

00365
4
21



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

División de Estudios de Posgrado

**ITERACION DE FUNCIONES CONFORMES
DISCONTINUAS EN LA ESFERA DE RIEMANN**

T E S I S
Que para obtener el Grado Académico de
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)
p r e s e n t a
MANUEL CRUZ LOPEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. XAVIER GOMEZ-MONT AVALOS

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN
FALLA DE CONTINUIDAD**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**La pensée n'est qu'un éclair au milieu de la nuit.
Mais c'est cet éclair qui est tout.**

JUSTIFICACION

Las pretensiones de completez de este trabajo son nulas. Por el contrario, es precisamente la incompletez lo que le da sentido, ya que la idea básica es plantear un problema, describir algunos ejemplos y formular preguntas.

Si existe alguna justificación para este trabajo, es la de que, lejos de ser algo acabado, es más bien un pretexto para una investigación futura.

La descripción que se tiene, así como los experimentos computacionales que se han hecho, muestran una gran riqueza dinámica de las funciones de estudio. Esto es básicamente lo que ha orillado a detener el trabajo en este punto para, a partir de aquí, iniciar con otra etapa.

Digno de mención, es la actitud de los sinodales, Dr. Jesús Muciño Raymundo, Dr. Federico Sánchez Bringas, Dra. Laura Hidalgo Solís, Dr. Guillermo Sienna Loera, Dr. Héctor Sánchez Morgado y Dr. Javier Elizondo, quienes apreciaron esta situación y mostraron su confianza en que a futuro este trabajo se completaría. Debería decir, literalmente, que los sinodales me hicieron "un paro" al entender esta situación y dedicar algunos momentos de su tiempo a la revisión del trabajo. Agradezco sus comentarios siempre interesantes, así como sus sugerencias para mejorar esta presentación.

Finalmente, del Dr. Xavier Gómez-Mont Avalos, sólo quisiera mencionar que con él he aprendido que la disciplina, la pasión y el esfuerzo son los ingredientes esenciales en el quehacer matemático.

**ITERACION DE FUNCIONES
CONFORMES DISCONTINUAS
EN LA ESFERA DE RIEMANN**

Indice

1	CONCEPTOS GENERALES	
1.1	Introducción	1
1.2	Definiciones Elementales	2
1.3	Dinámica Simbólica	4
1.4	La Esfera de Riemann	8
2	TRANSFORMACIONES CONFORMES	
2.1	Introducción	9
2.2	Transformaciones Conformes	9
2.3	Transformaciones de Möbius	11
2.4	Iteración de Transformaciones de Möbius	14
3	DINAMICA DE UNA FAMILIA DE FUNCIONES	
3.1	Introducción	17
3.2	Planteamiento del Problema	19
3.3	Dinámica de la función F	20
3.4	Telarañas en la esfera	27
3.5	Ejemplos	29
3.6	Preguntas y Comentarios Finales	31
	BIBLIOGRAFIA	34

Capítulo 1

CONCEPTOS GENERALES

1.1 Introducción

En este capítulo haremos un breve resumen de algunos de los conceptos básicos de la Teoría de los Sistemas Dinámicos Discretos. En términos generales, los Sistemas Dinámicos Discretos, resultan del proceso iterativo de algún fenómeno de interés. En nuestros términos, lo que nos interesa es considerar un tipo especial de funciones, y estudiar el comportamiento de éstas bajo un proceso iterativo. En otras palabras, si damos una función f y algún punto z en donde f esté bien definida, lo que nos interesa es estudiar el siguiente proceso:

$$z, f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), \dots$$

Este proceso nos da un concepto muy importante: el concepto de órbita, y el problema que queremos estudiar es precisamente la estructura de las órbitas de ciertas funciones.

Queremos en este momento especificar la siguiente notación: $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$, n veces; es decir, f^n denotará la composición de la función f n -veces consigo misma.

Finalmente diremos que las funciones que consideraremos, serán siempre holomorfas en todo el plano complejo.

1.2 Definiciones Elementales

Empezamos con una definición central:

1.2.1 Definición:

Para cada $z \in \mathcal{C}$, al conjunto de puntos $z, f(z), f^2(z), \dots$ se le llama la órbita hacia adelante de z . Denotemos a este conjunto por $O^+(z)$ y observemos que $O^+(z)$ se puede escribir en la forma

$$\{f^n(z) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Si f es un homeomorfismo, la órbita hacia atrás de z es $O^-(z) = \{f^n(z) : n \in \mathbb{N}^-\}$, y, consecuentemente, podemos definir la órbita entera de z como $O(z) = \{f^n(z) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-\}$. El *objetivo básico* de este trabajo es el de estudiar (describir) las órbitas de ciertas familias de funciones.

1.2.2 Definición:

El punto z es un punto fijo de f si $f(z) = z$. El punto z es un punto periódico de periodo n si $f^n(z) = z$. Observemos que si z es periódico de periodo n para f , entonces z es un punto fijo para f^n . Es también importante notar que si z es periódico, a $O(z)$ se le llama *órbita periódica*.

Veamos ahora algunos ejemplos.

1.2.3 Ejemplos:

1. La función identidad $f(z) = z$ fija a todos los puntos del plano complejo, mientras que la función $f(z) = -z$ fija solamente al origen y los demás puntos tienen periodo 2.
2. La función $f(z) = z^3$ tiene como puntos fijos a $z_1 = 0, z_2 = 1$ y $z_3 = -1$.
3. La función $f(z) = z^2 - 1$ tiene puntos fijos en $z_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ y $z_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Observemos que $f(0) = -1, f^2(0) = 0$ y $f(-1) = 0, f^2(-1) = -1$, esto es, 0 y -1 son puntos periódicos de periodo 2. Analizar las órbitas de los demás puntos en el plano es un problema más complicado que no resolveremos aquí.

Daremos ahora otra definición importante.

1.2.4 Definición:

Sea z un punto periódico de periodo n para f . El punto z es hiperbólico si $|f'(z)| \neq 1$.

1.2.5 Ejemplo:

Sea $f(z) = (1/2)(z^3 + z)$. Notemos que $0, 1$ y -1 son puntos fijos de f . Además $f'(0) = 1/2$ y $f'(\pm 1) = 2$. Es decir, $0, \pm 1$ son puntos fijos hiperbólicos.

La siguiente proposición nos muestra una característica importante de los puntos fijos hiperbólicos.

1.2.6 Proposición.

Sea p un punto fijo hiperbólico con $|f'(p)| < 1$. Entonces existe una vecindad U de p tal que si $z \in U$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = p.$$

Demostración. Damos la demostración en el caso real. Como f es C^1 , existe $\epsilon > 0$ tal que $|f'(x)| < A$, con $0 < A < 1$ para $x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$. Por el Teorema del Valor Medio se tiene

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq A |x - p| < |x - p| \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, $f(x)$ está contenido en $[p - \epsilon, p + \epsilon]$ y, en efecto, está más cerca de p que x . Aplicando n veces el mismo argumento, se tiene que

$$|f^n(x) - p| \leq A^n |x - p|,$$

de aquí que $f^n(x) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$. \square

Esta propiedad lo que nos dice es que los puntos cercanos a un punto fijo hiperbólico con norma de la derivada menor que 1, bajo iteraciones de la función, convergen al punto. Es cierto un resultado similar para puntos periódicos hiperbólicos de periodo n . En este caso, la hipótesis es que $|f^n)'(p)| < 1$. Esta proposición induce la siguiente definición:

1.2.7 Definición:

Sea p un punto periódico de periodo n con $|(f^n)'(z)| < 1$. Entonces, se dice que p es un *punto periódico atractor* (o un pozo).

El comportamiento de una función cerca de un punto periódico hiperbólico con $|(f^n)'(z)| > 1$ es muy distinto al de los atractores. Esto lo señala la siguiente proposición.

1.2.8 Proposición:

Sea p un punto fijo hiperbólico con $|f'(p)| > 1$. Entonces, existe una vecindad U de p tal que, si $z \in U$, $z \neq p$, existe $k > 0$ tal que $f^k(z) \notin U$.

De manera análoga se tiene un resultado para los puntos periódicos hiperbólicos con $|(f^n)'(z)| > 1$, y de aquí la siguiente definición:

1.2.9 Definición:

Sea p un punto periódico de periodo n con $|(f^n)'(p)| > 1$. Entonces, se dice que p es un *punto periódico repulsor* (o una fuente).

Si se tiene que un punto periódico satisface $|(f^n)'(p)| = 1$, entonces diremos que p es un *punto periódico indiferente*.

De acuerdo con las proposiciones anteriores, el comportamiento de una función cerca de un punto periódico hiperbólico, está regido fuertemente por la derivada; sin embargo, este no es el caso si el punto periódico es no-hiperbólico.

1.3 Dinámica Simbólica

En esta sección haremos una breve descripción de la Dinámica Simbólica. En general, el modelo simbólico resulta ser muy útil, aunque a nosotros lo que nos interesa es el concepto de itinerario, el cual es de gran importancia para nuestro estudio. Una discusión más detallada de este modelo puede encontrarse en Devaney[6] (Cap. 1, págs. 40-42).

Damos ahora una definición.

1.3.1 Definición:

El conjunto $\Sigma_2 = \{(s_1 s_2 \dots) : s_j = 0 \text{ ó } 1\}$ es un espacio de sucesiones en dos símbolos.

Este espacio es un espacio métrico con la métrica

$$d(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i},$$

lo cual no es difícil de verificar.

1.3.2 Proposición:

Sean $s, t \in \Sigma_2$, y supongamos que $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Entonces $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$. Inversamente, si $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$, entonces $s_i = t_i$ para $i \leq n$.

Demostración. Si $s_i = t_i$ para $i \leq n$, entonces

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i},$$

pero,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = 2 - 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^n},$$

y por lo tanto $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$.

Inversamente, si $s_j \neq t_j$ para algún $j \leq n$, entonces

$$d(s, t) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n},$$

lo cual implica que si $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$, entonces $s_i = t_i$ para $i \leq n$. #

Este resultado nos permite decidir cuando dos sucesiones están cercanas, puesto que nos dice que basta con que coincidan en sus primeras cifras para que estén muy cercanas. Definimos ahora la función de corrimiento en Σ_2 .

1.3.3 Definición:

La función de *corrimiento* $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ está dada por $\sigma(s_1s_2s_3\cdots) = (s_2s_3s_4\cdots)$.

De la definición se ve inmediatamente que σ es dos a uno, y la siguiente proposición muestra que σ es continua.

1.3.4 Proposición:

σ es continua.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $s = (s_0s_1\cdots)$. Elijamos n tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Sea $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Si $t = (t_0t_1\cdots)$ satisface que $d(s, t) < \delta$, entonces, por la proposición anterior tenemos que $s_i = t_i$ para $i \leq n+1$. Por lo tanto, las i -ésimas entradas de $\sigma(s)$ y $\sigma(t)$ coinciden para $i \leq n$. Por lo tanto,

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon. \#$$

Antes de definir el concepto de itinerario, analizamos un ejemplo para ver la fuerza y la importancia de este modelo simbólico.

1.3.5 Ejemplo:

Sea $f(z) = z^2$. Observemos que $z = 0$ es el único punto fijo de f . También, si $|z| < 1$, entonces $f^n(z) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$; mientras que si $|z| > 1$, entonces $f^n(z) \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow \infty$. Así que la dinámica de f está bien determinada para los puntos que se encuentran dentro y fuera del disco unitario Δ . Sin embargo, para los puntos que están sobre $S^1 = \partial\Delta$, la dinámica es un poco más complicada.

Para describir la dinámica de f sobre S^1 , podemos utilizar el modelo simbólico. Dado $z \in S^1$, podemos escribir $z = \exp(2\pi i\theta)$, donde $0 \leq \theta < 1$. Entonces, f manda z en $\exp(2\pi i2\theta)$. Así que, podemos entender la acción de f sobre S^1 si entendemos la acción de la función $\theta \mapsto 2\theta \pmod{1}$ en el intervalo $[0, 1)$. Esto es, si pensamos a los puntos del intervalo $[0, 1)$ en su expansión binaria, podemos identificar al intervalo $[0, 1)$ con el espacio Σ_2

y el mapeo σ es equivalente a multiplicación por 2 módulo 1: es decir, si $\theta \in [0, 1)$, en su expansión binaria,

$$\theta = 0.s_1s_2s_3\cdots,$$

entonces, módulo 1,

$$2\theta = 0.s_2s_3s_4\cdots,$$

el cual, vemos que es el mismo efecto de aplicar σ .

Ahora bien, la dinámica de σ se puede conocer con cierta facilidad. Por ejemplo, los puntos $(000\cdots)$ y $(111\cdots)$ son puntos fijos para σ , mientras que los puntos periódicos de periodo n son aquellos de la forma

$$(s_1s_2\cdots s_ns_1\cdots s_n\cdots).$$

Es más, hay 2^n puntos periódicos de periodo n . También se puede ver que los puntos periódicos son densos, que hay puntos eventualmente periódicos, etc.; y por lo visto anteriormente, la dinámica de f sobre S^1 es la misma. $\#$

De acuerdo con este ejemplo, el modelo simbólico es muy útil para describir la dinámica de ciertos mapeos, vía una conjugación. Definimos ahora lo que es el itinerario de un punto.

1.3.6 Definición:

Sean $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ y $A, B \subset \mathcal{C}$. Entonces, el *itinerario* de un punto $z \in \mathcal{C}$ es una sucesión $I(z) = (s_1s_2s_3\cdots)$ tal que $s_n = 0$ si $f^n(z) \in A$ ó $s_n = 1$ si $f^n(z) \in B$.

Esta definición asocia a cada punto del dominio de f una sucesión de 0's y 1's. Analizaremos un poco más de cerca este concepto en el Capítulo 3, donde será de importancia para entender la dinámica de las funciones en las que estamos interesados.

1.4 La Esfera de Riemann

En esta última sección, haremos una breve discusión de la Esfera de Riemann, ya que en realidad lo que nos interesa es trabajar con funciones definidas sobre este espacio. Una discusión más propia y detallada, puede encontrarse en Ahlfors[1] (Cap. 1, págs. 19-20) ó Conway[5] (Cap. 1, págs. 8-9).

Topológicamente, la esfera de Riemann es la compactificación del plano complejo mediante la adición de un punto, el cual denotamos por ∞ . Esto es, si denotamos por $\bar{\mathcal{C}}$ a la esfera de Riemann, entonces

$$\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\infty\}.$$

La topología en $\bar{\mathcal{C}}$ son los abiertos de la forma:

1. U , donde $U \subset \mathcal{C}$ es abierto, o
2. $\bar{\mathcal{C}} - C$, donde $C \subset \mathcal{C}$ es compacto.

Esta "extensión" del plano complejo nos permite extender también cierto tipo de funciones holomorfas, de forma tal, que podemos entender el comportamiento de las funciones en ∞ vía un homeomorfismo que conjuga al 0 con el ∞ y viceversa.

En general, si tenemos una función holomorfa $f : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ tal que $f(\infty) = a$, con $a \neq 0$, entonces, decimos que f es holomorfa en ∞ si la composición $g \circ f \circ g^{-1}$ es holomorfa en 0, donde $g(z) = \frac{1}{z}$. Si $f(\infty) = 0$, basta tomar $g(z) = \frac{1}{z-b}$, donde $b \neq 0, \infty$.

Para reafirmar un poco esta discusión, consideremos la función del ejemplo de la sección anterior, esto es, $f(z) = z^2$. Claramente, $f(0) = 0$ y $f(\infty) = \infty$. Si tomamos $g(z) = 1/z$ y hacemos la composición

$$g \circ f \circ g^{-1}(z) = g \circ f(1/z) = g(1/z^2) = z^2,$$

veremos que g conjuga a f consigo misma y, por lo tanto, el comportamiento de f en ∞ es el mismo que el comportamiento de f en 0.

En el siguiente Capítulo veremos cómo se inducen las transformaciones de Möbius en toda la esfera.

Capítulo 2

TRANSFORMACIONES CONFORMES

2.1 Introducción.

A través de este capítulo hablaremos de las transformaciones conformes, y de algunas de sus propiedades. Estas transformaciones son importantes porque poseen características geométricas interesantes. Veremos un tipo especial de transformación conforme, que son las llamadas Transformaciones de Möbius, las cuales nos serán de mucha utilidad en adelante. Diremos también algunas cosas sobre iteraciones de este tipo de transformaciones. El tratamiento que haremos de las transformaciones conformes en general, lo haremos siguiendo a Marsden[9] (Capítulo 5, Seccs. 1 y 2).

2.2 Transformaciones Conformes.

2.2.1 Definición:

Sean $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $\alpha : [a, b] \rightarrow A$ una curva diferenciable con $0 \in [a, b]$, $\alpha(0) = z_0$ y $v = \alpha'(0) \neq 0$. Hagamos $\beta(t) = f(\alpha(t))$. Entonces, decimos que f es conforme en z_0 si existe $0 \leq \theta < 2\pi$ y $r > 0$ tal que β es diferenciable en $t = 0$, y, si hacemos $u = \beta'(0)$, tenemos que $|u| = r|v|$ y $\arg u = \arg v + \theta \pmod{2\pi}$.

Diremos que f es conforme en A si es conforme en cada punto de A .

Geoméricamente, las transformaciones conformes rotan a los vectores tangentes a las curvas y les aplican una homotecia. También resulta interesante notar que estas transformaciones preservan los ángulos de curvas que se intersectan. El siguiente resultado es importante porque muestra la conexión entre las transformaciones conformes y las funciones holomorfas.

2.2.2 Teorema:

Si $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y si $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0 con $\theta = \arg f'(z_0)$ y $r = |f'(z_0)|$.

Demostración. Si utilizamos la notación de la definición anterior, por la Regla de la Cadena tenemos que

$$u = \beta'(0) = f'(z_0) \cdot \alpha'(0) = f'(z_0) \cdot v.$$

Por lo tanto,

$$|u| = |f'(z_0)| \cdot |v| \quad \text{y} \quad \arg u = \arg f'(z_0) + \arg v \pmod{2\pi},$$

que es lo que se requiere. \square

Como un sencillo ejemplo de este tipo de transformaciones, pensemos en la función $z \mapsto z^2$, definida sobre el primer cuadrante sin el origen. Claramente esta función es holomorfa en todo punto de su dominio, así que es conforme.

El siguiente teorema da una propiedad que nos será de gran utilidad.

2.2.3 Teorema:

- (i) Si $f : A \rightarrow B$ es conforme y biyectiva, entonces $f^{-1} : B \rightarrow A$ es también conforme.
- (ii) Si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son conformes y biyectivas, entonces $g \circ f : A \rightarrow C$ es conforme y biyectiva.

Demostración.

- (i) f^{-1} existe ya que f es biyectiva. Por el Teorema de la Función Inversa, f es holomorfa con $df^{-1}(w)/dw = 1/(df(z)/dz)$, donde $w = f(z)$. Como f es conforme, entonces $df(z) \neq 0$ y, esto implica que $df^{-1}(w)/dw \neq 0$. Por lo tanto, f^{-1} es conforme.
- (ii) Recordemos que la composición de funciones biyectivas y la composición de funciones holomorfas es holomorfa, así que en este caso $g \circ f$ es holomorfa y biyectiva. También,

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z) \neq 0,$$

por lo tanto $g \circ f$ es conforme. #

Este resultado es importante para nuestro trabajo, puesto que estaremos interesados en estudiar la dinámica de una familia de funciones que resultarán ser conformes y biyectivas. Un tipo especial de transformaciones conformes que estamos interesados en estudiar son las Transformaciones de Möbius. Veremos algunas propiedades de esas transformaciones en la siguiente sección.

2.3 Transformaciones de Möbius.

Una Transformación de Möbius es un mapeo de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde a, b, c, d son números complejos fijos con $ad - bc \neq 0$. El caso en el que $ad - bc = 0$ es muy simple y carece de interés, ya que T se reduce a una constante.

Veremos a continuación, algunas de las propiedades de estas transformaciones.

2.3.1 Teorema:

La transformación T definida anteriormente es conforme y biyectiva de

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -d/c\} \text{ sobre } B = \{w \in \mathbb{C} : w \neq a/c\}.$$

De hecho, la inversa de T es también una transformación de Möbius y está dada por

$$T^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

Demostración. Es claro que T es holomorfa sobre A y $S(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}$ es holomorfa sobre B . Para ver que T es biyectiva, basta verificar que $T \circ S$ y $S \circ T$ son las identidades. Haremos sólo un cálculo, puesto que el otro es similar.

$$S(T(z)) = \frac{-d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + b}{c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - a} = \frac{-adz - bd + bcz + bd}{acz + bc - acz - ad} = \frac{(bc - ad)z}{(bc - ad)} = z.$$

De manera análoga tenemos que $T(S(w)) = w$. Para ver que T es conforme, observemos que

$$\frac{d}{dz}S(T(z)) = \frac{d}{dz}(z) = 1,$$

y, por otro lado se tiene que

$$S'(T(z)) \cdot T'(z) = 1.$$

De aquí se tiene que $T'(z) \neq 0$. #

2.3.2 Teorema:

Cualquier mapeo conforme de $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sobre sí mismo, es una transformación de Möbius de la forma

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

para algún $z_0 \in \Delta$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Cualquier T de esta forma, es un mapeo conforme de Δ sobre Δ .

Demostración. Veamos primero que para T de esta forma, si $|z| = 1$, entonces $|T(z)| = 1$. Esto es cierto ya que

$$|T(z)| = |e^{i\theta}| \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z| |z^{-1} - \bar{z}_0|}.$$

Como $|z| = z\bar{z} = 1$, se tiene que $z^{-1} = \bar{z}$. Luego,

$$|T(z)| = \frac{|z - z_0|}{|\bar{z} - \bar{z}_0|} = 1,$$

ya que $|w| = |\bar{w}|$. La única singularidad de T está en $(\bar{z}_0)^{-1}$, la cual se encuentra fuera del disco unitario. Por lo tanto, por el Principio del Máximo, se tiene que para todo $z \in \Delta$, $|T(z)| \leq 1$. Es decir, T mapea Δ sobre Δ .

Por el teorema anterior, podemos encontrar la expresión analítica para T^{-1} , la cual es

$$T^{-1}(w) = e^{-i\theta} \frac{w - (-e^{i\theta} z_0)}{1 - (-e^{-i\theta} \bar{z}_0)w},$$

y como tiene la misma forma que T , es también un mapeo de Δ sobre Δ . Por lo tanto, T es conforme de Δ sobre Δ .

La unicidad de T se puede probar utilizando el Teorema de Riemann (ver por ejem., Ahlfors[1], pág. 222), lo cual no haremos aquí. \ddagger

Enunciaremos la siguiente propiedad de las transformaciones de Möbius, la cual no probaremos aquí, pero puede consultarse en Markushevich[8] (Cap. 10, pág. 169).

2.3.3 Teorema:

Sea T una transformación de Möbius. Si $L \subset \mathcal{C}$ es una línea recta y $S \subset \mathcal{C}$ es un círculo, entonces $T(L)$ es o una línea recta ó un círculo, y $T(S)$ es o una línea recta ó un círculo.

Para finalizar esta sección, quisiéramos comentar que, en concordancia con lo que se dijo en la última sección del Capítulo 1, estas transformaciones

se inducen también sobre la esfera de Riemann, ya que si $c \neq 0$, $T(\infty) = a/c \neq \infty$, y, si $a \neq 0$, se obtiene, via conjugación con $\frac{1}{z}$:

$$G(z) = \frac{c + d/z}{a + b/z}$$

y $G'(0) = \frac{ad - bc}{a^2} \neq 0$. Por lo tanto, ∞ es un punto regular para T y así, T está bien definida y es holomorfa sobre \mathcal{C} .

2.4 Iteración de Transformaciones de Möbius.

Sea T una transformación de Möbius. Si $c \neq 0$, tenemos que $T(-d/c) = \infty$ y $T(\infty) = a/c$. Un primer aspecto en el que estamos interesados es en conocer la naturaleza de los puntos fijos de T , ya que la estructura dinámica de T , depende en gran medida de estos puntos.

Observemos ahora que si $c = 0$, entonces T tiene la forma $T(z) = \alpha z + \beta$, donde $\alpha = a/d$ y $\beta = b/d$, si $d \neq 0$.

Analicemos ahora varios casos:

Caso 1: ($c = 0$, $\alpha = 1$ y $\beta \neq 0$)

T tiene la forma $T(z) = z + \beta$, y, entonces, el único punto fijo de T es ∞ . Así, para cada $z \in \mathcal{C}$ se tiene

$$T^n(z) = z + n\beta,$$

y claramente, $T^n(z) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Caso 2: ($c = 0$, $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 0$)

T tiene la forma $T(z) = \alpha z + \beta$, y tiene como único punto fijo a $\zeta = \frac{\beta}{1 - \alpha}$. En este caso, vamos a proceder de una forma un poco distinta a la anterior. Formamos primero una transformación de Möbius que mande ζ a ∞ ; a esta función le llamamos g y, entonces, g tiene la forma $g(z) = \frac{1}{z - \zeta}$. A partir de esta función g , definimos S como

$$S(z) = (g \circ T \circ g^{-1})(z).$$

La expresión $g^{-1}(z) = \frac{1+z\zeta}{z}$ nos muestra claramente que $g^{-1}(\infty) = \zeta$, y, consecuentemente S tiene como único punto fijo a ∞ , y de acuerdo con el caso 1, $S^n(z) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, para todo z . También,

$$S^n(z) = (g \circ T \circ g^{-1}) \circ (g \circ T \circ g^{-1}) \circ \dots \circ (g \circ T \circ g^{-1})(z) = (g \circ T^n \circ g^{-1})(z).$$

Aplicando ahora g y g^{-1} por la derecha y por la izquierda, obtenemos

$$T^n(z) = (g^{-1} \circ S^n \circ g)(z),$$

de donde, $T^n(z) \rightarrow g^{-1}(\infty) = \zeta$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Caso 3: ($c = 0$, $\alpha \neq 1$, $\beta = 0$)

T tiene la forma $T(z) = \alpha z$. Claramente T fija al 0 y al ∞ . También, $T^n(z) = \alpha^n z$, y, para todo z se cumple

- (i) $T^n(z) \rightarrow 0$ si $|\alpha| < 1$;
- (ii) $|T^n(z)| = |z|$ si $|\alpha| = 1$;
- (iii) $T^n(z) \rightarrow \infty$ si $|\alpha| > 1$.

Los casos i y iii son claros, mientras que en el caso ii o α es una n -ésima raíz de la unidad y T^n es la identidad ó α no es una raíz de la unidad, y los puntos $T^n(z)$ son densos sobre el círculo con centro en el origen y radio $|z|$.

Caso 4: ($c \neq 0$)

T tiene su forma original y posee dos puntos fijos distintos ζ_1 y ζ_2 , que se encuentran resolviendo la ecuación

$$z = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Por supuesto que estamos suponiendo que el discriminante de la ecuación no es cero, porque si este es el caso, entonces tendríamos una situación análoga al caso 1.

Construimos ahora una transformación de Möbius que mande ζ_1 al 0 y ζ_2 al ∞ , la cual se puede escribir como $g(z) = \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}$, y de aquí, construir $S(z) = (g \circ T \circ g^{-1})(z)$. Entonces, S fija al 0 y al ∞ . Así, S se reduce al caso anterior, y la dinámica de T está bien determinada.

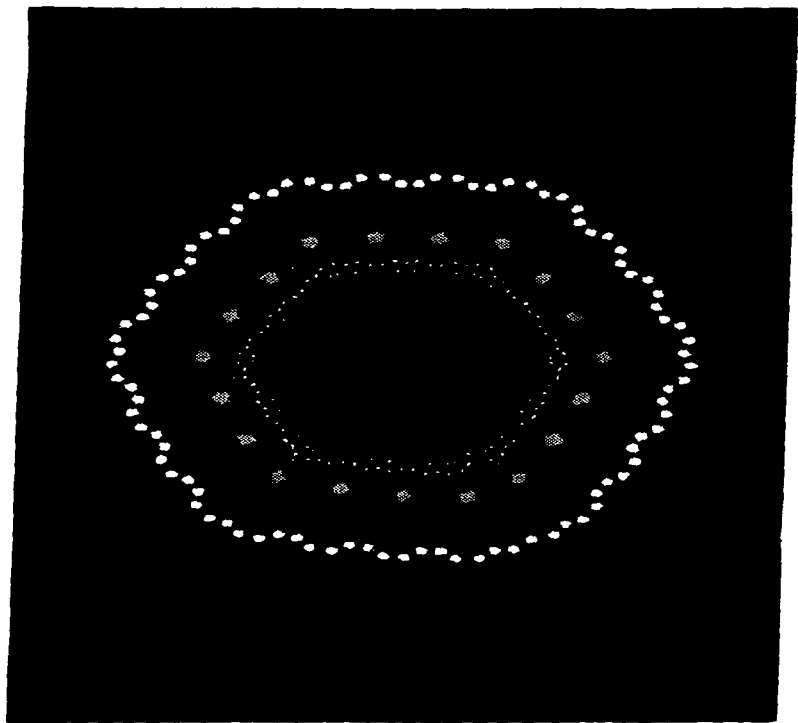
Capítulo 3

DINAMICA DE UNA FAMILIA DE FUNCIONES

3.1 Introducción

En este capítulo haremos la descripción y análisis de la dinámica de una familia de funciones conformes y discontinuas en la esfera de Riemann; esto es, trataremos de describir la estructura de las órbitas periódicas.

En la figura siguiente se puede observar el comportamiento simétrico que se presenta en la dinámica de esta familia de funciones que, en principio, nos permite conjeturar, al menos en el sentido medible, que lo conforme de las transformaciones es más fuerte que lo discontinuo.



3.2 Planteamiento del Problema

Por principio de cuentas queremos especificar la siguiente notación:

- Denotaremos por Δ al disco unitario en $\overline{\mathbb{C}}$, es decir, al conjunto de puntos de la forma $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| < 1\}$,
- Al disco con centro en 2 y radio 1 lo denotaremos por D , y
- En general, al disco con centro en z y radio r lo denotaremos por $D(z, r)$.

Definamos ahora la siguiente función:

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \notin \overline{D} \\ f \circ h(z) & \text{si } z \in \overline{D} \end{cases},$$

donde $f(z) = \alpha z$ con $|\alpha| < 1$ y $h : D \rightarrow D$ es una transformación conforme y biyectiva.

El objetivo básico de este trabajo es *Describir la dinámica de la función F* . Para iniciar con el análisis, debemos, por principio de cuentas, escribir explícitamente la función h . Sabemos que las transformaciones conformes y biyectivas más generales son las transformaciones de Möbius, así que podemos construir la función h de la siguiente manera:

- Definamos $T : D \rightarrow \Delta$ por $T(z) = z - 2$. Claramente T es una transformación de Möbius que manda D en Δ .
- Las transformaciones de Möbius de Δ en Δ tienen la forma

$$S(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z},$$

para algún $z_0 \in \Delta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Así que hacemos la composición $S \circ T : D \rightarrow \Delta$.

- Finalmente escribimos la composición $T^{-1} \circ S \circ T : D \rightarrow D$, la cual, obviamente, es una transformación de Möbius de D en D .
- A esta composición le llamamos h y, explícitamente, h tiene la forma

$$h(z) = \frac{(e^{i\theta} - 2\bar{z}_0)z + (2 - 2e^{i\theta} - z_0e^{i\theta} + 4\bar{z}_0)}{(-\bar{z}_0)z + (1 + 2z_0)}.$$

Una vez que se tiene h , la función F se puede escribir como

$$F(z) = \begin{cases} \alpha z & \text{si } z \notin \bar{D} \\ \frac{\alpha(e^{i\theta} - 2\bar{z}_0)z + \alpha(2 - 2e^{i\theta} - z_0e^{i\theta} + 4\bar{z}_0)}{(-\bar{z}_0)z + (1 + 2z_0)} & \text{si } z \in \bar{D} \end{cases}.$$

Observemos ahora que la función F es “como” una transformación de Möbius por pedazos. La transformación exterior del disco tiene la forma $z \mapsto \alpha z$, donde $\alpha = \alpha$, y la transformación interior del disco tiene la forma $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$, donde $a = \alpha(e^{i\theta} - 2\bar{z}_0)$, $b = \alpha(2 - 2e^{i\theta} - z_0e^{i\theta} + 4\bar{z}_0)$, $c = -\bar{z}_0$ y $d = 1 + 2z_0$. O sea que podemos reescribir a la función F como

$$F(z) = \begin{cases} \alpha z & \text{si } z \notin \bar{D} \\ \frac{az + b}{cz + d} & \text{si } z \in \bar{D} \end{cases}.$$

Otra cosa que es también importante notar es que la función F depende de tres parámetros, a saber, α con $|\alpha| < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y z_0 con $|z_0| < 1$.

3.3 Dinámica de la función F

A partir de ahora, el parámetro z_0 lo dejaremos fijo e igual a 0 mientras que el parámetro θ estará variando entre 0 y 2π . Entonces la función F toma la forma

$$F(z) = \begin{cases} \alpha z & \text{si } z \notin \bar{D} \\ \alpha(e^{i\theta}(z - 2) + 2) & \text{si } z \in \bar{D} \end{cases}.$$

3.3.1 Análisis General

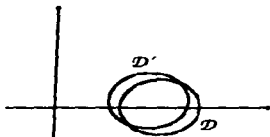
La dinámica de la función $f(z) = \alpha z$ con $|\alpha| < 1$ es muy simple:

1. 0 es un punto fijo para f , y
2. $f^n(z) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $z \in \bar{D}$.

Es decir, lo que tenemos es que el 0 es un punto fijo atractor para la función F . Si $0 < |\alpha| < \epsilon$, con $0 < \epsilon < 1$, el comportamiento de f^n está dominado por el de ϵ^n , el cual, converge "rápidamente" a 0, mientras que si $\epsilon < |\alpha| < 1$, la convergencia de los iterados de un punto es más lenta.

Conforme $|\alpha|$ es más cercano a 1, el efecto atractor del 0 es más débil. En particular, para $\alpha = 0.9999$ se tiene este comportamiento. Para este valor de α , la imagen de \bar{D} bajo f es un disco \bar{D}' con centro en 2α y radio $|\alpha|$ cuya intersección con \bar{D} es no-vacía. \bar{D}' es el efecto de contraer ligeramente a \bar{D} .

Si hacemos ahora $\alpha = 0.9999e^{i\theta}$, entonces, \bar{D}' será una rotación de \bar{D} en un ángulo θ y una ligera contracción. Este valor de α resulta conveniente, puesto que hace un doble efecto: una rotación y una contracción. Este es el valor de α que utilizaremos a partir de este momento.



Veamos ahora cuál es el efecto de aplicar $f \circ h$ a \bar{D} . Como $f \circ h$ es una transformación de Möbius, el efecto que tiene sobre \bar{D} es triple, es decir, es una rotación, una translación y una homotecia. Así que, la imagen de \bar{D} bajo F es un disco \bar{D}' con centro en 2α y radio $|\alpha|$. Este disco claramente tiene intersección no vacía con D .

A partir de aquí, podemos bosquejar el comportamiento de la función F . Recordemos que F está compuesta de dos partes: una exterior y otra interior al disco D . Cuando aplicamos F a \bar{D}' , a $\bar{D} \cap \bar{D}'$ se le aplica $f \circ h$, y a la parte externa se le aplica f . Esto produce una "ruptura" en \bar{D}' , y, después de algunas iteraciones las subsecuentes imágenes de \bar{D}' son impredecibles.

Algo que resulta importante notar es que todo esto ocurre en el anillo

$$R = \{z \in \bar{\mathcal{C}} : 1 < |z| < 3\},$$

ya que los puntos que caen en Δ , no salen de ahí. Así que, en términos generales, los puntos en R o convergen a 0 ó se quedan en R describiendo un cierto comportamiento. Finalmente observemos que los puntos z con $|z| \geq 3$, después de alguna iteración bajo F , llegan a R , de modo que la dinámica de interés para F ocurre en R .

3.3.2 Observaciones

1. Remarcamos en este momento que nos interesa analizar a la función F cuando $\alpha = 0.9999e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $z_0 = 0$.
2. De acuerdo con (1) podemos escribir a la función F como

$$F(z) = \begin{cases} \alpha z & \text{si } z \notin \bar{D} \\ \alpha(e^{i\theta}(z-2) + 2) & \text{si } z \in \bar{D} \end{cases},$$

o bien como

$$F(z) = \begin{cases} \alpha z & \text{si } z \notin \bar{D} \\ az + b & \text{si } z \in \bar{D} \end{cases},$$

donde $a = \alpha e^{i\theta}$ y $b = 2\alpha(1 - e^{i\theta})$.

3. Una vez que hemos descrito a $D' = F(D)$, podemos también definir a F^{-1} de la siguiente manera:

$$F^{-1}(z) = \begin{cases} \alpha^{-1}z & \text{si } z \notin \bar{D}' \\ e^{-i\theta}(\alpha^{-1}z - 2) + 2 & \text{si } z \in \bar{D}' \end{cases},$$

o bien como

$$F^{-1}(z) = \begin{cases} \alpha^{-1}z & \text{si } z \notin \bar{D}' \\ a^{-1}z - a^{-1}b & \text{si } z \in \bar{D}' \end{cases},$$

donde a y b están dados como en (2).

4. Hagamos $g(z) = az + b$ en (2), donde $a = \alpha e^{i\theta}$, $b = 2\alpha(1 - e^{i\theta})$.
Entonces,

$$\begin{aligned} g^2(z) &= g(g(z)) = g(az + b) = a(az + b) + b \\ &= a^2z + ab + b = a^2z + (1 + a)b. \end{aligned}$$

Iterando n veces obtenemos,

$$\begin{aligned} g^n(z) &= a^n z + a^{n-1}b + \dots + ab + b \\ &= a^n z + (1 + a + \dots + a^{n-1})b \end{aligned}$$

Como $|a| = |\alpha e^{i\theta}| = |\alpha| < 1$, se tiene que

$$g^n(z) = a^n z + \frac{1 - a^n}{1 - a} b.$$

A partir de (4) en la observación anterior, podemos determinar una expresión para F^n si hacemos $f(z) = \alpha z$ y $g(z) = az + b$. Si $z \in \bar{D}$, entonces

$$F^n(z) = g^{l_n} \circ f^{k_n} \circ \dots \circ g^{l_1} \circ f^{k_1}(z),$$

donde $k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n \geq 0$ y $k_1 + \dots + k_n + l_1 + \dots + l_n = n$.

Notemos ahora que, en general, para cualquier $k, l \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} g^l \circ f^k(z) &= g^l(\alpha^k z) = a^l (\alpha^k z) + \frac{1 - a^l}{1 - a} b \\ &= (a^l \alpha^k) z + \frac{1 - a^l}{1 - a} b, \\ f^k \circ g^l(z) &= f^k(g^l(z)) = f^k \left(a^l z + \frac{1 - a^l}{1 - a} b \right) \\ &= (\alpha^k a^l) z + \alpha^k \frac{1 - a^l}{1 - a} b. \end{aligned}$$

De acuerdo con estas expresiones, en general, F^n está dada por

$$F^n(z) = Az + B,$$

donde $A = \alpha^{n_1} a^{n_2}$, $B = \alpha^{n_1} \frac{1 - a^{n_2}}{1 - a} b$, $n_1, n_2 \geq 0$ y $n_1 + n_2 = n$.

3.3.3 Análisis de órbitas periódicas

Sabemos que 0 es punto fijo de F , mientras que el otro punto fijo es:

$$z = \frac{b}{1-a}.$$

Por otro lado, de la expresión $F^n(z) = Az + B$, tenemos que los puntos periódicos de F se obtienen al resolver la ecuación

$$z = \frac{B}{1-A}.$$

3.3.4 Análisis Experimental

Lo que nos interesa es estudiar la estructura de las órbitas periódicas de F , lo cual, analíticamente es posible pero complicado. Experimentalmente implementamos una manera de detectar y calcular explícitamente los puntos periódicos utilizando la idea de itinerario de un punto. Esto nos permite clasificar las órbitas periódicas que aparecen para cada valor del parámetro θ cuando se han fijado $\alpha = 0.9999e^i$ y $z_0 = 0$. Enfatizamos en este momento que la dinámica de interés aparece en el anillo R descrito en la sección 3.3.1. Describimos ahora cómo hacemos este análisis.

1. Sea $z \in \bar{D}$. Computacionalmente necesitamos una manera explícita de escoger z , así que escogemos z sobre el círculo $3e^{i\varphi}$ (esta elección es arbitraria), con $0 \leq \varphi < 2\pi$.
2. Aplicamos F un número k considerable de veces a z , y nos fijamos en $w = F^k(z)$.
3. Sea $0 < \epsilon < 1$. Hagamos $z_1 = F(w), \dots, z_n = F^n(w)$. Si $|z_j - w| < \epsilon$ para algún $1 \leq j \leq n$, entonces (i) w está sobre una órbita periódica de periodo n , ó (ii) w converge a algún punto periódico de periodo n .
4. Calculamos ahora el itinerario de w . Este es

$$I(w) = (s_1 s_2 s_3 \dots).$$

donde $s_i = 1$ si $F^i(w) \in \bar{D}$ y $s_i = 0$ si $F^i(w) \notin \bar{D}$. Observemos que $I(w)$ nos dice si estamos aplicando F en la parte exterior del disco D ó en D , así que si w tiene un comportamiento periódico. $I(w)$ tiene la forma

$$I(w) = (s_1 s_2 \cdots s_n s_1 s_2 \cdots s_n \cdots).$$

Si $s_i = 1$, asociamos la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a s_i , donde a, b, c, d son los parámetros de F cuando se aplica en \bar{D} , y si $s_i = 0$, entonces asociamos la matriz $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a s_i , donde α es el parámetro que tiene F cuando se aplica en \bar{D}^c .

5. Con todo lo anterior, lo que tenemos es que el punto z es periódico de periodo n (con $w \in O^+(z)$) si y sólo si

$$F^n(z) = z$$

si y sólo si

$$C^{r_1} \cdot C^{r_2} \cdots C^{r_s} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $C = \begin{cases} A & s_i = 1 \\ B & s_i = 0 \end{cases}$, r_i es el número de veces que se repite s_i , y $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$.

De acuerdo con los puntos descritos anteriormente, podemos clasificar las órbitas periódicas que aparecen conforme se varía el parámetro θ . Una pregunta que surge de manera natural, y que resulta interesante responder es la siguiente: ¿Cuáles son los puntos que son atraídos por cada uno de los puntos periódicos? Es decir, ¿cuál es la zona de atracción de cada punto periódico?

En este punto es muy importante señalar que cuando α está fijo y variamos solamente θ se tiene una cierta 'estabilidad' en el sistema, pero si variamos también α , ocurren algunos comportamientos inestables que analizaremos en algunos ejemplos posteriores.

Por otro lado, describir las zonas de atracción de los puntos periódicos geoméricamente es un problema complicado, pero computacionalmente es posible hacer una aproximación a la imagen global.

Intuitivamente el algoritmo es muy simple:

Supongamos que z_1, \dots, z_n son los puntos periódicos que aparecen para algún valor de θ . Sea A la siguiente región en $\bar{\mathcal{C}}$:

$$\{z \in \bar{\mathcal{C}} : -3 < \operatorname{Re} z < 3; -3 < \operatorname{Im} z < 3\}.$$

Sea w algún punto en A . Al igual que en el análisis anterior, debemos tener una manera explícita de escoger estos puntos, de forma tal que se pueda cubrir un número considerable de puntos en A . Nos fijamos en los primeros k iterados de w , con k un número suficientemente grande y verificamos si se cumple que

$$|F^j(w) - z_i| < \epsilon_i$$

donde $1 \leq j \leq k$ y ϵ_i un número suficientemente pequeño que depende de z_i . Si se cumple la condición anterior, entonces identificamos de alguna manera a w con el z_i correspondiente, y procedemos a tomar otro punto en A y efectuar el mismo chequeo hasta agotar a todos los puntos disponibles de A .

Cuando ha finalizado este procedimiento, se tienen clasificados a los puntos de A con sus respectivos puntos periódicos asociados, y a partir de aquí se puede generar una imagen global de las zonas de atracción de los distintos puntos periódicos.

Teniendo toda esta información, es posible observar las zonas de atracción de cada punto periódico, así como visualizar a los puntos que tardan poco ó mucho tiempo para llegar cerca de los puntos periódicos. También se pueden hacer acercamientos a los puntos periódicos y ver qué tan fuerte es el efecto atractor de cada uno de ellos.

Las imágenes que aparecen asociadas a las zonas de atracción de los puntos periódicos, presentan un comportamiento muy simétrico que está regido por los parámetros de la función F . La belleza y naturalidad de estas imágenes nos permiten vislumbrar la riqueza de la estructura periódica de la función F , para cada valor del parámetro.

De acuerdo con lo dicho anteriormente, podemos resumir la dinámica asintótica de F :

- (i) Si $|z| < 1$, entonces $F^n(z) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, y

(ii) Si $|z| > 1$, entonces se tiene una de las siguientes posibilidades:

1. z es un punto periódico ó
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(z) = z_i$, para algún z_i periódico de periodo k_i ó
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(z) = 0$.

(iii) Otros comportamientos?

3.4 Telarañas en $\overline{\mathcal{C}}$

3.4.1 Particiones de $\overline{\mathcal{C}}$ a partir del Itinerario

Asociado a cada punto z en la esfera se tiene el itinerario $I(z)$ de z , que es un elemento del espacio de sucesiones de 0's y 1's \sum_2 . Esto es, $I(z) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, donde $s_i \in \{0, 1\}$.

Definamos los siguientes subconjuntos de $\overline{\mathcal{C}}$:

$$I_0 = \{z \in \overline{\mathcal{C}} : I(z) = (0 * \dots)\}, \quad I_1 = \{z \in \overline{\mathcal{C}} : I(z) = (1 * \dots)\}.$$

Observemos que $I_0 = \overline{\mathcal{D}}^c$ e $I_1 = \overline{\mathcal{D}}$. Esto es, $I_0 \cup I_1 = \overline{\mathcal{C}}$.

Sea

$$P_0 = I_0 \cup I_1 = \{z \in \overline{\mathcal{C}} : z \notin \overline{\mathcal{D}}\} \cup \{z \in \overline{\mathcal{C}} : z \in \overline{\mathcal{D}}\}.$$

De manera similar, definamos

$$\begin{aligned} I_{00} &= \{z \in \overline{\mathcal{C}} : I(z) = (00 * \dots)\}, \\ I_{01} &= \{z \in \overline{\mathcal{C}} : I(z) = (01 * \dots)\}, \\ I_{10} &= \{z \in \overline{\mathcal{C}} : I(z) = (10 * \dots)\}, \\ I_{11} &= \{z \in \overline{\mathcal{C}} : I(z) = (11 * \dots)\}, \end{aligned}$$

y hagamos

$$\begin{aligned} P_1 &= I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11} \\ &= \{z \in \overline{\mathcal{C}} : z \in I_0, F(z) \in I_0\} \cup \{z \in \overline{\mathcal{C}} : z \in I_0, F(z) \in I_1\} \\ &\quad \cup \{z \in \overline{\mathcal{C}} : z \in I_1, F(z) \in I_0\} \cup \{z \in \overline{\mathcal{C}} : z \in I_1, F(z) \in I_1\} \\ &= (I_0 \cap F^{-1}(I_0)) \cup (I_0 \cap F^{-1}(I_1)) \cup (I_1 \cap F^{-1}(I_0)) \cup (I_1 \cap F^{-1}(I_1)). \end{aligned}$$

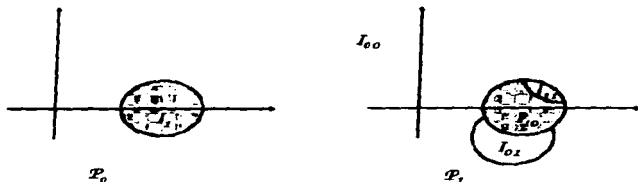
Claramente, P_1 forma también una partición ajena de $\bar{\mathcal{C}}$. Procediendo inductivamente, para cada itinerario de la forma $I(z) = (s_0 s_1 \cdots s_n * \cdots)$, definimos el conjunto

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \cdots s_n} &= \{z \in \bar{\mathcal{C}} : z \in I_{s_0}, F(z) \in I_{s_1}, F^2(z) \in I_{s_2}, \dots, F^n(z) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap F^{-1}(I_{s_1}) \cap \cdots \cap F^{-n}(I_{s_n}) \\ &= I_{s_0} \cap F^{-1}(I_{s_1 \cdots s_n}). \end{aligned}$$

Entonces, estos conjuntos determinan al conjunto

$$P_n = I_{s_0 s_1 \cdots s_n} \cup I_{\tau_1(s_0) \tau_1(s_1) \cdots \tau_1(s_n)} \cup \cdots \cup I_{\tau_n(s_0) \tau_n(s_1) \cdots \tau_n(s_n)},$$

donde τ_i es una permutación (distinta) de $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto, para cada n el conjunto P_n forma una partición ajena de $\bar{\mathcal{C}}$ que consta de 2^{n+1} componentes.



3.4.2 Descripción de las Telarañas

De acuerdo con la descripción de la sección anterior, para cada n tenemos una partición ajena P_n de $\bar{\mathcal{C}}$. Entonces, para cada $n \geq 0$, la *telaraña* de orden n asociada a F está dada por

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$Tel_n(F) = \partial P_n.$$

En general definimos por

$$Tel(F) = \bigcup_{n \geq 0} Tel_n(F).$$

a la *telaraña* asociada a F .

Observemos que $Tel(F)$ es un conjunto unidimensional. Además, si hacemos $J_n = \bigcup_{k=0}^n F^{-k}(C)$, se tiene inmediatamente por construcción que $Tel_n(F) = \overline{J_n}$, para cada $n \geq 0$; esto es, $Tel(F) = J$, donde $J = \bigcup_{n \geq 0} \overline{F^{-n}(C)}$.

3.4.3 Propiedades de J

Las siguientes propiedades de J son inmediatas de la definición.

1. J es invariante bajo F^{-1} ; esto es, $F^{-1}(J) \subset J$.
2. La sucesión $\{F_n = F^n\}$ es *no normal* en J . Esto es, si $z \in J$ y U es una vecindad de z , entonces la sucesión $\{F_n\}$ no tiene subsucesiones convergentes en U . Esto es intuitivamente claro, pues para cualquier vecindad de z suficientemente pequeña, F está definida en dos partes y bajo iteraciones de F la vecindad se rompe.

3.5 Ejemplos

En esta sección analizamos algunos ejemplos explícitos que nos permitirán entender mejor el comportamiento de F .

1. Si $\alpha = 1/3$ y $\theta = \pi$, entonces

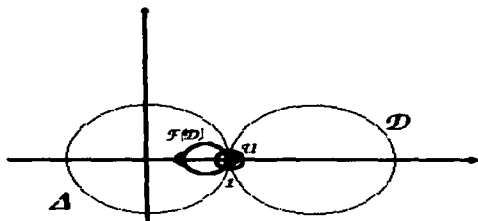
$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}z & \text{si } z \notin \overline{D} \\ \frac{1}{3}(4-z) & \text{si } z \in \overline{D} \end{cases}$$

Claramente, $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$. Esto es, 0 y 1 son los puntos fijos de F . Ahora bien, si $\zeta \in \partial D = C$, esto es, si $\zeta = 2 + e^{it}$, con $0 \leq t < 2\pi$, entonces,

$$F(\zeta) = \frac{1}{3}(2 - e^{it}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{it},$$

el cual está en el círculo $\{z : |z - 2/3| = 1/3\}$. Esto es,

$$F(D) = D(2/3, 1/3) \subset \Delta.$$



Entonces, si $z \in D$, $F(z) \in \Delta$ y por lo tanto $F^n(z) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Más aún, para cualquier $z \in \bar{C}$ se tiene que $F^n(z) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces, el valle de atracción de 0 es $C - \{1\}$, el cual no es simplemente conexo.

Notemos también que $1 \in C \subset J$ y como $F^{-1}(D) = D(6, 3)$, se tiene que $Tel(F) \cap D(0, 3) = C$. Esto es, la partición determinada por la telaraña asociada a F consta de dos componentes en $\bar{C} \cap D(0, 3)$.

Finalmente observemos que si U es una vecindad de 1 suficientemente pequeña, entonces, la imagen de U bajo F es disconexa. Las componentes de $F(U)$ están ilustradas en la figura anterior. Este comportamiento muestra la no normalidad de la sucesión de iterados de F en J .

2. Si $\alpha = \alpha_0 e^{i\theta}$, con $\alpha_0 = 1/\sqrt{3} + 0.1$ y $\theta = \pi$, entonces

$$F(z) = \begin{cases} \alpha z & \text{si } z \notin \bar{D} \\ az + b & \text{si } z \in \bar{D} \end{cases},$$

donde $a = \alpha e^{i\pi}$, $b = 2\alpha(1 - e^{i\pi})$. Claramente, 0 es un punto fijo atractor de F , mientras que ∞ es un punto fijo repulsor. También, si

$$z_0 = \frac{\alpha b}{1 - \alpha a},$$

entonces $|z_0 - 2| < 1$, $|F(z_0) - 2| > 1$ y

$$F^2(z_0) = f \circ g(z_0) = f\left(a \frac{\alpha b}{1 - \alpha a} + b\right) = f\left(\frac{b}{1 - \alpha a}\right) = \alpha \frac{b}{1 - \alpha a} = z_0.$$

Esto es, z_0 es un punto periódico (atractor) de F de periodo 2.

3.6 Preguntas y Comentarios Finales

En esta sección, establecemos algunas preguntas importantes, que nos gustaría responder a futuro. La afirmación principal es 3.6.4 y esperamos decir algo más próximamente.

Antes de probar nuestro primer resultado, recordemos que si $z \in \overline{\mathcal{C}}$, entonces el *itinerario* de z , denotado por $I(z)$ está dado por

$$I(z) = (s_0 s_1 s_2 \cdots),$$

donde $s_i = 1$ si $F^i(z) \in \overline{\mathcal{D}}$ y $s_i = 0$ si $F^i(z) \notin \overline{\mathcal{D}}$. Esto es, $I(z)$ es un elemento del espacio de sucesiones Σ_2 .

Podemos ahora probar nuestro primer resultado auxiliar.

3.6.1 Lema:

Sean $z, w \in \overline{\mathcal{C}}$ tales que $I(z) = I(w)$. Entonces,

$$|F^n(z) - F^n(w)| \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Si $n = 1$, entonces $F = g^{l_1} \circ f^{k_1}$, donde $k_1, l_1 \geq 0$, $k_1 + l_1 = 1$. Entonces,

$$|F(z) - F(w)| = |g^{l_1} \circ f^{k_1}(z) - g^{l_1} \circ f^{k_1}(w)|.$$

Si $l_1 = 0$, entonces $k_1 = 1$ y

$$|F(z) - F(w)| = |f(z) - f(w)| = |\alpha| |z - w|.$$

Si $k_1 = 0$, entonces $l_1 = 1$ y

$$\begin{aligned} |F(z) - F(w)| &= |g(z) - g(w)| = |az + b - aw - b|, \\ &= |\alpha| |z - w| = |\alpha| |z - w|, \end{aligned}$$

ya que $\alpha = \alpha e^{i\theta}$.

Por lo tanto, en casos se tiene que

$$|F(z) - F(w)| = |\alpha| |z - w|.$$

En general, para cualquier $n \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} |F^n(z) - F^n(w)| &= |Az + B - Aw - B| = |A| |z - w|. \\ &= |\alpha|^{n_1+n_2} |z - w| \\ &= |\alpha|^n |z - w|. \end{aligned}$$

De aquí se obtiene claramente lo deseado. \square

3.6.2 Observación.

Es importante notar que la condición del Lema anterior de que $I(z) = I(w)$ se puede sustituir por la condición más débil $I(z) = I(w)$ para n suficientemente grande, y la conclusión del Lema es aún válida.

3.6.3 Proposición:

Si F tiene puntos periódicos distintos de cero, entonces la partición de $\bar{\mathcal{C}}$ determinada por la telaraña asociada a F no puede ser finita ni localmente finita en $\bar{\mathcal{C}} \cap D(0, 3)$.

3.6.4 Afirmación Principal:

Si U es componente conexa de $\bar{C} - J$, entonces U es eventualmente periódica.

Si podemos contestar las preguntas anteriores, podremos concluir que la dinámica de F está bien determinada en el complemento de J ; esto es,

$$F|_{\bar{C}-J} : \bar{C} - J \longrightarrow \bar{C},$$

es holomorfa y los límites de las sucesiones $\{F_n\} = \{F|_{\bar{C}-J}^n\}$ son constantes.

Un análisis subsecuente nos permitirá saber qué sucede con la dinámica de F cuando nos restringimos a J y nos permitirá también conocer más propiedades de F .

BIBLIOGRAFIA

- [1] **Ahlfors, L.V.** *Complex Analysis*. McGraw-Hill Book, Co., New York, 1979.
- [2] **Beardon, A.F.** *Iteration of Rational Functions*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [3] **Blanchard, P.** *Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere*. Bull A.M.S., 1984.
- [4] **Carleson, T.W. and Gamelin, T.W.** *Complex Dynamics*. Springer-Verlag, 1993.
- [5] **Conway, J.B.** *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [6] **Devaney, R.L.** *Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, 1989.
- [7] **Henrici, P.** *Applied and Computational Complex Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [8] **Markushevich, A.I.** *Theory of Functions*. Chelsea Pub., New York, 1977.
- [9] **Marsden, J.E.** *Basic Complex Analysis*. Freeman and Co., San Francisco, 1973.