01167

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNºMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

"SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS EN PRESENCIA DE BARRERAS Y ZONAS PROHIBIDAS".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

(PLANEACIÓN)

P R E S E N T A :

BENITO SÁNCHEZ LARA

INGENIERIA

DIRIGIDA POR:

Dr. RICARDO ACEVES GARCÍA

AGRADECIMIENTOS

A mi madre:
(in memoriam)

¨Ser puro y santo,
encarnación perfecta de la mujer,
luz de mis tinieblas,
fuerza de mi desaliento
risa cristalina de mis tristezas .¨

¨A ella de quien aprendí
de que la renunciación sin límites,
no debe producir desalientos
sino ímpetus continuados
para seguir en la lucha.¨

A mi padre por enseñarme la virtud de la disciplina.
A mis hermanos por apoyarme incondicionalmente en el transcurso de mi vida. Además, a mis sobrinos y cuñados por su cariño y aprecio.

A mis amigos y compañeros, con los cuales conviví en esta ciudad y que hicieron mucho más amena mi estancia. En especial a Laura Plazola Zamora, Gabriela Cano Gonzalez y Adelia Copas Osio.

Al Dr. Ricardo Aceves García por su apoyo incondicional en la realización de esta tesis.

A todos mis maestros por sembrar en mí la semilla de la búsqueda del conocimiento.

Al jurado :
Dr. José Jesús Acosta Flores
Dr. Gabriel Sánchez Guerrero
Dr. Ricardo Aceves García
M. en I. Rubén Téllez Sánchez
M. en I. Javier Suárez Rocha
que con sus críticas sobre el trabajo realizado contribuyeron a su realce.

Este trabajo es posible gracias a la ayuda del CONACyT (Consejo Nacional para la Ciencia y la Tecnología), mediante la beca con número de registro 71599.

"SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN EN PRESENCIA DE BARRERAS Y ZONAS PROHIBIDAS."

ÍNDICE GENERAL

III "Identificación de los puntos factibles de localización"

IV "Caso de estudio"

V "Conclusiones y recomendaciones"

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE MAPAS

RESUMEN

Dada la complejidad. en general, de los procesos de optimización se hace necesario desarrollar metodologías sencillas que solucionen problemas que se presentan en forma cotidiana en la práctica. Aún más, es necesario implementar metodologías que por su simplicidad puedan ser aplicadas por quienes no estén inmersos en los procesos de optimización y que computacionalmente sean fácilmente tratables.

El presente trabajo ofrece una metodología sencilla y práctica que permite resolver el problema de localización, cuando hay barreras que no permiten la localización de los servicios y en ciertos casos el tránsito hacia ellos, que en general ha sido resuelto mediante algoritmos complejos y computacionalmente poco tratables.

En el primer capítulo se pondera el proceso de localización como un aspecto estratégico empresarial y se describen con detalle los objetivos y componentes en cada etapa de decisión del proceso mismo. Además, se menciona el estado actual de resultados obtenidos al tratar de resolver el problema.

El segundo capítulo presenta una revisión de los enfoques propuestos para solucionar el problema, haciendo hincapié en considerar a la distancia como factor de localización de gran importancia.

El tercer capítulo describe el algoritmo de Larson-Sadiq, en el cual está basado este trabajo, identificando los puntos factibles de localización para su posterior proceso de evaluación. Además, presenta un ejemplo teórico de aplicación.

En el cuarto capítulo se presenta la factibilidad de aplicar el algoritmo y la sencillez y simplicidad que puede adquirir el proceso de evaluación de los sitios factibles de localización, al simplificar el proceso de programación lineal y aplicar la metodologia a un caso de estudio en la ciudad de Puebla.

Por último, se dan las conclusiones sobre las ventajas y problemas anexos que tiene y resuelve la metodología planteada, y algunas recomendaciones hechas para continuar en el estudio del problema de localización y la identificación de rutas.

INTRODUCCIÓN

El estudio de localización de un servicio es en muchas ocasiones subestimado por el analista de proyectos y el empresario. a pesar de ser uno de los factores que puede determinar la esencia misma de la estrategia empresarial. Esto es, desde hace ya mucho tiempo que las empresas lo identificaron como un elemento relevante en el renglón de servicio y venta en sus negocios. Sin embargo, el área de localización de servicios depende en mucho de las necesidades que se quiera satisfacer, del efecto de las condiciones y de la infraestructura establecida.

Dentro de un estudio para la localización de servicios se identifica un sector particular, distrito o área en una región geográfica mediante un microanálisis. Este estudio toma en cuenta factores tan importantes para la localización de servicios como son: la economía del transporte, demografía, actividades comunitarias, costo de espacio, disposición de servicios conexos, etc. necesarios en la determinación de la ubicación óptima de servicios.

Al potenciar la localización de un servicio en muchas ocasiones surge el problema de la presencia de barreras para el viaje o regiones prohibidas que sin duda dificultan la localización. Las posibles barreras de viaje que dificultan la localización de uno o varios servicios en una región determinada pueden ser zonas prohibidas donde la localización y el tránsito no son factibles, por ejemplo, construcciones, cementerios, accidentes geográficos, parques, etc.; y regiones donde la localización de servicios no está permitida pero el tránsito sí, por ejemplo: lagos y ríos.

Así, el problema que se aborda es la localización óptima de servicios asumiendo que en el trayecto entre el servicio y sus puntos de demanda hay barreras impenetrables o regiones prohibidas.

OBJETIVO

En el proceso de localización, de un paso estratégico a un paso táctico, es necesario resolver el problema en una forma operacional, que además de proporcionar visiones a futuro, proporcione soluciones inmediatas en forma óptima. Es por ello que, el objetivo general de este trabajo es:

Encontrar la solución óptima al problema de localización de servicios cuando se dificulta la ubicación de los mismos y el tránsito hacia ellos, por la presencia de obstáculos o barreras, y las trayectorias de viaje son de tipo rectangular.

Algunos objetivos específicos son:

1. Dadas las condiciones geográficas y de crecimiento urbano del pais, en áreas rurales y zonas de densidad de población elevada, estudiar el problema de localización de servicios en presencia de barreras para la ubicación y el tránsito.
2. Mediante un enfoque operacional aplicar una metodología para resolver este problema.
3. Abordar la solución al problema, generalmente dispuesto como estratégico, de manera sencilla y óptima.
4. Demostrar que para el caso continuo de localización con trayectorias rectangulares y en presencia de barreras, sólo es necesario evaluar un número finito de puntos factibles para la localización.
5. Aplicar la metodología, algoritmo y técnicas de optimización utilizados, a un estudio de caso que demuestre la importancia de éstas, así como la facilidad de su uso.

I. LA LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS

1.1 EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS.

Para muchas compañías parte importante de su manejo logístico se basa en la localización de servicios, porque implica el manejo de una compleja red de los mismos, el flujo de materiales y bienes terminados de o para ellos; además de ser uno de los factores que más influyen en los costos de producción y distribución, y por consecuencia en las utilidades y en el nivel de servicio al cliente. Por ejemplo, la localización de depósitos o almacenes implica además de la ubicación, el número de éstos, la capacidad que deben tener cada uno de ellos, la región de cobertura que tienen y el nivel de stock del mismo.

El incremento en el número de servicios de depósito en una red logística, por ejemplo, generalmente provee mayor servicio al cliente porque el inventario adicional reduce el tiempo de entrega, sin embargo, un número mayor del necesario incrementa también los costos por inventario y almacenaje. Los costos por almacenaje se incrementan por la inversión en infraestructura y los costos por inventario se incrementan porque un mayor número de servicios de depósito significa mayor inventario mínimo de seguridad, para volver al nivel específico de servicio al cliente. En contraste, los costos de transportación decrecen cuando el número de servicios se incrementa. Si existen muchos depósitos las cantidades embarcadas entre los puntos de aprovisionamiento, por ejemplo: fábricas, centros de producción, etc.; y los centros de consumo disminuye al igual que la trayectorias de viaje, lo cual implica una disminución de costos.

Una localización de servicios adecuada tiene un gran impacto en el éxito de las organizaciones, pero involucra diferentes niveles de análisis que a su vez contemplan múltiples factores, para al final tomar una decisión específica. **(James F. Robeson & Coppacino, 1994)**

Como en todo proceso de toma de decisiones este debe ser dividido en etapas, cada una de las ellas con objetivos y nivel de importancia específicos; en este caso el problema de localización se empieza a resolver en un nivel estratégico amplio (macro) que promueve decisiones de efectos duraderos y difícilmente reversibles, y se dirige a un nivel táctico (microanálisis y selección del sitio específico) donde las decisiones son de corto alcance, véase la Figura (1).

Sin embargo, ¨amplio¨ y ¨corto¨ son términos relativos y por ende también lo son ¨estratégico¨ y ¨táctico¨, es decir la división de los niveles de análisis en un problema particular dependerá en gran medida del contexto que envuelva al mismo.

El proceso de selección del sitio de localización requiere en general solucionar tres niveles de análisis, a desarrollar en un orden particular:

1. **el macroanálisis** define el número de servicios óptimo y determina en que región urbana o rural del mundo, país o estado pueden ser localizados, para en primer instancia obtener ventajas comparativas a partir de su instalación.
2. **el microanálisis** define un área geográfica más específica en la cual localizar el servicio, esto es dentro de un área metropolitana, rural y/o más específicamente dentro de una sección de esa misma área en donde la compañía tenga su radio de influencia mercadotécnica o nicho de mercado.
3. **la selección del sitio específico** a través del cual se identifica un sitio particular o propio para la localización del servicio.

Considerando que además, se debe proporcionar a la compañía requerimientos como: el tiempo en que es necesario el servicio, el capital disponible y temas detallados que involucran la construcción o modificación del mismo.

Una herramienta muy útil en las diferentes etapas del proceso de localización de un servicio, es la identificación de factores que determinan en mayor o menor proporción la viabilidad del proyecto de localización. Los factores de acuerdo a su importancia pueden ser: (*i*) *críticos* si su naturaleza puede impedir la localización del servicio a pesar de las condiciones favorables que puedan existir, (*ii*) *objetivos* si se evalúan en términos monetarios, cuantificando materia prima, mano de obra, impuestos, etc., y (*iii*) *subjetivos* si su modo de medición es de tipo cualitativo como: las relaciones sindicales, la situación política, los aspectos ambientales, etc.

Por ejemplo, las políticas de descentralización al menos en las grandes metrópolis como la ciudad de México, son un factor importante en el proyecto de localización, dado que se desea diversificar geográficamente la producción en igualdad de condiciones para el resto del país, basándose principalmente en incentivos tributarios o de otro orden.

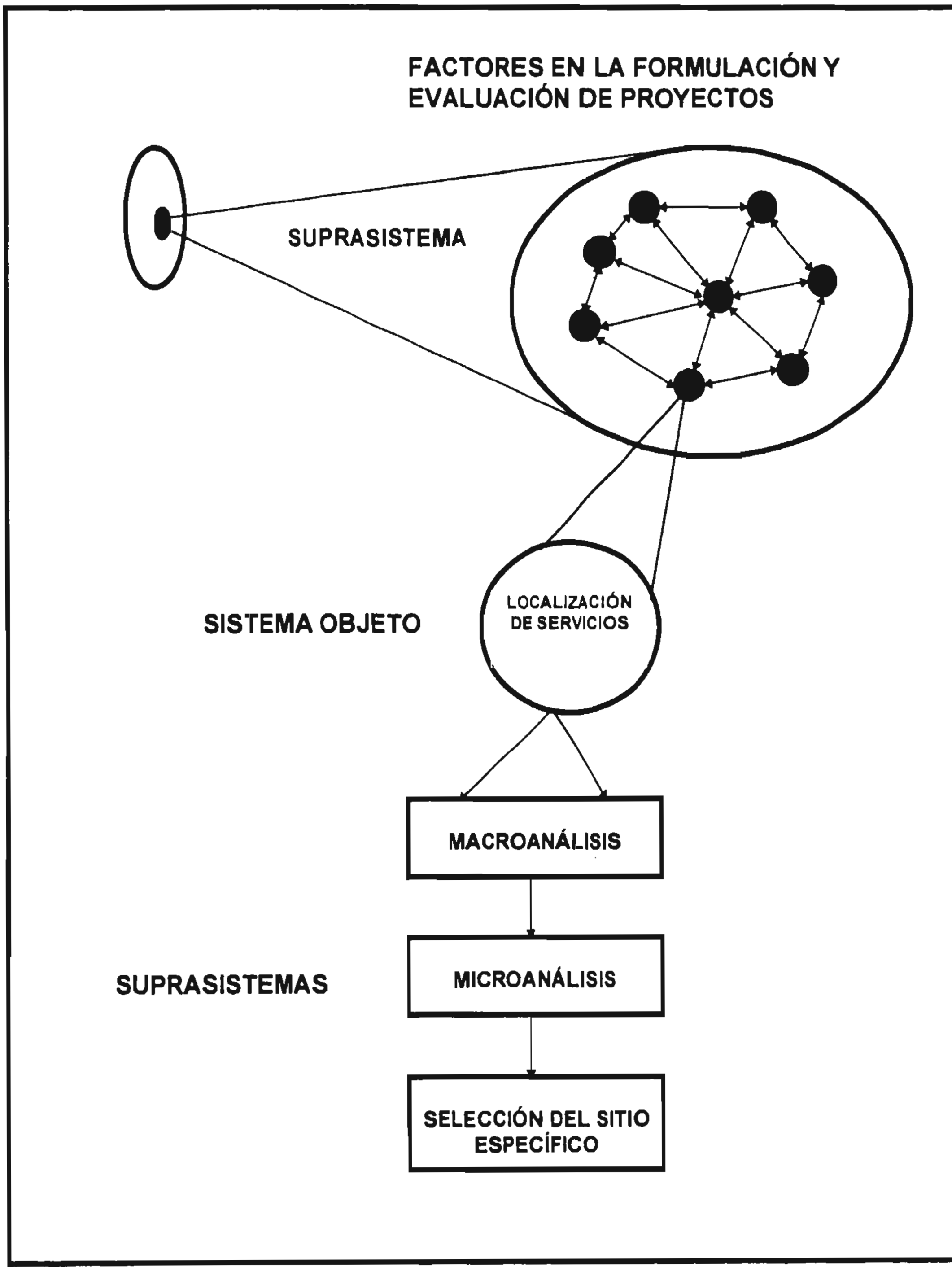


Fig. 1 Marco conceptual para la localización.

(Esquema modificado a partir de J.L. Gil, 1995)

1.2 MACROANÁLISIS

El macroanálisis inicia con la definición de los requerimientos de la red de distribución de la organización, es decir empieza con una visión global cuyo objetivo es identificar el número potencial de localizaciones, y en un nivel estratégico de largo alcance mostrar, donde deben ser localizados. El macroanálisis, se enfoca hacia un nivel amplio de evaluación económica de estrategias relevantes para la compañía, desde el punto de vista de sus necesidades actuales y futuras.

En esta etapa del proceso de localización se puede considerar al problema como una situación de orden mundial y no limitada a una región determinada. De esta forma, se hace necesario incluir en el análisis factores económicos de alcance internacional, ya que en la actualidad son pocos los proyectos que los dejan fuera dado el auge de la globalización económica. Es más aún en los proyectos impulsados por cooperativas comunitarias dedicadas a la exportación, éstos factores económicos internacionales deben ser tomados en cuenta.

De esta manera, el proceso de macrolocalización debe incluir la mayor cantidad de información relevante para la mejor identificación y caracterización de la zona en la formulación y evaluación del proyecto.

Uno de los factores que más ha evolucionado y que se debe tomar en cuenta como factor determinante en esta etapa es: *la transformación del transporte*, que ha alterado drásticamente la economía mundial y provocó el surgimiento de un nuevo enfoque en la estrategia de localización. La reducción dramática de los costos de información y su transmisión es un factor importante en la transformación de transporte, teniendo como resultado que los inventarios y el número de servicios donde se expende se reduzcan significativamente. Esos cambios radicales en la estrategia logística y táctica dan como resultado que una red de servicios de todo un país se enmarque en el uso de una sola computadora, haciendo más factible el análisis y la evaluación de las alternativas que pueden ser numerosas y complejas; por ejemplo, el número de centros de distribución de cierto producto se reduce significativamente de 20 o 30 almacenes a sólo 4 o 5 en todo un país si se eficienta una entrega Just-in-Time que sea competitiva regional e internacionalmente y asegurando al mismo tiempo que los cuatro o cinco servicios sean los mejores.

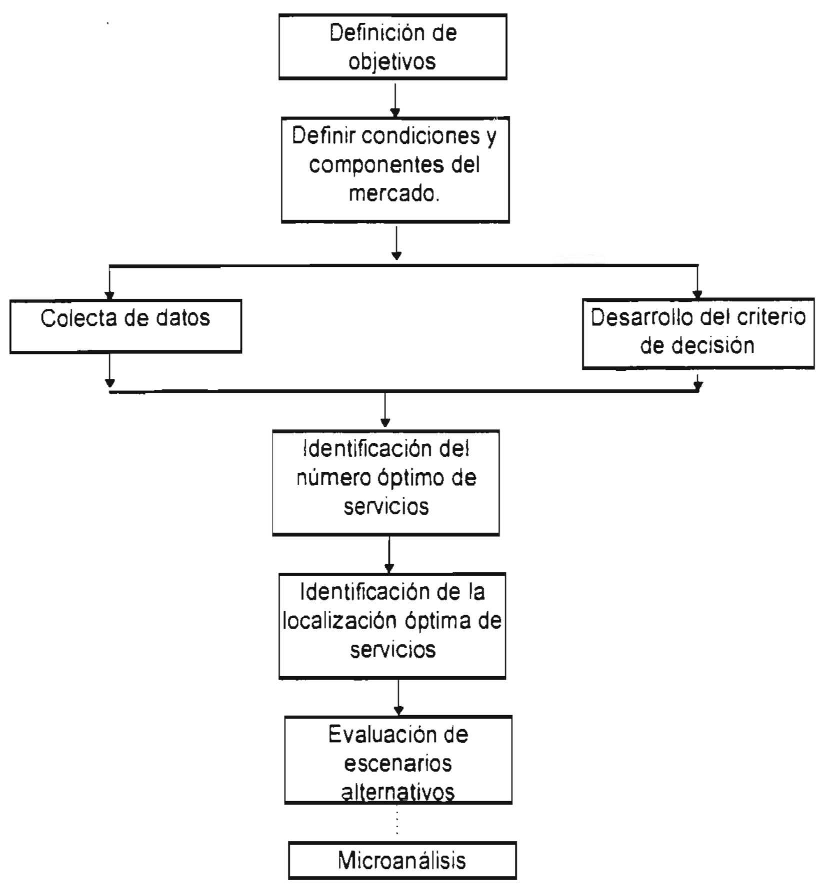


Fig. 2 Objetivos y componentes del Macroanálisis.

1.3 MICROANÁLISIS

En el microanálisis se identifica un sector en particular, distrito o área localizada en la región geográfica definida en el macroanálisis. Tomando los resultados de más alto nivel del macroanálisis, el microanálisis se enfoca generalmente sobre el tema de economía del transporte local e identifica el sector o área mejor situada para localizar el servicio. Las consideraciones económicas relacionadas al transporte dependen de las trayectorias a seguir en el viaje de un servicio a otro y en el tipo de vehículo utilizado, aunque muchas veces la localización se decide tomando otras consideraciones, por ejemplo, la demografía, las actividades realizadas, los costos de espacio, disposición de sitios de industriales nuevos o existentes, requerimientos de mano de obra, proximidad a los servicios de transportación, congestionamiento, disponibilidad de servicios de soporte, etc.

El microanálisis empieza con una extensa apreciación del área geográfica dada, identificando su potencial y usando la información disponible que pueda revelar como se desarrollan las empresas ya instaladas, la competencia existente, como se pueden analizar dividiéndolas en rubros productivos o subsectores, es decir la información debe ser usada para identificar y potenciar en que sector es más factible la localización del nuevo servicio.

En el transcurso de este análisis y parte nivel inferior siguiente surge un problema cotidiano en México, abordado en este trabajo, dadas las caracteristicas geográficas y de crecimiento urbano, esto es la presencia de barreras y zonas prohibidas para la localización y el tránsito, como: accidentes geográficos, barrancas, ríos, acantilados, zonas forestales protegidas. cementerios, parques, zonas sujetas a políticas de descentralización, etc.

Fig. 3 Objetivos y componentes del Microanálisis.

1.4 SELECCIÓN DEL SITIO ESPECÍFICO DE LOCALIZACIÓN.

Una vez que el macro y microanálisis son completados debe determinarse el sitio específico de localización, aunque el nivel de análisis de este enfoque es similar al del microanálisis éste se desarrolla con mucho más detalle.

Si en el microanálisis la aceptación de datos promedio y generales es razonable, en el proceso de selección de un sitio específico para la localización el despliegue de los datos en forma detallada es primordial. El proceso de selección de un sitio específico es un proceso multietapas, éstas son:

1. Definir los servicios necesarios específicos de acuerdo con el tipo de organización.

2. Definir los requerimientos de construcción.

3. Definir el criterio de decisión en función de una función objetivo.

4. Evaluar los sitios posibles de localización en base a los datos disponibles.

5. Usar el criterio de decisión para evaluar los datos, analizar las ventajas, las desventajas y recomendar un sitio específico (Figura 4).

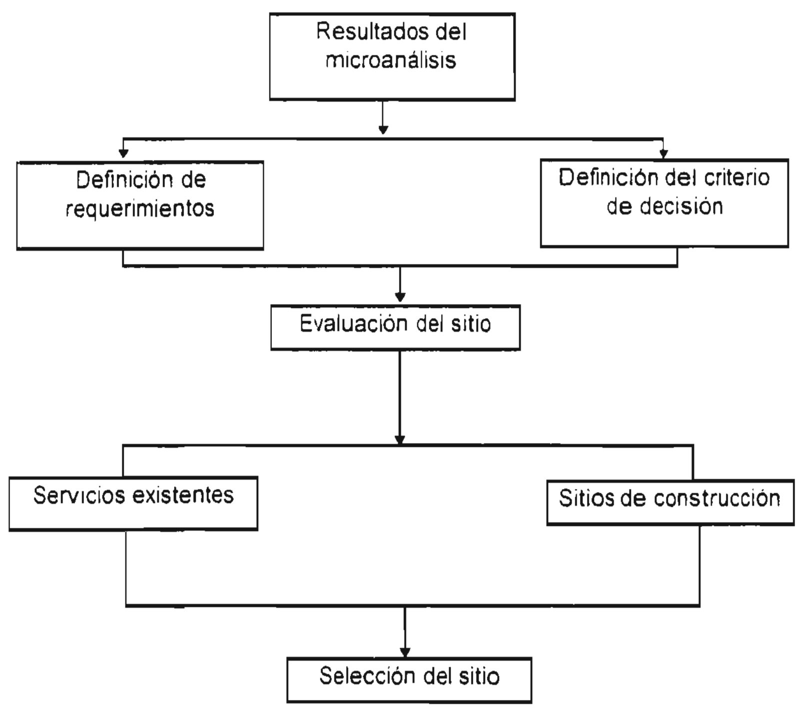


Fig. 4 Objetivos y componentes de la selección de un sitio específico.

En conclusión y de acuerdo a todo lo anterior, es importante decidir dónde ubicar un servicio porque puede resultar prohibitivo cambiar su ubicación sólo por el hecho de hacer mal el estudio de localización.

¿Cuál es la localización "correcta"?, ¿cuántos y qué tipo de servicios son necesarios?, ¿de qué tamaño y que funciones deben desarrollar?; todas estas preguntas deben responderse antes de considerar cualquier discusión. En cada una de las áreas y niveles de decisión es necesario discutir temas numerosos, en la Tabla (1) se presentan en detalle.

Tabla 1 Temas de análisis en la localización de servicios.

MACROANÁLISIS	MICROANÁLISIS	SELECCIÓN DEL SITIO ESPECÍFICO DE LOCALIZACIÓN	
		CONSIDERACIONES DE LOCALIZACIÓN	**CONSIDERACIONES DEL SITIO DE CONSTRUCCIÓN**
Requerimiento de servicios	Área socioeconómica	Recursos laborales	Zona
Economia de transporte	Servicios gubernamentales	Utilidades	Permisos de construcción
Manejo de materiales	Transportación	Vecindad	Código de requerimientos
Costos generales	Congestionamiento de vías	Servicios de soporte	Excepciones y aspectos atractivos
Costos por inventario	Proximidad a carreteras, vías. puertos.	Transportación	Impacto ambiental local
Número de servicios	Disponibilidad de trabajo	Impuestos	Mapas topográficos
Ubicación de los servicios	Cifras de desempleo	Servicios contra accidentes	Restricciones en el sitio de construcción
	Clima competitivo	Actividades similares	Incentivos
	Costo de la tierra		

1.5 ENFOQUES EN EL PROCESO DE LOCALIZACIÓN ÓPTIMA.

En la actualidad hay una gran variedad de enfoques disponibles para el modelado y evaluación de alternativas de localización, las tres metodologías principales son:

(1) Modelos de optimización matemática.

(2) Modelos de simulación de redes

(3) Modelos computarizados.

Los tres métodos difieren en su enfoque para estructurar el problema, pero presentan las soluciones de más bajo costo basadas en la aplicación de los componentes de costo individual. La optimización matemática, por ejemplo es el enfoque más sofisticado porque trata a cada alternativa de localización como una fórmula matemática y resuelve para un valor específico, identificando a la alternativa con el costo total más bajo como una solución óptima.

La simulación de redes es una extensión de la simulación matemática en la que se utiliza el concepto de fórmula, sin embargo la evaluación de cada alternativa se toma como una fórmula distinta. La simulación de redes resuelve el problema simultáneamente para una red hipotética de localizaciones, esta red es una configuración alternativa como si fuera la que sirve a las necesidades de la organización para disminuir el costo total de la red.

El tercer modelo utiliza bases de datos y documentos geográficos computarizados como herramienta para estructurar y resolver cualquier forma potencial del macroanálisis, esto debido a la evolución que se ha logrado en la expansión de capacidades en las computadoras personales y la aplicación de software cada vez más especializado. Al modelar un problema usando un software específico, cada alternativa es representada como una ecuación que contiene un dato clave: demanda, costos de transportación, distancias, inventario, porcentaje del inventario que acarrea los costos mayores, etc.; que una vez evaluado dependiendo del costo que acarrea proporciona datos suficientes para tomar una decisión.

En algunas metodologías utilizadas en el proceso de localización de servicios las decisiones tomadas se basan en la apreciación subjetiva y en la experiencia de quienes están al frente de áreas de trabajo relacionadas con el problema abordado. La comparación de circunstancias en servicios de giros semejantes y la evaluación de información obtenida mediante encuestas, son dos de las herramientas principales de estas metodologías.

En el presente estudio el modelo a utilizar será el de optimización matemática que de acuerdo a las necesidades que se desea cubrir se acopla perfectamente.

Bajo el enfoque anterior, la teoría de localización de servicios se concibe bajo tres enfoques:

1. La que concierne al sitio de menor costo de producción durante el cual el interés se centra en los factores que afecta directamente los costos de producción.
2. El enfoque de la cercanía a los mercados, donde se introducen conceptos como los efectos de una distribución irregular de la población y los recursos, la competencia y la interdependencia de firmas en una economía de mercados múltiples.
3. El correspondiente a la maximización de las utilidades, que sostiene que la localización óptima de la empresa se determina por la diferencia entre ingreso total y costo total. Asimismo es el que atañe al menor costo al cliente, haciendo hincapié en modelos analíticos como son los de programación lineal y tiempo de entrega al cliente.

1.6 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El problema de determinar la localización óptima de *p* servicios para minimizar la distancia promedio entre estos y sus usuarios, llamado comúnmente problema p-media o de Weber, dada su aplicabilidad ha recibido mucha atención de la comunidad científica desde hace tres o cuatro décadas, especialmente de los estudiosos en Investigación de Operaciones y de Transporte.

Sin embargo, en la mayoría de los modelos de localización discutidos en la literatura, una suposición crucial es la posibilidad de no encontrar barreras entre dos puntos cualesquiera en el plano. Sólo en recientes investigaciones la teoría de localización consideró un modelo en presencia de barreras, definidas como regiones en las cuales el trazo de rutas de viaje y la localización de servicios no están permitidos, y regiones prohibidas donde la localización de servicios está prohibida pero el viaje no lo está.

El problema de localización de servicios en presencia de barreras fue motivado originalmente por aplicaciones urbanas en las cuales la métrica de Manhattan (rectangular) tiene en ocasiones una aproximación razonable al comportamiento de la trayectoria de viaje que se sigue cuando se transita por ciudades cuyas calles forman una cuadrícula y donde parques, cementerios, etc. impiden el tránsito.

El problema p-media pues se complica más cuando en el área probable de localización existen barreras que dificultan el tránsito o regiones donde es posible el tránsito pero sería imposible localizar un servicio.

Ahora, el problema puede formularse como: *localizar p servicios en el plano (no dentro de las barreras) para minimizar la distancia promedio entre los servicios y los usuarios, que se asume están distribuidos en un número finito de puntos de demanda. Asumiendo que la norma de distancias utilizada rectangular.*

1.7 ESTADO DEL ARTE

El problema de localizar un servicio en un plano en presencia de regiones prohibidas o barreras es definido como una forma restringida del problema clásico de Weber.

Larson y Li (1981) estudiaron el problema de encontrar la distancia mínima de una ruta factible entre dos puntos, dado un conjunto de puntos origen-destino y un conjunto de barreras poligonales, asumiendo que el viaje ocurre acorde a la métrica rectilínea. Usando argumentos geométricos el problema es reducido a un problema en una red finita de nodos donde los nodos se constituyen por los puntos origen-destino y los vértices barrera. Los enlaces designados entre cada par de nodos, que los comunican de manera simple, implican la existencia de una ruta rectilínea nodo a nodo que no atraviesa a ninguna de las barreras. El peso de cada enlace fue asignado como la distancia correspondiente entre los dos nodos.

La solución al problema de minimizar la distancia de la ruta se realizó en dos pasos: primero, para un origen dado o nodo raíz se genera un árbol conteniendo una ruta de distancia mínima para cada nodo que se comunica con el nodo raíz. Después es usado el algoritmo de Dijkstra modificado para iterar, primero con los nodos del árbol y secuencialmente adicionado nodos acorde a una distancia mínima penalizada, donde la penalización es la distancia extra recorrida causada por la presencia de las barreras.

Hansen, Peeters y Thisse (1982) presentaron un algoritmo especializado para resolver el problema de Weber con una métrica de distancia l_p $\{p=(1,2)\}$, con un conjunto de localizaciones factibles formadas por la unión de un número finito de polígonos convexos del espacio bidimensional. El algoritmo consiste en la búsqueda de una solución para el problema no restringido, seguida por la exploración de partes limitantes de algunos polígonos que definen el conjunto de localizaciones factibles.

Larson y Sadiq (1983) consideraron la localización óptima de p servicios en el plano, bajo la suposición de que el tránsito ocurre de acuerdo a la métrica de Manhattan o rectangular en presencia de barreras impenetrables de tránsito. Asumieron que los usuarios del servicio estarían distribuidos como un conjunto finito de puntos de demanda, con los pesos de cada punto proporcionales a su intensidad de demanda y cada punto de demanda asignado al servicio más cercano. El objetivo fue localizar servicios así como minimizar la distancia promedio a un punto de demanda aleatorio. Ellos demostraron que un conjunto óptimo de ubicaciones de los servicios pueden ser asignados a partir de un conjunto finito de puntos candidatos, fáciles de determinar.

Los puntos candidatos para la localización se identifican dentro de un entorno (entorno convexo) que incluye tanto a los puntos de demanda como a las barreras y cuyas coordenadas son la intersección de líneas trazadas a partir de los nodos existentes.

Batta, Ghose y Palekar (1989), consideraron dos problemas de localización de servicios en el plano empleando la métrica de Manhattan. En primer lugar consideraron el problema *p*-media en presencia de barreras colocadas arbitrariamente y regiones prohibidas convexas. Para este problema establecieron que la búsqueda de una solución óptima puede ser restringida a un conjunto finito de puntos fácilmente identificados. Después consideraron el problema estocástico de colas en presencia de barreras arbitrariamente establecidas.

Aneja y Parlar (1994), describen algoritmos para la localización óptima de un servicio único con regiones prohibidas y barreas para el tránsito. Las primeras, definieron, se presentan cuando la localización no es permitida, pero se puede viajar a través de ellas, por ejemplo, un lago. Las barreras, sin embargo, son regiones donde no se puede transitar ni localizar servicios, por ejemplo, parques dentro de las ciudades. Usando las propiedades de convexidad de la función objetivo, en el primero de los casos desarrollaron un algoritmo para encontrar la solución óptima. La función objetivo en el caso de las barreras la consideraron no convexa. Además, usaron el concepto de visibilidad para crear una red con el punto de localización como el objetivo, el algoritmo de Dijkstra para calcular la distancia más corta a todos los puntos de demanda y mediante el algoritmo de recocido simulado encontraron una solución óptima aproximada.

Butt y Cavalier (1996), consideran específicamente el problema de localizar un nuevo servicio en presencia de regiones prohibidas, representadas por polígonos convexos, de tal manera que la suma de las distancias ponderadas desde el nuevo servicio a los *n* servicios existentes fuera minimizada. Además, ellos asumieron que una región prohibida es un área en el plano donde el tránsito y la localización de servicios no están permitidos y las distancias son medidas usando la métrica de distancia Euclidiana.

El procedimiento de solución para este problema se basa en una serie iterativa de solución de problemas no restringidos, este procedimiento termina al localizar un punto óptimo para el problema restringido.

Otros autores que han estudiado los problemas de localización en presencia de regiones prohibidas son: Eckhardt (1975), Brandy y Rosenthal (1980) que usaron gráficas interactivas en el problema de localización minimax con regiones prohibidas establecidas arbitrariamente.

Schaefer y Hunter (1974) y Hunter et al. (1975) investigaron el caso donde los conjuntos factibles se encuentran en la intersección de algunos discos. Hansen también diseño un algoritmo para resolver el problema de localización cuando el conjunto de puntos factibles es la unión de un número finito de polígonos convexos. En esos modelos los conjuntos factibles se consideraron como polígonos, el enfoque para resolver este problema se demostró no es directamente aplicable al problema, cuando se asume que los polígonos son los conjuntos infactibles.

Chistensen y Jacobsen (1970), estudiaron una versión discretizada de el problema de la localización óptima y asignación de rutas en presencia de barreras. Otros resultados de este problema son los reportados por Chalmet en 1981. Para la métrica Euclidiana, Katz y Cooper (1979, 1981) estudiaron la localización óptima de servicios en presencia de una o más pequeñas barreras circulares y extendieron sus resultados a la métrica l_k en presencia de una barreras poligonales convexas.

Los autores, han considerado como restricciones para la localización y el tránsito factores que dependen del contexto y de factores humanos, estos incluyen: relieve, uso del suelo, proximidad a ciertos lugares restringidos, regularización de las zonas, etc. que en su mayoria tienden a disminuir, algunas veces drásticamente, el conjunto de locaciones factibles y el trazado de rutas de viaje.

Ejemplos de problemas prácticos son: la localización de una planta en una zona industrial o de un hospital en un área no contaminada. Este problema fue considerado por Love (1988) quien sugiere el uso del método del gradiente para localizar un servicio dentro de un dominio convexo del espacio tridimensional Euclidiano, o dentro de un esquema donde el conjunto de locaciones factibles está definido por un poliedro convexo de *n* dimensiones. En otros trabajos se consideró que el conjunto de locaciones factibles podrían ser un conjunto de islas distribuidas arbitrariamente en el océano.

Hay otras aplicaciones potenciales involucran el diseño de redes de comunicación (Ahern 1981), el diseño de circuitos (La Paugh 1980), la distribución de servicios (Francis y White 1979), el diseño redes de tuberías en embarcaciones (Wangdahl 1974), localización y rutas de robots (Lozano-Pérez y Wesley 1978).

II. LA NORMA DE DISTANCIA COMO FACTOR DE LOCALIZACIÓN.

2.1 DISTANCIA ENTRE SERVICIOS Y CLIENTES.

En la localización de servicios, ubicar es tan importante como determinar la trayectoria y ruta más corta que se debe seguir para satisfacer a los puntos de demanda. Además esto sirve para en forma gráfica y de manera visual identificar puntos factibles de localización dependiendo de la trayectoria seguida.

Un planeador de sistemas de rutas enfrenta dificultades específicas, y la más importante quizá sea el procesamiento de requerimientos dado las grandes cantidades de datos y factores a tomar en cuenta. Uno de esos factores es la norma o métrica usada para medir la distancia entre dos puntos, en el caso uno de ellos representa un punto de demanda y otro un servicio establecido.

Determinar la ruta más corta entre dos puntos en un plano, cuando encontramos obstáculos entre ellos, es un problema que ha recibido alguna atención desde los años 70. Aplicaciones de este problema han sido encontradas en muchas áreas, incluyendo distribución de tuberías en embarcaciones, programación de rutas para robots en el intento de evitar colisiones, problemas encontrados en la graficación computarizada y el trazo de rutas en instalaciones eléctricas. El objetivo general del planteamiento de esos problemas es encontrar la ruta más corta a partir de un punto inicial hasta un punto terminal evitando un conjunto conocido de obstáculos.

Este procedimiento además tiene como propósito implícito la ubicación de puntos factibles de localización dado que en la mayoría de los problemas si es posible trazar un trayecto entre dos puntos, también es imposible ubicar un servicio (en ciertos casos es posible el trazo de una trayectoria entre dos puntos pero no es posible ubicar servicios, por ejemplo: ríos, lagos, etc.).

En general, las formulaciones prototipo consideran la disponibilidad o la habilidad para calcular la distancia que se considere la ruta más corta entre todos los puntos de relevancia, es decir entre cada posible par servicio-cliente y donde hay interacciones espaciales entre cada par servicio-servicio.

Para puntos sobre un plano, las distancias más cortas aproximadas pueden ser calculadas sobre la base de puntos coordenados y una métrica dada, las más comunes son: la métrica Euclidiana y la métrica rectangular o de Manhattan. Cuando las distancias entre puntos son calculadas usando una fórmula basada en la métrica, puede haber ahorros considerables en los requerimientos de tiempo, memoria y capacidad de computo.

La distancia más corta entre dos puntos es una línea recta, pero en la práctica solo algunos problemas pueden ser modelados para considerar una trayectoria Euclidiana, aún así al usar una línea recta como trayectoria entre dos puntos se considera que la medida de distancia es relativamente "corta". Recalcando, hay pocas aplicaciones a modelos que consideran la unión de dos puntos como una línea recta, el trayecto entre dos ciudades rara vez es a lo largo de una ruta completamente recta. Sin embargo, una buena aproximación del promedio total de distancias entre pares de ciudades en una región, por ejemplo puede ser hecha usando una función de distancia en línea recta.

Tomando en cuenta lo anteriormente dicho, una medida de distancia "grande" es la rectangular, que describe el movimiento en una planta o en el área de maniobras de un almacén arreglados en forma tal que el movimiento se haga siguiendo trayectorias rectangulares.

2.2 LA MÉTRICA RECTANGULAR.

La distancia rectangular entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se define mediante la fórmula $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, algunas veces esta métrica también es llamada de ángulo recto, l_1 o distancia de Manhattan. Esta métrica surge dada la posibilidad de trazar rutas en zonas urbanas (Ciudad de Manhattan) que normalmente siguen una trayectoria rectangular, es decir la métrica de Manhattan se forma por segmentos horizontales y verticales consecutivos evocando la trayectoria seguida en calles céntricas de la ciudad de México y otras grandes ciudades.

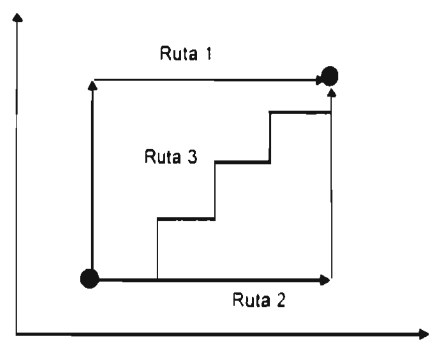


Fig. 5 Ilustración de la ruta rectangular.

Asumiendo rutas rectangulares, el problema de localización puede quedar formulado como sigue: encontrar la ubicación óptima para uno o varios nuevos servicios $X = (x, y)$ tal que, la suma de las distancias recorridas rectangularmente desde X a los n servicios existentes (o puntos de demanda) $P(a_i, b_i)$ sea minimizada. El problema actual que se aborda se complica más al aumentar una nueva restricción, la presencia de obstáculos que impiden la localización de servicios y el trazado de rutas entre ellos, lo cual es muy común en las zonas urbanas.

Las áreas de aplicación se presentan en diferentes problemas:

1. *Transportación Urbana.* La trayectoria de vehiculos sobre calles que aproximadamente definen una cuadrícula puede ser considerada como gobernada por la métrica rectangular. Las barreras u obstáculos que pueden impedir la trayectoria pueden ser cementerios, parques, espacios restringidos, zonas residenciales cerradas, etc. La operación efectiva de esos sistemas pueden requerir el conocimiento de las mejores rutas alrededor de esas barreras.

2. *Planear una planta o servicio.* Las trayectorias seguidas al caminar por una planta o en el piso de una fábrica pueden, en ocasiones, ser modeladas para usar la métrica rectangular. Las barreras en las trayectorias pueden ser: áreas impenetrables en los pisos, áreas de subensamble, secciones de líneas de ensamble, sanitarios, áreas de oficina, etc.

3. *Localización de líneas conductoras de energéticos.* Por ejemplo, en regiones del oeste de los Estados Unidos las líneas conductoras de energéticos sólo pueden ser distribuidas a lo largo de los límites este-oeste y norte-sur seccionados en millas cuadradas. De esta manera, la localización de las líneas pues ocurren a lo largo de una ruta de trayectoria rectangular. Las barreras en este problema son: pueblos, autopistas, parques o subsecciones que evitan la colocación de las líneas.

Otras potenciales aplicaciones incluyen el diseño circuitos, la búsqueda de la ruta más corta en un laberinto, trayectorias de robots, etc.

2.3 PROGRAMACIÓN LINEAL Y LA MÉTRICA RECTANGULAR.

Dado el problema de encontrar la ubicación óptima para un nuevo servicio $X = (x, y)$, tal que la suma de las distancias ponderadas de X a los n servicios existentes o puntos de demanda $P(a_i,b_i)$ sea minimizada, este puede ser formulado como un problema de programación lineal escrito como:

$$f(X)=\sum_{i=1}^{m} w_i d(X,P_i) \tag{1}$$

donde el término w_i, algunas veces referidos también como pesos o ponderaciones, representa el producto de costo por unidad de distancia recorrida o el número de embarques por año entre el nuevo servicio y los servicios existentes (centros de demanda), m son los servicios existentes (puntos de demanda) localizados en puntos distintos conocidos $P_1,\ldots,P_m$, y el nuevo servicio será localizado en el punto X. (Francis and White, 1992)

Los costos de transportación en que se incurre son directamente proporcionales a una distancia apropiadamente determinada entre el nuevo servicio y los i puntos de demanda, $d(X,P_i)$ representa esta distancia recorrida entre los puntos X y P_i. El problema de localización un servicio entonces es determinar la localización de un nuevo servicio X^* que minimice el total de el costo de transportación anual $f(X)$.

Dada la formulación general del problema de localización anterior y suponiendo que las trayectorias son rectangulares ésta puede ser matemáticamente escrita como:

$$\underset{x,y}{Minimizar} f(x,y)=\sum_{i=1}^{m} w_i(|x-a_i|+|y-b_i|) \tag{2}$$

donde el problema de acuerdo la propiedad de separabilidad descrita más adelante, es equivalente a:

$$\underset{x,y}{Minimizar} f(x,y)=\min_{x}\sum_{i=1}^{m} w_i|x-a_i|+\min_{y}\sum_{i=1}^{m} w_i|y-b_i| \tag{3}$$

donde cada elemento del lado derecho puede ser tratado como un problema singular de optimización, es decir:

$$\underset{x}{Minimizar}\, f_1(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i |x - a_i| \tag{4}$$

$$\underset{y}{Minimizar}\, f_2(y) = \sum_{i=1}^{m} w_i |y - b_i| \tag{5}$$

Algunas características de una solución óptima para el problema de localización usando la métrica rectangular son:

- La coordenada x del nuevo servicio será, en ocasiones, la misma coordenada x de algún servicio o punto de demanda existente. De manera similar, la coordenada y del nuevo servicio coincidirá con la coordenada y de algún servicio existente, por supuesto, no es necesario que ambas coordenadas sean las mismas de un servicio existente.

- La coordenada x óptima (o la coordenada y) de localización para el nuevo servicio es una *localización media*. Una localización media es definida como una localización tal que no más de la mitad del elemento de movimiento este a la izquierda (o abajo) de la localización del nuevo servicio y no más que la mitad del elemento de movimiento este a la derecha (o arriba) del nuevo servicio.

Sin embargo, un término más apropiado para la localización óptima debe ser una localización de suma media, donde el término "media" implica que una de las mitades de la suma de las coordenadas de los servicios existentes cae a la izquierda (abajo) y la otra a la derecha (arriba) del punto medio o punto óptimo. (Francis R. L. & John A. White, 1992)

2. 4 PROGRAMACIÓN LINEAL Y LA MÉTRICA EUCLIDIANA.

A la métrica utilizada en problemas donde la trayectoria se considera sigue una línea recta se le denomina métrica Euclidiana.

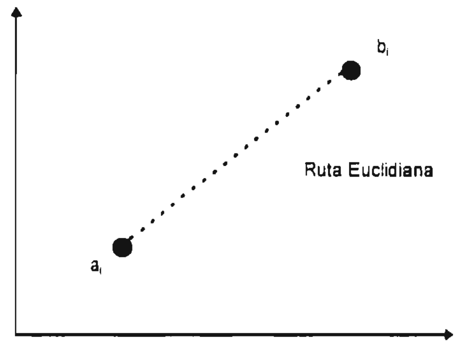


Fig. 6 Ilustración de una ruta Euclidiana entre dos puntos.

Antes de analizar el problema de localización suponiendo trayectorias con métrica Euclidiana, es importante examinar el problema de localizar un servicio cuando los costos son proporcionales al cuadrado de la distancia Euclidiana. La razón para estudiar el problema del cuadrado de la distancia Euclidiana (o problema del centro de gravedad) es que: existen problemas de localización en los que el costo se incrementa cuadráticamente y no linealmente.

El problema del cuadrado de la Euclidiana como un problema de programación lineal puede ser formulado como:

$$\underset{x,y}{Minimizar} f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} w_i\left[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2\right] \tag{6}$$

Donde, cualquier punto (x^*, y^*) que minimice la ecuación anterior debe satisfacer la siguiente condición:

$$\left(\frac{\delta f(x^*,y^*)}{\delta x^*}, \frac{\delta f(x^*,y^*)}{\delta y^*}\right) = (0,0) \tag{7}$$

Calculando las derivadas parciales con respecto a x y a y, y después igualándolas a cero, la solución única es:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} \qquad (8)$$

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i b_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} \qquad (9)$$

Donde las coordenadas x^* y y^* del nuevo servicio debe ser interpretadas como el promedio ponderado de las coordenadas de los servicios existentes, y son de hecho, las coordenadas que minimizan la función objetivo del problema.

El problema del cuadrado de la Euclidiana tiene pues una solución simple, algunas veces referida como la solución del centroide o centro de gravedad, de aquí el nombre de problema de gravedad.

2.4.1 La Métrica Euclidiana.

Si las coordenadas para un nuevo servicio son (x,y) y las coordenadas para los servicios existentes o puntos de demanda son $P_i(a_i,b_i)$, la distancia Euclidiana entre ellos puede ser definida como:

$$d(X,P_i) = \left[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2\right]^{1/2} \qquad (10)$$

Ahora, el problema de localización como un problema de programación lineal, suponiendo que las trayectorias son Euclidianas, matemáticamente es expresado como:

$$\underset{x,y}{Minimizar}\, f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} w_i\left[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2\right]^{1/2} \qquad (11)$$

Cuando la distancia es medida usando la métrica Euclidiana el problema es algunas veces referido como el problema de Steiner-Weber o general de Fermat, y el procedimiento más conocido es atribuido a Weiszfeld, aunque autores como Michle, Kuhn y Kuenne y Cooper han dado otros métodos de solución.

De acuerdo al procedimiento de Weiszfeld la base para encontrar la solución del problema es la forma iterativa dada por las siguientes ecuaciones:

$$x^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i g_i(x^{(k-1)}, y^{(k-1)})}{\sum_{i=1}^{m} g_i(x^{(k-1)}, y^{(k-1)})} \tag{12}$$

$$y^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i g_i(x^{(k-1)}, y^{(k-1)})}{\sum_{i=1}^{m} g_i(x^{(k-1)}, y^{(k-1)})} \tag{13}$$

donde:

$$g_i(x, y) = \frac{w_i}{\left[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2\right]^{1/2}} \quad \text{para } i = 1,\ldots,m \tag{14}$$

Sin embargo, antes de empezar las iteraciones es necesario proveer un punto solución inicial (x_0, y_0) que minimice de manera inicial la función objetivo. De manera típica la solución inicial a este problema es el centroide o centro de gravedad.

Las áreas de aplicación, cuando la métrica es Euclidiana y existen barreras, se presentan en problemas tales como:

1. *Problemas de localización en redes.* Al formular el problema de localización como un problema en una red, donde los nodos representan puntos de demanda o servicios

existentes y los enlaces definen las trayectorias seguidas en el viaje, generalmente la métrica utilizada es la Euclidiana. Algunos problemas formulados como redes donde se utiliza la métrica Euclidiana son: rutas de viaje en líneas aéreas, trayectorias en bandas transportadoras, etc.

2. Algunos otros problemas pueden ser: problemas de cableado eléctrico y problemas de diseño de tuberías.

En cada una de las áreas de aplicación anteriores es posible encontrar obstáculos que impidan la trayectoria y la localización, por ejemplo, en el diseño de cableado eléctrico es casi imposible trazar una línea completamente recta entre dos transformadores, además de que la localización depende del lugar en que según la solución óptima debe instalarse cualquiera de los transformadores.

Las métricas rectangular, Euclidiana y cuadrado de la Euclidiana son las más utilizadas y sin embargo éstas son casos especiales de la distancia l_p entre los puntos a_i y b_i, dada por :

$$l_p = (a_i,b_i) = \left[|x_2 - x_1|^p + |y_2 - y_1|^p\right]^{1/p} \text{ para } 1 \leq p \geq \infty \qquad (15)$$

III. IDENTIFICACIÓN DE PUNTOS FACTIBLES DE LOCALIZACIÓN.

3.1 PROPIEDADES DEL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN.

La situación donde se presentan barreras que impiden de cierta forma el tráfico y la localización de servicios se considera como un problema restringido del problema clásico de Weber, que al igual que éste tiene propiedades importantes y determinantes en su solución. Las tres que se describen a continuación son base fundamental para encontrar un par de coordenadas óptimas y solucionar el problema planteado en esta tesis.

1. El óptimo local para el nuevo servicio debe caer dentro del *entorno convexo* de los servicios existentes[1], lo que implica que la ubicación del nuevo servicio puede ser definida como una combinación convexa de la localización de los servicios existentes[2]. Lo anterior es equivalente a decir que el nuevo servicio debe ubicarse entre los puntos de demanda sobre el plano, en concordancia al criterio que señala que la suma las distancias entre ellos debe minimizarse.

(1. Para la demostración véase Richard E. Wendel, 1973; 2.Love, Morris y Wesolowsky, 1988).

2. La función objetivo es *convexa*. Una función se dice convexa si un segmento de línea entre dos puntos cualesquiera, nunca cae por debajo de la gráfica de la función. Formalmente esto significa que al considerar las funciones $f:R^n \longrightarrow R \cup \{+\infty,-\infty\}$, una función es convexa si

   (i) $\{X / f(X) = -\infty\} = 0.$

   (ii) $\{X / f(X)\langle+\infty\} \neq 0.$

   (iii) $f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda)f(Y)$ para $0 \leq \lambda \leq 1.$

   (Josef Stoer &Christoph Witzgall, 1970)

   Para la demostración de convexidad, véase el apéndice D.

3. La función objetivo es *separable*. Una función separable f definida por χ en R", es aquella que puede ser escrita como la suma de las n funciones f_i de la variable x_i, donde x_i es el i - esimo componente del vector χ, es decir

$$f(\chi) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n) \tag{16}$$

La afirmación anterior se basa en la suposición de aditividad que se hace para evaluar de manera más fácil los problemas formulados como de programación lineal. La suposición de aditividad establece que para cada función $f(\chi)$, el valor total de la función puede obtenerse sumando las contribuciones individuales de sus respectivas actividades, o subfunciones de una sola variable.

Además, la aditividad asume que no hay interacciones entre cualquiera de las actividades (sub-funciones) singulares $\{ f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n) \}$ que de cierta manera pudieran cambiar el valor de la función objetivo total.
(Hillier & Liberman,1990: Joseph Ecker & Michael Kupferschmid, 1988)

Una conjunción de las propiedades de convexidad y separabilidad establece que la suma de las funciones convexas es convexa y por lo tanto $f(\chi)$ es convexa. Lo anterior significa que un óptimo local es un óptimo global y que $f(\chi)$ no tiene puntos de inflexión.

Establecidas las propiedades necesarias para resolver el problema de localización con barreras, se describen las suposiciones que en particular se asumen en este trabajo:

- Aunque muchas de las barreras pueden tener una estructura no convexa se pueden aproximar para considerarlas como convexas o usar su entorno convexo, especificamente las barreras se consideran polígonos convexos.
- Las trayectorias entre un punto de demanda y un servicio localizado se pueden suponer como rectangulares.

- El punto óptimo de localización no deben caer dentro de las barreras o zonas prohibidas, aunque la función objetivo sea mejor que fuera de ellas.

Descritas las propiedades y suposiciones, el problema restringido de Weber en presencia de barreras y zonas prohibidas en general difícil de resolver se simplifica como se demostrará al momento de aplicar éstas.

3.2 SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CON BARRERAS.

Uno de los primeros pasos para resolver el problema de localización de servicios en presencia de barreras, es la ubicación gráfica de puntos factibles de localización de los cuales el óptimo debe comunicarse con los puntos de demanda siguiendo una trayectoria que se pueda decir es la más corta entre dos puntos minimizando así la función objetivo. Al generar una variedad de soluciones alternativas (puntos factibles de localización) se cumple con una etapa general del análisis de localización que ha sido criticada en el uso de los modelos de optimización, es decir en contraste con procedimientos heurísticos y de simulación, la optimización involucra procedimientos para determinar solo la "mejor" solución. (Lee J. Krajewski, Larry P. Ritzman, 1993)

Para la ubicación gráfica de los puntos factibles de localización retomamos el algoritmo propuesto por Larson y Sadiq en 1983, donde demostraron que un conjunto óptimo de ubicaciones de los servicios pueden ser asignados a partir de un conjunto finito de puntos candidatos, identificando a los puntos candidatos dentro del entorno convexo que incluye tanto a los puntos de demanda como a las barreras y cuyas coordenadas son la intersección de líneas trazadas a partir de los nodos existentes.

El algoritmo no resuelve de todo el problema de localización propuesto en este trabajo, porque solo propone varios puntos factibles pero no ubica un óptimo total que minimice la función objetivo. Siendo así, en este trabajo se aplica el algoritmo de Larson y Sadiq para generar los puntos factibles de localización evaluándolos después calculando la función objetivo en cada punto y seleccionando el que la minimice al máximo. En la figura (7) se muestra una representación gráfica del problema de localización con barreras que será utilizada para demostrar la aplicación del algoritmo.

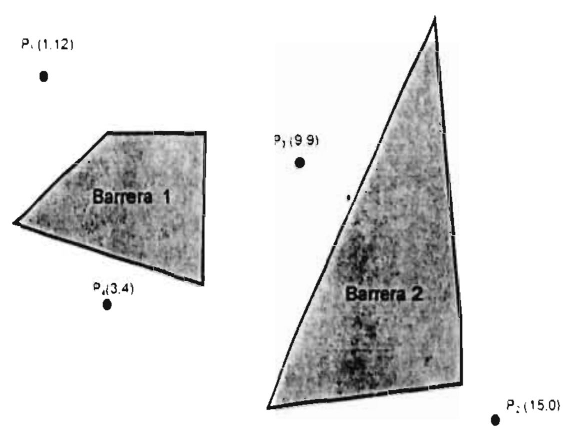


Fig. 7 Representación del problema de localización en presencia de barreras (dos barreras y cuatro puntos de demanda).

Antes de aplicar el algoritmo se debe justificar que el trazo de rutas entre nodos incluidos dentro del entorno convexo, definido por los puntos de demanda y por las coordenadas de las barreras, es parte importante y base de la identificación de puntos factibles de localización cuando se utiliza la métrica rectangular y también cuando se utiliza la métrica Euclidiana.

En el problema general de Weber no se hace mención de una red de transportación, sin embargo presumiblemente los costos de transportación son calculados a partir de rutas óptimas entre un punto y otro. Si se construye una red que conecte a los puntos de demanda, de manera lógica el conjunto de nodos y enlaces de la red puede incluir los sitios potenciales de localización al igual que los sitios de demanda.

Cuando se utiliza la métrica Euclidiana, desde el punto final de cualquier segmento y de cualquiera de los puntos iniciales, puntos terminales o vértices de las barreras, se puede definir fácilmente una red usada para encontrar la ruta más corta entre dos puntos. De hecho para resolver muchos de estos problemas se comienza por construir lo que se conoce como una *gráfica de visibilidad*, que define la forma en que los puntos de demanda y los vértices de las barreras se conectan. (Subir Kumar & David Mount, 1991).

Si se construye la gráfica de visibilidad para la situación descrita en la figura (7), dado que en este ejemplo tenemos cuatro puntos de demanda (P_1,P_2,P_3 y P_4) y dos barreras definidas por sus vértices, la gráfica de visibilidad (figura 8) estará constituida por el conjunto de nodos $N = V \cup (P_1, P_2, P_3 \text{ y } P_4)$ y el conjunto de arcos ε que son todas las líneas que conectan a dos nodos sin interceptar el interior de una barrera.

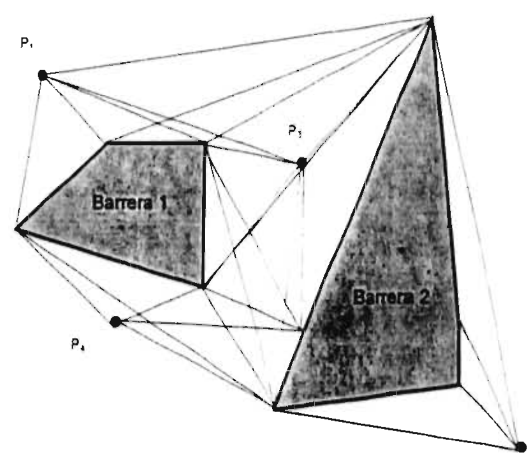


Fig. 8 Gráfica de visibilidad.

Lo anterior conduce a la definición siguiente: dos nodos se dice son visibles uno de otro si una línea recta puede ser dibujada entre éstos, sin interceptar el interior de las regiones de barrera. Esto es, la gráfica recibe su nombre a partir de que dos nodos conectados son visibles uno de otro sin que su visión sea obstaculizada por una barrera.

Una vez que la gráfica de visibilidad ha sido construida y cada arco ha sido ponderado por su longitud (en este caso utilizando la distancia Euclidiana) la ruta más corta entre dos puntos puede determinarse usando los múltiples algoritmos existentes para resolver este problema. (Dijkstra, 1982)

La identificación de las rutas más cortas entre nodos a partir de la gráfica de visibilidad corrobora la facilidad de ubicar visualmente de los puntos factibles de localización que minimizan la función objetivo, y que de manera lógica deben encontrarse sobre los arcos que conectan a los nodos, sobre la intersección de los arcos y aún en los nodos mismos.

En el caso que nos ocupa las trayectorias se definen usando la métrica rectangular, pero de manera contraria al caso de la métrica Euclidiana la determinación de la ruta más corta entre los nodos debe hacerse una vez identificada la ubicación de los puntos factibles de localización, pues el número de rutas que podrían trazarse entre dos puntos es indefinido cuando no hay barreras.

El problema de encontrar la ruta más corta entre dos puntos usando la norma rectangular se presenta generalmente en zonas urbanas donde las calles forman una cuadrícula casi perfecta. Pero este problema se complica (de igual forma con la métrica Euclidiana) cuando existe un número grande de puntos que pueden definir diferentes rutas, es decir el problema se puede complicar si se toman en cuenta todas las rutas posibles entre ellos. Para evitar esto un procedimiento común es transformar al problema dado en el plano a un problema en un red finita de nodos.

Esta versión discretizada del problema, considera que tanto barreras como regiones factibles de tránsito son elementos sobre una cuadrícula rectangular finita (definida por los ejes cartesianos), donde los nodos de la red son automáticamente restringidos a puntos externos a los límites de las barreras formando así la estructura de una red cuyas propiedades son relativamente sencillas. Una *red nodal* se constituye por una red de puntos origen y destino, puntos definidos por los vértices de las barreras, los puntos de demanda y los puntos factibles de localización, además de cada enlace o arco de distancia finita que une a un par de nodos cuyo segmento de línea lo hace sin interceptar a las barreras.

Si consideramos que en el espacio bidimensional hay n_q puntos origen-destino $Q = \left\{ q(i),\ i = 1,2,...n_q \right\}$ y n_b barreras poligonales $B = \left\{ b(i),\ i = 1,2,...n_b \right\}$ con vértices $V = \left\{ v(k,m),\ k = 1,2,..,v_m;\ m = 1,2,...,n \right\}$, donde $v(k,m)$ es el k-ésimo vértice de la barrera m ordenado en dirección a las manecillas del reloj, se establece que una *ruta rectangular nodal* en R^2 se forma por pasos secuenciales horizontales y verticales, es decir por segmentos de línea cuyo punto de intersección es un conjunto de *vértices ruta*. En la presencia de barreras los vértices ruta deben encontrarse fuera de las barreras aunque pueden tocar algún de los vértices de las mismas (Figura 9).

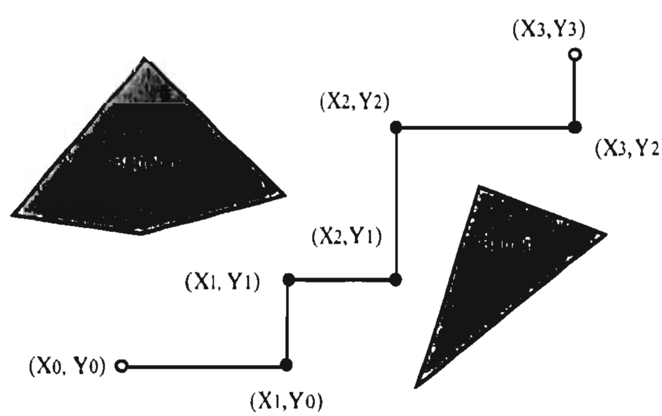


Fig. 9 Ruta rectangular entre dos puntos en presencia de barreras.

La misma ruta entre dos puntos cuando se utiliza la métrica rectangular se denomina *ruta escalera* dada la similitud con los pasos secuenciales.

Algunas observaciones hechas a partir de la figura (9) son:

- Dos puntos se comunican si se puede construir una ruta escalera entre ellos.
- El hecho de que se pueda trazar una ruta escalera entre dos puntos no significa que esta ruta sea la de menor distancia entre esos dos puntos.
- Dos puntos cualesquiera unidos por una línea recta que no tienen puntos comunes con las barreras, se comunican. Bajo este criterio, dos vértices adyacentes de una barrera se comunican, véase la figura (10).
- La ruta factible de distancia mínima se forma por los vértices ruta, definidos como los puntos de unión de los segmentos de linea vertical y horizontal en sus puntos terminal e inicial, según sea el caso. El punto terminal de un segmento horizontal o vertical, es al mismo tiempo el punto inicial de un segmento horizontal o vertical.

A partir del tercer punto, concluimos que una ruta escalera a lo largo de una línea que conecta a dos puntos puede mantenerse lo suficientemente cerrada a la línea para que la ruta no intercepte a una barrera. Este es un enunciado fundamental para la solución del problema tratado en este trabajo, dado que implica que el trazo de las rutas rectangulares se puede mejorar hasta alcanzar una ruta de distancia mínima, incluso ajustando esta a lo largo del límite de las barreras, claro sin penetrar en ellas.

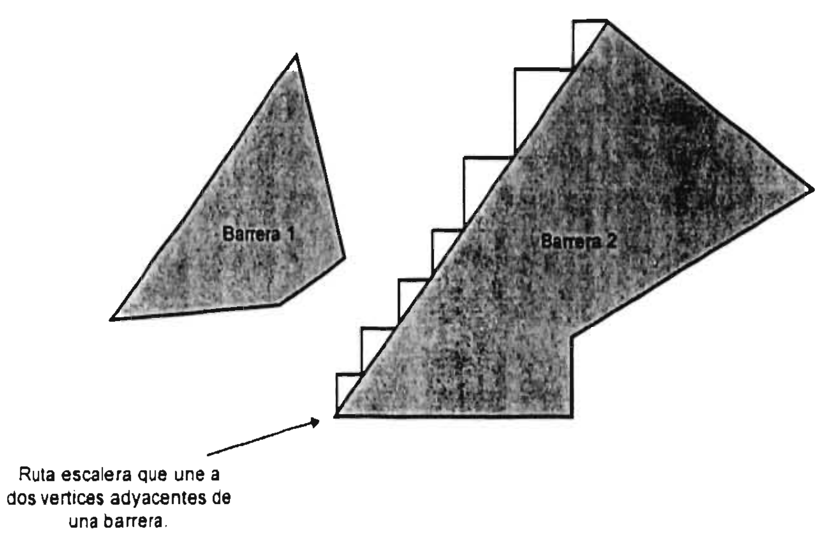


Fig. 10 Ilustración de una ruta escalera entre dos vértices adyacentes de una barrera.

3. 3 PRUEBAS PARA MEJORAR Y VERIFICAR LAS RUTAS RECTANGULARES.

Una de las bases para la formación de una ruta escalera es la construcción de un árbol llamado de *vértices visibles* que se construye prolongando los pasos ruta horizontales o verticales que determinan en que dirección se puede formar la ruta de viaje sin pasar por dentro de las barreras. Es decir, si se considera un punto $q(i) \in Q$ y se extiende una línea a partir de este, se define un incremento en dirección del eje X igual a $r = x + q_i$ que debe verificarse no atraviese ninguna barrera. Es preciso decir que los incrementos a partir del punto a tomar en cuenta se pueden dar en todas direcciones, lo que determina en que dirección y sentido se pueden trazar las rutas escalera para unir a dos puntos en un plano coordenado.

Las posibilidades de intersección son:

1. Que la línea extendida no intercepte con las barreras.
2. Que la línea extendida intercepte a un punto que puede ser un vértice barrera o un punto origen-destino.
3. Que la línea extendida intercepte en un punto a a uno de los lados de la barrera. En este caso el lado de la barrera es particionado en dos sub-lados que tendrán a la vez dos puntos terminales.

En la siguiente figura (11) se muestran las posibilidades de intersección de la línea extendida a partir de un punto, en este caso el sentido es positivo paralelo al eje X.

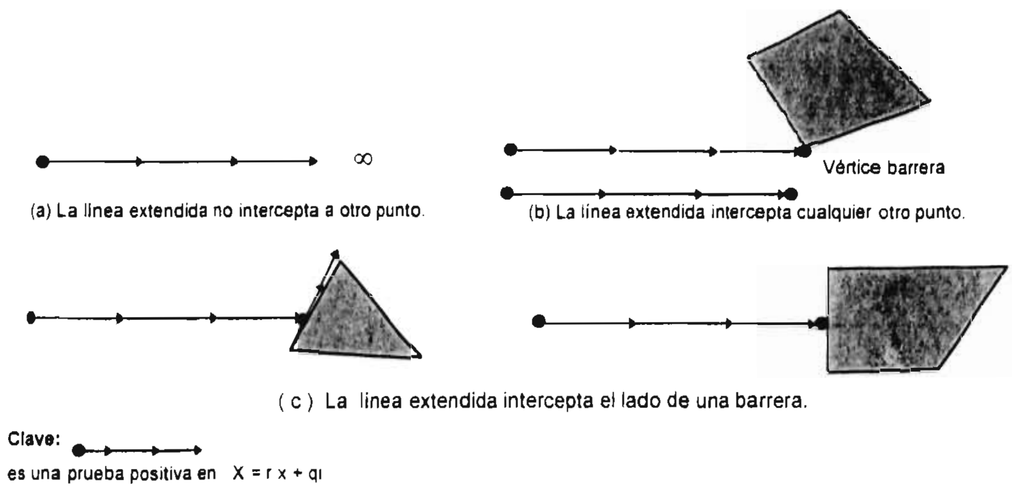


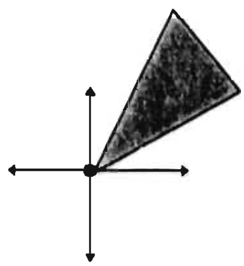
Fig. 11 Prueba positiva para X : ejemplos

Podemos deducir, a partir de lo anterior que se pueden construir pruebas en paralelo a los ejes X y Y en sus sentidos positivo y negativo.

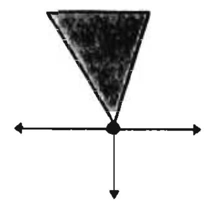
Representado como una ecuación, el árbol de vértices visibles alrededor de un nodo raíz $q(i) \in Q$ es:

$$VST(q_{(i)}) = r_x + q_i \cup r_x - q_i \cup r_y + q_i \cup r_y - q_i \tag{17}$$

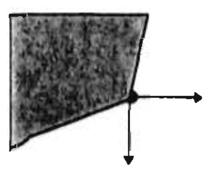
De la misma manera, si se considera un vértice barrera $v(k,m) \in V$ se puede construir un *árbol de vértices visibles*, con la misma condición de que ninguna línea extendida a partir del vértice pueda penetrar en la barrera. Dependiendo de la orientación de la barrera alrededor de $v(k,m)$ el número factible de pruebas de extensión de líneas para la formación de rutas pueden ser cinco (figura 12).



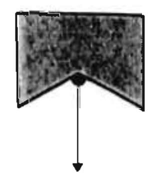
a) Cuatro pruebas posibles.



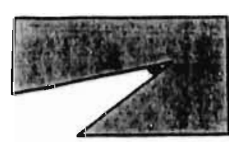
b) Tres pruebas posibles.



c) Dos pruebas posibles.



d) Una prueba posible.



e) Cero pruebas posibles.

Fig.12 Árboles de vértices visibles posibles a partir de un vértice barrera.

De la definición de las posibles direcciones y sentidos que pueden tomarse en el trazo de una ruta rectangular se pueden establecer las siguientes observaciones y definiciones:

- Si tenemos dos puntos en un plano hay ciertas condiciones bajo las cuales estos dos se comunican por una ruta escalera, a esta forma de comunicación se le define como *comunicación simple*:

1) Si las pruebas de extensión de líneas en sentidos paralelos a los ejes X y Y se interceptan en un punto común b.
2) Si son dos vértices adyacentes en una barrera, definiendo la adyacencia respecto al sentido de las manecillas del reloj.

3) Si el primer punto es un punto inicial y el segundo un punto terminal de un árbol de vértices visibles.

- Se puede mejorar la distancia o trazar una nueva ruta escalera de distancia equivalente entre dos puntos denominándole *ruta nodal*. Este procedimiento llamado ***path push*** se realiza en forma general haciendo coincidir lo más posible la trayectoria de la ruta rectangular con los límites y vértices de las barreras. (Richard C. Larson & Victor O. Li, 1981)

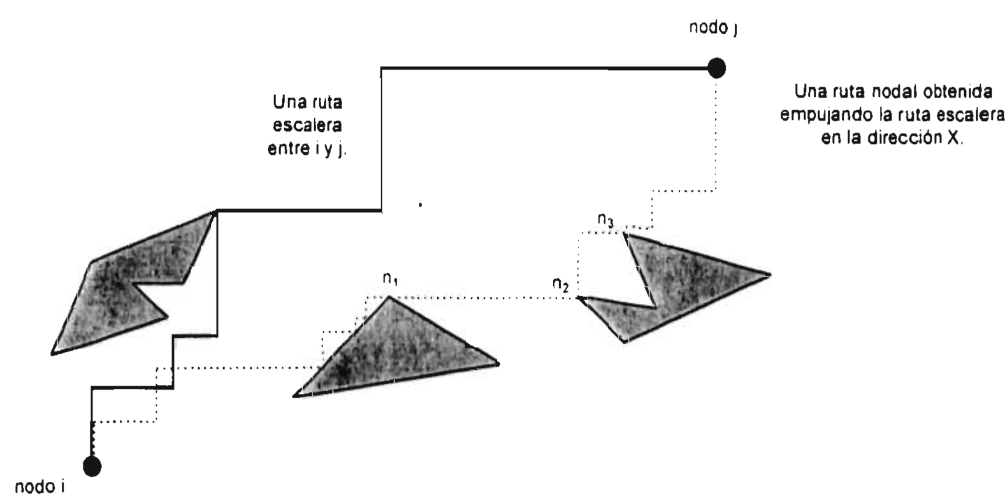


Fig. 13 Ilustración del proceso de path-push.

El desarrollo de los procedimientos y pruebas antes descritas sirven para, primero, ubicar los puntos de intersección donde cambiar de dirección de la ruta de viaje, y segundo, determinar como estos mismos puntos pueden constituir los puntos factibles óptimos de localización.

3.4 APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE LARSON-SADIQ.

Este procedimiento permite ubicar un conjunto finito de puntos candidatos que pueden dar una solución óptima al problema de localizar un servicio, cuando en el plano hay obstáculos que por una parte no permiten ubicar el servicio y por otra evitan la trayectoria libre entre dos puntos o nodos, que representa los servicios existentes o los centros de demanda.

Antes de iniciar la descripción y aplicación del algoritmo, es necesario establecer algunas definiciones obtenidas de manera lógica a partir del estudio de las rutas en torno a las barreras.

1. Una ruta rectangular en R^2 procede desde un punto origen a un punto destino en una secuencia de pasos conectados directamente, alternando pasos horizontales y verticales que indican la dirección del viaje.
2. Una ruta escalera entre (x_i, y_i) y (x_j, y_j) es una ruta l_1 con una distancia $|x_i - x_j| + |y_i - y_j|$.
3. Dos puntos se dice están comunicados si hay una ruta escalera factible entre ellos. Esta ruta no debe atravesar las barreras.
4. Una ruta escalera no debe tener un *paso de retorno*, es decir un paso de la ruta directamente conectada a dos pasos horizontales o verticales cuyas direcciones son opuestas formando una **U**.
5. Un paso de retorno en una ruta factible de distancia mínima, entre dos puntos no comunicados, intercepta el límite de una barrera situada en dirección del paso de retorno.
6. Para calcular las rutas de distancia mínima cada barrera es caracterizada por un conjunto finito de vértices barrera. Los vértices barrera son puntos de tangencia, es decir puntos a través de los cuales se puede pasar segmentos de línea horizontales y verticales, y que para todos los puntos en el límite de la barrera sean los más cercanos a ellos.
7. Se llaman *nodos fijos* al conjunto de puntos de demanda y al conjunto de vértices barrera.
8. Dos puntos (x_i, y_i) y (x_j, y_j) se comunican de manera simple si:

- Los puntos (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son vértices adyacentes de la barrera.

- (x_i,y_i) y (x_j,y_j) son los puntos inicial y terminal de un *árbol de vértices visibles*, respectivamente.
- Si las pruebas de extensión de líneas en sentidos paralelos a los ejes X y Y se intersectan en un punto común b.

9. El procedimiento ***path push*** sirve para obtener una nueva ruta escalera de distancia equivalente entre dos nodos comunicados. A la nueva ruta se le llama *ruta nodal*.
10. La ruta de menor distancia entre (x_i,y_i) y (x_j,y_j) se puede calcular restringiendo el viaje a las rutas nodales.

Una vez planteadas las definiciones anteriores se pasa a la descripción del algoritmo de Larson y Sadiq que como se verá está basado en la construcción de una cuadrícula que incluye al entorno convexo y donde visualmente se pueden identificar puntos factibles de localización. A continuación se describen los pasos de este.

1. Considérese el rectángulo más pequeño que incluya a todos los puntos de demanda y a todas las barreras, y cuyos lados sean paralelos a los ejes X y Y, formando el entorno convexo (figura 14) donde se considera se halla el punto óptimo de localización, para la demostración véase el Apéndice A.
2. Trazar líneas paralelas a los ejes X y Y que pasen a través de los nodos fijos (x_i,y_i) ya sean puntos de demanda o vértices barrera y terminar estas líneas cuando intersecten el límite de una barrera o cuando intersecten el límite del entorno convexo.
3. De las líneas trazadas se debe excluir a todas aquellas que partan de un vértice barrera, que no toquen a un punto de demanda o que además el vértice barrera del cual partan sea un punto terminal de la línea, véase Apéndice C.

Retomando la figura (7), se presenta el siguiente ejemplo.

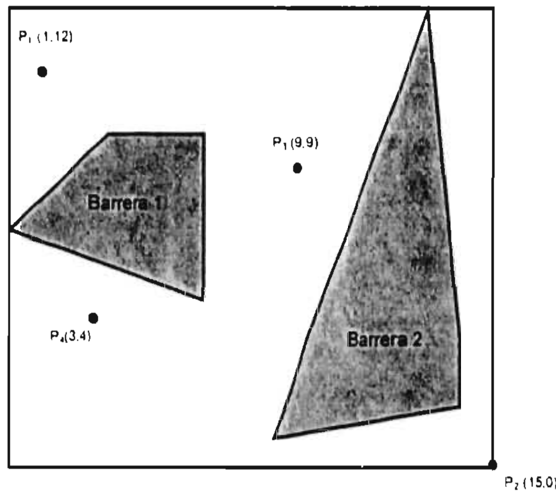


Fig. 14 Construcción del rectángulo más pequeño (entorno convexo) que incluye a los puntos de demanda y las barreras.

El conjunto de líneas resultante se define como *líneas transversales nodales* y definen la cuadrícula sobre la cual se pueden establecer, en primer lugar los puntos factibles de localización en las intersecciones de éstas y en segundo las posibles rutas rutas de viaje.

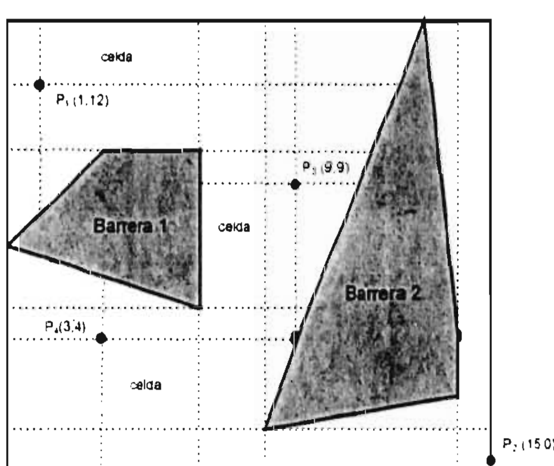


Fig. 15 La cuadrícula dentro del entorno convexo.

Las barreras y las líneas transversales nodales que forman la cuadrícula dentro del entorno convexo dividen a ésta en un número de *celdas*, es decir regiones cerradas que no son barreras en donde se considera se ubican los puntos solución y cuyas esquinas, además deben constituir los nodos de la ruta más corta. Se asume que cada límite de la barrera o pared forma parte de la celda.

Una vez identificadas las celdas se considera que los puntos esquina intersección de las líneas nodales transversales, son los puntos más factibles de localización. Larson y Sadiq demostraron que la optimalidad de los puntos esquina de la celda no cambia, dado que el valor de la función objetivo no cambia moviendo la localización del servicio o los nodos que constituyen la trayectoria de viaje a cualquier punto esquina de la celda, para corroborar esta afirmación véase los apéndices A y B.

3.5 EVALUACIÓN DE LOS PUNTOS FACTIBLES DE LOCALIZACIÓN.

Establecidos los puntos factibles de localización por medio del algoritmo de Larson y Sadiq se hace necesario evaluarlos, en este caso empleando la optimización matemática: tratando al problema de localización como uno de programación lineal. Se debe decir que el hecho de ubicar los puntos factibles de localización reduce el problema de optimización al tratarlo como uno de problema de programación lineal, pero antes de explicar esto se dan algunas bases para sustentarlo.

Recordando la formulación general del problema de localización cuando las trayectorias son rectangulares:

$$\underset{x,y}{Minimizar} f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} w_i(|x-a_i| + |y-b_i|)$$

y aplicando primero la propiedad de separabilidad podemos encontrar un punto óptimo (x^*, y^*) que minimice la función objetivo. Esto es, de acuerdo a la *propiedad de separabilidad* el problema general de localización se puede reescribir y es equivalente a:

$$\underset{x,y}{Minimizar} f(x,y) = W_1(x) + W_2(y)$$

donde:

$$W_1(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i |x - a_i|$$

$$W_2(y) = \sum_{i=1}^{n} w_i |y - b_i|$$

son elementos que pueden ser tratados como dos problemas diferentes de programación lineal, lo que ya reduce de manera considerable la complejidad del problema inicial.

Ahora, el para evaluar los puntos factibles de localización es necesario verificar que $W_1(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i |x - a_i|$ y $W_2(y) = \sum_{i=1}^{n} w_i |y - b_i|$ sean funciones convexas de x y de y respectivamente, y si las dos funciones son convexas su suma también lo será, lo que significa que el óptimo local es un óptimo global y que $W(x,y)$ no tiene puntos de inflexión.

Para facilitar el análisis, los valores de a_{jk} para $j = 1,\ldots,n$ pueden reordenarse produciendo una secuencia $a_{(1)k} < a_{(2)k} < a_{(3)k} <\ldots< a_{(n_k)k}$ cuyos pesos positivos asignados son $w_1^k, \ldots, w_{n_k}^k$. Establecido esto ahora las coordenadas se resumen a n_k, donde $n_k \leq n$ provocando la creación de una secuencia de $a_{(j)k}$´s que se incrementa estrictamente en su valor. El superíndice k en w_j^k denota el orden y consolidación en los pesos correspondientes, la razón es que a partir de la creación de la secuencia el orden de los pesos puede ser diferente dependiendo de x_k y se usa el superíndice para distinguir esos ordenes.

Asumiendo las consideraciones anteriores, el problema de localización puede escribirse como:

$$\underset{x_k}{Minimizar}\ W_k(x_k) = \sum_{j=1}^{n_k} w_j^k \left| x_k - a_{(j)k} \right| \text{ para } k = 1,2.$$

que es una forma conveniente para el cálculo de la derivada de la función $W_k(x_k)$. Siendo así, ahora puede escribirse que:

$$W_k'(x_k) = -\sum_{j=1}^{n_k} w_j^k \text{ para } x_k < a_{(1)k} \tag{18}$$

$$W_k'(x_k) = \sum_{j=1}^{i} w_j^k - \sum_{j=i+1}^{n_k} w_j^k \text{ para } a_{(i)k} < x_k < a_{(i+1)k} \tag{19}$$

$$W_k'(x_k) = \sum_{j=1}^{n_k} w_j^k \text{ para } a_{(n_k)k} \tag{20}$$

de lo que se puede establecer que la pendiente de $W_k(x_k)$ está basada en segmentos de línea y cambios solo en los puntos $a_{(j)k}$. En suma, se establece que $W_k(x_k)$ es una función lineal convexa y por tramos, con puntos discontinuos en la primera derivada que ocurren en $a_{(j)k}$.[1] Estos hechos hacen posible que el modelo de localización pueda ser un modelado como uno de programación lineal[2]. (1. Love, Morris y Wesolowsky (1988), 2.Frederick S. Hillier & Gerald J. Lieberman,(1990)).

La prueba de convexidad matemáticamente puede ser complicada, sin embargo esta puede hacerse simplemente graficando el término generalizado $w_i|x_k - a_{ik}|$ contra x_k, para cualquier w_j>0 y a_{jk}, que hace en ocasiones innecesario el uso de las ecuaciones descritas. El procedimiento gráfico se presenta en este trabajo como alternativa de solución al problema tratado.

3.6 EL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL.

Establecida la manera de como las propiedades de separabilidad y convexidad reducen de manera considerable la complejidad del problema inicial, es preciso describir como el problema de optimización puede ser representado equivalentemente por un problema de programación lineal. Para lo cual se definen dos nuevas variables, r_j y s_j tal que:

$$r_j = \begin{cases} x - w_j & \text{si } x \geq w_j \\ 0 & \text{si } x < w_j \end{cases}$$

y

$$s_j = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq w_j \\ w_j - x & \text{si } x < w_j \end{cases}$$

y así una vez introducidas las variables r_j y s_j el problema de optimización será:

$$Minimizar \quad f(x,r,s) = \sum_{j=1}^{p} w_j(r_j + s_j)$$

$$s.a.$$

$$x - r_j + s_j = w_j \qquad j = 1,\ldots.p.$$

$$r_j \geq 0, s_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots..p.$$

donde al introducir la restricción $x - r_j + s_j = w_j$ se asegura que para un valor dado ambas r_j y s_j no tomarán valores positivos en la solución óptima del problema de programación lineal. Si las restricciones se representaran en forma de matriz, las columnas corresponderían a r_j y s_j siendo linealmente dependientes. (Francis R.L. & John A. White, 1992).

3.6 EJEMPLO.

Mediante este ejemplo se espera corroborar la factibilidad de aplicar el trazo de las líneas transversales nodales dentro del entorno convexo, además de replantear el problema general de localización aplicando la propiedad de separabilidad y evaluar rápidamente los puntos factibles de localización aplicando el método gráfico para verificar la convexidad de la función, para posteriormente plantear el problema como uno de programación lineal.

Se desea localizar un nuevo servicio que minimice los costos totales de transportación y además satisfaga a los puntos de demanda P_{xy} definidos por las coordenadas $P_1(2,5)$, $P_2(5,1.5)$, $P_3(6.5,2.5)$, $P_4(7,6)$ y $P_5(4.5,5.5)$, cuyas ponderaciones son 2,3,4,4 y 1, respectivamente. En el plano también se encuentran dos barreras poligonales S_1 con coordenadas: (2.5,2), (2,3), (2.5,4), (3.5,4) y (4.5,3) y S_2 : (5,4), (5,5), (6,6), (7,4.5), (7,3) y 6.5,3).

Tabla 2. Datos del problema.

Coordenadas y pesos originales				Orden en la dimensión de X		Orden en la dimensión de Y	
j	a_{j1}	a_{j2}	w_j	$a_{(j)1}$	w^1_j	$a_{(j)2}$	w^2_j
1	2	5	2	2	2	1.5	3
2	5	1.5	3	4.5	1	2.5	4
3	6.5	2.5	4	5	3	5	2
4	4.5	5.5	1	6.5	4	5.5	1
5	7	6	4	7	4	6	4

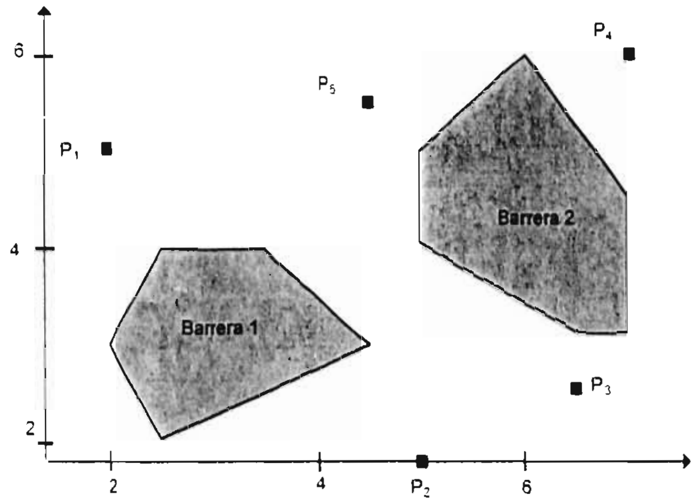


Fig. 16 Representación gráfica del problema.

Aplicando el algoritmo de Larson y Sadiq basado en el trazo de Líneas Nodales Transversales, cuyas intersecciones definen los puntos factibles de localización, los puntos identificados dentro del entorno convexo son: (4.5,5.5), (5,5.5), (4.5,5), (5,5), (4.5,4), (5,4), (4.5,3), (5,3), (6.5,3), (4.5,2.5), (5,2.5), (6.5,2.5), (4.5,2), (5,2), (6.5,2) y los puntos que lo delimitan son: (2,1.5), (4.5,1.5), (5,1.5), (6.5,1.5), (7,1.5), (7,2), (7,2.5), (7,3), (7,6), (5,6), (4.5,6), (2,6), (2,2), (2,4), (2,5) y (2,5.5).

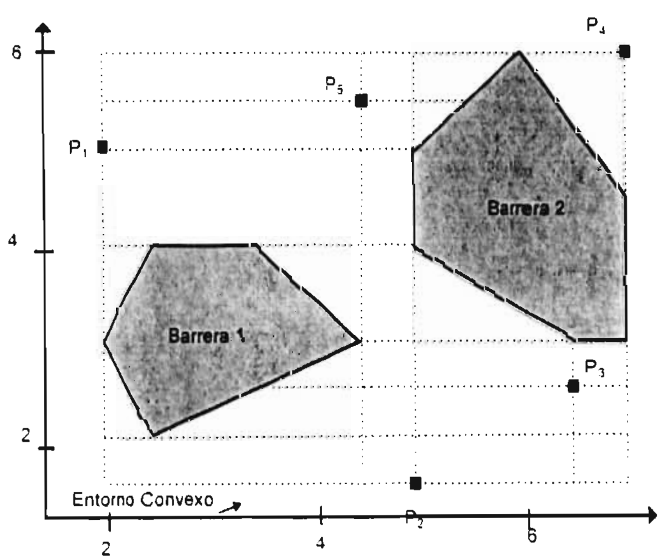


Fig. 17 Trazo de las líneas nodales transversales.

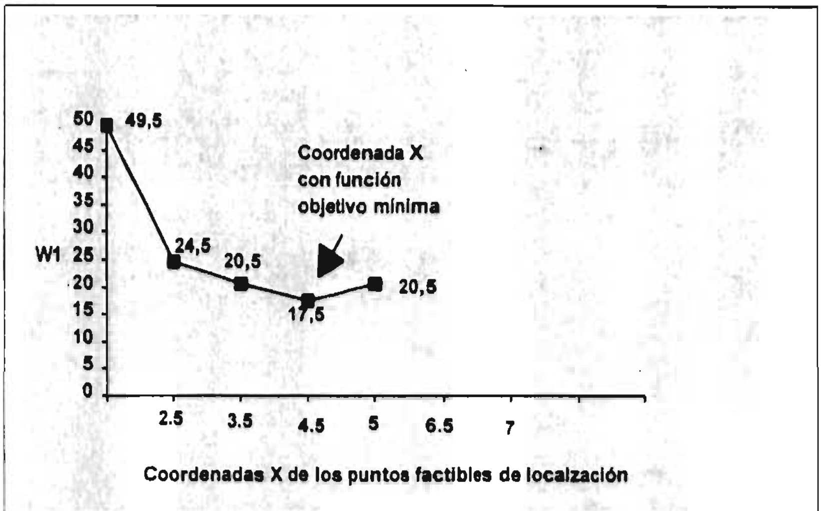
Aunque el número de puntos parecieran excesivos, la ventaja implícita del procedimiento es de que al ubicarlos no se corre el riesgo de que la coordenada que dá solución a nuestro problema esté dentro de la barrera. Es decir, el problema de localización se convierte en un problema discreto.

Para complementar la ventaja de ubicar los puntos factibles de localización evitando caer en el interior de las barreras, el formular el problema dividiéndolo en dos subproblemas fáciles de resolver, implícitamente hace posible evaluar no los puntos factibles sino las coordenadas de X y de Y por separado. Esto a la vez, permite reducir el número de coordenadas de X y Y en un grupo compacto evitando evaluarlas múltiples veces.

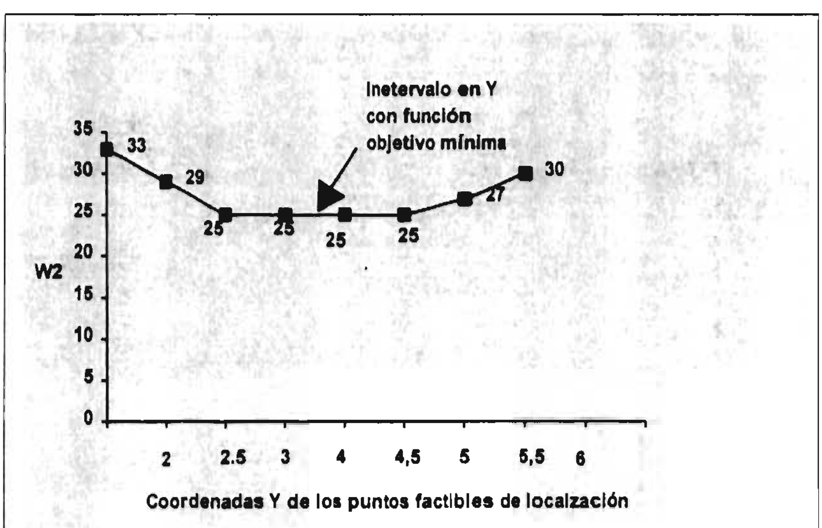
Reduciendo el conjunto de coordenadas, al graficar $W_j|x_k - a_{jk}|$ contra x_k se evalúa de manera rápida, obteniendo la coordenada que hace mínima la función objetivo. A continuación se presentan los resultados.

Tabla 3. Resultados de la evaluación de las coordenadas de los puntos factibles de localización (método gráfico).

x	2	4.5	5	6.5	7			
W_1	49.5	24.5	20.5	17.5	20.5			
y	1.5	2	2.5	3	4	5	5.5	6
W_2	33	29	25	25	25	25	27	30



Gráfica 1. Coordenada X con función objetivo mínima.



Gráfica 2. Coordenada Y con función objetivo mínima.

En la primera gráfica, para determinar la localización óptima de la coordenda X, el mínimo de la función objetivo se alcanza cuando el valor de la coordenada es 6.5 con un valor en la función objetivo de 17.5. En la segunda gráfica, para determinar la localización óptima de la coordenada Y, el mínimo de la función objetivo se alcanza en las coordenadas 2.5,3,4 y 5 con un valor de 25. Con la suma de las funciones objetivo, de acuerdo a la propiedad de separabilidad, encontramos el valor de la función objetivo total de cada uno de los puntos factibles de localización, en la siguiente tabla (4) se presentan los resultados.

Tabla 4. Valor de la función objetivo de cada punto factible de localización.

Punto factible	Valor de la función	Punto factible	Valor de la función	Punto factible	Valor de la función	Punto factible	Valor de la función
(2,1.5)	82.5	(7,2.5)	45.5	(4.5,6)	54.5	(2,5.5)	76.5
(4.5,1.5)	57.5	(7,3)	45.5	(2,6)	79.5	(4.5,5.5)	51.5
(5,1.5)	71.5	(7,6)	50.5	(2,2)	82.5	(5,5.5)	47.5
(6.5,1.5)	50.5	(5,6)	50.5	(2,4)	74.5	(4.5,5)	49.5
(7,1.5)	53.5	(5,4)	45.5	(2,5)	74.5	(4.5,2.5)	49.5
(7,2)	49.5	(4.5,3)	49.5	(5,3)	45.5	(4.5,5)	49.5
(5,5)	45.5	(4.5,2)	53.5	(6.5,3)	42.5	(4.5,2.5)	49.5
(4.5,4)	49.5	(5,2)	49.5	(5,2.5)	45.5		
(6.5,2.5)	42.5	(6.5,2)	46.5	(4.5,2.5)	49.5		

Como se señala en la tabla 4 los puntos factibles de localización con la función objetivo mínima son dos, (6.5,2.5) y (6.5,3) con un valor de 42.5. Estos resultados comprueban de cierta manera que el valor de la función objetivo no cambia mucho en las esquinas de la celda formada por las líneas nodales transversales, puntos factibles (6.5,2.5), (6.5,3), (5,3) y (5,2.5), dado el hecho de que el valor está dentro del intervalo de 42.5 y 45.5.

Ahora, para plantear el problema como uno de programación lineal en los subproblemas obtenidos se tiene que:

$$\underset{x}{Min.}\ W_1(x) = 2|x-2| + 3|x-5| + 4|x-6.5| + |x-4.5| + 4|x-7|$$

$$\underset{y}{Min.}\ W_2(y) = 2|y-5| + 3|y-1.5| + 4|y-2.5| + y-5.5| + 4|y-6|$$

y si se introducen las variables r_j y s_j, el problema puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
&Min\ W_1 = 2(r_1+s_1)+3(r_2+s_2)+4(r_3+s_3)+(r_4+s_4)+4(r_5+s_5)\\
&s.a.\\
&x-r_1+s_1=2\\
&x-r_2+s_2=5\\
&x-r_3+s_3=6.5\\
&x-r_4+s_4=4.5\\
&x-r_5+s_5=7\\
&x_i,r_i,s_i \geq 0, i=1,...5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Min\ W_2 = 2(r_1+s_1)+3(r_2+s_2)+4(r_3+s_3)+(r_4+s_4)+4(r_5+s_5)\\
&s.a.\\
&y-r_1+s_1=5\\
&y-r_2+s_2=1.5\\
&y-r_3+s_3=2.5\\
&y-r_4+s_4=5.5\\
&y-r_5+s_5=6\\
&y_i,r_i,s_i \geq 0, i=1,...5.
\end{aligned}$$

Sin embargo, como a partir del algoritmo de Larson y Sadiq se conocen los puntos factibles de localización, solo es necesario evaluarlos a estos, simplificando el planteamiento del problema de programación lineal porque en la restricción x_i y y_i (coordenadas del punto factible de localización) tomarán valores constantes.

El planteamiento entonces será:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad W_1 = 2(r_1+s_1)+3(r_2+s_2)+4(r_3+s_3)+(r_4+s_4)+4(r_5+s_5)\\
&s.a.\\
&-r_1+s_1 = 2-x_i\\
&-r_2+s_2 = 5-x_i\\
&-r_3+s_3 = 65-x_i\\
&-r_4+s_4 = 45-x_i\\
&-r_5+s_5 = 7-x_i\\
&x_i, r_i, s_i \geq 0. i = 1\ldots 5.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Min \quad W_2 = 2(r_1+s_1)+3(r_2+s_2)+4(r_3+s_3)+(r_4+s_4)+4(r_5+s_5)\\
&s.a.\\
&-r_1+s_1 = 5-y_i\\
&-r_2+s_2 = 15-y_i\\
&-r_3+s_3 = 25-y_i\\
&-r_4+s_4 = 55-y_i\\
&-r_5+s_5 = 6-y_i\\
&y_i, r_i, s_i \geq 0. i = 1\ldots 5.
\end{aligned}
$$

Las solución al problema de programación lineal utilizando el software ***QSB***[+] (Quantitative Systems Business Plus, versión 2.0) arroja los siguientes resultados:

Tabla 5. Resultados de la evaluación de las coordenadas de los puntos factibles de localización (QSB[+]).

x	2	4.5	5	6.5	7			
W_1	49.5	24.5	20.5	17.5	20.5			
y	1.5	2	2.5	3	4	5	5.5	6
W_2	33	28	25	25	25	25	27	30

Como se puede apreciar, los valores de la función objetivo son en su mayoría iguales a los obtenidos por el método gráfico.

Por otro lado, la solución al mismo problema, sin tomar en cuenta la presencia de las barreras y evaluando en el espacio continuo, dió como resultado que las coordenadas óptimas de localización sean (6.5,5) con un valor de la función objetivo de 42.5. Obsérvese que en esta situación la coordenada de localización óptima caé dentro de la barrera número 2, y además tiene el mismo valor de la función objetivo. En conclusión de los resultados se corrobora la factibilidad de usar la metodología planteada para evitar que la coordenada óptima de localización caiga dentro de las barreras, obsérvese la tabla (6).

Tabla 6. Comparación de resultados.

	Evaluación sin considerar la presencia de barreras.	Evaluación de los puntos factibles de localización usando el software QSB⁺.	Evaluación de los puntos factibles de localización por el método gráfico.
Coordenadas óptimas	(6.5,5)	(6.5,2.5) y (6.5,3)	(6.5,2.5) y (6.5,3)
Valor de la función objetivo.	42.5	42.5	42.5

Como subproducto de la solución, una vez ubicada la localización óptima del nuevo servicio podrían trazarse rutas probables de tránsito que de manera similar al número de puntos factibles de localización disminuyen en su número. En la figura (18) se muestran los resultados y las posibles rutas de viaje.

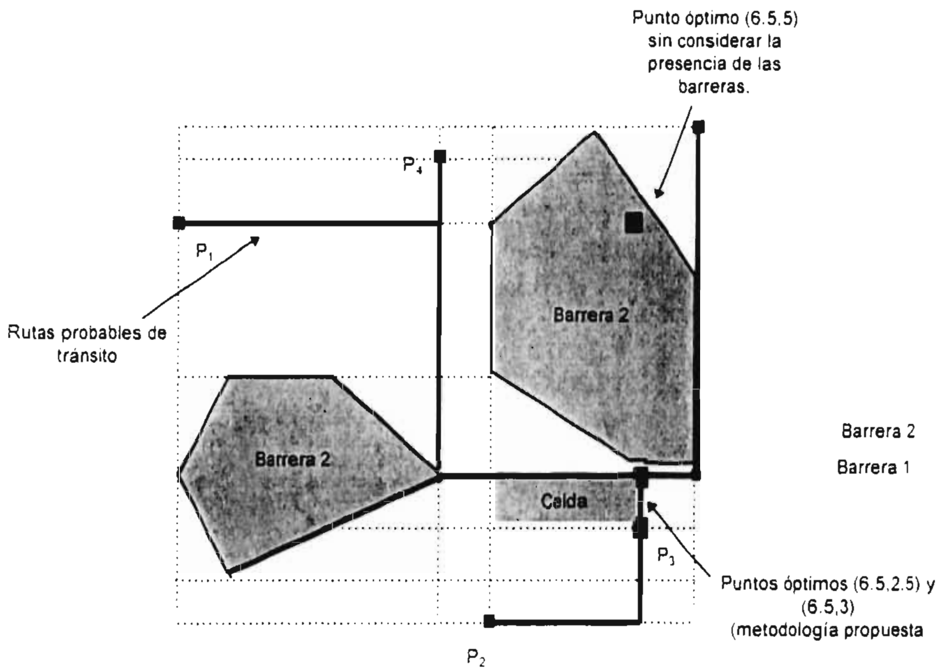


Fig. 18 Ubicación del punto óptimo de localización.

IV. CASO DE ESTUDIO

El fenómeno de conurbanización que presenta la ciudad de Puebla, apoyado por el patrón concéntrico de desarrollo y crecimiento que ha prevalecido, requiere de la adopción de una estrategia de desarrollo urbano que permita inducir, a través de la construcción de infraestructura básica, un crecimiento ordenado. El sistema de enlace regional es en esta perspectiva un elemento clave, asimismo la dotación de servicios y equipamientos en las zona urbana sin dejar de tomar en cuenta la conservación del patrimonio arquitectónico histórico, que permitan un desarrollo autónomo y sustentable.

El Plan Estatal de Desarrollo 1993-1999, en el capitulo correspondiente a la Política General del Gobierno del Estado de Puebla, establece la ejecución de proyectos específicos para el desarrollo de la entidad en tres distintos niveles:

1. Proyectos de "...trascendencia estatal que habrán de funcionar como detonadores del desarrollo del Estado a largo plazo; entre ellos, los de equipamiento urbano e industrial para los polos de desarrollo del Estado, para fortalecer la capacidad de la zona conurbada de Puebla hacia el sector industrial, estableciendo características y límites a su crecimiento."
2. Proyectos regionales "...que también deben operar como detonadores del desarrollo, adaptados a las necesidades, recursos disponibles y características disponibles y caracteristicas particulares de las distintas regiones del Estado... Mediante los proyectos regionales se buscará contener y revertir la centralización ofreciendo a la población oportunidades de empleo y superación en sus lugares de origen.
3. Proyectos locales para el desarrollo de "...actividades productivas, provistos de capital inicial necesario para poner en marcha un proceso de autodesarrollo."

4.1 EL PROGRAMA ANGELÓPOLIS

El Artículo 9° de la Ley de Planeación para el desarrollo del Estado de Puebla, señala que entre los elementos del Sistema Estatal de Planeación Democrática están los programas Regionales y Especiales.

Por su parte, la ley de Desarrollo Urbano del Estado, en el Capítulo III, Artículo 15 contempla planes y programas a través de los cuales tendrá lugar la ordenación y regulación de los asentamientos humanos en el estado. En la fracción IV del mismo artículo se hace referencia a planes y programas que ordenen y regulen las zonas conurbadas dentro del territorio del estado. En la fracción V dispone que además de los planes o programas que menciona con anterioridad se podrán elaborar otros que son desviaciones o modalidades de aquellos. En ese sentido, en el inciso a) de la misma fracción contempla los planes o programas regionales en los que participe el Estado en los términos del convenio que para tal efecto se celebre.

En este marco, en septiembre de 1993, el Ejecutivo del Estado sometió a consideración del Comité de Planeación para el Desarrollo del Estado el Programa de Desarrollo Regional **Angelópolis**, en cuya introducción destaca que el acelerado crecimiento demográfico de la ciudad de Puebla, su expansión física desordenada, ello aunado a la pérdida de dinamismo de las actividades agropecuarias en su ámbito de influencia regional, han provocado un conjunto de desequilibrios que se traducen en incompatibilidades de uso del suelo, en deterioros graves del sistema ecológico regional, en concentración desordenada de la inversión industrial y de desarrollo de la infraestructura básica.

El Programa de referencia se deriva del Plan Estatal de Desarrollo. Señala como una de sus acciones principales la planeación urbana asignándole los siguientes objetivos:

- Fortalecer el potencial industrial, comercial, cultural y turístico para conducir el crecimiento urbano de la región en forma armónica, equilibrada y congruente con la distribución de los recursos.
- Mejorar integralmente la estructura urbana de la región, contemplando en uso de del suelo, la vialidad y el transporte público, el equipamiento y los servicios urbanos, enfocándose los esfuerzos hacia el desarrollo industrial, la preservación ecológica y atender las carencias más apremiantes en materia de vivienda, empleo, educación, salud, cultura y recreación de la población.

Las estrategias propuestas para cumplir cabalmente con estos objetivos son:

1. Elaborar y actualizar planes, programas y esquemas de desarrollo.
2. Establecer reservas territoriales aptas para uso urbano e industrial y buscar mecanismos que eviten la especulación con dichos terrenos.
3. Elaborar, actualizar y difundir planes y declaratorias del patrimonio cultural y natural.
4. Actualizar y difundirlos instrumentos jurídicos de planeación y control, mejorando los mecanismos de aplicación y vigilancia.
5. Modernizar los sistemas del registro público y catastral.
6. Diseñar mecanismos que fomenten la oferta de vivienda a través de una normatividad clara y sencilla, buscando el abatimiento de costos.
7. Revisar y actualizar las cartas urbanas de la región.

El **Programa Angelópolis** forma parte de la estrategia de desarrollo de una estructura integral de inversión en infraestructura, equipamiento, vivienda y servicios, tendiente a mejorarla calidad de vida del conjunto de los habitantes de la zona urbana y conurbada de la ciudad de Puebla, así como desarrollar nuevas oportunidades económicas regionales.

Por sus características, el Programa mencionado debe permitir establecer con precisión las prioridades de inversión pública federal, estatal y municipal, dar certeza a la inversión privada e incrementar la capacidad crediticia de los gobiernos estatal y municipales así como de los particulares en los proyectos con fuerte potencial multiplicados determinados en el mismo.

La cobertura territorial y las acciones que prevé el **Programa Angelópolis** abarcan la totalidad de los territorios de 14 municipios de la región Centro-Poniente del estado de Puebla. La importancia relativa de la ciudad capital como localidad preponderante en el conjunto de la región, así como el alcance de los proyectos contenidos en el Programa, requieren de la generación de un instrumento de ordenamiento territorial de carácter regional y ordenado de las localidades que conforman la misma.

El **Programa Angelópolis** tiene su radio de acción en la zona urbana y conurbada de la ciudad de Puebla, abarca el municipio de Puebla y municipios aledaños, por lo cual a sido dividida para su desarrollo en cinco zonas. La Zona número 4 comprende el municipio de Puebla. Se caracteriza por ser el corazón de la región, principal zona de atracción poblacional, los impactos se referirán al reordenamiento de su actividad industrial, a la restauración del equilibrio ecológico, al reordenamiento del desarrollo urbano, a su consolidación en materia de servicios y equipamientos culturales y de turismo.

Dentro del **Programa Angelópolis** están establecidos proyectos individuales a realizar, los más importantes son:

- En cuestión de Vivienda __ se inició el programa de construcción de vivienda popular en la reserva territorial Quetzalcóatl para la construcción de 2 mil 300 casas.
- En cuestión al uso del suelo __ se plantea la creación de un sistema de información computarizado, con la más moderna tecnología, para lograr una base de datos completa, confiable y actualizada de propietarios de casas y terrenos.
- En cuestión al tratamiento de los residuos municipales __ a partir del 2 de enero de 1995 se concesionó a dos empresas privadas los servicios de barrido, recolección,

transporte y disposición final de los residuos sólidos. Además, para la disposición de los residuos se construyó un nuevo relleno sanitario ubicado al sudeste de la ciudad.

- En cuanto a agua, drenaje y saneamiento __ la inversión en este rubro será superior a 100 millones de pesos, para dotar del vital líquido a casi un centenar de colonias y otorgaran un beneficio directo para 500 mil habitantes. Complementando lo anterior, se construyen cinco plantas de tratamiento de aguas residuales y sus colectores marginales que permitirán limpiar 2 mil 700 litros de aguas negras por segundo.
- En cuanto a vialidades __ se han destinado recursos para la construcción del anillo Periférico Ecológico, vialidades en Puebla y otros municipios, transporte público, semaforización y administración del tránsito.
- En cuanto a turismo __ el proyecto del Río de San Francisco de interés estatal, será un detonador de la recuperación del Centro Histórico por representar un potencial importante para promover el desarrollo urbano en la región de Angelópolis.

4.1 EL PROYECTO DEL RÍO DE SAN FRANCISCO.

De los proyectos mencionados arriba, el proyecto del Río de San Francisco, despertó el interés particular dado que a partir de él se descubrió la posibilidad potencial de aplicar la metodología planteada en este tesis. Además, de que la ciudad de Puebla es una de las mejor planeadas en el país, al menos en el centro histórico, y esto permite la modelación del problema de localización en presencia de barreras de acuerdo a la métrica rectangular.

El proyecto del Río de San Francisco tiene los siguientes objetivos:

- promover la recuperación del Patrimonio Histórico edificado bajo el más riguroso respeto de los valores a través de las intervenciones que garanticen la integración a nivel arquitectónico.
- fomentar los servicios turisticos.

y espera los siguientes resultados:

- consolidar un proyecto sin precedente en el país que incluye el desarrollo de un paseo peatonal, así como la construcción de un centro de convenciones, hoteles y áreas comerciales.
- captar un flujo de 1 millón de visitantes en el primer año, para llegar a 1.5 millones de turistas en la consolidación del proyecto.

El rescate de edificios que fueron importantes centros fabriles, permitirá contar con un gran Centro de Convenciones que atraerá actividades locales, nacionales e internacionales, para generar riqueza y revitalizar el Centro Histórico. Este proyecto consolidará el centro de convenciones que tendrá a su alrededor un Museo de Sitio, teatro al aire libre, sala de conciertos, exposiciones fijas y temporales, zona para venta de artesanías y comercios.

El rescate del Estanque de los Pescaditos permitirá a los paseantes una estancia agradable en este centro de recreación, que contará también con hoteles, restaurantes, bazares y otros atractivos que darán potencialidad económica a la zona, revitalizando esta área de importante trascendencia histórica y cultural, integrándola a la modernidad del siglo XXI. Sin embargo, como se menciona arriba estas obras deben hacerse respetando los decretos, el primero, del 18 de noviembre de 1977 donde se declara una Zona de Monumentos Históricos a la ciudad de Puebla de Zaragoza y, segundo, donde fue nominada por la UNESCO, Patrimonio Cultural de la Humanidad, el día 8 de diciembre de 1987.

Una vez establecidas las consideraciones anteriores, es posible establecer la forma en que el modelo de localización en presencia de barreras de tráfico y zonas prohibidas para la ubicación de servicios puede ser planteado.

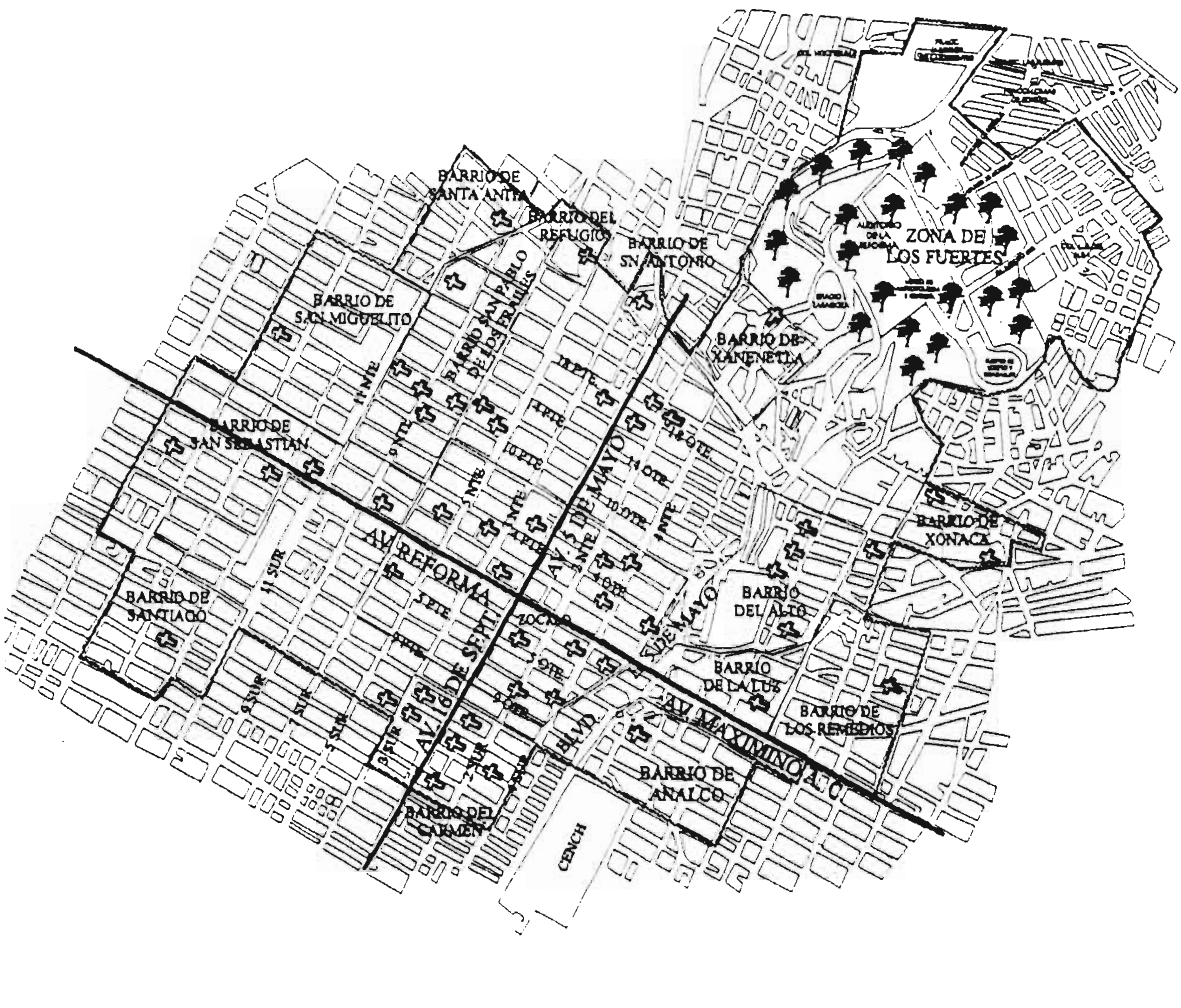
La aplicación del modelo surge del problema que se presenta cuando: el área seleccionada para el desarrollo del proyecto del Río de San Francisco es considerada como zona restringida para la localización de nuevos servicios y surge la necesidad de localizar nuevos servicios que satisfagan las necesidades de muchos negocios (puntos de demanda) distribuidos fuera del área restringida (barrera y/o zona prohibida).

El planteamiento del problema es el siguiente: Se desea localizar un centro de distribución de materiales didácticos que minimice los costos totales de transportación y además satisfaga la demanda de seis escuelas localizadas en las coordenadas asignadas a las esquinas de las calles: P_1 (4,0) esquina entre 2 Oriente y 14 Norte, P_2 (5,2) esquina 6 Oriente y 16 Norte, P_3 (0,1) esquina 4 Oriente y 6 Norte, P_4 (0,4) esquina 10 Oriente y 6 Norte, P_5 (4,7) esquina 14 Norte y 18 Oriente y P_6 (2,8) esquina 20 Oriente y 10 Norte. La ponderación asignada a cada escuela, de acuerdo a la cantidad de artículos necesarios para satisfacer su demanda, es 2,2,3,1,3 y 2 respectivamente. En el área que incluye a las escuelas también se encuentran dos barreras, las zonas restringidas por el Proyecto Angelópolis, definidas por los vértices barrera: barrera 1, (1,4), (1,3), (1,0), (4,0), (4,2), (3,5) y barrera 2, (2,5), (3,5), (2,6), (3,7).

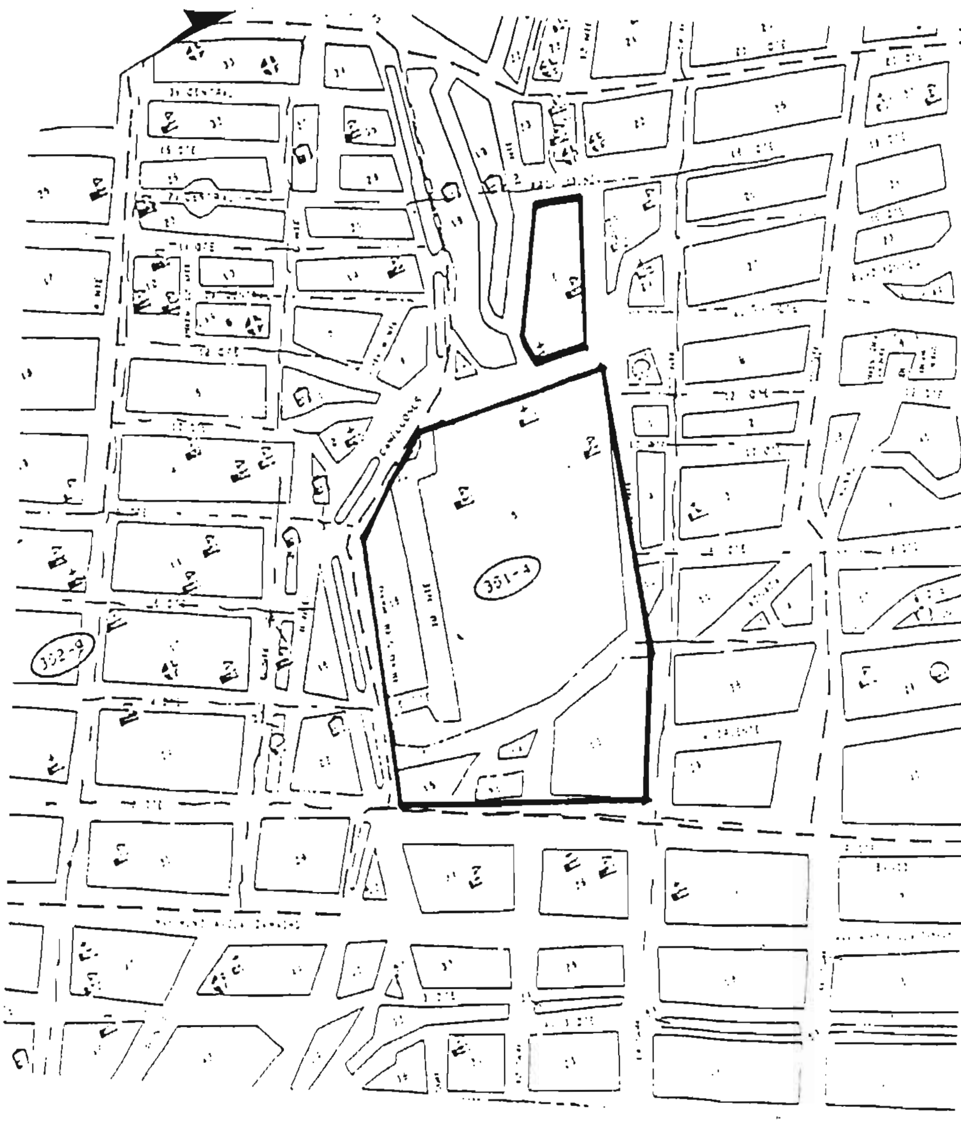
En el mapa 1 se presenta la zona considerada como Centro Histórico de la ciudad de Puebla y se señala el área para la realización del proyecto del Río de San Francisco, mientras que sobre el mapa 2 se trazan las líneas nodales transversales para identificar después los puntos factibles de localización. Como se puede ver, en la práctica no resulta fácil el trazo de las líneas nodales, sin embargo, puede lograrse una buena aproximación que en nada afecte el planteamiento del modelo.

Tabla 5. Datos del problema en estudio.

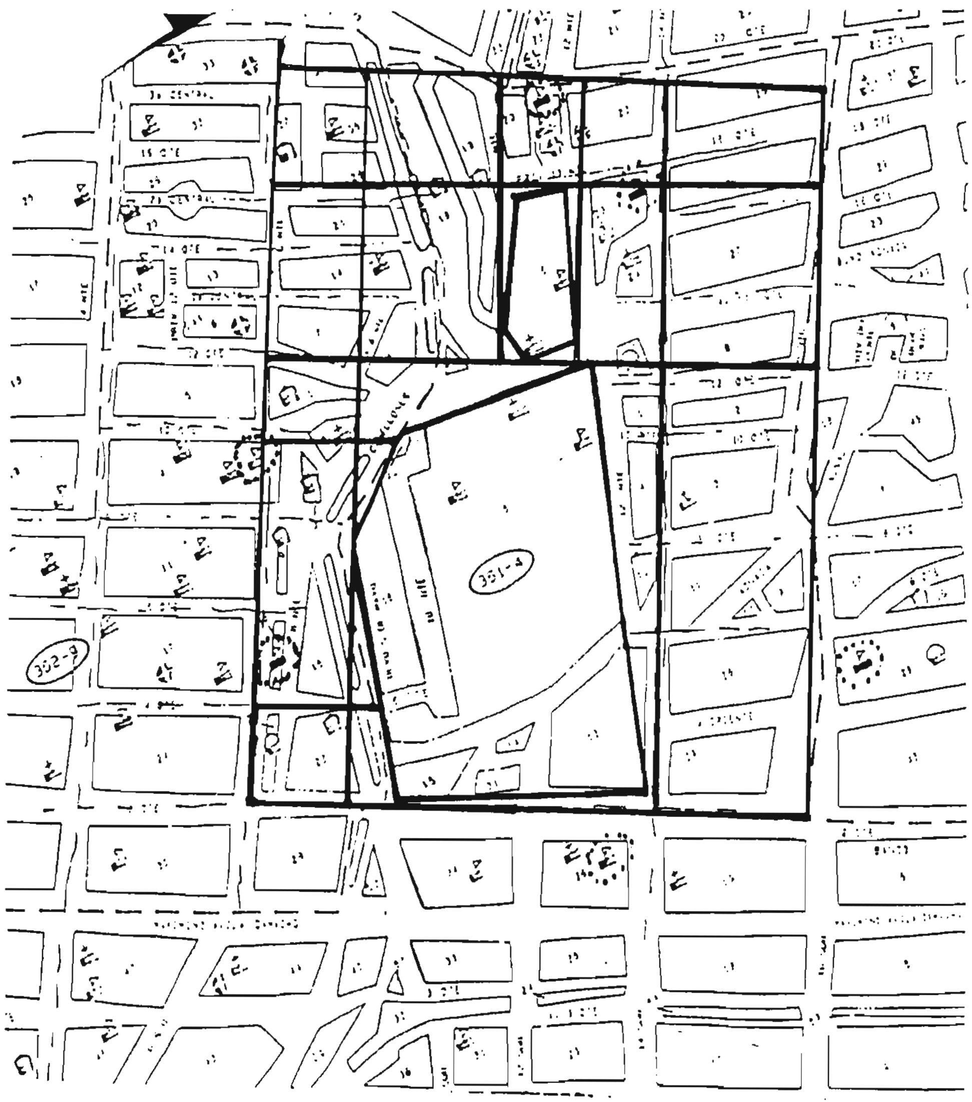
Coordenadas y pesos originales				Orden en la dimensión de X		Orden en la dimensión de Y	
j	a_{j1}	a_{j2}	w_j	$a_{(j)1}$	w^1_j	$a_{(j)2}$	w^2_j
1	4	0	2	4	5	0	2
2	5	2	2	5	2	2	2
3	0	1	3	0	4	1	3
4	0	4	1	2	2	4	1
5	4	7	3			7	3
6	2	8	2			8	2



Mapa 1. Centro Histórico de la Ciudad de Puebla.



Mapa 2. Área proyectada para la realización del proyecto del Río de San Francisco (considerada barrera de localización).



Mapa 3. Identificación de los puntos de demanda y trazo de las líneas nodales transversales.

A partir del trazo de las líneas nodales transversales en el área seleccionada de la ciudad de Puebla se identificaron los siguientes puntos factibles de localización:

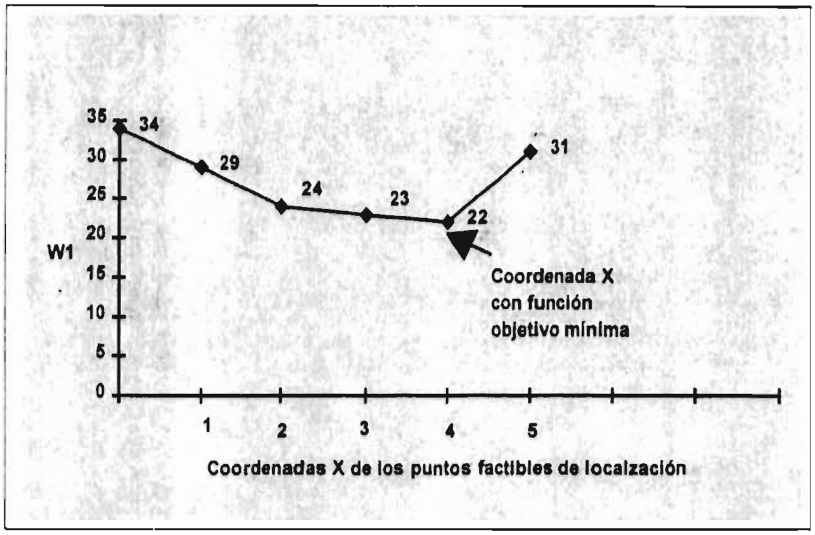
Tabla 6. Puntos factibles de localización.

1. (1,7) 2ª central de la 14 OTE. y Bulevar.	15. (0,4) 10 Oriente y 6 Norte.
2. (2,7) 10 Norte y 18 Oriente.	16. (0,5) 12 Oriente y 6 Norte.
3. (3,7) 12 Norte y 18 Oriente.	17. (0,7) 2ª central de la 14 OTE. y 6 Norte.
4. (4,7) 14 Norte y 18 Oriente.	18. (0,8) 3ª central de la 16 OTE. y 6 Norte.
5. (1,5) Privada de la 6 Norte y 12 Oriente.	19. (1,8) 20 Oriente y Bulevar.
6. (2,5) 10 Norte y 12 Oriente.	20. (2,8) 20 Oriente y 10 Norte.
7. (3;5) 12 Norte y 12 Oriente.	21. (3,8) 20 Oriente y 12 Norte.
8. (4,5) 14 Norte y 12 Oriente.	22. (4,8) 20 Oriente y 14 Norte.
9. (1,4) 10 Oriente y Bulevar.	23. (5,7) 16 Oriente y 16 Norte.
10.(4,2) 6 Oriente y 14 Norte.	24. (5,8) 20 Oriente y 16 Norte.
11. (1,1) 4 Oriente y Bulevar.	25. (5,5) 12 Norte y 16 Norte.
12. (4,0) 2 Oriente y 14 Norte.	26. (5,2) 6 Oriente y 16 Norte.
13. (1,0) 2 Oriente y Bulevar.	27. (5,0) 2 Oriente y 16 Norte.
14. (0,1) 4 Oriente y 6 Norte.	28. (0,0) 2 Oriente y 6 Norte.

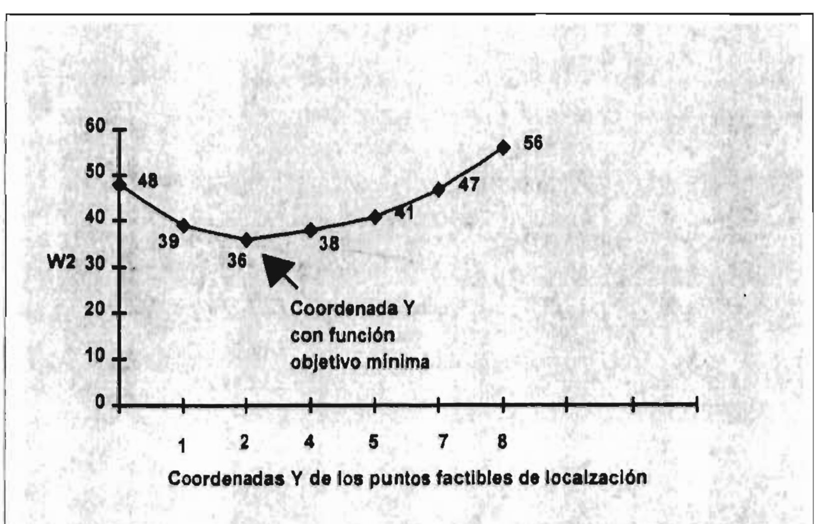
Identificados los puntos factibles de localización y aplicando las propiedades que hacen posible la simplificación del problema, a continuación se presenta la tabla donde se resumen las coordenadas evaluadas junto con el valor de la función correspondiente. Las gráficas donde se señalan los puntos óptimos de localización se presentan adelante.

Tabla 9. Resultados de la evaluación de los puntos factibles de localización

x	o	1	2	3	4	5	
W_1	34	29	24	23	22	31	
y	0	1	2	4	5	7	8
W_2	48	39	36	38	41	47	56

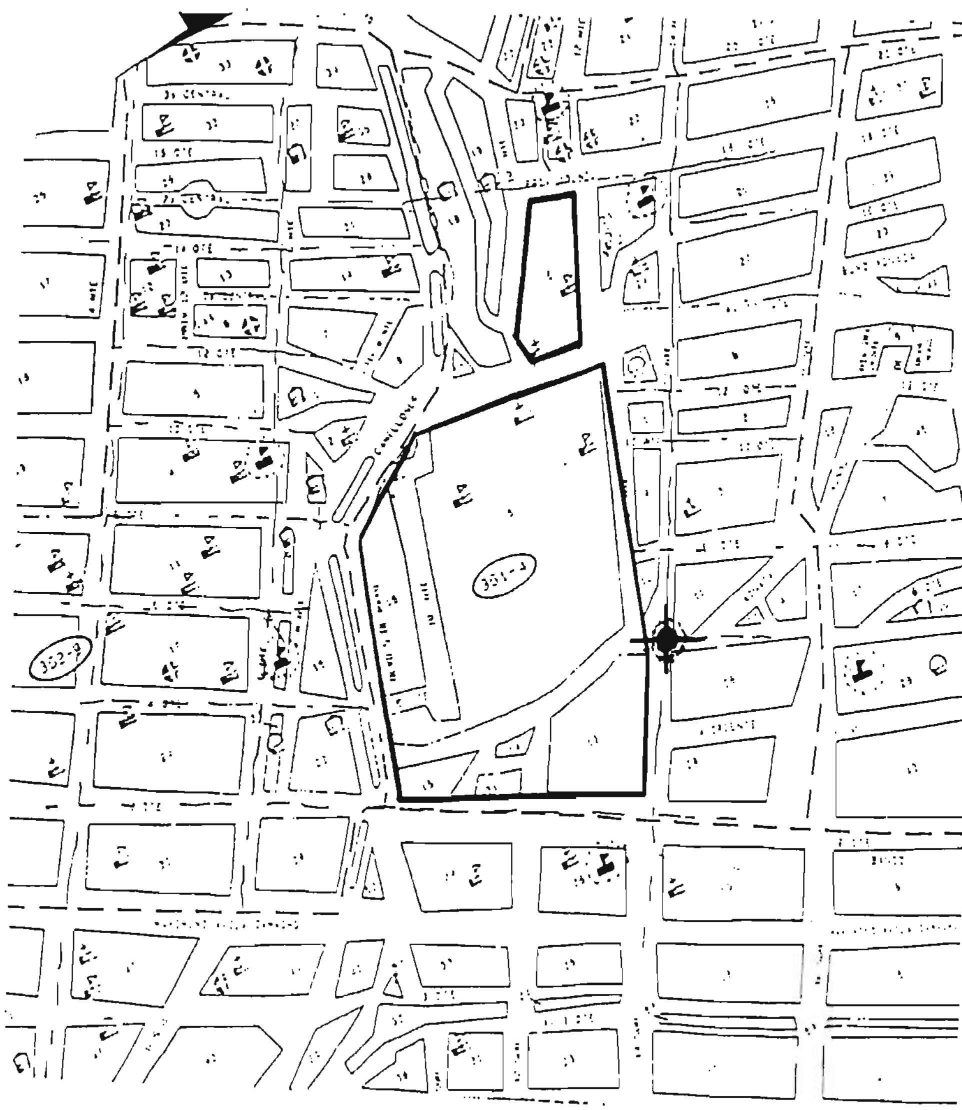


Gráfica 3. Coordenada en X de los puntos factibles de localización con función objetivo mínima.



Gráfica 3. Coordenada en Y de los puntos factibles de localización con función objetivo mínima.

Los resultados muestran que las coordenadas óptimas para localizar el centro de distribución debe ser el punto factible de localización (4,2), es decir la esquina de la 6 Oriente y 14 Norte donde la función objetivo es mínima con un valor de 58. En el siguiente mapa se ubica la localización exacta.



Mapa 4 Sitio óptimo de localización.

V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES.

- La metodología que se presenta en este trabajo, plantea una manera de resolver el problema de localización con barreras, lo que hace posible que personas involucradas en problemas prácticos que puedan ser modelados de esta forma , los resuelvan, aún sin tener amplios conocimientos de optimización.

- La misma simplicidad con la que se llega al planteamiento de solución del problema, permite no utilizar un software especializado, práctica común en el medio.

- El método gráfico basado en verificar la convexidad de la función, es una forma sencilla de resolver el problema, lo que permite encontrar de manera rápida la coordenada que minimiza el valor de la función objetivo.

- Aplicar las propiedades de convexidad y separabilidad en la función objetivo, permiten no evaluar una gran cantidad de puntos factibles de localización, sino sólo un subconjunto reducido de estos y evaluar separadamente las coordenadas de x y de y .

- Identificando los puntos de intersección de las líneas nodales transversales se reduce el espacio solución del problema de localización con barreras. Es decir, de un espacio continuo donde es necesario evaluar la totalidad de puntos se pasa a evaluar sólo un número reducido de coordenadas.

- ♣ La combinación de formular el problema de localización con barreras primero como discreto, identificando los puntos factibles de localización, y segundo aplicando métodos de optimización generalmente usados para el caso continuo, establece que una formulación *híbrida* es tan buena al plantear la solución del problema como cualquiera de las dos individualmente.

- ♣ Una vez localizados los puntos factibles de localización al plantear el problema como uno de programación lineal, las restricciones del problema original se reducen al considerar una constante definida por la coordenada ya identificada, en la intersección de las líneas nodales transversales.

- ♣ El hecho de identificar los puntos factibles de localización aplicando el algoritmo de Larson y Sadiq hace que el espacio de soluciones se reduzca considerablemente.

- ♣ La construcción de *celdas* donde los valores mínimos de la función objetivo están asignados a las coordenadas de sus esquinas, pueden ser usadas como forma de establecer áreas donde el valor de la función objetivo varía dentro de un intervalo, el cual es determinado por los puntos extremos o esquinas de la celda.

- ♣ El establecimiento de áreas (celdas) con un intervalo de costo es una opción para resolver el problema, que se presenta cuando el punto óptimo no está disponible como sitio de localización y es necesario cambiar su ubicación, sin cambiar en demasía el costo. Situación que tradicionalmente se resuelve trazando líneas de contorno o isocosto cuyo procedimiento de trazo es por demás complicado.

- ♣ Las celdas son un medio útil para evaluar alternativas de localización, aspecto importante en la práctica, dado que generalmente no todos los factores de decisión han sido incluidos en la función objetivo

- De la conclusión anterior se desprende una posible extensión del problema, al considerar su aplicación en la ubicación de múltiples servicios, una vez conocidos los intervalos de costo en las celdas.
- La búsqueda de un óptimo en el problema de minimización puede ser confinada al entorno convexo de los puntos de demanda. Puede haber otros puntos que minimicen el valor de la función objetivo, pero ninguno lo hará mejor que los encontrados en el entorno convexo.

- El trazo de las líneas nodales transversales reduce significativamente las rutas probables de tránsito, una vez establecida la localización óptima del servicio, las cuales se pueden seguir para comunicar al servicio con los puntos de demanda.

5.2 RECOMENDACIONES.

Como extensiones a este trabajo es posible plantear soluciones a los siguientes problemas relacionados:

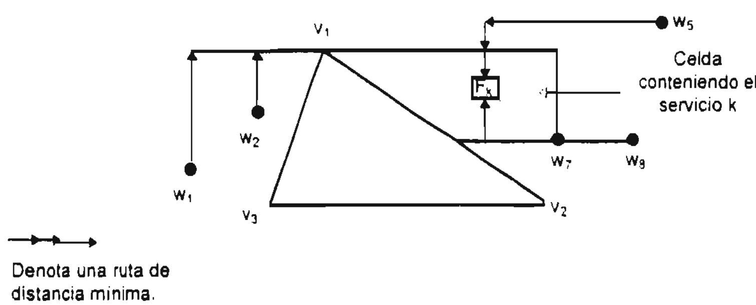
- El trazado de rutas óptimas desde el nuevo servicio a cada uno de los puntos de demanda.
- Relacionar el problema de localización con barreras, con modelos conocidos como: el de asignación, del agente viajero, de transporte, etc.
- El desarrollo de metodologías, igualmente sencillas, que solucionen problemas de localización con restricciones de otro tipo, por ejemplo: demanda, competitividad, cobertura, tiempo de respuesta, etc.
- La extensión del procedimiento de solución, ahora asumiendo que la norma es Euclidiana.
- Incluir dentro del problema de localización con barreras una nueva restricción o variable: localización multiservicios, restricciones de demanda, de área de competencia, etc.
- Considerar en la solución del problema de localización en su último nivel, es decir la selección del sitio específico, otros factores como: los de construcción, de impacto ambiental, de requerimientos particulares, etc.

APÉNDICE A

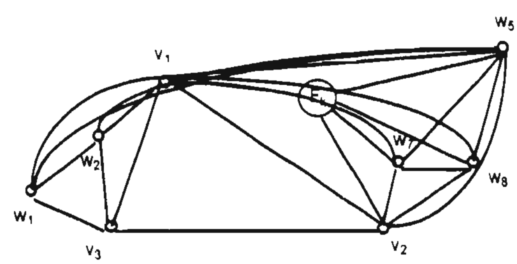
Extracto de: R.C. Larson and G.Sadiq *"Facility Location with the Manhattan Metric in the Presence of Barriers to Travel"*, Operations Research 31, 652-669(1983).

Demostración: *de la optimalidad de los puntos de intersección de las Líneas Nodales Transversales (LNT) como puntos factibles de localización, es decir que los mejores valores de la función objetivo se encuentran en las intersecciones de las líneas.*

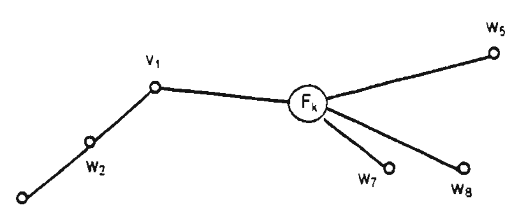
En inicio se debe trabajar en la formulación de una red, desarrollando una red multirutas (POLYPAHT) y colapsándola[1] , (véase la figura 19), manteniendo fijos los puntos de demanda, los servicios y la secuencia de nodos en la ruta nodal para demostrar que el servicio puede ser movido a la esquina de la celda sin incrementar el valor de la función objetivo.



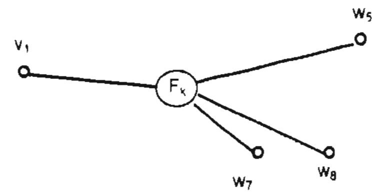
a) Definición en R^2 del servicio k y sus puntos de demanda asignados $\left[D(k) = \{1,2,5,7,8\}\right]$



b) Red correspondiente $G(N', A')$ (todos los enlaces ponderados son distancias rectilíneas entre nodos conectados).



c) Un árbol formado por rutas de distancia mínima $T(N'', A'')$, a partir. del servicio.



d) Árbol colapsado $\left[N_1 = \{v_1, 5, 7, 8\}\right]$.

Fig. 19 Representación del proceso de colapsación, que tiene como base la suposición de una localización particular del servicio en $[x(k), y(k)]$.

Si establecemos que $d_i(i,[x,y])$ es la ruta factible de distancia mínima l_1 entre los nodos fijos i y el punto (x,y); ahora requerimos analizar la trayectoria $G(N', A')$ desde o para un servicio k con coordenadas $[x(k), y(k)]$, donde: N' son los vértices de la barrera, puntos de demanda y puntos factibles de localización y A' es el conjunto de arcos entre los nodos *comunicados simplemente*

Ahora podemos establecer tres Lemas como resultado del proceso de colapsación, donde: el lema 1 demuestra que la topología del primer árbol de rutas (conjunto de rutas de distancia mínima en una red desde $[x(k), y(k)]$ a los puntos de demanda $j \in D_{(k)}$). Los lemas 2 y 3 demuestran que para cada punto colección (de demanda) puede construirse una ruta escalera a través de la esquina de la celda, lo que hace posible la colapsación del problema.

- **Lema 1**. *Un punto colección para un servicio se comunica con todos los puntos de la celda que contiene al servicio.*

Prueba: Si esto no fuera cierto, habría un punto $[x(k_1), y(k_1)]$ dentro de la celda conectado al punto colección por medio de una ruta escalera P_1 y otro punto $[x(k_2), y(k_2)]$ que no tendría una ruta escalera de conexión.

La existencia de una ruta escalera de distancia mínima para $[x(k_2), y(k_2)]$ solo será posible mediante el uso de una trayectoria en **U** asociado a un vértice barrera (Fig. 20), que de acuerdo a resultados es poco eficiente y no es posible.

Para el mejoramiento de resultados, debemos tomar en cuenta a Larson-Li[1] en sus postulado: Ninguna ruta escalera debe definir una trayectoria de retorno, es decir, un paso de una directamente conectada a dos segmentos de trayectoria horizontales o verticales cuyo sentido de viaje sea opuesto.

Para solucionar el problema debemos ubicar al punto $[x(k_2), y(k_2)]$ en otra celda, lo que provoca una contradicción del postulado.

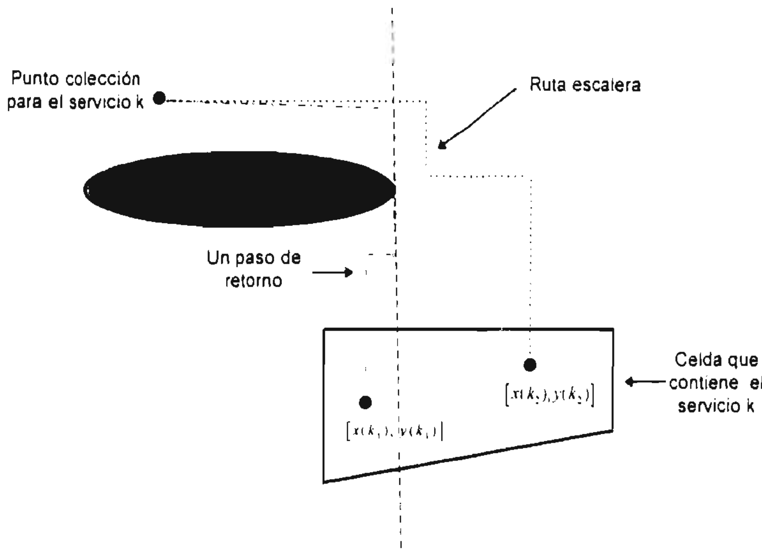


Fig. 20 Contradicción al Lema 1 que implica la existencia de un vértice barrera cuya línea nodal transversal puede dividir a la celda.

- **Lema 2**: *No existe un punto colección en* $[x_q, y_q]$ *para el servicio* k *para el cual* $x_{min} < x_q < x_{max}$ *y/o* $y_{min} < y_q < y_{max}$, *donde* $x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}$ *son límites respectivos sobre* X *y* Y *en la celda que contiene el servicio* k.

Prueba: Si suponemos que $x_{min} < x_q < x_{max}$ (figura 21), entonces a partir de que $[x_q, y_q]$ se comunica con los puntos de la celda, debe poder trazarse una ruta vertical factible desde $[x_q, y_q]$ que subdivide a la celda en dos. Lo que contradice la forma de construcción de las celdas, una prueba similar se aplica para $y_{min} < y_q < y_{max}$.

Una forma de demostrar que un punto colección se comunica con la celda (todos los puntos dentro de ella) es hacer a esta un punto colección, así podemos satisfacer que entre dos puntos se puede formar una ruta rectangular.

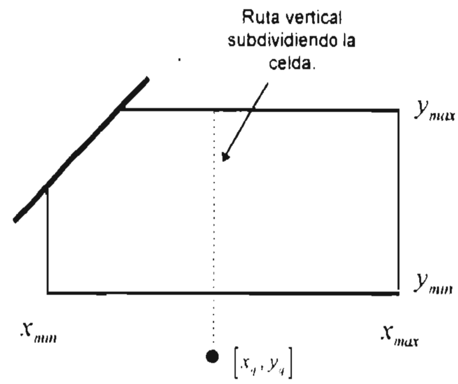


Fig. 21 Ilustración del Lema 2 y 3.

- **Lema 3**: *Hay una ruta escalera desde cada punto colección a cualquier servicio k en una celda que incluye la esquina de esa celda.*

Prueba: A partir del Lema 2, sabemos que un punto colección en $[x_q, y_q]$ cumple con $x_q \notin (x_{min}, x_{max})$ y $y_q \notin (y_{min}, y_{max})$.

Si cada punto colección se comunica con un servicio, debe haber una ruta escalera entre ellos. Suponga que una ruta escalera particular desde $[x_q, y_q]$ a un servicio no toca la esquina de una celda, entonces por el proceso de amalgamación y el de la ruta modificada (paht push) la ruta puede ser alterada sin afectar la construcción de las celdas y tocando la esquina de la celda, de no ser así debe existir un vértice barrera (x_i, y_i) con $x_i \in (x_{min}, x_{max})$ o $y_i \in (y_{min}, y_{max})$ cuya línea nodal transversal tiene que dividir a la celda en dos, lo que marca una contradicción al postulado.

De lo anterior se puede establecer que la esquina de la celda, aplicando el lema 3, es la esquina más cercana al punto colección $[x_q, y_q]$ y que solo una celda es la más cercana.

Una observación más, suponiendo que $[x_0(k), y_0(k)]$ es la posición de un servicio k en cierto conjunto solución factible x^*. La solución obviamente consiste en asignaciones óptimas (de puntos de demanda a servicios) y rutas nodales óptimas. Ahora suponiendo que en el problema colapsado, al mover el servicio k a cualquier punto $[x(k_1), y(k_1)]$ en la misma celda, hay un incremento de C unidades $[c \geq 0]$ en la función objetivo.

Igualmente un incremento de C unidades se alcanza en el problema original sin colapsar. Esto es cierto, porque en el problema colapsado estamos manejando como fijos la ubicación de los servicios y la secuencia de nodos en las rutas desde los puntos de demanda a los servicios, de lo que ambos pueden cambiar cuando el servicio es movido a $[x(k_1), y(k_1)]$ incrementando o reduciendo la función objetivo.

Todas las obsevaciones hechas anetriormente se emplean en la demostración planteada en el apéndice B.

REFERENCIAS:

1. Richard C. Larson and Victor O. K. Li, *Finding Minimum Rectilinear Distance Paths in the Presence of Barriers*, Networs, Vol. 11, 1981, pág. 285-304.

APÉNDICE B

Demostración: *Para cualquier punto $[x(k),y(k)]$ en el interior de una celda, existe una solución en la esquina de la celda que es la mejor.*

Prueba: Si la función objetivo está dada por:

$$Z(X)=\sum_j w_j d(j,X)=\sum_{k=1}^{p}\ \sum_{j\in D(K)} w_j d(j,[x(k),y(k)])$$

$$\sum_{k=1}^{p} Z_k([x(k),y(k)]$$

donde:

$Z_k([x(k),y(k)])=\sum_{j\in D(k)} w_j d(j,[x(k),y(k)])$ denota la función objetivo local para el servicio k.

De acuerdo al Lema 3 descrito en el apéndice A, para cada $j\in D(k)$, $d(j,[x(k),y(k)]$ es la distancia de la ruta escalera más corta que pasa por una esquina de la celda que contiene al servicio k.

Si establecemos que los puntos limitantes de una celda (véase la figura 21) $(x_{min},y_{min}),(x_{max},y_{min}),(x_{min},y_{max}),(x_{max},y_{max})$ son esquinas de la misma (1,2,3 y 4 respectivamente) y que W es la suma de los pesos de los puntos colección que tienen una ruta escalera comunicada con el servicio k a través del punto l, $l = 1,2,3$ y 4 respectivamente. Debemos notar que wl puede ser cero pero al menos uno es positivo. Más aún, si el punto l no es una esquina de la celda, entonces $w_l=0$.

Dado que $Z_k([x(k),y(k)] = constante + (x(k)+X_{min})(W_1+W_4-W_2-W_3)$
$+(y(k)-Y_{min})(W_1+W_2-W_3-W_4),$

es una función lineal de $[x(k),y(k)]$. Si $W_1+W_4=W_2+W_3$ y $W_1+W_2=W_3+W_4$ entonces, $Z_k([x(k),y(k)]=constante$ y el servicio k puede ser movido a cualquier esquina de la celda sin cometer faltas en la formación de las celdas.

Ahora, si se considera el caso donde $W_1+W_4\neq W_2+W_3$ o $W_1+W_2\neq W_3+W_4$ o ambos, se puede establecer un problema relajado:

$$Min(x(k)-X_{min})\{W_1+W_4-W_2-W_3\}+(y(k)-Y_{min})\{W_1+W_2-W_3-W_4\}$$

sujeto a $x(k)\in[X_{min},X_{max}],y(k)\in[Y_{min},Y_{max}]$.

Dada la linealidad de la función objetivo, una solución óptima para este problema relajado ocurre en (X_i^*, Y_j^*) donde $X_i^* = X_{min}$ *si* $W_1 + W_4 \rangle W_2 + W_3$ *y* $X_i^* = X_{max}$ en cualquier otro caso, y también $Y_j^* = Y_{min}$ si $W_1 + W_2 > W_3 + W_4$ y $Y_j^* = Y_{max}$ en cualquier otro caso. De hecho la solución óptima del problema debe ser uno de los puntos 1,2,3, ó 4. Ahora, se demostrará que la solución óptima está en la esquina de la celda y que (X_i^*, Y_j^*) pertenece a la celda.

Sin pérdida de generalidad suponga que $(X_i^*. Y_j^*)$ es el punto 1, a partir de esto, $W_1 + W_4 \geq W_2 + W_3$ y $W_1 + W_2 \geq W_3 + W_4$ cumplimiendo al menos con una desigualdad estricta.

Si suponemos ahora que, $W_1 + W_4 > W_2 + W_3$. Si $X_i^*, Y_j^* (= X_{min}, Y_{min})$ no es la esquina de una celda entonces $W_1 = 0$ pero entonces $W_4 > W_2 + W_3$ y $W_2 \geq W_3 + W_4$ lo implica que $W_4 - W_3 > W_2 \geq W_3 + W_4$ que marca una contradicción.

De hecho, si el punto 1 es una solución para el problema relajado, 1 es la esquina de la celda (dentro de la celda). Argumentos similares se aplican a los puntos 2,3 y 4 teniendo las mismas conclusiones.

REFERENCIA:

(1) Larson, R.C. y V.O.K. Li, 1981, *Finding Minimum Rectilinear Distance Pahts in the Presence of Barriers*, Networks 11, 285-304.

APÉNDICE C

Demostración: Los vértices barrera que no son puntos de demanda o intersecciones de líneas nodales transversales pueden ser eliminadas del conjunto de puntos candidatos para la localización de los servicios.

Prueba: Puede haber puntos de tangencia a lo largo del interior de la pared de una celda creando vértices barrera no situados sus las esquinas, estos pueden ser eliminados como puntos factibles de localización de acuerdo al teorema mencionado anteriormente.

Todos los vértices se dan gracias a una o dos líneas transversales. Sin embargo, los que se forman con dos líneas nodales no pueden ser eliminados.

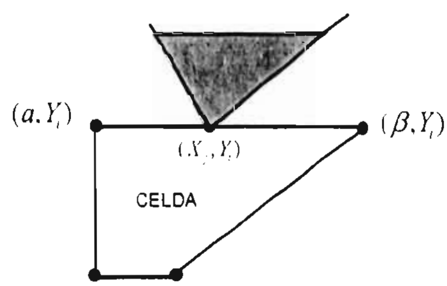


Fig. 22 Ilustración del Lema 4.

Al considerando un vértice barrera (X_i, Y_i) formado exactamente por una línea nodal transversal, como en la figura, en este caso (X_i, Y_i) está contenido en las paredes de las tres celdas contiguas, pero en solo dos puntos esquina. De esto se puede decir que representa un punto interior de la pared de la tercera celda, y tomando en cuenta el teorema que permite trasladar a los puntos a las esquinas de las celdas (X_i, Y_i) puede ser movido al final de la pared de la celda sin cometer ninguna falta en la construcción de las celdas. Si (X_i, Y_i) cae sobre el límite del rectángulo limitante del entorno convexo se aplica la misma lógica considerando a la tercera celda una "celda degenerada" abarcando solo el segmento apropiado del límite del rectángulo.

REFERENCIA:

(1) Larson, R.C. y V.O.K. Li, 1981, *Finding Minimum Rectilinear Distance Pahts in the Presence of Barriers*, Networks 11, 285-304.

APÉNDICE D

Definición de convexidad: una función se dice es convexa si un segmento de línea entre dos puntos cualesquiera, nunca cae por debajo de la gráfica de la función. Formalmente esto significa que al considerar las funciones $f: R^n \longrightarrow R \cup \{+\infty, -\infty\}$, *una función es convexa si*

(i) $\{X / f(X) = -\infty\} = 0,$

(ii) $\{X / f(X) < +\infty\} \neq 0,$

(iii) $f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda)f(Y)$ para $0 \leq \lambda \leq 1.$

Prueba: En particular la función $f(y_1, y_2)$ es convexa, si dados dos puntos cualesquiera (y_1, y_2) y (y'_1, y'_2)

$$f\left[\lambda(y_1, y_2) + (1-\lambda)(y_1', y_2')\right] \leq \lambda f(y_1, y_2) + (1-\lambda)f(y_1', y_2') \text{ donde } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Entonces, el requerimiento de convexidad es:

$$\left[(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_1')^2 + (\lambda y_2 + (1-\lambda)y_2')^2\right]^{1/2} \leq \lambda((y_1)^2 + (y_2)^2)^{1/2} + (1-\lambda)((y_1')^2 + (y_1')^2)^{1/2}$$

Para mostrar que esto es verdad, se recurre a lo que es conocido como la *desigualdad de triángulo para vectores*. Esto es, para dos vectores con valor real $p = (p_1, p_2)$ y $q = (q_1, q_2)$,

$$((p_1 + q_1)^2 + (p_2 + q_2)^2)^{1/2} \leq (p_1^2 + p_2^2)^{1/2} + (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}$$

que una vez agrupados: $p_1 = \lambda y_1$, $p_2 = \lambda y_2$, $q_1 = (1-\lambda)y_1$ y $q_2 = (1-\lambda)y_2'$ cumplen equivalentemente con nuestros requerimientos.

Una función $f(X)$ se dice es *estrictamente convexa* si la desigualdad es estricta para toda X y cualquier $\lambda \in [0,1]$. Esta convexidad estricta significa que el segmento de línea caé exactamente por encima de la gráfica excepto en los dos puntos terminales del segmento.

- *Propiedad de separabilidad: una función separable* f definida por χ en R^n, *es aquella que puede ser escrita como la suma de* n funciones f_i *de la variable* x_i, donde x_i es el i - *ésimo componente del vector* χ, *es decir*

$$f(\chi) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots\ldots + f_n(x_n)$$

La afirmación anterior se basa en la *suposición de aditividad* que se hace para evaluar de manera más fácil los problemas formulados como de programación lineal. La suposición de aditividad, establece que para cada función $f(\chi)$, el valor total de la función puede obtenerse sumando las contribuciones individuales de sus respectivas actividades, o subfunciones de una sola variable.

Además, la aditividad asume que no hay interacciones entre cualquiera de las actividades (sub-funciones) singulares $\{\ f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots\ldots + f_n(x_n)\ \}$ que de cierta manera pudieran cambiar el valor de la función objetivo total.

Conclusión: conjuntas las propiedades de convexidad y separabilidad de una función, se puede establecer que la suma de las funciones convexas es convexa y por lo tanto $f(\chi)$ es convexa. Lo anterior significa que un óptimo local es un óptimo global y que $f(\chi)$ no tiene puntos de inflexión.

REFERENCIAS:

(1) Josef Stoer,Chirstoph Witzgall, "*Convexity and optimization in infinite dimensions I*" Ed. Springer-Verlag New York Heidelberg. Berlín, 134-139(1970). "Teorema de separación para conjuntos convexos" pp. 98-100.
(2) Robert F. Love, James G. Morris and George O. Wesolowsky,"*Facilities Location (models and methods)*", Ed. North Holland, pp. 31-32.
(3) Mokhtar S. Bazaraa and John J. Jarvis "*Linear programming and Network flows*", Ed. John Wiley and sons, 1977, pp. 58-65.
(4) Mokhtar S. Bazaraa and Shetty, C.M., "*Nonlinear Programming, Theory and algoriiths*", Wiley, New York, 1979, pp. 329-333.
(5) Joseph G. Ecker and Michael Kupferschmid, "*Introduction to Operations Reseach*" Wiley, New York, 1988.
(6) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, "*Introduction to Mathematical Programming*" McGraw-Hill, 1990, pp. 548-555.

REFERENCIAS

1. Alfred A. Kuehn and Michael J. Hamburger, *A Heuristic Program for Locating Warehouses*, Manegement Science, 9 (1963) pág.643-666.
2. *Ahern J.D. (District Saff Mnager, Outside Plant New England Telephone Company, Boston) Telephone conversation with one of authors, July 1981.
3. Aneja, Y. P. and Parlar, M., *Algorithms for Weber facility Location in the precense of forbidden regions and/or barriers travel,* Transportation Science 28/1, pág. 70-76, 1994.
4. Arthur J. Swersey, Lakshman S. Thakur, *An Integer Programming Model for Locating Vehicle Emissions Testing Stations,* Management Science Vol. 41, No. 3 March 1995, pág. 496-512.
5. Arthur M. Geoffrion, *Better Distribution Planning with Computer Models*, Harbard Business Review, July-August (1976).
6. Barbaros C. Tansel, Richard L. Francis and Timothy J. Lowe, *Location on Networks: A Survey. Part I: The p-Center and p-Median Problems*, Management Science Vol. 23, No. 4 April 1984.
7. *Brady S.D. and Rosenthal, *Interactive computer graphical solutions to constrained miniman location problems,* AIIE Transact , pág. 241-248, 1980.
8. *Christensen, T. and Jacobsen S.K., *A location problem,* The Institute of mathematical statistic and operatinal research, The Technical University of Demark, may 1970.
9. *Chalmet, L.G., R.L. Francis and A. Kolen, *Finding efficient solutions for rectlinear distance location problems afficiently*, European Journal of Operational Research, 6 pág. 117-124, 1981.
10. Donald Erlenkotter, *A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location,* Opertions Research Vol. 6, No. 6. Nov.-Dic. 1978.

* Estos autores no fueron consultados pero se citan en el texto, dado que algunos otros autores se refieren a ellos como precursores del problema abordado.

11.*Eckhardt, U., *An optimization problem related to minimal surfaces wiht obstacles in optimization and a optimal control lecture notes in mathematics*, vol. 477 Springer-verlag, Berlin, 1975.

12.Edger W. Dijkstra and W. H. J. Frijen, *A Method of Programming: the shorest Path*, Addison - Wesley Publishing Company.

13.Francis R. L. and John A. White, *Facility Layout and Location: an Analitical Aproach*, ed. Prentice Hall, 1992.

14.Hadi Baaj M., Suleiman Ashur and Atman Anwar, *Transportation Analisys for Landfill site selection,* Transportation 23 (1996), pág. 191-209.

15.*Hunter, A.P., M.K. Schaefer and R.E. Wendell, *Solutionsof constrained location problems,* Management Science 22, pág. 51-56, 1975.

16.Infante-Macias R., J. Muñoz-Perez, *Competitive location with Rectilinear Distances,* Europan Journal of Operational Research 80 (1995, pág. 77-85.

17.Jakob Krarup, Peter Mark Pruzan, *The impact of distance on the location problems*, Europan Journal of Operations Research 4 (1980), pág. 256-269.

18.James F. Robeson and William C. Coppacino, *The Logistic Handbook,* Andersen Consulting Group, ed. Free Press, 1994.

19. José Luis Gil Vázquez, *La localización de planta como sistema,* Tesis de Maestría, DEPFI, UNAM, 1995.

20. Josef Store, Chirstoph Witzgall, *Convexity and optimization in finite dimensions I,* Springer-Verger New York-Heidelberg-Berlin, 1970.

21. Joseph G. Ecker, Michael Kupferschmid, *Introduction to Operations Research,* John Wiley and sons, 1988.

22.*Katz N.I. and Cooper, *Facility location in the presence of forbidden regions, I: formulation and the case of euclidianan distance with one forbidden circle,* European J. Openl. Res. 6, pág. 166-173, 1981.

23.Krzysztof Goczyla, Janusz Cielatkowski, *Optimal Routing in a Transportation Network*, Europan Journal of Operational Research 87 (1995) pág. 214-222.

* Estos autores no fueron consultados pero se citan en el texto, dado que algunos otros autores se refieren a ellos como precursores del problema abordado.

24.*LaPaaugh, A.S., *Algorithms for integrated circuit layout: Analytic Approach*, Ph. D. dissertation, MIT, 1980

25. Lee J. Krajewski and Larry P. Ritzman, *Operations Management: Strategy and Analysis*, Ed. Addison-Wesley Publishing Company 3a. edición, 1993.

26.Leon Cooper, *Location-Allocation Problemes*, Operations Research 11, 1963, pág. 331-343.

27.*Lozano-Perez, T. and M. Wesley, *An algorithm for planning collisión Free phats amongst polyedral obstacles*, IBM Thomas J. Watson Research Center, R.C. 7171, june 1978.

28.Margaret L. Brandeau, Samuel S. Chiu, *An Overview of Representative Problems in Location Research*, Management Science Vol. 35, No. 6, June 1989, pág. 645-674.

29.Maurice Fulton, *New Factors in Plant Location*, Harbard Business Review , may-June 1971, pág. 4-17.

30. Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, *Linear programming and Network Flows*, John Wiley and sons, 1977.

31.Morris Cohen, Pasumarti Kleindorfer, Hau Lee and Armen Takerian, *Optimizer: IBM´s Multi-Echelon Inventory System for Managing Service Logistic*, Interfaces 20: 1 January-February 1990, pág. 65-82.

32.Norman Katz , Leon Cooper, *Facility Location in the presence of forbidden regions, I: Formulation and the case of Euclidian distance with one forbidden circle*, Europan Journal of Operational Research 6 (1981), pág. 166-173.

33.Periódico Oficial del Estado de Puebla, *Decreto por el que se declara una zona de Monumentos Históricos en la Ciudad de Puebla de Zaragoza, Estado de Puebla*, 18 de Noviembre de 1977.

34.Pitu B. Michardani and Richard L. Francis, *Discrete Location Theory*, A Wiley-Intercience Publication John Wiley and Sons, Inc., 1990.

35.Programa de Desarrollo Regional Angelópolis, Gobierno del Estado de Pueba, Puebla, Septiembre, 1993.

* Estos autores no fueron consultados pero se citan en el texto, dado que algunos otros autores se refieren a ellos como precursores del problema abordado.

36.Rajan Batta, Anjan Ghose and Udatta S. Palekar, *Locating Facilities on the Manhattan metric with Albitrary Shaped Barriers and Convex Forbiden Regions*, Transportation Science, Vol. 23, No. 1, 1989, pág. 26-36.

37.Ricardo Aceves García, *Localización de servicios, modelos y aplicaciones,* Tesis de Maestría, DEPFI, UNAM, 1986.

38.Richard C. Larson and Ghazala Sadiq, *Facility Locations with the Manhattan Metric in the presence of Barriers to travel*, Operations Research, Vol. 31, No. 4, 1983, pág. 652-669.

39.Richard C. Larson and Victor O. K. Li, *Finding Minimum Rectilinear Distance Paths in the Presence of Barriers*, Networs, Vol. 11, 1981, pág. 285-304.

40.Richard E. Wendell and Arthur P. Hunter Jr., *Location Theory, Dominance and Convexy*, Operations Research, Vol. 21, 1973, pág. 314-320.

41.Richard H. M. Emmerink, Kay W. Axhausen, Peter Nijkamp and Piet Rietveld, *Effects of Information in Road Transport Networs with Recurrent Congestion*, Transportation 22 (1995), pág. 21-53.

42.Robert F. Love, James G. Morris and George O. Wesolovsky, *Facilities Location: models and methods*, North-Holland, 1988.

43.*Schaefer M.K. and Hunter, A.P., *An Algorithm for the solution of a location problem wiht metric constrained,* Naval Res. Logis. Quart., 21 pág. 625-636 1974.

44.Sheryl E. Kimes, James A. Fitzsimmons, *Selecting Profitable Sites at La Quinta Motors Inns*, Interfaces 20, March-April 1990, pág. 12-20.

45.Steven Nahmias, *Production and Operation Analysis*, The Irwin Series in Quantitative Analysis for Business, Consulting Editor, 1989.

46.Steven E. Butt and Tom M. Cavalier, *An efficient Algorithm for location in the presence of forbidden regions*, European Journal of Operations Research, Vol. 90, 1996, pág. 56-70.

47.Subir Kumar Ghosh, David M. Mount, *An Output-Sensitive Algorithm For Computing Visibility Graphs*, SIAM Journal Comput., Vol. 20, No. 5, October 1991, pág. 888-910.

* Estos autores no fueron consultados pero se citan en el texto, dado que algunos otros autores se refieren a ellos como precursores del problema abordado.

48. Thomas R. Leinbach, *Transport and Third Word Develoment: Reviev, Isuess and Prescription,* Transportation Research Vol. 29A, No. 5, pág. 337-344, 1995.

49. *Wangdahl G.E., Pollock, S.M. and J.B. Woodward, *Minimum trayectory pipe routing*, J. Ship Res. 18 46-49 1974.

50. Wesolowski G. O., R.F. Love, *The Optimal Location of New Facilities Using Rectangular Distances*, Operations Research Vol. 19 (1971), pág. 124-130.

* Estos autores no fueron consultados pero se citan en el texto, dado que algunos otros autores se refieren a ellos como precursores del problema abordado.