfuerzo τ_{ij} , donde el subíndice i representa el eje perpendicular al área sobre la cual se ejerce las fuerzas tangenciales, el subíndice j representa la dirección del esfuerzo.

Para fluidos Newtonianos, como el agua y el aire, el tensor de esfuerzo viscoso en forma general queda representado por (Von Schwind, 1980):

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \mu' \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (\text{A.12})$$

donde μ es la viscosidad dinámica del fluido, μ' es conocido como el segundo coeficiente de viscosidad.

Definiendo la viscosidad cinemática molecular como $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ y el segundo coeficiente de la viscosidad cinemática como $\nu' = \frac{\mu'}{\rho}$, ambas con unidades $L^2 T^{-1}$, la ecuación (A.9) puede ser escrita como:

$$\tau_{ij} = \rho \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \rho \nu' \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (\text{A.13})$$

Donde el tensor τ_{ij} representa el esfuerzo de viscosidad molecular. Por otro lado ν y ν' , no son totalmente independientes y de acuerdo a Eckart (Von Schwind, 1980), estos coeficientes guardan la relación: $\nu' = -\frac{2}{3} \nu$, la cual sustituida en la ecuación (A.13), da:

$$\tau_{ij} = \rho \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \nu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (\text{A.14})$$

Las fuerzas netas de tipo viscoso por unidad de volumen que actúan sobre un elemento de fluido, están dadas por la variación del tensor de esfuerzos con respecto al espacio; es decir:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A.15})$$

El tensor τ_{ij} representa el esfuerzo debido a las fuerzas no conservativas para fluidos Newtonianos, el cual es simétrico y esta representado por 9 componentes donde solo 6 son independientes. Las componentes de la diagonal son los esfuerzos normales y las restantes representan los esfuerzos tangenciales o de cizalle.

Considerando la aproximación de Boussinesq que consiste en tomar la densidad como un valor de referencia, la ecuación de conservación de masa se reduce a la condición de incompresibilidad. En la ecuación de momentum la densidad también puede ser considerada de esta manera excepto en el término que incluye la gravedad para tener en cuenta la fuerza de flotabilidad, con estas consideraciones las ecuaciones de momentum se escriben como:

componente x_1 :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = -2(v_3 \Omega_2 - v_2 \Omega_3) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) \quad (\text{A.16})$$

componente x_2 :

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = -2(v_1 \Omega_3) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) \quad (\text{A.17})$$

componente x_3 :

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -\left(\frac{\rho_0 + \rho'}{\rho_0} \right) g - 2(v_1 \Omega_2) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) \quad (\text{A.18})$$

De las ecuaciones (A.16) a (A.18), se tiene que las variables dependientes son p , y v_i para $i=1,2,3$, por lo que no es un sistema cerrado. La inclusión de la ecuación de

continuidad (A.2) al sistema de ecuaciones es una buena opción para cerrar el sistema, ya que esta no introduce nuevas variables dependientes.

A.2 Ecuaciones para el flujo medio

Las ecuaciones hasta aquí analizadas representan los campos instantáneos de las variables estudiadas y nuestro interés es trabajar con velocidades promedio. Para ello se considera que el valor instantáneo de cualquier variable (α_j) puede ser representada por su valor medio mas las fluctuaciones en torno a su promedio temporal, es decir:

$$\alpha_j(x_i, t) = \langle \alpha_j(x_i, t) \rangle + \alpha_j'(x_i, t) \quad (\text{A.19})$$

donde α_j , en este caso puede ser v_i , o P .

El valor promedio de la variable (α_j) esta representado por:

$$\langle \alpha_j \rangle = \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \alpha_j(x_i, t) dt \quad (\text{A.20})$$

El promedio temporal de la fluctuación α_j' es nulo es decir:

$$\frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \alpha_j'(x_i, t) dt = 0 \quad (\text{A.21})$$

al igual que el promedio de un producto que envuelve una fluctuación. Sin embargo el promedio temporal del producto de dos fluctuaciones es diferente de cero.

En el promedio de las ecuaciones de movimiento y de continuidad se utilizó un conjunto de reglas de aproximación en el cálculo. Las cuales se enuncian como:

1) Las cantidades que ya han sido promediadas pueden ser consideradas como constantes en subsiguientes promedios: $\langle\langle\alpha_j\rangle\rangle = \langle\alpha_j\rangle$,

2) Los promedios obedecen a la ley distributiva, es decir: $\langle\alpha_j + v_i\rangle = \langle\alpha_j\rangle + \langle v_i\rangle$ o bien

$$\left\langle \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial \langle \alpha_j \rangle}{\partial x}.$$

En el caso del promedio de un producto de variables se tiene que: $\langle\alpha_j v_i\rangle = \langle(\langle\alpha_j\rangle + \alpha'_j)(\langle v_i\rangle + v'_i)\rangle = \langle\alpha_j v_i\rangle + \langle\alpha'_j v'_i\rangle$, ya que los términos: $\langle\langle\alpha_j\rangle v'_i\rangle = \langle\alpha'_j \langle v_i\rangle\rangle = 0$. En general si v_i y v_j son multiplicados y luego promediados, el resultado $\langle v_i v_j \rangle$ envolverá nueve componentes, una de las cuales es: $\langle v_i v_j \rangle = \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle + \langle v'_i v'_j \rangle$, donde el último término no necesariamente es cero, aún cuando $\langle v_i \rangle$ y $\langle v_j \rangle$ sean cero (Von Schwind, 1980).

A.2.1 Promedio temporal de las ecuaciones de momentum.

Considerando el fluido incompresible y la aproximación de Boussinesq las ecuaciones de momentum (A.16 a A.18) se promedian temporalmente aplicando el criterio del promedio temporal, quedando como:

$$\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} = -g_i \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \langle v_k \rangle - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2 \langle v_i \rangle}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial x_j} \quad (\text{A.22})$$

El promedio temporal de los términos no-lineales $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, producen un término adicional que resulta del producto de las fluctuaciones y que se presenta en el último término de la ecuación (A.22). Estos términos son conocidos como esfuerzos de Reynolds, los cuales escritos en forma tensorial son:

$$\tau'_{ij} = -\rho_0 \langle v'_i v'_j \rangle \quad (\text{A.23})$$

donde τ'_{ij} es conocido como tensor de Reynolds.

Al igual que el tensor de esfuerzos viscosos, τ'_{ij} tiene unidades de fuerza por unidad de área y es un tensor simétrico con un total de nueve componentes de las cuales seis son independientes. Las tres componentes de la diagonal de τ'_{ij} son esfuerzos normales y las restantes son esfuerzos tangenciales, donde el subíndice i indica el eje perpendicular al área sobre la cual se ejercen las fuerzas tangenciales; el subíndice j indica la dirección del esfuerzo.

Por analogía con el caso molecular, se introduce una relación semi-empírica entre el esfuerzo de Reynolds y los gradientes de velocidad promedio tal que: $\tau_{ij} \propto \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j}$ y

$$\tau'_{ij} = A \rho_0 \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} \quad (\text{Pond y Pickard, 1983}), \text{ donde } A \text{ cuyas dimensiones son } L^2 T^{-1}, \text{ es llamado}$$

coeficiente de viscosidad turbulenta esto por analogía con la viscosidad cinemática molecular. Sin embargo, tiene diferencias cruciales, ya que esta última es una propiedad del fluido y la viscosidad turbulenta está en función del tipo y escala del movimiento considerado, su grado de estratificación y la interacción entre ellos, es decir es una propiedad del flujo (Von Schwind, 1980).

Considerando estas relaciones se tiene que:

$$\frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_j \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A.24})$$

o bien

$$\frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_H \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{j=1,2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(A_V \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{j=3} \quad (\text{A.25})$$

En general las escalas horizontales son del mismo orden de magnitud entre si y diferentes con respecto a la escala vertical. El coeficiente de viscosidad turbulenta en la horizontal A_H es del orden de $10^6 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ y en la vertical el coeficiente de viscosidad turbulenta A_V es del orden de 1 a $10^3 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ (Officer, 1976).

A.2.2 Promedio temporal de la ecuación de continuidad

Nuevamente aplicando el criterio de las ecuaciones (A.19) y (A.20), a la ecuación de continuidad para un flujo incompresible y usando la convención de Einstein se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\langle v_i \rangle + v_i') = 0 \quad (\text{A.26})$$

La conservación de masa para un fluido incompresible, permite escribir la ecuación de continuidad para el flujo medio como:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle v_i \rangle = 0 \quad (\text{A.27})$$

En lo sucesivo se eliminará el símbolo $\langle \rangle$ sabiendo que se trata del flujo medio. Considerando que $v_1, v_2 \gg v_3$, en las componentes horizontales de la ecuación de movimiento puede justificarse la eliminación de todos los términos que contengan v_3 .

Por otro lado, para la componente vertical de la ecuación de movimiento, la aceleración debida a la gravedad es mucho mas grande que todas las otras aceleraciones consideradas a excepción del término del gradiente de presión, lo cual nos permite ignorar el subíndice de la densidad. En lo sucesivo ρ_0 se escribirá como ρ . De ahí que la ecuación de movimiento horizontal simplificada pueda ser escrito como:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -g_i - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j v_k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + A_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (\text{A.28})$$

para $i=1,2$, donde los términos de viscosidad molecular han sido incluidos en los de viscosidad turbulenta, y el coeficiente A_j ha sido considerado uniforme.

La ecuación de movimiento en dirección vertical se reduce a la ecuación hidrostática:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = g \quad (\text{A.29})$$

Considerando esta última aproximación y la profundidad de la laguna (entre 0.5 y 2 m en su mayor parte), se puede justificar ampliamente la simplificación del modelo tridimensional a uno bidimensional, aproximación que se realiza en la sección siguiente.

A.3 Modelo verticalmente integrado

Un modelo hidrodinámico bidimensional para la circulación media puede ser obtenido integrando en la vertical las ecuaciones tridimensionales de movimiento y de continuidad.

El promedio vertical de la velocidad horizontal se hará sobre la columna de agua de espesor instantáneo h , (Fig. A.1), el cual esta dado por:

$$\bar{v}_i = \frac{1}{h} \int_d^\eta v_i dx_3 \quad (\text{A.30})$$

para $i = 1,2$ donde la velocidad horizontal promedio en la columna de agua es representada por $v_H = \bar{v}_i \hat{e}_i$; con $x_3 = 0$ en la parte mas profunda de la cuenca.

El sistema de ecuaciones puede ser escrito en términos de la velocidad promedio de la columna de agua, o bien en términos del transporte horizontal ($\bar{V}_H = \bar{v}_H h$)

La integración del sistema de ecuaciones sobre la columna h , puede realizarse usando la regla de integración de Leibnitz, la cual se expresa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_d^\eta R dx = \int_d^\eta \frac{\partial R}{\partial t} dx + R(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} - R(d) \frac{\partial d}{\partial t} \quad (\text{A.31})$$

donde η representa el límite superior de la columna de agua y es función de (x, t) , y $d(x_i)$ representa el límite inferior de la columna de agua para $i=1,2$, el cual esta referido a la parte mas profunda de la laguna (datum). R es una función tal que: $R = R(x_i, t)$, mientras que $R(d) = R(x_1, x_2, d, t)$ y $R(\eta) = R(x_1, x_2, \eta, t)$ son definidas en el fondo y la superficie respectivamente.

Por último se considerara nuevamente, que las variables dependientes que serán integradas en la vertical, pueden ser expresadas como la suma del promedio en la vertical mas sus desviaciones con respecto al promedio ($\alpha = \bar{\alpha} + \alpha^*$),

A.3.1 Integración vertical de las ecuaciones de conservación de momentum

Utilizando la regla de Leibnitz, la ecuación de momentum horizontal integrada en la vertical es:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -2\varepsilon_{ijk} \Omega_j v_k - \frac{h}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{(\tau_\eta)_i - (\tau_d)_i}{\rho_0} + A_H \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (v_i^* v_j^*)}{\partial x_j} \quad (\text{A.32})$$

Donde: $(\tau_\eta)_i$ y $(\tau_d)_i$ son obtenidos de la integración de $A_v \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2}$ dada por:

$$\int_d^\eta A_v \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2} dx_3 = A_v \left(\left. \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right|_\eta - \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right|_d \right) \quad (\text{A.33})$$

De la ecuación

$$A_v \frac{\partial v_i}{\partial x_3} = (\tau_{x_3})_i \quad (\text{A.34})$$

se tiene :

$$\int_d^\eta A_v \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2} = (\tau_\eta)_i - (\tau_d)_i \quad (\text{A.35})$$

El término $(\tau_\eta)_i$ es el esfuerzo tangencial en la superficie libre en dirección i el cual representa el esfuerzo friccional del viento, y el término $(\tau_d)_i$ es el esfuerzo tangencial en el fondo en la misma dirección.

El último término de la ecuación (A.34) proviene de la integración vertical de los términos no-lineales el cual es similar a la situación encontrada anteriormente al promediar en el tiempo las ecuaciones de movimiento. En este caso el último término es el producto de las desviaciones respecto al promedio en la vertical. En modelos hidrodinámicos, en general se realiza una aproximación cruda acerca del efecto de corte que produce dicho término. Sin embargo, este puede ser absorbido por el término de viscosidad turbulenta, y más aún el coeficiente de viscosidad turbulento numérico absorbe a ambos.

De la ecuación hidrostática:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = -\rho g \quad (\text{A.36})$$

integrada en la vertical se obtiene:

$$\int_d^\eta \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} dx_3 = -\int_d^\eta g \rho dx_3 \quad (\text{A.37})$$

o bien,

$$P(d) = P(\eta) + \rho g h \quad (\text{A.38})$$

dado que $h = \eta - d$. $P(\eta)$ representa el campo de presión atmosférica.

En forma general, la presión que ejerce la columna de agua sobre una partícula localizada en la profundidad x_3 , mas la presión atmosférica $P(\eta)$, esta dada por:

$$P(x_3) = P(\eta) + g\rho(\eta - x_3) \quad (\text{A.39})$$

de acuerdo a la ecuación (A.41).

De ahí, que las variaciones de la presión en el plano horizontal estén definidas por:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial P_\eta}{\partial x_i} + g\rho \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad (\text{A.40})$$

para $i=1,2$

La relación anterior es de gran utilidad en oceanografía, dado que es más fácil obtener información acerca de los cambios espaciales de las elevaciones en comparación con los cambios espaciales de la presión, por lo que la ecuación de movimiento queda como.

A.3.2 Integración vertical de la ecuación de continuidad

Nuevamente utilizando la regla de Leibnitz, para integrar en la vertical la ecuación de continuidad se tiene:

$$\int_d^{\eta} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_3 = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - v_i(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + v_i(d) \frac{\partial d}{\partial x_i} \quad (\text{A.41})$$

para $i=1,2$.

La integración de la ecuación de continuidad cuando $i=3$ representa la diferencia entre la velocidad vertical en la superficie libre y en el fondo de la capa con espesor $h(x_i)$, tal que:

$$\frac{d\eta}{dt} - v_{3\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_i(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{d(d)}{dt} - v_{3d} = \frac{\partial (d)}{\partial t} + v_i(d) \frac{\partial (d)}{\partial x_i} \quad (\text{A.43})$$

ambas ecuaciones con $i=1,2$. $\frac{\partial (d)}{\partial t}$ se considera cero, dicho de otra manera, se considera un relieve del fondo estacionario.

A.4 Parametrización de las fuerzas friccionales de superficie y fondo

El término $\tau_{a,i}$ de la ecuación (A.48) representa el esfuerzo tangencial en el fondo en la dirección i . Este término de fricción puede ser aproximado por medio de la teoría de Prandtl-Von Karman como (Nihoul, 1977):

$$v_i = v_* \left(\frac{1}{k_0} \ln \left(\frac{x_3 + x_{3_0}}{x_{3_0}} \right) \right) \quad (\text{A.44})$$

donde v_* es la velocidad friccional definida como $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, Despejando para $\tau_{d,i}$ se tiene que:

$$\tau_{d,i} = D\rho v_i^2 \quad (\text{A.45})$$

donde

$$D = \frac{k_0^2}{\ln \left(\frac{x_3 + x_{3_0}}{x_{3_0}} \right)^2} \quad (\text{A.46})$$

conocida como la ley cuadrática del esfuerzo, por medio de la cual se aproximaron los términos semejantes presentes en el sistema de ecuaciones de movimiento y donde D representa el coeficiente de rugosidad, k_0 es la constante de Von Karman, x_3 es la profundidad y x_{3_0} es la rugosidad del fondo.

El valor de D es del orden de 10^{-3} , y en general es tomado como 3.3×10^{-3} (Ramming y Kowalik, 1980).

El esfuerzo del viento en la superficie en dirección i esta representado por los términos $\tau_{\eta,i}$ para $i=1,2$, de las ecuaciones de movimiento. Experimentalmente se ha encontrado que el esfuerzo es una función de la velocidad del viento y de una propiedad aerodinámica de la superficie del libre, como por ejemplo:

$$\tau_{\eta,i} = C_d \rho_a U_{10}^2 \quad (\text{A.47})$$

donde ρ_a es la densidad del aire, U_{10} es la velocidad del viento medida a 10 m sobre el nivel del mar en dirección i para $i=1,2$ y C_d es el coeficiente de resistencia aerodinámico a 10 m sobre el nivel del mar (Ramming y Kowalik, 1980).

Se han establecidos valores empíricos para C_d que relacionan el esfuerzo de la capa límite con la velocidad del viento, estos son (Smith, 1980):

$$C_d = \begin{cases} 1 \times 10^{-3} (0.61 + 0.063 U_{10}) & \text{si } 6 \text{ m s}^{-1} < U_{10} < 22 \text{ m s}^{-1} \\ 1.1 \times 10^{-3} & \text{si } U_{10} < 6 \text{ m s}^{-1} \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

APÉNDICE B

APROXIMACIÓN NUMÉRICA

B.1 Método de diferencias finitas

La forma básica de las diferencias finitas para las derivadas se puede obtener mediante un desarrollo en series de Taylor, de la función continua $f(x_i)$ definida en el plano (x_i) con diferencial dx_i , está dada por:

$$f(x_1 + dx_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots \quad (\text{B.1})$$

Cuando la separación entre los puntos es una diferencia finita, por ejemplo Δx_1 , esta no puede ser aproximada a cero ya que debe permanecer finita. Por lo cual, si se reemplaza a dx por Δx en la ecuación anterior, se obtendrá una relación aproximada entre los puntos.

La relación exacta entre estos es una serie de Taylor de la forma, (Roache, 1980):

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (\Delta x_1)^2 + \dots \quad (\text{B.2})$$

Para obtener la solución numérica de las ecuaciones diferenciales es necesario discretizar el dominio usando una malla espacio-temporal con intervalos uniformemente espaciados y con intervalos de tiempo constantes, tal que la longitud de los intervalos en las direcciones x_i serán Δx_i respectivamente. El tiempo será discretizado cada Δt . Los puntos de la malla serán numerados como I, J , donde I es el índice en dirección x_1 y J en la dirección x_2 , mientras que n se referirá al nivel del tiempo. De tal manera que el valor de las variables discretas en cada uno de estos puntos será definido como:

$$\alpha_{I,J}^n = \alpha(I\Delta x_1, J\Delta x_2, n\Delta t) \quad (\text{B.3})$$

La notación usada para variables dependientes, en cierto tiempo específico será:

$$f^n((x_1)_I, (x_2)_J) = f^n_{I,J} \quad (\text{B.4})$$

Adoptando esta nomenclatura y omitiendo el superíndice n por claridad de notación, el desarrollo en una serie de Taylor en torno a $I+1$ de $f_{I,J}$ puede ser escrita como:

$$f_{I+1,J} = f_{I,J} + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{I,J} \Delta x_1 + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{I,J} (\Delta x_1)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} \right|_{I,J} (\Delta x_1)^3 + \dots + \frac{1}{4!} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} \right|_{I,J} (\Delta x_1)^4 + \dots \quad (\text{B.5})$$

resolviendo para $\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{I,J}$, se tiene:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{I,J} = \frac{f_{I+1,J} - f_{I,J}}{\Delta x_1} - \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{I,J} (\Delta x_1) - \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} \right|_{I,J} (\Delta x_1)^2 - \frac{1}{4!} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} \right|_{I,J} (\Delta x_1)^3 \dots \quad (\text{B.6})$$

Donde, el primer término del lado derecho de la ecuación, representa la forma análoga de $\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{I,J}$ a la primera derivada, esto es (Rosenberg, 1969):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{I,J} = \frac{f_{I+1,J} - f_{I,J}}{\Delta x_1} \quad (\text{B.7})$$

La cual es la forma de la aproximación a la primera derivada en forma adelantada, cuyo error de truncación es de primer orden, de acuerdo a Δx_1 .

De forma semejante puede ser obtenida la aproximación a la primera derivada en forma atrasada, mediante un desarrollo en serie de Taylor obteniéndose:

$$f_{i-1,j} = f_{i,j} - \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{i,j} \Delta x_1 + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{i,j} (\Delta x_1)^2 - \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} \right|_{i,j} (\Delta x_1)^3 + \frac{1}{4!} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} \right|_{i,j} (\Delta x_1)^4 - \dots \quad (\text{B.8})$$

resolviendo para $\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{i,j}$, se tiene que:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x_1} + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{i,j} (\Delta x_1) - \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} \right|_{i,j} (\Delta x_1)^2 + \frac{1}{4!} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} \right|_{i,j} (\Delta x_1)^3 - \dots \quad (\text{B.9})$$

De igual manera, el primer término del lado derecho de la ecuación, representa la forma análoga $\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{i,j}$ a la primera derivada, esto es:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x_1} \quad (\text{B.10})$$

con un error de truncación de primer orden.

Una forma análoga a la primera derivada en forma centrada con un error de truncación de segundo orden, es obtenida al restar la ecuación (B.8) de la ecuación (B.5):

$$f_{i+1,j} - f_{i-1,j} = 2 \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{i,j} \Delta x_1 + \frac{2}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} \right|_{i,j} (\Delta x_1)^3 + \dots \quad (\text{B.11})$$

Resolviendo nuevamente para $\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{i,j}$, se tiene que:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x_1} - \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} \right|_{i,j} (\Delta x_1)^2 + \dots \quad (\text{B.12})$$

De igual manera, el primer término del lado derecho de la ecuación, representa la forma análoga de $\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{I,J}$ de la primera derivada, esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{I,J} = \frac{f_{I+1,J} - f_{I-1,J}}{2\Delta x_1} \quad (\text{B.13})$$

Sumando las ecuaciones (B.8) y (B.5), y se obtiene la analogía a la segunda derivada, esto es:

$$f_{I+1,J} + f_{I-1,J} = 2f_{I,J} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \Big|_{I,J} (\Delta x_1)^2 + \frac{2}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} \Big|_{I,J} (\Delta x_1)^4 + \dots \quad (\text{B.14})$$

Expresando en forma explícita para la segunda derivada de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \Big|_{I,J} = \frac{f_{I+1,J} + f_{I-1,J} - 2f_{I,J}}{(\Delta x_1)^2} - \frac{2}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} \Big|_{I,J} (\Delta x_1)^2 - \dots \quad (\text{B.15})$$

Teniendo que la forma análoga a la segunda derivada evaluada en el punto (I,J) es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \Big|_{I,J} = \frac{f_{I+1,J} + f_{I-1,J} - 2f_{I,J}}{(\Delta x_1)^2} \quad (\text{B.16})$$

la cual tiene un error de truncación de segundo orden.

Las ecuaciones (B.7), (B.10), y (B.13), representan los casos generales de discretizaciones adelantadas, atrasadas y centradas en diferencias finitas de la primera derivada, mientras que la ecuación (B.16) representa la aproximación en forma centrada de la segunda derivada.

Sin embargo, antes de aplicar estas aproximaciones al sistema de ecuaciones de movimiento para el modelo barotrópico, es necesario discretizar el área de integración y establecer el tipo de malla a utilizar bajo la cual serán resueltas las ecuaciones.

B.2 Discretización de las ecuaciones hidrodinámicas

B.2.1 Discretización temporal

La discretización temporal se efectuó mediante diferencias finitas adelantadas en todos los casos. Cada incremento de tiempo fue dividido en dos sub-incrementos de tal forma que en la integración del nivel n al $n+1$ existe un paso intermedio $n+\frac{1}{2}$. Las evaluaciones se colocan en el centro de la celda (I,J).

La discretización temporal de los términos locales para el primer sub-incremento están dadas por:

a) cambio temporal de la componente V_i :

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}\right)_{I,J} \equiv \left(\frac{V_i^{n+\frac{1}{2}} - V_i^n}{\Delta t/2}\right)_{I,J} \quad (\text{B.17})$$

para las componentes $i=1,2$

b) cambio temporal de la elevación de la superficie libre:

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{I,J} \equiv \left(\frac{\eta^{n+\frac{1}{2}} - \eta^n}{\Delta t/2}\right)_{I,J} \quad (\text{B.18})$$

La forma análoga para el segundo sub-incremento ($n+1/2$ a $n+1$) esto es, la discretización de los términos de cambios locales son:

a) cambio temporal de la componente V_i :

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}\right)_{I,J} \equiv \left(\frac{V_i^{n+1} - V_i^{n+1/2}}{\Delta t/2}\right)_{I,J} \quad (\text{B.19})$$

b) cambio temporal de la elevación de la superficie libre:

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) \equiv \left(\frac{\eta^{n+1} - \eta^{n+1/2}}{\Delta t/2}\right) \quad (\text{B.20})$$

B.2.2 Discretización espacial

La discretización espacial de las ecuaciones diferenciales se hizo por medio de diferencias finitas centradas para todos los términos de las ecuaciones, a excepción de los términos advectivos, los cuales fueron discretizados usando el método *up-stream* o *upwind*.

Nuevamente las discretizaciones se hicieron usando el centro de la celda (I,J) como pivote.

a) *Discretización de los términos de la ecuación de continuidad*

Al discretizar la ecuación de continuidad, donde la variable a calcular es la elevación de la superficie libre sobre la malla Arakawa-C, se utilizó la forma análoga a las primeras derivadas en diferencias centradas, que de acuerdo a la malla Arakawa-C cada término de la ecuación es representado por:

$$\left.\frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right|_{I,J} \equiv \frac{1}{\Delta x_1} \{(V_1)_{I+1,J} - (V_1)_{I,J}\}$$

$$\left.\frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right|_{I,J} \equiv \frac{1}{\Delta x_2} \{(V_2)_{I,J+1} - (V_2)_{I,J}\} \quad (\text{B.21})$$

b) *Discretización espacial de los términos de la ecuación de momentum*

El término de presión para la componente en dirección x_1 de la ecuación de momentum, aproximado en diferencias finitas centradas relativas a la malla utilizada, puede ser escrito como:

$$gh \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \Big|_{i,j} \equiv gh \frac{\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}}{\Delta x_1} \quad (\text{B.22})$$

En forma similar, para la componente en x_2 :

$$gh \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \Big|_{i,j} \equiv gh \frac{\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}}{\Delta x_2} \quad (\text{B.23})$$

Los términos turbulentos discretizados por diferencias centradas, quedan escritos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (A_H \nabla_H^2 V_i)_{i,j} &\equiv \frac{A_H}{2\Delta x_1^2} ((V_i)_{i+1,j} - 2(V_i)_{i,j} + (V_i)_{i-1,j}) \\ &\quad + \frac{A_H}{2\Delta x_2^2} ((V_i)_{i,j+1} - 2(V_i)_{i,j} + (V_i)_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Los términos advectivos, discretizados por el método *up-stream*, están representados por (Monreal Gómez, 1986):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{V_i V_j}{h} \right) \Big|_{i,j} &\equiv \frac{1}{2\Delta x_1} \left(\frac{V_i}{h} + \left| \frac{V_i}{h} \right| \right)_{i,j} ((V_j)_{i,j} - (V_j)_{i-1,j}) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta x_1} \left(\frac{V_i}{h} - \left| \frac{V_i}{h} \right| \right)_{i,j} ((V_j)_{i+1,j} - (V_j)_{i,j}) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{V_1 V_2}{h} \right) \Big|_{i,j} &\equiv \frac{1}{2\Delta x_2} \left(\frac{V_j}{h} + \left| \frac{V_j}{h} \right| \right)_{i,j} \left((V_1)_{i,j} - (V_1)_{i,j-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2\Delta x_2} \left(\frac{V_j}{h} - \left| \frac{V_j}{h} \right| \right)_{i,j} \left((V_1)_{i,j+1} - (V_1)_{i,j} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Una vez utilizadas estas discretizaciones en las ecuaciones del modelo barotrópico, existen variables que se deben evaluar en puntos tales como: CV_2 , indicando que las variable están centrada en los puntos donde se calcula V_2 . Por ejemplo:

$$\left(\frac{V_1}{h} \right)_{CV_2}^n = \frac{\left((V_1)_{i,j}^n + (V_1)_{i+1,j}^n + (V_1)_{i+1,j-1}^n + (V_1)_{i,j-1}^n \right)}{2(2H_{CV_2} + \eta_{i,j}^n + \eta_{i,j-1}^n)} \quad (\text{B.27})$$

donde H_{CV_2} , es la profundidad del punto donde se esta calculando V_2 :

$$\left(\frac{V_2}{h} \right)_{CV_2}^n = \frac{(V_2)_{i,j}^n}{2H_{CV_2} + \eta_{i,j}^n + \eta_{i,j-1}^n} \quad (\text{B.28})$$

$$(V_1)_{CV_2}^n = \frac{\left((V_1)_{i,j}^n + (V_1)_{i+1,j}^n + (V_1)_{i+1,j-1}^n + (V_1)_{i,j-1}^n \right)}{4} \quad (\text{B.29})$$

Donde los términos centrados en V_1 son iguales a:

$$\left(\frac{V_1}{h} \right)_{CV_1}^n = \frac{(V_1)_{i,j}^n}{2H_{CV_1} + \eta_{i,j}^n + \eta_{i-1,j}^n} \quad (\text{B.30})$$

$$\left(\frac{V_2}{h} \right)_{CV_1}^n = \frac{\left((V_2)_{i,j}^n + (V_2)_{i,j+1}^n + (V_2)_{i-1,j+1}^n + (V_1)_{i-1,j}^n \right)}{2(2H_{CV_1} + \eta_{i,j}^n + \eta_{i-1,j}^n)} \quad (\text{B.31})$$

$$(V_2)_{CV_1}^n = \frac{\left((V_2)_{i,j}^n + (V_2)_{i-1,j}^n + (V_2)_{i-1,j+1}^n + (V_2)_{i,j+1}^n \right)}{4} \quad (\text{B.32})$$

El cálculo de V_I en forma implícita conlleva a la siguiente ecuación general:

$$a_{I,J}(V_I)^{n+\frac{1}{2}} + b_{I,J}(V_I)^{n+\frac{1}{2}} + c_{I,J}(V_I)^{n+\frac{1}{2}} = d_{I,J} \quad (\text{B.33})$$

donde los coeficientes $a_{I,J}$, $b_{I,J}$, $c_{I,J}$ y $d_{I,J}$ son conocidos. Esta ecuación en forma matricial es:

$$A[V_I]^{n+\frac{1}{2}} = [D] \quad (\text{B.34})$$

donde la matriz A con $I \times J$ elementos, para $2 \leq I \leq Q-1$ y con $a_I = c_Q = 0$, es una matriz tridiagonal dada por:

$$A = \begin{bmatrix} b_{2,J} & c_{2,J} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{3,J} & b_{3,J} & c_{3,J} & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & a_{4,J} & b_{4,J} & c_{4,J} & & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{5,J} & b_{5,J} & c_{5,J} & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{B.35})$$

y donde V_I y D son los vectores:

$$V_1^{n+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} (V_1)_{2,J} \\ (V_1)_{3,J} \\ \vdots \\ (V_1)_{Q-3,J} \\ (V_1)_{Q-2,J} \\ (V_1)_{Q-1,J} \end{bmatrix}^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} d_{2,J} - a_{2,J}(V_1)_{1,J} \\ d_{2,J} \\ d_{3,J} \\ \vdots \\ d_{Q-3,J} \\ d_{Q-2,J} \\ d_{Q-1,J} - c_{Q-1,J}(V_1)_{Q,J} \end{bmatrix} \quad (\text{B.36})$$

La solución del sistema tridiagonal se realizó aplicando una variante del método de eliminación Gaussiana, conocido como el Método de Thomas. Este método es válido para sistemas diagonalmente dominantes y ecuaciones no homogéneas.

B.3 Convergencia, consistencia y estabilidad

En todo modelo numérico se requiere establecer la garantía de que la solución numérica converja a la solución exacta de las ecuaciones diferenciales. Dado que el proceso de discretización introduce errores de aproximación es necesario hacer un análisis de convergencia, de consistencia y de estabilidad del esquema numérico.

Convergencia

Si la solución del sistema de ecuaciones algebraica resultado del sistema de ecuaciones en diferencias finitas se aproxima a la solución exacta de la ecuación diferencial parcial, para cada valor de la variables independiente cuando $\Delta x_i, \Delta t \rightarrow 0$, se dice que el sistema es convergente.

La diferencia entre la solución exacta del sistema de ecuaciones diferenciales parciales y la solución exacta del sistema de ecuaciones discretizadas es llamado error de solución ($e_{i,j}^n$), el cual puede ser representado como:

$$e_{i,j}^n = \overline{\Psi}(X_{i,j}, t_n) - \Psi \quad (\text{B.37})$$

Con ello se tiene que la solución exacta del sistema algebraico de ecuaciones es la solución aproximada del sistema de ecuaciones diferenciales parciales gobernantes.

Por otro lado, la solución exacta del sistema algebraicos es obtenida solo si no son introducidos errores numéricos, tales como los ocasionados por el redondeo automático cuando el sistema es resuelto por medio de una computadora.

La magnitud del error $e_{i,j}^n$, depende de la magnitud de los espaciamientos de la malla y del intervalo de tiempo, además del valor de la derivada de mas alto orden en cada nodo ya que estas fueron truncadas en la aproximación en diferencias finitas (error de truncación), de las ecuaciones diferenciales parciales.

Para el análisis de convergencia se utilizó el Teorema de Lax, el cual dice que *“un sistema de ecuaciones algebraicas con valores a la frontera lineales, que satisfacen la condición de consistencia y la estabilidad es una condición necesaria y suficiente para la convergencia”* (Fletcher, 1991).

Sin embargo la mayoría de los problemas de flujos reales son no-lineales, de tal forma que el Teorema de Lax no puede ser siempre aplicado rigurosamente. Consecuentemente, el Teorema de Lax puede ser interpretado como necesario pero no siempre como una condición suficiente, como es el caso para el sistema de ecuaciones que conforman el modelo planteado en este trabajo. En estos casos el Teorema de Lax es útil para excluir discretizaciones inconsistentes y algoritmos inestables.

Consistencia

El análisis de la consistencia de un esquema se lleva a cabo mediante el análisis del error de truncación, si dicho error tiende a cero cuando los pasos de integración espaciales y temporales tienden a cero el esquema se dice que es consistente.

Estabilidad

El concepto de estabilidad esta relacionado con el decaimiento de un error introducido en cualquier etapa del calculo, o bien un crecimiento en caso de inestabilidad. Por ejemplo este error puede ser el introducido por el redondeo automático de la máquina en la solución numérica del sistema algebraico.

Este sistema es estable si el efecto acumulado de redondeo automático producido en la aplicación del algoritmo, es despreciable.

Usualmente no es posible determinar los valores exactos del error numérico en el (I,J,n) -ésimo punto de la malla para una distribución arbitraria de errores en otros puntos de la misma. Sin embargo, puede ser estimado usando ciertos métodos estándares.

El método de análisis de estabilidad mas comúnmente usado es la tercera condición de Von Neumann, el cual es generalmente el mas sencillo de aplicar y el mas directo para encontrar la condición de estabilidad de mayor restricción. Desafortunadamente, este método solo establece condiciones de estabilidad necesarias y suficientes para problemas lineales (Fletcher, 1991).

En otros casos, la condición de estabilidad obtenida por el método de Von Neumann es necesaria mas no suficiente, como en el caso del sistema de ecuaciones planteado en el capitulo III.

Este método consiste básicamente en introducir un pequeño error en la solución en forma de un armónico y analizar su comportamiento del tiempo t al $t + \Delta t$. La estabilidad o inestabilidad del algoritmo computacional es determinado por el amortiguamiento o amplificación del error. en el sistema de ecuaciones, se tiene que cada variable de la solución puede ser escrita como una serie de Fourier, donde cada componente de la serie es:

$$\eta_{I,J}^{n+m(\frac{1}{2})} = \eta_{I,J}^n e^{i\cos(\frac{\theta}{2})} \quad (\text{B.38})$$

$$(V_1)_{I,J}^{n+m(\frac{1}{2})} = (V_1)_{I,J}^n e^{i\cos(\frac{\theta}{2})} \quad (\text{B.39})$$

$$(V_2)_{I,J}^{n+m(\frac{1}{2})} = (V_2)_{I,J}^n e^{i\cos(\frac{\theta}{2})} \quad (\text{B.40})$$

donde i es definido como $(-1)^{1/2}$, σ es la frecuencia angular de la onda. El sistema de ecuaciones escrito en forma matricial puede ser expresado como:

$$[M]_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = B[M]_{i,j}^n \quad (\text{B.41})$$

donde $[M]$ representa el vector columna de las amplitudes y B la matriz de amplificación.

La propiedad de estabilidad del sistema numérico depende de los eigenvalores ($|\lambda^n| < 1$) de la matriz B . De acuerdo a Von Neumann una condición suficiente para que se cumpla la estabilidad de un sistema lineal es que el valor absoluto de los eigenvalores de la matriz amplificación sea menor o igual que uno (Ramming y Kowalik, 1980).

ADENDUM

Uno de los principales problemas de la dinámica en el sistema lagunar Chacahua-Pastoria, y que motivó este estudio es el cierre por mas de 15 años de la boca-barra de Chacahua. Como resultado de lo anterior se mantuvo la laguna de Chacahua casi sin movimiento.

Durante el proceso de revisión e impresión final de este trabajo el paso de los huracanes Olaf y Paulina sobre las costas del Pacífico mexicano produjeron una gran descarga de agua dulce sobre el sistema lagunar, que aunado con la gran erosión de la playa; producto del oleaje y a la marea viva a principios del mes de octubre provocó la apertura de la boca-barra de Chacahua.

Desde el punto de vista hidrodinámico se tienen condiciones adecuadas para el saneamiento del sistema. Sin embargo, el mantener la laguna de Chacahua en condiciones adecuadas dependerá de los procesos litorales y de la descarga de los rios, los primeros se pueden controlar con una adecuada construcción de espigones y los segundos mediante el manejo racional de los canales de aporte de agua dulce.