03071

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y DE POSGRADO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

"PROPUESTA METODOLOGICA PARA LA ENSEÑANZA DE TOPICOS DE ALGEBRA LINEAL EN EL BACHILLERATO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. UNAM."

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN EDUCACION MATEMATICA

P R E S E N T A

José Guadalupe Zaragoza Ramírez

Director de Tesis: M. en E. M. Sergio Cruz Contreras

CIUDAD UNIVERSITARIA NOVIEMBRE DE 1997

RECONOCIMIENTOS

A mis maestras y maestros, quienes directa o indirectamente, hicieron posible mi formación para un mejor ejercicio de la docencia.

Especialmente a la Dra. Elfriede Wenzelburger Guttenberger (†.1993) cuyo ejemplo permanente de trabajo esforzado y discreto tuve presente en la elaboración de esta propuesta.

IN MEMORIAM

A mi esposa e hijos, quienes con su comprensión y paciencia fueron factores de invaluable apoyo.

Particularmente, a mi hijo Herán, quien hizo posible el diseño del Capitulo III.

A VECES,
LOS SERES HUMANOS,
PENSAMOS CIEN AÑOS
ADELANTE,
PERO VIVIMOS REALMENTE
CIEN AÑOS ATRÁS.

José Guadalupe Zaragoza Ramírez.

"PROPUESTA METODOLOGICA PARA LA ENSEÑANZA DE TOPICOS DE ALGEBRA LINEAL EN EL BACHILLERATO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. UNAM."

JOSE GUADALUPE ZARAGOZA RAMIREZ

INDICE

INTRODUCCION

El viernes cinco de julio de 1996, el Consejo Universitario en C. U. aprobó el Nuevo Plan de Estudios y Programas del C.C.H. Tal dictamen del Consejo fue publicado el 11 de Julio del mismo, en la gaceta No. especial del C. C. H.

En la actualidad del Colegio, ante el imperativo de implementación de los nuevos programas de las asignaturas de matemáticas, los profesores, confrontamos carencias de materiales didácticos elaborados bajo un enfoque constructivista, vía resolución de problemas, que de acuerdo al Nuevo Plan, puedan ser considerados como "la experiencia de aprendizaje mas típica, buscando fomentar la reflexión común y la búsqueda de la síntesis colectiva e individual." (Plan de Estudios Actualizado. C.C.H. 1996. P, 6)

En particular, nos referimos aquí a carencias relativas al tipo de materiales escritos, que puedan ser útiles, tanto al profesor como al estudiante principalmente. Si se quiere, tal situación resulta comprensible, ante la magnitud de la empresa realizada por el cambio al Nuevo Plan. Ciertamente, se han realizado y se están llevando a cabo, programas de actualización de profesores, como el PAAS, en el cual, cada vez se incorporan más docentes. Sin embargo, los requerimientos de apoyo con materiales didácticos de esta naturaleza, a juicio de quien esto escribe, podría verse prolongado, a un periodo de mediano plazo para su realización si, es que algunos docentes egresados de dichos programas de actualización, decidieran involucrarse, en la producción de este tipo de materiales apropiados, para aportar productos didácticos elaborados bajo la orientación constructivista, en una perspectiva de la resolución de problemas propuesta en el plan mencionado.

Ante tal situación, uno de los dos propósitos que entre otros, animan la elaboración de la presente propuesta didáctica, consiste, en la elaboración y desarrollo de una secuencia didáctica, acorde a los contenidos de la Tercera Unidad del programa "INECUACIONES Y REGIONES EN EL PLANO" del programa de la signatura de MATEMATICAS II del mencionado Plan.

La propuesta se considera bajo la siguiente cuestión: ¿ Qué alcances y limitaciones, puede tener la enseñanza de tópicos sobre inecuaciones y regiones en el plano, bajo un enfoque constructivista vía resolución de problemas en el segundo semestre del Bachillerato del C.C.H.?.

El segundo propósito comprende otros más. En primer lugar, que los elementos aquí expuestos, proporcionen algunas directrices, las cuales, puedan ser útiles a los colegas profesores que imparten esta asignatura, como un apoyo, para la elaboración de las otras secuencias didácticas de las unidades restantes del programa de la asignatura, cuyo objetivo podría ser, llegar a complementar todas las secuencias que conforman el programa de la materia y, derivado de esto, en segundo lugar, pudiera ponerse a disposición del estudiante que lo requiera, un material didáctico más completo, que le sea útil como un importante medio de apoyo para el logro de más y mejores aprendizajes, ayudándole a vertebrar sus actividades de estudio y reflexión, sobre los distintos tópicos de la asignatura, junto con otros textos que le sean recomendados por su profesor. Además, hacer que el profesor cuente con más elementos de orden teórico y práctico, los cuales puedan asistirle en hacer que su tarea docente le sea más estimulante.

La propuesta que aquí se desarrolla, es de carácter metodológico, para la enseñanza de tópicos relativos a desigualdades y regiones en el plano, de la tercera unidad del programa de Matemáticas II, correspondiente al segundo semestre del Nuevo Plan de Estudios y Programas del C.C.H.(Cuadernillo No. 55, p. 42-43)

Esta propuesta, está considerada para contribuir como apoyo didáctico, a un desarrollo de la docencia matemática, bajo un enfoque constructivista, vía resolución de problemas. Se juzga que de ser aplicados los elementos que contiene, podrá coadyuvar de manera importante a mejorar el nivel de los aprendizajes matemáticos alcanzados por los estudiantes en este nivel, favoreciendo así, la adquisición de bases más sólidas como antecedentes con los cuales, los alumnos puedan cursar exitosamente los cursos subsiguientes, a la vez que pueda representar un material de enseñanza útil al profesor.

En cuanto, a los elementos que son objeto de enseñanza, señalados en los contenidos de la unidad del programa de la asignatura, se tiene bien claro, de que se trata de tópicos que son enseñados por primera vez en el currículum de matemáticas de Colegio en el segundo semestre del Bachillerato. Por tal razón, se desarrollan conceptualizaciones cuya finalidad es proporcionar respuestas que giran en torno de algunas cuestiones como: ¿Porqué es importante que el estudiante aprenda tópicos de esta naturaleza?, ¿con qué profundidad? ¿Qué significado tiene que el estudiante aprenda estos elementos? etc., Estas preguntas, giran en torno de una cuestión fundamental: ¿QUE ES APRENDER?.

Para quien esto escribe, el aprendizaje escolar de un estudiante, es considerado como resultado de un proceso de interacción múltiple, entre el sujeto que aprende, con el profesor y sus otros compañeros, a través del cual exista observación, despliegue la imaginación, la reflexión, se manipule el objeto, se den replanteamientos en el proceso de conocimiento del objeto, se reelaboren juicios etc., y en consecuencia, pueda alcanzar, cada vez un mejor grado de aproximación al conocimiento (o aprehendizaje) del objeto (o fenómeno), y ello, le facilite un despliegue de sus capacidades de respuesta a nuevas situaciones (o problemas), al poder hacer un uso mejor y más seguro de los aprendizajes logrados.

Una fundamentación del enfoque anterior, estará apoyada fuertemente en elementos de sustentación de las concepciones constructivistas desarrolladas en trabajos de Shoenfeld, J. Brunner, Brousseau y los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática de la N. C. T. M. , entre otros.

La comprensión que se tiene acerca de las matemáticas, es de naturaleza cultural, es decir, como un modo de pensar y, de interpretar el mundo.

Para dar viabilidad a la propuesta desde un punto de vista de un proceso de enseñanza—aprendizaje, congruente con la visión y el enfoque adoptados, se proponen una serie de actividades didácticas, diseñadas para cada uno de los tópicos que forman la tercera unidad del programa de la asignatura.

CAPITULO I.

MARCO TEORICO

I.1 PROPUESTA METODOLOGICA

El desarrollo de actividades para la realización de esta propuesta, comprende dos partes fundamentales: la primera, corresponde a la elaboración del marco teórico el cual constituye la fundamentación teórica de la misma, bajo un enfoque constructivista, vía resolución de problemas. La segunda parte, comprende la elaboración y desarrollo de las actividades de aprendizaje, correspondientes a la tercera unidad del programa de Matemáticas II del Plan Actual del Colegio. La finalidad; cómo enseñar tópicos de matemáticas a estudiantes que tienen ciertas características.

La propuesta tiene su razón de ser y su justificación, las cuales se inscriben en los propósitos de la enseñanza, atendiendo a necesidades de una elección didáctica y, la forma de reorganizar el proceso enseñanza - aprendizaje.

Antes de proceder al desarrollo de la propuesta, se ha juzgado necesario delimitar en la medida de lo posible, lo que se entenderá por algunos de los conceptos o aspectos fundamentales en este trabajo, dadas la diversidad de interpretaciones que pueden encontrarse para algunos de estos aspectos o conceptos en sus planteamientos o formulaciones teóricas, se ha considerado necesario aclarar la formulación que es aceptada en esta propuesta.(Carlón Monroy A. 1994)

Propuesta metodológica. Entendida aquí como la manera en que es desarrollada la propuesta.

Mundo real. En sentido lato, para los fines de la propuesta, se considera como el conjunto de todas las cosas existentes, esto es, la persona y todo lo que se encuentra al alcance de sus manos y de sus sentidos.(De Gortari Eli. 1988)

Modelo. Aquí, el concepto de modelo se considera como una representación simplificada de la realidad.

Simulación. Se entiende como una representación de una situación real concreta, en condiciones de laboratorio a través de un modelo apropiado que la represente.

Filosofía de la educación. Conceptuada como, una necesidad de reproducir una visión de la realidad y entorno de la evolución del ser humano, como una entidad de autodesarrollo de sus propias capacidades en su relación con otras personas, fundado en los principios u orientaciones de la acción educativa del Colegio.

Teoría del Conocimiento. Es decir, cómo el hombre conoce. Como una referencia de nuestro pensamiento a los objetos en general con la finalidad de conocerlos(Hessen, J. p.19)

Teoría del aprendizaje. Como una forma de alcanzar conocimiento.

Aprendizaje constructivo. Como una apropiación de conocimiento por el intelecto, que realiza el sujeto mediante una relación interactiva con el objeto.

Didáctica constructivista. Como un conjunto de situaciones didácticas a través de las cuales se haga posible una construcción del conocimiento de manera eficiente y controlada.

Situación didáctica. Como un conjunto de situaciones producidas, las cuales ayudan a que el estudiante construya de modo protagónico su propio aprendizaje, es decir, una situación que le lleve a una génesis escolar del conocimiento.

Problema. En términos generales, es un problema matemático que plantea una situación de interés, para ser resuelta por un individuo, el cual dispone de formas alternas de perseguir ese interés, con diferentes cursos de acción para obtenerlo y duda acerca del curso de acción a tomar.

Didáctica para la enseñanza. O sea, el modo en que se utilizan conceptos, relaciones, y algoritmos en un proceso de enseñanza—aprendizaje de una secuencia didáctica.

Propuesta Metodológica. Es la propuesta(PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO C.C.H. Julio de 1996) de modificación y actualización del plan de estudios vigente, el cual presenta lo esencial de una estructuración y fundamentación, destinada a rectificar algunos aspectos del proceso educacional del C.C.H. como son: el currículum, didácticas y evaluación de secuencias didácticas. La propuesta contiene además un marco teórico conceptual, una explicación de las ventajas que representa para el aprendizaje, los tópicos desarrollados de la unidad del programa y actividades didácticas para su aplicación(Carlón Monroy A. 1994)

I.2 Mundo Real. Modelo y Simulación

Mundo Real. Con esta expresión, nos referimos a la totalidad de cosas existentes. Esta vastedad de cosas, las cuales determinan conjuntos de relaciones, entre el hombre y las otras cosas, entre unas personas con otras. Entendemos, admitiendo de manera tácita, que se sabe de quién se habla, aquí nos referimos a la unión entre el mundo natural y el mundo social creado por el hombre, entendiendo por mundo natural, aquel que no siendo hecho por el ser humano admitimos su existencia y, por mundo social, el mundo creado por el hombre, determinado por el cúmulo de relaciones entre los seres humanos y los productos generados por ellos como la religión, la técnica, la ciencia, la familia y los distintos tipos de organización política, económica etc.(Carlón Monroy A. 1994)

Modelo. En general cuando se hable de un modelo se refiere a una representación de la realidad. Es una actividad que "desarrollamos todos nosotros siempre que nos formamos una imagen en nuestro pensamiento de algo que estamos intentando hacer comprender", al dibujar un plano, al esculpir una escultura, pintar o usar un simbolismo cualquiera(Turner J.C. 1974. p.363). Al respecto, existen diversos enfoques en los cuales, una invariante es el carácter de representación de la realidad de un fenómeno, ya sea de carácter formal o material. En el terreno de las ciencias, donde la construcción de modelos es parte del proceso mismo de estudio y reflexión acerca del fenómeno de que se trata, esta necesidad se da en una cierta etapa del proceso de abstracción sobre el propio fenómeno. Probablemente ante la necesidad de sintetizar y representar relaciones de tipo general entre aspectos del fenómeno considerados básicos.

Sin realizar un desarrollo de subdivisión detallada, nos referimos a los modelos teóricos o formales y a los modelos materiales o reales. Según Arturo Rosemblueth(1988) un modelo material es, " la representación de un sistema real por otro distinto que se supone tiene algunas propiedades semejantes a los que se desean estudiar en el sistema original.[...], y es la representación parcial de una teoría ..." y considera un modelo formal como "...la expresión simbólica, en términos lógicos, de una estructura idealizada[...],análoga a la de un sistema real". Así, en este sentido, cualquier ley o teoría resulta ser un modelo formal aplicable a los fenómenos que representa. Afirma luego que - "Este [el fenómeno] exhibe relaciones entre las distintas variables de estos fenómenos y, que estas relaciones formales son semejantes a las que existen en los fenómenos reales". Sobre este mismo punto, Santiago López de Medrano (1993) dice, "Estos [los modelos] consisten generalmente en una simulación de la situación real en condiciones más sencillas y favorables en lo que podríamos llamar en general condiciones de laboratorio". También Ackoff-Sascieni(1973) señalan , "Los modelos son representaciones de la realidad[...], en general podemos construir modelos mucho más sencillos que la realidad y a la vez, pueden utilizarse para predecir y explicar fenómenos con un alto grado de precisión."

Dentro de los modelos formales y de acuerdo con Yurén Mata, Ma. Teresa, (1981) mencionaremos de entre otros: modelo gráfico , Diagrama o gráfica que describe el modelo por ejemplo: mapa, diagrama del átomo.

Modelo matemático, formado por un conjunto de relaciones que suministran las precisiones cuantitativas del modelo, como una ecuación($S = \frac{1}{2}gt^2$ ecuación de la caída libre de los cuerpos de Galileo), o un conjunto de ecuaciones. El tipo de modelos que serán tratados aquí caen dentro de esta clasificación.

La finalidad de construir un modelo, es, estudiarlo y poder alcanzar una comprensión más a fondo del sistema o fenómeno real que representa. Un modelo nos proporciona generalidad. Entre más abstractos más generales.

Simulación. Ya antes, de manera general, se dijo que un modelos es una representación simplificada de la realidad. Una de las finalidades, del uso de un modelo como método para el estudio de un sistema o fenómeno real, es poder "experimentar" a través de una manipulación física total de las variables del sistema, sobre todo, cuando se trata de organizaciones de naturaleza industrial, militar o gubernamental. Es entonces cuando a la manera de un científico como afirman (Ackoff-Sascieni, 1973. P.19-20) por ejemplo, un "astrónomo puede observar el sistema que estudia, pero no puede manipularlo. En consecuencia, construye representaciones[modelos] del sistema..." y sobre estos realiza su investigación. De esta manera, a partir del modelo, es posible derivar una solución mediante la experimentación con él, mediante un proceso de análisis. A este proceso se le llama simulación. Así, mientras que un modelo representa la realidad se dice, que la simulación lo imita"(Op. Cit. P.119) involucrando en ese proceso de imitación la manipulación del modelo.

De esta manera, es posible "simular el comportamiento de sistemas económicos, sociales, administrativos, productivos, físicos, químicos, biológicos, etc.(Juan Prawda. 1984 p,317). Para su realización se requiere de una computadora analógica, o bien es suficiente el uso de papel y lápiz como es el caso de los modelos que serán abordados en esta propuesta.

La simulación requiere de modelos para poder representar el comportamiento de un sistema. En un proceso de simulación y tomando en cuenta el nivel de introducción elemental del tema, es conveniente sean adoptados los siguientes pasos:

1. Organizar en un cuadro de datos la información cuantitativa contenida en el enunciado del problema.
2. Plantear el modelo matemático del problema dado.
3. Resolver gráficamente problemas de una y dos variables.
4. Mostrar gráficamente, cómo la función objetivo 'toca' a la región de soluciones sólo en el vértice donde la función alcanza su valor óptimo (ya sea un máximo o un mínimo).
5. Hacer una interpretación (económica, técnica o, teórica) de la solución obtenida gráficamente.

El objetivo de lo anterior, es hacer que el estudiante sea advertido, de cómo la simulación puede ser un instrumento valioso para resolver un problema particular, haciendo que se involucre en la manipulación descriptiva del modelo matemático de una situación real y, pueda así, observar los resultados de tales manipulaciones, de modo que ello le permita hacer algunas deducciones con respecto a la situación real.(James E. Shamblin, G.T. Stevens jr. 1975. P.166)

I.3 Filosofía de la Educación.

En el Reglamento de la Unidad Académica del Ciclo de Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, se prescribe como una función de la Unidad, "...impartir enseñanza media superior en los términos de la Ley Orgánica y el Estatuto General de la Universidad", en el artículo 2 y los artículos 1 al 5 y 10 de estos ordenamientos legales, respectivamente(P.E.A. 1996. P.34). Según el artículo 2 del Reglamento aludido, el " plan de estudios y sus métodos de enseñanza, de acuerdo a sus contenidos y organización se encaminarán a proporcionar al estudiante de... una cultura básica, que al mismo tiempo que forme individuos críticos, creativos y útiles a su medio ambiente natural y social, los habilite para seguir estudios superiores."(Op. Cit. P.35)

Siendo el Bachillerato del Colegio una institución de enseñanza media superior, éste, posee funciones especiales que le confieren una identidad y valor propios, los cuales consisten en ayudar al desarrollo de la personalidad del estudiante entre otras, en fomentar e impulsar la participación reflexiva y consciente de los estudiantes en la cultura contemporánea de acuerdo a los rasgos que esta asuma en nuestro país.

Es un Bachillerato de cultura básica, porque "hace énfasis en las materias básicas para la formación del estudiante, a saber; en matemáticas, método experimental, análisis histórico social ... y se propone contribuir a que el alumno adquiera un conjunto principios, de elementos productivos de saber y de hacer a través de los cuales pueda adquirir mayores saberes y prácticas, según se enuncia en los documentos fundamentales del Colegio(Op.cit. p.36).

En todo esto, destaca el énfasis en el trabajo intelectual del estudiante con el cual se comparte la posibilidad de conocer, juzgar, opinar y fundar intelectualmente en una tarea conjunta con el profesor, procediendo en ello de manera rigurosa, metódica y sistemática. Esto hace del estudiante un sujeto de cultura más que un receptor de esta, de modo que asimile el conocimiento de manera crítica e individualmente. Esto es, que el estudiante sepa y, sepa porqué sabe, sepa hacer y haga eficientemente. Los elementos expuestos en las líneas anteriores, consideran al estudiante del Colegio como sujeto de cultura y no su mero receptor ni destinatario, capaz de la cultura, relacionándolos con su realidad, reelaborarlos o en su caso reemplazarlos por otros mejor fundamentados(Cuadernillo No.37)

Se considera que los elementos expuestos en los párrafos anteriores, pueden tener una fuente de sustentación en otros de orden filosófico, los cuales sean en última instancia, una base en la cual fundar la visión de la realidad a la que se trata de dar una respuesta educativa, a través de la formación de los estudiantes que egresan del Colegio. Siendo "El centro de atención y de acción educativa.(Cuadernillo No.38,p.9) El estudiante como ser humano en torno del cual giran todos los propósitos destinados a hacer realidad los objetivos y metas que se proponen justificación. En consecuencia, los rasgos del perfil del estudiante, en lugar de ser establecidos se originaron con una cierta exigencia de racionalidad.

Para que "La exigencia de que la presente actualización del Plan de Estudios disponga de un núcleo de ideas que proporcionen unidad, coherencia, orden y necesidad a los múltiples elementos del curriculum, demanda analizar y hace explícito lo que, tanto en los documentos fundacionales como en la práctica educativa del Bachillerato del Colegio, ha servido a este de punto de cohesión y, a la vez, lo ha caracterizado".(P.E.A., P.44)

De esta manera, bajo un enfoque filosófico no excluyente de otros enfoques ni exclusivo de alguna escuela filosófica, el cual haya antecedentes casi en cualquier filosofía y con las características constructivas que ofrece acerca del ser humano, sintetizan los fundamentos del "...perfil del alumno que el Colegio ha aspirado a formar y que los tiempos actuales reclaman".(Op.cit., p.45)

En tal enfoque, destaca una categorización del concepto de hombre como idea básica, para desarrollar las ideas en las cuales se fundaría la filosofía del Colegio, tarea que no corresponde llevar a cabo en este trabajo. Esta categorización de acuerdo con el P.E.A, descansa en una serie de categorías de las cuales, para los fines de esta propuesta se mencionan sólo las siguientes:

El ser humano se le considera:

Un ser en proceso, siempre perfectible, el cual experimenta una necesidad de trascender por la educación que recibe y los productos o resultados que aporta a la sociedad.

Un ser práctico [creativo] y "creador, en virtud de su propia actividad" al transformarse a sí mismo, transformando la naturaleza para la satisfacción de sus necesidades.

Un ser social integrado en su individualidad a la sociedad de que forma parte.

Un ser histórico en cuanto que "... la historia es el proceso de su realización a través de su propia actividad".

Un ser consciente que tiene "consciencia de sí mismo como individuo y como especie" y del mundo que lo rodea.

Un ser libre en cuanto capaz de orientar y dar dirección a sus necesidades propias como ser natural, dentro de ciertos límites.

Es un ser que con todo y sus diversas limitaciones "...tiene en sus manos su propio destino y es responsable" es único en cuanto irrepetible y capaz de "...integrar acción, pensamiento, palabra y pasión".

En este trabajo, se está de acuerdo en asumir las consideraciones generales anteriores como elementos fuente, en las cuales, creemos existen ramificaciones en que se enraízan los criterios generales del Colegio, más conocidos como "principios" del Colegio, los cuales, son asumidos muy particularmente por los profesores de matemáticas. Estos, según la mención que se hace en el Plan, se sintetizan en las siguientes expresiones que la comunidad académica ha hecho suyas con carácter de orientaciones importantes de su que hacer educativo y cuya interpretación compartimos en alto grado.

Aprender a

Aprender, en cuanto autonomía en la adquisición de los conocimientos que son aprendidos.

Hacer, referente a la adquisición de habilidades, para lo cual supone conocimientos y elementos de métodos diversos y, consecuentemente determina enfoques pedagógicos y procedimientos de trabajo en clase.

Ser, en cuanto a atender la formación del estudiante, tanto en la esfera de conocimientos como en la de valores humanos (éticos, cívicos y de naturaleza estética)

Interdisciplinariedad: en cuanto a la atención de las relaciones entre diversos campos del saber con el plan de examinar problemas y temas, combinando disciplina y enfoques metodológicos, de manera que en un proceso así, se sinteticen los aspectos de la realidad, dando en "el conocimiento de la unidad de los aspectos de la realidad que la división interdisciplinaria actual propone examinar separadamente".

I.4 Teoría del Conocimiento

Introducción

¿Qué es el conocimiento?, ¿Es posible el conocimiento humano?, ¿Cómo es posible el conocimiento humano?. De ser así, ¿en qué medida?. Desde tiempos antiguos, el ser humano se ha preguntado cuestiones como las anteriores, o muy similares a ellas. A través de los siglos ha especulado y llevado a cabo profundas reflexiones acerca de ellas, en empeñosos esfuerzos por comprender mejor esas relaciones existentes entre él y el mundo que le rodea. Tratar de explicarse sistemáticamente tales relaciones acerca de los objetos, cosas y personas respecto de su naturaleza, en un sentido amplio, esto podría caracterizar el conocimiento.

En el terreno de la filosofía, ha destacado la cuestión relativa acerca de la naturaleza del conocimiento, a su posibilidad y de ser así, ¿en qué medida es ello posible?. Históricamente, en distintas épocas, destacados filósofos y hombres de ciencia, durante su vida han aportado elementos importantes, que han sido útiles para el desarrollo de reflexiones más profundas a través de las cuales, el ser humano ha logrado alcanzar estadios superiores de conocimiento acerca de su realidad.

Bajo una perspectiva histórica, el cúmulo de reflexiones y conceptualizaciones, ingenuas en un principio, pero cada vez más sistemáticas en los desarrollo posteriores, llevadas a cabo en la búsqueda de respuestas a cuestiones como las planteadas al pricipio, han llegado a constituir lo que se denomina Teoría del Conocimiento.

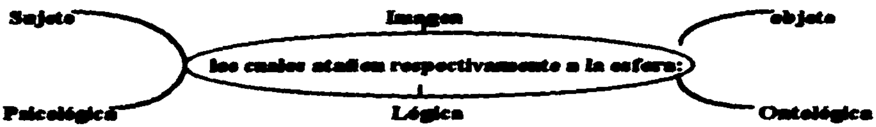
Debido al carácter didáctico—pedagógico de la presente propuesta, no es de interés desarrollar aquí, o teorizar sobre cuestiones de esta naturaleza cognitiva, en virtud del carácter abierto del problema del conocimiento.. Sí interesa en cambio, ofrecer una panorámica a través de la cual, se muestre una presentación esquemática, que en una apretada síntesis, describa algunas de las ideas más importantes que a lo largo de la historia, han sido desarrolladas por algunos pensadores y filósofos que han tratado estas cuestiones, las cuales, para los fines de este trabajo, interesan más desde un punto de vista educacional que epistemológico

1.4.1 El Problema

La teoría del conocimiento, se origina a partir de una relación que se de entre un sujeto cognoscente y un objeto cognoscible —considerando los términos sujeto - objeto en su sentido más amplio—, cuando el sujeto inquiere acerca de su interés. Se dice entonces, que el sujeto quiere conocer al objeto. Ahora bien, querer conocer un objeto implica saber acerca de las propiedades fundamentales del objeto y, ello requiere a su vez, realizar acciones de aprendizaje acerca de tales propiedades. En consecuencia, puede decirse que: conocer es un acto por el cual el sujeto aprehende, esto es, representa un objeto.

El fenómeno de conocimiento originado a partir de una relación así, involucra tres elementos: un sujeto congnoscente(el hombre), el objeto congnoscible [hecho real o fenómeno] y la representación o imagen que de este último se hace el sujeto cuando ya se conoce.(Carlón Monrroy, A., 1994 p.)

Por consiguiente y desde un punto de vista fenomenológico, el conocimiento presenta tres elementos principales, los cuales se representan de una manera esquemática a continuación:



En la esfera psicológica, se inquiere sobre cómo se da el conocimiento. La sicología mira hacia el origen y curso de los procesos psicológicos, pero no si tal conocimiento concuerda con el objeto. En el segundo elemento, la lógica inquiere sobre la concordancia del pensamiento consigo mismo, no su concordancia con el objeto. El tercer elemento, el ontológico, aquí, " el objeto hace frente a la conciencia cognoscente como algo que es, pero el ser es objeto de la ontología". Sin embargo, así como no puede eliminarse del conocimiento el objeto tampoco puede eliminarse el sujeto" y, ninguna de estas esferas resuelve el problema del conocimiento ya que la relación sujeto-objeto no encaja en ninguna de las disciplinas mencionadas, de ahí que la teoría del conocimiento sea reconocida como una disciplina filosófica independiente.(Hessen, J., p.p.25-26)

En un párrafo anterior, se dijo que: conocer es un acto por el cual el sujeto aprehende, esto es, representa un objeto. Ahora, si se asume que el conocimiento se da a través de una relación mutua entre un sujeto y un objeto, el sujeto aprehende al objeto, pero, ¿Puede el sujeto aprehender al objeto?. He aquí la cuestión de la posibilidad del conocimiento humano.(Op. Cit. P.22)

Lo anterior conduce al problema de la dualidad del sujeto. Al considerar la estructura del sujeto congnoscente, se encuentra que este es un ser espiritual y sensible. Consiguientemente se distinguen dos tipos de conocimiento; uno espiritual y el otro sensible, teniendo el primero como fuente la razón y, el segundo la experiencia. Ahora bien, ¿de qué fuente saca principalmente sus contenidos la conciencia cognoscente?, ¿de la razón o de la experiencia?. Esta es pues la cuestión de la relación del sujeto y el objeto en que descansa el problema central de la Teoría del Conocimiento.

Desde un punto de vista fenomenológico, llega a ser caracterizada una determinación del sujeto por el objeto. Esto, corresponde a una aprehensividad racional del objeto por el sujeto. Aunque otros destacados filósofos definen esta relación en sentido opuesto, esto es, que no es el objeto el que determina al sujeto, sino el sujeto el objeto, dado que el sujeto cognoscente se conduce activa y espontáneamente frente al objeto. Esta última forma de concebir la relación sujeto-objeto implica entonces interrogantes como ésta, ¿habrá entonces un conocimiento de otro tipo?. Si tal hecho es así, esto implicaría considerar otras formas de conocimiento por ejemplo, ¿un conocimiento intuitivo en oposición a un conocimiento discursivo racional?. Pero antes, a los problemas anteriores se agregaría uno más, el criterio de verdad, es decir, ¿cuál es el criterio bajo el cual puede decidirse si un conocimiento es verdadero?.(Op. Cit. p.p 28-29)

De esta manera, la Teoría del Conocimiento, también denominada epistemología, llegó a constituirse en una parte fundamental de la filosofía. Esto es, cuando los filósofos sin haber creado nuevas ciencias, reflexionaron en función de las ciencias mismas. Históricamente, en cuanto a su estudio, han enfocado su atención en tres problemas: los orígenes, la posibilidad y, la esencia del conocimiento.

I.4.2 Los Orígenes.

Este es uno de los problemas que ha sido motivo de controversia, en virtud de la cual se han suscitado varias corrientes, cada una de las cuales, ha planteado una propuesta acerca de cómo se presenta el conocimiento.

En un párrafo anterior relativo a la estructura dual del sujeto cognoscente, se dijo, que este es un ser espiritual y sensible. Ese hecho, permite distinguir entonces dos tipos de conocimiento; uno espiritual, cuya fuente es la razón y, otro sensible, cuya fuente es la experiencia. Ello nos llevó a plantear las siguientes preguntas: ¿De qué fuente extrae principalmente sus contenidos la conciencia?, ¿Se apoya primordialmente o incluso totalmente en la experiencia o en el pensamiento?. ¿Dónde reside el origen del pensamiento?. Estas son cuestiones relativas al origen del conocimiento humano. Entre las propuestas planteadas destacan las siguientes.

1. El Racionalismo.

Esta corriente epistemólogica, sostiene que el origen del conocimiento radica fundamentalmente en la razón, en el pensamiento. Todo verdadero conocimiento se afirma en el pensamiento, de ahí que los juicios cubran una necesidad lógica y su validez universal. Esto es, que el conocimiento es lógicamente verdadero y universalmente válido.

Un modelo prototípico de interpretación racionalista del conocimiento es, el conocimiento matemático, cuyo rasgo sobresaliente es, su naturaleza conceptual deductiva. En él, los juicios que formula se distinguen por su necesidad lógica y su validez universal. Un ejemplo de ello se tiene en la geometría , en la que todos los conocimientos se deducen de algunos conceptos y axiomas primitivos. Ahí, el pensamiento prevalece con total independencia de la experiencia conduciéndose acorde a sus propias leyes.(Hessen. J., P.49) universal y, dado el carácter contingente del mundo de la experiencia, este no puede procurarnos un verdadero saber. Esta imbuído de que los sentidos no nos llevan jamás a un verdadero saber. De ahí que, además de un mundo sensible, suponga la necesidad existencial de un mundo suprasensible del que nuestra conciencia saque sus contenidos metafísicos.(Op. Cit. p, 50)

Ahí, "...las Ideas son modelos de las cosas empíricas,..." y además las cosas, los conceptos através de los cuales conocemos las cosas, proceden del mundo de las Ideas. Son copias de ellas. Esto se da así por medio de la *anamnesis,* teoría según la cual, el conocimiento es una reminiscencia. La médula de este racionalismo, es la teoría de la contemplación de las Ideas.(Op. Cit. .p.p, 50-51)

Ya en la Edad Moderna, aparece una forma de racionalismo que alcanza a mayor competencia. Tal forma es debida a René Descartes(1496-1650) fundador de la filosofía moderna y, en su continuador Leibniz. Consiste en la Teoría de las ideas Innatas, según la cual, son innatos un cierto número de conceptos fundamentales del conocimiento. Estos no provienen de la experiencia y son un patrimonio de la razón. Tales conceptos, que para Descartes son más o menos acabados, para Leibniz, existen solo más o menos potencialmente, en cuanto que es innato a nuestra espíritu formar conceptos independientemente de nuestra experiencia. De acuerdo con J.Hessen, el mérito del racionalismo consistió en subrayar la significación del factor racional en el pensamiento humano. Su limitación, considerar el pensamiento la fuente verdadera y única del conocimiento.

El Empirismo

Este enfoque epistemológico, sustenta que el origen del conocimiento tiene como fuente única la experiencia. Metafóricamente compara el pensamiento con una hoja en blanco la cual, desprovista de todo conocimiento, sobre ella escribe la experiencia. "Todos nuestros conceptos, incluso los más generales y abstractos, proceden de la experiencia. No hay patrimonio a priori de la razón". Parte de hechos concretos.(Op.cit. p,54)

Aunque ya en la antigüedad, se encuentran ideas empiristas en algunas escuelas de pensamiento como la de los sofistas, los estoicos y los epicúreos, en las cuales, se manejaba primero el ejemplo del alma como una tabla rasa en la que escribe la conciencia.

El empirismo alcanzó un desarrollo sistemático en la Edad Moderna con John Locke(1632-1704) considerado el fundador de esta corriente. En su obra, "Ensayo sobre el Entendimiento Humano"(1690), el punto de partida en ella es, la imposibilidad de que en la conciencia haya contenido alguno que sea previo a la experiencia. Rechaza así, la existencia de las ideas innatas.

David Hume(1711-1776) desarrolló la doctrina empirista de J. Locke. Clasificó las ideas de éste en impresiones e ideas. Desde el principio de su primer libro del "Tratado de la Naturaleza Humana", Hume clasifica todas las percepciones de la mente humana, en impresiones e ideas, establece una distinción entre ellas, por el grado de fuerza y vivacidad con que hieren el espíritu y se abren en nuestro pensamiento y conciencia. A estas las llama impresiones, son las sensaciones que experimentamos cuando oímos, vemos, tocamos "según hacen su primera aparición en el alma." . Por ideas entiende "las imágenes débiles de las impresiones en el pensamiento y el razonamiento". En otras palabras, como menciona J. Hessen, en "las representaciones de la memoria y la fantasía menos vivas que las impresiones y que surgen de nosotros sobre la base de estas".(Op.cit. p, 56)

Establece este principio: "...todas las ideas proceden de las impresiones y no son nada más que copias de las impresiones". Pero también él sostiene el principio básico del empirismo, de acuerdo al cual " la consciencia cognoscente saca sus contenidos, sin excepción de la experiencia". Al igual que Locke, observa, "en matemática un conocimiento independiente de la experiencia y por tanto universalmente válida" (Hessen, J., p,56). Ya en el siglo XIX John Stuart Mill(1806-1873) reduce también el conocimiento matemático a la experiencia como única fuente del conocimiento. Así, el empirismo enfatiza fuertemente la importancia de la experiencia frente al desapego del racionalismo por este factor del conocimiento. En oposición al racionalismo, el empirismo subordina la mente al papel de sentar un orden entre las impresiones y las ideas. Tal ordenamiento sistematizado constituye el conocimiento(Reichembach, Hans., 1981. P,89).

El Intelectualismo

Esta doctrina representa una cierta mediación entre el racionalismo y el empirismo, pues considera que ambos factores: la razón y la experiencia como concurrentes en la producción del conocimiento.

Con el racionalismo, sostiene la existencia de juicios lógicamente válidos y de validez universal, tanto sobre los objetos ideales como sobre objetos reales. No obstante que para el racionalismo los elementos de juicio, los conceptos, son como un patrimonio a priori de la razón, el intelectualismo los deriva de la experiencia. Considera además de las representaciones intuitivas sensibles, la existencia de "...los conceptos que en cuanto contenidos de consciencia no intuitivos, son esencialmente distintos de aquellos, pero están en una relación genética con ellos". De este modo la experiencia y el pensamiento forman juntamente la base del conocimiento humano(Hessen, J., p,59)

El Apriorismo

Esta doctrina al igual que el intelectualismo, es otro intento de mediación entre el racionalismo y el empirsmo al considerarlos como fuentes del conocimiento, pero considera la relación en sentido opuesto al intelectualismo. En esto afirma su principio básico: "Los conceptos sin intuiciones están vacíos, las intuiciones sin los conceptos están ciegas"(Op. Cit. p,60)

De este modo, mientras que para el intelectualismo el factor racional es derivado del empírico, para el apriorismo tal derivación es a la inversa, es decir, el factor racional proviene del pensamiento, de la razón. Esta imprime de cierta manera, las formas a priori a la materia empírica y constituye de esta suerte los objetos de conocimiento.

Tal doctrina fue fundada por Inmanuel Kant(1724-1804), "todos nuestros conocimientos", afirma en sus Prolegómenos "Comienzan con la experiencia, pero no todos nuestros conocimientos derivan de la experiencia" .En otras palabras, esto significa que sólo en la materia se significan las sensaciones, estas representan un caos y es el pensamiento el ordenador de este caos, enlazando unas con otras y poniendo en conexión los contenidos de las sensaciones, lo cual verifica las formas de la intuición y el pensamiento.

I.4.3 Posibilidad del Conocimiento

En líneas anteriores, al plantear la relación determinante del sujeto sobre el objeto, considerando que el sujeto se conduce activa y espontáneamente frente al objeto, se dijo entonces que esa forma de concebir tal relación implicaba entre otras, la siguiente interrogante ¿habrá entonces un conocimiento de otro tipo?. Bajo una hipótesis así, ello implicaría consecuentemente, juzgar otras formas de conocimiento. A este respecto, se han manifestado algunas preguntas que señalan, cuál es la forma en que se presenta el conocimiento, en un momento en el que aún no hay una relación entre el sujeto y el objeto(Gutiérrez Pantoja Gabriel. 1984. P,8)

El Dogmatismo

Esta doctrina es seguramente la más antigua, tanto "...Sicológica como históricamente ...". Se da en la Grecia antigua, entre los presocráticos, los cuales confieren una confianza absoluta a la capacidad de la razón humana(J.Hessen. p.p. 31-32). Para esta doctrina no existe el problema del conocimiento. En ella se da por supuesta la posibilidad y realidad de la relación del sujeto con el objeto. Aquí , no hay duda de la aprehensión del objeto por el sujeto. Asume que los objetos de conocimiento nos son dados absolutamente y no por obra de una función intermediadora del conocimiento. En cierto modo se desconoce al sujeto.

Por ejemplo Pitágoras, de quien Filolaos quien "vivía en Tebas en el año 400 antes de nuestra era", decía en uno de sus fragmentos que han quedado:

> " Todas las cosas accesibles al conocimiento poseen un número puesto que sin él no podemos comprender ni conocer nada"

Aristóteles escribe " Los pitagorianos pensaron que sus principios eran los principios de todas las cosas(Casanova Gastón.,1965. P, 15)

La doctrina pitagoriana se resume en la fórmula " las cosas son números". Dada la simplicidad de sus ideas, no tuvieron desarrollo debido a su propio carácter de perfección, " puesto que si ha descubierto la verdad absoluta no susceptible de corrección, todo desarrollo ulterior no tiene razón de ser, es decir, es imposible y además porque esas ideas no eran susceptibles de verificaciones positivas. Esta síntesis pitagoriana es una síntesis idealista" (Op.cit. p.p.15-16)

El Escepticismo

Corresponde también a la antigüedad, habiendo sido su fundador Pirrón de Elis(360-270 a.C.). Para Pirrón " de dos juicios contradictorios uno es tan exactamente verdadero cono el otro". De ahí que recomiende la abstención del juicio. Una concepción menos radical del escepticismo está representada en Arcesilao (T 241) y Carneades(T 129) para quien no hay una realidad rigurosa. Una proposición sólo parece ser verdadera, probable. Según Pirrón, no se llega a un contacto del sujeto y el objeto(Hessen, J., p,34)

Esta doctrina niega la posibilidad de que el sujeto aprehenda al objeto. Luego, un conocimiento mediante una relación en que el sujeto aprehenda al sujeto es imposible. En cierto modo no se considera el objeto, al ignorársele por completo su significación al dirigir la atención totalmente a los factores subjetivos del conocimiento humano. De esta manera es relegado el objeto, que es tan necesario para que tenga lugar el conocimiento, dado que este representa una relación entre un sujeto y un objeto. Históricamente el dogmatismo y el escepticismo son antitéticos(Hessen, J., p,35)

Subjetivismo y Relativismo

Según estos enfoques no hay verdad universalmente válida, esta tiene validez limitada. El subjetivismo limita la validez de la verdad al sujeto (individuo, sociedad o género humano) que conoce y juzga. El conocimiento humano depende de factores que residen en el sujeto cognoscente.

Para el relativismo no hay verdad absoluta. Toda verdad es relativa. El conocimiento depende de factores externos como influencia del medio, pertenencia a un determinado círculo cultural y, los factores determinantes contenidos(Op.cit. p.p. 37-38)

En la antigüedad se identifican estas posiciones en los sofistas como representantes clásicos, cuya tesis fundamental está dada por Protágoras , "el hombre es la medida de todas las cosas". Un principio que expresa un subjetivismo individual. Incluso en la actualidad según menciona J.Hessen, en su ya citada obra, se encuentra un subjetivismo general defendido por Oswaldo Spengler en "Decadencia de Occidente": "solo hay verdades - dice en esta obra - en relación a una humanidad determinada". Así pues, el círculo de validez de las verdades coincide con el círculo cultural y temporal de que proceden sus defensores.

Ambos, subjetivismo y relativismo, caen en una contradicción al juzgar que no hay una verdad universalmente válida, a la vez que sustentan un concepto de verdad al afirmar que no hay verdad universalmente válida. En el fondo traslucen un escepticismo. En consecuencia, desconocen en cierto modo al objeto.

El Pragmatismo

Este movimiento cuyos fundadores son C.S. Pierce(1839-1914) de quien además proviene el nombre de pragmatismo y, por William James(1842-1910), tuvo después como continuador a John Dewey(1859-1952).

Para C.S. Pierce, es ante todo una lógica de las ciencias la cual, "debe ser la guía de las ciencias. Esta nos dice que una idea científica es verdadera si es útil y falsa si no lo es" .Pierce afirma que " hay tres cosas que nunca podemos esperar alcanzar mediante el razonamiento " la certidumbre, la exactitud y la universalidad absoluta. Sienta el principio básico del pragmatismo: "la verdad es equivalente a la utilidad y la utilidad es siempre relativa. Una de sus conclusiones morales más importantes que sacó es la de que " nuestro pensamiento está hecho de hábitos mentales y que pensar es crear hábitos de acción"(Xirau, Ramón., 1983. P, 349-350)

Esta filosofía aparece más completa y acabada en la obra de William James considerado con su verdadero fundador. Algunos de sus conceptos fundamentales derivados de sus obras Psicológicas, son de importancia filosófica por la trascendencia que han tenido, tanto en la sicología, como metafísica contemporánea. Entre estos, William James "...ve en la consciencia una forma dinámica del ser.[...]. Es decir, la consciencia es una *corriente de pensamiento*, ... ágil y móvil en todo momento, es también *continua*". "Es también una consciencia selectiva y activa y como tal adaptada a la realidad, capaz de abstraer y proyectar claras distinciones en un mundo que de otro modo, sería puro desorden"(Op. Cit. p,352}

Para William James la verdad es concordancia entre la conciencia y la cosa pero con la característica de ser activa y dinámica. Identifica la verdad con la utilidad pero no el sentido de un valor práctico inmediato, sino entendido como aquello, que pueda ayudar a mejorar el desarrollo de la persona humana, en su vida y convivencia. Verdad no es pues lo lucrativo, sino lo beneficioso en su sentido más extenso, esto es, emocional, estético y religioso.

I.4.5. El Criticismo

Definido como "...el método de filosofar que consiste en investigar las fuentes de las propias afirmaciones y objeciones y las razones en que las mismas descansan, método que da la esperanza de llegar a esta certeza" (Hessen, J., p,43)

En esta doctrina toda afirmación de la razón humana es examinada y no acepta nada despreocupadamente. Une a la confianza en el conocimiento humano en general, la desconfianza hacia todo conocimiento determinado.

Históricamente, las anteriores son algunas propuestas sobre el origen y posibilidad del conocimiento que han sido definidas. En cuanto a la esencia del conocimiento, es un tema incitante a la discusión, a la adopción de una posición. Estimula nuevas propuesta e inspira formas de sustentar cosmovisiones.

En la actualidad, las discusiones relativas a la esencia del conocimiento, se siguen sustentando en enfoques radicalmente diferentes, los cuales se pueden observar las dos posiciones que desde la antigüedad se han venido manifestando. Estas son, las propuestas idealista y materialista, identificadas como el Subjetivismo y el Objetivismo, cuya idea central consiste, en establecer prioridad, por una parte al sujeto en el caso del primero y, al objeto en el caso del segundo, como un punto de partida esencial del proceso de conocimiento.

De acuerdo con J.Hessen(p.67) una respuesta a la cuestión anterior, en la que se omita el carácter ontológico del sujeto y del objeto, podría ser que el resultado fuese favorable, tanto al objeto, como al sujeto. Si este fuera el primero, se tiene el objetivismo, o el subjetivismo en el caso del segundo. Las anteriores constituyen soluciones premetafísicas.

El Objetivismo

La idea central consiste en que el objeto, el cual se supone confronta a la consciencia cognoscente como algo acabado, determina o es decisiva en la relación cognitiva con el sujeto, el cual, se supone " toma" las propiedades del objeto. La primera proposición clásica de un objetivismb la hizo Platón en su Teoría de las Ideas. En tal doctrina, las Ideas forman un mundo con existencia propia independiente de la mente humana (realismo), la cual tiene acceso a ese mundo mediante una intuición de las ideas.

En tiempos más recientes este pensamiento se encuentra en Edmundo Husserl quien en lugar de ideas, habla de esencias, las cuales también forman un reino independiente y, al que se puede acceder mediante una intuición no sensible, a la cual denomina "intuición de las esencias". Según Ramón Xirau , menciona que en Husserl la palabra "fenómeno", "usada en su sentido etimológico, se refiere a todo lo que se ofrece a la conciencia.". En cuanto al método fenomenológico, Husserl como Descartes, comienza preventivamente por suprimir toda presuposición para empezar a pensar de nuevo,

> "El método fenomenológico no será primeramente, explicativo, sino descriptivo. Ante aquello que se da a la conciencia, que se nos ofrece la actitud del fenomenólogo será la del analista puro que olvida todas las interpretaciones anteriores y ve las cosas cara a cara."(p.379)

El Subjetivismo

En esta doctrina, la idea central consiste en que el sujeto —de un carácter superior trascendente— es la parte decisiva de la relación cognitiva con el objeto. En el sujeto, radican las Ideas, los principios del conocimiento. "un tránsito del objetivismo al subjetivismo, en el sentido descrito, tuvo lugar cuando San Agustín, siguiendo el precedente de Plotino, colocó el mundo flotante de las Ideas platónicas en el Espíritu divino, haciendo de las esencias ideales, existentes por sí, contenidos lógicos de la razón divina, pensamientos de Dios". En consecuencia, el conocimiento consiste ahora en volverse hacia aquel objeto supremo en lugar de enfrentarse con un mundo objetivo. De modo que el conocimiento finalmente se funda en lo absoluto, en Dios."(Op.cit. p.p. 69-70)

Ahora bien, si en la cuestión se considera la naturaleza ontológica del objeto, ello implica dos tipos de determinación: una que consiste en admitir que la totalidad de objetos son de naturaleza ideal, mental. Esta es la tesis idealista. La otra, consiste en afirmar que además de los objetos ideales, existen otro tipo de objetos reales, independientes del pensamiento. Esta es la tesis realista. Estas tesis constituyen soluciones de orden metafísico.

En lo relativo a la esencia del conocimiento, subyace el problema de la prevalencia en la relación del sujeto con el objeto, como elemento primario para iniciar el proceso de conocimiento. Esto implica dos tipos de determinaciones fundamentales: una que supone que la totalidad de objetos son de naturaleza ideal, mental. Esta es la tesis idealista. Dentro de esta, se considera la tesis realista, que por cierto, se asume en diversas variantes (ingenua, natural, crítica y volitiva). Lo anterior es válido, dentro de un idealismo metafísico, en cuanto juzga la existencia de fuerzas espirituales, potencias ideales. Por tanto, es necesario hacer una distinción con el idealismo en sentido epistemológico, el cual es objeto de interés en este trabajo.

El idealismo epistemológico según J.Hessen (p.67) sostiene la tesis de la no existencia de cosas reales independientes de la consciencia. Y bien, según esta tesis, quedan entonces solo los objetos de la consciencia (representaciones, sentimientos etc.) y los objetos ideales(de la lógica y de las matemáticas), y los supuestos objetos reales como objetos de consciencia o como objetos ideales. De donde, se originan dos tipos principales de idealismo: el subjetivo o sicológico el cual, parte de la consciencia del sujeto individual y, el idealismo objetivo del cual parte de la consciencia objetiva, tal como se plasma en las obras científicas, constituida entonces por la suma de pensamientos y juicios, formando de esta manera un sistema de juicio. No obstante esa diferencia esencial, ambas comparten una concepción fundamental: QUE EL OBJETO DE CONOCIMIENTO NO ES NADA REAL SINO IDEAL**. Aquí, es inmediato observar que el idealismo epistemológico y el realismo resultan ser antitéticos.(Op. Cit. p, 77-78)**

En conclusión, para el idealismo, lo primario es la consciencia, la acción que realiza el sujeto para vincularse a su realidad. Las ideas del sujeto son lo esencial del proceso de conocimiento.

La otra determinación en la prevalencia de la relación entre el sujeto con el objeto, es aquella que concibe al objeto, como elemento primario en el proceso cognitivo. Esta es la tesis materialista. "Sostiene que lo primario está en la naturaleza, en la materia", a la cual considera eterna e infinita. Es la materia, la naturaleza, la que crea al ser humano y determina su consciencia. Pues,

> "Para que haya conocimiento, se debe reconocer que lo primario es la materia, la naturaleza, la cual existe independientemente del pensamiento humano. Por tanto, si en la materia, en la naturaleza, existen leyes que le son inherentes, estas se proyectan en la conciencia, la cual recibe el reflejo de la realidad exterior. En conclusión, lo primario en el conocimiento es la materia".(Gutiérrez Pantoja G. 1984. p.11)

Hasta aquí, ha sido expuesto el problema principal de la teoría del conocimiento. Se ha realizado una presentación esquemática relativa a los orígenes, las posibilidades y, a la esencia del conocimiento. Al tratar sobre la esencia se han destacado las dos tendencias fundamentales, el idealismo y el materialismo, doctrinas antagónicas entre sí. Además, otras doctrinas derivadas que desde posiciones intermedias, han expuesto, tanto las características del objeto de conocimiento, el cual es objeto de estudio de la ontología, así como el pensamiento de aquellos sujetos interesados en elucidar el conocimiento. Ello es objeto de la epistemología y esto es el punto expuesto hasta aquí.

En relación a la ontología (del griego ontos: el ser, y logos: concepto, teoría). Teoría filosófica acerca del ser en general, de ser como tal (Blauberg I. 1991). Más que adentrarnos en un estudio ontológico, teórico acerca del objeto. Aquí, se refieren sólo algunas elementos, con el fin de mostrar brevemente, cuál es la idea habida sobre el fundamento de la ontología.

En particular, es de interés mencionar algunas ideas ontológicas de Nicolas Hartman, cuya finalidad es, crear sobre una base empírica, la teoría acerca del ser. Para Hartman, comenta Gutiérrez Pantoja, " el mundo es un todo integrado en el que la naturaleza y sociedad se encuentran unidos, eso, es la conexión del mundo como totalidad... la unión del mundo como un todo complejo, debe irse descubriendo poco a poco para entender cuál es la realidad y como se presenta. Esta será la misión de la ontología " y, para Hartman , el ente es todo objeto existente, por tanto, el ente es infinito, ilimitado, totalizador; ente es un concepto que comprende según el propio Hartman " toda materia existente, todo lo que existe, todo lo que es",. "...sin diferencia alguna se extiende el carácter del ser al sujeto y al objeto, a la persona y a la cosa, el hombre y el mundo, a lo racional y a lo irracional". Más aún " Si el ente es toda materia y, esta se quiere conocer, tal proceso no se puede realizar en una primera observación, en una primera percepción sensorial; el conocimiento del ente se logra cuando el pensamiento del ser humano ha podido reproducir en la mente el objeto con sus características". De esta manera, al realizarse la reproducción mental, el ente se objetiviza, se vuelve objeto. Luego el ente objetivado es el objeto pensado.(Op. cit. p,15).

En la ontología idealista, como ya se mencionó antes, al privilegiar la prevalencia del pensamiento del sujeto sobre el objeto, asigna al sujeto la ontificación del objeto. Aunque dentro de la tradición religiosa se considera una fuerza divina la que permite realizar la ontificación.

La ontología materialista —recuérdese que el materialismo sostiene que es la naturaleza, la materia, la que crea al ser humano y a su consciencia— y, en consecuencia, no es la consciencia la que determina al objeto. Este enfoque busca sustentarse en las reflexiones realizadas por Carlos Marx para quien, según nuestro interlocutor, " lo ontológico está dado en la naturaleza que históricamente se manifiesta, existe, es. [...]. La ontología materialista se identifica como tal en la medida que hay una ontología especulativa, idealista, que vincula estrechamente la existencia del ente a la acción cognoscitiva del sujeto. Sólo así se puede hacer una diferenciación entre la ontología materialista e idealista" (Op. Cit. p,17).

Aunque Marx no es precisamente un epistemólogo, muy específicamente, ante la pregunta de ¿cómo se logra el conocimiento?. Pueden hallarse elementos de respuesta en las once tesis sobre Feuerbach en la Ideología Alemana. Particularmente la onceava tesis, la cual resume la posición de Marx acerca del conocimiento. Ahí afirma: " Los filósofos se han limitado a *interpretar* el mundo de distintos modos; de lo que se trata es de trasformarlo" Marx plantea una razón de ser del conocimiento, en un conocimiento de la realidad para trasformarla, yendo más allá de un conocimiento por sí mismo.

En la sección anterior, se han descrito ligeramente algunas de las distintas propuestas acerca del conocimiento, las cuales, en distintas épocas, han aportando elementos que han servido para formar una base de afirmación del pensamiento, acerca de una teoría general del conocimiento, cuyo desarrollo seguramente ha seguido evolucionando a la par que lo han hecho las ciencias mismas.

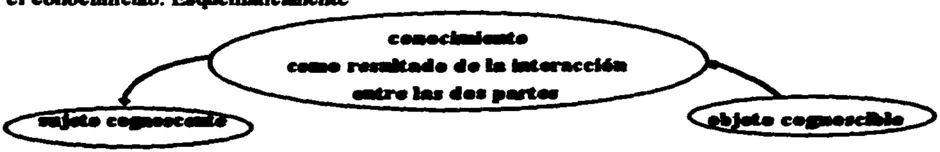
Tales propuestas, nos llevan a relacionar la forma de pensamiento del ser humano, en relación con la naturaleza, consigo mismo y, sobre lo incomprensible para sus avances históricos en el conocimiento.

Con la descripción anterior, puede entenderse que la ontología y la epistemología se muestran como si fuesen dos cosas separadas. Sin embargo, el carácter de tal separación es solo de tipo didáctico y su finalidad es hacer más comprensible el estudio en torno al objeto (ontología) y, el estudio en torno al razonamiento del sujeto(epistemología), pero ambas; ontología y epistemologia, son parte de la unidad que forma el proceso de conocimiento, bajo cualesquiera de sus perspectivas, ya sea la idealista, o bien, la materialista.

En las secciones anteriores, han sido mostrados aquellos rasgos, acerca de la relación del sujeto con sus capacidades sensoriales y de conocimiento, con el objeto cognoscible a través del proceso de conocimiento. Esto, se ha realizado en torno de los tres aspectos básicos, sobre los cuales gira la teoría del conocimiento, es decir; los orígenes, la posibilidad y, la esencia del conocimiento.

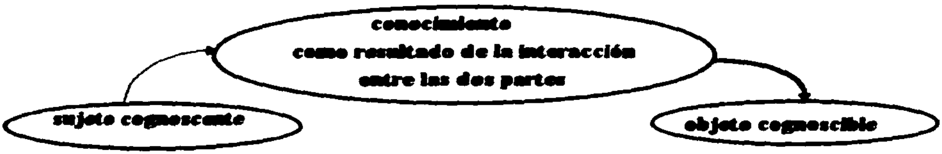
En concordancia con la exposición de Gutiérrez Pantoja G. (p.p. 66-68) se describirán de modo esquemático, tres modelos de conocimiento, identificables a partir de los elementos de reflexión teórica sobre el proceso de conocimiento, según las distintas concepciones expuestas antes acerca del problema que representa la llamada teoría del conocimiento.

En primer lugar, la teoría del reflejo, en la cual se identifican los tras factores fundamentales en la relación cognitiva del sujeto con el objeto y el resultado de esa relación, el conocimiento. Esquemáticamente



en esta concepción mecanicista, se identifica al objeto como "un agente activo que estimula la percepción del sujeto, quien es un ente contemplativo, pasivo. El resultado de tal estímulo es, el conocimiento que en el proceso de percepción ve reflejando en la mente del sujeto la copia del objeto que percibe" (Op. Cit. p,67) tal estímulo o " acción refleja no es más que el mecanismo mediante el cual la causalidad física se inserta en la causalidad de la naturaleza como parte de ella".(Abagnano, Nicola., 1987)

En segundo lugar, la concepción idealista. En esta, como ya se dijo antes, se considera al objeto como factor predominante en su relación con el objeto. Esquemáticamente



Aquí se considera al sujeto, poseedor de una capacidad sensorial racional, mediante la cual aprehende los objetos exteriores. Entonces, el conocimiento se realiza gracias a esa capacidad del ser humano, capacidad que predomina sobre la materia. De este modelo se derivan otras dos vertientes:

Solipsista: en la cual, la existencia de un objeto (natural o social), depende de la relación sensorial con el sujeto(ser humano). Al romper esa relación, el objeto deja de existir

Agnóstica: al igual que en el solipsismo, sostiene que la existencia del objeto existe en el momento en que los sentidos entran en contacto con él. Pero difiere en cuanto que el objeto, sigue existiendo después de haberse percibido. Se mantiene como un objeto ya conocido.

En tercer lugar, el modelo de interacción histórica, juzga ocioso discutir la prevalencia de un factor sobre el otro, en la relación del sujeto cognoscente con el objeto de conocimiento y en cambio considera el conocimiento como resultado " de una interacción constante entre el sujeto y el objeto y, el objeto y el sujeto, sin que prepondere alguno de ellos[...],dependiendo de las experiencias individuales en las cuales la práctica personal y la social, tendrán una influencia determinante." (Op. Cit. p,68)

Epistemología de la Matemática

Ya antes, fue asentado que el problema fundamental de la teoría general del conocimiento, se origina en la naturaleza de la relación del sujeto cognoscente con el objeto cognoscible. En términos de una epistemología de la matemática, el problema se ubica en la siguiente interrogante, ¿cómo es posible la matemática y de dónde proviene su correspondencia con lo real?.

La cuestión anterior comprende dos problemas; el de la posibilidad y, el de la esencia de la matemática, los cuales, pueden ser enunciados como sigue, ¿cómo es posible la matemática? y, ¿en qué consiste la esencia de la matemática?.

Estas cuestiones, señala J.Piaget son "centrales no solo desde el punto de vista de la epistemología de la matemática, sino incluso desde el de toda la epistemología, puesto que la teoría del conocimiento nació con Platón a partir de una reflexión sobre la naturaleza y no dejó de centrarse, con Descartes, Leibniz y Kant hasta los trabajos contemporáneos en esas cuestiones..."(Tratado de Lógica y Conocimiento Científico. Paidos. P, 147).

Sobre este asunto considera que en "otras disciplinas [excepto la lógica], los dos problemas correspondientes no plantean tantas dificultades porque tienden a reducirse uno al otro" . Por ejemplo, ante la pregunta de cómo es posible la biología, dice lo siguiente; "equivale a buscar las razones de su conformidad con lo real" dada la realidad biológica que uno acepta y cuyo único objeto " consiste en establecer porqué medios (interpretaciones conceptuales más o menos adecuadas, pero controlables, paso a paso, a través de los dispositivos experimentales) intentamos alcanzarla". En relación a la física, si se considera la física matemática que "plantea precisamente todo el problema epistemológico de la conformidad entre la matemática y lo real", no así con la física experimental en la que el problema de su posibilidad y adecuación tiende de nuevo a confundirse.(Op.cit. p,147)

¿Qué sucede en el caso de la matemática ?. En el caso de la matemática, el problema epistemológico central, se reduce al de la naturaleza de los entes matemáticos. Este, conduce a preguntarnos si tal naturaleza, " es la misma que la de la realidad física o experimental en general (lo cual impugnan la gran mayoría de los matemáticos) y, si no es así, ¿cómo interpretar su correspondencia?(Op. Cit. p,148)

El problema del carácter existencial de los entes matemáticos, es primordial y , predomina sobre todos los demás, pero "desemboca en una serie de dificultades clásicas" cuyas soluciones propuestas resultan insuficientes. El interesado podría remitirse a las propuestas sobre fundamentos de las matemáticas, formuladas por algunas de las principales corrientes del pensamiento filosófico—matemático, como el formalismo, el logicismo o el intuicionismo matemáticos.

Así, a partir de un examen directo, sobre "la cuestión de la naturaleza de los entes matemáticos", acorde al proceso histórico y a la forma como "fue planteada y resuelta" conforme a los propios matemáticos en los diferentes periodos de la historia, Piaget procede a efectuar posteriormente la "transición entre los datos genéticos analizados ... con la finalidad de buscar elementos para una respuesta y la evolución de discusiones clásicas".(Op. Cit. 148).

Suponiendo como una característica, la carencia de una comprensión clara, acerca de la naturaleza de los "entes" matemáticos y de su "localización ... con respecto a los demás planos de la realidad", plantea la existencia de una posibilidad que considera dejar abierta desde un principio, la cual consiste en suponer que los llamados "entes" , " no solo no constituyen "entes" como los demás, sino además de que tal vez tampoco sean "entes" de ninguna manera." Y entonces considera importante preguntarse en torno de esto, en primer lugar, "si la primacía del ente se impone como necesidad para definir el objeto de una ciencia o si ¿es preciso reservar la eventualidad de otros modos de objetividad según los cuales, el ente se referiría en todos los casos a operaciones, a transformaciones o a construcciones?".

Según J. Piaget, al examinar a lo largo de la historia, las diversas formas en que los matemáticos han concebido el objeto de su ciencia, "encuentra menos una ley simple de evolución que una serie de alternancias entre la primacía del ente, debida al hecho de que el resultado de una construcción termina siempre pareciendo que existe independientemente de ésta , y la toma de conciencia de la propia construcción (no excluyendo, por otra parte, las alternancias una vección general, de la cual solo señalarán en tal caso, las oscilaciones)"(Op. Cit.149).

En lo que Piaget considera como un estudio, "...siempre útil para meditar, a condición de que se prolonguen sus líneas hasta el estado actual...", de P. Boutroux, dice que éste "intentó caracterizar l' Idéal scientifique des mathématiciens..." refiriéndose a "...la manera en que los matemáticos concibieron en el curso de la historia el objeto de su disciplina...". De este modo, refiere, "se han distinguido tres grandes periodos pero, al completarlos mediante el examen del período contemporáneo, la impresión de sucesión dialéctica.(Op.cit.149)

A continuación se hace una exposición sucinta que a nuestro juicio, resume los aspectos más importantes acerca de los períodos a que se hace referencia.

En primer lugar, el denominado período contemplativo el cual caracteriza la matemática griega. En este, los entes matemáticos se conciben como independientes del sujeto porque se considera que "el espíritu contempla desde fuera , el término "teorema" que significa contemplación resulta ya simbólico en este aspecto". Según Piaget, el " realismo del período contemplativo" se explica más directamente a través de la toma de conciencia incompleta del papel de las operaciones, es decir, no hay conciencia de ellas en sus mecanismos considerados como objetos de reflexión." Se menciona como ejemplo típico el teorema de Pitágoras, en el cual se sustituye la técnica empírica de los egipcios en un método formal y riguroso(Op.cit 149).

En la época platónica—aristótelica, el sujeto se asume en actitud pasiva en el papel del conocimiento y, nada diferente del de "efectuar registros directos o por reminiscencia, es obvio que la actitud de los matemáticos, orientada al descubrimiento, no apuntaba en absoluto hacia el propio problema de la naturaleza constructiva de las operaciones" (Op.cit. 149-151).

El segundo período, que P. Boutroux llama sinteticista corresponde "a la toma de conciencia histórica de las operaciones, cuando los entes matemáticos dejan de constituir objetos independientes de su construcción y aparecen como el propio resultado de la síntesis". Dice Piaget " en esto reside el interés del texto de Lagrange citado por P. Boutroux:

> "Las funciones representan las diversas operaciones que es necesario efectuar en las cantidades conocidas para obtener los valores de aquellas que se buscan y que sólo constituyen en forma precisa el último resultado de est capítulo."

Así, a partir de ahora, la matemática se concibe como el producto de síntesis operatorias, donde se despliegan libremente las construcciones del sujeto." (Op.cit. 152)

El tercer período de Boutroux, período analítico, de Piaget, "esta signado por la aparición de una resistencia a la construcción.[...] y afirma de una manera quizá, quizá de manera discutible y sobre todo un período en cuyo transcurso se redescubre la existencia de hechos matemáticos no exteriores a nosotros sino dotados de una "objetividad intrínseca": sean sus pruebas las complejidades crecientes e imprevisibles de la teoría de las funciones y sobre todo la obligación de "elegir" más bien que de construir libremente, en que se encuentra el matemático cada día más."(Op. cit. p 153)

De acuerdo con J. Piaget, podríamos ver en un ideal en el que según Boutroux, observa que "la construcción sólo resulta posible, con frecuencia, "en potencia, si cabe", podría verse " la consumación de una síntesis dialéctica: la tesis platónica del ente y la antítesis de la operación culminarían así en la síntesis de las estructuras intrínsecas, resistentes como son los entes y a la vez relativas a construcciones, pero cada vez más reguladas, como lo exigen las operaciones cuando se coordinan en estructuras de conjunto (Op.cit.153)

En un salto que omite un interesante estudio sobre la constructibilidad matemática, rigor y la adecuación a la realidad física que desarrolla J.Piaget, bajo una perspectiva genética, con el objeto de continuar en la línea de interés de nuestro trabajo, apoyándonos en los textos de este autor, abordaremos a continuación, de manera esquemática las posiciones epistemológicas clásicas respecto a la matemática. Estas son: empirismo—platonismo—apriorismo y dialéctica.

Empirismo

Bajo esta perspectiva, en lo que atañe a una concepción empirista, para Piaget el problema adquiere la siguiente forma: "si todo es matemático o matematizable, ¿porqué la experiencia física (en el sentido amplio de experiencia de los objetos) no basta para descubrir los entes matemáticos?. La respuesta que da, considera que lo real contiene una "...parte de mezcla o de azar..." como razón aparente, siendo muy posible conceptuar en un sentido "como estrictamente aleatorios los fenómenos por debajo de cierta escala y las regularidades solo se delinean en virtud de un juego de compensaciones de escalas superiores presentándose enredadas en diversos grados." (Op.cit 176)

Dentro de las principales razones esenciales que arguye acerca de la insuficiencia del empirismo, en primer lugar, refiriéndose a G. Lippman quien en relación al hecho muy general sobre las insuficiencias del empirismo, plantea que "el ser vivo(esto es cierto tanto para sus funciones cognoscitivas como para todos sus órganos, cualesquiera que sean) se compone de "aparatos", mientras que el medio físico se compone de "fenómenos". Tomándose en cuenta que un aparato realiza trabajo que es lo mismo que a decir cómo el medio es trasformado continuamente por el ser vivo quien lo asimila en todos los planos.(Piaget, Jean,, (Op.cit. p.176).

En consecuencia, afirma, "...el conocimiento se basa en todos los niveles, en interacción entre el sujeto y los objetos y que aun cuando el conocimiento tome al sujeto como objeto, existe una construcción de interacciones entre el sujeto que-conoce y el objeto—conocido...". De esto subsume que todo objeto de conocimiento incluso el sujeto, solo es conocido mediante aproximaciones sucesivas " que tienden a un límite en sentido preciso del término, es decir retrocediendo hasta el infinito"(Op.cit 177)

Finalmente concluye, "A partir de estas interacciones, al comienzo indisociables, el conocimiento se compromete en dos direcciones opuestas: un polo de interiorización, constituido por las coordinaciones internas necesarias para las acciones y para estas interacciones, coordinaciones cuyo análisis reflexivo separa las estructuras lógico—matemáticas y un polo de exteriorización, caracterizado por la persecución del objeto y el conocimiento experimental". Agrega a lo anterior, "que esa asimilación de lo real por los 'aparatos' de los seres vivos y pensantes solo podría ser progresiva." Lo cual constituye la segunda razón (Op.cit177)

En seguida afirma que "esta doble construcción mantiene en jaque al platonismo." Pues como se vio antes "...los teoremas de limitación, desde el punto de vista de la formalización, generan la necesidad de un constructivismo, pues un sistema deductivo, sólo puede terminarse apoyándose en los siguientes y no en los precedentes."(Op. Cit.177)

En segundo lugar, el apriorismo, el cual, es otra manera de "dar cuenta de la construtividad indefinida de la matemática, de su rigor así como de su conformidad con la experiencia, pues una estructura sintética a priori constituye al mismo tiempo una fuente de síntesis y de necesidad así como una condición previa a toda experiencia."(Op.cit177) Para Piaget "la laguna fundamental del apriorismo clásico reside en su carácter estático, debido a su exigencia ilusoria de un trascendentalismo o comienzo absoluto. Es importante, pues, relativizar el a priori y simultáneamente suavizarlo, en la forma de una construcción progresiva".(Op.cit. 179)

La relativización consiste en considerar al sujeto "de acuerdo con las etapas de su desarrollo...genético". Esto implica que bajo las condiciones precedentes e indispensables para su experiencia, estas son diferentes entre un nivel N y el nivel N+1, además de que un a priori relativo, puede ser un objeto de experiencia diferente para dos sujetos, es decir, un a priori relativo a un sujeto A, puede ser objeto de experiencia o de construcción para un sujeto B. Por tanto, no necesariamente hay que "recurrir a un apriorismo trascendental. En tanto que una dialéctica histórica o genética conserva toda la verdad del a priori(condiciones previas y necesarias), sin sustraerlas a las exigencias generales del análisis científico, constructivista o experimental"(Op.cit. 179). En síntesis, concluyendo con Piaget:

> "De donde surge el punto esencial: bajo su forma estática, el apriorismo constituye un preformismo, el cual obliga a las estructuras sintéticas a priori a contener de antemano y totalmente hechas las estructuras logicomatemáticas en su conjunto. De lo cual resultan, entonces, los desmentidos de la historia: El descubrimiento de las geometrías no euclidianas pudo parecer ruinoso para el kantismo, el cual exigía el carácter euclidiano de esa forma a priori de la sensibilidad que constituye el espacio en esta perspectiva estática. En la perspectiva constructivista, por el contrario, las estructuras resultan necesarias en sus raíces y están

> **abiertas en forma constante a construcciones ulteriores que las integran".(p. 179)**

Finalmente, en relación a la dialéctica, destacan dos ideas esenciales a toda dialéctica; desarrollo y síntesis. En relación a la primera, se plasma en toda la fase del desarrollo del constructivismo operatorio. En lo concerniente a la idea de síntesis, el esquema tradicional presenta la siguiente trilogía, primero la tesis A, luego la antítesis no-A en tercer lugar la síntesis S, la cual contiene lo esencial de A y de no-A pero con la adición "de propiedades nuevas que superan la contradicción". La idea de síntesis implica, pues, las tres ideas de negación, de superación y de conservación de los elementos antitéticos, en el seno de la superación.

Una representación muy simplificada de la idea anterior es (A) + (no-A) → S. En seguida se mencionan dos situaciones que proporcionan una idea ilustrativa sobre este tipo de síntesis.

La síntesis del método cartesiano abarca a la vez el punto de vista geométrico, "que ve en lo real de las figuras que tienen una forma, y el punto de vista del álgebra que no se ve en las magnitudes geométricas más que sus medidas. El cálculo sobre los números, negación del real geométrico, niega esta negación, estudiando las variaciones mutuas de dos variables geométricas y crea así un método de investigación de lo real geométrico que es a la vez número y figura". (Casanova Gaston. 1985. P.36)

Recordamos que ya antes se habló de Pitágoras, pues bien, con él y su escuela es cuando " se puede hablar por primera vez de una ciencia de los números enteros y fraccionarios y "¿Qué puede hacer ese pensamiento pitagoriano después de haber especulado sobre los números?. Todo pensamiento abstracto, negación de lo real, no puede más que negar esta negación en una síntesis explicativa del mundo."(Op. Cit.p.15)

"...todas las cosas accesibles al conocimiento poseen un número puesto que sin él no podemos comprender ni conocer nada"(F. Enriquez,l'Evalution des ideés geometriques dans la pensée grecque. Citado por Casanova Gaston. p. 15)

Concluimos esta sección con las siguientes palabras de J. Piaget "...la realidad de la matemática es la de su construcción y si esta es solidaria con los caracteres más generales de

la organización viviente, ... la dialéctica interna que anima esta construcción constituye una subestructura que presenta una resistencia que no tiene nada que envidiar a las del platonismo o del apriorismo, a la vez, que pone de manifiesto un dinamismo mucho más cercano a la puesta en marcha de este tipo fundamental de conocimiento.(. Piaget, Jean., t. III 19 . p.181).

I.5 TEORIA DEL APRENDIZAJE

En un apartado anterior, relativo a la teoría del conocimiento, se plantearon entre otras las siguientes interrogantes: ¿Qué es el conocimiento?, ¿cómo es posible el conocimiento humano?. Se dijo que conocer, es un acto por el cual el sujeto aprehende el objeto y, que para conocer un objeto, se requiere realizar acciones de aprendizaje acerca de las propiedades del objeto.

En la actualidad, existen diversas teorías psicológicas, las cuales han elaborado formulaciones con las que se intenta dar cuenta y, explicar hechos observables acerca del aprendizaje. Aunque debe señalarse, el hecho de que "...no todos los enfoques teóricos se enfrentan al problema de comprender los procesos de aprendizaje con la misma pretensión de acercamiento a las situaciones naturales del aula" (Pérez Gómez, Angel I.,Cap.II.p.36)(Cit. por Farfán Jesús 1995. P.58), pues gran parte de las teorías psicológicas del aprendizaje son modelos explicativos los cuales, obtenidos de situaciones experimentales se refieren a experiencias de aprendizaje de laboratorio, a través de las cuales, sólo es posible una explicación relativa acerca del aprendizaje.

Los siguientes párrafos se refieren de manera suscinta, a elementos de algunas concepciones psicológicas del aprendizaje como son, la teoría de J. Piaget, D. Ausubel, J. S. Bruner y de Vigotsky, dada la importancia que tienen como un marco de contexto para el tratamiento que será desarrollado acerca del constructivismo didáctico, sobre el cual se funda la elaboración de esta propuesta didáctica.

Según Estela Ruiz Larraguibel, en un ensayo titulado "Reflexiones en torno de las Teorías de Aprendizaje" , asienta que el aprendizaje bajo una perspectiva de la teoría piagetiana, en la escuela cognoscitivista, destaca la Teoría Evolutiva de Piaget, en la cual sobresalen tres aspectos: su tratamiento del objeto relativo a las estructuras del conocimiento, en segundo término, los sustentos teóricos(constructivismo) y finalmente su método empírico. Al comentar que "vista a grandes rasgos, la teoría de Piaget, se refiere al análisis de la génesis de los procesos y mecanismos involucrados en la adquisición del conocimiento en función del desarrollo del individuo. Agrega en seguida, "la obra piagetiana pretende construir una epistemología que a través del *método* genético analice la construcción evolutiva del conocimiento como producto de la interacción del sujeto con el objeto y, con base en esto, explorar la génesis y las condiciones del paso de un estado de conocimiento a otro." No obstante que Piaget dedicó una buena parte de su obra al estudio psicogenético, refiere "...su teoría no excluye de manera alguna el aprendizaje humano."(cf. p.32)

El Aprendizaje en la teoría piagetiana

En esta teoría, el proceso de aprendizaje, se considera en *términos* de adquisición de conocimiento en función de la experiencia, caracterizado como un proceso mediato desarrollado en un determinado tiempo, en el cual se diferenciará la percepción inmediata. A este tipo de aprendizaje, Piaget lo llama aprendizaje en sentido estricto, bajo el cual "incluye la adquisición de elementos congnoscitivos en una forma empírica"(cf. p.42-43).

En tal proceso, se revelan como necesarios los factores de asimilación y acomodación,de los cuales, Piaget, en sus "Seis Estudios de Psicología"(1995. no. 4), al explicar su noción de equilibrio, considera el aprendizaje como uno de los factores constitutivos de desarrollo y donde asienta. "...toda conducta es una *asimilación* de lo dado a esquemas anteriores(con, a diversos grados de profundidad, asimilación a esquemas hereditarios) y toda conducta es al mismo tiempo *acomdación* de estos esquemas a la situación actual.[...], ya que toda conducta tiende a asegurar un equilibrio entre los factores internos y externos o, generalmente, entre la asimilación y la acomodación" entre los cuales el factor de equilibrio "...actúa a título de coordinación necesaria entre factores tales que ninguno de los cuales es aislable"(Op. Cit.pp.146-148).

Aquí, la noción de esquemas dice Ruiz Larraguibel "Se refiere a la representación de una forma de actividades cognoscitivas en relación a un contenido(concepto)." y entonces el aprendizaje "es explicado por Piaget como un proceso de asimilación que requiere de la acomodación y principalmente de un "proceso equilibrador que inhiba las reacciones perturbadoras originadas por los esquemas anteriores y que propicie con respecto al objeto a aprender, para con ello propiciar la creación de un nuevo esquema"(cf. p.43). A este aprendizaje, Piaget lo llama aprendizaje en sentido amplio, el cual muestra una combinación del aprendizaje en sentido estricto y los procesos de quilibrio que se hallan entre asimilación y acomodación. Tal aprendizaje no se da de manera natural, sino que a través de los procesos de asimilación y acomodación en un nexo indivisible con el equilibrio entre esos factores, le permite al sujeto en última instancia adoptar al medio que lo rodea.(cf.p.43.)

David Ausubel. Aprendizaje significativo

La teoría de Ausubel trata principalmente del aprendizaje significativo. El concepto primordial de esa teoría es el de aprendizaje significativo, el cual ocurre, cuando la nueva información se enlaza con los *conceptos pertinentes* que existen ya en la estructura cognoscitiva del que aprende. Así pues, puede decirse que

> Una persona aprende significativamente un objeto de conocimiento cuando integra dicho objeto a los conocimientos pertinentes previamente adquiridos por ella.

Según Ausubel, la interacción entre los significados potencialmente nuevos y la ideas pertinentes de las estructuras cognitivas del alumno, da lugar a significados reales o psicológicos y, como la estructura cognitiva de cada alumno es única, todos los significados nuevos que se adquieren son únicos en sí mismos. De acuerdo con él, el aprendizaje significativo, es un tipo de aprendizaje que alude a cuerpos organizados de material significativo. Tal concepto de aprendizaje, supone que la información aprendida es integrada en una amplia red de significados que se ha visto modificada a su vez por la inclusión del nuevo material. C. Coll Salvador (Apud. Farfán Hernández Jesús. 1995. P.63). Para Ausubel, el aprendizaje significativo implica la actividad de los bloques de conocimiento previo[estructuras cognitivas preexistentes], los sistemas conceptuales mediante los cuales se construyen significados por asimilación o integración de un nuevo material de aprendizaje.

En el aprendizaje, bajo un enfoque ausubeliano, se considera importante el rol que desempeña los **organizadores previos**, los cuales son declaraciones preliminares de conceptos de alto nivel, suficientemente amplios para abarcar la nueva información que se recibe para ser aprendida. Tales organizadores, hacen más problable la acomodación potencial entre la estructura cognitiva preexistente en el alumno y el material que ha de ser aprendido, pues su finalidad consiste, en proporcionar a los estudiantes la información que habrán de requerir par dar un sentido a la nueva información recibida , o bien, ayudarlos a que recuerden o empleen la información que poseen y que quizá consideren irrelevante con respecto a la nueva información. El organizador actúa así como un vínculo conceptual [organizador avanzado] entre el nuevo conocimiento con el que ya tiene el alumno [concepto integrador]. Un aprendizaje así, se da mediante un proceso integrador, cuyo resultado último tiende a modificar tanto la información recibida como la información preexistente en el alumno, al establecer nuevas asociaciones con la información previa.

En particular, Ausubel se refiere a un tipo especial de aprendizaje, al cual llama **aprendizaje supraordinado**. Este "tiene lugar en el curso de un razonamiento inductivo o cuando el material expuesto es organizado inductivamente o implica la síntesis de ideas componentes". Este tipo de aprendizaje de significados supraordinados se presenta con más frecuencia en el aprendizaje de conceptos por ejemplo, cuando el niño aprende que conceptos como cuadrado, rectángulo, paralelogramo rombo, romboide trapecio pueden ser incluidos en el nuevo término "cuadrilátero".

Ahora bien, a medida que evoluciona el proceso de integración, los conceptos existentes se vuelven más elaborados o se hacen más diferenciados. El primer caso sucede cuando, la nueva información ocurre como consecuencia de que la nueva información, haya dado pie a alguna clase de asociación entre ella con la información(o conocimiento) preexistente en el sujeto que aprende. Este última transformación define un proceso que Ausubel llama **diferenciación progresiva**. Desde luego que, un proceso que lleva a un mayor grado de elaboración de conceptos de diferenciación progresiva no es un proceso mecánico, no se da en un tiempo determinado. En todo caso, aquí lo que importa es que en el diseño de la enseñanza, se puedan crear todas las condiciones necesarias a través de las cuales, se haga posible que los estudiantes asocien la nueva información con la que ellos ya poseen, a fin de que logren un aprendizaje más significativo. Puede suceder que durante el proceso de aprendizaje, se presenten diferencias del sentido que se da a la nueva información, con un sentido que se tiene de la información que previamente ya se posee. Al proceso mediante el cual se aclaran tales diferencias, Ausubel lo llama **diferenciación integradora**. Otro de los elementos de la teoría de Ausubel, es el de **organizador avanzado**, cuya característica principal, es la de ser más general y más abstracto para facilitar el aprendizaje. El elemento crítico de un organizador avanzado, es que sirve para *enlazar* la nueva información que hay que aprender con los conceptos preexistentes en la estructura cognitiva. A tal organizador se le llama también "*puente cognitivo*". Estos puentes, definen pequeños segmentos de material de aprendizaje, los cuales proveen al estudiante de una guía para que pueda emplear los conceptos preexistentes para aprender significativamente.

De esta manera, con base en los conceptos mencionados de **aprendizaje significativo, organizador previo, concepto integrador, aprendizaje supraordinado, diferenciación progresiva, reconciliación integradora, organizador avanzado,** Ausubel explica la capacidad de un individuo para resolver un problema nuevo pertinente, descubrir e investigar, hecho que considera como la mejor prueba de un aprendizaje significativo. Se dice que: "...la capacidad para resolver problemas *deriva* de la diferenciación de la estructura cognitiva y que eso es *especifico del concepto...*"; "...no hay una estrategia general o una lógica del descubrimiento, excepto la estrategia general del aprendizaje significativo, que es, primariamente, una función del desarrollo del concepto y de la reconciliación integradora de los conceptos"(Apud. Carlón Monroy A.1994.p.41) en lo que se refiere al proceso creativo, este se presenta esencialmente como una forma avanzada de diferenciación integradora y en mucho depende de la capacidad e inclinación emocional del individuo para estructurar conceptos supraordinados de orden superior.

Algunas ideas de Ausubel en el aula

El aprendizaje por recepción o enseñanza expositoria como también la llama, ofrece algunas ideas a los docentes. Seguramente su idoneidad variará de una situación a otra, de la misma manera que otros profesores se basan en un aprendizaje por descubrimiento

Ahora bien, una enseñanza basada en el sistema ausubeliano, resulta más apropiada para estudiantes del nivel medio superior, al exigir que los estudiantes sean capaces de manipular mentalmente ideas, aunque las ideas estén basadas en realidades físicas. Este método resulta menos apropiado en la enseñanza de conceptos básicos y aunque según

Barnes y Clawson (Apud. Herrera Márquez Alma. s. a. p.167), para quienes el empleo de organizadores previos ayuda al aprendizaje, parece que los organizadores generales y abstractos[organizadores avanzados] pueden contribuir al aprendizaje, particularmente cuando el material es nuevo o difícil, o cuando la capacidad del estudiante en el área de enseñanza resulta limitada, recomienda el aprendizaje deductivo, pues considera que el estudiante debe elaborar jerarquías internas, encabezadas por organizadores generales, con el fin de dominar detalles y que puedan disponer de un sistema para abarcar más conceptos específicos.

El aprendizaje por descubrimiento

Para Bruner, también , teórico cognoscitivista, los profesores deberían proporcionar situaciones problemáticas, que estimulan a los alumnos a **descubrir por sí mismos**, la estructura de la asignatura la cual, está dada por las ideas básicas, relaciones o esquemas conceptuales de esta, pues si los estudiantes asimilan la estructura básica, podrían ser capaces de resolver por su cuenta, muchos detalles o, hechos específicos que no forman parte de esa estructura básica.

De acuerdo con Bruner, la estructura básica de una materia de estudio está compuesta por conceptos, los cuales deben estar interrelacionados entre sí. Tal interrelación puede ser establecida en la medida que estos puedan ser colocados en lo que él llama un " **sistema de codificación**". Se considera que una persona capaz de formar conceptos y utilizar un sistema de codificación, puede descubrir la capacidad de ir más allá de la información obtenida, hecho que para Bruner "es el más característico de la vida mental".

Algunas ideas de Bruner en el aula

Considera recomendable, que los estudiantes lleguen a ser capaces de aprender y utilizar estos sistemas de codificación, por las posibilidades que ofrecen de ir más allá de la información recibida. Esto es, aprender sistemas de codificación "que sean aplicables más allá de la situación en la que han sido aprendidos".Anita E. Woolfolk1983 (Apud. Herrera Márquez Alma. s.a. 157)

Se insiste en que el docente debe hacer énfasis en las ideas y relaciones de una materia, de manera que a partir de tales conceptos, permita que los estudiantes produzcan conceptos, relaciones o principios nuevos. Se considera que una información detallada en demasía puede obstaculizar el aprendizaje, sin desconocerse que algunos detalles tal vez serán útiles.

Bruner recomienda a los docentes, fomentar lo que él llama el *atisbo* mediante el **pensamiento intuitivo**, estimulando al estudiante a que se plantee hipótesis intuitivas, basadas en puebas incompletas para que luego, el alumno reafirme más sistemáticamente tales suposiciones, de manera que esto dará a los estudiantes la oportunidad de practicar su capacidad, para ir más allá de la información proporcionada. Es importante, que se aprovechen las hipótesis equivocadas, como elementos que estimulan el desarrollo de su pensamiento crítico y creativo, analizando y corrigiendo lo que deba ser corregido, para luego, contrastarlo con las respuestas adecuadas, en lugar de castigar las suposiciones erróneas, privando con ello al alumno de las oportunidades de desarrollar su espíritu de creatividad.

Un cause de aplicación de las ideas anteriores, se halla en lo que Bruner denomina **currículum en espiral o por descubrimiento**. La organización que postula abarca todos los cursos. En términos generales, la idea de reorganización curricular, consiste en presentar todas las materias "en su forma más sencilla y específica en los grados inferiores y, luego se les ofrecerán en los grados superiores en formas sucesivamente más complejas". Según Bruner, esta progresión de las materias, ayuda a los estudiantes a descubrir relaciones y a formar sistemas de codificación que puedan continuar expandiéndose y mejorando, cuando hallan el material en niveles cada vez más complejos, sin dejar de tomar en cuenta el nivel de desarrollo cognitivo de los alumnos. Tal disposición de las materias refleja la opinión de Bruner, de que el aprendizaje procede de lo simple a lo complejo, de lo concreto a lo abstracto y de lo específico a lo general. Considera que el aprendizaje debe ser inductivo. Según él, es necesario proporcionar a los estudiantes, hechos específicos para que puedan descubrir las generalizaciones o estructuras por sí mismos.

Aprendizaje por descubrimiento

¿En qué consiste el aprendizaje por descubrimiento?. En primera instancia, ofrecer preguntas intrigantes, situaciones desconcertantes o problemas interesantes. Después, en lugar de que el profesor diga al estudiante como resuelva un problema, le proporcione el material adecuado, lo estimule a que haga observaciones y formule hipótesis y, compruebe luego las soluciones que obtenga. Fomentar y propiciar ante todo, la implicación activa del alumno en su propia aprendizaje. Un proceso así, requiere de un pensamiento intuitivo-analítico y, de acuerdo a la dirección que estén tomando las actividades de resolución de problemas, el profesor, según lo juzgue necesario, proporcionará una información complementaria, que oriente o permita al estudiante, revisar su enfoque o continuar a una solución correcta.

Dentro de las ventajas, que según Gilstrap y Martin, encuentran en este tipo de aprendizajes como son, el ayudar al estudiante a aprender a aprender, a hacer que este sea más autónomo, a que fortalezca su autoestima, etc., sobresale en particular, aquella que considera probable, el hacer que los estudiantes sean los responsables de su propio aprendizaje.(Op. Cit. pp.161-162)

Se señalan algunas desventajas de este método por ejemplo, la dificultad de realizarlo con grupos grandes y alumnos lentos, o incluso con grupos pequeños de alumnos de capacidad media y con alta. Otra, es que estos métodos, pudieran parecer caóticos y angustiosos a algunos profesores o alumnos. Se dice que requiere de muchos materiales pero, tal vez, una crítica muy importante a todo esto, es el hecho según el cual, señala Anita E. Woolfolk, "las ventajas proclamadas no han sido demostradas en investigaciones cuidadosamente controladas. Algunos sicólogos han manifestado además su oposición de que el aprendizaje por descubrimiento es muy ineficaz, harto ineficaz para enseñar toda la información que los estudiantes han de aprender en nuestra compleja sociedad". Sin embargo, se considera conveniente integrarlo a la enseñanza, para ayudar al alumno a aprender estrategias de resolución de problemas y anidar variedad a las clases.

Finalmente, se hace a continuación un breve resumen, sobre aspectos distintivos, que caracterizan a cada una de las concepciones que fueron expuestas en los párrafos anteriores. En primer lugar, a grandes rasgos, la teoría de Piaget se refiere, al análisis de la génesis de los procesos y mecanismos, involucrados en la adquisición de conocimientos en función del desarrollo del individuo. Estudia así, las nociones operatorias elementales que se constituyen a lo largo del desarrollo del individuo y que propician la transformación de un estado de conocimiento inferior a uno superior.

Las nociones piagetianas, en la explicación del proceso del conocimiento individual, en que apoya fuertemente sus estudios psicogenéticos son: la dimensión biológica, la interacción sujeto-objeto y el constructivismo psicogenético. De estas, destaca la segunda, esa decir, la interacción sujeto — objeto, en la que se sustenta la tesis principal y que según

Piaget,"el objeto se conoce sólo a través de las actividades que el sujeto realiza con el fin de aproximarse a su objeto". Rechaza la primacía de uno sobre el otro, pues considera la existencia de una reciprocidad entre el medio ambiente y el organismo. Como consecuencia de esta interacción, el sujeto adquiere experiencias, las cuales, consisten en la acción que el sujeto ejerce sobre el objeto, con la finalidad de extraer información sobre la coordinación de las acciones realizadas sobre el objeto. Tal experiencia, es concebida como una acción tendiente a la construcción de conocimiento sobre el objeto y, el proceso constructivo se presenta a lo largo del desarrollo del individuo, siendo continua la interacción constante del sujeto con el objeto, de manera que la interacción constante sujeto-objeto cambia de un estado inferior a otro superior.

En segundo lugar, **el método de descubrimiento**:

- Posiblemente, resulta más apropiado para grupos pequeños que pueden aprovechar unas experiencias concretas.
- Recomienda el aprendizaje inductivo.
- Parece promover la capacidad de los estudiantes, para transferir la información y destrezas de una situación a otra.
- Considera importante el aprendizaje y desarrollo de sistemas de codificación, mediante los cuales una persona puede organizar diferentes aspectos de un concepto general.

Finalmente en el **aprendizaje por recepción** que propugna Ausubel :

- Es probablemente más eficaz, y al mismo tiempo más útil, cuando atañe a las relaciones abstractas.
- Ofrece buenos medios para ayudar a los estudiantes, a retener información importante.
- Recomienda el aprendizaje deductivo, pues cree que las personas, necesitan elaborar jerarquías internas encabezadas por conceptos generales o subsumidores, con el objeto de dominar los detalles y, disponer de un sistema para abarcar más conceptos específicos.
- Este método, hace uso de organizadores previos, para (introducir conceptos básicos) y un contenido subordinado dispuesto en términos de semejanzas y diferencias.

La Psicología dialéctica. Vygotsky

Bajo una orientación de los principios psicológicos del materialismo dialéctico, se desarrolla una psicología que ha producido algunas aportaciones al campo del aprendizaje y el desarrollo cognitivo. Tal orientación, ha dado origen a una corriente teórica, conocida como escuela soviética, dentro de la cual destaca especialmente: Vygotsky, Luria, Rubinstein, Jublinsckaia, Taizyna, Galperin.

Para tal escuela, la psicología soviética del aprendizaje, está en función de la comunicación y el desarrollo, entendido como resultado del intercambio, entre la información genética y el contacto experimental con las circunstancias reales de un medio históricamente constituido.

Se concede atención especial aquí, al trabajo del primero de ellos, Vygotsky. Este psicólogo soviético cuyas ideas se fundan en la obra de Karl Marx, llega a afirmar:

"El verdadero mecanismo subyacente a las funciones mentales superiores es una copia de las interacciones sociales; todas las funciones mentales superiores son relaciones sociales internalizadas. Estas funciones mentales superiores son la base de la estructura social del individuo. Su composición, estructura genética (en el sentido evolutivo) y medios de acción, en una palabra, toda su naturaleza, es social. Incluso al examinar los procesos mentales, su naturaleza sigue siendo casi social. Los seres humanos en su propia esfera privada conservan las funciones de la interacción social." (Vygotsky,1981. P.161)(en Herrera Márquez Alma. s.a. comp. p. 66)

En torno de esto, según Rubinstein "...las ideas, concepciones, etc., se derivan de las actividades productivas, no del pensamiento puro ni de la experiencia sensorial pasiva; pero estas actividades productivas, toman forma en el sentido social, así que hay una unión clara entre nuestros conceptos e ideas y la sociedad en que vivimos". En consecuencia, este constructivimo, se finca en el "conjunto de relaciones sociales internalizadas que se han convertido en funciones para el individuo y en formas de su estructura" (ib. 1981) y como resultado de su carácter constructivista, "... la actividad no se concibe solo como intercambio aislado del individuo con su medio físico, sino como la participación de ideas, generalmente grupales de búsqueda cooperativa del intercambio de ideas y representaciones y de cooperación en el aprendizaje, en la riqueza cultural de la sociedad."

De acuerdo con José Antonio Castorina, "...la obra de Vygotsky ha puesto de relieve aspectos de desarrollo y de aprendizaje que no fueron considerados en la psicología genética ni en la teoría del procesamiento de la información". Fundamentalmente, argumentó convincentemente en favor del desarrollo de las funciones psíquicas superiores en términos de apropiación e internalización social. De ello se infiere que el aprendizaje antecede al proceso de desarrollo. Menciona las posibilidades de que para Vygotsky, los aprendices incorporen los instrumentos y los signos sociales, está en función de un grado del desarrollo anterior y, sobre todo, del desarrollo potencial del aprendiz (cf. en Farfán Hdz. Jesús. Comp. p. 81).

Esto es, que para Vygotsky, la caracterización del nexo entre desarrollo y aprendizaje, no se agota en la determinación de las actividades que el sujeto pueda hacer por su cuenta, a esto lo denomina "nivel de desarrollo actual", es necesario establecer lo que es capaz de hacer pero con ayuda de otros, a esto lo llama "nivel de desarrollo potencial", de donde deriva la noción de zona de desarrollo próximo, la cual;

> " no es otra cosa que la distancia entre el nivel actual de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con un compañero más capaz." (Op. Cit. p. 82)

Esta noción, le permitió a Vygotsky vincular el desarrollo con la apropiación de instrumentos suministrados por la sociedad y, por esta vía, convertir el aprendizaje en buena medida en un producto de la cultura y de las interacciones sociales, en síntesis, tender un puente entre el desarrollo, el aprendizaje y la cultura.

Luria (1973) afirma que el " lenguaje es asimilado en la comunicación que se desarrolla con los asuntos y pronto se transforma establemente en medio de generalizaciones en instrumento de pensamiento y en instrumento par regular el comportamiento." (Apud. Farfán Hdz. J. Comp. p. 65)

Por otra parte, según Galperin y Leontiev, para la psicología soviética y como consecuencia de su carácter constructivista, la actividad del individuo es el motor fundamental del desarrollo. No obstante, la actividad no se concibe sólo como intercambio aislado del sujeto con su medio físico, sino como la participación en procesos generalmene grupales, de búsqueda cooperativa, de intercambio de ideas y representaciones y, ayuda en el aprendizaje.

El Problema de la integración de Teorías de Aprendizaje

En el breve recorrido por las diversas teorías de aprendizaje que han sido tratadas en los apartados anteriores, es posible observar, que en ellos se manifiestan algunas disparidades y, además, la existencia de diversos enfoques, así como la mayor pertinencia de algunos aspectos de cada formulación teórica. Es posible distinguir diferentes tipos de aprendizajes, en virtud de que en ellos pueden tener lugar diferentes procesos. Todo ello hace destacar una cuestión muy importante: el problema de la integración de las teorías de aprendizaje expuestas. En este recorrido panorámico sobre las teorías de aprendizaje expuestas, se hacen patentes, las muy variadas relaciones entre dichas teorías.

Ciertamente, entre ellas, es común la perspectiva centrada en una reorganización de los sistemas o estructuras constitutivos de los conocimientos anteriores de los estudiantes.Pero también muestran importantes divergencias derivadas de sus orígenes, problemáticas, y compromisos básicos asumidos; lo que hace que cada una, de lugar a diferentes preguntas desde el punto de vista epistemológico.

En consecuencia, tal situación hace que, tanto, teóricos del aprendizaje como pedagogos, contemplen la carencia de un marco común, el cual permitiera orientar los proyectos educativos, de manera que "la contribución de la psicología de la educación [siendo múltiple] sería deseable que pudiera superarse la actual dispersión de teorías y líneas de investigación en una explicación unitaria. En particular una interpretación global de los procesos de enseñanza y de aprendizaje que ofreciera una guía a los docentes." C. Coll. (Apud. Farfán Hdz. Jesús.1995. comp. p.83)

De hecho, tales tesis configuran una idea constructivista del aprendizaje, e incluso, una concepción constructivista de la intervención pedagógica(ib. p.83). Y aún más, el núcleo compartido por las tradiciones de investigación, se refieren a la importancia de la actividad mental constructiva (ib. p.83). De esta forma, el aprendizaje escolar es un proceso de construcción y reconstrucción de conocimiento y, la enseñanza es una ayuda a esa construcción. Pero entre lo deseable y lo posible, se asume que la teoría y práctica educativa, requieren de un cuerpo de conocimientos, sobre los procesos de aprendizaje que entre otras, cumplan las siguientes condiciones: primeramente abarcar de manera holística, las distintas manifestaciones, procesos y tipos de aprendizajes. En segundo lugar, mantenerse apegados a lo real, siendo capaz de explicar no sólo fenómenos aislados producidos en el laboratorio, en condiciones especiales, sino también la complejidad de los fenómenos y procesos de aprendizaje en el aula, en condiciones normales de la vida cotidiana.

Actualmente, se observa que el desarrollo teórico sobre los procesos de aprendizaje, no han transcurrido a la par de un proceso práctico, ni aún en la teoría didáctica. Queda abierta la tarea para la elaboración de una teoría que integre sin simplificar, que distinga sin divorciar y, proporcionar a la práctica pedagógica, una teoría que ayude a comprender, así cómo, a orientar en la escuela los fenómenos de la enseñanza-aprendizaje.(cf. Farfán: 68)

I.5.1 Constructivismo y Resolución de Problemas

I.5.1.1 Constructivismo. Enfoque psicológico.

En los últimos años, según C Coll., se ha ido formando un acuerdo, en un marco de ideas 'fuerza', cuya finalidad podría cumplir el objetivo, en un juego difícil de precisar "entre las interacciones del sujeto con las situaciones empíricas (sociales o naturales), y aquellas que sostiene con el saber que se pretende enseñar" , el cual proviene de diferentes concepciones o tradiciones de investigación. Castorina J. A.(Apud. Farfán Hdz. Jesús. 1995. Comp. p.80-81). Según esto, se trataría de un convergencia que concentra ideas centrales, presentes - entre otras - " en la teoría piagetiana del cambio por equilibraciones de los sistemas lógicos, en la diferenciación y coordinación de los sistemas de conocimiento, propuestos por la psicología cognitiva del procesamiento de la información, en la interacción socio-cultural de la teoría vygotskyana, e incluso, en la versión del aprendizaje significativo de Ausubel. (ib.p 83)

Tales ideas, de acuerdo con C. Coll, definen una idea constructivista del aprendizaje, inclusive, una concepción constructivista de la intervención pedagógica. Señala además, que el núcleo compartido por las tradiciones de investigación, " se refieren a la importancia de la actividad mental constructivista. Lo cual define el aprendizaje escolar como un proceso de construcción de conocimiento y la enseñanza un apoyo a esa construcción."(Op. Cit. p.83-84)

Consecuentemente, " **según esta interpretación, el constructivismo no podría ser caracterizado hoy como una teoría en sentido estricto, sino más bien como una convergencia de principios interpretativos del aprendizaje.**" (Op. Cit. p.84). Esta propuesta comparte plenamente este planteamiento, el cual se toma como base para los siguientes desarrollos y, da origen a un marco de ideas, en las que se sustenta la elaboración de los materiales didácticos que serán presentados en el tercer capítulo de este trabajo.

Se acepta que dicha convergencia implica algunos riesgos epistemológicos y reclama una serie de precauciones para evitarlos, lo cual es propio de todo ensayo en que se trata de integrar principios que provienen de teorías diferentes.

De acuerdo con Castorina J. A., en primer lugar, se menciona el riesgo de caer en un "eclecticismo" , según el cual, como dice Coll, se refiere a la naturaleza de la "actividad mental constructivista" invocada para explicar una convergencia, hacia la integración común de tradiciones de investigación diferentes.(Op. cit.p.84)

Existe una marcada tendencia en algunos teóricos del aprendizaje de las ciencias, desde Novack(1988) hasta Driver(1988), para promover un enfoque constructivista para dicho aprendizaje. Por ejemplo, según Castorina, para Novack, su versión del constructivismo se relaciona " con la producción de significados, que dan lugar a la adquisición de conceptos por reestructuración de las anteriores" . En el caso de Driver, el constructivismo se ubica en la " clásica tradición ´ hermenéutica ´ de la filosofía alemana, hasta llegar a Piaget y la psicología de los ´ constructos personales ´ de Kelly. La tesis central afirma la construcción activa del significado en la interacción de las personas con el medio."(Op. Cit.p.84)

El caso de la teoría de Ausubel, destaca según Coll, porque el aprendizaje significativo, implica la actividad de las estructuras cognitivas preexistentes, a través de las cuales " se construyen significados por asimilación o integración del nuevo material de aprendizaje".

Carretero, Pozo y Asencio, plantean que la naturaleza constructiva del conocimiento, define una idea central del paradigma en su conjunto, es decir, [la interacción cognitiva sujeto-objeto]. Se sostiene que el conocimiento es la elaboración de una " realidad propia, autoestructurada a partir de la información que proviene del medio"[...], " El énfasis en la construcción interna de reglas y modelos de representación lo comparten orientaciones del aprendizaje como la psicología piagetiana, vygotskyana y el proceso de la información "[...], .Se propugna una actividad elaborativa de casi todas las teorías de aprendizaje..."(Op.cit.p.84)

Se habla de una versión débil de constructivismo, afincada en hipótesis que afirman, que el aprendiz dispone de estructuras preexistentes (o 'esquemas de conocimiento ' almacenados en la memoria, o de estructuras cognitivas, o de sistemas de conceptos) y esta, sienta la idea de que el conocimiento se elabora, a partir de los esquemas cognitivos preexistentes, lo cual conlleva el riesgo de establecer ciertas ideas generales las cuales, a la vez que son compartidas por las tradiciones de investigación, dejen intactas las divergencias centrales en los enfoques globales acerca del proceso de aprendizaje, situación que podría involucrar además de fuertes diferencias, inconsistencias entre los enfoques.

Parece, que las ideas comunes en las que se asiente la convergencia de las diferentes perspectivas teóricas, son; crítica al realismo de la reproducción intelectual, una creencia en el carácter protagónico del sujeto de aprendizaje, la preexistencia de estructuras cognitivas que intervienen sobre la información. Aquí, el problema subyacente, consiste, en si es posible establecer definiciones que permitan rescatar " una identidad de significados de los conceptos como, 'esquemas', 'elaboración', 'actividad', 'reestructuración', en las distintas concepciones en que hasta ahora han sido definidas en forma peculiar, acordes al cuerpo teórico al que pertenecen. No se ha ido más allá, en un examen de los compromisos epistemológicos que asumen cada teoría, con lo cual, se empezaría quizás, a dar una actividad orientada a caracterizar así un Constructivismo fuerte, con el que se hiciera posible explicar " las notas de un constructivismo 'fuerte'", mediante el cual se pudiera avanzar en los propósitos de una concepción integradora del constructivismo.

En lo que atañe a los mecanismos de ayuda pedagógica tal como lo entiende la concepción constructivista. Según C. Coll , "el concepto de aprendizaje significativo pone de relieve la acción constructiva de la persona que aprende, acción que consiste en un proceso de atribución de significados mediante el concurso del conocimiento previo"(Apud. Farfán Hdz. Jesús. 1995. Comp. p.65)

De esta manera, la construcción que realice el estudiante con respecto a un contenido específico, se da en el marco de las situaciones interactivas que definen la educación escolar, en particular, en el contexto de la interacción con su profesor y, todo esto define así, una interacción múltiple.

Ahora bien, la interacción pedagógica, la cual C. Coll describe con meridiana claridad, dice, "...es aquella que reta a los alumnos pero les ofrece recursos para superarse; la que les interroga pero les ayuda a responder; la que tiene en cuenta sus capacidades pero no para acomodarse a ellas, sino para hacerlas avanzar." (Op.cit.p.67)

Esta interacción descansa en dos pilares: el observacional y el plástico. En el primer caso, se trata de una tarea que compromete al docente a ser " actor y observador de un mismo proceso, el cual supone que se dote de los instrumentos y estrategias de enseñanza necesarias para hacerlo posible, proponiendo actividades diferenciadas que permitan a la mayoría que trabaje automáticamente mientras que el profesor" puede atender en particular a un grupo reducido sobre algún punto específico.

El fin principal que persigue el pilar plástico, es lograr que el aprendizaje que realice el estudiante en la escuela, sea lo más significativo posible, ello supone establecer condiciones que propicien tal logro. Esto es, una enseñanza que enfatice la actividad intelectual en el proceso de construcción del conocimiento, en el contexto de una concepción social y socializadora que ubique en el lugar que le corresponde al profesor y, los distintos componentes que integran la acción educativa.(Op.cit.p.67)

I.5.1.2 Constructivismo. Un enfoque pedagógico

De acuerdo con Donald M. Blais, "dentro del paradigma constructivista, la educación es vista como un proceso diseñando para transformar a un novato en un experto." Agrega luego que "el conocimiento es una cosa que quien aprende debe construir para y por sí mismo. No hay alternativa. El descubrimiento, reinvención o reconstrucción es necesario". En esta perspectiva, se considera el conocimiento como aquello que no puede simplemente ser dado y que solo progresa a través del mejoramiento de la pericia, la cual se toma, más bien asociada a la calidad del método que se use en el material que haya de ser aprendido.

Ahora bien, para lograr una formación intelectual, cuyo saber no se base en la repetición o retención de conocimientos leídos antes, sino, en un aprendizaje "hacia el dominio de la verdad por sí mismo", el cual conlleve cualquier acción necesaria propia de la actividad real, se requiere encontrar problemas que los estudiantes puedan enfrentar convenientemente, de manera que su potencial intelectual llegue a ser autónomo. Esto es, que los estudiantes perciban la naturaleza de los problemas, como un paso previo a su formalización y resolución, pues ello proporciona un "sentido de dirección y mediante el cual se asegure el proceso de solución a simple pensamiento, quizá dando al estudiante una sensación de certidumbre.(Blais M.Donald. 1988.)

Didáctica constructivista

De acuerdo con D. Block y Alcibíades Papacostas, nada fácil resulta la tarea de diseñar situaciones de construcción del conocimiento y, mucho menos, el llevarla a cabo. Pues una "construcción implica un sujeto activo en su relación con el objeto de conocimiento y, esto, no se logra como la mayoría de los libros de texto nos lo hacen creer, el llevar al [adolescente] de la mano por una secuencia de etapas (de lo concreto a lo abstracto), por muy bien diseñada que esta parezca".(Block D. y Papacostas a. 1986)

En apartados anteriores, se ha señalado ya, que un aprendizaje significativo, implica la acción de los bloques o estructuras cognitivas, preexistentes en la aprehensión de la nueva información. Ahora bien, según estos investigadores, "...el propósito de que el niño construya su conocimiento matemático a partir de su experiencia propia de la reflexión sobre la organización de su misma actividad". Tal propósito es apenas el inicio, pues el siguiente paso, estriba en la "creación de los medios concretos que permitirán alcanzar ese objetivo" sobre el cual, señalan, "se ha avanzado tan poco".(ib. p.14)

Ahora bien, si se asume que la enseñanza de las matemáticas invita al estudiante a una reflexión consciente sobre las estructuras, bajo una perspectiva constructivista, ello confronta al docente, a la compleja tarea de "...crear los medios didácticos concretos que la hagan posible", pues de otro modo, se pretendería sólo la participación del alumno en la construcción de su conocimiento, aplicado "...a clases o programas que no ofrezcan los medios necesarios par ello y que bajo nombres o modalidades aparentemente novedosas, reproducen prácticas educativas muy arraigadas que más bien obstaculizan este fin".(ib. Block D. y Papacostas p.14).

En esta perspectiva de un constructivismo didáctico, Guy Brousseau, en lo que podría considerarse un enfoque radical, señala lo siguiente, "la didáctica de las matemáticas ha de constituirse como una ciencia independientemente de la psicología de las matemáticas y de la pedagogía misma." —de manera que— y agrega, - "el objeto de estudio de esta didáctica ...en general, serían las situaciones didácticas que permitan la construcción del conocimiento", entendiéndose por situación didáctica, aquella que tiene como una interacción, estudiante —material potencialmente significativo— profesor y, cuya finalidad, sería llegar a conocer tan a fondo lo que se sucede en el aula escolar, que una situación didáctica determinada se pueda garantizar su reproductibilidad y eficiencia bajo controles bien precisos".

En lo referente a la noción ´ situación didáctica ´ según mencionan D. Block y A. Papacostas, Guy Brousseau llegó a identificar cuatro fases fundamentales, en las relaciones que se establecen entre las situaciones didácticas. Fases cuya sucesión —dicho sea de paso— no es segura, ni posible de distinguir, a veces unas de otras. Tales fases son expuestas a continuación:

1. **Acción.** En esta, subyacen nociones, relaciones y propiedades que son utilizadas y de la que el alumno no está necesariamente consciente, aun, cuando su acción sea exitosa, habrá construido así un instrumento en el que subyace un modelo implícito.

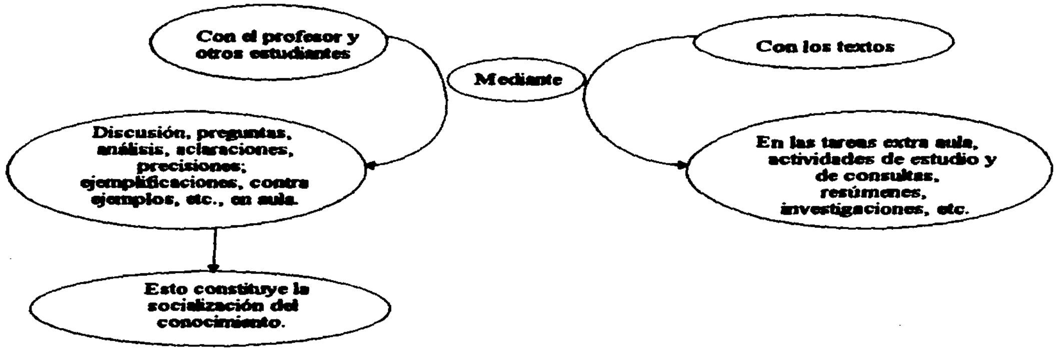
2. **Formulación.** Se trata del diseño de situaciones, en las que los modelos implícitos tengan que ser explicitados.

3. **Validación.** En esta se demuestra que el modelo explícito es correcto .

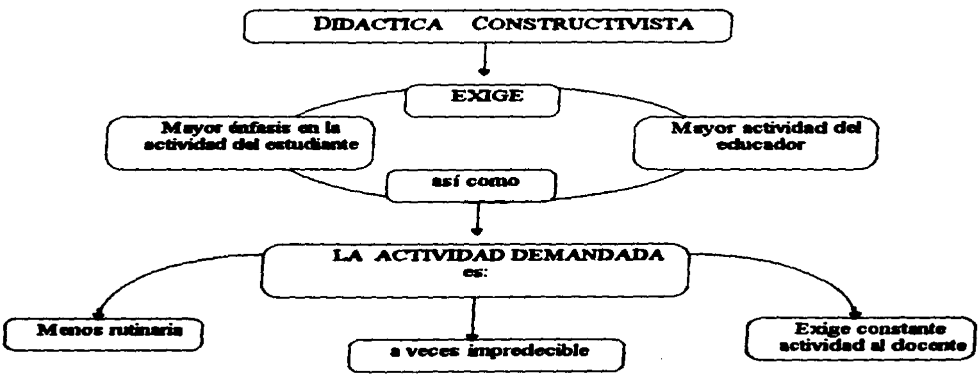
4. **Institucionalización.** Esta, cierra un ciclo en el proceso de construcción, que consiste en una traducción a lo convencional, en sentido de comunicación.

Se dijo antes, que en algunos estudios, la resolución de problemas es primordial para una explicación de corte constructivista en el aprendizaje de las matemáticas. Hay quienes, como Moreno Armella L. y Waldeg G. en un artículo, postulan que en tal explicación "...la estructura de la actividad de resolución de problemas, surge como un objeto congnoscitivo (esquema) a partir de la reflexión que el sujeto hace sobre sus propias reflexiones". Consideran, que la "matemática antes que cuerpo codificado de conocimientos es una actividad del mismo modo que la lengua antes que texto es una actividad". En tal virtud, la tarea del docente constructivista consistirá entonces, en "diseñar y presentar situaciones que apelando a las estructuras anteriores de que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje". Así, el siguiente paso consistirá en la negociación de significados. Para esto, se proporciona el siguiente diagrama el cual, se considera, resume una noción de negociación de significados mediante lo que hemos denominado "interacción múltiple"

Negociación de significados



En forma similar, una esquematización "grosso modo" de la didáctica constructivista, se presenta en el siguiente diagrama estructural



Para finalizar, se hace una enumeración de algunas consideraciones generales, las cuales resumen aspectos de este enfoque didáctico constructivista:

1. En los apartados anteriores, se proporciona una visión panorámica, apoyada en descripciones sobre algunos aspectos de la didáctica constructivista.

2. En tales descripciones, hay énfasis en destacar elementos para considerar que el uso de una dialéctica constructivista, puede contribuir significativamente, a mejorar la enseñanza de las matemáticas.

3. Se cree que una didáctica así, conlleva un currículo oculto muy benéfico, para un cambio en las relaciones; alumno—material potencialmente significativo, alumno—alumno y alumno-profesor.

4. Aprender significativamente en lugar de memorizar los conocimientos permite funcionalizarlos.

5. Se subsume que los efectos de la enseñanza, están subordinados a una auténtica interacción con los objetos de conocimiento, lo que implica la formulación de hipótesis ante situaciones problemáticas, reorganización de sistemas conceptuales por abstracción reflexiva y generalización orientadas al saber escolar.

6. Finalmente, la concepción constructivista permite dar cuenta de la apropiación que hacen los estudiantes del saber a enseñar. Además, el hecho de que la instrucción, sea condición ineludible para aquella apropiación, o el rol de intermediario del profesor, entre el conocimiento y el alumno. Todo esto, no es obstáculo para interpretar el aprendizaje como un proceso de reconstrucción.

I.5.1.3. El Constructivismo y la Resolución de Problemas

En contraposición al enfoque de que las matemáticas son un conocimiento acabado, en el P. E. A., del C. C. H. (1996.p.51), se asienta que "... la matemática es un saber que se construye: sus conceptos y métodos surgen de un proceso ligado a la resolución de problemas concretos, procedentes con frecuencia, de otros campos del conocimiento o de la actividad humana y que paulatinamente evolucionan y alcanzan niveles cada vez más amplios de rigor, abstracción, generalización y formalización." Lo anterior, destaca un aspecto importante, que puede tener, la integración de la resolución de problemas en la educación matemática del colegio.

Ante las necesidades de la sociedad actual, de un manejo funcional de las matemáticas y, que la "...escuela tradicional no puede aportar"... "un conocimiento que aparezca en su carácter funcional" (D. Block y Alcibíades Papacostas). Esto, significa una puntualización de un fenómeno, que se traduce en un problema educativo, el cual llama la atención en cuanto su necesidad de ser atendido.

Alan H. Schoenfeld, dice que "el examen de lo que la gente hace en sus intentos por resolver un problema, es central en los trabajos sobre resolución de problemas, de la ciencia cognitiva". Más específicamente, Luz Manuel Santos Trigo, en una propuesta sobre el trabajo de Schoenfild señala lo siguiente "Esta actividad de resolver problemas ha sido reconocida como un componente importante en el estudio del conocimiento matemático" y proporciona sobre el particular, diversos puntos de vista de otros investigadores importantes para dar mejor cuenta acerca de la resolución de problemas ". Por ejemplo, Halmos (1980) sugiere que la resolución de problemas es el corazón de las matemáticas. Kleiner (1986) enfatizó que el desarrollo de conceptos y teorías matemáticas se originó a partir de un esfuerzo por resolver un determinado problema . J. Dieudonné, para quien la historia de las matemáticas, muestra que casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico.(Apud. Luz Manuel Santos Trigo.1992). Guy Brousseau (1983) para quien " un alumno no hace matemáticas si no se plantea y no resuelve problemas" (Apud Parra M. Blanca 1988).

Lo anterior, considerado en una enseñanza de las matemáticas, interesada en incorporar la resolución de problemas como parte importante en la formación del estudiante, nos confronta directamente con cuestiones como ¿qué es un problema?, ¿cómo resolver un problema?. Para dar cuenta de la primera cuestión, "...un problema plantea una cuestión que debe ser modelada para encontrar la respuesta a una pregunta que se deriva de la misma situación (M. Parra, Blanca.,1989.p.23) ...y lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o se lo plantea él mismo), dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuesta totalmente constituido que le permita responder de manera casi inmediata (M. Parra Blanca.1989.p.23). Lo anterior aporta elementos con los cuales, se dispone de una noción de respuesta acerca de la primera pregunta. En lo concerniente a la segunda interrogación ¿cómo se resuelve un problema?. En este caso, se exponen brevemente, algunas series de características que en su conjunto, tipifican métodos acerca de cómo resolver un problema. En primer lugar, son enumeradas las cuatro componentes que G. Polya identifica en su " How to Solve"

- entender el problema
- diseñar un plan
- implementación del plan
- plausibilidad de la o las soluciones

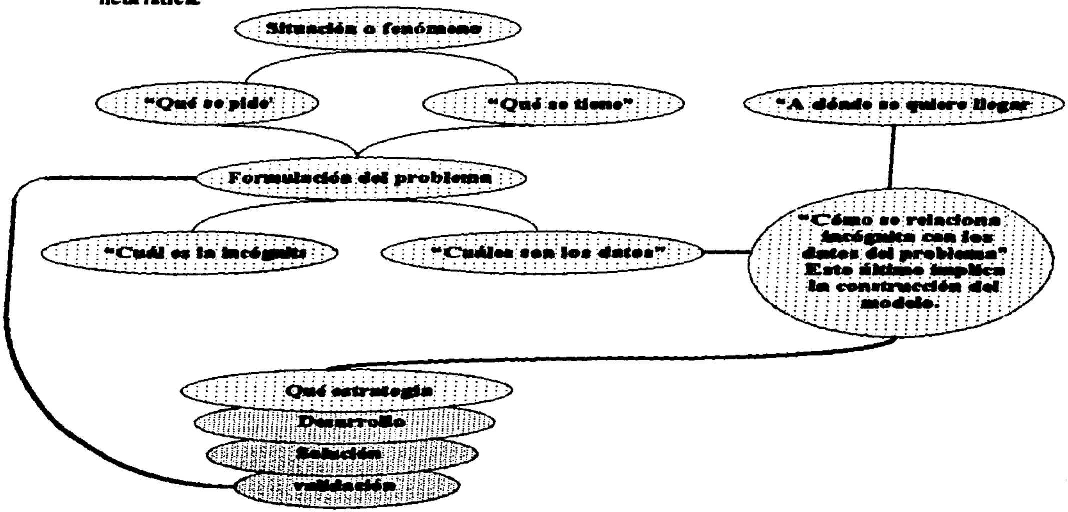
Aunque como el mismo Schoenfeld reconoce, los estudiantes que reciben entrenamiento para las competencias en los E. E. U. U., no usan las ideas de Polya y entonces, el principal método usado por los entrenadores en este tipo de competencias consiste en que " uno aprende a resolver problemas exitosamente en la medida en que se resuelve un gran número de problemas" Schoenfeld(1979)(Apud. M. Parra, Blanca.,1989).

Aunque tal método muestra dificultades si se cambia el contexto del problema. El mismo Schoenfeld (1987 b) "mencionó que para entender el proceso usado por los 'resolvedores' de problemas matemáticos y proponer direcciones para la instrucción de las matemáticas, es necesario tomar en cuenta la disciplina, la dinámica del salón de clase y el aprendizaje junto con el proceso del pensar". Esto, como proceso, con las características señaladas conlleva necesariamente el logro de una buena disposición del estudiante al resolver un problema. Que el estudiante posea una plena conciencia de la necesidad de perseverar en el intento de solución y la selección de una buena estrategia para llevar adelante el proceso, aunque incluso, tal vez la estrategia escogida no lo lleve a la solución correcta.

Es frecuente observar, cómo los alumnos no hacen uso de contenidos matemáticos que " supuestamente" conocen, cuando intentan resolver un problema. Ante una situación como esta, de acuerdo con A. Schoenfeld, una buena manera de ayudar a los estudiantes en la resolución de problemas y proponerles actividades con tal fin, consiste en analizar procesos de solución de estrategias ya aplicadas y, " discutir problemas en diferentes contextos " *considerando en la instrucción, dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas"* . El, *identifica cuatro dimensiones que influyen en el proceso de la resolución de problemas. Estas son:*

Dominio del conocimiento: incluye definiciones, hechos y procedimientos usados en el dominio matemático.	**Estrategias cognitivas:** incluye métodos heurísticos, como descomposición de problemas por simplificación en casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema y dibujar diagramas.	**Estrategias metacognitivas:** se relaciona con el monitoreo empleado al resolver el problema. Ejem. El proceso de selección de una estrategia y la necesidad de cambiar de dirección como resultado de una evaluación permanente del proceso.	**Sistemas de creencias:** incluye ideas que tienen los estudiantes acerca de las matemáticas y cómo resolver problemas.

Schoenfeld recomienda que se reflexione sobre las siguientes tres cuestiones:" ¿Qué se pide?" "¿Qué se tiene?" y "¿A dónde se quiere llegar? ". A continuación se presenta una interpretación metodológica acerca de estas interrogantes, las cuales, involucra elementos de naturaleza heurística.



(MODULO DE VISION GENERADIP. ENENS. DE LASMATS. 1995)

En este modelo, se considera desde la formulación del problema en el propio lenguaje. Comprende la observación, el tanteo y la experimentación. Considera la validación de la solución obtenida, o un replanteamiento del problema, si tal fuera el caso. Presenta una coincidencia con los aspectos señalados, en los cuales consiste la resolución de problemas según Blanca M. Parra (1988.p.23). Tal metodología, es de interés para propiciar y hacer que se de en el aula, guiadas bajo el propósito de que el alumno realice el proceso, el cual, en lugar de formalizarlo en una serie de pasos, como; entender el problema, desarrollar una estrategia y validar la solución, los intuya y sea él quien vaya estructurando su propia noción del proceso metodológico que realiza. En este proceso, el papel intermediador del docente es primordial.

En lo que se refiere a la presencia de problemas en las exposiciones didácticas, no hay un acuerdo general. Si estos deben utilizarse al inicio de un tema, el final o, si a veces el principio y a veces al final (Mancera Martínez E. y Escareño Soberanis F. 1993). Pero sí es esencial que en un curso de matemáticas, estos no deben faltar y ser objeto de una concepción que conjugue en su realización, elementos como los expuestos antes, cuyo propósito mayor sea contribuir a hacer del estudiante un ser autónomo.

A continuación se proporcionan sinopsis de tres concepciones sobre resolución de problemas en la educación matemática. Se refieren a las escuelas Cubana, Inglesa y Francesa respectivamente.

La corriente Cubana, confronta al estudiante con una situación problemática que le requiere de su participación activa, de manera que mediante el proceso de obtención del resultado desarrolle sus capacidades de autonomía para la solución de problemas en general.

CORRIENTE CUBANA

Qué es la enseñanza problémica?

Situar al alumno ante situaciones que requieren su activa participación sistemática.
OBJETIVO: capacitarlo para la resolución independiente de problemas en general.

Cómo se da la enseñanza problémica? : tomando en cuenta las siguientes condiciones

- **Determinar condiciones que generan problemas.**
- **Concebir tareas, preguntas e impulsos que posibiliten la resolución con la participaci activa de los estudiantes**

- **Mayor cantidad de tiempo la preparación como en el desarrollo de la situación problemática**

- **Disposición de tiempo y paciencia, deben ser características del profeso con el fin de que el alumno reduzca einteriorice la base de orientación**

CATEGORIAS DE LAENSEÑAÑZAPROBLEMICA

La principal La situaciónproblémica consiste en presentar la contradicción y tener conciencia de lo desconocido.

El problema docentees un reflejo de la contradicciónlogico-sicológica del proceso de asimilación , lo que determina el sentido de búsqueda mental etc.

METODOS PROBLEMICOS los dos más representativos

De búsqueda parcial : el alumno participa activamente en la búsqueda de conocimiento. Lo hace independientemente en algunas etapas de solución y desarrollo de habilidades investigativas.

Entre sus manifestaciones:

- **conversación heurística** : base del diálogo profesor-alumno de acuerdo a una serie de preguntas e impulsos interrelacionados que guían el camino hacia la solución del problema.

Investigativa: los estudiantes investigan independientemente (en la mayoría de las fases del proceso). **El papel del profesor consiste en controlar el proceso de solución y reorientar el trabajo en casos de desvíos**

---

[1] Un impulso para buscar una solución es proponer que sea utilizado lo que se sabe acerca de algo (necesario) y ayudar a la solución.
MODULO DE VISION GENERALDIP. ENENS. DE LAS MATS. 1995

CORRIENTE ANGLOSAJONA

Esta corriente destaca el desarrollo de estrategias y métodos para resolver problemas.

se deriva:

- APRENDER A VALORAR LAS MATEMATICAS
- APRENDER A RAZONAR MATEMATICAMENTE
- APRENDER A COMUNICARSE MEDIANTE LAS MATEMATICAS
- ADQUIRIR SEGURIDAD EN LA CAPACIDAD PARA HACER MATEMATICAS

CORRIENTE FRANCESA:

La corriente francesa, destaca el desarrollo de actividades en un entorno similar al del científico en la adquisición y difusión de nuevos conocimientos. Esto implica inquirir, hacer conjeturas, relacionar, demostrar y presentar en el lenguaje matemático los nuevos conocimientos (MODULO DE VISION GENERAL. DIP. EN ENS.DE LAS MATS) 1995

CORRIENTE FRANCESA
No sostiene monolíticamente una posición teórica, ni acabada ni única

Se asume que el conocimiento es un producto social, histórico y temporal: es construcción del ser hum

DE AQUÍ

Derivan coherentemente una POSICION CONSTRUCTIVISTA PARA UN APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

Recuperando los desarrollos teóricos ya existentes como los de Piaget. Se plantea además para la enseñanza, el enfoque, que apoye a los estudiantes en la construcción de sus conocimientos

Se reconoce el papel del lenguaje en el papel de la obtención y transmisión de conocimiento desde un punto de vista epistemológico, sociológico y cultur

SE DESARROLLA UN ANALISIS DE LA ACTIVIDAD DEL CIENTIFICO PARA OBTENER Y DIFUNDIR EL CONOCIMIENTO Y EL PAPEL QUE EN ESTO SE JUEGA LA (RP) (BRUSSEAU 1986)

A través del quehacer científico permite una visión del papel que junto con la concepción de aprendizaje y de matemáticas, tiene en la enseñanza de las mismas en la que se ubica la (RP) (Brousseau 1986Vergnaud 1990)

Se considera ESENCIAL la forma en que se construyen los conceptos: "Un concepto no puede reducirse a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y en su enseñanza. A través de situaciones (tareas) y problemas por resolver, es como un concepto adquiere sentido para el niño. Ese proceso de elaboración pragmática es esencial para la sicología y la didáctica, como además lo es para la historia de las ciencias". (Vergnaud 1990)

Algunas aportaciones son llamadas aportaciones adidácticas: a continuación

DE ACCION:	DEFORMULACIO	VALIDACION	INSTITUCIONALIZACION
Acciones sobre el medio que llevan a un modelo protomatemático(modelo de realidad) mediante el cual se permitirá arribar a modelo(s) matemático(s) (Construir el salón de clase, por ejemplo)	Variara según el nivel escolar desde la verbalización hasta el lenguaje matemático formal.	Requiere que haga explicitación de pruebas y por tanto teorías relacionadas medios quesubyacen en el proceso de demostración	Se refiere a pensamientos de representaciones simbólicas etc que deberán retenerse para el trabajo posterior. Propósito fin ubicar como objetos matemátic los conocimientos adquiridos

LAS CUALES CONSIDERA NECESARIO TRABAJAR EN TORNO A CADA APRENDIZAJE QUE SE INTENTE PROMOVER

Otra aportación importante de esta corriente, es la "relacionada con los efectos que produce... presentar un 'problema' con diferentes 'enfoques' por ejemplo, presentar un problema, reconocido como problema verbal por su enunciado y, trabajarlo de tal manera, que se obtenga su solución algebraica y geométricamente (a este tránsito de un tipo de solución a otra le llaman 'cambio de marco'). Esto es, hacer un manejo del concepto como <u>herramienta</u> (por ejemplo, el teorema de Pitágoras usado para resolver un problema) o, como <u>objeto</u> (demostrándolo como teorema)". Esto, contribuye a una mejor conceptualización del mismo. Lo anterior, es lo que llaman un tipo de **dialéctica herramienta-objeto** (Douady 1986). Según Vergnaud, "existen conjuntos de tareas para cuya realización demandan del alumno la utilización de diferentes aspectos de un mismo concepto". A esto se le llama campo conceptual.

Según esta corriente, la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, es posible ubicarla como esencial en el aprendizaje de los estudiantes.

Para terminar, se ha considerado oportuno remitirnos al segundo párrafo del Plan de Estudios Actualizado, cuyo mensaje, aquí, se comparte plenamente.

" Se sugiere al profesor de manera particular, considerar la resolución de problemas como un instrumento que puede ayudar en gran medida a conseguir muchos de estos propósitos en el aula. Si bien es cierto que la resolución de problemas puede adoptar diferentes formas - según distintos propósitos y concepciones -, aun en sus interpretaciones más modestas, puede contribuir a reafirmar temáticas, construir nuevos conocimientos, aplicar y combinar otros e ilustrar distintas formas de proceder matemático, haciendo más asequible y atractivo para los estudiantes el campo de las matemáticas." (P.E.A. P.59)

CAPITULO. II

MARCO DE REFERENCIA DEL PROGRAMA DE MATEMATICAS II DEL PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO DEL C. C. H. 1996.TERCERA UNIDAD DEL PROGRAMA.

II.1 Marco de Referencia del Programa

Introducción.

Habida cuenta de la fundamentación teórica acerca de una concepción constructivista de la intervención pedagógica (P. E. A. 1996. P. 50) efectuada en el capítulo anterior y, la necesidad existente de realizar su contextualización en términos de analizar el P. E. A. del cual forma parte. En este capítulo se describirá el contexto que comprende el programa de la asignatura de Matemáticas II, el cual, contiene la tercera unidad, cuyo diseño didáctico constituye el capítulo III de esta propuesta educativa.

El material didáctico elaborado, corresponde a la tercera unidad del programa de la asignatura de Matemáticas II del Plan de Estudios Actualizado, cuya aplicación está destinada, para ser llevada a cabo en el curso de Matemáticas II, del segundo semestre de dicho Plan en el Bachillerato del Colegio (Plan de Estudios, necesidades sociales e individuales que fueron consideradas para su elaboración, Areas Académicas, Area de Matemáticas, Nociones básicas del Area). Para la exposición que será realizada, tiene como referente el P. E. A. , así como el Colegio de Ciencias y Humanidades de los cuales, a su vez; el primero permitirá contextualizar la propuesta y, el segundo, define el ámbito en que ésta será puesta en práctica.

Propósitos del Plan de Estudios Actualizado

En síntesis, uno de los propósitos fundamentales entre otros, del P. E. A. es la formación de alumnos sujetos de la cultura, capaces de aprender a aprender, de acuerdo con el modelo educativo del Bachillerato del Colegio, a través de una docencia más calificada en Ciencias y Humanidades y, de hacer que puedan aspirar a cursar estudios superiores exitosamente.

Otra finalidad, según se asienta en el P. E. A. (cf. p.12), es que a partir del Plan de Estudios como eje, se contribuya a establecer un "sistema de apoyos institucionales para el aprendizaje de los alumnos que incluya el trabajo en grupo escolar más abundante y mejor orientado y también condiciones para su trabajo personal en los planteles". Un tercer aspecto esencial, lo constituye el mejoramiento docente, de acuerdo a las concepciones didácticas implicadas del modelo educativo del Colegio y, de la experiencia de los profesores, como un medio al servicio de la formación de los alumnos en ciencias y humanidades.

Necesidades Sociales e Individuales

La aparición de un problema, no se da de manera aislada, antes bien, es parte de una interrelación de elementos coincidentes, en una determinada situación configurativa del problema de que se trate. De esta suerte, algunos hechos, datos y observaciones que la comunidad docente ha venido formulando persistentemente, según ha sido señalado en el P. E. A. (cf. p.7-8), destacan principalmente:

1. Las que se derivan del perfil real de los alumnos que hoy estudian en el Colegio, "manifestadas en la población escolar real, por las dificultades de los estudiantes. para la adquisición de formas de autonomía en el aprendizaje. Hecho al que en respuesta, se le ha aumentado el número de horas por asignatura, con la finalidad de orientar y realizar aprendizajes sistemáticos, explícitos y prácticos, en formas de trabajo intelectual generales y específicas."
2. La referente a ciertas características de la cultura actual, las cuales hacen necesaria una actualización impostergable, que haga énfasis en los programas, sus enfoques, métodos y temas, e incluya necesariamente en el plan de estudios vigente, un mayor dominio de idiomas o el empleo del recurso computacional.
3. Establecer lineamientos y directrices mediante las cuales se de una mayor coherencia de la acción docente con los postulados del Colegio.

A continuación se transcribirán literalmente algunas limitaciones, de entre otras más, de carácter específico, mencionadas en el Plan Actualizado,

- Permitir elecciones de materias de quinto y sexto semestres que privan al alumno de aprendizajes sin los cuales, el inicio de sus estudios de licenciatura se dificultan severamente.
- No mantener en las áreas y contra la concepción de éstas, la continuidad necesaria entre sus materias de los cuatro primeros semestres y de los semestres quinto y sexto.
- Atribuir sesiones de una hora a las asignaturas de todas las áreas, con excepción de Ciencias Experimentales, lo que dificulta las estrategias de trabajo en clase que implica la ejecución de trabajos y la participación de los alumnos.

En esta nueva etapa del Colegio, asentada en el Plan Actualizado, se observa que las necesidades de tal actualización, obedecen fundamentalmente, a ofrecer una respuesta a un fenómeno de carácter evaluatorio, orientado a rescatar y fortalecer la eficacia y eficiencia, la pertinencia, la trascendencia y la equidad en el desarrollo de las actividades académicas. Aspecto estos, que en su oportunidad serán abordados en el siguiente capítulo de este trabajo.

Areas que Configuran el Plan de estudios Actualizado del C. C. H.

El Plan de Estudios Actualizado del C. C. H., está configurado por las siguientes cuatro áreas, a saber: Matemáticas, Ciencias Experimentales, Histórico-Social y, Talleres de Lenguaje y Comunicación. Esta última incluye "lengua extranjera", considerada ahora como materia obligatoria. Estas son Areas de formación obligatoria para los alumnos del Colegio.

En este apartado, el interés se centra en el Area de Matemáticas. En ella, la orientación y sentido de la enseñanza de las matemáticas, está enfocado a hacer que el estudiante observe esta disciplina como una ciencia en constante formación, cuyas fuentes se asientan en una necesidad humana de conocer y descubrir su entorno físico y social, cuyo proceso evolutivo de desarrollo involucra dudas, conjeturas, aproximaciones, así como el rigor y formalización. Además, hacer que los estudiantes, aprecien de las matemáticas su carácter de ciencia y su valor funcional como herramientas. Interesa destacar para los fines de esta propuesta educacional, que la matemática es un saber que se construye y el papel que en tal proceso, tiene la resolución de problemas surgidos del desarrollo de las actividades humanas en sus distintos campos de acción (P. E. A. P.51).

De acuerdo con el Plan Actualizado(p.51) " Reguladas por las orientaciones del proyecto educativo del Colegio, cuyo núcleo es buscar que el alumno aprenda a aprender y, por la conciencia de las exigencias de la cultura actual y del perfil de los alumnos." Una síntesis de los cambios propuestos en las Areas, en particular, el Area de Matemáticas, los cuales se relacionan con "... los contenidos y enfoques para la enseñanza y el trabajo en el aula" serán descritos a continuación.

Aspecto relevante es que "El enfoque propuesto de la Matemática, intenta mostrar al estudiante dos aspectos primordiales de esta disciplina:

1. La importancia de los desarrollos teóricos en la búsqueda, obtención y organización de nuevos conocimientos.
2. El valor de estos como instrumentos para la construcción de otros conocimientos y sus aplicaciones en otros campos del saber (humanísticos, científicos y tecnológicos)(Op. Cit. p.58).

En este aspecto didáctico, se recomienda al docente el recurso en el aula, al uso de procedimientos y estrategias estimuladoras del desarrollo de actividades grupales e intergrupales y promotoras de la creatividad y autonomía intelectual, "... ampliar la capacidad de razonamiento, utilizar distintas formas de representación y comunicación de las ideas, fomentar la perseverancia en el trabajo y el desarrollo de diversas habilidades y capacidades"(flexibilidad de pensamiento, imaginación espacial, visualización de relaciones, patrones de resultados, formulación y construcción de hipótesis, estimación de resultados, redondeo de cantidades) y todo aspecto " ... relacionado con la elaboración y manejo de conceptos, así como la formación de valores, actitudes y normas en el estudiante" (P. E. A. P.58-59).

En particular, se sugiere al profesor, haga de la resolución de problemas un medio que pueda ayudar en gran medida a la consecución en el aula, de muchos de los propósitos señalados en los parágrafos precedentes, haciendo quizás, más alcanzable y atractivo al estudiante, el campo de las matemáticas.

El Area de Matemáticas

Según se asienta en el cuadernillo No. 54, la organización de contenidos del Area estriba en dos grandes ejes, la síntesis y la particularización en la siguiente forma. En los dos primeros semestres, tiene principio una "síntesis de conocimientos mediante la integración de contenidos de diversas ramas de las matemáticas (aritmética, geometría y álgebra)". En el tercero y cuarto semestre " una particularización por la vía de la diferenciación de conocimientos, con el estudio de contenidos de dos ramas particulares de la matemática (geometría sintética y geometría analítica) una por semestre: obtención de una segunda síntesis de conocimientos, mediante la integración de métodos y conceptos de esta disciplina."

Ya en el quinto semestre, se va hacia un acercamiento más específico sobre ramas del conocimiento matemático, en las que al tiempo que restringen su objeto de estudio, requieren de un mayor "...dominio de contenidos matemáticos básicos y de otros campos de conocimiento cuyas situaciones modelan (tercera síntesis).(ib.p.6)

Así, con los cuatro primeros cursos de matemáticas "...configurados dentro de una concepción orgánica que los vincula estrechamente, entre sí, y con el conjunto de asignaturas del Area y del Plan de Estudios se provee al estudiante de una cultura matemática básica que le permita acudir a comprender conocimientos más especializados como son los de los semestres quinto y sexto del tercer año y, ello le deje en el mejor de los casos, en condiciones de proseguir sus estudios o acceder al mercado de trabajo. En todo esto se privilegiará una didáctica constructivista en una perspectiva como la expuesta en el capítulo anterior.

El curso de Matemáticas II

"Este curso constituye un antecedente básico para casi cualquier otro curso de la matemática", así como para " las disciplinas que forman parte de las ciencias naturales". Su núcleo está dado por el lenguaje algebraico, puesto que en "dicho lenguaje se expresa gran parte de la matemática".(Op. Cit. p. 33)

Según se establece en la fuente citada antes "Se plantea desarrollar en el estudiante los conocimientos y habilidades que lo lleven a apreciar la economía de la simbología matemática y el papel que esta cumple en el desarrollo de las ideas, así como interpretar diversas representaciones(expresiones algebraicas, gráficas y tablas) derivadas de un mismo proceso".

Programa Institucional

En el Plan de Estudios Actualizado, se define un **programa institucional**, como "un instrumento que permite tener presentes los principales elementos que intervienen en un proceso de enseñanza—aprendizaje, para organizarlos sistemáticamente de manera, que orienten su planeación, ejecución y evaluación ... y contribuya a un propósito educativo unitario". Se trata dice, "... de una guía obligatoria para las acciones a realizar, pero no de una definición acabada y rígida"(cf. p.120)

A diferencia de un programa operativo, el cual describe y abarca todos los elementos que ayuden al profesor a impartir un curso. Un **programa institucional**, asienta lo que ha de ser enseñado necesariamente (contenidos, habilidades, métodos y formas de trabajo intelectual, propósitos generales, así como la metodología congruente con los fines que se persiguen y los contenidos, determinados por aquello que se propone enseñar en una asignatura específica, en el contexto del plan de estudios del cual forma parte). Un programa tal, no precisa lo que el profesor deba hacer, o cómo deba hacerlo en cada clase. En él, se aconsejan prácticas, materiales didácticos, formas de evaluación e incluso bibliografía. Es así un marco dentro del cual, cada profesor puede aportar sus ideas, experiencias y valores en sus cursos, "....De ahí que corresponda al profesor, en ejercicio de la libertad de cátedra, especificar contenidos, actividades de aprendizaje, bibliografía". En ellos se sugiere también prácticas y materiales didácticos, así como formas de evaluación" (P. E. A. cf. p. 121).

El Programa de Matemáticas II. Antecedentes

Los antecedentes de esta materia en el Plan de Estudios del C. C. H. (1971), según se consigna en el fascículo "PROGRAMAS DE ESTUDIO PARA LAS ASIGNATURAS: MATEMATICAS I Y II . ALGEBRA Y GEOMETRIA (PRIMERO Y SEGUNDO SEMESTRE) "... Para los cuatro primeros semestres de estudio se plantearon (Sesión del Consejo Universitario, enero 1971) diversos contenidos de Algebra y Geometría, así como algunos temas introductorios al Cálculo Diferencial e Integral;

Matemáticas I

Conjuntos (lenguaje y notación). La recta numérica. Expresiones algebraicas. Ecuaciones y desigualdades. Funciones elementales.

Matemáticas II

Sistemas de ecuaciones y desigualdades. Números Complejos (y su representación gráfica). Polinomios. Elementos de Geometría Analítica. Sucesiones y combinaciones.

En los temas enunciados de los programas mencionados, es manifiesta la existencia de raíces de lo que en el P. E. A. constituye la tercera unidad, la cual es factor de desarrollo de esta propuesta didáctica.

El Programa de Matemáticas II

Este programa está organizado en siete unidades cuya secuenciación "obedece a un avance gradual en el dominio de representaciones algebraicas que expresan relaciones entre números, de manera que en conjunto puedan ser cubiertas en 80 horas que es el tiempo asignado para el desarrollo del curso en un semestre.

Los contenidos generales de esta asignatura de acuerdo el fascículo aludido (Cuadernillo No.54), están configurados por los siguientes grandes temas que definen el curso:

1. Funciones cuadráticas y aplicaciones.
2. Expresiones racionales y con radicales.
3. Inecuaciones y regiones en el plano.
4. Semejanza de figuras y teorema de Pitágoras.
5. Pirámides y conos.
6. Razones trigonométricas y solución de triángulos rectángulos.
7. Funciones trigonométricas de un ángulo arbitrario.

Dentro de los objetivos generados de la asignatura, de acuerdo a la jerarquía que les fue establecida, mencionaremos el segundo de ellos, el cual atañe directamente a la tercera unidad del programa, objeto de desarrollo de este trabajo.

- **Continuar el aprendizaje del álgebra mediante la solución y localización en la recta numérica y en el plano cartesiano de los puntos que satisfacen inecuaciones y sistemas de inecuaciones sencillas.**

Después de todo lo expuesto, sólo resta llevar a cabo el desarrollo del material didáctico correspondiente a los temas de la tercera unidad de enseñanza— aprendizaje de la asignatura de Matemáticas II. Esto, constituye el tema del siguiente capítulo.

Condiciones en las que será realizada la aplicación del material didáctico de la Unidad III.

Primeramente, debe decirse lo siguiente: el curso de Matemáticas II del segundo semestre del Bachillerato del C. C. H., del cual forma parte la tercera unidad cuyo material didáctico elaborado habrá de ser aplicado, corresponde al ciclo 97-2 de los cursos impartidos normalmente en el Colegio. Algunas de las condiciones específicas en que se realizará el curso, —comprenden al propio curso— el que en el desarrollo del proceso enseñanza—aprendizaje incluye, tanto las carcterísticas del docente, así como las que corresponden a los estudiantes y, las del entorno inmediato del plantel(Apud. Carlón Monroy A. 1994.p.58).

En lo que concierne a las características del curso se señalan las siguientes:

- Nombre del Curso: MATEMATICAS III
- Nombre de la Unidad III: INECUACIONES Y REGIONES EN EL PLANO
- Carácter del Curso: CURRICULAR
- Alumnos a quien está dirigido: ESTUDIANTES DEL SEGUNDO SEMESTRE
- Duración del experimento: 10 HORAS
- Duración de las sesiones: UNA HORA VEINTE MINUTOS CON 20 MINUTOS
- Costo del Curso: GRATUITO. ES PARTE DEL CURSO REGULAR
- Materiales didácticos: ADECUADOS AL CURSO Y EN CANTIDAD SUFICIENTE
- Cupo en el Curso: 48 ALUMNOS MAXIMO.

Características de los alumnos que tomarán el curso

- Han cursado Matemáticas I en el Colegio
- No todos han aprobado su curso de Matemáticas I

- No es importante el estatus académico del alumno al momento de asistir al curso.

Características del profesor que aplicará el material didáctico

- El profesor tiene la formación adecuada para aplicar el material didáctico.

Condiciones externas en las cuales se aplicará el material

- Sólo se consideran las de carácter material y que la institución proporciona, se considera que son las adecuadas.

II.2 Unidad del Programa

Entre los datos consignados en el programa de la asignatura, en lo referente a requisitos; se dice que: **ninguna materia**. En efecto, en lo que concierne al estudio de esta tercera unidad, se asume que para abordar su estudio, es suficiente con las nociones y conceptos que posee el estudiante, pues con los conocimientos aprendidos por este, sobre ecuaciones cuadráticas y lineales en el primer semestre, puede abordar lo relativo a la "unidad subsiguiente de desigualdades y regiones en el plano, donde se consolidan y extienden tales contenidos al estudio de relaciones que no son de igualdad entre expresiones algebraicas, ensanchando en este aspecto el panorama matemático de los estudiantes.

Lo anterior se desarrolla, a través de una secuencia, que da continuidad a lo largo de los cuatro primeros semestres como se muestra a continuación, a partir de la observación del mapa de contenidos, de los ya citados programas de estudio para las materias de Matemáticas I y II (p.5), en donde, en la línea temática sobre álgebra, aparece una cierta interconexión en el tratamiento relativo a los tópicos mencionados, esto es;

Primer semestre:

Ecuaciones lineales
Sistemas de Ecuaciones lineales
Ecuaciones Cuadráticas y factorización

Segundo semestre:

Funciones cuadráticas y aplicaciones
Inecuaciones y regiones en el plano

Tercer semestre:

Ecuaciones de grado superior a 2
Algebra de números complejos

Cuarto semestre:

Matrices y modelos lineales

En este contexto se ubica la Unidad III del programa. Sobre los objetivos, metodología, desarrollo y evaluación, estos estarán claramente expuestos en el siguiente capítulo junto con el diseño didáctico.

CAPITULO III.

DESCRIPCION DE ACTIVIDADES Y MATERIALES DIDACTICOS PARA EL DESARROLLO DE LA TERCERA UNIDAD DEL PROGRAMA DE MATEMATICAS II DENOMINADA "INECUACIONES Y REGIONES EN EL PLANO".

Introducción

En este capítulo, se hace una descripción de las actividades que se consideran apropiadas, para que los estudiantes, logren los objetivos planteados en los distintos puntos que completan la tercera unidad del programa. Además, se hace una presentación de los materiales didácticos, elaborados y diseñados para ser utilizados por los estudiantes, en las actividades de aprendizaje de los contenidos relativos a esta tercera unidad.

A grandes rasgos, tales actividades consisten, en interpretar los conceptos necesarios, relativos al punto o secuencia que se estudia, planteamiento de problemas, contestar cuestiones complementarias necesarias del proceso de desarrollo. Presentación de problemas para ser resueltos en clase. Todos estos aspectos, serán llevados a cabo en sesiones de 100 minutos de duración aproximada. La forma de llevar a cabo las actividades mencionadas, comprenden la realización de trabajo individual, por equipos de cuatro integrantes, actividades intergrupales y de grupo. En general, en el segmento dedicado al análisis global, junto con los materiales didácticos preparados para las tareas de estudio—aprendizaje y, cuestionarios.

Todo esto, bajo un enfoque de aprendizaje constructivista, en el cual, destaca una permanente interacción del estudiante con los objetos de aprendizaje, y bajo una perspectiva, vía resolución de problemas, ya expuesta en el primer capítulo de esta propuesta didáctica.

Tal experiencia docente, será llevada a cabo en las condiciones reales, propias del proceso enseñanza—aprendizaje del programa de Matemáticas II, en el Plantel. El tiempo destinado al desarrollo de la unidad, es de 10 horas clase, el cual corresponde al período considerado en el programa de la asignatura

III.1 Evaluación

Dada la inclinación actual, de fundamentación de la calidad de un programa educativo en el proceso enseñanza — aprendizaje, donde ésta se concibe, como el eje principal del cual se derivan los resultados que determinan las características de la formación que recibe el estudiante. En nuestro medio, se tiende a hacer lugar común, la idea de que la calidad de un programa educativo —aunque manejado en formas diversas—, depende de que este sea eficaz, eficiente, pertinente, trascendente y equitativo (Gago Huget A. y Mercado Collado R. s.a.) Estas características, en conjunto, conforman un instrumento mediante el cual, puede ser establecido un criterio orientador de un concepto de evaluación de un programa. A continuación se da una idea acerca de cada una de estas características:

- **eficacia**; se entiende como la proporción de metas que se alcancen a cubrir satisfactoriamente (lo cual no basta para calificarlo como bueno o malo) . Más específicamente:
  - proporción de objetivos de aprendizaje que logra un alumno
  - proporción de alumnos participantes que logran el estado estimado como meta de un programa.
- **eficiencia**; considerada en un sentido de valoración, según el provecho que se obtenga de los recursos disponibles. Es inseparable de la eficacia.
- **pertinencia**; atañe a las teorías, veracidad de los conocimientos, certidumbre de principios, legitimidad de valores, factibilidad de las estrategias.
- **trascendencia**; se refiere al logro de objetivos que hacen factible, tanto la comprensión de ideas, así como la operación de instrumentos, dándose atención especial, a la interacción de las personas en su proceso de formación social.
- **equidad**; se refiere a la posibilidad de optar entre diversas estrategias para lograr los objetivos de aprendizaje considerados. En esto, destaca el profesorado, " horarios, disponibilidad de tutores y la accesibilidad de las fuentes de consulta e información."

En una visualización de los aspectos anteriores, de una perspectiva de evaluación, enfocada al proceso enseñanza—aprendizaje, no puede pasarse por alto aquellos elementos inherentes a este proceso en una interacción múltiple:

alumno—material potencialmente significativo—docente,

de ésta, interesa en particular, el de los materiales potencialmente significativos y su evaluación .

Los materiales didácticos presentados en páginas subsiguientes, se asientan en una concepción, que les atribuye justificación a partir de un punto de " verificación" y, no de un punto de " consideración" (especulativo).

Para dar cuenta, acerca de procedimientos, actividades, la evaluación y revisión de los materiales didácticos, se ha procedido con base en el modelo de evaluación formativa para el diseño y desarrollo de un material de instrucción debido a Walter Dick y Lou Karey.

El material didáctico elaborado, es de carácter semi—instruccional, en cuanto permite al estudiante aprender los criterios de funcionamiento, sin ninguna intervención del profesor o algún compañero. De acuerdo a los pasos considerados en el desarrollo de la instrucción, se procedió a su elaboración, tomándose en cuenta :

1. que motiven adecuadamente,
2. su contenido sea el apropiado,
3. la secuenciación sea la correcta,
4. toda la información necesaria esté disponible,
5. contenga ejercicios de práctica,
6. incluya retroalimentación ,
7. disponga de pruebas apropiadas ,
8. oriente al alumno adecuadamente, de modo que pueda ayudarlo a que se promueva de un evento al siguiente.

El material de instrucción, contiene toda la información escrita que será usada por el estudiante, para el logro de los objetivos establecidos en cada lección. El material está escrito de acuerdo a los objetivos planteados en la unidad del programa.

Para el desarrollo de la instrucción, de acuerdo a los lineamientos que contempla el modelo citado, se procedió apoyándose en las siguientes fases, entre ellas:

1. Para cada sesión, se consideró una presentación desarrollada por escrito, en tal forma que haga posible practicar el monitoreo y la retroalimentación, para evaluar y guiar a los estudiantes a la siguiente unidad de aprendizaje.
2. El formato del prototipo de presentación del material elaborado, ha sido escrito, basándose en las estrategias de aprendizaje en forma aproximada. Los materiales impresos en esta forma aproximada, permiten verificar su secuencia, flujo de

ideas, exactitud de la ilustración de ideas, completitud, etc.; realizándose una elaboración aproximada de los materiales lo más completa posible para cada actividad de aprendizaje.

3. El material desarrolla completamente la tercera unidad del programa de la asignatura. Tal desarrollo, consiste del material usado por el estudiante, el cual proporciona instrucciones para la actividad o tarea correspondiente.

La revisión del material de instrucción, comprende dos aspectos principales,eldiseño y la evaluación formativa. Esta última, es definida como "... el proceso que utiliza el instructor para obtener información mediante la cual revisar si su instrucción ha resultado más o menos eficiente." (Dick W. Y Carey L. s.a. p. 198).

Uno de los objetivos es, si la instrucción realizada con base en el material didáctico propuesto, puede ser aplicado en el entorno propio de un grupo escolar, para ver en que medida estos son eficientes, e identificar las formas en que puedan hacerse modificaciones agregando o quitando, o efectuando cambios en los materiales para mejorar su eficiencia.

El material didáctico suministra actividades que impulsan la práctica interactiva y, la retroalimentación destinada a brindar a los estudiantes la oportunidad de mostrar habilidades específicas logradas. Las sesiones también, serán aprovechadas para identificar aquellas habilidades no adquiridas.

La información recabada para el mejoramiento de la instrucción tomará en cuenta desde:

- el examen de diagnóstico, el examen de post-evaluación, así como la participación y desarrollo de actividades en clase,
- serán registradas todas observaciónes hechas por los estudiantes, o las que el propio docente haya observado en los materiales, acerca de las dificultades encontradas en puntos específicos,
- la información recabada, o los cuestionarios de actitudes y/o comentar los interrogatorios, en los que los alumnos revelaron sus reacciones, en lo general, acerca de la instrucción y su percepción de las dificultades halladas en los materiales y los procedimientos en general,

- **el tiempo requerido por los alumnos para completar varias componentes de la instrucción.**

Finalmente, se anexa una post-evaluación sumativa, la cual se aplicó a través de dos exámenes tipo; el examen 'A' y el examen 'B'.

Situación de desarrollo de la unidad

Características generales

La experiencia didáctica, será realizada en las condiciones concretas que prevalecen en el Colegio; particularmente en el Plantel Naucalpan. Para esto se cuenta con cinco grupos de 45 estudiantes cada uno en promedio. Los salones de clase se encuentran con iluminación y ventilación adecuada. Cuentan con dos pizarrones, 24 mesa—bancos y 48 sillas. Se tiene disponibilidad de gises y borradores suficientes.

Características particulares

La prueba de los materiales didácticos diseñados será aplicada en las siguientes circunstancias:

- Se aplicará a dos grupos; el 1104 y 1107, en los respectivos horarios en los cuales reciben sus clases de matemáticas II.

- En esos grupos cada estudiante contará con un ejemplar del material didáctico, además de lápiz, un cuaderno, una regla y escuadra.

- Otros tres grupos; el 1101, 1102 y 1106, a quienes se imparte el curso de matemáticas II. Con ellos, el trabajo se desarrollará sin contar con los materiales didácticos. Las clases serán realizadas en las condiciones que se han venido trabajando, es decir, recurriendo al uso de bibliografía relativa existente en la biblioteca del plantel y, una compilación del material bibliográfico de cada unidad del programa, así como material de apoyo didáctico destinado fundamentalmente al profesor.

Metodología

Para la aplicación y desarrollo didáctico de los materiales propuestos se procederá de la manera siguiente:

- Previamente, al inicio de la secuencia, se aplicará un examen diagnóstico a los grupos con los cuales se van a probar los materiales didácticos, con la finalidad de establecer un punto de arranque, al abordar el estudio—aprendizaje de los contenidos temáticos de la secuencia.

- El estudio de los materiales didácticos, se apoyará en el empleo de una dinámica de grupos (o pequeños equipos de trabajo), compuestos por cuatro estudiantes y, para ello, será aprovechado el hecho de que, tales grupos ya se encuentran formados desde el principio del ciclo lectivo, por considerar que ello favorece el mutuo intercambio de ideas y de opiniones entre los integrantes del grupo (González Núnez, J. Jesús., 1994.)

- **En concordancia con un enfoque constructivista en el desarrollo de las actividades de aprendizaje, se enfatizará y destacará, privilegiando en todo momento, el carácter interactivo entre el estudiante y el objeto de aprendizaje.**

- **En cada sesión, se destinará un tiempo —el que se considere conveniente— para propiciar la discusión y el intercambio de ideas entre las integrantes de cada equipo y, si es el caso, el intercambio de ideas entre diferentes equipos. Después se procederá a una fase de análisis global con todo el grupo, para finalizar con una fase de síntesis de resultados y asignaciones de tareas extra-aula.**

Objetivos generales de la unidad

Teniendo en mente, como parte sustancial de las actividades que se desarrollan en clase, fomentar la solución de problemas, "buscando que los conocimientos matemáticos adquieran sentido para los alumnos y, se desarrolle su capacidad de trabajo personal, lo mismo que sus aptitudes para la investigación, búsqueda de conjeturas y la comunicación de su pensamiento, tanto en forma oral como escrita. [...], y utilicen los distintos medios de expresión matemática: tablas, gráficas y el lenguaje simbólico del álgebra [...]" (PROGRAMAS DE ESTUDIO PARA LAS ASIGNATURAS : MATEMATICAS I, II ALGABRA Y GEOMETRIA. PRIMERO Y SEGUNDO SEMESTRE . C.C.H. 1996). En un contexto acorde a los objetivos generales de la signatura de matemáticas II, se mencionan entre otros:

- **La práctica frecuente de los procedimientos de cálculo algebraico [...], y sus aplicaciones en la solución de ecuaciones y problemas.**

- **CONTINUAR EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA, MEDIANTE LA SOLUCION Y LOCALIZACION EN LA RECTA NUMERICA Y EN EL PLANO CARTESIANO, DE LOS PUNTOS QUE SATISFACEN INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES SENCILLOS.***

el objetivo educativo particular de la unidad se plantea bajo un doble propósito(Op, cit. 1996. P,25)

primero, "...introducir a los alumnos gradualmente en la solución de desigualdades y sistemas de desigualdades y ..."

segundo "...enriquecer el significado geométrico de las expresiones algebraicas, mediante la representación cartesiana de la solución de sistemas de desigualdades y algunas de sus aplicaciones."

* La expresión en mayúscula no se da en el texto. Se ha puesto así, por quien esto escribe, con la finalidad de destacar la plena relación de este objetivo con los contenidos de la unidad que aquí se desarrolla.

Enfoque

De acuerdo en que "el foco de interés en este curso, se centra en las relaciones entre números y objetos geométricos, particularmente en las relaciones de la igualdad, congruencia y semejanza", (*Cuadernillo No. 54 Julio 1995*); y que en uno de los propósitos del curso es " la comprensión de conceptos y métodos básicos del álgebra, que unidos a conocimientos de geometría sintética, hagan posible fincar las bases del método analítico en cursos posteriores, se busca que el estudiante logre un dominio del lenguaje algebraico, gracias al cual se le facilite el estudio de funciones lineales y cuadráticas en el plano cartesiano; y que la operatividad algebraica se fortalece a través de la obtención y empleo de algoritmos, como síntesis de procedimientos, y no a través de la mera ejercitación repetitiva y descontextualizada de reglas o fórmulas" (Op. Cit.).

Dado el carácter institucional del programa, y dado el carácter oficial y obligatorio que se impone a la "concepción de la asignatura, sus objetivos o propósitos, los contenidos mínimos o fundamentales y, a las estrategias básicas de enseñanza, aprendizaje congruentes con la finalidad" del área, según se asienta en el PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO (*p.* 121, 1996), en donde se establece además, que lo relativo a la evaluación, didáctica, materiales didácticos o bibliográficos, incluso horas destinadas a cada una de las partes del curso, son de naturaleza orientacional.

A continuación se procede a establecer los siguientes aspectos.

- Sabrá resolver algunos casos sencillos de inecuaciones con una incógnita incluyendo algunos ejemplos donde intervenga el valor absoluto.

- Sabrá resolver y representar en el plano cartesiano la solución de sistemas de inecuaciones 2x2.

- Conocerá algunas aplicaciones de los sistemas de inecuaciones lineales a la solución de problemas.

De acuerdo a " LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO PARA LAS ASIGNATURAS: MATEMATICAS I y II..." mencionadas antes, las estrategias de enseñanza - aprendizaje son:

- "...sustituir valores, trazar las gráficas de las ecuaciones correspondientes, puntos de prueba para determinar si están por arriba o abajo de la recta o la parábola que delimita la región."

- Destacar que el mejor punto de prueba es el origen, por la facilidad para los cálculos.

- Representar las soluciones con ayuda de intervalos; revisar las equivalencias entre algunas de las notaciones con desigualdades y valor absoluto.

- **Proporcionar ejemplos sencillos para mostrar al estudiante aplicaciones de las desigualdades lineales a la resolución de problemas prácticos de Programación Lineal.**

De esta manera, bajo una concepción constructivista de la enseñanza y, tomando en cuenta el enfoque, objetivos generales, particulares y específicos, planteados en los documentos del ; PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO, PROGRAMA DE ESTUDIOS PARA LAS ASIGNATURAS : MATEMATICAS I y II, **ambos de 1996 y, una versión extensa de los programas de estudio (Cuadernillo No. 54. 28/07/1995). Se hace la siguiente presentación de una secuencia didáctica del programa de Matemáticas II, desglozado en cinco apartados, correspondiendo uno para cada clase. En cada secuencia, se hacen explícitos los objetivos específicos de aprendizaje, que el estudiante deberá haber logrado al término de la clase.**

EXAMEN DIAGNOSTICO

1. Haciendo uso de los signos de relación < y >, en cada caso determinar qué cantidad o magnitud es "mayor que" o "menor que"

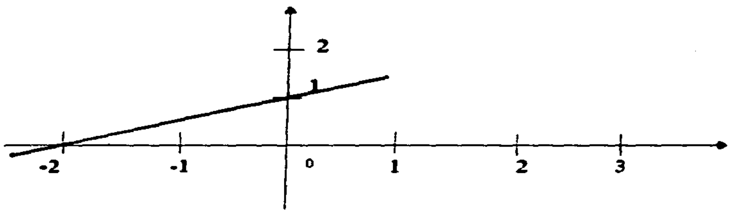
a) -4 y -6 b) 1/16 y 1/ 7 c) La Torre Latinoamericana y la Torre de Tlaltelolco.

__________ _______________ _______________________

2) Dada la ecuación $y = -x + 2$

a) Hallar los puntos en que la recta se intercepta con el eje de abscisas y con el eje de ordenadas respectivamente.
b) Trazar la gráfica de la ecuación.
c) En cuántas partes o regiones divide la recta al plano cartesiano?

3) Dada la siguiente gráfica, hállese si es posible su ecuación.



4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas

$$2x + 3y = 23$$
$$4x - 3y = 1$$

a). Resolverlo por el método gráfico.
b). Comprobar la solución obtenida en el sistema de ecuaciones dado.

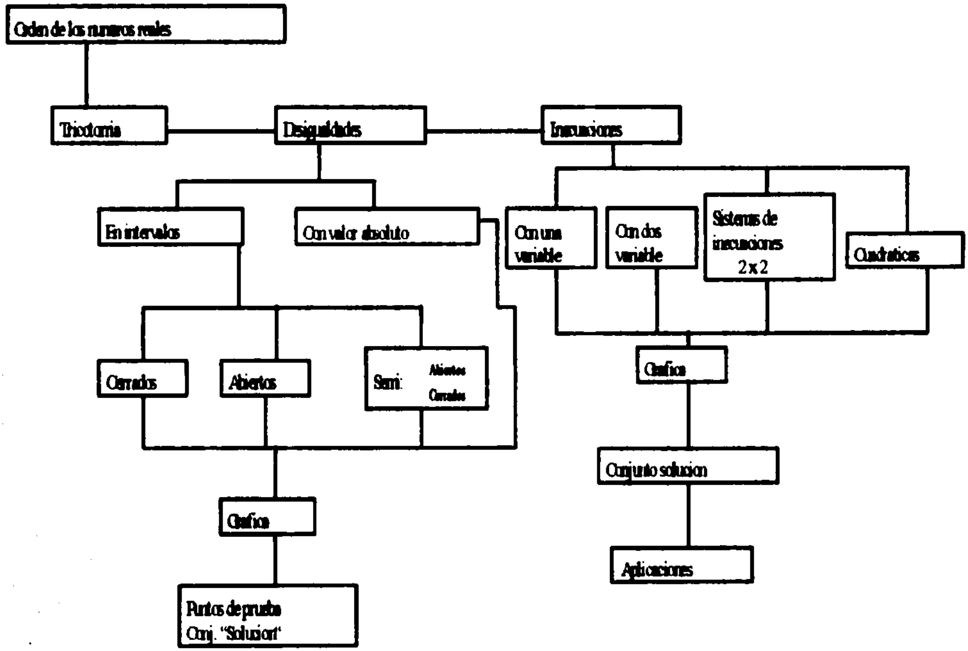
5. Hacer la gráfica de la ecuación $2x^2 + x - 1 = 0$

6. Asignar tres valores que hagan falsa y tres valores que hagan verdadera a la proposición

$$x < 10$$

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DEL DESARROLLO ORGANICO DE LA

UNIDAD III: INECUACIONES Y REGIONES EN EL PLANO



PRIMERA SESION

Objetivos específicos de la clase

Al finalizar la clase el estudiante será capaz de :

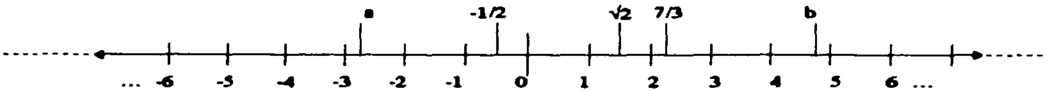
1. Comparar dos magnitudes, haciendo uso correcto de los símbolos de desigualdad estricta y de simple desigualdad.

2. Escribir una desigualdad lineal en términos de intervalos y recíprocamente.

3. Expresar un intervalo de diferentes maneras.

III.2 Orden de los números reales

Conoces ya la recta numérica. Recuerdas que en ella pueden ser representados los números reales, al asociar un número real a un punto de la recta como se muestra en la siguiente figura,



en la cual, el cero corresponde al origen como un punto de referencia. Así , a la derecha del cero son números positivos y a la izquierda son los números negativos. En la recta numérica, los números tienen un orden definido. Por ejemplo, cualquier número a la izquierda del cero, es menor que él como el -1, el -5; el número a, el cual de acuerdo a la figura, es incluso menor que el -1 , -2 o -1/2. Más aún, puede decirse que el número a es menor que el número real b . Esto se simboliza como $a < b$; ó b por estar a la derecha de a, se dice que es mayor que a, y se simboliza como $b > a$.

Las relaciones $a < b$, ó $b > a$ sólo son dos formas de expresar una misma relación de orden:

a es menor que b

Por ejemplo, si se compara :

	se dice que:	se simboliza:
0 con el 1	0 es menor que 1	$0<1$

Completa de la misma forma los ejercicios dados a continuación:

-6 con el -5

-4 con el -6

-3 con el -3

3/2 con el 0

a con b; donde $a = 3$, $b = 7$

x con el 4; donde $x = 1$

-a con el 0

a con a

¿Qué relación observas si comparas cualquier número x, con el que le sigue a su derecha ?, ¿y con el que le precede?.

1. ¿ Qué relación observas si se compara un número consigo mismo?
2. En relación a las cuestiones dos y tres anteriores, si se consideran dos números cualesquiera a, b, ¿cómo pueden ser, si se comparan entre sí?

Cuando en los ejemplos de comparación dados antes se dijo

$$0 < 1, \text{ ó}$$
$$-5 > -6, \text{ ó}$$
$$-\frac{3}{2} < 0, \text{ ó}$$
$$a > b, \text{ donde } a = 8,\ b = 7, \text{ ó}$$
$$x < 4$$

Se dice que en cada caso es una DESIGUALDAD "ESTRICTA"

Pero si se considera una desigualdad como

$$x \leq 4$$

sin definir valor alguno para la variable x, se tiene entonces una <u>proposición abierta</u> , en la cual, a, x, puede asignársele cualquier valor menor que 4 o incluso el número 4, y se dice entonces, que la proposición se convierte en una DESIGUALDAD NO ESTRICTA, en

donde, se dice que la variable x REPRESENTA (o puede tomar) cualquier valor menor que 4, o incluso el 4 mismo, pues al fin y al cabo, es cierto que si $x = 4$, se tiene

$$4 \leq 4, \text{ ¿o no?.}$$

En resumen, se tiene lo siguiente : dados dos números reales a y b cualesquiera, una relación de orden entre los números a y b, puede ser expresada mediante los símbolos:

a). $<$ el cual significa " es menor que "

así $a < b$ se lee: ______________________

b). $\leq$ el cual significa " es menor o igual que "

así $a \leq b$ se lee; ______________________

ó

c). $>$ el cual significa " es mayor que "

así $a > b$ se lee: ______________________

d). $\geq$ el cual significa " es mayor o igual que "

así $a \geq b$ se lee; ______________________

Si se escribe: $a < b$, ó $b > a$ ¿significará lo mismo?

Si se escribe: $a \geq b$, ó $b \leq a$ ¿significa los mismo?

Considerando los incisos a), b), c) y d) anteriores, ¿cuáles indican:

una desigualdad estricta?:

una desigualdad no estricta?:

ACTIVIDAD

Simbolizar los siguientes enunciados

1. 2 es mayor que 0
2. -1 es mayor que 1
3. x es mayor o igual que 10
4. y es estrictamente menor que 8
5. x es mayor que y
6. x es no estrictamente menor que 8
7. Dados los números 3, 2. Uno de ellos es menor que el otro. Expresar este hecho de dos formas diferentes
8. $(x-3)^2$ es un número positivo o nulo.
9. -4 es un número negativo.
10. Un número que es mayor o igual que 5.
11. -2 es menor que un número.
12. Un número que es no estrictamente mayor que otro.
13. Un número que no es menor que otro

III.3 Desigualdades e Intervalos.

Reglas para desigualdades:

Si a, b, c y d son números reales, entonces,

1. Si $a > b$ y $b > c$ entonces, $a > c$

Se muestra que la relación es transitiva

2. Si $a > b$, entonces, $a + c > b + c$

Se muestra que sumar un número real a los dos miembros de una desigualdad no cambia el sentido de ésta.

3. Si, $a > b$ y $c > 0$ entonces, $ac > bc$

Se muestra que al multiplicar los dos miembros de una desigualdad <u>por un número positivo</u> no cambia el sentido de ésta.

4. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.

Al multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad <u>por el mismo número real negativo</u> cambia el sentido de ésta.*

5. Si $a > b$ y $c > d$ entonces, $a + c > b + d$.

Las propiedades anteriores, han sido dadas para desigualdades <u>ESTRICTAS</u>, pero debe decirse que estas propiedades son igualmente válidas para desigualdades <u>NO ESTRICTAS</u>. Esto significa, que si se sustituyen las relaciones $<$ y $>$, por las correspondientes $\leq$ y $\geq$, se obtienen otras cinco propiedades.

ACTIVIDAD

De acuerdo a las propiedades dadas:

1. ¿Cómo hacer para que la desigualdad

a) $6 > 4$ se transforme en $11 > 9$?

b) $6 > 4$ se transforme en $-1 > -3$?

2. ¿Qué se hizo para que $5 > 2$ se transforme en $15 > 6$?

3. ¿Qué se hizo para que se transforme $5 > 2$ en $-10 < -4$?

4. ¿Si $x < 5$, $y < 6$ Cuál es el mayor número menor que $5x + 6y$?

5. ¿Si $3 < 7$ y los dos miembros de la desigualdad se multiplican por -2, es decir; $3(-2)$ y $7(-2)$, la desigualdad que resulta es, $-6 < -14$? ó $-6 > -14$?

* Es el único caso en que cambia el sentido de la desigualdad

6. ¿Si $36 \geq 16$, y los dos miembros de la desigualdad se dividen entre -4, la desigualdad que resulta es $-9 \leq -4$? ó $-4 \leq -9$?

Considérense dos números reales a, b tales que $a < b$. ¿ Cómo se simboliza el siguiente enunciado; un número que es mayor que a y es menor que b. ?

Supóngase que x sea ese número, luego, por ser x mayor que a, significa lo mismo decir que, a es menor que x, o sea, $a < x$. Además, como x es menor que b, entonces, podemos simbolizarlo como $x < b$.

De donde resultan las dos desigualdades:

$$a < x \quad y \quad x < b$$

las cuales pueden ser expresadas en una sola relación de desigualdad como esta,

$$a < x < b$$

la cual se llama doble desigualdad

De la misma forma, si

$$\boxed{a \leq x \leq b}$$

significa que

$$\boxed{a \leq x} \quad y \quad \boxed{X \leq b}$$

De la misma forma, si

$$a < x \leq b \qquad y \qquad a \leq x < b$$

$$a < x \quad y \quad x \leq b \qquad\qquad a \leq x \quad y \quad x < b$$

Intervalos

Si se considera cada una de las desigualdades

$a<x<b$	$a\le x\le b$	$a\le x<b$	$a<x\le b$

Cada una define un conjunto de números reales

El conjunto de números reales x, mayores que a y menores que b.	El conjunto de números reales x, mayores o iguales que a, y menores o iguales que b.	El conjunto de números Reales x, mayores o iguales que a, y menores que b.	El conjunto de números reales x, mayores que a, y menores o iguales que b.

Cada conjunto se representa de la siguiente manera

$\{x \in R / a<x<b\}$	$\{x\in R / a\le x\le b\}$	$\{x\in R / a\le x<b\}$	$\{x\in R / a<x\le b\}$

Cada conjunto se llama INTERVALO y se representa como sigue:

(a , b)	[a , b]	[a , b)	(a , b]
abierto	*cerrado*	*Semiabierto ó semicerrado*	

En cada intervalo, los números a y b se llaman puntos extremos del intervalo. La variable x toma un valor extremo cuando el intervalo es cerrado, o semicerrado en el extremo correspondiente. Cuando un intervalo es abierto, x no toma ninguno de los puntos extremos.

En forma resumida, según el tipo de intervalo que se trate, puede ser denotado de las formas indicadas, incluyendo su forma gráfica. Esto es ;

abierto

$a < x < b$ ó $(a , b);$ o $\{x \in R \ / a < x < b\}$

gráficamente

Cerrado

$a \leq x \leq b$ ó $[a , b];$ ó $\{x \in R \ / a \leq x \leq b\}$

gráficamente

semiabierto por la izquierda ó semicerrado por la derecha

$a , x \leq b$ ó $(a , b];$ ó $\{x \in R \ / \ a , x \leq b\}$

gráficamente

semiabierto por la derecha ó semicerrado por la izquierda

$a \leq x < b$ ó $[a , b);$ ó $\{x \in R \ / a \leq x < b\}$

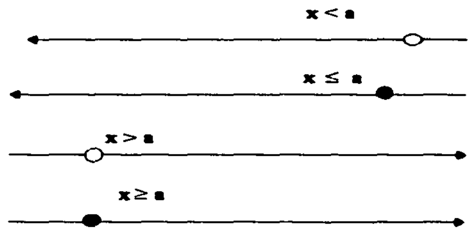
Un conjunto de números reales x, en el cual se satisfacen las desigualdades:

$x < a$

$x \leq a$

$x > a$

$x \geq a$



donde a es cualquier número real, se llama intervalo infinito.

En el lenguaje ordinario es común usar expresiones como 'cuando menos', 'no menor que', 'al menos', para la desigualdad $\geq$, o éstas otras 'a lo mas' , 'cuando mucho', 'no mayor que', para la desigualdad $\leq$. Por ejemplo:

a) "El consumo de calorías de una persona ,para el desarrollo de sus actividades en un día, es cuando menos 2000 calorías". Esto es:

$$x \geq 2000.$$

b) La estatura del mexicano promedio es cuando mucho 1.72 mts.

$$e \leq 1.72$$

c) Es aconsejable que la reserva de gasolina de un automóvil sea de 5 lts. cuando menos . ¿Cómo simbolizarías este enunciado?

d) Para que un vehículo espacial pueda superar la fuerza de atracción de la Tierra, en un viaje al espacio, es necesario que su velocidad sea al menos de 11.2 km./s. Simboliza el enunciado.

e) El tren bala más moderno de Japón puede desplazarse a velocidades de hasta 300 km./h. ¿Cómo simbolizarías esta enunciado?.

Simboliza como una desigualdad cada enunciado

1. El número de aspirantes al bachillerato que son admitidos en la U.N.A.M. es cuando mucho 35 000 estudiantes.
2. Las exportaciones mexicanas de bienes y servicios, han llegado a ser hasta de cien mil millones de dólares en un ano.
3. Para hacer unos huevos tibios, estos, deben ser puestos en agua hirviendo durante un período no menor de 90 y cuando mucho de 120 segundos.
4. La asistencia a una clase escolar admite una tolerancia máxima de diez minutos después de la hora de inicio.

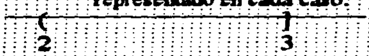
II. Dados:

a) $2 < x < 6$, b) $3 \leq x \leq 7$, c) $4 < x \leq 0$, d) $-2 \leq x < 2$, e) $x > 5$, f) $x \leq 3$, g) $x < -1$, h) $x > -2$, i) $x \geq 2$, j) $x \leq 1$, k) $x > 3$ y $x \geq 2$, l) $w \leq 5$ y $w < -1$.

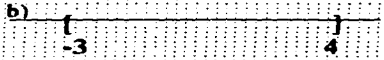
- identifica qué tipo de intervalo es
- haz una representación gráfica correcta
- expresa cada intervalo dado usando corchetes o paréntesis semicirculares según se necesite.

III. Dadas las siguientes gráficas, escribe una desigualdad que exprese el intervalo representado en cada caso.

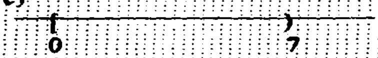
a)



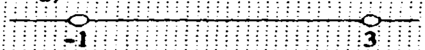
b)



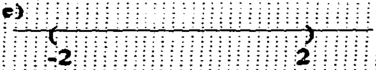
c)



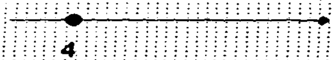
d)



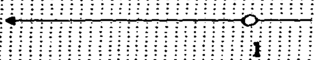
e)



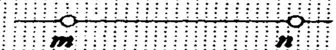
f)



g)



h)



IV. Al aplicar las reglas para desigualdades en: $15\,a\,x < -75\,a$, se ha obtenido una desigualdad equivalente. Dígase cual fue la regla de transformación usada.

Supóngase $a > 0$

a) $5ax < -25a$

b) $15ax + 6 < -75a + 6$

c) $45ax < -225a$

d) $-x > 15$

e) $15x < -750$

f) $3ax < -15a$

g) $15\,a\,(x+5) < 0$

h) $10ax < -5a(x+15)$

Ejercicios

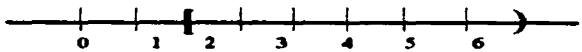
Resuélvase cada una de las desigualdades lineales dadas y trácese la gráfica de su conjunto solución

1. $3x + 5 < 2$
2. $5x - 15 \geq 5$
3. $y + 5 - 6y > 3y + 15$
4. $3(x+3) + 4 \leq x - 1$
5. $x + 4 > 6$
6. $2x + 3 \geq 3x + 2$
7. $-8x < 40$
8. $5(x+1) \leq 2x + 21$

II. En cada desigualdad, determínese si los valores de x son o no soluciones de la desigualdad.

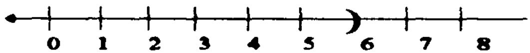
1. $3x - 12 < 0$ — Valores de x; $\{ 5, 4, -1, 4\,1/3 \}$
2. $x + 1 \leq 3x/4$ — Valores de x; $\{ 0, -4, -5, 1, -9/2 \}$
3. $0 < (x-2)/5 < 2$ — Valores de x; $\{ -1, 0, 5, 9 \}$
4. $-2 \leq (3-x)/5 < 2$ — Valores de x; $\{ 0, 1, 7, 12, 14 \}$
5. $6x + 18 \geq -6$ — Valores de x; $\{ -5, 0, 5, \sqrt{2} \}$

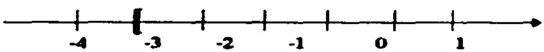
III. En cada caso, relaciona la gráfica con la desigualdad que representa



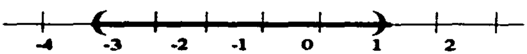
$x < 6$

$-3 < x < 2$

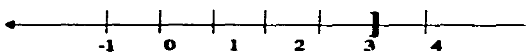




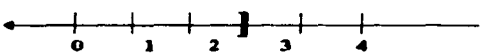
$4x - 12 \geq 0$



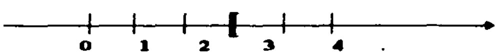
$0 \geq (x-2)/3 < 2$



$x \geq -3$



$x \leq 4$



$4x \leq 12$

IV. En cada caso traducir cada enunciado en una desigualdad.

1. Un número x es mayor que 6.

2. Un número n es menor o igual a 3.
3. Un número x no es menor que 5.
4. Un número r es a lo más ¼.
5. 4 es mayor o igual a un numero t.
6. 15 más la tercera parte de un número es menor que 25.
7. 28 menos que el doble de un número es mayor que 35.
8. 28 es cuando menos 4 o más que 2 veces un número.
9. 12 es no menor de 4 más que el doble de un número.
10. Si un estudiante obtuvo las siguientes calificaciones: 77, 76, 89, 78. ¿Qué calificación debe tener como mínimo para mantener un promedio no menor de 90?.
11. La suma de dos enteros es mayor que 16. Uno de los enteros es 9 menos que el doble de otro. ¿Cuáles son los valores mínimos para los enteros?
12. El largo de un rectángulo es de 36 cm. , Que ancho debe tener para que el perímetro sea mayor que 90 cm?
13. El trabajo que realiza un albañil se le puede pagar de dos maneras

Plan 1: $ 300 mas $12 por hora

Plan 2: $15 por hora.

Si el trabajo toma h horas ¿ Para qué valores de h el plan 1 es mejor que el plan 2?
:(Tomado de Bittinger, M. et. al ., Algebra , en Addism Wesley, Ibero americana, México, 1992). Adaptación .

SEGUNDA SESION

Objetivos específicos de la clase

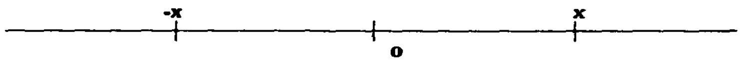
Al finalizar la clase el alumno será capaz de :

1. **Resolver una desigualdad y representarla gráficamente.**

2. **Resolver algunos problemas sencillos de inecuaciones con una incógnita**

III.4 Desigualdades con valores absolutos

Si se considera un número x positivo, o su opuesto -x en la recta real como se muestra en la siguiente figura.



Se observa que x, la DISTANCIA que hay del origen al punto x, ó -x, ya sea a la derecha o a la izquierda del origen, es la misma. Sólo si x = 0, el punto corresponde al origen. Lo anterior, es una idea geométrica de lo que se llama valor absoluto de un número real x. Se simboliza por $|x|$, y se define

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo ,

a) $|3| = 3;\quad |-3| = -(-3)$

se observa que $|x| = |-x| \geq o$.

Esto es, el valor absoluto de un número real siempre es no negativo (es decir, mayor o igual que cero).

Por ejemplo, si discutes y analizas el siguiente problema, ¿cómo lo resolverías?. En una casa de fabricación de aparatos eléctricos, se utiliza un tipo de alambre cuyo diámetro requerido es de 2mm.. Se ha detectado, que el que se emplea, no tiene un diámetro uniforme, pues en unos tramos es mas grueso que en otros. Entonces se ha dispuesto que en adelante solo se adquirirá, un alambre cuyo diámetro admita un margen no mayor de .04mm.. ¿Cuál será el diámetro que puede tener el alambre para que no sea rechazado y pueda ser empleado en la fabricación de aparatos electrónicos?

Ahora si se consideran la

ECUACION y las **DESIGUALDADES**

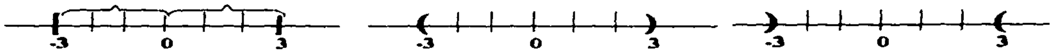
$|x| = 3$: Conjunto de valores de x que están a tres unidades de cero

$|x| < 3$: Conjunto de valores x distantes a menos de tres unidades del cero

$|x| > 3$: Conjunto de valores x distantes a mas de tres unidades del cero

GRAFICAMENTE

$x = -3$ ó $x = 3$ $\qquad$ $-3 < x < 3$ $\qquad$ $x < -3$ ó $3 < x$



ACTIVIDADES

Dadas las siguientes desigualdades:

a) $|x| < 5$ $\qquad$ c) $|x| \leq 4$ $\qquad$ e) $|x| < k$

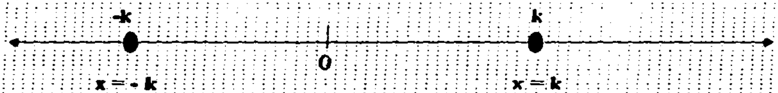
b) $|x| > 2$ $\qquad$ d) $|x| \geq 0$ $\qquad$ f) $|x| \geq k$

1. Describir verbalmente qué significa
2. ¿Puedes hacer una gráfica que las represente? *¡Adelante!*

En general si en lugar de 3 se considera k, se tienen los siguientes ***significados del valor absoluto.***

La igualdad

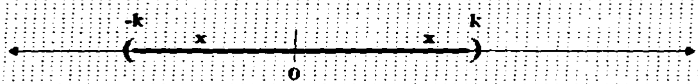
$|x| = k$, (con $k \geq 0$), la igualdad se cumple solo con $x = k$ ó $x = -k$, dado que son los únicos puntos cuya distancia *al origen es k exactamente*. Ver figura.



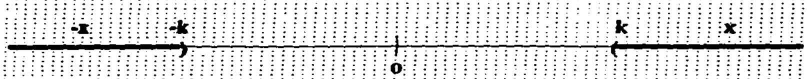
La igualdad $|x| = k$ con $k < 0$ no tiene solución porque el primer miembro de la igualdad, $|x|$, nunca es negativo, recuérdese que: si $k < 0$,

$$/k/ = -(-k) = k > 0$$

Si $|x| < k$ con $k > 0$, entonces $-k < x < k$. Gráficamente



Si $|x| > k$, entonces $x > k$ ó $x < -k$. Gráficamente



Son los puntos o valores de x, cuya distancia al origen es mayor que k. Son los puntos que están a la derecha de k o a al izquierda de -k.

Las dos últimas propiedades son igualmente válidas con el símbolo de la relación de orden mayor o igual que ó menor o igual que, es decir:

Si $|x| \leq k$ y $k > 0$, entonces $-k \leq x \leq k$ | **Si, $|x| \geq k$ y $k>0$, entonces $x \leq -k$ ó $k \leq x$**

¿Qué tal si representas gráficamente cada una de las relaciones anteriores? ¡Adelante !

Ejemplo 1. Resolver la desigualdad y trazar su gráfica.

$$|x-7| < 3$$

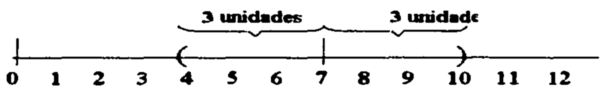
Solución

$\lvert x-7 \rvert < 3$	Desigualdad original.
$-3 < x - 7 < 3$	Desigualdades equivalentes.
$-3 + 7 < x - \cancel{7} + \cancel{7} < 3 + 7$	Sumando 7 en todos los miembros.
$4 < x < 10$	Conjunto solución.

El conjunto solución está así formado por el conjunto de números reales x los cuales, son menores que 10 y mayores que 4. Esto puede ser expresado como:

(4,10)

la gráfica



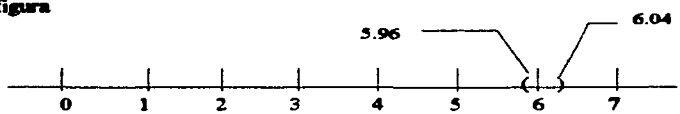
Ejemplo 2. Resolver la desigualdad y trazar su gráfica.

$$|3 - x/2| < 0.02$$

Solución

$\|3 - x/2\| < 0.02$	**Desigualdad original.**
$-0.02 < 3 - x/2 < 0.02$	**Desigualdades equivalentes.**
$-3.02 < -x/2 < -2.98$	**Se resta 3 en ambos lados.**
$6.04 > x > 5.96$	**Se multiplica por -2 y se invierten las desigualdades.**

Por tanto, el conjunto solución es el intervalo(5.96, 6.04), representado en la siguiente figura



Ejemplo 3 Resuélvase la desigualdad y luego trácese su gráfica.

$$|x+2| \geq 5$$

Solución:

$\|x+2\| \geq 5$	**Desigualdad original.**
$x + 2 \leq -5$ ó $x + 2 \geq 5$	**Desigualdades equivalentes.**
$x + 2 - 2 \leq -5 - 2$ $x + 2 - 2 \geq -5 - 2$	**Se resta 2 a todos los miembros.**
$x \leq -7$ ó $x \geq 3$	**Simplificando.**

El conjunto solución, está dado por todos los números reales menores o iguales que -7 o mayores o iguales que 3. El conjunto solución expresado en términos de intervalos es:

$$(-\infty, -7] \cup [3, +\infty).$$

Donde la unión o combinación de los dos intervalos que forman el conjunto solución, está dada por el símbolo $\cup$.

Ejemplo 4. Resolver y trazar la gráfica de la desigualdad:

$$|5x+2| \leq x-1$$

Solución:

$\|5x+2\| \leq x-1$	Desigualdad original.
$-(x-1) \leq 5x+2 \leq x-1$ y $x-1 \geq 0$	Desigualdades equivalentes.
$-x+1 \leq 5x+2 \leq x-1$ y $x-1 \geq 0$	Se quitó el paréntesis en el primer miembro
$-x+1-2 \leq 5x \leq x-1-2$ y $x-1 \geq 0$	Se resta 2 en las tres partes.
$-x-1 \leq 5x$ y $5x \leq x-3$ y $x-1 \geq 0$	Se simplifica en la primera y la tercera parte.
$-x-1+x \leq 5x+x$ y $5x-x \leq x-3-x$	Se suma x en las tres partes.
$-1 \leq 6x$ y $4x \leq -3$	Se dividen entre 6 las tres partes y se simplifica

$-1/6 \leq x$ y $x \leq -3/4$. Su solución es el conjunto $\varnothing$. Reflexiona junto con tus compañeros y traten de explicarse ¿porqué?.

Ejemplo 5. Una compañía C renta un carro mediano por \$450.00, a la semana sin cargo extra por kilometraje recorrido. Otro automóvil similar, puede ser rentado en otra compañía T por \$300.00 a la semana, mas 40 centavos por kilometro recorrido. ¿Cuántos kilómetros deberá recorrer una persona, para que en la compañía C, se pague menos que en la compañía T?.

solución:

¿Que es lo que se pregunta en el problema ?

El número de kilómetros que debe recorrer una persona en un automóvil de la compañía C, de manera que la renta sea menor que la compañía T.

datos k = número de kilómetros recorridos en una semana.

costo por semana en la compañía C \$450.00

costo por semana en la compañía T \$300.00 + .40 p/km.

Como se requiere que la renta en la compañía C sea menor que la renta en la compañía T; entonces

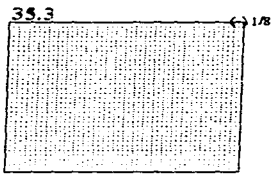
$450 < 300 + .40k$ Desigualdad original.

$450 - 300 < 300 + .40k - 300$	se le restan 300 a ambos miembros y es simplifica
$150 < .40k$	Simplificado.
$150/.40 < .40/.40k$	se dividen ambos entre .40 y se simplifica
$\therefore\ 375 < k$	Se simplifica.
$\therefore\ k > 375$	

Entonces, el automóvil de la compañía C es mas barato si la persona viaja mas de 375 kilómetros.

Ejemplo 6 Al medir el lado de un cuadrado, la lectura indica 35.3 cm. Con un posible error de 1/8 de cm. Hállese el intervalo que contenga el área del cuadrado.

Solución



Supóngase que x es el lado del cuadrado entonces la diferencia mayor o menor del lado es de 1/8 puede ser expresada en términos de un valor absoluto, es decir;

$\lvert x-35.3 \rvert \leq 1/8$	desigualdad original
$-1/8 \leq x - 35.3 \leq -1/8$	desigualdades equivalentes
$-1/8 + 35.3 \leq x - 35.3 + 35.3 \leq -1/8 + 35.3$	se suma 35.3 en las tres partes
$35.175 \leq x \leq 35.425$	Simplificado.

Entonces el lado del cuadrado es mayor o igual que 35.175, o menor o igual que 35.425

De ese modo, el área del cuadrado estará contenida en el intervalo

$$[1237.280\text{cm.}^2 , 1254.930\text{cm.}^2 ,]$$

Para resolver en clase

1. La estatura promedio h, de dos terceras partes de los habitantes de cierto poblado, satisfacen la desigualdad:

$$\left| \frac{h - 68.5}{2.7} \right| \leq 1$$

en donde h se mide en pulgadas. Determinar el intervalo en la recta real en que se encuentran dichas estaturas.(tomado del Larson. P.139)

2. Humedad relativa. Cierto aparato electrónico debe operar en un ambiente con humedad relativa h en el intervalo definido por,

$$|h - 50| \leq 30$$

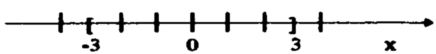
Cuáles son las humedades relativas mínima y máxima de la operación de ese aparato?.(ibid)

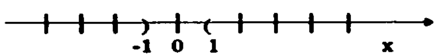
Ejercicios

I. Resolver las siguientes desigualdades y en cada caso hacer su representación gráfica.

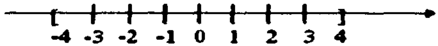
0. $|x-4|=15$
1. $|x-2|<2$
2. $|x-8|=0$
3. $|x|\leq 4$
4. $|x|>1$
5. $|4x+3|<15$
6. $|x-1|>1$
7. $\{x \mid 2x-4(1-3x)<6(3x+2)$
8. $|x-8|=-1$
9. $|2-x|\leq 6$
10. $|5w-4|\geq 7$
11. $|x-10|<6$
12. $|6x-1|<3x+2$
13. $|8-(4w+5)|<9$
14. $|2x+9|>x+3$
15. $\left|\dfrac{z+1}{z}\right|\geq 4$

En cada caso, usar la notación de valor absoluto, para definir el intervalo o par de intervalos dados en la recta real.

16. 

17. 

18.

19. 

20. hallar todos los números enteros cuya distancia al 3 sea mayor o igual a 3.
21. El valor absoluto de la suma de dos números enteros pares consecutivos, es menor o igual que 5. Hallar los números
22. Hallar todos los números enteros cuya distancia al 1495 es 34
23. Se desea construir un diseño gráfico limitado por dos círculos concéntricos. Se requiere que el área destinada no sea menor de 225 cm^2 ; ¿Qué radio debe tener el círculo más chico, si se sabe que el radio del círculo exterior es de 25 cm.?
24. Si se compra una bolsa de naranjas a $2.50 el kg., la cual pesa 6.5 kg., y la báscula en que se pesó la bolsa, tiene una precisión de $\frac{1}{4}$ kg. ¿Cuánto es lo que se pudo haber cobrado de más o de menos?.
25. Los estudiantes de un grupo escolar deben recorrer un itinerario que comprende varios lugares de interés histórico, en una práctica sobre la materia de Historia Prehispánica. El costo total del viaje, en el que se incluye transporte, dos alimentos diarios y hospedaje, es de $24,000.00. Los estudiantes se han dado cuenta de que si se integran otros cuatro compañeros más, entonces, cada uno pagará $200.00 menos. Para que esto suceda, ¿Cuántos estudiantes deberán ir a la práctica?, ¿Cuál es el costo que habrá de pagar entonces cada estudiante?, ¿Cuánto hubiera pagado cada estudiante, de no haber incorporado a los cuatro compañeros más?, ¿Cuánto pagaría cada estudiante, si en lugar de cuatro, se incorporan 6 estudiantes?.

TERCERA SESION

Objetivos específicos de la clase

Al terminar la clase, el estudiante será capaz de:

- **Determinar y representar gráficamente el conjunto solución de una inecuación lineal de primer grado en una variable.**

- **Determinar y representar gráficamente el conjunto solución de una inecuación lineal o de primer grado en dos variables.**

III.5. Inecuaciones o desigualdades lineales

En los siguientes apartados serán introducidas ideas elementales, indispensables para el estudio de este teoría, las desigualdades contendrán una o dos variables **todas de primer grado** y por eso serán denominadas DESIGUALDADES LINEALES.

Ya antes se trataron desigualdades similares a esta ,
$4x+8>0$, la cual es una desigualdad lineal en una sola variable x.
Si la resolvemos,

$$4x + 8 - 8 > 0 - 8$$
$$4x > -8$$
$$\frac{4x}{4} > -\frac{8}{4}$$
$$x > -2$$

y entonces se tiene que el conjunto solución (es decir, el conjunto de valores que satisfacen la desigualdad) es

$\{x \mid x > -2\}$. ¿Quieres ver cuando x = -1, -0.9, 0, 0.1, 1, 2, 3]?. ¡Adelante! . Como puedes observar, se trata de un intervalo infinito. ¿Quieres representarlo gráficamente?. ¡Adelante !

Dos o más desigualdades

consideremos las siguientes dos desigualdades:

(1) $4x + 8 > 0$

(2) $x - 2 < 0$

Como se sabe la primera desigualdad tiene como conjunto solución:

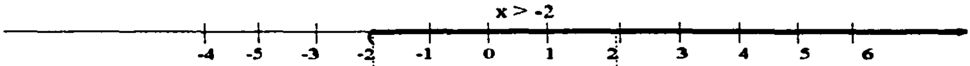
$\{x \mid x > -2\}$.

A la vez, que el conjunto solución de la segunda, es:

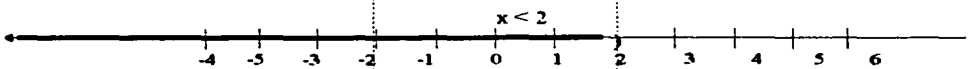
$\{x \mid x < 2\}$

¿Cuál será entonces el conjunto solución de las desigualdades (1) y (2)?

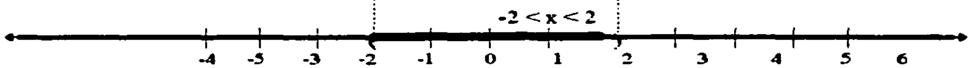
De la (1) es



De la (2)



de (1) y (2)



En la tercera gráfica puede observarse que el conjunto solución de las desigualdades (1) y (2) anteriores esta dada por el intervalo $-2<x<2$, el cual está así formado por todos los puntos de el <u>conjunto de intersección</u> de los conjuntos solución que satisfacen ambas desigualdades. Se dice que estas son soluciones simultáneas de las desigualdades (1) y (2).

Procedimiento en forma parecida para las tres desigualdades siguientes :

(1) $4x+8 >0$

(2) $x-2< <0$

(3) $4x+2 >0$

a) Hállese el conjunto solución de cada una

(1) x

(2) x

(3) x

b) ¿Cuál es el intervalo de la intersección de los tres conjuntos solución?

$? < x < ?$

c) Hágase una representación gráfica del intervalo o conjunto de valores x que satisfacen simultáneamente las desigualdades (1) (2) y (3).

Ejercicios

En cada inciso determínese el conjunto de soluciones simultáneas del sistema de desigualdades, y hágase la representación gráfica.

a) $x > 0$, $x - 2 < 0$

b) $x > 0$, $x - 2 \leq 0$

c) $x \geq 0$, $x - 2 < 0$

d) $x \geq 0$, $x - 2 \leq 0$

e) $x > 0$, $x - 2 < 0$, $x - 3 < 0$

f) $x - 3 \geq 0$, $x - 1 < 0$

g) $-x + 2 \leq 0$, $x - 5 \leq 0$

h) $x - 5 \geq 0$, $x - 5 \leq 0$

Desigualdades en dos variables

En principio, considérese la gráfica de la recta

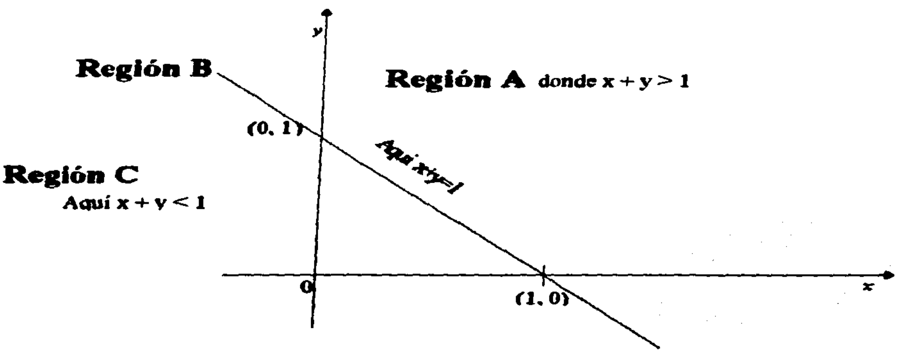
$$x + y = 1$$

para esto, si hacemos $x=0$, se encontrara que

$$0+y=1 \therefore y=1$$

y entonces $(1, 0)$ es un punto de la recta. Igualmente si se hace $y=0$

$x+0=1$ resulta $x=1$, y asi $(0, 1)$ y $(1, 0)$, son dos puntos de la recta. Después de ser localizados en el plano cartesiano, obtendremos la gráfica de la ecuación de la recta, como se muestra en el siguiente diagrama.



Sabemos ya, que para cualquier valor de x se obtiene un valor de y, y entonces el conjunto de todas las parejas de valores (x, y) así obtenidas, son puntos de la recta. Tal conjunto es el conjunto solución de la ecuación $x + y = 1$ *(ver figura).*

La gráfica como puede ser observada divide al plano cartesiano en tres regiones:

Región A
Formada por los puntos arriba o a la derecha de la recta $x + y = 1$.

Es el semiplano determinado por $x + y > 1$

Región B
Formada por los puntos de la recta $x + y = 1$ propiamente.

Región C
Formada por los puntos abajo o a la izquierda de la recta $x + y = 1$.

Es el semiplano determinado por $x + y < 1$

Ahora, si se supone la desigualdad

(1) $x + y \neq 1$

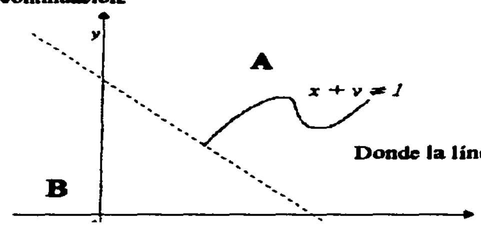
esto significa, considerar estas dos posibilidades:

(2) $x + y > 1$ (3) $x + y < 1$

¿Cómo es la gráfica de cada una de las relaciones (1), (2) y (3) anteriores?

Veamos:

La relación (1), $x + y \neq 1$, corresponde al conjunto de puntos que no son de la recta $x+y=1$, puede ser el conjunto del semiplano A o los puntos del semiplano B, pues cualesquiera de esos puntos satisface la desigualdad anterior, cuya gráfica se muestra a continuación.



Donde la línea punteada representa la desigualdad

$x + y \neq 1$

Por ejemplo, que tal si en una gráfica parecida, verifica cuáles de los siguientes puntos satisfacen la desigualdad $x + y \neq 1$:

(0, 2), (1, 3), (-1, 1), (-1, 2), (-1, -2), (-1, -1), (2, 1), (2, -1), (3, 3), (0, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 1).

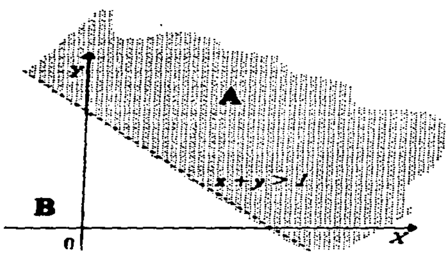
- **¿Cuáles de esos puntos se localizan en la región A?**
- **¿Cuáles en la región B?**
- **¿Cuáles no se localizaron, ni en la región A, ni en la B?**
- **Proporciona 4 puntos que se localicen en la región A, 4 en la B y 4 que no estén ni en A ni en B.**

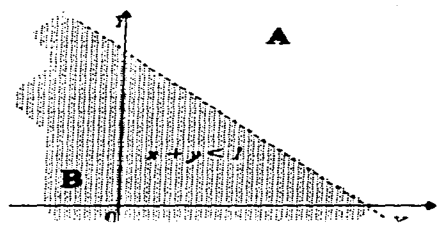
Ahora, considérense las otras dos posibilidades:

$x + y > 1$ — **Y** — **$x + y < 1$**

Se trata de desigualdades estrictas

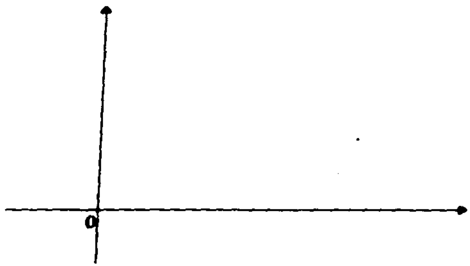
¿Cuál es el semiplano o región de soluciones de cada desigualdad?

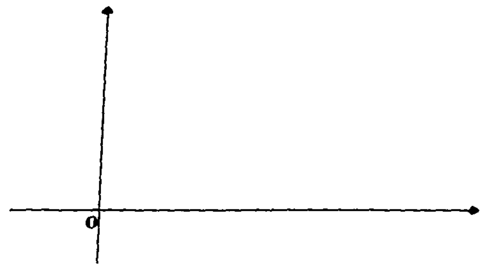




Explica porqué piensas que los anteriores son los semiplanos que representan las regiones $x + y > 1$ y $x + y < 1$ respectivamente.

¿Puedes hacer una gráfica parecida, que represente cada desigualdad $x + y \leq 1$ y $x + y \geq 1$?. ¡Adelante!





Ya antes, en otra parte, se estudio una ecuación de la forma:

$$Y = a\,x + b$$

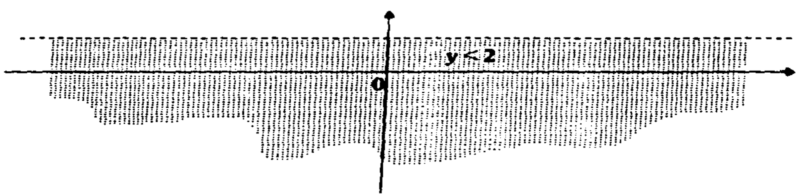
por ejemplo, una ecuación de ese tipo es;

$$y = 2$$

en la que a=0 y b=2. Si se considera la desigualdad

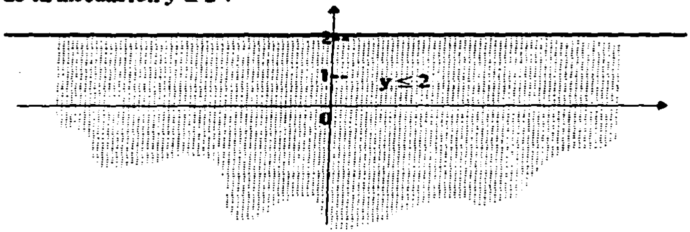
$$y < 2 \qquad \text{¿ Cuál será su gráfica ?}$$

veamos:



resulta ser el conjunto de ordenadas, y, menores que 2, excluyendo todos los puntos de la recta y=2.

¿Y la gráfica de la inecuación $y \leq 2$?



Son todos los puntos cuyas ordenadas son iguales o menores que dos, es decir $y \leq 2$ <u>incluyendo</u> los puntos de la recta $y=2$.

Una buena práctica es que hagas la gráfica de las inecuaciones:

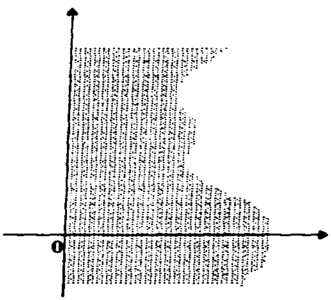
$x<3$ y $x \leq 3$

Ahora vamos a considerar el sistema de inecuaciones

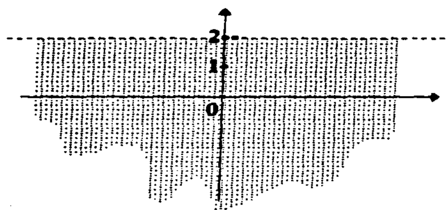
$x \geq 0$ y $y \leq 2$

¿ Cómo será la gráfica de este conjunto de inecuaciones ? veamos:

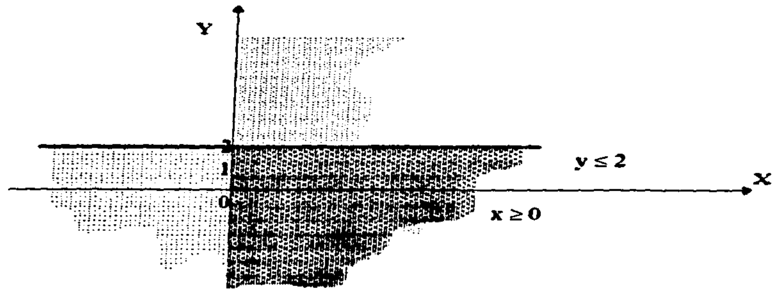
Para $x \geq 0$



Para $y \leq 2$



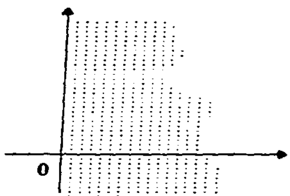
Si se presentan ambas gráficas en un mismo plano,

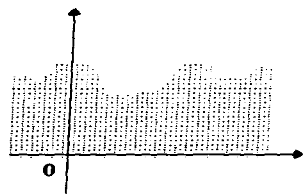


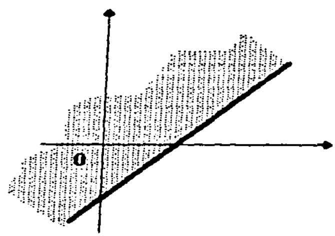
Ahora, haremos la gráfica del conjunto de desigualdades

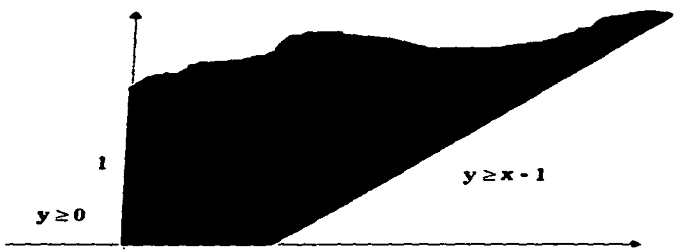
$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y \geq x - 1$$

Primero haremos la gráfica de cada desigualdad.









Como se ve, la intersección de las regiones o semiplanos define la región de soluciones del conjunto de desigualdades. ¿Cuáles serán cinco puntos que satisfagan el conjunto de desigualdades y cuáles serán tres puntos que no estén en la región de soluciones?. ¡Adelante!.

Un problema: Una industria de partes electrónicas tiene en la fabricación de un accesorio, unos costos fijos diarios de $ 240.00 más un gasto de $ 75.00 por concepto de mano de obra y otros materiales que emplea en la manufactura de cada accesorio. Si el accesorio es colocado en el mercado a $ 135.00, interesa saber cuántos accesorios por día, por lo menos, deben ser producidos y vendidos para evitar pérdidas.

Consideraciones previas

<u>¿Qué se pregunta?</u>

¿Cuántos accesorios diarios deben ser producidos y vendidos sin que haya pérdidas?

<u>¿Qué datos se tienen ?</u>

- **Costos fijos diarios de $ 240.00**
- **Costos de mano de obra y otros insumos $ 75.00**
- **Precio de venta del accesorio en el mercado $ 135.00**

<u>¿Cómo relacionar los datos con lo que se pregunta?</u>

SOLUCION:

Supóngase que x es el número de accesorios que se producen por día. Entonces el costo total diario de producir x accesorios es:

Costo total = costos fijos + costos variables

O sea Costo total = 240 + 75x

Los ingresos por concepto de ventas son

Ingresos = 135x

se tiene el interés de que no haya pérdidas, entonces los ingresos deben ser cuando menos igual a los costos; esto es

$$135x \geq 240 + 75x$$

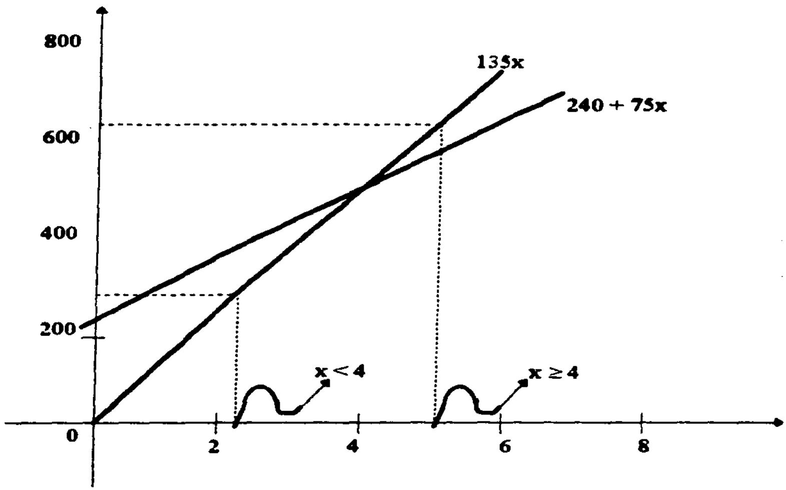
de donde resulta que

$$135x - 75x \geq 240$$

$$60x \geq 240$$

$$\therefore\ x \geq 4$$

Esto quiere decir que para que no haya pérdidas deben ser vendidos cuando menos cuatro accesorios diarios ,

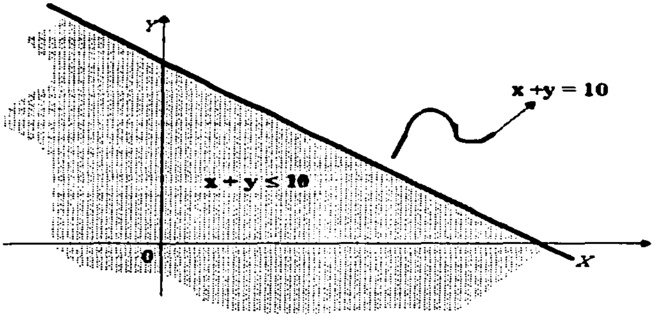


Puede observarse, que si $x \geq 4$, el valor de los ingresos 135x es mayor que el de los costos 240 + 75x, lo cual significa que hay beneficios.

Cuando $x < 4$, el valor de los ingresos $y = 240 + 75x$ es inferior al de los costos 135x, esto es, los ingresos son menores que los costos, así que hay pérdidas.

Ejemplo: Dibujar la región que está debajo de la recta.

$$x + y = 10$$



Como se puede observar, primero se traza la gráfica de la recta, puesto que se pide la región que está sombreada debajo de, o a la izquierda de la recta, la cual viene a ser frontera; una frontera superior de tal región dada por la recta $x + y = 10$, y entonces, la región que se pide, está formada por todos los puntos a partir de, e incluyendo los de la recta

$$x + y = 10$$

más los puntos que están debajo de (o a la izquierda) de ella, (estos últimos comprenden a la desigualdad $x + y < 10$). En conjunto forman la desigualdad

$$x + y \leq 10$$

Oye, ahora procediendo de la misma manera, dibuja tú la región que esta arriba de la misma $x + y = 10$. Adelante!

CURTA SESION

Objetivos específicos de la clase

Al terminar la clase, el estudiante será capaz de:

- **Determinar gráficamente la región de soluciones de un sistema de inecuaciones lineales 2x2.**
- **Resolver gráficamente algunos problemas sencillos de optimización que dan origen a un sistema de desigualdades lineales.**

Ejercicios

1. En cada caso decir si la gráfica del conjunto solución es:

- **un punto,**
- **una semirecta,**
- **un segmento,**
- **una recta,**
- **un conjunto vacío, ó**
- **un semiplano.**

a) $x - 2 > 1$ **c)** $-1 \leq x \leq 3$ **e)** $x = 2$

b) $x + 5 < x$ **d)** $x - 3 \leq 5$ **f)** $|x| = -1$

2. Describa que regiones determina la recta $y = 3$.

3. Hacer la gráfica del conjunto solución de cada desigualdad.

a) $y < x$ **c)** $-y < -2x + 4$ **e)** $-x < 0$

b) $3x + y > 0$ **d)** $x + y \leq 2$

III. 6 Dos o mas desigualdades con dos variables

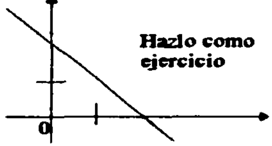
Vamos a considerar el siguiente conjunto de dos desigualdades que contienen dos variables, por ejemplo

$$(1)\ x + y > 2$$
$$(2)\ x - y > 0$$

¿Cuál será el conjunto solución de este sistema de desigualdades?

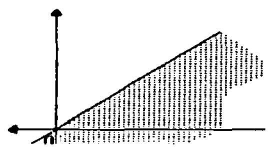
En páginas anteriores, al graficar conjuntos de dos o más desigualdades, se procedió a realizarlo, primeramente, graficando cada desigualdad, y luego, se hizo la gráfica de todas las desigualdades en un solo plano. ¿Que tal si procedemos de la misma forma? Veamos:

Para $x + y > 2$ ¿cuál será?

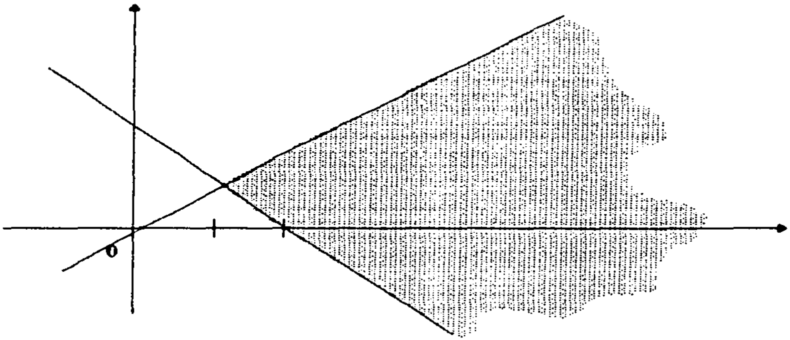


Hazlo como ejercicio

Para $-x + y > 0$



Ahora bien, la región de soluciones simultáneas de las dos desigualdades



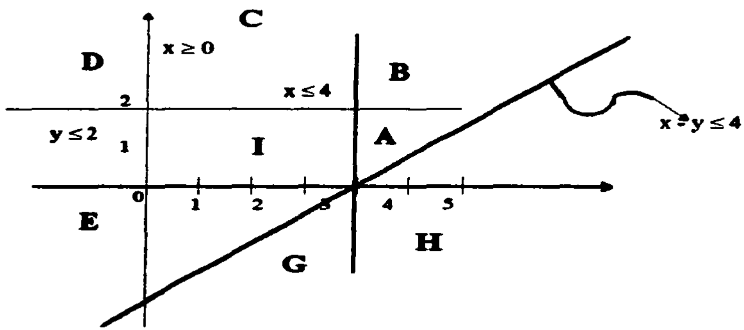
como puede observarse en la figura anterior, la región más obscura, la intersección de las dos regiones anteriores que corresponden a las desigualdades

$x + y > 2$ y $x + y > 0$ respectivamente, da la solución del sistema.

es una práctica sana, si proporcionas tres puntos que se localicen en la región de soluciones, y qué tal otros tres puntos que estén fuera de la región de soluciones. ¡Adelante!

Ejemplo. Dado el siguiente sistema de desigualdades

$$x \geq 0, \quad x \leq 4, \quad y \leq 2, \quad x - y \leq 4$$



Puede observarse cómo las cuatro desigualdades dividen al plano en nueve regiones nominadas de la A a la I. En la región anterior por ejemplo, los puntos de la región E satisfacen o son solución de las desigualdades $x - y \leq 4$ $x \leq 4$, $y \leq 2$. En las regiones C, I, G, sus puntos son solución de las desigualdades $x \geq 0$, $x \leq 4$. ¿Puede decirse lo mismo de la región D ó de la H?, ¿por que?

Oye cuál consideras entonces que sea la región de soluciones del sistema formado por las cuatro desigualdades? Explica en tus propias palabras por que?

ACTIVIDAD 1

Dado el siguiente sistema de tres igualdades

(1) $y = x + 1$

(2) $x + 2y = 8$

(3) $y = 5$

- Primeramente, haz la gráfica de las tres líneas en un mismo plano.
- Muestra que las lineas dividen al plano en siete regiones, y nominalas de la A a la G.

ACTIVIDAD

Ahora, si a cada igualdad anterior se considera respectivamente como una desigualdad de la forma:

(1) $y \geq x + 1$

(2) $2y \geq - x + 8$

(3) $y \leq 5$

- Hágase la gráfica de cada desigualdad en un plano.
- Después, hacer la gráfica de las tres desigualdades en un mismo plano
- Determínese la región de soluciones del sistema de desigualdades.
- Proporcionar cinco puntos de la región de soluciones, y cinco puntos que no pertenezcan a la región de soluciones.

Con los elementos estudiados hasta aquí, se comenzarán a resolver algunos problemas sencillos, dentro de la gran diversidad de estos, que pueden ser resueltos mediante sistemas de desigualdades, en una rama de las matemáticas llamada Programación Lineal. Este material, es de carácter introductorio y ha sido pensado y diseñado, fundamentalmente, para ayudar al estudiante. Para esto, se resolverán algunos problemas sencillos usando un método geométrico.

III.7 Aplicaciones

Ejemplo 1. En una pequeña industria se producen dos clases de artículos A y B, operando sus máquinas 3 turnos diarios de 8 hrs. La producción del artículo A necesita 3 hrs., de trabajo de la máquina M_1 y 6 hrs. de la máquina M_2. Para elaborar el artículo B, se requieren 6 hrs., de trabajo en la máquina M_1 y 4 hrs. de trabajo en la máquina M_2. El dueño de la fábrica, sabe que el artículo A deja una ganancia de \$8.00 por artículo y de \$6.00 el artículo B, entonces desea saber cuántos artículos debe producir del artículo A y cuántos del artículo B, de manera que la ganancia sea máxima.

SOLUCION

¿Qué se pregunta?

Como puede verse, la pregunta es: cuánto debe producirse de artículos A y B respectivamente, de modo que se tenga la máxima ganancia.

Supóngase que x es el número de artículos A que deben ser producidos, e igualmente, y, el número de artículos B que deben ser producidos.

¿Qué datos se tienen?

Se tiene el tiempo que se emplea en cada máquina para producir cada artículo A y B respectivamente, y las ganancias que reporta la venta de cada artículo A y B.

Una forma conveniente de relacionar las incógnitas con los datos, es arreglarlos en un cuadro, por ejemplo

Lo que se desea producir

RECURSOS: con qué se cuenta para producir — Horas—máquinas

Máquinas	Artículos A	Artículos B	Se dispone
M_1	3hrs	6hrs	24hrs
M_2	6hrs	4hrs	24hrs
Ganancias por artículo	\$8	\$6	

Esto, nos ayudará de manera interesante, a construir nuestro sistema de desigualdades y algo más. Teniendo en mente el significado de las incógnitas x, y:

1.- Las incógnitas deben ser no negativas, es decir

$$x \geq 0 \qquad y \qquad y \geq 0$$

2.- El número de horas de M_1 utilizadas para producir los artículos x y y debe de ser cuando mucho 24hrs. , esto es

$$3x + 6y \leq 24$$

igualmente, el número de horas de la maquina M_2 para producir los artículos x, y debe ser a lo más 24hrs. , es decir

$$6x + 4y \leq 24$$

3.- Finalmente siendo $8.00 y $6.00 la ganancia que reporta cada articulo A y B respectivamente, entonces la ganancia total es igual a la suma de las ganancias de los artículos x y y , es decir

$$8x+6y= \textit{Ganancia total}$$

Resumiendo todo el proceso anterior, se tiene entonces el siguiente sistema de desigualdades

(1) $x \geq 0$
(2) $y \geq 0$
(3) $3x + 6y \leq 24$
(4) $6x + 4y \leq 24$

MODELO MATEMATICO DEL PROBLEMA.

y una ecuación de ganancia (o beneficio)

$$G = 8x + 6y$$

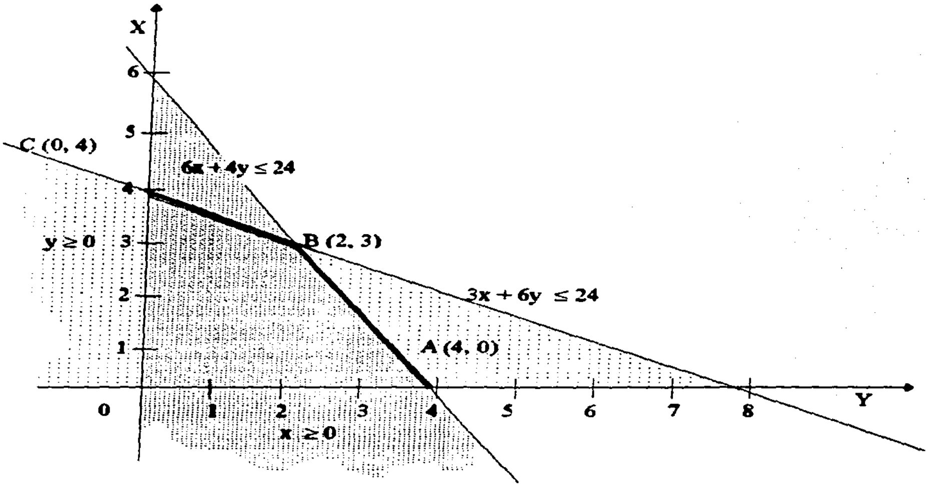
¿Cómo resolverlo?

(1) Vamos a emplear lo aprendido hasta aquí. Si se despeja *y* en las desigualdades (3) y (4) anteriores

(3) $y \leq 4 - \frac{1}{2} x$

(4) $y \leq 6 - \frac{3}{2} x$

como y es menor o igual, esto significa que en cada desigualdad, la región de soluciones está abajo de cada frontera, como se muestra en la siguiente figura



la región de soluciones es toda la zona más obscura, la cual incluye todos los puntos de los segmentos AB y BC de la frontera de la región. Los puntos A, B, C, se llaman VERTICES de la región, y a ésta, se la denomina, región poligonal. La cuestión de interés aquí, es determinar para qué valores de x y y, la ecuación de ganancia alcanza su valor máximo.

La región de soluciones contiene una infinidad de puntos, ¿En cuál de todos ellos se alcanza el máximo?

Si se sustituyen los valores más pequeños, esto es, cuando $x = 0$, $y = 0$, en la función de ganancia, se tiene

$$G = 8x + 4y = 8\ (0) + 6\ (6) = 0 + 0 = 0$$

la ganancia es cero.

Cualquier otro punto de la región de soluciones, que se tome al sustituirlo en la ecuación de ganancia, dará la cantidad... pero, ¿será la máxima ?

Una de las virtudes del método gráfico, es que nos permite simplificar enormemente un proceso interminable de sustitución de puntos en la función de ganancia. El método "nos aconseja" tomar en cuenta sólo los vértices de la región de soluciones , en este caso los vértices A, B y C cuyas coordenadas podemos determinar en la gráfica. Si vemos la figura anterior

A(4, 0), B(2, 3) y C(0, 4)

Sustituyendo cada vértice en la ecuación de la ganancia.

En A(4, 0)

$$\underline{G = 8 \times 4 + 6 \times 0 = \$\,32}$$

En B(2, 3)

$$\underline{G = 8 \times 2 + 6 \times 3 = 16 + 18 = \$34}$$

En C(0, 4)

$$\underline{G = 8 \times 0 + 6 \times 4 = 0 + 16 = \$\,24}$$

De acuerdo a los resultados obtenidos, se concluye que la máxima ganancia se alcanza en el vértice A(2,3), cuando:

$$G = \$34,$$

lo que quiere decir entonces, que sólo convendría producir $x = 2$ artículos A y $y = 3$ artículos B. Al determinar el valor de la ecuación de la ganancia,

$G = \$34$, podemos expresar la ecuación como

$$34 = 8x + 6y$$

Como ejercicio, grafica esta ecuación en la figura anterior, observa y describe qué característica particular presenta.

Ejemplo 2. En una pequeña fábrica de muebles se producen sillas y mesas, para esto se dispone de 200 pies de madera tipo A y de 300 pies de madera tipo B. La fabricación de una silla requiere de 5 pies de madera tipo A y 10 pies de madera tipo B. La elaboración de una mesa requiere de 20 pies de madera tipo A y 1115 del tipo B. La venta de una silla en

el mercado, arroja una ganancia de \$50.00, y de \$80.00 la venta de una mesa. Se requiere saber cuántas sillas y mesas deben ser producidas a fin de que logren el máximo beneficio.

Solución:

La pregunta: ¿qué cantidad de sillas y mesas, respectivamente deben ser producidas para lograr el beneficio máximo?.

<u>Supóngase:</u>

x = número de sillas que deben ser producidas,

y = número de mesas que deben ser producidas,

éstas, son las incógnitas del problema.

<u>Datos disponibles:</u>

Las cantidades de madera tipo A y tipo B empleadas en la elaboración de una mesa y una silla.

La ganancia que produce la venta en el mercado de una silla y una mesa respectivamente.

Para relacionar las incógnitas con los datos del problema, se hará un cuadro preparatorio el cual, es de gran ayuda para construir más fácilmente el modelo matemático del problema dado.

Recursos con que se cuenta

		Que se produce		Disponibilidad de recursos
		Sillas x	Mesas y	
Tipos de madera	A	5	20	200 pies
	B	10	15	300 pies
	Beneficio	\$50	\$80	

Entonces el modelo matemático es

(1) $x \geq 0$

(2) $y \geq 0$

Estas condiciones importantes significan que x y y son cero, sólo cuando NO HAY PRODUCCION, en caso contrario, habrían de ser mayores que cero. Por cierto, se llaman condiciones de no negatividad de las variables

(3) $5x + 20y \leq 200,$

(4) $10x + 15y \leq 300,$

de tal manera que el beneficio (o ganancia) sea

Max $G = 50x + 80y$

Para resolverlo gráficamente, vamos a graficar las desigualdades del modelo matemático anterior. Para ésto, las desigualdades lineales se consideran provisionalmente como igualdades o ecuaciones para establecer la frontera del semiplano o región que representan.

Así, en la desigualdad

(3) $5x + 20y \leq 200$

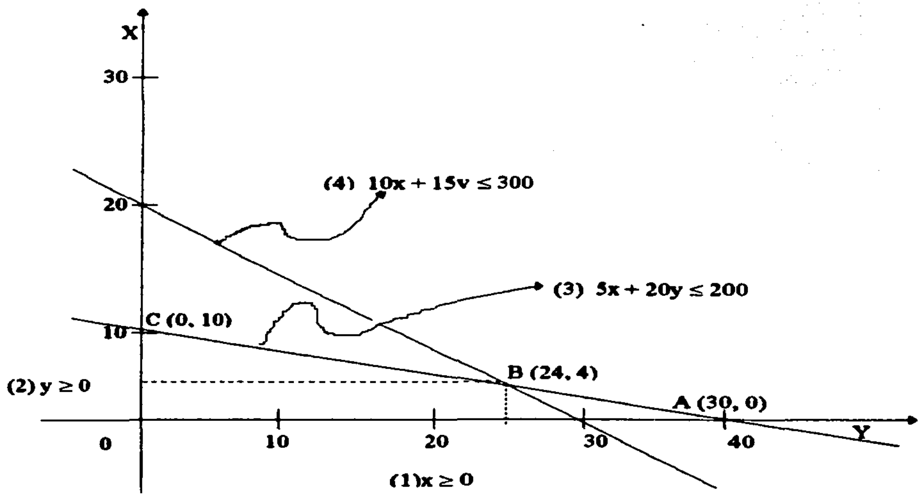
si $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 10$; $(0, 10)$

si $y = 0$ $\rightarrow$ $x = 40$; $(40, 0)$

en (4) $10x + 15y \leq 300,$

si $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 20$; $(0, 20)$

si $y = 0$ $\rightarrow$ $x = 30$; $(30, 0)$



- **Determinar la región de soluciones ya sea sombreándola o cuadriculándola.**
- **Sustituir las coordenadas de cada vértice en la función de beneficio, y establecer :**

a) El valor de la función en cada vértice

b) ¿En cuál vértice, la función alcanza su máximo y cuál es su valor?

c) ¿Qué significado tiene el valor de la incógnita x, y el valor de la incógnita y respectivamente?

d) Traza la gráfica de la función de beneficio, y registra o describe qué característica observa?

Ejemplo 3.Costruir el modelo matemático del problema dado a continuación.

Problema de inversión.

Una persona se ganó el primer premio de un sorteo público cuya bolsa en ese momento era $5 000 000.00. Desea invertir ese dinero de tal manera que el rendimiento sobre la inversión sea el máximo posible. Después de consultarlo decide invertir tanto en CETES como en bonos especiales, procurando los mayores márgenes de seguridad considera que en CETES debe ser no más del 30% del total y cuando menos el 12%. Hay un bono de especial interés y se quiere invertir en él cuando menos $2 000 000.00. La tasa anual de rendimiento es estimado en 28% en bonos y de un 32% en acciones. Cuánto debe invertir en bonos y cuánto en acciones?.

Solución:

¿Qué se pregunta?

Las cantidades de dinero que deben ser invertidas en CETES y bonos especiales de manera que el rendimiento de la inversión sea máximo. Para esto, supóngase que:

C = cantidad de pesos invertidos en CETES

B = cantidad de pesos invertida en bonos especiales.

¿Qué datos se tienen?

- **El capital disponible: $5 000 000.00 y los porcentajes que se quieren invertir; no más del 30% y cuando menos el 12% en bonos**

- **$2 000 000.00 que se quieren invertir, cuando menos, en un bono de especial interés.**
- **las respectivas tasas anuales, de rendimiento de CETES 32% , y de 28% en bonos.**

De donde, para la construcción del modelo matemático se tiene:

(1) $C \geq 0$
(2) $B \geq 0$

Condiciones de no-negatividad de las variables, las cuales, sólo son cero cuando NO SE INVIERTE.

Para las otras condiciones, puesto que el capital disponible es sólo de $5,000,000.00, y no tiene que invertirse en su totalidad, este es un límite superior, es decir:

$$C + B \leq 5\ 000\ 000$$

Ahora, como la inversión en CETES y bonos no debe ser más del 30% de los 5 000 000, sino únicamente lo que se invierte en acciones y bonos, esto es que

$C \leq 0.30(C + B)$, de donde se obtiene la desigualdad equivalente

$C - 0.30(C + B) \leq 0$, y al simplificar resulta

$C - 0.30C - 0.30B \leq 0$, esto es

$$\boxed{0.70C - 0.30B \leq 0}$$

La otra condición sobre los CETES es que se invierta cuando menos un 12%, es decir,

$C \geq .12(C + B)$, de donde

$C - .12(C + B) \geq 0$, por tanto

$C - .12C - .12B \geq 0$, de donde resulta

$$\boxed{.88C - .12B \geq 0}$$

Finalmente, deben invertirse $2 000 000.00 como mínimo en bonos, entonces

$$\boxed{B \geq 2\ 000\ 000}$$

Agrupando las condiciones obtenidas se tiene

$$\left.\begin{array}{r} C \geq 0,\ B \geq 0 \\ \\ C + B \leq 5\,000\,000 \\ .70C - .30B \leq 0 \\ .88C - .12B \leq 0 \\ B \geq 2\,000\,000 \end{array}\right\} \quad \text{CONDICIONES}$$

MAXIMIZAR $G = 32C + 28B$,

y rearreglando el conjunto de condiciones, el **modelo matemático** es:

MAXIMIZAR $G = 32C + 28B$ Función objetivo

$$\left.\begin{array}{r} C + B \leq 5\,000\,000 \\ .70C - .30B \leq 0 \\ .88C - .12B \leq 0 \\ B \geq 2\,000\,000 \end{array}\right\} \quad \text{condiciones lineales}$$

$C \geq 0,\ B \geq 0$ condiciones no negativas de las variables

Ejemplo 4. Un comerciante en alimentos desea elaborar un mezcla con dos alimentos, la cual a la vez satisfaga ciertas necesidades vitamínicas diarias y sea mas barata. Los requisitos vitamínicos son de cuando menos 40 unidades de vitaminas M, 50 unidades de vitamina N y 49 unidades de vitamina L. Una ración de alimento X contiene 4 unidades de vitamina M, 10 unidades de vitamina N y 7 unidades de vitamina L. Una ración de alimento Y, proporciona 10 unidades de vitamina M, 5 unidades de N y 7 unidades de L. El kg., de alimento X cuesta $6 y el kg. de Y cuesta $10.00

SOLUCION

¿Que se pregunta?

Las cantidades alimenticias de alimentos X y Y que deben ser compradas, de manera que la mezcla requerida sea más barata y satisfaga los requerimientos vitamínicos.

DATOS:

Los datos con que se cuenta se proporcionan en el siguiente cuadro.

		Alimentos		Requisitos	
		X	Y		
Vitaminas	M	4	10	Cuando menos	40
	N	10	5	Cuando menos	50
	L	7	7	Cuando menos	49
Costo por kg.		6	10		

De donde el modelo matemático se puede obtener de modo muy directo a partir del cuadro anterior, esto es;

MINIMIZAR $C=6x+10y$ (función de costo)

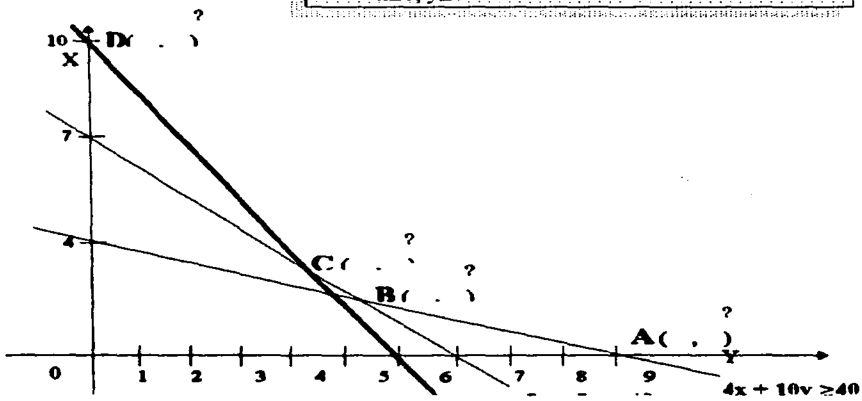
$$4x + 10y \geq 40$$

$$10x + 5y \geq 50$$

$$7x + 7y \geq 49$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

Procediendo a realizar la gráfica



ACTIVIDAD

En la gráfica anterior:

- **Determinar gráficamente las coordenadas de cada vértice.**
- **Sombrea o cuadricula la región de soluciones del sistema de desigualdades.**
- **Sustituye las coordenadas de cada vértice en la función de costo, y determina en qué vértice la función alcanza su valor mínimo.**
- **Interpreta la solución optima obtenida.**

Ejercicios

En los ejercicios dados en seguida, halla los valores máximos y mínimos de la función objetivo, sujeto a las condiciones del modelo matemático.

1.- Función objetivo: $G = 6x+4y$

condiciones

(1) $x \geq 0$

(2) $y \geq 0$

(3) $x + y \leq 5$

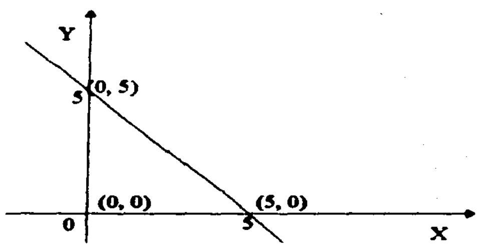
2.- Función objetivo: $G = 3x+7y$

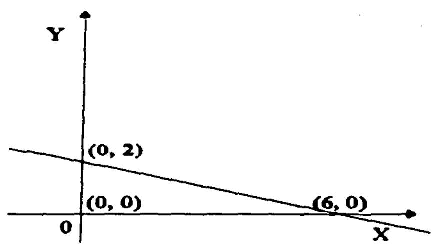
condiciones

(1) $x \geq 0$

(2) $y \geq 0$

(3) $x + 3y \leq 6$





3. En el ejercicio 1, ¿Cuál es la región o semiplano de soluciones si la condición (3) es

$x + y \leq 5$

4. Función objetivo

$z = 40x + 25y$

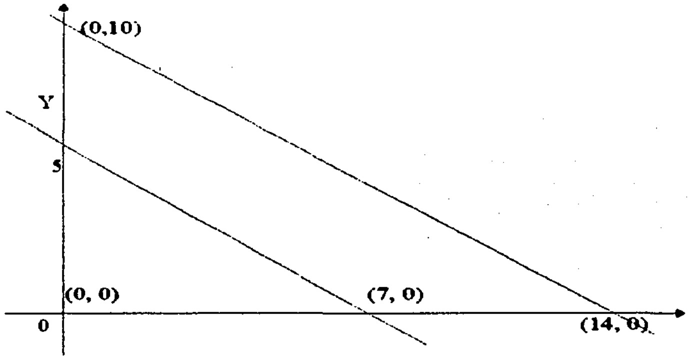
condiciones

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x5 + 7y \geq 35$

$x5 + 7y \geq 70$



5.**Maximización de beneficio.** Un negocio ofrece dos modelos de computadoras domésticas con un costo de $4 000 y $5 500; el modelo de $4 000 reporta un beneficio de $600, y de $800 el modelo de $5 500. El dueño del negocio estima que la demanda mensual no sobrepasará las 150 unidades. Hallar el número de unidades que deberá tener en existencia, de manera que maximice su beneficio, considerando que el dueño no desea invertir más de $250 000 en su inventario de computadoras.

6. **Minimización de costos*** Supongamos que se cuenta con dos alimentos: pan y queso; cada uno de ellos contiene calorías y proteínas en diversas proporciones. Un kilogramo de pan contiene 2000 calorías y 50 gramos de proteínas, y un kilogramo de queso contiene 4000 calorías y 200 gramos de proteínas. Supongamos que un dieta normal requiere cuando menos 6000 calorías y 200 gramos de proteínas diariamente. Por tanto, si el kilogramo de pan cuesta $ 6.00 y $ 21.00 el de queso, ¿qué cantidades de pan y de queso debemos comprar para satisfacer los requisitos de la dieta normal, gastando al menor cantidad de dinero?

* El ejemplo es de R. G. DAllen

QUINTA SESION

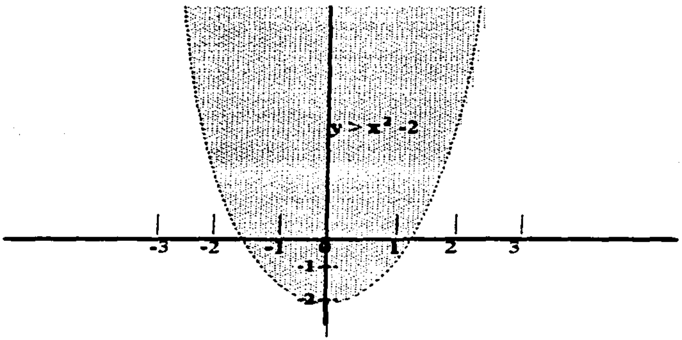
Objetivos especificos de cada clase

Al terminar la clase, el estudiante será capaz de:

- **Trazar la gráfica de una desigualdad cuadrática**
- **Identificar el conjunto solución de un desigualdad cuadrática en una gráfica del plano cartesiano.**

III.8 Desigualdades cuadráticas

Considérese la desigualdad cuadrática $y > x^2 - 2$. Para representarla gráficamente, de la misma manera que como se trazaron las gráficas de desigualdades lineales, en caso de una desigualdad no lineal como ésta, primeramente, se traza la gráfica de la desigualdad $y > x^2 - 2$, pero, considerándola como si fuera la igualdad $y = x^2 - 2$, con ello recuérdese, habremos trazado la frontera de la región de soluciones de la desigualdad dada originalmente. Se traza la línea punteada como se muestra en la figura. Luego, tomando en cuenta que es una relación de desigualdad estricta 'menor que', se sombrea la región inferior de la curva. Véase la figura



ACTIVIDAD

- **Describe en tus propias palabras ¿cuál será la región de soluciones en la desigualdad**

  $y \leq \frac{1}{4} x^2 + 2x$?

- **Describe en tus propias palabras, ¿cuál será la región de soluciones de la desigualdad**

  $y \geq \frac{1}{4}x^2 + 2x$?

- **Proporciona lo que se te pide en seguida:**

a) Cinco puntos que pertenezcan al conjunto solución de la desigualdad anterior.

b) Cinco puntos que no pertenezcan al conjunto solución

- **¿Pertenece el punto (0, 0) al conjunto solución de la desigualdad:**

  $y > \frac{1}{4}x^2 - 2x$ o al de $y \leq \frac{1}{4}x^2 - 2x$?

  <u>Justifica tu respuesta.</u>

- **Dado el punto (-8, 0). ¿Pertenece al conjunto solución de :**

a) $y \geq \frac{1}{4}x^2 - 2x$,

b) $y < \frac{1}{4}x^2 - 2x$,

c) $y \leq \frac{1}{4}x^2 - 2x$,

d) $y > \frac{1}{4}x^2 - 2x$, ó

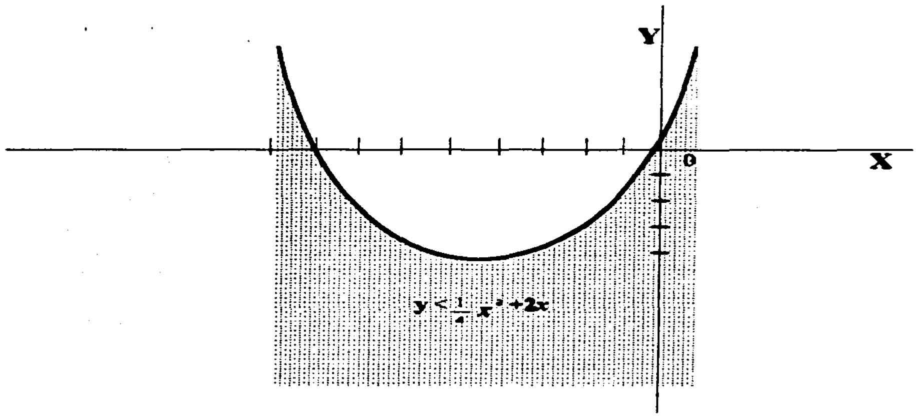
e) ninguno ?

<u>Justifica tu respuesta</u>.

Ejemplo. Dada la desigualdad $y < \frac{1}{4}x^2 - 2x$. Para trazar su gráfica, primeramente se traza la gráfica de la ecuación:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x.$$

Como es una relación de desigualdad estricta 'mayor que', la región de soluciones comprende todos los puntos abajo de la gráfica como se muestra en la figura dada a continuación.



ACTIVIDAD

- **Describe con tus propias palabras, ¿ cuál será la región de soluciones de la desigualdad $y \geq x^2 - 2$?**

- **Grafica la región de soluciones de la desigualdad $y < x^2 - 2$**

- **Traza la gráfica de la región de soluciones de la desigualdad $y \leq x^2 - 2$.**

- **Verifica cuáles de los puntos dados, pertenecen a la región de soluciones y cuáles no. Por ejemplo,**

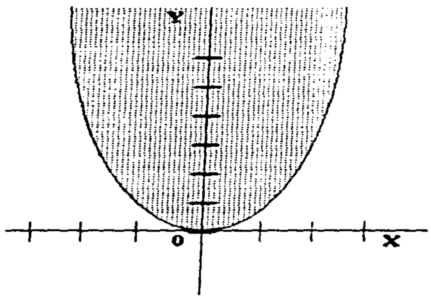
el punto	en la desigualdad	al sustituirlo
(2, 0)	$y < x^2 - 2$	$0 < x^2 - 2 \rightarrow 0 < 4 - 2 \rightarrow 0 < 2$

pertenece a la región de desigualdad. Hacerlo para: (-3, 1), (1, 1), (0, -3), (5, 5) y (0, -2).

Ejercicios

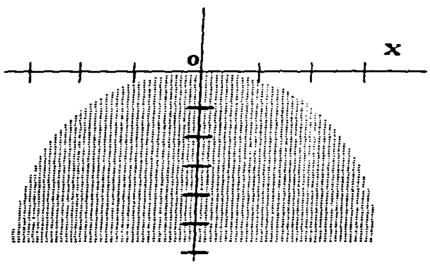
1. ¿A cuál desigualdad representa la gráfica dada?

a) $y \geq x^2$ b) $y < x^2$ c) $y > x^2$ d) $y \leq x^2$



2. Cuál desigualdad representa la gráfica dada?

a) $y \geq -\frac{1}{2}x^2$ b) $y < -\frac{1}{2}x^2$ c) $y \leq -\frac{1}{2}x^2$ d) $y > \frac{1}{2}x^2$



A

EXAMEN PARCIAL DE MATEMATICAS II. UNIDAD III

INECUACIONES Y REGIONES EN EL PLANO

*NOMBRE*________________________*GPO:*________ *FECHA*____________ *CAL:*____

RESOLVER SOLO CINCO PROBLEMAS. CADA UNO VALE DOS PUNTOS!

I. SIMBOLIZA CORRECTAMENTE EL SIGUIENTE ENUNCIADO
"Un número que es mayor que 5"

II. EXPRESA SIMBOLICAMENTE EL SIGUIENTE ENUNCIADO.
"La estatura del mexicano promedio cuand mucho 1.72mts."

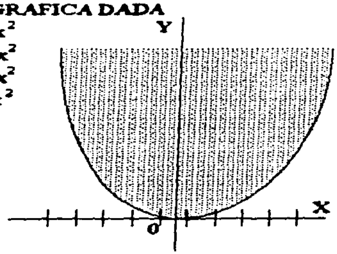
III. RESOLVER "El trabajo que realiza un albañil se le puede pagar de dos maneras":
plan 1: **\$300 mas \$12 p/h.**
plan 2: **\$15p/h**
Si el trabajo es h horas. Para qué valores de h el plan 1 es mejor que el 2?

IV. DETERMINAR Y REPRESENTAR GRAFICAMENTE EL CONJUNTO DE SOLUCIONES SIMULTANEAS
$x>0$; $x-2<0$

V. RESOLVER: "Un negocio ofrece dos modelos de computadoras domésticas, con un costo de \$4000 y \$5500 respectivamente. El modelo de \$4000, representa un beneficio de \$600 y de \$800 el modelo de \$5500. El dueño de el negocio estima que la demanda mensual no sobrepasará las 150 unidades. Hallar el número de unidades que deberá tener en existencia, de manera que maximice su beneficio. Considerando que el dueño no desea invertir mas de \$250, 000 en su inventario de computadoras".

VI. A CUAL DESIGUALDAD REPRESENTA LA GRAFICA DADA

a) $y \geq x^2$
b) $y < x^2$
c) $y > x^2$
d) $y \leq x^2$



B

EXAMEN PARCIAL DE MATEMATICAS II. UNIDAD III
INECUACIONES Y REGIONES EN EL PLANO

NOMBRE———————————— GPO:———— FECHA:———— CAL.:——

RESOLVER SOLO CINCO PROBLEMAS. CADA UNO VALE DOS PUNTOS!

I. SIMBOLIZA CORRECTAMENTE EL SIGUIENTE ENUNCIADO.

" x no es menor que 8"

II. EXPRESA SIMBOLICAMENTE EL SIGUIENTE ENUNCIADO:

"El tren bala más moderno de Japón puede desplazarse a velocidades de hasta 300 k/m"

III. RESOLVER "Si se compra una bolsa de naranjas a $2.50 el kg. la cuál pesa 6.5 kgs. Si la báscula en que se pesó tiene una precisión dentro de $\frac{1}{4}$ kg. ¿Cuánto es lo que se te pudo haber cobrado de más o de menos?

IV. Determinar y representar gráficamente el conjunto de soluciones $x-2\leq 0$ neas del sistema de desigualdades:

$x\geq 0$ ≤02

V. RESOLVER "Un comerciante ha observado que los casetes de 60 y 90 minutos de duración, tienen mucha demanda entre los jóvenes. Considera que él puede vender hasta 500 casetes de ambos tipos a la semana. Sabe que el costo de un casete de 60 minutos es de $5 y de $8 el de 90 minutos. Para esto puede invertir cuando mucho $4000. Por cada casete de 60 minutos se gana $2 y $3 por la venta de un casete de 90 minutos. Cuántos casetes de cada tipo deberá vender para obtener la máxima ganancia?

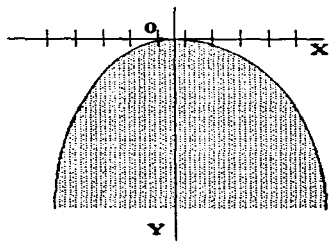
VI. ¿A qué desigualdad representa la gráfica dada?

a) $y\geq\frac{1}{2}x^2$

b) $y<-\frac{1}{2}x^2$

c) $y>-\frac{1}{2}x^2$

d) $y\leq\frac{1}{2}x^2$



III.9 Experiencia Piloto

Tal y como fue señalado antes, el examen diagnóstico (Ver. P.84) aplicado a los grupos de experimentación, se realizó en los siguientes grupos: 1004 y 1007 en sus correspondientes horas de clase. A continuación se proporcionan los resultados obtenidos.

Grupo 1004. De un total de 28 estudiantes a quienes se aplicó dicho examen, 12 obtuvieron resultados aprobatorios. De éstos, solo uno obtuvo 8.5 puntos, seis alumnos más obtuvieron al rededor de 7 puntos, cinco alumnos obtuvieron 6 puntos. El resto, 16 estudiantes, no aprobaron el examen. Porcentualmente se tiene un índice de 42.84% de aprobados aproximadamente y, aproximadamente un 57.15% de reprobados. El tiempo de duración aproximado del examen fue de 1:30 hrs., hasta que entregó el examen el último estudiante.

Grupo 1007. De un total de 32 estudiantes, a quienes les fue aplicado el examen, 12 obtuvieron resultados aprobatorios. De estos, tres alumnos obtuvieron 9 puntos, uno solo obtuvo 8 puntos y, tres más obtuvieron 7 puntos y, los restantes cinco estudiantes obtuvieron 6 puntos. El resto, 20 alumnos, no aprobaron el examen. Porcentualmente equivale al 37.5% de aprobados, 62.5% de reprobados. El tiempo de duración aproximado fue de 1:15 hrs. tiempo en que entregó el último estudiante del grupo.

Las preguntas 2, 3 y 5 fueron respondidas por una minoría. Según esto, se hizo patente la dificultad que tuvieron los estudiantes en lo referente a determinar los puntos de intersección de una recta con los ejes coordenados, también con el tratamiento de la gráfica de una ecuación lineal, o cuadrática, y finalmente, el proceso inverso, consistente en determinar la ecuación de una función lineal, dada la gráfica de ésta.

En relación a los grupos de control: 1001, 1002 y 1006, con los cuales, según quedó asentado antes, el trabajo se desarrolló "... sin contar [los estudiantes] con los materiales didácticos. Las clases [fueron] realizadas en las condiciones en que se ha venido trabajando, es decir, recurriendo al uso de bibliografía relativa existente en la biblioteca de la escuela del

plantel y, una compilación de material bibliográfico de cada unidad del programa como material de apoyo didáctico destinado [esta última] fundamentalmente al profesor"(ver p.81).

A continuación, se muestran en una tabla, los resultados obtenidos de la evaluación formativa aplicada, tanto a los grupos 1004 y 1007, con los que se experimentó el material didáctico, dados en las dos primeras entradas de la tabla. Las siguientes tres entradas de la tabla, muestran los resultados de los grupos de control. Esto proporciona una muestra comparativa de los resultados obtenidos, al final del proceso de la experiencia didáctica llevada a cabo, mediante la cual pueden ser apreciadas las tendencias resultantes.

	GRUPOS	TOTAL DE ALUMNOS			%
DE EXPERIMENTACION	1004	38	*Aprobs.*	22	57.8
			Reprobs.	16	42.11
	1007	43	*Aprobs.*	31	72.9
			Reprobs.	12	27.9
DE CONTROL	1001	42	*Aprobs.*	20	47.61
			Reprobs.	22	52.38
	1002	48	*Aprobs.*	14	29.16
			Reprobs.	34	70.00
	1006	38	*Aprobs.*	18	47.36
			Reprobs.	20	52.63

Por último, debe decirse que fueron cubiertos todos los contenidos desarrollados durante el periodo de tiempo (10 horas clase), asignados en el programa para el tratamiento de esta tercera unidad.

ALCANCES Y LIMITACIONES DE LA PROPUESTA

IV. 1 Aspectos de evaluación

Grupos de Experimentación

De las observaciones registradas, a raíz de la puesta en práctica del material didáctico, se hacen las siguientes observaciones, las cuales son presentadas a continuación.

En el grupo 1104, se hizo notorio, cómo el material didáctico se mostró como un factor didáctico, el cual gradualmente se fue convirtiendo en una base de apoyo cada vez mejor para los estudiantes. Este hecho, se puso de manifiesto, a través de una actitud de mayor dedicación al estudio, de parte de aquellos. Hizo que estos, mostraran cada vez un mayor grado de atención; fomentando el desarrollo de una acción de reflexión y de intercambio de ideas, propiciando la realización de actividades heurísticas al enfrentar la tarea de resolución de problemas. Aunque no siempre, el desarrollo de tales actividades heurísticas fue exitoso en todo; se pudo observar que todos los estudiantes se constituyeron como una forma de preparar un estado que ayudó a comprender conceptos, procedimientos o, entender la significación de resultados obtenidos en la fase de análisis global del tema en estudio.

En el grupo 1007, fue notorio el grado de distracción observada en el grupo y, que a juicio propio, obedeció al número excesivo de estudiantes en el salón de clase. Sin embargo, se observó un proceso de asimilación gradual, a un estilo de trabajo que indujo a desarrollar actividades caracterizadas por un mayor grado de concentración. En todo esto, destacó un hecho: los alumnos, se involucraron en alto grado en un proceso de aprendizaje, cuando se les plantearon problemas para ser resueltos. Esto es definitivo. Se observó que con la información proporcionada en el material de aprendizaje, resaltó la necesidad de abordar el planteamiento y la resolución de problemas.

Grupo de control

En el grupo 1006, se hizo sentir un alto grado de distracción, originada por el exceso de estudiantes en el salón de clase. Se observó una falta de interés en el grupo. Sin embargo, el material didáctico como apoyo, permitió inducir al desarrollo de actividades de aprendizaje, a través de las cuales, se mostró una tendencia a confluir en un proceso de concentración creciente. Destacó la importancia que hay, en que el estudiante pueda contar con un material didáctico organizado y, entonces se manifestó cierta dificultad en el estudiante para involucrarse en un proceso reflexivo sobre el tema de estudio, cuando se hizo depender de una bibliografía, la cual se considera no corresponde adecuadamente en estructura ni en secuenciación a los propósitos metodológicos de la concepción de enseñanza de la matemáticas propuesta en el P. E. A.. No obstante, la carencia observada de una cultura de estudio y, lo que en ocasiones pareció falta de interés, la experiencia propia, permitió observar cómo, si el profesor cuenta con un material de apoyo didáctico organizado, ello, facilita orientar mejor la actividad del proceso enseñanza—aprendizaje, propiciando y fomentando en mejor grado la atención del estudiante, haciendo posible incluso, que este se involucre en actividades de naturaleza heurística, relativa a procesos de reflexión compartida, o bien, en la resolución de problemas.

En el grupo 1001, se mostró buena disposición para el desarrollo de actividades de aprendizaje, pero también, una patente falta de una cultura de estudio. Se trató de un grupo, con alumnos capaces pero muy irregulares en el trabajo, salvo algunos estudiantes, aproximadamente un veinte por ciento, sí mostraron mayor nivel de consistencia y continuidad en el seguimiento del programa. El grupo 1002, tuvo características similares al anterior, pero sin poseer alumnos sobresalientes.

A continuación, se describen algunas características generales, extraídas, a partir del registro de actividades realizadas, con los diferentes grupos a que nos referimos en párrafos anteriores:

- en primer lugar, se observó que tal actividad de dispersión, tendió a darse más a menudo, cuando en un grupo, los estudiantes no cuentan con un material didáctico organizado en que puedan apoyarse para el estudio de sus clases. Quizás, en tal fenómeno incidan otras variables del entorno inmediato, como la discontinuidad que implica en estos casos, depender de la posibilidad de contar con un texto de la biblioteca de la escuela. Cabría agregar a ello, la insuficiencia del tratamiento que ahí se presenta, relativo al tópico de interés, de acuerdo a los propósitos señalados en el P. E. A.
- En segundo lugar, se observó que tal actitud de dispersión tiende a ser menor en forma importante, cuando en un grupo, los estudiantes cuentan con un material didáctico organizado, porque éste, se convierte en un medio que les ofrece objetos de aprendizaje, con los cuales se ven confrontados a interactuar directamente con ellos.

De todo lo anterior, tiene sentido destacar lo siguiente: el trabajo docente adquirió un carácter más comprometido, al imprimir mayor intensidad en su relación con el estudiante al tener que orientarle, aclararle dudas o precisarle conceptos. En lo que atañe al estudiante, se le observó más involucrado y, en ocasiones inmerso en actividades heurísticas, reflexivas o procedimentales, principalmente al tener que resolver problemas.

Cuestionario de actitudes

El siguiente, es un cuestionario de actitudes que les fue proporcionado a los alumnos, después de haber dado por concluido el tratamiento del material didáctico expuesto en el capítulo III. El cuestionario, se hizo con la finalidad de recabar las opiniones de los estudiantes, sobre aspectos de interés como son: los relativos al lenguaje, estructura, secuenciación, ejemplos, problemas y el nivel de interés que haya podido despertarles el material didáctico sometido a prueba.

A continuación se presenta en un arreglo tabular, el número de respuestas reagrupadas en distintas categorías establecidas para cada uno de los aspectos de evaluación considerados de interés, con el fin de extraer, a partir de las respuestas dadas por los estudiantes, algunas opiniones sobre las tendencias identificadas con base en esos resultados. Se parte de un total de 26 cuestionarios recogidos en el grupo 1004 y, de 14 cuestionarios recogidos en el grupo 1007. Al aplicárselos, se les aclaró que podrían contestarlo, si así lo deseaban, de manera anónima. También, se les indicó que el cuestionario no tendría ninguna significación para la evaluación de su curso de matemáticas II.

GRUPOS	1.- Lenguaje			*GRUPOS*	2.- Estructura		
	Claro	comprensibl	Confuso		Buena	Regular	Mala
1004	23	23	5	1004	22	1	
1007	13	12	5	1007	13		
TOTALES	36 ≈ 90%	35 ≈ 87.5%	10 ≈ 25%	*TOTALES*	35 ≈ 87.5%	1 ≈ 2.5%	0 ≈ 0%
GRUPOS	3.-Secuenciación			*GRUPOS*	4.- Ejemplos		
	Buena	Regular	Mala		Suficientes	Claros	Detallados
1004	19	4	1	1004	22	10	10
1007	13	1	1	1007	13	10	10
TOTALES	32 ≈ 80%	5 ≈ 12.5%	2 ≈ 5%	*TOTALES*	35 ≈ 87.5%	20 ≈ 50%	20 ≈ 50%
GRUPOS	5.- Problemas			*GRUPOS*	6.- Nivel de interés en el material		
	En exceso	Normal	pocos		Importante	Regular	No útil
1004		14	3	1004	22	1	
1007		7		1007	13	4	
TOTALES	14 ≈ 35%	21 ≈ 52.5%	3 ≈ 7.5%	*TOTALES*	35 ≈ 87.5%	5 ≈ 12.5%	0 ≈ 0%

De acuerdo al número de respuestas que fueron suministradas por los estudiantes, según se muestra en la tabla anterior, se desprenden entre otras, las siguientes consideraciones: En lo que se refiere al lenguaje, aproximadamente el 90% de los estudiantes, manifiesta que éste les fue suficientemente claro y comprensible. De modo similar, el 87.5%, consideró buena, la estructura del material didáctico elaborado. Y en un porcentaje cercano al 80%, consideró, en ese mismo carácter la secuenciación del material.

En cuanto a los ejemplos ilustrativos presentados, un 87.5%, los consideró en cantidad suficientes; mientras que el 50%, manifestó que tales ejemplos les parecieron claros y detallados. En relación a los problemas, se muestra que aproximadamente un 52.5% consideró que éstos, son proporcionados en cantidad adecuada (suficiente), sobre un 35% que considera, que el número de estos es excesivo. Finalmente, en lo referente al nivel de interés, que el material didáctico despertó en los estudiantes, el 87.5%, manifestó que este les fue importante.

De lo anterior, se deduce, en función de los resultados porcentuales, tendencias importantes, que hablan de una necesidad de continuar elaborando materiales como el que se presenta en esta propuesta o, con características didácticas similares a las del material aludido. Conviene tener presente, la necesidad llevar a cavo un continuo perfeccionamiento, para mejorarlos en aquellos rubros en los que los estudiantes hicieron observaciones .Al mismo tiempo, profundizar e intensificar la labor docente, en lo concerniente al estudio, tratamiento y solución de problemas.

A continuación serán incluidas, al ser transcritas, algunas respuestas dadas por los estudiantes al cuestionario de actitudes, las cuales, a juicio de quien esto escribe, plasman de manera significativa, los criterios observados a partir de la tabla anterior.

Opinión # 1:

LENGUAJE

"Creo que respecto al lenguaje no hubo problemas ya que estuvo muy bien explicado como para poder entender los temas y el contenido de estos."

ESTRUCTURA

"Estuvo muy bien hecho y muy bien estructurado, ya que hasta gráficas contenía, estaba todo bien estructurado y esto nos ayudó para entender y poder aprender todo esto y más."

NIVEL DE CONTENIDO

"Se ve que respecto al nivel de contenido estuvo muy bien pues este material de trabajo estuvo hecho con mucho empeño ya que contiene procedimientos que están hechos paso a paso, además de que contiene gráficas, problemas y ejercicios."

EJERCICIOS

"Los ejercicios estuvieron muy bien elaborados, para poder resolverlos estuvieron fáciles la mayoría, ya que con los procedimientos ya se nos hacia más fácil resolver los ejercicios."

SECUENCIACION DE DESARROLLO DE LA PRESENTACION

"Respecto a la presentación estuvo todo muy bien, pues todo estuvo muy ordenado y paso por paso, además de que cada tema se desarrolló conforme se iva entendiendo. La explicación fue excelente y probó un mayor interés para todos."

OTRAS OPINIONES

"Puedo decir que este material de trabajo está muy bien elaborado pues con el pudimos trabajar y entender mejor las cosas porque está bien explicado y, no nos hizo bolas a lo que deberíamos aprender.

Creo que este material fue muy práctico y que en todas las unidades se debió hacer lo mismo porque, tanto para los alumnos como para el maestro, se les hizo más fácil aprender.

Espero que así como este material de la última unidad, fueran también los de todas las unidades para que el alumno aprenda más rápidamente y sin necesidad de estarle llamando la atención porque esté entretenido en otra cosa."

NIVEL DE INTERES

"Creo que con este material el interés para los alumnos fue mayor pues me pareció muy interesante que incluyera los procedimientos para resolver los temas. Además estuvo muy bien que lo haya hecho por secciones para que fuéramos entendiendo paso por paso lo que trataba de explicarnos."

Opinión # 2.

⇒ Mi punto de vista sobre este material. Me pareció de gran ayuda. Quiero decir que sirvió de material de apoyo. Este material en la mayoría de sus secciones se entendió ya que los problemas que tenía como ejemplos estaban muy bien desglosados y aparte venían graficados o sea que no hubo problema de comprensión.

⇒ Sobre el lenguaje no hubo problema me parece que lo adaptó bien a nuestro nivel ya que estos temas son un poco difícil de entender y creo que este aprendizaje puede ser más sencillo según el lenguaje que se utilice.

⇒ El material me pareció exelente porque por una parte nos evitó de buscar los conceptos en otros libros, bibliografías etc...Es de gran ayuda para nosotros, porque aquí en este material y viene todo lo que el profesor daría en una clase completa, pero en este caso fue escrito todo este concepto de ideas, conceptos problemas etc.

⇒ En este caso yo pienso que hubiera sido mejor que todos hubieran leído el material en la clase para que todo fuera parejo y así se hubieran aclarado las dudas que fueran surgiendo en la clase. Faltó tiempo para que esto hubiera resultado de una mejor manera.

⇒ Este material de verdad que los ejemplos desempeñaron un papel muy importante. Porque estos no pudieron ser más claros por el desglose tan entendible que hubo y pues los ejemplos son de mucha ayuda para el desarrollo del tema expuesto.

⇒ Con respecto a los problemas me parece una forma de trabajo muy buena porque esto nos va a ayudar para un futuro. Estos hacen desarrollar diversos pensamientos que uno no se imagina resolver. Hace bien en poner a trabajar nuestro cerebro.

⇒ El nivel de interés para mí fue mayor que el de otras unidades ya que con el material escrito despierta el interés o simplemente la curiosidad de leer el material de ver las gráficas y tablas. Pienso que es mucho mejor.

Siga así maestro espero que utilice este tipo de materiales en todas sus unidades.

Opinión # 3.

"Mi opinión es que con el material los temas son más fáciles de entender los ejercicios son más fáciles gracias a la explicación ."

"El cuadernillo estaba miy bien elaborado manejando un texto entendible y esto me ayudó a entender."

"Este tipo de trabajos es un material de apoyo necesario y es un avance para la educacion."

El cuadernillo necesita más ejercicios. en mi opinión.

IV.1.1 Opiniones de expertos

Para los fines de esta propuesta, se han considerado de gran interés las opiniones de otros colegas, docentes de matemáticas, en quienes se ha apreciado un alto sentido de compañerismo y compromiso docente, plasmado en la acción diaria en el aula, o bien, un amplio conocimiento de la evolución de la vida académica del Colegio, además de un alto compromiso de institucionalidad académica.

A continuación, se transcriben las opiniones de tres colegas del Colegio, las cuales han venido a enriquecer esta propuesta, al acceder gentilmente a revisar y emitir sus valiosos juicios y opiniones acerca de la misma. A este respecto, debe señalarse que la opinión que se solicitó cada uno de ellos respondió a un enfoque de interés específico. En el primer caso, la Secretaria Académica del Bachillerato del Colegio, Mat. Ma. Del Rosario Preisser Rodríguez, en su caso, fue ajena al desarrollo de la propuesta y se le solicitó que su opinión estuviera enfocada sobre aspectos, tanto educacionales como de contenidos matemáticos. El siguiente caso, se trata del Prof. Mat. Francisco Mendoza Cano, él fue ajeno al desarrollo da la propuesta y, la opinión que le fue solicitada se refiere a los contenidos matemáticos que en ella se presentan. El siguiente caso, se trata del Prof. Ing. Alfredo González Barrera. El estuvo parcialmente involucrado en el desarrollo de la propuesta.

Profra. Mat. Ma., del Rosario Preisser Rodríguez.

COMENTARIOS SOBRE EL TRABAJO DE TESIS

"PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DE TÓPICOS DE ÁLGEBRA LINEAL EN EL BACHILLERATO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES.UNAM."

CAPITULO III. DESCRIPCION DE ACTIVIDADES Y MATERIALES DIDÁCTICOS PARA EL DESARROLLO DE LA TERCERA UNIDAD DEL PROGRAMA DE MATEMATICAS II DENOMINADAINECUACIONES Y REGIONES EN EL PLANO".

Siempre es difícil opinar sobre un material para los alumnos elaborado por terceras personas, pues cada quien tiene una forma de mirar la temática que lleva a poner énfasis en un aspecto u otro.

No obstante, me atrevo a hacer los siguientes comentarios intentando guardar distancias en busca de la objetividad.

Los criterios que considero importantes para emitir mi opinión son básicamente dos:

⇒ La consistencia entre los propósitos señalados y las actividades propuestas para conseguirlos.

- **La posible utilidad del material por parte de la población a la que va dirigido.**

Con esto en mente, comento lo siguiente:

⇒ Encuentro concordancia entre la temática que se aborda en el material, y el programa de estudios que pretende apoyar.

⇒ Encuentro que se cuida una progresión de los aprendizajes, y se van retomando en actividades posteriores tratados en las previas; lo que ayuda a su mejor adquisición.

El único tópico en el que esto no se da, corresponde a las desigualdades que contienen valor absoluto, pues en las sesiones posteriores a la que lo aborda, ya no se toma.

Desde mi punto de vista, esto nace del programa mismo, ya que los sistemas de inecuaciones y más aún los problemas de aplicación en el campo de la programación lineal accesibles al bachillerato, no contemplan desigualdades con valor absoluto.

⇒ Me parece digno de resaltar, la frecuencia con la que se pide al estudiante interrelacionar la expresión gráfica y algebraica de las ecuaciones, los intervalos e incluso las desigualdades, ya que esto propicia la adquisición del significado de las expresiones algebraicas.

Este ir y venir entre las diversas formas de representación constituye un acierto en el material y cubre uno de los propósitos señalados en el programa.

⇒ Los problemas que se incluyen, me parecen pertinentes ya que por un lado, lo que plantean es asequible al alumno, y por otro, la pregunta que establecen tiene sentido de ser formulada. Esto, podría parecer intrascendente, pero es uno de los aspectos que Nicolás Branca señala para acercar al estudiante a la resolución de problemas, y yo coincido con él.

⇒ Sé que llevar a la práctica la metodología de resolución de problemas entraña una gran dificultad. No en balde existen diversas escuelas que han estado trabajando no sólo en su sustento teórico sino también, en el desarrollo de su puesta en práctica. Encontrar las preguntas u observaciones pertinentes para ayudar al estudiante a interactuar él mismo con el objeto de conocimiento no es nada sencillo; la dificultad aún es mayor cuando se elabora material escrito con esta intención pues ¿cómo prever lo que necesita proporcionarse para que el alumno encuentre las relaciones o los aspectos que uno desea?

Aún consciente de esta gran dificultad, y sin detrimento de las cualidades del material, me parece que faltan más espacios u oportunidades para que el estudiante "juegue" un poco más con los conceptos y los problemas, contando por sí solo relaciones, estableciendo y "verificando" conjeturas, etc

⇒ Por último, respecto a la evaluación, me permito hacer dos comentarios: Por un lado creo, que el material se presta en mucho a recabar de manera permanente información sobre los avances y tropiezos de los alumnos; lo que ayuda a que el profesor identifique qué aspectos necesita reforzar, en cuáles puede profundizar, cuáles otros está dominando el grupo, etc. Es decir, las actividades están diseñadas de modo que contribuyen al propósito básico de la evaluación: detectar en el proceso de desarrollo, la calidad del aprendizaje, sus logros y dificultades.

Por esa razón, quizás, la propuesta de examen no contempla varios de los aprendizajes que se han formulado en el transcurso de las cinco sesiones de clase previstas.

No obstante, creo que podría enriquecerse si contemplara algunos reactivos en los que el estudiante construyera o proporcionara ejemplos, ya sea de inecuaciones o conjuntos de ellos que satisfagan una serie de puntos dados, o viceversa.

Me parece que así, podría constatarse si ha sido plenamente adquirido el concepto de solución de una inecuación o de un sistema de ellas.

En cuanto al examen diagnóstico y el propósito al final de las sesiones, encuentro poca relación entre ambos.

Infiero que el propósito del examen de diagnóstico, es conocer lo que saben los alumnos sobre algunos aspectos que se requieren para un buen manejo de lo que aborda la temática desarrollada en el material; mientras que en el examen para evaluar la unidad temática, se pretende medir el nivel de manejo de los tópicos estudiados. Si mi suposición es correcta, respeto la decisión del autor, y me parece que lo que mide es correcto.

Por todo lo anterior, considero que el material tiene una consistencia y constituye un apoyo para impartir la unidad III del Programa de Segundo Semestre del Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades.

Espero que mis comentarios sean de utilidad para el autor cuyo material refleja un arduo trabajo previo.

A T E N T A M E N T E

MAT. MA. DEL ROSARIO PREISSER RODRÍGUEZ
SECRETARIA ACADEMICA

24 de septiembre de 1997. Ciudad Universitaria. México D. F.

COMENTARIOS Y SUGERENCIAS

al trabajo de tesis del Prof. J. G. Zaragoza Ramírez, acerca de la UNIDAD III del programa de Mats. II del C. C. H. Naucalpan sobre INECUACIONES.

Prof. Mat. Francisco Mendoza Cano
México, D.F. A 23 de septiembre de 1997.

A. Comentarios.

Sobre el material que nos presentó el profesor J. G. Zaragoza, referente al tema de las inecuaciones o desigualdades, debo mencionar que se encuentra bien documentado, usando y haciendo referencia de varios libros y notas consultadas, entre ellas: Gago Huget A. / Mercado Collado R., Walter Dick/ Lou Carey, González Núñez J. Jesús, Cuadernillo No. 54, 22/07/1995, Algebra de Bittinger (Addison Wesley), Larson, etc. En la introducción presentada menciona los antecedentes de cómo elabora sus notas, en donde nos comenta sobre la experiencia, el ambiente donde puso en práctica sus actividades, las consideraciones que él hace y que son factores importantes de la actividad docente, mismos que deberán ser analizados en alguna investigación con fines didácticos. Las características de la evaluación de un programa que él considera, nos pueden servir como marco, al momento que estemos revisando nuestro trabajo docente.

Al inicio de cada sesión, incluye los objetivos específicos, y que nos permiten tener una idea más clara de los contenidos que se abordarán y de la profundidad con la que se estudian.

El orden con que se estructuran las sesiones, los ejemplos y los ejercicios propuestos, van desde lo más simple a lo más complejo.

En general, el material presentado en cada sesión, alcanza un término medio entre lo superficial y lo formal, considerando y deseando, que el alumno adquiera una idea o panorama global de los contenidos que está estudiando, que los use como una herramienta para resolver problemas prácticos, que obtenga un aprendizaje significativo con el planteamiento de actividades y una práctica suficiente para reforzar sus conocimientos.

El material didáctico es desarrollado con bastantes recuadros, esquemas y gráficos, que ayudan al lector a tener una mejor comprensión, captando más su atención en aquellos resultados más importantes.

Resulta muy interesante, la forma didáctica del esquema que nos brinda el profesor, para mostrar los conceptos de intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos (o semicerrados), en él aparecen comparados dichos intervalos, y donde se observan relaciones y diferencias entre uno y otro.

Cabe señalar que la mayoría de los ejemplos y ejercicios propuestos, se hallan en un contexto de términos que el alumno ya conoce.

Las deducciones que realiza están estructuradas de forma lógica, mencionando las premisas que usarán en el futuro; sacrifica un poco la formalidad, con el afán de que el material no resulte tedioso para el lector al tratar de entender una demostración.

B. Sugerencias.

Este trabajo es muy importante por su concepción y la experiencia que resume, por empezar a aplicar el enfoque constructivista de la enseñanza, y por darle suficiente importancia al contexto de los problemas planteados, mismo que utiliza términos usados, en su mayoría, por los lectores a quienes va dirigido. Es por esto, que sugiero se de una revisión continua, en la que se tome en cuenta los resultados de las evaluaciones de los grupos donde se use, y que se trate de agregar más problemas en un contexto significativo para estudiantes del nivel medio superior.

Con la idea de que este trabajo sea útil para estudiantes de nivel superior, y aún para que se use como libro de consulta, en el que se localicen los resultados, teoremas o propiedades de manera muy rápida, vale la pena incluir la deducción de dichos resultados; resaltar, si se puede, las propiedades o axiomas, en recuadros o colores, lo mismo que para indicar la interacción de dos o más gráficas.

También, cabe señalar, que al comienzo de cada sesión, o mínimamente al principio de cada unidad, se incluya el mapa conceptual de donde se encuentran ubicados el tema o temas a considerar.

Con el trabajo docente y aplicación de las actividades sugeridas se puede ir registrando el tiempo de duración, durante el cual, los alumnos las realizan, y se hallaría un tiempo promedio, sugestivo para que otros profesores que utilicen este material, puedan saber el tiempo de desarrollo, mismo que puede ser utilizado en la organización y planeación de su curso.

Algunos de los esquemas pueden ser pasados en acetatos, y éstos ser utilizados para mostrar el tema, mediante un proyecto, así, el profesor puede utilizar el tiempo en que los alumnos reconocen el material o hacen sus anotaciones, en señalar temas relacionados o aplicaciones en la vida real.

Debido al amplio desarrollo de la tecnología, vale la pena integrar, en algunos de las sesiones, prácticas con la computadora, como por ejemplo las gráficas, y por qué no?, la resolución de desigualdades con el manejo de paquetes de software como el CALCULE, el DERIVE o el MAPLE.

Prof. Ing. Alfredo González Barrera:

" El autor trata el tema de manera especial, refleja conocimiento amplio y pleno de la vía resolución de problemas (concepción constructivista), así como de la corriente donde se inscriben los nuevos programas del C. C. H. (alcances y objetivos teóricos), así como de las condiciones reinantes en el salón de clases del C. C. H.

El desarrollo de la secuencia didáctica, despierta el interés en los contenidos, organización de los conceptos y, problemas que son tratados de una manera particular y gradual, con actividades complementarias en cada uno de los subtemas.

El material presentado en forma de fascículo, proporciona un auxiliar valioso, tanto para el alumno, como para el maestro, ya que la interacción es más sólida y, despierta el interés del educando, lo que hace que el tema y los subtemas sean tratados en el tiempo previsto(teórico)

El que esto escribe, tuvo la oportunidad de experimentar el material de esta propuesta con dos grupos, siendo los resultados favorables al interés por el estudio del tema por parte de los alumnos; reclamando éstos, materiales de este tipo en los temas del curso de Matemáticas II.

Este trabajo es estimulante y, requiere una difusión a todos los profesores involucrados en el plan nuevo de programas del C. C. H., como una muestra ilustrativa del concepto del desarrollo del concepto de "constructivismo", vía resolución de problemas.

Sugerencias:

- **Elaboración de un manual para el maestro.** (Cuaderno donde se expliquen brevemente los conceptos, alcances y objetivos del material).
- **Elaboración de un cuaderno con la solución de todos los problemas propuestos** (solo para profesores).
- Agregar una propuesta de problemas de aplicación seleccionados, cuya solución, se haga fuera del salón de clase y enviada a alguna dirección. Esto, como complemento de motivación a los alumnos y profesores que puedan hacer uso de este material.
- Hacer una revisión periódica de este material para que no pierda vigencia.

Atentamente

Prof. Alfredo González Barrera.

17 de septiembre de 1997.

IV.1.2 Evaluación comparativa de los contenidos de la propuesta con otros textos.

A continuación, se presenta un cuadro resumen de una evaluación comparativa de los contenidos matemáticos de esta propuesta, con respecto a contenidos similares que son presentados en otros cinco textos, considerados para el nivel de bachillerato. La información complementaria, está dada en un apéndice al final. del trabajo.

Para llevar a cabo esta evaluación, se hicieron algunas adaptaciones de la monografía "how to evaluate mathematics textbooks" del Comité para Materiales Educacionales del NCTM.1982., con la finalidad -a juicio muestro - de ajustarlo al enfoque de esta propuesta.

Cuadro de evaluación comparativa de la propuesta con relación a los textos señalados. La puntuación máxima es de 25 puntos

Textos	Contenidos	Organizació	Materiales Auxiliares	Readaptabilidad	Característi-cas Físicas	Promedio Total
Propuesta didáctica	5	4.75	4.16	5	5	23.91
Bittinger, M. "Algebra"	3.8	5	3.3	5	3.3	20.4
Dolciani, et. al "Algebra moderna y Trigonometría"	4.62	3.5	1.67	5	4.17	18.96
Larns / Hosstettler "Algebra"	4.2	5	5	5	4.17	23.37
Rees, P.,Sparks, F. "Algebra"	4.2	2.75	3.33	1.76	3.33	15.28
Zuckerman MMartin "Algebra y Trigonomet Simplificada"	2.9	3	2.5	5	3.33	1673

IV.2 Alcances.

Se considera que los alcances de la propuesta están determinados por la trascendencia que ésta tiene al proporcionar elementos básicos del conocimiento matemático, mediante los cuales, a la vez que se consoliden conocimientos que el estudiante ya posee, vienen a dar continuidad a los aprendizajes matemáticos que el alumno adquiere, y a proveerle de elementos a través de los cuales, este pueda continuar sus estudios a la vez que amplie y profundice conocimientos que ya posee mediante nuevos aprendizajes.

IV.3 Limitaciones.

Las limitaciones de la propuesta, se consideran, a partir de las observaciones que fueron registradas, al llevar a cabo la aplicación de la misma en el salón de clase. Entre estas pueden ser mencionadas las siguientes:

- **Las dificultades que impone a la docencia matemática tener que trabajar con grupos sobreocupados. Ello es causa de:**

  ⇒ Manifestación frecuente de distractores que interrumpen la clase.

  Entre éstos, pueden ser mencionados entre otros los siguientes:

  1. sonidos provocados por los mismos estudiantes.

  2. falta de interés en algunos estudiantes, que se "ven obligados" a recibir la clase y, cuyos intereses, quizá, no son compatibles con los esfuerzos que implica el aprendizaje de las matemáticas, dada la naturaleza de la materia y, que fácilmente se distraen a la vez que distraen a sus compañeros.

- **La carencia de espacios apropiados, a través de los cuales, se propicie un intercambio más fluido e inmediato de ideas con los colegas docentes de matemáticas, a la par del acontecer del proceso educativo.**

- **Lo anterior, fortalece la imposibilidad de poder plantear y emprender programas, mediante los cuales pudieran ser desarrolladas, actividades para la configuración, diseño y elaboración de materiales didácticos, los cuales plasmaran la enorme y rica experiencia de los docentes de matemáticas.**

IV.4 Posibilidades.

Las posibilidades para el desarrollo de propuestas de naturaleza similar a la presente, se observan sumamente interesantes, por la diversidad de enfoques que pueden ser asumidos dentro de una concepción constructivista, vía resolución de problemas. Por otro lado, el P. E. A., ofrece amplias perspectivas dentro de las cuales, es posible hallar, o identificarse con algunos aspectos estimulantes, para abocarse a tareas de planeación, diseño y elaboración de materiales didácticos mediante los cuales, se haga cada vez más factible desarrollar una educación matemática, para los estudiantes del Colegio y, hacer que estos, egresen, siendo poseedores de un bagaje y cultura matemática, con los cuales puedan continuar sus estudios, o bien, estén mejor capacitados, para enfrentar problemas que requieran ser tratados por mentes, con sólidas capacidades de razonamiento y de flexibilidad de pensamiento. En ello, la elaboración de materiales didácticos organizados, de apoyo a la docencia, del tipo que aquí se presentan, pueden llegar a ser factores importantes, para una sólida formación de los estudiantes del Colegio.

Lo anterior, constituye una primera fase, que podría hacerse avanzar más, si, se llegara a complementar con una enseñanza de contenidos matemáticos, con el apoyo del computador personal, articulado a la docencia de las matemáticas en este nivel del bachillerato. Aunque esto, corresponde a un desarrollo de propuestas didácticas en esa dirección, cuyos proyectos de trabajo se basaran o apoyaran en materiales didácticos ya elaborados, de manera de aprovechar los enfoques e intencionalidad, vinculados mediante reflexiones originadas en elementos de naturaleza didáctica, cuyos principios tuvieran contexto en una perspectiva constructivista. Todo esto requiere, es cierto, disponibilidad de recursos y principalmente la conformación de equipos de trabajo, constituidos por personal docente el cual, además de la rica experiencia que ya se posee, en gran parte de los docentes de matemáticas del Colegio, aúne sólidos conocimientos sobre teorías de aprendizaje, a partir de y, con las cuales pueda, de manera fundada, desarrollar didácticas de las matemáticas bajo un enfoque de interés, el cual se inscriba en una perspectiva teórica de enseñanza, más acorde a los propósitos formulados en el P. E. A.

CONCLUSIONES

Para finalizar, se agregan algunos conceptos, los cuales, a manera de conclusiones sintetizan lo esencial de las conceptualizaciones que fueron desarrolladas a lo largo de ésta propuesta didáctica. Los conceptos vertidos, se refieren a tres aspectos de la propuesta: el teórico, el didáctico y el de evaluación.

1. En relación al primero, de acuerdo a los propósitos educacionales señalados en el P. E. A., y en congruencia con los desarrollos conceptuales realizados en ésta propuesta. Es plausible el enfoque de un constructivismo didáctico, en términos de una convergencia de principios interpretativos del aprendizaje, por el sentido orientiacional que representa para el docente de matemáticas.

   Todo esto, sin perder de vista, que los 'riesgos' que representa la carencia de una teoría que configure un constructivismo 'fuerte' deben ser reconocidos como elementos sujetos a una tarea de integración teórica.

   Una consecuencia inmediata, la cual debería ser subsumida a partir de lo postulado antes, consiste en que a partir de un registro sistemático, de una práctica docente igualmente sistemática, pudiera llegarse a conformar elementos base, o principios de orientación, para estructurar un enfoque de un constructivismo didáctico afincado en el aula, mediante el cual, pudieran hacerse planteamientos generales, enriquecedores de posibilidades de realización de observaciones y estudios que permitieran elaborar conocimientos destinados a dar forma un enfoque didáctico propio, fundado a partir de situaciones didácticas bien controladas.

Si se toma en cuenta, que el enfoque de un constructivismo didáctico, en nuestro Bachillerato Universitario, es apenas una concepción incipiente, en la cual encuentran elementos muy estimulantes para un trabajo docente, que considere entre sus metas, el logro de más y mejores aprendizajes. Tales elementos, valen la pena de ser **reflexionados, profundizados y elucidados en el mejor los casos** para avanzar en mayor grado, en el desarrollo de actividades sobre los aspectos de una interacción múltiple:

ALUMNO - MATERIAL POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVO - PROFESOR

Una consecuencia de lo anterior, podría ser que se llegara a sentar bases para el desarrollo de teorizaciones las cuales 'cuadraran' más con la realidad, al provenir estas como resultado de abstracciones reflexivas de la práctica y registro sistemático, de una docencia matemática, realizada en ese 'micromundo' didáctico llamado C. C. H.

2. El segundo término, relativo al aspecto didáctico. Ante el establecimiento del P. E. A. , se impone como una necesidad ineludible, el diseño y elaboración de materiales didácticos de apoyo a la docencia matemática en el Colegio, los cuales, atendiendo al desarrollo y presentación de los contenidos específicos del programa, concreticen de manera consistente, el enfoque y los propósitos de un constructivismo didáctico, vía resolución de problemas. Se tiene claridad plena, de que materiales de esta naturaleza, son apenas, una respuesta a una visión del proceso educativo del colegio. Tales materiales didácticos constituyen un apoyo a la educación matemática del estudiante, pero no definen el proceso educativo del cual, la interacción múltiple entre,

alumno—material potencialmente significativo—profesor

es columna vertebral y del cual forma parte.

3. El último término, concerniente a la evaluación, es un tema complejo de por sí. A la luz de la experiencia realizada, al aplicar el material didáctico. Puede afirmarse lo siguiente: es necesario incorporar otros elementos como factores importantes para hacer que la evaluación que se hace, acerca de los aprendizajes logrados por

el estudiante, adquiera un sentido más integral, o bien, que sea menos parcial. Al respecto, bien puede y, se piensa que así debería ser, apelar a la experiencia del profesorado como un vigoroso potencial de aportaciones a partir de las cuales, se hiciese posible el diseño de posibilidades que puedan traducirse en factores de apoyo importantes, útiles y funcionales para el binomio,

ESTUDIANTE—PROFESOR

el cual sintetiza el proceso educacional.

APENDICE

FORMA DE EVALUACION DE UN TEXTO DE MATEMATICAS

Titulo: Propuesta Metodológica Nivel del Curso: Bachillerato

Autor (es): José Guadalupe Zaragoza Ramírez Adecuado para

Por arriba del estudiante promedio

estudiante promedio ✔

Por abajo del estudiante promedio

Editor: particular 1997 Derechos Reservados: ______

Nombre del Evaluador: José Guadalupe Zaragoza Ramírez

PROMEDIOS ESTIMADOS

$$\frac{5}{\text{Contenidos}} + \frac{4.75}{\text{Organización}} + \frac{4.16}{\text{Materiales Auxiliares}} + \frac{5}{\text{Readaptabilidad}}$$

$$+ \frac{5}{\text{Características Físicas}} = \frac{23.91}{\text{Promedio Total}}$$

I. Contenidos (Peso 25 %)

A. Areas básicas de destreza según el NCSTM de acuerdo a su Postitión Paper on Basic Mathematical Skills, 1976.

1. Resolución de problemas.
   Problemas y estrategias de resolución de problemas que estén ubicados a través del texto.
2. Aplicaciones Matemáticas a Situaciones Cotidianas.
   Situaciones reales y cotidianas apropiadas al nivel de los estudiantes y que están reflejadas en el texto que usan.
3. Cuidado (o agudeza) y Racionalidad de resultados.
   Técnicas para comprobar la racionalidad de los resultados desarrollados a los que los estudiantes se enfrentan.
4. Estimación y Aproximación .
   Técnicas de estimación y aproximación desarrolladas.
5. Lectura, Interpretación y Construcción de Tablas, Cartas y gráficas.

B. Contenidos Específicos del Curso

1. Orden de los números reales
2. Desigualdades. Intervalos
3. Desigualdades con valores absolutos
4. Inecuaciones o desigualdades lineales
5. Dos o mas desigualdades con dos o mas incógnitas
6. Aplicaciones
7. Desigualdades cuadráticas

.42 %	×	12	=	5
Peso		Créditos		Promedio estimado

II Organización Peso 25 %

A. Desarrollo de la lección

✓ 1. El texto forma una comprensión matemática bajo un enfoque en espiral.
✓ 2. El contenido de cada sección refleja un tópico central.
✓ 3. Presenta las secciones en una secuenciación lógica.
✓ 4. Un concepto es desarrollado en un solo tiempo (o directamente).
✓ 5. Lleva al estudiante, de ejercicios concretos al pensamiento abstracto.
✓ 6. El texto da oportunidad de discutir ideas Matemáticas que faciliten al profesor comprobar la comprensión .
✓ 7. Se dan ejemplos que ayudan a los estudiantes a comprender los conceptos.
✓ 8. Se proveen prácticas escritas después de las explicaciones
✓ 9. Se hacen estipulaciones en cada lección que atiendan las diferencias individuales en la habilidad del estudiante.
✓ 10. actividades que estimulen a los estudiantes involucrados.

B. Ejercicios

✓ 1. Existen ejercicios de dificultad gradual para cada concepto desarrollado.
✓ 2. Se incluyen ejercicios que estimulan al estudiante a generalizar y aplicar conocimientos a situaciones nuevas.
✓ 3. Hay equilibrio entre el reforzamiento de destrezas y aplicaciones.
✓ 4. Hay una variedad de tipos de ejercicios.
5. Se proporciona un número suficiente de respuestas a los ejercicios

C. Programa de evaluación de estudiantes

✓ 1. Se fomenta la semievaluación; existe suficiente retroalimentación para cada lección.
✓ 2. Existe un apartado (o sección) de pruebas.
✓ 3. Hay pruebas de repaso a través del texto.
✓ 4. Hay pruebas apropiadas para evaluar el nivel de habilidades del estudiante.
✓ 5. Se dan procedimientos que ayudan a identificar necesidades especificas de instrucción.

.25 %	×	19	=	4.75
Peso		Créditos		Promedio estimado

III. Materiales Auxiliares **Peso 20 %**

A. Manual del profesor

✓ 1. El manual del profesor está bien indiciado
✓ 2. Información matemática básica es clara y apropiada para cada lección
✓ 3. Se suministran estrategias para atender las deferencias individuales y de grupo basadas sobre diagnosis apropiadas.
✓ 4. Hay un desarrollo conceptual en cada lección que fomenta una interacción significativa entre el estudiante y el profesor.
5. Se proporcionan métodos para analizar ciertos errores básicos del estudiante
✓ 6. Se dan directrices para considerar y aplicar ideas de instrucción.

.83 %	×	5	=	4.16
Peso		Créditos		Promedio estimado

IV. Readaptabilidad (Peso 20 %)

✓ A. Las explicaciones directas son claras
✓ B. El nivel de lectura es apropiado para el nivel de uso a que está destinado el texto
✓ C. El vocabulario matemático y símbolos introducidos están en un nivel apropiado

1.66 %	×	3	=	5
Peso		Créditos		Promedio estimado

V. Características Físicas (Peso 10 %)

✓ 1. El tamaño del texto es apropiado para el estudiante a quien está dirigido.
✓ 2. El tamaño y tipo de letra son adecuados para el grado y nivel del estudiante.
✓ 3. Las ilustraciones son funcionales, atractivas y apropiadas para el grado y nivel.
✓ 4. El diseño de página está enmarcado y balanceado con respecto a los encabezados, material impreso e ilustraciones.
✓ 5. El índice facilita el uso del texto.
✓ 6. El texto tiene encabezados concisos.

.83 %	×	6	=	5
Peso		Créditos		Promedio estimado

FORMA DE EVALUACION DE UN TEXTO DE MATEMATICAS

Titulo: Algebra moderna y Trigonometría Nivel del Curso: Bachillerato

Autor (es): Dolciani / Wooton / Berman Adecuado para

Por arriba del estudiante promedio

estudiante promedio ✓

Por abajo del estudiante promedio

Editor: Publicación Cultural, 1991 Derechos Reservados: __________

Nombre del Evaluador: José Guadalupe Zaragoza Ramírez

PROMEDIOS ESTIMADOS

$$\frac{4.62}{\text{Contenidos}} + \frac{3.5}{\text{Organización}} + \frac{1.67}{\text{Materiales Auxiliares}} + \frac{5}{\text{Readaptabilidad}}$$

$$+ \frac{4.17}{\text{Características Físicas}} = \frac{18.96}{\text{Promedio Total}}$$

I. Contenidos (Peso 25 %)

A. Areas básicas de destreza según el NCSTM de acuerdo a su Postition Paper on Basic Mathematical Skills, 1976.

1. Resolución de problemas.
   Problemas y estrategias de resolución de problemas que estén ubicados a través del texto.
2. Aplicaciones Matemáticas a Situaciones Cotidianas.
   Situaciones reales y cotidianas apropiadas al nivel de los estudiantes y que están reflejadas en el texto que usan.
3. Cuidado y Racionalidad de resultados. Técnicas para comprobar la racionalidad de los resultados desarrollados a los que los estudiantes se enfrentan.
4. Estimación y Aproximación.
   Técnicas de estimación y aproximación desarrolladas.
5. Lectura, Interpretación y Construcción de Tablas, Cartas y gráficas.

B. Contenidos Específicos del Curso

1. Orden en el conjunto de los números reales
2. Desigualdades. Equivalentes
3. Combinación de proporciones abiertas
4. Desigualdades lineales y sistemas
5. Programación Lineal

.42 %	×	11	=	4.62
Peso		Créditos		Promedio estimado

II Organización Peso 25 %

A. Desarrollo de la lección

✓ 1. El texto forma una comprensión matemática bajo un enfoque en espiral.
2. El contenido de cada sección refleja un tópico central.
3. Presenta las secciones en una secuenciación lógica.
4. Un concepto es desarrollado en un solo tiempo (o directamente).
✓ 5. Lleva al estudiante, de ejercicios concretos al pensamiento abstracto.
✓ 6. El texto da oportunidad de discutir ideas Matemáticas que faciliten al profesor comprobar la comprensión .
✓ 7. Se dan ejemplos que ayudan a los estudiantes a comprender los conceptos.
✓ 8. Se proveen prácticas escritas después de las explicaciones
9. Se hacen estipulaciones en cada lección que atiendan las diferencias individuales en la habilidad del estudiante.
10. actividades que estimulen a los estudiantes involucrados.

B. Ejercicios

✓ 1. Existen ejercicios de dificultad gradual para cada concepto desarrollado.
✓ 2. Se incluyen ejercicios que estimulan al estudiante a generalizar y aplicar conocimientos a situaciones nuevas.
3. Hay equilibrio entre el reforzamiento de destrezas y aplicaciones.
✓ 4. Hay una variedad de tipos de ejercicios.
✓ 5. Se proporciona un número suficiente de respuestas a los ejercicios

C. Programa de evaluación de estudiantes

✓ 1. Se fomenta la semievaluación; existe suficiente retroalimentación para cada lección.
✓ 2. Existe un apartado (o sección) de pruebas.
✓ 3. Hay pruebas de repaso a través del texto.
✓ 4. Hay pruebas apropiadas para evaluar el nivel de habilidades del estudiante.
✓ 5. Se dan procedimientos que ayudan a identificar necesidades específicas de instrucción.

25 %	×	14	=	3.5
Peso		Créditos		Promedio estimado

III. Materiales Auxiliares Peso 20 %

A. Manual del profesor

1. El manual del profesor está bien indiciado
2. Información matemática básica es clara y apropiada para cada lección
3. Se suministran estrategias para atender las deferencias individuales y de grupo basadas sobre diagnosis apropiadas.
4. Hay un desarrollo conceptual en cada lección que fomenta una interacción significativa entre el estudiante y el profesor.
5. Se proporcionan métodos para analizar ciertos errores básicos del estudiante
6. Se dan directrices para considerar y aplicar ideas de instrucción.

.83 %	×	2	=	1.67
Peso		Créditos		Promedio estimado

IV. Readaptabilidad (Peso 20 %)

A. Las explicaciones directas son claras
B. El nivel de lectura es apropiado para el nivel de uso a que está destinado el texto
C. El vocabulario matemático y símbolos introducidos están en un nivel apropiado

1.67 %	×	3	=	5
Peso		Créditos		Promedio estimado

V. Características Físicas (Peso 10 %)

1. El tamaño del texto es apropiado para el estudiante a quien está dirigido.
2. El tamaño y tipo de letra son adecuados para el grado y nivel del estudiante.
3. Las ilustraciones son funcionales, atractivas y apropiadas para el grado y nivel.
4. El diseño de página está enmarcado y balanceado con respecto a los encabezados, material impreso e ilustraciones.
5. El índice facilita el uso del texto.
6. El texto tiene encabezados concisos.

.83 %	×	5	=	4.17
				Promedio

FORMA DE EVALUACION DE UN TEXTO DE MATEMATICAS

Titulo: Algebra **Nivel del Curso:** Bachillerato

Autor (es): Larson / Hostettler **Adecuado para**

Por arriba del estudiante promedio

estudiante promedio ✓

Por abajo del estudiante promedio

Editor: Publicaciones Cultural, 1996 **Derechos Reservados:** ______

Nombre del Evaluador: José Guadalupe Zaragoza Ramírez

PROMEDIOS ESTIMADOS

4.2	+	5	+	5	+	5
Contenidos		Organización		Materiales Auxiliares		Readaptabilidad

	4.71	=	23.37
+	Características Físicas		Promedio Total

I. Contenidos (Peso 25 %)

A. Areas básicas de destreza según el NCSTM de acuerdo a su Postitión Paper on Basic Mathematical Skills, 1976.

1. Resolución de problemas.
   Problemas y estrategias de resolución de problemas que estén ubicados a través del texto.
2. Aplicaciones Matemáticas a Situaciones Cotidianas.
   Situaciones reales y cotidianas apropiadas al nivel de los estudiantes y que están reflejadas en el texto que usan.
3. Cuidado (o agudeza) y Racionalidad de resultados.
   Técnicas para comprobar la racionalidad de los resultados desarrollados a los que los estudiantes se enfrentan.
4. Estimación y Aproximación.
   Técnicas de estimación y aproximación desarrolladas.
5. Lectura, Interpretación y Construcción de Tablas, Cartas y gráficas.

B. Contenidos Específicos del Curso

1. Desigualdades lineales
2. Intervalos en la recta lineal
3. Solución a una desigualdad lineal
4. Desigualdad en valores absolutos
5. Aplicaciones

.42 %	×	10	=	4.2
Peso		Créditos		Promedio estimado

II Organización Peso 25 %

A. Desarrollo de la lección

✓ 1. El texto forma una comprensión matemática bajo un enfoque en espiral.
✓ 2. El contenido de cada sección refleja un tópico central.
✓ 3. Presenta las secciones en una secuenciación lógica.
✓ 4. Un concepto es desarrollado en un solo tiempo (o directamente).
✓ 5. Lleva al estudiante, de ejercicios concretos al pensamiento abstracto.
✓ 6. El texto da oportunidad de discutir ideas Matemáticas que faciliten al profesor comprobar la comprensión .
✓ 7. Se dan ejemplos que ayudan a los estudiantes a comprender los conceptos.
✓ 8. Se proveen prácticas escritas después de las explicaciones
✓ 9. Se hacen estipulaciones en cada lección que atiendan las diferencias individuales en la habilidad del estudiante.
✓ 10. actividades que estimulen a los estudiantes involucrados.

B. Ejercicios

✓ 1. Existen ejercicios de dificultad gradual para cada concepto desarrollado.
✓ 2. Se incluyen ejercicios que estimulan al estudiante a generalizar y aplicar conocimientos a situaciones nuevas.
✓ 3. Hay equilibrio entre el reforzamiento de destrezas y aplicaciones.
✓ 4. Hay una variedad de tipos de ejercicios.
✓ 5. Se proporciona un número suficiente de respuestas a los ejercicios

C. Programa de evaluación de estudiantes

✓ 1. Se fomenta la semievaluación; existe suficiente retroalimentación para cada lección.
✓ 2. Existe un apartado (o sección) de pruebas.
✓ 3. Hay pruebas de repaso a través del texto.
✓ 4. Hay pruebas apropiadas para evaluar el nivel de habilidades del estudiante.
✓ 5. Se dan procedimientos que ayudan a identificar necesidades específicas de instrucción.

.25 %	×	20	=	5
Peso		Créditos		Promedio estimado

III. Materiales Auxiliares Peso 20 %

A. Manual del profesor

✓ 1. El manual del profesor está bien indiciado
✓ 2. Información matemática básica es clara y apropiada para cada lección
✓ 3. Se suministran estrategias para atender las deferencias individuales y de grupo basadas sobre diagnosis apropiadas.
✓ 4. Hay un desarrollo conceptual en cada lección que fomenta una interacción significativa entre el estudiante y el profesor.
✓ 5. Se proporcionan métodos para analizar ciertos errores básicos del estudiante
✓ 6. Se dan directrices para considerar y aplicar ideas de instrucción.

.83 %	×	6	=	5
Peso		Créditos		Promedio estimado

IV. Readaptabilidad (Peso 20 %)

✓ A. Las explicaciones directas son claras
✓ B. El nivel de lectura es apropiado para el nivel de uso a que está destinado el texto
✓ C. El vocabulario matemático y símbolos introducidos están en un nivel apropiado

1.76 %	×	3	=	5
Peso		Créditos		Promedio estimado

V. Características Físicas (Peso 10 %)

✓ 1. El tamaño del texto es apropiado para el estudiante a quien está dirigido.
✓ 2. El tamaño y tipo de letra son adecuados para el grado y nivel del estudiante.
✓ 3. Las ilustraciones son funcionales, atractivas y apropiadas para el grado y nivel.
✓ 4. El diseño de página está enmarcado y balanceado con respecto a los encabezados, material impreso e ilustraciones.
✓ 5. El índice facilita el uso del texto.
✓ 6. El texto tiene encabezados concisos.

.83 %	×	5	=	4.17
Peso		Créditos		Promedio estimado

FORMA DE EVALUACION DE UN TEXTO DE MATEMATICAS

Titulo: Algebra Nivel del Curso: Bachillerato

Autor (es): Rees, P., Sparks, F. Adecuado para

Por arriba del estudiante promedio

estudiante promedio ✔

Por abajo del estudiante promedio

Editor: Mc Graw-Hill, 1991 Derechos Reservados:

Nombre del Evaluador: José Guadalupe Zaragoza Ramírez

PROMEDIOS ESTIMADOS

$$\underset{\text{Contenidos}}{4.2} + \underset{\text{Organización}}{2.75} + \underset{\text{Materiales Auxiliares}}{3.33} + \underset{\text{Readaptabilidad}}{1.67}$$

$$+ \underset{\text{Características Físicas}}{3.33} = \underset{\text{Promedio Total}}{15.28}$$

I. Contenidos (Peso 25 %)

A. Areas básicas de destreza según el NCSTM de acuerdo a su Postitión Paper on Basic Mathematical Skills, 1976.

1. Resolución de problemas.
   Problemas y estrategias de resolución de problemas que estén ubicados a través del texto.
2. Aplicaciones Matemáticas a Situaciones Cotidianas.
   Situaciones reales y cotidianas apropiadas al nivel de los estudiantes y que están reflejadas en el texto que usan.
3. Cuidado (o agudeza) y Racionalidad de resultados.
   Técnicas para comprobar la racionalidad de los resultados desarrollados a los que los estudiantes se enfrentan.
4. Estimación y Aproximación.
   Técnicas de estimación y aproximación desarrolladas.
5. Lectura, Interpretación y Construcción de Tablas, Cartas y gráficas.

B. Contenidos Específicos del Curso

1. Desigualdades
2. Desigualdades no lineales
3. Desigualdades con valores absolutos
4. Aplicaciones

.42 %	×	10	=	4.2
Peso		Créditos		Promedio estimado

II Organización Peso 25 %

A. Desarrollo de la lección

1. El texto forma una comprensión matemática bajo un enfoque en espiral.
2. El contenido de cada sección refleja un tópico central.
3. Presenta las secciones en una secuenciación lógica.
4. Un concepto es desarrollado en un solo tiempo (o directamente).
5. Lleva al estudiante, de ejercicios concretos al pensamiento abstracto.
6. El texto da oportunidad de discutir ideas Matemáticas que faciliten al profesor comprobar la comprensión .
7. Se dan ejemplos que ayudan a los estudiantes a comprender los conceptos.
8. Se proveen prácticas escritas después de las explicaciones
9. Se hacen estipulaciones en cada lección que atiendan las diferencias individuales en la habilidad del estudiante.
10. actividades que estimulen a los estudiantes involucrados.

B. Ejercicios

1. Existen ejercicios de dificultad gradual para cada concepto desarrollado.
2. Se incluyen ejercicios que estimulan al estudiante a generalizar y aplicar conocimientos a situaciones nuevas.
3. Hay equilibrio entre el reforzamiento de destrezas y aplicaciones.
4. Hay una variedad de tipos de ejercicios.
5. Se proporciona un número suficiente de respuestas a los ejercicios

C. Programa de evaluación de estudiantes

1. Se fomenta la semievaluación; existe suficiente retroalimentación para cada lección.
2. Existe un apartado (o sección) de pruebas.
3. Hay pruebas de repaso a través del texto.
4. Hay pruebas apropiadas para evaluar el nivel de habilidades del estudiante.
5. Se dan procedimientos que ayudan a identificar necesidades específicas de instrucción.

.25 %	×	11	=	2.75
Peso		Créditos		Promedio estimado

III. Materiales Auxiliares **Peso 20 %**

A. Manual del profesor

1. El manual del profesor está bien indiciado
2. Información matemática básica es clara y apropiada para cada lección
3. Se suministran estrategias para atender las deferencias individuales y de grupo basadas sobre diagnosis apropiadas.
4. Hay un desarrollo conceptual en cada lección que fomenta una interacción significativa entre el estudiante y el profesor.
5. Se proporcionan métodos para analizar ciertos errores básicos del estudiante
6. Se dan directrices para considerar y aplicar ideas de instrucción.

.83 %	×	4	=	3.33
Peso		Créditos		Promedio estimado

IV. Readaptabilidad (Peso 20 %)

A. Las explicaciones directas son claras
B. El nivel de lectura es apropiado para el nivel de uso a que está destinado el texto
C. El vocabulario matemático y símbolos introducidos están en un nivel apropiado

1.67 %	×	1	=	1.67
Peso		Créditos		Promedio estimado

V. Características Físicas (Peso 10 %)

1. El tamaño del texto es apropiado para el estudiante a quien está dirigido.
2. El tamaño y tipo de letra son adecuados para el grado y nivel del estudiante.
3. Las ilustraciones son funcionales, atractivas y apropiadas para el grado y nivel.
4. El diseño de página está enmarcado y balanceado con respecto a los encabezados, material impreso e ilustraciones.
5. El índice facilita el uso del texto.
6. El texto tiene encabezados concisos.

.83 %	×	4	=	3.33
				Promedio

FORMA DE EVALUACION DE UN TEXTO DE MATEMATICAS

Titulo: Algebra **Nivel del Curso:** Bachillerato

Autor (es): Bittinger **Adecuado para**

Por arriba del estudiante promedio

estudiante promedio ✓

Por abajo del estudiante promedio

Editor: Adison Nesley Iberoamericana, Mex., 1992 **Derechos Reservados:** ______

Nombre del Evaluador: José Guadalupe Zaragoza Ramírez

PROMEDIOS ESTIMADOS

3.8		5		3.33		5
Contenidos	+	Organización	+	Materiales Auxiliares	+	Readaptabilidad

	3.3		20.7
+	Características Físicas	=	Promedio Total

I. Contenidos (Peso 25 %)

A. Areas básicas de destreza según el NCSTM de acuerdo a su Postitión Paper on Basic Mathematical Skills, 1976.

1. Resolución de problemas.
   Problemas y estrategias de resolución de problemas que estén ubicados a través del texto.
2. Aplicaciones Matemáticas a Situaciones Cotidianas.
   Situaciones reales y cotidianas apropiadas al nivel de los estudiantes y que están reflejadas en el texto que usan.
3. Cuidado (o agudeza) y Racionalidad de resultados.
   Técnicas para comprobar la racionalidad de los resultados desarrollados a los que los estudiantes se enfrentan.
4. Estimación y Aproximación.
   Técnicas de estimación y aproximación desarrolladas.
5. Lectura, Interpretación y Construcción de Tablas, Cartas y gráficas.

B. Contenidos Específicos del Curso

1.
2. Desigualdades y sus gráficas
3. Propiedades activas multiplicativas
4. Resolución de problemas. Métodos
5. Aplicaciones

.42 %	×	9	=	3.8
Peso		Créditos		Promedio estimado

II Organización Peso 25 %

A. Desarrollo de la lección

✓ 1. El texto forma una comprensión matemática bajo un enfoque en espiral.
✓ 2. El contenido de cada sección refleja un tópico central.
✓ 3. Presenta las secciones en una secuenciación lógica.
✓ 4. Un concepto es desarrollado en un solo tiempo (o directamente).
✓ 5. Lleva al estudiante, de ejercicios concretos al pensamiento abstracto.
6. El texto da oportunidad de discutir ideas Matemáticas que faciliten al profesor comprobar la comprensión .
✓ 7. Se dan ejemplos que ayudan a los estudiantes a comprender los conceptos.
✓ 8. Se proveen prácticas escritas después de las explicaciones
✓ 9. Se hacen estipulaciones en cada lección que atiendan las diferencias individuales en la habilidad del estudiante.
✓ 10. actividades que estimulen a los estudiantes involucrados.

B. Ejercicios

✓ 1. Existen ejercicios de dificultad gradual para cada concepto desarrollado.
✓ 2. Se incluyen ejercicios que estimulan al estudiante a generalizar y aplicar conocimientos a situaciones nuevas.
✓ 3. Hay equilibrio entre el reforzamiento de destrezas y aplicaciones.
✓ 4. Hay una variedad de tipos de ejercicios.
✓ 5. Se proporciona un número suficiente de respuestas a los ejercicios

C. Programa de evaluación de estudiantes

✓ 1. Se fomenta la semievaluación; existe suficiente retroalimentación para cada lección.
✓ 2. Existe un apartado (o sección) de pruebas.
✓ 3. Hay pruebas de repaso a través del texto.
✓ 4. Hay pruebas apropiadas para evaluar el nivel de habilidades del estudiante.
✓ 5. Se dan procedimientos que ayudan a identificar necesidades específicas de instrucción.

.25 %	×	20	=	5
Peso		Créditos		Promedio estimado

III. Materiales Auxiliares **Peso ___20 %___**

A. Manual del profesor

✓ 1. El manual del profesor está bien indiciado
✓ 2. Información matemática básica es clara y apropiada para cada lección
✓ 3. Se suministran estrategias para atender las deferencias individuales y de grupo basadas sobre diagnosis apropiadas.
✓ 4. Hay un desarrollo conceptual en cada lección que fomenta una interacción significativa entre el estudiante y el profesor.
✓ 5. Se proporcionan métodos para analizar ciertos errores básicos del estudiante
✓ 6. Se dan directrices para considerar y aplicar ideas de instrucción.

.83 %	×	4	=	3.33
Peso		Créditos		Promedio estimado

IV. Readaptabilidad (Peso 20 %)

✓ A. Las explicaciones directas son claras
✓ B. El nivel de lectura es apropiado para el nivel de uso a que está destinado el texto
✓ C. El vocabulario matemático y símbolos introducidos están en un nivel apropiado

1.67 %	×	3	=	5
Peso		Créditos		Promedio estimado

V. Características Físicas (Peso 10 %)

✓ 1. El tamaño del texto es apropiado para el estudiante a quien está dirigido.
2. El tamaño y tipo de letra son adecuados para el grado y nivel del estudiante.
3. Las ilustraciones son funcionales, atractivas y apropiadas para el grado y nivel.
✓ 4. El diseño de página está enmarcado y balanceado con respecto a los encabezados, material impreso e ilustraciones.
✓ 5. El índice facilita el uso del texto.
✓ 6. El texto tiene encabezados concisos.

.83 %	×	4	=	3.33
				Promedio

FORMA DE EVALUACION DE UN TEXTO DE MATEMATICAS

Titulo: Algebra y Trigonometría Simplificada   Nivel del Curso: Bachillerato

Autor (es): Martín M. Zuckerman   Adecuado para

Por arriba del estudiante promedio

estudiante promedio ✔

Por abajo del estudiante promedio

Editor: Limusa 1993   Derechos Reservados: ______

Nombre del Evaluador: José Guadalupe Zaragoza Ramírez

PROMEDIOS ESTIMADOS

2.9		3		2.9		5
Contenidos	+	Organización	+	Materiales Auxiliares	+	Readaptabilidad

	3.33		16.73
+	Características Físicas	=	Promedio Total

I. Contenidos (Peso 25 %)

A. Areas básicas de destreza según el NCSTM de acuerdo a su Postitión Paper on Basic Mathematical Skills, 1976.

1. **Resolución de problemas.**
   Problemas y estrategias de resolución de problemas que estén ubicados a través del texto.
2. **Aplicaciones Matemáticas a Situaciones Cotidianas.**
   Situaciones reales y cotidianas apropiadas al nivel de los estudiantes y que están reflejadas en el texto que usan.
3. **Cuidado (o agudeza) y Racionalidad de resultados.**
   Técnicas para comprobar la racionalidad de los resultados desarrollados a los que los estudiantes se enfrentan.
4. **Estimación y Aproximación.**
   Técnicas de estimación y aproximación desarrolladas.
5. **Lectura, Interpretación y Construcción de Tablas, Cartas y gráficas.**

B. Contenidos Específicos del Curso

1. Las desigualdades y la recta numérica real
2. Resolución de desigualdades
3. Valor absoluto en desigualdades

.42 %	×	7	=	2.9
Peso		Créditos		Promedio estimado

II Organización Peso 25 %

A. Desarrollo de la lección

✓ 1. El texto forma una comprensión matemática bajo un enfoque en espiral.
✓ 2. El contenido de cada sección refleja un tópico central.
✓ 3. Presenta las secciones en una secuenciación lógica.
✓ 4. Un concepto es desarrollado en un solo tiempo (o directamente).
✓ 5. Lleva al estudiante, de ejercicios concretos al pensamiento abstracto.
✓ 6. El texto da oportunidad de discutir ideas Matemáticas que faciliten al profesor comprobar la comprensión .
✓ 7. Se dan ejemplos que ayudan a los estudiantes a comprender los conceptos.
✓ 8. Se proveen prácticas escritas después de las explicaciones
✓ 9. Se hacen estipulaciones en cada lección que atiendan las diferencias individuales en la habilidad del estudiante.
10. actividades que estimulen a los estudiantes involucrados.

B. Ejercicios

✓ 1. Existen ejercicios de dificultad gradual para cada concepto desarrollado.
✓ 2. Se incluyen ejercicios que estimulan al estudiante a generalizar y aplicar conocimientos a situaciones nuevas.
3. Hay equilibrio entre el reforzamiento de destrezas y aplicaciones.
✓ 4. Hay una variedad de tipos de ejercicios.
✓ 5. Se proporciona un número suficiente de respuestas a los ejercicios

C. Programa de evaluación de estudiantes

1. Se fomenta la semievaluación; existe suficiente retroalimentación para cada lección.
✓ 2. Existe un apartado (o sección) de pruebas.
3. Hay pruebas de repaso a través del texto.
4. Hay pruebas apropiadas para evaluar el nivel de habilidades del estudiante.
✓ 5. Se dan procedimientos que ayudan a identificar necesidades específicas de instrucción.

.25 %	×	12	=	3
Peso		Créditos		Promedio estimado

III. Materiales Auxiliares   Peso 20 %

A. Manual del profesor

1. El manual del profesor está bien indiciado
2. Información matemática básica es clara y apropiada para cada lección
3. Se suministran estrategias para atender las deferencias individuales y de grupo basadas sobre diagnosis apropiadas.
4. Hay un desarrollo conceptual en cada lección que fomenta una interacción significativa entre el estudiante y el profesor.
5. Se proporcionan métodos para analizar ciertos errores básicos del estudiante
6. Se dan directrices para considerar y aplicar ideas de instrucción.

.83 %	×	3	=	2.5
Peso		Créditos		Promedio estimado

IV. Readaptabilidad (Peso 20 %)

A. Las explicaciones directas son claras
B. El nivel de lectura es apropiado para el nivel de uso a que está destinado el texto
C. El vocabulario matemático y símbolos introducidos están en un nivel apropiado

1.67 %	×	3	=	5
Peso		Créditos		Promedio estimado

V. Características Físicas (Peso 10 %)

1. El tamaño del texto es apropiado para el estudiante a quien está dirigido.
2. El tamaño y tipo de letra son adecuados para el grado y nivel del estudiante.
3. Las ilustraciones son funcionales, atractivas y apropiadas para el grado y nivel.
4. El diseño de página está enmarcado y balanceado con respecto a los encabezados, material impreso e ilustraciones.
5. El índice facilita el uso del texto.
6. El texto tiene encabezados concisos.

.83 %	×	4	=	3.33
Peso		Créditos		Promedio estimado

Bibliografía

ABBAGNANO, N. (1987). Diccionario de Filosofía. México. F. C. E.

ACKOFF, L. R. (1973). Fundamentos de Investigación de Operaciones. México, Limusa.

BITTINGER. M.(1992). Algebra., Cap. IV. Adison Wesley, Iberoamericana. México.

BLAIS, M. D. (1988). "_Constructivism—a Theoretical Revolution for Albebra". *Mathematical Teacher* Noviembre . S. I.

BLAUBERG. I. (1991). Diccionario de Filosofía. Trad. Alejo Mendez García. México.

BLOCK D. y PAPACOSTAS A.(198?). "Didáctica Constructivista y matemática: una introducción". *Cero en conducta. Año I. No. 4.pp. 13-23 Marzo/Abril. S. L.*

BROUSSEAU. G.(1993). " Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas". *En Lecturas en didáctica de las martemáticas: Escuela Francesa.* CIVESTAV-IPN. Compiladores: Ernesto A. Sánchez S. y Gonzalo Zubieta Badillo.Depto. de Mat. Educativa. *Pp. 1-68.* México.

BRUNER, J., S.(1967). El Saber y el Sentir.Ensayos sobre el Conocimiento. Trad. Rafael Castillo Dibildox México 1, D. F. Pax-Mex.

C. C. H., U.A.C.B. (1996). PROGRAMAS DE ESTUDIO PARA LAS ASIGNATURAS: MATEMATICAS I Y II (PRIMERO Y SEGUNDO SEMESTRES JULIO .

C. C. H. (1996). PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO. U. A. C. P. y P. Gaceta Amarilla., Creación del C. C. H. 26/ 01/ 1971.

CACEI. (1995). "LA ACREDITACION: UN RETO PARA MEJORAR LA CALIDAD DE LA EDUCACION SUPERIOR". Comité Mexicano para la Práctica Internacional de la Ingeniería. UPIICSA.- I. P. N., MéxicoD.F. Feb.

Características Esenciales de la Didáctica Cubana. Conf. 1994. S.I.

CARLON, MONROY A. / CRUZ, CONTRERAS S. (1992). Las Aplicaciones de las Matemáticas en el Salón de Clases". Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre la Formación de Profesores e Investigación Matemática Educativa. Julio . Cuernavaca Morelos.

CARLON, MONROY, A / CRUZ, CONTRERAS S.(1993). Modelo para el Aprendizaje de las Matemáticas Aplicadas". Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre la Formación de Profesores e Investigación Matemática Educativa. Agosto.

. Departamento de Matemática, F. C. N. E., Ciudad Universitaria Octavio Méndez Pereira, Estafeta Universitaria, Panamá, Rep. de Panamá.

CASANOVA, G.(1965). La Matemática y el Materialismo Dialéctico. La Habana. Editora del Consejo Nacional de Universidades.

CUADERNILLO # 54. (1995). "Programa de Estudios para las Materias de los Primeros cuatro Semestres de Matemáticas" (Versión extensa). C. C. H., UNAM 28 de Julio .

CUADERNILLO #37 .(1995). "Las Areas en el Plan de Estudios del Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades". C. C. H. UNAM. 16 de Enero .

CUADERNILLO #38. (1995). "Sistematización de la Reflexión Comunitaria Acerca de las Propuestas de Modificación al Plan de Estudios". C .C .H .. UNAM. 18.de Enero .

CUADERNILLO #40. (1995). "Primera Aproximación a la Propuesta de Programas de Psicología I y II y Ciencias de la Salud". C. C. H. UNAM., 3 de Febrero .

DICK, W. / CAREY, L., "CAP.9. DEVELOPING INSTRUCTIONAL MATERIALS".pp.164-195. "CAP.10 DESIGNING AND CONDUCTING FORMATIVVE EVALUATIONS"PP.196-255. THE SYSTEMATIC DESIGN OF INSTRUCTION. SCOTT, FORESMAN AND COMPANY. Second edition. S.f. s.a. fotocopias.

DOLCIANI/BERMAN/FREILICH. (1988). Algebra moderna. *Estructura y método*. Cap V y XIII. Publicaciones Cultural México.

DOLCIANI/WOOTON/ BERMAN. (1991). Algebra Moderna y Trigonometria. Cap I, II, III y VII Publicaciones Cultural. México.

DOUDAY, R. (1993). "Juego de marcos y dialéctica herramienta- objeto". *Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela Francesa*. CINVESTAV-IPN. Compiladores: Ernesto A. Sánchez S. y Gonzalo Zubieta Badillo. Depto. de Mat. Edva.pp. 69-87. México.

FARFAN, HERNANDEZ J. (1995). LECTURAS BASICAS DE SISTEMATIZACION DE LA ENSEÑANZA I y II. COMPILACION. E. N. E. P. , ARAGON. MAESTRIA EN ENSEÑANZA SUPERIOR.

Gaceta Amarilla. (1996). "Aprueba el C. A. B. el plan y los Programas de Estudio actualizados". Número Especial. 11 de julio . C. C. H. , UNAM.

GOBRAN, A. (1990). Algebra elemental. Cap V. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

GONZALEZ, CASANOVA P. (1983). "Sesión Del Consejo Universitario Enero de 1971.". 6 de mayo de 1970. 7 de Diciembre de 1972. U. N. A. M.

GUTIERREZ, PANTOJA G. (1986). Metodología de las Ciencias Sociales-I. *Colecc. textos universitarios en ciencias sociales* .Harla. México.

HERRERA. MARQUE. A., PSICOLOGIA DE LA EDUCACION. VOL. I IPN. UPIICSA. DEPTO. DE ACTUALIZACION DOCENTE. S.A.

HESSEN, J., Teoría del Conocimiento. Quinto Sol. S.A. s .a. s. l.

KILPATRICK, J. (1987). Psychology of Mathematics Education. Vol. I. Jul .

LARSON/HOSTETTLER. (1991). Algebra. Cap II y VII. Publicaciones Cultural. México.

LOPEZ, DE MEDRANO S. (1981). Modelos Matemáticos. Trillas. México.

M., PARRA B. (1990). "Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas"., Rev. Educ. Mat. Vol.2. No. 3. Diciembre ., pp. 22-32.

MANCERA, MARTINEZ. E. / ESCAREÑO SOBERANES F. (1993). "Problemas, Maestros, y la Resolución de Problemas". Rev. Educ. Mat. Vol.5. No. 3. Diciembre . pp. 78-91.

MARX, C. / ENGELS, F. (1977). La Ideología Alemana., Edic., de Cultura Popular. México.

MODULO DE VISION GENERAL DEL C. C. H. (1995). "Escuelas Cubana, Anglo-Sajona Y Francesa". Diplomado en Ens. de las matemáticas. 2da. Etapa. Abril de 1995. C. C. H. Vallejo. México D. F.

MORENO, ARMELLA. L./ WALDEG, G. (1992). "Constructivismo y Educación Matemática". Rev., de Educ. Mat. Vol. 4 No.2. Agosto ., pp. 7-15.

MURILLO, H., ANTOLOGIA DE ENSEÑANZA SUPERIOR:. Nov. 1995. Seminario Taller. IPN. UPIICSA.

NCTM. ,"HOW TO EVALUATE MATHEMATICS TEXTBOOKS". U. S. A. 1982.

PANZA, M., Enseñanza Modular. Art. CISE. fotocopias. S. a.

PIAGET, J.(Director). " tratado de lógica y conocimiento científico. Naturaleza y métodos de la epistemología. Vol. I. F.C.E. PP.9-64.

PIAGET, J.(1985). "Seis Estudios de Psicología". *Obras Maestras del Pensamiento contemporáneo.* Origen/Planeta. México.

PIAGET, J.,(Director), "epistemología de la matemática", tratado de lógica y conocimiento. científico. Vol.3 F. C. E., pp.33-45, 69-86, 147-188.

REES, P. SPARKS, F. (1991). Algebra. Cap V y IX Mc. Graw-Hill .

REICHEMBACH, H. (1981). La Filosofía Científica. Caps. I, II, III, IV, V., F. C. E. , México.

RESOLUCION DE PROBLEMAS. CORRIENTES CUBANA, ANGLOSAJONA, FRANCESA., s.l. s.f.

ROSEMBLUETH. A. (1988). el método científico. La Prensa Médica Mexicana. CINVESTAV-IPN. México.

SANTOS, TRIGO L. M. La Resolución de Problemas: Elementos para una Propuesta en el Aprendizaje de las Matemáticas. Cuads de Invest. #25. CINVESTAV.

SANTOS, TRIGO L. M. (1994). "LA RESOLUCION DE PROBLEMAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS". Cuadernos de Investigación. No. 28.Junio . Depto. de Mat. Edva. CINVESTAV-IPN. PNFAPM. México.

SANTOS, TRIGO L. M. (1992). "Resolución de Problemas: El trabajo de Alan Schoenfeld en el Aprendizaje de las Matemáticas". Rev. Educ. Mat. Vol. 4. No.2. Agosto . pp. 16-23.

SCHOENFELD, H. A., Exploraciones sobre las Creencias y Conducta Matemática de los Estudiantes. University of Calif-Berkeley.

SCHOENFELD. H. A. ."Problem Formulating Where Do Good Problems" *Cognitive Science and Mathematics Education. Cap. 5., pp. 123-145.* Lea S. A.s. l.

SFARD. A. (1991). " On the Dual Nature of Mathematical Conception: Reflections on Processes and Objets as Different Sides of the Same Coin". Fotocopias E. S. M. 22: 1-36.

SHAMBLIN, E. J../ STEVENS, G. T. (1975). Investigación de Operaciones. Trad. Alberto Duarte y Alberto Pontón.Mc. Graw-Hill. México.

THOMAS, L. -SCHROEDER. FRANK K. LESTER Jr. ,Desarrollo de la Comprensión en Matemáticas Vía la Resolución de Problemas. Trad. S.n. fotocopias. Art.

TURNER, J. C. (1974). Matemática Moderna Aplicada. Versión española de Andrés Ortega Klein.Alianza Editoral. Madrid.

VALVERDE, L. G., "La construcción del Conocimiento". Resonancias. Inf. Cient. Y Tec..s. a.

JARDON, HERNANDEZ W. S./ MEDINA, P. (responsables).(1995). SEMINARIO DE PSICOPEDAGOGIA MAESTRIA EN ENSEÑANZA SUPERIOR.. UNAM ENEP-ARAGON. IPN.UPIICSA. abril - mayo.

WENZELBURGER, GUTEMBERGER, E. , "Una Nueva Visión para la Enseñanza de las Matemáticas". M. E. M. fotocopias. Art.

XIRAU, R.(1983). .Introducción a la Historia de la Filosofía. México: UNAM.

YUREN, CAMARENA Ma. T. (1981). Serie Temas Básicos. ANUIES. Leyes, Teorías y Modelos. Trillas. México.