

01162



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FLUJO DE AGUA HACIA DRENES
SUBTERRANEOS

HEBER ELEAZAR SAUCEDO ROJAS

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA (HIDRAULICA)

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS FUENTES RUIZ

CUERNAVACA, MOR.

1997.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Mit Flügeln, die ich mir errungen,
In heissem Liebesstreben
Werd ich entschweben
Zum Licht, zu dem kein Aug gedrungen!**

Gustav Mahler (1860 - 1911)

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Carlos Fuentes Ruiz, coautor de este trabajo, su amistad y paciencia

Al Dr. Roberto Mercado Escalante su colaboración desinteresada

A los Doctores

Dr. Waldo Ojeda Bustamente

Dr. Luis Rendón Pimentel

Dr. Jaime Collado Moctezuma

quienes han fungido como revisores del presente trabajo.

Al M. C. Rodolfo Namuche Vargas, quien proporcionó los datos experimentales y al M.C. Felipe Zataráin Mendoza por su colaboración en la redacción del escrito final.

A la Universidad Nacional Autónoma de México.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico en mis estudios.

Al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua por el apoyo económico en la fase de Tesis.

DEDICATORIA

A Dios

A mi familia

A mis amigos

ÍNDICE GENERAL.

CAPITULO I. ECUACIONES DE BASE	1
1.1. Introducción.	1
1.2. Movimiento del agua en el dren	1
1.3. Movimiento del agua en el suelo.	2
1.3.1. Ecuación de continuidad.	2
1.3.2. Ley de Darcy.	2
1.3.3. Ecuación general de transferencia de agua en el suelo.	2
1.3.4. Ecuación de Richards.	3
1.3.5. Ecuación Fokker-Planck.	3
1.4. Movimiento bidimensional del agua hacia los drenes	4
1.5. Características hidrodinámicas	4
1.5.1. van Genuchten - Brooks y Corey.	4
1.5.2. Fujita - Parlange.	5
1.3. Condiciones límites.	6
1.6.1. Condición inicial.	6
1.6.2. Condiciones de frontera excepto en el dren.	6
1.6.3. Condición de frontera en el dren.	6
1.6.3.1. Condición de frontera equipotencial en el dren.	6
1.6.3.2. Condición de frontera de filtración en el dren.	7
1.6.3.3. Condición de frontera de Robbins en el dren.	8
CAPITULO II. SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS HIDRODINAMICAS DE FUJITA - PARLANGE	11
2.1. Teorema	11
2.2. Solución exacta para flujo constante en la superficie (Fuentes 1992)	22
2.2.1. La transformación de Hopf-Cole	22.
2.2.2. La solución exacta	23
CAPITULO III. SOLUCIONES CLÁSICAS.	26
3.1. Una primera integración de la ecuación de Richards para el caso de un acuífero libre.	26
3.2. Régimen permanente: soluciones simplificadas.	29

3.3. Régimen Transitorio.	32
3.3.1. Condición de Dirichlet en el dren.	32
3.3.1.1. Solución Glover-Dumm.	34
3.3.1.2. Una nueva solución.	34
3.3.2. Condición de Robbins o de radiación en el dren.	35
3.3.2.1. Solución analítica aproximada	37
CAPITULO IV. APLICACION DEL METODO DE ELEMENTO FINITO LA ECUACIÓN DEL DRENAJE AGRÍCOLA UNIDIMENSIONAL.	41
4.1. Caso condición de Dirichlet en el dren	42
4.1.1. Obtención de la forma débil	42
4.1.2. Integración en el espacio: Solución de Elemento Finito	43
4.1.2.1. Discretización del espacio	43
4.1.2.2. Funciones de base	43
4.1.2.3. Desarrollo del esquema	43
4.1.3. Integración en el tiempo: Diferencias finitas	45
4.1.4. Validación del esquema	45
4.1.5. Aplicaciones	46
4.2. Caso condición de Robin en el dren	47
4.2.1. Desarrollo del esquema	47
4.2.2. Aplicaciones.	48
CAPITULO V. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO A LA ECUACIÓN DE RICHARDS BIDIMENSIONAL EN DRENAJE AGRÍCOLA	51
5.1. Planteamiento del problema.	51
5.1.1. Condiciones límites.	51
5.1.1.1. Condición inicial.	51
5.1.1.2. Condiciones de frontera.	52
5.2. Obtención de la forma débil	53

5.3. Integración en el espacio: Solución de Elemento Finito.	53
5.3.1. Discretización del dominio.	53
5.3.2. Funciones de base	53
5.3.3. Desarrollo del esquema	54
5.4. Integración en el tiempo: diferencias finitas.	57
5.5. Cálculo de flujos en la frontera.	58
5.6. Validación del esquema.	58
CAPITULO VI. APLICACIONES	62
6.1. Planteamiento del problema	62
6.2. Discretización del espacio	62
6.3. Condiciones límite	62
6.4. Procedimiento de cómputo	63
6.5. Resultados y comentarios	64
CAPITULO VII. CONCLUSIONES	67
BIBLIOGRAFÍA	69

INTRODUCCION GENERAL

El tratamiento riguroso del fenómeno de la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola, que atrae por si mismo un marcado interés por parte de quienes hacen la ciencia fisico-matemática, adquiere una importancia considerable para la sociedad en general, si se tiene en cuenta que dichos sistemas son la herramienta básica para reducir los problemas que los niveles freáticos someros representan para el desarrollo de las plantas de interés agrícola. Namuche *et al.* (1994) indican que la tasa de avance de los problemas de drenaje deficiente y salinidad en México es aproximadamente de 10,000 hectáreas por año, además de que el costo de recuperar una hectárea de suelo afectada por dichos problemas es aproximadamente la veinteava parte de la inversión requerida para incorporar una hectárea de superficie al riego, por lo tanto la importancia socio-económica del problema es evidente.

La herramienta fundamental adoptada en este trabajo es el uso de ecuaciones diferenciales que partiendo de la hipótesis del medio continuo describen las razones de cambio de las variables hidráulicas en el tiempo y el espacio. La estructura de la exposición es como sigue:

Se presenta en el capítulo I el planteamiento general y riguroso del problema del drenaje agrícola, i.e. las ecuaciones diferenciales que describen el proceso, las condiciones límite a que deben sujetarse y las relaciones que se dan en la naturaleza entre las variables dependientes que en ellas intervienen, esto último se profundiza en el capítulo II, al demostrar que solamente las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange permiten linealizar la ecuación Fokker-Planck de la infiltración unidimensional.

En el capítulo III se obtiene la ecuación del drenaje agrícola unidimensional a partir de la formulación de la ecuación de Richards para un acuífero libre, posteriormente se muestran las soluciones clásicas para dicha ecuación unidimensional considerando tanto el régimen permanente, como el régimen transitorio, previa linealización de la ecuación diferencial y de sus condiciones límite. Se aborda en el capítulo IV la solución numérica de la ecuación del drenaje agrícola unidimensional en su forma no lineal, desarrollando un esquema numérico con elementos finitos, para condiciones de frontera en el dren tanto de tipo Dirichlet como tipo Robbins.

El uso de la ecuación de Richards en su forma bidimensional para describir la transferencia de agua en un sistema de drenaje es el objetivo básico del capítulo V, se obtiene la solución de elemento finito para dicha ecuación, considerando el mismo tipo de condiciones de frontera en el dren que para el caso unidimensional, en el capítulo VI se utiliza el modelo de simulación numérica para describir el hidrograma de salida observado en un dren subterráneo, se obtiene además la configuración de las líneas equipotenciales para diferentes tiempos después de la aplicación del riego.

La validación de los esquema numéricos se realizó comparando los resultados obtenidos de su aplicación con aquellos proporcionados por soluciones analíticas exactas, en el caso de la ecuación del drenaje agrícola unidimensional se utilizó aquella correspondiente a una difusividad constante y para la ecuación de Richards se recurrió a la solución exacta para flujo constante reportada en la literatura.

CAPITULO I. ECUACIONES DE BASE

1.1. Introducción

Un tratamiento riguroso del fenómeno del drenaje agrícola requiere de la descripción detallada del flujo del agua tanto en el dren como en el suelo, para el primer caso la herramienta básica son las ecuaciones de Saint-Venant para el flujo a superficie libre, en el segundo se dispone de la ecuación de Richards en su forma tridimensional. El dominio de las soluciones se define según la geometría del sistema de drenaje, un ejemplo se muestra en la figura No. 1.

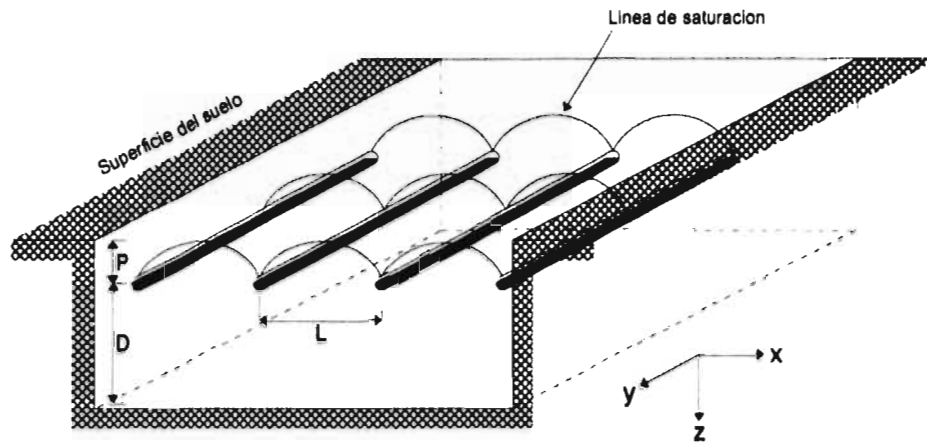


Figura 1. Esquema general de flujo para el drenaje agrícola.

1.2. Movimiento del agua en el dren

El movimiento del agua en el dren se describe utilizando las ecuaciones de Barré de Saint-Venant constituidas por las siguientes expresiones para la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y} = q_D \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g(J_0 - J) - \alpha \frac{q_D}{gA} U \quad (1.1.2)$$

donde t es el tiempo; y es la coordenada espacial en la dirección principal del movimiento del agua dentro del dren; U es la velocidad media; A es el área hidráulica; $Q=AU$ el gasto; h el tirante de agua contado desde la parte central inferior del dren hasta la superficie libre; J_0 es la pendiente topográfica del dren; J la pendiente de fricción; q_D es el volumen total de agua drenado por el suelo

en la unidad de tiempo por unidad de longitud de dren; g es la aceleración gravitacional; α es un parámetro considerado generalmente igual a la unidad.

1.3. Movimiento del agua en el suelo

1.3.1. Ecuación de continuidad

La aplicación del principio de conservación de masa a un volumen elemental de suelo, considerado indeformable, conduce a la ecuación de continuidad siguiente:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (1.2)$$

donde \mathbf{q} es el volumen de agua que atraviesa en la unidad de tiempo (gasto volumétrico) una superficie unitaria de suelo expuesta perpendicularmente a la dirección del movimiento, o flujo del agua; θ es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo o contenido volumétrico de agua, y es una función también del potencial de presión; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ es el operador gradiente; x, y, z son las coordenadas espaciales y t el tiempo.

1.3.2. Ley de Darcy

La ley de Darcy establece que el flujo del agua en un medio poroso es proporcional al gradiente hidráulico (∇H):

$$\mathbf{q} = -K(\psi)\nabla H \quad ; \quad H = \psi - z \quad (1.3)$$

donde H es el potencial hidráulico, igual a la suma del potencial de presión del agua en el suelo (ψ), expresado como la altura de una columna equivalente de agua (positivo en la zona saturada y negativo en la zona no saturada del suelo), y del potencial gravitacional asimilado a la coordenada vertical (z), orientada positivamente hacia abajo; $K=K(\psi)$ es un coeficiente empírico denominado conductividad hidráulica y que en un suelo parcialmente saturado es una función del potencial de presión.

1.3.3. Ecuación general de transferencia de agua en el suelo

La sustitución de la ecuación (1.3) en (1.2) conduce a la siguiente ecuación de transferencia de agua en el suelo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi)\nabla(\psi - z)] \quad (1.4)$$

La ecuación diferencial parcial así obtenida contiene explícitamente dos variables independientes: el contenido de humedad (θ) y el potencial de presión (ψ). Sin embargo, la existencia de una relación entre ellas, $\theta = \theta(\psi)$, conocida como la característica de humedad del suelo o curva de retención de humedad, permite expresar la ecuación diferencial en términos de una sola variable independiente. El conjunto formado por las relaciones $\theta = \theta(\psi)$ y $K = K(\psi)$ es

conocido con el nombre genérico de características hidrodinámicas del suelo y su estudio constituye una de las ramas más delicada de la física de suelos.

La ecuación establecida por Richards (1931) contiene como variable dependiente la presión del agua en el suelo. La ecuación establecida en detalle por Childs y Collis-George (1950) contiene como variable dependiente el contenido volumétrico de agua, y es clasificada como una ecuación tipo Fokker-Planck no lineal.

1.3.4. Ecuación de Richards.

La introducción de la capacidad específica definida por:

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (1.5)$$

en la ecuación (1.4) y la utilización de la regla de la cadena permiten obtener la ecuación de Richards (1931) que se expresa como:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla \psi] - \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (1.6)$$

cuya variable dependiente es la presión del agua en el suelo.

1.3.5. Ecuación Fokker-Planck.

La definición de la difusividad hidráulica como:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} \quad (1.7)$$

permite escribir la ley de Darcy de la siguiente manera:

$$\mathbf{q} = -D(\theta) \nabla \theta + K(\theta) \nabla z \quad (1.8)$$

La ecuación de transferencia toma la forma Fokker-Planck siguiente:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (1.9)$$

Para resolver la ecuación (1.6) o (1.9) es necesario definir las condiciones iniciales y de frontera en un problema particular, y además conocer las características hidrodinámicas $\theta(\psi)$ y $K(\psi)$, o $K(\theta)$ y $D(\theta)$.

1.4. Movimiento bidimensional del agua hacia los drenes

Una simplificación de la ecuación (1.6) puede obtenerse haciendo un corte transversal en el sentido del eje y , i.e. en la dirección del dren, por lo que, al considerar nulas las variaciones en dicho sentido, puede utilizarse la formulación bidimensional de la ecuación de Richards (1931):

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (1.10)$$

que ha de resolverse, sobre el dominio de solución que se muestra en la figura No. 2.

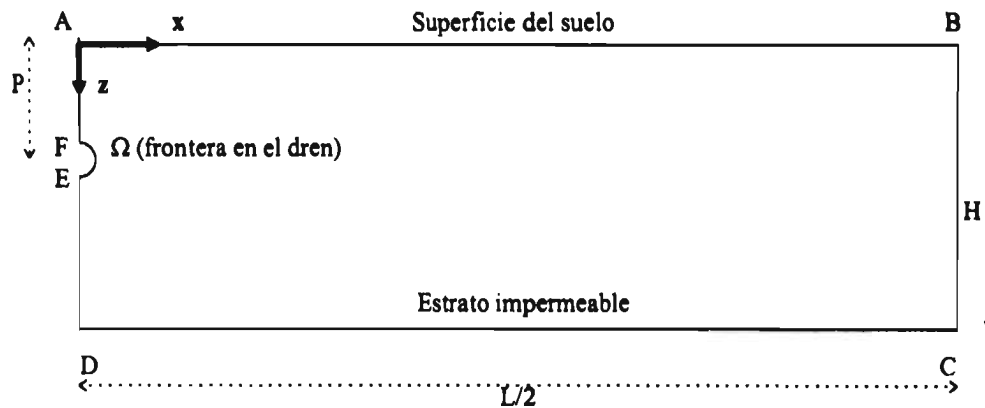


Figura 2. Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional.

1.5. Características hidrodinámicas

Para la solución de la ecuación de transferencia, ya sea analítica o numéricamente, es indispensable representar las propiedades hidrodinámicas del suelo expresando el potencial de presión (ψ) como una función del contenido volumétrico de humedad (θ) y la conductividad hidráulica K como una función de θ .

Fuentes *et al.* (1992) recomiendan utilizar dos pares de características hidrodinámicas: (1) la combinación de la difusividad $D(\theta)$ de Fujita (1952) y la relación entre la conductividad $K(\theta)$ y la difusividad $D(\theta)$ de Parlange *et al.* (1982), y (2) la combinación de la conductividad $K(\theta)$ de Brooks y Corey (1964) y de la presión $\theta(\psi)$ de van Genuchten (1980) con la restricción del modelo de Burdine (1953). La combinación (1) es más conveniente en estudios teóricos mientras que la combinación (2) es utilizada principalmente por la facilidad que presentan para identificar sus parámetros.

1.5.1. Van Genuchten-Brooks y Corey

La característica de humedad de van Genuchten (1980) se escribe como:

$$\Theta(\psi) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_d}\right)^n\right]^m} \quad (1.12)$$

donde Θ representa el grado de saturación:

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (1.13)$$

sujeta a la restricción de Burdine ($m = 1 - 2/n$).

La conductividad de Brooks y Corey (1964) se expresa:

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \Theta^\eta \quad (1.14)$$

en las ecuaciones anteriores θ es el contenido volumétrico de humedad, θ_s es el valor de este contenido a saturación, θ_r es el contenido de humedad residual, ψ es el potencial de presión y ψ_d , m y n son parámetros empíricos.

En la ecuación de Brooks y Corey el parámetro η se puede estimar con la relación propuesta por Fuentes (1992):

$$\eta = 2d \left(\frac{2}{mn} + 1 \right) \quad (1.15)$$

donde d es la relación de la dimensión fractal del suelo a la dimensión del espacio de Euclides, que se denomina dimensión-cociente y se define implícitamente en función de la porosidad del suelo (ϕ):

$$(1 - \phi)^d + \phi^{2d} = 1 \quad (1.16)$$

teniendo en cuenta que $0 < \phi < 1$ y $1/2 < d < 1$.

1.5.2. Fujita - Parlange.

La difusividad de Fujita (1952):

$$D(\Theta) = \frac{K_s \lambda_c}{\theta_s - \theta_r} \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha \Theta)^2} \quad (1.17)$$

donde α es un parámetro de forma ($0 < \alpha < 1$), λ_c es la escala de Bouwer (1964), y la conductividad de Parlange *et al.* (1982):

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \Theta \left[1 - \beta \frac{\int_0^1 D(\bar{\theta}) d\bar{\theta}}{\int_0^1 D(\theta) d\theta} \right] \quad (1.18)$$

la sustitución de (1.18) en (1.17) permite obtener una expresión para $K(\Theta)$:

$$K(\Theta) = K_s \frac{\Theta [1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta]}{1 - \alpha\Theta} \quad (1.19)$$

donde β es un parámetro adimensional ($0 < \beta < 1$).

La ecuación que define el potencial de presión en función del contenido volumétrico de humedad, que se deduce a partir de la expresión para la difusividad hidráulica, se escribe:

$$\psi(\Theta) = \lambda_c \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[\frac{1 - \alpha\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[\frac{1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] \right\} \quad (1.20)$$

1.6. Condiciones límite

1.6.1. Condición inicial

La condición inicial en el dominio de solución se especifica el potencial como una función conocida del espacio en $t = 0$.

1.6.2. Condiciones de frontera excepto en el dren

Las condiciones de frontera excepto la del dren corresponden a aquellas que se presentan en la superficie del suelo y en las fronteras inferior y laterales del dominio de solución.

En la superficie del suelo pueden tenerse condiciones de frontera de primer orden (tipo Dirichlet), cuando se conoce el potencial de presión (i.e. se conoce el valor de la variable dependiente; e.g. una lámina sobre la superficie), o bien de segundo orden (tipo Neumann), cuando el flujo de agua en la superficie es conocido (i.e. se conoce el gradiente de la incógnita en la dirección de la normal hacia afuera de la frontera del dominio; e.g. una lluvia o evaporación de intensidad conocida).

En la frontera inferior puede presentarse una condición de segundo orden, si se trata por ejemplo de un estrato impermeable, o bien de primer orden para un manto freático.

La naturaleza simétrica del flujo (figura 2), implica un flujo horizontal nulo en las fronteras laterales.

1.6.3. Condición de frontera en el dren

El enfoque más común para tratar la condición de frontera en el dren es imponer una condición de Dirichlet sobre la circunferencia del dren de tal forma que esta constituya una línea equipotencial de la red de flujo, una mejor aproximación se ha hecho considerando dicha circunferencia como una superficie de filtración, combinando el uso de condiciones de Dirichlet y Neumann sobre el dren. El presente trabajo intenta explorar una condición de tercer orden (Tipo Robbins) sobre la superficie del dren, que de hecho como se mostrará, incluye las otras dos aproximaciones.

1.6.3.1. Condición de frontera equipotencial en el dren.

Esta aproximación consiste en tener en cuenta la circunferencia del dren como una línea equipotencial imponiendo sobre esta una condición de Dirichlet, con potencial definido como:

$$\psi = z - P \quad (1.21)$$

donde P es la profundidad del centro del dren respecto a la superficie del suelo.

1.6.3.2. Condición de frontera de filtración en el dren.

La condición de filtración sobre la superficie del dren implica el tratamiento tanto de condiciones tipo Dirichlet como de tipo Neumann. Inicialmente ($t = 0$) se asigna una condición de primer orden a la fracción de circunferencia que está en contacto con suelo saturado, el potencial impuesto se define de manera similar al correspondiente a la condición de equipotencial, a la fracción restante, en contacto con suelo no saturado, se le asigna una condición de frontera impermeable i.e. una condición de Neumann con flujo nulo, la longitud de ambas fracciones se ajusta ($t > 0$) según la superficie libre alcanza a la fracción considerada como frontera impermeable, cuando esto sucede, se cambia la condición de frontera a una de primer orden, el proceso continúa según lo requiera el problema en análisis.

Por lo tanto, la condición de filtración implica considerar:

$$\psi = z - P$$

sobre la fracción en contacto con suelo saturado y, sobre la parte de la circunferencia considerada impermeable:

$$q_n = K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (22)$$

donde q_n es el flujo en el sentido de la normal hacia afuera de la circunferencia, calculado según la ley de Darcy.

1.6.3.3. Condición de frontera de Robbins en el dren

La condición de tercer orden o tipo Robbins sobre la superficie del dren puede deducirse como sigue:

Considérese el esquema de flujo:

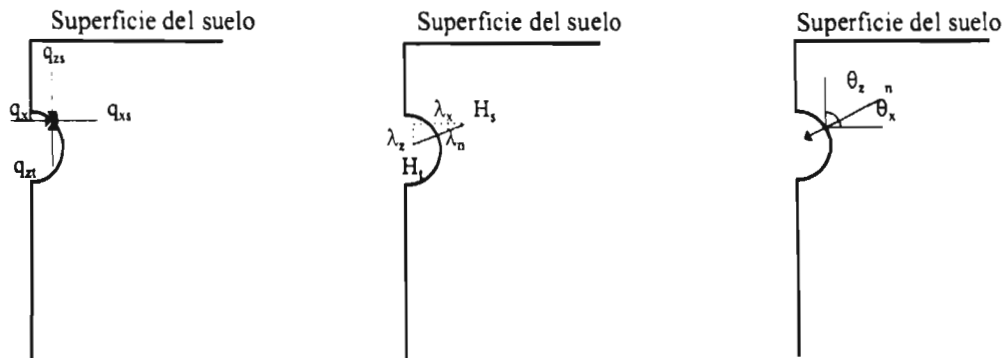


Figura 3. Esquema de flujo en el dren, longitudes y direcciones características

donde q_{xs} y q_{zs} son los flujos en las direcciones x y z , respecto al suelo, en un punto localizado a una profundidad z_i sobre la circunferencia del dren, q_{xt} y q_{zt} son los flujos en las direcciones indicadas, respecto al tubo en el mismo punto.

Los flujos en el suelo se calculan utilizando la ley de Darcy:

$$q_{zs} = -K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \quad (1.23.1)$$

$$q_{xs} = -K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (1.23.2)$$

los flujos respecto al tubo se expresan como:

$$q_{zt} = -K_1 \left[\frac{h - \psi}{\lambda_z} - 1 \right] \quad (1.24.1)$$

$$q_{xt} = -K_1 \left[\frac{h - \psi}{\lambda_x} \right] \quad (1.24.2)$$

Donde K_1 es una conductividad relativa del tubo, λ_x y λ_z son longitudes características (figura 3), h es la presión en el interior del dren, y ψ el potencial de presión en el suelo.

Por continuidad, en un punto localizado sobre la circunferencia del dren, el flujo de agua en el suelo es igual al que se presenta en el tubo, i.e. se pueden igualar las ecuaciones (1.23) y (1.24) y se obtiene:

dirección x:

$$K \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{K_t}{\lambda_x} (\psi - h) = 0 \quad (1.25)$$

dirección z:

$$K \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{K_t}{\lambda_z} (\psi - h) + (K_t - K) = 0 \quad (1.26)$$

que son expresiones de condiciones de frontera de tercer orden o tipo Robbins, o en general de tipo radiación.

Para expresar la condición de Robbins en el sentido de la normal hacia afuera, se tiene en cuenta la regla de la cadena para obtener el flujo en la dirección normal (q_n):

$$q_n = -K \frac{\partial H}{\partial n} = -K \left[\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right] \quad (1.27)$$

donde:

$$n_x = \frac{\partial n}{\partial x} = \cos \theta_x \quad n_z = \frac{\partial n}{\partial z} = \cos \theta_z \quad (1.28)$$

representan los cosenos directores asociados a la normal hacia afuera sobre la circunferencia del dren. Entonces se puede expresar el flujo normal como:

$$q_n = q_x \cos \theta_x + q_z \cos \theta_z \quad (1.29)$$

donde q_x y q_z son los flujos en las direcciones x y z calculados según (1.23).

El flujo relativo al tubo en la dirección normal es:

$$q_{nt} = -K_t \left[\frac{H_t - H_s}{\lambda_n} \right] = -K_t \frac{(h - \psi) - \lambda_n \cos \theta_z}{\lambda_n}$$

esto es:

$$q_{nt} = -K_t \left[\frac{h - \psi}{\lambda_n} - \cos \theta_z \right] \quad (1.30)$$

Al igualar el flujo normal en el tubo dado por (1.30) con una expresión del tipo (1.29) para el mismo flujo normal en el tubo se obtiene:

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{\cos\theta_x}{\lambda_x} + \frac{\cos\theta_z}{\lambda_z} \quad (1.31)$$

esto es, la relación entre las longitudes características y los cosenos directores para un punto sobre la circunferencia del dren no es arbitraria, por ejemplo se podría escoger λ_n como el espesor del tubo, proponer λ_x ó λ_z y determinar la restante.

Dado que el flujo respecto al tubo (ec. 1.30) y el flujo en el suelo (ec. 1.27) deben corresponder, se escribe la condición de Robbins en el sentido de la normal hacia afuera:

$$K \frac{\partial H}{\partial n} + \frac{K_t}{\lambda_n} (\psi - h) + K_t \cos\theta_z = 0 \quad (1.32)$$

al tomar las condiciones límite para el parámetro K_t se obtiene lo siguiente:

i). Si $K_t \rightarrow \infty$ la condición de frontera en el dren se expresaría como:

$$\psi = h + \lambda_n \cos\theta_z = h \quad (1.33)$$

donde se ha considerado $\theta_z = \pi/2$ radianes. Tomando $h = z - P$, la expresión (1.33) equivale a la (1.21) i.e. a considerar la circunferencia del dren como una equipotencial.

ii). Si $K_t \rightarrow 0$ se tiene en (1.32):

$$-K(\psi) \frac{\partial H}{\partial n} = q_n = 0 \quad (1.34)$$

que es equivalente a (1.22), lo cual implica, al combinarla con (1.21), obtener la condición de filtración sobre la circunferencia del dren, i.e. la condición de tercer orden contiene como casos particulares a las condiciones de frontera equipotencial y de filtración.

Resumen

En este capítulo se ha presentado el problema general del drenaje agrícola, estableciendo el problema físico-matemático que implica su tratamiento, i.e. las ecuaciones diferenciales básicas, sujetas a las condiciones inicial y de frontera necesarias, en el contexto de ciertas formas de relación entre los parámetros del flujo denominadas características hidrodinámicas. Se hizo énfasis en la condición de frontera que se presenta en el dren y se obtuvo una condición de tercer orden, que incluye como casos particulares aquellas más frecuentemente reportadas en la literatura.

CAPITULO II. SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS HIDRODINAMICAS DE FUJITA - PARLANGE

Introducción.

El estudio analítico del fenómeno de la infiltración tiene como base la linealización de la ecuación Fokker-Planck que lo describe para transformarla en la ecuación de calor. Se demuestra en este capítulo, que ello es posible solamente si se utilizan las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange. La forma de la difusividad presentada por Fujita (1952) se deduce como condición indispensable para linealizar el término difusivo de la ecuación Fokker-Planck, mientras que la forma de la conductividad propuesta por Parlange *et al.* (1982) es requisito necesario para linealizar el término convectivo.

2.1. Teorema

La ecuación de Fokker-Planck de la infiltración unidimensional

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t_s} = \frac{\partial}{\partial z_s} \left(D_s(\theta_s) \frac{\partial \theta_s}{\partial z_s} - K_s(\theta_s) \right) - T_s$$

se reduce a la ecuación de Burgers (1948)

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = p^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2} - p \left[\frac{1 - \beta + 2(\beta - \alpha \delta_1) \mu - \alpha Q - (\delta_0 - \delta_1) \alpha - \delta_1}{\sqrt{1 - \alpha}} \right] \frac{\partial \mu}{\partial \zeta}$$

bajo la transformación de Storm-Fujita

$$\zeta(z_s, t_s) = \int_0^{z_s} f[\theta_s(\bar{z}_s, t_s)] d\bar{z}_s$$

si y solamente si

$$f(\theta_s) = \frac{p}{\sqrt{D_s(\theta_s)}} ,$$

la difusividad es proporcionada por (Fujita, 1952)

$$D = \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha \theta_s)^2} ,$$

la conductividad es proporcionada por la relación entre la conductividad y la difusividad de Parlange *et al.* (1982)

$$K = \theta_* \left[1 - \beta + \beta \int_0^{\theta_*} D_* d\theta_* \right] = \frac{\theta_* [1 - \beta + (\beta - \alpha)\theta_*]}{1 - \alpha\theta_*},$$

y el término T que representa la extracción de agua por las plantas cumple el requisito presentado en este trabajo:

$$\int_0^{z_*} T(\bar{z}_*, t_*) d\bar{z}_* = \delta_0 + \delta_1 \mu(z_*, t_*)$$

donde $\mu(z, t) = \int_0^{\theta} D(\bar{\theta}) d\bar{\theta}$ es el potencial de Kirchoff, p es una constante, $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$, δ_1 y δ_0 constantes y Q es el flujo de Darcy en $z = 0$, los subíndices * indican variables adimensionales.

DEMOSTRACION

Una vez adimensionalizada la ecuación Fokker-Planck y escrita para el potencial de Kirchoff, la demostración se realiza en las siguientes fases:

1. Linealización del término difusivo
2. Linealización del término convectivo
3. Linealización del término de fuente

Adimensionalización de las ecuaciones de movimiento y Transformación de Kirchoff

El flujo unidimensional de agua en una columna de suelo se describe utilizando la ecuación tipo Fokker-Planck de la infiltración:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \right] - T \quad (2.1)$$

que se obtiene de la sustitución de la ley de Darcy

$$q = -D \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) \quad (2.2)$$

en la ecuación de conservación de masa:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z} - T \quad (2.3)$$

donde T es un término que representa la tasa de extracción de agua por las plantas y las demás variables se han definido en el capítulo anterior.

Es conveniente adimensionalizar las ecuaciones de movimiento utilizando las siguientes escalas:

$$\theta_* = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad (2.4.1)$$

$$K_* = \frac{K - K_0}{K_1 - K_0} \quad (2.4.2)$$

$$z_* = \frac{z}{\lambda_c} \quad (2.4.3)$$

$$T_* = \frac{T}{K_1 - K_0} \quad (2.4.4)$$

donde los subíndices 0 y 1 corresponden a las condiciones de referencia mínima y máxima respectivamente, para la variable indicada y λ_c es una longitud característica del flujo.

De la sustitución de estas escalas en la ley de Darcy y en la ecuación de continuidad, se deducen las escalas de difusividad y de tiempo:

$$D_* = \frac{\theta_1 - \theta_0}{(K_1 - K_0)\lambda_c} D \quad (2.5)$$

$$t_* = \frac{K_1 - K_0}{(\theta_1 - \theta_0)\lambda_c} t \quad (2.6)$$

Se puede entonces escribir la ecuación tipo Fokker - Planck adimensional:

$$\frac{\partial \theta_*}{\partial t_*} = \frac{\partial}{\partial z_*} \left(D_* \frac{\partial \theta_*}{\partial z_*} - K_* \right) - T_* \quad (2.7)$$

Además, es conveniente para el desarrollo posterior escalar la cantidad definida por la integral:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} D(\theta) d\theta \quad (2.8)$$

Usando las escalas de difusividad y contenido de humedad se obtiene:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} D(\theta) d\theta = (K_1 - K_0)\lambda_c \int_0^1 D_*(\theta_*) d\theta_*$$

Haciendo la integral del lado derecho igual a una constante C, y en particular tomando C=1, se obtiene la Escala de Bouwer:

$$\lambda_c = \frac{1}{K_1 - K_0} \int_{\theta_0}^{\theta_1} D(\theta) d\theta = \frac{1}{K_1 - K_0} \int_{\psi_0}^{\psi_1} K(\psi) d\psi \quad (2.9)$$

Para aligerar la notación, en lo sucesivo se omitirán los subíndices * para denotar variables adimensionales.

Para linealizar la ecuación (2.4) respecto al coeficiente de difusión (D) se usa la transformación integral de Kirchoff (1894):

$$\mu(z, t) = \int_0^{\theta} D(\bar{\theta}) d\bar{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{d\theta} = D \quad (2.10)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.7) se obtiene:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} - K - DT \right) = D \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - D \frac{dK}{d\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} - DT \quad (2.11)$$

Linealización del Término Difusivo.

La linealización del término difusivo de la ecuación Fokker-Planck adimensional se realiza introduciendo de una forma especial la transformación de Storm-Fujita. Se propone dicha transformación como la integral de una función desconocida (f) del contenido de humedad, cuya forma ha de determinarse de manera tal que se linealice el término difusivo:

$$\zeta(z, t) = \int_0^z f[\theta(\bar{z}, t)] d\bar{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\zeta}{dz} = f \quad (2.12)$$

La transformación se aplica a ambos miembros de la ecuación (2.11), de tal manera que de $\mu = \mu(z, t)$ se pase a $\mu = \mu(\zeta, t)$, utilizando la regla de la cadena sobre el operador derivada:

$$\frac{\partial}{\partial z} () = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} () = f \frac{\partial}{\partial \zeta} ()$$

De donde se deduce que:

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} = f \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \quad (2.13.1)$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = f \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \right) = f^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2} + f \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{d\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (2.13.2)$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = f^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2} + f \frac{df}{d\theta} \frac{1}{D} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (2.13.3)$$

Para transformar el lado izquierdo de (2.11), se tiene en cuenta que la derivada de μ respecto a t se ha calculado manteniendo z fijo y se aplica la regla de la cadena para expresarla en términos de la nueva transformación $\zeta = \zeta(z, t)$:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)_\zeta + \left(\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\right)_t \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)_z \quad (2.14)$$

La definición de la transformación implica que:

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)_z = \int_0^z \frac{df}{d\theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_z d\bar{z} \quad (2.15)$$

Además, de la ecuación de continuidad (2.1) se tiene:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = - \int_0^z \frac{df}{d\theta} \left[-\frac{\partial q}{\partial\bar{z}} - T \right] d\bar{z} \quad (2.16)$$

Entonces con (2.16) en (2.14):

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)_\zeta - \left(\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\right)_t \int_0^z \frac{df}{d\theta} \left[-\frac{\partial q}{\partial\bar{z}} - T \right] d\bar{z} \quad (2.17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.13) y (2.17) en (2.11) se obtiene:

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} - \frac{\partial\mu}{\partial\zeta} \int_0^z \frac{df}{d\theta} \left[\frac{\partial q}{\partial\bar{z}} + T \right] d\bar{z} = Df^2 \frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2} + f \frac{df}{d\theta} \left(\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\right)^2 - fD \frac{dK}{d\mu} \frac{\partial\mu}{\partial\zeta} - DT \quad (2.18)$$

De esta ecuación se puede determinar f de tal forma que el coeficiente de la segunda derivada sea lineal en el potencial de Kirchoff, i.e. es necesario que:

$$Df^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{p}{\sqrt{D}} \quad (2.19)$$

donde p es una constante. Con la finalidad de eliminar el término cuadrático en la derivadas en (2.28), la integral que aparece en dicha ecuación se evalúa como sigue:

$$\frac{df}{d\theta} = -r \quad (2.20)$$

las expresiones (2.19) y (2.20) son las condiciones de linealización del término difusivo.

Usando (2.20) la integral en (2.28) se evalúa como:

$$\int_0^z \frac{df}{d\theta} \frac{\partial q(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = -r[q(z, t) - q(0, t)] \quad (2.21)$$

Definiendo:

$$Q(t) = q(0, t) \quad (2.22)$$

y tomando $q(z, t)$ en (2.21) según la Ley de Darcy:

$$q = -D \frac{\partial \theta}{\partial z} + K = -\frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} + K = -f \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} + K$$

puede escribirse:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \int_0^z \frac{df}{d\theta} \frac{\partial q(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = -r \left[-\frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} + K - Q \right] \quad (2.23)$$

Sustituyendo (2.23) en (2.18) y agrupando se obtiene :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = p^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2} - \left[p\sqrt{D} \frac{dK}{d\mu} + r(K - Q) + r \int_0^z T d\bar{z} \right] \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} - DT \quad (2.24)$$

La forma de la difusividad que linealiza el término difusivo , en función del contenido de humedad, se obtiene precisamente de igualar las condiciones de linealización del término difusivo, i.e. la derivada de f según (2.19) con (2.20), e integrando en θ :

$$\sqrt{\frac{D_0}{D}} = 1 - \frac{b\sqrt{D_0}}{p} \theta$$

donde se ha denominado D_0 al valor de la difusividad correspondiente a $\theta = 0$.

Se define:

$$\alpha = \frac{r\sqrt{D_0}}{p} \quad (2.25)$$

Entonces se tiene:

$$\sqrt{\frac{D_0}{D}} = 1 - \alpha\theta \quad (2.26)$$

o bien

$$D = \frac{D_0}{(1 - \alpha\theta)^2} \quad (2.27)$$

De esta ecuación se aprecia que, siendo $D > 0$ para toda $\theta \in (0,1)$, entonces α debe ser menor que 1.

Al sustituir (2.27) en la transformación de Kirchoff $\mu = \mu(z, t)$ dada por la ecuación (2.10) se obtiene

$$\mu = \frac{D_0\theta}{1 - \alpha\theta} \quad (2.28)$$

De esta ecuación, como $D_0 > 0$, $0 \leq \theta \leq 1$ y $\mu > 0$, entonces $1 - \alpha\theta > 0$, esto es, $\theta < 1/\alpha$ y dados los límites de θ , entonces $\alpha > 0$. Entonces el parámetro cumple la restricción: $0 < \alpha < 1$.

Siendo por definición $\theta = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$, de la ecuación (2.28) se obtiene:

$$D_0 = 1 - \alpha \quad (2.29)$$

finalmente sustituyendo (2.29) en (2.27):

$$D = \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha\theta)^2} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.30)$$

que es la difusividad presentada por Fujita (1952), i.e. sólo esta forma de la difusividad permite linealizar en el potencial de Kirchoff el término difusivo de la ecuación Fokker-Planck de la infiltración unidimensional.

Conviene hacer un análisis del comportamiento de la difusividad dada por (2.30) en los límites de α .

Si $\alpha \rightarrow 0$ se obtiene de (2.30) $D=1$, i.e. una difusividad constante (Figura No. 3)

Si $\alpha \rightarrow 1$ se tienen dos casos:

$$\text{si } \theta < 1, D \rightarrow 0$$

$$\text{si } \theta = 1, D \rightarrow \infty$$

en otras palabras la difusividad (D) es una función delta de Dirac en el límite indicado

Del análisis anterior se observa que se dispone de una gama amplia de posibilidades de representación de la relación $D = D(\theta)$, desde una difusividad finita y constante, hasta una

difusividad puntual (en $\theta=1$) e infinita. Una ilustración de este comportamiento se muestra en la figura 3.

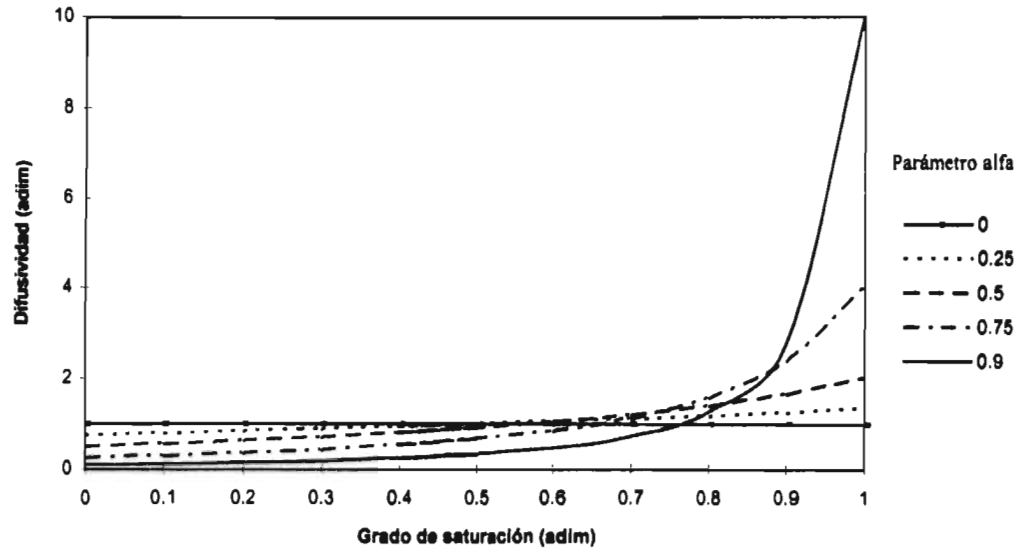


Figura No. 3. Comportamiento de la difusividad según el parámetro de forma α

Línealización del Término Convectivo.

Es necesario expresar la ecuación 2.24 en términos del potencial de Kirchoff y del parámetro α de Fujita. Una vez conocidas las expresiones que definen la función f (ecuación 2.30 sustituida en 2.19) y la constante b (despejando de 2.25 y sustituyendo en 2.29) se obtiene:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = p^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2} - p \left[\sqrt{D} \frac{dK}{d\mu} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha}} K \right] \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} - \frac{p\alpha Q}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} - \frac{p\alpha}{\sqrt{1-\alpha}} \left[\int_0^z T dz \right] \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} - DT \quad (2.31)$$

Para linealizar en μ el primer coeficiente del término convectivo de (2.31) se supone directamente su comportamiento lineal expresado mediante una línea recta:

$$\sqrt{D} \frac{dK}{d\mu} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha}} K = \alpha_0 + \alpha_1 \mu \quad (2.32)$$

Se obtiene la relación entre el potencial de Kirchoff y el contenido volumétrico de humedad al sustituir la difusividad de Fujita (2.30) en la definición del potencial de Kirchoff, resulta:

$$\theta = \frac{\mu}{1-\alpha + \alpha\mu} \quad (2.33)$$

Utilizando esta ecuación para expresar el denominador de la difusividad de Fujita, se obtiene la expresión del lado izquierdo de (2.32) en términos de α y μ :

$$\frac{1-\alpha+\alpha\mu}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{dK}{d\mu} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha}} K = \alpha_0 + \alpha_1\mu \quad (2.34)$$

El coeficiente α_0 puede obtenerse como sigue: dado que para $\theta=0$, $\mu=0$ y $K=0$, se tiene:

$$\left. \frac{dK}{d\mu} \right|_{\mu=0} = \frac{1}{D_0} \left. \frac{dK}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \frac{1}{1-\alpha} K'(\theta=0) \quad (2.35)$$

De la sustitución de (2.35) en (2.34) para las condiciones dadas, se deduce:

$$\alpha_0 = \frac{K'(\theta=0)}{\sqrt{1-\alpha}} \quad (2.36)$$

Para determinar α_1 , se observa que la ecuación (2.34) representa la derivada de un producto de funciones, que puede escribirse como:

$$\frac{d}{d\mu} \left[\frac{1-\alpha+\alpha\mu}{\sqrt{1-\alpha}} K \right] = \alpha_0 + \alpha_1\mu \quad (2.37)$$

Integrando:

$$\frac{1-\alpha+\alpha\mu}{\sqrt{1-\alpha}} K = \alpha_0\mu + \frac{1}{2}\alpha_1\mu^2 + \alpha_2 \quad (2.38)$$

Siendo que para $\theta=0$, $\mu=0$ y $K=0$, se deduce que $\alpha_2=0$. Por otra parte considerando que para $\theta=1$, $\mu=1$ y $K=1$ se obtiene el coeficiente:

$$\alpha_1 = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} - \alpha_0 \right) \quad (2.39)$$

Se sustituye (2.36) y (2.39) en (2.38), se despeja la conductividad hidráulica (K):

$$K = \mu \left[\frac{K'(\theta=0) + [1 - K'(\theta=0)]\mu}{1-\alpha+\alpha\mu} \right] \quad (2.40)$$

Definiendo:

$$\beta = 1 - K'(\theta=0) \quad (2.41)$$

y sustituyendo en (2.40) resulta:

$$K = \mu \left[\frac{1-\beta+\beta\mu}{1-\alpha+\alpha\mu} \right] \quad (2.42)$$

Dada la relación entre el contenido de humedad y el potencial de Kirchoff (ecuación 2.33), esta ecuación puede escribirse como:

Dada la relación entre el contenido de humedad y el potencial de Kirchoff (ecuación 2.33), esta ecuación puede escribirse como:

$$K = \theta[1 - \beta + \beta\mu]$$

Al sustituir el potencial de Kirchoff según su definición se tiene:

$$K = \theta \left[1 - \beta + \beta \int_0^{\theta} D d\theta \right] = \theta \left[1 - \beta \int_{\theta}^1 D d\theta \right] \quad (2.43)$$

de donde se puede obtener la forma de la conductividad propuesta por Parlange *et al.* (1982):

$$K(\theta) = \theta \left[1 - \beta \frac{\int_0^1 D(\bar{\theta}) d\bar{\theta}}{\int_0^1 D(\theta) d\theta} \right]$$

de tal forma que se linealiza el término convectivo de la ecuación Fokker-Planck escrita para el potencial de Kirchoff.

La conductividad presentada por Parlange *et al.* hace posible disponer de una amplia gama de representación de dicha característica hidrodinámica. Para el caso de un suelo con $\alpha = \beta$ se muestra la gráfica de la conductividad en la figura 4.

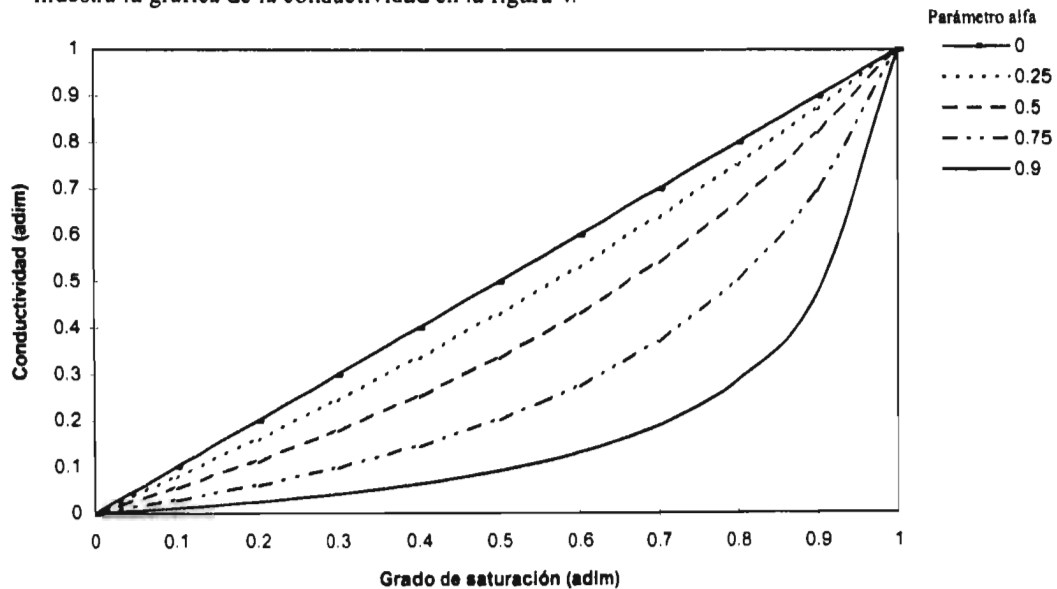


Figura No. 4. Comportamiento de la conductividad hidráulica para $\alpha = \beta$

Linealización del término de fuente

Se sustituye (2.36) y (2.39) en (2.32) considerando la definición del parámetro β , el resultado así obtenido se sustituye en la ecuación (2.31); resulta:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = p^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2} - p \left[\frac{1 - \beta + 2\beta\mu - \alpha Q}{\sqrt{1 - \alpha}} \right] \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} - \frac{p\alpha}{\sqrt{1 - \alpha}} \int_0^z T d\bar{z} \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} - DT \quad (2.44)$$

Para llevar la ecuación 2.44 a una forma de la ecuación de Burgers (1948), es necesario que los términos que incluyen el término de fuente (T) sean lineales en μ . Entonces conviene hacer:

$$\int_0^z T d\bar{z} = \int_0^{\zeta} \frac{T}{f} d\bar{\zeta} = \delta_0 + \delta_1 \mu \quad (2.45)$$

Donde se ha tenido en cuenta la transformación de Storm-Fujita. Para expresar el último término de (2.44) en función de μ , se observa que:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \delta_1 = \frac{T}{f} \quad (2.46)$$

entonces:

$$DT = Df\delta_1 \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} = p\delta_1 \frac{1 - \alpha + \alpha\mu}{\sqrt{1 - \alpha}} \frac{\partial \mu}{\partial \zeta}$$

Al sustituir (2.45) y (2.46) en (2.44) se obtiene la siguiente forma de la Ecuación de Burgers (1948):

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = p^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2} - p \left[\frac{1 - \beta + 2(\beta - \alpha\delta_1)\mu - \alpha Q - (\delta_0 - \delta_1)\alpha - \delta_1}{\sqrt{1 - \alpha}} \right] \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \quad (2.48)$$

Por lo tanto se ha demostrado que solamente las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange permiten linealizar la ecuación Fokker-Planck de la infiltración unidimensional y llevarla a una forma de la ecuación de Burgers

Conviene hacer el cambio de variable:

$$\xi = \frac{1}{p} \zeta \quad (2.49)$$

con lo que la forma de la ecuación de Burgers se escribe como:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi^2} - \left[\frac{1 - \beta + 2(\beta - \alpha\delta_1)\mu - \alpha Q - (\delta_0 - \delta_1)\alpha - \delta_1}{\sqrt{1 - \alpha}} \right] \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \quad (2.50)$$

2.2 Solución exacta para flujo constante en la superficie (Fuentes 1992)

2.2.1. La transformación de Hopf-Cole

Si se considera nula la extracción de agua por las plantas, la ecuación (2.48) toma la forma:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi^2} - \left[\frac{1 - \beta + 2\beta\mu - \alpha Q}{\sqrt{1 - \alpha}} \right] \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \quad (2.51)$$

Definiendo las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\beta}{\sqrt{1 - \alpha}} \\ b &= \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \alpha}} \\ c &= \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Al sustituir en (2.49) se obtiene:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi^2} - (2a\mu + b - cQ) \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \quad (2.53)$$

La introducción de la transformación funcional de Hopf-Cole, definida como:

$$2a\mu + b - cQ = -2 \frac{\partial}{\partial z} \ln(u) \quad (2.54)$$

permite transformar la ecuación de Burger en la ecuación lineal del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{c}{2} \frac{dQ}{dt} [\xi + f(t)] u \quad (2.55)$$

donde $f(t)$ representa una función arbitraria del tiempo.

De la definición del potencial de Hopf-Cole (ecuación 2.52) se obtienen las siguientes expresiones para la coordenada física (z), el potencial de Kirchoff (μ) y, en combinación con la ecuación (2.33), el contenido volumétrico de agua θ , en términos de la coordenada transformada ζ que funge como parámetro:

$$z(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}} \left\{ \left(1 - \alpha + \frac{cQ - b}{2a} \right) \zeta + \frac{\alpha}{a} \ln \left[\frac{u(0, t)}{u(\xi, t)} \right] \right\} \quad (2.56)$$

$$\mu(\xi, t) = \frac{1}{2a} \left\{ cQ - b - 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \ln[u(\xi, t)] \right\} = \frac{1}{2a} \left\{ cQ - b - \frac{2}{u(\xi, t)} \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, t) \right\} \quad (2.57)$$

$$\theta(\xi, t) = \frac{\mu(\xi, t)}{1 - \alpha + \alpha\mu(\xi, t)} \quad (2.58)$$

2.2.2. La solución exacta

Para el caso de flujo Q constante la ecuación (2.53) se escribe como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad (2.59)$$

Las condiciones límite para esta ecuación deben transformarse a partir de aquellas expresadas en las coordenadas físicas originales (z,t):

i) La condición de frontera en la superficie de la columna:

$$Q = -D \frac{\partial \theta}{\partial z} + K \quad (2.60)$$

ii). La condición inicial para el contenido de humedad en la columna:

$$\theta = \theta_i(z) \quad (2.61)$$

La transformación se realiza utilizando la definición del potencial de Hopf-Cole y considerando las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange, de tal forma que la condición de frontera se expresa como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{4} [b^2 + 2(2\beta - bc)Q + (cQ)^2] u = 0 \quad (2.62)$$

y la condición inicial:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2} [2a\mu_i + b - cQ] u = 0 \quad (2.63)$$

El problema se reduce a la ecuación lineal de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad (2.64)$$

sujeta a la condición inicial:

$$u = \exp[A(\xi)] \quad (2.65)$$

y a la condición de frontera:

$$u = \exp(\vartheta^2 t) \quad (2.66)$$

Donde:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 2(2\beta - bc)Q + (cQ)^2} \quad (2.67)$$

y

$$A(\xi) = \frac{1}{2} \left[cQ\xi - \int_0^\xi (2a\mu_1(\bar{\xi}) + b) d\bar{\xi} \right] \quad (2.68)$$

Para resolver el problema se descompone la función u en dos funciones (Carslaw y Jaeger, 1959):

$$u = u_r + u_c \quad (2.69)$$

La primera satisface la ecuación lineal del calor:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial \xi^2} \quad (2.70)$$

sujeta a las condiciones inicial y de frontera:

$$u_r = \exp(\vartheta^2 t) \quad \text{en} \quad \xi = 0 \quad (2.71)$$

$$u_r = 0 \quad \text{para} \quad \xi > 0 \quad (2.72)$$

La segunda satisface:

$$\frac{\partial u_c}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_c}{\partial \xi^2} \quad (2.73)$$

sujeta a:

$$u_c = 0 \quad \text{en} \quad \xi = 0 \quad (2.74)$$

$$u_r = \exp(A(\xi)) \quad \text{para} \quad \xi > 0 \quad (2.75)$$

La solución al primer problema es:

$$u_r = \frac{1}{2} \exp(-\vartheta\xi + \vartheta^2 t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t}} - \vartheta\sqrt{t}\right) + \frac{1}{2} \exp(\vartheta\xi + \vartheta^2 t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t}} + \vartheta\sqrt{t}\right) \quad (2.76)$$

y la del segundo se expresa como:

$$u_c = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \exp[A(\bar{\xi})] \left[\exp\left(-\frac{(\xi - \bar{\xi})^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi + \bar{\xi})^2}{4t}\right) \right] d\bar{\xi} \quad (2.77)$$

Finalmente, la solución general para una columna semi-infinita de suelo sujeta a una condición de flujo constante en su superficie, considerando las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange, está formada por las ecuaciones:

$$\theta(\xi, t) = \frac{\mu(\xi, t)}{1 - \alpha + \alpha\mu(\xi, t)} \quad (2.78)$$

$$\mu(\xi, t) = \frac{1}{2a} \left\{ cQ - b - \frac{2}{+u_c(\xi, t)} \left[\frac{\partial u_r(\xi, t)}{\partial \xi} + \frac{\partial u_c(\xi, t)}{\partial \xi} \right] \right\} \quad (2.79)$$

$$z(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}} \left\{ \left(1 - \alpha + \alpha \frac{cQ - b}{2a} \right) \xi + \frac{\alpha}{a} \ln \left[\frac{\exp(\vartheta^2 t)}{u_r(\xi, t) + u_c(\xi, t)} \right] \right\} \quad (2.80)$$

Resumen.

Se ha demostrado que solamente con la utilización de las características hidrodinámicas definidas por la difusividad de Fujita y la conductividad de Parlange, se puede linealizar en el potencial de Kirchoff la ecuación Fokker-Planck de la infiltración unidimensional, para llevarla a una forma de la ecuación de Burgers. Para dichas características y una condición de flujo constante en la superficie de la columna de suelo, se mostró la solución exacta.

Se ha propuesto una forma de expresar la tasa de transpiración en el contexto de la física del suelo, de tal forma que esta se considera proporcional al componente difusivo del fenómeno de la infiltración.

CAPITULO III. SOLUCIONES CLÁSICAS

Introducción.

La aproximación clásica de la ecuación del drenaje agrícola unidimensional constituye en este caso el eje del análisis. Inicialmente, se muestra que en efecto dicha ecuación es resultado de una simplificación de la ecuación de Richards. Posteriormente, se proponen soluciones a la ecuación unidimensional: i) para el caso de régimen permanente se obtienen las fórmula de Hooghudt, muy utilizada en la práctica del drenaje agrícola, ii) se sujeta la ecuación diferencial a una condición de Dirichlet en el dren, se linealiza la ecuación para desarrollar la solución Glover-Dumm y se propone una nueva solución. iii). se aplica una condición de Robbins o de radiación en el dren, se linealizan la ecuación diferencial, vía una hipótesis sobre el coeficiente difusivo, y la condición de frontera de forma tal que se conserva la masa.

3.1. Una primera integración de la ecuación de Richards para un acuífero libre

La ecuación del drenaje agrícola unidimensional se deriva de consideraciones megascópicas fundamentadas en el comportamiento del sistema a nivel acuífero. De otra parte, la descripción del flujo de agua en el suelo mediante la ecuación de Richards está basada en la consideración del suelo como un medio de Darcy. La correspondencia de ambos esquemas es indispensable para demostrar que en efecto, la ecuación de los acuíferos, y en particular la ecuación del drenaje agrícola unidimensional, son una simplificación de la ecuación general de Richards. Con este objetivo, considérese el siguiente sistema de flujo:

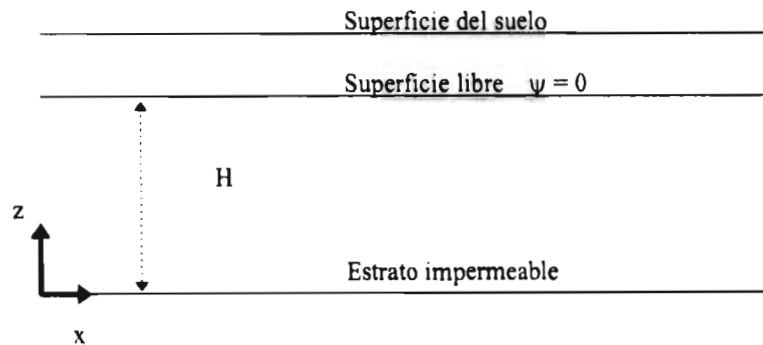


Figura 5. Esquema de flujo en acuífero.

Para un acuífero libre la ecuación de Richards en su forma general se escribe:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} - T \quad (3.1)$$

donde T representa la extracción de agua por las plantas.

Una primera integración en z de la ecuación (3.1) conduce a:

$$\int_0^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = - \int_0^H \frac{\partial q_x}{\partial x} dz - \int_0^H \frac{\partial q_y}{\partial y} dz - \int_0^H \frac{\partial q_z}{\partial z} dz - \int_0^H T dz \quad (3.2)$$

La evaluación de las integrales en la ecuación (3.2) se realiza como sigue: la tercera integral del lado derecho se evalúa directamente:

$$\int_0^H \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = q_z(x, y, H, t) - q_z(x, y, 0, t) = q_{zH} \quad (3.3)$$

donde se ha tenido en cuenta que el flujo en el estrato impermeable $q(x, y, 0, t)$ es nulo. Las demás integrales se expresan utilizando la Regla de Leibniz:

$$\int_0^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^H \theta dz - \theta(x, y, H, t) \frac{\partial H}{\partial t}$$

en la integral del lado derecho θ es constante entre $z = 0$ y $z = H$ e igual a su valor a saturación θ_s , y al valor $\theta(x, y, H, t)$ en una vecindad sobre H se le denomina θ_{ns} de tal manera que se puede definir la porosidad drenable como la diferencia entre ambos contenidos de humedad:

$$\mu = \theta_s - \theta_{ns} \quad (3.4)$$

entonces, la integral (3.4) se escribe como:

$$\int_0^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.5)$$

las demás integrales en (3.2) se expresan de forma similar:

$$\int_0^H \frac{\partial q_x}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} [H \bar{q}_x(x, y, z, t)] - q_x(x, y, H, t) \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\int_0^H \frac{\partial q_y}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} [H \bar{q}_y(x, y, z, t)] - q_y(x, y, H, t) \frac{\partial H}{\partial y} \quad (3.7)$$

Los flujos promedio de las ecuaciones (3.6) y (3.7) se calculan utilizando la ley de Darcy:

$$\bar{q}_x = \frac{1}{H} \int_0^H q_x dz = - \frac{1}{H} \int_0^H K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} dz \quad (3.8.1)$$

$$\bar{q}_y = \frac{1}{H} \int_0^H q_y dz = -\frac{1}{H} \int_0^H K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} dz \quad (3.8.2)$$

La sustitución de (3.3), (3.5), (3.6) y (3.7) en (3.2) conduce a:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial(H\bar{q}_x)}{\partial x} - \frac{\partial(H\bar{q}_y)}{\partial y} - \left[q_x(x, y, H, t) - q_x(x, y, H, t) \frac{\partial H}{\partial x} - q_y(x, y, H, t) \frac{\partial H}{\partial y} \right] - \int_0^H T dz \quad (3.9)$$

Tomando en cuenta que el elemento de control se localiza en la zona saturada del acuífero, los flujos de Darcy son:

$$\bar{q}_x = -\frac{1}{H} \int_0^H K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} dz = -\frac{K_s}{H} \int_0^H \frac{\partial \psi}{\partial x} dz$$

$$\bar{q}_y = -\frac{1}{H} \int_0^H K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} dz = -\frac{K_s}{H} \int_0^H \frac{\partial \psi}{\partial y} dz$$

y considerando una distribución hidrostática de presiones, lo que permite expresar el potencial de presión (ψ) como:

$$\psi = H - z \quad (3.10)$$

los flujos de Darcy promedio se pueden expresar como:

$$\bar{q}_x = -K_s \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.11.1)$$

$$\bar{q}_y = -K_s \frac{\partial H}{\partial y} \quad (3.11.2)$$

Lo anterior muestra que considerar una distribución hidrostática de presiones equivale a adoptar la hipótesis de Dupuit-Forcheimer, es decir, que el flujo es proporcional al gradiente de la carga hidráulica (H) en la dirección del flujo, con constante de proporcionalidad K_s .

Al sustituir (3.11) y (3.3) en (3.9) se obtiene la ecuación general para el flujo en acuíferos libres:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_s H \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_s H \frac{\partial H}{\partial y} \right] - \left[q_{zH} - q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} - q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} \right] - \int_0^H T dz \quad (3.12)$$

La orientación del eje z positivo hacia arriba implica que q_{zH} es una extracción si su signo es positivo y un aporte en caso contrario.

Denotando:

$$R = - \left[q_{zH} - q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} - q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} \right] - \int_0^H T dz$$

se escribe la ecuación (3.12) en notación vectorial:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot [K_s H \nabla H] + R \quad (3.13)$$

La ecuación ecuación del drenaje agrícola unidimensional:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_s H \frac{\partial H}{\partial x} \right] + R \quad (3.14)$$

se obtiene a partir de la ecuación (3.13) bajo los siguientes supuestos:

1. Se considera que el flujo en la superficie libre en las direcciones x - y es nulo.
2. Las variaciones en el sentido del eje y son pequeñas por lo que es válido analizar el sistema en un corte transversal a dicho eje.
3. La extracción de agua por las plantas es nula.

3.2. Régimen permanente: Soluciones simplificadas

El dominio de solución de la ecuación del drenaje agrícola unidimensional es una sección, entre dos drenes, transversal al eje y y como se muestra en la figura 6.

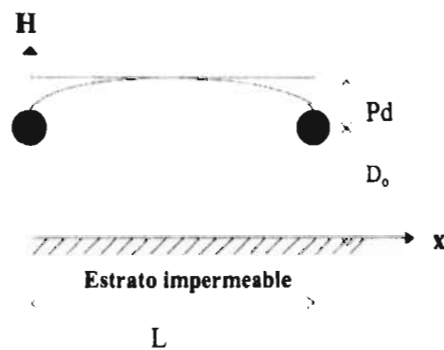


Figura 6. Esquema de flujo para la ecuación del drenaje agrícola unidimensional.

La primera aproximación a la solución de la ecuación (3.13) es considerar régimen permanente y reducir el problema a una sola variable independiente. En el límite $t \rightarrow \infty$, el lado izquierdo de (3.13) es cero por lo que se obtiene la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{dx} \left(K_s H \frac{dH}{dx} \right) + R = 0 \quad (3.15)$$

sujeta a las condiciones de frontera (figura 6):

$$\frac{dH}{dx} = 0 \quad x = L/2 \quad (3.16.1)$$

$$H = D_o \quad x = 0 \quad (3.16.2)$$

$$H = H_{L/2} \quad x = L/2 \quad (3.16.3)$$

La primera condición de frontera implica aceptar que la superficie libre es horizontal en la mitad de la separación interdrenes.

La solución de (3.15) sujeta a (3.16) proporciona la ecuación de la superficie libre para estado permanente. Una primera integración de (3.15) conduce a:

$$K_s H \frac{dH}{dx} + Rx + C_1 = 0$$

La condición de frontera (3.16.1) implica que $C_1 = -RL/2$, sustituyendo e integrando nuevamente:

$$\frac{K_s}{2} H^2 + \frac{1}{2} R \left(x - \frac{L}{2} \right)^2 + C_2 = 0$$

La condición en la frontera $x = 0$ implica que:

$$C_2 = - \left[\frac{K_s}{2} D_o^2 + \frac{R}{8} L^2 \right]$$

La sustitución de esta constante permite obtener la ecuación que describe la forma de la superficie libre entre dos drenes:

$$K_s (H^2 - D_o^2) + R(x - L/2)^2 - RL^2/4 = 0 \quad (3.17)$$

Sustituyendo $x = L/2$ se obtiene la siguiente expresión para la separación entre drenes:

$$L^2 = \frac{4K_s}{R} (H_{L/2}^2 - D_o^2) \quad (3.18)$$

que corresponde a la fórmula de Hooghoudt (1936) para el caso en que el dren se localiza sobre el estrato impermeable, es decir, con $H_{L/2} = \tilde{H}$, se obtiene la conocida fórmula:

$$L^2 = \frac{4K_s(\tilde{H}^2 - D_o^2)}{R} \quad (3.19)$$

o bien:

$$R = \frac{4K(\tilde{H}^2 - D_o^2)}{L^2} \quad (3.20)$$

A partir de la ecuación (3.20) se puede obtener la siguiente fórmula para el flujo hacia el dren cuando este se localiza en la interface entre dos capas de suelo diferentes, con conductividades K_t y K_b para las zonas sobre y bajo el dren, respectivamente:

$$R = \frac{8K_b D_o h + 4K_t E^2}{L^2} \quad (3.21)$$

donde E es el la elevación del manto freático con respecto al nivel del agua en el dren.

La aplicación del resultado a un dren que no alcanza el estrato impermeable, sea este a cielo abierto o enterrado, requiere de considerar las pérdidas de carga debidas al carácter radial del flujo en la cercanía de los drenes. Para tal efecto, Hooghoudt (1940) introduce un estrato impermeable imaginario y reemplaza los drenes enterrados por drenes a cielo abierto. A la diferencia de nivel entre el estrato impermeable imaginario y el dren se le denomina profundidad equivalente (d).

El problema de la determinación de la profundidad equivalente se resuelve utilizando el método de las imágenes de la teoría del flujo potencial. El resultado (van der Molen y Wesseling, 1991) es:

$$d = \frac{\frac{\pi L}{8}}{\ln \frac{L}{\pi r_0} + F(x)} \quad (3.22)$$

donde:

$$x = \frac{2\pi D}{L}$$

y

$$F(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \coth(nx)$$

La ecuación (3.21) es válida para drenes localizados en la interface de dos capas de suelo, para su generalización, ya sea para drenes colocados arriba o abajo de la interface, se requiere del uso de la fórmula de Ernst(1956), quién consideró el flujo bidimensional hacia un dren a cielo abierto, aunque dividido en tres fases: vertical, horizontal y radial. Para ello, calcula la carga total necesaria (H_t) en el sistema como la suma de aquellas relativas al flujo vertical (H_v) usando la ley de Darcy, flujo horizontal (H_h) según la ecuación (3.21) con $D \gg E$, y radial (H_r), es decir:

$$H_t = H_v + H_h + H_r,$$

o bien:

$$H_t = q \left(\frac{D_v}{K_v} + \frac{L^2}{8 \sum (KD)_h} + \frac{L}{\pi K_r} \ln \frac{aD_r}{u} \right) \quad (3.23)$$

que es la fórmula de Ernst para el diseño de drenaje agrícola, en la cual D_v es el espesor de la capa en la que se asume flujo vertical, K_v es la conductividad vertical, $\sum(KD)_h$ es la transmisividad de las capas donde se presenta flujo horizontal, K_r es la conductividad radial, D_r es el espesor de la capa donde se considera el flujo como radial, u es el perímetro mojado del dren y a es un coeficiente relativo a la resistencia al flujo radial, que depende del perfil del suelo y la posición del dren.

Es importante notar que las fórmulas para el espaciamiento entre drenes para el régimen permanente (ecuaciones 3.20 y 3.23) no consideran de manera explícita dos características importantes del sistema de drenaje como son el diámetro del dren (o su forma en general), y su profundidad respecto al suelo, la primera es básica para definir la capacidad del dren y la segunda es muy importante para considerar el grado de abatimiento de la superficie libre (manto freático) que se conseguirá al instalar el sistema de drenaje. Con respecto a la profundidad de colocación de los drenes, una primera aproximación se obtiene con las soluciones para régimen transitorio que se presentan a continuación.

3.3. Régimen Transitorio

3.3.1. Condición de Dirichlet en el dren

Para el tratamiento del régimen transitorio, se linealiza la ecuación del drenaje agrícola unidimensional para reducir el problema a uno equivalente al de conducción de calor. Inicialmente se sujeta la ecuación del drenaje agrícola a una condición de frontera tipo Dirichlet en el dren.

Considerando el esquema de figura 6, la ecuación que rige el abatimiento del manto freático entre dos drenes se dedujo como:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = K_s \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + R \quad (3.14)$$

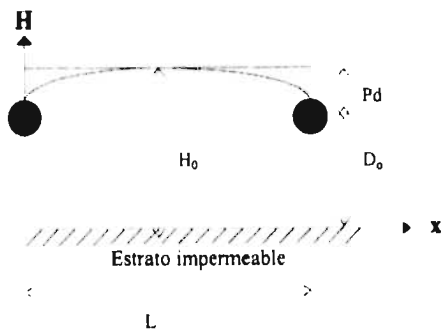


Figura 6. Esquema de flujo para la ecuación del drenaje agrícola unidimensional.

Para describir la curva de abatimiento, sin considerar una recarga, se reduce la ecuación (3.14) a:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = K_s \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (3.24)$$

que se sujeta a las condiciones inicial y de frontera tipo Dirichlet:

$$\begin{aligned} H &= D_0, \quad t > 0, \quad x = 0 \\ H &= D_0, \quad t > 0, \quad x = L \\ H &= H_0(x), \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde H es la elevación del manto freático medida desde el estrato impermeable, $H_0(x)$ es la elevación inicial.

Con la finalidad de obtener soluciones libres de parámetros es necesario adimensionalizar la ecuación y sus condiciones de frontera utilizando las siguientes escalas:

$$\begin{aligned} x_* &= \frac{x}{L} \\ H_* &= \frac{H}{H_0} \\ t_* &= \frac{t}{\tau} \end{aligned}$$

Como puede apreciarse, la escala de tiempo no es independiente de los parámetros físicos y debe deducirse sustituyendo las otras escalas en la ecuación original:

$$\tau = \frac{\mu L^2}{K_s H_0}$$

Obtenida la escala de tiempo, el problema adimensional consiste en resolver la siguiente ecuación :

$$\frac{\partial H_*}{\partial t_*} = \frac{\partial}{\partial x_*} \left(\alpha(H_*) \frac{\partial H_*}{\partial x_*} \right) = \alpha(H_*) \frac{\partial^2 H_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial \alpha(H_*)}{\partial x_*} \frac{\partial H_*}{\partial x_*} \quad (3.26)$$

sujeta a las condiciones:

$$\begin{aligned} H_* &= \delta, \quad t_* > 0, \quad x_* = 0 \\ H_* &= \delta, \quad t_* > 0, \quad x_* = 1 \\ H_* &= 1, \quad t_* = 0, \quad 0 \leq x_* \leq 1 \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde δ es la relación de la elevación de los drenes con la elevación de la superficie del suelo, medidos desde el estrato impermeable, esto es :

$$\delta = \frac{D_0}{H_0} \quad (3.28)$$

Puesto que las soluciones analíticas aproximadas implican la reducción de (3.24) a la ecuación lineal del calor, se obtiene la solución para dicha ecuación:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_*} = \beta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_*^2}$$

sujeta a las condiciones inicial y de frontera:

$$\begin{aligned} \eta &= 0, \quad t_* > 0, \quad x_* = 0 \\ \eta &= 0, \quad t_* > 0, \quad x_* = 1 \\ \eta &= 1, \quad t_* = 0, \quad 0 \leq x_* \leq 1 \end{aligned}$$

Por separación de variables y resulta:

$$\eta(x_*, t_*) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \exp[-\beta(2n+1)^2 \pi^2 t_*] \sin[(2n+1)\pi x_*] \quad (3.29)$$

3.3.1.1. Solución Glover - Dumm

Introduciendo la hipótesis simplificadora de considerar el coeficiente correspondiente a la difusividad en la ecuación adimensional (3.26) igual a δ , y despreciando el término cuadrático de las derivadas se obtiene:

$$\frac{\partial H_*}{\partial t_*} = \delta \frac{\partial^2 H_*}{\partial x_*^2} \quad (3.30)$$

sujeta a las condiciones:

$$\begin{aligned} H_* &= \delta, \quad t_* > 0, \quad x_* = 0 \\ H_* &= \delta, \quad t_* > 0, \quad x_* = 1 \\ H_* &= 1, \quad t_* = 0, \quad 0 \leq x_* \leq 1 \end{aligned}$$

La solución, denominada de Glover-Dumm es:

$$H(x_*, t_*) = \delta + (1 - \delta)\eta(x_*, t_*) \quad (3.31)$$

con $\beta = \delta$ en la ecuación (3.29) para determinar $\eta(x_*, t_*)$

3.3.1.2. Una nueva solución

Si se multiplican por $2H_*$ ambos lados de la ecuación (3.26), se obtiene:

$$2H_* \frac{\partial H_*}{\partial t_*} = H_* \frac{\partial}{\partial x_*} \left(2H_* \frac{\partial H_*}{\partial x_*} \right)$$

que se puede escribir como:

$$\frac{\partial H_s^2}{\partial t_s} = H_d \frac{\partial^2 H_s^2}{\partial x_s^2}$$

donde H_d puede tomarse como $H_d = \beta = \delta$.

Denotando:

$$\varphi = H_s^2 \tag{3.32}$$

se obtiene para φ la ecuación :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_s} = H_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s^2} \tag{3.33}$$

sujeta a las condiciones inicial y de frontera:

$$\begin{aligned} \varphi &= \delta^2, \quad t_s > 0, \quad x_s = 0 \\ \varphi &= \delta^2, \quad t_s > 0, \quad x_s = 1 \\ \varphi &= 1, \quad t_s = 0, \quad 0 \leq x_s \leq 1 \end{aligned} \tag{3.34}$$

La solución (φ) a este problema se obtiene con relación a la ecuación (3.29) como:

$$\varphi(x_s, t_s) = \delta^2 + (1 - \delta^2)\eta(x_s, t_s)$$

por lo que la solución para la elevación del nivel freático es:

$$H_s(x_s, t_s) = [\delta^2 + (1 - \delta^2)\eta(x_s, t_s)]^{1/2} \tag{3.35}$$

3.3.2. Condición de Robbins o de radiación en el dren.

La condición de Robbins en el dren se deduce a partir de los datos registrados en campo (Lote 17 del Distrito de Riego Valle del Carrizo), que definen la relación carga-gasto en un dren, al representarlos por la forma parabólica (figura 7):

$$Q = \beta_d H(H - D_o) \tag{3.36}$$

donde Q es el gasto en el dren por unidad de superficie [L/T], β_d es un coeficiente de descarga [1/T].

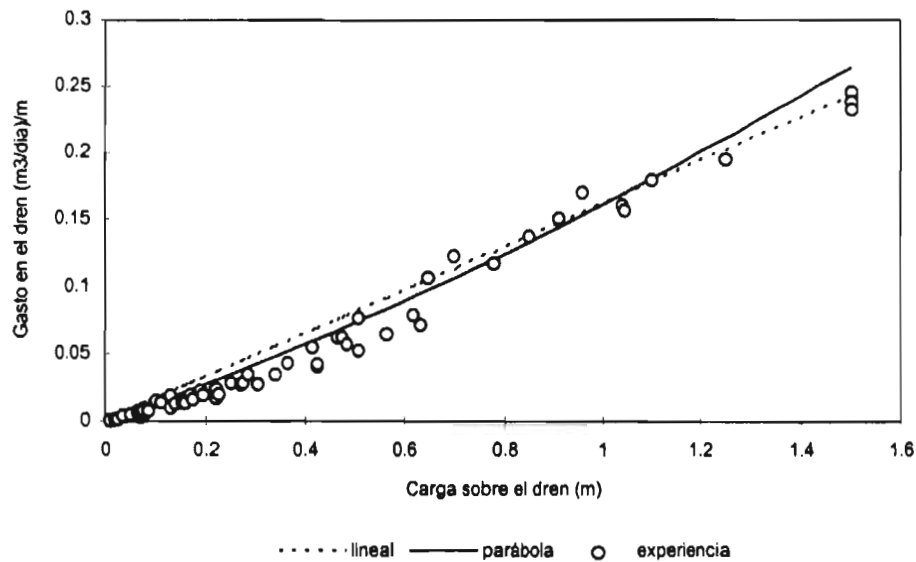


Figura 7: Relación carga-gasto en un dren subterráneo

El flujo en el dren, calculado según la Ley de Darcy, es:

$$Q = -K_s H \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.37)$$

Al igualar (3.36) con (3.37) se obtiene la condición en la frontera:

i). En $x = 0$

$$-K_s H \frac{\partial H}{\partial x} = -\beta_d H(H - D) \quad (3.38a)$$

ii). En $x = L$

$$-K_s H \frac{\partial H}{\partial x} = \beta_d H(H - D) \quad (3.38b)$$

En (3.38a) se ha considerado la dirección negativa del flujo en el dren en el sentido positivo de x .

De esta forma, el problema consiste en resolver la ecuación del drenaje agrícola unidimensional:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_s H \frac{\partial H}{\partial x} \right] + R \quad (3.39)$$

sujeta a las condiciones:

$$-K_s H \frac{\partial H}{\partial x} + \beta_d H(H - D) = 0 \quad x = 0 \quad t > 0 \quad (3.40a)$$

$$K_1 H \frac{\partial H}{\partial x} + \beta_d H(H - D) = 0 \quad x = L \quad t > 0 \quad (3.40b)$$

$$H = f(x) \quad 0 \leq x \leq L \quad t = 0 \quad (3.40c)$$

Con las escalas definidas anteriormente se expresa el problema en su forma adimensional:

$$\frac{\partial H_*}{\partial t_*} = \frac{\partial}{\partial x_*} \left[K_1 H_* \frac{\partial H_*}{\partial x_*} \right] + R_* \quad (3.41)$$

sujeta a:

$$-K_1 H_* \frac{\partial H_*}{\partial x_*} + \beta_d H_* (H_* - \delta) = 0 \quad x_* = 0 \quad t_* > 0 \quad (3.42a)$$

$$K_1 H_* \frac{\partial H_*}{\partial x_*} + \beta_d H_* (H_* - \delta) = 0 \quad x_* = 1 \quad t_* > 0 \quad (3.42b)$$

$$H_* = f(x_*) \quad 0 \leq x_* \leq 1 \quad t_* = 0 \quad (3.42c)$$

3.3.2.1. Solución analítica aproximada

Una solución analítica aproximada puede obtenerse linealizando la ecuación (3.41) y las condiciones de frontera (3.42a) y (3.42b). Se resolverá, como en las otras soluciones aproximadas presentadas, para la carga sobre el dren (h):

$$h = H - D_o \quad (3.43)$$

Con el fin de conservar la masa al aproximar la forma parabólica de la relación carga-gasto mediante una línea recta, i.e.:

$$Q = \beta_d h(h + P_{cr}) \quad (3.44)$$

como

$$Q = \beta_d \kappa h P_{cr} \quad (3.45)$$

donde P_{cr} es un parámetro, es necesario que el área bajo la recta (3.45) sea igual a aquella bajo la parábola (3.44). Para ello, se integra desde 0 hasta un valor máximo de h, denominado h_M , de donde se obtiene la forma adecuada de κ :

$$\kappa = 1 + \frac{2}{3} \frac{h_M}{P_{cr}}$$

La ecuación original expresada para la carga sobre el dren es:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_s (h + D_o) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + R$$

que se puede expresar como:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = DK_s \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{h}{D_o} + 1 \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + R$$

Haciendo:

$$\kappa = 1 + \frac{h}{D_o} = 1 + \frac{2 h_M}{3 P_{cr}} \quad (3.46)$$

la ecuación original se transforma en:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \kappa K_s D_o \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + R \quad (3.47)$$

La introducción de las siguientes escalas permite plantear el problema linealizado en su forma adimensional:

$$x^* = \frac{x}{L}$$

$$h^* = \frac{h}{h_M}$$

$$t^* = \frac{t}{\tau}$$

$$R^* = \frac{R}{\chi}$$

donde:

$$\tau = \frac{\mu L^2}{K_s D_o}$$

$$\chi = \frac{L^2}{K_s D_o h_M}$$

Entonces el problema consiste en resolver:

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} = \kappa \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}} + R^* \quad (3.48)$$

sujeta a:

$$-\frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \gamma_d h^* = 0, \quad x^* = 0, \quad t^* > 0 \quad (3.49a)$$

$$\frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \gamma_d h^* = 0, \quad x^* = 1, \quad t^* > 0 \quad (3.49b)$$

$$h^* = f(x_*), \quad 0 \leq x^* \leq 1, \quad t^* = 0 \quad (3.49c)$$

donde se ha definido:

$$\gamma_d = \frac{\beta_d L}{K_s} \quad (3.50)$$

Para linealizar (3.48) es necesario que el término que representa la recarga (R^*) sea una función de la carga h^* , i.e. se supone:

$$R = -\beta_r h^* \quad (3.51)$$

donde el signo de la constante de proporcionalidad es negativo para el caso de evaporación, sin embargo no hay restricción a este respecto. La ecuación (3.48) se transforma en:

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} = \kappa \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}} - \gamma_r h^* \quad (3.52)$$

donde:

$$\gamma_r = \frac{L^2}{K_s D} \beta_r \quad (3.53)$$

El uso de la transformación:

$$h^* = v^* \exp(-\gamma_r t^*) \quad (3.54)$$

permite llevar (3.52) a la ecuación lineal de calor:

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} = \kappa \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} \quad (3.55)$$

que se sujeta a las condiciones de frontera e inicial:

$$-\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \gamma_d v^* = 0, \quad x^* = 0, \quad t^* > 0 \quad (3.56a)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \gamma_d v^* = 0, \quad x^* = 1, \quad t^* > 0 \quad (3.56b)$$

$$v^* = f(x_*), \quad 0 \leq x^* \leq 1, \quad t^* = 0 \quad (3.56c)$$

La solución de este sistema se obtiene por separación de variables (Carslaw y Jaeger, 1959, pag. 118). Al invertir la transformación (3.54) se obtiene la evolución de la carga:

$$h^*(x^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp[-(\kappa \alpha_n^2 + \gamma_d) t^*] \left[\cos(\alpha_n x^*) + \frac{\gamma_d}{\alpha_n} \sin(\alpha_n x^*) \right] \quad (3.57)$$

donde los valores característicos α_n satisfacen:

$$\frac{\alpha_n}{\gamma_d} - \frac{\gamma_d}{\alpha_n} = 2 \cot \alpha_n \quad (3.58)$$

y las amplitudes se calculan como:

$$A_n = \frac{2\alpha_n}{\alpha_n^2 + \gamma_d^2 + 2\gamma_d} \int_0^1 f(x^*) \left[\cos(\alpha_n x^*) + \frac{\gamma_d}{\alpha_n} \sin(\alpha_n x^*) \right] dx^* \quad (3.59)$$

Para el caso particular en que la condición inicial está dada por $f(x^*)=1$ las amplitudes se calculan como:

$$A_n = \frac{2\alpha_n}{\alpha_n^2 + \gamma_d^2 + 2\gamma_d} \left[\frac{1}{\alpha_n} \sin \alpha_n - \frac{\gamma_d}{\alpha_n^2} (\cos \alpha_n - 1) \right] \quad (3.60)$$

esta condición inicial implica que se simula solamente la fase de recesión del hidrograma de salida en el dren.

Resumen

Se ha realizado una primera aproximación al problema del drenaje agrícola a partir de una integración de la ecuación general de Richards en la dirección vertical. Se ha demostrado que la ecuación del drenaje agrícola unidimensional es una aproximación aceptable.

La solución de la ecuación diferencial del drenaje agrícola unidimensional se ha abordado en dos fases: inicialmente se supone régimen permanente y se obtiene la fórmula de Hooghoudt a partir de dicha ecuación y posteriormente se considera régimen transitorio sujetando la ecuación diferencial tanto a una condición de frontera tipo Dirichlet como a una tipo Robbins o radiación en el dren. Para el primer caso se desarrolla la solución Glover-Dumm y se propone una nueva solución. Para el segundo se linealiza la ecuación diferencial y la condición de frontera obteniendo así una solución analítica aproximada.

Las ecuaciones para régimen permanente no consideran explícitamente la profundidad del dren ni su capacidad de conducción. En el caso unidimensional se salvó la primera restricción con las soluciones para régimen transitorio, pero la segunda ha permanecido.

CAPITULO IV. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO A LA ECUACIÓN DEL DRENAJE AGRÍCOLA UNIDIMENSIONAL.

Introducción.

La forma del método de elemento finito que se aplica es el Método de Galerkin, el cual es un caso especial del método de los residuales ponderados o pesados, que se describe en forma general como sigue:

Considérese un problema definido en un dominio de un medio continuo, gobernado por la ecuación diferencial:

$$L(u) - f = 0 \quad (4.1)$$

sobre un dominio R encerrado por la frontera F. Para obtener una solución aproximada el método se aplica en tres fases. La primera es aproximar la función solución desconocida (u) por una función de prueba, definida como una combinación lineal:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j \quad (4.2)$$

donde a_j son coeficientes a ser determinados y φ_j son funciones de base linealmente independientes.

Como la función de prueba es sólo una aproximación, es de esperarse que no satisfaga exactamente la ecuación diferencial (4.1). Por lo tanto, su sustitución origina un error o residual que se evalúa como:

$$\varepsilon = L(\hat{u}) - f \quad (4.3)$$

El método de los residuales pesados tiene como objetivo determinar los coeficientes a_j de tal forma que el error se minimice. Esto se logra formando una integral ponderada de ε sobre el dominio de solución y requiriendo que dicha integral, denominada un residual pesado, sea cero.

La segunda fase consiste en seleccionar n funciones de peso W_j , linealmente independientes, de tal forma que:

$$\int_R W_j \varepsilon dR = \int_R W_j [L(\hat{u}) - f] dR = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

Una vez que se ha especificado la forma de las funciones de peso se sustituye la función de prueba en el residual pesado y se obtiene un sistema de j ($j=1, 2, \dots, n$) ecuaciones que determinarán los coeficientes a_j , obteniendo así una solución aproximada.

Existen varios métodos de residuales ponderados que se definen en base a la elección de las funciones de peso. Los más comúnmente utilizados son los que se esbozan a continuación.

El **Método de colocación Puntual** consiste en especificar un conjunto de puntos x_j sobre el dominio, denominados puntos de colocación, y en seleccionar las funciones de peso como funciones delta de Dirac, definidas por:

$$W_j = \delta(x - x_j) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.5)$$

Dada la propiedad de las funciones delta de Dirac:

$$\int_R \epsilon \delta(x - x_j) dR = \epsilon(x_j) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.6)$$

entonces, el procedimiento consiste en evaluar los residuales en los puntos de colocación para obtener el esquema numérico.

El **Método de colocación de subdominios** divide el dominio de la solución en varios subdominios, y las funciones de peso se escogen de tal forma que:

$$W_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in R_j \\ 0 & \text{si } x \notin R_j \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.7)$$

donde R_j son los subdominios especificados.

El **Método de Galerkin** consiste en tomar las funciones de peso iguales a las funciones de base:

$$W_j = \varphi_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_j \\ 0 & \text{si } x \neq x_j \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

4.1 Caso condición de Dirichlet en el dren

Se resolverá numéricamente la ecuación adimensional (3.20):

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} = \frac{\partial}{\partial x_*} \left(\alpha(h_*) \frac{\partial h_*}{\partial x_*} \right) \quad (4.9)$$

sujeta a las condiciones

$$\begin{aligned} h_* &= \delta, & t_* > 0, & x_* = 0 \\ h_* &= \delta, & t_* > 0, & x_* = 1 \\ h_* &= 1, & t_* = 0, & 0 \leq x_* \leq 1 \end{aligned}$$

4.1.1. Obtención de la forma débil

Se multiplica la ecuación (4.9) por una función v que satisface :

$$\left. \frac{\partial h_*}{\partial x_*} v \right|_0^1 = 0$$

e integrando por partes se obtiene:

$$\int_0^1 \frac{\partial h_*}{\partial x_*} v dx + \int_0^1 \alpha(h_*) \frac{\partial h_*}{\partial x_*} \frac{\partial v}{\partial x_*} dx = 0 \quad (4.10)$$

que es la forma débil correspondiente a la ecuación (4.9).

4.1.2. Integración en el espacio: Solución de elemento finito

4.1.2.1. Discretización del espacio

El dominio $0 \leq x_* \leq 1$ se divide en segmentos de recta utilizando puntos en el espacio denominados nudos, estos segmentos constituyen los elementos finitos. La distribución de los nudos se realiza utilizando un paso de espacio variable con la finalidad de concentrarlos en las fronteras y obtener así mayor precisión en estas.

La distribución se realiza considerando inicialmente un paso de espacio constante sobre el dominio, los puntos así definidos se denotan como x_i , posteriormente se obtienen las coordenadas x_c distribuidas en forma cuadrática, según la función siguiente:

$$x_{*c} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_{*i}}{1/2} \right)^2 \quad 0 \leq x \leq 1/2$$

Para $1/2 \leq x_* \leq 1$ se hace una imagen de esta función.

4.1.2.2. Funciones de base

Se definen las funciones de base lineales de la siguiente forma:

$$\varphi_j(x_*) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_* = x_{*j} \\ 0 & \text{si } x_* \neq x_{*j} \end{cases} \quad (4.11)$$

para $j = 1, 2, \dots, n$ siendo n el número de nudos interiores.

4.1.2.3. Desarrollo del esquema

Se propone la solución de elemento finito como una combinación lineal de las funciones base, expresada para los nudos interiores y para los de frontera esencial (Dirichlet no homogénea), por separado.

$$\hat{H}_{*n}(x_*, t_*) = \sum_{j=1}^n a_j(t_*) \varphi_j(x_*) + \sum_{j=n+1}^{n+2} b_j(t_*) \varphi_j(x_*) \quad (4.12)$$

donde $n+1$ y $n+2$ son los nudos en la frontera, i.e. en cada extremo del dominio y b_j es un vector conocido de valores en la frontera. En este caso dichos valores corresponden a la elevación adimensional de los drenes.

Se sustituye en la forma débil (4.10) la solución propuesta en la ecuación (4.12) tomando como v funciones de base ϕ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ correspondientes a los nudos interiores. Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para a_j :

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_0^1 \phi_j \phi_k dx \right] \frac{da_j}{dt} + \sum_{j=1}^n \left[\int_0^1 \alpha(\hat{H}_s) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_s} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_s} dx \right] a_j + \sum_{j=n+1}^{n+2} \left[\int_0^1 \phi_j \phi_k dx \right] \frac{db_j}{dt} + \sum_{j=n+1}^{n+2} \left[\int_0^1 \alpha(\hat{H}_s) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_s} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_s} dx \right] b_j = 0 \quad (4.13)$$

Denotando las matrices de este sistema de la siguiente forma:

$$M_{kj} = \int_0^1 \phi_k \phi_j dx$$

$$K_{kj} = L_{kj} = \int_0^1 \alpha(\hat{H}_s) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_s} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_s} dx$$

En analogía con la mecánica estructural, donde se empleó por primera vez el método de elemento finito, las matrices K_{kj} y L_{kj} que incluyen derivadas de las funciones base se denominan matrices de rigideces y M_{kj} que contiene solo las funciones base se denomina matriz de masa. De esta forma, M_{kj} y K_{kj} son matrices de $n \times n$ correspondientes a los nudos interiores y L_{kj} es una matriz de $n \times 2$ para los nudos de frontera.

Dado que no se requiere diferenciabilidad para calcular las matrices de masa, se pueden utilizar funciones de base constantes para cada nudo, y se obtienen por lo tanto las matrices denominadas de masa concentrada, que tienen la característica importante de ser diagonales. Dichas funciones constantes se definen como:

$$\bar{\phi}_j = \begin{cases} 0 & 0 \leq x_s < 1/2(x_{s,j-1} + x_{s,j}) \\ 1 & 1/2(x_{s,j-1} + x_{s,j}) \leq x_s < 1/2(x_{s,j} + x_{s,j+1}) \\ 0 & 1/2(x_{s,j} + x_{s,j+1}) \leq x_s \leq 1 \end{cases} \quad (4.14)$$

En la ecuación (4.13) la tercera matriz es nula pues por una parte b_j es constante e igual a δ y además los subíndices j y k de la integral en la matriz de masa concentrada nunca coinciden.

El sistema (4.12) se escribirse como sigue:

$$\sum_{j=1}^n \left[M_{kj} \frac{da_j}{dt} + K_{kj} a_j \right] = - \sum_{j=n+1}^{n+2} L_{kj} b_j \quad (4.15)$$

o bien en forma matricial:

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{L}\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

4.1.3. Integración en el tiempo: Diferencias finitas

La ecuación (4.16) se integra en el tiempo mediante diferencias finitas utilizando un factor de ponderación ω , aproximando la derivada en el tiempo como:

$$\left(\frac{da_j}{dt} \right)^{k+\omega} = \frac{a_j^{k+1} - a_j^k}{\Delta t} \quad (4.17)$$

donde:

$$a_j^{k+\omega} = (1-\omega)a_j^k + \omega a_j^{k+1} \quad (4.18)$$

Sustituyendo estas expresiones en (4.15) se obtiene el esquema:

$$\left(\mathbf{M}^{k+\omega} + \omega \Delta t \mathbf{K}^{k+\omega} \right) \mathbf{a}^{k+1} = \left(\mathbf{M}^{k+\omega} - (1-\omega) \Delta t \mathbf{K}^{k+\omega} \right) \mathbf{a}^k - \Delta t \mathbf{L}^{k+\omega} \mathbf{b} \quad (4.19)$$

Especificada la condición inicial: $a_j^0 = h_{0*}$, se calculan los coeficientes para los siguientes niveles de tiempo en forma sucesiva. Al sustituir estos coeficientes en (4.12) se obtiene la solución de elemento finito, de hecho, dada la forma de las funciones base, el valor del coeficiente a_j en cada nudo corresponde con la solución de la ecuación (4.9), i.e. la elevación del nivel freático.

4.1.4. Validación del esquema

La dificultad de establecer criterios de convergencia o estabilidad para la ecuación no lineal que se resuelve, hace necesario comparar los resultados obtenidos por elementos finitos y una solución analítica de la ecuación (4.9) para una difusividad constante $\alpha(h_*) = \beta$:

$$H(x_*, t_*) = \delta + (1-\delta)\eta(x_*, t_*)$$

El objetivo principal es determinar los pasos de espacio y tiempo para los cuales la diferencia entre esta solución y la de elemento finito es menor. Se toman pasos de espacio de 0.05 (20 nudos), 0.020 (50 nudos) y 0.010 (100 nudos) y se utiliza el esquema propuesto para los pasos de tiempo adimensionales: 0.010, 0.005, 0.0005, 0.0001 y 0.00005.

Se seleccionó un paso de tiempo adimensional de $\Delta t = 0.0005$ con 50 nudos. Para la difusividad media $\beta = (1+\delta)/2$, con $\delta = 0.75$, se ilustra en la Figura No. 8 el buen acuerdo entre las soluciones.

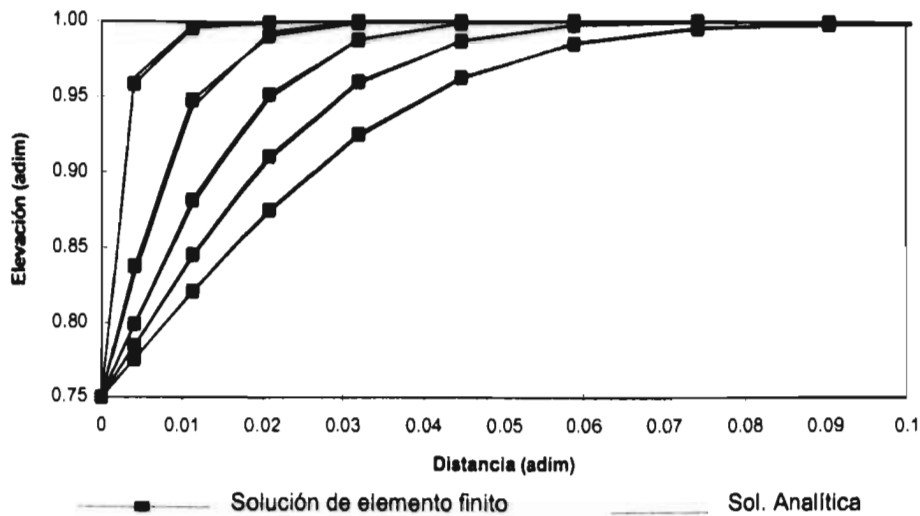


Figura 8. Comparación de la solución de elemento finito con una solución analítica para difusividad constante

Para el caso de difusividad variable $\alpha(h_s) = h_s$, la solución de elemento finito se comparará con la solución clásica de Glover-Dumm y una nueva solución.

4.1.5. Aplicaciones.

Como una aplicación, se comparan la solución de elemento finito con la solución clásica de Glover-Dumm y la nueva solución. Para $\delta = 0.75$ los resultados se muestran en la Figura No. 9.

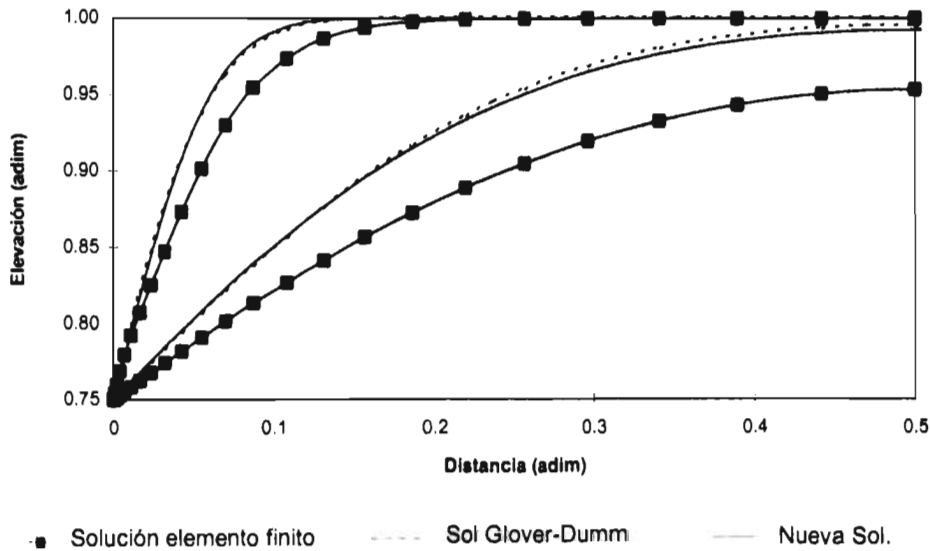


Figura 9. Comparación de las soluciones Glover-Dumm, la nueva solución y la de elemento finito

La solución de elemento finito de la ecuación del drenaje agrícola unidimensional aquí presentada reproduce la solución analítica exacta correspondiente a una difusividad constante. La comparación de las soluciones analíticas aproximadas, sin diferencia apreciable entre ellas, con la solución de elemento finito muestra que las primeras pueden ser utilizadas cuando la capa impermeable es lo suficientemente profunda.

4.2. Caso condición de Robbins en el dren

4.2.1. Desarrollo del esquema

Se resolverá numéricamente la ecuación (3.41):

$$\frac{\partial H_s}{\partial t_s} = \frac{\partial}{\partial x_s} \left[K_s H_s \frac{\partial H_s}{\partial x_s} \right] + R_s \quad (4.20)$$

sujeta a las condiciones (3.42):

$$-H_s \frac{\partial H_s}{\partial x_s} + \gamma_d H_s (H_s - \delta) = 0 \quad x_s = 0 \quad t_s = 0 \quad (4.21.1)$$

$$H_s \frac{\partial H_s}{\partial x_s} + \gamma_d H_s (H_s - \delta) = 0 \quad x_s = 1 \quad t_s = 0 \quad (4.21.2)$$

$$H_s = f(x_s) \quad 0 \leq x_s \leq 1 \quad t_s = 0 \quad (4.21.3)$$

donde γ_d y δ se han definido en el capítulo anterior.

Se obtiene la forma débil de la ecuación diferencial (4.20) multiplicandola por una función de peso e integrado sobre el dominio, sin alguna consideración en las fronteras:

$$\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial t} v dx + \int_0^1 \alpha(H) \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = H \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_0^1 \quad (4.22)$$

Se propone la solución de elemento finito:

$$\hat{H}_{s,n}(x_s, t_s) = \sum_{j=1}^n a_j(t_s) \phi_j(x_s) \quad (4.23)$$

Se sustituye en (4.22), y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{Q} \quad (4.24)$$

que incluye, las matrices de masa y rigidez ya definidas; así como un nuevo vector (\mathbf{Q}) de flujos en la frontera:

$$Q_k = \begin{cases} -\gamma_d H_{k.} (H_{k.} - \delta) & k = 1, k = n \\ 0 & k \neq 1, k \neq n \end{cases} \quad (4.24)$$

Se aproxima la derivada temporal utilizando (4.17) así como las elevaciones del nivel freático al tiempo ponderado según (4.18) y se obtiene el esquema numérico:

$$\left(\mathbf{M}^{k+\omega} + \omega \Delta t \mathbf{K}^{k+\omega} \right) \mathbf{a}^{k+1} = \left(\mathbf{M}^{k+\omega} - (1-\omega) \Delta t \mathbf{K}^{k+\omega} \right) \mathbf{a}^k - \Delta t \mathbf{Q}^{k+\omega} \quad (4.26)$$

4.2.2. Aplicaciones

Como una aplicación, se describen los datos de la curva de recesión del hidrograma de salida registrado en un dren del Lote 17 del Distrito de Riego Valle del Carrizo.

Se dispone de los siguientes datos del sistema:

Separación entre drenes:	L = 50 m.
Profundidad del estrato impermeable	5 m.
Profundidad de los drenes	Pd = 1.5 m.

Por mínimos cuadrados, se determina el coeficiente de descarga de la relación carga-gasto en el dren:

$$\beta_d = 0.017$$

Utilizando un procedimiento de modelación inversa se aproximaron los valores de los parámetros restantes:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.020 \\ K_s &= 0.577 \text{ m/día} \end{aligned}$$

El hidrograma observado así como los simulados por la solución analítica aproximada y la solución de elemento finito, se muestran en la figura 9. La evolución de la carga al centro de los drenes correspondiente a cada caso se muestra en la figura 10.

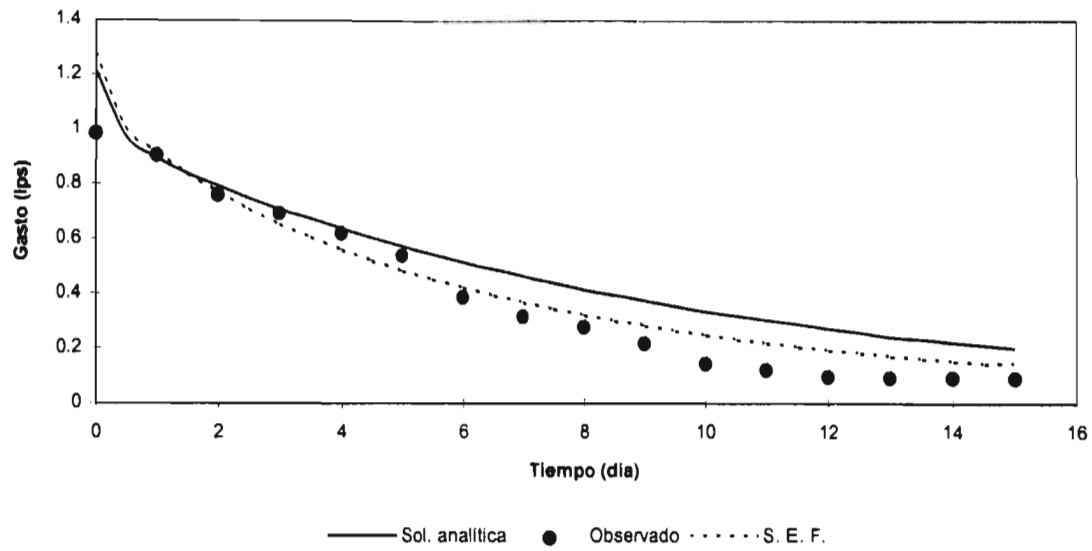


Figura 10: Curva de recesión del hidrograma de salida: datos observados y simulaciones.

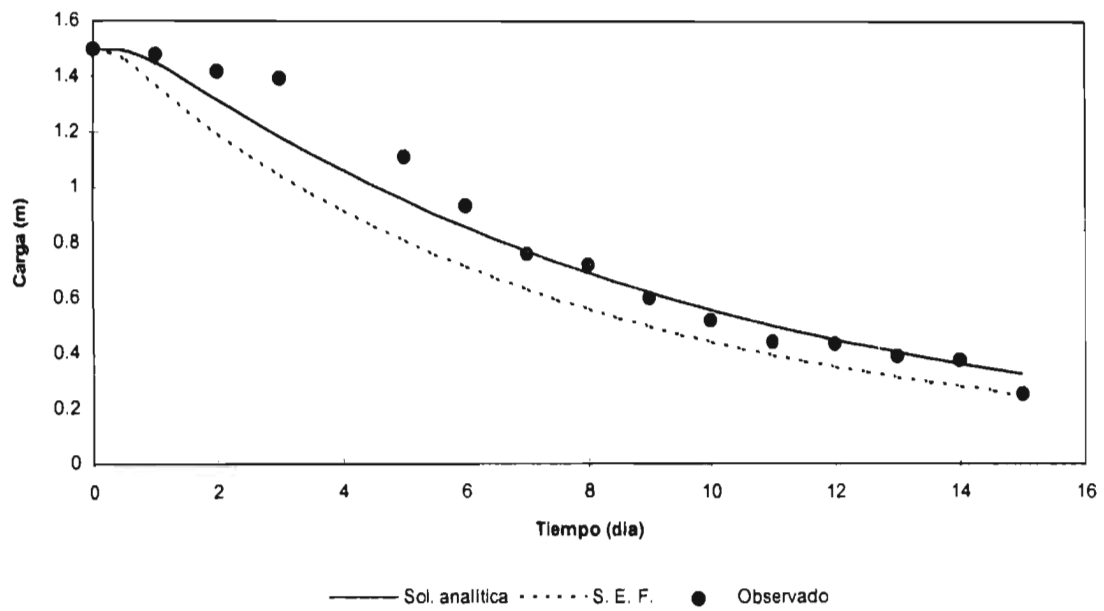


Figura 11: Carga al centro del espaciamiento: datos registrados y simulaciones

Resumen

Se ha aplicado el método de elemento finito para obtener una solución numérica de la ecuación diferencial del drenaje agrícola unidimensional. Se utilizan funciones de base lineales para aproximar el comportamiento espacial del nivel freático en la fase de recesión. La integración en el tiempo se realiza utilizando un esquema en diferencias finitas centradas. El esquema numérico se valida comparando la solución de elemento finito con la solución analítica exacta de la ecuación del drenaje agrícola unidimensional para difusividad constante.

Se hizo énfasis en la condición de frontera en el dren, proponiendo inicialmente una de tipo Dirichlet, y posteriormente una de radiación o de Robbins. Para el caso de condición de Dirichlet en el dren, la solución de elemento finito se comparó con las soluciones analíticas aproximadas obtenidas en el capítulo anterior. Se concluye que ambas soluciones pueden aplicarse cuando el estrato impermeable es lo suficientemente profundo. Para condición de Robbins se utilizó el modelo analítico aproximado así como el numérico para describir la curva de recesión del hidrograma de salida en un dren instalado en el terreno.

CAPITULO V. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO A LA ECUACIÓN DE RICHARDS BIDIMENSIONAL EN DRENAJE AGRÍCOLA

Introducción.

La aproximación bidimensional del flujo del agua en un sistema de drenaje agrícola se realiza utilizando la ecuación de Richards, para la cual se desarrollará un esquema numérico que la integra en el espacio utilizando elementos finitos y en el tiempo mediante diferencias finitas.

5.1. Planteamiento del problema.

La forma bidimensional de la ecuación de Richards (ecuación 1.6) que se resolverá numéricamente es:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (5.1)$$

Como se ha establecido en el capítulo I, el dominio de la solución corresponde a una sección transversal al eje y, que comprende la mitad del área drenable por un dren subterráneo.

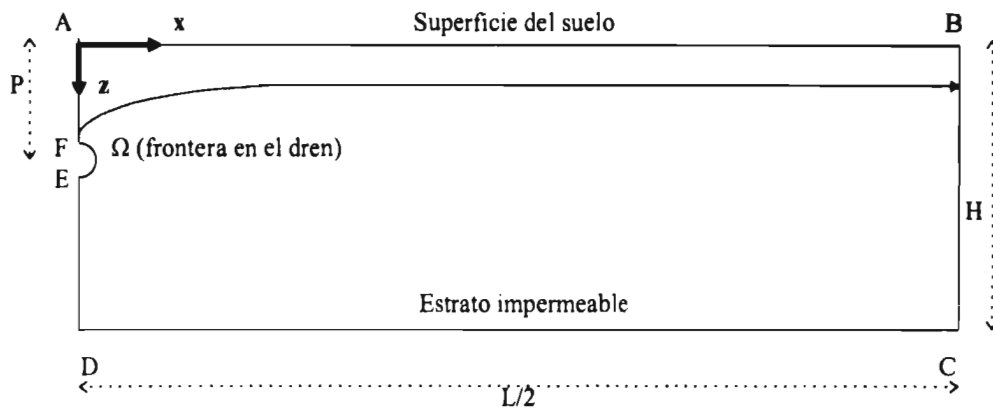


Figura 12. Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional.

5.1.1. Condiciones límite

La ecuación bidimensional de Richards se resuelve sobre el dominio indicado sujeta a las condiciones inicial y de frontera siguientes:

5.1.1.1. Condición inicial.

El potencial es una función conocida del espacio:

$$\psi = \psi_0(x, z) \quad (5.2)$$

5.1.1.2. Condiciones de frontera.

AB, BC, CD y EF son fronteras impermeables (Tipo Neumann):

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = L/2 \quad z \in BC \quad t > 0 \quad (5.3a)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad z = H \quad t > 0 \quad (5.3b)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad z \in DE \quad t > 0 \quad (5.3c)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad z \in FA \quad t > 0 \quad (5.3d)$$

AB puede ser una frontera tipo Dirichlet si se tiene potencial conocido en esta, por ejemplo una lámina de riego en la superficie:

$$\psi = \text{lamina} \quad 0 \leq x \leq L \quad z = 0 \quad t \geq 0 \quad (5.4)$$

o bien una frontera de flujo conocido (Tipo Neumann) si por ejemplo el fenómeno en la superficie es una lluvia de intensidad i :

$$Q = i \quad 0 \leq x \leq L \quad z = 0 \quad t \geq 0 \quad (5.5)$$

La condición de frontera sobre el dren (semicircunferencia Ω) se especifica según lo expuesto en el Capítulo I:

I). Ω es una línea equipotencial: la semicircunferencia se sujeta a una condición de Dirichlet, con potencial de presión definido como:

$$\psi = z - P \quad \text{sobre } \Omega \quad (5.6)$$

donde P es la profundidad del centro del dren medida desde la superficie del suelo.

II). Ω es una superficie de filtración.

El tratamiento de este tipo de condición, se realiza haciendo uso de la ventaja que presenta el método de elemento finito para asignar fácilmente una condición de frontera para cada nudo localizado sobre la semicircunferencia del dren.

Inicialmente se asigna a los nudos sobre la mitad superior del dren una condición de flujo nulo, a la otra mitad se asigna una condición de primer orden definida de forma semejante a (5.6). Esta situación es conservada hasta que la superficie libre alcanza un nudo de la fracción donde se asignó originalmente flujo nulo, momento en el cual se cambia esta a una condición de primer orden con potencial cero. Se itera dentro de un mismo nivel de tiempo, hasta que todos los nudos en el dren bajo condición de Neumann presenten potencial negativo y aquellos sujetos a una condición de Dirichlet tengan flujo negativo.

iii), Ω es una frontera bajo condición de Robbins.

El tratamiento de la condición de Robbins es relativamente sencillo, puesto que constituye una condición de frontera natural para el esquema de elemento finito, sin embargo la elección o determinación de los parámetros involucrados en esta es la principal dificultad asociada a su aplicación.

5.2. Obtención de la forma débil

Se multiplica la ecuación (5.1) por una función de peso v , se integra usando el Teorema de Green sobre el dominio de solución (R) limitado por la frontera \mathfrak{R} y se obtiene:

$$\int_R C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} v dR + \int_R K(\psi) \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dR = \int_R K(\psi) \frac{\partial v}{\partial z} dR + \int_{\mathfrak{R}} q v d\mathfrak{R} \quad (5.7)$$

Denominando Γ la fracción de \mathfrak{R} sujeta a condición de Neumann, y Ω la parte de \mathfrak{R} bajo condición de Robbins (i.e. $\mathfrak{R} = \Gamma \cup \Omega$), se obtiene la siguientes expresión para la forma débil de la ecuación de Richards bidimensional:

$$\int_R C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} v dR + \int_R K(\psi) \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dR = \int_R K(\psi) \frac{\partial v}{\partial z} dR + \int_{\Gamma} q v d\Gamma + \int_{\Omega} q_m v d\Omega \quad (5.8)$$

donde q_m puede sustituirse según la ecuación (1.30) y q es el flujo prescrito como condición de Neumann.

5.3 Integración en el espacio: Solución de elemento finito

5.3.1. Discretización del dominio de solución

El dominio de solución se divide en pequeños triángulos que constituyen los elementos finitos, el tamaño de estos se hace menor en zonas donde se esperan los mayores gradientes, por ejemplo en la superficie del suelo y la zona aledaña al dren.

5.3.2. Funciones de base

Las funciones de base bidimensionales se definen en relación a la función delta de Kronecker:

$$\varphi_j(x, z) = \delta(x_j, z_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, z) = (x_j, z_j) \\ 0 & \text{si } (x, z) \neq (x_j, z_j) \end{cases} \quad (5.9)$$

La función es unitaria en un nudo en particular y cero en los demás nudos, por su aspecto gráfico se denominan funciones piramidales o funciones "chapeau".

El ensamble de las matrices globales asociadas al funcionamiento del sistema como un todo, se realiza sumando las contribuciones de cada elemento usado en la discretización. Para simplificar el proceso, es conveniente utilizar únicamente los tramos de las funciones de base definidas sobre cada lado de un elemento. Estas fracciones de las funciones de base se denominan funciones de forma.

Las funciones de forma se definen utilizando un sistema de coordenadas baricéntrico sobre un triángulo y se expresan como:

$$\xi_i(x, z) = \frac{1}{2S} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_j & x_k \\ z & z_j & z_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \left\{ (x_j z_k - x_k z_j) + (z_j - z_k)x - (x_j - x_k)z \right\} \quad (5.10)$$

donde Δ representa el área del elemento analizado, i.e.:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Los índices (i, j, k) corren sobre las tres permutaciones (1,2,3), (2,3,1) y (3,1,2), siendo estas últimas las esquinas de un triángulo tomado como elemento finito básico.

Es evidente que la función $\xi_i(x, z)$ satisface:

$$\xi_i(x_s, z_s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = i \\ 1 & \text{si } s \neq i \end{cases}$$

Las derivadas de las funciones de forma $\xi_i(x, z)$ se calculan a partir de la ecuación 5.10 y se obtiene:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \frac{1}{2S} (z_j - z_k)$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial z} = \frac{1}{2S} (x_j - x_k)$$

5.3.3. Desarrollo del esquema.

Se propone la solución de la ecuación (5.1) como una combinación lineal de las funciones de base escrita por separado para los nudos interiores (n), y para los de frontera sujetos a una condición esencial (Tipo Dirichlet no homogénea):

$$\psi_n(x, z, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \varphi_j(x, z) + \sum_{j=n+1}^{n+v} b_j(t) \varphi_j(x, z) \quad (5.11)$$

Se sustituye en la forma débil (5.8) teniendo en cuenta lo siguiente:

1. Se consideran las funciones de peso (v) iguales a las funciones de base φ , correspondientes a los nudos interiores.

2. Se asume una variación lineal de las características hidrodinámicas sobre cada elemento, expresándola mediante las funciones de forma:

$$\hat{C} = \varphi_g C_g \quad (5.12)$$

$$\hat{K} = \varphi_g K_g$$

3. Se utiliza un sistema de masa concentrado con la finalidad de obtener una matriz diagonal y para mejorar la estabilidad del esquema (Mori 1980 y Neumann 1973).

4. La presión en la frontera del dren se toma como el valor de esta en cada nudo, lo mismo se hace con el coseno director asociado al nudo.

Se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[C_g \int_R \varphi_g \varphi_j \varphi_k dR \right] \frac{da_j}{dt} + \sum_{j=n+1}^{n+v} \left[C_g \int_R \varphi_g \varphi_j \varphi_k dR \right] \frac{db_j}{dt} + \sum_{j=1}^n \left[K_g \int_R \varphi_g \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right) dR \right] a_j + \\ & \sum_{j=n+1}^{n+v} \left[K_g \int_R \varphi_g \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right) dR \right] b_j + \sum_{j=1}^n \left[\frac{K_t}{\lambda_n} \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_k d\Omega \right] a_j = K_g \int_R \varphi_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} dR + \int_{\Gamma} q \varphi_k d\Gamma + \\ & \left[\frac{K_t h_j}{\lambda_n} - K_t \cos \theta z_j \right] \int_{\Omega} \varphi_k d\Omega \end{aligned} \quad (5.13)$$

La segunda integral en el sistema de ecuaciones es nula debido a que los índices j y k nunca coinciden en el integrando. Las integrales asociadas a la condición de frontera de Robbins (integrales sobre Ω) son diferentes de cero solo para los nudos localizados sobre el dren.

Escribiendo las matrices de este sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
M_{kj} &= \sum_{j=1}^n \left[C_k \int_R \bar{\varphi}_k \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k dR \right] \\
K_{kj} &= \sum_{j=1}^n \left[K_s \int_R \varphi_s \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right) dR \right] \\
L_{kj} &= \sum_{j=n+1}^{n+v} \left[K_s \int_R \varphi_s \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right) dR \right] \\
R_{kj} &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{K_t}{\lambda_n} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k d\Omega \right] \\
B_k &= B_{t_k} = K_s \int_R \varphi_s \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} dR \\
Q_k &= \int_{\Gamma} q \bar{\varphi}_k d\Gamma \\
S_k &= \left[\frac{K_t h_j}{\lambda_n} - K_t \cos \theta z_j \right] \int_{\Omega} \bar{\varphi}_k d\Omega
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Donde se ha denotado a las funciones de masa concentrada por $\bar{\varphi}$ y se definen como funciones unitarias en la región baricéntrica correspondiente a un nudo en específico, y cero en el resto del dominio.

Utilizando funciones de forma lineales, descritas anteriormente, se calculan las matrices del sistema como:

$$\begin{aligned}
M_{kj} &= \sum_c C_j \frac{\Delta}{3} \\
K_{kj} &= \sum_c \frac{\bar{K}}{4 * \Delta} (m_j m_k + p_j p_k) \\
R_{kj} &= \sum_c \frac{K_t}{\lambda_n} \frac{Lr_j}{2} \\
B_k &= \sum_c \frac{\bar{K}}{2} p_k \\
Q_k &= \sum_c \frac{qL_j}{2} \\
S_k &= \sum_c \left[\frac{K_t h}{\lambda_n} - K_t \cos \theta z_j \right] \frac{Lr_j}{2}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Donde Δ es el área del elemento, \bar{K} es la conductividad en el elemento tomada como el promedio aritmético (dada la forma de las funciones de base), C_j es la conductividad específica correspondiente al nudo j , L_j y L_r_j son las longitudes de frontera asociadas a cada nudo bajo condición de Neumann y Robbins respectivamente, m y p son factores geométricos definidos según las funciones de forma:

$$\begin{aligned} m_i &= z_j - z_k \\ p_i &= x_j - x_k \end{aligned} \quad (5.16)$$

los subíndices i,j,k , que corresponden a las esquinas del elemento triangular, corren sobre sus tres posibles permutaciones secuenciadas.

La matriz de rigidez (L_{kj}) y el término convectivo (Bf_j) asociados a la frontera se calculan de la misma forma que para los nudos interiores, pero considerando las propiedades geométricas y características hidrodinámicas de los de frontera.

El sistema (5.13) puede escribirse en forma matricial como:

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{a}}{dt} + [\mathbf{K} + \mathbf{R}]\mathbf{a} = \mathbf{B} + \mathbf{Q} + \mathbf{Lb} + \mathbf{B}_r + \mathbf{S} \quad (5.17)$$

5.4 Integración en el tiempo: Diferencias finitas.

La integración en el tiempo del sistema (5.17) se realiza utilizando diferencias finitas. La derivada temporal se aproxima utilizando un factor de ponderación (ω):

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)^{k+\omega} = \frac{\mathbf{a}^{k+1} - \mathbf{a}^k}{\Delta t} \quad (5.18)$$

donde k representa el nivel de tiempo y Δt es el paso de tiempo. Las incógnitas se ponderan como:

$$\mathbf{a}^{k+\omega} = \omega \mathbf{a}^{k+1} + (1 - \omega) \mathbf{a}^k \quad (5.19)$$

Se sustituye en (5.14) y se obtiene el siguiente esquema numérico para la ecuación de Richards bidimensional:

$$\left[\frac{\mathbf{M}^{k+\omega}}{\omega \Delta t} + \mathbf{K}^{k+\omega} + \mathbf{R}^{k+\omega} \right] \mathbf{a}^{k+1} = \left[\frac{\mathbf{M}^{k+\omega}}{\omega \Delta t} - \frac{1-\omega}{\omega} (\mathbf{K}^{k+\omega} + \mathbf{R}^{k+\omega}) \right] \mathbf{a}^k + \mathbf{B}^{k+\omega} + \mathbf{Q}^{k+\omega} - \mathbf{L}^{k+\omega} \mathbf{b} + \mathbf{B}_r^{k+\omega} + \mathbf{S}^{k+\omega} \quad (5.20)$$

Utilizando un factor de ponderación $\omega=1/2$ (esquema centrado) se obtiene un error de aproximación en el tiempo de orden $O(\Delta t^2)$

5.5. Cálculo de flujos en la frontera.

Los flujos en los nudos de frontera localizados sobre el dren, son necesarios para estimar su gasto por unidad de longitud, así como para definir adecuadamente la condición de filtración.

El flujo en la frontera, para una iteración (m+1), se obtiene usando la solución de elemento finito para esa iteración y la anterior (m). Se despeja el vector de flujo del esquema dado por la ecuación (5.20) y se evalúa para los nudos localizados sobre el dren:

$$Q = \left[\frac{M^{m+\omega}}{\omega \Delta t} + K^{m+\omega} + R^{m+\omega} \right] a^{m+1} - \left[\frac{M^{m+\omega}}{\omega \Delta t} - \frac{1-\omega}{\omega} (K^{m+\omega} + R^{m+\omega}) \right] a^m - B^{m+\omega} + L^{m+\omega} b - B_r^{m+\omega} - S^{m+\omega} \quad (5.21)$$

La suma de los flujos nodales es la mitad del gasto por unidad de longitud que fluye en el dren, dado el dominio de solución definido en la figura 8.

De la ecuación (5.21) se aprecia que si el nudo en cuestión está sujeto a condición de Dirichlet, el flujo se calcula simplemente como:

$$Q = K^{m+\omega} a^m - B^{m+\omega} + L^{m+\omega} b - B_r^{m+\omega} - S^{m+\omega} \quad (5.22)$$

5.6 Validación del modelo.

La dificultad de establecer un criterio general de convergencia y estabilidad para la ecuación de Richards bidimensional hace necesario validar el modelo desarrollado comparando los resultados obtenidos con este y aquellos proporcionados por una solución analítica exacta.

Dada la simetría del sistema, el flujo horizontal a la mitad de la separación entre dos drenes es nulo, i.e. se presenta solamente flujo vertical en dicha sección y se tiene un comportamiento unidimensional. Por lo tanto puede utilizarse la solución analítica exacta desarrollada por Fuentes (1992), para una columna de suelo sujeta a la condición de frontera de flujo constante en su superficie, y una condición inicial de distribución de humedad constante, y realizar una comparación de los perfiles de humedad generados por el esquema numérico y aquellos correspondientes a la solución exacta. La semejanza entre ambos perfiles de humedad esta influenciada principalmente por la discretización del dominio en espacio y tiempo, i.e. por el tamaño de los elementos considerados en el espacio y los pasos de tiempo utilizados en la simulación.

Como se indicó en el Capítulo II, la solución analítica exacta requiere del uso de las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange. Para el suelo "Sable de l'Isere" se consideran los siguientes parámetros:

Parámetro adimensional	$\alpha = 0.8882$
Parámetro adimensional	$\beta = 1$
Escala integral de Bouwer	$\lambda_c = 9.20$
Conductividad hidráulica a saturación	$K_s = 15.37 \text{ cm/h}$

Contenido de humedad a saturación	$\theta_s = 0.312$
Contenido de humedad residual	$\theta_r = 0.0438$

Un detalle de la discretización del espacio se aprecia en la malla de elementos finitos de la figura 10, que en el proceso de validación se mantuvo constante. Se incrementa sucesivamente el paso de tiempo hasta alcanzar un máximo que se varía entre 60 y 600 segundos. Los resultados se muestran en las figuras 11 y 12 para tiempos de simulación de una y dos horas.

El ajuste de la solución numérica es aceptable, con un error máximo del 5% para un paso de tiempo límite de 600 segundos. Como era de esperarse el error máximo crece según lo hace el paso de tiempo máximo permitido, pero el tiempo de cómputo disminuye. La selección esta sujeta a la precisión requerida en los resultados y el tiempo disponible para obtenerlos.

Resumen.

Una mejor aproximación a la descripción del fenómeno de transferencia de agua en el drenaje agrícola se ha realizado utilizando la ecuación de Richards en su forma bidimensional. Se han considerado características importantes del sistema, como la forma y profundidad del dren. Se desarrolla un esquema numérico que aproxima la variación espacial del potencial de presión utilizando elementos finitos, y realiza la integración en el tiempo usando diferencias finitas centradas. Aprovechando la simetría del flujo, el esquema se validó en lo general al comparar los perfiles de humedad generados por este y aquellos proporcionados por la solución analítica exacta desarrollada por Fuentes (1992), para una condición de frontera de flujo constante en la superficie de una columna de suelo.

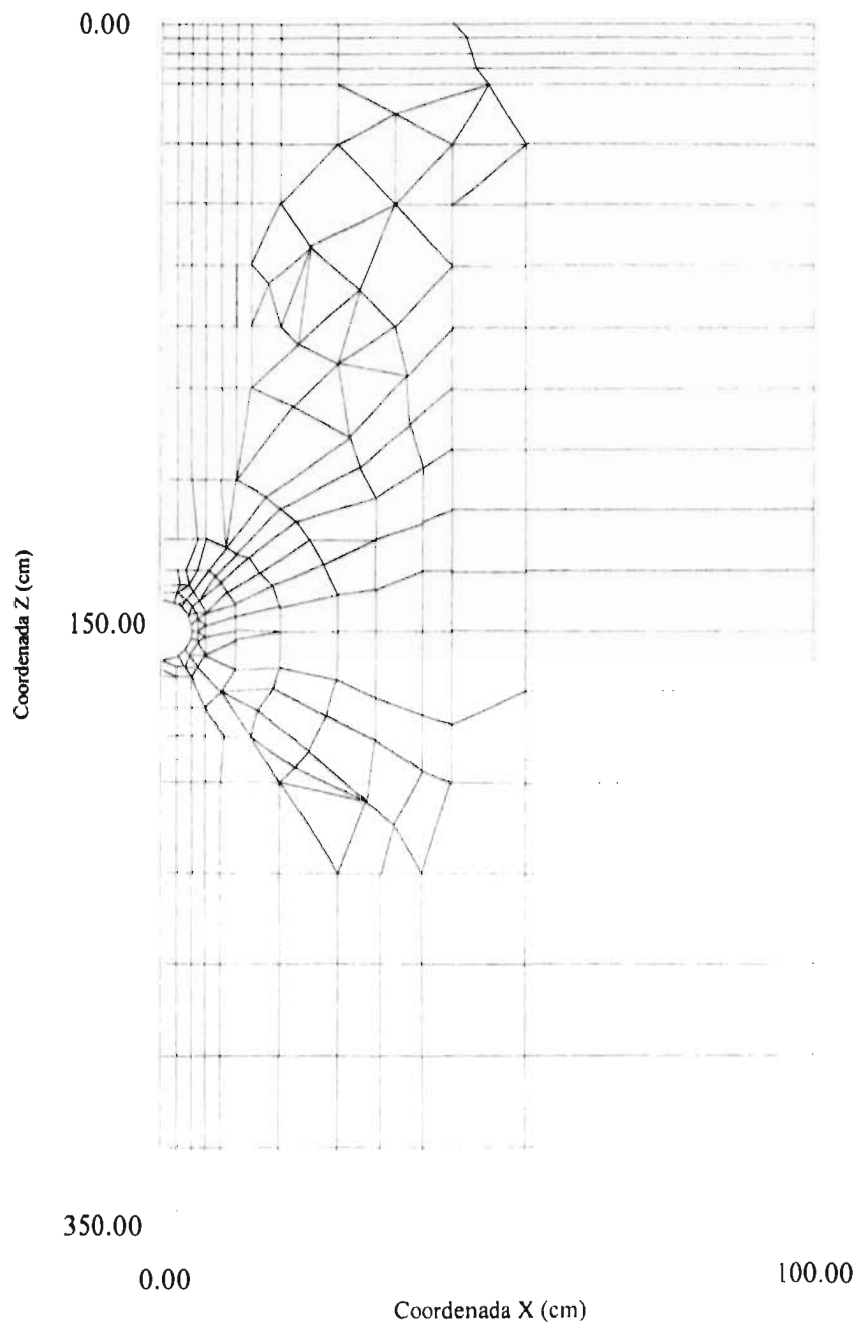


Figura 13: Malla de elementos finitos: Detalle cerca del dren

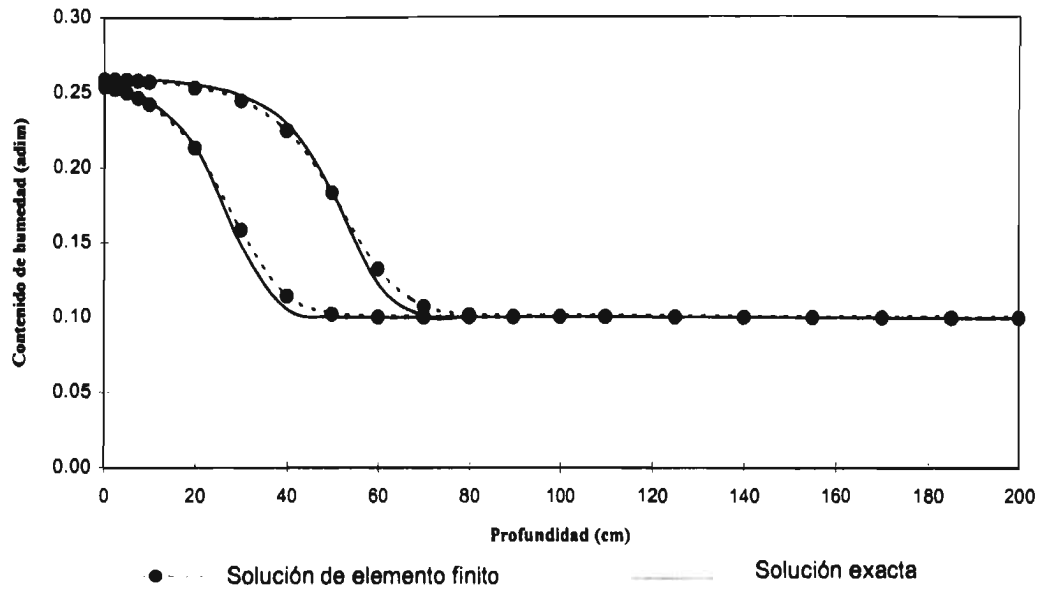


Figura 14. Comparación de soluciones para paso de tiempo máximo de 60 segundos

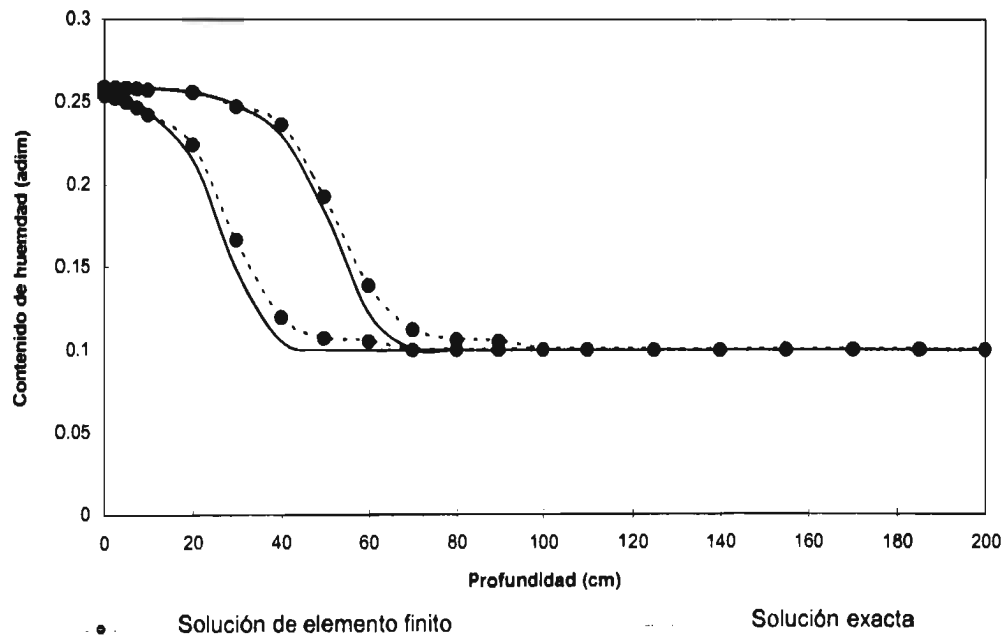


Figura 15. Comparación de soluciones para paso de tiempo máximo de 600 segundos

CAPITULO VI. APLICACIONES

Introducción

El objetivo básico de desarrollar el modelo numérico para la ecuación de Richards en su forma bidimensional, es aplicarlo con la finalidad de describir el comportamiento hidráulico de un sistema de drenaje instalado en la práctica.

6.1 Planteamiento del problema

La solución de elemento finito de la ecuación de Richards bidimensional obtenida en el capítulo anterior, se utilizará para simular el flujo en un sistema de drenaje instalado en el Lote 17 del Distrito de Riego del Valle del Carrizo, Estado de Sinaloa, México.

Se seleccionó el cuarto de cuatro riegos aplicados en el sitio de estudio mencionado, para simular el hidrograma de salida en el dren, con el modelo computacional basado en el esquema dado por la ecuación (5.19).

6.2. Discretización del espacio

La Figura No. 16 muestra la malla de elementos finitos utilizada para las simulaciones del hidrograma de salidas en el dren. Los nudos se concentran en la zona cercana al dren, así como en la superficie del suelo, debido a que en estas son de esperarse las mayores variaciones.

6.3. Condiciones límite

6.3.1. Condición inicial

Se estimó un contenido de humedad volumétrica inicial de 0.40 (adimensional), variando linealmente hasta el manto freático en el eje z, la condición se mantuvo para todas las secciones en el eje x. La superficie libre se supuso inicialmente localizada a la mitad de la circunferencia del dren en el eje z, sin variaciones en el sentido horizontal.

6.3.2. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera se tomaron como sigue:

- i). Fronteras laterales (excepto en el dren): Fronteras impermeables, dada la condición de simetría del flujo
- ii). Frontera inferior: Estrato impermeable.
- iii). Frontera superior: Condición de Dirichlet, ($\psi = 0$) durante dos horas que corresponden al tiempo de contacto promedio, Condición de Neumann para el resto del tiempo de simulación, con flujo prescrito igual a la evaporación registrada en el lugar de toma de datos.
- iv). Dren: se utilizó la condición de filtración para simular el hidrograma de salida en el dren.

6.4. Procedimiento de cómputo

Se elaboró un programa de cómputo en lenguaje de programación QuickBasic4.5.

El proceso general consta de los siguientes pasos:

1. Se discretiza el espacio: las coordenadas y numeración de elementos de la zona cercana al dren se leen de un archivo de datos, la malla uniforme se genera automáticamente. en esta fase el objetivo es conocer las coordenadas de cada nudo en particular y saber que nudos conforman cada elemento finito del sistema.

2. Se especifica la condición inicial de distribución del potencial en el espacio.

3. Se utiliza el Esquema de Laasonen (factor de ponderación en el tiempo $\omega = 1$, en el esquema numérico), para obtener una primera aproximación de los potenciales al siguiente nivel de tiempo, que es el punto de partida para centrar posteriormente los coeficientes en el tiempo:

- 3.1. Se estiman los valores de las características hidrodinámicas para cada nudo
- 3.2. Se ensambla la matriz general de coeficientes y el término independiente.
- 3.3. Se incorporan las condiciones de frontera.
- 3.4. Se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido.

4. Se utiliza un esquema Cranck-Nicolson para centrar los coeficientes en el tiempo:

4.1. Se conocen los potenciales de la iteración anterior (para la primera iteración estos corresponden a los obtenidos con el esquema de Laasonen).

4.2. Se estiman los potenciales al tiempo medio utilizando el factor de ponderación en el tiempo $\omega = 1/2$

4.3. Se estiman los valores de las características hidrodinámicas para cada nudo, que corresponderán a los coeficientes centrados estimados.

4.4. Se ensambla la matriz de coeficientes y el término independiente

4.5 Se incorporan las condiciones de frontera.

4.6 Se resuelve el sistema de ecuaciones.

4.7 Se obtiene el error relativo entre los potenciales de la iteración anterior y los obtenidos en el paso 4.6.

4.8. Si el error es aceptable los potenciales obtenidos en 4.6 se asignan al siguiente nivel de tiempo. en caso contrario se asignan a la siguiente iteración y se regresa a 4.1.

5. Una vez obtenidos los coeficientes centrados en el tiempo, se asignan al nivel de tiempo siguiente, y se regresa a 3 hasta alcanzar el tiempo de simulación.

6.5. Resultados y comentarios

En la figura 17 se muestra la comparación entre los hidrogramas de salida en el dren observado y simulado, la correspondencia es satisfactoria.

En la figura 18 se presenta la configuración de las líneas equipotenciales correspondiente al tiempo en que se alcanzó el gasto máximo en el dren, las figuras 19, 20, 21 y 22 muestran esquemas de flujo correspondientes a tiempos de simulación de 1, 5, 10 y 15 días después de aplicar el riego.

No obstante que la condición de frontera de filtración en el dren no es la más adecuada desde el punto de vista físico-matemático, lo cual pudiera afectar sensiblemente el comportamiento del flujo en el interior del dominio de solución, las líneas equipotenciales y en consecuencia las de corriente, muestran tendencias razonables según se aprecia en las figuras 18 a 22.

Resumen.

Se aplicó el modelo numérico desarrollado para la ecuación de Richards bidimensional, para describir los datos de variables hidráulicas registrados en un sistema de drenaje agrícola. La correspondencia entre las simulaciones y los registros es satisfactoria.

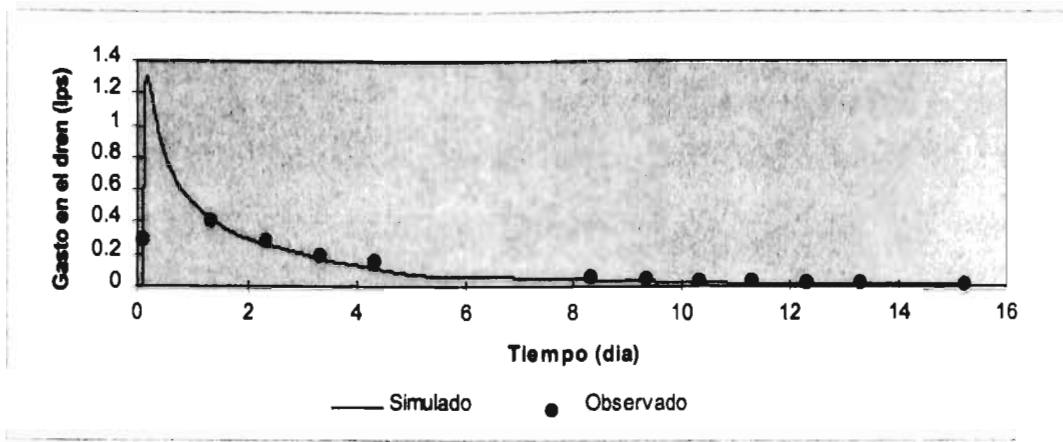


Figura 17: Hidrogramas de salida en el dren

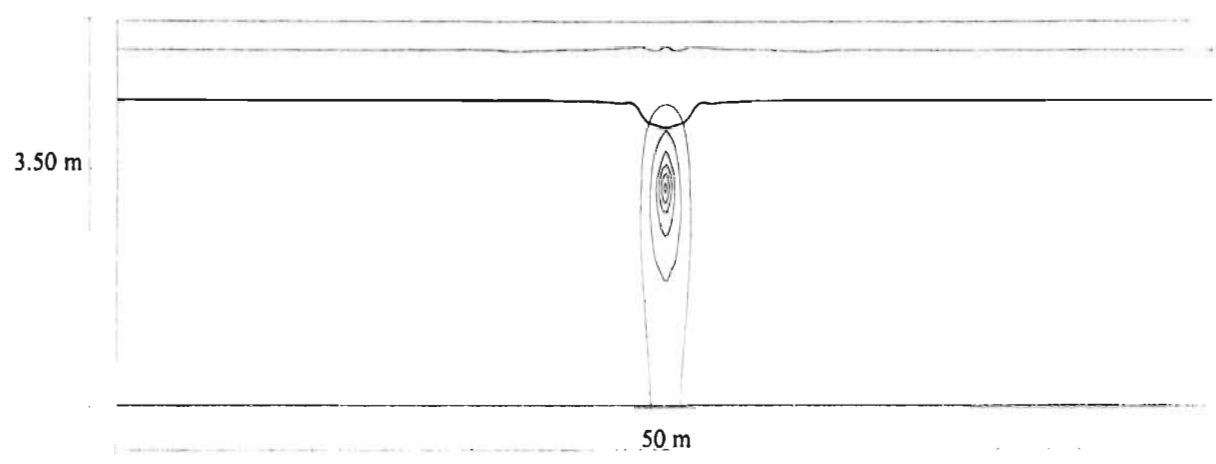


Figura 18. Equipotenciales para gasto máximo.

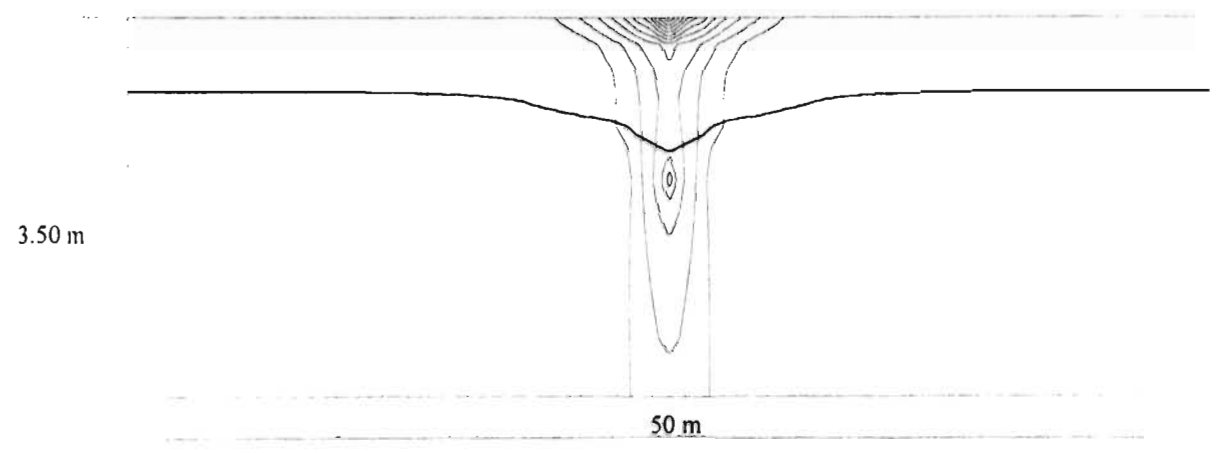


Figura 19. Equipotenciales para 1 dia

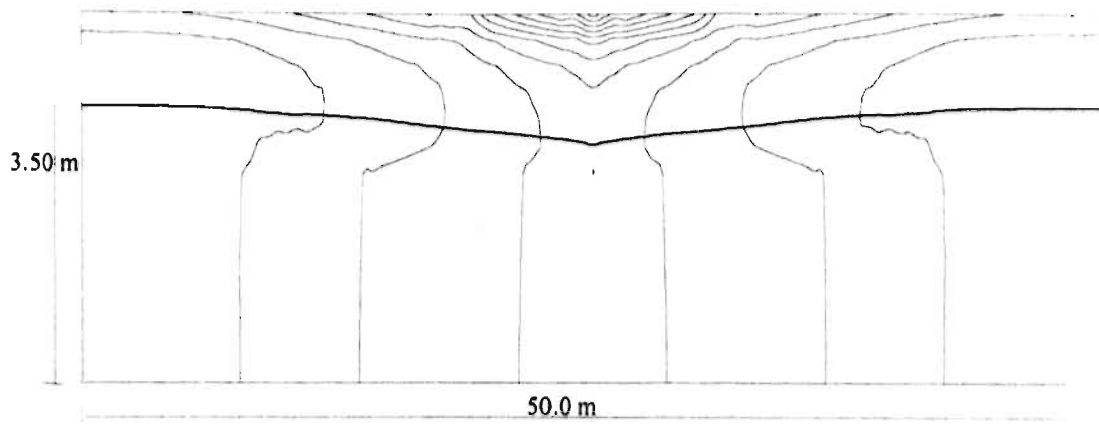


Figura 20. Equipotenciales para 5 dia

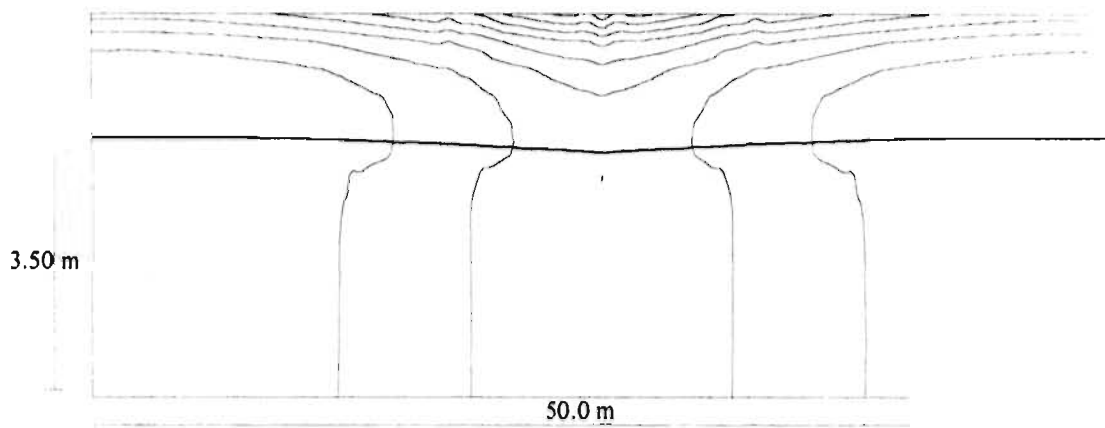


Figura 21. Equipotenciales para 10 dia

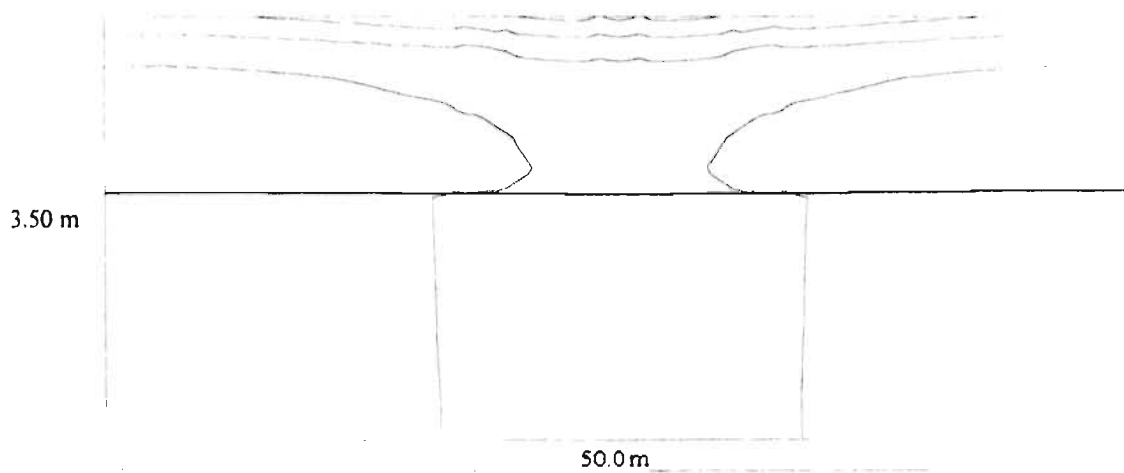


Figura 22. Equipotenciales para 15 dia

CAPITULO VII. CONCLUSIONES.

En este trabajo se ha realizado una aproximación a la descripción del fenómeno de la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola, se ha planteado el problema general y se han efectuado aproximaciones justificadas.

Siendo las características hidrodinámicas del suelo los principales elementos para describirlo, se ha planteado y demostrado un teorema en el sentido de que las formas de las características hidrodinámicas propuestas por Fujita y Parlange son las únicas que permiten linealizar en el potencial de Kirchoff la ecuación tipo Fokker-Planck de la infiltración unidimensional y llevarla a una forma a la ecuación de Burgers

Las soluciones al problema de transferencia se han abordado a diferentes niveles, inicialmente se deduce la ecuación del drenaje agrícola unidimensional, como resultado de una primera integración de la ecuación de Richards para un acuífero libre, y se resuelve la ecuación diferencial utilizando hipótesis simplificadoras que la linealizan. En una siguiente etapa se ha obtenido la solución de elemento finito, como solución numérica al problema no lineal.

Finalmente se obtiene la solución de elemento finito para la ecuación de Richards en su forma bidimensional, con la finalidad de describir con mayor detalle el comportamiento de un sistema de drenaje.

Se ha puesto especial énfasis en la condición de frontera que se presenta en el dren subterráneo, se revisaron las utilizadas en la literatura y se mostró la obtención de una condición más general de tercer orden, denominada de Robbins o de radiación. La aplicación de dicha condición de tercer orden se limitó debido a la dificultad de establecer con precisión el comportamiento de los parámetros involucrados en esta.

Las conclusiones de este trabajo son:

1. Las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange son las únicas bajo las cuales es posible linealizar en el potencial de Kirchoff la ecuación Fokker-Planck de la infiltración unidimensional.
2. La ecuación del drenaje agrícola unidimensional es el resultado de una aproximación basada en la integración de la ecuación de Richards, formulada para un acuífero libre, sobre la dirección vertical.
3. Las soluciones analíticas aproximadas de la ecuación del drenaje agrícola unidimensional proporciona una aproximación válida solamente para estratos impermeables lo suficientemente profundos, según lo muestra su comparación de dichas soluciones con la solución de elemento finito.
4. El modelo de simulación basado en la solución de elemento finito para la ecuación de Richards en su forma bidimensional describe adecuadamente el comportamiento del sistema de drenaje.

Se recomienda realizar investigación para deducir la forma de los parámetros involucrados en la condición de Robbins para el dren subterráneo. Acoplar la ecuación bidimensional de convección- dispersión para describir el transporte de solutos en el sistema. Obtener la solución de elemento finito para la ecuación general de Richards y acoplar las ecuaciones de Saint - Venant para conocer la evolución del tirante en el dren.

BIBLIOGRAFÍA.

Bower H. (1964). *Rapid field measurement of air entry value and hydraulic conductivity of soil as significant parameters in flow system analysis*. Water Resources Research. 36: 411-424.

Brooks R.H. y Corey A.T. (1964). *Hydraulic properties of porous media*. Hydrol. Pap. 3, Colo. State. Univ., Fort Collins.

Burdine N. T. (1953). *Relative permeability calculation from size distributions data*. Transactions AIME, 198:171-199.

Burgers J.M. (1948). *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*. Advances in Applied Mechanics.

Carslaw H.S. y Jaeger J.C. (1959). *Conduction of heat in solids*. 2ª. Edición. Oxford at the Clarendon Press.

Cole J.D. (1951) *On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics*. Q. Appl. Math. 9: 225-236.

Ernst L.F. (1956). *Calculation of the steady flow of groundwater in vertical cross-sections*. Netherlands Journal of Agricultural Science 4, pp. 126-131.

Fipps G. y Skaggs R.W. (1986). *Drains as a boundary condition in finite elements*. Water Resources Research. Vol 22, No. 11, pp 1613-1621.

Fipps G. y Skaggs R.W. (1986). *Effect of canal seepage on drainage to parallel drains*. Transactions of the ASAE. Vol 29 No. 5.

Fuentes C. Haverkamp R. Parlange J-Y. (1992). *Parameter constraints on closed-form soil-water relationships*. Journal of Hidrology. 134(1992) pp 117-142.

Fuentes C. (1992). *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non saturés*. Tesis de Doctorado de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, Francia. 267 pp.

Fuentes C. (1994). *Resolución analítica de la ecuación Fokker-Planck de la infiltración unidimensional*. Sociedad Matemática Mexicana. 67 páginas.

Fujita H. (1952). *The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part II*. Textile Research Journal. 22 : 823-827.

Gardner. W.R. (1958). *Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table*. Soil Sci. 85: 228-232.

Hopf E. (1950). *The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* . Commum Pure Applied Mathematics. 3: 201-230.

Huyakorn S.P. y Pinder G.F. (1983). *Computational Methods in subsurface flow*. Academic Press. New York. USA.

- Neumann S.P. (1973). *Saturated - unsaturated seepage by finite elements*. Journal of the Hydraulics Division, ASCE. Vol HY12, proc. Paper 10201, pp 2233-2250.
- Neumann S.P. (1984). *Adaptive eulerian-lagrangian finite element method for advection-dispersion*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 20, pp 321-337.
- Nieber J.L. y Walter F.M. (1981). *Two dimensional soil moisture flow in a sloping rectangular region: experimental and numerical studies*. Water Resources Research. Vol 17 No. 6, pp 1722-1730.
- Mori M. (1983). *The finite element method and its applications*. Ed. Macmillan, New York.
- Parlange J.Y., R.D. Braddock, I. Lisle y R.E. Smith. (1982). *Tree parameter infiltration equation*. Soil Sci. 11:170-174.
- Richards L.A. (1931). *Capillary conduction of liquids through porous mediums*. Physics 1: pp 318-333.
- Ritzema H. P. *Subsurface flow to drains*. En Drainage principles and applications. Editor H.P. Ritzema. ILRI, Publicación 16, 2ª. Edición. Holanda.
- Saucedo H. Fuentes C. Mercado R. *Una solución con elementos finitos de la ecuación del drenaje agrícola unidimensional*. Ponencia presentada en el XXVII Congreso Nacional de la Ciencia del Suelo. México.
- Van der Molen W.H. and J. Wesseling (1991). *A solution in closed form and series solution to replace the tables for the thickness of the equivalent layer in Hooghudt's drain spacing formula*. Agricultural Water Management 19, pp 1-16
- Van Genuchten M. Th. (1980). *A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils*. Soil Sci. Soc. Amer. J. 44:892-898.
- Zatarain F. *Transporte unidimensional de agua y solutos en el suelo*. Tesis de Maestría en Ciencias. Colegio de Postgraduados. México.
- Zaradny H. y Feddes R.A. (1979). *Calculation of non-steady flow towards a drain in saturated-unsaturated soil by finite elements*. Agricultural Water Management . Vol 2 (1979), pp 37-53.
- Zienkiewicz O.C. y Taylor R.L. (1994). *El método de los elementos finitos*. Vol 1 y 2. Ed. McGraw Hill. España